TEORIA DELL' ANALISI

PARTE III.

DEI FONTI DELL' ANALISI

CAPITOLO IX.

Teoria delle Funzioni Trigonometriche.

464. LA Trigonometria nacque dall' interesse degli Egiziani, come dall'ozio pastorale de' Caldei nacque l'Astronomia. La periodica inondazione del Nilo, mentre si stendeva ogn'anno per 40. giorni sulle soggette pianure, ed infondeva coll' onda benefica sempre nuovi principj di fecondità in quelle felici campagne, confondeva sovente i limiti dei respettivi campi, e veniva in tal guisa ad essere incomoda all'avarizia dei cultori, mentre ne pasceva l'avidità. Si cominciò pertan-

tanto a sentire il bisogno di un'arte, che sapesse con sicuri metodi additar la misura delle superficie: ma siccome non erano allora gli Egiziani eruditi abbastanza nelle dottrine Geometriche, rivolsero i loro tentativi a ritrovar la misura del solo triangolo, come della figura la più semplice. Ottenuta questa, ridussero grossolanamente i campi ad una forma triangolare, e chiamarono Trigonometria questa loro nascente Agrimensura.

465. Della suddetta Trigonometria non serba la presente, che il nome; poichè non è essa l' arte di misurare i triangoli, mà bensì è: *L' Arte di risolvere i triangoli*, vale a dire (essendovi nel triangolo sei elementi, tre lati, e tre angoli) *E' l'Arte, che insegna a determinare uno qualunque di tali elementi, dati, che ne sieno tre; fra i quali si comprenda un lato.*

466. La Trigonometria è una parte delle Matematiche la più mirabile, perchè con pochi, semplicissimi Teoremi, discuopre un numero grande di pregievolissime verità. Da essa si hanno delle utilissime formole delle serie vantaggiosissime, e dei Metodi di somma eleganza per la soluzione dell'equazioni. Per essa misurasi l' altezza delle montagne, la circonferenza della Terra, la distanza dei pianeti, i di loro moti, l'eclissi &c.

467. Tornando alla definizione della Trigonometria, si vede, che per trovare un quarto elemento, per mezzo di tre elementi dati, altro non si può fare, che istituire una proporzione fra gli elementi dati, e elemento richiesto. Siccome però i lati di un triangolo non hanno proporzion' espressa cogli angoli, dei quali la misura sono archi di circolo (Vedasi una Memoria di Leon. Euler

ler, nella quale si tratta del modo di determinare il rapporto, che passa fra i lati di un triangolo, dato che sia il rapporto degli angoli omologi. (*Tom.XI. dei nuovi Comm. di Pietrob.*); agli angoli, è agli archi convien sostituire delle linee rette, le quali rappresentino detti archi, o angoli, e che sieno proporzionali nel tempo stesso ai lati del triangolo. Passiamo a veder l'indole, le proprietà, e gli usi di queste linee.

468. Sia il quadrante AQF (*Fig.*2ª), e sia il raggio DQ ad un angolo qualunque con l'altro raggio DA; La retta QR perpendicolare sopra DA dicesi il seno dell'angolo QDA, o dell'arco QA; QS perpendicolare sopra DF ne è il coseno; RA ne è il seno verso, SF il coseno verso, TA la tangente, FK la cotangente, DT la segante, e DK la cosegante.

Poste queste definizioni, mediante l'ispezione della figura, e col soccorso dei principj della geometria, si possono concepire le seguenti proposizioni.

I. Che posto l'arco $AQ = a$, e il raggio $= 1$, si ha $sen.^2 a + cos.^2 a = 1$, perchè $SQ = DR$; e detto b l'arco FQ, $sen.^2 b + cos.^2 b = 1$.

Dato pertanto il seno di un'arco si ha il suo coseno, e viceversa.

II. Che il seno di un'arco qualunque è sempre la metà della corda di un'arco doppio. Difatto

$$QR = \frac{QO}{2}.$$

Dunque il seno di un'arco di 30.° è uguale alla metà della corda di un'arco di 60.°, cioè uguale alla metà del raggio $= \frac{1}{2}$.

III. Che il seno di un'arco $< 90.°$ come QA, e così pure la tangente, sono eguali respettivamente al coseno, ed alla cotangente del suo complemento, e viceversa; quindi

$$sen.(45.° + a) = cos.(45.° - a)$$
$$sen.(45.° - a) = cos.(45.° + a)$$
$$tang.(45.° + a) = cotang.(45.° - a)$$
$$tang.(45.° - a) = cotang.(45.° + a)$$

IV. Che il seno di un'angolo qualunque eguaglia il seno del suo supplemento, cioè $sen.\ QDA = sen.\ QDN$.

In generale due archi, i quali presi insieme formano un semicircolo, hanno tutte le funzioni eguali. Questa proposizione si vede chiaramente per rapporto al seno, ed al coseno; riguardo all'altre funzioni si vedrà in seguito.

V. Che il coseno di un'angolo ottuso è negativo, come pure la sua cotangente, cosegante &c. Difatti il coseno è ciò, che manca ad un angolo, o ad un'arco per formare 90.°; ma all'angolo ottuso ne avanza. Dunque il suo coseno è ciò, che se gli deve togliere per ridurlo a 90.°, e perciò è negativo.

Lo stesso vale per le cotangenti, coseganti &c.

VI. Che la tangente di 45.° è uguale al raggio, come la cotangente. Difatto se pongasi l'angolo $TDA = 45.°$ sarà $= 45.°$ anche l'angolo DTA, e perciò sarà $AT = DA$.

VII. In ogni triangolo i seni degli angoli stanno fra di loro, come i lati opposti, perchè (*num.* II.) i seni altro non sono, che la metà dei lati opposti agli angoli, ai quali appartengono.

469. Convien passare adesso ad analizzare le diverse mutazioni, a cui soggiacciono i seni, coseni &c.

A quest'effetto giova investigare le diverse analogie, che possono sussistere fra tali funzioni, per dedurre da esse altrettante formole, per di cui mezzo ci si renda più facile discoprirne le variazioni. Si osservi pertanto la fig.ª 2.ª. Si vedrà

I. Che si ha $DT^2 - AT^2 = 1$ cioè $seg.^2 a - tang.^2 a = 1$ Quindi $seg.a - tang.a : 1 :: 1 : seg.a + tang.a$.

Nel modo stesso si vede, che deve aversi .... $seg.^2 a - tang.^2 a = seg.^2 b - tang.^2 b = 1$.

II. Che $DK^2 - FK^2 = CF^2$, o sia $coseg.^2 a - cot.^2 a = 1 = seg.^2 a - tang.^2 a$; quindi $coseg.\, a - cot.a : 1 :: 1 : coseg.a + cot.a$

Per i triangoli simili RDQ, ADT si avranno ancora le seguenti proporzioni.

(1) $DR : RQ :: DA : AT$, o sia $cos.a : sen.a :: 1 : tang.a$; dunque $sen.\, a = cos.\, a\; tang.\, a$, $cos.\, a = \frac{sen.\, a}{tang.\, a}$, $tang.a = \frac{sen.\, a}{cos.\, a}$.

(2) $DR : DQ :: DA : DT$, o sia $cos.a : 1 :: 1 : seg.a$; perciò $cos.a = \frac{1}{seg.\, a}$; $seg.a = \frac{1}{cos.\, a}$, $cos.a\; seg.a = 1$.

(3) $RQ : AT :: DQ : DT$, vale a dire $sen.a : tang.a :: 1 : seg.a$ dunque $sen.a = \frac{tang.\, a}{seg.\, a}$, $seg.\, a = \frac{tang.\, a}{sen.\, a}$, ... $sen.\, a\; seg.\, a = tang.\, a$.

Per i triangoli simili ADT, DFK, si avrà pure

(1) $AT : DA :: DF : FK$, o che è lo stesso .... $tang.\, a : 1 :: 1 : cot.\, a$; di qui $tang.\, a = \frac{1}{cot.\, a}$, ... $cot.\, a = \frac{1}{tang.\, a}$, $cot.a . tang.a = 1$.

(2) $AD : DT :: FK : DK$, cioè $1 : seg.a :: cot.a . coseg.a$; di dove si deduce $seg.a = \frac{coseg.a}{cot.\, a}$, $cot.a = \frac{coseg.a}{seg.\, a}$, ... $cot.a\; seg.a = coseg.a$.

(3) $AT : DT :: DF : DK$; perciò $tang.a : seg.a :: 1 : coseg\, a$, onde $tang.a = \frac{seg.\, a}{coseg.a}$, $coseg.\, a = \frac{seg.\, a}{tang.\, a}$, $tang.\, a\; coseg.\, a = seg.\, a$.

Finalmente per i triangoli simili QDR, DKF si ha

(1) $RQ : DR :: DF : FK$, cioè $sen.a : cos.\, a :: 1 : cot.\, a$, d'onde $sen.\, a = \frac{cos.\, a}{cot.\, a}$, $cot.a = \frac{cos.\, a}{sen.\, a}$, $sen.a\; cot.a = cos.a$.

(2) $DR : DQ :: FK : DK$, o sia $cos.a : 1 :: cot.a : coseg.a$, e per questo $cos.a = \frac{cot.\, a}{coseg.a}$, $coseg.\, a = \frac{cot.\, a}{cos.\, a}$, ... $cos.\, a\; coseg.\, a = cot.\, a$.

(3) $QR : DQ :: DF : DK$, vale a dire $sen.a : 1 :: 1 : coseg.a$; quindi $sen.\, a = \frac{1}{coseg.\, a}$, $coseg.\, a = \frac{1}{sen.\, a}$. $sen.\, a\; coseg.\, a = 1$.

Raccolgansi adesso tutte le formole trovate, e si avrà

(1) $sen.a = cos.a\; tang\, a = \frac{tang.\, a}{seg.\, a} = \frac{cos.\, a}{cot.\, a} = \frac{1}{coseg.a}$

(2) $cos.\, a = \frac{sen.\, a}{tang.\, a} = \frac{1}{seg.\, a} = sen.a\; cot.a = \frac{cot.\, a}{coseg.\, a}$

(3) $tang.a = \frac{sen.\, a}{cos.\, a} = sen.a\; seg.\, a = \frac{1}{cot.\, a} = \frac{seg.\, a}{coseg.a}$

(4) $cot.a = \frac{1}{tang.a} = \frac{coseg.a}{seg.\, a} = \frac{cos.\, a}{sen.\, a} = cos.a\; coseg.a$

(5) $seg.a=\frac{1}{cos.\,a}=\frac{tang.\,a}{sen.\,a}=\frac{coseg.\,a}{cot.\,a}=tang.a\; coseg.a$

(6) $coseg.a= seg.a\; cot.\,a=\frac{seg.\,a}{tang.\,a}=\frac{cot.\,a}{cos.\,a}=\frac{1}{sen.\,a}$

(7) $1=r^2=cos.a\; seg.a= tang.a\; cot.a= sen.a\; coseg.a = sen.b\; seg.b=tang.b\; cot.b=sen.b\; coseg.b=sen.^2 a+cos.^2 a = seg.^2 a-tang.^2 a=coseg.^2 a-cot.^2 a=sen.^2 b+cos.^2 b$ &c.

(8) $1=r^2=\frac{tang.a\,cos.a}{sen.\,a}=\frac{sen.a\; seg.a}{tang.a}=\frac{seg.a\; cot.a}{coseg.a}=\frac{coseg.a\; tang.a}{seg.a}=\frac{sen.a\; cot.a}{cos.\,a}=\frac{cos.a\; coseg.a}{cot.a}\ldots=\frac{tang.\,b\; cos.\,b}{sen.\,b}$ &c. &c.

470 Passiamo adesso a vedere le diverse mutazioni, alle quali soggiacciono i seni, coseni &c. nel percorrere i diversi punti della circonferenza del circolo.

471. Si concepisca (*Fig.* 2.[a]), che stando immobile il raggio DA, si muova il raggio DQ dall' origine A verso F; e chiaro, che nel punto A, dove l'arco è $=0$, il seno ancora è $=0$, e perciò il coseno $=r=1$; perciò $tang.=\frac{sen.}{cos.}=\frac{0}{1}=0$; $cot.=\frac{1}{tang.}=\frac{1}{0}=\infty$; $seg.=\frac{1}{cos.}=1$; $coseg.=\frac{1}{sen.}=\frac{1}{0}=\infty$.

472. Dall'arco 0 fino a 90.° il seno cresce, e il coseno decresce; perciò dall'esposte formole si vede, che la tangente è positiva crescente, la cotangente positiva decrescente, la segante positiva crescente, e la cosegante positiva decrescente.

473. Quando l'arco è $=90.°$ il seno è $=r=1$, ed il coseno $=0$ quindi la tangente $=\infty$, la cotangente $=0$, la segante $=\infty$, e la cosegante $=1$:

474. Dall'arco di 90.° fino a 180.° il seno sempre positivo decresce, e il coseno negativo cresce; perciò la tangente è negativa decrescente, la cotangente negativa crescente, la segante negativa crescente, e la cosegante negativa decrescente.

475. Allorché l'arco è $=270.°$ il seno è negativo decrescente, e il coseno positivo crescente; perciò la tangente é negativa decrescente, la cotangente negativa crescente, la segante positiva decrescente, e la cosegante negativa crescente, e ciò fino à 360.° di dove ricomincia lo stesso periodo alternativo, che abbiamo fin quì divisato.

476. Per maggior semplicità si ponga la semicirconferenza $=\pi$, e si avranno per rapporto ai seni, e coseni l'equazioni seguenti $sen.\,0=0$, $cos.\,0=1$

$$sen.\,\frac{1}{2}\pi=1,\; cos.\,\frac{1}{2}\pi=0$$

$$sen.\,\pi=0,\; cos.\,\pi=-1$$

$$sen.\,\frac{3}{2}\pi=-1,\; cos.\,\frac{3}{2}\pi=0$$

$$sen.\,2\pi=0,\; cos.\,2\pi=1$$

di dove si vede, che tutti i seni, e coseni possibili si contengono dentro i limiti 1, e -1.

477. *Scol.* Per concepire con tutta l' evidenza, come avvenga, che le tangenti, cotangenti, seganti, coseganti &c. divengano negative, si osservi nella (Fig.[a] cit.), che essendo l'angolo $ADL>90.°$, e la sua tangènte dovendo passare per A, come la cotangente per F, è impossibile, che il raggio DL incontri giammai per la direzione DL la tan-

tangente AT; la può incontrare soltanto per la direzione DN; perciò la tangente non può esser che AT', e DT' la segante, le quali si vede, che sono ambedue negative.

Si vede parimente, che DL non può incontrare la cotangente FK, che nel suo prolungamento negativo FC, onde la cosegante, e la cotangente debbono risultar negative.

478. Da ciò, che si è veduto intorno alle variazioni dei seni, e dei coseni, si può inferire facilmente, che ogni seno, e coseno appartiene ad infiniti archi, cioè, che detto A un arco qualunque, e C la circonferenza, deve aversi $sen.A = sen.(A+C) = sen.(A+2C) = sen.(A+3C) = sen.(A+4C) = \ldots\ldots\ldots sen.(A+nC)$ e parimente $cos.A = cos.(A+C) = \ldots\ldots\ldots cos.(A+2C) = cos.(A+3C) = cos.(A+4C) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots cos.(A+nC)$ e per la stessa ragione

$$sen.(C-A) = sen.(C-2A) = \ldots\ldots sen.(C-nA)$$
$$cos.(C-A) = cos.(C-2A) = \ldots\ldots cos.(C-nA)$$

Sia adesso

479. *Probl.* Determinare il seno, ed il coseno della somma, e della differenza di due archi dati. *Soluzione*. Gli archi dati sieno EB, EA; dicasi s il seno BD, e c il suo coseno CD; si dica s' il seno EG, e c' il suo coseno CG, finalmente si ponga $=y$ il seno cercato EF, ed x il coseno CF (Fig.ª 3.ª)

Per i triangoli simili CDB, EGH si ha ....

$CD\,(c) : EG\,(s') :: BD\,(s) : GH\left(c' - \dfrac{x}{c}\right)$ (per cagione, che si ha $c:1::x:CH) :: CB\,(1) : EH\left(y - \dfrac{sx}{c}\right)$ (perchè si ha $c:s::x:FH$); Quindi si deduce $EG \times BD = CD \times GH$, cioè $ss' = cc' - x$, e $CD \times EH' = EG \times CB$, o sia $s' = cy - sx$

Dal-

Dalla prima equazione si ha $x = cc' - ss'$; Si sostituisca questo valore nella seconda, e si avrà $s' = cy - s(cc' - ss') = cy - scc' + s's^2$; ora $s^2 = 1 - c^2$ dunque $s' = cy - scc' + s' - s'c^2$, e finalmente .... $cy = scc' + s'c^2$, onde $y = sc' + s'c$.

Adesso l'arco AB dicasi a, e l'arco EB dicasi b, e si avrà $y = sen.(a+b) = sen.a\,cos.b + sen.b\,cos.a$
ed $x = cos.(a+b) = cos.a\,cos.b - sen.a\,sen.b$.

Per ottenere il seno, e il coseno della differenza dei medesimi archi, si ponga $a+b=c$, e si avrà
$sen.c = sen.a\,cos.(c-a) + cos.a\,sen.(c-a)$, e
$cos.c = cos.a\,cos.(c-a) - sen.a\,sen.(c-a)$;

Si trattino $sen.(c-a)$, e $cos.(c-a)$ come incogniti, e si avrà dalla prima equazione

$$cos.(c-a) = \frac{sen.c - cos.a \times sen.(c-a)}{sen.a},$$ e dalla seconda
$$cos.(c-a) = \frac{cos.c + sen.a \times sen.(c-a)}{cos.a}.$$ Quindi ....
$$\frac{sen.c - cos.a\,sen.(c-a)}{sen.a} = \frac{cos.c + sen.a\,sen.(c-a)}{cos.a},$$ e
moltiplicando per $sen.a\,cos.a$,
$sen.c\,cos.a - cos.^2a\,sen.(c-a) = sen.a\,cos.c + sen.^2a\,sen.(c-a)$
e trasponendo
$sen.c\,cos.a - sen.a\,cos.c = sen.(c-a)\,(sen.^2a + cos.^2a) = sen.(c-a)$.

Nel modo stesso si dedurrà dalla prima equazione
$$sen.(c-a) = \frac{sen.c - sen.a\,cos.(c-a)}{cos.a},$$ e dalla seconda
$$sen.(c-a) = \frac{cos.c - cos.a\,cos.(c-a)}{-sen.a},$$ ed operando come sopra $cos.(c-a) = sen.c\,sen.a + cos.c\,cos.a$.

Si

Si ponga adesso nelle due formole di $sen.(c-a)$, e di $cos.(c-a)$, a invece di c, e b invece di a, e si avrà finalmente

$sen.(a-b)=sen.a\ cos.b-sen.b\ cos.a$

$cos.(a-b)=sen.a\ sen.b+cos.a\ cos.b$, cioè si avrà generalmente.

$sen.(a\pm b)=sen.a\ cos.b\pm sen.b\ cos.a$

$cos.(a\pm b)=cos.a\ cos.b\mp sen.a\ sen.b$.

480. Di queste formole si possono adesso fare molte, ed interessanti applicazioni,

1.° Si può primieramente trovare il seno, ed il coseno, che appartiene alla somma, e alla differenza qualunque di un qualsivoglia numero di archi dati, altro non richiedendosi, che sostituire un binomio invece delle lettere a, b &c., e svilupparvi dinuovo il seno, e coseno della somma, e della differenza di due archi.

2.° Si può dedurre la formola del seno, e coseno di un' arco moltiplo qualunque na.

Pongasi na in luogo di b nelle formole di $sen.(a+b)$, e di $cos.(a+b)$, e si avrà, detto s il seno di a, e c il suo coseno ....

$sen.(na+a)=s\ cos.\ na+sen.\ na\ .\ c$

$cos.(na+a)=s.\ sen.\ na-cos.\ na\ .\ c$

Si sostituiscano ad n i numeri naturali, e si avrà fatto $n=1$, $sen.(2a)=2cs$, $cos.(2a)=c^2-s^2$

fatto $n=2$, $sen.(3a)=3c^2s-s^3$, $cos.(3a)=c^3-3cs^2$

Si prosegua a sostituire per n i numeri, che seguono, e si vedrà, che generalmente, fatto il raggio $=r$ si ha

$sen.\ a=s$	$cos.(a)=c$
$r.sen.(2a)=2cs$	$r.cos.(2a)=c^2-s^2$
$r^2sen.(3a)=3c^2s-s^3$	$r^2cos.(3a)=c^3-3cs^2$
$r^3sen.(4a)=4c^3s-3cs^3$	$r^3cos.(4a)=c^4-6c^2s^2+s^4$
$r^4sen.(5a)=5c^4s-10c^2s^3+s^5$,	$r^4cos.(5a)=c^5-10c^3s^2+5cs^4$
&c.	&c.

481.

481. Si rifletta su queste formole, e si concluderà facilmente, che la formola di un seno multiplo è composta dei termini di sito pari del binòmio Newtoniano, coll'alternazione dei segni, e che la formola di un coseno multiplo è composta dei termini di sito impari del medesimo binomio coll'alternazione parimente dè segni. Si hanno per conseguenza le due formole generali, che seguono

$${}^{n-1}sen.(na)=\frac{n}{1}sc^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}s^3c^{n-3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)s^5c^{n-5}}{1.2.3.4.5}$$

$${}^{n-1}cos.(na)=c^n-\frac{n(n-1)}{1.2}s^2c^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)s^4c^{n-4}}{1.2.3.4}\quad \&c.\ (A)$$

Se adesso nelle formole dei seni, e coseni multipli si ponga $1-c^2$ in luogo di s^2, si potranno ottenere diverse altre forme: si avrà

$sen.(a)=s$	$cos.\ a=c$
$r.\ sen.(2a)=cs$	$e.cos.(2a)=2c^2-1$
$r^2\ sen.(3a)=4c^2s-s$	$r^2cos.(3a)=4c^3-3c$
$r^3\ sen.(4a)=8c^3s-4cs$	$r^3cos.(4a)=8c^4-8c^2+1$
$r^4\ sen.(5a)=16c^4s\ 12c^3s+s$,	$r^4cos.(5a)=16c^5-20c^3+5c$
&c.	&c.

e finalmente se pongasi $\sqrt{1-c^2}$ in vece di s,

$sen.(a)=\sqrt{1-c^2}$	$cos.(a)=c$
$r.sen.(2a)=2c\sqrt{1-c^2}$	$r.cos.(2a)=2c^2-1$
$r^2sen.(3a)=(4c^2-1)\sqrt{1-c^2}r^2$,	$cos.(3a)=4c^3-3c$
$r^3sen.(4a)=(8c^3-4c)\sqrt{1-c^2}r^3$,	$cos.(4a)=8c^4-8c^2+1$
&c.	&c.

Formole, dalle quali si può dedurre un'altra formola generale del seno, e coseno multiplo, cioè

sen.

$$sen.(na)=(2^{n-1}c^{n-1}-\frac{(n-2)}{1}2^{n-3}c^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}2^{n-5}c^{n-5}$$

(B) $$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6}{1\,.\,2\,.\,3}2^{n-7}c^{n-7}\ \&c.)\sqrt{1-c^2}$$

$$cos.(na)=2^{n-1}c^{n}-\frac{n}{1}2^{n-3}c^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\,.\,2}2^{n-5}c^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}2^{n-7}c^{n-6}+\&c.\ \&c.$$

482. Dalle formole ($\mathcal{A}$) si può dedurre con facilità l'espressione del seno, e coseno di un'arco summultiplo; Difatto in questo caso si ha $sen.(na)$ dato $= a$ l'incognita è $sen.a = x$, di cui il coseno è $=\sqrt{1-x^2}$. Viceversa trattandosi del coseno, si ponga $cos.(na) = b$, $cos.a = z$, e $sen.a = \sqrt{1-z^2}$, e si avranno le formole

$$a=nx\sqrt{1-x^2}^{\,n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3(\sqrt{1-x^2})^{n-3}+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}x^5\sqrt{1-x^2}^{\,n-5}-\&c.$$

$$b=z^n-\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}z^{n-2}(\sqrt{1-z^2})^{n-2}+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^{n-4}(\sqrt{1-z^2})^{n-4}-\&c.$$

e non si avrà, che da sioglier queste due equazioni per ottenere i valori di x, e di z.

Noi ce ne serviremo a suo luogo.

483. Trovate in questa maniera le formole dei seni, e coseni multipli, e summultipli, si possono trovar le formole delle tangenti, cotagenti &c. multiple, e summultiple.

Ecco il calcolo, che bisogna impiegare. 484.

484. Sapendosi che $tang. = \frac{sen.}{cos.}$, si deve avere

$$tang.(a\pm b)=\frac{sen.(a\pm b)}{cos.(a\pm b)}=\frac{sen.a\ cos.b\pm sen.b\ cos.a}{cos.a\ cos.b\mp sen.a\ sen.b},$$ e dividendo sotto, e sopra per $cos.a\ cos.b$,

$$tang.(a\pm b)=\left(\frac{sen.\ a}{cos.\ a}\pm\frac{sen.\ b}{cos.\ b}\right):\left(\frac{1\mp sen.a\ sen.b}{cos.a\ cos.b}\right)$$

$$=\frac{tang.a\pm tang.b}{1\mp tang.a\ tang.b}.$$

Si ponga $a\pm b$ in luogo di a, e c in luogo di b, e sarà

$$tang.(a\pm b\pm c)=\frac{tang.(a\pm b)+tang\ \pm c}{1-tang.\pm c\,tang.(a\pm b)}=$$ (considerando per più semplicità gli archi a, b, c positivi)

$$=\frac{\frac{tang.a+tang.b}{1-taqg.a\,tang.b}+tang.\ c}{1-tang.c\times\frac{tang.a+tang.b}{1-tang.a\ tang.b}}$$, e ponendo $tang.a = a'$, $tang.b = b'$; $tang.c = c'$ &c.

$$=\frac{\frac{a'+b'}{1-a'b'}+c'}{1-c'\times\frac{a'+b'}{1-a'b'}}=\frac{\frac{a'+b'+c'-a'b'c'}{1-a'b'}}{\frac{1-a'b'-a'c'-b'c'}{1-a'b'}}=\frac{a'+b'+c'-a'b'c'}{1-a'b'-a'c'-b'c'}$$

Nel modo stesso si trova $tang.(a+b+c+d)$

$$=\frac{a'+b'+c'+d'-a'b'c'-a'b'd'-a'c'd-b'c'd'}{1-a'b'-a'c'-a'd'-b'c'-b'd'-c'd'+a'b'c'd'}$$

ed in generale detta s' la somma delle tangenti di ciascun'arco dato, s'' la somma dei loro prodotti a due, s''' la somma dei loro prodoti a tre &c. &c. si avrà $taug.(a+b+c+d$ &c.$)$ ....

$$= \frac{s' - s''' + s''''' - s''''''' + \&c.}{1 - s'' + s'''' - s'''''' + \&c.}.$$

Suppongasi adesso, che gli archi dati sieno n, e che sia $a=b=c=d$ &c.;

Si avrà $s' = n\ tang.a$, $s'' = \frac{n(n-1)}{2}\, tang.^2 a$;

$$s''' = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\, tang.^3 a,\quad s'''' = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\, tang.^4 a$$

onde ne risulterà generalmente $Tang.(na) =$

$$\frac{\frac{n}{1} tang.a - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} tang.^3 a + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} tang.^5 a \&c.}{1 - \frac{n(n-1)}{2} tang.^2 a + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} tang.^4 a}$$

$$= \frac{n \frac{sen.a}{cos.a} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{sen.^3 a}{cos.^3 a} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} \frac{sen.^5 a}{cos.^5 a}}{1 - \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{sen.^2 a}{cos.^2 a} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \frac{sen.^4 a}{cos.^4 a} \&c.}$$

$$\frac{n\, cos.^{n-1} a\, sen.a - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} cos.^{n-3} a\, sen.^3 a + \&c.}{cos.^n a - \frac{n(n-1)}{1.2} cos.^{n-2} a\, sen.^2 a + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} cos.^{n-4} a\, sen.^4 a.}$$

&c. formola cercata, dalla quale si raccoglie dinuovo la formola del seno, e coseno di un'arco multiplo trovata di sopra.

485. Per rapporto alla cotangente di un'arco multiplo, siccome si ha $cotang. = \frac{1}{tang.}$ basta rovesciare la formola della tangente di un'arco multiplo, e si ha immediatamente la formola della cotangente.

486. Riguardo alle seganti, ed alle coseganti, siccome si sa essere $seg. = \frac{1}{cos.}$, e $coseg. = \frac{1}{sen.}$, si vede, come si possono dedurre le formole per gli archi multipli che gli appartengono.

487. Volendo le tangenti, cotangenti &c. degli archi summultipli, basta sostituire la formola del seno, e coseno di un'arco summultiplo, a quella del seno, e coseno di un'arco multiplo, com' è per se manifesto.

488. La stessa formola dei seni, e coseni degli archi multipli si può applicare ancora ad esprimer per serie il seno, e il coseno di un'arco dato.

Difatto, si richiami la formola ....

$$Tang.(na) = \frac{n\, cos.^{n-1} a\, sen.a - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} cos.^{n-3} a\, sen.^3 a \ \&c.}{cos.^n a - \frac{n(n-1)}{1.2} cos.^{n-2} a\, sen.^2 a + \&c.}$$

suppongasi l'arco a infinitesimo, ed $n = \infty$, onde sia $na = y$, arco finito; si avrà $sen.a = a$, perchè un'arco infinitesimo non differisce dal suo seno, e sarà $cos.a = 1$, $n = n-1 = n-2$ &c., e finalmente $a = \frac{y}{n}$. Sostituiti questi valori, la formola suddetta diverrà

Tang.

$$Tang.y = \frac{y - \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^5}{2.3.4.5} - \frac{y^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.}{1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2.3.4} - \frac{y^6}{2.3.4.5.6} + \&c.}$$

onde si deduce

$$sen.y = y - \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^5}{2.3.4.5} - \frac{y^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

$$cos.y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2.3.4} - \frac{y^6}{2.3.4\,5.6} + \frac{y^8}{2.3.4.5.6.7.8} \&c,$$

489. Di qui adesso è facile a vedersi, che detta e la base logarimmica, si deve avere (*n*.4[illegible]) (A)

$$\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = sen.y\,; \quad \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2}$$

$= cos.y$, e perciò, sommando $e^{y\sqrt{-1}} = cos.y + \sqrt{-1}\,sen.y$, e sottraendo, $e^{-y\sqrt{-1}} = cos.y - \sqrt{-1}\,sen.y$.

Formando la potenza $n.^{sima}$ si trova ....

$$e^{ny\sqrt{-1}} = (cos.y + \sqrt{-1}\,sen.y)^n = cos.ny + \sqrt{-1}\,sen.ny$$

$$e^{-ny\sqrt{-1}} = (cos.\,y - \sqrt{-1}\,sen.y)^n = cos.ny - \sqrt{-1}\,sen.\,ny$$

La verità di queste formole si comprende da questo, che non si è fatto altro, che accrescere y egualmente in ambedue i membri dell'equazioni precedenti ... (A)

Moltiplicando le medesime equazioni(A) si ottiene

$$\frac{e^{2y\sqrt{-1}} - e^{-2y\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}} = sen.y\,cos.y = \frac{sen.2y}{2}\text{, e}$$

dividendo si trova $\frac{sen.\,y}{cos.\,y} = tang.\,y$ ....

$$= \left(\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}\right)\sqrt{-1}\text{, o viceversa ...}$$

$\frac{cos.\,y}{sen.\,y} = \&c.\ \&c.$

Pigliando finalmente i logarimmi si ha ....

$\pm y\sqrt{-1} = log.(cos.\,y \pm \sqrt{-1}\,sen.\,y) = log.\,cos.\,y + log.\,(1 \pm \sqrt{-1}\,tang.\,y)$ e sottraendo la seconda equazione dalla prima ....

$$2y\sqrt{-1} = log.\left(\frac{cos.y + \sqrt{-1}\,sen.y}{cos.y - \sqrt{-1}\,sen.y}\right) \text{ ....}$$

$= log.\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\,tang.\,y}{1 - \sqrt{-1}\,tang.\,y}\right)$, equazione che essendo divisa per $2\sqrt{-1}$ somministra $y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ ....

$log.\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\,tang.\,y}{1 - \sqrt{-1}\,tang.\,y}\right)$, formola per cui l'espressione di un logarimmo immaginario è ridotta ad un'arco reale.

490.

490. *Scol.* Se nell' equazione $y\sqrt{-1}$ .... $= log.\ (\ cos.\ y + \sqrt{-1}\ sen.\ y\ )$ si ponga .... $y=\pm(2m+1)c$, dove sia m un numero intero qualunque, e c la semicirconferenza del circolo, siccome $sen.\ c=0$, e $cos.\ c=-1$, risulterà .... $\pm(2m+1)\ c\sqrt{-1}=log.-1$, e se facciasi $y=2mc$, si avrà $log.\ 1=\pm\ 2mc\sqrt{-1}$ il che prova, che i logarimmi delle quantità sì positive, che negative, hanno infiniti valori, de'quali uno solo è reale. Per rapporto ai logarimmi delle quantità negative ne vedremo la ragione (*Cap. della Logarimmica*).

491. Se nell' equazione $y=\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ ....
$log.\left(\frac{1+\sqrt{-1}\ tang.y}{1-\sqrt{-1}\ tang.y}\right)$ si ponga $\sqrt{-1}\ tang.y=z$, siccome si ha $log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z+\frac{2}{3}z^3+\frac{2}{5}z^5+\frac{2}{7}z^7$ &c. si trova $y=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\ log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$
$= tang.y-\frac{tang.^3y}{3}+\frac{tang.^5y}{5}-\frac{tang.^7y}{7}+$ &c.
Facciasi $y=45.°$, e sarà $\frac{circonf.}{8}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+$ &c., che è la serie trovata da Leibnitz per esprimere il rapporto del diametro alla circonferenza del circolo. Ma nella supposizione

ne di $y=45.°$ si ha $y=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\ log.\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right)$

Dunque se si moltiplichi sotto, e sopra per $1+\sqrt{-1}$ si avrà $circonf.=\frac{4}{\sqrt{-1}}\ log.\sqrt{-1}=$ $2log.\frac{(\sqrt{-1})^2}{\sqrt{-1}}=2\frac{log.-1}{\sqrt{-1}}$, ed è questa la celebre formola di Gio. Bernoulli, per cui la circonferenza stà al diametro $=2$, come $log.-1:\sqrt{-1}$.

492. *Teor.* In ogni triangolo rettilineo stà la somma di due lati qualunque alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli opposti ai due lati scelti, alla tangente della semidifferenza dei medesimi angoli. *Dimostrazione*. Sia il triangolo ABC (Fig.ª 8.ª), e si prendano i lati AB, BC; Si ponga $\frac{C+A}{2}=M$, e $\frac{C-A}{2}=N$; sarà $C=M+N$, ed $A=M-N$; perciò $AB:BC::sen.(M+N):sen.(M-N)$; ò sia $::sen.M cos.N+cos.M sen.N : sen.M cos.N-cos.M sen.N$.
Dunque $AB(sen.\ M\ cos.\ N-cos.\ M\ sen.\ N)$ $=BC(sen.\ M\ cos.\ N+cos.\ M\ sen.\ N)$, ovvero $(AB-BC)\ sen.M\ cos.N=(AB+BC)\ cos.M\ sen.N$, e dividendo ambedue i membri per $cos.M\ cos.N$, e riducendo si ottiene

$$(AB-BC)\frac{sen.M}{cos.M}=(AB+BC)\frac{sen.N}{cos.N};$$

Ora essendo $\frac{sen.}{cos.}=tang.$, si avrà finalmente .... $(AB-BC)tang.M=(AB+BC)tang.N$, di dove si deduce

AB-

$AB+BC : AB-BC :: tang.M : tang.N :: tang.\frac{A+C}{2} : tang.\frac{A-C}{2}$; il che si doveva dimostrare.

493. *Probl.* Dati due angoli z, y si dimanda l'espressione di $sen.z\ sen.y$. $cos.z\ cos.y$, $sen.z\ cos.y$, $sen.y\ cos.z$.

Soluzione. Per il problema (*n*.479.) si ha $cos.(z\pm y)= cos.z\ cos.y \mp sen.z\ sen.y$; le due equazioni comprese in questa formola si sottraggano, e si avrà

$$sen.z\ sen.y = \frac{cos.(z+y) - cos.(z-y)}{2}.$$

Si sommino, e si avrà $cos.z\ cos.y = \frac{cos.(z-y)+cos.(z+y)}{2}$.

Pigliando adesso la formola del seno di $z\pm y$, si ha $sen.(z\pm y)= sen.z\ cos.y \pm sen.y\ cos.z$; Sommando, come sopra si ha $sen.z\ cos.y = \frac{sen.(z+y)+sen.(z-y)}{2}$, e sottraendo si ha $cos.z\,sen.y = \frac{sen.(z+y)-sen.(z-y)}{2}$

494. Sia 1.° $z=y=\frac{1}{2}x$, e si avrà $sen.z\ sen.y = sen.\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1-cos.x}{2}$, e $cos.z\ cos.y$ .... $= cos.\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1+cos.x}{2}$.

Quindi si deduce $sen.\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1-cos.x}{2}}$, e $cos.\frac{1}{2}x =$

$= \sqrt{\frac{1+cos.x}{2}}$ che se per $\frac{x}{2}$ si ponga x, si avrà $sen.x = \sqrt{\frac{1-cos.2x}{2}}$; e $cos.x = \sqrt{\frac{1+cos.2x}{2}}$: altro facil modo di trovare il seno, ed il coseno di un' arco duplo, e sudduplo.

495. Sia 2.° $z+y=a$, e $z-y=b$, e sarà $z=\frac{a+b}{2}$, ed $y=\frac{a-b}{2}$: si sostituiscano questi valori nelle formole trovate di sopra, e rovesciando i membri si avrà

$$sen.a + sen.b = 2\ sen.\frac{(a+b)}{2}\ cos.\frac{(a-b)}{2}$$
$$sen.a - sen.b = 2\ cos.\frac{(a+b)}{2}\ sen.\frac{(a-b)}{2}$$
$$cos.a + cos.b = 2\ cos.\frac{(a+b)}{2}\ cos.\frac{(a-b)}{2}$$
$$cos.b - cos.a = 2\ sen.\frac{(a+b)}{2}\ sen.\frac{(a-b)}{2}$$

496. Nelle due prime formole facciasi $a=90.°$, e nelle due seconde facciasi $b=0$, e si avrà ..

$1+sen.b = 2\ sen.(45.°+\frac{1}{2}b)\ cos.(45.°-\frac{1}{2}b) = 2\ sen.^2(45.°+\frac{1}{2}b)$; $1-sen.b = 2\ sen.(45.°-\frac{1}{2}b)$ $cos.(45.°+\frac{1}{2}b) = 2\ sen.^2(45.°-\frac{1}{2}b) =$ .... $2\ cos.^2(45.°+\frac{1}{2}b)$

$$1+\cos.a=2\cos.^2\frac{1}{2}a\,;\; 1-\cos.a=2\,\mathrm{sen.}^2\frac{1}{2}a\,,$$

onde per la divisione si ottengono i Teoremi, che seguono

$$\frac{1+\mathrm{sen}.b}{1-\mathrm{sen}.b}=\frac{\mathrm{sen.}^2(45.^\circ+\frac{1}{2}b)}{\mathrm{sen.}^2(45.^\circ-\frac{1}{2}b)}=\frac{\mathrm{sen.}^2(45.^\circ+\frac{1}{2}b)}{\cos.^2(45.^\circ+\frac{1}{2}b)}=\mathrm{tang.}^2(45.+\frac{1}{2}b)$$

$$\frac{1+\cos.a}{1-\cos.a}=\frac{\cos.^2\frac{1}{2}a}{\mathrm{sen.}^2\frac{1}{2}a}=\cot.\frac{1}{2}a$$

$$\frac{1+\mathrm{sen}.b}{1+\cos.a}=\frac{\mathrm{sen.}^2(45.^\circ+\frac{1}{2}b)}{\cos.^2\frac{1}{2}a}$$

$$\frac{1-\mathrm{sen}.b}{1-\cos.a}=\frac{\mathrm{sen.}^2(45.^\circ-\frac{1}{2}b)}{\mathrm{sen.}^2\frac{1}{2}b}$$: Similmente si ottiene

$$\frac{\mathrm{sen}.a+\mathrm{sen}.b}{\mathrm{sen}.a-\mathrm{sen}.b}=\mathrm{tang.}(a+b)\cot.\frac{(a-b)}{2}=\frac{\mathrm{tang.}\frac{(a+b)}{2}}{\mathrm{tang.}\frac{(a-b)}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{sen}.a+\mathrm{sen}.b}{\cos.b-\cos.a}=\cot.\frac{(a-b)}{2}$$

$$\frac{\mathrm{sen}.a-\mathrm{sen}.b}{\cos.a+\cos.b}=\mathrm{tang.}\frac{(a-b)}{2}$$

$$\frac{\mathrm{sen}.a-\mathrm{sen}.b}{\cos.b-\cos.a}=\cot.\frac{(a+b)}{2}$$

$$\frac{\cos.a+\cos.b}{\cos.b-\cos.a}=\cot.\frac{(a+b)}{2}\cot.\frac{(a-b)}{2}$$, e di qui

$$\frac{\mathrm{sen}.a+\mathrm{sen}.b}{\cos.a+\cos.b}=\frac{\cos.b-\cos.a}{\mathrm{sen}.a-\mathrm{sen}.b}$$

$$\frac{\mathrm{sen}.a+\mathrm{sen}.b}{\mathrm{sen}.b-\mathrm{sen}.a}\times\frac{\cos.a+\cos.b}{\cos.b-\cos.a}=\cot.\frac{(a-b)^2}{2}$$

$$\frac{\mathrm{sen}.a+\mathrm{sen}.b}{\mathrm{sen}.a-\mathrm{sen}.b}\times\frac{\cos.b-\cos.a}{\cos.a+\cos.b}=\mathrm{tang.}\frac{(a+b)^2}{2}$$

497. *Probl.* Esprimere $\cos.nz$ per seni, e coseni di y.

Soluzione. Si ponga $z=90.^\circ-y$; sarà $\cos.nz=\cos.n(90^\circ-y)=\cos.n.90.^\circ\cos.ny-\mathrm{sen}.n.90.^\circ\mathrm{sen}.ny$. Si faccia successivamente $n=1=2=3$ &c; e si avrà.

$\cos.z=\mathrm{sen}.y$; $\cos.3z=-\mathrm{sen}.3y$; $\cos.5z=\mathrm{sen}.5y$; &c.

$\cos.2z=-\cos.y$; $\cos.4z=\cos.4y$; $\cos.6z=-\cos.9y$; &c.

498. *Probl.* Esprimere le potenze di coseni per coseni semplici.

Soluzione. Sia $\cos.y+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.y=r$, e $\cos.y$........ $\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.y=s$ onde sia $2\cos.y=r+s$, ed $rs=1$. Si avrà

$$2^n\cos.y^n=(r+s)^n=r^n+nr^{n-1}s+\frac{n(n-1)}{2}r^{n-2}s^2\ \&c....$$

$$2^n\cos.y^n=(s+r)^n-s^n+ns^{n-1}r+\frac{n(n-1)}{2}s^{n-2}r^2\ \&c....$$

e dividendo la somma per 2, $2^n\cos.y^n=$..............:

$$\frac{1}{2}(r^n+s^n)+\frac{n}{2}(r^{n-2}+s^{n-2})+\frac{n(n-1)}{2.2}(r^{n-4}+s^{n-4})\mathrm{ec.}$$

$$=\cos.ny+\frac{n}{2}\cos.(n-2)y+\frac{n(n-1)}{2}\cos.(n-4)y+\mathrm{ec.}$$

Con questo si può sciogliere il seguente.

Probl. Esprimere $\mathrm{sen}.z^n$ per seni, e coseni semplici. Difatto se facciasi $z=90.^\circ-y$, si ha $\mathrm{sen}.z=$.... $\mathrm{sen}.(90.^\circ-y)=\cos.y$, per il che, tutto si riduce a sostituire nel 1.° membro dell'espressione di $\cos.y^n$, $\mathrm{sen}.z$ in vece di $\cos.y$, e nel 2.° membro i valori dei seni degli archi multipli. In questa guisa si ha........

$$1.\ \mathrm{sen}.z=\mathrm{sen}.z,\quad 2\,\mathrm{sen}.z^2=-\cos.2z+\frac{1}{2}z$$

$$4\,\mathrm{sen}z^3=-\mathrm{sen}3z+3\,\mathrm{sen}z,\ 8\,\mathrm{sen}z^4=\cos4z-4\cos2z+\frac{6}{2}\mathrm{ec.}$$

499. Sciolto il *Probl.* Trovar le funzioni di un arco dato, resta da sciogliersi il probl. inverso

so: Dato il seno, o il coseno, o la tangente &c. di un arco, trovarne la lunghezza.

500. *Probl.* Dato il seno, o il coseno, la tangente, o la cotagente di un'arco trovarne la sua lunghezza.

Soluzione. Per rapporto all'arco, di cui sia dato il seno, basta risalire all'espressione di $sen.y$ trovata (*n.*4[illegible]) $sen.\ y=y-\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^5}{2.3.4.5}-\frac{y^7}{2.3.4.5.6.7}$ &c. (*K*), e da questa per il metodo inverso delle serie dedurre $y=sen.y+\frac{\overline{sen.^3y}}{2.3}+\frac{3\overline{sen.^5y}}{2.4.5}+\frac{3.5\ \overline{sen.^7y}}{2.4.6.7}+$ &c.

Operando nel modo stesso si ha la lunghezza dell'arco, di cui è dato il coseno, o per maggior brevità si può questa ottenere per mezzo della formola $cos.=\sqrt{1-\overline{sen.^2}}$.

501. Venendo all'arco, di cui è data la tangente, presa la formola

$$tang.y=\frac{y-\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^5}{2.3.4.5}-\frac{y^7}{2.3.4.5.6.7}\ \&c.}{1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{2.3.4}-\frac{y^6}{2.3.4.5.6}\ \&c.}$$

Si moltiplichi per il denominatore, e si trasponga dinuovo, e si avrà

$$tang.y=y+\frac{y^2t}{2}-\frac{y^3}{2.3}-\frac{y^4}{2.3.4}\ \&c.\ (\mathfrak{Q})\ \text{dove } t=tang.y;$$

pongasi $y=\mathcal{A}t+Bt^2+Ct^3\ \dots\ \Pi t^m$, e sostituendo i va-

valori delle potenze d'y nella formola ($\mathfrak{Q}$), e determinate le lettere $\mathcal{A}$, B, C .... Π, si avrà $\mathcal{A}=1$, $B=-\frac{1}{3}$ $C=\frac{1}{5}$ &c., onde sarà ....

$$y=tang.y-\frac{\overline{tang.^3y}}{3}+\frac{\overline{tang.^5y}}{5}-\frac{\overline{tang.^7y}}{7}+\ \&c.$$

e di qui si avrà facilmente la lunghezza dell'arco, di cui è data la tangente.

Nel caso in cui sia data la cotagente si avrà

$$y=\frac{1}{\overline{tang.^3y}}-\frac{3}{\overline{tang.^3y}}+\frac{5}{\overline{tang.^5y}}-\frac{7}{\overline{tang.^3y}}+\frac{9}{\overline{tang.^3y}}\ \&c.$$

Per i numeri (5), e (6) del *n.* 4[illegible]. si avrà la lunghezza di un'arco di cui sia data la segante, o la cosegante.

502. Applichamo adesso la formola (*K*) alla ricerca della ragione del diametro alla circonferenza circolare.

Si ponga $30.°=y$, e sarà $sen.y=\frac{1}{2}$, e perciò

$$arc\ 30.°=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3.2^3}+\frac{3}{2.4.5.2^5}+\frac{3.5}{2.4.6.7.2^7}\ \&c.$$

Questa serie moltiplicata per 6 deve esser uguale alla semicirconferenza; ella è la seguente ....

$$\frac{Circ.}{2}=3+\frac{1}{2^3}+\frac{9}{4.5.2^5}+\frac{15}{2.4.7.2^7}\ \&c.$$

503. Ma perchè questa serie, sebene assai convergente, non è abbastanza comoda a calcolarsi, giova trovarne un'altra. Pongasi $y=45.°=a+b$: sarà $tang.\ (a+b)=1=\frac{tang.a+tang.b}{1-tang.a\,tang.b}$; Quindi ne se-

segue $1 - tang.\, a\, tang.\, b = tang.\, a + tang.\, b$, e $tang.\, a = \frac{1 - tang.\, b}{tang.\, b + 1}$. Sia adesso $tang.\, b = \frac{1}{3}$, e sarà $tang.\, a = \frac{1}{2}$; perciò ..... $a + b = y = 45.° =$

$$\frac{circ.}{8} = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} \text{ \&c.} \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

$= 0, 785398163397448\overline{3}$, d'onde si ha finalmente la circonferenza circolare di cui il diametro sia $= 2$, espressa come segue : .... $circ. = 6, 2831853071795864$.

504. Per compimento di questa Teoria, rimane da esporsi il celebre Teorema Cotesiano.

Il Teorema di Ruggiero Cotes, dato alla luce fra i di lui Opuscoli postumi da Roberto Smith, di lui successore nella Cattedra di Cambriggia, è del tenore seguente.

Se si cerchino i fattori del binomio $a^{\lambda} + x^{\lambda}$, λ essendo un numero intero, dividasi la circonferenza di un circolo *ABCD* (Fig.ª 4.) di cui sia il centro in *O*, in tante parti eguali *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* &c. quante unità si contengono in 2λ, e da ciascuna divisione si conducano le rette *AP*, *BP*, *CP*, *DP* &c. a un punto qualunque *P* del raggio *OA* prolungato se occorre. Quindi, posto $OA = a$, e $OP = x$, il prodotto di tutte le rette *AP*, *CP*, *EP* &c. che appartengono alle divisioni alternative della circonferenza, sarà eguale ad $a^{\lambda} - x^{\lambda}$, e se *P* cada fuori del

del circolo, sarà eguale ad $x^{\lambda} - a^{\lambda}$. Il prodotto poi dell' altre rette parimente alternative *BP*, *DP*, *FP* &c. sarà $= a^{\lambda} + x^{\lambda}$. La dimostrazione di questo Teorema fu dall' Autore soppressa, e Smith non seppe supplirla.

M. Pemberton ne diede una in appresso, ma complicata oltre modo, e quasi inconcepibile.

Il Ch. Moivre per mezzo delle sue predilette serie ricorrenti ne addusse un'altra dimostrazione, ma neppur essa fu abbastanza naturale, e diretta. Successe Gio. Bernoulli, ed insegnò a dimostrarla in altra forma, che si può vedere nel *Tom.* 4. delle sue opere pag. 67. Ma ch'il crederebbe? Si serve egli per base fondamentale di tutto il suo raziocinio di una formola da lui esposta negli Atti di Lipsia all'an. 1701. *p.* 171., ma senza principio alcuno di prova. Noi questa la esponiamo nel seguente

LEMMA.

505. Posto il raggio del circolo $= 1$, la corda di un'arco dato $= a$, la corda di un'arco summultiplo $= z$, onde sia la corda del suo supplemento $= \sqrt{4 - z^2} = y$ si ha (supposto che si debba dividere un arco in *n* parti eguali), l' equazione generale

$$a = zy^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} zy^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2 \cdot 1} zy^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} zy^{n-7} + \text{\&c.}$$

Dimostrazione. Col raggio *AG* si descriva un semicircolo *ACEF* (Fig.ª 5.), e sia dato un'arco qua-

qualunque AB di cui la corda sia $= a$; la corda del supplemento BF sia $= b$, il raggio $AG = 1$, e la corda di un'arco multiplo $AE = x$, e finalmente il supplemento di questo $= y$. Le due corde AB, BC essendo eguali, se conducasi il raggio BG, i triangoli simili ABC, BGF danno, $BG\ (1) : BF\ (b) :: AB\ (a) : AC = ab$ corda di un'arco doppio.

Per trovar l'espressione di AD, corda di un'arco triplo, si consideri il quadrilatero iscritto nel semmento ACD. e si avrà $BC \cdot AD + AB \cdot CD = AC \cdot BD$, e di qui $AD = ab^2 - a$, eguale alla corda di un arco triplo di AB. La corda di un'arco quadruplo AE si ottiene dal quadrilatero $ACDE$ per mezzo dell'equazione $AC \cdot DE + CD \cdot AE = AD \cdot CE$, dalla quale si deduce $AE = ab^3 - 2ab$.

Proseguendo lo stesso raziocinio si trovano le formole seguenti per le corde di un'arco quintuplo, sestuplo &c., e sono

$a = cor.^a$ di arc. sempl.
$ab = cor.^a$ di arc. doppio
$ab^2 - a = cor.$ di arc. triplo
$ab^3 - 2ab = cor.$ di arc. quadruplo
$ab^4 - 3ab^2 = cor.$ di arc. quintuplo
$ab^5 - 4ab^3 + 3ab = cor.$ d'arc. sest.
$ab^6 - 5ab^4 + 6ab^2 - a = cor.$ arc. sett.
&c. &c. &c.

Da queste poi si deriva la formola generale

$$x = ab^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} ab^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} ab^{n-5} \ldots\ldots - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} ab^{n-7} + \text{\&c. \&c.}$$

dove x rappresenta la corda di un' arco multiplo di qualunque ordine.

Ora

Ora in questa formola si ponga $z = a$, $\sqrt{4 - z^2} = b = y$, ed $a = x$, e si avrà la formola della corda di un'arco summultiplo qualunque ....

$$a = zy^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} zy^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} zy^{n-5} \text{ \&c.}$$

che é la formola proposta a dimostrarsi.

L E M M A II.

506. Il coefficiente del secondo termine di un' equazione qualunque è uguale alla somma delle radici; il coefficiente del terzo termine è uguale alla somma dei prodotti a due a due delle medesime radici; il coefficiente del quarto termine è uguale alla somma de' prodotti a tre, a tre delle radici, e così in seguito, finchè si arrivi all'ultimo termine, il quale è uguale al prodotto di tutte le radici insieme.

Questo Teorema appartiene propriamente alla Teoria dell'equazione, ed ivi ne daremo una compita dimostrazione. Intanto eccone una prova molto semplice, e chiara.

Se facciasi il prodotto di due fattori lineari qualunque $(x \pm a)(x \pm b)$, il risultato $x^2 \pm (a+b)x \pm ab$ fatto eguale a zero, può rappresentare qualsivoglia equazione di secondo grado, perché a e b essendo quantità indeterminate possono ricevere qualunque valore. Nel modo stesso moltiplicando insieme tre fattori lineari qualunque $(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c)$ il risultato che si ottiene $x^3 \pm (a+b+c) x^2 + (ab+ac+bc) x \pm abc$ posto eguale a zero, per la ragione addotta può rappresentare qualsivoglia equazione di terzo grado. Moltiplicando insieme quattro fattori lineari $(x \pm a)(x \pm b)(x \pm c)(x \pm d)$, il risulsultato che si ottiene $x^4 \pm (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+ad+cd)x^2 \pm (abc+abd+acd+bcd)x+abcd$ può rapresentare qualunque equazione di quarto grado, ed in generale, moltiplicando insieme un numero m di fattori lineari, si ha che la funzione $x^m \pm (a+b+c+d$ &c.$)\, x^{m-1} \pm (ab+ac+bc$ &c.$)\, x^{m-2}$ &c. $+k$ può rappresentare un'equazione di qualunque ordine. Ora osservando le formole trovate si vede, che il coefficiente del secondo termine è uguale alla somma de'secondi termini dei fattori lineari componenti, che il coefficiente del terzo è uguale &c. &c. Ma tali secondi termini sono le radici della funzione risultante posta eguale a zero, perchè ad oggetto, che detta funzione sia uguale a zero, conviene che uno almeno de'fattori componenti sia tale; e siccome non v'è ragione, per cui uno di essi piuttosto che un'altro debba essere uguale a zero, ed inoltre si sa d'altronde che le radici di un' equazione sono tante, quante sono le unità che si contengono nel di lei grado (*Teoria dell' equazione*) è chiaro che ciascuno dei secondi termini de'fattori lineari è radice dell' equazione da essi composta, e perciò si concepisce la verità &c. &c.

Passiamo adesso alla dimostrazione del Teorema.

507. Nella formola $a = zy^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} zy^{n-3}$ &c. pongasi $a=0$ si ponga cioè, che tutta la circonferenza del circolo, o il doppio, o il triplo &c. si debba dividere in n parti. Sarà, dividendo per z, $0 = y^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 . 2} y^{n-5}$&c. equazione le di cui radici y, o $\sqrt{4-z^2}$, determi-

minare i valori di z, corda dell'arco summultiplo, ma la corda inoltre dell'arco doppio, triplo &c. perchè tali archi sono parti simili della circonferenza, o semplice ella sia, o doppia, o tripla, o &c.

508. Di quì ne siegue, che se l'equazione suddetta riducasi in z, con sostituire $4-z^2$ per y^2, e si concepisca iscritto nel circolo un poligono regolare di n lati, le radici della trasformata debbono esprimere il quadrato, e del lato del poligono, e di ciascuna diagonale. Sia per esempio $n=7$, cioè sia iscritto nel circolo un Ettagono regolare.

L'equazione universale in y sarà $y^6-5y^4+6y^2-1=0$, che posto $4-z^2$ per y^2, diviene $z^6-7z^4+14z^2-7=0$ equazione di cui le tre radici diseguali rappresentano il quadrato del lato del poligono, e di ambe le diagonali (poichè nell'Ettagono vi sono due coppie di diagonali eguali).

Il quadrato del lato sia $=p^2$, il quadrato della diagonale minore $=q^2$, e il quadrato della diagonale maggiore $=r^2$; si avrà (Lemma II.) .... $p^2+q^2+r^2=7$, $p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2=14$, $p^2q^2r^2=7$.

509. Ma per maggior chiarezza formiamo due Tavole in cui sieno espresse l'equazioni trasformate in z.

TAVOLA I.

Dell'equazioni trasformate in z per i valori di n impari.

Posto	Risulta
$n=3$	$z^2-3=0$
$n=5$	$z^4-5z^2+5=0$
$n=7$	$z^6-7z^4+14z^2-7=0$
$n=9$	$z^8-9z^6+27z^4-30z^2+9=0$
$n=11$	$z^{10}-11z^8+44z^6-77z^4+55z-11=0$
&c. &c.	&c. &c.

TA-

TAVOLA II.

Dell'equazioni trasformate in z per i valori di n pari .

$$\text{Posto}\left\{\begin{array}{l} n = 4 \\ n = 6 \\ n = 8 \\ n = 10 \\ n = 12 \end{array}\right. \quad \text{Risulta}\left\{\begin{array}{l} z^2 - 2 = 0 \\ z^4 - 4z^2 + 3 = 0 \\ z^6 - 6z^4 + 10z^2 - 4 = 0 \\ z^8 - 8z^6 + 21z^4 - 20z^2 + 5 = 0 \\ z^{10} - 10z^8 + 36z^6 - 56z^4 + 35z^2 - 6 = 0 \end{array}\right.$$

&c. &c. &c. &c.

510. Da queste due Tavole sì raccoglie, che gli ultimi termini dell' equazione in z nell' ipotesi di n impari sono sempre uguali al valor di n, e che ne sono la metà, nell'ipotesi di n pari. Si può dunque di quì concludere, che in qualsivoglia poligono regolare di numero impari di lati il prodotto del quadrato di uno dè suoi lati, e dei quadrati di tutte le diagonali, insieme, comprese nel semicircolo, ò che è lo stesso, il prodotto di tutte le diagonali del poligono intero, e di due lati insieme, é uguale al raggio inalzato ad una potenza espressa dal numero dè lati del poligono, diminuito di un'unità, e preso tante volte, quanti sono i suddetti lati, cosicchè, se tal numero sia $2m+1$, ed il raggio $= a$, il divisato prodotto di tutte le diagonali, e due lati risulta $= (2m+1)\, a^{2m}$ perchè nell' equazioni comprese nelle due Tavole precedenti, siccome sono geometriche, fa d' uopo sostituire in ciascun termine le opportune potenze del raggio.

511. Con egual facilità si vede, che nei poligoni di numero pari di lati, il prodotto divisato, posto $2m$ il numero dè lati, debb'essere $= ma^{2m-2}$.

Volendo computare anche il diametro fra le diago-

go-

gonali, basta moltiplicare il prodotto ma^{2m-2} per $2a$, onde avere $2ma^{2m-1}$.

512. Il fin quì detto si può esprimere in forma di Teorema nella maniera seguente.

Teor. In un poligono regolare qualunque, che abbia un numero di lati $= n$, essendo a il raggio del circolo circoscritto, il prodotto di tutte le diagonali, e di due lati contigui è $= na^{n-1}$. Sia adesso

LEMMA.

513. Se in un circolo ACF di cui O sia il centro (*Fig. 6.ª*) conducasi una corda AC all'estremità del diametro AF, e da un punto dato P del diametro, sia condotta una retta PC, si ha sempre

$$PC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OF} . AC^2 .$$

Dimostrazione. Abbassata la perpendicolare CI, si ha $PC^2 = AC^2 + AP^2 - 2AP.AI = AC^2 + AP^2 - \frac{2AP}{2AO} . AI . AF = AC^2 + AP^2 - \frac{AP}{AO} . AC^2 = \left(\frac{AO - AP}{AO}\right) . AC^2 + AP^2 = AP^2 + \frac{OP}{AO} . AC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OF} . AC^2$.

Da questo ne segue che essendo condotta anche la corda CF del supplemento dee risultarne ....

$$PC^2 = FP^2 - \frac{OP}{OF} . CF^2 = AP^2 + \frac{OP}{OF} . AC^2 ,$$ come pure $(PC^2 - AP^2)\frac{OF}{OP} = AC^2$, e $(-PC^2 + FP^2)$

OF

$\frac{OF}{OP} = CF^2$; e finalmente dee risultarne $(FP^2 - AP^2)$
$\frac{OF}{OP} = AC^2 + CF^2 = AF^2 = 4OF^2$.

514. Poste queste premesse, sia, come sopra, $AC = 2$, $CF = y$ $OA = OF = 1$, $OP = x$, ed inoltre $PC = t$, $AP = 1 - x = g$, e sarà $z^2 = \frac{1}{x}(t^2 - g^2)$. Si sostituisca questo valore di z^2 nell'equazioni delle due Tavole di sopra esposte, e conservando i termini primo, ed ultimo, e trascurando gli altri ne proverranno le due Tavole seguenti.

TAVOLA III.

Per n impari.

Posto	Risulta
$n = 3$	$\frac{1}{x}t^2 - \frac{1}{x}g^2 - 3 = 0$
$n = 5$	$\frac{1}{x^2}t^4 \ldots\ldots + \frac{1}{x^2}g^4 + \frac{5}{x}g^2 + 5 = 0$
$n = 7$	$\frac{1}{x^3}t^6 \ldots\ldots - \frac{1}{x^3}g^6 - \frac{7}{x^2}g^4 - \frac{14}{x}g^2 - 7 = 0$
$n = 9$	$\frac{1}{x^4}t^8 \ldots\ldots + \frac{1}{x^4}g^8 + \frac{9}{x^3}g^6 + \frac{27}{x^2}g^4 + \frac{30}{x}g^2 + 9 = 0$
$n = 12$	$\frac{1}{x^5}t^{10} \ldots - \frac{1}{x^5}g^{10} - \frac{11}{x^4}g^8 - \frac{44}{x^3}g^6 - \frac{77}{x^2}g^4 - \frac{55}{x}g^2 - 11 =$
&c.	&c. &c.

TAVOLA IV.

Per n impari.

Posto	Risulta
$n = 4$	$\frac{1}{x}t^2 - \frac{1}{x}g^2 - 2 = 0$
$n = 6$	$\frac{1}{x^2}t^4 \ldots\ldots + \frac{1}{x^2}g^4 + \frac{4}{x}g^2 + 3 = 0$
$n = 8$	$\frac{1}{x^3}t^6 \ldots\ldots - \frac{1}{x^3}g^6 - \frac{6}{x^2}g^4 - \frac{10}{x}g^2 - 4 = 0$
$n = 10$	$\frac{1}{x^4}t^8 \ldots\ldots + \frac{1}{x^4}g^8 + \frac{8}{x^3}g^6 + \frac{21}{x^2}g^4 + \frac{20}{x}g^2 + 5 = 0$
$n = 12$	$\frac{2}{x^5}t^{10} \ldots - \frac{1}{x^5}g^{10} - \frac{10}{x^4}g^8 - \frac{36}{x^3}g^6 - \frac{56}{x^2}g^4 - \frac{35}{x}g^2 - 6 = 0$
&c.	&c. &c.

Si pongano negli ultimi termini esistenti nell'equazioni delle due Tavole precedenti in vece delle potenze di g^2 le potenze del valore equivalente $1 - x + x^2$, e si avranno le due altre Tavole, che seguono.

TAVOLA V.

Per i valori di n impari.

Posto	Risulta
$n = 3$	$\frac{1}{x}g^2 + 3 = (1 + x + x^2) : x$
$n = 5$	$\frac{1}{x^2}g^4 + \frac{5}{x}g^2 + 5 = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) : x^2$
$n = 7$	$\frac{1}{x^3}g^6 + \frac{7}{x^2}g^4 + \frac{14}{x}g^2 + 7 = \ldots$
$n = 9$	$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) : x^3$
$n = 11$	$\frac{1}{x^4}g^8 +$ &c. $= (1 + x + x^2 + x^4 \ldots\ldots + x^8) : x^4$
&c.	&c. &c.

TAVOLA VI.

Per i valori di n pari.

Posto	Risulta
$n=4$	$\frac{1}{x}g^2+2=(1+x^2):x$
$n=6$	$\frac{1}{x^2}g^4+\frac{4}{x}g^2+3=(1+x^2+x^4):x^2$
$n=8$	$\frac{1}{x^3}g^6+\frac{6}{x^2}g^4+\frac{10}{x}g^2+4=(1+x^2+x^4+x^6):x^3$
$n=10$	$\frac{1}{x^4}g^8+\frac{8}{x^3}g^6+\frac{21}{x^2}g^4+\frac{20}{x}g^2+5=(1+x^2 \ldots +x^8):x^4$
$n=12$	$\frac{1}{x^4}g^{10}+\frac{10}{x^4}g^8$ &c. $=(1+x^2+x^4 \ldots\ldots +x^{10}):x^5$
&c.	&c. &c.

515. Si osservi adesso, che nella Tavola III. gli ultimi termini dell' equazione rappresentano il prodotto di tutte le radici $\frac{1}{x}t^2$ (*Lemma II.*), cioè di tutti i quadrati delle linee *PC* condotte dal punto fisso *P* à ciascun' angolo del poligono, compreso nella semicirconferenza, diviso ciascuno di tali quadrati per x, o che è lo stesso, rappresentano il prodotto delle diagonali condotte a ciascun' angolo del poligono intero, eccettuate solo quelle, che sono condotte agli angoli contigui al diametro, e divisa quindi ciascuna di tali diagonali per $\sqrt{x}$, o sia diviso lo stesso prodotto per x, inalzato ad una potenza espressa dalla metà del numero delle diagonali divisate. Con questo apparisce, che, trascurati i denominatori x, x^2, x^3 &c., che dividono t^2, t^4, t^6 &c. da una parte, e dall'altra questi stessi denominatori, siccome dotati in ogni membro della medesima dimensione, rimarrà il prodotto mentovato di sopra, che è rappresentato dal primo membro dell'equazioni della Tavola V., e VI., moltiplicate per la massima potenza, che ha x ne' suoi denominatori, rimarrà, dissi, ... $= 1+x^2+x^4+x^6 \ldots +x^{2m}$, per i valori di n impari, ed $= 1+x+x^1+x^3 \ldots +x^{2m-2}$ per i valori di n pari, essendo nel primo caso $2m+1$ il valore di n, ed essendo $2m$ nel secondo.

516. Per ottenere adesso il valore dei due prodotti completi, che nascono dalla moltiplicazione di tutte le diagonali del poligono, essendo n impari, si moltiplichi il prodotto delle linee *PC* per quella, che rimane, cioè per $PA = 1-x$; Con questo si avrà $(1+x+x^2+x^3 \ldots +x^{2m})\ (1-x) = 1-x^{2m+1}$, ed essendo n pari, si moltiplichi il prodotto delle linee *PC* per le due, che rimangono, cioè per *PA*, e *PE*, o sia per $(1-x)(1+x) = 1-x^2$; In questa guisa si ottiene $(1+x^2+x^4+x^6 \ldots +x^{2m-2})(1-x^2)=1-x^{2m}$.

517. Da queste ultime due equazioni si raccoglie adesso, che dato un punto nel diametro di un circolo, se conducansi da esso agli angoli di un poligono regolare iscritto altrettante rette, quanti sono gli angoli, detto n il numero de' lati, e la distanza del punto dal centro $= x$, si dee avere il prodotto totale di tali rette $= 1-x^n$, e questa è la 1.a parte del Teorema Cotesiano.

Per dedurre da questa la seconda parte si dividano in mezzo gli archi sottesi dai lati del poligono iscritto, e si concepisca un nuovo poligono di doppio numero di lati, ed a ciascun suo angolo si conduca dal punto *P* una retta. Il prodotto di esse

esse dovrà essere $= 1 - x^{2n}$; questo si divida per il primo prodotto $1 - x^n$, e ne deriverà il prodotto delle rette prese alternativamente $= 1 + x^n$, e questa è la seconda parte del Teorema proposto.

Applichiamo adesso la Teoria alla pratica, e prima di tutto vediamo, come si possano calcolare i seni, coseni &c.

518. *Met I.* Siccome i seni, coseni &c. da 90.° fino a 180.° sono i medesimi, che da 0 à 90.° e da 180.° fino a 360.° sono i medesimi, che da 0 fino a 180.° a riserva del segno, che è negativo (*n.*472.), tutto il calcolo si restringe intorno alla ricerca de' seni, coseni &c. di un quadrante di circolo.

A quest' effetto mi fo ad osservare, che il raggio essendo $= 1$, l'arco di 45.° è (*n.*503.) $=$.... 0, 7853981633974483, e perciò, che l'arco di 1'' esser dee $= 0$, 000004847 &c. Quindi siccome un' arco sì piccolo è quasi uguale al suo seno si può prender l'arco di 2'', di 3'', di 4'' &c. per il seno respettivo dell'arco stesso, finchè si giunga ai minuti primi, dopo di che, si prosegue il calcolo fino ai gradi per mezzo delle formole $sen.2a = 2 sen.a \; cos.a$, e $sen.(a+b) = sen.a \; cos.b + sen.b \; cos.a$, e questo si continua finchè siasi giunti al seno di 30.°, il quale dovendo essere uguale alla metà del raggio, presenta un punto di rapporto, con cui verificare il calcolo precedente.

519. Calcolati così i seni, coseni &c. fino a 30.°, si trova $sen.(30.°+b) = sen.30.° \; cos.b + sen.b \; cos.30.° = \frac{1}{2} cos.b + \frac{1}{2} sen.b \sqrt{3}$, ovvero, siccome $sen.(30.°-b)$ è $= \frac{1}{2} cos.b - \frac{1}{2} sen.b \sqrt{3}$, si ha

ha $sen.(30.°+b) = sen.(30.°-b) + sen.b \sqrt{3}$, di dove si vede, che conoscendo i seni da 0 fino a 30.°, si possono calcolar facilmente i seni fino a 60.°

520. Quando siasi giunti al seno di 60.°, siccome si ha in generale $sen.(60.°+b) = \frac{1}{2} sen.b + \frac{1}{2} cos.b \sqrt{3}$, ovvero, per essere ....,.......

$sen.(60.°-b) = \frac{1}{2} sen.b - \frac{1}{2} cos.b \sqrt{3}$, ...

$sen.(60.°+b) = sen.(60.°-b) + sen.b$, formola, mediante la quale si ottengono i seni degli archi maggiori di 60.° fino a 90.° dopo di che rimane compito il calcolo.

521. *Met.* 2.° Conoscendo il raggio di un circolo, in virtù della Geometria si ha il lato del quadrato iscritto, il lato del pentagono, il lato dell' esagono, e il lato del pentadecagono (Vedasi la Trigonometria del P. Tacquet).

Conoscendo questi lati, si sanno per conseguenza i seni delle metà degli archi sottesi, cioè si sa il seno di 45.° di 36.° di 30.°, e di 12.° Per mezzo di questi seni, e del raggio dato si trova il valore di tutti gli altri seni con prendere successivamente i seni de' complementi, i seni delle loro metà, e così sempre, finchè si può. In questa maniera dal seno di 12.° per mezzo della formola $cos. = \sqrt{1 - sen.^2}$, si deduce $cos.12.° = sen.78.°$; Dal $sen.78.°$ si deduce(*n.*480.2.°)$sen.39.°$ $sen.19.° \; 30'$, $sen.9.° \; 45'$. Di questi se ne prendono i coseni, e così procedesi, finchè si può,

pi-

pigliando sempre i seni della metà degli archi, di cui si ha il seno, i seni dei complementi tanto degli archi dati, quanto delle loro metà &c. &c.

522. In questa maniera si ottengono i seni degli archi compresi fra $45'$, e $90.^{\circ}$, che non differiscono fra di loro, che di $45'$: Per trovare i seni degli archi intermedj si chiami in soccorso l'Analogia seguente, la quale suppone, che si voglia trovare il seno di un'arco medio fra due archi dati, che non differiscano più di $45'$. La differenza degli archi dati, stà alla differenza dell'arco medio, e minimo, come la differenza dè seni degli archi dati, alla differenza dè seni dell'arco medio, e minimo; da questa proporzione, che si vede manifestamente esser prossima all'esattezza, si deduce la differenza dè seni dell' arco medio, e minimo, e questa essendo aggiunta al seno dell' arco minimo, somministra il seno dell'arco medio.

523. Sapendo in questa maniera trovare il seno di un'arco medio si operi come segue.

Fra ciascuna coppia di seni trovati col Metodo $2.^{\circ}$, e che sono 120, si trovino i seni di due archi medj, che differiscano fra loro, e fra i seni principali di $15'$; Dipoi fra ciascuna coppia di seni così determinati si trovino i seni di altri due archi medj, dè quali la differenza comune sia di $5'$.

Finalmente fra ciascuna coppia di questi seni si trovino quattro seni medj, differenti fra loro di un minuto, e si avranno così 5400 seni, cioè seni degli archi di un quadrante successivamente maggiori di un minuto.

524. *Met.* 3. Nelle serie, che esprimono il seno, e il coseno di un'arco per una funzione dell' arco stesso, e che sono

 sen.y

$$cn.y = y - \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^5}{2.3.4.5} - \frac{y^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{y^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \&c.$$

$$os.y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2.3.4} - \frac{y^6}{2.3.4.5.6} + \frac{y^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \&c.$$

detto *a* il quadrante del circolo, (che essendo il diametro $=2$, si sa (§ 503.) essere $= 1$, ... 570796526794896 &c.), si ponga $\frac{a}{m}$ in luogo d'*y*, ed essendo *m* un numero intero qualunque, le serie trasformate

$$:n.\ \frac{a}{m} = \frac{a}{m} - \frac{a^3}{2.3.m^3} + \frac{a^5}{2.3.4.5\ m^5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7.\ m^7} + \&c.$$

$$)s.\ \frac{a}{m} = 1 - \frac{a^2}{2m^2} + \frac{a^4}{2.3.4.\ m^4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6.m^6} + \frac{a^8}{2.3.4..8.m^8.}\ \&c$$

somministreranno il valore di qualunque seno, e coseno in parti di raggio, e per conseguenza il valore delle altre funzioni.

Per vederne un'esempio, cerchiamo il seno di $30.^{\circ}$ Fatto $m=3$, e sostituito il valore di *a*, colle opportune potenze, si ha

$$n.30^{\circ}: = \begin{pmatrix} 0,\ 523598775598299 \\ 0,\ 000327953194428 \\ 0,\ 000000008151256 \\ 0,\ 000000000000036 \end{pmatrix} = 0,\ 523926736944019$$

$$- \begin{pmatrix} 0,\ 023924596203935 \\ 0,\ 000002140719769 \\ 0,\ 000000000020315 \end{pmatrix} = -0,\ 023926736944019$$

$= 5$ come si sapeva.

525. *Scol.* Dall'ispezione dei Metodi esposti si raccoglie adesso, che le funzioni circolari non si possono calcolare con esattezza. a motivo delle

ra-

radici irrazionali, che s'incontrano, e del rapporto approssimato del diametro alla circonfesenza di cui bisogna far'uso. L'unico espediente, col quale si può correggere l'inesattezza, è il dividere il raggio del circolo in un grandissimo numero di parti. Le Tavole, che noi soggiungiamo sono calcolate nell'ipotesi, che il raggio sia diviso in dieci millioni di parti.

TA-

TAVOLE
DELLE FUNZIONI CIRCOLARI.

Gr	Sen.	Tang.	Seg.	Log. Sen.	Log. Tang.
0	0	0	100000.00	Infin.	Infin.
1	1745.24	1745.51	100015.23	8.2418553	8.2419215
2	3489.95	3492.08	100060.95	8.5428192	8.5428192
3	5233.60	5240.78	100137.23	8.7188002	8.7193958
4	6975.95	6992.68	100244.19	8.8435845	8.8446437
5	8715.57	8748.87	100381.98	8.9402960	8.9419518
6	10452.85	10510.42	100550.82	9.0192346	9.0216202
7	12186.93	12278.46	100750.99	9.0858945	9.0891438
8	13917.31	14054.08	100982.76	9.1435553	9.1478025
9	15643.45	15837.44	101146.51	9.1943324	9.1997125
10	17364.82	17632.70	101542.67	9.2390702	9.2463188
11	19080.90	19438.03	101871.68	9.2805988	9.2886523
12	20791.17	21255.65	102234.07	9.3178789	9.3274745
13	22495.11	23086.82	102630.39	9.3520880	9.3633641
14	24192.19	24932.80	103061.35	9.3836752	9.3967711
15	25881.90	26794.92	103527.60	9.4129962	9.4280525
16	27563.74	28674.54	104029.94	9.4403381	9.4574964
17	29237.17	30573.07	104569.18	9.4659353	9.4853390
18	30901.70	32491.97	105146.22	9.4899824	9.5117760
19	32556.82	34432.76	105762.07	9.5126419	9.5369719
20	34202.02	36397.02	106417.68	9.5340519	9.5610659
21	35836.79	36386.40	107114.50	9.5543292	9.5871774
22	37460.66	40402.62	107853.47	9.5735754	9.6064096
23	39073.11	42447.49	108636.04	9.5918780	9.6278519
24	40673.66	44522.87	109463.63	9.6093133	7.6485831
25	42261.83	46630.77	110337.79	9.6259483	9.6686725
26	43837.12	47773.26	111260.19	9.6418420	9.6881818
27	45499.05	50952.54	112232.62	9.6570468	9.7071659
28	46947.16	53170.94	113257.01	9.6716093	9.7256744
29	48480.96	55430.09	114335.45	9.6855712	9.7437520
30	50000.00	57735.03	117735.05	9.6989700	9.7614394

Gr	Sen.	Tang.	Seg.	Log. Sen.	Log. Tang.
31	51503. 81	60086. 08	116663. 34	9. 7118393	9. 7787737
32	52991. 93	62486. 94	117917. 84	9. 7242097	9. 7957892
33	54463. 90	64940. 76	119236. 33	9. 7361088	9. 8125174
34	55919. 29	67450. 85	120621. 80	9. 7475617	9. 8289874
35	57357. 64	70020. 75	122077. 46	9. 7585913	9. 8452268
36	58778. 53	92654. 26	123606. 80	9. 7692187	9. 8612610
37	60181. 50	75355. 40	125213. 57	9. 7794630	9. 8771144
38	61566. 15	58128. 66	126901. 82	9. 7893420	9. 8928098
39	62934. 04	80978. 40	128675. 96	9. 7988718	9. 9083692
40	64278. 76	83909. 96	130540. 73	9. 1808975	9. 9238135
41	65605. 90	86928. 68	131501. 30	9. 8169429	9. 9391631
42	66913. 06	90040. 40	134563. 27	9. 8255109	9. 9544374
43	68199. 84	93257. 51	139732. 75	9. 8337833	9. 9696559
44	69465. 84	96568. 88	139016, 36	9. 8417313	9. 6848372
45	70710. 68	100000. 00	141421. 39	9. 8494850	10. 0000000
46	71933. 98	103553. 03	143955. 65	9. 8569341	10. 0151628
47	73135. 37	107236. 87	149627. 92	9. 8641275	10. 0303441
48	74314. 48	112061. 25	149447. 65	9. 8710735	10. 0455626
49	75470. 96	115036. 84	152425. 31	9. 8677799	10. 0608369
50	76604. 44	119175. 36	155572. 38	9. 8842540	10. 0761865
51	77714. 60	123489. 72	158901. 57	9. 8905026	10. 09[illegible]6303
52	78801. 08	127994. 16	162426. 92	9. 8965321	10. 1071902
53	79863. 55	132704. 4	166164. 01	9. 9023486	10. 1228856
54	80901. 70	137638. 19	170130. 16	9. 9079576	10. 1387390
55	81915. 21	142814. 80	174344. 68	9. 9133645	10. 1547732
56	82903. 76	148256. 10	178829. 16	9. 9185742	10. 1710126
57	83867. 06	153986. 50	183607. 84	9. 9235914	10. 1874826
58	84804. 81	160033. 45	188707. 99	9. 9284205	10. 2042103
59	85716. 73	166427. 95	194160. 40	9. 9330656	10. 2212263
60	86602. 54	1732605. 08	200000. 00	9. 9375306	10. 2385606
61	87461. 97	180404. 78	206266. 53	9. 9418193	10. 2562486
62	88294. 76	188072. 65	213005. 45	6, 9459349	10. 274325
63	89100. 65	196261. 05	220268. 93	9. 9498809	10. 2928341
64	89879. 40	205030. 38	228117. 20	9. 9539602	10. 3118181
65	90630. 78	214450. 69	236620. 16	9. 9572757	10. 3313275

Gr	Sen.	Tang.	Seg.	Log. Sen.	Log. Tang.
66	91354. 54	224603. 68	245859. 33	9. 9607302	10. 3514169
67	92050. 49	235585. 24	255930. 47	9. 9640261	10. 3721481
68	92818. 39	247508. 69	266946. 72	9. 9671659	10. 3935904
69	93358. 04	260508. 91	279042. 81	9. 9701517	10. 4158226
70	93969. 26	274747. 74	292380. 44	9. 9729858	10. 4389341
71	94551. 85	290421. 09	307155. 35	9. 9756701	10. 4630281
72	95105. 65	307768. 35	323606. 80	9. 9782063	10. 4882240
73	95630. 48	328075. 26	342030. 36	9, 9805963	10. 5146610
74	96126- 17	348721. 44	362795. 53	9. 9[illegible]284[illegible]6	10. 5325036
75	96592. 58	373205. 08	386370. 33	9. 9849438	10. 5419475
76	970[illegible]9. 57	401078. 09	413356. 55	9. 9869041	10. 6032289
77	97437. 01	433147. 59	444541. 15	9. 9887239	10. 6;66359
78	97814. 76	470463. 01	480973. 34	9. 9904044	10. 6725255
79	98162. 71	514455. 40	524084. 31	9- 9919466	10. 7113477
80	98480. 77	567128. 18	575877. 05	9. 9933515	10. 7536812
81	98768. 83	631375. 16	639249. 32	9. 9946199	10. 8002875
82	99026. 80	711536. 97	718429. 75	9. 9955528	10. 8521975
83	99254. 62	814434. 64	820550. 90	9. 9967507	10. 9108562
84	99452. 18	951436. 45	956677. 22	9. 9976143	10. 9783798
85	99619. 47	1143005. 23	1147371. 32	9. 9983442	11. 0580482
86	99756. 40	1430066. 63	1433558. 70	9.9989408	11.1553563
87	99862. 95	1908113. 67	1910732.26	9.9994044	11.2806052
88	96939. 08	2863625. 33	2865370.83	9.9997[illegible]54	11.4569162
89	99984. 77	5728996. 16	5729868.85	9.9999338	11.7580785
90	100000. 00	Infin.	Infin.	10.0000000	Infin.

526. Rimane adesso, che ci occupiamo nell'oggetto principale della Trigonometria, cioè nella risoluzione dei triangoli.

527. I problemi, che si possono proporre intorno alla risoluzione de' triangoli si riducono a cinque.

La ragione di questo è, che de' sei elementi, da cui vien costituito un triangolo, posson darsene tre, che determinino il triangolo, in sole cinque maniere, che sono le seguenti. Che sia dato

1. Un lato, e gli angoli adjacenti;

2.° Un lato, e due angoli, uno dè quali sia opposto al lato dato;

3.° Un angolo, e due lati, uno dè quali sia opposto all'angolo dato;

4.° Un angolo, e due lati, che lo comprendono;

5.° I tre lati.

528. *Scol.* I tre angoli non sono elementi per cui venga determinato un triangolo, poichè si possono formare infiniti triangoli dotati dè medesimi angoli, di diversi lati. Dalla grandezza relativa degli angoli si può dedurre solamente il rapporto dè lati,

529. *Probl.* Dato un lato di un triangolo, e gli angoli adjacenti, trovare gli altri due lati.

Soluzione. Siccome il seno di $A+B$ è uguale al seno di C (Fig.ª 7.ª) si dee aver la proporzione $sen. (A+B) : AB :: sen. B : AC :: sen. A : BC$, di dove si deduce AC, e BC.

530. *Probl.* Dato un lato, e due angoli, uno de' quali sia apposto al lato dato, trovar gli altri due lati.

Soluzione. Le proporzioni, che sodisfano al problema, sono $sen. A : BC :: sen. B : AC = \frac{BC \times sen. B}{sen. A}$, :: $sen. C : AB :: sen. (A+B) : AB = \frac{BC\ sen. (A+B)}{sen. A}$.

531. *Probl.* Dato un'angolo, e due lati, uno de'quali sia opposto all'angolo dato, si vogliono gli altri due angoli, e l'altro lato, sapendosi però se l'angolo opposto all'altro lato debba esser acuto, ovvero ottuso.

Soluzione. Sia B l'angolo dato, ed i lati AB, AC; Si avrà $AC : sen. B :: AB : sen. C$.

Conoscendo così gli angoli B, C, si conosce l'angolo A, e perciò si ha $sen. B : AC :: sen. A : BC$, onde $BC = \frac{AC\ sen. (B+C)}{sen. B}$.

532. *Probl.* Dato un'angolo, e i due lati, che lo comprendono, determinare gli altri due angoli, e l'altro lato.

Soluzione. Sia dato l'angolo A, ed i lati AB, AC. In questo caso sta $AB : AC :: sen. C : sen. B$. Dunque $AC + AB : AC - AB :: sen. B + sen. C : sen. B - sen. C$. Ora $\frac{sen. B + sen. C}{sen. B - sen. C} = \frac{tang. \frac{1}{2} (B+C)}{tang. \frac{1}{2} (B-C)}$;

Dunque $AC + AB : AC - AB :: tang. \frac{1}{2} (B+C) : tang. \frac{1}{2} (B-C)$. Ma $tang. \frac{1}{2} (B+C) = tang. (90.° - \frac{A}{2})$ (perchè $B+C = 180.° - A$) $= cot. \frac{1}{2} A$; Dunque

$AC + AC : AC - AB :: cot. \frac{1}{2} A : tang. \frac{1}{2} (B-C) =$

$\left(\frac{AC - AB}{AC + AB}\right) cot. \frac{1}{2} A$. Conoscendo $B - C$, e $B + C$ è facile conoscer gli angoli B, e C. Conosciuti questi si ha $sen. B : AC :: sen. A : BC = \frac{AC. \, sen. A}{sen. B}$, ed ecco determinato il terzo lato.

533. *Probl.* Dati i tre lati, trovare i tre angoli.

Soluzione. Dal vertice O del triangolo MOB si abbassi la perpendicolare OE (Fig.ª 6.ª), e centro in O, con intervallo eguale al minimo lato OM, si descriva un circolo, che incontri in D, F i lati del triangolo; Si avrà $BM : BA :: BF : BD$, cioè $BM : BO + OA :: BO - AO : BD$; Trovato in questa guisa il valore di BD, si ha quello di MD. Quindi $ME = \frac{1}{2} MD$ divien nota anch'essa, come pure $BE = BD + DE = BD + ME$. Conoscendo ME, e BE, nei due triangoli MOE, BOE, si conoscono due lati, ed un angolo opposto ad uno di essi, onde per il probl. 3.° può trovarsi l'angolo M, e l'angolo B, con che rimane sciolto il problema.

534. Fin qui dei triangoli obliquangoli. Sia da risolversi adesso un triangolo rettangolo.

535. In ogni triangolo rettangolo si ha la proporzione $R : BC$ (*ipoten.*) $:: sen. C : AB :: sen. B : AC$ (Fig.ª 8.ª) Ma in questa specie di triangoli si ha, che il seno di un'angolo acuto è coseno dell'altro; Dunque si dee avere $sen. B : cos. B :: AC : AB$; Ma si è veduto (*n.469.n.1.*) essere $sen. B : cos. B :: tang. B : R$; Dunque $AC : AB :: tang. B : R :: cotang. C : R$.

Questo basta per risolvere in qualunque caso un triangolo rettangolo, in cui, oltre l'angolo retto, sieno dati due degli altri cinque elementi.

Ve-

Vediamo qualche applicazione dell' esposte resoluzioni trigonometriche, e sia

536. *Probl.* 1.° Dato uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo, e la sua superficie, trovare i suoi tre lati.

Soluzione. Sia l'angolo dato $= a$, x il lato opposto, e si avrà, detta s la superficie, ed y l'altro lato, $xy = 2s$; Di poi $x : y :: sen. a : cos. a$; Dunque $xy = y^2 \frac{sen. a}{cos. a} = 2s$, ed $y = \sqrt{\frac{2s \, cos. a}{sen. a}} = \sqrt{\frac{2s \, cot. a}{R}}$, ed $x = y \frac{sen. a}{cos. a} = \sqrt{\frac{2s \, cos. a}{sen. a}} \times \frac{sen. a}{cos. a} = \sqrt{\frac{2s \, sen. a}{cos. a}} = \sqrt{\frac{2s \, tang. a}{R}}$; Quindi si ha l'ipotenusa $= \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{\left(\left(\frac{2s \, sen. a}{cos. a}\right) + \left(\frac{2s. cos. a}{sen. a.}\right)\right)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{2s. \, sen.^2 a + 2s. \, cos.^2 a}{sen. a \, cos. a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2s(sen.^2 a + cos.^2 a)}{sen. a. \, cos. a}\right)}$$

$= \sqrt{\frac{2s \, R^2}{sen. a \, cos. a}}$, e sostituendo $R. \frac{1}{2} \, sen. 2a$ per $sen. a \, cos. a$, $= \sqrt{\frac{4sR}{sen. 2a}} = 2\sqrt{\frac{sR}{sen. 2a}}$.

537. *Probl.* 2.° Dati tre elementi di un triangolo, che determinino la sua natura, trovarne la superficie.

Soluzione. Sia dato un lato, e gli angoli adjacenti; Dall'angolo dato (Fig.ª 6.ª) opposto al lato cognito MB si abbassi la perpendicolare OE;

Po-

Posta OE seno tutto, si ha $ME : OE :: tang. MOE : R$, e siccome MOE è complemento di OME. ed $ME = cot. M$, $ME : OE :: cot. M : R$. Nel modo stesso $BE : OE :: cot. B : R$; Sia $cot. M = C$, e $cot. B = c$, e si avrà $C : R :: ME : OE$; $c : R :: BE : OE$, e però $C + c : R :: ME + BE : OE :: MB : OE$.

Trovata la OE si ha la superficie richiesta.

538. Il caso, in cui sia dato un lato, e due angoli non adjacenti, si può sempre ricondurre a questo. Se vengano dati due lati, ed un'angolo, si troverà un' altr' angolo, e si riguarderà come dato un lato, e gli angoli adjacenti. Se finalmente sieno dati i tre lati, o si troveranno due angoli, e quindi si opererà come sopra, ovvero si cercherà la superficie per mezzo della formola

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

che si deduce facilmente dai principj della Geometria (*Veda l'Ab. Marie pag.* 311., *e il D. Tommasini T. I. pag.* 277.). Si debb'adesso

539. *Probl.* Determinare un'altezza AB (Fig.ª 7.ª), nel di cui piano orizontale non si può misurare una distanza dalla sua base.

Soluzione. Si vede, che se fosse data la distanza DB basterebbe prendere col goniometro l'angolo BDA, e con ciò, nel triangolo rettangolo si avrebbero tre elementi, da cui si avrebbe AB. Ma suppongasi ignota la distanza DB. Prendasi una distanza CD in maniera, che uno almeno dè punti C, D sia, nel piano orizzontale della BA; Si misurino gli angoli di elevazione, ADB, e ACB. Conoscendo nel triangolo ACD gli angoli C, D, ed il lato CD, si trovi

 uno

uno degli altri due lati AC, AD in guisa però, che se uno solo dè punti C, D sia orizzontale a BA, si cerchi quello dei due lati suddetti, che va al punto orizzontale.

Supponghiamo, che siasi determinato AD; Nel triangolo BAD si avrà un lato AD, e gli angoli B, e D; Non si avrà perciò, che da calcolare BA, e sarà sciolto il problema.

540. *Probl.* Misurare l'altezza di una montagna.

Soluzione. Da un punto A qualunque si prenda la misura dell'angolo BAR (Fig.ª 9.ª) formato dal raggio visuale AB perpendicolare al raggio CA, e dal raggio AR. Dalla sommità R si misuri l'angolo ARL formato dal raggio visuale RL perpendicolare ad RE, e dal raggio visuale RA; Conosciuto questo si ha il suo complemento ARB, e perciò il terzo angolo RBA, e quindi il suo complemento ABC. Con questo, nel triangolo centrale ABC si conosce un lato CA, e due angoli, onde si trova AB; Così nel triangolo ABR si ha un lato, due angoli; Da questi elementi si deduca BR, a BR si aggiunga $BE = \frac{AB^2}{BC + CA}$ dove BC è noto dal triangolo CBA, e si avrà così l'altezza cercata RE.

CAPITOLO X.

Della Poligonometria.

541. Trattata compitamente la risoluzione de' triangoli, rimane da trattarsi la risoluzione de' poligoni.

542. Questa risoluzione si può ella ottenere con due

due Metodi, e con applicarvi la risoluzione Trigonometrica, o con prevalersi di Teoremi particolari indipendenti dalla Trigonometria.

Il primo Metodo è preferibile al secondo per la facilità, ma il secondo supera il primo per il raziocinio Analitico che lo distingue, e che aggiunge nuovo lustro alle Teorie dell'Analisi.

Noi accenneremo il primo, e non tralasceremo il secondo.

543. Se in un poligono di n lati, composto perciò di $2n$ elementi, vengano dati $2n-3$ elementi, si può sempre determinare uno qualunque degli altri tre elementi, eccettuato il caso, in cui fra gli elementi dati, vi abbiano parte tutti gli angoli esterni, perchè la di loro somma essendo di un valore determinato, uno di essi derivasi dalla somma degli altri.

544. Per determinare uno degli elementi incogniti per mezzo della Trigonometria, si conducano da un'angolo del poligono dato le diagonali à tutti gli altri angoli, a cui si possono condurre.

Quindi si prendano a risolvere i triangoli, che ne derivano, e si troverà il valore degli elementi incogniti. E' questa un'operazione molto facile, e basta vederne qualche esempio per esserne persuasi.

545. Sia da risolversi un quadrilatero, e sieno dati $8-3=5$ elementi; E'chiaro, che il problema comprende 56 casi; Supponiamo, che (Fig.^{a} 11.^{a}) sieno dati i quattro lati, e l'angolo A, condotta dall'angolo D la diagonale DB, nel triangolo DAB si hanno due lati DA, AB cogniti, e l'angolo compreso; Per mezzo di questi elementi si trovi uno degli altri due angoli, per esempio, l'angolo ADB:

con il che si conoscerà l'angolo ABD. Fatto questo si determini la diagonale BD, e si trovi nel triangolo DCB, per mezzo dei tre lati cogniti ciascun angolo. Dopo di ciò si conosceranno tutti gli elementi del quadrilatero. Ma vediamo il secondo metodo.

546. In due maniere può esser proposta la risoluzione di un poligono. Può aversi cioè riguardo solamente agli elementi costituenti il poligono, quali sono i suoi lati, ed i suoi angoli; e può aversi riguardo alle diagonali, ed agli angoli, che vengon da esse formati coi lati, e fra di loro. Della prima risoluzione diremo quanto basta; Della seconda siccome assai complicata, daremo soltanto le principali nozioni.

Teoremi fondamentali.

Detti a, b, c, $d \ldots k$ gli angoli esterni di un poligono rettilineo, e detti a', b', c'. d' .... k i lati fra di essi interposti si ha

$$a'\,\mathit{sen}.a+b'\,\mathit{sen}.(a+b)+c'\,\mathit{sen}.(a+b+c)+d'\,\mathit{sen}.(a+b+c+d)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+k'\,\mathit{cos}.(a+b+c+d\ldots\ldots+k)=0$$
$$a'\,\mathit{cos}.a+b'\,\mathit{cos}.(a+b)+c'\,\mathit{eos}.(a+b+c)+d'\,\mathit{cos}.(a+b+c+d)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+k'\,\mathit{cos}.(a+b+c+d\ldots\ldots+k)=0$$

Dimostrazione. Per dimostrare la verità di questi due Teoremi, basta provare, che abbiano luogo per un poligono composto di $n+1$ lati, qualora generalmente sussistano per un poligono di n lati. In questa guisa i due Teoremi proposti saranno veri generalmente, purchè sussistano per rapporto al triangolo.

Sia dunque proposto un poligono $ABCDEFLH$ composto di $n+1$ lati, e sia condotta la diagonale FH; (Fig.^{a} 10.^{a}) I lati del poligono EF, FL, AH, e la diagonale HF si concepiscano prolungate, e gli an-

angoli esterni del poligono $ABCDEFH$ dicansi .... a, b, c, d ....k, sia $m=KFH$, $n=FHM$, ed i lati del medesimo poligono sieno a', b', c', d'.......K' $m'=HF$, $n'=AH$;

Sieno poi per il poligono $ABCDEFLH$ gli angoli esterni a, b, c, d ...K, $M=KFL$, $P=LH$, $N=LHM$, ed i lati a', b', c', d' ... K', $M'=FL$, $P'=LH$, $N'=AH$, Ciò posto se dicasi l'angolo $IFL=\varphi$, sarà $180.^\circ-\varphi=m-M$, dal che si raccoglie $M=m+\varphi-180^\circ$:

Quindi poi si ottiene $\cos.(a+b+c+d \ldots\ldots\ldots M)=-\cos.\varphi\cos.(a+b+c..m)+\text{sen}.\varphi\,\text{sen}.(a+b+c..+m)$; $\text{sen}.(a+b+c..+M)=-\cos.\varphi\,\text{sen}.(a+b+c..+m)-\text{sen}.\varphi\,\text{sen}.(a+b+c...+m)$; $\cos.(a+b+c..+M+P)=-\cos(\varphi+P)\cos(a+b+c..+m)+\text{sen}(\varphi+P)\text{sen}(a+b..m)$ $\text{sen}.(a+b+c...+M+P)=-\cos.(\varphi+P)\text{sen}.(a+b..m)-\text{sen}.(\varphi+P)\cos.(a+b+c..+m)$, e da questi valori deduciamo $M'\cos.(a+b..M)+P'\cos.(a+b..M+P)=-\cos.(a+b+c\ldots\ldots m)(M'\cos.\varphi+P'\cos.(\varphi+P))+\text{sen}\,(a+b+c\ldots\ldots\ldots m).(M'\text{sen}.\varphi+P'\,\text{sen}.(\varphi+P))$; $M'\text{sen}.(a+b+c...M)+P'\text{sen}.(a+b+c\ldots\ldots M+P)=-\text{sen}.(a+b+c...M)(M'\cos.\varphi+P'\cos.(\varphi+P))-\ldots\ldots-\cos.(a+b+c\ldots\ldots m)(M'\,\text{sen}.\varphi+P'\,\text{sen}.(\varphi+P))$; Ma per il triangolo LFH si ha $M'\cos.\varphi+P'\cos.(\varphi+P)=-m'$, ed $M'\,\text{sen}.\varphi+P'\,\text{sen}.(\varphi+P)=0$ come si sa d' altronde. Si avrà dunque per conseguenza $M'\cos.(a+b+c...M)+P'\cos.(a+b+c\ldots\ldots M+P)=m'\cos.(a+b+c...m)$. ed $M'\text{sen}.(a+b+c\ldots\ldots M)+P'\cos.(a+b+c...M+P)=m'\text{sen}.(a+b+c\ldots\ldots\ldots m)$

Avendosi pertanto relativamente al poligono ..,. $ABCDEFH$, $a'\text{sen}.a+b'\text{sen}.(a+b)+c'\text{sen}.(a+b+c)+m'\text{sen}.(a+b+c\ldots\ldots m)=0$, come pure ....,..... $a'\cos.a+b'\cos.(a+b)+c'\cos.(a+b+c)..+m'\cos.(a+b...m)+n'=0$ sarà parimente per il poligono .... $ABCDEFLH$ $a'\text{sen}.a+b'\text{sen}.(a+b)+c'\text{sen}.(a+b+c)$

 .... +

$..+M'\text{sen}(a+b+c..M)+P'\text{sen}.(a+b+c..M+P)=0$ $a'\cos.a+b'\cos.(a+b)+c'\cos(a+b+c)..+M(\cos.a+b.M)+P\cos(a+b+c.+M+P)+n'=0$, dove nella prima equazione si puó aggiungere il termine $n'\text{sen}.(a+b+c..M+P+n)$: e nella seconda invece di n' si può scrivere $n'\cos.(a+b+c\ldots\ldots M+P+n)$

Dal fiinquì detto si raccoglie adesso, che i due teoremi proposti debbon sussistere per un poligono di $n+1$ lati, qualora sussistano per uno di n lati; e siccome non v'è dubbio, che abbian' essi luogo per rapporto al triangolo, ne segue sussistano generalmente.

547. Posta la verità dei due Teoremi fondamentali, per mezzo di un'opportuna combinazione di essi, possono sempre ottenersi tante equazioni per la risoluzione de' poligoni quanti sono i lati del poligono proposto. La deduzione di tali equazioni, non meno che la riduzione di esse, onde possano facilmente ottenersi i valori dell'incognite, richiede una prontezza d'ingegno non ordinaria o almeno una somma pratica nel maneggiare le funzioni Trigonometriche. Noi addurremo un esempio di ambedue queste operazioni, e da esso potrà prendersi norma per gli altri casi.

Sia proposto un quadrilatero, di cui gli angoli esterni sieno a, b, c, d, ed i lati sieno a', b', c', d' e si vogliano l'equazioni, che son necessarie per la di lui risoluzione.

I due Teoremi fondamentali vengono espressi in questo caso come appresso

$a'\text{sen}.a+b'\text{sen}.(a+b)+c'\text{sen}.(a+b+c)=0$

$a'\cos.a+b'\cos.(a+b)+c'\cos.(a+b+c)+d'=0$

Dal secondo di questi si ha $d'=a'\cos.a-b'\cos.(a+b)-c'\cos.(a+b+c)$, e presi i quadrati

$d'^2=$

$d'^2=a'^2\overline{\cos. a}^2+b'^2\cos.(a+b)^2+c'^2\cos.(a+b+c)^2+$
$2a'b'c'\cos. a\cos.(a+b)+2a'c'\cos. a\cos.(a+b+c)$
$+2b'c'\cos.(a+b)\cos.(a+b+c)$

A questa si aggiunga il quadrato della prim'equazione, e nè proverrà
$d'^2=a'^2+b'^2+c'^2+2a'b'(\cos. a\cos.(a+b)+\text{sen}. a\times$
$\text{sen}.(a+b)+2a'c'(\cos. a\cos.(a+b+c)+\text{sen}. a\,\text{sen}(a+b+c))$
$+2b'c'(\cos(a+b)\cos.(a+b+c)+\text{sen}.(a+b)\text{sen}(a+b+c))$
$=a'^2+b'^2+c'^2+2a'b'\cos. b+2a'c'\cos.(b+c)+2b'c'\cos. c$
ed ecco la prima equazione richiesta
I. $d'^2=a'^2+b'^2+c'^2+2a'b'\cos. b+2a'c'\cos.(b+c)+2b'c'\cos. c$
Ora dall'equazione(A)si deduce $d'+c'\cos.(a+b+c)=$
$-a'\cos. a-b'\cos.(a+b)$, o per essere $a+b+c=360.°-d$
si ha $d'+c'\cos. d=-a'\cos. a-b'\cos.(a+b)$, e presi
i quzdrati ne viene $d'^2+2d'c'\cos. d+c'^2\overline{\cos. d}^2=$
$a'^2\overline{\cos. a}^2+b'^2\cos.(a+b)^2+2a'b'\cos. a\cos.(a+b)$
Ora dalla prima equazione fondamentale si raccoglie $c'^2\overline{\text{sen}. d}^2=a'^2\overline{\text{sen}. a}^2+b'^2\text{sen}.(a+b)^2+$
$2a'b'\text{sen}. a\,\text{sen}.(a+b)$, onde sommando queste due ultime si ottiene la seconda.
II. $d'^2+2d'c'\cos. d+c'^2=a'^2+2a'b'\cos. b+b'^2$;
La terza equazione è la prima fondamentale
III. $a'\text{sen}. a+b'\text{sen}.(a+b)+c'\text{sen}.(a+b+c)=0$
e la quarta finalmente si deriva dalla prima, con sostituire $-\text{sen}. d$ in luogo di $\text{sen}.(a+b+c)$, per esser $d=360°.-(a+b+c)$, ed è
IV. $a'\text{sen}. a+b'\text{sen}.(a+b)-c'\text{sen}. d=0$.

548. Prima di passare a far vedere come si debba uno diportare per dedurre dall'equazioni appartenenti alla risoluzione di un poligono, i valori dell' incognite, potremmo trattenerci a parlare del modo di ridurre in certe classi determinate i proble-

mi tutti, che possono proporsi sù di un poligono; ma oltre, che queste classi non sono di alcun giovamento, nè per la scelta dell'equazioni opportune alla risoluzione proposta, nè per la deduzione dell' incognite, è cosa facile conoscere immediatamente il numero de'suddetti problemi per mezzo delle combinazioni, e poi disporre tutti i casi, che si trovano in quelle classi, che più si stimino a proposito, perciò noi passiamo senza più a far vedere con un esempio, come si debbano trattar l'equazioni che appartengono alla risoluzione di un poligono, affinche se ne possa dedurre comodamente il valore di ciascuna incognita.

549. Dato un quadrilatero $ABCD$, (Fig. 11ª.) i di cui lati AB, BC, CD, DA sieno espressi per a, b, c, d, e gli angoli esterni aAB, bBC &c. per A, B, C, D, supposto che sien cogniti i lati a, b, c, e gli angoli B, C, si debba trovare il lato d. Le quattro equazioni ausiliari e sono in questo caso della forma seguente
I. $d'^2=a'^2+b'^2+c'^2+2a'b'\cos. B+2a'c'\cos.(B+C)+2b'c'\cos. C$
II. $d'^2+c'^2+2c'd'\cos. D=a'^2+b'^2+2a'b'\cos. B$
III. $a'\text{sen}. A+b'\text{sen}.(A+B)+c'\text{sen}.(A+B+C)=0$
IV. $a'\text{sen}. A+b'\text{sen}.(A+B)-c'\text{sen}. D=0$;
Nella prima di queste si riduca il secondo membro alla forma $(a'\text{sen}. B-c'\text{sen}. C)^2+(b'+a'\cos. B+c'\cos. C)^2$
e si avrà
$d'^2=(a'\text{sen}. B-c'\text{sen}. C)^2+(b'+a'\cos. B+c'\cos. C)^2$
Fatto questo si osservi, che si ha parimente
$$a'^2+b'^2+c'^2+2a'b'\cos. B+2a'c'\cos.(B+C)+2b'c'\cos. C$$
$$=\left(a'+\frac{b'\,\text{sen}.\,C}{\text{sen}.(B+C)}\right)^2+\left(c'+\frac{b'\,\text{sen}.\,B}{\text{sen}.(B+C)}\right)^2+2\cos.(B+C)$$

$$\times\left(a'+\frac{b'\,sen.\,B}{sen.(B+C)}\right)\left(c'+\frac{b'sen.\,B}{sen.(B+C)}\right)$$; Si ponga

$$a+\frac{b'\,sen.\,B}{sen.(B+C)}=e,\; c'+\frac{b'sen.\,B}{sen.(B+C)}=f,$$ onde si abbia

$d'^2=e^2+f^2+\ 2ef\cos.(B+C)$; Quindi ne proviene

$$d'^2=(e+f)^2-2ef\,(1-\cos.(B+C))=$$

$$(e+f)^2\left(1-\frac{4ef\,sen.\,\frac{1}{2}(B+C)^2}{(e+f)^2}\right).$$

Pongasi $\frac{4ef\,sen.\frac{1}{2}(B+C)^2}{(e+f)^2}=sen.E^2$, e ne risulterà $d'^2=(e+f)^2\cos.E^2$, o sia $d'=(e+f)\cos.E$.

550. Se fosser dati i lati a , c , d , e gli angoli B , C , si troverebbe il lato b come segue .

Si trasformi la prima equazione ausiliare in guisa, che divenga della forma

$$d'^2=(b'+a'\cos.B+c'\cos.C)^2+(a'sen.\,B-c\ sen.C\,)^2$$

Da questa si ha immediatamente

$$b'+a'\cos.B+c'\cos.\,C=\sqrt{(d'-a'sen.\,B+c'sen.C)\times(d'+a'sen.B-c'sen.C)}\ .$$

551. Qualora nel poligono vi abbiano parte le diagonali , già dicemmo , che la risoluzione riesce molto più complicata , a motivo specialmente dei molti casi che abbraccia . Nondimeno si può anche questa eseguire , e non si ha che da osservare la seguente regola , ed è :

Regola . Nella risoluzione dè Poligoni , nei quali hanno parte le diagonali , non si debbon' avere più di tre parti le quali appartengano ad un medesimo triangolo . E la ragione della regola è , che se vi fosse un'altra parte , siccom'essa è nata dalle altre tre parti , il numero degli elementi necessarj alla risoluzione non sarebbe compito , ma ve ne mancherebbe uno .

552. Osservata questa Regola non v'è difficoltà particolare per la risoluzione di cui parliamo ; ma si richiede soltanto una maggior avvedutezza nel calcolare , perchè moltissimi essendo i casi possibili , moltissimi anche sono i diversi artifizj , che usar conviene per ottenerne completa soluzione .

Noi tralasciamo di esporre il metodo con cui ridurre i suddetti casi in tante classi distinte , come hanno praticato M. Lambert , Lexell , Mayer, ed altri, perchè oltre di essere una tal classificazione di niuna conseguenza , è ancora molto facile ad eseguirsi .

CAPITOLO XI.

Teoria delle funzioni variabili .

553. Le funzioni variabili sono quelle, nelle quali ha parte qualche quantità, suscettibile di aumento , e di decremento .

Dalla natura di queste funzioni ne deriva , che possano esse ricevere delle variazioni ; noi passiamo a trattarne .

554. Se una funzione di una , o più variabili φ, riceva una variazione finita espressa per $\Delta\varphi$, $(\varphi\pm\Delta\varphi)-\varphi$ dicesi la differenza finita , e si ottiene con sostituire nella funzione proposta la variabile accresciuta , o diminuita della sua differenza , secondo che la differenza sia positiva , o negativa , e quin-

quindi sottrarre dal risultato la funzione primitiva.

555. Il calcolo delle differenze finite dee preceder quello delle differenze evanescenti, il quale si occupa nel determinare le variazioni infinitesime delle funzioni variabili. Parrebbe quindi, che questo secondo calcolo avesse dovuto esser preceduto da quello delle differenze, o variazioni finite, ma pure egli è avvenuto il contrario. Non avviene quasi mai, che l' ingegno abbracci sulle prime una materia in tutta la sua estensione, e generalità.

556. Tutto il Calcolo delle differenze finite riducesi alla soluzione di due problemi. L'oggetto del primo è di trovare le differenze di una grandezza variabile qualunque, e di una funzione qualunque di grandezze variabili. Questo problema è solubile in tutta la sua estensione. Noi lo esporremo sotto il nome di Calcolo dirètto delle differenze finite.

L'altro problema è l'inverso del precedente, ed ha per oggetto il determinare una grandezza, di cui è data la differenza finita; questo è sovente insolubile, o almeno per un'infelicità comune a tutti i Metodi inversi, in molti casi sfugge tutta la sagacità delle regole, e tutta la destrezza degli artifizj. Noi ne tratteremo sotto il nome di Calcolo inverso dèlle differenze finite.

SEZIONE I.

Calcolo diretto delle differenze finite.

557. *Probl.* Determinare le variazioni finite di una qualunque funzione algebraica, composta di una, o più variabili.

Soluzione. Cominciando dalle funzioni di una sola variabile: Sia 1.° proposta a determinarsi la differenza finita di una funzione potenziale x^m, Si ponga $x \pm \Delta x$ in luogo di x, essendo Δx una quantità finita qualunque, e si avrà $\Delta x^m = (x \pm \Delta x)^m$

$$- x^m = \pm m x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} \Delta x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3} \Delta x^3 \ \&c.$$

Se si volesse $\Delta . (x+y+z \ \&c.)^m$, si porrebbe $x \pm \Delta x$ in luogo di x, $y \pm \Delta y$ in luogo di y &c. e la differenza fra la nuova funzione risultante, e la funzione proposta sarebbe la differenza cercata.

Sia 2.° Una funzione di due variabili xy; Sarà $\Delta . xy = (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y) - xy = \pm x \Delta y \pm y \Delta x \pm \Delta x \Delta y$. Per una funzione della forma ($xyztu$ &c.) l'operazione è la medesima.

Sia 3.° una funzione finita $\frac{x}{y}$; Si avrà ....

$$\Delta . \frac{x}{y} = \Delta x y^{-1} = (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y)^{-1} - x y^{-1} = \pm \frac{\Delta x}{y} \pm \frac{x \Delta y}{y^2} \pm \frac{\Delta x \Delta y}{y^2} \pm \frac{x \Delta y^2}{y^3} \ \&c.$$

Egualmente si procede per trovare la differenza finita di Funzione $\left(\frac{x, y, z \ \&c.}{t, u, k \ \&c.}\right)$.

Sia 4.° Una funzione radicale. $X^{\frac{1}{n}}$; pongasi $\pm \Delta x$ per x in X, ed il risultato sia X'; si avrà $\Delta . X^{\frac{1}{n}} = X'^{\frac{1}{n}} - X^{\frac{1}{n}}$; Se sia per esempio $X = x^2$,

x^2, sarà $\Delta x^{\frac{2}{n}} = (x \pm \Delta x)^{\frac{2}{n}} - x^{\frac{1}{n}} = \pm \frac{2}{n} x^{\frac{2-n}{n}}$

$\Delta x + \frac{2}{n}\left(\frac{2-n}{2n}\right) x^{\frac{2-2n}{n}} \Delta x^2$ &c. &c.

558. *Scol.* Se gli aumenti successivi di una funzione X si rappresentino per X', X'', X''' &c. cosicchè X' esprima ciò che diviene X con porre $x \pm \Delta x$ in luogo di x, e X'' esprima cio che diviene X' con porre per x, $x \pm \Delta x$ &c., si avranno le formole generali, che seguono $\Delta X = X' - X$; $\Delta X' = X'' - X' \Delta X'' = X''' - X''$ &c.

559. Le differenze delle grandezze essendo anch'esse grandezze, sono suscettibili di variazione. Questa dicesi differenza seconda; la variazione di una differenza seconda si chiama differenza terza, e così in seguito. Queste differenze si rappresentano per Δ^2, Δ^3, Δ^4 &c. Δ^m, e si possono esprimere per le funzioni X', X'', X''' &c. Infatti avendosi $\Delta X = X' - X$ si ha $\Delta^2 X = \Delta X' - \Delta X$, e sostituendo i valori di $\Delta X'$. e ΔX, $= X'' - 2X' + X$.

Nel modo stesso si ha $\Delta^3 X = \Delta^2 X' - \Delta^2 X = X''' - 3X'' + 3X' - X$, e così in seguito.

Si ha pertanto $\Delta^n X = X^{(n)} - nX^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} X^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} X^{(n-3)}$, &c. dove gli esponenti non esprimono moltiplicazione, ma l'ordine solamente delle funzioni.

Trasponendo le formole dello Scolio 1.°, e sostituenndo i valori di X', X'', X''' &c. si ottiene con egual facilità $X^{(n)} = X + n\Delta X + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 X + \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 X +$ &c.

560.

560. Da questa formola è facile a dedurre l'espsessione del termine generale di una serie algebrica $= a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} c + \frac{(n-1)(n-2)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$ &c. dove a esprime la funzione, che serve di primo termine, b, c, d, &c. le differenze successive dei termini contigui, ed n l'ordine relativo del termine, che si cerca.

561. Può avvenire però, che s'incontri qualche differenza costante, e che per conseguenza la di lei variazione sia zero. Per esempio il Termine generale di una progressione Aritmmetica, è una funzione variabile, di cui le prime differenze sono costanti; Il termine generale della serie de quadrati dè numeri naturali 1, 4, 9, 16 &c. è una funzione variabile, che ha le differenze seconde costanti; Il termine generale della serie dè cubi dè numeri naturali è una funzione variabile di cui le terze differenze sono costanti, e così in seguito.

562. *Scol.* Ci sono delle questioni nelle quali è necessario riguardare qualche differenza come costante, e questo si concepisce da ciò, che si è detto di sopra.

Si danno però infinite questioni, che non richiedono punto, che si ponga veruna differenza costante. Tuttavolta, siccome può attribuirsi ad una data grandezza quella variazione, che si giudica più a proposito, purchè le variazioni dell' altre quantità dipendenti dalla prima sieno subordinate alle variazioni, che si sono attribuite alla medesima, è sempre permesso in un problema di supporre una delle differenze come costante, avvertentendo solamente, che le altre quantità ne debbono variare in conseguenza, e che non si può supporre un'altra differenza costante, eccettuato il caso in cui per la natura della questione, una dell'altre differenze dovesse avere un rapporto costante con quella, che si è supposta costante.

Ci rimane adesso da vedere, come si possa determinare la variazione di una funzione Trigonometrica, e Logarimmica. A quest'oggetto sia.

563. *Probl.* Determinar la differenza di $sen.\,x$, e di $cos.\,x$.

Soluzione. Si avrà $\Delta\, sen.x = sen.(x+\Delta x) - sen.\,x =$ $sen.x\, cos.\Delta x + sen.\Delta x\, cos.x - sen.x$, e sostituiti i valori di $cos.\Delta x$, e di $sen.\Delta x$, $\Delta\, sen.x = \Delta x\, cos.\,x$

$$-\frac{\Delta x^2}{2} sen.x - \frac{\Delta x^3}{2.3} cos.\,x \;\&c.$$

Col medesimo raziocinio si trova $\Delta\, cos.\,x = \ldots$

$$-\Delta x\, sen.x - \frac{\Delta x^2}{2} cos.x - \frac{\Delta x^3}{2\,.\,3} sen.\,x - \&c.$$ come pure $\Delta\, tang.x = \Delta.\dfrac{sen.\,x}{cos.\,x}$, e $\Delta\, cot.x = \Delta.\dfrac{cos.\,x}{sen.\,x}$ &c.

564. *Probl.* Determinare le variazioni finite di qualunque funzione logarimmica.

Soluzione. Sia proposto a differenziarsi $log.\,x$

Si avrà $\Delta.log.x = log.(x \pm \Delta x) - log.x = log.\left(1 \pm \dfrac{\Delta x}{x}\right)$

$$= \pm\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} \pm \&c. \ldots (A).$$

Se la funzione logarimmica fosse di qualunque altra forma, per esempio $log.x^m$, $log.xy$, $log.\dfrac{x}{y}$ non

non si avrebbe, che da sostituire nella formola (A) i valori opportuni in luogo Δx, a tenore di ciò, che si è detto di sopra.

Qualora si avesse $(log.X)^m$, essendo X una funzione qualunque di x, e m un numero qualunque, pongasi $log.X=y$, e si differenzj y^m; indi si ponga nella formola, che ne risulta, cioè ....

$$\pm m y^{m-1}\Delta y + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} y^{m-2}\Delta y^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} y^{m-3}\Delta y^3 \;\&c.$$

il valore delle potenze di y, come pure di Δy, e delle sue potenze, e si avrà la differenza cercata.

Qui cade adesso in acconcio dimostrare il seguente

565. *Teor.* Se una funzione variabile nelle successive sue variazioni passi dal positivo al negativo o viceversa, essa dee passar necessariamente o per zero, o per l'infinito.

Dimostrazione. Sia la funzione $a-x$, e suppongasi $x<a$ sarà $a-x$ positiva. Se x vada crescendo diminuirà il valor di $a-x$ finchè divenuto $x=a$ si abbia $a-x=0$. Cresca x, ed $a-x$ prenderà un valor negativo. Per vedere il passaggio per l'infinito, basta fare lo stesso raziocinio sulla funzione $\dfrac{P}{a-x}$.

SEZIONE II.

Calcolo Inverso delle differenze finite.

566. Essendo Σ il segno esprimente l'operazione opportuna per dedurre da una differenza finita la funzione primitiva, che la produsse, è chiaro, che si ha primieramente $\Sigma\Delta.\, x = x \pm C$ cioè $\pm$ una quantità costante, che può essere svanita nel prendere la

la differenza, e che si determina secondo la natura del problema, di cui si tratta, come vedremo in appresso.

567. Trattandosi di trovare la somma finita della differenza di una potenza x^m, siccome si ha ...

$$\Delta x^m = \pm m x^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} x^{m-2}\Delta x^2 \pm \text{\&c. si vede,}$$

che dee aversi

$$\Sigma\Delta . x^m = \Sigma(\pm m x^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} x^{m-2}\Delta x^2 \text{ \&c.}) = x^m$$

568. Con la medesima riflessione si vede, che si ha generalmente $\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = xy$, come ancora

$$\Sigma(\frac{x\Delta x}{y} \mp \frac{x\Delta y}{y^2} \mp \frac{\Delta x\Delta y}{y^2} + \frac{x\Delta y^2}{y^3} \text{ \&c.}) = \frac{x}{y}.$$

559 Si vede di quì, che se la differenza proposta sia una differenza perfetta, non si ha che da osservare in virtù de' principj esposti di sopra per la differenziazione, qual sia la funzione, che può averla prodotta; Essa è la somma finita che si cerca.

Terminiamo questa difficile, e scarsa Teoria col seguente

570. *Probl.* Data una potenza x^m trovar la funzione, dalla di cui differenziazione sia derivata.

Soluzione. Si ponga $\Sigma x^m = A x^{m+1} + B x^m + C x^{m-1} + \text{\&c.}$

Si prenda la differenza finita da ambe le parti, e si dispongano i termini omologi in colonna verticale, onde si abbia

$$x^m = A(m+1)x^m\Delta x + A\frac{(m+1)}{2} m x^{m-1}\Delta x^2 + A\frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3} x^{m-2}$$

$$+ \quad B m x^{m-1}\Delta x + B\frac{m(m-1)}{2} x^{m-2}$$

$$+ \quad C(m-1) x^{m-2}$$

B b

Si

Si facciano eguali a zero separatamente i coefficienti di ciascuna colonna verticale, e si dedurranno i valori di A, B, C &c., e con ciò la somma richiesta.

Si ha infatti $A = \frac{1}{(m+1)\Delta x}$; $B = -A\frac{(m+1)}{2}\Delta x = -\frac{1}{2}$

$$C = -A\frac{(m+1)m}{2\,.\,3}\Delta x^2 - B\frac{m}{2}\Delta x = \text{\&c.};$$

$$D = -A\frac{(m+1)m(m-1)}{2\,.\,3\,.\,4}\Delta x^3 - B\frac{m(m-1)}{2\,.\,3}\Delta x^2$$

$$-C\frac{(m-1)}{2}\Delta x = \text{\&c.}$$

Sostituiti questi coefficienti si ottiene una formola generale, che somministra in qualunque caso la somma finita di una potenza x^m.

SEZIONE III.

Calcolo diretto dei limiti.

571. Veduto il Metodo di trovare le differenze finite, nasce naturalmente in pensiero di passare alla ricerca dei limiti, ai quali si vanno indefinitamente accostando i rapporti delle differenze finite di due variabili, che si suppongono diminuite oltre ogni limite. Questo è stato il passo più mirabile dell'umano ingegno, e fu mosso dal gran Newton il primo sulle dubbie traccie di Barow. Entriamo a gustarne que' primi saggi, che sono più opportuni a porgere ai giovani le giuste, fondamentali idee del Metodo diretto de' limiti, detto volgarmente Calcolo Differenziale.

572. La differenza finita di x^m si è veduta essere

$$\Delta x^m = \pm m x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} \Delta x^2 \;\&c.$$

Si divida per Δx, e si avrà $\frac{\Delta . x^m}{\Delta x} = \pm m x^{m-1} + \ldots \frac{m(m-1)}{1 . 2} x^{m-2} \pm$ &c. Si supponga diminuito Δx oltre ogni limite, e rimarrà $\frac{\Delta . x^m}{\Delta x} = m x^{m-1}$; preso il segno d per esprimere la differenza evanescente, sarà $\frac{d . x^m}{dx} = m x^{m-1}$; si ponga $x^m = y$, e si avrà finalmente $\frac{d . y}{d . x} = m x^{m-1}$, che è il limite, a cui si va indefinitamente accostando il rapporto delle due variabili x, y, considerate come nascenti, o come evanescenti, oggetto caratteristico del Calcolo Differenziale.

573. L'equazione $\frac{d . y}{d . x} = m x^{m-1}$ suppone di sua natura che $\frac{0}{0}$ abbia un valor finito. Che ciò sia così, eccone una prova. Sia la funzione .... $K \frac{(x^m - a^m)}{(x^n - a^n)}$; Essa, fatto $x=a$, diviene $\frac{0}{0}$; nondimeno se facciasi la divisione con supporre x indeterminata, e nel quoziente $K(x^{m-n} + a^n x^{m-2n} + a^{2n} x^{m-3n}$ &c.) si ponga $x=a$, si ottiene K funz.ne a^{m-n} per il valore della sudetta frazione quando $x=a$.

Vediamo, come si determini generalmente il valo-

re di $\frac{0}{0}$. Sia $\frac{M}{N}$ una frazione, che divenga $= \frac{0}{0}$ nell' ipotesi di $x=a$; Si ponga $x + dx$ in luogo d'x, onde si abbia $\frac{M + dM}{N + dN}$; in questa si faccia $x = a$, e $\frac{dM}{dN}$ sarà il valore di $\frac{M}{N}$ nell'ipotesi di $x = a + dx$, o sia di $x=a$.

Se $\frac{d . M}{d . N}$ risultasse $= \frac{0}{0}$, si opererebbe come sopra.

Si vede di qui, che $\frac{0}{0}$ è un' espressione indeterminata.

574. Se l'esponente m fosse fratto, non si tarderà punto a trovare il limite. Pongasi $m = \frac{p}{q}$, e si avrà in generale

$$dy = d\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} dx = \frac{p}{q} x^{\frac{p-q}{q}} dx = \ldots\ldots \frac{p\,dx}{q\sqrt[q]{x^{q-p}}},$$

e finalmente $\frac{d . y}{d . x} = \frac{p}{q\sqrt[q]{x^{q-p}}}$.

In generale, se si avesse da differenziare una funzione complessa $(x^n + bx^m + cx^r \;\&c.)^p$ si farebbe $= X^p$, e si avrebbe $d . X^p = \ldots\ldots\ldots\ldots pX^{p-1} d . X = p(x^n + bx^m + cx^r \;\&c.)^{p-1} d(x^n + qx^m \;\&c.)$ dove p potrebb' essere qualunque intero, ò fratto.

575. Col medesimo principio delle differenze evanescenti si ottiene il limite di ....

$\frac{\Delta(xy)}{\Delta x}$ ed è $\frac{d(xy)}{dx} = \frac{xdy \pm ydx}{dx} + dy = \frac{xdy \pm y\,dx}{dx}$; e perciò si ha $d.xy = xdy \pm ydx$, che dicesi il differenziale di xy.

576. Nella stessa maniéra si trova $\frac{\Delta.\frac{x}{y}}{\Delta x} = \frac{\Delta.(xy^{-1})}{\Delta x}$ ed è $\frac{d.\frac{x}{y}}{dx} = \left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}\right) : dx = \ldots\ldots\ldots \frac{ydx - xdy}{y^2dx}$, e si ha $d.\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

577. Da tutto questo si raccoglie 1.° Che per ottenere il differenziale evanescente di una potenza x^m si dee moltiplicare la potenza stessa per il suo esponente, e dividerla per la radice x. 2.° Che per differenziare un rettangolo xy si dee moltiplicar ciascuna variabile per il differenziale dell' altra. 3.° Che per differenziare una frazione $\frac{x}{y}$ si dee moltiplicare per il denominatore il differenziale del numeratore; sottrarvi il prodotto del numeratore nel differenziale del denominatore, e dividere il risultato per il quadrato del denominatore. Con queste tre regole non v'è funzione algebraica, di cui non si ottenga il differenziale.

578. *Scol.* M. de la Grange in una lettera al Conte Fagnani l'anno 1754. diede una formola generale, per cui si ottiene immediatamente il differenziale, del prodotto di un numero qualunque di variabili.

Siccom' essa é non meno semplice, che elegan-

te giova qui addurla brevemente. Essa è la seguente

$$(xy)^m = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 \ \&c.$$

In essa m rappresenta l'ordine del differenziale, che si cerca, e perciò mostra che la quantità si dee prendere nell'attual sua forma. La generalità di questa formola si può verificar facilmente; In appresso si può vedere, che serve ugualmente per un numero qualunque di fattori.

579. *Probl.* Si dimanda il differenziale di una funzione logarimmica qualunque.

Soluzione. Nella differenza logarimmica $\Delta\, logl\, x = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{3x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3}$ — &c. si divida per Δx, e facciasi Δx evanescente; rimarrà $\frac{d.\,log.x}{dx} = \frac{1}{x}$, e perciò $d.log.x = \frac{dx}{x}$.

Se x fosse una potenza intera, o fratta, onde si avesse x^m, si ridurrebbe quest'espressione ad $m\,log.x$ e se x fosse un prodotto, oppure un quoziente, si dividerebbe il logarimmo nelle sue parti, e si opererebbe come sopra. Resta che abbiasi a differenziare $\overline{log.x^m}$; In questo caso, facciasi $\overline{log\, x} = y$, e si avrà $d.\,\overline{log.x}^m = d.\,y^m = my^{m-1}dy = m\,\overline{log.x}^{m-1}\frac{dx}{x} = m\,\overline{log.\,x}^{m-2}.\,dx$.

580. Col principio delle differenze finite si trova con egual facilità il differenziale di un seno, e di un coseno; Si ha $d.sen.x = dx cos.x$, e .... $d.cos.x = -\,dx\,sen.x$.

581.

581. Gli usi incomparabili di questi principj si vedranno nel Calcolo Differenziale da coloro, che vorranno proseguire questi nobili, ed amenissimi studj.

Intanto vediamone un saggio nella formazione di una potenza $(a+x)^m$: Questa si ponga .... $= A+Bx+Cx^2+Dx^3$ &c.; Siccome ambedue i membri dell'equazione $(a+x)^m = A+Bx+Cx^2+Dx^3$ &c. si suppongono eguali, per un'egual mutazione debbono conservar l'eguaglianza. Si faccia dunque $x=0$, e si avrà $a^m=A$. Fatto questo si prenda il differenziale da ambe le parti, e si avrà .... $m(a+x)^{m-1}dx = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx$ &c. Si ponga dinuovo $x=0$, e si divida per dx.

Rimarrà $ma^{m-1} = B$; Si differenzj nuovamente l'equazione rimasta $m(a+x)^{m-1}=B+2Cx+3Dx^2$ &c. Si trova $m(m-1)(a+x)^{m-2}dx=2Cdx+6Dxdx+$ &c. Dividasi per dx, e facciasi $x=0$, e si avrà ....

$$\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}=C,$$

e proseguendo nel modo stesso si troveranno tutti i coefficienti della formola Newtoniana. Non è gia che questa sia una dimostrazione del Teorema Newtoniano, perchè il Calcolo differenziale dipende da esso. Fu un errore dell' Eulero il credere, che il Teorema Newtoniano si potesse provare col sudetto Calcolo. Quando una verità si è dimostrata una volta, è facile dimostrarla in molte altre maniere, ma si richiede assai di avvedutezza, perchè le seconde non dipendano dalla prima.

SEZIONE IV.

Calcolo Inverso de' limiti.

582. Appena si fece il memorabil passo dell' Analitica determinazione de' limiti, tosto si cominciò a sentire il bisogno di tornare dai limiti alle funzioni, da cui essi erano derivati. Il Metodo che si occupa di questo problema, e che dicesi Metodo inverso de' limiti, e Calcolo Integrale, punto al Metodo diretto non cede nella fecondità, ma disgraziatamente lo supera di assai, sorte comune dei Metodi inversi, nella difficoltà, e nell'intricatezza. A noi non appartiene che attingerne le prime idee.

583. Siccome si è veduto esser $d.x^m=mx^{m-1}dx$, posto che sia $\int$ il segno dell'Integrazione, si ha $\int d.x^m = m\int x^{m-1}dx$ cioè $x^m=m\int x^{m-1}dx$; Si faccia $m-1=n$, e si avrà $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, formola, che ci somministra una Regola generale: Che per integrare una differenziale monomia basta accrescere il suo esponente di un' unità, e dividerla per l'esponente così accresciuto, e per il differenziale.

584. Essendo proposto il differenziale $d.xy=xdy+ydx$ si avrà $\int(xdy+ydx)=xy$; come pure se venga dato il differenziale $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xd}{y^2}$, si

avrà $\int \left(\frac{ydx - xdy}{y^2} \right) = \frac{x}{y}$ com'è per se manifesto.

585. *Scol* Giova qui osservare, che per mezzo della formola di M. de la Grange si può trovar prontamente l'integrale di qualunque ordine del differenziale di un prodotto di piú variabili. A quest'effetto si prenda m negativa, e si avrà l'integrale che si cerca.

586. Rimane da osservarsi, che se si avesse da integrare $\frac{dx}{x}$, sarebbe $\int \frac{dx}{x} = log.\ x$ come pure ... $\int \left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right) = log. \frac{x}{y}$, e così di molte altre funzioni di questo genere.

E che avendosi $dx\ cos.\ x$, $-dx\ sen.x$, si dee avere $\int dx\ cos.\ x = sen.x$, e $\int -dx\ sen.\ x = cos.\ x$.

Questo è quanto si richiedeva per agevolare il sentiero all'intelligenza di alcune cose, che verranno in appresso, e per dare una leggiera, ma giusta idea del Calcolo Infinitesimale.

SEZIONE V.

Teoria delle funzioni Massime, e Minime.

587. Fra le funzioni variabili ve ne sono alcune, i di cui decrementi, o incrementi sono circoscritti da limiti determinati, cosicchè giunte che sieno esse a questi limiti, la di loro variazione retrocede, finché ritorni ad un'altro limite, e così in seguito.

Il limite d'incremento dicesi valor Massimo, ed il limite di decremento dicesi valor minimo della funzione, di cui si tratta.

588. La ricerca dei valori che avèr debbono le variabili componenti una funzione, perché si trovi essa in un limite, appellasi Metodo de'Massimi, e Minimi, ed è un ramo di Teoria non men dilettevole, che dovizioso, tanto per la scoperta di moltissimi Teoremi astratti, e geometrici, quanto pel ritrovamento di molte sublimi verità in tutta la Fisica.

589. E' da questo metodo per esempio, che si sà nella Ballistica, qual esser debba la figura de' projettili, e quale la via angolare, che debbono seguire, perchè la lunghezza del loro cammino risulti la massima.

Per esso nel Idraulica si sa, qual debba esser la curva, che riceva da una colonna di acqua il massimo colpo in tutte le situazioni. Per esso nella Nautica non s'ignora la precisa figura esterna di un vascello, disposta ad incontrare la minima resistenza, e lo stesso dicasi di altre non meno eleganti, che vantaggiose scoperte.

590. *Probl.* Proposta una funzione di una sola variabile, determinare le condizioni, che si richiedono, perchè sia ella suscettibile di massimo, o di minimo; fissare i criterj, per i quali conoscere se un dato valore debba produrre un massimo, o un minimo; e determinare una formola, la quale comprenda tutti i valori della variabile, che possono render tale la proposta funzione.

Soluzione. Sia la funzione generale .... $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \&c. + K =$ Funz.^{ne} (x); Pongasi $x \pm \Delta x$ in luogo di x e sia Δx estremamente piccolo. E'facile a vedersi che si avrà la funzione trasformata, che segue

$$x^m \pm m x^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2}\Delta x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3}\Delta x^3 \,\&c.$$

$$+ p x^{m-1} \pm (m-1) p x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} p x^{m-3} \,\&c.$$

$$+ q x^{m-2} \pm (m-2) q\, x^{m-3} \,\&c. = \text{Funz.}^{\text{ne}} (x \pm \Delta x) = \ldots\ldots$$

$$x^m + p x^{m-1} + q x^{m-2} \ldots\ldots + K\ (= \text{Funz.}^{\text{ne}} (X)\ )$$

$$\pm (m x^{m-1} + (m-1) p x^{m-2} + (m-2) q x^{m-3} \,\&c.\ ) \Delta x$$

$$+ \left(\frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} p x^{m-3} \,\&c. \right) \Delta x^2$$

$$\pm \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3} + \&c. \right) \Delta x^3 .$$

$$+ \&c.$$

Si ponga il coefficiente di $\Delta x = P$; quello di $\Delta x^2 = Q$, quello di $\Delta x^3 = R$, e così in seguito, e si avrà

$\text{Funz.}^{\text{e}} (x \pm \Delta x) = \text{Funz.}^{\text{e}} (x) \pm P\Delta x + Q\Delta x^2 \pm R\Delta x^3$ &c.

Si trasponga, e sarà ……………………………

$\text{Funz.}^{\text{e}} (x) = \text{Funz.}^{\text{e}} (x \pm \Delta x) \pm P\Delta x - Q\Delta x^2 \pm R\Delta x^3$ &c.

e separando i segni ……………………………

$\text{Funz.}^{\text{e}} (x) = \text{Funz.}^{\text{e}} (x + \Delta x) - P\Delta x - Q\Delta x^2 + R\Delta x^3$ &c.

$\text{Funz.}^{\text{e}} (x) = \text{Funz.}^{\text{e}} (x - \Delta x) + P\Delta x - Q\Delta x^2 + R\Delta x^3$ &c.

S' avverta adesso, che quando funzione (x) arriva al massimo, deve esser $> \text{Funz.}^{\text{e}} (x + \Delta x)$, e $> \text{Funz.}^{\text{e}} (x - \Delta x)$, e che quando arriva al minimo deve essere $< \text{Funz.}^{\text{e}} (x + \Delta x)$, $< \text{Funz.}^{\text{e}} (x - \Delta x)$, con questo si vede chiaramente, che sussistendo $P\Delta x$ non può aver luogo nessuna di queste due condizioni, perchè a motivo di Δx estremamente piccolo $P\Delta x > Q\Delta x^2$, e perciò ne risulta ………

$\text{Funz.}^{\text{e}} (x) < \text{Funz.}^{\text{e}} (x + \Delta x)$, e

$\text{Funz.}^{\text{e}} (x) > \text{Funz.}^{\text{e}} (x - \Delta x)$.

Nell' ipotesi dunque del massimo, o del minimo deve esser $P = 0$, e perciò deve aversi ……… Fun-

$\text{Funz.}^{\text{e}} (x) = \text{Funz.}^{\text{e}} (x + \Delta x) - Q\Delta x^2 - R\Delta x^3 - S\Delta x^4$ &c.

$\text{Funz.}^{\text{e}} (x) = \text{Funz.}^{\text{e}} (x - \Delta x) - Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 - S\Delta x^4$ &c.

Ora si osservi a motivo della somma piccolezza di Δx, la quale si può supporre indefinitamente prossima all' evanescenza, $Q\Delta x^2$ deve risultar maggiore della somma di tutti i termini, che le succedono, e si vedrà, che essendo Q positivo deve aversi $\text{Funz.}^{\text{e}} (x) < \text{Funz.}^{\text{e}} (x + \Delta x)$, e $< \text{Funz.}^{\text{e}} (x - \Delta x)$, e che essendo Q negativo deve aversi ……… $\text{Funz.}^{\text{e}} (x) > \text{Funz.}^{\text{e}} (x + \Delta x)$, e $\text{Funz.}^{\text{e}} > (x - \Delta x)$.

Ecco dunque, che la principal condizione della possibilità del massimo, e del minimo è, che sia $P = 0$. Posta questa, se Q sia positivo, avrà luogo il minimo, e se Q sia negativo, avrà luogo il massimo.

Ora P non è altro, che la funzione proposta moltiplicata ordinatamente per la progressione arimmetica m, $m-1$, $m-2$ … $m-m$; dunque affinché abbia luogo il massimo, o il minimo deve essere $m x^{m-1} + (m-1) p x^{m-2} + (m-2) q x^{m-3} \ldots \&c. = 0$, cioè x deve essere uno dei valori compresi in quest' equazione. E' dunque dalla soluzione di essa, che si possono sapere tutti i massimi, e tutti i minimi, di cui è suscettibile la funzione proposta.

Siccome poi Q altro non è, che la funzione P moltiplicata ordinatamente per la progressione arimmetica $m-1$, $m-2$, $m-3$ … $m-m$ convien sostituire ciascun valore di x dedotto dall' equazione $P = 0$, per i metodi, che esporremo, nella funzione Q, per poter decidere quali valori di x producano un massimo, e quali un minimo.

591. *Scol.* 1. Tutti i valori di x, che verificano l'equazione $P = 0$, essendo sostituiti nella funzione proposta debbono renderla un massimo, o un

un minimo. Difatto non vi è veruna ragione sufficiente, per cui si debba preferire uno più tosto, che un'altro di tali valori; mentre ciascuno sodisfa alla condizione richiesta.

592. *Scol.* 2. Nel caso, che oltre di P svanisse anche Q, per il raziocinio stesso, per cui si è provato, che non può aver luogo massimo, nè minimo, senza che vada a zero P, rimane dimostrato, che deve andare a zero anche R, e non S, e che dal segno positivo, o negativo di S si deve conoscere, se ciascun valore di x sodisfacente all'equazione $R=0$ debba rendere la funzione proposta un massimo, ò un minimo; e lo stesso dicasi, qualora svanisca S, e così in seguito.

593. *Probl.* Data una funzione di un numero qualunque di variabili, determinare le condizioni, dalle quali dipende la possibilità dei suoi massimi, e minimi, trovare un'equazione, la quale comprenda tutti valori, che li possano produrre, e distinguere quali debbano produrre un massimo, e quali un minimo.

Soluzione. Se 1,° la funzione proposta sia composta di varie funzioni distinte di diverse variabili, cosicchè sia della forma $X \pm Y \pm Z$ &c. dove X è funz.e (x), Y è funz.e (y), Z è funz.e (z) &c. non si deve far altro, che determinare i massimi, e i minimi di ciascuna funzione separatamente per mezzo del metodo esposto. Dopo di ciò, quante combinazioni si avranno dei valori producenti un massimo di x, y, z &c. tanti massimi potrà ricevere la funzione proposta, e viceversa, quante combinazioni si avranno dei valori di x, y, z &c. producenti un minimo, tanti minimi potrà ricevere la proposta funzione.

Di questo poi se ne capisce la ragione facilmente avvertendo, che una funzione di più variabili, non può esser massima; ò minima, senza che ciascuna variabile cospiri nel medesimo tempo a produrre un massimo, o un minimo.

2.° Passiamo al caso, in cui le variabili sono miste insieme in qualunque modo per moltiplicazione, o per divisione.

Nel primo caso, inerendo al principio, che ciascuna variabile debba concorrere nel medesimo tempo al massimo, o al minimo, si dovrà considerare la funzione totale come composta successivamente di una sola variabile, e formarne l'equazione $P=0$. In questo modo si otterranno tante equazioni della forma di $P=0$, quante sono le variabili, e da queste permezzo dell'analisi, si dedurranno tutti i valori di ciascuna variabile, capaci di rendere per se stessi la funzione proposta un massimo, o un minimo.

Determinati questi valori, quante combinazioni si avranno dei valori producenti un massimo, di tanti massimi sarà suscettibile la funzione, e lo stesso dicasi per rapporto ai minimi.

Nel secondo caso la funzione si conterrà generalmente nella forma $\dfrac{A + Bx + Cx^2 \text{ \&c.}}{A' + B'x + C'x^2 \text{ \&c.}}$ ....

$$= (A + Bx + Cx^2 \text{ \&c.}) \times \frac{1}{A' + B'x + C'x^2 \text{ \&c.}}$$ dove A, B, C &c. sieno funzioni algebraiche qualunque di y, z, t, &c. Ora un prodotto non può esser massimo, o minimo, senza che massimi sieno, o minimi nel tempo stesso i suoi fattori; dunque basta trovare i valori di x, che rendono mas-

massimo, o minimo il fattore $A+Bx+Cx^2$ &c. per ciò che si è detto di sopra, e lo stesso operare per rapporto alla funzione $A'+B'x+C'x^2$ &c. avvertendo solamente, che quei valori di x, i quali rendono un massimo $A'+B'x+C'x^2$ &c. rendono un minimo la frazione $\frac{1}{A'+B'x+C'x^2 \text{ \&c.}}$, e viceversa.

Si osserverà pertanto quante abbiansi combinazioni dei valori producenti un massimo, e quante se ne abbiano di quelli producenti un minimo, e saranno così determinati tutti i massimi, e i minimi della funzione fratta $\frac{A+Bx+Cx^2 \text{ \&c.}}{A'+B'x+C'x^2 \text{ \&c.}}$.

Questo è il metodo di determinare i massimi, e i minimi di qualunque funzione algebraica razionale.

594. *Scol.* Non è difficile a ravvisarsi, che data essendo una funzione X, si ha con differenziarla, un equazione identica all'equazione $P=0$, e che perciò invece di dedurre dalla funzione data l'equazione $P=0$ si può impiegare l'equazione $\frac{dX}{dx}=0$ che si ottiene con un operazione più semplice, e più spedita.

Basti per adesso aver divisato il metodo, di cui dovremo far uso nell'Analisi per risciogliere i problemi dei massimi, e dei minimi.

SEZIONE VI.

Teoria delle funzioni infinite, ed infinitesime.

595. Frà le funzioni variabili molte ve ne sono, i di cui incrementi, e decrementi non sono circoscritti da verun limite determinato: ma continuamente crescendo, o decrescendo, tendono a due limiti indefiniti, cioè all'infinito, ovvero all'infinitesimo; limiti ai quali non possono pervenire, che dopo esser passate per infiniti gradi successivi d'incremento, ò di decremento. Ai limiti di infinito, ed infinitesimo semplice, succedono i limiti d'infinito, ed infinitesimo di second'ordine; dopo di questi vengono i limiti d'infinito, ed infinitesimo di terz'ordine; e così in seguito.

Di queste funzioni considerate come esistenti, in uno dei limiti divisati passiamo opportunamente a trattare.

596. *Teor.* Qualsivoglia quantità è suscettibile di un incremento, e di un decremento infinito.

Dimostrazione. Una quantità di sua natura è suscettibile di incremento, e di decremento; ma sebbene accresciuta, o diminuita in qualunque modo, conserva sempre la sua natura; dunque può ella crescere, e decrescere in infinito.

597. *Teor.* Una quantità, che sia divenuta infinita, o infinitesima, non può ricevere nel primo caso veruno augumento, che non sia infinito, e non può ricevere nel secondo verun decremento, che non sia infinito.

Dimostrazione Una quantità finita, la quale sia giunta all'infinito, ha ricevuti tutti i gradi finiti di accrescimento, e perciò non può esser più accresciuta di quantità finita.

Parimente una quantità finita, la quale sia divenuta infinitesima, ha subito tutti i gradi finiti di decremento, onde non può esser diminuita più di quantità finita, ma soltanto di quantità infinita. Quin-

Quindi $\infty \pm a = \infty$, $\frac{a}{\infty} : b = \frac{a}{\infty}$.

598. *Teor.* Gl'infiniti, come pure gl'infinitesimi possono essere d'infiniti ordini.

Dimostrazione. Sia una quantità finita a, e si voglia un terzo proporzionale continuo alla ragione $a : \infty$; è manifesto, che si avrà........................

$$a : \infty :: \infty\ x = \frac{\infty^2}{a} = \infty^2.$$

Nel modo si cerchi un terzo proporzionale dopo i due termini ∞, ∞^2, e si avrà $\infty : \infty^2 :: \infty^2 : x = \frac{\infty^4}{\infty} = \infty^3$, e così in seguito, e lo stesso vale per rapporto agl' infinitesimi. Per conseguenza si ha la serie $\infty : \infty^2 : \infty^3 \ldots\ldots\ldots \infty^{\infty}$, come pure $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty^3} \ldots\ldots \frac{1}{\infty^{\infty}}$.

599. Di qui ne segue, che un infinito di un'ordine m, non può accrescere ne diminuire un' infinito di un ordine $> m$. Quindi $\infty^2 \pm \infty = \infty^2$, ... $\infty^3 \pm \infty^2 = \infty^3$; $\infty^m \pm \infty^{m-1} = \infty^m$. Difatto il rapporto di ∞ ed ∞^2 è lo stesso, che quello di $1 : \infty$; ora 1 non può accrescere ne diminuire l'infinito, dunque &c.

Lo stesso dicasi degl'infinitesjmi, e si vedrà, che

$$\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty},\ \frac{1}{\infty^2} \pm \frac{1}{\infty^3} = \frac{1}{\infty^2} \ldots\ldots\ldots \frac{1}{\infty^m} \pm \frac{1}{\infty^{m-1}} = \frac{1}{\infty^m}.$$

600. Per rapporto alle operazioni da farsi sù questa sorta di funzioni, non vi è altro riguardo

da aversi che quello indicato al (*n.* 597.) esposto intorno alla somma, ed alla sottrazione, poiche i di loro prodotti, quozienti, potenze, e radici si ottengono colle regole stesse, solite usarsi per le quantità finite. Si ha per esempio

$$\infty^2 \times \infty^3 = \infty^5,\ \infty^m \times \infty^n = \infty^{n+m},\ \frac{\infty^m}{\infty^n} = \infty^{m-n}.$$

$$(\infty^m)^n = \infty^{mn},\ (\infty^m)^{n} = \infty^{\frac{m}{n}}.$$

Passiamo adesso a considerar l'equazioni infinite, e sia proposto il seguente

601. *Probl.* Data un'equazione a due variabili, nell'ipotesi che divenga una di esse uguale all'infinito, o all'infinitesimo, determinare quali debbano essere i termini che svaniscono, e quali quelli che rimangono.

Soluzione. Per effettuar la soluzione di quest'interessante problema, convien premettere alcune nozioni preliminari, e sono.

I. Che se ax^m, $bx^{m-r}y^n$, posto $x = \infty$, o $= \frac{1}{\infty}$ Sieno due infiniti, o due infinitesimi omogenei, debbon'esser tali anche $x^r \cdot y^n$, ed eccone la ragione.

Dovendo essere ax^m, $bx^{m-r}y^n$ infiniti, o infinitesimi omogenei, conviene che sia $m = m - r + n$, vale a dire $r = n$; dunque &c.

II. Che in un'equazione a due, ò più variabili non si può fare una, ò più di esse $= \infty$, ò $= \frac{1}{\infty}$ indifferentemente, ma soltanto allora, che non ne deriva contradizione,

III. Che

III. Che in un'equazione non può esservi un termine infinito senza che ve ne sia per lo meno un' altro del medesim'ordine; altrimenti svanirebbero tutti i termini, eccettuato quello che si suppone infinito, ed esso poi rimarrebbe $=0$, cioè minore di tutti gli altri, il che contradice all' ipotesi.

IV. Che in un'equazione a due variabili x, y, in cui gli esponenti formino una progressione arimmetica, posta una delle variabili $=\infty$, ò $=\frac{1}{\infty}$, tutti i termini debbono risultare infiniti, o infinitesimi dello stess'ordine.

Sia l'equazione $ax^m + bx^{m-r}y^n + cx^{m-2r}y^{2n} + dx^{m-3r}y^{3n}$ &c. $=0$, e pongasi $x=\infty$; ne proviene $ax^m = a\infty^m$; dunque vi dev'essere almeno un' altro termine infinito dell'ordine m. Sia questo per esempio $cx^{m-2r}y^{2n}$, saranno (num.° 1.°) x^{2r}, y^{2n} infiniti omogenei; quindi saranno tali anche i termini x^r, y^n, e perciò saranno infiniti omogenei tutti i termini $bx^{m-r}y^n$, $cx^{m-2r}y^{2n}$, $dx^{m-3r}y^{3n}$, $ex^{m-4r}y^{4n}$ &c. &c. La dimostrazione ha luogo egualmente qualunque sia la prima coppia di termini, che si suppone omogenea, e se pongasi $x=\frac{1}{\infty}$.

Se nell'equazione data mancasse qualche termine sussisterebbe ancora la verità del Teorema. In effetto si vede dall'espressione generale di un termine qualunque $Ax^{m-pr} . y^{pn}$, che essendo x^r, y^n infiniti omogenei, si ha $Ax^{m-pr} . y^{qn} = \frac{Ax^m}{x^{pr}} . y^{pn} = Ax^m = \infty^m$. Posto tutto questo, prendiamo a sciogliere il proposto Problema.

Trat-

Trattandosi di un'equazione a due variabili x,y, sembra a prima vista, che se suppongasi $x = \infty$ non si debbano conservare, che i soli termini, nei quali x abbia la massima potenza omogenea, e che posto $x = \frac{1}{\infty}$ si debbano conservar quelli nei quali abbia la minima potenza omogenea.

Ma questo sarebbe un concludere con precipitazione, poichè la grandezza di un termine non si deve inferire dalla sola x, ma da y ancora, che può essere infinita di diversi ordini, finita, o infinitamente piccola. Se x^3y sia per esempio il termine, in cui x abbia il massimo esponente, non si deve concludere, che sia maggiore di ogn'altro, in cui detta variabile abbia un esponente minore, che sia per esempio $>$ di xy^4, perchè, se x essendo infinita, risulti y infinita dello stess' ordine, x^3y è un infinito di 4.° ordine, ed xy^4 è un infinito di 5.° ordine.

Per questa ragione, non si dee giudicare, che un termine sia maggiore di un' altro, perchè la somma degli esponenti è in esso maggiore di quella degli altri.

Convien dunque sapere di qual' ordine sia y, per poter dedurre, quali termini siano maggiori, o minori di ogn'altro. Ma per saper questo convien separare i più gran termini dell' equazione, per dedurne quindi il rapporto di x, e di y. Questo non si può eseguire senza che sappiansi quali siano questi termini: onde sembra impossibile la soluzione del problema.

Si può però facilmente osservare, che si possono supporre due qualunque dei termini maggio-

ri

ri di ogn'altro, e che soli costituiscano l'equazione, purchè una tal supposizione non conduca a dalle conseguenze contradittorie. Così per esempio nell'equazione $x^2y+ay^2-a^2x=0$ si può supporre, che a^2x svanisca in paragone dei due primi termini, essendo $x=\infty$, mentre da questa ipotesi ne risulta $x^2y+ay^2=0=x^2+ay$, e perciò $y=-\frac{x^2}{a}$, cioè ne risulta $y=\infty^2$, per cui x^2y, ay^2 divengono due infiniti di 4.° ordine, al di cui confronto $a^2x=\infty$ non è di alcun valore.

Si può supporre $x^2y-a^2x=0$, poichè ne risulta $xy-a^2=0$, $y=\frac{a^2}{x}=\frac{a^2}{\infty}$ per il che x^2y, e ax riescono eguali a ∞, ed ay^2 come $=\frac{a}{\infty^2}$ svanisce naturalmente. Con supporre però $ay^2-a^2x=0$ ne risulterebbe una contradizione, onde ay^2, a^2x non possono essere i termini massimi per cui gli altri svaniscano.

Lo stesso si può praticare nel caso che sia $x=\frac{1}{\infty}$.

Ma ciò che è riescito facile in un'equazione semplice, diviene assai operoso in un'equazione molto complessa, in cui il numero dei termini richiederebbe un gran numero di comparazioni, delle quali molte riescirebbero inutili. Newton per ovviare a quest'inconveniente, immaginò il parallelogrammo, che si chiamò poi analitico. e che da M. Gua fu ridotto utilmente ad un triangolo. Ecco brevemente il dettaglio di quest'ingegnoso ritrovato.

Si supponga un triangolo rettangolo *ABC* (Fig. 23.) di cui sia un lato *AB* situato orizzontalmente. Si dispongano in esso, diviso già in tante case, i termini tutti dell'equazione proposta, e questi nella forma, che si vede nella Fig.ª sud.ª. Da questa sola disposizione dei termini si vede subito, che nel caso di $x=\infty$, (suppongo situato il triangolo in guisa, che la colonna senza x sia l'infima colonna orizzentale nel caso di $x=\infty$, e viceversa nel caso di $x=\frac{1}{\infty}$). Si vede subito dissi, che di tutti i termini i quali esistono nella medesima colonna verticale, il più grande esser deve quello, che occupa un sito più elevato: e che dev'essere 'il più grande quello, che occupa il sito più basso. nel caso di $x\,\frac{1}{\infty}$, perchè in tutti i termini di una medesima colonna, y avendo lo stesso esponente, la di loro subordinazione dipende unicamente dall'esponente di x.

Questa considerazione diminuisce già notabilmente il numero delle comparazioni, che si richiederebbero per determinare i più gran termini dell'equazione.

Il Teorema che segue, basterà per evitare ancora tutte le altre comparazioni inutili.

602. *Teor.* Se si paragonino due termini qualunque, supponendoli dello stess'ordine, e se conducasi una linea retta per il centro di due case, in cui sono situati 1.° tutti i termini, che sono collocati in quelle case, per il di cui centro passa una tal retta, saranno del medesim'ordine.

2.° Che tutte le case, i di cui centri saranno al di sopra della retta, conterranno dei termini, i quali saranno tutti di un'ordine superiore.

3.° Che tutte le case le quali avranno il centro sopra la retta, conterranno dei termini, che saranno tutti di un'ordine inferiore.

Dimostrazione. Per concepir tutto questo, basta provare che la retta divisata passa sempre per i centri di quelle case, in cui si comprendono dei termini, nei quali gli esponenti di x, e di y, formano una progressione arimmetica.

Come questo avvenga, si vede a colpo d'occhio quando la retta passa per una delle colonne orizzontali, o per una delle colonne verticali. Basta perciò dimostrarlo per il caso in cui attraversa le case obliquamente.

Chiamate colonne le verticali, e linee le colonne orizzontali, si supponga, che la retta attraversi m linee, ed n colonne per incontrare il centro di un'altra casa dopo l' incontro della prima: è chiaro, che per essere ordinate le case uniformemente, ella dovrà attraversare altre m linee, ed altre n colonne per incontrare il centro di un'altra casa, e così in seguito.

Passi per esempio la retta per i centri delle due case y^4 ed xy^2, attraversando una linea, e due colonne. Ella passerà, com'è evidente, per il centro della casa x^2, traversando pure una linea, e due colonne, e così in seguito; e questo perchè il centro della casa x^2 ha la medesima relazione al centro della casa xy^2, che il centro di questa casa stessa a quello della casa y^4.

Ma gli esponenti di x aumentano di un'unità in traversando una linea, e gli esponenti di y aumentano di un'unità traversando una colonna da destra

a sinistra, e viceversa; dunque se il termine esistente nella prima casa sia $x^k y^l$, il termine che sarà nella seconda sarà $x^{k+m}y^{l+n}$; quello della terza sarà $x^{k+2m}y^{l+2n}$ &c. formandosi così dagli esponenti la serie k, $k+m$, $k+2m$ &c. l, $l+n$, $l+2n$ &c. Di qui dunque si deduce per ciò che si è detto al (num. 1.°), che i termini esistenti in quelle case, per i di cui centri passa la retta, debbon'essere del medesim'ordine.

Per dimostrare la verità dell'altre due parti convièn premettere il seguente

L E M M A.

703. Dati i termini di due case, per il di cui centro passa la determinatrice, cioè la retta, trovare un metodo, per cui poter conoscer sempre a qual'ordine d'infinito, o d'infinitesimo appartengono i termini stessi, e perciò tutti quelli i quali esistono in quelle case, per i di cui centri passa la determinatrice.

Soluzione 1.ª Sieno dati i due termini qualunque $x^m y^n$, $x^{m+k}y^{l+n}$. Questi, siccome sono dello stess'ordine, dovranno rimaner tali anche dopo che siasi diviso ciascuno per uno di essi. per esempio per il primo: si avranno con questo i termini $\frac{x^m y^n}{x^m y^n}$, $\frac{x^{m+k}y^{n+l}}{x^m y^n}$, o sia, 1, $x^k y^l$ i quali dovranno essere dello stess'ordine; ora 1 è sempre una quantità finita; dunque dovrà esser tale anche $x^k y^l$; si dica $x^k y^l=R$, e si avrà $y=R^{1:l}x^{-k:l}$; si sostituisca questo valore di y nell'altro termine $x^m y^n$, e si avrà un termine tutto in x, dal di cui esponente si conoscerà l'ordine ricercato; il termine sudetto, fatta la sostituzione diviene $R^{n:l}\, x^{(m-nk):l}$; dunque l'ordine dei due termini dati è $(m-nk):l$.

Questa è la soluzione più semplice, e più dimostrativa. E' necessario però trovarne un'altra, la quale ci possa fare strada a ciò che noi ricerchiamo.

Sia pertanto

Soluzione 2.ª Si conduca la determinatrice intera finchè tagli l'ultima colonna verticale; se la determinatrice passerà per il centro di una casa esistente in tal colonna, il termine stesso di tal casa marcherà l'ordine cercato, com'è per se manifesto,

Se poi la determinatrice non passi per il centro di alcuna casa, esistente nell'ultima colonna verticale, si procederà in questa maniera.

Si supponga divisa la distanza, che passa fra i centri di quelle due case, fra cui passa la determinatrice, in un numero di parti, grande qnanto bisogni, e si supponga inoltre (dato per esempio, che la determinatrice passi fra le due case di x, e di x^2) si supponga, dissi, che i termini $x^{1+\frac{1}{2}}$, $x^{1+\frac{1}{3}}$, $x^{1+\frac{1}{4}}$; $x^{1+\frac{1}{5}}$ &c. esistano nei punti, che dividono l'intervallo accennato, nella ragione stessa, in cui l'unita è divisa nella data potenza fratta, dal suo denominatore.

Così $x^{1+\frac{1}{2}}$ si supporrà nel punto di mezzo fra x, e x^2; $x^{1+\frac{1}{3}}$ si supporrà distante da x della metà di

di ciò che è distante da x^2; che $x^{1+\frac{1}{4}}$ sia distante da x della terza parte di ciò che è distante da x^2 &c. &c.

Concepito bene questo, se la determinatrice passerà per esempio fra i centri delle case x^3 ed x^4, ma 4 volte più dapresso ad x^4 che ad x^3, il termine ivi esistente dovrà essere $x^{3+\frac{4}{5}}$, e perciò l'ordine dei termini esistenti sulla direttrice, saranno dell'ordine $3+\frac{4}{5}$.

La verità di questo metodo si può comprovare col metodo usato nella prima soluzione. Questo basta per il nostr'oggetto, punto non curandoci di farne uso nella pratica. Osserviamo soltanto che l'ordine può essere anche negativo, e che questo avviene ogni volta che la determinatrice non incontra l'ultima colonna verticale, che nel suo prolungamento inferiore. In questo caso ai punti di divisione sopra accennati, si prefigono i termini di esponente negativo x^{-1}, $x^{-1-\frac{1}{2}}$, $x^{-1-\frac{1}{3}}$ &c. x^{-2} &c. x^{-3} &c. x^{-4} &c. x^{-5} &c. ...., &c. &c.

Veniamo adesso alla prova delle due parti già proposte di sopra.

Suppongasi pertanto, che la direttrice lasci qualche termine sopra di se. Per il centro della casa, che egli occupa, se le conduca una parallela: essa dovrà traversare l'ultima colonna verticale in un punto di divisione, in cui l' x avrà maggior' esponente di quello, che ha nel punto di divisione, ne, per cui passa la determinatrice primiera; dunque ne segue, che il termine rimasto sopra la direttrice, dovrà essere di un' ordine maggiore.

Per la ragione opposta si proverà, che i termini esistenti sotto la direttrice, debbono essere di un' ordine inferiore a quelli, per i quali passa la direttrice.

Questo vale per il caso in cui si ponga $x=\infty$.

Ponendosi $x=\frac{1}{\infty}$, i termini, che si trovano sopra la direttrice saranno di un'ordine minore di quelli per cui passa direttrice, e viceversa, e questo perchè, quanto è maggiore l'esponente dell'ordine, tanto son minori i termini dotati di tal' esponente, e viceversa, come l'idea delle potenze frazionarie lo dimostra ad evidenza.

In virtú del Teorema dimostrato si vede adesso, che non si posson supporre due termini del medesimo ordine, ed i maggiori nel tempo stesso dell'equazione, se la retta, che passa per i centri delle di loro case, nell'ipotesi di $x=\infty$, lasci qualche termine sopra di se, e nell' ipotesi di $x=\frac{1}{\infty}$, se lasci qualche termine sotto di se; Di quì poi si deduce la regola seguente, per distinguere in un' equazione a due variabili, i termini, che divengono infinitamente più grandi di tutti gli altri, per la supposizione di x, o di y infinita, o infinitissima.

Regola. Formato il triangolo analitico, in cui le case tutte sieno quadrati perfetti, si dispongano in esse i termini dell'equazione proposta, con quell' ordine, che si vede nella fig.ª 23.

Si posi il triangolo sul lato senza x, se supponpongasi x infinito, o infinitamente piccolo, e viceversa.

Dopo questo, si osservi quali sono le case piene, per il di cui centro possa passare una retta, senza lasciare alcun termine sopra di se, nel caso di una variabile infinita. I termini così determinati, soli formeranno l'equazione: La retta in questo caso si dirà: Determinatrice superiore.

Nel caso di una variabile infinitamente piccola, si osserverà quali sieno le case, per il centro delle quali passi una retta senza lasciare sotto di se verun termine, e i termini così determinati faranno soli l'equazione: La retta determinante si chiamerà: Determinatrice inferiore.

Si vedrà facilmente, che in ambedue i casi, delle determinatrici se ne possono aver più d'una.

La soluzione di questo problema è di una grandissima utilità nella Teorìa delle Curve, per determinare i rami infiniti delle medesime, ed i loro asintoti rettilinei, e curvilinei.

Ordinariamente però si richiede, che sappiasi determinare almeno prossimamente il valore dei termini, i quali si suppose, che svanissero totalmente.

Per riuscire in questo, non v'è però alcuna difficoltà. Suppongasi $y=M$ nell' ipotesi di $x=\infty$ ò $=\frac{1}{\infty}$.

Si ponga $y=M+t$, e questo valore si sostituisca nella proposta. La risultante si disponga sul Triangolo Analitico, e col metodo esposto di sopra si troverà $t=N$: Si faccia $t=N+u$, e si determini u come sopra, e così in seguito.

Sia data per esempio l'equazione $ay^3-x^3y-ax^3=0$ que-

... essendo disposta sul Triangolo, situato sul lato senza x, a motivo, che si ha una sola determinatrice inferiore, che passa per le case y^3, x^3 (Fig.ª 24.) ci somministra l'equazione $ay^3 - ax^3 = o$, da cui s'inferisce $y = x$, che è il primo termine di una serie ascendente. Per ottenere il secondo, sostituisco nella proposta $x + t$ in luogo di y, e trovo la trasformata $ax^3 + 3atx^2 + 3at^2x + at^3 - x^4 - x^3t - ax^3 = o$, che si riduce à $3atx^2 + 3at^2x + at^3 - x^4 - x^3t = o$: Questa essendo situata sul Triangolo ci da due determinatrici inferiori; Una di esse ci darebbe $t = Tx$, che io trascuro, perchè gli esponenti di x debbono andar crescendo: L'altra determinatrice mi da $3atx^2 - x^4 = o$, o sia $t = \frac{x^2}{3a}$, e questo è il secondo termine cercato; Il terzo si ha con sostituire $\frac{x^2}{3a} + u$ in luogo di t nella trasformata precedente, per il che si trova $u = -\frac{x^4}{81a^3}$, e così in seguito.

Non v'è bisogno di avvertire, che qualora l'equazioni ausiliari, per di cui mezzo si determina il valore dei termini successivi, hanno più radici reali, la serie, che esprime il valor d'y si divide in più, e questo a proporzione del numero di tali radici reali.

Tutte queste serie però affinchè rappresentino effettivamente il valor di y, conviene, che non contengano verun termine immaginario? Per assicurarsi di questo, basta determinar tanti termini di dette serie, quanti se ne richiedono perchè si scopra

pra fra di essi una legge costante. Scoperta questa non v'è più da temere l'incontro di termini immaginarj.

CAPITOLO XIII.

Teoria delle funzioni continue.

604. Le funzioni continue, o geometriche possono esser trattate con mirabil successo dall'Analisi nella soluzione de' problemi, che si riferiscono alla provincia delle quantità continue. Si vede però, che quest'associazione della Geometria coll'Analisi non può assolutamente aver luogo, senza che si sappiano rappresentare le diverse funzioni geometriche per mezzo di opportune formole algebraiche, perchè altrimenti non son' esse suscettibili del Calcolo, e dei Metodi Analitici, e senza che si conoscano le proprietà caratteristiche delle diverse funzioni continue, perchè altrimenti riesce impossibile la scelta di quelle, che giovano alla soluzione del problema, non meno che la di loro applicazione. Conviene pertanto, che prima di entrare nell'Analisi ci occupiamo di questa ingegnosa Teoria, da cui l'Analisi ripete una metà del suo splendore, e della sua grandezza. Si vedrà in questa guisa, quanto amichevolmente cospirino al loro vicendevole ingrandimento l'Analisi, e la Geometria, e che una di esse niente meno dall'altra riceve di ciò che le dona.

SE-

SEZIONE I.

Delle funzioni Geometriche Elementari.

605. Incominciando dalle funzioni geometriche elementari, si vede, che qualunque linea retta si può rappresentare per una delle prime lettere dell' alfabeto se sia cognita, e per una dell' ultime, se sia incognita.

606. Qualora però la retta da esprimersi sia un lato di un poligono regolare iscritto, o circoscritto al circolo, siccome la formola esprimente dev' esser funzione del raggio, convien vedere, come tali funzioni possano determinarsi.

607. Si debba esprimere Analiticamente il lato di triangolo aquilatero iscritto. Sia (Fig.ª 12.) AB il lato, e sia il raggio $CD=a$ perpendicolare sù di AB. Siccome si ha $CE=ED$, per i triangoli eguali BCE, BDE, come pure $AE=BE$, risulta $EB=\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, e perciò $AB=a\sqrt{3}$.

608. Per trovar la formola del lato di un poligono regolare iscritto di sei, dodici, ventiquattro &c. lati, convien trovar la formola della corda della metà di un'arco dato. A quest' effetto sia $AB=b$, e sarà $CE = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$. Quindi .... $ED=a-\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$, e perciò $DB=\sqrt{BE^2+ED^2}=\sqrt{(2a^2-a\sqrt{(4a^2-b^2)})}$ formola generale cercata. In questa non si ha, che da sostituire per b la formola

mola del lato di un poligono iscritto, e si ottiene immediatamente la formola del lato di un poligono di doppio numero di lati iscritto nel circolo. Così facendo $b=a\sqrt{3}$ si ha il lato dell'Esagono $=a$, come si sapeva. Facendo $b=a$, si ha il lato del dodecagono $=a\sqrt{(2-\sqrt{3})}$; e ripetendo così le sostituzioni si trova il lato del poligono di 24 lati $=a\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{3})})}$; quello del poligono di 48, $=a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$, e così in seguito.

609. Cerchiamo la formola del lato del quadrato iscritto Essendo (Fig.ª 12.) AB il lato richiesto, si ha $AB=\sqrt{CA^2+CB^2}=a\sqrt{2}$.

610. Sostituendo questo valore nella formola precedente, si ha il lato dell'ottagono iscritto $=a\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ così il lato del poligono di 16 lati, $=a\sqrt{(-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}$. quello del poligono di 32,

$$=a\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \text{ \&c. \&c.}$$

611. Si debb'adesso esprimere analiticamente il decagono ' Sia BD (Fig.ª antec.) il lato richiesto; Il raggio CD divida in mezzo l'arco doppio AB, e la retta DF divida in mezzo l'angolo CDB. I triangoli DCB, FDB risultano isosceli, e cogli angoli alla base di 72°; dunque dalla loro somiglianza si ha $CB:DB::DB:BF$; Ma anche il triangolo CDF è isoscele; dunque $CB:CF::CF:FB$; dunque se dividasi il raggio in media, ed estrema ragione il maggior semmento è uguale al lato del decagono iscritto. Dicasi

si $BD=x$, e si avrà $x^2=a^2-ax$, equazione, da cui si deduce con i metodi dell'Analisi la formola cercata. Con questa si avrà per mezzo della formola della corda di un'arco sudduplo, trattando b come incognita, l'espressione del lato del pentagono. Riguardando b come cognita, e sostituendo in suo luogo l'espressione del lato del decagono, si avrà l'espressione del lato dell'icosagono iscritto, e così degli altri.

612. Volendo la formola del lato del pentadecagono iscritto, bisogna sciogliere il problema: Date le corde di due archi, trovar la corda della loro differenza.

Per trovarne la soluzione con tutta generalità sia

613. *Probl.* Date le corde AD DB (Fig.ª cit.) e la corda AB della somma degli archi, trovar'un' equazione fra queste corde, ed il raggio del circolo.

Soluzione. Per il punto A conduco il diametro AI, e le corde HI, IB. Ciò fatto, in virtù del quadrilatero iscritto $AHIB$ ho (Geom.ª) $AI.HB=AH.BI+AB.HI$. Sia dunque, $AI=d$, $AB=a$; $AH=b$, e $BH=c$, ed a motivo, che HI è $=\sqrt{AI^2-AH^2}$, e $BI=\sqrt{AI^2-AB^2}$, si avrà $cd=b\sqrt{d^2-a^2}+a\sqrt{d^2-b^2}$, che è l'equazione richiesta.

Trovata quest'equazione, per trovar la corda, che sottende la differenza di due archi dati, basta riguardare come incognita una delle corde AB, AH; e dall'equazione addotta, se ne dedurrà prontàmente il valore. Sia, per esempio, $AB=x$, e dall'equazione $cd=b\sqrt{d^2-x^2}+x\sqrt{d^2-b^2}$, si avrà

avrà mediante l'Analisi, il valore della corda cercata.

Ora, siccome il lato del pentadecagono è corda di un'arco di 24°., suppongasi, che BH sia corda di 60°. $=\frac{1}{2}d$, e che AB, per esempio, sia corda di 36°., cioè lato del decagono; che mediante il Metodo esposto si potrà quand'occorra, determinar colle regole dell'Analisi; e fatte le sostituzioni, si avrà la formola, che rappresenta il lato del pentadecagono.

614. Ottenuto il lato del pentadecagono, si può trovar quello di un poligono regolare di 30, di 60 &c. lati.

Si possono dunque rappresentare algebricamente i lati dei poligoni regolari iscritti di 3, 6, 12, 24 &c. lati; di 4, 8, 16 &c. di 5, 10, 20 &c. e di 15, 30, 60 &c. lati. Per esprimere i lati degli altri poligoni, conviene sciogliere un'equazione tanto più elevata, quanto è maggiore il numero de' lati (*n*.492.)

615. Supponiamo adesso, che sia dato un poligono regolare circoscritto al circolo, e che se ne voglia l'espressione algebrica.

Sia LM il lato richiesto, ed AB il lato di un simil poligono iscritto. Posto $AB=a$, ed il raggio $=d$, sarà $CE=\sqrt{(d^2-\frac{a^2}{4})}$, e per i triangoli simili $CE:EB::CD:DM$ vale a dire $\sqrt{(d^2-\frac{a^2}{4})}:\frac{a}{2}::d:DM=\frac{ad}{\sqrt{(4d^2-a^2)}}$, e $2DM=LM=\frac{2ad}{\sqrt{(4d^2-a^2)}}$.

In

In questa formola si sostituisca l' espressione del lato del triangolo equilatero, del quadrato, dell'esagono &c. iscritto, in luogo di a, e si avrà sempre la formola esprimente il lato del poligono corrispondente circoscritto.

Fin qui delle funzioni lineari.

616. Trattandosi di un rettangolo, si rappresenterà per il prodotto di due lettere come ab, delle quali una sia la base, e l'altra ne sia l'altezza; e perciò un triangolo si esprimerà per $\frac{ab}{2}$, ed un quadrato per a^2, ò b^2.

617. Riguardo ai poligoni, se sien'essi irregolari, si rappresentano per la somma de' triangoli componenti. Essendo regolari si suppongano iscritti nel circolo. Dicasi x un lato, n il loro numero, r il raggio, ed u la saetta, e saranno eguali alla formola $\frac{nx}{2} \times (r-u)$.

618. Avvertendo, che il limite d'incremento di un poligono regolare è il circolo, e che il limite della funzione $\frac{nx}{2}(r-u)$ dopo un decremento infinito di u è $\frac{nx}{2}r$, si raccoglie, che siccome i limiti di una medesima funzione debbono esser' eguali, deve aversi la superficie del circolo $= \frac{nx}{2}r$ $= \frac{circ.}{2}r = \frac{c.}{2}r$.

619. Proseguendo il raziocinio usato fin qui

si vede, che la superficie di un cubo, di cui a sia il lato, è $= 6a^2$; che la superficie de' prismi, posta d l' altezza, e p il perimetro della base è $= pd$, e che perciò, quella de' cilindri è $= c.d$.

La superficie delle Piramidi è $= p.\frac{1}{3}$ Apotema, e quella dè coni $= c.\frac{1}{3}$ Arresto, o sia lunghezza.

620. Volendo impiegare il metodo de' limiti, si possono trovar delle formole in modo anche più elegante.

621. Sia y l'Arresto di una Piramide regolare; ed x un lato della sua base. Sarà l'Apotema $= \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$, e perciò la superficie $= \frac{nx}{2}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$, e sostituito $2ru - u^2$ in vece di $\frac{x^2}{4}$ (valore, che si ottiene, con supporre la base della Piramide iscritta in un circolo, del quale il raggio sia r, e la saetta determinata dal lato della base sia u), si ha la superficie della piramide regolare, e retta $= \frac{nx}{2}\sqrt{y^2 - 2ru + u^2}$. Ora il limite di una piramide regolare è il cono, che ha per base il circolo circoscritto alla base della piramide, e l'altezza comune.

Il limite della funzione $\frac{nx}{2}\sqrt{y^2 - 2ru + u^2}$ è in que-

questo caso $\frac{nx.}{2}y$; dunque la superficie del cono retto è $=\frac{n.x.}{2}y=\frac{c.y}{2}$, come sopra.

622. Qualora si trattasse di un cono obliquo, converrebbe ricorrere al Calcolo Infinitesimale.

623. Suppongasi di dover esprimere algebricamente la superficie di un tronco di piramide, o di cono.

Sia p il perimetro della base inferiore, e p' il perimetro della base superiore, che si suppone parallela all'inferiore. Detta x la distanza di questi perimetri, si ha la superficie richiesta $=(p+p')\frac{x}{2}$.

624. Se la piramide si trasformi in cono retto, p, e p' divengono circoli c, c', ed è la superficie $=(c+c')\frac{x}{2}$.

625. La superficie della sfera, siccom'ella è quadrupla di suo circolo massimo, dev'essere $=4.\frac{cr}{2}=2cr$.

626. Venendo finalmente all'espressione della solidità, trovo quella de' cubi $=a^3$, quella dè prismi regolari $=\frac{nx}{2}(r-u)d$, e quella de cilindri, che sono un limite di prismi regolari $=\frac{cr}{2}.d$

627. Per rapporto alle piramidi regolari se ne ha la solidità $=\frac{nx}{2}(r-u)\frac{d}{3}$. Il limite di queste,

ste, cioè il cono risulta eguale al limite di $\frac{xn}{2}.(r-u)\frac{d}{3}$ cioè $=\frac{cr}{2}.\frac{d}{3}$.

628. Per le piramidi, e i coni troncati, ecco il raziocinio, che bisogna seguire per ottenerne l'espressione.

Ciò che diremo del cono, potrà facilmente applicarsi alla piramide. Sia x l'altezza del cono intiero, ed m l'altezza del tronco; essendo, come sopra, p', p i perimetri delle basi, ed r', r i loro raggi, si avrà $\frac{pr}{2}.\frac{x}{3}-\frac{p'r'}{2}.\frac{(x-m)}{3}$. Dalla proporzione $x-m:x::r':r$, si deduca il valor di x, e questo essendo sostituito nella formola suddetta, si avrà la formola cercata $=\frac{m}{2.3},\frac{(pr^2-p'r'^2)}{r-r'}$.

619. La solidità finalmente della sfera, siccom' essa può riguardarsi come un composto di piramidi eguali, infinitamente piccole, che abbiano tutte il vertice nel centro, sarà generalmente $=2\,cr\times\frac{1}{3}r=\frac{2}{3}cr^2$, dove c rappresenta la circonferenza del circolo massimo, ed r il suo raggio.

630. Ad altri solidi non si estende la geometria ordinaria. L'uso delle formole analitiche da noi esposte è molto esteso tanto nella ricerca di varj Teoremi, quanto nella soluzione di moltissimi problemi, onde convien rendersele familiari.

Non ci dilunghiamo qui ad investigare le proprieprietà relative delle funzioni geometriche elementari, perchè queste suppongo esser note dalla Geometria, e perchè anche senza di questo è facile il riuscirvi con tutta semplicità, per mezzo delle addotte formole. Siccome poi nella proprietà Caratteristica delle funzioni della Geometria Elementare tutto si riunisce il fondo della loro essenza, e delle loro prerogative, quindi non ci rimane, che aggiungere intorno a questa parte di Teoria.

SEZIONE II.

Delle Funzioni Curvilinee Algebraiche.

631. Una linea curva si definisce: Una linea, della quale tutti i punti sono situati differentemente fra di loro (M. Chambers).

Dicesi centro di una curva, un punto in modo tale situato dentro di essa, che tutte le rette, le quali passano per il medesimo, attraversando la curva da una parte all'altra, vi rimangano divise per metà. Diametro si appella una retta che attraversa la superficie della curva in maniera, che divida in mezzo tutte le seganti parallele alla tangente condotta ad una delle sue estremità. Tali seganti si chiamano ordinate, e le parti del diametro da esse tagliate si dicono ascisse. Qualora le seganti divisate incontrino il diametro ad angolo retto, esso prende il nome di Asse. Questo finalmente se sia tale che pigliando sopra di lui l'origine delle ascisse ad eguali ascisse opposte corrispondano eguali opposte ordinate, si chiama con nome distintivo, immaginato da M. Bragelogne (*Histoire de l'Acc. 1732. pag. 70.*) Contro-diametro.

632. Varie sono le specie delle curve. Vi sono le curve regolari, e le irregolari; le curve continue, e le discontinue; quelle di semplice, e quelle di doppia curvatura. Se una curva sia tale, che tutti i suoi punti sieno soggetti ad una legge costante, ella è regolare, e se non abbia interruzione veruna nei suoi rami, ella è continua. Un'idea delle curve, che hanno doppia curvatura si ha in quelle curve, che sono descritte sulla superficie di un cono, di un cilindro &c. Ciascuna specie delle curve divisate può inoltre distinguersi in Algebraica, o Geometrica, e Trascendente, o Meccanica; in Esponenziale, ed Interscendente. Dall'equazione, da cui vien rappresentata una curva, la quale può essere una funzione Algebraica, o Trascendente, affetta da esponenti variabili razionali, o irrazionali, dipende ciascuna delle divisioni addotte di curva Algebrica, Trascendente, Esponenziale, Interscendente.

Noi ci occuperemo in modo particolare della curve algebraiche regolari, di semplice curvatura.

633: Ogni curva regolare può esser data in uno de' seguenti modi. 1.° Indicando la maniera, con cui descriverla con un moto continuo; 2.° Fissando una proprietà caratteristica, che appartenga a ciascun suo punto; 3.° Somministrando un' equazione fra le sue coordinate. Il Circolo, la Parabola, l'Ellisse &c. possono esser date in tutte queste maniere. Noi supporremo sempre, che sia data una curva per mezzo di un'equazione, la quale essendo quasi un germe, che in se contiene le proprietà principali della curva, a cui appartiene, ci presenta un mezzo il più opportuno, e vantaggioso per internarci nella cognizione, e nella Teoria delle curve.

634. Vediamo prima di tutto, come si possa rappresentare una curva per mezzo di un' equazione. Dovendo l'equazione, di cui si tratta, rappresentare specificamente la curva, a cui appartiene, è chiaro che essa dee rappresentare la legge relativa, a cui soggiacciono i suoi punti. Per esprimer questa legge analiticamente, si richiede, che ciascun punto della curva si rapporti a due rette normali, date di posizione, le quali sogliónsi chiamare Assi delle coordinate, e che si determini, qual funzione sia la distanza di un punto qualunque della curva da una di tali rette, per rapporto alla distanza del punto stesso dall'altra retta. Ora la determinazione di una tal funzione, dalla quale vien costituita l'equazione, dipende necessariamente dalla proprietà caratteristica della curva. Si dee partir dunque dalla ricerca di questa, (e non già supporla, come si usa comunemente). Conosciuta questa, non è difficile detèrminar l' equazione richiesta.

Vediamone un esempio.

635. Si debba trovare l' equazione del circolo. Conduco le due normali AQ, AC (Fig. 13.), la prima delle quali propriamente dicesi Asse delle ordinate, e la seconda Asse delle ascisse. Rapporto ad esse un punto qualunque L, e cerco, qual funzione sia LK di LI, o sia di AK.

Siccome io so dalla Geometria, che l' angolo nel semicircolo é retto, vedo, che dee aversi $LK^2 = AK \cdot KC$. Pongo l' ordinata $LK = y$, l'ascissa $AK = x$, e il diametro $AC = 2a$, ed ottengo finalmente $y^2 = a\,x2 - x^2$, equazione cercata, dal-

dalla quale deduco $y = \pm \sqrt{(2ax - x^2)}$.

636. Noi abbiamo supposte le coordinate ortogonali. Esse però posson' essere ancora obliquangole, purchè formino un'angolo costante. Si comprende infatti ad avidenza, che anche in questo caso debbono conservare fra di loro un rapporto costante. Quindi l'equazione di una curva, che sia data fra le coordinate ortogonali, si può cangiare in un' altra, che sia fra le coordinate obliquangole, e viceversa

237. *probl.* Data l'equazione fra le coordinate rettangole AP, PM (Fig.ª 14.) si voglia ridurre fra le coordinate oblique AQ, QM. *Soluzione*.

Sia $AP = x$, $PM = y$, $AQ = t$, $QM = u$, $MQP = a$, $sen.a = m$, e $cos.a = n$; Si avrà dal triangolo rettangolo MPQ, la proporzione $u : y :: 1 : m$, come pure $u : t - x :: 1 : n$; quindi $y = mu$, ed $x = t - nu$; Si sostituiscano questi valori, e si avrà &c.

Ma cerchiamo una formola generale, che rappresenti tutte le trasformazioni, che si posson fare nell'equazione di una curva.

638. Sia (Fig.ª 15.ª) SMV una curva algebrica, di cui l'equazione sia data fra le coordinate AP (x), PM, (y), e se ne voglia l'equazione fra le coordinate BL, LM.

Per eseguir questo, convien, che ambi i punti di origine A, B sieno dati di posizione, non meno, che gli assi AP, AF, BL, BI. Ciò supposto, per i punti B, L si conducano BC, LE parallele ad AF, finche incontrino la retta AP, e si conducano le rette BD, LQ parallele ad AP fino alla PM. Pongasi $BL = z$, $LM = u$, $AC = m$, e $BC = n$. Nei triangoli BLG, MLQ essendo noti gli angoli, dee pur' esser noto il rapporto dei lati,

Sia

Sia dunque $BL : BG :: 1 : p$, e sarà $BG = pz$; sia $BL : LG :: 1 : q$, onde si abbia $LG = qz$.

Nella maniera stessa si ponga $LM : LQ :: 1 : s$, ed $LM : MQ :: 1 . t$; Sarà quindi $LQ = su$, e $MQ = tu$.

Perciò, essendo $AP\ (=x) = AC + CE + EP = AC\ (m) + BG\ (pz) + LQ\ (su)$, ed essendo $PM\ (=y) = PD + DQ + QM = BC\ (n) + LG\ (qz) + MQ\ (su)$ ne risulta $x = m + pz + su$, ed $y = n + qz + tu$.

Ottenute quest'espressioni, basta sostituirle nell'equazione proposta, e la trasformata risultante sarà un'equazione generale, in cui si comprendono tutte le mutazioni possibili, che si possono fare nell'equazione di una curva, salva la di lei primitiva natura. Il giovine sagace potrà facilmente applicarla ai casi particolari.

639. Facendoci adesso a riflettere generalmente sull'equazione di una curva, si vede, che siccome contien'essa due incognite, basta dare dei valori ad una, per dedurne immediatamente i valori corrispondenti dell'altra. E' in questa guisa, che può concepirsi l'andamento, e la forma di una curva per mezzo della sua equazione, e si può inoltre delineare per punti contigui.

Ecco un esempio. Sia data una curva per l'equazione $y = a \left(\frac{x}{a+x}\right)^2$. Si ponga sulle prime $x=0$ si avrà $y=0$; dunque la curva passa per l'origine delle ascisse. Sostituendo per x dei valori positivi successivamente maggiori, è chiaro, che il numeratore dee andar crescendo più del denominatore, e che perciò il ramo, che è della parte delle ascisse positive, dee discostarsi successivamente dall'asse. Questo discostamento ha però un limite, perchè fatto $x = \infty$ risulta $y = a$. Facciasi x negativo, ed il valor di y crescerà assai rapidamente, perchè nella frazione $\left(\frac{-x}{-x+a}\right)^2$, mentre cresce il numeratore, il denominatore diminuisce; dee pertanto crescere y assai più d'x, e questo con una tal rapidità, che quando x è giunto ad essere $=a$, y è già $=\infty$. A misura però, che x diviene $>a$, y diminuisce, finchè divenuto $x = \infty$, y è $= a$.

Dunque il ramo della sudetta curva dall'infinita distanza dall'asse, a cui era giunto, verso la parte negativa, torna ad accostarvisi, finché ne sia distante della sola quantità a.

Da questa breve analisi ne seguono le determinazioni di molti punti, come si vede qui presso.

Facendo $x = \infty$ &c. $3a,\ 2a,\ a,\ 0, -\frac{1}{3}a, -\frac{1}{2}a, -\frac{3}{4}a$ &c.

ne risulta $y = a,\ \frac{9}{16}a,\ \frac{4}{9}a,\ \frac{1}{4}a,\ 0,\ \frac{1}{9}a,\ a,\ 9a,\ \infty$ &c. a.

640. *Scol.* Qualora y fosse espresso per una funzione irrazionale d'x, e costanti, per evitar le radici incommensurabili, converrebbe sostituire per x quei valori, che rendono la funzione una potenza perfetta dell'ordine espresso dal radicale.

Come questo si eseguisca, si vedrà nell'Analisi Indeterminata.

641. Dal fin qui detto ne derivano i due seguenti corollarj, e sono

1.° Che dal segno positivo, o negativo dell'ordinate, dipende la situazione positiva, o negativa va dei rami di una curva.

2.° Che una curva, allora passa per l' origine delle ascisse, quando essendo $x=0$, y ancora è $=0$.

Questo poi si vede, che può aver luogo solamente, quando l'equazione della curva non contiene alcun termine costante.

642. Prima di proceder più oltre, ad oggetto di seguire un' ordine più preciso, e più distinto, convien ridurre le curve, le quali sono, come le funzioni, da cui vengono rappresentate, di una moltiplicità infinita, ad alcune classi determinate.

Si dee però avvertire, che il carattere, per cui debbonsi distinguer le classi delle curve, dev' esser tale, che non venga punto alterato dalle trasformazioni, di cui abbiamo parlato di sopra.

Avvertendo a questo, si dee ravvisar facilmente, che non il numero, nè l'omogeneità dè termini è capace di caratterizzar l'ordine, a cui appartiene una curva, ma sibbene il grado dell'equazione, da cui vien rappresentata.

643. Con questo principio, dicesi linea di prim' ordine quella, di cui l'equazione, non contiene altra potenza delle coordinate, che la prima dicesi linea di second' ordine quella, nella di cui equazione non entra maggior potenza della seconda, e così in seguito.

Quindi l'equazione generale delle linee di prim' ordine è $ay \pm bx \pm c = 0$. Da questa si ha ....

$$y = \frac{\mp bx \pm c}{a}$$, che è l' espressione generale della linea retta.

L'equazione generale delle linee di second'ordine è $ay^2 \pm bxy \pm cy^2 \pm dy \pm ex \pm f = 0$;

Quella delle linee di terz'ordine è ....

$ay^3 \pm bxy^2 \pm cyx^2 \pm dx^3 \pm ey^2 \pm fxy \pm gx^2 \pm hy \pm ix \pm l = 0$, e così dell'altre.

Generalmente l'equazione di una linea dell' ordine n dee contenere $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ termini, ed altrettante costanti, le quali possono aver qualunque valore, non escluso il zero.

644. Intorno all'equazione di una curva, rimangono da notarsi tre cose, e sono

I. Che un' equazione, affinchè rappresenti l' ordine di una curva, deve esser libera dai radicali.

II. Che se una equazione sia risolubile in fattori razionali, rappresenta un sistema di più linee combinate insieme, perchè equivale al prodotto dell'equazioni di diverse curve.

III. Che qualora non sia dato l' angolo delle coordinate, una medesima equazione può appartenere a diverse curve. Si vedrà, per esempio, a suo luogo, che l'equazione $y^2=a^2-x^2$ rappresenta il circolo, se le coordinate sieno rettangole, e che rappresenta un'Ellisse, qualora le coordinate sien' obliquangole.

645. *Teor.* Essendo dati $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ punti, per i quali debba passare una curva di un'ordine dato, si può determinar l'equazione, che le appartiene. Come questo si eseguisca, si sà da ciò che si è detto nel cap. dell'Interpolazione.

646. *Teor.* Una retta non può incontrare una curva

va regolare di un'ordine n, in un numero di punti $>n$.

Dimostrazione. Nell'equazione proposta si faccia $y=0$. L'equazione rimanente mostra il numero dei punti d'intersezione, che possono aversi fra la curva, e l'asse delle ascisse, overo fra la curva, ed una retta qualunque, perchè mutato il sudetto asse in qualsivoglia modo, non si muta l'ordine dell'equazione.

Ora l'equazione divisata non può aver più radici reali del numero n. Difatto in virtù del Lemma II. (*n*.506.) si ha, che le lettere componenti il coefficiente del 2.° termine di un'equazione qualunque, non possono essere più di numero delle unità comprese nel grado dell'equazione stessa; dunque &c.

647. *Teor.* Due curve degli ordini m, n, non possono incontrarsi in maggior numero di punti di mn.

Dimostrazione. Suppongasi, che le due curve proposte, sieno riferite ad un'asse comune, in modo che a ciascun punto d'intersezione delle medesime corrispondano due coordinate particolari. Fatto questo si trasformino l'equazioni delle due date curve in guisa, che appartengano al nuovo asse, e si deduca dalle medesime, un'equazione in x, o in y.

E' manifesto, che quante radici reali avrà l'equazione risultante, tanti punti d'intersezione, e non più, si potranno avere fra le date curve.

Ma le radici reali di tal'equazione non posson' esser più di mn, come si vedrà (Cap, Eliminaz.), dunque &c. &c.

648. *Probl.* Determinare in quanti punti si pos-

possano incontrare due curve date, e quali sieno questi punti.

Soluzione. Siccome due curve nei punti, dove s'incontrano hanno comuni le coordinate, dette x, y le coordinate di una, z, u le coordinate dell'altra curva, è chiaro, che per ciascun punto d'incontro debbono aversi qnattro equazioni, e sono 1.ª $x=z$, 2.ª $y=u$ 3.ª l'equazione della prima curva in x, y; 4.ª l'equazione della sèconda in z, ed u. Dalle prime due si prendano i valori di z, u, in x, ed y, e si sostituiscano nella quarta; si avranno due equazioni in x, y, e costanti. Da queste si deduca un'equazione in y, e la risultante somministrerà tutte le ordinate, che appartengono ai punti d'incontro, e se deducasi un' equazione in x, si avranno tutte le ascisse, che corrispondono ai punti divisati. La Soluzione di questo Problema si comprenderà meglio dopo il Trattato dell'Eliminazione.

649. Per determinar poi precisamente questi punti, convien cercare l'ascissa, e l'ordinata di ciascun punto d'incontro, esaminando per mezzo delle due equazioni accennate quali sieno le ordinate, che corrispondono alle ascisse, le quali sono rappresentate, come appartenenti ai punti d'incontro, e viceversa.

650. Questa ricerca è necessaria, perchè sebene ciascun valor reale di x dimostri, che le due curve hanno in un dato punto un'ordinata comune, non ostante se non sappiasi, che questa sia reale, può avvenire, che in quel punto le ordinate divengano eguali, e identiche in una, ma sieno immaginarie, il che poi escluderebbe il supposto punto d'incontro.

651.

651. *Teor.* Se abbiasi una curva $BCDEFG$ (Fig.ª 16) di un'ordine n rappresentata per un'equazione, delle quale il primo termine sia ($ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2}$ &c.) y^{n-m}, e l'ultimo sia $Ax^{n-p} + Bx^{n-p-1} + Cx^{n-p-2}$ &c. io dico, che l'asse dell'ascissa AP incontrando la curva nei punti B, D, F &c. se prendansi dall' origine A, le parti AT, AV, AX &c. eguali alle radici dell'equazione $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2}$ &c. $=0$, e se conducasi un'ordinata qualunque LG, la quale incontri la curva in L, C, G &c. il prodotto dell'ordinate PL, PC, PG &c, corrispondenti all'ascissa AP, starà alla frazione $\frac{PB.PF.PD \ \&c.}{PT.PV.PX \ \&c.}$ in una ragione data di $A:a$.

Dimostrazione. Dividasi l'equazione della curva per il coefficiente $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2}$ &c. onde riceva la forma $y^{n-m} \ldots + \frac{Ax^{n-p}+Bx^{n-p-1} \ \&c.}{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2} \ \&c.} = 0$

Il prodotto di tutte le radici di quest'equazione, cioè il prodotto $PL \times PC \times PG$ &c. dell'ordinate è uguale all'ultimo termine $\frac{Ax^{n-p}+Bx^{n-p-1} \ \&c.}{ax^m+bx^{m-1} \ \&c.}$ (Lemma II. §. 506.). Ora il numeratore di questa frazione è uguale ad $A.PB.PF.PD.$ &c., e il denominatore è uguale ad $a.PT.PV.PX.$ &c.

Difatto i punti B, F, D &c., nei quali una curva incontra l'asse delle ascisse si ottengono con porre $y=0$ Ma questa supposizione riduce l'equazione al suo ultimo termine $Ax^{n-p}+Bx^{n-p-1}$ &c. $=0$, e le radici di quest'equazione sono le ascisse AB, AF, DA &c., le quali hanno qualche ordinata $=0$. Dividendo pertanto la suddetta equazione per A, la risultante

$x^{n-p} + \frac{B}{A} x^{n-p-1}$ &c. $=0$ sarà $= (x-AB)(x-AF) \times (x-AD)$ &c. cioè $=(AP-AB)(AP-AF)(AP-AD)$ &c., o finalmente $=PB.PF.PD$ &c. Dunque moltiplicando per A, risulta $Ax^{n-p}+Bx^{n-p-1}$ &c. $=A.PB.PF.PD$ &c.

Parimente, poichè AT, AV, AX &c. sono le radici dell'equazione $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}$ &c. $=0$, ò dividendo per a, di $x^m + \frac{b}{a}x^{m-1} + \frac{c}{a}x^{m-2}$ &c. $=0$; dunque essa è uguale al prodotto $(x-AT)(x-AV)$ $(x-AX)$ &c. cioè al prodotto $(AP-AT)(AP-AV)$ $(AP-AX)$ &c; dunque moltiplicando per a, si ha finalmente $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}$ &c. $=a.PT.PV.PX$ &c.

Dunque, siccome si ha $PL.PC.PG$ &c. .... $= \frac{Ax^{n-p}+Bx^{n-p-1} \ \&c.}{ax^m+bx^{m-1}+\&c.}$; dee aversi per conseguenza $PL.PC.PG \ \&c. = \frac{A.PB.PF.PD\&c.}{a.PT.PV.PX.\&c.}$, cioè si ha .... $PL.PC.PG \ \&c. : \frac{PB.PF.PD\&c.}{PT.PV.PX\&c.} :: A:a$.

Le applicazioni di questo Teorema sono assai feconde; applicando alle curve di second'ordine si scopre con tutta facilità più d'uno dei Teoremi principali ad esse spettanti.

652. *Probl.* Data una curva Algebrica qualunque, determinarne la tangente, la sottangente, la normale, e la sunnormale.

Soluzione. Sia la curva AMN riferita all' Asse AP (Fig.ª 17.). Si conduca la segante SMN; dai due punti d'intersezione M, N si abbassino le due ordinate MP, NQ, e dal punto M si conduca MO parallela ad AP. Si avranno i triangoli simili MSP, NMO, e perciò $NO : OM :: MP : PS$, cioè $\frac{PS}{y} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Suppongasi che il punto N si vada indefinitamente accostando al punto M; PS anderà diminuendo, finchè il punto N sia giunto in M. Quando questo avvenga NMS diverrà tangente, e si confonderà con MT, e PS diverrà $=PT$. Il limite dunque di $\frac{PS}{y}$ è $\frac{PT}{y}$; ma il limite di $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ è $\frac{dx}{dy}$; dunque nel punto, in cui NMS divien tangente, si ha $\frac{PT}{y} = \frac{dx}{dy}$, cioè PT, o sia la sottangente $= y\frac{dx}{dy}$. Sostituiti in questa formola i valori di y, e dy dedotti dall'equazione della curva, si avrà un espressione in x, e costanti, che rappresenterà la sottangente richiesta.

Ottenuta la sottangente, riesce facile condurre la tangente; nondimeno vediamo di trovarne la formola.

A'quest'effetto osservo, che si ha $MT = \sqrt{MP^2 + PT^2} = \sqrt{y^2 + y^2\frac{dx^2}{dy^2}} = y\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dy^2}}$ formola cercata in cui si faranno le sostituzioni come sopra.

Se da un punto del perimetro di una curva si conduca una retta, che sia perpendicolare al perimetro

stesso, e questa si prolunghi fino all'asse, si avrà ciò, che dicesi normale. Tal'è la retta MC.

La distanza del punto C dall'estremità P dell'ordinata condotta sull'asse dal punto M, dal quale parte la normale, vien detta sunnormale. Cerchiamone la formola.

Avendosi l'angolo retto CMT, si ha $PC = \frac{PM^2}{PT} = \frac{y^2}{y\frac{dx}{dy}} = y\frac{dy}{dx}$. Per la normale si ha $MC = \ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{(PC^2 + PM^2)} = \sqrt{y^2\frac{dy^2}{dx^2} + y^2} = y\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}}$.

653. *Probl.* Determinare, se una curva debb' aver degl' asintoti, cioè delle tangenti in qualche suo punto infinitamente lontano dal vertice, e quanti ne poss' avere.

Soluzione. Si supponga (Fig.ª cit.ª) che sia TM una tangente. Dalla PT si tolga PA, e si avrà il residuo $AT = y\frac{dx}{dy} - x$. Sostituiti i valori y, e dy, si otterrà $y\frac{dx}{dy} - x$ in termini finiti; Si ponga questo risultato $= s$ quantità finita qualunque; Per mezzo di quest'equazione, e di quella della curva proposta si elimini una dell'incognite x, y. L'incognita, che rimane, si ponga $= \infty$; Se ne risulta uno, o più valori per s, saranno essi le distanze AS, per cui debbon passare gl' asintoti; qualora poi non ne risulti alcun valor reale finito per

per s; sarà certo, che la curva non ammette asintoto veruno.

Una sola distanza però non basta per determinare la posizione degl'asintoti, onde convien immaginare per l'origine A una retta AR parallela ad AP, per dedurre dai triangoli simili TPM, TAK, la proporzione $y\frac{dx}{dy} : y :: y\frac{dx}{dy} - x : AK = y - x\frac{dy}{dx}$; Si riduca $y - x\frac{dy}{dx}$ come sopra, e si ponga $= t$ quantità finita qualunque; Si ponga l'incognita, che rimane $= \infty$; e quanti valori finiti di t si otterranno, tante rette di elevazione AR si avranno, da cui verrà determinata la posizione degl'asintoti. Sia per esempio la curva, che ha per equazione $y^3 = x^2(a+x)$; Si avrà ....., $3y^2\,dy = 2x\,dx\,(a+x) + x^2\,dx = 2ax\,dx + 3x^2\,dx$

Di qui $y\frac{dx}{dy} - x = \frac{3y^3}{2ax+3x^2} - x$, e sostituito il valore di y^3, $= \frac{ax}{2a+3x} = S$; pongasi $x = \infty$, e si avrà $x = \frac{a}{3}$; Operando in un modo analogo si trova $t = \frac{a}{3}$ parimente.

654. L'idea di asintoto ci conduce naturalmente a trattare dei rami infiniti.

655. Un ramo di curva allora è infinito quando si allontana infinitamente da uno degli assi a cui è rapportato, overo da ambedue insieme. Dunque per conoscere se una curva sia dotata di rami infiniti, basta esaminare se facendo infinita nell' equazione della curva, di cui si tratta, una delle variabili x, y, il rimanente dell' equazione non involga contradizione, o assordo. Ciò essendo, è sicuro, che la curva è dotata di qualche ramo infinito.

656. Conosciuto questo, convien passare a determinarne la posizione; Ora siccome, conoscendo l'ordinata che corrisponde all'ascissa infinita, o viceversa, la posizione del ramo è determinata, è chiaro, che non si ha da far'altro, che fare infinita una delle variabili x, y, ed estrarre in appresso le radici dell' equazione rimanente, la quale si ottiene secondo ciò che si è detto al (*n.* 101.).

657. Queste radici però, siccome si ottengo espresse per serie, convien' osservare, che la serie, che le rappresentano, sieno prive affatto d'ogni immaginarietà, il che si potrà scoprire per ciò che si è detto al (*n.cit.*).

Essendosi assicurati di ciò, quante saranno le serie reali, per cui verranno espresse le radici, altrettanti saranno i rami infiniti della curva proposta, e saranno essi tutti determinati dai valori delle radici medesime.

658. Qualunque sia la natura, e la posizione dei rami infiniti di una curva, essi nell' infinita loro progressione prendono insensibilmente la curvatura, o di un'Iperbola, o di una Parabola, intendendosi per Iperbola la famiglia intera di tali curve, rappresentata dall'equazione $y^m = Ax^n$, in cui n sia negativa per le Parabole, e positiva per le Iperbole.

659. Per determinare se un ramo infinito di cur-

va

va sia Iperbolico, e Parabolico, nella serie, che rappresenta l'ordinata del ramo proposto, si prendano tutti i termini, nei quali ha x un'esponente positivo, o zero, e la somma di questi dicasi per esempio z. Se la linea, di cui z, x sono le coordinate, è una linea retta, e che sia perciò espressa per l'equazione $z=A+Bx$, il ramo sarà Iperbolico, altrimenti sarà parabolico. La ragione di questo è, che i termini della serie, da cui è rappresentata l'ordinata infinita, in cui l' esponente d'x è negativo, sono tanto piú piccoli, quanto x è più grande, e perciò sono zero, quando x è infinita. Dunque l'ordinata infinita del ramo proposto si avvicina tanto più all' ordinata z, quanto piú è grande x, ed all'infinito le diviene uguale. Per conseguenza il ramo della curva si avvicina sempre più alla forma rettilinea, finchè ad un'infinita distanza si confonda colla linea retta rappresentata dall'equazione $z=A+Bx$. Ma un ramo infinito di curva si chiama Iperbolico, quando ha un'asintoto infinito; Dunque si vede &c.

Per un simil raziocinio il ramo della curva sarà Parabolico, quando l'equazione $z=A+Bx$, non appartenga ad una linea retta; perchè in questo caso l'asintoto del ramo è curvilineo, ed un ramo infinito di curva, che non ammette asintoto rettilineo, dicesi Parabolico.

660. I rami iperbolici oltre gli asintoti rettilinei possono però avere, come pure i rami Parabolici, degli asintoti curvilinei, e di numero infinito.

Difatto pigliando nella serie, che esprime l'ordinata infinita, un termine successivamente di più si hanno le successive equazioni $z=A+Bx+Cx^{-n}$,

$z=A+Bx+Cx^{-n}+Dx^{-r}$; &c. &c. e queste, come si vede rappresentano tante curve, che fatta x infinita, si estendono all'infinito, e sono in virtú del raziocinio fatto di sopra, altrettanti Asintoti curvilinei del ramo principale. In generale però si riguarda come asintoto curvilineo, la curva che vien somministrata dalla più semplice dell'equazioni accennate.

661. Lungo sarebbe il calcolo, che si potrebbe qui aggiungere intorno alla ricerca della situazione della forma, e delle specie dei rami infiniti. Per questo converrebbe prevalersi del Triangolo Analitico, di cui l'uso involge un'operazione soverchiamente incomoda, e prolissa. Su di questo potrà consultarsi M. Cramer. Noi la tralasciamo, perchè una tal Teoria non é assolutamente necessaria per l' Analisi.

Terminiamo co' seguenti

662. *Teor.* 1.° I rami infiniti di una curva sono sempre di numero pari.

Dimostrazione. Un ramo infinito di curva è determinato dalla serie, che rappresenta il valore dell'ordinata, che corrisponde ad un'ascissa infinita. Ora perchè un tal ramo esista, conviene, che la serie sia ò reale, o mezzo=immaginaria; Se è reale, o facciasi x positiva, o negativa, risulta l'ordinata sempre reale. Dunque se la serie sia reale, rappresenta due rami infiniti. Qualora sia mezzo=immaginaria x dev' essere ò positiva, ò negativa solamente, perchè la serie sia reale, e perciò vi può essere ramo infinito da una parte sola dell'asse delle ordinate. A motivo però del doppio segno del radicale, i rami infiniti debbono esser due, e situati dalla medesima parte.

663. *Teor.* Ogni curva algebrica di ordine impari ha per il meno un ramo infinito.

Dimostrazione. Difatto, riguardando come incognita la coordinata, il di cui massimo esponente è impari, l'equazione dee necessariamente avere una radice reale, qualunque sia il valore dell' altra coordinata; altrimenti i suoi coefficienti conterrebbero dell' immaginarietà (*n.* 156.), contro l'ipotesi.

Dunque facendo $x=\infty$, y dev' esser reale, e perciò &c.

664. *Teor.* 3.° Una curva Algebrica dell' ordine n non può avere più rami infiniti di $2n$.

Dimostrazione. L'equazione di una curva Algebrica dell' ordine n non può avere più di n radici reali (*n.* 517.); perciò non si possono trovare per mezzo del triangolo Analitico più di n serie, che rappresentino il valore di un' ordinata per un'ascissa infinita; ma ciascuna di tali serie non dà più di due valori; dunque &c.

665. *Teor.* 4.° Una curva Algebrica dell' ordine n, non può avere un numero di asintoti rettilinei $>n$.

Dimostrazione. Perchè un ramo infinito abbia un'asintoto rettilineo, conviene che la somma dei termini, di una delle serie esprimenti l'ordinata infinita, in cui ha l'ascissa x un'esponente positivo, o zero, sia lineare, e che si abbia un' equazione della forma $z=A+Bx$. Non si possono dunque avere più asintoti rettilinei di quello, che vien' espresso dal numero dell'equazione come $z=A+Bx$; Ma tali equazioni non possono essere di numero maggiore del numero delle serie, che rappresentano l'ordinata infinita, e queste serie non possono esser

esser di n; perchè i valori di tale ordinata non possono esser di numero $>n$, come si raccoglie dal coefficiente del secondo termine (Lemma II. (*n.* 506.); Dunque più di n non possono esser gli asintoti rettilinei.

Convien ora trattare de'punti molteplici.

666. Punto molteplice è quello, per cui passano più rami della medesima curva; il grado della loro moltiplicità dipende dal numero de'rami, che passano per un medesimo punto.

667. *Probl.* Data l'equazione di una curva, determinare, se essa abbia punti molteplici, qual sia il grado di moltiplicità, e qual ne sia la posizione.

Soluzione. Siccome per un punto molteplice qualunque possono condursi tante diverse tangenti, quanti sono i rami di curva, che lo costituiscono, deducendo dall' equazione data il valore di $\frac{ydx}{dy}$ in termini finiti, si dee trovare un espressione $=\frac{0}{0}$, vale a dire (*n.* 573.) un espressione indeterminata; perchè non potendo aver $\frac{ydx}{dy}$ più di un valore, e non potendo rappresentar piuttosto una sottangente, che un'altra, conviene, che si presenti sotto forma indeterminata. Si deduca pertanto dall'equazione data il valore di $\frac{dx}{dy}$, (perche essendo y la medesima per tutte le tangenti, si può supporre $=1$); se $\frac{dx}{dy}$ ridotto in termini finiti risul-

risulti di un valore determinato, sarà sicuro che la curva proposta non ha punti molteplici. Se poi risulti $=\frac{o}{o}$, si deduca il differenziale $\frac{d.M}{d.N}$. Se questo abbia un valor determinato, avrá la curva un punto doppio; se anche $\frac{dM}{dN}$ provenga $=\frac{o}{o}$, si deduca $\frac{d.P}{d.Q}$; e se abbiasi $\frac{d.P}{d.Q}=\frac{o}{o}$, avrà la curva un punto triplice. Si prosegua in questa maniera, e si concluderà generalmente, che il grado di moltiplicità di un punto vien'espresso dal numero dei differenziali $\frac{d.M}{d.N}$; $\frac{dP}{dQ}$, $\frac{d.R}{d.S}$ &c. accresciuto di un' unità.

Per determinar la posizione di un punto molteplice non si richiede che determinar le coordinate, che ad esso appartengono. A'quest'effetto, si prenda il differenziale dell'equazione data nell' ipotesi di dx, e dy costanti, onde si abbia un' equazione della forma $Adx+Bdy=o$, dove A, e B sono funzioni di x, y, e costanti: A' motivo che deve aversi per ipotesi $\frac{dx}{dy}=\frac{o}{o}$ si avranno l'equazioni $A=o$, $B=o$; I valori d'x, e d'y dedotti da queste, che sodisfacciano all' equazione della curva, saranno le coordinate, da cui vien determinata la posizione del punto molteplice.

668. *Scol.* L'ultima equazione differenziale, da cui si hanno le sottangenti, che appartengono al punto molteplice, può avere delle radici immaginarie, e delle radici eguali. Nel primo caso si avranno dei rami invisibili, che formeranno cogli altri rami de'punti, che diconsi conjugati. Nel secondo caso, si avranno de'rami, che si toccano solamente.

Di qui si può derivar la ricerca de'punti di regresso; de punti cioè, nei quali più rami di curva s'incontrano senza tagliarsi, come viene indicato dalla (Fig.ª 18.).

669. Vediamo adesso il Metodo di determinare i punti di flesso contrario.

Sia (Fig.ª 19.) la curva ABC la quale abbia un punto di flesso contrario in B. Condotto un diametro verticale TS, è manifesto, che da qualunque punto D, che si conduca una tangente alla curva, l'ascissa, o sia la parte CE del diametro, risulta sempre tanto più grande, quanto più il punto D si accosta al punto B; cosicchè nel punto B la tangente produce un'ascissa CT, che è la maggiore di tutte.

Difatto, passando al di là di tal punto, le ascisse tornano indietro, e diminuiscono successivamente. Ora l'ascissa CT è generalmente uguale alla sottangente diminuita dell' ascissa, e perciò $=\frac{ydx}{dy}-x$.

Dunque non resta che da prendere il valore di $\frac{ydx}{dy}-x$ in termini finiti per mezzo dell' equazione della curva; quindi prenderne il differenziale, uguagliarlo a zero, ed osservare, se una tal' equazione presenti alcuna radice reale. Ciò essendo, non si ha, che da vedere se se il secondo differenziale sia positivo, o negativo. Ecco dunque l'equazione caratteristica per giudicare se una curva sia dotata di flesso contrario:

$$\frac{-ydxd^2y}{dy^2}=0,$$ o sia $d^2y=0$. Se questa non possa aver luogo, sarà indubitato, che non v'ha nella curva il flesso divisato.

670. Se venga applicato un filo perfettamente flessibile sulla convessità di una curva qualunque ABC, in modo che nell'estremità C della curva sia fissato immobilmente, e questo, cominciando dall'estremità A si vada svolgendo, è manifesto, che il punto A descriverà una curva AEV, la di cui natura dipenderà dalla curva data ABC, che dicesi evoluta. (Vedi Fig.ª 20.)

671. La curva generata dall'estremo del filo si chiama curva di evoluzione: le porzioni del filo disteso BE, CN &c. diconsi raggi osculatori, o raggi di curvatura, e un circolo descritto con uno di questi raggi appellasi circolo osculatore, perchè due archi infinitesimi del circolo descritto col raggio osculatore, e dell'evoluta si confondono insieme con una perfetta eguaglianza.

672. Da tutto questo ne segue. 1.° Che ciascun raggio di curvatura eguaglia l'arco dell'evoluta, che gli corrisponde, 2.° Che ciascuno di tali raggi è tangente dell'evoluta. 3.° Che nel medesimo tempo è normale della curva di evoluzione, 4.° Che la curvatura della curva di evoluzione nei diversi suoi punti sta in ragione inversa di raggi osculatori correspondenti.

673.

673. Ne segue inoltre, che una curva dotata di flesso contrario non può avere una curva di evoluzione, che sia continua, e la medesima, perchè si richiederebbe, che il filo al di là del flesso si muovesse con un moto contrario, cioè prendesse a muoversi dall'altra estremità, il che si vede esser totalmente contrario alla produzione di una medesima curva continua. Non esiste per conseguenza il punto, che il Marchese de l'Hòpital chiama: *punto di regresso di seconda specie*.

674. Vediamo come si determini per mezzo di una formola generale il raggio di curvatura, di una qualunque curva di Evoluzione.

Sia la curva ANV, di cui l'asse sia AH', e si voglia sapere la di lei curvatura nel punto N, o sia vogliasi determinare il raggio CN. Condotte le ordinate MP, np infinitamente prossime, sarà NM la normale della curva ANV, e PM ne sarà la sunnormale; e si avrà $MN=y\frac{\sqrt{(dy^2+dx^2)}}{dx}$, $PN=y\frac{dy}{dx}$; Si averta quindi, che il triangolo rettangolo Nnb può riguardarsi come rettilineo, attesa l'estrema piccolezza dell'arco Nn, e si può concludere Nn (che faremo dp) $Nn=dp=\sqrt{(dy^2+dx^2)}$, e perciò $NM=y\frac{dp}{dx}$.

Posto questo si ha $AM=x+y\frac{dy}{dx}$; e siccome Mm è il differenziale di AM, si ha pure $Mm=\frac{dx^2+dy^2+yd^2y}{dx}=\frac{dp^2+yd^2y}{dx}$. Si conduca Mt

per-

perpendicolare ad NC: Si avrà per i triangoli simili Nnb, Mtm, $dp : dx :: \frac{dp^2 + yd^2y}{dx} : Mt = dp + y\frac{d^2y}{dp}$.

Si conduca parimente dal punto M la retta ML parallela al raggio mC; ne deriverà $Ln = Mt$; perciò $LN = Nn - Ln = d.p - d.p - y\frac{d^2y}{dp} = -\frac{yd^2y}{dp}$.

Finalmente per i triangoli simili LNM, NnC si ortiene $-y\frac{d^2y}{d.p} : y\frac{d.p}{dx} :: d.p : NC = \frac{dp^2 . dp}{-dxd^2y} = \ldots\ldots \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxd^2y}$ formola richiesta.

Per farne uso in pratica basta sostituire i valori di dx, dy, e d^2y in guisa, che la formola riducasi a contenere una soltanto delle incognite x, y, e costanti.

676. Probl. Data una curva determinarne l'evoluta.

Soluzione. L'ordinata della curva richiesta ABC (Fig.[a] 20.) cioè CH' pongasi $=u$, e l'ascissa $AH'=z$; Essendo data la curva AEV si ha la sunnormale PM, la normale NM, ed il raggio di curvatura CN; Perciò si ha dai triangoli simili NPM, MCH', $NM : NP :: CM : CH' = \frac{CM.NP}{NM}$, come pure .... $NM : PM :: CM : MH' = \frac{CM.PM}{NM}$; Quindi si ha $AH' = Z = AP + PM + MH' = x + \frac{y\,dy}{dx} + \frac{CM.MP}{NM}$;

Con questo si hanno le due equazioni $u = \frac{CM.NP}{NM}$, e $z = x + y\frac{dy}{dx} + \frac{CM.PM}{NM}$, dalle quali si ha u, e z in x, y, e costanti, espresse cioè per le coordinate della curva data, e costanti. Da una di esse deducasi il valore dell'incognita x. ò y, che vi si contiene (giacchè suppongo, che siensi ridotte le suddette equazioni in maniera, che ciascuna ne contenga una solamente) espresso per la coordinata z, ò u, secondo che si opera sulla seconda, ò sulla prima. Questo valore si ponga nell' altra equazione, e si avrà immediatamente un equazione fra u, e z, che sarà l'equazione cercata.

676. Probl. Data una curva ANV (Fig.[a] cit.[a]) su cui sia ripiegato un filo in guisa, che ne avanzi oltre il suo estremo A una parte qualunque AD, si dimanda l'equazione della curva di Evoluzione DH.

Soluzione. Condotte le coordinate infinitamente prossime RT, SV, il raggio FTV, e la retta FQ parallela all'asse AH', dicasi l' arco $ACX = S$, e perciò $TV = LS$, $AS = x$, $SV = y$ $AD = b$, $DH=u$, ed $FH = z$; Sara $RS = TO = dx$, ed $VO = dy$.

Posto questo si ha $TV : TO :: FV : FQ$, cioè $\sqrt{(dx^2+dy^2)} : dx :: b+S : \frac{(S+b)\,dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = FQ$; Dunque $FQ = FQ - HQ = FQ - AS$, e $z = \frac{(S+b)\,dx - x}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$.

Parimente si ha $TV : TO :: FV : VQ$, cioè $\sqrt{(dx+dy^2)} : dy :: S+b : \frac{(S+b)\,dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, onde $SQ=$

$$VS - VQ = y - \frac{(S+b)dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = AH \text{, e } DH = DA + AH$$

$$= b + y - \frac{(S+b)dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = u \,.$$

E' questa una soluzione generalissima, che comprende infiniti casi particolari.

677. La Teoria dell'Evolute ci conduce a parlare delle subevolute. L'idea di queste si concepisce osservando la (Fig:[a] 21.), nella quale la curva *BCD* è l'Evoluta della curva *AEG*; la curva *BIH* è l'Evoluta della *BCD*, e perciò la subevoluta della curva *AEG*; che la curva *QMN* è l' Evoluta della *BIH*, e perciò la seconda subevoluta della curva *AEG*, e così in seguito. Cerchiamo la formola del raggio di una subevoluta di qualunque ordine. Sieno gli archi *EF*, *CD* infinitesimi; saranno simili i triangoli *EDF*; *CHD*, perché oltre gli angoli *E*, *C* retti, l' angolo *EDF* è complemento tanto di *EFD*, quanto di *CDH*; Lo stesso vale per i triangoli *CHD*, *INH* &c. Dunque $EF:EC::CD:CI::IH:IM$ &c. Ora *CD* è il differenziale di *EC*; come *IH* di *CI* &c. dunque siccome si ha

(n.674.) $EC = \dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}$ dev'essere *CD*....................

$$= d\left(\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}\right) \text{ cioè, posta } dx \text{ costante, ...}$$

$$= \left(\frac{-3dyd^2y^2\sqrt{(dx^2+dy^2)} + d^3y(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxd^2y^2}\right)$$

Quindi si ha *CI*, raggio di una subevoluta qualunque

$$(3dyd^2y^2(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} + d^3y(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}\,)$$

Si consulti su questa materia una profonda Memoria di M. Maupertuis negli Atti dell'Acc. R. delle Scienze all'an. 1728.

678. Venendo a parlare della maniera di determinare i Massimi, e Minimi delle funzioni continue, basta soltanto accennare, che questi si trovano col metodo, che si usa per le funzioni Algebriche, vale a dire, con eguagliare a zero il differenziale della funzione proposta.

679. Ci rimane adesso da trattare della rettificazione delle curve, della quadratura della loro superficie, e della cubatura de' solidi generati dalla rotazione di esse intorno ad una retta data di posizione.

Incominciando dalla rettificazione, la quale non è altro, che la riduzione di un' arco curvilineo in una linea retta, sia la curva *AMN* (Fig.[a] 17.) in cui *MP*, *NQ* sieno due ordinate ortogonali all' asse *AB*, e sia $AP=x$; $PM=y$; posta $PQ=MO=\Delta x$. $ON=\Delta y$, ed $MN=\Delta S$, detto *S* l'arco *AM*, dal triangolo mistilineo *MNO* si avrà prossimamente $\Delta S=\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$. Si vede però, che questo rapporto tanto più si accosta ad essere di eguaglianza, quanto più l'arco *MN* è piccolo, cosicchè se prendansi i limiti deesi avere una perfetta eguaglianza; dunque $d.S=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, e integrando

$$S=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$ formola, dalla quale si ha la rettificazione richiesta, ò esatta, ò approssimata.

680. Qualora le ordinate fossero obliquangole, converrebbe servirsi di un' altra formola, che si trova facilmente essere ....

$S=\int\sqrt{(dx^2+dy^2\pm 2\cos.m\,dxdy)}$, essendo m l'angolo delle coordinate. Ma torna più comodo ridurre l'equazione alle coordinate rettangole.

681. Vediamo la formola per la rettificazione delle curve di doppia curvatura (Fig.ª 22.)

Sia NL la curva, MVS la sua projezione sul piano ortogonale alle ordinate rettangole mt, nu; sia $mn=d.Nm$, e si potrà riguardare bb come parallela ad me, che si suppone parallela all' asse MB, si avrà con questo .... $me^2=bq^2+bq^2$; ma $mn^2=me^2+ne^2$, dunque $mn=\sqrt{(bq^2+bq^2+ne^2)}$, ed $S=\int\sqrt{(bq^2+bq^2+ne^2)}$

682. Cerchiamo adesso la superficie di un semmento curvilineo qualunque AMP (Fig.ª 17.). Stando il tutto come sopra, conducasi la corda MN, e si avrà il trapezio $PMNQ=\frac{(2y+\Delta y)}{2}\Delta x$. Si prenda la $PE=1$, onde abbiasi il rettangolo $PF=1.\Delta x$; Il rapporto del trapezio a questo rettangolo sarà $=\frac{(2y+\Delta y)}{2.\Delta x}\Delta x$; questo poi si vede, che tanto più si accosta ad esser' eguale al rapporto $\frac{d.AMP}{dx}=\frac{d.S}{dx}$ quanto più l'arco MN è piccolo; dunque nel limite si ha $\frac{d.S}{dx}=\frac{(2y+dy)}{2.dx}dx=y$; dunque $d.S=yd$, ed $S=\int y\,dx$ formola generale per la

la quadratura delle superficie piane.

683. *Scol.* La quadratura delle superficie curvilinee si ottiene ancora colle serie, ma i principj, che fa d'uopo impiegare, sono molto poco geometrici: il Calcolo è più operoso: ed il risultato non è per alcun riguardo preferibile a quello, che somministra l'integrazione, la quale è generalmente semplicissima, come avremo luogo di mostrarlo con molti esempj.

684. *Teor.* 1.° Se sieno x, y le coordinate di una curva, ed u, z le coordinate di un'altra, ed abbiasi $y:z::du:dx$ le aree delle due curve debbon' esser' uguali. *Dimostrazione.*

Difatto si ha $ydx=zdu$, e perciò $\int ydx=\int zdu$.

685. *Teor.* 2.° Dato l'elemento ydx di una curva, si possono trovare infinite curve di ugual superficie.

Si formi l'equazione qualunque $X=V$ nella quale $X=$ funz.ne (x), e $V=$ funz.ne (u); si avrà differenziando $X^1\,dx=V^1.du$; quindi $X^1:V^1::du:dx$; Dopo di questo s' istituisca la proporzione $X^1:V^1::y:z$, onde si abbia $z=y\frac{V^1}{X^1}$ si avranno così quattro variabili x, y, z, u, e tre equazioni, che sono, l'equazione fra x, ed y della curva data, l'equazione $X=V$, e l'equazione $z=y\frac{V^1}{X^1}$; per mezzo di esse potranno eliminarsi le due variabili x, y, e si otterrà un'equazione fra z, ed ed u, che sarà l'equazione cercata.

686. Intorno alle superficie curvilinee una ricerca elegante è pure quella del centro generale.

Per centro generale s'intende un punto situato relativamente alla curva in maniera, che qualunque retta per esso conducasi, la quale termini da ambe le parti al perimetro della curva, sia divisa in due parti eguali nel punto suddetto, e divida in due parti eguali la superficie della curva.

687. Quindi si vede, che se una curva sia dotata di centro generale, tutte le rette, che passando per detto centro, termineranno al perimetro della curva, saranno tanti Contro-diametri, e che per conseguenza le coordinate condotte a queste linee saranno eguali, tanto dalla parte positiva, quanto dalla parte negativa.

Perciò l'equazione, che appartiene ad una curva dotata di centro generale, dovrà esser mancante dei termini di sito pari. Siccome però si richiede a quest'effetto, che l'origine dell'ascisse sia posta nel centro generale, com'è per se manifesto, e questa posizione è sempre possibile, la regola per determinare se abbiavi in una curva data il centro generale, qual debba essere il rapporto dei coefficienti, affinchè la curva possa ammettere il detto centro, e qual sia la posizione del centro stesso, è la seguente.

Regola. Si trasferisca indeterminatamente l'origine dell'ascisse, con porre $x=m+z$, ed $y=n+u$, e si faccia eguale a zero ciascun coefficiente dei termini di sito pari della trasformata; saranno queste l'equazioni, che fisseranno il necessario rapporto dei coefficienti, e la posizione del centro cercato.

Un esempio generale spargerà tutta la chiarezza possibile sulla regola esposta.

Sia proposto a determinarsi, se una curva di second'ordine, generalmente rappresentata dall'equazione $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, sia suscettibile di centro generale; da quali condizioni possa dipendere, e come se non possa determinare la posizione.

Soluzione. Fatta la sostituzione di $m+z$ in vece di x, e di $n+u$ in vece di y si ottiene la trasformata

$$\left.\begin{array}{l} cu^2+bzu+az^2 \\ +(e+bm+2cn)u+(d+bn+2am)z \\ +(f+en+dm+cn^2+bnm+am^2) \end{array}\right\} =0$$

Si pongano eguali a zero separatamente i coefficienti di u, e di z, e si avrà $m=\frac{be-2cd}{4ac-b^2}$, $n=\frac{bd-2ae}{4ac-b^2}$

Di qui si raccoglie, che le curve di second'ordine possono avere un centro generale, di cui la posizione vien determinata dall'ascissa m, e dall'ordinata corrispondente n.

Se $4ac-b^2$ fosse $=0$, il centro dovrebb'essere a una distanza infinita; qualora però fosse anche $be-2cd=0$ ne risulterebbe $bd-2ae=0$ parimente, come si può veder facilmente con sostituire il valor di b preso dall'equazione $be-2cd=0$. nell'equazione $4ac-b^2=0$ &c. e perciò ne deriverebbe per m, ed n, un'espressione $\frac{0}{0}$, la quale sebbene indeterminata, si può nondimeno determinare, perciò che si disse al (n. 573.)

688. Tornando adesso alla quadratura, ci si presentano le superficie generate dai perimetri curvilinei intorno ad un'asse qualunque.

S' immagini (Fig.ª 17.) che la curva AMN faccia una rotazione intorno all' asse AB; dicasi S la superficie descritta dall'arco $AM = S$, e si supponga formato il rettangolo $PEFQ$, in cui sia $PE = 1$

Condotta la corda MN all'arco $MN = \Delta S$, si ha la superficie descritta da questa corda nella total sua rivoluzione, $= \frac{c}{2r}(2y + \Delta y)\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$ e quella descritta dalla $EF = \frac{c}{r}\Delta x$.

Il rapporto di queste due superficie si trova essere $\frac{(2y+\Delta y)}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$, di cui il limite è $y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; Ma il sudetto rapporto ha parimente per limite $\frac{dS}{\frac{c}{r}dx}$; Dunque, siccome i limiti di una medesima funzione sono eguali, si ha finalmente $y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{d.S}{\frac{c}{r}dx}$, onde $dS = \frac{c}{r}y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ formola, che integrata deve dare la superficie di tutti i solidi di rivoluzione.

 689.

689. Eccoci finalmente alla cubatura dei solidi, generati dalla rotazione di una superficie curvilinea intorno ad un'asse qualunque.

Dicasi $= \Sigma$ il solido generato dalla rotazione dello spazio AMN intorno all'asse AB. Sieno al solito le due ordinate MP, NQ distanti di una quantità Δx, e le loro sommità sieno congiunte colla corda MN. Il cono troncato, generato dalla rotazione del trapezio $NPQN$ è $= \ldots\ldots$ $\frac{c}{3r}\frac{(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2)}{2}\Delta x$, ed il cilindro generato dal rettangolo $EPQF$ è $= \frac{c}{2r}\Delta x$. Quindi si ha il rapporto di questi due solidi $= \frac{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}{3}$. Limite di questa funzione è y^2; ma ne è un limite ancora $\frac{d.\Sigma}{\frac{c}{2r}dx}$; dunque si ha ....

$$y^2 = \frac{d.\Sigma}{\frac{c}{2r}dx}$$, vale a dire $d\Sigma = \frac{c}{2r}y^2 dx$, formola, che integrata, somministra la cubatura di qualunque solido generato dalla rotazione di una superficie curvilinea data per equazione.

690. Questo è quanto appartiene alla Teorla generale delle curve. Era facile inserirvi varie altre ricerche, e dei centri di gravità, dei centri di oscillazione, delle curve caustiche &c. ma sareb-

rebbe stato questo un trasferire impropriamente nella provincia delle Matematiche pure, ciò che non appartiene, che alla Fisica, ed un vestire la bella Teoria Analitica di quelli ornamenti, di cui non abbisogna, per comparir doviziosa ed elegante.

Ci rimane adesso da entrare in un' ampio esame Analitico sulle diverse specie di curve di ciascun'ordine.

SEZIONE I.

Teoria delle linee di prim'ordine.

691. Le linee di prim'ordine, generalmente espresse coll'equazione $ax \pm by \pm c = o$, non sono, che semplici linee rette. Le ricerche da farsi intorno a queste sono assai limitate; noi ce ne occuperemo quanto basta.

692. Volendo vedere primieramente con tutta l'evidenza, che l'equazione $ax \pm by \pm c = o$, rappresenta una linea retta, basta osservare, che se facciasi $x = o$, y non può ricevere, che un sol valore, e che se facciasi $y = o$, x parimente non ammette, che un sol valore. Ma se la linea rappresentata dalla sudetta equazione fosse curva, o dovrebbe corrispondere una doppia ordinata alla medema ascissa, o una doppia ascissa ad una semplice, o doppia ordinata. Dunque rimane dimostrato, che la linea compresan ell'equazione surriferita è generalmente una linea retta.

693. Vediamo adesso le principali mutazioni, che in essa possono derivare da qualcheduna delle variazioni dei coefficienti.

1.° Sia primieramente $c = o$; posto $x = o$, l'equazione

zione rimanente $ax + by = o$, da $y = o$; dunque la retta espressa dall'equazione passa per l'origine delle ascisse.

2.° Sia $b = o$; dividendo per b si avrà $\frac{ax}{b} \pm y \pm \frac{c}{b} = o$ cioè $y = \mp \frac{c}{b} - \frac{ax}{b} = \infty$, onde la retta è normale all' asse.

5.° Sia $a = o$, e dividendo per a, si avrà come sopra $x = \mp \frac{c}{a} \mp \frac{by}{a} = \infty$, il che mostra, che la retta è normale, come sopra, all'asse delle ascisse, ovvero, parlando più propriamente, che fa un' angolo coll'asse suddetto minore di un' infinitesimo dell'angolo retto.

694. E'facile oltre di questo a vedersi, che dalla grandezza dei coefficienti a, b, c, e dai loro segni, dipende la posizione della retta rappresentata dall' equazione, e che per mezzo di tali coefficienti, ella viene totalmente determinata.

695. Vedremo a suo luogo (Analis. Geom.), come si estragga dal seno dell'equazione la retta compresavi, unitamente alla precisa di lei posizione.

SEZIONE II.

Teoria delle linee di 2.° ordine.

676. Per investigar le proprietà generali delle linee di second'ordine, si riduca l'equazione generale alla forma $y^2 + \frac{(bx+d)}{a} y + \frac{cx^2+ex+f}{a} = o$ ..(A)

697. Dalla natura di quest'equazione si raccoglie, che siccome nell'equazioni di secondo grado, il coefficiente del secondo termine, non può contenere più di due quantità a, b (*n.* 506.), si raccoglie, dissi, che non possa avere più di due radici. Ciò posto, supponghiamo, che le radici dell'equazione (A) sieno reali, e che l'ordinata PQR incontri la curva (Fig.ª 25., 27.) in due punti Q, R; sarà (*n. cit.*) $PQ + PR = -\frac{bx+d}{a} = -\frac{bAP+d}{a}$ posto, che sia AFG l'asse delle ascisse, A l'origine, e l'angolo APR qualunque.

Per la stessa ragione, conducendo sotto lo stess' angolo un'altra ordinata qpr, osservando, che pq è negativa, si avrà $pr - pq = -\frac{bAp-d}{a}$.

Quindi sottraendo la seconda dalla prima ....
$PQ + pq + PR - pr = \frac{b(Ap - AP)}{a} = \frac{b}{a} Pp$.

Per i punti q, r si conducano le rette qt, rs parallele all'asse, e sarà $Qt + Rs = \frac{b}{a} . Pp$, vale a dire, che starà $Qt + Rs$ a Pp in una ragione costante, in qualunque parte della curva si conducano le corde parallele QR, qr.

698. Se l'ordinata PQR divenga tangente $= KCI$ (Fig.ª 26.) avendo condotte le corde parallele QR, qr, e dai punti Q, R, q, r le rette QI, RK, qi, rk parallele all'asse primitivo, a cagione, che le parti CK, Ck cadendo dalla parte opposta di C sono negative, si ha $CI - CK : QI :: b : a$, $Ci - Ck : qi :: b : a$.

Supponghasi, che la CD partendo dal punto del contatto divida in mezzo l'ordinata QR nel punto M, ed a motivo, che si ha $CI - CK = o$ sarà parimente $Ci - Ck = \frac{qi}{QI}(CI - CK) = o$, cioè sarà $qm = mr$.

699. Ne segue da questo, che se una retta CD partendo dal contatto C divida per metà un'ordinata qualunque QR parallela alla tangente, debba dividere per metà tutte le altre ordinate qr parallele alla medesima tangente.

700. Una retta come CD è (*n.* 631.) ciò che dicemmo diametro. E' di quì manifesto, che siccome a qualunque punto di una curva si può condurre una tangente, infinito dev'essere il numero de' diametri delle curve di second'ordine; e che si può sempre trovare un numero qualunque di diametri.

701. Tornando adesso all'equazione (A), siccome si sà (*n.* 506.), che l'ultimo termine di un' equazione di secondo grado è uguale al prodotto delle sue due radici, deesi avere $PQ . PR = \frac{cx^2 + ex + f}{a}$ (Fig.ª 27.) . Quindi $PQ . PR = \frac{c}{a}(x - AF)(x - AG) = \frac{c}{a} PF . PG$. Dunque il rettangolo delle ordinate $PQ . PR$ stà al rettangolo $PF . PG$ in ragione costante, in qualunque punto si conduca l'ordinata PQR.

702. Supponghiamo, che la PQR divenga tangente. In questo caso il rettangolo $PQ . PR$ diviene (Fig.ª 25.) un quadrato PC^2, e si ha, che

PC^2

PC^2 quadrato della tangente stà al rettangolo di tutta la segante PR nella parte esterna PQ in ragione costante, e perciò, che essendo pqr parallela a PQR, sia $PC^2 : pC^2 :: PQ . PR : pq . pr$.

703. Sia CD un diametro (Fig.ª 26.), che divida per metà le ordinate QR, qr parallele alla tangente in C, e sarà $CK^2 : Ck^2 :: KR . Ku : Kr . Kt$; Ma $Ku = MD$, e $Kt = mD$. Dunque $MR^2 : mr^2 :: CM . MD : Cm . mD$, e perciò nelle curve di 2.° ordine, i quadrati dell' ordinate hanno un rapporto costante ai rettangoli delle proprie ascisse.

Queste proprietà si potevano dedurre ancora dal Teór. esposto al $n.651$.

704. Vediamo adesso, come le curve di prim' ordine si possano distribuire in certi generi determinati.

L'equazione (A) con mutar l'origine, e l'asse delle ascisse, sia ridotta alla forma $y^2 = cx^2 + ex + f \dots (B)$.

Ciò fatto, io osservo, che il valore di c può produrre tre diversi generi di curve. Infatti se c sia positivo, per qualunque valor d' x, anche infinito, y è sempre reale. Dunque in questo caso la curva ha dei rami infiniti, e questi sono quattro; due corrispondono ad $x = + \infty$, e due corrispondono ad $x = - \infty$.

Se c sia negativo, allorchè x arriva ad una certa grandezza, risulta y immaginaria, e perciò la curva è finita.

Resta, che c sia $=0$. In questo caso l'equazione $y^2 = ex + f$ dimostra, che essendo e positiva, ha la curva due rami infiniti nell' ipotesi di $x = \infty$, e che essendo e negativa, ha due rami infiniti nell' ipotesi di $x = - \infty$ dalla parte delle ascisse negative.

705.

705. Ecco pertanto tre generi particolari, a cui si riducono le linee di second'ordine. Quelle, che appartengono al primo, diconsi Curve Iperboliche, quelle, che appartengono al secondo, diconsi Curve Ellittiche, e quelle, che appartengono al terzo, Curve Paraboliche.

706. Queste curve, unitamente al circolo, che si vedrà non esser' altro, che una specie di Ellisse, hanno il nome di Sezioni Coniche, perchè tagliando un Cono con un piano, che non passi per il vertice, si possono formare sulla Convessità Conica tutte le Curve divisate. Prima di passare a trattarne particolarmente, vediamo, come dalla Sezione del Cono vengano generate.

707. Sia CBD (Fig.ª 28.) la sezione verticale di un cono retto, fatta perpendicolarmente alla base, e sia $AMam$ un piano perpendicolare a questa sezione, che tagli il cono in qualunque maniera. L' intersezione dei piani CBD, $AMam$ sarà una linea retta Aa.

Formata questa sezione, se ne faccia un' altra con un piano $FMGm$, che sia normale al piano CBD, e parallelo alla base del cono; Essa produrrà un circolo, come è per se manifesto, e la di lui intersezione col piano $AMam$ sarà una retta Mm, normale alla retta Aa, ed FG, sezione del circolo col piano CBD, e perciò la retta PM sarà un' ordinata comune al circolo $FMGm$, ed alla curva $AMam$. Posto questo sia $AP = x$, $PM = y$, ed $AB = c$; Sia l'angolo $ABa = P$, e l'angolo $BAa = Q$ si avrà per il circolo $FMGm$, $y^2 = FP . PG$.

Per determinare l'espressione analitica delle rette FP, e PG, conducasi AE parallela ad FG, e PK parallela a BD. Si avrà $AB : sen. AEB :: AE :$

sen.b:

$sen.B$; ma $AEB = \frac{180.^\circ - P}{2} = 90.^\circ - \frac{1}{2}P$; dunque $sen.AEB = sen.90.^\circ \, cos.\frac{1}{2}P - sen.\frac{1}{2}P \, cos.90.^\circ = cos.\frac{1}{2}P$, perció $AE = \frac{c.\,sen.P}{cos.\frac{1}{2}P}$. Inoltre il triangolo APK da l'analogia $sen.AKP : sen.APK$, overo $sen.AEB : sen.AaE$, e finalmente $cos.\frac{1}{2}P : sen.(P+\mathcal{Q}) :: x : AK = \frac{x\,sen.(P+\mathcal{Q})}{cos.\frac{1}{2}P}$; Dunque

$$KE = PG = AE - AK = \frac{c.\,sen.P - x\,sen.(P+\mathcal{Q})}{cos.\frac{1}{2}P};$$

Per determinare FP si deduca dal triangolo APF la proporzione $sen.AFP$, ò $sen.BFG$, ò $sen.BGF$, ò $sen.BEA$, ò $cos.\frac{1}{2}P : x :: sen.\mathcal{Q} : FP = \frac{x\,sen.\mathcal{Q}}{cos.\frac{1}{2}P}$.

Quindi si ha dall'equazione $y^2 = FP.PG$, la seguente $y^2 = \frac{sen.\mathcal{Q}}{cos.^2\frac{1}{2}P}\left(cx\,sen.P - x^2\,sen.(P+\mathcal{Q})\right)$, che è l'equazione cercata.

708. Passiamo adesso ad osservare, come la somma dei gradi, che costituiscono gl: angoli P, e $\mathcal{Q}$, influisca a cangiar la natura della curva prodotta dalla sezione, supposto però sempre, che il piano segante non passi per il vertice, e non sia parallelo alla base, perchè nel primo caso la sezione è un triangolo, e nel secondo è un circolo.

Sia 1.° $P+\mathcal{Q} = 180.^\circ$ In questa ipotesi il piano segante risulta parallelo al lato BD, e l'equazione generale diviene $y^2 = \frac{sen.P\,sen.\mathcal{Q}}{cos.^2\frac{1}{2}P}(cx) = \frac{sen.^2 P}{cos.^2\frac{1}{2}P}cx = 4\,sen.^2\frac{1}{2}P\,cx$ (veda la formola $sen\,c = 2\,sen\frac{1}{2}c\,cos.\frac{1}{2}c$)

La curva rappresentata dell'equazione $y = 4\,sen.^2\frac{1}{2}P\,cx$ è la Parabola (Veda Fig.ª 29.)

Sia 2.° $P+\mathcal{Q} < 180.^\circ$; in questo caso il piano segante taglia ambedue i lati del cono, e l'equazione generale rimane invariata ....

$$y^2 = \frac{sen.\mathcal{Q}}{cos.^2\frac{1}{2}P}\left(cx\,sen.P - x^2\,sen.(P+\mathcal{Q})\right).$$

Quest'equazione appartiene alla curva detta Ellisse (Veda Fig.ª 28.).

Sia 3.° $P+\mathcal{Q} > 180.^\circ$ Il piano segante farà un'angolo col lato CB minore dell'angolo del vertice P., e l'equazione si muterà nella forma ......

$$y^2 = \frac{sen.\mathcal{Q}}{cos.^2\frac{1}{2}P}\left(cx\,sen.P - x^2\,sen.(P+\mathcal{Q}-180.^\circ)\right)$$

per-

perchè il seno di un'angolo $\varphi > 180.°$ è negativo, ed uguale $sen.\ (\varphi - 180.°)$. La curva compresa in quest'equazione dicesi Iperbola.

709. Se s'immagini un cono *cBd* eguale, ed opposto al vertice relativamente al cono *CBD*, è chiaro, che il piano segante *AMp* prolungato, dee formare anche in esso una sezione iperbolica, eguale a quella formata nel primo cono. (Vedi Fig.ª 30.).

710. Suppongasi adesso, che le divisate sezioni non sieno fatte in un cono retto, ma in un cono scaleno, e perciò suppongasi, che l'angolo *C* non sia uguale all'angolo *D*. In quest'ipotesi avremo l'equazione $y^2 = \frac{sen.\ Q}{sen.C.\ sen.\ D}$ .... $(cx\ sen.P - x^2\ sen.\ (P+Q))$ equazione, che del pari, che l'equazione trovata di sopra appartiene alla Parabola, all'Ellisse, o all'Iperbola, secondo che $P+Q$ è $=, <,$ o $> 180.°$

711. Nel primo caso però fà d'uopo avvertire, che ella può rappresentare un circolo, purchè l'angolo *A* sia eguale all'angolo *C*, ò all'angolo *D*. Difatto se l'angolo *A* sia eguale all'angolo *D*, l'angolo *BaA* risulta eguale all'angolo *C*; ma il seno dell'angolo *BaA* è $= sen.(P+Q)$, dunque si ha in quest'ipotesi $sen.C = sen.(P+Q)$, e perciò l'equazione generale diviene $y^2 = \frac{sen.\ P}{sen.\ C} \times cx - x^2$, che appartiene manifestamente al circolo, di cui sia il diametro $= \frac{sen.P}{sen.C}.\ c$

712. Si può qui osservare, che nel 3.° caso, in cui

cui l'equazione rappresenta un'Iperbola, se pongasi $c = o$ l'equazione diventa .... $y^2 = \frac{sen.Q\ sen.(P+Q-180.°)x^2}{sen.C\ sen.D}$, dove basta porre il coefficiente di $x^2 = \frac{a^2}{b^2}$, perchè divenga $y = \frac{ax}{b}$, la quale è un'equazione alla linea retta, il che dimostra, che l'Iperbola degenera in un triangolo, se il piano segante passi per il vertice del cono.

713. Prima di porre fine alla ricerca dell'origine delle curve Coniche, giova avvertir di passaggio, che il Circolo, e l'Ellisse formansi ancora con la sezione di un cilindro. Se il cilindro sia retto, qualunque sezione parallela alla base risulta un circolo, e se sia obliquo risulta un circolo anche se sia subcontraria, come nel cono. L'Ellisse poi nasce nella sezione di un cilindro retto, che non sia parallela alla base, ed in un cilindro obliquo, dalla sezione, che non sia nè parallela alla base, ne subcontraria. Vediamo l'origine dell'Ellisse nella sezione cilindrica. Sia il cilindro *ABCD* (Fig.ª 31.); si concepisca tagliato col piano *GMT* obliquo alla base, e non subcontrario, perchè si suppone, che il cilindro sia qualunque, o retto o obliquo. Per un punto qualunque *P* della retta *GT*, che è l'intersezione del piano *ABCD* perpendicolare alla base del cilindro, e del piano segante *GMT*, si conduca un piano parallelo alla base, il quale produrrà una sezione circolare *LMK*. Supposto, che il piano *GMT* sia perpendicolare al piano *ABCD*, l'intersezione *PM* dei due piani seganti risulta perpendicolare al medesimo piano, e perciò ad *LK*, ed a *GT*. Dicasi $LP = z$, $GP = x$,

$PM = y$, $LK = x$, e $GT = b$, e si avrà per il circolo $y^2 = az - z^2$. Ma per i triangoli simili LPG, TPK si ha $z : x :: a : b$, e perciò $z = \frac{ax}{b}$. Quindi, fatta la sostituzione di z, si ha per la curva GMT l'equazione $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(bx - x^2)$, la quale è della forma stessa, che l'equazione generale dell' Ellisse trovata di sopra.

714. Veduta in questa guisa l'origine delle curve Coniche, e trovata direttamente l'equazione di ciascuna di esse, possiamo adesso coll' equazioni respettive alla mano, inoltrarci con successo nell'investigazione delle proprietà, che le distinguono.

ARTICOLO I.

Del Circolo.

715. L'equazione del circolo si è veduta essere $y^2 = 2ax - x^2$, $2a$ essendo il diametro, ed x, y due coordinate ortogonali.

Per discuoprir l'andamento di questa curva, suppongasi diviso il diametro $2a$ in un determinato numero di parti, che sia per esempio $= 10$, e si diano successivamente all'ascissa x i valori 1, 2, 3 &c. 10, coll'aggiunta del valore zero, e dai risultati, che ne derivano, si dedurrà l' andamento della curva. Eccoli tutti per ordine.

Posto $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$, $x = 8$, $x = 9$, $x = 10$, risulta $y = 0$, $y = \pm 3$, $y = \pm 4$, $y = \pm\sqrt{21}$ $y = \pm\sqrt{24}$, $y = \pm 5$, $y = \pm\sqrt{24}$, $y = \pm\sqrt{21}$, $y = \pm 4$, $y = \pm 3$, $y = 0$.

 716.

716. Da questi risultati si deducono adesso le conseguenze, che seguono.

Siccome posta $x = 0$, ne deriva $y = 0$, la curva (Fig.ª 32.) passa per il punto A, origine delle ascisse.

Crescendo x fino a divenire $= a$, crescono le ordinate, finchè la massima sia $= a$; e crescendo x oltre del valore $5 = a$, le ordinate diminuiscono, finchè giunta x ad essere $= 10 = 2a$, y è $= 0$, il che mostra dover passare la curva circolare per il punto B, e dover'essere per conseguenza rientrante.

Dopo di questo, se si osservi, che i valori di $x >. 10$ danno per y dei valori immaginarj, si concluderà, che non v'è curva al di là del punto B; e se finalmente si avverta, che per ciascun valore di x, ne risultano per y due valori eguali, uno positivo, e l'altro negativo, si vedrà, che la curva circolare ha necessariamente due rami, continui, ed eguali, uno sopra il diametro AB, e l' altro sotto di esso.

717. Scoperta così analiticamente l'indole del circolo, passiamo ad investigarne le proprietá.

Dal centro C si conduca un raggio qualunque CM, e dall' estremità M si abbassi sul diametro AB un ordinata MP ad esso perpendicolare; ne risulterà generalmente un triangolo rettangolo CMP, da cui si avrà $CM^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, ma $y^2 = 2ax - x^2$, dunque $CM = a$, vale a dire, che tutti i punti della periferia circolare sono ad egual distanza del centro.

Inoltre per la proprietà costituente l' equazione si ha $AP : PM : PB$, il che dimostra esser qualunque ordinata media proporzionale geometrica fra i due semmenti del diametro da essa prodotti.

718.

718. Conducasi adesso una corda AM, e si avrà $AM^2 = x^2 + y^2 = 2ax$, e perciò $x : AM : 2a$, vale a dire, che tutte le corde condotte da un' estremo del diametro, sono medie geometriche fra il diametro, e l'ascissa corrispondente.

719. Dall'estremità M della corda AM, si conduca un'altra corda MB, all' estremo B del diametro, e ne risulterà $AM^2 + MB^2 = AP^2 + 2AP.PB + PB^2 = 4a^2 = AB^2$, che è il Teorema Pittagorico.

720. Iscrivendo nel circolo un quadrilatero $AMBM'$ si trova $AM \times BM' + AM' \times BM = AB.MM'$. Per vederlo si conduca da un' angolo qualunque per esempio dall'angolo M, una retta MN in modo, che l'angolo NMB risulti eguale all'angolo $AM'M$. Con questo, i triangoli simili AMM', NBM' danno $MM' : MA :: M'B : BN = \dfrac{M'B.MA}{MM'}$. Parimente i triangoli simili MBM' ANM' danno $MM' :: AM' :: MB : AN = \dfrac{AM'.MB}{MM'}$.

Si aggiungano le due equazioni trovate, e si avrà $BN + AN = AB = \dfrac{M'B \times MA + AM' \times MB}{MM'}$, di dove moltiplicando per MM' si deduce $AB.MM' = M'B.MA + M'A.MB$.

721. Passando a determinar le funzioni del circolo, si trova la sottangente $\dfrac{ydx}{dy} = \dfrac{2ax - x^2}{a - x}$; per conseguenza $CT = \dfrac{a^2}{a - x}$, e si ha la proporzione $CP : CA : CT$.

722. Dall'equazione $y^2 = a^2 - x^2$ si avrebbe avuto $PT = \dfrac{a^2 - x^2}{x}$ e $CT = \dfrac{a^2}{x}$, di dove si ha la proporzione addotta di sopra.

723. Facendo uso della prim'equazione si ha la sunnormale $\dfrac{ydy}{dx} = a - x$, e la normale $y \sqrt{\dfrac{dx^2 + dy^2}{dx^2}} = a$.

724. Con egual facilità si troverebbe il raggio osculatore $= a$, ed il centro generale nel centro stesso.

725. Volendo rettificar la circonferenza si ha dall'equazione $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $dy^2 = \dfrac{x^2dx^2}{a^2 - x^2}$, e perciò $\int \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \int \dfrac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; Si svolga in serie il radicale $\sqrt{(a^2 - x^2)}$, e fatta l'integrazione de'termini, che risultano, si ottiene $\int \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = x + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^3}{3a^2} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \dfrac{x^5}{5a^4} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \dfrac{x^7}{7.a^6}$.

726. *Teor.* Le circonferenze de' circoli stanno fra di loro come i diametri.

Dimostrazione. I circoli sono poligoni simili, e i diametri sono diagonali omologhe; dunque &c.

727. Cerchiamo la quadratura del circolo. Si ha $\int ydx = \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = ax - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^3}{3a}$

$$-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5a^3}-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7a^5}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9a^7}\&c.$$

728. *Teor.* Le superficie de' circoli stanno fra di loro come i quadrati dè diametri.

Dimostrazione. Le superficie dè poligoni stanno fra di loro come i quadrati dè lati omologi; ma i lati omologi stanno come le diagonali omologhe, o sia come i diametri; dunque &c.

729. Se un semicircolo faccia una rotazione intera intorno al diametro, vien generata una sfera La superficie, e la solidità di questa è nota abbastanza dalla Geometria. Noi ci occuperemo un momento sulle sezioni sferiche, e sulle figure, che ne derivano.

732. Se tagliasi con un piano una sfera qualunque, le sezioni risultano sempre circolari, e risultano circoli massimi, quando il piano segante passa per il centro della sfera. Tagliando una sfera con diversi piani nel tempo stesso, si possono formare sulla di lei convessità dei triangoli curvilinei; vediamo come si possà determinarne la superficie.

731. Se dividasi la circonferenza di un circolo massimo in tante porzioni qualunque, e per i punti di divisione, e per l'asse si conducano dei piani, la superficie sferica vien divisa in tante liste, le quali stanno fra loro come gli archi compresi fra i piani, che le formano. Ciascuna di esse, sarà dunque uguale al prodotto dell'asse, per l'arco del circolo massimo, che misura l'angolo formato dai piani suddetti. Ciò posto, sia *ABCD* una delle liste (Fig.ª 33.) *BD* l'arco di circolo massimo, che misura l'angolo *A*; La superficie di detta lista sarà $=AC.BD$, ò $=AC.A$, detto *A* l'arco *BD*. Sia l'arco

co $AM=CE$, e si conduca per *M*, *E* il circolo massimo *OMES*. Si avrà un triangolo sferico *AME*, nel quale i due lati *AM*,*AE* sono supplemento l'uno dell'altro. Di più si avrà l'arco *MC* eguale all'arco *AE*; dunque il triangolo $AME=$ triang.MEC; dunque ciascuno di essi è la metà della lista *ABCD*; quindi $AME=AF.A$, dove *AF* è il raggio della sfera.

Da questo ne segue 1.° Che la superficie di un triangolo sferico, di cui due lati vagliono insieme 180.° è uguale al prodotto del raggio della sfera per l'arco di circolo massimo, che misura l'angolo compreso fra i lati complementarj.

732. Sia adesso (Fig.ª 34.) il triangolo rettangolo *AML*, di cui l'angolo retto sia *M*. Si prenda $MN=AM$, e si conduca il circolo massimo *QK*. I triangoli *MNL*, *AML* saranno eguali; dunque le ipotenuse *NL*, *AL* saranno eguali. Dunque gli archi *NL*, *LC* sono supplementi uno dell'altro; perciò per il primo caso $NLC=AF$ moltiplicato per l'angolo $NLC=$ .... $AF(AMC-2MLA)$. Dunque il triangolo $MLA=AF(2A-AMC+2MLA)$ essendo la lista intera $=AF\times 2A=AC.A$; Dunque finalmente $MLA=AF(A+MLA-\frac{AMC}{2})$, vale a dire 2.° Che la superficie di un triangolo sferico rettangolo è uguale al prodotto del raggio, per la somma degli archi, i quali misurano gli angoli acuti, diminuita di un quarto della circonferenza.

733. Sia finalmente *APL* un triangolo qualunque (Fig.ª 35.) Si divida in due triangoli rettangoli *PmL*, *AmL*, per mezzo dell'arco di circolo massimo *mL* condotto perpendicolarmente sopra di *AP*; Si

Si avrà per il 2.° caso $AmL = AF(A + mLA - \frac{AmC}{2})$,

e $PmL = AF(P + PLm - \frac{AmC}{2})$. Quindi $APL = AF(A + P + PLA - AmC)$. Dunque la superficie di un triangolo sferico qualunque, è uguale al prodotto del raggio della sfera, per la somma degli archi, che misurano i tre angoli, diminuita della semicirconferenza. E' questa una Teorìa utilissima per la quadratura delle volte.

ARTICOLO II.

Della Parabola.

734. L' equazione della Parabola è (*n*.78.) $y^2 = 4 sen.^2 \frac{1}{2} Pcx$; pongasi $4. sen.^2 \frac{1}{2} Pc = p$, ed essa diverrà $y^2 = px$.

Dunque $y = \pm \sqrt{px}$: perciò la curva parabolica ha due rami, uno sotto, e l' altro sopra l' asse, e ciascuno dilatasi all' infinito, perchè crescendo x senza limite, cresce pure senza limite y.

735. Questa curva non ha ramo alcuno al di là del vertice, perchè fatta x negativa risulta y immaginaria, e le sue ordinate procedono in maniera, che i di loro quadrati stanno come le ascisse corrispondenti.

Difatto se y, y' sieno due ordinate, ed x, x' le ascisse, che loro corrispondono, si ha $y^2 : y'^2 :: px : px' :: x : x'$.

736. Di quì si può dedurre, mediante il principio di Galilèo, che gli spazj percorsi dai corpi abbandonati alla forza acceleratrice della gravità, stanno come i quadrati de' tempi, si può, dissi, dedurre, che la curva descritta dai projettili, non computata però la resistenza dell' ammosfera, ed il moto della Terra, è una Parabola, e che le velocità di un fluido, che sorta per un orifizio, stanno fra di loro, come le ordinate di una Parabola, di cui l'asse sia il diametro verticale del vase, in cui si contiene il fluido.

737. Tornando all'equazione della Parabola, si vede che l'ampiezza di essa dipende dalla grandezza della costante p, perchè crescendo p, crescono le ordinate. Questa costante, in virtù dell' equazione $y^2 = px$ si sa essere una terza proporzionale a due coordinate qualunque x, y. Per determinarla più da presso, supponiamo, che sia rappresentata per una doppia ordinata della Parabola stessa, il che si può assolutamente. Nel punto, a cui essa corrisponde, si avrà $\frac{1}{4} p^2 = px$; Dunque $\frac{1}{4} p = x$, e l'ordinata intera $\frac{1}{2} p = 2x$, rapporto preciso abbastanza per poterla determinare meccanicamente, qualora venga dato il perimetro di una Parabola, e rapporto assai vantaggioso per ciò, che si dovrà dire in appresso.

738. Poste queste nozioni, sia data la Parabola YBC (Fig.ª 36.) E' manifesto, che deve esser data la costante p, altrimenti non è determinata l'equazione $y^2 = px$, e perciò neppur la parabola. Quindi conviene, che sia dato $\frac{1}{4} p$, e per con-

conseguenza l'ascissa, alla quale corrisponde l'ordinata $\frac{1}{2}p$. Questa dicasi c, e sia espressa per BF. Sopra il vertice B si prenda una distanza verticale $BS=BF=c$, e si conduca per il punto S una retta normale indefinita RSM, che la chiameremo Direttrice della Parabola. Essendo BP l'asse della parabola, dico primieramente

739. *Teor.* Se conducansi dal punto F, quante rette si vogliono al perimetro parabolico FK', FK &c. esse debbon risultare tutt'eguali alle rette respettive, condotte dai punti K, K' &c. perpendicolarmente sopra MR.

Dimostrazione. Si abbassi dal punto K l'ordinata KL sull'asse BP. Si avrà $KF^2=FL^2+KL^2$

$$=(LB-FB)^2+KL^2=(x-\frac{1}{4}p)^2+y^2=(x-\frac{1}{4}p)^2+px$$

$$=(x+\frac{1}{4}p)^2=(LB+BS)^2=KQ^2,$$ onde $KF=KQ$. Lo stesso dicasi delle rette $K'Q'$ &c.

Di qui si può dedurre un facil metodo meccanico, con cui descriver la Parabola con un moto continuo.

Abbiasi (Fig.ª 38.) una squadra QBC, che scorra con un braccio QB lungo la direttrice, ed al suo estremo C sia fissato un filo lungo quanto CB. Se l'altro estremo del filo si fissi nel punto F, e mediante uno stilo si applichi al braccio BC mentre la squadra si muove lungo QB, verrà descritta la Parabola.

741.

740. *Teor.* Se da un punto K qualunque del perimetro Parabolico, (Fig.ª 36.) si conducano due rette, una al punto F, e l'altra perpendicolare alla Direttrice, e se dividasi per metà la QF con una retta normale TKL, dico, che essa è generalmente tangente della parabola.

Dimostrazione. Che TE debba passare per K ne segue dall'isoscelismo del triangolo QKF; che poi non debba incontrare il perimetro parabolico in verun altro punto, ne segue da questo, che qualunque altro suo punto L dev' esser egualmente distante da Q, e da F. Ma se il punto L fosse nel perimetro, converrebbe, che fosse $LF=LI'<LQ$, e se fosse dentro la parabola, potrebb' essere $LF<LI$, ed *a fortiori* $<LQ$; dunque &c.

Si vede di qui, come si possa condurre una tangente a un punto dato dalla parabola.

741. Se al vertice B si conduca una tangente BD, essa divide in mezzo FQ, perchè i triangoli DEQ, FEB risultano eguali. Si può quindi condurre una tangente con un altro Metodo assai elegante, e che ha luogo per tutte le curve Coniche, del Ch. D. Perelli, ed è il seguente.

Si conduca una tangente al vertice della Parabola data. Dal punto proposto si abbassi sopra di essa una perpendicolare, che sia per esempio KD; per il punto K, e per la metà di BD si faccia passare una retta, e si avrà la tangente richiesta.

742. Se si dovesse condurre una tangente alla Parabola, da un punto dato fuori di essa, ecco la costruzione, di cui bisogna far uso. Fatto centro nel punto dato, ed intervallo la di lui distan-

stanza dal punto F si descriva un'arco indefinito; Dal punto, in cui questo incontra la direttrice, si abbassi una retta indefinita, parallella all'asse. Questa incontrerà la parabola in un punto. Per questo conducasi dal punto dato una retta indefinita, e si avrà la tangente cercata. Sia adesso

743. *Teor.* Se conducasi una retta NK, che sia parallela all'asse PB, ed incontri internamente il perimetro parabolico in un punto K, dico, che l'angolo da essa formato col ramo KC, dee risultar sempre uguale all'angolo, formato dalla retta KF, colla parte KB della parabola.

Dimostrazione. Essendo (Fig.[a] 36.) il triangolo QKF isoscele, si ha $QKE = EKF$; Ma $QKE = NKC$ dunque &c. e questo vale per qualunque altro punto.

744. Da questo ne segue, che se nella cavità parabolica generata dalla rotazione della semiparabola BKC intorno all'asse, vi entri un numero qualunque di raggi paralleli all'asse, debbano tutti, per la Legge Catottrica dell'eguaglianza, fra l'angolo d'incidenza, e l'angolo di riflessione, riunirsi nel punto F. Questo punto dicesi fuoco; e difatto il calore in esso prodotto dalla riunione di un numero assai copioso di raggi, è sufficiente a liquefare un metallo, ed a volatilizzare un diamante. Tutte le rette, che dal fuoco vanno al perimetro, si chiamano raggi vettori.

745. Questa elegante proprietà della Parabola può applicarsi con mirabil successo a propagar la luce ed il suono a remotissime distanze; basta collocare il corpo luminoso, ò il corpo sonoro nel fuoco di una tromba parabolica. La Tromba Parabolica riesce ancora mirabilmente ad uso acustico, qua-

qualora si adatti al fuoco un picciol tubo, e questo s'introduca nel meato uditorio. (*)

Si può adesso concludere; che la Parabola ha un fuoco; che esso è distante dal vertice di $\frac{1}{4}p$; e che la costante p è uguale alla doppia ordinata ortogonale, che passa per il fuoco; questa dicesi Parametro.

746. *Teor.* Se al vertice di una Parabola (Fig.[a] 36.) si conduca una tangente AB, che sia $= p$, e per il punto A una parallela indefinita AI all'asse BP, la quale si potrà chiamare seconda Direttrice della Parabola, qualunque rettangolo BF', BG, BH &c. è sempre uguale al quadrato dell'ordinata corrispondente OQ, RS, VX &c.

Dimostrazione. Difatto $BO \cdot OF' = px$; $BR \cdot RG = px$ &c.

756. *Teor.* Le perpendicolari abbassate dal fuoco

(*) *V'è chi pretende, e fra questi avvi il Ch. Cavalieri, che l'accensione delle flotte Romane, delle quali la prima di Marcello incendiata d'Archimede sotto Siracusa, e l'altra di Vitaliano incendiata da Proclo presso Costantinopoli, debba ripetersi dallo Specchio Parabolico. V'è però maggior verisimiglianza, che fosse ciò effettuato con uno specchio piano composto, a guisa di quelli di M. Busson, formati di 160. Specchj, i quali trasmettono l'accensione alla distanza di 200. piedi; perchè uno specchio parabolico, per trasmetter l'accensione alla distanza di 200. piedi, dee avere la doppia ordinata p di 800. piedi. Quest'opinione vien confermata ancora da Tzetze, il quale ci descrive lo specchio usato da Archimede come del tutto simile a quello di M. Busson.*

co sulle tangenti della Parabola, crescono in ragione sudduplicata de' raggi vettori.

Dimostrazione. I triangoli (Fig.ª36.) TEF, BEF essendo simili, danno $FT:FE:FB$, perciò $FE^2 = FT.FB$; di dove, FB essendo costante $= \frac{1}{4}p$, ne segue, che FE^2 segua la ragione di FT o sia di FK, ne segue cioè, che FE cresca in ragione di $\sqrt{FK}$.

748. *Teor.* L'angolo al fuoco, formato da due raggi vettori, è doppio dell'angolo formato dall'incontro delle tangenti, condotte ai punti, nei quali detti raggi incontrano il perimetro della Parabola.

Dimostrazione. Sia l'angolo al fuoco EKF(Fig.ª37.) e l'angolo formato dalle tangenti ECF; l'angolo $KEB=EBK$; Dunque $OKE=2EBK$, per la stessa ragione si ha l'angolo $OKF=2KAF$, dunque $EKF=2EBK+2KAF$ Ma $EBK=ABC$, ed $ECF=CAB+ABC$, dunque l'angolo $EKF=2ECF$.

749. *Teor.* Se dall'estremità della normale FO si conduca una perpendicolare ON sopra il raggio vettore KF, ne risulta FN uguale alla sunnormale MO, e KN eguale alla parte dell'asse KM compresa fra l'ordinata FM ed il fuoco.

Dimostrazione. Condotta dal punto F una retta indefinita, parallela all'asse DL, che sia FZ, essendo l'angolo $AFK=KFZ$ a cagione della normale, si ha l'angolo $OFK=OFZ$; mà $OFZ=KOF$; dunque i triangoli MFO, ONF sono eguali ed $NF=MO$. Inoltre $DM+DK=KF$; dunque $KN=DM+DK-MO$ $=DM+DK-2DK=DM-DK=KM$.

750. *Teor.* Il rettangolo della somma di due ordinate paraboliche nella loro differenza, è uguale al rettangolo del parametro nella differenza delle loro ascisse.

Dimostrazione. Sieno y, y' due ordinate, ed x, x' le ascisse corrispondenti. Si avrà $y^2=px$; $y'^2=px'$; Si tolga la seconda dalla prima, onde si abbia $y^2-y'^2=p(x-x')$, e sarà risciogliendo $(y+y')(y-y')=p(x-x')$, e perciò &c.

751. *Teor.* Il rettangolo del perametro in un' ascissa qualunque, ò il quadrato di una qualunque ordinata, il rettangolo dell' ascissa corrispondente all'ordinata, nell' ordinata stessa, ed il quadrato di tale ascissa, sono generalmente tre quantità in continua proporzione geometrica.

Dimostrazione. Dall'equazione $y^2=px$ si ha $y=\sqrt{px}$; questa si moltiplichi per x, e si avrà $xy=x\sqrt{px}$; Ma si ha $px:x\sqrt{px}:x^2$; dunque $px:xy,x^2$.

Se si dividano i primi due termini della proporzione addotta per x, rimane $p:y::xy:x^2$ d'onde si ha: Che il parametro stà ad un'ordinata qualunque y, come il rettangolo di tal ordinata nella propria ascissa, stà al quadrato dell'ascissa medesima.

752. *Teor.* Se si prendano due ordinate qualunque y, y', alle quali corrispondano le due ascisse x, x'. sarà in generale, il quadrato del parametro ad una delle ordinate, come il quadrato dell' altr'ordinata, al rettangolo delle due ascisse.

Dimostrazione. Nell'ipotesi data, si ha $y^2=px$; $y'^2=px'$. Queste si moltiplichino insieme, onde si abbia $y^2y'^2=p^2xx'$, e risciogliendo quest' equazione in proporzione si avrá $p^2:y^2::y'^2:xx'$.

753. Fin quì abbiamo riferita la parabola all'asse; passiamo ad esso a riferirla ad un suo diametro.

Definizione. Diametro della Parabola è una retta ta indefinita condotta da un punto del suo perimetro concavo, parallelamente all'Asse. Le ordinate riferite a un diametro sono le rette condotte da un punto qualunque del perimetro, parallelamente alla tangente, condotta all'origine del diametro. Posto questo,

754. Sia la Parabola NAK (Fig.ª 38.); MS ne sia un diametro, di cui sia M il vertice; Sia MQ un'ordinata normale all'asse AT, e dal punto N l'ordinata NP al diametro, il quale si suppone dato di posizione, ed abbiasi finalmente una seconda ordinata NL ortogonale all'Asse. I triangoli MQI, NRL sono simili; dunque se dicasi $NP=y$, $MP=x$, $QA=a$, sarà $MQ=\sqrt{ap}$, ed $MI=\sqrt{4a^2+ap}$; Si avrà $\sqrt{(4a^2+ap)}:y+\sqrt{(4a^2+ap)}::\sqrt{ap}:NL$. Pongasi $4a+p=q$, e la proporzione addotta diverrà

$$\sqrt{aq}:y+\sqrt{aq}::\sqrt{ap}:\ NL=y\frac{\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}}+\sqrt{ap}.$$

Oltre di questo si ha $\sqrt{ap}:y\dfrac{\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}}+\sqrt{ap}::2a:RL$, a motivo, che il raggio MF è $=MH$, normale alla direttrice, $=QO=FI$, e perciò $IO=FQ$, o sia $IA=AQ$, onde $RL=\dfrac{2ay}{\sqrt{aq}}+2a$; Ma $RA=RI-AI=x-a$; Dunque $AL=x+a+\dfrac{2ay}{\sqrt{aq}}$; dunque, siccome $NL^2=p.AL$, si avrà sostituendo $\left(\sqrt{ap}+y\dfrac{\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}}\right)^2=ap+px+\dfrac{2apy}{\sqrt{aq}}$; facciasi la riduzione, e rimar-

rà

rà $y^2=qx=(4a+p)x$ equazione simile a quella, che si trovò per rapporto all'asse.

755. Da questa si vede, che il parametro di un diametro è una terza proporzionale dopo un'ascissa, e l'ordinata corrispondente, come il parametro dell'asse, e che è $=4a+p=4MH=4MF$, cioè: Uguale al quadruplo della distanza, che passa fra il vertice del diametro, ed il fuoco.

756. *Teor.* Il parametro di un diametro parabolico è uguale all'ordinata del medesimo, che passa per il fuoco.

Dimostrazione. Sia NR l'ordinata in questione (Fig. 39.); sarà $NP=\sqrt{(4a+p)x}=\sqrt{4MF\,.\,MP}$. Ora i triangoli IMF, MPF sono eguali a motivo del lato comune MF dell'angolo $MPF=MIF$, e l'angolo $IMF=MFP$; dunque $IF=MP$; ma $IF=MF$; dunque $MP=MF$; e perciò $NP=\sqrt{4MF^2}=2MF$; ma $NR=2NP$ come si raccoglie dall'equazione $y=\pm\sqrt{qx}$; dunque $NR=4MF=q$.

757. *Teor.* Se dal vertice A di una parabola TAK (Fig.ª 40.) si conduca una corda AS, che incontri un diametro qualunque VE in un punto L, e per i punti d'intersezione S, L, e per il vertice V del diametro si conducano tante ordinate all'asse, VP, TQ, SR, risulta $AR:AQ:AP$.

Dimostrazione. $AR:AP::RS^2:PV^2::RS^2:QL^2$: Ma si ha pure $AR:AQ::RS:QL$; dunque $AR:AP::AR^2:AQ^2$, cioè $AR:AQ:AP$.

758. *Teor.* Una corda qualunque AS condotta per il vertice della Parabola è media proporzionale fra l'ascissa corrispondente AR, ed il parametro accresciuto dell'ascissa medesima.

Di-

Dimostrazione. Si cali dal punto S l'ordinata $SR = y$, e sia l'ascissa $AR = x$; si avrà $AS^2 = y^2 + x^2 = px + x^2 = x(p+x)$.

559. Passiamo a determinar le funzioni principali della Parabola. Incominciando dalla sottangente $y\frac{dx}{dy}$ si trova in questa maniera. Dall' equazione $y^2 = px$ si ha $y = \frac{pdx}{2dy}$, onde $y\frac{dx}{dy} = \frac{pdx^2}{2dy^2}$; ma $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4y^2}{p^2}$, dunque $y\frac{dx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$; dunque la sottangente della Parabola é sempre doppia dell' ascissa corrispondente.

760. Di qui si può derivare un Metodo per condurre una tangente ad un punto dato della Parabola.

Dal punto dato si abbassi un'ordanata normale sull'Asse; si prolunghi l'ascissa oltre il vertice della curva, finchè il prolungamento risulti eguale all'ascissa stessa; quindi si congiunga l' estremo dell'ascissa prolungata col dato punto, e si avrà la tangente richiesta.

761. La tangente parabolica si ha dalla formola $\sqrt{y^2 + y^2\frac{dx^2}{dy^2}} = \sqrt{(px + 4x^2)}$. La sunnormale si trova $y\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2}$; valore che somministra un'altra facil maniera di condurre una tangente ad un punto dato.

Finalmente la normale si trova $= \sqrt{y^2 + y^2\frac{dy^2}{dx^2}}$

$$= \sqrt{px + \frac{p^2}{4}}.$$

762. Si voglia adesso il raggio osculatore, di cui la formola è $\frac{(dy^2+dx^2)\sqrt{(dx^2+dx^2)}}{-dxd^2y}$. Per ottenere i valori di dx^2, dy^2, e d^2y, differenzio l'equazione $y^2=px$, e trovo $dx = \frac{2ydy}{p}$, e $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$. Differenzio adesso l'equazione $dx = \frac{2ydy}{p}$, posta dx costante, perchè tale fu supposta nella formola generale, ed ottengo $-2yd^2y = 2dy^2$, e perciò $-d^2y = \frac{dy^2}{y}$. Sostituisco questi valori, ed ho

$$\text{Ragg. Osc.} = \frac{\frac{dy^2}{p^2}(4y^2+p^2)\frac{dy}{p}\sqrt{(4y^2+p^2)}}{2dy^3 : p} = \ldots\ldots$$

$\frac{(4y^2+p^2)}{2p^2}\sqrt{(4y^2+p^2)}$. Quando tratteremo del raggio osculatore dell'Iperbola, faremo vedere, che si può trovare una formola semplicissima, la quale esprima il raggio suddetto, tanto della Parabola, quanto dell'Ellisse, e dell'Iperbola.

763. Ci si presenta adesso la rettificazione degli Archi Parabolici. Per riuscire in questo, si sostituiscano i valori di dy^2, e dx^2 nella formo-

la

la $s=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, e si avrà $s=\int dy\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)}$ $=\int\frac{2dy}{p}\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2+y^2\right)}$. Questa formola si riduca alla razionalità, se ne prenda poi l'integrale, e si otterrà $s=\frac{y}{p}\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}+\frac{1}{4}\log(y+\sqrt{y^2+\frac{1}{4}p^2})$ $+C$, dove per determinar la costante, basta porre $y=0$, e si ha $C=-\frac{1}{4}\log.\frac{1}{2}p$, e perciò si ha finalmente

$$s=\frac{y}{p}\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}+\frac{1}{4}\log.\frac{(y+\sqrt{y^2+\frac{1}{4}p^2})}{\frac{1}{2}\cdot p}$$

764. Dico adesso, che nella famiglia delle parabole, rappresentata dall'equazione $y^n=px^{n-1}$ saranno rettificabili tutte quelle Parabole, nella di cui equazione sia n un numero impari. Difatto si ha dall'equazione addotta $x=\frac{y^{\frac{n}{n-1}}}{p^{\frac{1}{n-1}}}$; perciò dx $=\frac{\frac{n}{n-1}y^{\frac{1}{n-1}}dy}{p^{\frac{1}{n-1}}}$, e $dx^2=\frac{\frac{n^2}{(n-1)^2}y^{\frac{2}{n-1}}dy^2}{p^{\frac{2}{n-1}}}$.

Quindi $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$ ....

$$\sqrt{\left(\frac{\frac{n^2}{(n-1)^2}y^{\frac{2}{n-1}}dy^2}{p^{\frac{2}{n-1}}}+dy^2\right)}= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt{\left(\frac{\frac{n^2}{(n-1)^2}y^{\frac{2}{n-1}}}{p^{\frac{2}{n-1}}}+1\right)}dy$$

Suppongasi $n=3$, e la formola diviene $dy\sqrt{\frac{9y}{4p}+1}$, di cui l'integrale è $\frac{8p}{27}\left(\frac{9y}{4p}+1\right)^{\frac{3}{2}}$. Facciasi $n=5$, e la formola sarà $dy\sqrt{\frac{25y^{\frac{1}{2}}}{16p^{\frac{1}{2}}}+1}$, della quale si ha l'integrale $=-\frac{8.16.16.p}{15.25.25}\left(\frac{25y^{\frac{1}{2}}+1}{16p^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{5}{2}}+$ $\frac{4.16}{3.25}\sqrt{py}\left(\frac{25y^{\frac{1}{2}}+1}{16p^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}$. Si trova con egual facilità l'Integrale, se pongasi $n=7=9=11$ &c. Vediamo come si ottenga la quadratura di una superficie Parabolica qualunque.

765. Sostituendo nella formola $\int y\,dx$ si ha $\int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}xy$. Quindi ne segue, che la superficie del semmento qualunque $AOVP$,

$AOVP$, dove PV è un' ordinata ortogonale all' asse AR, è sempre uguale a due terzi del rettangolo circoscritto $ABVP$, e perciò quattro terzi del triangolo VAB.

766. Se si avesse in generale una Parabola qualunque espressa per l'equazione $y^n = p^{n-m} x^m$; si dedurrebbe $\int y dx = p^{\frac{n-m}{n}} \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{m+n} p^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n} p^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m+1}{n}} . = \frac{n}{m+n} y.x$; si dedurrebbe cioè, che lo spazio curvilineo $AOVP$ di una parabola qualunque stà al parallelogrammo circoscritto come $n:n+m$.

767. Si potrebbe qui cercare, se mediante la sezione successiva di un cono, fatta però sempre parallelamente al lato del medesimo, si possano formare due parabole uguali. Non sarà difficile trovarne la soluzione per la parte negativa.

768. Se una semiparabola faccia una rotazione intera intorno all'asse, vien generato un solido, che dicesi Conoide Parabolica. Non si tarderà a conoscere, che la sezione di un tal solido, fatta perpendicolarmente all'asse, è un circolo, e che una sezione parallela all'asse forma una Parabola. Se la sezione sia obliqua all'asse, io dico, che dev'esser un Ellisse.

769. Si supponga tagliata la Paraboloide con un piano verticale, che passi per l'asse, onde si abbia la sezione parabolica FBK (Fig.ª 41.); Si supponga quindi tagliata con due altri piani perpendicolari al primo, e de' quali il primo CMD sia perpendicolare all'asse, l'altro AMB gli sia obliquo la

la di loro intersezione MM' sarà perpendicolare anch' essa al primo piano FBK, e però a CD. Siccome dunque la sezione $CMDM'$ ell' è un circolo, ne risulta $PM^2 = CP.PD$; Ma $CP.PD$ stà ad $AP . PB$ in una ragione determinata per esempio di $a^2 : b^2$; Dunque se pongasi $AB = 2a$ $AP = x$, e $PM = y$, si avrà $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2ax - x^2)$, equazione simile totalmente a quella, che si trovò per l'Ellisse, e che si vedrà in seguito con maggior chiarezza, esser la medesima.

770. Cerchiamo la superficie della Conoide parabolica: si sostituiscano i valori nella formola $\frac{2c}{r} \int y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{2c}{r} \int n dx + C$, dove n esprime la normale, e si avrà, per esser $n = \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4} p^2)}$, la superficie richiesta $= \frac{2c}{rp} \int 2y dy (y^2 + \frac{1}{4} p^2)^{\frac{1}{2}} + C$ $= \frac{4c}{3rp} (y^2 + \frac{1}{4} p^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

Per determinar la costante si faccia $y = 0$, e sarà $C = - \frac{4c}{6rp} \cdot \frac{1}{8} p^3$, e la superficie snddetta sarà finalmente $= \frac{c}{6rp}\left((p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} - p^3 \right)$.

771. Si cerchi fra tutte le parabole, che possono tagliarsi in un cono dato, quella che produca, mediante la sua rotazione intorno all'asse, la Conoide di massima superficie. Si troverà esser quella, il di cui piano passa per il centro del cono.

772.

772. La solidità della Paraboloide si ha .... $= \frac{c}{2r}\int y^2 dx = \frac{c}{2r} px^2$ uguale cioè alla metà del cilindro circoscritto.

773. Qual'è la parabola, che fra tutte quelle, che possono formarsi in un dato cono, produce colla sua rotazione il massimo solido? Quella il di cui piano taglia il diametro del cono in due parti, che sieno come 2 : 1 computando l'origine delle ascisse dalla parte, a cui appartiene il semmento maggiore.

774. Rimane da vedersi come si possa ottenere la superficie, e la solidità del fuso Parabolico.

775. Fuso parabolico è il solido generato dalla rotazione della Parabola intorno ad una sua ordinata normale all' asse. Per trovarne la superficie, sia la Parabola (Fig.ª 40.) TAK, e questa si roti intorno all'ordinata DC.

Sia la porzione dell'asse $AD=b$, l'ascissa $AN=x$, e l'ordinata $NM=y$, e l'arco infinitesimo Mm; Si avrà la zona descritta dall' arco $Mm = \frac{c(b-x)}{r}$

$$\int \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{c(b-x)}{pr}\int dx\frac{\sqrt{4y^2+p^2}}{2y} = \frac{c(b-x)}{2pr}\int dx\sqrt{\frac{4x+p}{x}}.$$

Passiamo a determinarne la solidita.

776. Sia il trapezio infinitamente piccolo $MNnm$, ed il rimanente come sopra. La superfficie del trapezio essendo $= ydx$, l'elemento del solido è $\frac{c}{r}(b-x)y\, dx$.

Ma si ha $x = \frac{y^2}{p}$, e $dx = \frac{2y\,dy}{p}$; Dunque il solido $S = \frac{c}{r}\int (b-\frac{y^2}{p})\frac{2y^2\,dy}{p}$. Si ponga $y = e$, quando x è $= b$, e siccome si ha $x = \frac{y^2}{p}$, sarà $b = \frac{e^2}{p}$, e la formola suddetta diverrà $S = \frac{c}{r}$ ......

$$\int \frac{(e^2-y^2)}{p}\frac{2y^2\,dy}{p} = \frac{2c}{r}\cdot\frac{e^2y^3}{3p^2} - \frac{2c}{r}\cdot\frac{y^5}{5p^2} = \frac{2c}{r}\cdot\frac{e^5}{3p^2} - \frac{2c}{r}\cdot\frac{e^5}{5p^2}.$$

Si ponga $\frac{c}{r} = 2\pi$, e si avrà $S = 4\pi\frac{e^5}{3p^2} - 4\pi\cdot\frac{e^5}{5p^2} = \frac{20}{15}\pi\cdot\frac{e^5}{p^2} - \frac{12}{15}\pi\cdot\frac{e^5}{p^2} = \frac{8}{15}\pi\cdot\frac{e^5}{p^2}$: Ora $\pi\cdot\frac{e^4}{p^2} = \pi b^2 =$ alla superficie della base del cilindro generato dal rettangolo ciscoscritto DF, ed e ne è l'altezza DC; dunque la solidità del fuso parabolico è uguale a $\frac{8}{15}$ del cilindro circoscritto.

ARTICOLO III.

Dell' Ellisse.

777. L'equazione è perciò, che si vide (*n.* 708.)

$$y^2 = \frac{sen.\,Q}{cos.^2\frac{1}{2}P}(c\ sen.Px - sen.(P+Q)x^2) = K.$$

778 Dall' ispezione di questa si raccoglie 1.°. Che l'Ellisse ha due rami, uno positivo, e l'altro negativo, fra di loro eguali, perchè si ha generalmente $y = \pm\sqrt{K}$. 2.° Che la medesima è rientrante, perchè fatta $x = o$ risulta $y = o$, e fatta

$$x = \frac{c\,sen.\,P}{sen.(P+\mathcal{Q})}$$ risulta parimente $y=o$.

3.° Che $\frac{c\,sen.P}{sen.(P+\mathcal{Q})}$ è un suo asse; 4.° Che all' ascisse negative non corrisponde alcun ramo di Elisse, perchè avendosi

$$y^2 = \frac{sen.\mathcal{Q}\,sen.(P+\mathcal{Q})}{cos.^2\frac{1}{2}P}\left(\frac{c\,sen.\,Px}{sen.(P+\mathcal{Q})} - x^2\right),$$ vale a dire, posto $\frac{c\,sen.\,P}{sen.(P+\mathcal{Q})} = 2a$.................

$$y^2 = \frac{sen.\mathcal{Q}\,sen.(P+\mathcal{Q})}{cos.^2\frac{1}{2}P}(-2ax - x^2),$$ si ha sempre per y^2 un valor negativo, qualunque sia x, e perciò con estrarre la radice quadrata si ha generalmente un valore immaginario per y, il che prova non poter corrispondere al prolungamento dell' asse alcun ramo ellittico: è questa una conseguenza dell' analogia, che passa fra il Circolo, e l' Ellisse.

5.° Che quando l' ordinata y corrisponde alla metà dell' asse $2a$, dove la chiamerò b, si

b, si ha $b^2 = \frac{sen.\mathcal{Q}\,sen.(P+\mathcal{Q})}{cos.^2\frac{1}{2}P} \times a^2$. Quest'ordinata b, che suppongo ortogonale, essendo prolungata al di sotto dell'asse $2a$ fino al perimetro del ramo negativo, è un second'asse della curva Ellittica, e dicesi conjugato per rapporto al primo.

Di qui si vede, che si ha $\frac{b^2}{a^2} = \frac{sen.\mathcal{Q}\,sen.(P+\mathcal{Q})}{cos.^2\frac{1}{2}P}$

Pongasi, come sopra, $\frac{c\,sen.\,P}{sen(P+\mathcal{Q})} = 2a$, e l'equazione della curva Ellittica verrà ridotta alla forma

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

779. Adesso, avendo così ridotta l' equazione dell' Ellisse possiamo inoltrarci ad investigarne le altre proprietà.

La prima, che ci si offre è, che l'Ellisse altro non è, che un circolo, che abbia il diametro eguale all'asse AB (Fig.ª 42.), ed in cui le ordinate sieno diminuite nella ragione costante di $b:a$, cioè dell' asse conjugato CD all'asse trasverso AB. Difatto, se dicasi z l'ordinata di un tal circolo, si ha in generale $z:y::\sqrt{2ax - x^2}:\frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}::a:b$. In virtù di quest'analogia, e di questo rapporto ne segue, che se vogliansi nell'Ellisse computar le ascisse dal centro, vale a dire dal punto, in cui l'asse conjugato incontra l'asse trasverso, la sua equazione debba ba essere, come vedremo anche meglio in appresso, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

780. Impiegando adesso la prima equazione dell' Ellisse si ha $y^2 : 2ax - x^2 :: b^2 : a^2$; dunque nell'Ellisse:

Il quadrato di un'ordinata qualunque stà al rettangolo delle sue ascisse, come il quadrato del semiasse, ò dell'asse minore CD al quadrato del semiasse, ò dell'asse maggiore AB. Siccome poi quest'analogia sussiste in qualunque punto dell'Ellisse, se dicansi in generale y', x' due altre coordinate ortogonali all' asse AB, si avrà sempre $y^2 : y'^2 :: 2ax - x^2 : 2ax' - x'^2$.

Dunque i quadrati dell'ordinate ortogonali all'asse maggiore stanno fra di loro nell'Ellisse, come i rettangoli delle proprie ascisse.

781. *Scol.* Si concepisce facilmente, che lo stesso rapporto sussiste ancora fra le coordinate obliquangole, perchè dovendo esser parallele, debbon conservare la medesima ragione.

782. Ritornando ad osservare la proporzione trovata di sopra $y^2 : 2ax - x^2 :: b^2 : a^2$, si comprende, che il quadrato di un'ordinata sta al rettangolo dell'ascisse corrispondenti in una ragione costante. Si esprima dunque una tal ragione per $2a : p$, essendo p una quantità da determinarsi, e si avrà in generale $2ax - x^2 : y^2 :: 2a : p$. Or qualunque debba essere il valor di p, è certo, che in virtù di questa proporzione deve essere $= 2a. \frac{b^2(2ax - x^2)}{a^2 \; 2ax - x^2} = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$. Dunque dev' esser tale, che abbiasi $2a : 2b : p$, cioè p dev' essere una terza proporzionale dopo l' asse maggiore, e l'asse minore. Di più osservo, che a motivo dell'equazione $p = \frac{2b^2}{a}$, perchè $a > b$, dev' essere $p < 2b$ cioè dell' asse minore. Dunque $\frac{1}{2}p$ può essere un'ordinata dell'asse maggiore, poichè se conducasi una retta AC la quale congiunga gli estremi dei due assi, chiaramente apparisce, che da qualunque suo punto m si può condurre una parellela mP all'asse AB, e che perciò fra le ordinate del quadrante APC vi sono comprese tutte le rette $<$ i. CE, o sia $<$ i b.

Suppongasi pertanto, che $\frac{1}{2}p$ venga espresso per un'ordinata normale all'asse maggiore. Nel punto, a cui essa corrisponde, si avrà $\frac{1}{4}p^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Ma essendo data l'Elisse, debbon' esser dati gli assi, e per conseguenza anche p; dunque in virtù di quest'ultima equazione dev'esser data pur l'ascissa x, che corrisponde all' ordinata $\frac{p}{2}$.

Sia pertanto la sudetta ascissa $BF = c$. Si avrà $\frac{1}{4}p^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ac - c^2)$. In questa si sostituisca p in vece di $\frac{2b^2}{a}$, e ne proverrà $\frac{1}{4}p^2 = \frac{p}{2a}(2ac - c^2)$, e quindi $p = \frac{2}{a}(2ac - c^2) = 4c - \frac{2c^2}{a}$, onde si ha ha $p<4c$, vale a dire, minore del quadruplo di FB, distanza dell'estremo F dell'ordinate $FN=\frac{1}{2}p$, dal vertice prossimo B.

Inoltre, dall'equazione $p=\frac{2}{a}(2ac-c^2)$, si deduce $\frac{ap}{2}=2ac-c^2$; ma $\frac{ap}{2}=b^2$; dunque $b^2=2ac-c^2$ $=(2a-c)c$, cioè: Il quadrato del semiasse minore CD è sempre uguale al rettangolo dell'ascisse prodotte dall'ordinata $\frac{1}{2}p$.

783. Con questo si può trasformar l'equazione dell'Ellisse sostituendo $2ac-c^2$ in luogo di b^2, e ridurla alla forma $y^2=\frac{(2ac-c^2)}{a^2}(2ax-x^2)$.

784. *Teor.* Se descrivasi un circolo AQB sopra l'asse maggiore AB, e si prolunghi l'ordinata $\frac{1}{2}p=FN$, finche incontri la circonferenza; l'ordinata circolare, che ne risulta è sempre uguale al semiasse minore.

Dimostrazione. Sia FM l'ordinata FN prolungata come sopra, e congiungasi il punto M con gli estremi dell'asse A, B. Ne proviene il triangolo AMB rettangolo in M, e però si ha $FM^2=AF.FB=2ac-c^2$ $=b^2$, onde $FM=b$.

785. *Teor.* S'inalzi al punto B una perpendicolare BL (Fig.ª 43), e si congiunga il punto L col punto A. La retta LA, che dicesi Direttrice dell'Ellisse, è tale, che qualunque ordinata OR abbassata da quaisivoglia suo punto sull'asse AB, moltiplicata per l'ascissa respettiva RB: produce sempre un rettangolo eguale al quadrato dell'ordinata corrispondente RP.

Dimostrazione. $ARB:ORB::AR:OR::AB:BL$; Ma si ha pure $ARB:RP^2::AB:BL$; dunque $ARB:ORB::$ $ARB:RP^2$, e perciò $ORP=RB^2$.

786. *Teor.* Se prolunghisi un'ordinata PR, finchè incontri la direttrice in O, e dal vertice B si conduca la BO, sarà il quadrato di PR doppio del triangolo BRO.

Dimostrazione. $PR^2:BRA::BL:BA::RO:RA::RO.BR:$ $RA.BR(=BRA)$. Dunque $PR^2=RO.BR$, e perciò &c. &c,

787. *Teor.* La somma delle rette $FE, F'E$ (Fig.ª cit.ª) condotte dai punti F, F' ad un punto E qualunque del Perimetro Ellittico è sempre $=AB=2a$.

Dimostrazione. Abbassata sull'asse AB l'ordinata EM, si ha dal triangolo $F'ME$, $F'E^2=EM^2+F'M^2$; Ma computando le ascisse dal centro si ha $F'M$ $=a-c-x=d-x$ (posto $a-c=d$); perciò $F'E^2=y^2+$ $(d-x)^2$. Si ponga per y^2 il suo valore, e per d^2 $=(a-c)^2=F'Q^2$ il suo valore a^2-b^2, e si otterrà $F'E^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+d^2-2dx+x^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+a^2-$ $b^2-2dx+x^2=a^2-2dx+\frac{d^2x^2}{a^2}$ (restituendo nuovamente il valore di a^2-b^2).

Si estragga la radice quadrata, e sarà finalmente $F'E=a-\frac{dx}{a}$. Con la stessa operazione si trova $FE=a+\frac{dx}{a}$. Si ha dunque &c.

788.

In virtù di questo Teorema si può descriver l'Ellisse con un moto continuo. Si prenda un filo eguale all'asse maggiore: i suoi estremi si fissino nei punti F, F', e mediante uno stilo si tenda successivamente in tutti i punti: lo stilo descriverà in questa guisa un'Ellisse.

Or è evidente che, se i fuochi F, F' non sono determinati, col medesimo filo, cioè intorno al medesimo asse maggiore si potrà descrivere un'infinità d'ellissi meno o più attondate; secondo che i detti fuochi saranno più o meno lontani dal centro.

788. *Teor.* Una retta QS (Fig.ª 44.) che divida in mezzo l'angolo FEG, in cui EG sia il prolungamento della $F'E$, risulta sempre tangente in E.

Dimostrazione. Sia $GE=EF$; e si congiungano i punti G, F. Siccome la QS divide in mezzo l'angolo E, dee dividere ugualmente la base FG. Ciò posto, io provo che la QS non può avere altro punto comune colla curva. Prendasi un punto K qualunque, e si conducano le rette KG, KF, KF'. Si avrà $F'KG>F'G$; ma $F'KG=F'KF$; dunque $F'KF>F'G>FEF>AB$, e perciò il punto K è fuori dalla curva; dunque &c.

789. Volendo impiegare il metodo del *D.* Perelli, si conduca (Fig.ª 46) al vertice A una perpendicolare AM (lo stesso vale per il vertice B) definita dalla BRM che passa per il punto dato R; questa si divida per metà colla RNQ, e sarà QRQ' la tangente. Di fatto, sia $lnOmK$ normale ad AB: sarà $PR^2:KO^2::PB.PA:KB.KA::PR^2:mKl$; dunque $mK:OK:Kl$, e di qui ne risulterà .... Om-

$Om:OK::Ol:Kl$, ovvero $Om:Ol::OK:Kl$; ma $OK<Kl$; dunque $Om<Ol$, e $2Om<Om+Ol<ml$; ma $ml=2mn$; dunque $Om<mn$, e perciò &c.

Esposto così un tal metodo, è facil cosa enunciare il teorema che vi si contiene.

790. *Probl.* Dato un punto fuori dell'Ellisse condurvi una tangente.

Soluzione. Sia (Fig.ª 45) a il punto dato: centro a, intervallo aF', posto F' più vicino di F al punto a, si descriva l'arco $F'DL$. Dipoi centro in F, intervallo $FC=AB$ descritto l'arco GCM, si congiunga l'intersezione D col punto F, e l'intersezione E col punto a; GEa sarà la tangente. Di fatto, essendo $FE=ED$, per qualunque altro punto L si ha $FL=LD$; ma $LD>LM$; dunque $F'LF>FM>AB$.

791. *Teorema*. Posta la costruzione del *num.* 789, la QB è divisa in ragione armonica in A, e P.

Dimostraz. Si ha (*n.* cit.) $MN=NA$, ed $SQ'=QB$; perciò $Q'B:NA::Q'B:MN$; ma per le parallele si ha $Q'B:NA::QB:QA$; e per i triangoli simili NRM, $Q'RB$, si ha $Q'B:MN::BR:MR::BP:PA$; dunque $QB:QA::BP:PA$; dunque la divisione della retta QB segue la ragione proposta; il che si dovea dimostrare.

792. *Teor.* Il rettangolo de' semmenti AN, BQ' è uguale al rettangolo dell'asse maggiore nella quarta parte della costante p.

Dimostraz. Il rettangolo BPA stà a $PR^2::BP.PA:RP:RP$.; ora $BP:RP::AB:AM$, ed $AP:RP::AB:BP$; dunque $BPA:PR^2::AB^2:AM.BS$; ma $BPA:PR^2::AP:p$. (*n.*732)$::AB^2:AB.p$; dunque si ha $AB^2:AM.BS::$

$AB^2 : AB.p$, cioè $AM:BS=AB.p$, e perciò $AN.BQ$ $=AB.\frac{1}{4}p$.

793. *Teor.* Se dai punti F, F' (Fig.ª 44.) si conducano due rette ad un medesimo punto E del perimetro Ellittico, gli angoli $F'ES$, FEQ formati dalle suddette rette colla tangente QS condotta al punto E, sono sempre uguali.

Dimostrazione. Si prolunghi la $F'E$, finchè sia $EG=FE$, e si congiungano i punti G, F; L'angolo $F'ES$ è $=QEG$. Ma $QEG=QEF$ (Teor. 788.); dunque &c. &c:

794. Di qui ne segue, che se facciasi rotare una Semiellisse intorno all'asse maggiore, la superficie risultante dee esser tale, che situando in uno dei punti F, F' un lume, tutti i raggi dopo la riflessione debbano riunirsi nell'altro di tali punti. E'per questo, che i punti F, F' diconsi fuochi dell'Ellisse.

795. Si può concluder pertanto, che l'Ellisse ha due fuochi. Che la costante p è la doppia ordinata ortogonale all'asse maggiore, che passa per i medesimi, e dicesi Parametro dell'Ellisse.

796. La distanza de'fuochi dal vertice prossimo, vien determinata da una qualunque delle due equazioni $p=\frac{2}{a}(2ac-c^2)$, $b^2=2ac-c^2$, e la distanza FF' de' medesimi fuochi, che vien detta Eccentricità dell'Ellisse, si ha $=2\sqrt{a^2-b^2}$ (n.787.)

797. Il rettangolo delle distanze di un fuoco dai vertici A, B, è uguale al quadrato del semiasse minore, e la distanza di un fuoco da un

 pun-

punto qualunque della curva, per esempio FE, che si chiama generalmente raggio vettore, è sempre (n.787.) $=a\pm\frac{dx}{a}=a\pm x\mp\frac{cx}{a}$.

798. *Teor.* Nell'Ellisse il raggio vettore condotto alla sommità dell'asse minore è uguale alla metà dell'asse trasverso.

Dimostrazione. Sia (Fig.ª 45.) FH il raggio di cui si parla. Sarà $FH=\sqrt{HI^2+FI^2}=\sqrt{b^2+(a-c)^2}$, e sostituito per b^2 il suo valore .... $=\sqrt{2ac-c^2+a^2-2ac+c^2}=\sqrt{a^2}=a$.

799. *Teor.* Se descrivasi un circolo sull'asse maggiore dell'Ellisse, tutte le perpendicolari, che si possono abbassare dai fuochi sulle tangenti della medesima Ellisse, incontrano le tangenti nel punto dov'esse tagliano la circonferenza del circolo.

Dimostrazione. Dal punto T (Fig.ª 47.), dove la perpendicolare FT incontra la tangente, si conduca al centro C la TC, sarà $FT=\frac{1}{2}FK$ (Teor.788.) ed $FC=\frac{1}{2}FF'$; perciò i triangoli FTC, FKF' sono simili, e TC è parallela a KF', ed $=\frac{1}{2}KF'$. Ma $KF'=F'M+MF=AB$. Dunque $TC=CA$, eguale cioè al raggio del circolo.

800. *Teo.* Se dai fuochi dell'Ellisse si conducano due perpendicolari sopra di una tangente, il loro prodotto risulta sempre uguale al quadrato del semiasse minore.

Dimostrazione. Per il punto del contatto M (Fig.ª

(Fig.ª 47.) sia condotto un diametro PM, all' estremo P la tangente tu, e del punto F' la $F'V$ perpendicolare alla tangente TV, che incontrerà la medesima in un punto V della circonferenza circolare, e sarà parallela a Tt. Per la natura del circolo sarà $F'V=Ft$, ed $FT=F'u$, ed i punti t, u saranno nella circonferenza circolare, essendo $VTtu$ un quadrato. Dunque $Ft.FT=BF.FA$ o sia $FT.F'V=BF.FA=CN^2$ quadrato del semiasse minore.

801. Una retta MO condotta da un punto qualunque M per il fuoco F', determinata da LD, parallela alla tangente in M, che dicesi diametro conjugato, è uguale à CA. *Dimortrazione*. Difatto si ha (*n.*799.) che TC è parallela à KF'; dunque $MOCT$ è parallelogrammo, e perciò $MO=CT=CA$.

Cerchiamo l' equazione dell' Ellisse riferita all' asse minore.

802. Per riuscire in questa ricerca, osservo (Fig.ª 46.), che se da un punto qualsivoglia N', abbasso un' ordinata NR sull' asse minore DC, computate le ascisse dal centro, risulta $NR=EF$, e l' ascissa $ER=N'F$, e concludo per conseguenza, che; per ottenere l' equazione richiesta, non si dee far altro, che porre nell'equazione $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, x per y, ed y per x, onde ne provenga $x^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-y^2)$. Così prontamente si ottiene $y^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-x^2)$ che è l'equazione, di cui si tratta; volendo computar

putar l'ascisse dal vertice, si vede, che l' equazione dell'Ellisse riferita all' asse minore sarebbe

$$y^2=\frac{a^2}{b^2}(2bx-x^2),$$

803. Dall'ottenuta equazione, che è della forma stessa che quella per l'asse maggiore, si raccoglie: Che i quadrati dell' ordinate all' asse minore dell'Ellisse stanno fra di loro come i rettangoli dell'ascisse corrispondenti, e che il rettangolo delle suddette ascisse stà al quadrato dell'ordinata corrispondente, come l'asse minore $2b$ stà ad una costante indeterminata q, che può impropriamente chiamarsi il parametro dell'asse minore, e che dev'essere una terza proporzionale dopo l'asse minore, e l'asse maggiore.

804. Prima di cercar l'equazione dell'Ellisse per rapporto ai suoi diametri, giova determinar le formole delle funzioni Ellittiche. Cominciamo dalla sottangente.

Per trovare il valor della formola generale $y\frac{dx}{dy}$, differenzio l'equazione $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, ed ho $ydy=\frac{b^2}{a^2}(a-x)dx$; di qui $dx=\frac{ydy}{\frac{b^2}{a^2}(a-x)}$, e $\frac{ydx}{dy}=\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a-x)}$ $=\frac{2ax-x^2}{a-x}=PT$(Fig.ª48.); e $CT=\frac{a^2}{a-x}$, che somministra la proporzione $a-x:a::a:CT$ sottangente.

Presa l' equazione al centro si avrebbe $y\frac{dx}{dy}=a^2$

$= \frac{a^2 - x^2}{x}$. Mediante una semplice sostituzione si trova la tangente $= \sqrt{y^2 + y^2 \frac{dx^2}{dy^2}}$ ....

$= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) + \left(\frac{2ax - x^2}{a - x}\right)^2}$, e prese le ascisse dal centro si trova $= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + \left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right)^2}$

La sunnormale, presa l'origine dal vertice è $y \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a - x)$, e presa l'origine dal centro è $y \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2}$. Di qui si deduce la normale ....

$\sqrt{y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) + \frac{b^4}{a^4}(a - x)^2}$, e prese l'ascisse dal centro si trova ....

$= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + \frac{b^4}{a^4} \cdot x^2}$.

805. Mediante queste formole, data una delle coordinate, si trova sempre il valore di una qualunque delle funzioni divisate. Venendo adesso ai diametri Ellittici, sia

806. *Teor.* Qualunque diametro Ellittico vien diviso per metà nel centro.

Dimostrazione. Si trasformi l'equazione all'asse

 mag-

maggiore in guisa che le coordinate divengan'obliquangole. La trasformata sarà di secondo grado (*n.642.*). Dunque l'ordinata, che dovrà passare per il centro, avrà necessariamente due valori eguali, uno positivo, e l'altro negativo. Ma queste due ordinate formano un diametro, qualunque sia la di loro obliquità. Dunque &c.

807. *Teor.* Abbassando (Fig.ª 48.) dai vertici M, N di due diametri conjugati MO, ND, due ordinate MP, NQ normali all'asse trasverso AB, risulta sempre il quadrato $CQ^2 = AP.PB$.

Dimostrazione. Per la natura dell'Ellisse si ha $BP \cdot PA : BQ \cdot QA :: MP^2 : NQ^2$. Sia $CQ = u$, e computate le ascisse dal centro, la proporzione addotta diviene la seguente $a^2 - x^2 : a^2 - u^2 :: MP^2 : NQ^2$. Sia MT tangente al punto M, ed in virtù de' triangoli simili TPM, CNQ si avrà $MP^2 : NQ^2 :: TP^2 \left(= \left(y \frac{dx}{dy}\right)^2\right) = \left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right)^2 : CQ^2 = u^2$. Dunque $a^2 - x^2 : a^2 - u^2 :: \left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right)^2 : u^2$, onde si ha $u^2 = a^2 - x^2$, o sia $CQ^2 = BP.PA$.

808. Eccoci alla ricerca dell'equazione per rapporto ai diametri. Dal punto I, (Fig.ª antec.) si abbassi un'ordinata IG sull'asse maggiore AB, ed un'ordinata IR sul diametro MO. Dal punto R si abbassino le perpendicolari RH, RK; Si ponga $HR = p$, $CK = q$, e $CM = d$, sarà $GB = p + a - q$, e $GA = a - p + q$. Ciò posto, si ha dai triangoli simili CPM, CRK, $CP\,(x) : CM\,(d) :: CK\,(q) : CR = \frac{dq}{x}$, quindi $MR = d - \frac{dq}{x}$, ed $RO = d + \frac{dq}{x}$. Perciò $MR.RO = ...$

$d^2 - \frac{d^2 q^2}{x^2}$. Dipoi $CP\,(x) : PM\,(y) :: CK(q) : KR$, ò $HG = \frac{qy}{x}$. Inoltre per i triangoli simili TPM, HIR si ha $TP\,\frac{(a^2 - x^2)}{x} : PM(y) :: HR(p) : HI = \frac{pxy}{a^2 - x^2}$; dunque $IG^2 = \frac{p^2x^2y^2}{(a^2 - x^2)^2} + \frac{2pqy^2}{a^2 - x^2} + \frac{q^2y^2}{x^2}$. Ma si ha $AP.PB : AG.GB :: PM^2 : IG^2$, cioè $a^2 - x^2 : 2pq + a^2 - p^2 - q^2 :: y^2 : IG^2$. Si paragoni questo valore di IG^2 con quello, che si è trovato di sopra, e si avrà l' equazione $\frac{2pqy^2 + a^2y^2 - p^2y^2 - q^2y^2}{a^2 - x^2} = \frac{p^2x^2y^2}{(a^2 - x^2)^2} + \frac{2pqy^2}{a^2 - x^2} + \frac{q^2y^2}{x^2}$ dalla quale si deduce $p^2 = a^2 - x^2 + q^2 - \frac{a^2q^2}{x} = HR^2$. Posto questo si ottiene $MR.RO\left(d^2 - \frac{d^2q^2}{x^2}\right) : CM^2\,(d^2) :: HR^2\,(a^2 - x^2 + q^2 - \frac{a^2q^2}{x^2}) : CQ^2(a^2 - x^2)$, proporzione, che si verifica mediante la moltiplicazione de'medj, e degli estremi.

Finalmente i triangoli simili HIR, CNQ danno $HR^2 : CQ^2 :: IR^2 : CN^2$, e per conseguenza $MR.RO : CM^2 :: IR^2 : CN^2$ ò $IR^2 : MR.RO :: CN^2 : CM^2$. Si ponga $IR = z$, $MR = u$, $MO = 2m$, e $DN = 2n$, e si avrà $z^2 = \frac{n^2}{m^2}(2mu - u^2)$, e computate le ascisse dal

dal centro $z^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - u^2)$, equazioni eguali alle altre ottenute per rapporto all'asse maggiore, ed all'asse minore.

809. Di qui ne derivano due conseguenze, e sono

I. Che le ordinate di un diametro Ellittico sono divise per metà.

II. Che una retta la quale tagli per metà due corde Ellettiche parallele, è un diametro.

810. *Teor.* La somma de'quadrati di due diametri conjugati è costante, ed eguale alla somma dei quadrati dei due assi.

Dimostrazione. Per la natura dell' Ellisse si ha (Fig.ª 48.) $AQ.QB\,(=CP^2 = x^2) : NQ^2 :: a^2 : b^2$, e perciò $NQ^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$. Inoltre dai triangoli CPM, CNQ si ha $CM^2 = CP^2 + PM^2$. Dunque (n. 807.) $CM^2 = x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, e $CN^2 = a^2 - x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}$. Quindi $CM^2 + CN^2 = a^2 + b^2$.

811. *Teor.* Abbassando dall' vertice O di un diametro (Fig.ª 49.) sul suo conjugato una perpendicolare OS; si ha. $OS : b :: a : CE$.

Dimostrazione. $CE^2 + CO^2 = b^2 + a^2$ per il precedente. Ma $CO^2 = x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$; dunque CE^2 ...... $= \frac{b^2x^2 - a^2x^2 + a^4}{a^2}$. Al punto O si conduca la tangente OX, e dal centro C si abbassi sopra di lei una

una perpendicolare CI, e si prolunghi CK finchè incontri la tangente in X. Dai triangoli simili CIX, ONP si deduce CI, ò $SO:CX::OP$, ò $CV:NO$.

Quindi $SO \times NO = CX.CV = CK^2$ (n. 804); basta mutare a in b. Dunque $SO^2:CK^3:NO^2$, e rovesciando gli estremi e sostituendo i valori di CK^2, e di CO^2 quadrato della normale (n. 804.) si ha...............

$$\frac{(b^4x^2+a^4b^2-a^2b^2x^2}{a^2}:b^4:SO^2=\frac{a^4b^2}{b^3x^2+a^4-a^2x^2}.$$

Di qui $SO^1.CD^2-a^2q^2=CA^2.CK^2$, perciò .... $SO^2:CK^2::CA^2:CD^2$, cioe $SO:b::a:CD=CE$.

812. *Teor.* Il prodotto di due raggi vettori qualunque FM, $F'M$ è uquale al quadrato del semidiametro CL, conjugato a quello che passa per M.

Dimostrazione. I triangoli simili FMT, $F'MV$ danno (Fig.ª 47.) $FT:FM::F'V:F'M$; dunque $FT \cdot F'V: FM:F'M::FT^2:FM^2$ (210). Ora si ha parimente (*Teor. pr.*) $TI:CA::CN:CL$; di più (801) $TI:CA::TI:MO$, e $TI:MO::TK:KM::TF:MF$ (799). Dunque $CN^2:CL^2::TF^2:MF^2::FT.F'V:FM.F'M$; ma (800) $FT.F'V=CN^2$; dunque $FM.F'M=CL^2$.

813. *Teor.* Il parallelogrammo formato dalle tangenti condotte ai vertici di due diametri conjugati è sempre uguale al parallelogrammo formato dalle tangenti condotte ai vertici de due assi conjugati.

Dimostrazione. Per il (Teor. n. 811.) si è veduto essere $SO.CD=CK.CA$. Dunque se al punto D si conduca una tangente che incontri la XO nel punto T, ed ai punti M, E si faccia lo stesso; sarà il parallelogrammo $COTD$ eguale al parallelogram-

grammo $CKZA^2$. Ora giascheduno di questi parallelogrammi è la quarta parte dei parallelogrammi proposti: Dunque &c. &c.

814. Eccoci alla rettificazione degli archi Ellitici.

Per determinare il valore di $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, osservo, che posto il semiasse maggiore $a=1$ l'equazione dell' Ellisse computate le ascisse dal centro è $y=b\sqrt{(1-x^2)}$. Di quì si deduce $dy^2=\frac{b^2x^2dx^2}{1-x^2}$, e perciò si ha $\sqrt{(dy^2+dx^2)}=\sqrt{\frac{b^2x^2dx^2}{1-x^2}+dx^2}$. In luogo di b^2 si ponga il suo valore $1-c^2$ (detta c la semieccentricità) e si avrà $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\frac{\sqrt{(1-c^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Per integrare questa formola, io la sciolgo in serie, ed ottengo $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\sqrt{(1-c^2x^2)}=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ $(1-\frac{1}{2}c^2x^2\frac{1}{2.4}c^4x^4-\frac{1.3.}{2.4.6}c^6x^6-$&c.&c.).............

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1}{2}c^2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1}{2.4}c^4\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$-\frac{1.3}{2.4.6}c^6\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-$&c. &c. funzione, di cui gli integrali si ottengono facilmente con i principj del Calcolo Integrale. Vediamo un' applicazione della rettificazione dell' Ellisse con cercar brevemente la superficie del cilindro obliquo.

815. Sia la figura 50., e si prendano nelle due basi del cilindro gli archi eguali AM, FE; sarà ME lato del cilindro, e preso mM infinitesimo, sarà $MmeE$ l' elemento nella superficie che si cerca. Sia EC perpendicolare sopra il prolungamento di Mm, e sarà l' elemento suddetto $=Mm.EC$. Ora Mm è un elemento del circolo, corrispondente all' ordinata PM; dunque dee trovarsi EC. Sia MD parallela ad AI e dal punto E si abbassi una perpendicolare sul piano della base inferiore, che incontrerà necessariamente MD in qualche punto. Sia questo il punto MD; condotta la CD, gli angoli MDE, CDE risultano retti, poichè i piani MCD, CDE sono normali; ed MC essendo per ipotesi normale a CE, dev' esser normale a tutte le rette che passano per il punto C, e che giacciono sul piano CDE, onde ne segue che l' angolo MCD sia retto anch' esso. Sia adesso $KP = x$, $PM=y$, DE altezza del cilindro $= a$, ed ME lato $=b$; sarà $MD=\sqrt{(b^2-a^2)}=c$. Inoltre per le parallele PI, MD, si ha $MBP=CMD$, e perciò siccome $MCD=90.°$, $CDM=BMP=PKM$. Ma posto il seno tutto $=1$, si ha sen. $PKM=\frac{PM}{MK}=\frac{y}{r}$; quindi nel triangolo rettangolo MCD si ha ....

sen.$MCD(1):MD(c)$ :: sen. $CDM\left(\frac{y}{r}\right) : MC=\frac{cy}{r}$;....

Dunque $EC=\sqrt{(ME^2-MC^2)}=\frac{\sqrt{b^2r^2-c^2y^2}}{r}$. Ma per la natura del circolo $Mm=\frac{rdy}{\sqrt{(r^2-y^2)}}$. Dunque $MmeE =$

$=Mm.EC=dy\frac{\sqrt{(b^2r^2-c^2y^2)}}{\sqrt{(r^2-K^2)}}=dS$; per integrare quest' elemento, si descriva l'Ellisse ACB, di cui il semiasse maggiore $AC=r$ (Fig.ª 51) il minore $CD=\frac{ar}{b}$, $CE=y$, $EF=t$, e sarà per la natura dell'Ellisse ....

$t^2:\frac{a^2r^2}{b^2}::r^2-y^2:r^2$, onde $t^2=\frac{a^2r^2-a^2y^2}{b^2}$. ed ......

$Ff=dy\frac{\sqrt{(b^2r^3-c^2y^2)}}{b\sqrt{(r^2-y^2)}}$, ovvero $b.Ff$ ....

$=dy\frac{\sqrt{(b^2r^2-c^2y^2)}}{\sqrt{(r^2-y^2)}}=dS$.

816. Passiamo ad investigare la superficie Ellittica.

Si ha $\int ydx=\int dx\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$. Si riduca in serie il radicale, e fatta l' integrazione si avrà ....

$$\int ydx=\frac{b}{a}\left(ax-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3a}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5a^3}-\&c.\right)$$

817. Di quì si raccoglie che (*n.*727.) la superficie dell' Ellisse stà alla superficie del circolo descritto sull' asse maggiore, come $b:a$, e viceversa come $a:b$ alla superficie del circolo descritto sull' asse minore.

818. *Teor.* La superficie di un' Ellisse è uguale ad un circolo, che abbia per diametro una media proporzionale fra i due assi conjugati.

Dimostrazione. Sieno $2a$, e $2b$ gli assi Ellittici, C il circolo descritto sull' asse maggiore $2a$, e C' il circolo descritto sull' asse minore $2b$; sia E l'Ell'Ellisse data, e C'' il circolo, il di cui diametro è $=\sqrt{2a \cdot 2b}$. Si avrà, per ciò che si è detto di sopra, $C:E::a:b$, e $C':E::b:a$; quindi la proporzione composta $CC':E^2::ab:ba$, dalla quale risulta E $=\sqrt{CC'}=C''$

819. La superficie di un'Ellisse è uguale ad un triangolo, di cui l'altezza sia il semiasse maggiore, e la base sia la circonferenza del circolo formato sull'asse minore come diametro.

Dimostrazione. Sia l'Ellisse ACB (Fig.[a] 52.), CD l'asse minore, sù di cui sia descritto il circolo $CEDF$. Suppongasi formato sopra detto circolo come base, un cono EGF retto, ed abbia una lunghezza GF eguale al semiasse OB. La superficie del cono starà alla superficie della sua base, come $FG=OB$: OD. Ma la superficie dell'Ellisse stà alla superficie del circolo iscritto come $OB:OD$ (*num.* 817.). Dunque la superficie del cono EGF è uguale alla superficie dell'Ellisse ACB. Ma la superficie del cono è uguale al triangolo, di cui l'altezza sia GF, e la base sia la circonferenza $ECFD$. Dunque &c.

820. Se l'Ellisse faccia una rivoluzione intorno ad uno de' suoi assi, genera un solido, che dicesi Sferoide, Ellissoide, e Conoide Ellittica.

821. Le sezioni che si possono fare in questo solido, non danno altre curve, che il circolo, se la sezione sia perpendicolare all'asse maggiore, e l'Ellisse, se il piano segante sia obliquo all'asse suddetto.

Cerchiamone la superficie, e la solidità.

822.

822. Per ottenere la superficie, faccio le debite sostituzioni nella formola $\frac{c}{r}\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (*n.* 680.), e trovo per l'espressione richiesta.........

$$S=\frac{bc}{r}\int\frac{}{}dx(\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}}).$$

823. Per rapporto alla solidità si ha ....

$$\frac{c}{r}\int y^2dx=\frac{c}{r}\cdot\frac{b^2}{a^2}\int(2ax-x^2)\,dx=\frac{c}{r}\cdot\frac{b^2}{a^2}\,x^2$$

$(a-\frac{1}{3}x)$. Si faccia $x=2a$, e si avrà l'Ellissoide intera $=\frac{c}{2r}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{4a^3}{3}=\frac{c}{r}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2a^3}{3}$.

824. Di qui si raccoglie, che l'Ellissoide sta alla sfera, che abbia per asse l'asse maggiore dell' Ellisse genitrice, come $b^2:a^2$. Questo vale tanto per l'Ellissoide allungata, cioè per quella, che è generata dalla rotazione dell'Ellisse intorno all'asse maggiore, quanto per l'Ellissoide accorciata, cioè per quella, che è generata dalla rotazione dell' Ellisse intorno all'asse minore.

Difatto per aver la solidità di questa, non si richiede altro che sostituir l'equazione $y^2=\frac{a^2}{b^2}$.... $(2bx-x^2)$ all' equazione $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, e con ciò si ha la solidità dell' Ellissoide accorciata.....
$=\frac{c}{r}\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{2b^3}{3}$, formola, che è della forma stessa che quella trovata per l'Ellissoide accorciata. Di

qui

qui poi si vede, che l'Ellissoide accorciata stà alla sfera iscritta, come $a^2:b^2$, e che l'Elissoide allungata stà alla sfera circoscritta come $b^2:a^2$

825 *Teor.* Qualunque Ellissoide allungata, o accorciata è uguale a due terzi del cilindro circoscritto.

Dimostrazione. Si concepisca la sfera $IANB$ (Fig.^{a}53) circoscritta alla sfera $LIEN$, e sieno i due cilindri $CSMTD$, $ulkz$, il primo dè quali sia circoscritto alla sfera, e l'altro alla sferoide. Dicasi S la solidità della sfera, C la solidità del cilindro ad essa circoscritto; E la solidità dell'Ellissoide, e si avranno le due proporzioni $S:C::2:3$ (Geom.); $E:S::b^2:a^2$. Si ponga nella seconda il valor di S preso dalla prima e si avrà $E=\frac{2}{3}\cdot\frac{b^2}{a^2}C$. Dico adesso che il Cilindro circoscritto all'Ellissoide è $=\frac{b^2}{a^2}\cdot C$. Per provarlo sia C' la sua solidità, e si avrà $C':C::lk^2:ST^2$, cioè $::b^2:a^2$, e per conseguenza $C'=\frac{b^2}{a^2}C$; Dunque $E=\frac{2}{3}C'$, cioè l'Ellissoide $ILNE$ è uguale a due terzi &c. Per rapporto all'Ellissoide accorciata, basta supporre che il cilindro circoscritto insista sopra il circolo, che ha per diametro l'asse maggiore, e che la sfera ad essa iscritta abbia parimente circoscritto un cilindro, e si proverà col raziocinio adoperato di sopra, che è anch' essa eguale a due terzi del cilindro circoscritto.

826. Di qui ne segue che l'Ellissoide sia doppia del cono che ha la medesima base del cilindro

circoscritto, e l'altezza doppia.

827. *Teor.* La Ellissoide allungata stà alla Ellissoide accorciata come l'asse conjugato all'asse trasverso.

Dimostrazione. Detta S la sfera circoscritta alla Ellissoide allungata, che chiamerò E, e detta S' la sfera iscritta alla Ellissoide accorciata, che dirò E', si ha $S:E::a^2:b^2$; $E':S'::a^2:b^2$; si pongano per $S\,S'$ i loro valori, e si avrà.......................

$$\frac{c}{r}\cdot\frac{2}{3}a^3:E::a^2:b^2;$$

$$E':\frac{c}{r}\cdot\frac{2}{3}b^3::a^2:b^2;$$

Dalla prima $E=\frac{c}{r}\cdot\frac{2}{3}ab^2$, e dalla seconda...

$E'=\frac{c}{r}\cdot\frac{2}{3}a^2b$; quindi $E:E'::ab^2:a^2b::b:a$

828 *Teor.* L'Ellissoide allungata, ed accorciata; purchè prodotte ambedue dalla medesima Elisse, sono medie proporzionali fra la sfera circoscritta, e la sfera iscritta.

Dimostrazione. L'asse della sfera circoscritta è l'asse maggiore dell' Ellissoide, e quello della sfera iscritta è l'asse minore della medesima. Ciò posto, dalle proporzioni $S:E::a^2:b^2$; $E':S'::a^2:b^2$ si deduce $S:E::E':S'$. Rimane da provarsi, che stia $S:E:E':$. Osservo a quest' effetto, che si ha per il Teor. antec. $E:E'::b:a$; ma $S':E'::b^2:a^2$; dunque $S':E:E'$, e per conseguenza $S':E:E':S$.

829 *Teor.* Se si prendano due medie geometriche fra l'asse conjugato, e l'asse trasverso dell' Ellisse, la prima è il diametro di una sfera

ra eguale all' Ellissoide allungata, e la seconda è diametro di una sfera eguale all' Ellissoide accorciata.

Dimostrazione. Si concepiscano quattro sfere S, S^I, S^{II}, S^{III} le quali abbiano per diametro una delle quattro proporzionali suddette, cominciando dall' asse trasverso. Siccome i diametri sono in proporzione, debbon' esser in proporzione anche le sfere corrispondenti. Ora la sfera iscritta, la sferoide allungata, la sferoide accorciata, e la sfera circoscritta sono anch' esse in proporzione (*n.* 828.) Dunque le due medie della prima proporzion continua, cioè le due sfere medie proporzionali S^I, S^{II}, debbon esser eguali respettivamente alle due medie proporzionali della seconda proporzione, e perciò &c. &c.

ARTICOLO IV.

Dell' Iperbola.

830. L'equazione dell' Iperbola è (*n.* 718.) ......

$$y^2 = \frac{sen.Q}{cos^2.\frac{1}{2}P}(c\,sen.Px + sen.(P+Q-180.°)x^2) = Q.$$

Da questa si raccoglie 1°. Che essendo .... $y = \pm\sqrt{Q}$, la curva Iperbolica dee aver due rami perfettamente uguali, uno positivo, e l'altro negativo; 2.° Che ella non è rientrante, ma si dilata all' infinito, perchè quanto più cresce x, tanto più cresce y; 3° Che l' Iperbola passa per l' origine dell' ascisse, perchè fatto $x = 0$, si ha $y = 0$; 4.° Che all'ascisse negative minori di....

sen.

$\frac{c\,sen.P}{sen.(P+Q-180.°)}$ non corrisponde alcun ramo reale di curva; e che vi comincia a corrispondere un' intera Iperbola eguale alla prima, tosto che x diviene $> \frac{c\,sen.P}{sen.(P+Q-180.°)}$. Per vederlo si riduca l'equazione generale alla forma ....

$$y^2 = \frac{sen.Q\,sen.(P+Q-180.°)}{cos.^2\frac{1}{2}P}\left(\frac{c\,sen.Px}{sen(P+Q-180°)} + x^2\right)$$

e pongasi $\frac{c\,sen.P}{sen.(P+Q-180.)} = 2a$, ond' ella divenga

$$y^2 = \frac{sen.Q\,sen.(P+Q-180.)}{cos.^2\frac{1}{2}P}(2ax + x^2).$$

Adesso è chiaro che se x sia negativa è $< 2a$, $-2ax + x^2$ risulta una quantità negativa, per cui proviene y immaginaria; Ma se x divenga $= 2a$, si ha $y = 0$, il che dimostra che $\frac{c\,sen.P}{sen.(P+Q-180.°)} = 2a$, è un' asse Iperbolico; e divenendo $x > 2a$, $-2ax + x^2$ riesce positivo, ed y per conseguenza reale. Questa seconda equazione appartiene all'Iperbola formata nel cono opposto al vertice di quello, che si è considerato, e si vede nella Fig.ª 30.

831. Che questa seconda Iperbola sia la medesima che quella formata nel primo cono, si può dimostrar facilmente. Sia $-x = -2a - c$; si avrà $-2ax + x^2 = -4a^2 - 2ac + 4a^2 + 4ac + c^2 = 2ac + c^2$, e per-

e perciò $y^2 = \dfrac{sen.\mathcal{Q}\; sen.(P+\mathcal{Q}-180.°)}{cos.^2 \frac{1}{2} P} (2ac+c^2)$ ....

equazione indentica a quella che si trovò per l'Iperbola del primo cono 5.°. Si raccoglie finalmente dalla suddetta equazione, che quando l'ascissa negativa $-x$ è $=a$, cioè uguale alla metà dell' asse... $\dfrac{c\; sen.P}{sen.(P+\mathcal{Q}-180.°)}$, chiamando b^2 il quadrato dell ordinata, si dee avere..........................

$$b^2 = -\frac{sen.\mathcal{Q}\; sen.(P+\mathcal{Q}-180.°)}{cos.^2 \frac{1}{2} P}\, a^2,$$

e per conseguenza

$$\frac{sen.\mathcal{Q}\, sen.(P+\mathcal{Q}-180.)}{cos.^2 \frac{1}{2} P} = -\frac{b^2}{a^2},$$

dove il segno negativo si dee trascurare, perchè vi è stato introdotto per difetto dell' equazione, di cui ci siamo serviti, la quale non può dare il valor di b che immaginario, e perchè d' altronde si vede che anzi deve aversi necessariamente ....

$$\frac{sen.\mathcal{Q}\; sen.(P+\mathcal{Q}-180.°)}{cos.^2 \frac{1}{2} P}$$

positivo.

Con questo l'equazione dell' Iperbola vien ridotta ad $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax+x^2)$, dove $2a$, e $2b$ sono i due assi, che determineremo fra poco, nella di cui interzione è posto il centro dell' Iperbola.

832. Se i due assi divengano eguali, l'equazione diviene $y^2 = 2ax+x^2$, e l'Iperbola si dice equilatera. E' questa la curva, che vien descritta dai projettili in virtù della triplice forza, di projezione, di gravità, e del moto della Terra.

833. Per mezzo dell'equazione dell'Iperbola così ridotta, si possono scoprire adesso varie sue proprietà.

Dalla medesima si ha primieramente .... $y^2 . 2ax+x^2 :: b^2 : a^2$, il che significa: Che i quadrati dell' ordinate Iperboliche stanno ai rettangoli dell'ascisse corrispondenti, come il quadrato dell'asse minore CD al quadrato dell' asse maggiore AB. Per esempio nella (Fig.ª 54) si ha $PM^2 : PA \times PB :: CD^2 : BA^2 :: FD^2 : AF^2$.

834. Ora siccome questo rapporto sussiste generalmente in qualunque punto della curva, si potrà fare $2ax+x^2 : y^2 :: 2a : p$, essendo p una costante da determinarsi; quindi si avrà $y^2 =$ .... $\frac{p}{2a}(2ax+x^2)$, nuova forma dell' equazione Iperbolica.

835. Di qui ne segue, che si abbia $\frac{p}{2a}$.... $= \frac{b^2}{a^2}$, e perciò $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$, vale a dire $2a : 2b : p$. La costante p dev' esser dunque una terza proporzionale dopo l' asse maggiore, e l' asse minore, come nell' Ellisse (rapporto, che divien d'eguaglianza, qualora l'Iperbola sia equilatera), ed è chiaro, chè data essendo l' Iperbola, dev' esser data anche p.

Supponiamo pertanto, come facemmo nell' Ellisse, che sia p una doppia ordinata Iperbolica, e si avrà $\frac{1}{4}p^2=\frac{p}{2a}(2ax+x^2)$; cioè $p=\frac{2}{a}(2ax+x^2)$. Da quest' equazione si può derivar facilmente il valore dell' ascissa x, a cui deve corrispondere l' ordinata $\frac{1}{2}p$. Sia pertanto $x=c$, onde si abbia $p=\frac{2}{a}(2ac+c^2)$, e sarà $p=4c+\frac{2c^2}{a}$, cioè $p>4c$, o sia maggiore del quadruplo della sua ascissa c.

836. Ripigliando adesso l' equazione $p=\frac{2}{a}(2ac+c^2)$ si ha $\frac{ap}{2}=2ac+c^2$; ma $\frac{ap}{2}=b^2$ (n. 835.); dunque $b^2=2ac+c^2=(2a+c)\,c$, dal che si raccoglie, che il semiasse minore dev' esser medio proporzionale fra le ascisse prodotte dall' ordinata $\frac{1}{2}p$: nuova proprietà della suddetta costante.

837. Se dunque sia dato l'asse maggiore di un Iperbola e la costante p, si ottiene facilmente l'asse minore. Ma volendolo immediatamente, facciasi centro in A, e con un raggio $pF=a+c$ si descriva un'arco indefinito: esso taglierà in due punti l' indefinita CD, e determinerà l'asse richiesto. Infatti si ha $FD^2=DA^2-AF^2$ cioè $b^2=2ac+c^2$ come sopra.

838. Volendo sostituire nell'equazione dell'Iperbola trovata (n. 831.), $2ac+c^2$ invece di b^2, si avreb-

avrebbe sotto la forma seguente $y^2=\frac{(2ac+c^2)}{a^2}\times(2ax+x^2)$; e se le ascisse vogliansi computar dal centro, si avrà per un'ordinata qualunque $PM=y$ (Fig.a 54.) $FP=x$, $BP=x+a$, ed $AP=x-a$; perciò $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$. Veniamo adesso al seguente

839. *Teor.* Essendo $Ap=Bq=c$ (Fig.a 54.), se dai punti p, q si conducano due rette pN, qN ad un punto N qualunque del perimetro Iperbolico, sarà sempre $qN-pN=AB$.

Dimostrazione. Si abbassi dal punto N un' ordinata sul prolungamento dell'Asse AB, che sia Ne; Si avrà $Np^2=Ne^2+pe^2$; ma $pe=a+c-x$; dunque, posto $a+c=d$, si ha $Np^2=y^2+d^2-2dx+x^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)+d^2-2dx+x^2$: e restituito a d^2 il suo valore a^2+b^2, che si ricava dall'equazione $b^2=2ac+c^2$ con aggiungere a^2 ad ambi i membri, si ottiene $Np^2=\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}+a^2+b^2-2dx+x^2=\frac{(b^2+a^2)}{a^2}x^2-2dx+a^2$, e rimesso per a^2+b^2 il suo valore d^2, $=\frac{d^2}{a^2}x^2-2dx+a^2$; si estragga la radice, e ne proverrà $Np=\frac{dx}{a}-a$. Con un simil calcolo si trova $qN=\frac{dx}{a}+a$, e perciò si ha $qN-pN=2a$ come &c.

840. Di qui si deduce una facil maniera di descri-

scriver meccanicamente un' Iperbola. Si fissi all' estremo Y di una riga BY(Fig.ª 55.) un filo, che sia minore della riga di una quantità $= 2\ a$. L' altro estremo del filo si fissi nel punto p, e la riga nel punto B in modo, che possa rotarvi intorno liberamente. Ciò fatto, si applichi il filo alla riga mediante uno stilo, e si faccia rotare intorno al punto B; la traccia segnata dallo stilo sarà l' Iperbola.

841. *Teor.* Se dividasi per metà colla retta MNT l' angolo formato dalle rette qN, pN (Fig.ª 54.) sarà essa tangente dell' Iperbola nel punto N.

Dimostrazione. Avendo descritto col raggio Np, e col centro p l' arco pI, si conducano da un altro punto qualunque T della retta MT le rette Tp, TI, Tq, e si avrà $Tq—Tp=Tq—TI$; ma $Tq—TI$ non può essere$=qI$, come richiede la natura dell' Iperbola, perchè converrebbe che fosse $Tq=TI+qI$, che è assordo; dunque il punto T non è nel perimetro Iperbolico. Dunque &c.

842. Volendo condurre una tangente all' Iperbola da un punto dato fuori di essa, ecco l' operazione, che fa d'uopo seguire. Fatto centro nel punto dato, con un raggio eguale alla sua distanza da quello dei punti p, q, che è più vicino, si descriva un arco indefinito, e fatto centro il medesimo dei punti suddetti, con un raggio eguale all' asse maggiore, si descriva un altr' arco indefinito. Per l' intersezione di questi due archi, e per quello dei punti p, q, che appartiene all' Iperbola opposta si produca una retta, finchè incontri l' Iperbola. Per questo, e per il punto dato si faccia passare una retta, e sarà essa la tangente richiesta.

843. *Teor.* Gli angoli formati dalle rette qN, pN col peri-

perimetro Iperbolico, sono in qualunque punto fra loro eguali.

Dimostrazione. Si è veduto che la MT tangente al punto N divide l' angolo qNp in due parti eguali; dunque si ha $qNM= MNp$.

844. In virtù di questa proprietà se abbiasi una superficie Iperbolica, qual è quella, che vien generata dalla rotazione della semiperbola AM intorno al prolungamento dell' asse maggiore AL, tutti i raggi luminosi, come pure tutti i raggi sonori, che entrino nella cavità Iperbolica, con una tal convergenza, che tendano al punto q, debbon tutti riunirsi nel punto p; e lo stesso vale per rapporto all' Iperbola opposta.

835. Anche l' Iperbola dunque ha un fuoco: esso è determinato dalla doppia ordinata p, terza proporzionale dopo l' asse maggiore, e l' asse minore, che dicesi *Parametro*; ed inoltre è determinato dalla proporzione che sussiste fra le due distanze, che passano fra il fuoco e i due vertici delle Iperbole, ed il semiasse minore, che forma il termine medio (n. 836.)

846. Cerchiamo l'equazione dell' Iperbola rapportata al secondo asse. Dal punto G si abbassi un' ordinata GK (Figª. 56) sul semiasse FG; Ne risulta $HG=KF$, ed $KG=FH$; dunque nell' equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ (*n.*848) basta porre x per y, ed y per x, e con ciò si avrà $x^2=\frac{b^2}{a^2}(y^2-a^2)$, o sia $y^2=\frac{a^2}{b^2}(x^2+b^2)$, che è l' equazione richiesta.

847. Da questa si vede, che ne deriva la propor-

porzione $y^2 : x^2 + b^2 :: a^2 : b^2$ vale a dire : Che il quadrato di un'ordinata al second'asse dell'Iperbola sta alla somma dei quadrati dell'ascissa, e del semiasse minore, come il qnadrato dell' asse maggiore, sta al quadrato dell'asse minose.

848. Volendo computar l'origine dell'ascisse dal vertice, si avrebbe $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx + x^2)$.

849. Prima di passare a rapportar l'Iperbola ai suoi diametri, vediamo come si possano determinar le sue funzioni principali.

Sia l'equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, e differenziandosi avrà $y\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a + x)$, e perciò $y\frac{dx}{dy} = \ldots\ldots$ $\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{a + x} = \frac{2ax + x^2}{a + x}$, formola della sottangente, dalla quale deriva la proporzione $a + x : 2a + x :: x :$ sottangente: vale a dire $FH : AH :: BH : OH$.

La tangente si trova $\ldots\ldots$ $= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) + \left(\frac{2ax + x^2}{a + x}\right)^2}$. La sunnormale già si è veduta qui sopra essere $\frac{ydy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a + x)$; dunque si ha la normale $\ldots\ldots$ $= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) + \frac{b^4}{a^4}(a + x)^2}$

Volendoci prevalere di un' altra equazione, le formole delle suddette funzioni si troverebbero con egual facilità. Si

Si debba riferire adesso l'Iperbola ad un suo diametro.

850. Diametro dell' Iperbola è una retta, che passa per il suo centro, ed incontra il perimetro dell' iperbole opposte, come la retta GE (Fig.ª 56.). Un diametro può esser poi conjugato, ed è tale, quando è parallelo alla tangente condotta per il vertice di un'altro diametro. Tal' è per esempio MQ, supposto che sia parallela alla tangente NO'

851. *Teor.* Qualunque diametro Iperbolico vien diviso in due parti eguali nel centro.

Dimostrazione. Dagli estremi E, G del diametro GE (Fig.ª cit.) si abbassino due ordinate sull'asse maggiore, che sieno EI, GH; sarà $EF = EI^2 + FI^2$, ed $FG^2 = GH^2 + FH^2$: Ma per l' omologa simetria dei rami Iperbolici opposti AEK, BGL dev' essere $EI = GH$, e perciò $FI = FH$: dunque &c.

852. *Teor.* Se dagli estremi Q, G di due diametri conjugati (Fig.ª 56.) si abbassino due ordinate GH, QR sull' asse principale, risulta sempre il quadrato della parte del suddetto asse, compresa fra il centro, ed una di tali ordinate, per esempio FR^2, uguale al rettangolo delle ascisse AH, BH corrispondenti all' altra ordinata.

Dimostrazione. Sia $FR = u$; sarà per la natura dell' Iperbola riferita al second' asse $QR^2 : AF^2 + FR^2 :: FD^2 : FB^2$ Ma si ha $GH^2 : AH.BH :: FD^2 : FB^2$. Dunque $QR^2 : AF^2 + FR^2 :: GH^2 : AH.BH$, ed alternando $QR^2 : GH^2 :: AF^2 + FR^2 : AH.BH$. Ora per i triangoli simili $O'GH$, FQR si ha $QR^2 : GH^2 :: FR^2 : O'H^2$. Dunque $\ldots\ldots$ $AF^2 + FR^2 : AH.BH :: FR^2 : O'H^2$, cioè $a^2 + u^2 : x^2 - a^2 :: u^2 : \left(\frac{x^2 - a^2}{x}\right)^2$, e di qui $u^2 = x^2 - a^2$, vale a dire $FR^2 = AH.BH$.

853.

853. Dunque, essendo $\mathcal{Q}\mathcal{Q}'$ un'Iperbola conjugata, di cui l'asse maggiore sia per conseguenza CD, e il minore BA, siccome si ha in questo caso $a^2:b^2::FA^2+FR^2:\mathcal{Q}R^2$, osservando che FA^2+FR^2 è $=a^2+u^2=x^2$, si raccoglie $\mathcal{Q}R^2=\frac{b^2x^2}{a^2}$. Ciò posto, si ha $FG^2=FH^2+GH^2=x^2-b^2+\frac{b^2x^2}{a^2}$ (n. 838), come pure $F\mathcal{Q}^2=FR^2+R\mathcal{Q}^2=u^2+\frac{b^2x^2}{a^2}=x^2-a^2+\frac{b^2x^2}{a^2}$. Dunque $FG^2-F\mathcal{Q}^2=a^2-b^2$, il che ci somministra il Teorema seguente: Che nell'Iperbola, la differenza de' diametri conjugati è costante, ed eguale alla differenza dei quadrati dei due assi.

854. *Teor.* Se dall'estremo G (Fig.ª 56.) di un diametro Iperbolico si abbassi una perpendicolare GO sul diametro conjugato $\mathcal{Q}M$, risulta $GO:FD::FB:FM$.

Dimostrazione. Si ha $FM^2-FG^2=b^2-a^2$ (n. ant.), ma $FG^2=x^2-b^2+\frac{b^2x^2}{a^2}$; dunque $FM^2=$ .... $\frac{b^2x^2+a^2x^2-a^4}{a^2}$. Dal centro F si abbassi una perpendicolare FI sulla tangente. I triangoli simili FIu $GT'H$ danno FI ò $GO:Fu::GH$ ò $KF:T'G$; quindi $GO.T'G=Fu.KF$. Ma $Fu.KF=FD^2$, come si deduce dalla sottangente presa sull'asse minore. Dunque $GO.T'G=FD^2$, e perciò $T'G^2\frac{(b^4x^2-a^4b^2+a^2b^2x^2)}{a^4}:FD^2\,(b^2)::FD^2\,(b^2):GO^2=\frac{a^4b^2}{b^2x^2-a^4+a^2x^2}$, e perciò, $GO^2.FM^2=a^2b^2=FB^2.FD^2$, onde si ha finalmente $GO.FD::FB:FM$.

855. *Teor.* Il parallelogrammo formato da due diametri conjugati dell'Iperbola è uguale al rettangolo dei due assi.

Dimostrazione. Difatto $GO.FM=FD.FB$.

856. *Teor.* Il quadrato, di un'ordinata qualunque à un diametro Iperbolico, sta al rettangolo delle sue ascisse, come il quadrato del semidiametro conjugato, sta al quadrato del semidiametro, a cui appartiene l'ordinata.

Dimostrazione. Sia (Fig.ª 56.) LT un'ordinata al diametro GE. Dal punto E si conduca sull'asse l'ordinata LV, e dal punto T la Ta perpendicolare all'ordinata suddetta, come pure la TZ perpendicolare all'asse. Si faccia $Ta=p$, $FZ=q$, $FG=b$, e sarà $VB=p-a+q$; ed $AV=p+a+q$. Posto questo, si ha dai triangoli simili FGH, FTZ, $FH\,(x):FG\,(b)::FZ\,(q):FT=\frac{bq}{x}$. Dunque $GT=\frac{bq}{x}-b$, e $TE=\frac{bq}{x}+b$; perciò si ha $GT.TE=\frac{b^2q^2}{x^2}-b^2$. Quindi $FH\,(x):HG\,(y)::FZ\,(q):TZ$ o $aV=\frac{qy}{x}$. Parimente dalla somiglianza dei triangoli $O'HG$, TLa, si deduce ..... $O'H\,\frac{(x^2-a^2)}{x}:GH\,(y)::Ta\,(p):aL=\frac{pxy}{x^2-a^2}$. Dunque $LV^2=(La+aV)^2=\frac{p^2x^2y^2}{(x^2-a^2)^2}+\frac{2pqx'y^2}{x^2-a^2}$ .... $+\frac{q^2y^2}{x^2}$. Ma si ha $AH\,BH\,(x^2-a^2):AV.BV$....

$(p^2$

$(p^2 - a^2 + 2pq + q^2) :: HG^2 (y^2) : LV^2$. Dunque si paragoni il valore di LV^2, preso da questa proporzione col valore trovato di sopra, e si avrà l'equazione

$$\frac{2pqy^2 + p^2y^2 - a^2y^2 + q^2y^2}{x^2 - a^2} = \frac{p^2x^2y^2}{(x^2-a^2)^2} + \frac{2pqxy^2}{x^2-a^2} + \frac{q^2y^2}{x}$$

dalla quale si ricava $p^2 = a^2 - x^2 + q^2 - \frac{a^2 q^2}{x^2}$

Dopo di questo si ha l'analogia, che segue $GT.TE \left(\frac{b^2 q^2}{x^2} - b^2\right) : FG^2 (b^2) :: Ta^2 (a^2 - x^2 + q^2 - \frac{a^2 q^2}{x^2}) : FR^2 (x^2 - a^2)$ come si può verificar facilmente colla moltiplicazione.

Finalmente nei triangoli simili TLa, FQR si ha $Ta^2 : FR^2 :: LT^2 : FQ^2$, e di qui $GT.TE : FG^2 :: LT^2 : FQ^2$, o sia $LT^2 : GT.TE :: FQ^2 : FG^2$.

857. Ecco pertanto, che i quadrati dell'ordinate di un diametro Iperbolico stanno ai rettangoli dell'ascisse corrispondenti, come il quadrato del diametro conjugato sta al quadrato del diametro proposto. Dicasi dunque $2m$ il diametro conjugato MQ, $2n$ il diametro EG; x la GT, ed y la LT, e si avrà $y^2 = \frac{m^2}{n^2}(2nx + x^2)$ per l'equazione richiesta, la quale, come si vede, non differisce dalla forma dell'equazioni trovate per rapporto agli assi.

858. *Teor.* Se s'inalzi (Fig.ª 57.) al contatto O di una tangente Iperbolica OR una perpendicolare OP, che incontri l'asse maggiore nel punto P, e se dal centro C si abbassi una perpendicolare CS sulla medesima tangente, risulta $OP.CS = b^2$.

Di-

Dimostrazione. Sia ON un'ordinata all'asse maggiore; I triangoli simili PON, CST danno $ON : OP :: CS : CT$; dunque $OP.CS = ON.CT$; Ma $ON.CT = b^2$, e per vederlo basta prender la sottangente del second'asse, e dedurne CT; dunque &c.

859. *Teor.* Se al vertice A di un' Iperbola (Fig.ª 57.) s'inalzi una perpendicolare AD, eguale al parametro, e se dal centro C si conduca una retta indefinita CDF, la quale si chiama Direttrice dell'Iperbola, io dico che prolungando un'ordinata qualunque GN finchè incontri in E la CDF, dee risultar sempre $EN.NA = NG^2$.

Dimostrazione. $ENA : CNA :: EN : CN :: DA : CA$; Ma $DA : CA :: GN^2 : CN.AN$; Dunque $EN \times AN : CN \times AN :: GN^2 : CN.AN$, vale a dire $EN.AN = GN^2$.

860. *Teor.* Se ai due vertici A, a (Fig.ª prec.) delle due Iperbole opposte s'inalzino due perpendicolari, e queste si prolunghino finchè giungano ad incontrare una tangente qualunque OR, risulta sempre $AR.ar = b^2$.

Dimostrazione. Dalla formola della sottangente si ha $CN : CA : CQ$; dividendo si deduce $AN : CA :: AQ : CQ$, componendo $AN + AQ (= QN) : CA + CQ (= Qa) :: AQ : CQ$, ed invertendo $Qa : CQ :: QN : AQ$; ma per le parallele si ha $AQ : QN :: AR : NO$, e $CQ : Qa :: CT : ar$; dunque $AR : NO :: CT : ar$; dunque $AR.ar. = NO.CT$; Ora i triangoli simili PON, SCT danno $OP : ON :: CT : CS$, e perciò $NO.CT = OP.CS$. Ma $OP.CS = b^2$ per il Teor. 858.; dunque si ha finalmente $AR.ar = b^2$

861. *Teor.* Se dai fuochi di un' Iperbola si tirino due perpendicolari VH, uh sopra di una tangente qualunque, il loro prodotto è sempre $= b^2$.

Dimostrazione. Essendo $ar.AR = BC^2 = Au.ua$ ......

(*n.* 836.) ne risulta l'analogia $ar : Au :: ua : AR$; dunque i triangoli ARu, aru sono simili; per conseguenza l'angolo Rua è uguale all'angolo ura, e gli angoli rua, Rua presi insieme fanno un retto, e però l'angolo Rur è retto. Quindi il triangolo rub è simile al triangolo Rur; e per la stessa ragione il triangolo RVr è simile al triangolo RVH. Ma per cagione de' triangoli simili RAu, rau si ha $ur:uR::ar:Au=aV$. Dunque i triangoli ruR, raV sono simili: ma sono tali anche i triangoli RAV, raV, perchè $ar.AR=aV.AV$, dunque RAV, ruR sono simili anch' essi, ovvero sono simili anche i triangoli RAV, rub. Di più essendo simili i triangoli RAV, raV si ha $VR:Vr::AR:aV=uA$; quindi i triangoli uAR, rVR sono pur simili; ma uAR ed uar sono parimente simili, dunque son tali ancora, rau, ed rVR, ovvero VRH. Si hanno pertanto quattro triangoli simili RAV, ed rub, rau ed VRH, i primi de' quali danno $RV:ru::AR:ub$, e gli altri due danno $RV:ru::VH:ra$; dunque si raccoglie finalmente $AR:ub::VH:ra$, e perciò $AR.ar=ub.VH=BC^2$.

862. Tornando adesso alla formola della sottangente, si trova la AQ (Fig.ª 57) $=\frac{2ax+x^2}{a+x}$ .... $-x=\frac{ax}{x+a}$. In questa si ponga $x=\infty$, e si avrà $\frac{ax}{a+x}=a$, il che mostra, che qualora l' Iperbola poss' avere un asintoto, esso dee passare per il centro. Per determinare qual debba esser la retta di elevazione AR, affinchè la tangente possa di-

divenire asintoto s' istituisca la proporzione ...... $QN:QA::NO:AR$, che traducendola diviene .... $\frac{2ax+x^2}{a+x} : \frac{ax}{a+x} :: \frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2} . AR=$ ....

$$\left(\frac{bx\sqrt{2ax+x^2}}{a+x}\right) : \left(\frac{2ax+x^2}{a+x}\right) = \frac{bx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}.$$

In questa formola si ponga $x=\infty$, e siccome ne proviene $AR=b$, si può concludere, che l' Iperbola ha due asintoti, i quali si determinano con alzare al vertice due perpendicolari AD, AD' eguali al semiasse minore b, perchè le rette infinite condotte per i punti C, D; C, D' risultano asintoti Iperbolici.

863. Molte sono le proprietà, e queste assai utili, ed eleganti, che presenta l' Iperbola riferita ai suoi asintoti. Noi passiamo ad occuparcene.

864. *Teor.* Se conducasi una retta Nn (Fig.ª 58.) perpendicolare all' asse BA, che incontri gli asintoti Iperbolici nei punti M, n, si ha sempre $NM.Mn=b^2$.

Dimostrazione. Dall' equazione $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ $=\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2$ si deduce $b^2=\frac{b^2x^2}{a^2}-y^2=\left(\frac{bx}{a}-y\right)\left(\frac{bx}{a}+y\right)$. Ora dai triangoli simili ACL, LNP, nei quali l'angolo CAL, è uguale all' angolo NLP, a motivo del triangolo isoscele AEL, si ha $LA:LC::LP:NP$; cioè $a:b::x:\frac{bx}{a}$. Dunque $NB=\frac{bx}{a}$ ed ed $NM = \frac{bx}{a} - y$; Perciò $Mn = \frac{bx}{a} + y$ ed $NM \times Mn = b^2$.

865. *Teor.* Se conducansi due rette qualunque Nn, Ff, perpendicolari all'asse, ed incontrino gli asintoti nei punti N. n, F, f, le parti NM, Mn di una desse sono reciprocamente proporzionali alle parti FO, of dell'altra.

Dimostrazione. Per il prec. si ha $NM.Mn = b^2$, $FO.Of = b^2$; dunque &c.

866. Di qui si raccoglie che le parti MN, OF vanno diminuendo successivamente senza limite, poichè senza limite vanno successivamente crescendo le doppie ordinate Mm, Oo, e si ha perciò una riprova che le rette LK, LK' determinate come sopra al (*n.* 862) sono veramente asintoti, cioè tangenti dell' Iperbola all'infinito. Inoltre si ha una prova della divisibilità all'infinito di qualunque grandezza. Infatti se trasportisi parallelamente la retta NM verso K, essa vien' ad esser successivamente diminuita, e non pertanto non cessa mai di esser estesa, perchè l' asintoto non incontra mai l'Iperbola.

867. Se da un punto M del perimetro Iperbolico si conduca una retta Ma sull' asintoto LK; parallela all' altr' asintoto, dico essere $Ma.aL = AE^2$.

Dimostrazione. Si conduca Mx parallela all'asintoto LK, onde sia $Mx = aL$. Per i triangoli simili $AR'B$, MNa si ha $Ma : AE :: MN : AR'$, ò GL, Ma (*n.* 864) $MN : CL.Mn$, e per i triangoli simili $AR'E$, Mxn, AR' ò $CL : Mn :: R'E$, ò $AE : MX$, ò aL; dunque $Ma : AE : aL$, e perciò $Ma.aL = AE^2$. Nel modo stesso, conducendo un' altra retta $Q'd$, pa-

parallela all'asintoto LK, si avrebbe $Q'd.Q'u = AE^2$, Per conseguenza $Ma.aL = Q'd.Q'u$, o sia $Ma : Q'd :: Q'u : aL$; dunque le ordinate ad uno degli assintoti Iperbolici, parallele all' altro asintoto, sono reciprocamente proporzionali alle ascisse computate dal centro.

868. Di qui si può dedurre l'equazione dell' Iperbola riferita agli asintoti. Dicasi $Ma = y$, $aL = x$, e si ha immediatamente $xy = AE^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2 = m^2$ (dove m^2 si chiama la Potenza dell' Iperbola); e se pongasi l'origine in E, ed $LE = 1$, si ha $y = \frac{m^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$.

869. Se avendo prolungato l'asse minore CD da ambe le parti, finchè sia $Lb = Lb' = CA$, con i fuochi b, b', e coll'asse minore BA si descrivano due Iperbole VCu, tDZ, le quali (*n.* 853.) sono conjugate alle prime due, è manifesto, che prolungando la retta Ma in c, debba risultare $ac = Ma$, perchè anche nell' Iperbole conjugate si ha $ca.aL = AE^2 = Ma.aL$

870. *Teor.* Se conducasi a traverso dell'Iperbola una retta qualunque FG (Fig.ª 59), che incontri i due asintoti nei punti F, G le parti FM, mG intercette fra l' Iperbola e gli asintoti risultano sempre uguali.

Dimostrazione. Per i punti M, m, si conducano le rette Nn, Pp perpendicolari all' asse maggiore e si avrà $PR \times Rp = pm \times mP = NM \times Mn$; dunque $mP : NM :: Mn : pm$; ma essendo Nn, Pp fra

loro

loro parallele, i triangoli $mp\sigma$, GMn, come pure i triangoli FMN, $F\pi P$ sono simili, onde .... $mP:MN::mF:MF$ ed $Mn:mp::MG:mG$ quindi $mF::MF::MG:mG$ ed $mF-MF:MF::MG-mG:mG$, vale a dire $mM:MF::mM:mG$, e perciò $MF=mG$. In virtù di questo Teor. si può descrivere un'Iperbola fra due asintoti dati, e che passi per un dato punto.

871. *Teor.* Una tangente Iperbolica, terminata dagli asintoti da ambe le parti, é divisa in mezzo nel punto del contatto.

Dimostrazione. Sia una segante FG, e suppongasi, che mediante un moto parallelo vada essa tagliando il perimetro dell'Iperbola in due punti sempre più vicini; le parti comprese fra l'Iperbola, e gli asintoti sono sempre uguali per l'anteced. qualunque sia la distanza dei punti M, m. Dunque se una tal distanza vada diminuendo, finchè giunga al limite, il che avviene quando la segante divien tangente, avrà luogo una tal verità, è per conseguenza la tangente sarà divisa in due parti eguali nel punto del contatto.

872. *Teor.* Se da due punti M, R del perimetro Iperbolico si conducano (Fig.ª 59.) due rette Ma, RS all'asintoto KY, fra loro parallele, e due altre MG, RT pure fra loro parallele, all'asintoto KT, sarà $aM.MG=SR.RT$.

Dimostrazione. Avendo condotte per M, R due seganti Nn, Pp normali all'asse, e terminate agli asintoti, si hanno i triangoli NMa, PRS, come pure i triangoli MnG, pRT fra loro simili. e perciò si ha $MN:Ma::RP:RS$, ed $Mn:MG::Rp:RT$, e componendo $MN\times Mn:Ma\times MG::RP\times Rp:RS\times RT$ ma $MN.Mn=RP.Rp$; dunque $Ma.MG=RS.RT$.

873. *Teor*, Se nello spazio asintotico $CADEF$ dell'Iperbola AC (Fig.ª 60.) si conducano tante rette CF, Ce, il, id &c. ciascuna delle quali sia parallela all'altro asintoto, supposto, che tutte quelle, le quali cadono sopra un'asintoto, per esempio FE, sieno in proporzione arimmetica, le altre parallele Ce, id, bc &c, risultano in proporzione armonica, cioè si ha $Ce:bc::Fl:lm$; $id:gb::ml:mn$, e così in seguito.

Dimostrazione. Essendo eguali i rettangoli CE, iE, bE &c. (*n.868.*) debbon esser' eguali anche i rettangoli Cl, ie, im, bd &c.

Quindi si ha $Cl:im::ie:bd$. Ora la prima ragione non è altro, che la ragione composta di $CF:il$, ed $Fl:lm$, e la seconda equivale alla ragione di $di:cb$ (per esser $dc=cb$) ò sia di $bm:il$ o finalmente alla ragion composta di $bm:FC$, e di $CF\,il$; dunque si deve avere $Fl:lm::bm:FC::Ce.bc$, e però $Ce.bc..Fl.:m$ o sia $FE.lmE..Fl.lm$. Con egual raziocinio si proverà lo stesso dell'altre parallele.

874. Vediamo come si ottenga l'espressione del raggio di curvatura dell'Iperbola, e per trovarne una formola, che rappresenti nel tempo stesso il raggio di curvatura dell'altre due sezioni coniche, riduciamole tutte ad un'equazione comune.

A quest'effetto, osservo, che posto $\frac{2p}{a}$ in luogo di $\frac{b^2}{a^2}$, $y^2=px\pm\frac{px^2}{a}$ rappresenta realmente tutte le tre Coniche, purchè per la Parabola sia l'asse maggiore $=\infty$. Dunque, siccome si ha la normale generalmente espressa per $\frac{y}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}$, che

che si può fare $=n$, si avrà il raggio richiesto $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}=\frac{n^3dx^2}{-y^3d^2y}$. Ora dall'equazione $y^2 = px \pm p\frac{x^2}{a}$ si deduce $2ydy = pdx \pm \frac{2pxdx}{a}$ e differenziando dinuovo, nell'ipotesi di dx costante, si ha $2yd^2y+2dy^2=\pm 2p\frac{dx^2}{a}$, o sia $yd^2y+dy^2 = \pm\frac{pdx^2}{a}$, e moltiplicando per y^2, e trasponendo, $y^3d^2y=\pm\frac{py^2}{a}dx^2-y^2dy^2=\pm dx^2\left(\left(\frac{p^2x}{a}\pm\frac{p^2x^2}{a^2}\right)-\left(\frac{p}{2}\pm\frac{px}{a}\right)^2\right)$; perchè $y^2\frac{dy^2}{dx^2} = \left(\frac{p}{2}\pm\frac{px}{a}\right)^2$. Fatte le operazioni indicate si ha

$y^3d^2y=-\frac{1}{4}p^2dx^2$, onde si deduce finalmente

$$\frac{n^3dx^2}{-y^3d^2y}=\frac{n^3dx^2}{\frac{1}{4}p^2dx^2}=\frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$$

Dunque il raggio osculatore delle sezioni coniche è generalmente uguale al cubo della normale, divisa per il quadrato della metà del parametro.

875. Per rettificar l'Iperbola si ha $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$

$=\int\sqrt{dx\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}$ formola da cui si ottiene l'Integrale per serie, sviluppando il radicale colla formola del binomio.

876. La quadratura della superficie Iperbolica non si può determinare, che per approssimazione per mezzo della formola $\int ydx=\int\frac{a}{b}dx\sqrt{x^2+b^2}$ da cui si ottiene l'Integrale come sopra

877. Volendo quadrare lo spazio asintotico, si ha $\int ydx=\int\frac{1}{1+x}dx=\int dx(1-x+x^2-x^3+x^4\ \&c.)$ $=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-$ &c. espressione di $log.(1+x)$ nell'ipotesi del modulo $=1$. Ecco pertanto la ragione, per cui diconsi Iperbolici i logarimmi computati in quest' Ipotesi. Dalla suddetta formola si raccoglie anche il seguente

878. *Teor.* Se prendasi sopra l'asintoto *AI* un numero qualunque di ascisse *RM*, *RG*, *RE* &c. (fig.ª 63.) che sieno in progressione geometrica, gli spazj *RMNP*, *RGHP*, *REDP* &c. &c. debbono risultare in progressione arimmetica, e perciò gli spazj, che corrispondono alle differenze dell'ascisse, cioè *RMNP*, *MGHN*, *GEDH* &c. debbon esser fra loro eguali.

889. Se prendasi $x=\infty$, lo spazio asintotico risulta manifestamente infinito. Ma per vederlo con evidenza maggiore, dall'equazione $xy=m^2$ (n. 868.) si deduca il valor di y, e si avrà, computando le ascisse dal centro, e posto $m=1$, $y=\frac{1}{x}$; si sostituisca que-

sto

sto valore nella formola $\int ydx$, e si avrà la superficie asintotica $= \int x^{-1}dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \infty$.

880. *Teor.* Sia MBH un'Iperbola fra gli asintoti CN, CY (Fig.ª 61.) Se da due punti qualunque L, M si conducano due rette LS, MF sull'asintoto CN parallele all'altr'asintoto, e per il punto L si faccia passare una segante OL perpendicolare all' asse, si ha il trapezio $CQLO$ eguale al trapezio $CPMN$.

Dimostrazione. Per il punto Q si conduca una retta VX parallela ad OL ed un'ordinata QT, parallela all' asintoto CY. Sarà il triangolo $CQT=CRQ=SLO$, e il triangolo CZP eguale al triangolo FMN. Ora siccome si ha (*n.*868.) $CSLR=CFMZ$, dee pur'essere $CQLO=CFMZ$, e perciò $=CPMN$.

881. *Teor.* Se da due punti qualunque A, N si conducano all'asintoto CY le ordinate AI NV, parallele all'altr'asintoto CN come sopra, congiungendo i punti A, N col censro C, lo spazio $VNAI$ risulta sempre uguale al trilineo CNA.

Dimostrazione. Per la natura degli asintoti, si ha il rettangolo $CN=$ al rettangolo CA; perciò il triangolo $CNV=$ al triangolo CAI; Tolgasi la parte comune CuV, e si aggiunga $uNBA$; e si avrà $VNBAI=CNBA$:

882, Se un Iperbola giri intorno all'asse principale, vien generato un solido, detto Iperboloide o Conoide Iperbolica. Segando questo solido con un piano perpendicolare all'asse di rotazione, la sezione risulta un circolo. Se il piano segante sia inclinato al suddetto asse, la sezione risulta un Ellisse, una Parabola, ovvero un'Iperbola, secondo, che l'angolo d'inclinazione, sia maggiore, uguale, ò minore dell'angolo, che formano gli asintoti coll'asse principale.

883. Volendone la superficie, si prenda l'equazione $y=\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$, e suppongasi, che la rotazione facciasi intorno all'asse MG. Posto $a^2+b^2=m^2$, si avrà la superficie descritta dall' arco BM $= \frac{2bcm}{a^2}\int dx \sqrt{x^2-\frac{a^4}{m^2}}$. e determinata la costante si trova la medesima $= \frac{bcmx}{a^2}\sqrt{x^2-\frac{a^4}{m^2}} - b^2c - \frac{a^2bc}{m}$ $log. \left(\frac{mx+\sqrt{(m^2x^2-a^4)}}{a(m+b)}\right)$, dove c esprime il rapporto del diametro alla circonferenza circolare.

884. Se l'Iperbola si rivolgesse intorno all'asse ts', sarebbe $y=Mm=\frac{a}{b}\sqrt{(b^2+x^2)}$, e la superficie descritta dall'arco BM si otterrebbe $=\frac{acmx}{b^2}\sqrt{x^2+\frac{b^4}{m}}+\ldots\ldots$ $\frac{acb^2}{m}\ log.\left(\frac{mx}{b}+\sqrt{(1+\frac{m^2x^2}{b^2})}\right)$.

885. La solidità della Conoide Iperbolica, generata dalla rotazione intorno all'asse maggiore, si ha $=\frac{c}{r}\int y^2dx = \frac{c}{r}\int\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)dx = \frac{c}{r}\cdot\frac{b^2}{a^2}\ldots\ldots$ $\int(2ax+x^2)\,dx = \frac{c}{r}\cdot\frac{b^2}{a^2}(ax^2+\frac{1}{3}x^3)$, (e sosti-

tuendo $\frac{p}{2a}$ in vece di $\frac{b^2}{a^2}) = \frac{c}{r} \cdot \frac{p}{2a} \cdot (ax^2 + \frac{1}{3}x^3)$, formola, che fa vedere esser l'Iperboloide infinita $= \frac{cp}{6ar} \cdot x^3$, e che stà essa al cubo, fatto sull'asse infinito, come $cp:6ar$, e prossimamente, come $p:2a$.

886. *Teor.* Sia l'Iperbola *AOD* (Fig.ª 62) della quale il parametro *OP* sia doppio dell'asse trasverso *OC*, e col raggio *CB* si descriva il circolo *BKNE*, nel quale si conduca l'ordinata *KOE*. Sarà la Conoide Iperbolica generata, dalla rotazione dell'Iperbola *AOD* intorno all'asse *OB*, eguale al semmento sferico, generato dalla rotazione dell'arco circolare *KBE* intorno al medesimo asse.

Dimostrazione. Per un punto qualunque *L* sia condotta l'ordinata *LIH*, e si descriva il circolo *IFMG*. Risulta $CBO = \frac{1}{2} BA^2$, e perciò $BK^2 = BA^2$. Dunque il circolo descritto col raggio *BK*, o la superficie descritta dall'arco *BK* è uguale al circolo descritto dal raggio *BA*. Nel modo stesso può dimostrarsi, che *MIO*, ovvero $IE^2 = IL^2$, cioè che il circolo, che ha per raggio *IF*, o che è lo stesso, la superficie sferica descritta dall'arco *IF*, è uguale al circolo descritto dal raggio *IL*; e così in seguito. Tutte queste superficie circolari si suppongano di un' altezza infinitesima, e si concluderà &c.

887. *Teor.* Sia $CR = \frac{1}{2} CO$, e l'Iperboloide generata dall'Iperbola *AOD* starà al cono iscritto come *RB:BC*.

Dimostrazione. Sia $NQ = CB = CN$. Poichè la callotta sferica *KBE*, o l'Iperboloide *AOD* stà al cono *KBE*, come *QO:ON*; e il cono *KBE* stà al cono *AOD*, come il circolo, che ha per raggio *KO*, al circolo, che ha per raggio *BA*, ò come $KO^2:BA^2$, ò come *NOB*:*NBO*, ò finalmente come *NO:NB*, ne risulta, che stia la conoide *AOD* al cono iscritto, come *QO:NB*, ò come $RB = \frac{QO}{2}$, à $CB = \frac{NB}{2}$.

888. *Teor.* Qualunque Iperboloide *VOS*, di cui l'asse maggiore sia *OC* (Fig.ª 62), e il parametro *OZ*, stà al cono iscritto come *BR:BC*.

Dimostrazione. Coll'asse *OC*, e con un parametro $OP = 2OC$ si descriva l'Iperbola *AOD*, e con essa l'Iperboloide solita. Qualunque circolo nell'Iperboloide *AOD* starà al circolo corrispondente nell'Iperboloide *VOS* come $BA^2:BV^2$, ò come *OP:OZ*; dunque le suddette Iperboloidi stanno fra di loro come i circoli delle basi (supposti i circoli di una profondità infinitesima, e perciò elementi de solidi respettivi) ò sia come i coni iscritti: Dunque alternando si avrà la conoide *VOS* al cono iscritto, come la conoide *AOD* al cono iscritto: cioè come *BR:BC*. Dunque la conoide Iperbolica stà al cilindro circoscritto come *BR:3BC*.

889. Di qui si può dedurre la soluzione del problema, in cui si cerca di dividere una Conoide Iperbolica in due parti, con un piano perpendicolare all'asse trasverso, in guisa, che il semmento stia al cilindro circoscritto come *m n*.

890 *Teor.* Se taglisi un Iperboloide *TOS* con un piano *LH* perpendicolare all'asse maggiore, sta l'intero solido *VOS* al semmento inferiore *YO'X* come il pa-

parallelepipedo, che abbia per base BO^2 e l'altezza BR, al parallelepipedo, che abbia per base IO^2, e l'altezza IR.

Dimostrazione. La conoide VOS stà al cono iscritto $YO'X$ come $BO \times BR^2$, sta $IO. YI^2$, o come $CBO.BO^2:CO:IO^2$, ò come $CB. BO^2:CI.IO^2$. Il cono $YO'X$ stá alla conoide $YO'X$ come $CI:RI$, o come $CI.IO^2:RI.IO$, dunque la conoide VOS sta al semmento $YO'X$ come $RB. BO^2:RI. IO^2$.

891. *Teor*. Se lo spazio asintotico $AQPK$ (Fig.^{a} 63) che si suppone infinito, faccia una rotazione intera intorno all'asintoto AB, il solido che ne proviene è infinito.

Dimostrazione Difatto si vede che esso dev' esser eguale al prodotto della superficie infinita della base in un' altezza finita AQ.

Volendo una dimostrazione; convien far uso del Teorema del P. Guldino, che trovasi dimostrato nella Meccanica, Esso è il seguente.

Se una linea, o una superficie curva faccia una rivoluzione intorno ad un asse, la superficie nel primo caso, e la solidità nel secondo è uguale al prodotto della curva nel primo caso, e della superficie nel secondo, moltiplicata nella circonferenza del circolo descritto dalla distanza del centro di gravità dall' asse di rotazione.

Supposto questo principio, se prendansi sopra l' asintoto Al le ascise RM, RG &c. in progressione geometrica, gli spazj corrispondenti alle differenze dell' ascisse risultano eguali (*n.* 868.). Ma lo spazio $GHNM$ ha il centro di gravità più lontano dall' asse di rotazione AB, dello spazio $MNPR$; dunque il solido generato da esso è maggiore del solido generato da questo. Lo stesso dicasi del solido generato dal

dal terzo spazio $HDEG$, e degli altri succesivamente, e si concluderà, che il solido totale, siccome equivalente alla somma d' infiniti solidi successivamente maggiori del solido generato dallo spazio finito $MNPR$, esser dee necessariamente infinito.

892. *Teor.* Se lo spazio asintotico infinito $CPDEABK$ (Fig.^{a} 63) faccia una rotazione intera intorno all' asintoto BA, ne proviene un solido, il quale è doppio del cilindro generato dal rettangolo iscritto DA.

Dimostrazione. Condotta la diagonale EF, ed un' altra ordinata qualunque HC parallela ad AB si ha $CH:DE::AE:AH$, è come la circonferenza che ha per raggio AE alla circonferenza che ha per raggio AH. Dunque la superficie del cilindro generato dalla rotazione del rettangolo CA è uguale alla superficie del cilindro generato dalla rotazion del rettangolo DA.

Quindi la superficie cilindrica di CH, cioe generata da CH, sta alla superficie cilindrica di TH come la superficie cilindrica di DE alla superficie cilindrica di TH; cioè come la circonferenza, che ha per raggio, EA, alla circonferenza che ha per raggio HA, cioè come $EA:HA::DF:FT.DE:TL$.

La superficie cilindrica di CH dicasi S, e la superficie cilindrica di TH dicasi s, e si avrà la proporzione $S:s::TH:TL$. Sia dx un' altezza infinitesima, e sarà $Sdx:sdx::TH.dx:TL.dx$; Sia $THdx$ eguale al parallelogrammo infinitesimo $THIV$, e $TL.dx$ sia eguale al parallelogrammo infinitesimo $TLOV$ e si avrà $Sdx:sdx::THIV:TLOV$. Ora presi i limiti si ha $TLOV$ eguale al trapezio infinitamente piccolo, $TLcV$; dunque il cilindro cavo infinitamente piccolo, generato dalla rotazione del parallelogrammo infinitesimo $CHIM$, sta al cilindro cavo generato dal parallelogrammo corrispondente $THIV$, come me $THIV:TCcV$. Si replichi lo stesso raziocinio rapporto agli altri cilindri cavi infinitesimi, e si concluderà, che l'intero solido, generato dallo spazio asintotico infinito $CPDE\,ABK$, sta al cilindro generato dal rettangolo iscritto DA, come il rettangolo DA, stá al triangolo DAF, cioè come 2:1.

893. Da questo ne deriva, che il solido generato dallo spazio infinito $CPDFBK$, sia eguale al solido generato dal rettangolo DA.

LEMMA.

894. La superficie di un' armilla circolare, e uguale al circolo, che ha per raggio una media proporzionale fra i due raggi dei circoli, dai quali è formata.

Dimostrazione. Sia (Fig.ª 64.) un' armilla $ACFB$; e dicasi c la circonferenza del circolo maggiore, r il suo raggio, ed r' il raggio del circolo minore, sarà $r:c::r':\frac{r'c}{r}$; quindi la superficie del circolo maggiore $\frac{r^2c}{2r}$, e quella del circolo minore $=\frac{r'^2c}{2r}$; perciò la loro differenza, ò sia l'armilla $=\frac{c(r^2-r'^2)}{2r}$

Osservo adesso, che essendo $AC=r-r'$, e $CB=r+r'$, si ha $CG=\sqrt{r^2-r'^2}$; quindi il circolo descritto col raggio CG è $=\frac{c}{r}\sqrt{r^2-r'^2}\times\frac{1}{2}\sqrt{r^2-r'^2}$ $=\frac{c}{2r}(r^2-r'^2)$ superficie dell' armilla.

895.

895. *Teor.* Il calice solido generato dalla rotazione dello spazio asintotico intorno all' asse trasverso, è uguale al cilindro generato dalla rotazione del rettangolo $BANM$, in cui AN è tangente al vertice A.

Dimostrazione. Sia (Fig.ª 64) lo spazio asintotico $AKTNA$; conducasi l'ordinata DL, e presa $DE=\Delta x$, si conduca la segante $QGSO$ parallela a DL; si prolunghi DL, e dai punti S, O s'inalzino le perpendicolari SP, OH. Ciò posto essendo $QG=SO$, si ha $GOS=QSO=EO^2-ES^2=AN^2=EF^2$; difatto dicendo $GS=a$, ed $SO=b$, si ha $QSO=ab+b^2$, ed $EO^2-ES^2=\frac{1}{4}a^2+ab+b^2-\frac{1}{4}a^2=ab+b^2$. Dunque l'armilla generata dalla retta SO è uguale al circolo descritto col raggio EF, e però il cilindro cavo prodotto da $PSOH$ intorno ad AB dev'esser eguale al cilindro prodotto dalla rotazione del rettangolo DF.

Adesso dicasi S il solido asintotico totale; M il cilindro cavo prodotto dalla PO; $N^2\Delta x$ il cilindro prodotto dalla DF; e P il cilindro cavo prodotto da LO. Quanto più diminuisce DE, tanto più il rettangolo PO si accosta ad esser eguale allo spazio $LSQI$; dunque nel limite debbon esser eguali, e perciò $P=N^2dx$; ma P nel limite è $=dS$, dunque $S=\int N^2dx$, cioè uguale al cilindro generato dalla rotazione del rettangolo AM C.S.D.D.

896. *Teor.* La conoide generata dalla rotazione dell' Iperbola ALK (Fig.ª antec.) intorno all' asse AB, è uguale all' anello solido generato dalla rotazione del triangolo NMY insorno ad AB.

Di-

Dimostrazione. Il solido generato dalla rotazione dello spazio *ANYB* è uguale al solido generato dallo spazio asintotico *AKYN*, più la conoide generata dall'Iperbola *AK*. Il medesimo solido generato dallo spazio *ANYB* è uguale ancora al cilindro generato dal rettangolo *AM*, più l' anello solido, generato dal triangolo *NMY*: Ma il solido generato dallo spazio asintotico *AKYN* è uguale al cilindro generato dal rettangolo *AM*, dunque &c.

897. Rimarrebbe adesso da trattarsi delle curve degli ordini superiori, le quali sono di un numero molto maggiore, poichè quello di 3.° ordine contiene quattordici generi diversi; quelle di 4.° ordine si riducono a nove classi, che abbracciano molti generi; e quelle di 5.° ordine a undici classi.

Siccome però non vi ha cosa in queste curve, che meriti particolar considerazione, ed inoltre restano esse talmente inviluppate nella propria equazione, che non lasciano concepir di se stesse che un'idea inadequata, ed oscura; quindi è che rimettiamo chi gradisca vedere le poche nozioni, che si hanno sulle medesime, all' Opera Newton =*Enumeratio linearum tertii ordinis*: Stirling=*Lineæ tertii ordinis*: *M.* Cramer=*Introduction à l'Analyse des lignes Courbes Algebriques*: *M* Euler =*Theoria linearum curvarum* T. II. *Introductio in Analysim &c.* M. Nicole= *Memoires de l'Academie* 1729. pag. 198.

SEZIONE III.

Di alcune Curve particolari.

898. La Teoria, che passiamo ad esporre, appartiene ad alcune curve, le quali, ò sono trascendenti, ovvero superano il second' ordine, e sono di grand' uso nelle Matematiche, sì pure, che miste.

ARTICOLO I.

Della Logarimmica.

899. Preso un punto *B* sull'indefinita *HL* per origine, se si alzino sulle differenti ascisse, le ordinate corrispondenti *BA*, *CD*, *PN* &c, tali, che abbiano per logarimmi le ascisse; o sia, tali, che procedano in progressione geometrica, mentre le ascisse procedono in progressione arimmetica, la curva determinata dagli estremi delle ordinate, dicesi Logarimmica. Tal'è la curva *OADN*, (Fig.ª 66).

900. Dalla definizione di questa curva ne segue, che se un'ascissa qualunque *BP* dicasi x, e l'ordinata *PN*, y, debba essere $x=A\, log.\, y$ l' equazione della Logarimmica, essendo A il modulo del Sistema Logarimmico; e che liberando l'equazione suddetta dai logarimmi, debbasi avere $e^x=y^A$ per equazione parimente della Logarimmica, (dove sia $log.\, e=1$) ò $y=e^{\frac{x}{A}}$. Pongasi finalmente $e^{\frac{1}{A}}=m$, e si avrà $y=m^x$, equazione la più semplice della curva medesima.

901. Da questa si vede, che se abbiasi $x=0$, debbe aversi $y=1=BA$; che se abbiasi $x=1=BA=BC$, debb'essere $y=e^{\frac{1}{A}}=CD$; che se x vada crescendo successivamente in guisa, che prenda i valori 1, 2, 3 &c. y dee ricevere i valori m^1, m^2, m^3, m^4 &c., onde il ramo ADV va discostandosi all' infinito dall'asse HL. Si vede finalmente, che se x divenga negativo, e vada pigliando i valori -1, -2, -3 &c. le ordinate y debbono prendere i valori $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m^2}$, $\frac{1}{m^3}$ &c., onde il ramo AO va continuamente accostandosi all'asse HL, senza toccarlo giammai.

902. *Teor.* Se cominciando dall'origine B si prendano tre ascisse BC, BP, BS, tali, che sia $BC=PS$, e si alzino ai punti B, C, P, S le ordinate BA, CD, PN, SV, si avrà sempre la proporzione $BA:CD::PN:SV$.

Dimostrazione. Sia l'ascissa $BC=p$, la parte $CP=q$, e sarà $PS=p$, onde $BA=m^0=1$, $DC=m^p$, $PN=m^{p+q}$, ed $SV=m^{2p+q}$. Ora i termini 1, m^p, m^{p+q}, m^{2p+q}, sono manifestamente in proporzione geometrica; dunque &c.

903. Se cerchisi la sottangente della logarimmica, è facile il vedere, che ella è costante, ed eguale al Modulo del sistema, rappresentato dalla logarimmica di cui si tratta. In effetto si ha $\frac{ydx}{dy}$ $=\frac{yAdy}{ydy}=A$.

904. Cerchiamo la rettificazione di un'arco dato.

 Si

Si ha $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dy}{y}\sqrt{(y^2+A^2)}$. Sia $\sqrt{(y^2+A^2)}$ $=z$, e si avrà $y^2=z^2-A^2$, e $\frac{dy}{y}=\frac{zdz}{z^2-A^2}$, come pure $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dz+\frac{A^2dz}{z^2-A^2}=dz+\frac{A}{2}\cdot\frac{dz}{z-A}$ $-\frac{A}{2}\cdot\frac{dz}{z+A}$. Integrando, (poichè $\frac{d\varphi}{\varphi}=log.\,\varphi$) si avrà $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=z+\frac{A}{2}\,log.\left(\frac{z-A}{z+A}\right)+C$ espressione di un arco qualunque della logarimmica, dove C esprime una costante, che poteva essere svanita nel differenziare, e che si determina facilmente.

905. Volendone la superficie, si ha $\int ydx=$ $\int Ady=Ay+C=Ay-A$, perchè quando $y=1$, lo spazio diventa nullo. Ma siccome questa formola presenta un valore indeterminato, per acquistarne un' idea più chiara giova dimostrare il seguente

906. *Teor.* La superficie logarimmica compresa fra un arco della curva, due ordinate, e l'asse, è sempre uguale al rettangolo formato dalla differenza delle ordinate, e la sottangente.

Dimostrazione ad assordo. Sieno le due ordinate, BA, DC, (Fig.a 67.) e sia l'ascissa CE' uguale alla sottangente. Compito il rettangolo $DCE'F$, e condotta per A, sommità dell'ordinata AB, la paral-

le-

lela AGH, dicò che lo spazio $BADC$ è uguale al rettangolo GF. Supponghiamo infatti, che non gli sia uguale, e che lo spazio minore, stia al maggiore come $CK{:}CD$. Sia PK parallela all'asse, che incontri la Logistica in P. Si abbassi l'ordinata PY, e si divida la CB in parti eguali BV, VX, XZ, ZC in maniera, che ciascuna di esse divenga $<CY$. Per i punti di sezione s'inalzino altrettante ordinate VS, XQ, ZO, e per la sommità di due di tali ordinate, fra di loro prossime, si conducano due parallele all'asse, che sieno, per esempio, QML, $STml$. Si avrà il rettangolo MI al rettangolo $mE'{::}Mm{:}mC{::}QT{:}SV{::}ST{:}VN<CE<ml$, e perciò $MI{:}mE'$ stà in ragione maggiore di $ST{:}ml$, o sia del rettangolo SX al rettangolo mE'; dunque $MI>SX$.

Collo stesso raziocinio si prova, che sta $MI{:}ME$ $::Mm{:}MC{::}QT{:}QX{::}ST{:}XN>ML$, e perciò stà $MI{:}ME$ in ragione minore di $ST{:}ML$, o sia di $RX{:}ME$. Dunque $MI<RX$. Ora l'area della Logistica $VSQX$ è parimente $>SX$, e $<RX$. Dunque la ragione di tal area ad MI è maggiore della ragione di SX à RX, cioè di $VS{:}XQ$, ò di $ZO:CD$, ed è minore dell'inversa $DC{:}OZ$. Ma questo avviene in qualunque area parziale della Logistica, relativamente al corrispondente rettangolo parziale di DH. Dunque stà tutta l'area $ABCD$, al rettangolo GF in ragione maggiore di $ZO{:}CD$, ed in ragione minore dell'inversa $CD{:}ZO$. Suppongasi adesso, che l'area suddetta sia minore del rettangolo GF, sarà dunque $CK(=CY){:}CZ$ maggiore della ragione di $ZO{:}CD$.

Se ella sia maggiore, sarà $CD{:}CK(=CY)$ minore della ragione di $CD{:}ZO$. Dunque in ambedue i casi dee risultare $PY>OZ$, il che è assordo.

 Dun-

Dunque l'area $ABCD$ è $= GF$.

907. Si vede, di qui, che se il punto A si allontani dall'ordinata VS infinitamente, l'area infinita della Logistica, compresa fra l'asse, il ramo infinito della curva, e l'ordinata CD, è uguale al rettangolo CF.

908. *Teor.* Se conducasi una tangente alla logarimmica, e dal punto del contatto si abbassi un' ordinata ortogonale sull'asse; il triangolo EDC, che ne risulta, è la metà dell'area formata dal ramo infinito della curva, l'asse, e l'ordinata al contatto.

Dimostrazione. Difatto il triangolo di cui parliamo è la metà del rettangolo CF.

909, *Teor.* Le aree comprese fra due ordinate, il ramo corrispondente della Logistica, e l'asse, stanno fra di loro, come le differenze delle ordinate.

Dimostrazione. Difatto le aree di cui parliamo, sono per il Teor. 906. eguali al rettangolo della differenza delle proprie ordinate nella sottangente; ma la sottangente è costante, dunque &c.

910. Si può dunque dividere una qualunque delle aree divisate in una ragione data, bastando dividere la differenza delle ordinate nella ragione proposta; dal punto di divisione condurre una parallela all'asse, e dal punto, nel quale vien da essa incontrato il perimetro logarimmico, abbassare un' ordinata sull'asse.

911. *Probl.* Date due rette, e una Logistica, trovare un numero qualunque di medie proporzionali fra le date rette.

Soluzione. Inalzata Mm normale all' asse della Logistica (Fig.ª 68.) si prendano in essa le parti Mf, Mb eguali alle rette date: per i punti f, b si si conducano due parallele all'asse, le quali incontreranno la Logistica in due punti F, H. Da questi si abbassino due ordinate FE, HG. Il semmento dell' asse EG si divida in tante parti più una, quante sono le medie proporzionali da trovarsi. Da ciascun punto di divisione si alzino delle ordinate, e saranno esse le medie richieste. Questo ne segue dalla natura della Logistica, perchè procedendo le ascisse in progressione arimmetica, debbon procedere le ordinate in progressione geometrica.

911 *Teor.* Il solido generato dalla rotazione dell' area $ABDC$, intorno all' asse BC (Fig.ª 67.) è uguale alla metà dell' anello cilindrico generato dalla rotazione del rettangolo GF intorno al medesimo asse.

Dimostrazione. Si divida il semmento BC in parti eguali, in guisa, che due di esse risultino minori di CY; e CZ ne contenga due, e sia $BV=VX$. La corda QA vada ad incontrar l'asse in n, e la parallela AG incontri QX in t.

Sarà il cilindro generato da EM, al cilindro generato da Em, come il circolo, che ha per raggio CM al circolo, che ha per raggio Cm, o sia come $CM^2:Cm^2$, ò come $XQ^2:VS^2$, ò finalmente (per essere XQ, VS, AB in proporzione continua) come $XQ:AB$. Dividendo pertanto si ha, che l'anello cilindrico generato da MI sta al cilindro generato da mE, come $Qt:BA$; ò come Bt, ò BX doppia di VX a Bn; ovvero in ragione minore, che il doppio di VX a $CE>Bn$; ò finalmente in ragione minore del doppio del cilindro generato da XS, al medemo cilindro generato da Em, e perciò l'anello solido MI è maggiore del doppio del cilindro SX. Col me-

medesimo raziocinio si prova, che il suddetto anello solido MI è minore del doppio del cilindro generato da RX. Da questo ne segue, che la ragione di esso al doppio del solido $VSQX$ sia maggiore della ragione del cilindro doppio di SX al cilindro doppio di RX, cioè generato da RX: o sia, della ragione di $VS^2:XQ^2$, o della ragione di $AB:XQ$, o finalmente di $ZO:CD$; e che sia minore della medesima ragione inversa. Il rimanente della dimostrazione procede come nel Teor. (*n. 906.*)

913. Si vede di quì, che il solido generato dall' area infinita della Logistica, determinata dalla CD; dee essere eguale alla metà del cilindro generato dal rettangolo CF intorno all'asse.

914. *Teor.* Se abbiasi (Fig.ª 67.) DE tangente della Logistica, il solido generato dall' infinito spazio compreso fra l'asse, la curva, e l'ordinata CD, stà al cono generato dalla rotazione del triangolo EDC::3:2.

Dimostrazione. Infatti il suddetto solido si è veduto, che stà al cilindro, di cui la base sia il circolo descritto da CD, e l'altezza sia CE, come 3:6. Ora il divisato cilindro stà al cono della medesima base, e della medesim'altezza, come 6:2. Dunque il solido logarimmico suddetto stà al cono generato dal triangolo EDC, come 3:2.

915. Per compimento di quest'articolo resta da trattarsi la celebre questione, agitata già da gran tempo: Se la Logistica possa aver due rami, dei quali uno sia posto dalla parte delle ordinate positive, ed uno dalla parte delle ordinate negative; vale a dire in sostanza: Se i logarimmi delle quantità negative sieno reali, o immaginarj.

Questa è una controversia, che fino dall' an-

anno 1712. cominciò ad agitarsi fra i due sommi Geometri Leibnitz, e Gio: Bernoulli. Il primo difendeva, che i logarimmi delle quantità negative sieno tutti immaginarj, ed il secondo pretendeva, che fossero eguali ai logarimmi delle quantità positive (si può consultar la lettera 190., e seguenti del loro commercio epistolare). Ciascuno di loro si mostrò eguale a se stesso nel difendere con tutta la forza del più sublime raziocinio il proprio sentimento, e la memorabil questione rimase indecisa. Successe nell' arringa il grand' Eulero, e negli Atti dell' Accademia di Berlino sostenne con nuovi argomenti il partito Leibniziano. Le di lui dimostrazioni vennero in seguito avvalorate egregiamente negli Atti dell' Acc. di Torino dal Ch. Cav. Daviet de Fonceneux con delle ragioni, e sue, e del profondissimo, de la Grange. Viene il d'Alembert ad esaminare nel 1.° , e 6.° *Tomo de suoi Opuscoli* le ragioni di que' grand' Uomini, e sebbene ricusi di entrar decisivamente nella questione, si mostra nondimeno parziale per la sentenza di Bernoulli. Gli risponde il Fonceneux nel Tomo seguente degli Atti di Torino, e quantunque talvolta ceda a M. d'Alembert, resta nondimeno costante nella propria opinione.

916. Fra i moderni Analisti non è stata minore la divisione di sentimento. Si può vedere fra le altre una Memoria del dottissimo P. Fontana inserita negli Atti della Società Italiana, dove con tre dimostrazioni stabilisce la sentenza di Leibnitz; e si può consultare un Opuscolo del Ch. P. Riccati, come pure un altro di Giordano Riccati, inseriti nel giornale dei Letterati di Modena, dove si rigetta assolutamente la sentenza di Leibnitz, e si dimostra quella di Bernoulli. Può finalmente osservarsi ciò, che hanno detto i Ch. Analisti Frisi, Paoli, e Ferroni.

L'istoria di questa controversia dee addimostrare quanto ella sia trascendente, e sublime. Noi crediamo di poterci dichiarare per la sentenza di Bernoulli, e passiamo a stabilire.

917. *Prop.* I logarimmi delle quantità negative sono reali, ed eguali a quelli delle quantità positive.

Dimostrazione. Si trasformi l'equazione della Logarimmica in maniera, che l'asse delle sue ascisse divenga ortogonale all' asse primitivo. In questa guisa le ascisse diverranno ordinate, e viceversa; e perciò l'equazione della Logarimmica prenderà la forma $e^{y} = Ax$.

Posta questa riduzione, qualora si dimostri, che sono possibili infiniti valori di e, i quali rendano la funzione e^{y} negativa, sarà provato, che la Logarimmica ha realmente due rami, uno positivo, e l'altro negativo, e perciò, che le quantità negative hanno i logarimmi reali, ed eguali a a quelli delle quantità positive.

Eccoci alla dimostrazione.

Si sa che $log.\, f.\overline{\dfrac{f+x}{f-x}} = 2A\left(\dfrac{x}{f}+\dfrac{x^3}{3f^3}+\dfrac{x^5}{5f^5}\&c.\right)$

Si ponga $f.\overline{\dfrac{f+x}{f-x}} = e$, essendo $log.e = f$, e si avrá ...

$$\frac{f}{2A}=\frac{e-f}{e+f}+{}_3\left(\frac{e-f}{e+f}\right)^3+{}_5\left(\frac{e-f}{e+f}\right)^5+{}_\infty\left(\frac{e-f}{e+f}\right)^\infty$$

Quest' equazione siccome infinita dee dare, (come si raccoglie dal Lemma II. *Trigon.*) infiniti valori per e, i quali essendo tutti, meno due, immaginarj (altrimenti si avrebbero diverse basi, e perciò differenti sistemi) somministrano infiniti valori negativi per e^{y}, e per conseguenza per x. Che questi valori poi formino un ramo continuo, si può dimostrare col Metodo che segue, il quale sebbene indiretto, non è però meno concludente, e sicuro.

918. Sieno le due Iperbole Apolloniane fra gli asintoti (Fig.ª 69.) QBL, qbl; le quali sieno per maggior semplicità equilatere. Si prendano ad arbitrio i due protonumeri CA, Ca, e perciò s' incomincino a contare gli spazj Logarimmici al di là de' punti A, a. Si conducano al di sotto di AB delle ordinate EF, $E'F'$ &c. e queste si prolunghino finchè sia $b\,GE=ABFE$; $bG'E'=ABF'E'$ &c. dove b è una costante indeterminata. In questa guisa si descriverà per punti il ramo di curva AP.

Siccome poi si è cominciato a contare gli spazj positivi al di sotto dell' ordinata AB, è chiaro che gli spazj posti al disopra di AB debbono esser negativi, e che l'ordinata HK dee per conseguenza esser negativa. Si prenda su di essa una porzione HI tale, che sia $b.HI=HKBA$, e lo stesso si pratichi relativamente alle altre ordinate; è manifesto che si verrà a descrivere il ramo AS, il quale passa per A, perchè ivi è $GE=o$. Quando HK giunga sopra CM, lo spazio $CMQBAC$ sarà infinito, e perciò la porzione dell' ordinata iperbolica, il di cui rettangolo in b sia eguale al medesimo, dovrà esser pure infinita, ed uguale all'asintoto CM; la curva PAS avrà dunque anch' essa per asintoto CM.

Se l' ordinata HK oltrepassi il punto C di una quantità minima qualunque, essa dovrà tagliare il ramo iperbolico lk, e con ciò produrre uno spazio $oeab$. Si prenda una parte et, di cui il rettangolo in b sia $=oeab$, e lo stesso ripetasi successivamente, finchè lo spazio $oeab$ diminuendo continuamente, e con ciò anche le rette et, hi &c. giunga il suddetto spazio ad essere uguale a zero. Si avrà in questo punto il passaggio del ramo sa per il punto a. L'ordinata ba si avanzi: giunta che sia per esempio in fe, si prenda un prolungamento fg, tale che $fg.b$ sia $=fbae$, e così fino all' infinito. Dico che le due curve PAS, pas descritte nel modo già divisato, sono due logarimmiche perfettamente simili, ed eguali: che hanno per conseguenza il medesimo protonumero, e la medesima sottangente. In effetto: si sa che gli spazj $ABFE$, $ABF'E'$ &c. sono in progressione arimmetica, mentre le ascisse AE, AE' &c. sono in progressione geometrica: Dunque anche i rettangoli bGE, $bG'E'$ &c. debbono essere in progressione arimmetica. e per conseguenza anche i prolungamenti GE, $G'E'$ &c. Le ascisse dunque $C\gamma$, $C\delta$, procedono in progressione arimmetica, mentre le ordinate $G\gamma$, $G'\delta$ &c. procedono in progressione geometrica. Per la stessa ragione i rettangoli $IH.b$, $H'I'.b$ &c. sono anch' essi in progressione arimrimmetica, mentre, CH, CH' sono in progressione geometrica; dunque $C\omega$, $C\gamma$ &c. sono i logarimmi di CA, I &c. Ecco dunque che la curva PAS è un ramo di Logarimmica, la quale, per ciò che si è veduto, ha per asintoto la retta CM. Lo stesso raziocinio prova, che la curva pas è parimente un ramo di Logarimmica. Che poi tali rami sieno perfettamente simili, ed eguali, si raccoglie da questo, che la legge della loro descrizione si è fatta dipendere dalla medesima quantità arbitraria b, che ha servito di Modulo: Dunque hanno la medesima sottangente; dunque sono eguali, e la Logarimmica ha due rami, uno positivo, ed uno negativo; dunque i numeri negativi hanno i logarimmi reali, ed eguali a quelli dei numeri positivi.

Dimostrazione 2.ª Sia E un punto qualunque dell' asintoto logarimmico (Fig.ª 68,): io dico che vi corrisponde sempre una doppia ordinata EF, ER, delle quali la seconda è negativa, ed eguale alla prima. Difatto sieno GE, EM uguali, e sieno condotte le ordinate GH, Mm. Si avrà $EF = +\sqrt{GH.Mm}$, ed EF, o $ER = -\sqrt{GH.Mm}$; dunque &c.; E nella guisa stessa, che nella Parabola per esser l'ordinata media proporzionale fra il parametro, e l'ascissa, è ugualmente positiva, e negativa.

Dimostrazione 3.ª Si sà che $log.f.\overline{\frac{f+x}{f-x}}$, posto ... $f>x$, è $= log. f + 2A\left(\frac{x}{f}+\frac{x^3}{3f^3}+\frac{x^5}{5f^5}+\frac{x^7}{7f^7} \text{ \&c.}\right)$ Se poi sia $f<x$, basta mutare i segni sotto e so-

pra

pra, e si avrà $log.-f.\overline{\frac{x+f}{x-f}} = log.-f + \ldots\ldots\ldots\ldots 2A\left(\frac{f}{x}+\frac{f^3}{3x^3}+\frac{f^5}{5x^5} \text{ \&c.}\right)$

Ciò posto, per ottenere il logarimmo di un numero qualunque x, si faccia $f\frac{(f+x)}{f-x} = z$, e si avrà $x = f\frac{(z-f)}{z+f}$, dove è chiaro che x è $< f$: si prevalga uno pertanto della prima serie, e si avrà $\frac{log.z}{2A} = log.f + \frac{x}{f} + \frac{x^3}{3f^3} +$ &c. Per ottenere il logarimmo di un numero $-z$, si ponga $f\frac{(f+x')}{f-x'} = -z$, dove x' è diverso da x, ed $= f\frac{(z+f)}{z-f}$, e perciò $<f$, s'impieghi la seconda serie, e si avrà $\frac{log.-z}{2A} = \ldots\ldots log.-f + \frac{f}{x'} + \frac{f^3}{3x'^3} + \frac{f^5}{5x'^5}$ &c. .... (*B*) Si moltiplichino insieme le due equazioni $x = f\frac{(z-f)}{z+f}$ e $x' = f\frac{(z+f)}{z-f}$, e si avrà $xx' = f^2$ quindi $x' = \frac{f^2}{x}$; questo valore si sostituisca nella serie (*B*), e si cangerà

gerà

gerà nella seguente $\frac{log. -z}{2 \ A} = log. -f + \frac{x}{f} + \frac{x^3}{3f^3}$

$+ \frac{x^5}{5f^5}$ &c. Si vede dunque che il valore di....

log.—*z* non differisce da quello di *log. z*, perchè si è veduto per mezzo della costruzione della Logarimmica, che il sistema del protonumero *f* si unisce in un sistema solo, e continuato col sistema del protonumero —*f*; onde $log. f = log. -f = 0$, ed in generale $log. z = log. -z$

Dimostrazione. 4.ª Dall' equazione trovata al *n.* 903., $\frac{dx}{dy} = \frac{A}{y}$ si deduca $dx = \frac{Ady}{y}$

In questa formola si faccia *y* negativa, e diverrà negativa anche *dy*: rimarrà per conseguenza $dx = \frac{A -dy}{-y} = \frac{Ady}{y}$, il che dimostra, che alla medesima ascissa corrisponde tanto l' ordinata negativa, quanto l' ordinata positiva, e che perciò le quantità negative hanno i medesimi logarimmi delle quantità positive.

Dimostrazione. 5.ª Le quantità negative differiscono dalle positive per un semplice rapporto: ma i logarimmi riguardano il quantitativo, e non i rapporti; dunque debbon essere i medesimi, tanto i logarimmi delle quantità negative, che quelli delle quantità positive.

Dimostrazione 6.ª E' certo che $(-a)^2$ è $= (+a)^2$, dunque $log. (-a)^2 = log. (+a)^2$, cioè $2. \ log. -a = 2 \ log. +a$: o sia $log. -a = log. +a$. *Il n'y a point*

point d' argument, dice qui M. d'Alembert (*pag.* 198. *Opusc. Math. T. I.*) *ni de calcul, quelque subtil qu' il puisse être, qui soit capable de renverser un proposition si simple*.

919. Passiamo a veder le prove della sentenza contraria 1.° Oppongono i Leibniziani primieramente: Che se i logarimmi delle quantità negative fossero reali, anche quelli delle quantità immaginarie dovrebbero esser reali, perchè $log. (-a)^{\frac{m}{2n}} = \frac{m}{2n} \ log. (-a)$, ma questo è assordo; dunque i logarimmi delle quantità negative &c. Questa difficoltà impose assai à Gio. Bernoulli, ma pure non è difficile il dileguarla.

Primieramente rispondo che non si può asserire dai SS. Leibniziani, che i logarimmi delle quantità immaginarie sieno impossibili, senza commettere una petizione di principio, mentre ciò dipende dall'impossibilità de' logarimmi delle quantità negative, la quale si dee provare, e non supporre. Quindi ne segue, che sebbene i logarimmi delle quantità immaginarie fossero impossibili, nondimeno, qualora non se ne adduca una positiva dimostrazione, indipendente dalla possibilità de' logarimmi in questione, ne segue dissi, che non si possa concludere cosa alcuna contro la possibilità de'medesimi. Oltre di questo si risponde direttamente, con provare che i logarimmi delle quantità immaginarie sono assolutamente possibili.

Dimostrazione 1.° Si è veduto che nell' equazione $e^y = x$ per qualunque valor reale di *y*, si hanno no infiniti valori immaginarj per e^y, ed in conseguenza per x; ma y esprime i logarimmi di x; dunque una quantità qualunque immaginaria x, può avere dei logarimmi reali.

Dimostrazione 2.ª Si cerchi (Fig.ª68.) una media proporzionale fra GH, e la negativa ER; è certo, che essa dee risultare immaginaria; nondimeno questa media ha per logarimmo $GO=\frac{GE}{2}$, quantità reale.

2.° Oppongono i Leibniziani, che in virtù del rapporto di Gio. Bernoullj (vedasi *n.* 491.) stà la circonferenza circolare al diametro, come $log.-1$ a $\sqrt{-1}$; Ma se $log.-1$ sia una quantità reale, un tal rapporto è nullo; dunque $log.-1$ dee essere una quantità immaginaria.

Si risponde, che per salvare la sussistenza dell' addotto rapporto, basta che $log.-1$ poss' avere un sol valore immaginario; ora $log.-1$ di questi valori ne ha infiniti, dunque &c.

3.° Leibnitz objetta, che la logarimmica non può avere ordinate negative, perchè in essa le ordinate positive non divengono mai zero.

Si risponde, che l'Iperbola $y^2=\frac{1}{x}$ ha due rami eguali, e simili da ambe le parti dell' asse, senza che y divenga mai uguale a zero. Senza di questo però si sà, che una funzione può passare dal positivo al negativo con passare per ∞, come succede nella funzione $\frac{a}{b-x}$.

 4.°

4.° Una 4.ª difficoltà, che è l'Achille di Leibnitz, e di Fonceneux è la seguente.

Sieno le due serie

$$\&c.\ \frac{1}{8}f,\ \frac{1}{4}f,\ \frac{1}{2}f,\ f,\ 2f,\ 4f,\ 8f\ \&c,$$

$$\&c.\ -3f,\ -2f,\ -f,\ 0,\ f,\ 2f,\ 3f\ \&c.$$

la prima delle quali è geometrica, e la seconda è arimmetica. Si vede, che ciascun termine della seconda è il logarimmo del termine corrispondente della prima. Se la serie geometrica s'inoltri quanto si vuole dalla parte sinistra, mai non si avranno termini negativi; dunque le quantità negative non possono aver Logarimmi reali; perchè se ciò fosse, si dovrebbero incontrare dei termini negativi nella prima serie, com' è manifesto.

Si risponde, che sebbene la prima serie addotta non potesse aver termini negativi, niente si potrebbe inferire contro la realità de' logarimmi in questione, perchè detta realità essendo già dimostrata, non può venir distrutta da un' apparente contradizione, dedotta dall' imperfezione di una serie, la quale non possa rappresentare le quantità negative.

Si risponde in 2.° luogo, che l' addotta serie geometrica si può continuare a sinistra nel modo seguente $\frac{1}{8.\infty}.f,\ \frac{1}{4.\infty}.f,\ \frac{1}{2.\infty}.f,\ \frac{1}{\infty}.f,\ \frac{2}{\infty}.f,\ \frac{4}{\infty}.f\ldots\ldots$ $\frac{1}{8}.f,\ \frac{1}{4}.f,\ \frac{1}{2}f,\ f,\ 2f$ &c. dove $\frac{1}{2.\infty}$ è $<\frac{1}{\infty}<0$. e perciò negativo, e così $\frac{1}{4.\infty}$, $\frac{1}{8.\infty}$ &c. Tanto

è lunè lungi dunque, che la serie opposta sia contraria alla nostra proposizione, che anzi mirabilmente la favorisce.

5.° Ma vediamo il più valido argomento dell'Eulero contro la nostra sentenza.

Egli parte dalla supposizione, che $log.(1+\omega)^n = n\omega$ rappresenti tutti i logarimmi, e mediante questa formola (*Vedasi la di lui Memoria su i logarimmi delle quantità negative. Berl. an. 1769.*) perviene all' equazione $1+\frac{y}{n}=cos.\left(\frac{2\lambda-1}{n}\right)\Pi \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots sen\left(\frac{2\lambda-1}{n}\right)\Pi\sqrt{-1}$ in cui $\Pi=180.°$, $y=log.-1$, e λ è un numero intero qualunque. Questa secondo lui somministra il risultato generale $y=\pm(2\lambda-1)\Pi\sqrt{-1}$, da cui conclude che $log.-1$ è sempre immaginario, e che perciò tali sono tutti i logarimmi delle quantità negative.

Io rispondo 1.° Che l'ipotesi dall'Eulero istituita, cioè, che la formola $log.(1+\omega)^n=n\omega$ rappresenti tutti i logarimmi, non è legittima, e che anzi contiene una petizione di principio. La ragione di questo è che supponendo, com'egli fà, che sia $\omega=\frac{1}{\infty}$, ed $n=\infty$, la formola $(1+\omega)^n$ non può rappresentare, che le sole quantità positive, e per conseguenza, dicendo, che $log.(1+\omega)^n=n\omega$ rappresenti tutti i logarimmi, viene ad affermare tacitamente, che non esistano i logarimmi delle quantità negative, vale a dire, che sieno immaginarj.

Rispondo 2.° Che i logarimmi delle quantità negative avendo infiniti valori immaginarj, non è me-

meraviglia, che si trovino delle formole, che ne confermino l'esistenza, (e questa è una risposta generale per cui si distruggono infinite obiezioni, dedotte da particolari formole a bella posta preparate mediante gli opportuni artifizi dell'Analisi, del qual genere per esempio, è la formola Trigonometrica $log.-1=\pm(2m+1)c\sqrt{-1}$, come pure le formole differenziali investigate dal Ch. P. Fontana (luogo cit.) ed altre molte.

Rispondo 3.° Che l'equazione addotta $1-\frac{y}{n}=$&c. non solo porge il risultato $y=\pm(2\lambda-1)\Pi\sqrt{-1}$, ma ben anche $y=0$, poichè fatto $y=0$, ed $n=\infty$ nell' equazione suddetta $1+\frac{y}{n}=$ &c si ha $1=1$.

Inoltre, se facciasi $\lambda=n=\infty$, l'equazione addotta diviene $1+\frac{y}{n}=1$, d'onde si ha $y=0$. Ecco pertanto, che l'equazione dell'Eulero, non dà solamente $log.-1$ immaginario, ma dà pur anche $log.-1=0$, il che poi conferma quanto abbiamo esposto di sopra.

Terminiamo finalmente con osservare, che M. Euler non dà una risposta sodisfacente alla nostra dimostrazione 6.ª, con dire, che la formola $2log.a=2log.-a$ esprime soltanto, che la somma di due differenti logarimmi di $+a$ è uguale alla somma di due differenti logarimmi di $-a$.

In effetto, se non vogliasi rinunziare a tutte le più

più legittime denominazioni analitiche ; $2\,log.\,a = 2\,log.\!-\!a$ significa, che il doppio di $log.a$ è uguale al doppio di $log.\!-\!a$. Ma per aggiungere anche maggior forza alla nostra prova, sieno 1, e a^2 due numeri positivi, e reali, che abbiano per logarimmi respettivi o, p. E' chiaro, che la media proporzionale fra 1, e a^2 deve essere ugualmente $+a$, e $-a$, e che il logarimmo corrispondente risulta

$$= \frac{p}{2}\text{; dunque } \frac{p}{2} = log.+a\text{, e } \frac{p}{2} = log.-a\text{.}$$

Questo è quanto si richiedeva per trattare con una sufficiente ampiezza una questione, che merita di esser conosciuta assolutamente dal giovane analista. Non sarà, che bene consultare i fonti indicati da noi su questa materia, cioè i Tomi 1.°, e *6.° degli Opuscoli di M.* d'Alembert, la Memoria dell'Eulero; e quelle del Cav. Daviets de Fonceneux, per approfondar sempre più le ragioni del partito Bernoulliano.

ARTICOLO II.

Della Cicloide.

921. Se un circolo *ML* (fig.ª 70) vada rotando sopra una retta *Aa*, fintanto che il punto, che innanzi alla rotazione toccava la retta in *A*, giunga a toccarla di nuovo in *a*, dal punto *A* verrà descritta una curva la quale vien appellata Cicloide, ò Trocoide. Questa poi dicesi allungata, se il circolo genitore oltre il moto di rotazione, abbia

 un

un moto di traslazione in senso contrario, e dicesi accorciata, se detto moto di traslazione cospiri col moto di rotazione.

922 La retta *Aa* è la base della Cicloide; la perpendicolare *ED* alzatavi sulla metà è il suo asse, e le corde *Pp* parallele alla base ne sono le ordinate. Intorno a queste si dimostra.

923. *Teor.* Qualunque ordinata vien divisa in mezzo dall'asse *ED*.

Dimostrazione. Sia *Pp* un' ordinata, e si consideri il circolo genitore nelle due situazioni *LPN*, *lpn*. Siccome la base *Aa* è uguale alla circonferenza del circolo suddetto, e perciò una qualunque sua porzione è uguale all'arco respettivo che l'ha percorsa, ne segue che sia $AL=PL$, ed $al=pl$. Dai punti di contatto L, l s' inalzino due perpendicolari, che saranno due diametri. Risulterà $PM=PL$, e $pm=pl$; perciò $LE=PM$, $lE=pm$, vale a dire $LE=lE$; dunque in verità del parallelismo $NO=On$, ed aggiunto PN da una parte, e $pn=PN$ dall'altra, si avrà finalmente $PO=pO$.

924 *Teor.* Se conducasi un' ordinata qualunque, che incontri il circolo genitore posto in *ED*, il suo semmento *PR* è sempre uguale all' arco *RD*.

Dimostrazione. Oltre il circolo verticale *ERD* s'immagini un circolo genitore posto in modo, che il suo punto generante cada sull' intersezione *P* dell'ordinata *Pp*; sarà $OR=PN$, ed aggiunto RN, sarà $PR=ON$. Ma $ON=EL=PM=RD$; dunque $PR=RD$.

925. Posto questo cerchiamo l'equazione caratteristica della Cicloide.

Siccome si è veduto che PR è $=arc.RD$, e poichè si ha $RO=sen.\,arc.RD$, detta $PO=y$, $arc.RD=u$, dee aversi $y=u+sen.\,u$, equazione cercata.

926.

926. Per renderla più generale, sifaccia $PR=\frac{b}{a}u$ il che conviene alla Cicloide ordinaria, ò allungata, ò acccorciata; secondo che $b=a$, ò $>a$, ò$<a$. Con questo l' equazione generalissima della Cicloide sarà $y=\frac{b}{a}u+sen.u$,

927. *Probl.* Condurre una tangente ad un punto dato della Cicloide.

Soluzione. Sia (fig.ª 71.) l' arco infinitesimo Mm, l' ordinata Mq, ed Mr parallela ad OT tangente nel punto O della circonferenza del circolo genitore. Con questo si ha $MO=\frac{b}{a}BIO$, $mo=\frac{b}{a}BIo$; laonde $mr=\frac{b}{a}Oo$; Inoltre per i triangoli simili MOT, mrM si ha la proporzione $mr:Mr::MO:OT$

$$=\frac{MO.Mr}{\frac{b}{a}Oo}=\frac{a}{b}MO=BIO.$$

Si prenda pertanto sulla tangente del circolo genitore la parte $OT=BIO$, e la retta condotta per i punti M, T sarà la tangente richiesta.

928. Per ottenere una costruzione più semplice si osservi, che essendo $BIO=OT=MO$, e l'angolo $BOP=TOB$, ne risulta $BOP=TMO$, e perciò la tangente MT è parallela alla corda corrispondente OB del circolo genitore. Dunque per avere una tangente a un punto dato M, basta da esso condurre una parallela alla corda corrispondente BO.

929. *Teor.* Un arco Cicloidale qualunque è uguale al

al doppio della corda che sottende l' arco BO, tagliato dall' ordinata ortogonale, che determina l'arco Cicloidale, nel circolo genitore posto al vertice D.

Dimostrazione. Sia MP l' ordinata $=y$, $BP=x$, e $BC=a$; sarà $y=arcBO+\sqrt{(ax-x^2)}$. Dunque pigliando il differenziale, a motivo che d. $BO=\frac{1}{2}a\frac{d.sen.BO}{Cos.BO}$

$$=(n.580.)\frac{a}{a-2x}d.\sqrt{(ax-x^2)}=\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-x^2}}$$, si avrà

$$dy=\frac{(a-x)\ dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}=dx\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$$; si faccia il quadrato dell'equazione $dy=dx\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$, si trasponga, e si estragga la radice; si otterrà $\sqrt{(dy^2+dx^2)}=dx\sqrt{\frac{a}{x}}$, dalla quale, integrando ne proviene

$BM=2\sqrt{ax}$. Ma la corda $BO=\sqrt{BP.BC}=\sqrt{ax}$;... dunque &c. Dunque il perimetro Cicloidale è quadruplo del diametro del circolo genitore.

630. *Probl.* Tagliare un arco di Cicloide in una data ragione,

Soluz. Sia Pp l'arco proposto (Fig.ª 72.). Si conducano le PR, pr, parallele alla base, finchè incontrino il circolo generante, e le corde DR. Dr'. Dalla corda maggiore DR, si tolga la minore, onde sia $DR-Dr=DR-DM=MR$. Si divida la MR in O, nella ragione data; si applichi la corda $DK=DO$, e si conduca GK parallela alla base, e l' arco Pp verrà tagliato in G, nella data ragione. Difatfatto, gli archi Gp, GP sono doppi delle rette MO, OR, e perciò nella stessa ragione in cui sono esse.

931. *Probl.* Determinare il raggio di curvatura della Cicloide.

Soluzione. Dall' equazione $dy=dx\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$, si deduce primieramente $d^2y=\frac{-adx^2}{2x\sqrt{(ax-x^2)}}$; dipoi si ha $dx^2+dy^2=\frac{adx^2}{x}$. Questi valori si pongano nella formola $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}$. e si avrá MC............ $=2\sqrt{a(a-x)}=2LE$ (Fig.ª 73).

931 Da questa formola si raccoglie che nell' origine A, essendo $x=a$, il raggio è nullo, e che nel vertice B, essendo $x=0$ il raggio è $=2a=2ED$.

932. *Teor.* La curva di evoluzione della Cicloide è un' altra Cicloide.

Dimostrazione. Sia (fig.ª 73) un filo perfettamente flessibile IED, avvolto sopra una delle Cicloidi IMA, IQB. Da qualunque punto M della prima Cicloide si conduca MO parallela alle base HI; la corda AO, ed MN ad essa parallela, che (n.928) risulterà tangente della cicloide in M; Dal punto E preso nella base AB della Cicloide ADB, generata dal circolo DLE, uguale al circolo AOH, si conduca la corda EL parallela alla corda AO, e dal punto R la RL parallela alla base AB, finchè incontri la tangente in P. Poichè gli angoli alterni interni OAE, AEL sono eguali, debbon esser eguali i loro complementi LED, OAH, e perciò gli archi DL, HO; siccome poi $AOH=AE$, e l' arco $AO=OM=AN$, anche l'arco OH, e perciò DL sarà $=NE=LP=ar.DL$; dunque il punto P è nel perimetro della Cicloide ADB.

Inoltre le corde EL, AO sono eguali; e perciò si ha $PN=NM$, e $PM=2MN=2AO=arc.MA$. Ora il filo nello svolgersi ha sempre una posizione tangenziale, e la sua parte già svolta eguaglia l'arco MA che ricuopriva; dunque il filo si dee confondere colla retta MP, e il suo estremo P dee nell' evoluzione descriver la semicicloide APD. Si proverà nel modo stesso, che ripiegandosi il filo sulla Cicloide BQI, dee generare la semicloide DB.

934 Per mezzo della Cicloide si può rettificare, e quadrare il circolo, e si può dividere un angolo in qualunque data ragione.

934. Per ottenere la rettificazione, si prenda un arco DL dal vertice nel circolo genitore, uguale all' arco dato, e si conduca per L, la LP parallela alla base, fino alla circonferenza cicloidale. Si prenda una retta, che stia a questa LP come il diametro del circolo a cui appartiene l'arco dato, all'asse ED; La retta così trovata, sarà eguale all'arco proposto. Dopo di questo, è facile a sciogliersi il problema inverso.

935. Per la quadratura di un circolo dato, si prenda una retta eguale alla semicirconferenza; fra questa, ed il raggio si trovi una media proporzionale; ed il suo quadrato sarà eguale al circolo.

936. La divisione di un angolo si ottiene con egual facilità; Si prenda una retta eguale all' arco, che lo misura; questa si divida nella ragione data; si prenda nell'arco una porzione uguale ad uno de' semmenti, e per il punto, che lo determina, e per il

il vertice dell' angolo si conduca una retta; essa dividerà l'angolo nella ragione data.

937. *Teor.* L'area Cicloidale è tripla del Circolo genitore.

Dimostrazione. Sia BD (Fig.^a 71.) perpendicolare all'asse BC, e presa su di essa la porzione infinitesima QQ', si conducano QM, $Q'm$ parallele a BC, prolungando la QM in q, onde si abbia il triangolo mMq simile al triangolo BOP, e condotta mp parallela all'ordinata MP, si avrà $mq:Mq::OP:PB$; ovvero $Q'Q:Pp::OP:PB$; dunque $Q'Q.PB=Pp.OP$. Sia $BQ=x$, e $QM=y$, come pure $BP=u$, e $OP=z$, e si avrà $ydx=zdu$, perchè Pp si può riguardare giustamente come il differenziale di BP. Dunque $\int ydx=\int zdu$, cioè lo spazio BQM è uguale allo spazio $BIOP$, e per conseguenza tutto lo spazio $BDAM$ è uguale al semicircolo BOC. Ora il rettangolo BA è quadruplo del semicircolo suddetto BOC. Dunque l'area cicloidale $BMAC$ è tripla del semicircolo genitore, e perciò tutta l'area &c. &c.

938. E' degna di esser osservata la relazione speciosa, che sussiste fra la Cicloide, ed il Circolo genitore. Essa è: Che l'asse della Cicloide è uguale al diametro del Circolo suddetto: che la base è uguale alla sua circonferenza: il perimetro al quadruplo del diametro; e l'area al triplo dell'area.

939. *Scol.* Varie sono le specie di Cicloide, che per semplice erudizione giova qui accennare; non essendo esse di concludente vantaggio, sarebbe inutile un prolisso dettaglio.

1.° Se il punto generante sia posto fuori del circolo genitore, si ha la Cicloide contratta: se esso sia dentro del suddetto circolo si ha la Cicloide protratta.

2.° Se il circolo genitore si rivolga sopra di un altro circolo si ha un'Epicicloide. Se poi la curva sù cui fa la sua rotazione il suddetto circolo, sia una curva qualunque, la curva descritta dal punto generante, si dirà pure del genere Cicloidale. E' questo un genere di Cicloide, che ne comprende infinite specie. Si consulti sù di questo, ciò che è stato esposto da M. de la Hire negli Atti dell'Acc. delle Scienze all'an. 1706., e ciò, che dopo di lui ha detto sulla stessa materia, con più generali vedute, il sagacissimo Nicole an. 1707.

ARTICOLO III.

Della Coclea.

950. Sull'estremità di una data retta AB (Fig.^a 74.) insista una perpendicolare indefinita BH, e suppongasi, che il punto B riceva istantaneamente un moto composto di rotazione, intorno alla circonferenza QMB, descritta col raggio AB, e di elevazione verticale, lungo la retta BH. Posti questi due moti equabili, e dotati di egual velocità, la curva descritta dal punto B, è quella, che si appella Coclea. Per formarsene un'idea più chiara, suppongasi, che il punto B sia pervenuto in N. In virtù delle condizioni stabilite, dee aversi l'arco BD, che sarebbe stato descritto dal moto circolare, uguale alla normale DN, che sarebbe stata descritta dal moto verticale. Con questa sola riflessione ben

ben si concepisce l' andamento della curva di cui trattiamo, espressa dalla Fig.ª $BNNT$, che è manifestamente una curva meccanica, e che può facilmente descriversi per punti.

941. Per acquistare un' idea anche più chiara della Coclea si osservi, che quando il punto B col moto di rotazione abbia percorsa la circonferenza QMB, il medesimo punto in virtù del moto verticale, e perciò anche in virtù del moto composto, dee aver percorsa la BT; onde la coclea dee essere $BNNT$, essendo BT eguale alla circonferenza. Proseguendo B il suo moto composto, si viene à generare una seconda Coclea, continua colla prima, cosicchè se il punto B, col solo moto di rotazione percorra un arco eguale BD, la coclea dee trovarsi in G, e così in seguito fino all'infinito.

Questa curva ha molto di analogia colla spirale di Archimede, di cui parleremo in appresso; v'è solo questa differenza, che la Spirale vien descritta nel piano del circolo a cui appartiene il raggio genitore AB, e la coclea vien generata lungo la convessità del cilindro retto, insistente sul circolo suddetto.

942. Cerchiamo di rettificarla.

Sia un arco dato $BD=z$: si prenda sù di esso, contando dal punto B, una parte infinitesima $BF=dz$, e sarà l'arco infinitesimo BO, determinato dalla normale FO, $=\sqrt{2dz^2}=dz\sqrt{2}$, ed il suo integrale $z\sqrt{2}=bN$, dove non rimane, che da sostituire il valore di z. Sia z=circ.ª$=c$, e sarà il perimetro intero della Coclea $p=c\sqrt{2}$, cioè medio proporzionale fra il doppio della circonferenza data, e la circonferenza stessa.

943.

943. Lo stesso vale per le Coclee successive, cosicchè per la rettificazione delle Coclee susseguenti, si avrà la formola $c\sqrt{2}+c\sqrt{2}+c\sqrt{2}$ &c.

Passiamo ad un'altra specie di Coclea.

944. Sia il circolo $BQDC$. Sull'estremo B del suo raggio insista un'indefinita normale BH, posta nel piano del Circolo (Fig.ª 75.). Cominci a muoversi il punto B con un moto composto di rotazione per la circonferenza, e di projezione per la tangente BH, e sieno questi due moti egualmente veloci, ed equabili. La curva $BFXNP$ descritta in questa guisa, è una Coclea piana, e dotata delle medesime proprietà della Coclea ascendente.

945. Essa può descriversi per punti. Ad un arco dato BC si conduca una tangente CN. Si faccia questa eguale all'arco BC, e il punto N sarà un punto della Coclea.

Passiamo a cercarne la superficie.

946. Si conduca da un punto qualunque N una retta NA al centro del circolo, e ad essa un'altra nA infinitamente vicina, che tagli il circolo in i, mentre AN lo taglia in I. Si conducano NQ', IP normali in P, e Q', ad An, e sia NC tangente del circolo. Si congiungano i punti A, C colla retta AC; e sia condotta un'altra tangente nc al punto c, la quale risulterà vicinissima all'altra NC. Sarà Cc il differenziale dell'arco BC, e l'angolo cAC il differenziale dell'angolo CAB. Sarà parimente Ii il differenziale dell'arco BI, e l'angolo IAi, il differenziale dell' angolo IAB. Sieno gli archi variabili BC, BI &c. eguali ad x; sarà $CN=x$, e posta $AB=a$, sarà $AN=\sqrt{(a^2+x^2)}$; Dipoi $iI=dx=IP$.

Ma

Ma $AI:IP :: AN:NQ'$, dunque $NQ' = \frac{dx}{a}\sqrt{a^2+x^2}$. Ma l'elemento della Coclea è ANn, o sia ANQ'; ed $ANQ' = \frac{AN.NQ'}{2} = \frac{dx}{2a}(a^2+x^2) = \frac{a^2\,dx}{2a} + \frac{x^2dx}{2a}$, di cui l'integrale è $\frac{ax}{2} + \frac{x^3}{6a}$. Questa è la formola per cui dato x si ottiene in qualunque caso l'area della Coclea. Se $x=c$, la suddetta area diviene $\frac{3a^2c+c^3}{6a}$; e da questa sottratta l'area del circolo $\frac{ac}{2}$, si ha l'area della Coclea formata da una sola rotazione $= \frac{c^3}{6a}$ che è manifestamente una quarta proporzionale dopo $6a$, c, e c^2.

Se facciasi una seconda rivoluzione sarà la tangente $CNG=c+x$, ed $AG=\sqrt{(c^2+2cx+x^2+a^2)}$, ed il rimanente come sopra. In questa maniera si trova l'area intera contando dal punto B, e tolta quella del circolo, $= \frac{7c^3}{6a}$, e tolta anche l'area della prima Coclea, $= \frac{c^3}{a}$, cioè sestupla della prima Coclea.

946. Diamo compimento a questo trattato col metodo di condurre una tangente ad un punto dato qualunque N della Coclea piana. Posto il tutto come sopra, sia NE la tangente, ed AE normale sopra di AN, che incontri NE in E, a motivo che l'an-

l'angolo ANE è acuto, e oltre di questo sia NQ' perpendicolare in Q'; si vede che $nQ'=d.AN$ ...... $= d\sqrt{(a^2+x^2)} = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, e $Q'N = \frac{dx}{a}\sqrt{(a^2+x^2)}$ (n. antec.)

I triangoli $nQ'N$, ANE sono simili, perchè gli angoli $nQ'N$, NAE sono retti, e l'angolo AEN è uguale nel limite all'angolo NnQ'. Dunque $nQ' : NQ' :: NA : AE$, cioè $\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}} : \frac{dx}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ :: ...... $\sqrt{(a^2+x^2)} : AE = \frac{(a^2+x^2)\sqrt{(a^2+x^2)}}{ax}$. Con questo si sa come condurre la tangente in qualunque caso.

ARTICOLO IV.

Della Concoide.

948. Data una retta CH (Fig.ª 76), se da un punto qualunque B preso fuori di essa, conducansi delle rette BPM, BAD &c. tali che le parti PM, AD &c. sieno eguali, la curva determinata così dagli infiniti punti M, D &c. è la Concoide. Il punto B è il suo polo, e CH la direttrice.

949. E' facile a vedersi, che due sono i rami della Concoide, uno superiore, e l'altro inferiore alla direttrice, poichè pigliando le parti Pn, Ad &c. eguali, viene a prodursi la Concoide $pmdm'$.

950. Considerando adesso la costruzione, in virtù della quale vien generata la Concoide, si raccoglie che CH è il suo asintoto, e che la normale dD ne è il diametro di massima ampiezza.

951.

951. Cerchiamone l' equazione. Sia QM perpendicolare ad AQ, e sia $AD=PM=a$, $AB=b$, $QM=y$, e $AQ=x$, si avrà $PQ:QM::AP:AB$, cioè......

$\sqrt{a^2-y^2}:y::x-\sqrt{(a^2-y^2)}:b$: Quindi si deriva $yx=(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$, e tolti i radicali $y^4 \pm 2by^3 + (b^2-a^2+x^2)y^2 \mp 2a^2by=a^2b^2$ equazione algebrica, la quale comprende ambedue le Concoidi, superiore, ed inferiore.

952. Volendo descriver la Concoide con un moto continuo, abbiasi una riga BDM (Fig.ª 77.) mobile intorno al punto B, ed un circolo di cui il raggio DM sia $=a$; si faccia muovere orizzontalmente il circolo, in modo, che il suo centro D rimanga sempre nella direttrice, e la riga passi sempre per il suo centro. I punti successivi determinati dall'intersezione della riga, e della circonferenza del circolo formano la Concoide...

953 Sostituendo al circolo dell' altre curve, si avranno con questo metodo delle curve del genere Concoidale. Supponghiamo che al circolo siasi sostituita una curva data qualunque QN, (Fig.ª 78.) e che siasi preso un punto fisso P, per cui far passare la riga mobile, e cerchiamo l' equazione della curva che ne dee risultare.

Dal polo B si abbassi BA perpendicolare sulla direttrice CH, e dal punto N l' ordinata NM: sia $AM=x$, $NM=y$, $QM=z$, $QP=m$, ed $AB=n$: sarà...... $MP(z-m):NM(y)::AP(x+m-z):AB(n)$; dunque $z=m+\frac{xy}{a+y}$; Nell' equazione della curva data QN, si sostituisca questo valore di z, e si avrà un' equazione fra x, y, cioè fra l'ordinata della Conc-

coide richiesta, e la sua ascissa, onde se ne avrà l' equazione che si cercava. Non sarà difficile applicar questo metodo generale ai diversi casi particolari.

ARTICOLO V.

Della Quadratrice.

954. Se una tangente del circolo, BV (Fig.ª 79.) si muova parallelamente a se stessa, e con moto uniforme, lungo il diametro BA, e nel punto stesso in cui comincia a muoversi, il raggio CB cominci a muoversi anch' esso, con moto uniforme intorno al centro C, verso S, e con una velocità, che stia a quella della tangente, come il quadrante BOS al raggio BC; dall' intersezione di queste due linee, ne nascerà una curva, la prima volta osservata da Dinostrato, e che dicesi perciò la Quadratrice di Dinostrato.

955 Dalla descrizione di questa curva ne segue I.° che quando la tangente BV è giunta sopra il raggio CS, anche il raggio CB debba esservi giunto. 2.° Che sia $BQ:BP::BC:BS$, cioè, detta $BQ=x$, $QO=y$, $BP=z$ $FC=a$, e $BS=90.°=b$, che sia $x:z::a:b$, e perciò $z=\frac{bx}{a}$. Ne segue 3.° Che sia $CQ:QO::CB:BV$, ovvero $\overline{a-x}:y::a:tang.z$, onde y ....

$$=\left(\frac{a-x}{a}\right)tang.z-\frac{a-x}{a}\,tang.\frac{bx}{a},$$ e questa è l'equazione della Quadratrice.

956. Volendola trasportare al centro, si avrà $CQ=x$, e la proporzione $x:z::a:b$ diverrà $a-x:z::a:b$,

$::a:b$; e perciò $z = \frac{ab - bx}{a} = b - \frac{bx}{a}$, e non si avrà che da sostituire nell' equazione precedente questo valore di z. Con questo l' equazione richiesta è $y = \frac{x}{a} tang. \left(b - \frac{bx}{a} \right) = \frac{x}{a} cotang. \frac{bx}{a}$.... ($n$. 460. III.)

$$= \frac{x \left(a - \frac{b^2 x^2}{2 a^3} + \frac{b^4 x^4}{2.3.4 a^7} - \&c. \right)}{\frac{bx}{a} - \frac{b^3 x^3}{2.3 a^5} + \frac{b^5 x^5}{2.3.4.5 a^9} - \&c.} \ldots\ldots$$

$$= \frac{a - \frac{b^2 x^2}{2 a^3} + \frac{b^4 x^4}{2.3.4.a^7} - \&c.}{\frac{b}{a} - \frac{b^3 x^2}{2.3.a^5} + \frac{b^5 x^4}{2.3.4.5.a^9} \&c.}$$ serie dalla quale facendo $x=0$, si ha $= \frac{a^2}{b} = CL =$ all' asse minore.

957. Di qui si vede che potendo determinare la CL, si avrebbe immediatamente il valore di b, ò sia la lunghezza di un quadrante di circolo, di cui si conoscesse il raggio; nulla dunque mancherebbe per averne la quadratura. E' per questo, che la curva di cui trattiamo ebbe il nome di Quadratrice: Ella però non ha corrisposto peranche al suo nome, ed invano gli Analisti aspettano dalla medesima la quadratura del circolo.

4.° Ne segue finalmente dalla descrizione della Quadratrice, che se la BV, dopo esser giunta sopra il raggio CS, prosegua il suo moto insieme col

col raggio CB, dee generarsi un altro ramo della Quadratrice Lg.

958 *Teor.* Se prolungasi il diametro BA da ambe le parti, finchè sia $HB=H'A=a$, ed agli estremi H, H' si abbassino due perpendicolari infinite HI, $H'I'$, queste risultano asintoti dei due rami infiniti ZBG, LAg.

Dimostrazione. Nell' equazione $y = \left(\frac{a-x}{a} \right) \ldots tang. \frac{bx}{a}$ si ponga x negativa, e si avrà y .... $= \left(\frac{a+x}{a} \right) tang. - \frac{bx}{a} = - \left(\frac{a+x}{a} \right) tang. \frac{bx}{a}$, ... equazione, che appartiene alle coordinate qualunque BD, DG. In quest' equazione si ponga $y = \infty$, e dovrà essere $tang. \frac{bx}{a} = \infty$; ma $tang. b = \infty$; dunque $x=a$; dunque &c.

959. *Teor.* Se da un punto qualunque O della Quadratrice si abbassi un' ordinata sull' asse minore LC, e dal punto stesso un' ordinata sul diametro BA, risulta sempre l' arco $GL=QC$. *Dimostrazione*. Si ha $CE:EG::BC:BP$, vale a dire $\frac{a^2}{b} : EG :: a:z:: a \frac{bx}{a}$; dunque $EG = x = BQ$; ma il quadrante $EL=BC$, in virtù della proporzione $\frac{a^2}{b} : LGE :: a:b$; dunque $QC=GL$: sia adesso.

960. *Probl.* Condurre una tangente ad un punto dato

dato qualunque della Quadratrice.

Soluzione. Si differenzi l'equazione al centro $y = \frac{x}{a} \cot. \frac{bx}{a}$, onde si abbia $d.y = \frac{dx}{a} \cot. \frac{bx}{a} \ldots\ldots - \frac{bx\,dx}{sen.^2 \frac{bx}{a}}$, e perciò $\frac{x d.y}{dx} = \frac{x}{a} \cot. \frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{sen.^2 \frac{bx}{a}}$

Ora i triangoli simili ROK, pQn, in cui pn è infinitamente vicina alla QO, ci danno, pigliando la dy negativa, perchè y diminuisce, mentre x aumenta, $-\frac{xdy}{dx} = RK$; dunque si ha $RK = \frac{bx^2}{sen.^2 \frac{bx}{a}} - \frac{x}{a} \cot. \frac{bx}{a}$, ed aggiungendo $CR = OQ$ da ambe le parti, o sia $y = \frac{x}{a} \cot. \frac{bx}{a}$ si ottiene $CK = \frac{bx^2}{sen.^2 \frac{bx}{3}} = \ldots \frac{b}{a^2}.CO^2$; ma l'asse minore $CL = \frac{a^2}{b}$; dunque $CK = \frac{CO^2}{CL}$, e perciò la sottangente della Quadratrice è una terza proporzionale dopo la CL, e la CO.

ARTICOLO VI.

Della Cissoide.

961\. Essendo AB diametro di un Circolo AMB, ed Rr una tangente indefinita al punto B (Fig.ª 80.), se conducansi dal punto A tutte le seganti possibili, come AR, alla tangente, e si prendano sempre le porzioni RN eguali alla corda corrispondente AM, si descriverà per punti una curva detta Cissoide.

962\. Per trovarne l'equazione, sia NS perpendicolare alla tangente, ed NQ, MP perpendicolari al diametro AB. Ciò fatto si ponga $AQ=x$, $QN=y$, ed $AB=a$. Per l'eguaglianza de' triangoli APM, NSR, si ha $AP=NS=QB$, ed $AP\,(a-x):PM(\sqrt{ax-x^2})::AQ(x):QN(y)$. Quindi $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$ e perciò $y^2 \ldots = \frac{x^3}{a-x}$ equazione cercata.

963\. Dunque 1.° la Cissoide è una linea di terz' ordine, ò sia, è una curva di secondo ordine; 2.° Essa ha due rami eguali, uno positivo, e l'altro negativo 3.° Fatto $x=0$, anche y è $=0$, e perciò passa per l'origine A. 4.° Essendo $x=\frac{a}{2}$ risulta $y = \pm\frac{a}{2}$; dunque la Cissoide taglia le due semicirconferenze in due parti eguali; 5.° Fatto $x=a$, y è $=\infty$ Dunque rR è asintoto della Cissoide.

964\. Volendone la sottagente, si avrà differenziando l'equazione, $2aydy - 2xydy - y^2dx =$

$= 3x^2 dx$; quindi $dx = \frac{2aydy - 2xydy}{3x^2 + y^2}$, e finalmente $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ay^2 - 2xy^2}{3x^2 + y^2}$

ARTICOLO VII.

Della Spirale di Archimede.

965. Se abbiasi nel centro di un circolo (Fig.ª 81) un punto mobile C, il quale si muova con velocitá uniforme lungo il raggio CB, mentre il raggio CB va rivolgendosi con moto uniforme intorno al centro, ed il moto del punto C, sia talmente attemperato con quello del raggio, che giunto il raggio al punto B, vi si trovi anche il punto C, la curva descritta dal punto C, mediante il moto composto di traslazione e di rotazione, è la Spirale di Archimede. Ella è rappresentata dalla curva $CONB$, ed è chiaro che va dilatandosi successivamente senza limite.

966. Per ricavarne l'equazione, osservo che in virtù dell'uniformità dei due moti del punto C, dee sussistere la proporzione $CN:arc.BAM::CB:circonf.^a$ Ma CN è un'ordinata della Spirale, e l'arco BAM si può riguardare come l'ascissa corrispondente. Dunque se dicasi $CN=y$, $arc.\ BAM=x$, $CB=a$, e $circonf.^a=c$ si avrà $y=\frac{ax}{c}$, che è l'equazione che si voleva.

967. Da questa si raccoglie 1.° che la Spirale passa per il centro del circolo genitore, come già si sapeva; perchè fatto $x=0$, anche y è $=0$, 2.° Che passa pure per il punto B, perchè fatto $x=c$, si ha $y=a$. 3.° Che facendo $x=c+x'$, siccome si ha $y=a+\frac{ax}{c}$, la curva seguita a fare una seconda rivoluzione, che termina quando x' è $=c$, essendo allora $y=2a$, cioè passando per l'estremo di CD $=2CB$, e così in seguito. 4.° Che l'equazione generalissima della Spirale è $y=ma+\frac{ax}{c}$.

968. Per condurre una tangente alla Spirale, convien premettere il Metodo che segue.

969. Sieno due raggi CM, Cm infinitamente vicini; l'arco Nr descritto col centro C, e CT perpendicolare a CN. Ciò posto sia $CN=y$, $BAM=x$ &c, come sopra, e si avrà $a:y::Mm\ (dx):Nr=y\frac{dx}{a}$. ed $rn(dy):y\frac{dx}{a}::y:CT=\frac{y^2dx}{ady}$, che è la formola che si richiede.

Si ponga dunque $y=\frac{ax}{c}$, e si avrà $\frac{dx}{dy}=\frac{c}{a}$, e $CT=\frac{cy^2}{a^2}=\frac{axy}{a^2}=\frac{xy}{a}$.

970. Vediamo come si possa rettificare un arco di questa Spirale. Osservando la Fig.ª 81., si vede, che si ha $Nn = d.CEN = \sqrt{Nr^2 + nr^2}$ $= \sqrt{\frac{y^2dx^2}{a^2} + dy^2}$. Dall'equazione $x=\frac{cy}{a}$ si deduca $dx^2=\frac{c^2dy^2}{a^2}$, e fatta la sostituzione si avrà CEN

$$=\int \frac{c}{a^2} dy \left(y^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si descriva una Parabola CQ, il di cui parametro sia $= \frac{2a^2}{c}$, e fatto $CL=CN$, e condotta l'ordinata QL, si avrà $CQ=\int \frac{c}{a^2} dy \sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2}+y^2\right)} = CEN$.

971. Volendone la superficie, si avrá $d.COEN = \frac{y^2\, dx}{2a}$, perchè il triangolo differenziale $NCn = \frac{Nr.CN}{2} + Nrn$, e nel limite, $= \frac{Nr \times CN}{2}$. Per dx si sostituisca il suo valore $\frac{cdy}{a}$, e si avrà integrando $COEN = \frac{c}{2a^2} \cdot \frac{y^3}{3}$ formola da cui si deduce un bellissimo, corollario, ed è che quando $y=a$, si ha la superficie della prima Spirale intera $COENB = \frac{ac}{2} \cdot \frac{1}{3}$; eguale cioè alla terza parte del circolo genitore.

ARTICOLO VIII.

Della Spirale Parabolica.

972. Se prendasi (Fig.ª 82.) sopra un raggio CM una parte CN, media proporzionale fra l'arco AM ed una retta data, e questo si ripeta per tutti gl'infiniti archi della circonferenza, si determineranno infiniti

finiti punti come il punto N, e questi formeranno la Spirale Parabolica.

973. Sia $AM=x$, $MN=y$, $AC=a$, e la retta data $=m$, e si avrà $y=a-\sqrt{mx}$. Dunque 1.° quando $x=0$, $y=a$ 2.° crescendo x, decresce y, finchè divenga $\sqrt{mx}=a$: allora $y=0$, 3.° crescendo $\sqrt{mx}$ più di a, y divien negativa; 4.° Se x divenga negativa, y diviene immaginaria.

ARTICOLO IX.

Della Spirale Iperbolica.

974. Fatto centro nel punto C (Fig.83.), e con degl'intervalli successivamente maggiori, presi sull'infinita CP, si descrivano degli archi BD, MN, PQ &c. tutti di egual lunghezza. I punti Q, N, D &c. determinati dalle estremità degli archi formano una curva detta Spirale Iperbolica.

975. Sia il raggio $CB=a$, $BG=x$, $CN=y$, $BD=MN=PQ=b$, e si avrà $x:a::b:y$. Dunque $xy=ab$, e questa è l'equazione della Spirale Iperbolica, che non differisce dall'equazione dell'Iperbola fra gli asintoti.

976. Osservando, che l'ascissa BG può crescere successivamente, si vede, che detta c la circonferenza del circolo DAB, si può sostituire ad x, $x+c$, $x+2c$, $x+3c$ &c. $x+mc$. Ora con questo l'equazione $xy=ab$, prende successivamente la forma $y=\frac{ab}{x}$, $y=\frac{ab}{x+c}$, $y=\frac{ab}{x+2c}$ &c., $y=\frac{ab}{x+mc}$, di dove si vede, che quanto è più grande l'ascissa, tan-

tanto è più piccola l' ordinata ; e che l' ordinata non diviene uguale a zero, che quando l'ascissa è uguale all'infinito; il che significa, che la curva di cui trattiamo, non incontra il centro C, che dopo aver fatte infinite rotazioni intorno ad esso.

977. Se ad una distanza $CL=BD$ si conduca una retta infinita LS parallela all'asse, essa dee risultare asintoto della Spirale. Difatto gli archi successivi BD MN, PQ &c: vanno accostandosi sempre più alla forma rettilinea, eguale alla CL; ma questo non può avvenire, che ad un' infinita distanza da C, perchè il circolo diventa eguale ad una linea retta infinita, quando è infinito il suo raggio (Vedasi il P. Boscovich *de Trasformatione Locorum Geom.*) Dunque la retta LS dee esser realmente asintoto della Spirale Iperbolica.

978. Cerchiamo la sottangente. Dall' equazione $xy=ab$ si ha $ydx=-xdy$. Dunque $\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y}$, e fatta la sostituzione nella formola $\frac{y^2\,dx}{ady}$ (n.969.) si ha la sottangente $=-\frac{xy}{a}=-b$. Dunque la sottangente della Spirale Iperbolica è costante come nella Logarimmica.

979. Passiamo a rettificarla. Sia Cn infinitamente vicina a CN, e sarà $rn=dy=d.CN$. Quindi dai triangoli simili CrN, CHG, si dedurrà $CG:GH::CN:rN$ ò sia $a:-dx::y:rN=-y\frac{dx}{a}$. Ciò posto, siccome si

si ha $Nn=\sqrt{nr^2+Nr^2}$, si avrà sostituendo, ed integrando, $NDKC=\int\frac{dy}{y}\sqrt{b^2+y^2}$. (n.967.) Dunque descrivendo una Logarimmica VT, la di cui sottangente sia eguale a b, si avrà $NDKC=$ all' arco infinito TV, supposto che siasi presa l' ordinata $TV=CN$.

980. Per rapporto alla quadratura, si ha la superficie $CKXNC=\int\frac{Nr.CN}{2}=\frac{1}{2}\int-\frac{y^2\,dx}{a}=\frac{1}{2}\int b\,dy$

$$=\frac{1}{2}by+C.$$

ARTICOLO X.

Della Spirale Logarimmica.

981. Una curva CLM (Fig.ª 84.) la quale formi con tutti i suoi raggi CM, CN &c. il medesimo angolo, dicesi Spirale Logarimmica.

982. Con un raggio qualunque $CP=a$ si descriva un circolo PAB, e conducansi i due raggi CM, Cm infinitamente vicini; avendo descritto col raggio CM l'archetto Mr, si avrà, posta $CM=y$, e BP, computata da un punto fisso B preso ad arbitrio, $=x$, la proporzione $a:dx::y:Mr=y\frac{dx}{a}$. Quindi dal triangolo rettangolo Mrm, si ha *tang.* $Mmr:1::Mr:mr$ cioè, detta u la tangente dell'angolo Mmr, che per la natura della curva è costante, si ha $u=y\frac{dx}{ady}$; di qui

qui $\frac{dx}{au}=\frac{dy}{y}$, e perciò $log.y=\frac{x}{au}+C$, e questa è l'equazione della Spirale Logarimmica:

983. Da questa si raccoglie 1.° che siccome si può sostituire ad x, $x+c$, $x+2c$ &c. $x+mc$, la Spirale Logarimmica fa infinite rivoluzioni d'intorno al centro, tanto per giungervi, quanto per discostarvisi all'infinito. 2.° Che facendo $C=log.C'$, siccome si ha $log.\frac{y}{C'}=\frac{x}{au}=\frac{x}{au}log.e$, o sia $\frac{y}{C'}\ldots = e^{\frac{x}{au}}$, ovvero $y=C'e^{\frac{x}{au}}$, nel punto B nel quale si ha $x=0$, dee aversi $y=CB=C'$. 3.° Che le ascisse crescendo in progressione arimmetica, le ordinate crescono in progressione geometrica. 4.° Che se fosse $u=\infty$, e perciò l'angolo TMC sempre di 90.°, si avrebbe $y=C'=CB$, cioè la curva sarebbe un circolo, come si sapeva.

984. Per rettificare la Spirale Logarimmica suppongasi dato l'angolo costante TMC, e sia per esempio $tang.u=c$. Si avrà dal triangolo Mrm, $c:1::y\frac{dx}{a}$: Mm, onde $CLM=\frac{xy}{ac}$. Ma per avere una formola più semplice, si ponga $cos.u=e$, e si avrà $e:dy::1:Mm$, e perciò $\int Mm=CLM=\frac{y}{c}$. Ma tirando CT perpendicolare a Cm, $mr:Mm$: ò sia $c:1::y$, MT; dunque $MT=\frac{y}{c}=CLM$. Di qui si vede, come si conducono le tangenti.

SEZIONE III.

Delle Superficie Curve.

985. Alla Teoria delle linee curve succede naturalmente la Teoria delle superficie curve. Superficie curva è quella, nella quale tutte le quaterne possibili di punti non giacciono nel medesimo piano. Le superficie di questa sorta si dividono come le linee in diversi ordini. Al primo appartengon quelle, la di cui equazione à tre variabili x, y, z, è $ay+by\ldots+cz+d=0$, e queste sono le superficie piane. Le superficie di second' ordine, sono rappresentate da un' equazione di secondo grado, a tre variabili, $ax^2+bxy+cy^2+dyz+ez^2+fzx+gx+hy+iz=0$ e lo stesso vale per le altre. Vediamo come si ottiene generalmente l'equazione di una superficie curva.

986. Sia M un punto (Fig.ª 85.) di una superficie curva, e sia $APQP$ un piano sottoposto, e su di questo si abbassi una perpendicolare MQ. Per determinar la posizione del punto Q, si prenda nel piano stesso un asse AB. A questo dal punto Q si conduca un' ordinata normale QP, e si prenda un punto A per l' origine ascisse. Fatto questo si vede, che per conoscere la posizione del punto M, basta conoscere le tre rette AP, PQ, QM, o sia le rette MR, Mq, MQ, che sono le distanze respettive del punto M da tre piani ortogonali, che s'incontrano tutti in un punto A. Si ponga dunque $MR=x$, $Mq=y$, $MQ=z$, e si cerchi un' equazione fra x, y, e z; dai valori di z, positivi ò negativi, reali ó immaginarj, dipenderà la posizione, e l'andamento della superficie rappresentata.

987. Se nell' equazione fra x, y, z, l' ordinata z

per esempio abbia in tutti i termini un esponente pari, dovrà avere due valori eguali, uno positivo, e l' altro negativo. In quest' ipotesi, sarà la superficie così formata, che da ambe le parti del piano APQ, sia simile, ed eguale. Questo essendo, il piano APQ si chiama diametro del solido: e lo stesso ha luogo per rapporto agli altri piani, qualora sussista la condizione divisata. Può però avvenire, che due di tali piani, e anche tutti tre sieno diametrali nel tempo stesso. Difatto, se la superficie sia sferica, e il suo centro sia in A, essendo il raggio $a = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, si ha l' equazione $a^2=x^2+y^2+z^2$, in cui ciascuna coordinata ha un esponente pari.

988. Il conoscere le intersezioni delle superficie curve formate con de' piani, giova molto alla cognizione delle superficie stesse, perchè si conoscono in questa guisa infiniti punti in una volta, appartenenti alla superficie data. Noi perciò passiamo a trattarne.

989. Volendo sulle prime investigare le sezioni curvilinee, che posson nascere dall'intersezione fatta da uno dei tre piani di rapporto, si ponga una delle coordinate uguale a zero, e l' equazione rimanente rappresenterà la curva nata dall' intersezione. Così se pongasi $z=0$, l'equazione che resta fra x, ed y esprime qual sia la curva prodotta dalla sezione della superficie data, col piano APQ. Sia per esempio sferica la superficie proposta: ponendo $z=0$, si ha $x^2+y^2=a^2$, che è un'equazione al circolo.

990. Se il piano segante, fosse parallelo ad uno dei piani di rapporto, si faccia la coordinata, che attraversa detto piano, uguale alla distanza che essa

ha dal medesimo, e l' equazione rimanente rappresenterà la curva formata dalla sezione.

991. Di qui si vede, che se alla distanza del piano parallelo da un punto dato M, che sia per esso $=m$, si diano successivamente tutti i valori possibili, vengono ad ottenersi tutte le infinite intersezioni, che possono formarsi nella data superficie, e perciò si ottiene tutta la superficie.

992. Se nell' equazione di una superficie manchi una variabile, tutte le sezioni in essa fatte con un piano parallelo a quello, al quale apparteneva la coordinata mancante, debbono esser tutte uguali, perchè tutte rappresentate dall'equazione fra le due variabili rimanenti. Queste superficie, che sono espresse da un' equazione fra due variabili, possono descriversi facilmente. Si descriva una curva espressa dall'equazioae data, che sia per esem. fra x, ed y, e si concepisca, che una retta infinita, normale al piano della curva, faccia una rotazione intorno alla curva suddetta. Se la curva data fra x, y, sia continua, qualunque sia la sua figura, il genere di superficie descritto nella maniera esposta, si chiama Cilindrico: altrimenti se detta curva sia discontinua, si appella Prismatico.

993. Può avvenire ancora, che l' equazione di una superficie curvilinea sia fra tre variabili, ma sia sotto forma omogenea, come per esempio $z^2=mxz+x^2+y^2$. In questo caso diasi ad una delle variabili per esempio a z, un valore qualunque M; e si descriva la curva espressa dall'equazione $M^2 = mMx+x^2+y^2$. Dipoi si prenda un punto fuori del suo piano; da esso conducasi una retta al perimetro di tal curva, e si faccia rotare intorno ad essa interamente: la superficie descritta sarà quella, che

che appartiene all' equazione omogenea data, e si comprenderà nel genere delle superficie Coniche, se la curva, che ha servito di modulo sia continua; e si comprenderà nel genere delle superficie Piramidali, se sia discontinua.

994. L'equazioni delle superficie curve, come quelle delle linee, si possono trasformare in molte maniere. I principj, onde ottenere queste trasformazioni, sono analoghi a quelli, che si esposero per rapporto alle curve. Il vantaggio, che si ritrarrebbe con occuparvisi, non compensa la noja del calcolo, che vi si richiede.

995. Per internarci adesso alcun poco nella cognizione delle superficie di second'ordine, giova distinguerle in due classi speciali, come si usa di fare per rapporto alle curve. Nella prima Classe collocheremo quelle, che si contengono in uno spazio finito; Nella seconda, quelle, che si estendono senza limite. Appartiene alla prima Classe, il genere di superficie Sferoidale. Appartiene alla seconda il genere Cilindrico, non meno, che il genere Conico. Qualunque volta una superficie curva debba essere infinita, è manifesto, che una almeno delle sue coordinate dev'esser tale. Con questo principio si può investigar la natura di una superficie curva infinita. Si ponga una delle variabili, per esempio $x=\infty$. In virtù di quest' ipotesi molti saranno i termini, che dovranno svanire.

Per maggior semplicitá supponghiamo, che rimangano tutti i termini di secondo grado, e che perciò si abbia l'equazione $ax^2+bxy+cyz+dy^2+exz+fz^2=0$. Da questa si deduce.........................

$$x=\frac{-by-ez\pm\sqrt{(b^2-4ad)y^2+(2bc-4ac)yz+(c^2-4af)z^2}}{a}$$

ed

ed è questa l'equazione, per cui vien rappresentata la natura di una superficie, che si estende all' infinito, supposto, che in essa facciansi eguali a zero quei termini, che nei casi particolari si sapesse che debbono svanire.

996. Ecco dunque, che se la superficie data, abbia qualche porzione, che si estenda senza limite ad una distanza infinita, deè convenire colla superficie infinita espressa dall'equazione $ax^2+bxy+cyz+dy^2+cxz+fz^2=0$, cosicchè questa seconda superficie ne sia l'asintoto.

997. Siccome poi nella suddetta equazione le tre variabili hanno in ogni termine la medesima dimenzione, quindi essa appartiene ad una superficie conica, che abbia il vertice nell'origine delle coordinate. Se dunque una superficie si estenda all'infinito, si può sempre trovare una superficie Conica, che ne sia l'asintoto. Viceversa, ogni volta, che la superficie conica asintotica sia reale, la superficie proposta di second'ordine, si estende all'infinito, e dalla natura della superficie asintotica si può raccogliere un'idea della superficie data. Se poi la superficie Asintotica sia immaginaria, la superficie, di cui si tratta, dev' essere necessariamente finita. Di qui ne deriva, che per determinare, quali sieno le superficie curve di second'ordine, che abbiano un'estenzione finita, basta determinare in quali casi l' equazione della superficie asintotica divenga immaginaria, e perciò svanisca tutta in un punto. Supponghiamo pertanto, che la superficie espressa dall'equazione $ax^2+bxy+cyz+dy^2+exz+fz^2=0$ svanisca in un punto. E'chiaro, che anche tutte le di lei sezioni dovranno svanire ugualmente. Fatto dunqoe $x=0$, l'equazione, che rappresenta una delle

le sezioni $cyz + dy^2 + fz^2 = 0$ dev' essere impossibile, a meno che non sia $y = 0$, e $z = 0$; dee perciò aversi $4df > c^2$. Per la stessa ragione, se pongasi $y = 0$ deve aversi $4ad > b^2$, e ponendo $z = 0$, $4af > d^2$. Oltre di questo fa d'uopo che il valor d' x dedotto dall' equazione ..... (A) sia immaginario, e perciò che sia negativa la funzione ...... $(b^2 - 4ad)\, y^2 + 2(be - 2ae)\, zy + (c^2 - 4af)\, z^2$, il che, essendo $b^2 - 4ad$, e $c^2 - 4af$ funzioni negative, ha luogo qualora sia $(bc - 2ae)^2 < (b^2 - 4ad)(c^2 - 4af)$ o sia, qualora $ac^2 + b^2 f$ sia $< bce + 4adf$.

998. Quattro sono pertanto le condizioni, dalle quali si può conoscere, se una superficie curva sia finita ò infinita; Cioè una superficie curva è finita quando si abbia $4df > c^2$, $4ad > b^2$, $4af > d^2$, e $ae^2 + dc^2 + b^2 f < bce + 4adf$; ed è infinita quando una, o più di queste condizioni non abbia luogo. Terminiamo questo Trattato con un problema interessante, in cui si contiene la Teoria fondamentale delle Curve di doppia curvatura.

999. *Probl.* Date due superficie curve, determinar l' equazione della curva che nasce dalla loro intersezione.

Soluzione. Quando s'intersegano due superficie, la sezione non giace tutta in un piano, come quando una del superficie é piana; ma è una curva di doppia curvatura. Quindi ciascun punto della sezione non può determinarsi per mezzo di un'equazione fra due coordinate; ma, come si è praticato di sopra, per determinar la posizione dei punti situati in diversi piani, convien cercarne il rapporto a tre piani fra loro normali. Siccome però mediante un tal rapporto, si ottiene un'equazione fra tre variabili, ed un'equazione tale rappresenta una superficie, convien far uso di un

un metodo particolare, per cui si abbia un'equazione a due variabili, dalla quale si possa dedurre la cognizione dell' intersezione di cui si tratta.

1000. Sia la curva GMH (Fig.ª 86.) che non sia nel medesimo piano. Per determinar la posizione di un suo punto qualunque M, si prendano tre assi normali fra loro AB, AC AD, dai quali sieno determinati tre piani normali BAC, BAD, CAD. Dal punto M si abbassi una perpendicolare MQ sul piano BAC, e dal punto Q sull'asse AB la perpendicolare QP. Saranno AP, PQ, QM tre coordinate, fra le quali se vengano date due equazioni si potrà determinar la natura della curva pnoposta GMH. Per far questo, conviene che, posta $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, sieno date due equazioni fra x, y, z. Ciò essendo, dall'equazioni date si tolga z (il che si può sempre fare come vedremo in appresso), e l'equazione rimanente in x, y determinerá la posizione di tutti i punti Q, o sia la curva EQF, la quale chiamasi projezione della curva data. Avendo così la projezione EQF, conviene conoscere le perpendicolari $QM = z$, che appartengono a ciascun punto Q. Or questo può sempre ottenersi qualora si abbia un'altra equazione in x, z, ò in x, y, ò finalmente in x, y, z, perchè da una di queste si può sempre dedurre z, o sia QM espressa per x, y.

Cio che si è detto della projezione EQF vale ancora per le altre projezioni nel piano BAD, CAD, le quali si ottengono in una maniera simile. In generale si può concludere, che per determinare la sezione di due superficie curve, convien ridurre primieramente l'equazioni delle due superficie fra le medesime coordinate, e perciò rapportarle a tre medesimi piani normali fra di loro; e quindi dedurre da esse un equa-

equazione tra due variabili, per aver l'equazione di una delle projezioni. Avuta questa per mezzo dell'equazione di una delle superficie, si dedurrà il valor di z espresso per x, y, e si avrà così per ciascun punto Q, la perpendicolare QM, e con ciò la curva richiesta.

1001. Due cose rimangono adesso da osservarsi.

1.° L' equazioni che rappresentano le curve di projezione, possono risultare impossibili, ò svanire in un punto, ò presentar due radici eguali. Nel primo caso le superficie date non s'incontrano in alcuna parte; nel secondo si toccano in un punto, e nel terzo si toccano in una linea.

2.° La sezione di due superficie curve, può essere una curva di semplice curvatura, e questo avviene ogni qualvolta che le due equazioni, che le rappresentano, prese insieme, costituiscono un'equazione lineare a tre variabili.

Fine del Tomo Secondo.

INDICE

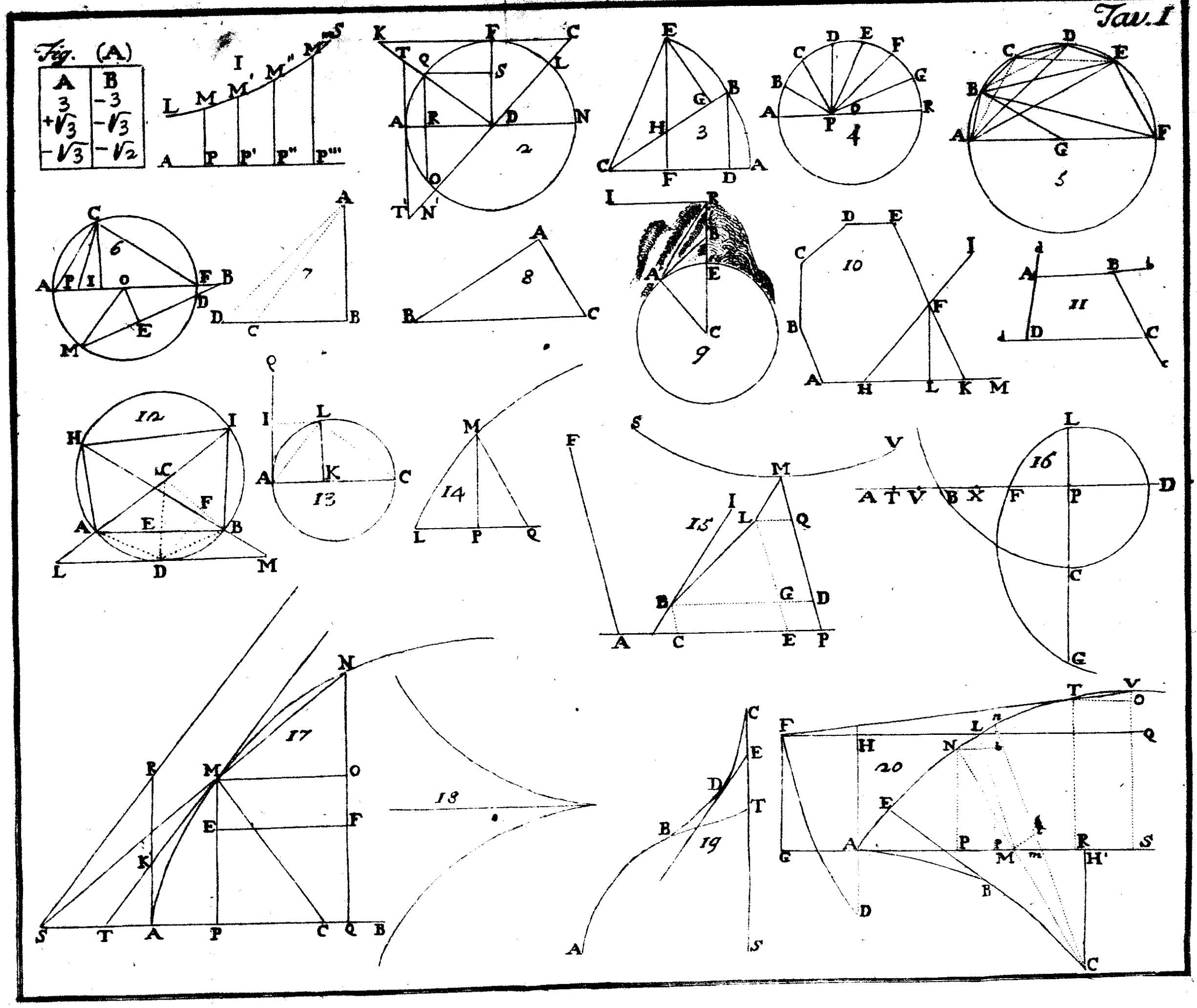
DELLE COSE PRINCIPALI CONTENUTE NEL SECONDO TOMO

PARTE II.

	pag.	num.
Calcolo Trigonometrico	319.	464
Teorema di Cotes	345.	504
Formazione delle Tavole Trigonometriche	357.	518
Risoluzione de' Triangoli	365.	527
Poligonometria	370.	541
Delle Funzioni Variabili in generale	378.	553
Calcolo diretto delle Differenze finite	379.	557
Calcolo inverso delle Differenze finite	384.	566
Calcolo diretto de' Limiti	386.	571
Calcolo inverso de' Limiti	392.	582
De' Massimi, e de' Minimi	393.	587
Delle Funzioni infinite, ed infinitesime	399.	595
Dell' Equazioni a due variabili	402.	601
Delle Funzioni Continue in generale	414.	604
Delle Funzioni Geometriche Elementari	415.	605
Delle Funzioni Geometriche sublimi	423.	631
Delle linee di prim' ordine	457.	691
Delle linee di second' ordine in generale	458.	696
Del Circolo	467.	715
Della Parabola	473.	734
Dell' Ellisse	490.	777
Dell' Iperbola	515.	830
Della Logarimmica	546.	899
Questione de logarimmi delle quantità negative	552.	915
Della Cicloide	565.	921
Della Coclea	572.	940
Della Concoide	576.	950
Della Quadratrice	578.	954
Della Cissoide	582.	961
Della spirale di Archimede	583.	965
Della Spirale Parabolica	585.	972
Della Spirale Iperbolica	586.	974
Della Spirale Logorimmica	588.	981
Delle Superficie Curve	590.	985

Delle

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI.
330.	23., e 24	$\sqrt{1-c^2r^2}$, *cos.*	$\sqrt{1-c^2}\,r^2 \times$ *cos.*
339.	15.	*sen.. z ten. y*	*sen. z. sen.*
341.	8.	= *tang.* $(a+b)$, *cot.*	= *tang.* $\frac{(a+b)}{2}$ *cot.*
374.	11.	ne segue sussistano	ne segue che sussistano
	7.	fiinquì	finquì
	penul.	*cos.* $a-b'$ *cos.* $(a+b)-$	*cos.* $a+b'$ *cos.* $(b+b)+$
375.	2.	$2a'b'c'$ *cos. a cos.*	$2a'b'\times$ *cos. a cos.*
	7.	*sen.* $(a+b)$	*sen.* $(a+b))$
	15.	quedrati	quadrati
395.	2.	$\pm(m-1)\,px^{m-2}\ldots\ldots + \frac{(m-1)\ (m-2)}{1\ .\ 2}px^{m-3}$ &c.	$\pm(m-1)\,px^{m-2}\Delta x + \frac{(m-1)\ (m-2)}{1\ .\ 2}px^{m-3}\Delta x^2$ ec.
396.	6.	le succedono	gli succedono
397.	19.	tutti valori	tutt' i valori
401.	8.	Nel modo si cerchi	Nel modo stesso si cerchi
402.	7.	$(\infty^m)^n = \infty^{\frac{m}{n}}$	$(\infty^m)^{\frac{1}{n}} = \infty^{\frac{m}{m}}$
	19.	Sieno	sieno
403.	27.	$y^{qn}=$	$y^{pn}=$
434.	18.	applicando	applicandolo
436.	17.	i vàlori *y*	i valori di *y*
442.	1.	esser di *n*	esser più di *n*
446.	24.	(che faremo $=p$)	(che faremo $= dp$)
449.	*ult.*	$+d^3y(dx^2+dy)\sqrt{(dx+dy^2)}$	$+d^3y(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx+dy^2)}: dx^2d^2y^2$
461.	33.	ha due rami	non ha rami
462.	25.	di lui	sua
495.	23.	(Fig.ª 43) e	(Fig.ª.43)$=b$, e
512.	*ult.*	accorciata	allungata
513.	8.	alla sfera	alla sferoide
528.	8.	parametro	semiparametro
566.	19.	verità	virtù
589.	18.	*tang.* $u=c$	*sen.* $u=c$
594.	*ult.*	dunqoe	dunque
595.	24.	quando s'intersegano due superficie	Quando s'intersegano due superficie curve



A	B
3	-3
$+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$