TEORIA
DELL' ANALISI

DA SERVIRE

D'INTRODUZIONE AL METODO DIRETTO, ED INVERSO DE' LIMITI

OPERA

DELL' AB. PIETRO FRANCHINI

PROFESSORE DI FILOSOFIA NEL VESCOVIL SEMINARIO DI VEROLI.

TOMO PRIMO

IN ROMA MDCCXCII.

Per il Cannetti vicino alla Rotonda.

Con Licenza de' Superiori.

All' Illmo, e Rmo Signore

MONSIGNORE

ANTONIO ROSSI

PATRIZIO FERRARESE

VESCOVO DI VEROLI

Prelato Domestico di N. S., ed
Assistente al Soglio Pontificio

SE queſto tenue ſaggio de' miei primi ſudori, ſiccome nato ſotto gli auſpicj voſtri, Monſignor Il-

luſtriſſimo, e Reverendiſſimo, ed all' aura creſciuto della generoſa Voſtra Protezione, perciò ſolo voſtro non foſſe interamente, dovrebb' egli nondimeno ambire ardentemente di portare in fronte l' autorevol Nome Voſtro, come di un Mecenate, di cui non sò ſe più debbaſi temerne il giudizio, o più deſiarne il favore. Nè perchè ſulle Teorìe dell'Analiſi egli ſi aggiri (oggetto per molti ſtraniero, ed inutile) debbe meno luſingarſi d' incontrare il voſtro compatimento; poichè di tutto ciò, che può rivestir l'animo di pregevoli cognizioni, siete in guisa fornito, che per Voi (caratteristica degli Uomini sommi) disciplina non vi ha, che non meriti di esser commendata, e protetta.

E a chi meglio, che a Voi, note sono le prerogative nobilissime delle analitiche Dottrine?

Chi meglio conosce la sovrana loro influenza nel discuoprimento delle grandezze del Creatore, sparse con tanta dovizia nella sempre feconda, e sempre mirabil natura? Non per altro voleste, che nell'

amplissimo Seminario Vostro fiorisse con tanto ardore lo studio della più colta Filosofia, e non per altro vi degnate di promuoverla con tanto impegno, se non perchè in essa ravvisate con finezza di genio, tutto il bello, che la distingue. A questi segnalati pregj, che sì nobilmente appartengono alla degnissima Vostra Persona, mi dò l'onore di consacrare il presente, benchè tenue attestato della mia rispettosissima servitù, e singolar venerazione. Possa questo mio picciol lavoro, anch'esso ottenere un qualche luogo nell' ozio erudito, cui ſapete con tant' onore inframettere al difficil travaglio dell' Epiſcopal Miniſtero! E poſſa chi vel preſenta, giungere a tanto, di meritare la Voſtra Benignità, di cui niun voto potrebb' egli formare, che più decoroſo per lui foſſe, e più luſinghiero.

Vmiliss., Devotiss., ed Obbligatiss. Servo
Pietro Franchini.

PREFAZIONE.

TRe sono stati gli oggetti, che ho avuti in mira nel comporre questo corso di Analisi.

Il primo, di trattar compitamente l'Analisi, e di esporre perciò quanto si richiede per sciogler qualunque Problema, che non abbisogni delle Teorìe sublimi dell'Analisi Newtoniana.

Il secondo, di riunire in un mediocre volume il più gran numero di cognizioni, che fosse possibile.

Il terzo, di trattare una sì copiosa, e sì abondevol materia, con un metodo assolutamente rigoroso.

Per riescire nel primo oggetto, come pure, per aprirmi la strada a sodisfare agli altri due, mi è convenuto introdurre nell'Algebra due Teorìe, che vi si riconosceranno affatto nuove: Una è la Teorìa delle Funzioni continue, presa in tutta la sua estenzione. L'altra è la Teorìa delle principali dottrine intorno alle Funzioni variabili.

Che io abbia trattata la prima, non dee sembrar punto strano, a chi sappia che dagli Algebristi più estesi s'inserisce nell' Algebra la Trigonometrìa, la quale non è poi di un'uso sì interessante, come la Teorìa delle Funzioni continue; e dee sembrar del tutto opportuno a chi rifletta, che altrimenti non si può trattar l'Analisi, che per metà.

Oltre di questo, io son certo, che ai giovani amanti delle Matematiche dev'esser molto utile, il trovare in pochi fogli raccolte con chiarezza le Dottrine più sublimi sulle Funzioni continue, che altrimenti dovrebbero acquistare con molti libri, e con diuturne fatiche; e il vederle trattate con tutto il rigore analitico, vale a dire senza supporre giammai veruna proprietà, che non sia trovata precedentemente.

E' vero, che niun' altro ha introdotto nell'Analisi la Teorìa delle Funzioni continue;

tinue; ma io mi dò a credere, e con tutto il fondamento, che se altri non lo ha fatto, se ne sia astenuto, per non inserire un Volume in una piccola Opera; inconveniente non sopportabile, e che io son giunto ad evitare, con prevalermi dei suggerimenti di M. d'Alembert (*Encicl. Artic. Courbes*), con sostituire cioè i primi precetti del Calcolo de' limiti, ai lenti, ed operosi Metodi dell'Algebra.

Le prime nozioni sulla Teorìa delle Funzioni variabili, oltre che nascono spontaneamente dal mio Metodo, mi sono necessarie per la dottrina delle Funzioni continue, e mi giovano per estendermi a delle ricerche più eleganti, e sublimi. Senza di questo però, essendomi proposto d'iniziare i giovani all'Analisi degl' Infiniti, non avrei potuto dispensarmene, senza contradire alle mire prefissemi, e senza privar l' Opera de' migliori ornamenti. E' vero, che avrei potuto parlarne sul fine del secondo Tomo, ad imitazione del Dottor Tommasini; Ma giacchè doveva io parlarne, perchè non approfittarmi dei vantaggi, che me ne potevano derivare?

Fin quì per rapporto al prim' oggetto,

to, il quale però era di un' esecuzione meno difficile degli altri due.

Per sodisfare a questi, bentosto mi avvidi, che andava incontro ad una difficoltà quasi insuperabile, perchè a proporzione che io tentava di accrescer la copia delle Materie, l' esattezza dell' ordine mi si rendeva sempre meno eseguibile. Nondimeno dopo replicate discussioni, e dopo un maturo esame, venni a capo di ciò, che bramava, e conobbi che mediante alcune leggierissime Nozioni sull' equazione, opportunamente esposte; mediante un Lemma sulla natura de' coefficienti di un' equazione, e mediante alcuni lumi, sparsi dove lo richiedeano le circostanze, conobbi dissi, che non v' era Teorìa, che non potessi inserire nell' Opera. Con questi soli preliminari e la dimostrazione diretta della Formola Newtoniana, e la dottrina dell' interpolazione, e il Teorema di Cotes, e il Metodo di sommare le frazioni continue, e le Formole generali dell' Eliminazione, e la Questione de' logarimmi delle quantità negative, e il Metodo de' Massimi, e Minimi, e molti Teoremi, in parte desun-

sunti dagli Atti delle Accademie, e in parte da me ritrovati, nell'Analisi mia trovarono un luogo del tutto conveniente.

Veduto questo, mi si presentò assai naturalmente la divisione dell' Opera in quattro parti, che sono, prima la Teorìa del Calcolo; seconda, la Teorìa delle Funzioni, da me presa sotto il nome di Fonti dell' Analisi, perchè da essa ne derivano tutt' i mezzi, di cui si fa uso per ridurre un Problema in equazione; terza, la Teoria dell'equazione, contuttociò che ne dipende; quarta, l' Analisi determinata, e indeterminata, Algebrica, e Geometrica.

Altro non aggiungo intorno alla materia, per non descrivere ciò che ognuno può rilevar da se stesso.

Per ciò che riguarda l' esposizione, ho stimato bene di prevalermi dell'idioma italiano, come il solo, che in Italia sia adattato all' intelligenza di tutti; e per addolcire in qualche maniera la naturale asprezza delle Dottrine algebraiche, ho procurato di usare uno stile meno incolto, che fosse possibile, ed ho avuto in mira nel tempo stesso, non tan-

tanto di ragionare, quanto di dare occasione di ragionare. Un des plus sur moyens de plaire, n' est pas tant de dire, & de penser, comme de faire penser, & de faire dire : Ne faisant que ouvrir l' esprit du Lecteur, vous lui donnez lieu de le faire agir; & il attribue ce qu' il pense, & ce qu' il produit a un effet de son genie, & de son habilité : bien que ce ne soit qu' une suite de l' adresse de l' Auteur, qui ne fait, que lui exposer ses images, & lui preparer de quoi produire, & de quoi raisonner. Que si au contraire on veut dire tout, non seulement on lui ote un plaisir qui le charme, & qui l' attire, mais on fait naitre dans son coeur une indignation segrete, lui donnant sujet de croir qu' on se defie de sa capacite (Bouhours = la maniere de penser quatre Dialogues).

APPROVAZIONI.

Per commissione del Rmo P. Maestro del S. P. A. ho riveduto il Libro intitolato *Teorìa dell' Analisi &c.*, e lungi dal contenere cosa contraria alla Religione, ed alla sana Morale, ho ammirata la moltiplicità de' sublimi principj della Scienza Analitica, che il dotto Autore ha scelti, ed insieme uniti in questa sua Opera, la quale per tal motivo credo degna della pubblica luce.

Dal Collegio Romano li 23. Agosto 1792

Giuseppe Calandrelli publico Professore di Matematica.

SI desiderava ancora un Corso di Elementi di Analisi, e di Algebra, il quale non si ristringesse soltanto ad insegnare i rudimenti della Scienza, ma si proponesse di addestrare i principianti a poter penetrare con piè franco le più astruse, e sublimi ricerche de' più rinomati Geometri, e potesse istradarli a divenir veri Analisti. Si è accorto di questa mancanza il Sig. Ab. Pietro Franchini Professore di Filosofia e Matematica nel Seminario Vescovile di Veroli, e si è proposto di rimediarvi coll' Opera, che egli ora intende di dare alle Stampe, la quale ho riveduto per ordine del Rm̃o Padre Maestro del S. P. A. La scelta delle materie, il luminoso ordine con cui vi sono disposte, la nettezza con cui vi sono spiegate, sono i principali pregj, per i quali, non essendovi dall'altro canto veruna ragione in contrario, crediamo che a vantaggio della Scienza Analitica, e di quei che veramente bramano di giungerne al pieno possesso, non solo debba permettersene, ma anche incoraggirsene la Stampa. In fede &c. Questo dì 4. Settembre 1792.

Gioacchino Pessuti publico Professore di Scienze fisico-matematiche nel Romano Archiginnasio della Sapienza.

IMPRIMATUR.

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro S. Palatii Apostolici.

F. X. Passeri Arch. Larissen. Vicesg.

IMPRIMATUR.

Fr. Th. Vincent. Pani Ord. Præd. Sacri Palatii Apostolici Magister.

TEORIA DELL' ANALISI

PARTE I.

TEORIA DEL CALCOLO

NOZIONI PRELIMINARI.

1. L'Algebra è la scienza delle quantità in genere, cioè di tutto ciò che si può concepire composto di parti, e che è suscettibile per conseguenza di aumento, e di diminuzione (*). Quindi a lei appartiene insegnar le regole, con cui effettuarne il calcolo, investigarne i rapporti, esaminarne le specie, dimostrarne le proprietà, dettagliarne gli usi, e additare finalmente i mezzi, per cui le soluzioni dei problemi tutti, che possono proporsi sulle quantità, riducansi a regole generali. Ecco la

sfe-

(*) *L' etimologia della voce* Algebra *non è fissata abbastanza fra gli eruditi. Secondo il Menagio, il nome* Algebra *deriva dalla parola Arabica* Algiabarat, *che significa ricomposizione di cosa rotta; e ciò nella supposizione, che l' oggetto principale dell' Algebra sia la considerazione de' rotti. Altri con M. d' Herbelot, pretendono, che ella ripeta il nome da un certo Giaber, celebre Chimico degli Arabi, il quale si vuole, che ne sia stato l' inventore. Osservasi però, che gli Arabi non adoprano mai la sola parola* Algebra, *per esprimere ciò, che noi per essa intendiamo; ma sempre vi aggiungono la parola* Macabelah, *la quale significa opposizione, e comparazione, cosicchè* Algebra-Almacabelah *è in Arabo ciò, che noi propriamente diciamo* Algebra.

sfera immensa, in cui si estende la sovrana virtù delle dottrine Algebraiche. Le quantità discrete, che appartengono all' Arimmetica, le quantità continue, che costituiscono la Geometria Elementare, e sublime, e tutte le affezioni delle quantità, quali sono il tempo, il moto, l'elasticità, l'attrazione &c. oggetti sono tutti, su cui l'Algebra dIspiega con mirabil successo la possente sua influenza.

2. Per sodisfare a quest' ampie, e generaii vedute, usa ella di rappresentare le quantità, con dei segni indeterminati, che sono i caratteri Alfabetici, i quali, siccome non limitati per convenzion veruna ad un particolar significato, sono atti a ricevere tutti i valori possibili; ed atti perciò a costituire delle formole universali, che sieno come i germi di tutte le questioni della medesima specie. Per introdurre poi nelle sue moltiplici operazioni un elegante laconismo, ell' adopera varj altri segni, che sono come tante caratteristiche significanti, dalle quali vien sostenuto, e diretto il difficil volo dell'ingegno calcolatore. Con questi convien familiarizzarsi fino d'adesso, e però noi passiamo a dettagliarne i principali.

3. L' addizione si è convenuto di rappresentarla col segno $+$, che si enuncia *più*; e la sottrazione si è pensato di esprimerla col segno $-$, che si pronunzia *meno*: Per indicare la moltiplicazione s'immaginò il segno $\times$, o un punto; ma nondimeno si volle per maggior comodo, che ab fosse lo stesso che $a \times b$, o $a.b$.

La divisione finalmente si fissò di significarla con due punti, o con una linea infraposta oriz-

zon-

zontalmente al dividendo, che si pone sopra, e al divisore. Così $a : b$, non meno che $\frac{a}{b}$ significa doversi dividere a per b.

4. Per accennare che una quantità b sia minore di un' altra a, si determinò di scrivere $b < a$; e perciò di scrivere $a > b$ per mostrare, che a sia maggiore di b. Per dimostrare poi l'eguaglianza di due quantità b ed a si stabilì di usare il segno $=$, per cui $a = b$ significa il rapporto di eguaglianza, che sussiste fra b, ed a, rapporto, che dicesi equazione.

5. Dicesi termine monomio, o termine assolutamente, un' espressione Algebraica, in cui le quantità componenti non sieno congiunte con altre, mediante i segni $+$, o $-$. Dicesi poi termine positivo quello, che vien preceduto dal segno $+$, o da niun segno, e dicesi negativo quel termine che sia preceduto dal segno $-$.

Ecco dei monomj a, ab, $\frac{ab}{c}$ &c.

6. Binomio è un' espressione composta di due termini, come $a-b$, a^2+b^2 &c. Trinomio è un'espressione composta di tre termini &c. In generale si chiamò Polinomio un'espressione, che risulta dall'unione di più termini. Ogni Polinomio poi, se venga riguardato come composto di alcuna quantità in particolare, per esempio, di a, b &c., si distingue col nome di funzione di a, b &c.

7. Allorchè si deve indicare la moltiplicazione, e la division di un polinomio per un monomio, o per un polinomio, si fa uso delle pa-

 ren-

rentesi, o di una linea sovraposta a ciascun fattore. Così $(a+b)(c+d)$, o $\overline{a+b}\,.\,\overline{c+d}$ è lo stesso che $a+b$ moltiplicato per $c+d$, e lo stesso vale per la divisione, cosicchè .... $(a+b):(c+d)$ equivale ad $\overline{a+b}:\overline{c+d}$, o sia ad $\frac{a+b}{c+d}$.

8. Quando si presenta in un' espressione Algebraica una lettera ripetuta più volte, come $a+a+a+a$ per evitar l'incomodo di scriverla successivamente, si scrive una sola volta, e se le prefige a sinistra una cifra, la quale esprima quante volte dev'esser presa. Così l'addotta espressione diventa $=4a$. Queste cifre, che precedono le lettere, si chiamano coefficienti.

9. Non meno frequentemente accade, che s'incontri di dover moltiplicare una medesima quantità più volte per se stessa; In questo caso invece di scrivere per esempio $a \times a \times a \times a$ si sovrapone alla lettera, verso la destra, una cifra, la quale significhi, quante volte debba ella esser fattrice nel prodotto. In questa guisa il prodotto $a \times a \times a \times a$ si riduce alla forma semplicissima a^4. In generale si scrive a^n per significare che a sia moltiplicata $n-1$ volte per se stessa.

La cifra n viene sotto nome di esponente.

10. *Scol.* Ogni quantità della forma a^n dicesi generalmente quantità potenziale, poichè il prodotto di una quantità per se stessa si suol chiamar potenza, che prende il nome specifico dal numero dell'unità, che si contengono nel suo indice n.

La

La quantità che moltiplicata per se stessa $n-1$ volte ha prodotto una potenza a^n, si chiama radice $n.^{sima}$ di a^n, volendo significare, che a è stata il principio fondamentale, ond'è nata la potenza a^n; e si rappresenta col segno $\sqrt[n]{}$; Così $\sqrt[3]{a}$ significa la quantità, che moltiplicata per se stessa due volte produce a. Molte volte queste radici non possono aversi in termini esatti, ed allora il radicale dicesi irrazionale, sordo, incommensurabile, impossibile.

11. Se in un'espressione Algebrica si abbiano dei termini composti delle medesime lettere, e dei medesimi esponenti, essi diconsi termini simili. Questi debbonsi ridurre ad uno, con aggiungerli insieme, se sieno positivi, e con sottrarne quelli, che sien negativi. Così la quantità $2a+5b^2+3ab-a-b^2+2ab$ si riduce ad $a+4b^2+5ab$. Quest'operazione è ciò che dicesi comunemente riduzione. Ella non deve giammai trascurarsi.

CAPITOLO I.

Del Calcolo delle quantità intere.

SEZIONE I.

ADDIZIONE.

12. Le quantità intere, tanto semplici, quanto composte si sommano insieme con porle una presso l'altra con i segni che hanno. Così a^2+5ac si somma con $3a^2-5ad$, scrivendo $a^2+5ac+3a^2-5ad$; Non resta che da farsi la riduzione, onde avere $4a^2+5a\ (c-d)$.

 SE-

SEZIONE II.

SOTTRAZIONE.

13. Per sottrarre una quantità da un'altra, basta mutare i segni; che l'accompagnano, e render perciò negativi i segni positivi, e viceversa, di poi effettuar la somma delle due quantità proposte, come sopra. Così per sottrarre b da a, muto il segno implicito $+$ della lettera b, in $-$, e sommo a, e $-b$; la somma $a-b$ è il residuo cercato.

14. Se b fosse una quantità complessa niente varierebbe l'operazione, e per sottrarre $b-c$ da a si avrebbe al solito $a-b+c$.

15. *Scol.* La mutazione del segno positivo in negativo nella quantità da sottrarsi, si conosce come assai naturale, perchè il segno negativo significa di sua natura una sottrazione; non si concepisce però con egual facilità il motivo, per cui debbasi mutare il segno negativo in positivo. Ecco un raziocinio atto a spargere assai di luce sù questa verità.

Prender negativamente una quantità, e lo stesso che prenderla in senso contrario alla di lei maniera di esistere; poichè una quantità negativa distrugge l'effetto di un'egual quantità positiva. Ma prendere in senso contrario una quantità negativa non è altro che prenderla in senso positivo, perchè le due maniere di esistere fra loro contrarie, di una quantità sono l'esistenza positiva, e l'esistenza negativa: Dunque per sottrarre qualsivoglia quantità in qualunque stato ella sia, convien prenderla in senso contrario, come lo dimostra la natura della sottrazione; dun-

dunque per sottrarre una quantità negativa bisogna renderla positiva.

16. La medesima verità si può comprovare con dimostrazione indiretta, assai persuasiva, nella maniera seguente.

Si debba sottrarre $b-c$ dalla quantità qualunque a. Posto $b-c=m$, il residuo cercato dovrà essere $=a-m=a-(b-c)=a-b+c$. Di fatto se si dovesse sottrarre solamente b, si avrebbe per risiduo $a-b$. Siccome però non si deve sottrarre b intero, ma b diminuito di c, il residuo $a-b$ é minore del dovere, ed è minore precisamente della quantità c.

Per restituirle pertanto la dovuta grandezza, se gli deve aggiunger c: Con questo esso diviene $a-b+c$, residuo cercato, e conforme alla regola esposta.

SEZIONE III.

MOLTIPLICAZIONE.

17. Siccome ogni moltiplicazione si riduce a moltiplicazione di monomj, come in seguito si vedrà chiaramente, e qualsivoglia monomio è composto di quattro parti, che sono i segni, i coefficienti, le lettere, e gli esponenti, quindi a quattro riduconsi le regole, necessarie per effettuar qualunque moltiplicazione.

Reg. 1. Per i segni. Il prodotto di segni eguali è positivo, e il prodotto di segni diversi è negativo.

Reg. 2. Per i coefficienti. I coefficienti si moltiplicano come in arimmetica.

Reg. 3. Per le lettere. Le lettere si scrivono di

seguito senza interporvi alcun segno.

Reg. 4. Per gli esponenti. Gli esponenti delle medesime lettere, che debbono insiem moltiplicarsi, si aggiungono coll' addizione.

18. La ragione della prima regola è, che quando una quantità positiva si prende positivamente, si prende nel suo stato attuale, e perciò rimane positiva; quando una quantità negativa si prende negativamente; si prende nello stato a lei contrario, e diviene perciò positiva; quando una quantità positiva si prende in senso negativo ella passa allo stato contrario, e divien negativa; quando finalmente una quantità negativa si prende positivamente, non si cangia il suo stato, e riman negativa, qual'era.

19. In altro modo. Moltiplicare una quantità positiva m per una quantità negativa $-n$, o viceversa, che è lo stesso, altro non è che sottrarre da zero la quantità m presa n volte, e perciò il risultato dev' essere $=o-mn=-mn$. Moltiplicare una quantità negativa $-m$ per una quantità pur negativa $-n$, altro non è, che sottrarre da zero $-m$ preso n volte, onde il risultato dev' essere $=o+mn=+mn$.

20. Ma vediamolo con più chiarezza con una dimostrazione indiretta.

Quando si deve moltiplicare a per $b-c$, e si prende il primo prodotto parziale ab, si prende un prodotto troppo grande; perchè non si deve prendere il moltiplicando a, b volte, ma $b-c$ volte; dunque dal prodotto parziale ab si deve togliere a presa c volte, e perciò il prodotto dev' essere $ab-ac$; dunque $+\times-=-$.

Dovendo moltiplicare a-b per c-d è manifesto, che il il prodotto di $a-b$ per c, vale a dire $ac-bc$, è maggiore del prodotto vero, perchè $a-b$ non si deve prendere c volte, ma $c-d$ volte; perciò dal prodotto $ac-bc$ si deve togliere $a-b$ preso d volte, cioè $ad-bd$; Ora $ac-bc-(ad-bd)$ $=ac-bc-ad+bd$, dunque $-\times-=+$.

21 La ragione della seconda regola si ha dall' arimmetica.

22. La ragione della terza dipende dalla convenzione degl'Algebristi.

23. Per concepir la ragione della quarta, suppongasi di dover moltiplicare a^m per a^n; Si ponga $a^m=b$, ed $a^n=c$; Si avrà il prodotto $a^m\times a^n$ $=bc=a^m a^n=aaaa^{m\,\text{volte}}\ aaaa^{n\,\text{volte}}=a^{m+n}$.

24. Sapendo eseguir la moltiplicazione de' monomj, la moltiplicazione de' polinomj non ha difficoltà. Altro non si deve fare, che moltiplicar ciascun termine del moltiplicando, per ciascun termine del moltiplicatore, e fare in appresso la riduzione nella somma dei prodotti parziali.

Ecco un' esempio.

$$\begin{array}{ll} A \ldots\ldots & 3x+4ac \\ B \ldots\ldots & 2x+2ax^2 \\ \hline C \ldots\ldots & 6x^2+8acx+6ax^3+8a^2cx^2 \end{array}$$

A indica il moltiplicando, B il moltiplicatore, e C il prodotto.

SEZIONE IV.

DIVISIONE.

25. Per dividere due quantità eterogenee l'una per l'altra, come per dividere a per b, si accenna soltanto l'operazione, con porre $\frac{a}{b}$, overo $a:b$.

26. *Scol.* Dividendo una quantità qualunque a per un' altra qualunque b, il quoziente risulta minore tante volte del dividendo a, quante volte b contiene l'unità, cioè risulta il quoziente una parte *aliquota* di a, che dev'esser presa b volte, affinchè uguagli a. Difatto $\frac{a}{b}$ preso b volte è $=a$.

27. Supponiamo intanto, che le quantità proposte a dividersi, sieno monomj, che abbiano qualche cosa di comune. Quattro sono le regole, che debbon' osservarsi come nella moltiplicazione.

Reg. 1. Per i segni. Che il quoziente di segni eguali è positivo, e il quoziente di segni diversi è negativo.

Reg. 2. Per i coefficienti. I coefficienti si dividono secondo le regole dell'Arimmetica.

Reg. 3. Per le lettere. Le lettere che essendo affette dal medesimo esponente si trovano comuni al dividendo, e al divisore, si distruggono, ed equivalgono all' unità.

Reg. 4. Per gli esponenti. Gli esponenti che appartengono a lettere della medesima specie, le quali debbansi dividere l'una per l'altra, si sottraggono fra di loro, cosicchè il quoziente abbia per esponente la differenza, che passa fra l'esponente del dividendo, e l'esponente del divisore; così $a^4:a^2=a^{4-2}=a^2$.

28. La ragione della regola addotta per i segni è facile a concepirsi, e se ne può uno convincere anche da questo, che altrimenti non potreb-

trebbe sussister l'eguaglianza fra il dividendo, e il prodotto del divisore nel quoziente.

29. Per comprender la regola delle lettere basta osservare che $\frac{a}{a}=1$; che $\frac{ab}{ab}=1$ &c.

30. La regola finalmente degl'esponenti si può dimostrare nel modo seguente.

Si debba dividere a^m per a^n, e sia sulle prime $m>n=n+r$; si avrà la frazione $\frac{a^{n+r}}{a^n}=\frac{a^n}{a^n}.a^r=a^r=a^{m-n}$; dunque $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

Sia in secondo luogo $m=n$, e avrà $\frac{a^m}{a^m}=1$; ma a^{m-m} è parimente $=1$, dunque &c.

Per vedere che a^{m-m} sia $=1$, si ponga $a^{m-m}=x$. Moltiplicando ambedue i membri per a^m, si avrà $a^m=a^m x$, e perciò $x=1$.

Sia finalmente $m<n=n-r$; si avrà $\frac{a^m}{a^n}=$ ...... $\frac{a^{n-r}}{a^n}=\frac{a^n}{a^n}\times a^{-r}=a^{-r}$; ma $-r=m-n$, dunque &c.

Si può qui osservare, che a^{-r} è $=\frac{1}{a^r}$; difatto sia $a^{-r}=x$; moltiplicando per a^r, si avrà ...... $a^{r-r}=a^0=1=a^r x$; dunque $x=\frac{1}{a^r}$.

31. Trattandosi di dividere un polinomio per un'altro polinomio, si ordini il dividendo, e il divisore per le potenze di una medesima lettera.

Si divida il primo termine del dividendo per il

primo termine del divisore, secondo le regole de' monomj; si sottragga quindi dal dividendo il prodotto del divisore nel quoziente, e ordinato il residuo per le potenze della solita lettera, si prosegua l'operazione, finchè si giunga ad ottener l'intero quoziente, se è possibile; ovvero finchè si giunga ad un residuo indivisibile, che si lascia in forma di frazione. Ecco un esempio.

Sia $3x^4+9ax^3-2x^3-6ax^2-81x+56$ da dividersi per $3x-2$; Avend'ordinato il dividendo, e il divisore per le potenze di x, comincio a dividere $3x^4$ per $3x$, ed ottengo per primo termine del quoziente x^3; Faccio il prodotto di x^3 per $3x-2$, e lo sottraggo dal dividendo. Mi rimane $9ax^3-6ax^2-81x+56$ che seguito a dividere per $3x-2$. Divido il primo termine $9ax^3$ per $3x$, ed ottengo per secondo termine del quoziente $3ax^2$. Moltiplico questo termine per il divisore $3x-2$, e fatta la sottrazione mi resta $-81x+56$ che divido al solito per $3x-2$. Trovo -27 per terzo termine, e sottratto il prodotto di esso per il divisore, trovo 2 per residuo, che non è più divisibile per $3x-2$, e che perciò lo scrivo in forma di frazione $\frac{2}{3x-2}$. Con questo il quoziente completo è $x^3+3ax^2-27+\frac{2}{3x-2}$.

32. E' facile a vedersi, che quando s'incontra qualche lettera, comune a tutti i termini del dividendo, e del divisore, si può essa cancellare impunemente, e che anzi ciò conferisce a facilitar l'operazione.

33. *Scol.* Nell' Arimmetica, quando si tratta di fare una division composta, dopo aver separato un'opportuno numero di cifre del dividendo, si osserva, che la prima cifra del divisore si contenga nella prima, o nelle due prime cifre del dividendo, tante volte, quante la seconda cifra del divisore entra nella seconda del dividendo, ovvero nella terza, (qualora la prima cifra del divisore fosse stata maggiore della prima cifra del dividendo), accresciuta del residuo, e così di tutte le altre cifre: in una parola, non si mette una cifra nel quoto, se non siasi certo, che ella abbia la grandezza richiesta. In Algebra poi si misura il primo termine del divisore nel primo termine del dividendo, e si conclude sul momento, che tutto il divisore sta nel dividendo un'egual numero di volte.

Riflettendo però, non dee tardarsi a conoscere, che quest'inconveniente, il quale deriva dalla natura delle quantità letterali, da cui non si ammette quell'esame, che si può praticar sulle cifre, vien corretto dal rapporto, che passa fra i residui successivi, i quali risultano positivi, o negativi, secondo che il termine precedente, che si è avuto nel quoziente, sia stato maggiore, o minore del vero, e somministrano dei quozienti parziali, che presi tutti insieme compensano il proprio lor difetto, correggendosi vicendevolmente, e vengono così a formare il quoziente richiesto.

CAPITOLO II.

DELLE FRAZIONI.

34. Frazione, o rotto, è la riunione di alcune delle parti, nelle quali si suppone divisa un'unità qualunque. L'idea

L'idea di una frazione rappresenta una divisione indicata, nella quale il divisore sia maggiore del dividendo. Così la frazione $\frac{a}{b}$ rappresenta un quoziente da trovarsi, con dividere a per b; ed è chiaro, che se a fosse uguale a b, il quoziente $\frac{a}{b}$ non esprimerebbe più una frazione, ma un'intero $=1$, e che essendo $a>b$, esprimerebbe una, o più unità con una frazione.

La lettera, che stà in luogo del dividendo, come in $\frac{a}{b}$, la lettera a dicesi numeratore, perchè numera, quante siensi prese delle parti, nelle quali fu divisa l'unità; e la lettera, che fà le veci del divisore, come b, si chiama denominatore, perchè dà la denominazione alle parti suddette, determinandone la specifica quantità, relativamente all'unità principale.

35. *Teor.* Una frazione, in cui si supponga, che il denominatore e il numeratore vadano successivamente variando, tanto più cresce, quanto più cresce il numeratore; e tanto più diminuisce quanto più cresce il denominatore. *Dimostrazione.* Quanto più cresce il numeratore, tante più sono le parti dell'unità, che si suppongono prese; dunque &c. quanto più cresce il denominatore, tanto più cresce il numero delle parti, nelle quali si suppon divisa l'unità; quindi diventano più piccole, e perciò la frazione diventa più piccola anch'essa.

Di

Di qui ne segue, che accrescendo all'infinito il denominatore, debba diminuir la frazione all'infinito, e che debba essere $\frac{a}{\infty}=0$, quantità infinitamente piccola.

36. *Teor.* Non si altera il valore di una frazione, se si moltiplichi ciascuno de' suo termini per una medesima quantità. *Dimostrazione*. Ogni frazione tanto cresce, rimanendo costante il denominatore, quanto cresce il numeratore; e tanto decresce, non variandosi il denominatore, quanto cresce il denominatore stesso.

Ma con moltiplicare ambedue i termini di una frazione per una medesima quantità, tanto si accresce il numeratore, quanto si accresce il denominatore, dunque la frazione soffre due mutazioni contrarie fra loro eguali, e rimane per conseguenza inalterata.

Lo stesso raziocinio ha luogo, qualora si dividano ambedue i termini di una frazione per una medesima quantità.

37. V'è dunque un' infinità di frazioni, che hanno il medesimo valore, benchè sieno di forma diversa.

38. Due ricerche ci si presentano adesso sulle frazioni, e sono 1. Un metodo, col quale conoscere la grandezza assoluta di una frazione data qualunque. 2. Un metodo, con cui discuoprire la grandezza relativa di due frazioni date qualunque.

Alla prima ricerca si può sodisfare col seguente

39. *Probl.* Ridurre una frazione qualunque alla sua più semplice espressione. *Soluzione*. Sia data la frazione $\frac{A}{B}$. Affichè questa sia riducibile ad

ad un'espressione più semplice, conviene, che i suoi due termini abbiano un divisor comune; siccome poi può avvenire, che abbiano più divisori comuni, per ottenere la proposta riduzione, convien trovare il massimo di tali divisori. Trovato questo, non resterà che dividere per esso ambedue i termini A, e B. La questione dunque si riduca a determinare il massimo divisor comune di due quantità date, che sieno espresse generalmente per A, e B.

40. A quest'effetto si divida la quantità maggiore, che sia per esempio A per la minore B. Se la divisione riesce esatta, B è il massimo divisor cercato. Qualora poi si abbia un quoziente m, ed un residuo $\frac{C}{B}$, si divida B per C, e se la divisione riesce senza residuo, C sarà il massimo divisore. In generale, il residuo si faccia successivamente divisore, e il divisore antecedente si faccia dividendo, finchè si giunga ad ottenere un quoziente esatto..

Quando ciò avvenga, l'ultimo divisore è il divisor più grande richiesto. Se poi con le successive divisioni, non si possa pervenir giammai ad un quoziente intero, si dovrà concludere, che le quantità date non ammettono alcun divisor comune.

41. Per meglio concepir la ragione di questo metodo, suppongasi, che A contenga B un numero esatto di volte, per esempio m; è chiaro, che B misurerà esattamente i due termini della frazione $\frac{A}{B}=\frac{mB}{B}$.

Ma

Ma supponghiamo, che B si contenga m volte in A, e che avanzi un residuo C; sarà $A-C=mB$. Quindi se C preso un determinato numero di volte eguaglia B, se abbiasi, per esempio, $nC=B$, lo stesso C preso un determinato numero di volte dovrà eguagliare $A-C$, e si deve avere $A-C=nmC$, e perciò $A=(nm+1)C$.

Dunque se C divida esattamente B, deve dividere esattamente anche A, ed esser per conseguenza comun divisore di A, e B. Ma se, diviso B per C, rimanga un residuo D, cosicchè sia $B=nC+D$, sarà $B-D=nC$. Suppongasi, che D sia divisore esatto di C, onde abbiasi $pD=C$, e dall' equazione $B-D=nC$, si avrà $B=(np+1)D$, e per questo l'equazione $A-C=mB$, sostituendo pD per C, ed $(np+1)D$ per B, diviene $A-pD=m(np+1)D$, e di qui $A=(mnp+m+p)D$. Ecco pertanto, che se C sia divisibile esattamente per D, B ancora ed A debbon esser per esso divisibili esattamente. Proseguendo il medesimo raziocinio si concluderà in generale, che l'ultimo divisore esatto è un divisor comune di A, e di B.

42. In questa maniera però vien dimostrato soltanto, che l'ultimo divisore esatto è comun divisore di A, e B; rimane da provarsi, il che si trascura dagli Algebristi, esser egli il più grande di tutti i divisori possibili, comuni ad A, e B. Sia per quest' oggetto

L E M M A.

Se a, e b sieno due numeri primi fra di loro, la funzione $ma+b$ non è divisibile per a. *Dimostrazione ad assordo*.

Sia, se è possibile, $\frac{ma+b}{a}=n$, essendo n un numero intero; sarà $ma+b=na$, e $b=(n-m)a$, cioè un multiplo di a, il che contradice all'ipotesi, che a, e b sieno primi fra loro; dunque &c.

43. *Probl.* Determinare, se il divisor comune di A, e B trovato col metodo esposto, sia generalmente il più grande di tutti i comuni divisori possibili. *Soluzione*.

Sia sulle prime $\frac{A}{B}=m+\frac{C}{B}$, dove C non sia divisibile per B; si avrà l'equazione $A=mB+C$; si divida B per C, e suppongasi che la divisione succeda esattamente, onde sia $\frac{B}{C}=n$, o sia $B=nC$; risulterà $\frac{A}{B}=\frac{mB+C}{B}=\frac{mnC+C}{nC}=\frac{mn+1}{n}$; Io dico, che $mn+1$ non può dividersi esattamente per n.

Suppongasi $\frac{A}{B}=\frac{bpC}{bqC}$, onde sia bC divisor comune di A, e B. In vigore dell' equazione $\frac{mn+1}{n}=\frac{A}{B}$ si deve avere $mn+1=bp$, $n=bq$. Si sostituisca nella prima il valore di n preso dalla seconda, e si avrà $bp=mbq+1$, e perciò $b=\frac{1}{p-mq}$, il che dimostra, che b, dovendo aver numero intero, non può esser che $=1$, e che il massimo divisore di $\frac{A}{B}$ non può esser per conseguenza, che C.

Se B non sia divisibile per C, ma sia $\frac{B}{C}=c+\frac{D}{C}$ essendo $\frac{C}{D}=r$, o sia $rD=C$, si proverà, come sopra, che B, e C non ammettono divisor più grande del divisore D. Rimane da provarsi, che A, e B ancora non possano avere più gran divisore, che D.

Per provar questo, sia $\frac{B}{C}=\frac{aD}{bD}$, dove, a motivo che D si suppone il massimo divisore di B, e C, a, e b debbono esser due numeri primi fra loro.

Si sostituisca aD in vece di B, e bD in vece di C nell'equazione $A=mB+C$, ed essa diverrà, dividendo per B, $\frac{A}{B}=\frac{am\,D+bD}{aD}=\frac{am+b}{a}$; mà per il Lemma, $ma+b$ non é divisibile per a; dunque $\frac{maD+bD}{aD}$ non ammette altro divisor più grande, che D. Se il quoziente esatto sia più lontano, varrà lo stesso raziocinio, e però si può concludere generalmente, che l'ultimo divisore esatto, trovato col metodo da noi esposto, è realmente il massimo, qual si cercava,

44. La medesima verità si può dimostrare con un'altro metodo, che dipende dal principio seguente: *Che se due quantità* a, b *sieno tali, che la maggiore, essendo divisa per la minore, dia un quoziente composto di un' intero più una frazione, cioè più un residuo* c, *una quantità qualunque, che sia*

sia misura comune di a, *e* b, *divide necessariamente anche il residuo* c. Ed è facile trovarne la dimostrazione. Con questo principio si vede chiaramente, che l'ultimo divisore esatto essendo k, fra a, b, e k non vi può esser misura comune maggiore di k, cioè dell'ultimo divisore esatto; ma qualunque misura comune di a, e b dev'esser misura comune di a, b, k (princ.cit.); dunque l'ultimo divisore esatto k è il massimo dei divisori comuni di a, e b.

45. Trovato il massimo divisor comune dei due termini della frazione da ridursi ad un'espressione più semplice, non rimane, che effettuar la divisione di essi per detto divisore, e con ciò la frazione prenderà una forma, che mostrerá più chiaramente la grandezza assoluta di se stessa; il che si trattava di conoscere.

Esempio. Sia proposta la frazione $\frac{6a^3-6a^2b+2ab^2-2b^3}{4a^2-5ab+b^2}$ e debbasi ridurre ad un' espressione piú semplice. Osservo primieramente, che siccome 2 è comune a tutti i termini del numeratore, e non a quelli del denominatore, si può dividere il numeratore per 2 senza che venga in alcun modo alterato il divisor comune. Così la frazione diviene $\frac{3a^3-3a^2b+ab^2-b^3}{4a^2-5ab+b^2}$.

Essendo già ordinati i termini, comincio a far la divisione; ma siccome il primo termine $3a^3$ non si può dividere per $4a^2$, moltiplico tutto il dividendo per 4, numero, che non è comune a tutt'i termini del divisore, e che perciò non può aver parte nel divisor massimo. Ottengo pertanto to $12a^3-12a^2b+4ab^2-4b^3$ da dividersi per $4a^2-5ab+b^2$; Fatta la divisione ho $3a$ per quoto, e $3a^2b+ab^2-4b^3$ per residuo. Per questo residuo divido $4a^2-5ab+b^2$, dopo aver diviso il residuo per b, e dopo aver moltiplicato il dividendo $4a^2-5ab+b$ per 3, onde i fattori suddetti della divisione si riducano ai seguenti; $12a^2-15ab+3b^2$, $3a^2+ab-4b^2$; Effettuata la divisione trovo per quoziente 4, e per residuo $-19ab+19b^2$; Questo lo divido per $19b$, che è una quantità non comune ai termini del dividendo, $3a^2+ab-4b^2$, e faccio per conseguenza la divisione per $-a+b$.

Ella succede senza residuo, ed io concludo, che $-a+b$ è il massimo divisor cercato. Per questo divido ambedue i termini della frazione proposta,

e la riduco alla forma $\dfrac{2b^2+6a^2}{4a-b}$.

46. Qualora con le successive divisioni non giungasi mai ad ottenere un quoziente intero, si deve arrivar necessariamente a un divisore $=1$; Questo farà vedere, che le due quantità proposte non ammettono divisor comune, cioè che sono due quantità prime fra loro.

47. *Scol.* Intorno alle quantità prime si possono qui dimostrare opportunamente le verità che seguono.

1. Che se due quantità m, n sieno prime fra di loro, una terza quantità r, che misuri esattamente una di esse, per esempio m, dev'esser prima rispetto all'altra n. Difatto se n, ed r avessero un fattor comune, un tal fattore dovrebbe appartenere anche ad m, che è misurata da r.

 2. Che

2. Che se due quantità m, n sieno prime relativamente ad una terza r, il prodotto mn dev' esser primo anch' esso per rapporto ad r: poichè se mn ed r potessero avere un divisor comune, questo dovrebb'essere un divisore di mn; ma mn non ammette altri divisori, che m, n, o le parti *aliquote*, o multiple di m, ed n;

Le quantità m, n non posson dividere r, perchè ciascuna di esse è prima ad r; perciò neppure le parti *aliquote*, nè le parti multiple di esse possono dividere la quantità r. Dunque mn, ed r non ammettono alcun divisor comune.

3. Se due quantità m, r sieno prime fra loro sarà m^2 primo ad r, e viceversa; per vederne la ragione basta porre $m=n$, onde il prodotto mn del caso precedente si riduca ad m^2.

4. Se abbiansi due quantità m, n, le quali sieno prime alle quantità; r, s, dovrà pure aversi il prodotto mn primo al prodotto rs; difatto mn è una quantità prima ad r, e ad s per il caso secondo.

5. In generale, il prodotto di un numero qualunque di quantità prima, è primo per rapporto al prodotto di un'altro numero di quantità prime.

48. *Scol.* 2. Il Metodo esposto vale, com'è ben' evidente, per le frazioni numeriche. Esse però si possono alle volte ridurre ad un' espressione più semplice con degl'artifizj particolari, i quali conducono più speditamente all' intento. Questi si riducono a sei, e sono:

1. Quando ambedue i termini di una frazione finiscono in pari, sono divisibili per 2.

2. Quando i termini di una frazione finiscono

no in zero sono divisibili per 5, e per 10.

3. Se finiscano in 5 sono divisibili per 5.

4. Se la somma delle cifre componenti ambedue i termini di una frazione sia multipla di 3, son'essi divisibili per 3.

5. Quando le due ultime cifre dei termini di una frazione sono divisibili per 4, i termini stessi sono divisibili per 4.

6. Qualora finalmente i termini di una frazione sieno tali, che le ultime tre cifre sieno divisibili per 8, sarann'essi intieramente divisibili per 8.

49. Col Metodo del massimo comun divisore si può dunque agevolare il giudizio della grandezza assoluta di una frazione. Generalmente però importa forse più il conoscerne la grandezza relativa. A quest'oggetto sia

L E M M A.

50. Ridurre un numero qualunque di frazioni al medesimo denominatore. *Soluzione*. Si moltiplichino ambedue i termini di ciascuna frazione per il prodotto dei denominatori di tutte le altre frazioni, e le frazioni risultanti saranno quali si richiedono. Per comprendere il fondamento della regola basta osservarne un'esempio. Sieno da ridursi al medesimo denominatore le due frazioni $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$; operando come si è insegnato, si ha la prima $\frac{a.d}{b.d}$, e la seconda $\frac{c.b}{d.b}$, cioè le due frazioni ridotte sono $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$.

51. *Teor*, Due frazioni, che abbiano il medesimo numeratore stanno fra di loro in ragione inversa de'numeratori. *Dimostrazione*. Sieno due frazioni qualunque $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, riducendole al medesimo denominatore divengono $\frac{ac}{bc}$, $\frac{ab}{bc}$, e queste si vede, che stanno fra loro, come $c:b$, cioè in ragione inversa dei denominatori.

52. *Teor*. Due frazioni, che abbiano il medesimo denominatore, stanno fra loro come i numeratori. Difatto basta moltiplicarle ambedue per il denominatore comune, ed apparisce immediatamente il divisato rapporto.

53. *Teor*. Due frazioni, che non abbiano verun termine comune, stanno fra di loro come il prodotto del numeratore di una nel denominatore dell'altra al prodotto del numeratore della seconda nel denominatore della prima. *Dimostrazione*. Sieno $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$ le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ridotte al medesimo denominatore; si vede, che stà $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} :: ad : bc$. Se in questa formola si ponga $a=c$ si ha la dimostrazione del primo Teorema, e se pongasi $b=d$ si ha la dimostrazione del secondo.

Passiamo adesso al Calcolo delle Frazioni.

S E Z I O N E I.

Dell'Addizione delle Frazioni.

54. Per sommare un numero qualunque di fra-

frazioni, si riducono tutte allo stesso denominatore; poi si sommino i numeratori, ed a tal somma si dia per denominatore il denominator comune. Sia da sommarsi $\frac{a}{b}$ con $\frac{c}{d}$; si avrà $\frac{ad+bc}{bd}$. Lo stesso vale per un numero maggiore di frazioni.

SEZIONE II.

Della Sottrazione delle Frazioni.

55. Si riducano le frazioni date al medesimo denominatore, e si sottragga il numeratore della frazione sottraenda dal numeratore dell' altra frazione; alla differenza diasi il denominator comune, e si avrà il risultato richiesto. Per sottrarre, per esempio, $\frac{a}{b}$ da $\frac{c}{d}$ si trova $\frac{bc-ad}{bd}$.

SEZIONE III.

Della Moltiplicazione delle Frazioni.

56. *Probl.* Moltiplicare una frazione per un intero. *Soluzione*. Siccome il moltiplicare una frazione per un intero altro non è, che prender la frazione tante volte, quante unità si contengono nell'intiero, che moltiplica; e poichè tanto cresce una frazione, quanto cresce il numeratore, rimanendo invariato il denominatore, o viceversa; basta moltiplicare il numeratore della frazione data per l'intero, ed al prodotto sottoporre il denominatore della frazione moltiplicanda.

Co-

Così per moltiplicare $\frac{a}{b}$ per c si ha per prodotto $\frac{ac}{b}$.

57. *Probl.* Moltiplicare una frazione per un' altra. *Soluzione*. Si moltiplichino insieme i numeratori, e si divida il prodotto per il prodotto dei denominatori: il risultato è il prodotto richiesto. Difatto sia da moltiplicarsi $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ e suppongasi sulle prime di dover moltiplicare solamente per c; si avrà il prodotto $\frac{ac}{b}$

Siccome però il moltiplicatore doveva essere una quantità minore d volte di c, il prodotto dev' esser minore d volte di $\frac{ac}{b}$: basta dunque accrescere d volte il denominatore b, e con ciò il risultato $\frac{ac}{bd}$ sarà minore d volte di $\frac{ac}{b}$, e perciò, sarà il prodotto richiesto, come si era insegnato.

58. La soluzione addotta si può dimostrare ancora in due altre maniere.

In virtù di ciò che si è detto al (*n.*30.) si sà, che $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d}$ si riducono alla forma ab^{-1}, cd^{-1}; ora $ab^{-1} \times cd^{-1}$ è $= acb^{-1}d^{-1} = ac \times \frac{1}{bd} = \frac{ac}{bd}$; dunque ec.

59. Per vedere la stessa verità in altro modo, si ponga $\frac{a}{b} = A$; e $\frac{c}{d} = B$; si moltiplichino i due membri della prima equazione per b, e quel

e quelli della seconda per d, onde si riducano alla forma $a=bA$, $c=dB$. Si moltiplichi adesso il primo membro della prima per il primo della seconda, e il risultato si eguagli al prodotto del secondo membro della seconda per il secondo della prima, e sarà $ac=bdAB$; Si dividano ambi i membri di questa per bd, e si avrà finalmente $\frac{ac}{bd}=AB$; ma $AB=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$; dunque &c. &c.

60. Qualora debbasi moltiplicare un' intero unito ad un rotto per un intero unito anch'esso ad un rotto, basta ridurre ciascun fattore in un solo termine fratto, e dipoi eseguire la moltiplicazione al solito. Così $\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(d+\frac{e}{g}\right)$ $=\left(\frac{ac+b}{c}\right)\left(\frac{dg+e}{g}\right)=\frac{acdg+bdg+ace+be}{cg}$.

61. Si può adesso concepir facilmente, che per ottenere il valore di una frazione di frazione all' infinito, si richiede soltanto di moltiplicare insieme tutti i numeratori, e dividere questo risultato per il prodotto di tutti i denominatori; Questo si comprenderà anche meglio con un'esempio. Si debba trovare, per esempio, che cosa sia $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{3}{5}$. E' chiaro che basta determinare il valore di $\frac{3}{4}$ di $\frac{3}{5}$, e poi prender $\frac{2}{3}$ di tal risultato; ora $\frac{3}{4}$ di $\frac{3}{5}$ si ha colla sem-

pli-

plice moltiplicazione $=\frac{9}{20}$; dunque $\frac{2}{3}$ di $\frac{9}{20}$, cioè $\frac{18}{60}$ è il valore cercato, che dividendo per 2, e poi per 3 diviene $\frac{3}{10}$.

In generale si avrà la porzione $\frac{a}{b}$ della frazione $\frac{c}{d}$ della frazione $\frac{e}{f}$ &c. della frazione $\frac{m}{n}$ eguale alla frazione $\frac{ace\ldots\ldots m}{bdf\ldots\ldots n}$.

SEZIONE IV.

Della divisione delle frazioni.

62. *Probl.* Dividere una frazione per un'intero. *Soluzione*. Si moltiplichi il denominatore della frazione per l' intero dato, e al prodotto diasi per numeratore quello della frazione proposta. Sarà tal frazione il quoziente richiesto. Ecco un raziocinio opportunissimo a dimostrare la regola esposta.

L' oggetto della divisione di una quantità qualunque a per una quantità qualunque b è di trovare una nuova quantità minore tante volte del dividendo a, quante volte l' unità è minore del divisor b. Infatto $\frac{a}{b}$ si contiene in a, b volte, cioè tante volte, quante l'unità si contiene in b; poichè pigliando $\frac{a}{b}$ b volte, si riproduce a. Ma

se

se moltiplichisi il denominatore di una frazione qualunque $\frac{m}{n}$ per una quantità c, il risultato $\frac{m}{nc}$ si contiene c volte nella quantità dividenda $\frac{m}{n}$; dunque $\frac{m}{nc}$ è il vero quoziente di $\frac{m}{n}$ divisa per c: dunque &c. &c.

63. *Probl.* Dividere una frazione per un' altra. *Soluzione*. Si moltiplichi il numeratore della frazione dividenda per il denominatore della frazione dividente, e il prodotto si divida per il prodotto del numeratore della frazione dividente nel denominatore della frazione dividenda. La frazione risultante sarà il quoziente cercato. Ecco una dimostrazione di questa regola.

Sia da dividersi una frazione qualunque $\frac{a}{b}$ per un'altra $\frac{c}{d}$; suppongasi sulle prime di dover dividere $\frac{a}{b}$ per c, il quoziente sarà $\frac{a}{bc}$; Siccome però non si doveva dividere $\frac{a}{b}$ per c, ma per una quantità minore d volte di c, cioè per $\frac{c}{d}$, il quoziente ottenuto $\frac{a}{bc}$ è minore d volte del giusto valore, perchè, tutto il resto essendo eguale, tanto è minore un quoziente, quanto è maggiore il divisore; dunque $\frac{a}{bc}$ deve prendersi d vol-

volte, onde produca il quoziente richiesto, cioè deve prendersi $\frac{ad}{bc}$, il che corrisponde alla regola.

64. In altro modo. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1} = \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = \frac{ad}{bc}$.

65. In altro modo. Si ponga $\frac{a}{b} = \mathcal{A}$, e $\frac{c}{d} = B$; Si avrà, come al (*n.*59.), $a=b\mathcal{A}$, $c=dB$; si dividano ambedue i membri di una per i membri corrispondenti dell'altra, e si avrà $\frac{a}{c} = \frac{b\mathcal{A}}{dB}$; si moltiplichi ciascun membro di questa per $\frac{d}{b}$, e si otterrà $\frac{ad}{bc} = \frac{\mathcal{A}}{B} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

66. Se si trattasse di dover dividere un' intero unito ad un rotto per un'intero unito ad un rotto, si ridurrebbero ambedue i termini in frazione come al (*n.*66.), e l'operazione sarebbe ridotta al metodo generale.

67. Qualora si dovesse dividere una frazione complessa per un'altra frazione pur complessa, si potrebbe far uso del metodo esposto per la divisione dè polinomj, se pure non torni più comodo ridurre le due frazioni al medesimo denominatore, e praticare in appresso la divisione colla regola solita delle frazioni.

Avendosi da dividere la frazione ....

$(\mathcal{A})\frac{a}{2b}x^3 - \frac{3b}{8f}x^2 + \frac{3c}{4}x - \frac{2a}{9}x + \frac{b^2}{6f}x - \frac{bc}{3}$ per la

fra-

frazione (*B*) $\frac{2a}{3b}x - \frac{b}{2f}x + c$ si ottiene con qualunque dei due metodi accennati, il quoziente (*C*) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}b$.

68. *Scol.* 1. Il prodotto, e il quoziente di due polinomj interi o fratti, persiste il medesimo, ancorchè si mutino tutti i segni di ambedue. Difatto, se uno di essi dicasi a, e l'altro dicasi b, si ha sempre $\pm a \times \pm b = \mp a \times \mp b$, come pure $\pm a \times \mp b = \mp a \times \pm b$, e lo stesso vale per la divisione.

69. *Scol.* 2. Quattro sono le specie delle frazioni, e sono: Le frazioni decimali; Le frazioni sessagesimali; Le frazioni continue; e le frazioni parziali. Le prime appartengono propriamente all'Arimmetica: Le seconde formano una parte interessante delle dottrine Analitiche, e noi ne tratteremo estesamente a suo luogo.

PAR-

PARTE II.

DEI FONTI DELL' ANALISI.

70. Oltre la dottrina del Calcolo da noi esposta, e che di tutta l'Analisi è come il fondamento, e la base, richiedesi la notizia di parecchie Teorie particolari, onde potere in pratica ridurre le condizioni di un problema nelle opportune equazioni, e poter trattare l'equazioni stesse in modo, che si rendano suscettibili dei metodi, che vengono proposti dall' Analisi.

Queste Teorie si comprendono nella Teoria generale delle Funzioni, e sono le seguenti:

1. La Teoria dei fattori tanto semplici, quanto composti di una funzione monomia qualunque.

2. La Teoria delle combinazioni, e permutazioni, che possono sussistere in un numero qualunque di quantità.

3. La Teoria delle funzioni potenziali.

4. La Teoria delle funzioni radicali.

5. La Teoria delle proporzioni, che possono sussistere fra le diverse funzioni, come pure delle progressioni, e delle serie, e di tutte le loro proprietà, ed usi.

6. La Teoria delle frazioni continue.

7. La Teoria delle frazioni parziali.

Venendo alle funzioni trascendenti si deve trattare

8. La Teoria de Logarimmi.

9. La Teoria delle funzioni circolari.

10. La Poligonometria.

Passando alle funzioni variabili si deve esporre.

11.

11. La Teoria delle differenze finite.

12. La Teoria de'limiti, ai quali tendono i rapporti delle variabili, decrescendo indefinitamente.

13. La Teoria delle funzioni massime, e minime.

14. La Teoria delle funzioni, che si suppongono accresciute, o diminuite senza limite; vale a dire delle quantità infinite, ed infinitesime.

Dopo tutto questo, rimane da trattarsi compitamente

15. La Teoria delle funzioni continue elementari, e sublimi.

71. Tali Teorie debbon essere come i fonti, dai quali deve ripeter l'Analisi la parte maggiore della propria efficacia, e debbon esser le guide, che la conducano al discuoprimento della verità. Senza di queste non sarebb' ella, che uno Scheletro, cui nulla mancherebbe del necessario mecanismo, ma privo sarebbe di moto, e di vita. Conviene pertanto, che noi di esse trattiamo compitamente, innanzi di entrare nell'Analisi, non tanto per prevenire l'inconveniente di deviare dal dritto cammino, allorchè di lei ci occuperemo, quanto per prepararle tutto ciò, di cui abbisogna, per dispiegare la propria attività nelle sublimi applicazioni, di cui è capace.

Si premettono le seguenti

NOZIONI PRELIMINARI SULL' EQUAZIONI.

72. L'equazione (di cui già se ne adombrò un'idea al (*n*.4.) è un rapporto di eguaglianza fra due quantità di denominazione differente, e prende il nome dal massimo esponente dell' incognita; cosicchè dicesi equazione di 1.° di 2.° di 3.° &c. grado, secondo il suddetto massimo esponente è 1, 2, 3, &c. Essa si deve distinguere dall'eguaglianza in termini, o sia dall'identità, che sussiste per esempio nell'equazione $a=a$.

Ecco dell' equazioni $x^2-2x=b$, $cx-q=c$ &c.

Le parti separate dal segno = si chiamano membri dell'equazione.

73. Dall'idea dell'equazione ne segue, che se facciasi un'egual mutazione in ambedue i membri, che la costituziscono, ella non debbe punto alterarsi.

Si può per conseguenza aggiungere, e sottrarre una medesima quantità da i due membri di un equazione; si possono moltiplicare, o dividere ambedue per una quantità stessa; e si può fare generalmente qualunque operazione sopra ciascun membro, senza che la natura dell'equazione soffra mutazione veruna.

74. Risciogliere un'equazione, non è altro, che determinare tutti i valori dell' incognità, che possono verificare l'equazione stessa. Ciascheduno di questi valori dicesi con nome tecnico, radice dell'equazione.

75. È chiaro, che se abbiasi un'equazione, in cui l' incognita non abbia esponente maggiore dell' unità, il di lei valore, o sia la radice di tal equazione non dipende, che dal sapere sviluppar l'incognita da tutto ciò che la modifica, per lasciarla sola in un membro, e nell' altro quantità tutte cognite.

76. Ora un' incognita può essere affetta da altre quantità ò per addizione, o per sottrazione, o per moltiplicazione, o per divisione. Qualunque

que poi di queste operazioni abbia luogo nella modificazione dell' incognita, affinchè questa rimanga libera, non si richiede, che fare una mutazione in tutta l'equazione, mediante l' operazione contraria a quella, colla quale rimase affetta l'incognita. Così avendosi $x+c=b$, basta sottrarre c da ambedue i membri, e si avrà $x=b-c$; e se abbiasi $x-c=b$, basta aggiunger c da ambe le parti, e ne verrà $x=b+c$

77. Di qui si vede, che si può trasporre un numero qualunque di termini componenti un'equazione, da un membro nell'altro, con mutare i segni che gli appartengono, senza punto alterare l' equazione. Questo è ciò che dicesi *Antitesi*; ed è manifesto che per mezzo di essa si possono trasporre tutti i termini in un membro, onde nell' altro rimanga zero.

78. Se abbiasi l' equazione $ax+bx=c$, nella quale l' incognita è moltiplicata per $a+b$, si divida per questo moltiplicatore l'uno, e l'altro membro, e si dedurrà $x=\frac{c}{a+b}$.

79. Avendosi finalmente un' equazione come... $\frac{x}{4a}=3b-4c$, per liberare l' incognita dal divisore $4a$, deve moltiplicarsi tutta per esso. Con ciò si ha $x=12ab-16ac$.

80. Con questi artifizj semplicissimi, dato un numero n qualunque di equazioni, con egual numero d' incognite, che non abbiano esponente >1, e non sieno fra loro moltiplicate, si può dedurre facilmente il valore di ciascun' incognita.

A quest'effetto si deduca il valore di un'inco-

gni-

gnita come sopra da una qualunque dell'equazioni date. Questo valore sostituiscasi in tutte l'altre equazioni, nelle quali tale incognita si ritrova.

Con ciò si hanno $n-1$ equazioni con $n-1$ incognite. Si operi sopra di queste nel modo stesso, finchè si arrivi ad avere una sola equazione con una sola incognita. Si avrà da questa il valore dell'incognita che contiene; sostituendo questo nelle due precedenti equazioni a due incognite, si ottiene il valore di una seconda incognita, e così successivamente si ottengono le altre.

Avremo luogo di vederne parecchj esempj.

81. *Scol.* Avendosi un'equazione a zero, nella quale abbia l'incognita diversi esponenti, se vi sieno in essa dei termini simili di ciascun grado, che ha l' incognita nell'equazione, e nel tempo stesso i coefficienti sieno indeterminati, tal' equazione può verificarsi in quella maniera, che piaccia. Se per esempio abbiasi l' equazione ......

$$\begin{matrix} ax^3 \pm ex^2 \pm ex \pm g \\ \pm bx^3 \pm dx^2 \pm fx \pm h \end{matrix} = 0,$$ si vede chiaramente che non trattandosi, che di verificare l'evanescenza della somma dei termini, qualunque sia il valore dei termini, niente impedisce che esso si determini, come più torna comodo: si può fare per conseguenza $a \pm b=0$, $c \pm d=0$, $e \pm f=0$ $g \pm h=0$. Quest' artifizio è di grand'uso in tutta l'Analisi.

82. *Scol.* Ciò che si è detto intorno all'Antitesi vale ancora nei rapporti di quantità diseguali.

Così se abbiasi $\frac{bx}{c}-f<qr$ sarà $\frac{bx}{c}<qr+f$, e

bx-

$bx < cqr + cf$, e finalmente $x < \frac{cqr}{b} + \frac{cf}{b}$.

83. Vi è però da avvertire, che se in un rapporto di questa natura si voglino mutare tutti i segni, convien mutare anche il segno di rapporto, cioè il segno < in >, e viceversa.

Difatto avendosi $-x < a - b$, aggiunto da ambe le parti $x - a + b$ risulta $x > b - a$.

84. *Scol.* Si può qui dimostrare, che ogni quantità negativa è in *concreto* $< o$. In effetto sia $m - n < m$, il quale è un rapporto vero generalmente; si trasponga m, e si avrà $-n < o$. Nella nuova Enciclopedia Metodica *Tom.* 2. *delle Matematiche, artic. negatif*, si asserisce con M. d'Alembert, come ne'Dizionarj Enciclopedici antecedenti, che le quantità negative non sono minori di zero. La ragione ivi addotta è, che le quantità negative non differiscono dalle quantità positive, che per il segno, cioè che per esser prese in senso contrario; ma questo, si dice, non diminuisce il real loro quantitativo; dunque &c. Io rispondo concedendo che le quantità negative prese in astratto sieno maggiori di zero; soggiungo però, che una quantità, tosto che vien proposta come negativa, non è più permesso di considerarla in astratto, ma convien riguardarla col rapporto, che l'accompagna, e perciò convien riguardarla come minore di zero.

85. Ma si può comprendere anche meglio questa verità col seguente raziocinio.

Supponagasi, che zero sia l'origine di qualunque quantità, come lo è realmente, e che $-n$ sia una quantità presa in senso contrario all'origine

gine sudetta zero. Osservando si vede, che $-n$ per rapporto alla quantità positiva da prodursi, cospira meno di zero, perchè ne allontana la produzione. Nella guisa stessa, che se uno, il quale debba andare dal punto A verso C, (Fig.) invece di avanzarsi per la direzione AC, retroceda per la direzione opposta AB, fa un viaggio, che si può dire con tutta ragione minore di zero, perchè meno si avanza verso il proposto limite C di quello che verso di esso si avanzi un corpo che stia immobile nel punto A.

E non è forse più ricco quegli, che privo essendo attualmente di denaro, non ha punto di debiti, in paragone di quello, che non solo è privo di denaro, ma inoltre ha dei debiti?

E non sono forse il moto, la ricchezza, e cose simili semplici relazioni?

86. Ma senza tutto questo, sia $-n = $ ò $> o$; dunque aggiungendo n ad ambe le parti, dovrà essere ..... $o =$ ò $> n$; il che si vede quanto è assordo.

Si possono vedere gl'artifizj, coi quali il Signor Nicolai professor di Analisi nell' Università di Padova, ha tentato di provar l'eguaglianza delle quantità positive colle negative.

CAPITOLO I.

Delle funzioni considerate generalmente.

87. Funzione, già si disse (*n.6.*) esser un'espressione analitica qualunque di una data quantità, per rapporto alla quale si considera la funzione.

88. Se la quantità costituente la funzione, sia tale

tale, che serbi invariato il proprio valore, la funzione dicesi costante, e dicesi variabile, se la quantità costituente sia suscettibile di qualunque valore.

89. Le funzioni costanti non meno che le funzioni variabili si distinguono in varie classi.

Primieramente altre si appellano funzioni algebriche, altre si appellano trascendenti.

Nelle prime vi hanno parte le sole operazioni del Calcolo Algebrico; nelle seconde vi hanno parte delle potenze variabili, dei calcoli logarimmici, o trigonometrici.

90. Le funzioni algebriche si dividono in razionali, ed irrazionali; e queste in esplicite, ed implicite.

Le funzionali razionali sono quelle nelle quali non vi ha parte alcun radicale incommensurabile, altrimenti diconsi irrazionali.

91. Le funzioni irrazionali poi si chiamano esplicite, se nei proprj termini contengano espressamente dei radicali impossibili; e si chiamano implicite, quando per ottenere il valore della quantità, che costituisce la funzione, si deve sciogliere un'equazione, di cui le radici sieno irrazionali.

92. Dividonsi ancora le funzioni in uniformi, e moltiformi. Le prime sono quelle, nelle quali la quantità costituente non può avere più di un valore, e questo avviene quando essa non ha esponente >1.

Allorchè la quantità costituente può ricevere più valori, dicesi moltiforme, e questo ha luogo, quando la quantità sudetta è dotata di un esponente >1, come si avrà luogo di vederne la ragione, dove si tratterà della Teoria dell' equazione.

 93.

93. L'ultima distinzione delle funzioni è quella delle funzioni omogenee, ed eterogenee.

Funzione omogenea è quella, in cui la somma degl' esponenti di ciascun termine è uguale; altrimenti la funzione dicesi eterogenea.

Della prima sorte sono le funzioni .... $xy+bx^2+cy^2$, $y^3x+ax^2y^2+y^4+x^4$ &c.

Della seconda sorte sono le funzioni .... $x^3+axy+y^2$ &c. x^4+bx+c &c.

94. A tenore di questo principio, una frazione, il di cui numeratore abbia in ciascun termine un medesimo esponente collettivo, si riguarda come dotata di una dimensione, o sia di un grado eguale alla differenza, che passa fra la dimensione del numeratore, e quella del denominatore.

Così $\frac{x^3}{y}$ è funzione di secondo grado, qualora x, ed y appartengano ambedue alla costituzione della funzione: $\frac{x^2}{y^3}$ è funzion negativa di primo grado.

95. Una funzione si può trasformare in un'altra in tre maniere. 1. Ritenendo le medesime lettere; 2. Sostituendo nuove lettere, o funzioni di nuove lettere a qualcheduna di quelle, che già si hanno. 3. Risciogliendole ne' suoi fattori.

96. Del primo genere sarebbe la trasformazione di $\frac{a}{a-z}+\frac{a}{a+z}$ in $\frac{2a^2}{a^2-z^2}$, e di $\sqrt{1+z^2}+z$

in

in $\frac{1}{\sqrt{1+z^4}-z}$ &c. Queste diverse espressioni significano lo stesso, ma non di rado una è più atta dell'altra all'uso, che se ne vuol fare.

97. Una trasformazione del secondo genere si ha, per esempio, se nella funzione $a^4-4a^3z+6a^2z^2-4a^3z+z^4$ si ponga $y+a$ in luogo di z; poichè la funzione diviene in questa guisa $=y^4$.

98. Le trasformazioni per sostituzione sono di un grand' uso nell' Analisi, specialmente per togliere l' irrazionalità dall' espressioni radicali. Noi avremo campo di trattarne compitamente in appresso, quando tratteremo delle funzioni radicali.

99. Il terzo genere di trasformazione dipende dai precetti dell' Analisi.

100. *Teor.* 1.° Se abbiasi y=Funzione(a): si ha parimente a= Funzione (y).

101 *Teor.* 2. Se sieno x, e y funzioni di a, è ancora x funzione di y, e viceversa.

102. *Teor.* 3. Se abbiasi y funzione di z, e z sia funzione di x, dee essere y funzione di x.

Questi tre Teoremi sono per se stessi evidenti.

CAPITOLO II.

Teoria de' fattori delle funzioni Monomie, e polinomie.

103. Se la funzione proposta sia un monomio, il ritrovamento dei divisori è assai facile. Ciascuna quantità componente il monomio, come pure tutti i prodotti delle medesime, a due, a tre, a quattro &c. sono tutti diversori del monomio dato; cosicchè la somma delle quantità semplici componenti il monomio, e dei prodotti di tali quantità costituisce la somma dei divisori cercati.

Per esempio, i divisori del monomio a^2bcd sono a, a, b, c, d, a^2, ab, ac, bc, cd, ad, bd, a^2b, abc, a^2c, abd, a^2d, bcd, a^2bc, a^2bd, $abcd$, a^2cd, a^2bcd.

104. Trattandosi di una funzione polinomia, per trovarne tutti i divisori basta determinar tutte le quantità semplici, che hanno parte in tutti i suoi termini, per il prodotto di alcune, o di tutte queste si divide il polinomio dato, e il quoziente presenta immediatamente un divisor composto, ed è chiaro, che quante sono le quantità comuni a ciascun termine del polinomio dato; e quanti sono i diversi prodotti, che posson'ottenersi con esse, altrettanti divisori composti si possono avere.

Si debbano trovar per esempio i divisori composti della funzione polinomia $4a^2b-2abx$

Osservo, che le quantità comuni ad ambedue i termini sono due, a, e b, e vedo perciò, che potendo con queste formar sette divisori, posso ottener sette fattori composti. Facendo infatti la divisione di $4a^2b-2abx$ per 1, per a, per b, per $2a$, per $2b$, per ab, e pe $2ab$ si ottengono successivamente i fattori $4a-2x$, $2a^2-ax$, $4a^2-2ax$, $2ab-qx$, ... $4ab-2bx$, $2a^2b-abx$, $4a^2b-2abx$, $2a-x$, che sono i fattori cercati.

105. Se la funzione polinomia sia determinata, che sia, per esempio, funzione di una lettera data x, e se non si abbiano quantità comuni ai suoi termini, il ritrovamento dei fattori composti richiede la soluzione di un' equazione, e per-

perciò dipende dalle dottrine dell' Analisi.

106. Per rapporto ai numeri, l'operazione è la medesima. Si vogliano, per esempio, trovare tutti i divisori interi di 180. Il primo divisore >1 vedo che è 2; il quoziente 90 ha parimente 2 per divisore >1. Il divisor più semplice di 45 è 3; il più semplice divisore di 15 è 3, e il più piccolo divisore del quoziente 5 è 5. Ecco pertanto che i divisori più semplici di 180 sono 2, 2, 3, 3, 5.

I prodotti di questi presi a due, a tre, a quattro, ed a cinque, somministrano i divisori composti, e sono 4, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180. La ragione di questo metodo si concepisce facilmente. Difatto $180 = 2.\ 90 = 45.\ 2.\ 2 = 15.\ 3.\ 2.\ 2 = 5.\ 3.\ 3.\ 2.\ 2$ che sono tutti i divisori semplici. Inoltre si ha $5.\ 3.\ 3.\ 2.\ 2 = 5.\ 3.\ 3.\ 4 = 5.\ 9.\ 4 = 5.\ 3.\ 12. = 5.\ 18.\ 2 = 5.\ 3.\ 6.\ 2 = 30.\ 3.\ 2 = 10.\ 9.\ 2 = 20.\ 9. = 36.\ 5. = 60.\ 3 = 90.\ 2 = 180.$, nei quali prodotti uniti ai due addotti di sopra, che sono $45.\ 2.\ 2$, $15.\ 3.\ 2.\ 2.$ si contengono tutti i divisori composti.

CAPITOLO III.

Teoria delle combinazioni, e delle permutazioni, che possono sussistere in un qualunque numero dato di quantità, o funzioni.

107. *Probl.* Dato un numero qualunque di lettere, determinare in quante maniere possibili si possano combinare insieme a due, a tre, a quattro, &c. in guisa che le combinazioni sieno tutte diverse. *Soluzione.* Sieno date m quantità, e suppongasi, che si debbano combinare a due a due. In

In questo caso è chiaro, che ciascuna delle m quantità si deve combinare con tutte le altre, le quali sono $m-1$; dunque $m(m-1)$ dev' esser l' espressione di tali combinazioni; vi è soltanto da osservare, che in questa maniera ciascuna combinazione si trova raddoppiata, onde il vero numero delle combinazioni a due di m quantità, è $\frac{m(m-1)}{2}$.

Se trattisi di formar le combinazioni di m quantità a tre a tre, basta combinare ciascuna delle combinazioni a due rappresentate dalla formola $\frac{m(m-1)}{2}$ con tutte le quantità m eccettuate le due quantità, che si contengono nella combinazione a due, che si tratta di combinar nuovamente. In questa guisa le combinazioni a tre vengono espresse dalla formola $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}$ dove si fa la divisione per 3, atteso che altrimenti le combinazioni a tre si trovano triplicate.

Col medesimo raziocinio si vede, che per avere il numero delle combinazioni a quattro, che possono sussistere fra m quantità, basta moltiplicare il numero delle combinazioni a tre .... $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3.}$ per $\frac{m-3}{4}$.

Ed in generale, si concepisce facilmente che il numero delle combinazioni di m quantità, in numero di n, deve rappresentarsi dalla formola $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots\ldots\ldots (m-n+1)}{2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ n}$.

Esem-

Esempio. Si debbano combinare insieme cinque lettere a, b, c, d, e. Combinandole a due per moltiplicazione, si hanno le combinazioni .... ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, le quali sono dieci, come porta la formola ....

$$\frac{m(m-1)}{2} = \frac{20}{2}.$$ Combinando le medesime lettere per addizione si hanno egualmente dieci combinazioni, e sono

$a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$, $d+e$;

Le combinazioni a tre per moltiplicazione sono abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde, e per addizione sono

$a+b+c$, $a+b+d$, $a+b+e$, $a+c+d$, $a+c+e$, $a+d+e$, $b+c+d$, $b+c+e$, $b+d+e$, $c+d+e$,

e il numero di ambedue queste è =

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} = \frac{60}{6} = 10.$$

Nel modo stesso possono trovarsi le combinazioni a quattro.

108. *Scol.* Il problema delle combinazioni si può applicare al ritrovamento degli ambi, e dei terni che si possono formare con 90 cifre. Il numero degli ambi si trova $= \frac{m(m-1)}{2} = \frac{90 \cdot 89}{2}$

$= 4005$. Il numero dei terni è $= \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$

$= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{2 \cdot 3} = 117480$.

Passiamo adesso alle permutazioni, e sia

109.

109. *Probl.* Dato un numero qualunque m di quantità, determinare in quante maniere si possa variar l'ordine della loro combinazione, cioè determinarne tutte le permutazioni possibili.

Soluzione. Essendo proposte due quantità a, b, la di loro combinazione, o ella sia per moltiplicazione, ò per addizione si può variare in un sol modo, cioè possono dare due sole permutazioni, e sono ab, e ba nel primo caso; $a+b$, e $b+a$ nel secondo.

Essendo tre le quantità date, cioè, a, b, c, supponiamo che a occupi il primo sito nella combinazione, è chiaro che le altre due quantità presentano due permutazioni; ma si può mettere in primo sito ciascuna delle altre due b, c; dunque il numero delle permutazioni è $= 3 \cdot 2$.

Se quattro sieno le quantità proposte. a, b, c, d; posto a in primo luogo, le altre danno $3 \cdot 2$ permutazioni; ma si può mettere nel primo luogo ciascuna delle tre altre quantità; dunque $4 \cdot 3 \cdot 2$ rappresenta in questo caso il numero totale delle permutazioni.

Nel caso di cinque lettere a, b, c, d, e, posta nel primo sito a, le altre quattro lettere somministrano $4 \cdot 3 \cdot 2$ permutazioni; e siccome ciascuna delle altre quattro lettere può collocarsi in luogo di a, il numero completo delle permutazioni risulta $= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Proseguendo lo stesso raziocinio si vede, che la formola generale di tutte le permutazioni, che possono sussistere fra m lettere, è la seguente $m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots\ldots\ldots (m-(m-1))$.

CA-

CAPITOLO IV.

Teoria delle funzioni potenziali.

110. Potenza, come si disse al (*n.* 10.), è il prodotto di una quantità per se stessa. Ella prende il nome dal numero delle volte, che la quantità fondamentale, cioè la radice, vien moltiplicata per se stessa.

Così dicesi potenza quadrata il prodotto di una quantità moltiplicata per se stessa una volta; per esempio, $a \times a = a^2$ è il quadrato di a.

Dicesi potenza cubica il prodotto di una quantità per se medesima ripetuto due volte, come $a \times a \times a = a^3$.

In generale si chiama potenza n.$^{\text{sima}}$ il prodotto di una quantità per se stessa ripetuto $n-1$ volte, cioè il prodotto, in cui la radice sia fattrice n volte.

111. Il calcolo di questa specie di funzioni si eseguisce colle regole dell'Algebra, onde su di questo non vi è cosa veruna da aggiungere.

Ciò che dee richiamar le nostre ricerche, è la formazione di una potenza qualunque, tanto di una funzione monomia, quanto di una funzione polinomia. Sia pertanto

112. *Probl.* Dato un monomio qualunque, inalzarlo ad una potenza data. *Soluzione*. Se il monomio dato abbia un coefficiente, esso si moltiplichi per se stesso tante volte meno una, quante unità si contengono nell'ordine della potenza data. Per il restante del monomio, basta moltiplicar gli esponenti delle lettere, che lo compongono per l'esponente della potenza proposta. Il risultato è la potenza richiesta del monomio dato.

Sia da formarsi la potenza n.$^{\text{sima}}$ del monomio $4a^m$ è chiaro questa potenza debb'essere un prodotto, nel quale $4a^m$ sia fattore n volte; dunque debb'ella essere $4^n a^{mn}$. Diasi ad n quel valore, che si vuole, e se ne vedrà la ragione con più chiarezza.

Si debba per esempio formare la potenza quadrata di $4a^m$; Si avrà $4a^m . 4a^m = 4^2 a^{2m} = 16a^{2m}$; Se ne debba formare la potenza cubica, e sarà $4a^m . 4a^m . 4a^m = 4^3 a^{3m} = 64a^{3m}$, e così in seguito.

113. Trattandosi di un monomio fratto, s'inalzerà il numeratore, e il denominatore separatamente alla potenza proposta.

114. *Probl.* Inalzare un binomio ad una potenza proposta. *Soluzione*. Sia $a+b$ il binomio dato, e se ne debba formare la potenza quadrata. Per ciò che si è detto di sopra, ella dev' essere $=(a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$. Dunque il quadrato di un binomio è composto di tre parti, cioè del quadrato del primo termine, del doppio prodotto del primo termine nel secondo, e del quadrato del secondo termine.

Si debba ora inalzare il binomio $a+b$ alla potenza cubica; Si avrà $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Di quì si vede, che il cubo di un binomio è composto di quattro parti, cioè del cubo del primo termine, del triplo quadrato del primo termine moltiplicato nel secondo, del triplo quadrato del secondo termine moltiplicato nel primo, e del cubo del secondo termine.

Se

Seguendo lo stesso principio delle successive moltiplicazioni, si trova, che la potenza quarta di un binomio è della forma

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

che la potenza quinta è

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

che la potenza sesta è $(a+b)^6$

$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

e così in seguito delle altre.

115. Proseguendo però in questa guisa, qualora si tratti di formare una potenza un poco elevata, l'operazione diviene operosa eccessivamente.

Si vide perciò fino dai primi Algebristi, che faceva d'uopo trovare un metodo per cui si potesse procedere più direttamente alla formazione di una potenza qualunque, senza dover passare per le potenze inferiori. Questo metodo fù trovato per induzione da Newton, con osservar la legge, che sussiste fra i successivi termini di una potenza ottenuta per mezzo della moltiplicazione.

116. Dall'osservazione dei termini, di cui è composta una potenza quadrata, cubica &c. di un binomio, si deduce infatti,

1.° Che il numero de' termini di qualunque potenza di un binomio è uguale all'esponente della potenza medesima accresciuto di un' unità.

2.° Che il primo termine della potenza è sempre uguale al primo termine del binomio inalzato alla potenza proposta.

3.° Che nel secondo termine della potenza comincia ad aver parte il secondo termine del bi-

binomio colla potenza lineare, e che va sollevandosi gradatamente nei successivi termini ad una potenza sempre maggiore di un' unità, mentre il primo termine del binomio va deprimendosi nei successivi termini della potenza, ad un esponente sempre minore di un'unità. Di qui ne deriva, che la somma degl'esponenti di ciascun termine di una potenza qualunque è costante, ed eguale all' esponente stesso della potenza, e che l'ultimo termine è uguale al secondo termine del binomio inalzato alla potenza proposta.

117. Per rapporto ai coefficienti si osservò, che il coefficiente del primo termine è sempre l'unità; che quello del secondo termine è uguale all' esponente della potenza proposta; che quello del terzo termine è uguale al coefficiente del secondo termine moltiplicato per l'esponente della potenza diminuito di un' unita, e diviso per il numero de'termini, che precedono quello, di cui si tratta, cioè per 2; che il coefficiente del quarto termine è uguale al coefficiente del terzo moltiplicato per l' esponente della potenza diminuito di due unità, e diviso per 3.

Ed in generale che il coefficiente di un termine qualunque è sempre uguale al coefficiente del termine, che lo precede, moltiplicato per l'esponente, che in esso ha il primo termine del binomio, e diviso per il numero de'termini, che lo precedono.

118. In altro modo: Facendo il prodotto di m fattori diseguali $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ &c. si trova per risultato $x^m+(a+b+c+d$ &c.$)\,x^{m-1}+$ $(ab+ac$ &c. $+ad$ &c.$)\,x^{m-2}+(abc+abd$ &c. $+bcd$ &c.$)\,x^{m-3}$ &c. dove il coefficiente del se-

Secondo termine x^{m-1} è la somma dei secondi termini a, b, c, &c.; il coefficiente del terzo termine è uguale alla somma dei prodotti a due delle m quantità a, b, c, d &c.; il coefficiente del quarto è la somma dei prodotti a tre delle medesime, e così in seguito. Dunque se i secondi termini a, b, c, d &c. si suppongano tutti eguali, il coefficiente del secondo termine risulta $= ma$, e tolta la quantitá letterale, che non appartiene al coefficiente, risulta $= m$; nel modo stesso il coefficiente del terzo termine, in virtú della Teoria delle combinazioni, si vede, che dev' essere $= \frac{m(m-1)}{2}$; che quello del quarto termine dev'essere $= \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$, e così in seguito.

119. Resta da osservarsi la legge, a cui vanno sottoposti i segni, ed è, che, se i due termini del binomio abbiano segno diverso, la potenza qualunque di esso formata debb' avere i segni alternativamente positivi, e negativi. Difatto i due termini del binomio passano alternativamente nei successivi termini della potenza, per le potenze impari, le quali conservano sempre il segno della radice. Se i segni del binomio sieno i medesimi, tali saranno anche quelli della potenza.

120. Da tutto questo si dedusse dal gran Newton, o come altri pensa, da M. Pascal (*Vedi il Tomo 4. dell' opere di Gio: Bernoulli pag. 173.*), che la potenza m di $a+b$, era espressa generalmente per $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{m(m-1)}{2}$

$$\frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 \ldots\ldots + b^{m}$$

121. Aperta in questa maniera la strada alla cognizione di quest'importante Teorema, rimaneva, che per decoro, ed avanzamento dell'Algebra se ne investigasse dagli Analisti una diretta dimostrazione, e che si provasse inoltre, se la formola esposta potesse aver luogo nell'ipotesi, che l'esponente indeterminato m avesse qualunque valore negativo, fratto, irrazionale, e immaginario. Ecco una dimostrazione del Ch. M. de Condorcet, che sodisfa a tutto questo.

121. Sia $1+x$ un binomio, che si debba inalzare ad una potenza m. La questione si riduce a trovare una funzione di x, e di m, che sia $=(1+x)^m$.

Si osservi a quest'effetto, che la funzione, di cui si tratta, dev' esser tale, che sostituendovi $m+1$ ad m, ne risulti una nuova funzione uguale al prodotto di $(1+x)^m$ moltiplicato per $1+x$; che posto $m=0$, sia $=1$, e posto $m=1$, sia $=1+x$.

Tutto questo deriva naturalmente da ciò, che si è detto intorno alle potenze.

Ciò posto, sia $(1+x)^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. $+ (m)^n x^m$, dove A, B, C &c. $(m)^n$ sono funzioni indeterminate di m, ed $(m)^n$ è il coefficiente di un termine n.simo qualunque cominciando da Bx.

Sia inoltre $(1+x)^{m+1} = A' + B'x + C'x^2$ &c. $+ (m+1)^n x^n$, essendo A', B', C' &c, $(m+1)^n$ ciò, che divengono i coefficienti A, B, C &c. $(m)^n$, se in vece di m vi si ponga $m+1$.

Es-

Essendo $(1+x)^{m+1} = (1+x)^m(1+x)$ .... sarà $A'+B'x+C'x^2+D'x^3$ &c. $+ (m+1)^n x^n = \ldots$ $(A+Bx+Cx^2+Dx^3$ &c. $+ (m)^n x^n)(1+x)$, o sia facendo la moltiplicazione, e trasponendo tutto in un membro,

$$\left.\begin{array}{llr} A'+B'x+C'x^2+D'x^3 \text{ \&c.} & & +(m+1)^n x^n \\ -A-Ax-Bx^2 \text{ \&c.} & & -(m)^{n-1}x^n \\ \quad -Bx-Cx^2 \text{ \&c.} & & -(m)^n x^n \end{array}\right\} = 0$$

Questa è un'equazione, che ha i coefficienti indeterminati, e perciò ($n.81.$) siccome non si tratta, che di verificarne l'evanescenza, in qualunque modo ciò sia, si può supporre uguale a zero separatamente ciascuna colonna verticale di coefficienti, e formare per conseguenza l'equazioni, che seguono 1.ª $A' = A$; 2.ª $B' = B+A$, 3.ª $C' = C+B$; 4.ª $D'=D+C$ &c. n.sima $(m+1)^n=(m)^n+(m)^{n-1}$.

Alla prima si sodisfa con porre $A'=A=1$; difatto nell'ipotesi di $x=0$, le funzioni $A+Bx+Cx^2$ &c. $A'+B'x+C'x^2$ &c. debbono divenire ambedue uguali all'unità.

Per sodisfare alla seconda equazione $B'=B+1$; basta porre $B=m$, poichè risulta $B'=m+1$, vale a dire, ciò che diviene, qualora si ponga $m+1$ in vece di m.

Per verificare la terza, basta far $C=\dfrac{m^2-m}{2}$, perchè in questa guisa risulta $C'=\dfrac{m^2+m}{2}$, che è ciò, che diviene C, se in lui si sostituisca $m+1$ per m.

Ottenute queste prime determinazioni osservo, che i coefficienti dei primi termini componenti la

la funzione richiesta si riducono alla forma $B=mA$; $C=\dfrac{(m-1)}{2}B$; $D=\dfrac{(m-2)}{3}C$ &c.. Si può dunque credere, che supponendo $P(m)^n=Q(m)^{n-1}$, si avranno per P, e Q dei valori semplicissimi. Questa supposizione si vede, che deriva dalla natura dei suddetti coefficienti, perchè per esempio $D=\dfrac{(m-2)}{3}C$ equivale a $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}B = \dfrac{(m-2)}{3}C$, dove B, e C si possono prendere sotto forma lineare.

Si vede ancora, che trovata l'espressione generale di P, e Q in m, ed n, tale che $\dfrac{P}{Q}$, sia funzione di m, ed n senza costanti indeterminate, si debbe avere dall'equazione $(m)^n=\dfrac{Q}{P}(m)^{n-1}$ il valore di ciascun coefficiente $(m)^n$, cominciando dal primo, per il quale si ha $n=1$ fino all'ultimo, in cui $n=m$, con che sarà risciolta la questione.

Per riescire nella divisata determinazione di P, e Q si avverta, che essendo $(m+1)^n=(m)^n+(m)^{n-1}$ dev'essere ancora $(m)^n=(m-1)^n+(m-1)^{n-1}$, ed $(m)^{n-1}=(m-1)^{n-1}+(m-1)^{n-2}$. Posto pertanto, che per la sostituzione di $m-1$ in luogo di m, in P, e Q, P divenga $= P+p$, e $Q = Q+q$, e che per la sostituzione di $m-1$ in vece di m, e di $n-1$ in vece di n, P divenga $= P+p'$, e $Q = Q+q'$, si avrà ....

$(P+p)$

$(P+p)(m-1)^n=(Q+q)(m-1)^{n-1}$, come pure....
$(P+p')(m-1)^{n-1}=(Q+q')(m-1)^{n-2}$.

Sommando adesso queste due equazioni si ottiene

$$(A)\quad \begin{array}{l} P(m-1)^n+P(m-1)^{n-1}) \\ +p(m-1)^n+p'(m-1)^{n-1}) \end{array} = \begin{array}{l} Q(m-1)^{n-1}+Q(m-1)^{n-2} \\ +q(m-1)^{n-1}+q'(m-1)^{n-2} \end{array}$$

Per fissare opportunamente il valore delle indeterminate, si divida l'equazione (A) nelle due....

$$P(m-1)^n+P(m-1)^{n-1}=Q(m-1)^{n-1}+Q(m-1)^{n-2}.(B)$$
$$p(m-1)^n+p'(m-1)^{n-1}=q(m-1)^{n-1}+q'(m-1)^{n-2}.(C)$$

Oltre di questo si ponga $P=am+bn+c$, e $Q=a'm+b'n+c'$.

Per determinare a, b, c, a', b', c' si sodisfaccia all'equazione (C) con porre $p=o$, e $q'=o$, onde si abbia $p'=q$; Questo si può fare legittimamente, perchè basta per l'oggetto proposto, che si dia luogo all'equazione, e ciò si può fare come torna piú comodo, mentre tutto è indeterminato.

Da questa prima determinazione ne segue, che essendo $p=P+p-P=am+bn-b+c-am-bn-c$ debb'aversi $p=-b$; parimente essendo $p'=P+p'-P=am-a+bn-b+c-am-bn-c$, si ha $p'=-a-b$.

Con lo stesso raziocinio si trova $q=-b'$, e $q'=-a'-b'$ Dalla prim'equazione $p=-b$ risulta $b=o$; dalla quarta $q'=-a'-b'$ si deduce $a'=-b'$, perchè $q=o$; Nella seconda $p'=-a-b$ si ponga q in vece di p', ovvero $-b'$, che gli è uguale, e si avrà $b'=a$, perchè $b=o$.

Di qui si conclude, che P può esser della forma $P=am+c$, e $Q=a(m-n)+c'$. Inoltriamoci più dappresso alla determinazione di queste quantità. Nel caso di $n=1$, l'equazione ipotetica $P(m)^n=Q(m)^{n-1}$ diviene $Pm=Q$, cioè si ha

 $am+$

$am+cm=am-a+c'$, di dove si deduce $cm=c'-a$; per sodisfare a quest'equazione si ponga $c=o$, e con ciò sarà $c'=a$.

Questa supposizione si può fare, perchè c, c', ed a sono quantità indeterminate, che si debbono adattare alle condizioni del problema; ed oltre di questo è facile a vedersi, che senza che sia $c=o$, non si possono aver P, e Q in n, ed m, come si richiede.

Da tutto questo si può adesso raccogliere, che può darsi a P la forma am, ed à Q la forma $a(m-n+1)$, onde abbiasi $P=an$, e $Q=a(m-n+1)$ e perciò $\frac{Q}{P}=\frac{m-n+1}{n}$; Dunque si ha finalmente $(m)^n=(m)^{n-1}\frac{(m-n+1)}{n}$ formola generale, da cui si può dedurre successivamente ciascun coefficiente, cominciando da quello del secondo termine Bx, che si può dire il primo, perchè A è sempre $=1$, come si è veduto di sopra.

E' facile poi a vedersi, che la formola.... $(m)^{n-1}\frac{(m-n+1)}{n}$ si riduce a quest'altra......

$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}$ formola, che ha luogo qualunque sia m.

Ecco dunque che $(1+x)^m$ è $=1+mx+m\frac{(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3$ &c..... $+x^m$ qualunque sia m positivo, o negativo, intero, o fratto, irrazionale, o immaginario.

123. Quantunque l'esposta dimostrazione possa bastare assolutamente, nondimeno, siccome si tratta di un Teorema di somma importanza, reputo cosa utile, addurne un' altra più elegante di assai, e più persuasiva.

124. Sia da formarsi la potenza m. ^{sima} di un binomio qualunque $a+b$. Siccome $(a+b)^m$

$$=\left(\frac{a}{b}+1\right)^m b^m,$$ posto $\frac{a}{b}=x$ si vede, che basta dimostrare generalmente la formazione della potenza m. ^{sima} del binomio $x+1$.

Sia pertanto $(x+1)^m = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2}$ &c. dove A, B, C &c. sono coefficienti da determinarsi.

La forma della potenza $(x+1)^m$ da noi supposta è arbitraria, ma non v' è però da temere, che ci possa condurre in errore, perchè qualora non potesse sussistere, i risultati delle operazioni, che si debbon fare, per determinare i coefficienti, dovrebbero riuscire assordi, e mostrare con ciò l'impossibilità della forma supposta.

Prima d' inoltrarci nella ricerca dei valori di A, B, C &c. osservo, che queste indeterminate debbono esser funzioni di m; poichè non è possibile, che detti coefficienti rimangano i medesimi, qualora mutisi il valor di m, altrimenti dovrebbe risultare $(x+1)^m \cdot x = (x+1)^{m+1}$, il che è falso. Sono dunque i suddetti coefficienti variabili in conseguenza delle variazioni di m cosicchè se per m si ponga $m-1$, $m-2$, $m-3 \ldots m-n$, i coefficienti A, B, C &c. debbon prender diverso valore.

Que-

Questi diversi valori noi li rappresenteremo in questa maniera, che quando l'esponente sia m, sieno essi espressi per A^m, B^m, C^m &c.; quando l'esponente sia $m-1$, per A^{m-1}, B^{m-1}, C^{m-1} &c., quando sia $m-2$, sieno espressi per A^{m-2}, B^{m-2}, C^{m-2} &c., ed in generale, essendo l' esponente della potenza $m-n$, i coefficienti sieno rappresentati per A^{m-n}, B^{m-n}, C^{m-n} &c.

Posti tutti questi preliminari, veniamo al nostro oggetto.

Essendo $(x+1)^m = A^m x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2}$ &c. (P), deve essere ancora. $(2(x+1))^m = 2^m A^m x^m + 2^m B^m x^{m-1}$ &c. Ma siccome si ha pure $(2(x+1))^m = ((2x+1)+1)^m$ sostituendo $2x+1$ in luogo di x nella formola (P), risulta necessariamente……

$$(2(x+1))^m = \ldots\ldots$$

$$A^m(2x+1)^m + B^m(2x+1)^{m-1} + C^m(2x+1)^{m-2} \text{ \&c.} =$$

$$\begin{array}{lll} 2^m A^m A^m x^m & + 2^{m-1} A^m B^m x^{m-1} & + 2^{m-2} A^m C^m x^{m-2} \text{ \&c.} \\ & 2^{m-1} B^m A^{m-1} & + 2^{m-2} B^m B^{m-1} \text{ \&c.} \\ & & + 2^{m-2} C^m A^{m-2} \text{ \&c.} \end{array}$$

e fatto il paragone col valore trovato di sopra, $= 2^m A^m x^m + 2^m B^m x^{m-1} + 2^m C^m x^{m-2}$ &c.

Quindi si deduce $2^m A^m A^m = 2^m A^m$; $2^m B^m = \ldots 2^{m-1}(A^m B^m + B^m A^{m-1})$, $2^m C^m = 2^{m-2}(A^m C^m + B^m B^{m-1} + C^m A^{m-2})$; $2^m D^m = 2^{m-3}(A^m D^m + B^m C^{m-1} + C^m B^{m-2} + D^m A^{m-1})$ &c. Dalla prima si deriva $A^m = 1$, onde A^m è generalmente costante $= 1 = A^{m-1} = A^{m-2}$ &c.

Dalla seconda equazione si ha $2^m B^m = 2^m B^m$; perciò da questa non si può dedurre conseguenza veruna, e convien investigar B con altro metodo.

Ma

Ma tralasciata per adesso la ricerca di B, passiamo ad osservare, come si possano determinare gli altri coefficienti.

Dalla terza equazione, $2^{m} C^{m} = 2^{m-2} (\mathcal{A}^{m} C^{m} + B^{m} B^{m-1} + C^{m} \mathcal{A}^{m-2})$ si deriva $C^{m} = 2^{m-2} \dfrac{B^{m} B^{m-1}}{2^{m} - 2\, 2^{m-2}}$

$= \dfrac{B^{m} B^{m-1}}{2^{2} - 2} = \dfrac{B^{m} B^{m-1}}{1 \cdot 2}$.

Prima di passare al quarto coefficiente si avverta, che essendo $C^{m} = \dfrac{B^{m} B^{m-1}}{1 \cdot 2}$ dev'essere $C^{m-1} = \dfrac{B^{m-1} B^{m-2}}{1 \cdot 2}$; $C^{m-2} = \dfrac{B^{m-2} B^{m-3}}{1 \cdot 2}$, ed in generale $C^{m-n} = \dfrac{B^{m-n} B^{m-n-1}}{1 \cdot 2}$.

Ciò posto, si può dedurre dalla quarta equazione $2^{m} D^{m} = 2^{m-3} (\mathcal{A}^{m} D^{m} + B^{m} C^{m-1} + C^{m} B^{m-2} + D^{m} \mathcal{A}^{m-3})$ $6 D^{m} = \dfrac{B^{m} B^{m-1} B^{m-2}}{1 \cdot 2} + \dfrac{B^{m} B^{m-1} B^{m-2}}{1 \cdot 2}$ cioè ... $D^{m} = \dfrac{B^{m} B^{m-1} B^{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Nel modo stesso si trova $E^{m} = \dfrac{B^{m} B^{m-1} B^{m-2} B^{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$; ed in generale un termine n.simo qualunque T^{m} si trova $= \dfrac{B^{m} B^{m-1} B^{m-2} \ldots B^{m-n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$.

Ecco pertanto ridotto il problema in guisa, che dipende solamente dalla determinazione di B.

Per aprirci la strada a questa ricerca, suppongasi, che m prenda successivamente tre valori, che

che sieno $r, s, r+s$; Si avrà com'è manifesto .... $(x+1)^{r+s} = (x+1)^{r} . (x+1)^{s}$; Ma si ha $(x+1)^{r} = x^{r} + B^{r} x^{r-1} + C^{r} x^{r-2} + D^{r} x^{r-3}$ &c., ed $(x+1)^{s} = x^{s} + B^{s} x^{s-1} + C^{s} x^{s-2} + D^{s} x^{s-2}$ &c.; dunque........

$$(x+1)^{r} . (x+1)^{s} = x^{r+s} + B^{r} x^{r+s-1} \ldots\ \&c.$$
$$+ B^{s} x^{r+s-1} \ldots\ \&c.$$

Ma si sa essere $(x+1)^{r+s} = x^{r+s} + B^{r+s} x^{r+s-1}$ &c. dunque paragonando i termini omologi si avrà $B^{r+s} = B^{r} + B^{s}$, e per un simil raziocinio ...... $B^{r-s} = B^{r} - B^{s}$: Si ha dunque generalmente .... $B^{r \pm s} = B^{r} \pm B^{s}$, e perciò $B^{m \pm s} = B^{m} \pm B^{s}$ Di qui ne segue che qualunque sia m, se esso cresca, o decresca, l'incremento, e il decremento, che indi riceve B^{m}, è sempre costante, perchè dipendente solamente da s.

Ne segue in secondo luogo, che se m prenda successivamente i valori .... $-3s$, $-2s$, $-s$, 0, $+s$, $+2s$, $+3s$ ..... i B corrispondenti debbono essere della forma ... $-3B^{s}$, $-2B^{s}$, $-B^{s}$, 0, $+B^{s}$, $+2B^{s}$, $+3B^{s}$ &c. poichè se nell'equazione $B^{m+s} = B^{m} \pm B^{s}$ pongasi $m = s$, preso il segno $+$ risulta $B^{2s} = 2B^{s}$; se pongasi $m = 2s$, risulta $B^{3s} = 3B^{s}$, e lo stesso vale pigliando $m = -s$, $= -2s$, $= -3s$ &c.

S' inferisce pertanto, che se i valori di m si prendano in progressione arimmetica, di cui la ragione sia s, i coefficienti B debbono risultare anch'essi in progressione arimmetica di cui la ragione sia B^{s}.

Si vede poi facilmente, che si può prendere per s un numero infinitamente piccolo; onde si comprendano nella serie $-3s$, $-2s$, $-s$, 0, $+s$, $+2s$, $+3s$ &c. tutti i valori reali possibili.

Si

Si può intanto concludere con tutta la generalità, che essendo m un numero reale qualunque, B^m ad m avrà sempre un rapporto costante.

Inoltriamoci nel raziocinio.

Dovendo aver B^m ad m un rapporto costante, se sia λ un numero costante, si può supporre $B^m = m$; resta solo a determinarsi il valore di λ, valore, che dovendo esser costante, basta conoscerlo in un sol caso. Suppongasi pertanto

$m=1$: Si avrà $(x+1)^1 = A^1 x + B^1 + \frac{C^1}{x} \ldots\ldots$ &c. e

perciò $B^1 = 1$; dunque nell'equazione $B^m = \lambda m$, ... $\lambda = 1$, e $B^m = m$.

Per applicare il raziocinio esposto anche ai casi, nei quali m sia immaginario, sia T una quantità immaginaria qualunque, e t una quantità infinita. Si potrà formare come sopra, una progressione arimmetica .... $-\frac{3T}{t}, -\frac{2T}{t}, -\frac{T}{t}$,

$0, +\frac{T}{t}, +\frac{2T}{t}, +\frac{3T}{t}$ &c. e si avranno come sopra l'espressioni dei valori di B come segue:

$-3B\frac{T}{t}$, $-2B\frac{T}{t}$, $-B\frac{T}{t}$, 0, $+B\frac{T}{t}$ &c.

Dunque anche in questo caso saranno i B ai valori corrispondenti di m in una ragione costante, e perciò sarà $B=m$.

Essendo dunque generalmente $B^m = m$, si sostituisca questo valore in luogo di B^m nell'espressione dei coefficienti C, D, E, F &c. e si otterrà ...
$(x+1)$

$$(x+1)^m = x^m + m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3}$$ &c. che è la formola Newtoniana.

125. Fin qui con induzione. Vediamo adesso come si possa liberare la dimostrazione addotta da ogni taccia d'induzione.

Suppongasi provata, come sopra, la verità del Teorema, di cui trattiamo per un numero r di coefficienti dei primi termini della funzione $x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2}$ &c. Io dico, che il coefficiente del termine $(r+1)$:esimo sarà soggetto alla medesima legge, per cui si son ottenuti gli antecedenti, cioè che detto V il coefficiente del termine $(r+1)$esimo, debb'egli esser $= \frac{B^m B^{m-1} \ldots B^{m-r}}{1.2.3\ldots r}$

Per dimostrar questa verità, si chiamino S, R, R &c. i coefficienti dei termini che ordinatamente precedono il termine V. Per il raziocinio esposto di sopra si deve avere $2^m V^m = 2^{m-r}(A^m V^m + B^m T^{m-1} + C^m S^{m-2} \ldots\ldots + S^m C^{m-r+2} + T^m B^{m-r+1} + V^m A^{m-r})$, o sia $(2^r - 2) V^m = (B^m T^{m-1} + C^m S^{m-2} \ldots + S^m C^{m-r+2} + T^m B^{m-r+1}) \ldots\ldots$ (2).

Osservando intanto i prodotti $B^m T^{m-1}$, $C^m S^{m-2}$ &c. si vede esser questi formati in maniera, che se uno de' fattori sia il coefficiente che appartiene al termine ..... $(n)^{esimo}$ dopo il primo, l'altro appartenga al termine $(n)^{simo}$ dopo il termine $(r+1)^{esimo}$, e che questo ha sempre per esponente $m-n$, mentre il primo ha per esponente m. Quindi se il primo di questi fattori dicasi M, ed ed il secondo $\mathcal{N}$, sarà, in virtù della formola Newtoniana, dimostrata fino al termine r :^{simo} ,

$$M^m = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \ldots\ n}$$

$$\mathcal{N}^m = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-r+n+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ (r-n)};\text{quindi}$$

$$\mathcal{N}^{m-n} = \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-r+1)}{1,\ 2.\ 3\ .,\ldots\ (r-n)}, \text{ ed}$$

$$M^m\,\mathcal{N}^{m-n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-r+1)}{(1.\ 2.\ 3\ \ldots n)(1.\ 2.\ 3\ldots(r-n))}$$

Si vede pertanto, che ciascuno dei prodotti $B^m T^{m-1} C^m S^{m-2}$ &c. hanno un medesimo numeratore, siccome non dipende in alcun modo da n.

Dicasi L questo numeratore; si diano ad n tutti i valori interi possibili da 1 fino ad $r-1$, e si troverà che la formola (2) si riduce alla forma ...... $(2^r-2)V^m = L\Big(\frac{1}{1,\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ (r-1)}$

$$+\frac{1}{(1.2.)(1.2.3\ldots(r-2))}+\frac{1}{(1.2.3.)(1.2.3.(r-2)}$$

$$+\frac{1}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots(r-1)}\Big)$$

Questa serie di frazioni dicasi k, e si moltiplichi per l'altra serie 1.2.3..... r, e si avrà

$$k(1.\ 2.\ 3\ldots r) = \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.\ 2} + \frac{r(r-1)\ (r-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$+\frac{(r-1)(r-2)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{r(r-1)}{1.2.} + \frac{r}{1}$$. Ora questa funzione è $=(1+1)^r-2=2^r-2$, come si può veder fa-

cilmente; dunque $k = \frac{2^r-2}{1.\ 2.\ 3\ldots.r}$; quindi ......

$(2^r-2)V^m = \frac{(2^r-2)\,L}{1.\ 2.\ 3\ldots.r}$; e perciò si ha finalmente $V^m \frac{m(m-1)\ (m-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (m-r+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r}$

$$= \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} \ldots\ldots B^{m-r}}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ r}.$$

Ecco pertanto, che dati essendo r termini, in virtù dei principj del nostro calcolo si ottiene sempre il termine $(r+1)$:^{esimo}, dipendente dalla stessa legge degli altri, e per ciò della forma Newtoniana. Riman provata per tanto con tutto il rigore, e con tutta la generalità possibile la formola del binomio, come si era proposto. E siccome la formazione di una potenza qualunque di una funzione polimonia si può ridurre facilmente alla formola del binomio, la Teoria delle potenze riman trattata compitamente.

126. Il Signor Euler ha tentato anch' egli d'investigare delle dimostrazioni generali del Teorema esposto, ma vi è riuscito con successo molto infelice.

Una egli ne dedusse dal Calcolo Infinitesimale, ma essa, come dipoi se ne avvidde egli stesso, e lo confessò nel *Tom.* 19. *pag.* 106. *de' Nuovi Comment. di Pietrob.*, essa è una vera *petizione di principio*, perchè il Calcolo Infinitesimale suppone come vero generalmente il suddetto Teorema.

La seconda dimostrazione, che egli adduce nel To-

Tomo suddetto *pag.* 104, non so se meriti maggior lode.

Il di lui raziocinio è, in poche parole, del seguente tenore.

Si sa, che essendo m un numero intero positivo, $(1+x)^m$ è $= 1 + \frac{m}{1} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$ &c. Qualora m sia un'numero negativo, o fratto, sia (m) ciò, che dev' essere $(1+x)^m$, come pure sia (n) ciò, che dev' essere $(1+x)^n$.

Considerando m, ed n come numeri interi positivi dovrebbe aversi $(m)(n) = (1+x)^m (1+x)^n$

$$= (1+x)^{m+n} = 1 + \frac{(m+n)}{1} x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 \cdot 2} x^2$$

&c., e nel modo stesso dovrebbe aversi $(m)(n)(p)$ $= (1+x)^m (1+x)^n \times (1+x)^p = (1+x)^{m+n+p}$ &c.

Sia $m = n = p$, onde $m+n+p$ sia $= am$; sarà $((1+x)^m)^a = ((1+x)^a)^m$, ossia sarà $(m)^a = (am)$

Si ponga $am = i$, e perciò $m = \frac{i}{a}$, e si avrà ..

$$(m) = 1+x)^m = (1+x)^{\frac{i}{a}} = 1 + \frac{i}{a} x + \frac{\frac{i}{a}\left(\frac{i-1}{a}\right)}{2} x^2$$

&c. Dunque la formola Newtoniana vale ancora per il caso, che m sia un numero fratto qualunque. Per il caso che sia m un numero negativo, siccome si sa, che essendo m intero positivo, si ha ... $(m) = (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{2} x^2$ &c.

F ed

ed $(m)(n) = (1+x)^m (1+x)^n = 1 + \frac{(m+n)}{1} x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 \cdot 2} x^2$ &c. Si ponga $m = -n$, e si avrá $(m)(-m) = 1$; quindi $(-m) = \frac{1}{(m)}$

$$= \frac{1}{1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{2} x^2 \text{ \&c.}} = (1+x)^{-m}$$

127. Questa dimostrazione, si vede primieramente, che suppone provato il Teorema, di cui si tratta, per il caso dell'esponente intero positivo; questa prova poi, come si raccoglie dalla Memoria citata, è dedotta dal Signor' Euler dalla moltiplicazione dei binomj, vale a dire da una semplice induzione.

Tutta la dimostrazione risulta per conseguenza meramente induttiva.

Di poi si vede, che la prova per il caso, in cui l'esponente sia fratto, in tanto conclude, perchè l'esponente assunto $\frac{i}{a}$ è fratto in apparenza, ed in sostanza è intero.

La dimostrazione per il caso dell'esponente negativo non richiedeva punto l'applicazione del principio $(m)(n) = (m+n)$; poichè si sa dagl' Elementi dell' Algebra, che $(1+x)^{-m}$ è $= \frac{1}{(1+x)^m}$; onde supposto dimostrato il Teorema per il caso dell'esponente intero positivo, si ha senza più $(1+x)^{-m} = \frac{1}{1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)x^2}{1 \cdot 2}}$ &c.

Fi-

Finalmante la dimostrazione di Euler non si estende ai casi, nei quali sia l'esponente irrazionale, ed imaginario.

CAPITOLO V.

Teoria delle funzioni radicali.

128. Dicesi radice, come già si accennò, una quantità, che mediante la successiva moltiplicazione per se stessa, ha prodotto una qualunque potenza. Il numero delle volte, che ella ha subito la reciproca moltiplicazione in se stessa, accresciuto di un'unità, mostra l'ordine della radice. Quindi a si chiama radice dell'ordine n.simo della funzione a^n, se a^n equivalga ad un prodotto, nel quale a sia fattrice n volte.

129. Quando una funzione data non è potenza esatta di quell'ordine, di cui si vuol la radice, l'estrazione della radice non si può effettuare con esattezza. In questo caso si suole indicar solamente l'estrazione da farsi col segno $\sqrt{\ }$, dentro di cui si pone il numero, che ne dimostra l'ordine. Così $\sqrt[n]{a}$ significa, che dalla quantità a si debbe estrarre la radice dell'ordine n.simo.

130. La lettera n dicesi esponente della radice, o del radicale, ed ogni quantità, che moltiplica un radicale, si chiama coefficiente, come sarebbe, per esempio, $3a$ nell'espressione $3a\sqrt[4]{b}$.

131. Le funzioni affette dal segno $\sqrt[n]{\ }$ diconsi generalmente radicali, e distinguonsi in *reali*, *ed immaginarj*, *particolari*, *ed universali*.

I primi sono quelli, che indicano un'estrazione di radice, che sia possibile in quantità intiere, o per approssimazione, il che avviene, quando la radice, che si debbe estrarre è di grado pari, e la funzione proposta è positiva; ò quando la radice è di grado impari, la funzione proposta essendo affetta da qualunque segno, positivo, o negativo.

132. Se un radicale indichi un'estrazione impossibile, si appella *immaginario*; Questo ha luogo allora solamente, quando si debbe estrarre una radice di grado pari da una funzione negativa. Non vi è infatti alcuna funzione, che essendo moltiplicata per se stessa un numero impari di volte possa produrre un risultato negativo. Essendo F una funzione qualunque $\sqrt[2n]{-F}$ rappresenta tutti i radicali *imaginarj*.

133. Se abbiasi un radicale della forma $\sqrt[2n]{-ax}$, ed in esso sia x una quantità variabile, si potrà chiamare con M. Cramer, radicale *demi imaginaire*, cioè mezzo immaginario, o immaginario per metà, perchè potendo x divenir positivo, e negativo, il divisato radicale può esser reale, ed immaginario.

134. I radicali *particolari* sono quelli, nei quali non si hanno sotto il segno, che quantità razionali, e sono *universali* quelli, che comprendono sotto il segno delle quantità razionali, ed irrazionali; Sia $\sqrt[m]{G}$ una funzione irrazionale qualunque, e sarà $\sqrt[n]{F\pm\sqrt[m]{G}}$ una formola esprimente ogni radicale *universale*.

SEZIONE I.

Del Calcolo delle funzioni radicali.

135. Il Calcolo di tutte queste specie di funzioni è in parte soggetto a delle regole particolari, che fa d'uopo conoscere precisamente. Si premettono i seguenti.

136. *Probl.* Ridurre le funzioni irrazionali alla forma più semplice. *Soluzione*. Se il radicale proposto sia monomio, si osservi, se fra i suoi fattori vi sieno potenze perfette dell'ordine espresso dall'esponente del segno prefisso, e qualora ciò avvenga, si estragga da tali termini la radice proposta, ed il risultato si prefigga per coefficiente del radicale, avvertendo di lasciare sotto del medesimo il prodotto di tutti quei fattori non suscettibili di estrazione esatta.

Esempio. $\sqrt{4a^2b}$ si riduce à $2a\sqrt{b}$, perchè da 4, ed a^2 si può estrarre esattamente la radice quadrata.

137. In altro modo. Si riducano i termini del radicale proposto a potenza fratta, il che si può fare, come si vedrà in appresso; per ora basta osservare, che $\sqrt[n]{p^m} = p^{\frac{m}{n}}$; difatto se formisi la potenza n.sima di ambedue i membri risulta $p^m = p^{\frac{m\,.\,n}{n}} = p^m$. Si faccia la riduzione degli esponenti, e si avrà la semplificazione richiesta.

Esempio. Sia da semplificarsi la funzione $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^5}{c^3d}}$. Questa si riduce alla forma ....

$\frac{8^{\frac{1}{3}}\,a^{\frac{3}{3}}\,b^{\frac{5}{3}}}{c^{\frac{3}{3}}\,d^{\frac{1}{3}}}$, e questa si riduce a $\frac{2ab^{\frac{5}{3}}}{cd^{\frac{1}{3}}} =$

$$\frac{2a}{c} \times \frac{b^{\frac{5}{3}}}{d^{\frac{1}{3}}} = \frac{2a}{c}\sqrt[3]{\frac{b^5}{d}}.$$

138. Qualora poi sia questione di semplificare un radicale polinomio, nel quale vi sia misto un fattore parimente polinomio, e che sia potenza perfetta dell'ordine, di cui si tratta, convien saper conoscere a colpo d'occhio un tal fattore, il che richiede molta pratica nel calcolo, e molta prontezza d'ingegno.

139. *Probl.* Ridurre le funzioni radicali al medesimo esponente. *Soluzione*. Si riducano i radicali a potenze fratte; gli esponenti fratti si riducano al medesimo denominatore; quindi si riconducano le potenze fratte alla forma radicale, e si avrà la riduzione dimandata.

Esempio. Sieno da ridursi al medesimo esponente i radicali $\sqrt[n]{a^2b^3}$, $\sqrt[m]{cd^4}$. Tolti i segni radicali, le due funzioni date divengono della forma .... $a^{\frac{2}{n}}\,b^{\frac{3}{n}}$, $c^{\frac{1}{m}}\,d^{\frac{4}{m}}$; Facciasi la riduzione degl'esponenti al medesimo denominatore, e ne proverrà $a^{\frac{2m}{nm}}\,b^{\frac{3m}{nm}}$, $c^{\frac{n}{nm}}\,d^{\frac{4n}{nm}}$, e re-e restituita la forma radicale si avrà finalmente $\sqrt[mn]{a^{2m}b^{3m}}, \sqrt[mn]{c^n d^{4n}}$, che è ciò, che si cercava.

140. Di qui si deduce una regola assai pronta per eseguir brevemente la suddetta operazione.

S'inalzi la funzione compresa sotto ciascuno dei segni radicali ad una potenza espressa dall'esponente dell'altro radicale, se due sole sieno le funzioni proposte; e ad una potenza espressa dal prodotto degl'esponenti, che appartengono agl'altri radicali, se i radicali sieno più di due; e si dia per esponente comune a ciascun segno radicale il prodotto di tutti gli esponenti, che appartenevano a ciascuno di essi. Il risultato sarà ciò, che si cercava, e la ragione è per se manifesta.

141. *Probl.* Aggiungere, e sottrarre le funzioni radicali.

Soluzione. Dopo aver fatta la riduzione all'espressione più semplice, se i radicali sieno comensurabili, cioè se contengano la stessa funzione sotto il segno, si sommino, o si sottraggano i coefficienti dei radicali dati, e la somma nel primo caso, e la differenza nel secondo si prefigga per coeffite al radicale comune.

Qualora i radicali proposti sieno incommensurabili si sommino, e si sottraggano con i semplici segni +, e —

Esempio 1.° $2\sqrt{ab} + \frac{3}{2}\sqrt{ab} = \frac{7}{2}\sqrt{ab}$; $2\sqrt{ab} - \frac{3}{2}\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$.

 Esem-

Esempio 2.° $3a\sqrt[3]{b}$ aggiunto, o sottratto da $8c\sqrt{d}$, dà per risultato $3a\sqrt[3]{b} \pm 8c\sqrt{d}$.

Esempio 3.° $\sqrt[3]{8a^3b} + \sqrt[3]{b^4}$; fatta la semplificazione diviene $2a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{b} = (2a+b)\sqrt[3]{b}$.

142. *Probl.* Moltiplicare le funzioni radicali.

Soluzione. Si riducano prima i radicali proposti al medesimo esponente; ciò fatto si faccia il prodotto delle quantità comprese sotto i segni; a questo prodotto si prefigga il segno radicale comune. Se si avevano coefficienti, si moltiplichi questo risultato per il prodotto di tutti essi, e si avrà il prodotto richiesto.

Esempio. Si debba moltiplicare $2\sqrt{a+b}$, per $5\sqrt[3]{a-b}$; Fatta la riduzione allo stesso esponente, queste funzioni divengono $2\sqrt[6]{(a+b)^3}$, $5\sqrt[6]{(a-b)^2}$, e il prodotto ricercato è .... $10\sqrt[6]{(a+b)^3(a-b)^2}$. Difatto $2\sqrt[6]{(a+b)^3} \times 5\sqrt[6]{(a-b)^2}$ è $= 2(a+b)^{\frac{3}{6}} \times 5(a-b)^{\frac{2}{6}} = 10(a+b)^{\frac{3}{6}} \times (a-b)^{\frac{2}{6}}$ $= 10\sqrt[6]{(a+b)^3(a-b)^2}$ come sopra.

143. La ragione di questa regola dipende dal seguente principio, ed è: Che una radice $n.^{\text{tima}}$ del prodotto di un numero qualunque di funzioni

ni è uguale al prodotto della radice $n.^{sima}$ di ciascuna funzione.

In effetto si ha $\sqrt[n]{p}\sqrt[n]{q}\sqrt[n]{r}\sqrt[n]{s}$ &c. $=\sqrt[n]{pqrs}$ &c.; poichè formando la potenza $n.^{sima}$ di ambedue i membri si hanno due risultati uguali identicamente.

144. Se si dovesse moltiplicare un radicale per una funzione razionale qualunque, si vede, che non si avrebbe da far'altro, che prefiggere il moltiplicatore proposto per coefficiente al radicale dato.

145. *Probl.* Dividere una funzione radicale per un' altra funzione parimente radicale.

Soluzione. Fatta come sopra la riduzione de'radicali al medesimo esponente, si dividano le quantità comprese sotto i segni, ed al quoziente si prefigga il segno radicale comune: qualora si avessero dei coefficienti, il di loro quoziente si faccia coefficiente del quoto radicale trovato: si avrà così quel risultato, che si cercava. Di fatto $m\sqrt{p}:n\sqrt{q}$

$$=\frac{m\sqrt{p}}{n\sqrt{q}}=\frac{m}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Esempio 1.° $8\sqrt[q]{bcr}:4\sqrt[q]{bcs}=\dfrac{8\overline{bcr}^{\frac{1}{q}}}{4\overline{bcs}^{\frac{1}{q}}}=\ldots\ldots$

$$\frac{8b^{\frac{1}{q}}c^{\frac{1}{q}}r^{\frac{1}{q}}}{4b^{\frac{1}{q}}c^{\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{q}}}=\frac{2r^{\frac{1}{q}}}{s^{\frac{1}{q}}}=\ldots\, 2\sqrt[q]{\frac{r}{s}}.$$

Se si avessero delle quantità razionali miste colle irrazionali, niente più difficile sarebbe l'operazione.

Esempio $(9a+3\sqrt{ac}-4b+2\sqrt{bc}):(3\sqrt{a}-2\sqrt{b}+\sqrt{c})$ dà per quoziente $3\sqrt{a}+2\sqrt{b}$. Basta solo avvertire, che $\dfrac{9a}{3\sqrt{a}}$ è $=\dfrac{9\sqrt{a}\sqrt{a}}{3\sqrt{a}}$.

146. *Scol.* Il Signor Dottor Tommasini nell' opera citata (*n.*114.) dice, che nella divisione di una funzione radicale per un'altra, allora si ottiene un quozienre esatto, quando le funzioni comprese sotto i segni stanno fra loro, come un quadrato ad un' altro.

Affinchè fosse vera questa proposizione, converrebbe, che dette a, b le due funzioni divisate, si potesse dedurre generalmente dall' equazione $\dfrac{ay^2}{b}=x^2\cdot\dfrac{x^2}{y^2}=m$ quantità intera, il che generalmente è falso.

Egli pretende di darne prova per induzione con un solo esempio particolare: principio fallace, che può condurre a qualunque assordo.

147. *Probl.* Inalzare i radicali ad una potenza qualunque. *Soluzione*. Si riducano le funzioni radicali a potenze fratte, e si operi come nei *Probl.* (*n.*112) e (*n.*114.): o più brevemente; si formi la potenza proposta della funzione compresa sotto il segno, e se le renda il segno radicale, come prima. La ragione di questo deriva dalla formazione delle potenze.

Esempio. Sia da elevarsi $p\sqrt[n]{a^q b^r}$ alla potenza m; si avrà ...... $(p\sqrt[n]{a^q b^r})^m = p^m (a^q b^r)^{\frac{m}{n}}$ $= p^m (a^{mq} b^{mr})^{\frac{1}{n}} = \ldots\ p^m \sqrt[n]{a^{mq} b^{mr}}$.

148. Il Calcolo de' radicali universali niente differisce da quello dei radicali particolari.

149. Per ridurli alla più semplic'espressione, si riduce prima il radicale compreso sotto il segno universale, e poi si riduce il radicale intero. Così $\sqrt{a^2b+\sqrt{a^4b^2c}}$ diviene $=\sqrt{a^2b+a^2b\sqrt{c}}$ $= a\sqrt{b+b\sqrt{c}}$.

150. La riduzione al medesimo esponente si ottiene mediante ciò, che si è insegnato al (*n.* 139.) punto non considerando le quantità comprese sotto il segno universale. Così $\sqrt{a^2+\sqrt{b}}$, e $\sqrt[3]{c+\sqrt{d}}$ ridotti al medesimo esponente sono $(a^2+\sqrt{b})^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}$, $(c+\sqrt{d})^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}$, cioè .... $\sqrt[6]{(a^6+3a^4\sqrt{b}+3a^2b+b\sqrt{b})}$, e $\sqrt[6]{(c^2+2c\sqrt{d}+d)}$
La stessa conformità di regole ha luogo per le altre operazioni.

151. Niente pur differisce dal calcolo dei radicali reali il calcolo dei radicali imaginarj. Vi è solo un'eccezione in ciò, che appartiene alla di loro moltiplicazione. Abbiasi, per esempio, $\sqrt{-a}$ da moltiplicarsi per $\sqrt{-b}$;

Il prodotto analogo a quello dei radicali reali sarebbe $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-a \times -b} = \sqrt{ab}$, ma esso è in effetto $= -\sqrt{ab}$. Eccone una dimostrazione. $\sqrt{-a}$ è $=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1}$, $\sqrt{-b} = \sqrt{b}\,.\,\sqrt{-1}$; dunque $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ è $=\sqrt{a}\ \sqrt{b}\,\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{-1}, = \sqrt{ab}\,(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{ab}\,.\,-1 = -\sqrt{ab}$.

Dimostrazione 2.ª Sia $ab = m^2$ il prodotto di due fattori negativi $-a$, $-b$; Trattandosi di estrarre la radice quadra da m^2, siccome si sa, che m^2 è derivato da una radice negativa, ad m, o sia a $\sqrt{ab}$, si dee preporre il segno negativo.

Si può qui osservare, che il prodotto di un numero pari di monomj immaginarj è sempre reale, all'opposto del prodotto di un numero impari di tali monomj.

152. Monsieur d'Alembert pretende di provare, che $\sqrt{-a}\ \sqrt{-b}$ sia $= \pm\sqrt{ab}$ (Recherches sur le systeme du Monde) ed il P. Boscovich difende lo stesso (*Elementorum Univ. Math. Tomo* 2. §. 45.)

Le ragioni, che vengono addotte da M. d'Alembert, sono le seguenti.

1.ª $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,.\,-\sqrt{-1}$, perchè quadrando ne proviene $-a = -a$; ma $\sqrt{-b} = \sqrt{b}\,.\sqrt{-1}$ moltiplicato per $\sqrt{a}\,\sqrt{-1}$ da $-\sqrt{ab}$, e moltiplicato per $\sqrt{a}\,.\,-\sqrt{-1}$ da $+\sqrt{ab}$; dunque &c. Rispondo, che l'equazione $\sqrt{a}\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,.\,-\sqrt{-1}$, è assorda, per-

perchè dovrebbe essere $\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$, e perciò $2\sqrt{-1} = 0$.

2.ª $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-a . -b} = \sqrt{ab}$. Questa difficoltà vien distrutta pienamente dalla seconda nostra dimostrazione.

3.ª $-a = a . -1 = \frac{a}{-1} = a . \frac{1}{-1}$ dunque $\sqrt{a}\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-a}$. Ma $\sqrt{-b} = \sqrt{b} . \sqrt{-1}$; dunque $\sqrt{-a} . \sqrt{-b} = \sqrt{a}\sqrt{-1}\sqrt{b}\sqrt{-1} = -\sqrt{ab}$; e $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-1}} . \sqrt{b} . \sqrt{-1} = +\sqrt{a}\sqrt{b} = +\sqrt{ab}$, dunque $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \pm\sqrt{ab}$.

Io rispondo, che sebbene sussistano l'equazioni $-a = a . -1 = a . \frac{1}{-1}$ non sussistono però in alcun modo, se si estragga una radice di grado pari, e che non ha luogo l'equazione $\sqrt{a}\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-1}}$, perchè altrimenti dovrebbe aversi $\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$, vale a dire $0 = 2$.

153. Per concepir questo anche meglio, basta osservare, che l'eguaglianza completa di due quantità, dopo che sien' esse state inalzate ad una potenza pari, non prova in alcun modo, che innanzi alla

alla formazione di tal potenza fossero eguali completamente, perchè la formazione di una potenza pari può mutare l'entità relativa, con mutare il segno, e render con ciò eguali completamente due quantità, che non erano tali.

Così $a = -a$ è generalmente un'equazione assorda, e divien reale, qualora i suoi due membri s'inalzino ad una potenza pari, perchè si toglie così la diversità del segno.

154. Il P. Boscovich non adduce altra prova della sentenza di d'Alembert, che un *videtur*, mentre così ragiona (*luogo cit.*) *Quamobrem si consideretur elevatio ad secundam potentiam, videtur valor haberi debere determinate pro negativo; si consideretur multiplicatio, debere haberi pro ambiguo*.

155. *Teor.* Ogni funzione immaginaria è riducibile generalmente alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$.

Dimostrazione. Sia 1.° Una funzione $a \pm b\sqrt{-c}$; ponendo c fuori del segno si ha $a \pm b\sqrt{c}\sqrt{-1}$, onde se facciasi $a = A$, e $b\sqrt{c} = B$, si avrà $a \pm b\sqrt{-c} = A \pm B\sqrt{-1}$.

Abbiasi 2.° una funzione $a \pm b\sqrt{-1} \pm c \pm d\sqrt{-1}$, dove a, e c sieno funzioni reali qualunque, come pure b, e d. Si ponga $a \pm c = A$; $\pm b \pm d = \pm B$, e sarà essa ridotta alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$.

Sieno 3.° Le due funzioni qualunque $a \pm b\sqrt{-1}$, $c \pm d\sqrt{-1}$, e si debbano moltiplicare insieme me; Il prodotto risulta $ac \mp bd \pm ad \sqrt{-1} \pm cb \sqrt{-1}$; Si ponga $ac \mp bd = \mathcal{A}$, $\pm ad \pm bc = \pm B$, e si avrà come sopra $\mathcal{A} \pm B \sqrt{-1}$.

Sia 4.° $a \pm b\sqrt{-1}$ da dividersi per $c \pm d\sqrt{-1}$;

Si avrà $\dfrac{a \pm b\sqrt{-1}}{c \pm d\sqrt{-1}} = \dfrac{(a \pm b\sqrt{-1})\ (c \mp d\sqrt{-1})}{(c \pm d\sqrt{-1})\ (c \mp d\sqrt{-1})}$

$= \dfrac{ac \pm bd \mp ad\sqrt{-1} \pm bc\sqrt{-1}}{c^2 + d^2}$. Si faccia

$\dfrac{ac \pm bd}{c^2 \pm d^2} = \mathcal{A}$, e $\dfrac{bc - ad}{c^2 \pm d^2} = B$, e si avrà. &c.

Sia finalmente 5.° $(a \pm b\sqrt{-1})^m$, essendo m qualunque intero, o fratto, positivo, o negativo, irrazionale, o immaginario. Sarà per la formola del Binomio .... $a^m \pm ma^{m-1} b\sqrt{-1} \mp \dfrac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 \pm \dfrac{m(m-1)\ (m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \sqrt{-1}$ &c. La somma dei termini di sito impari si ponga eguale ad $\mathcal{A}$, e la somma dei termini di sito pari si ponga eguale a $B\sqrt{-1}$; Si avrà l'espressione $\mathcal{A} \pm B\sqrt{-1}$, come sopra.

Rimane dunque provato, che una funzione immaginaria qualunque modificata con qualunque operazione Algebrica, è sempre suscettibile della forma $\mathcal{A} \pm B\sqrt{-1}$.

E' questo un Teorema dimostrato la prima volta da M. d'Alembert.

156.

156. Da questo Teorema ne deriva un'altro, ed è; che se abbiasi una funzione razionale, e questa sappiasi esser stata formata dalla moltiplicazione di fattori immaginarj, ne deriva, dissi, che tali fattori debbano esser della forma $\mathcal{A} + B\sqrt{-1}$, $\mathcal{A} - B\sqrt{-1}$, $C + D\sqrt{-1}$, $C - D\sqrt{-1}$ &c. Difatto considerando la forma materiale indipendentemente dai segni, è chiaro, per il *Teor.* di d'Alembert, che essa non può esser diversa.

La necessità dell'alternativa nei segni ne deriva da questo, che dovendo il prodotto esser reale, ciascun prodotto dei fattori presi a due, in ciascuna delle combinazioni debbe esser reale parimente. Ora questo non può avvenire senza la divisata alternativa dei segni, come si vede; dunque &c. &c.

SEZIONE II.

Dell' Estrazione delle radici.

157. Spesse volte occorre nel calcolo di dover investigare qual sia la radice di una funzione data, qualunque essendo l'ordine della radice, e qualunque la natura della funzione. Dal ritrovamento di questa non di rado avviene, che dipenda la soluzione di un problema.

Sia pertanto.

157. *Probl.* Estrarre una radice qualunque da qualsivoglia monomio. *Soluzione*. Il monomio dato abbia per coefficiente l'unità, perchè dell' estrazione delle radici dai numeri ne parleremo in appresso. E'chiaro, che se il monomio dato è una potenza perfetta dell'ordine, di cui si tratta, debbe esservi un monomio tale, che moltiplican-

candone gl'esponenti per l'esponente della radice proposta, riproduca il monomio dato, dunque se dividansi gl' esponenti dello stesso monomio dato per l'esponente della radice, ne dee nascere il monomio, che ne è la radice, e se la divisione degl' esponenti non succeda esattamente, sarà segno, che non vi è una radice esatta dell' ordine richiesto.

In effetto, siccome per inalzare un monomio ad una potenza, si moltiplica ciascun suo esponente per l'esponente della potenza, ne segue, che per estrarne la radice si debba dividere ciascun suo esponente per quello della potenza; e poi si vede, che l'estrazione delle radici essendo un problema inverso di quello, che riguarda la formazione delle potenze, i metodi, co' quali se ne ottiene lo scioglimento, debbon' essere inversi ancor essi. Ma vediamo col calcolo una conferma di questo raziacinio.

158. Se debbasi estrarre la radice $n.^{\text{sima}}$ da a^n è chiaro, che essa è $= a$; ma $a^{\frac{n}{n}}$ dà parimente a: dunque &c.

Se da a^{mn} si debba estrarre la radice $n.^{\text{sima}}$, si vede, che essa dev'essere $= a^m$, cioè $= a^{\frac{mn}{n}}$.

Se finalmente sia da estrarsi la radice $n.^{\text{sima}}$ da a^m si ponga $m = nx$, il che si può far sempre, e non si tratterà, che di estrarre la radice $n.^{\text{sima}}$ da a^{nx}; Ma questa, si è veduto, che dev' essere $= a^x$, ed x è $= \frac{m}{n}$; dunque in generale $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

 Esem-

Esempio. Si debba estrarre la radice terza da $\frac{a^3 b^9 c^2}{d^4}$; Inerendo ai principj esposti, divido tutti gl'esponenti per 3, ed il risultato ..... $\frac{ab^3 c^{\frac{2}{3}}}{d^{\frac{4}{3}}}$ è la radice cubica richiesta.

159. Questo metodo però quantunque vero, anzi unico pel ritrovamento delle radici esatte, qualora qualcheduno degl'esponenti, di cui è dotato il monomio proposto non sia divisibile per l'esponente della radice, riesce un metodo di pura apparenza, poichè per esempio quando si debb' estrarre la radice cubica da a^2, e si scrive $a^{\frac{2}{3}}$, non si ottiene nulla più, che una semplice indizione, appunto come se si scrivesse $\sqrt[3]{a^2}$. Per ottenere pertanto un'effettiva radice, quantunque non in termini finiti, che non è possibile, conviên ricorrere ad un' altro metodo. Sia dunque

160. *Probl.* Estrarre per approssimazione una radice qualunque da un monomio, che non sia potenza perfetta dell' ordine proposto. *Soluzione.*

Sia c il valore intero, che più si accosta a $\sqrt[n]{a}$, e g sia ciò che manca, perchè c sia la radice esatta; si avrà $x = \sqrt[n]{a} = c + g$ dove g dee necessariamente esser molto minore di c. Facendo la potenza $n.^{\text{sima}}$ si av-

si avrà $x^n = a = c^n + nc^{n-1}g + \frac{n(n-1)}{2} c^{n-2}g^2$ &c.
Si trascurino le potenze di g superiori alla prima, come quantità molto piccole, onde si abbia $x^n = c^n + nc^{n-1}g = a$, e si avrà $g = \frac{a-c^n}{nc^{n-1}}$, ed $x = c + g = \frac{(n-1)\,c^n + a}{nc^{n-1}}$.

Per ottenere un valore più esatto non si ha che da ripetere successivamente la medesima operazione con prendere per c il valore ottenuto per x.

Esempio. Si voglia determinare la radice quadrata di 2. Facciasi la sostituzione di $n = 2$, $a = 2$, $c = 1$ nella formola $x = \frac{(n-1)\,c^n + a}{nc^{n-1}}$, e si avrà $x = \frac{3}{2}$: facciasi $c = \frac{3}{2}$, e ne proverrà $x = \frac{17}{12}$; pongasi $c = \frac{17}{12}$, e si avrà $x = \frac{577}{408}$ radice, il di cui quadrato è sì prossimo a 2, che lo supera della sola quantità $\frac{1}{166464}$.

161. *Probl.* Estrarre da un polinomio razionale una qualunque radice. *Soluzione*. Prima d'intraprendere l'estrazione proposta, convien'esaminare, se il polinomio dato sia una potenza perfetta dell'ordine, di cui si tratta; perchè rade volte succede, che l'estrazione possa eseguirsi esattamente. Per assicurarsi di questo, non si ha che da sostituire le lettere del polinomio dato, ed il massimo esponente nella formola del binomio, se le lettere sieno due, o nella formola del trino-

 mio

mio, che nasce da quella del binomio conporre due lettere in luogo di una, e così in seguito. Se il risultato provenga eguale alla funzione proposta, sarà certo, che essa è una potenza perfetta; non si tratterà più che di osservare, se l'ordine, a cui appartiene, sia il medesimo, che quello della radice richiesta, o se ne sia un multiplo. Avendo luogo uno di questi casi s'intraprenderà l'estrazione, altrimenti si eseguirà per approssimazione, a tenore di ciò, che insegneremo in appresso, ovvero se ne indicherà solamente l'estrazione.

Se, per esempio, venisse proposta ad estrarsi la radice cubica della funzione $q^3 + 3q^2r + 3qr^2 + r^3$, si porrebbe q per a, r per b, e 3 per n nella formola $a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2$ &c. $+ b^n$, e siccome si ottiene precisamente la funzione proposta si concluderebbe, che la radice si può estrarre. Posto tutto questo venghiamo alla soluzione del problema.

Si ordini il polinomio dato per le potenze di una delle lettere componenti. Dal primo termine si estragga la radice proposta secondo le regole de' monomj, e questa sarà il primo termine della radice richiesta. Questo primo termine s'inalzi ad una potenza espressa dall'esponente della radice da estrarsi, diminuito di un'unità, e si moltiplichi per detto esponente. Per questo prodotto si divida il secondo termine del polinomio: il quoziente sarà il secondo termine della radice. I due termini trovati qualora la radice debba essere composta di più termini, s'inalzino alla stes-

stessa potenza, a cui s'inalzò il primo termine, il risultato si moltiplichi per l'esponente della radice, e per il prodotto si divida il complesso di quei termini rimanenti, che sono divisibili; il quoziente somministrerà un nuovo termine per la radice. Così proseguasi finchè non siensi ottenuti i termini della radice richiesta.

Esempio 1.° Si debba estrarre la radice quadrata dal polinomio $a^2+2ab+b^2$. Da ciò che si è veduto (*n.*114.) raccolgo, che il polinomio proposto è un quadrato perfetto; e che la radice debb'esser binomia. Estraggo pertanto la radice quadra da a^2, ed ottengo a per primo termine della radice; per a inalzato alla potenza $2-1$, moltiplicata per 2, cioè per $2a$, divido il secondo termine $2ab$, ed il quoziente b è il secondo termine della radice, onde $a+b$ è la radice, che si cercava.

Esempio 2.° Sia proposta ad estrarsi la radice quarta dalla funzione $a^4-4a^3z+6a^2z^2-4az^3+z^4$.

Avendo conosciuto, che essa è una potenza perfetta di quart'ordine, e che la radice dee esser binomia, perchè non si hanno, che due lettere, estraggo la radice quarta dal termine a^4, ed ottengo a per primo termine della radice. Divido $-4a^3z$ per $4a^3$, ed il quoziente $-z$ è il secondo termine della radice. Concludo pertanto, che $a-z$ è la radice, che si voleva.

162. Se una radice proposta non sia possibile in valore esatto, convien contentarsi di un valore prossimo, il quale si può avvicinare quanto si voglia al vero, ed esatto valore.

Sia, per esempio, da estrarsi la radice quadrata dal binomio a^2+bc; operando col metodo esposto

sto si ottiene la radice espressa per la serie infinita $a+\frac{bc}{2a}-\frac{b^2c^2}{8a^3}+\frac{b^3c^3}{16a^5}-\frac{5b^4c^4}{128a^7}+$ &c., ed operando colla formola del binomio, posto $n=\frac{1}{2}$, si avrebbe il medesimo risultato.

163. In generale qualunque sia la radice da estrarsi, qualora essa non sia estraibile in termini esatti, facendo uso del metodo esposto, si ottiene sempre un valore, che non differisce dal vero, che di una quantità estremamente piccola e lo stesso si ottiene, se nella formola del binomio si sostituisca per n una frazione, che abbia per numeratore l'unità, e per denominatore l'esponente della radice da estrarsi. Difatto niente impedisce, che una funzione qualunque suppongasi $=F$; dunque $F^{\frac{1}{m}}$, esprime in questo caso la radice $m.^{sima}$ di F, onde non resta, che formare la potenza $\frac{1}{m}$ della funzione F, per averne la radice $m.^{sima}$.

164. Fin qui abbiamo supposto, che le radici si dovessero estrarre da funzioni razionali. Se le funzioni sieno irrazionali, o immaginarie, il metodo esposto non è di alcun successo, poichè, eccettuati i pochi casi, nei quali la funzione è manifestamente una potenza perfetta, come .... $a^2+2a\sqrt{b}+b$, l'estrazione della radice ordinaria somministra un risultato più complicato, e più oscuro, che la semplice indicazione della radice. E'pertanto necessario, che passiamo ad investigar dei metodi particolari, per cui si ottenga

ga semplicemente espressa ogni radice, che sia possibile in termini finiti, e se ne ottenga un valore molto prossimo, e semplice, qualora non sia possibile ottenerla esattamente.

165. *Probl.* Estrarre la radice quadrata da qualunque monomio imaginario quadratico. *Soluzione*.

Sia $B\sqrt{-1}$ un monomio imaginario quadratico qualunque; pongasi $\sqrt{B\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$ (Si pone in radice il radicale $\sqrt{-1}$, perchè, se non fosse in radice, non potrebbe trovarsi nella potenza). Quadrando si ottiene $B\sqrt{-1} = x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{-1}$; siccome poi non può esservi eguaglianza fra quantità reali, e quantità imaginarie, debbono aversi le due equazioni ..... $x^2 - y^2 = 0$, $2xy\sqrt{-1} = B\sqrt{-1}$; Dalla prima si deduce $x = y$: perciò la seconda diviene $2y^2\sqrt{-1} = B\sqrt{-1}$ onde si ha $y = \sqrt{\frac{B}{2}}$, e finalmente

$$x + y\sqrt{-1} = \sqrt{B\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{B}{2}}(1 + \sqrt{-1}).$$

Esempio. Sia da estrarsi la radice quadra dal monomio immaginario $2\sqrt{-1}$; Operando, come sopra, si avrà ... $\sqrt{2\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{\frac{2}{2}}(1 + \sqrt{-1}) = \pm(1 + \sqrt{-1})$.

166. *Scol.* 1.° Qualora l'ordine della radice fos-

se multiplo di 2, cioè fosse un numero pari qualunque $2m$, converrebbe estrarre m volte di seguito la radice quadrata da ciascun risultato. Ma siccome dopo la prima estrazione s' incontra subito di dover operare sopra un binomio, perciò convien ricorrere al metodo, che daremo in appresso per l' estrazione della radice quadra dai binomj.

167. *Scol.* 2.° Qualora la radice da estrarsi da un momio imaginario fosse di grado impari $2m+1$, converrebbe procedere per approssimazione, e questo si eseguirebbe con dividere il monomio proposto $B\sqrt{-1}$ in due parti per esempio .... $(B-1)\sqrt{-1} + \sqrt{-1}$; e quindi formarne la potenza $\frac{1}{2m+1}$ secondo la formola generale.

168. *Probl.* Estrarre la radice quadrata da qualunque binomio irrazionale quadratico. *Soluzione*. Il Binomio dato sia $A \pm B$, dove nel caso di B negativo, sia $B < A$ altrimenti $A - B$ avrebbe la forma di un quadrato negativo, e perciò sarebbe impossibile estrarvi la radice. Pongasi $\sqrt{A \pm B} = x \pm y$, in maniera che sia $\sqrt{A + B} = x + y$, e $\sqrt{A - B} = x - y$, per il che altro non si richiede, che supporre nell' equazione $A \pm B = x^2 \pm 2xy + y^2$, che il primo termine A rappresenti i termini di sito impari x^2, y^2, e che B rappresenti i termini di sito pari $2xy$.

Posto questo, si aggiungano insieme le due addotte equazioni $\sqrt{A + B} = x + y$, $\sqrt{A - B}$

$= x - y$, e si avrà $x = \frac{\pm\sqrt{A+B} \pm \sqrt{A-B}}{4}$; di quest'equazione se ne faccia il quadrato, onde si abbia $x^2 = \frac{A+\sqrt{(A^2-B^2)}}{4}$; si estragga nuovamente la radice, e si otterrà $x = \pm \frac{\sqrt{A+\sqrt{A^2-B^2}}}{\sqrt{4}}$

$$= \pm \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}}.$$

Con egual metodo, ma prima sottraendo una delle due equazioni ipotetiche dall'altra, si ottiene $y = \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}}$. Di qui ne segue, che debba essere $x+y = \pm \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}}$ $\pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}}$, ed $x - y = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\pm \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}} \mp \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}}, \text{ e}$$

finalmente, separando i segni da ambe le parti ......

$$x \pm y = + \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}}$$

$$= - \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}} \mp \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}}.$$

Esempio 1.° Vogliasi la radice quadra del binomio $\sqrt{32} \pm \sqrt{24}$. Si faccia $\sqrt{32} = A$, $\pm\sqrt{24} = B$, e sarà $A^2 - B^2 = 8$ $\frac{A+\sqrt{(A^2-B^2)}}{2} = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2} = \frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}; \frac{A-\sqrt{(A^2-B^2)}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2} = \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$ Quindi $x \pm y$

$$= \sqrt{3\sqrt{2}} \pm \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{18}} \pm \sqrt{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt[4]{18} \pm \sqrt[4]{2}.$$

Esempio 2.° Si voglia la radice quadra del binomio $-7 \pm 4\sqrt{-2}$; sarà $-7 = A$, $\pm 4\sqrt{-2} = B$, $A^2 - B^2 = 81$, ed $x \pm y = 1 \pm 2\sqrt{-2}$.

Se si volesse tentar di nuovo la estrazione della radice quadra, si avrebbe $A = 1$, $B = \pm 2\sqrt{-2}$, e $A^2 - B^2 = 9$; quindi $x \pm y = \sqrt{2} \pm \sqrt{-1}$.

Si vede per conseguenza, che il metodo esposto può esser utile ancora per l'estrazione delle radici qualunque di grado pari $= 2^m$

169. Oltre di questo il suddetto metodo può applicarsi con successo all'estrazione della radice quadra dai trinomj irrazionali. Eccone un esempio.

Sia proposta ad estrarsi la radice quadra dal trinomio $m\sqrt{t} \pm 2\sqrt{mq\sqrt{tr}} + q\sqrt{r}$. Avremo $A = m\sqrt{t} + q\sqrt{r}$; $\pm B = \pm 2\sqrt{mq\sqrt{tr}}$; perciò .... $A^2 - B^2 = m^2t + q^2r -$

$2mq\sqrt{tr}$, e $\sqrt{(A^2-B^2)}=m\sqrt{t}-q\sqrt{r}$; Dunque si ha $x\pm y=\pm\sqrt{m\sqrt{t}}\pm\sqrt{q\sqrt{r}}$; quattro pertanto sono le radici del trinomio proposto, e sono $\sqrt{m\sqrt{t}}+\sqrt{q\sqrt{r}}$, $-\sqrt{m\sqrt{t}}-\sqrt{q\sqrt{r}}$, $\sqrt{m\sqrt{t}}-\sqrt{q\sqrt{r}}$, $-\sqrt{m\sqrt{t}}+\sqrt{q\sqrt{r}}$.

Le prime due appartengono al trinomio ...... $m\sqrt{t}+2\sqrt{mq\sqrt{tr}}+q\sqrt{r}$, e le altre due appartengono al trinomio $m\sqrt{t}-2\sqrt{mq\sqrt{tr}}+q\sqrt{r}$.

170. Qualora però si volesse applicare il suddetto Metodo all'es trazione delle radici dai quadrinomj, e dalle funzioni di un maggior numero di termini, s' incontrerebbe sulle prime sì nojosa complicatezza di calcolo, da non poterlo condurre a fine.

Noi daremo in appresso dei metodi particolari per l'estrazione delle radici dalle funzioni polinomie. Passiamo intanto a sciogliere direttamente il seguente.

171. *Probl.* Estrarre una radice pari qualunque $2m$ da un binomio irrazionale quadratico. *Soluzione.* Se l'ordine $2m$ sia una potenza di 2, come 4, 8, 16, 32 &c. Si estragga successivamente la radice quadra col metodo esposto di sopra; e si ripeta l'estrazione tante volte, quante unità meno una si contengono nell'esponente della radice proposta; cosicchè se debbasi estrarre la radice quarta, si estragga due volte la radice quadra; si estragga tre volte, se debbasi estrarre la radi-

radice ottava, e così in seguito.

172. Qualora poi l'esponente della radice da estrarsi non sia una potenza di 2, ma bensì un prodotto di 2 per un numero impari, per esempio 6, 10, 14 &c., in questo caso si estragga la radice quadrata, finchè giungasi a dovere estrarre una radice impari. Giunti che siasi a questo, si dee ricorrere ai metodi, che seguono.

Sia prima di tutto

173. *Probl.* Estrarre la radice cubica da un binomio irrazionale quadratico. *Soluzione*. Se il binomio proposto abbia ambedue i termini irrazionali, si moltiplichi ciascuno di essi per il cubo del radicale di uno de due termini, onde uno di essi divenga razionale, e della forma $a+b\sqrt{c}$. Si ponga $\sqrt[3]{(a+b\sqrt{c})}=z+m\sqrt{y}$; cubando da ambe le parti si avrà $a+b\sqrt{c}=z^3+3z^2m\sqrt{y}+3zm^2y+m^3y\sqrt{y}$; e paragonando insieme le quantità omogenee, si avranno le due equazioni, $a=z^3+3zm^2y$, $b\sqrt{c}=3z^2m\sqrt{y}+m^3y\sqrt{y}$. Osservando però si vede, che non vi potrebbe essere nel cubo $a+b\sqrt{c}$ il radicale $\sqrt{c}$, se esso non fosse anche nella sua radice, perciò nel cubo addotto convien fare $\sqrt{y}=\sqrt{c}$, con questo si ha dalla seconda equazione $b=3z^2m+m^3c$; onde si deduce $z^2=\frac{b-m^3c}{3m}$, e $z=\pm\sqrt{\left(\frac{b-m^3c}{3m}\right)}$, dove per aver z non rimane, che porre per m un numero tale, che $\frac{b-m^3c}{3m}$ divenga un quadrato, e z riceva un tal valore, che essendo sostituito insie-

sieme con m nella quantità z^3+3m^2zc, la renda eguale ad a.

Avanti di passare agl' esempj, conviene notare ciò, che segue.

1.° Se i termini del binomio sieno di segno alternativo, non si avrà, che da prendere corrispondentemente i segni alternativi nella radice, onde abbiasi, per esempio $\sqrt[3]{(a-b\sqrt{c})} = z-m$, e se i segni del binomio dato sieno ambedue negativi, si riguarderanno come positivi, e si muteranno i segni della radice. 7 V4

2.° Se nel binomio dato vi sieno delle frazioni, si riducano tutte al medesimo denominatore, e la radice estratta dal numeratore si divida per la radice del denominatore.

3.° Quando si vede, che l'estrazione della radice non possa riuscire, si trasformi il termine affetto dal radicale, e si tenti di nuovo l'estrazione.

4.° Se la quantità fuori del segno radicale non sia maggiore, quanto si richiede, di quella, che vi si comprende, il metodo diviene insufficiente; in questo caso bisogna moltiplicare il binomio dato per una quantità opportuna a rendere il prodotto un cubo; effettuato questo, se sia possibile, si dividerà la radice risultante per la radice cubica della quantità, per cui si fece la moltiplicazione.

Tutto il fin qui detto si renderà chiaro con gl' esempj.

Esempio 1.° Si debba estrarre la radice cubica dal binomio $26+\sqrt{675}$; *Operazione*. Riducosi

casi il binomio proposto all' espressione più semplice, onde sia della forma $26+15\sqrt{3}$; quindi si avrà $b=15$, $c=3$, $a=26$, e fatte le sostituzioni

$$z=\sqrt{\left(\frac{b-m^3c}{3m}\right)}=\sqrt{\left(\frac{15-3m^3}{3m}\right)}=\pm\sqrt{\left(\frac{5-m^3}{m}\right)}.$$

Per rendere $\frac{5-m^3}{m}$ un quadrato, pongasi $m=1$, e sarà $z=\pm 2$; si pongano questi valori nell'equazione $z^3+3m^2zc=a$, siccome risulta $8+3\cdot3\cdot2=26$, equazione identica, ne segue, che la radice richiesta $z+m\sqrt{c}$ sia $=2+\sqrt{3}$, la radice $-2+\sqrt{3}$ servirebbe per il binomio $-26+15\sqrt{3}$, e questo vale generalmente.

Esempio. 2° Si debba estrarre la radice cubica dal binomio $12+\frac{1}{2}+11\sqrt{2}$. *Operazione*. Si riducano i termini tutti in frazione, che abbia il denominatore 2, onde abbiasi $\frac{25+22\sqrt{2}}{2}$. Quindi considerando il numeratore si avrà $b=22$, $c=2$, $a=25$, e $z=\sqrt{\left(\frac{b-m^3c}{3m}\right)}=\sqrt{\left(\frac{22-2m^3}{3m}\right)}$ Prendasi $m=2$, e si avrà $z=\pm 1$: si sostituisca, come nel primo esempio, e si avrà l'equazione identica $1+3\cdot4\cdot2=25$, onde la radice richiesta sarà ... $\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

Esempio 3.° Sia richiesta la radice cubica del binomio $3+\frac{10}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}$: *Operazione*. Si avrà $b=$

$b=\frac{10}{3}$, $c=-\frac{1}{3}$, ed $a=3$, perciò $z=\sqrt{\left(\frac{b-m^3c}{3m}\right)}$
$=\sqrt{\left(\frac{10+m^3}{9m}\right)}$; pongasi $m=2$, e si avrà $z=\pm 1$; si prenda il segno negativo, e fatta la solita sostituzione, si avrà l'equazione identica $-1+4=3$, il che dimostra esser la radice $-1+2\sqrt{-\frac{1}{3}}$.

Esempio 4.° Sia da estrarsi la radice cubica dal binomio $\sqrt{243}+\sqrt{242}$. *Operazione*. Riducendo s'ottiene $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$; moltiplicando, e dividendo per $3\sqrt{3}$, cubo di $\sqrt{3}$, si ha $\frac{81+33\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$; si consideri il solo numeratore; e si avrà $b=33$ $c=6$, $a=81$; perciò .... $z=\sqrt{\left(\frac{b-m^3c}{3m}\right)}$...
$=\sqrt{\left(\frac{11-2m^3}{m}\right)}$; pongasi $m=1$, e si avrà $z=\pm 3$; sostituendo, come sopra, si ottiene l'equazione identica $27+54=81$. onde $\sqrt[3]{81+33\sqrt{6}}=3+\sqrt{6}$, e
$\sqrt[3]{\left(\frac{81+33\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}\right)}=\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.....
$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

174. *Probl*, Estrarre una radice impari qualunque c da un binomio radicale quadratico.

Soluzione. *Met.* 1.° Il binomio dato sia $A\pm B$, e la radice incognita $x\pm y$, onde abbia $\sqrt[c]{(A+B)}$

$=\frac{x+y}{\sqrt[c]{m}}$, e $\sqrt[c]{(A-B)}=\frac{x-y}{\sqrt[c]{m}}$; si avrà $\sqrt[c]{(A+B)}$
$\sqrt[c]{(A-B)}=\sqrt[c]{(A^2-B^2)}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt[c]{m^2}}$ ò sia x^2-y^2
$=\sqrt[c]{m^2(A^2-B^2)}=n$; con i metodi generali si trovi prossimamente il valore di $\sqrt[c]{m(A+B)}=r$. Dalle due equazioni $x+y=r$, $x-y=\frac{n}{r}$ si avrà sommando, $2x=\frac{n}{r}+r$, ed $x=\frac{\frac{n}{r}+r}{2}$ prossimamente, il valore, che suppongo $=K$.

175. Fin quì ci siamo accostati al valore di x; avvertasi però, che qualora mA, vale a dire il maggior termine del binomio sia irrazionale, conviene estrarre prima la radice quadra da mA, e poi estrarre la radice c da $m\,(A+B)$; per il che il valore trovato risulta doppiamente inferiore al vero: perciò il valore K trovato si deve moltiplicare per il radicale più semplice, che si contiene in A, onde renderlo più grande; Questo radicale sia $\sqrt{p}=s$; si avrà $x=Ks=\frac{\frac{n}{r}+r}{2}$, e $K=\frac{\frac{n}{r}+r}{2s}$.

176. Trovato x si trova y facilmente dall'equazione $y^2=x^2-(x^2-y^2)=K^2s^2-n$, della quale si

si ha $y=\pm\sqrt{K^2s^2-n}$; quindi se $A\pm B$ sia una potenza perfetta dell'ordine c, si troverà $=\dfrac{Ks+\sqrt{K^2s^2-n}}{\sqrt[c]{m}}$.

177. *Scol.* Se la parte irrazionale del binomio ridotto fosse B, il radicale più semplice di B dovrebbe essere anche in y; perciò sottraendo l'una dall'altra delle due solite equazioni $x+y=r$, $x-y=\dfrac{n}{r}$ si avrebbe $y=\pm\dfrac{r-\frac{n}{r}}{2}=K$, e moltiplicando, come sopra, questo valore per il minimo radicale di B, che suppongo, s, si avrebbe $y=Ks=\dfrac{r-\frac{n}{r}}{2}$; quindi si dedurebbe dall'equazione $x^2-y^2=n$, o sia $x^2=n+y^2=n+K^2s^2$, $x=\pm\sqrt{n+K^2s^2}$, onde $\dfrac{x\pm y}{\sqrt[c]{m}}=\sqrt[c]{(A\pm B)}$ ....

$=\dfrac{\sqrt{n+K^2s^2}+Ks}{\sqrt[c]{m}}$ formola, che può essere pure vantaggiosa.

178. *Scol.* 2. L'addotta soluzione, che debbasi a Newton, e che si può vedere nella sua Arimmetica Universale, non è tanto sicura, come pretende qualche Algebrista (*vedi Introd. in Alg. Tomasini Tom. 2. pag.* 176.); mà va soggetta a due notabili incomodi: il primo è che quando il radicale più

 sem-

semplice, che si contiene in mA, è notabilmente grande, Ks diviene maggiore notabilmente del vero valore di x, ed accrescendosi per conseguenza y, la radice $x+y$ risulta maggiore assai della radice prossima.

Il secondo incomodo è, che molte volte il metodo suddetto mostra, che sia impossibile l'estrazione della radice, sebbene ella possa aver luogo. Così, e l'osserva il Ch. Euler (*Comm. vecchj dell'Acc. R. delle Sc. di Pietrob. Tom.* 2.), volendosi la radice quinta del binomio $5\sqrt{5}+11$, la quale è $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$, si trova col metodo di Newton essere $\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{3}}}{\sqrt[10]{8}}$, risultato, il quale indica, non esser possibile la radice quinta del sudetto binomio, perchè, se fosse possibile, dovrebbe in esso contenersi il radicale $\sqrt{5}$, come è manifesto.

Passiamo pertanto a ricercare qualche altro metodo, il quale sia immune da questi difetti.

179. *Met.*° II. Sia $\sqrt[c]{(A\pm B)}=\dfrac{x\pm y}{\sqrt[2c]{p}}$; onde abbiansi le due equazioni (A^{I}) ..... $\sqrt[c]{(A+B)}=\dfrac{x+y}{\sqrt[2c]{p}}$; $\sqrt[c]{(A-B)}=\dfrac{x-y}{\sqrt[2c]{p}}$ ..... (B^{I}). Moltiplicandole insieme, si ottiene $\sqrt[c]{(A^2-B^2)}=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt[c]{p}}$.

quindi $x^2 - y^2 = \sqrt[c]{(A^2 - B^2)p}$.

Adesso, poichè tanto $x^2 - y^2$, quanto $A^2 - B^2$, e p debbono esser numeri interi, si prenda per p una quantitá, che renda il prodotto $(A^2 - B^2)p$ una potenza perfetta dell' ordine n, e perciò si cerchi una minima potenza r^n, che essendo divisa per $A^2 - B^2$, renda per quoziente p; trovate le due quantità p, r, si avrà $x^2 - y^2 = r$.. (A^{II}).

Facciansi adesso i quadrati delle due equazioni ipotetiche (A^I), (B^I), e si aggiungano insieme, onde abbiasi $\sqrt[c]{(A+B)^2} \pm \sqrt[c]{(A-B)^2}$..................

$= \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{\sqrt[c]{p}}$........ (B^{II}). Di qui si deduce $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\sqrt[c]{(A+B)^2 p} + \frac{1}{2}\sqrt[c]{(A-B)^2 p}$.

Si cerchino col metodo generale le radici prossime dell'ordine c, di ciascun binomio $(A+B)^2 p$, $(A-B)^2 p$, e sieno s, t; trovati questi valori, si avrà $x^2 + y^2 = \frac{s+t}{2}$.....$(A^{III})$; si combini quest' equazione coll' equazione (A^{II}), come sopra nel 1.° Metodo, e si avrà $x = \sqrt{s+t+2r}$, ed $y = \sqrt{s+t-2r}$, onde finalmente $\sqrt[c]{(A \pm B)} = \frac{x \pm y}{\sqrt[2c]{p}}$

$= \frac{\sqrt{s+t+2r} \pm \sqrt{s+t-2r}}{\sqrt[2c]{p}}$

Esempio 1.° Si voglia la radice quinta del binomio $5\sqrt{5}+11$, che si vide non potersi ottene-

re col metodo Newtoniano. *Operazione*. Si ha 1.° $A = 5\sqrt{5}$, $B = 11$, $A^2 - B^2 = 4$, $n = 5$; 2.° per sodisfare all' equazione $\frac{r^5}{4} = p$ si ponga $r = 2$, e risulterà $\frac{r^5}{4} = p = 8$; 3.° Si avrà $(A+B)^2 = 246 + 110\sqrt{5}$ $(A-B)^2 = 246 - 110\sqrt{5}$; 4.° Pigliando $\sqrt{5}$ in decimali, si deduce $(A+B)^2 p = 3935, 7333$, e $(A-B)^2 p = 0, 2666$; 5.° Da ciascuno di questi valori si estragga la radice quinta, e si avrà..

$\sqrt[5]{(A+B)^2 p} = 5, 23 = 5$; $\sqrt[3]{(A-B)^2 p} = 0, 76 = 1$; 6.° La somma di questi valori $5+1=6$; 7.° Trovati i valori prossimi di r, t, s, si ha finalmente la radice richiesta $= \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{\sqrt[10]{8}} = \sqrt{2}$..............

$\frac{(\sqrt{5}+1)}{\sqrt[10]{2^{13}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[10]{2^8}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[2\cdot5]{2^3}}$.

Esempio 2.° Sia da estrarsi la radice se[illegible] del binomio $139\sqrt{3}+91\sqrt{7}$; si avranno i valori seguenti; $n = 7$, $A = \sqrt{57967}$, $B = \sqrt{57963}$; $A^2 - B^2 = 4$; $p = \frac{r^7}{4} = \frac{2^7}{4} = 32$, perciò $x^2 - y^2 = 2$.

Quindi $(A+B)^2 = (115930 + 25298\sqrt{21}$; $(A-B)^2 = 115930 - 25298\sqrt{21}$; $(A+B)^2 p = 7419519199760$;

$(A-B)^2 p = 0, 00240$; $\sqrt[7]{(A+B)^2 p} = 9, 584 = 9$; $\sqrt[7]{(A-B)^2 p} = 0, 42$; $t = 1$; quindi $x^2 + y^2 = 5$, $x^2 =$

∧ s=9

$x^2 = \frac{7}{2}$, $y^2 = \frac{3}{2}$, e la radice richiesta $= \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt[14]{32} = (\sqrt{7}+\sqrt{3}) : \sqrt[7]{64}$.

180. Il Metodo esposto non è però applicabile ai binomj immaginarj, onde convien vedere, come si possa ridurre anche a quest'uso.

Questa riduzione è assai elegante, se bene richieda i principj dell'Analisi per esser eseguita, non gli richiede però per esser compresa, e questo basta, perchè possa quì aver luogo.

181. La cagione, per cui l'esposto metodo non è di uso per i binomj immaginarj è, che in questa ipotesi non si può trovare il valor prossimo di $t+u$

$$= \frac{\sqrt[n]{(A+B)^2 p} + \sqrt[n]{(A-B)^2 p}}{2},$$

che pure è necessario: si deve perciò tentare altra via per ottenerlo. A quest' effetto sia $z = \sqrt[n]{(A+B)^2 p} + \sqrt[n]{(A-B)^2 p}$ dove z si deve considerare come radice di un'equazione del grado n.

182. Dalla soluzione dell' equazione de' gradi superiori esposta la prima volta dal Ch. Majureno si sà, che l'equazione $\alpha = z^n - nz^{n-1}\sqrt[n]{\beta} + n\frac{(n-3)}{1.\,2.}z^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2} - n\frac{(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3.}z^{n-6}\sqrt[n]{\beta^3} + n\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\,2.\,3.\,4.}z^{n-8}\sqrt[n]{\beta^4}$ &c. ha per radice

$$z = \sqrt[n]{\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2}} + \sqrt[n]{\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2}}$$

ora nel caso nostro è $z = \sqrt{((A^2+B^2)\,p + 2pAB)} + \sqrt[n]{((A^2+B^2)\,p - 2pAB)}$, onde $\alpha = 2p(A^2+B^2)$ $\sqrt{(\alpha^2-4\beta)} = 4pAB$, e perciò $\beta = p^2(A^2-B^2)^2 = r^{2n}$ per esser $p\,(A^2-B) = r^n$; fatte pertanto le sostituzioni l'equazione addotta sarà nel caso nostro

$$z^n - nr^2z^{n-2} + n\frac{(n-3)}{1.\,2}r^4z^{n-4} - n\frac{(n-4)(n-5)}{1.\,2.\,3.}r^6 z^{n-6}\ \&c. = 2p(A^2+B^2)$$

equazione sempre reale, dalla quale se si avrà un sol valore di z, si conoscerà $x^2+y^2 = \frac{1}{2}z$, e siccome si ha $x^2-y^2 = r$ si dedurrà $x = \sqrt{\frac{z+2r}{2}}$, ed $y = \sqrt{\frac{z-2r}{2}}$, e perciò

$$\sqrt[n]{A \pm B} = \frac{\sqrt{z+2r} \pm \sqrt{z-2r}}{2\sqrt[2n]{p}},$$

dove i valori di p, ed r si hanno dall' equazione $p\,(A^2-B^2) = r^n$, e il valore di z si suppon cognito in qualunque modo per mezzo dell' Analisi.

183. E' facile a vedersi, che si può anche con questo metodo estrarre una radice qualunque da un binomio dato anche reale, purchè la radice debba esser binomia.

Questa ricerca non può estendersi, come si vedrà, che al caso, in cui i radicali compresi nella proposta funzione non superino il quart'ordine, ne, e non ostante questa restrizione, ella dipende dalla soluzione dell' equazioni; niente però impedisce, che suppongasi questa come cognita, e si prosegua il raziocinio del Metodo, poichè, quando debbasi questo adoprare, si saprà la sudetta soluzione, e niente mancherà per metterlo in pratica.

184. *Probl.* Dato un polinomio numerico tale, che tutti i suoi termini, o tutti meno uno sieno irrazionali quadratici estrarvi la radice quadrata.

Soluzione. Ad oggetto di rendere la Teoria del metodo, che passiamo ad esporre, meno astratta, e difficile, supponghiamo, che abbiasi il polinomio numerico $t^2+x^2+y^2+z^2-2tx+2ty-2tz-2xy+2xz-2yz$, nel quale i termini t^2, x^2, y^2, z^2 che sono tutti razionali, si suppongono ridotti in un sol termine, ed i termini rimanenti $-2tx$, $+2ty$ &c. sono tutti irrazionali incommensurabili, altrimenti per mezzo della riduzione si ridurrebbero ad un numero minore. Siccome la radice di questo polinomio è ...... $t-x+y-z$, si vede, che ciascun termine irrazionale comprende due termini della radice; osservato questo, si rifletta, che detti termini irrazionali si possono moltiplicare a due per due in maniera, che il prodotto essendo diviso per un' altro di essi opportunamente, somministri un quoziente razionale (Difatto si ha $\frac{2tx\,.\,2ty}{2xy}=2t^2$, $\frac{2xy\,.\,2yz}{2xz}=2y^2$ &c.) e si concluderà la seguente

I. *Regola*. Si moltiplichi un termine irrazionale per un'altro; il prodotto si divida per

uno

uno dei termini parimente irrazionali, atto a rendere un quoziente razionale; dalla metà del quoziente si estragga la radice quadrata, e sì avrà un termine della radice richiesta. Si ripeta la stessa operazione, finchè si ottengano quozienti razionali, e le radici delle loro metà offrano dei termini diversi, e si avranno i termini tutti della radice, che si cerca.

II. Riguardo ai segni da prefiggersi ai termini trovati si deve osservare, che i fattori dei termini irrazionali dotati di segno positivo, debbono avere gli stessi segni, e che i fattori di quei termini, che sono dotati di segno negativo, debbono aver segno diverso. Di quì ne segue, che per procedere con sicurezza, si debbono prender prima quelle quantità, che sono dotate dei medesimi segni, e si debbon porre separatamente con i segni positivi in una colonna, e con i segni negativi in un'altra; dipoi se due altre quantità di questa sorta sieno tali, che un loro fattore sia uno di quelli già separati, ed abbiano segno diverso, convien scriverne i fattori nelle due colonne con i segni diversi.

Esempio. Si debba estrarre la radice quadrata dal quadrinomio $14-\sqrt{72}+\sqrt{108}-\sqrt{24}$. Questo lo riduco alla forma $14-2\sqrt{18}+2\sqrt{27}-2\sqrt{6}$; Fatto questo vedo, che $\frac{2\sqrt{18}\times2\sqrt{6}}{2\sqrt{27}}$ è $=2\sqrt{4}=2$, e concludo, che $\sqrt{2}$ è un termine della radice; dipoi trovo $\frac{2\sqrt{18}\times2\sqrt{27}}{2\sqrt{6}}=18$ ed ed ottengo $\sqrt{9}=3$ per secondo termine della radice. Rimane $\dfrac{2\sqrt{27}\times 2\sqrt{6}}{2\sqrt{18}}=6$, di dove si ha $\sqrt{3}$ per ultimo termine della radice.

Per combinare i segni opportunamente osservo, che siccome $\sqrt{27}$ è di segno positivo, i suoi fattori 3 e $\sqrt{3}$ debbon prendersi positivi; perciò scrivo (Fig. *A*) $+3$, $+\sqrt{3}$ nella prima colonna; ma poichè possono tali fattori produrre il medesimo risultato positivo ancorchè abbiano ambedue il segno negativo, pongo -3, $-\sqrt{3}$ nella seconda colonna.

Osservo dipoi, che $-\sqrt{6}$ dee risultare da due fattori dotati di segno diverso, e concludo, che, se $\sqrt{3}$ pongasi positivo, $\sqrt{2}$ dee porsi negativo, e viceversa; però nella colonna *A* scrivo $-\sqrt{2}$, e nella colonna *B*, $\sqrt{2}$.

Con questo inferisco, che la radice è 3, $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, ovvero $-3+\sqrt{2}-\sqrt{3}$;

Lo stesso varrebbe se vi fossero de' radicali immaginarj.

185. Rimane finalmente da vedersi, come si possa procedere all'estrazione di una radice di qualunque ordine da una funzione polinomia composta di qualunque specie di radicali. Sia pertanto

186. *Probl.* Estrarre una radice qualunque da qualsivoglia funzione radicale. *Soluzione*. Si riguardi la funzione proposta, come derivata dal-

la soluzione di un'equazione, e perciò si consideri come la formola generale delle radici di un' equazione. L'opportuna equazione, di cui si tratta suppongasi essere $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}$ .... &c. $=0$... (*A*), e questa sia del grado espresso dall' esponente del più alto radicale della funzione data. Risciolta questa in virtù delle regole dell'Analisi, si ottiene x espresso per una formola radicale: questa si paragoni colla funzione proposta, onde se ne possano determinare i coefficienti a, b, c &c. Determinati questi, se la radice da estrarsi sia dell'ordine *n*.^{simo} pongasi $\sqrt[n]{x}=y$, o sia $x=y^n$, e sostituendo y^n per x nell'equazione (*A*) si avrà quest'altra .... $y^{mn}+ay^{mn-n}+by^{mn-2n}$ &c. $=0$ ... (*B*). Le radici di questa saranno altrettante radici *n*.^{sime} della funzione proposta.

Questo Metodo non può estendersi, come si avrà luogo di vedere, oltre il quarto grado, e perciò si richiede, che i radicali compresi nella funzione data non superino il quart'ordine, e non ostante questa restrizione vi è l'incomodo di dover riscioglierе un' equazione. Questo però non si oppone all'intelligenza del metodo, e niente impedisce, che si prosegua il raziocinio esposto; e quando si dovrà adoperare, si saprà la soluzione dell'equazioni, e nulla mancherà per metterlo in pratica.

187. L'estrazione delle radici da' numeri ha qualche difficoltà particolare, a cui non può sodisfare il metodo generale: ma per poterlo applicare, si richiede qualche cautela, e qualche artifizio, che andiamo a dettagliar brevemente. Si premettono i seguenti

188. *Teor.* Il numero delle cifre, che contiene la potenza $m.^{sima}$ di un numero composto di n cifre, è compreso nei limiti $nm - m + 1$, che è il minimo, ed mn, che è il massimo. *Dimostrazione*. Il minimo numero di una cifra è 1, di cui il quadrato, il cubo &c. è $=1$, cioè $nm - m + 1$.

Il minimo numero di due cifre è 10, di cui il quadrato è 100, che contiene un numero di cifre $2 . 2 - 1 = nm - m + 1$; il cubo di 10 è 1000, e il numero delle sue cifre è $2 . 3 - 2$; la quarta potenza è 10000., ed ha un numero di cifre espresso per $2.4 - 3$; in generale la potenza $m.^{sima}$ di 10 contiene $nm - m + 1$ cifre.

Il minimo numero di tre cifre è 100, il suo quadrato è 10000, che è composto di un numero di cifre $= 3 . 2 - 1$ cioè $= mn - m + 1$; il suo cubo è 1000000, di cui il numero delle cifre è $= 3 . 3 - 2 = mn - m + 1$; in generale la potenza $m.^{sima}$ di un numero di tre minime cifre contiene un numero di cifre $= 3m - m + 1$.

Si vedrà egualmente, che la potenza $m.^{sima}$ di n minime cifre contiene un numero di cifre $= mn - m + 1$, come si era proposto nella prima parte.

Passando alla seconda parte, osservo che il quadrato della massima cifra, che è $9^2 = 81$, non contiene più di due cifre, cioè di nm; vedo che il quadrato di due cifre massime 99 è $= 9801$, cioè che non comprende più di $2 . 2 = mn$ cifre, che il quadrato di tre massime cifre 999 non ne contiene più di sei perchè $999^2 = 998001 = nm$, e che in generale il quadrato di n massime cifre non

non ne può contenere più di $2n$.

Osservo in appresso, che il cubo di una cifra massima, che è $9^3 = 729.$, è composto di tre cifre, cioè di $m . 1$, o mn cifre, che il cubo di un numero composto di due cifre massime, ne contiene sei, perchè $99^3 = 970299 = 2 . m = nm$, e si vede, che in generale il cubo di n cifre massime, non ne può comprendere più di $3n$, cioè più di mn.

Proseguendo così alle potenze successive, si concluderà per un' induzione assai chiara, che generalmente la potenza $m.^{sima}$ di un numero composto di n cifre, non può contener meno di $mn - m + 1$ cifre, nè più di mn, e che perciò $mn - m + 1$, ed mn sono i limiti, fra cui si contiene il numero delle cifre di una potenza $m.^{sima}$, di un numero qualunque di n cifre. Dico adesso

189. *Teor.* Che la radice $m.^{sima}$ di un numero composto di mn cifre non può contenere nè più, nè meno di n cifre. *Dimostrazione* ad assordo. Il numero delle cifre di tal radice sia, se è possibile, $= n - 1$; il massimo limite del numero di cifre, che si possono contenere nella potenza $(n-1)^m$ è $nm - m < nm$; dunque $n - 1$ cifre non possono formar la radice $m.^{sima}$ di un numero composto di mn cifre. Sia dunque la divisata radice composta di $n + 1$ cifre. Il minimo limite delle cifre, che si possono contenere nella potenza $(n+1)^m$, è $(n+1)m - m + 1 = nm + 1 > nm$; dunque $n + 1$ cifre non possono formare la suddetta radice. Ora, siccome $n - 1$ cifre sono meno, ed $n + 1$ cifre so-

sono più del dovere, ne segue che n cifre debbano essere il solo numero di cifre conveniente alla radice $m.^{sima}$ di un numero di mn cifre.

190. *Teor.* Dato un numero, da cui si debba estrarre la radice $m.^{sima}$, se dividasi in tanti membri di m cifre, andando dalla destra verso la sinistra, quanti membri si hanno, tante debbono esser le cifre della radice. *Dimostrazione*. Un numero mn di cifre somministra n membri composti di m cifre; ma per il Teor. prec. la radice $m.^{sima}$ di un numero di mn cifre dee contenere n sole cifre: dunque tante debbono esser le cifre della radice $m.^{sima}$ quanti sono i membri di m cifre nella potenza.

191. Nè a questo si oppone, che l'ultimo membro a sinistra contenga meno di m cifre, perchè in tal caso si hanno $n—1$ membri completi di m cifre, i quali danno per ciò, che abbiamo dimostrato, $n—1$ cifre in radice; ma nella potenza $m.^{sima}$ di $n—1$ cifre il massimo numero di cifre è $mn—m$; per ipotesi il numero delle cifre date è $>mn—m$, perchè contiene n membri, dei quali $n—1$ sono completi, e comprendono per conseguenza $mn—m$ cifre, ed inoltre vi ha il membro incompleto; dunque le cifre della radice debbon risultare generalmente &c. Posto questo sia

192. *Probl.* Estrarre da qualsivoglia numero, una qualunque radice. *Soluzione*. Si divida il numero proposto in tanti membri come sopra; si estragga la radice dal primo membro, la quale

le dee contenere una sola cifra, ed è perciò facile a ritrovarsi, se non esatta, il che non suole avvenire, almeno prossima più che sia possibile. Il primo termine della radice così ottenuto si sollevi ad una potenza espressa dall' esponente della radice proposta, e si sottragga il risultato dal primo membro. Appresso al residuo si abbassi il secondo membro, e questo numero diminuito dell' ultima $m—1$ cifre si divida per il primo termine della radice inalzato ad una potenza inferiore di un' unità al grado della radice proposta, e moltiplicato per il di lei esponente: Se la divisione riesca impossibile, perchè il divisore sia maggiore del dividendo, si ponga zero in radice; altrimenti sarà il quoziente un secondo termine della radice, purchè sollevando i due termini trovati alla potenza espressa dall'ordine stesso della radice proposta, il risultato si possa sottrarre dai primi due membri presi insieme; perchè; se ciò non possa aver luogo, bisogna diminuire il secondo termine della radice, finchè si possa eseguire la sottrazione divisata.

Qualora i termini della radice debbano essere più di due, si operi sù i due termini trovati, come si è operato sul primo, cioè si formi di essi la medesima potenza, e il risultato si moltiplichi per l'esponente della radice, e si prosegua l'operazione, come sopra, finchè mediante le opportune sottrazioni successive, si giunga ad un residuo zero, il che avviene, quando il numero proposto è una potenza compita dell' ordine, di cui si tratta, ovvero finchè siasi ottenuta mediante i decimali una radice assai vicina all' esattezza.

Il dettaglio, che possiamo a fare su gl'esempj pj spargerà molta luce sul metodo esposto, il quale nondimeno è sostanzialmente lo stesso, che quello, che appartiene alle funzioni letterali.

193. *Scol.* Una potenza qualunque di un numero contiene le parti stesse, che si contengono nella potenza letterale corrispondente. Per convincersene basta scomporre il numero proposto ad inalzarsi ad una data potenza nelle sue parti, cioè nelle unità, diecine, centinaja &c., e poscia trattarlo col metodo delle potenze letterali. Vi è però questo svantaggio nelle potenze numeriche, che tali parti sono in esse miste, e confuse insieme, il che riesce d' impedimento all' estrazione. Per correggere quest'inconveniente si ricorre ad un ripiego, e questo è appunto la divisione del numero proposto in tanti membri, ciascuno de'quali, andando da destra verso la sinistra, sia composto di un numero di cifre espresso dall' esponente della radice. Come ciò basti per evitare l'ostacolo prodotto dalla confusione delle cifre lo mostreranno gl'esempj.

Esempio 1. Si debba estrarre la radice quadrata dal numero 54757. *Operazione*. Divido il numero 5, 47, 57 in membri di due cifre, e trovo, che tre debbon esser le cifre della radice. Estraggo la radice quadra prossimamente dal primo membro 5, ed ottengo 2 per primo termine della radice. Inalzo 2 al quadrato, e lo sottraggo da 5. Appresso al residuo 1 abbasso il secondo membro 47; osservo quindi, che dette a, b, c, le tre cifre della radice, la prima equivale ad $a00$, perchè esprime centinaja, che la seconda equivale à $b0$, perchè esprime diecine, e che la terza è puramente c, perchè esprime unità semplici.

Di quì ne segue, che la potenza 54757, equivale a $(a00+b0+c)^2$; dunque nella parte 14757 vi si debbono contenere i prodotti $2a00\times b0 + 2b0\times c + 2a00\times c + \overline{b0}^2 + c^2$. Siccome dunque $2a00\times b0$ esprime migliaja, questo doppio prodotto si dee contenere nelle prime due cifre 14, perchè la terza esprime centinaja; noto pertanto con un punto la seconda cifra del secondo membro, e divido 14 per $2a$, ossia per 4; trovo 3 per quoziente.

Trovato questo, osservo, che siccome questa seconda cifra esprime diecine, il suo quadrato deve esprimere centinaja, e migliaja al più, ma non diecine, ne unità, onde per esser cifra da porsi in radice dee esser tale, che il doppio prodotto della prima cifra 2 per questa seconda, e il quadrato di questa insieme si possano sottrarre da 14700, poichè, se questa sottrazione non si potesse effettuare, sarebbe segno sicuro, che la seconda cifra trovata è maggiore del dovere, e che perciò conviene diminuirla, finchè tal sottrazione si possa eseguire. Faccio pertanto la sottrazione di $2.200\times 30+30.30$ da 14700, ò che è lo stesso, faccio la sottrazione di 129 da 147: appresso al residuo 18 abbasso il terzo membro 57, ed ho 1857.

Osservo, che in quest'avanzo vi si dee contenere il doppio prodotto di $a00$ in c, il doppio prodotto di $b0$ in c, e il quadrato di c, e vedo inoltre, che la somma dei due doppj prodotti possono contenere migliaja, centinaja, e diecine, ma non unità; inferisco pertanto, che delle prime cifre 185 vi si dee comprendere il pro-

prodotto $(2a00+2bo)c$; divido perciò 185 per $2a00+2bo$, o sia per il doppio delle due cifre trovate, che è 46, onde aver c; che è la terza cifra della radice; il quoziente è 4. Per assicurarmi se possa mettersi in radice, sottraggo $(2 . 200+2 . 30) 4+4^2$, o, che è lo stesso, $464\times4=1856$ da 1857, e siccome la sottrazione riesce, pongo 4 in radice.

Ecco pertanto, che si è trovato 234 per radice parziale in numeri interi del numero proposto. Adesso poichè dal residuo 1 non si può seguitar l'estrazione, ricorro ai decimali. Aggiungo ad 1 due zeri; il nuovo membro dee somministrare una cifra di più in radice: ma perché si è aggiunto un membro, che rende il numero proposto cento volte maggiore, e questo aumento ricade tutto sulla nuova cifra, e sul residuo, a motivo, che le radici crescono in ragione sudduplicata delle potenze, conviene porre la cifra risultante nel posto dei decimi; o più chiaramente. Aggiunti due zeri al residuo, si supponga diviso il risultato per 100, con che si restituisce al residuo il suo valor primitivo. E' evidente, che avendo estratta la radice al solito dal residuo accresciuto di due zeri, la cifra, che si ottiene dee dividersi per la radice del denominator 100, che è 10, o, che è lo stesso, deesi porre nel luogo dei decimi.

Ciò ben concepito, si vede, che in virtù del raziocinio esposto di sopra, per ottener la nuova cifra della radice, convien divider 100 per il doppio delle cifre trovate, cioè per 468, e che siccome la divisione non è possibile, zero dev' es-

essere il nuovo termine decimale da mettersi in radice.

Aggiungo due altri zeri, e divido 10000 per il doppio della radice, che è 4680, e ottengo 2 per quoziente, che dovrei porre in luogo dei centesimi, ma che non lo pongo, perchè il prodotto 46802×2 non può sottrarsi da 10000, e siccome non si può sottrarre neppure 46801×1, pongo zero in luogo dei centesimi.

Aggiungo nuovamente due zeri, e divido 1000000 per 46800; il quoziente 2 lo pongo in radice, perchè riesce la sottrazione di ..... 468002×2 da 1000000. Con questo la radice quadrata di 54757 è 234, 002 &c. Volendo spinger più oltre l'approssimazione si aggiungerebbero successivamente altre coppie di zeri, e si proseguirebbe l'operazione, come sopra.

Esempio 2. Debbasi estrarre la radice cubica da 79, 507. Vedo sulle prime, che le cifre della radice debbon esser due, e che perciò il cubo della prima cifra, dovendo contener sole migliaja, non può esser compreso, che nelle due prime cifre. Cerco pertanto la radice cubica di 79, e la trovo essere $=4$ prossimamente; Sottraggo da 79 il cubo di 4, ed ho per residuo 15, a cui abbasso a lato le tre ultime cifre 507. Osservo adesso, che il triplo quadrato di 40 moltiplicato per la seconda cifra può contener migliaja, e centinaja, ma non diecine; concludo perciò, che questo triplo quadrato moltiplicato per la seconda cifra si contiene in 15500, e punto per conseguenza le due ultime cifre del residuo 15507. Divido 15500 per $3 . 40^2$, o che è lo stesso, divido 155 per $3 . 4^2$; il quoto to è 3; inalzo al cubo 43, e lo sottraggo da 79507, e siccome la sottrazione si fa senza resto, concludo, che 43 è la radice cubica esatta 79507. Se si fosse avuto un residuo, si sarebbero aggiunti tre zeri, e si sarebbe operato al solito.

Questi esempj possono bastare per far conoscere il raziocinio, che si deve usare in qualunque altro caso, e nell' estrazione delle radici de'gradi superiori.

194. *Scol.* Non si dee qui tralasciar di avvertire, che qualora si tratti di estrarre una radice da un numero sordo, e che sia composto di poche cifre, può farsi uso vantaggiosamente delle formole di Halley (*Transact. Philos.* 1694.)

Vediamo il metodo, da cui son dedotte, e ne faremo l' applicazione a suo tempo.

195. Sia da estrarsi la radice $n.^{\text{sima}}$ dal binomio $a^n \pm b$; Si ponga $a+d = \sqrt[n]{a^n \pm b}$; sarà $(a+d)^n = a^n \pm b$, cioè $a^n \pm b = a^n + na^{n-1}d + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} d^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} d^3$ &c.

Si trascurino le potenze della quantità d, che si suppone piccolissima, e si tenga conto solamente della seconda, si tolga a^n da ambe le parti, e il restante si divida per n; Si otterrà $\pm \frac{b}{n} = a^{n-1} d + \frac{n-1}{2} a^{n-2} d^2$; Si moltiplichi adesso per 2; e si divida per $(n-1)\, a^{n-2}$, onde si abbia $d^2 + \frac{2a}{n-1} d = \pm \frac{2b}{(n^2-n)\, a^{n-2}}$. Questa è

nu'

un' equazione di secondo grado, che essendo risciolta per cio, che diremo (*n.* 1153.) da per d un' espressione che aggiunta ad a, somministra la formola generale di Halley, dalla quale si avranno le radici, che si richiedono, con sostituire nei casi particolari in luogo di a, b, ed n i respettivi loro valori.

Fin qui dell' estrazione delle radici dalle quantità tanto razionali, quanto irrazionali, ed immaginarie. Ma se l' estrazione dovesse farsi da un radicale?

Si riduca il radicale a potenza fratta, e si tratti, come le funzioni razionali; se sia, per esempio, $\sqrt[n]{\mathcal{Q}}$ dove $\mathcal{Q}$ sia una funzione qualunque, volendovi estrarre la radice $m.^{\text{sima}}$ si avrà $\mathcal{Q}^{\frac{1}{mn}}$ che esprimerà la radice richiesta, e restituendo la funzione alla forma radicale si avrà $\sqrt[mn]{\mathcal{Q}}$ radice, che si otterrà con i metodi soliti.

Ecco dunque, che per estrarre una radice qualunque da una funzione radicale basta estrarre dalla funzione compresa sotto il segno una radice espressa dal prodotto dell' esponente del radicale dato per l' esponente della radice proposta.

Con questo riman'esposto, quanto può dirsi intorno all' estrazione delle radici.

196. Siccome però non di rado avviene, che le radici non possano estrarsi, e quando anche possono estrarsi, succede spesso, che la radice medesima contenga delle parti radicali, essendo

d'al-d'altronde le funzioni radicali molto incomode nel calcolo non solo dell'Algebra, ma eziandio del Calcolo Integrale, non dee riuscire inopportuno, che prima di lasciar questo ramo di Teoria, ci occupiamo alcun poco dei metodi, e degli artifizj atti a ridurre le funzioni radicali a forma razionale.

Tratteremo primieramente degli artifizj opportuni per ridurre alla razionalità i radicali quadratici, che contengono sotto il segno delle funzioni binomie, o trinomie, e che poste eguali a zero, costituiscono un'equazione non superiore al secondo grado.

In secondo luogo insegneremo a ridurre i radicali di qualunque ordine, che comprendono sotto il segno delle funzioni binomie, lineari per rapporto all'incognita in esse contenuta, e dotate di una potenza qualunque.

In ultimo passeremo alla riduzione di molte formole generalissime, ed affette da una irrazionalità la più complicata, ed astrusa.

Inteso bene tutto ciò che andiamo ad esporre, non sarà difficile a suo tempo di ridurre mediante l'Analisi, anche quei radicali, che conducono ad equazioni superiori al secondo grado; purchè però le radici di tali equazioni si presentino sotto una forma razionale, e non isfuggano i Metodi fin qui conosciuti.

SEZIONE III.

Della riduzione de' radicali a forma razionale.

197. Si debba ridurre a forma razionale il radicale $\sqrt{a^2 \mp x^2}$. Si ponga $\sqrt{a^2 \mp x^2} = \frac{a^2 \pm z^2}{2z}$, e si avrà $x^2 = \frac{a^4 \mp 2a^2z^2 + z^4}{4z^2}$, e $x = \frac{a^2 \mp z^2}{2z}$, valore, che essendo sostituito nella formola proposta la ridurrà razionale.

198. Abbiasi da ridurre la funzione $\sqrt{ab \pm x^2}$. Si ponga $x = \frac{ab \mp z^2}{2z}$, e si avrà ciò, che si cerca.

199. Avendosi la formola $\sqrt{(a+bx)(c+dx)}$ basta farla $= z(a+bx)$. Quadrando si ottiene $c+dx = z^2(a+bx)$, e di qui $x = \frac{c-az^2}{bz^2-d}$. Si ponga per x questo valore nella formola $z(a+bx)$ e si avrà $\sqrt{(a+bx)(c+dx)} = z\left(\frac{bc-ad}{bz^2-d}\right)$, quantità razionale. In qualunque caso particolare si avrà dall'equazione $x = \frac{c-az^2}{bz^2-d}$, il valore opportuno di x, e con ciò il valore di $z\left(\frac{bc-ad}{bz^2-d}\right)$, o sia della formola data. Se fosse, per esempio, $b=1$, $c=a$, e $d=-1$; sarebbe $\sqrt{(a+bx)(c+dx)} = \sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{2az}{z^2+1}$, ed $x = \frac{a-az^2}{z^2+1}$; dunque per ridurre alla razionalità la formola $\sqrt{(a^2-x^2)}$ basta porre $x = \frac{a-az^2}{z^2+1}$.

200. Abbiasi l'espressione $\sqrt[n]{(a \pm bx)^m}$, da ridursi come sopra. Si faccia quest' espressione $= z^m$

$=z^m$, e sarà $(a \pm bx)^{\frac{z}{n}} = z$, ed $a \pm bx = z^n$;
quindi $x = \frac{z^n - a}{\pm b}$ valore, che sostituito per x nella formola proposta, la dee rendere razionale.

201. Se si avesse $(bx - a)^{\frac{m}{n}}$, risulterebbe ......
$x = \frac{z^n + a}{b}$.

202. Sia proposta l'espressione $\sqrt[n]{\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^m}$;
Si faccia, come sopra $=z^m$, e si avrà $\frac{a+bx}{f+gx} = z^n$,
e di qui $x = \frac{fz^n - a}{b - gz^n}$, valore richiesto.

103. Sia la formola $\sqrt{(a^2 + bx + cx^2)}$; questa
si ponga $= a + xz$; quadrando ne proviene $b + cx$
$= 2az + xz^2$, e perciò $x = \frac{b - 2az}{z^2 - c}$, ed $a + xz =$
$\sqrt{(a^2 + bx + cx^2)} = \frac{bz - az^2 - ac}{z^2 - c}$. Per la formo-
la $\sqrt{(a^2x^2 + bx + c)}$ si farebbe l'equazione con
$ax + z$, e si avrebbe $bx + c = 2axz + z^2$, ed
$x = \frac{z^2 - c}{b - 2az}$; quindi $ax + z = \sqrt{(a^2x^2 + bx + c)} =$
$\frac{bz - az^2 - ac}{b - 2az}$.

104. In egual modo si rende razionale la for-
mola $\sqrt{(x^4 + ax^3 + b^2x^2)}$. Difatto se dividasi per
x^2, e si ponga $\sqrt{(x^2 + ax + b^2)} = b + xz$, si
ottiene $x^2 + ax = 2bxz + x^2z^2$, o sia $x + a$

$= 2bz$

$= 2bz + xz^2$, vale a dire $x = \frac{2bz - a}{1 - z^2}$.

105. Sia finalmente la formola $\sqrt{(max \pm nx^2)}$;
questa si faccia $= xz$, onde si abbia $max \pm nx^2$
$= x^2z^2$, e perciò $x = \frac{ma}{z^2 \mp n}$, ed $x^2 = \frac{m^2a^2}{(z^2 \mp n)^2}$. Per
mezzo di questi valori si ha $\sqrt{(max \pm nx^2)}$
$= \sqrt{\left(\frac{m^2a^2}{z^2 \mp n} \pm \frac{nm^2a^2}{(z^2 \mp n)^2}\right)} = \sqrt{\frac{z^2m^2a^2}{(z^2 \mp n)^2}} = \frac{amz}{z^2 \mp n}$.

E' manifesto, che nelle formole fin qui trattate vi si contengono infiniti casi particolari.

Passiamo adesso a delle formole più generali.

I. Si debba liberare dall' Asimetria la funzione
$(Ax^{\frac{m}{n}} + Bx^{\frac{p}{q}} + Cx^{\frac{r}{s}} \&c.)^k$. Sia φ il minimo
numero intero, divisibile per i denominatori n,
q, s &c., e si ponga $x = z^\varphi$, la trasformata ....
$(Az^{\frac{m\varphi}{n}} + Bz^{\frac{p\varphi}{q}} + Cz^{\frac{r\varphi}{s}} \&c.)^k$ sarà qual si ri-
chiede.

II. Sia da ridursi la formola $\left(Ax^g + Bx^h + C\left(\frac{ax+b}{dx+e}\right)^{\frac{i}{l}}\right)^k$. Essendo φ come sopra, si pon-
ga $\frac{ax+b}{dx+e} = z^\varphi$, onde si abbia $x = \frac{ez^\varphi - b}{a - dz^\varphi}$. Si
faccia la sostituzione, e si avrà la ridotta ....
$\left(A\left(\frac{ez^\varphi - b}{a - dz^\varphi}\right)^g + B\left(\frac{ez^\varphi - b}{a - dz^\varphi}\right)^h + Cz^{\frac{i\varphi}{l}}\right)^k$
Nella stessa maniera si opererebbe sulla formola
ge-

generale $(\mathcal{A}+Bx^{g}+C(a+bx)^{\frac{i}{l}}$ &c.$)^{k}$.

III. Sia proposta la funzione $(\mathcal{A}+Bx^{m})^{\frac{i}{l}}$; Si faccia $\mathcal{A}+Bx^{m}=z^{l}$, e si avrà immediatamente $(\mathcal{A}+Bx^{m})^{\frac{i}{l}}=z^{i}$.

IV. Essendo proposta la formola $((\mathcal{A}+Bx^{n})^{m-1}\times(C+Dx^{n}))^{\frac{p}{m}}$ si faccia prima di tutto $x^{n}=z$, acciò divenga $((\mathcal{A}+Bz)^{m-1}\times(C+Dz))^{\frac{p}{m}}$; Quindi si ponga $((\mathcal{A}+Bz)^{m-1}\times(C+Dz))^{\frac{1}{m}}=(\mathcal{A}+Bz)\,u$, e formando la potenza m, e dividendo si avrà $C+Dz=(\mathcal{A}+Bz)\,u^{m}$, di dove si ha $z=\frac{\mathcal{A}u^{m}-C}{D-Bu^{m}}$; perciò $\mathcal{A}+Bz=\frac{\mathcal{A}D-BC}{D-Bu^{m}}$, e finalmente la formola proposta $=\left(\frac{\mathcal{A}D-BC}{D-Bu^{m}}\right)^{p}u^{p}$

V. Abbiasi la funzione $\overline{(\mathcal{A}+Bx^{n}}^{\,m-1}\times\overline{C+Dx^{n})}^{\,-\frac{p}{m}}$; Si ponga $x^{n}=z$, e dipoi si faccia ......

$$\overline{(\mathcal{A}+Bx^{n}}^{\,m-1}\times\overline{C+Dz)}^{\,-\frac{1}{m}}=u\,(\mathcal{A}+Bz)^{-1};$$

Formata la potenza m, ne proverrà $\frac{\overline{\mathcal{A}+Bz}^{\,m}}{\overline{\mathcal{A}+Bz}^{\,m-1}}=u^{m}(C+Dz)$, vale a dire $\mathcal{A}+Bz=u^{m}(C+Dz)$

e d,

e di qui $z=\frac{Cu^{m}-\mathcal{A}}{B-Du^{m}}$. Quindi $\mathcal{A}+Bz=\mathcal{A}+\frac{BCu^{m}-\mathcal{A}B}{B-Du^{m}}=\frac{BCu^{m}-\mathcal{A}Du^{m}}{B-Du^{m}}$, onde si ha finalmente $(\overline{(\mathcal{A}+Bz)}^{\,m-1}\times(C+Dz))^{-\frac{p}{m}}$ ......

$$=u^{p}\left(\frac{BCu^{m}-\mathcal{A}Du^{m}}{B-Du^{m}}\right)^{-p}.$$

VI. Sia data la formola $(\mathcal{A}x^{m}+Bx^{2m})^{\frac{p}{2}}$; Si faccia $x^{m}=z$, e poi $(\mathcal{A}z+Bz^{2})^{\frac{1}{2}}=uz$, e si avrà con questo $\mathcal{A}+Bz=u^{2}z$, e perciò ...... $z=\frac{\mathcal{A}}{u^{2}-B}$. Dunque $(\mathcal{A}z+Bz^{2})^{\frac{p}{2}}=u^{p}z^{p}$ .... $=\left(\frac{\mathcal{A}u}{u^{2}-B}\right)^{p}$. Se p fosse negativo, si farebbe $(\mathcal{A}z+Bz^{2})^{-\frac{1}{2}}=uz^{-1}$ ma si richiederebbe, che p fosse impari.

VII. Abbiasi la formola $(\mathcal{A}+Bx^{m}+Cx^{2m})^{\frac{p}{2}}$; Si ponga, come sopra $x^{m}=z$, e posto p impari $=2n+1$, si avrà la trasformata $(\mathcal{A}+Bz+Cz^{2})^{n}$ $(\mathcal{A}+Bz+Cz^{2})^{\frac{1}{2}}$. Tutto dunque dipende dal ridurre la funzione $(\mathcal{A}+Bz+Cz^{2})^{\frac{1}{2}}$. Per ottener questo, conviene risciogliere $\mathcal{A}+Bz+Cz^{2}$ nei suoi fattori, e quindi operare, come al num. IV.

Simile sarebbe l'operazione, se p fosse negativo.

VIII. Dovendosi ridurre la formola $\overline{(\mathcal{A}+Bx^{2})}^{\frac{p}{2}}\,\overline{(C+Dx)}^{\frac{q}{2}}$, si porrà $(\mathcal{A}+Bx)^{\frac{1}{2}}=z$, onde sia $\mathcal{A}+Bx=z^{2}$, e perciò $x=\frac{z^{2}-\mathcal{A}}{B}$. Con questo

si

si avrà $C+Dx = C+D\frac{(z^2-\mathcal{A})}{B}$, e la formola data diverrà $z^p\cdot\left(C+D\frac{(z^2-\mathcal{A})}{B}\right)^{\frac{q}{2}}$, dove non v'è, che un fattore irrazionale. Per ridurlo anch'esso, pongasi $C-\frac{\mathcal{A}D}{B}=P$, e $\frac{D}{B}=\mathcal{Q}$; e la formola da ridursi sarà $(P+\mathcal{Q}z^2)^{\frac{q}{2}}$. Pongasi … $(P+\mathcal{Q}z^2)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}z+u$, e fatto il quadrato ne proverrà …. $P+\mathcal{Q}z^2=\mathcal{Q}z^2+2\mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}uz+u^2$. Di quì si ha $z=\frac{P-u^2}{2\mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}u}$; $z^2=\left(\frac{P-u^2}{2\mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}u}\right)^2$, e z^p $=\left(\frac{P-u^2}{2\mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}u}\right)^p$. Così finalmente si ha $(P+\mathcal{Q}z^2)^{\frac{q}{2}}$ $=\left(\frac{P-u^2}{2u}+u\right)^q=\left(\frac{P+u^2}{2u}\right)^q$, la formola di cui si tratta è ridotta alla forma $\left(\frac{P-u^2}{2\mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}u}\right)^p$ $\times\left(\frac{P+u^2}{2u}\right)^q$.

IX. Sia per ultimo da ridursi la funzione …

$$\sqrt[s]{\mathcal{A}+B\sqrt[r]{C+D\sqrt[q]{\frac{E+Fx^{\frac{1}{p}}}{G+Hx}}}}$$

Prima d'ogn' altra cosa la funzione data si faccia $=z$: formando la potenza s, si avrà $\mathcal{A}+B\sqrt[r]{C+D\sqrt[q]{\frac{E+Fx^{\frac{1}{p}}}{G+Hz^{\frac{1}{p}}}}} = z^s$

e perciò $\sqrt[r]{C+D\sqrt[q]{\frac{E+Fx^{\frac{1}{p}}}{G+\mathcal{A}\,x^{\frac{1}{p}}}}} = \frac{z^s-\mathcal{A}}{B}$. Si formi la potenza r, ed operando come sopra, si ottiene $\sqrt[q]{\frac{E+Fx^{\frac{1}{p}}}{G+Hx^{\frac{1}{p}}}} = \frac{\left(\frac{z^s-\mathcal{A}}{B}\right)^r-C}{D}$. Facendo finalmente la potenza q si avrà …. $\frac{E+Fx^{\frac{1}{p}}}{G+H\lambda^{\frac{1}{p}}}$ ……… $=\left(\frac{\left(\frac{z^s-\mathcal{A}^r}{B}\right)^r-C}{D}\right)^q$, equazione, da cui si deduce il valor d' x, come segue ………………

$$\frac{\left(E-G\left(\frac{\left(\frac{z^s-\mathcal{A}}{B}\right)^r-C}{D}\right)^q\right)^p}{\left(H\left(\frac{\left(\frac{z^s-\mathcal{A}}{B}\right)^r-C}{D}\right)^q-F\right)^p}$$

Questo valor d' x si sostituisca nella formola data, e si avrà la ridotta, che si cerca.

Dopo tutto questo non sarà difficile il ridurre alla razionalità le formole, che si possono incontratrare nella pratica; seppure però non s'incontrino delle formole di una irrazionalità eccessivamente complicata, per la di cui riduzione si vada a cadere in operazioni ineseguibili.

CAPITOLO VI.

Delle ragioni, proporzioni, e progressioni.

206. La ragione è il rapporto, che passa fra due quantità omogenee. Questo si ottiene col di loro paragone, e il paragone si può istituire in due maniere, cioè per trovar la differenza delle funzioni proposte, o per trovare il quoziente di una per l'altra.

Il risultato della prima operazione è ciò, che dicesi ragione, o rapporto arimmetico; il risultato della seconda chiamasi ragione, o rapporto geometrico.

207. La formola generale di qualunque ragione arimetica è $a : a \pm d$, ed $a : am$ è la formola di qualunque ragione geometrica. Il primo termine a dicesi antecedente della ragione, e il secondo termine $a \pm d$, o am dicesi conseguente.

208. Ogni ragione, può esser diretta, o inversa, e semplice, o composta. La ragione diretta è quella, che sussiste fra due quantità variabili tali, che se crescano, o diminuiscano, conservano sempre il medesimo rapporto. La ragione inversa, o reciproca è quella, che sussiste fra due quantità variabili, delle quali una crescendo, l'altra diminuisca, e viceversa, nel medesimo rapporto. La formola di queste ragioni è $x : \frac{1}{y}$.

209. La ragione semplice è quella, di cui abbiamo parlato fin'ora. La ragione composta è quella, che risulta dal paragone del prodotto degli antecedenti di più ragioni col prodotto dei loro conseguenti nelle ragioni geometriche, e dal paragone della somma degli antecedenti colla somma de' conseguenti nelle ragioni arimmetiche. Così date due ragioni geometriche $a : am$, $b : bn$, la di loro ragione composta è $ab : abmn$; difatto le suddette ragioni si esprimono ancora per $\frac{a}{am}$, $\frac{b}{bn}$, o viceversa; ora si vede che $ab : abmn$ esprime il rapporto del loro prodotto. Date poi due ragioni arimmetiche $a : a \pm d$; $b : b \pm e$, la ragione composta è $a + b : a + b \pm d \pm e$.

210. In generale nelle ragioni geometriche dicesi ragione duplicata quella, che risulta dal prodotto di due ragioni geometriche uguali; triplicata quella, che risulta dal prodotto di tre ragioni geometriche uguali, e così in seguito. Si può veder facilmente, che la ragione duplicata è la stessa, che quella de' quadrati dei due termini di una delle ragioni componenti; che la ragione triplicata è la stessa, che quella de' cubi. &c.

Difatto le ragioni $a : am$, $b : bm$ somministrano la ragione duplicata $ab : abm^2$, e la ragione dei quadrati de' termini di ciascuna di esse è $a^2 : a^2m^2$, $b^2 : b^2m^2$, cioè $1 : m^2$, come sopra.

Lo stesso vale per le ragioni triplicate, come pure per le susseguenti.

211. Le ragioni geometriche variabili si rappresentano dagli Analisti per mezzo di equazioni.

Così $t = k$ vol dire che t cresce, o diminuisce, come cresce, o diminuisce k. Così $t = \frac{fk}{gl^2}$ significa, che t cresce, o diminuisce in ragione diretta composta di f, e di k, ed in ragione inversa composta di g, ed l^2. Parimente $t = \frac{f\sqrt{k}}{g\sqrt[3]{l}}$ significa, che t cresce, o diminuisce in ragione composta diretta della ragione semplice di f, e della ragione sudduplicata di k, ed in ragione inversa composta della ragione semplice di g, e della ragione suttriplicata di l.

212. Due ragioni omogenee, ed uguali, disposte per ordine, formano una proporzione, e questa dicesi arimmetica, o geometrica, secondo che le ragioni, da cui vien costituita, sono arimmetiche, o geometriche.

213. La prima sorta di proporzioni vien generalmente rappresentata colla formola $a : a \pm d :: b : b \pm d$, e la seconda è rappresentata dalla formola $a : am :: b : bm$.

214. Di qui si vede, che il principio costitutivo di una proporzione arimmetica è l'eguaglianza delle differenze fra ciascun' antecedente, e il suo conseguente; e che il principio costitutivo di una proporzione geometrica è l'eguaglianza dei quozienti di ciascun conseguente diviso per il suo antecedente, e viceversa.

215. Ogni proporzione arimmetica, o geometrica può esser *continua*, ed è tale, quando il conseguente della prima ragione serve di an-

te-

tecedente alla seconda. Tal sarebbe la proporzione $2 : 4 : 8$, ed in generale $a : a \pm d : a \pm 2d$; $a : am : am^2$.

Se una proporzione non sia continua, si appella con nome generico *discreta*.

216. Quattro quantità possono essere ancora in proporzione *armonica*. Questo avviene quando si hanno quattro quantità tali, che la differenza, che passa fra la prima, e la seconda stia alla differenza, che passa fra la terza, e la quarta, come la prima sta alla quarta. Tal' è la proporzione, che sussiste fra i numeri $6, 8, 12, 18$.

Una tal proporzione può divenir *contrarmonica*, ed è allora quando la differenza fra la prima quantità, e la seconda sta alla differenza fra la terza e la quarta, come la quarta alla prima.

217. La proporzione armonica può aversi ancora fra tre quantità, e questo succede, quando la differenza fra la prima quantità, e la seconda, sta alla differenza fra la seconda, e la terza, come la prima alla terza. Qualora le suddette differenze stieno fra di loro come la terza alla prima, la proporzione dicesi *contrarmonica*. I numeri $2, 3, 6$ sono in proporzione armonica.

218. Progressione arimmetica, ò geometrica è un seguito di termini in continua proporzione arimmetica, o geometrica. Ecco le formole di ambedue $a : a \pm d : a \pm 2d : a \pm 3d$ .... $a \pm nd$

$a : am : am^2 : am^3 :$ .... am^n.

219. Progressione armonica finalmente, dicesi un seguito di termini, i quali presi ordinatamente a tre per tre, o a quattro per quattro sieno successivamente in proporzione armonica. Di qui si comprende qual sia la progressione contrarmonica.

SE-

SEZIONE I.

Delle proporzioni, e delle progressioni Arimmetiche,

220. *Teor.* In ogni proporzione arimmetica la somma dei termini medj è uguale alla somma de' termini estremi. *Dimostrazione*. Facciansi le divisate somme nella proporzione generale $a:a\pm d::b:b\pm d$; e si avrà realmente .... $a\pm d+b=a+b\pm d$.

221. Di qui ne segue, che dati essendo tre termini di una proporzione arimmetica, si può sempre trovar l' altro, se sia discreta, e che datine due, si può trovare il terzo, se sia continua.

222. *Teor.* In qualunque progressione arimmetica, sta geometricamente il primo termine al terzo, come il doppio del primo sta al doppio del secondo; sta il primo termine al quarto, come il triplo del primo al triplo del quarto, ed in generale sta il primo termine all' $n.^{simo}$, come il primo preso $n-1$ volte all' $n.^{simo}$ preso $n-1$ volte. *Dimostrazione*. In effetto si ha nella formola generale $a:a\pm nd::(n-1)\,a:(n-1)\,(a\pm nd)$.

223. *Teor.* In qualunque progressione arimmetica, si ha 1.° Che la somma degli estremi eguaglia la somma di due termini intermedj qualunque, che sieno equidistanti dagli estremi; 2.° Che qualora il numero de' termini sia impari, eguaglia il doppio del termine di mezzo. *Dimostrazione*. La formola generale delle progressioni arimmetiche già si vide essere $a:a\pm d:a\pm 2d:a\pm 3d\ ....\ a\pm nd$.

Il termine $a\pm nd$ pongasi $=x$; il penultimo termine

mine sarà $=x\mp d$, l' antepenultimo $=x\mp 2d$, e finalmente il primo $=x\mp nd$.

Si scriva l'ultimo termine x sotto il primo della formola generale, il penultimo espresso per $x\mp d$ sotto il secondo, l' antepenultimo sotto il terzo. e così in seguito, onde si abbia

$a:a\pm d:a\pm 2d:a\pm 3d:a\pm 4d$ .... $a\pm nd$

$x:x\mp d:x\mp 2d:x\mp 3d:x\mp 4d$ .... $x\mp nd$

Fatto questo si vede, che la somma di ciascuna coppia verticale di termini è costantemente $=a+x$, il che prova la verità della prima parte.

Per dimostrare la verità della seconda basta dare un determinato valore pari ad n, e si vedrà sempre, che la somma degli estremi, o di due intermedj equidistanti dagli estremi, eguaglia il doppio del termine medio. Sia per esempio $n=4$: Sarà

$a:a\pm d:a\pm 2d;\ a\pm 3d:\ a\pm 4d$

$a\mp 4d:a\mp 3d:a\mp 2d:a\mp d:a$

dove la somma di ciascuna coppia verticale risulta costantemente $=2a\mp 4d$, che è il doppio del termine medio $a\mp 2d$.

224. *Teor.* Un termine $n.^{simo}$ qualunque di una progressione arimmetica si può rappresentare generalmente per $a\pm(n-1)\,d$; *Dimostrazione*. Essendo come sopra il primo termine, a, e la ragione d, siccome ciascun termine supera quello, che lo precede della quantità d, e tal quantità comincia ad entrare nel secondo termine, ne segue che nel termine . $n.^{simo}$ debban' esservi $(n-1)d$, e che per conseguenza il termine $n.^{simo}$ debba essere $N=a\pm(n-1)d$ avendo luogo il segno superiore, quando la progressione è crescente, ed il segno inferiore quando è decrescente.

225. *Teor.* Detto a il primo termine di una progressione arimmetica, N l'ultimo termine, ed n il numero di tutti i termini, si ha la somma di essi ... $s=(a+N)\frac{n}{2}$ *Dimostrazione*. Sotto la formola generale delle progressioni arimmetiche si scriva ordinatamente ciascun termine della medesima espressa per x, come si è praticato (*n*.235.). Con questo si vede, che la somma di ciascuna coppia verticale di termini essendo $=a+x$, la somma di tutte le coppie dee risultare $=(a+x)n$; Ma la somma di tutte le coppie uguaglia il doppio della formola generale; dunque la somma di una progressione qualunque è $=(a+x)\frac{n}{2}$.

226. Da questa formola si può dedurre qual debba esser la somma di una progressione decrescente all' infinito, con porre $x=0$, e colla stessa facilità si può determinar la somma in qualunque altro caso particolare. Posto ciò sia

227. *Probl.* Dati due termini qualunque a, b, inserire fra di essi un numero m di medj proporzionali arimmetici. *Soluzione*. Si cerchi la ragione, che deve sussistere fra i termini della progressione cercata; questa si ha dall' equazione $x=a+(n-1)d$, con sostituire $m+1$ in vece di $n-1$, perchè i termini debbon essere $m+2$. Si ha infatti $d=\frac{b-a}{m+1}$; trovata questa è sciolto il problema, e si ha la progressione richiesta ....

a; $a+\frac{b-a}{m+1}$: $a+2\frac{(b-a)}{m+1}$: $a+3\frac{(b-a)}{m+1}$ ....

$a+$

$:a+(m+1)\frac{(b-a)}{m+1}$, dove fatta la riduzione dell' ultimo termine si vede, che esso risulta $=b$ come dee avvenire.

228. *Probl.* Date tre delle funzioni a, x, n, d, s, vogliońsi delle formole, per cui si possano in qualunque caso trovar le altre due.

Soluzione. Dall' equazione $x=a+(n-1)d$ se ne deducono quattro, e sono 1.ª $x=a+(n-1)d$; 2.ª $a=x-(n-1)d$; 3.ª $d=\frac{x-a}{n-1}$; 4.ª $n=1+\frac{x-a}{d}$.

Dall' equazione $s=(a+x)\frac{n}{2}$, se ne deducono altre quattro, cioè 1.ª $s=(a+x)\frac{n}{2}$; 2.ª $a=\frac{2s}{n}-x$; 3.ª $n=\frac{2s}{a+x}$; 4.ª $x=\frac{2s}{n}-a$.

Trovate queste otto formole, si sostituiscano nell' equazione $s=(a+x)\frac{n}{2}$ i valori di x, a, ed n dedotti dall' equazione $x=a+(n-1)d$, e si avranno dodici altre formole, che sono le seguenti:

Sostituendo il valor di x si ha ....

1.ª $s=\frac{an+dn^2-dn}{2}$; 2.ª $a=\frac{s}{n}-\left(\frac{dn-d}{2}\right)$.......

3.ª $d=\frac{2s-2an}{n^2-n}$; 4.ª n = rad. equaz. ....

$n^2+\left(\frac{2a}{d}-1\right)n-2s=0$. Sostituendo a si ottiene l'equazione trasformata $s=(2x-dn+d)\frac{n}{2}$,

e da

e da questa si deducon l'equazioni. 1.ª $x = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}$; 2.ª $d = \frac{2xn - 2s}{n^2 - n}$; 3.ª $s = xn - \ldots\ldots \frac{(dn^2 - dn)}{2}$; 4.ª $n =$ radice, equazione $n^2 \ldots\ldots + \left(\frac{2x}{d} - 1\right) n + 2s = 0$. Finalmente sostituendo il valore di n si trova la trasformata $2s = a + x + \frac{x^2 - a^2}{d}$, da cui si hanno l'ultime quattro formole, e sono ..... 1.ª $s = \frac{a + x}{2} + \frac{x^2 - a^2}{2d}$; 2.ª $d = \frac{x^2 - a^2}{2s - a - z}$; 3.ª $x =$ rad., equaz. $x^2 + dx \ldots\ldots - a^2 + ad - 2s = 0$. 4.ª $a =$ radice equazione $a^2 - da - x^2 - x + 2s = 0$.

229. Quando si debba far uso di queste formole, si avranno per mezzo dell'Analisi anche quelle, che dipendono dall'equazioni di secondo grado.

Intanto si vede, che formole trovate debbon sodisfar pienamente alla soluzione generale del problema proposto. Difatto delle cinque funzioni proposte se ne può cercar una in cinque maniere. Ciascuna di esse deve determinarsi per tre delle altre quattro, e le combinazioni a tre per tre di quattro quantità sono quattro; dunque 4. 5 sono i casi possibili, i quali costituiscono il problema proposto, ed a cui sodisfano le venti formole da noi trovate.

230. *Scol.* Può avvenire talvolta, che per n

 s' in-

s' incontri un' espressione frazionaria, come, per esempio, $n = m + \frac{n}{r}$. In questo caso il numero de' termini sarà $= m$, più una parte $\frac{n}{r}$ del termine $(m+1)$:$^{\text{esimo}}$, che si calcolerà facilmente.

231. Prima di passar' oltre, giova qui esporre una Tavola, in cui le formole addotte sieno tutte ordinatamente disposte.

TA-

TAVOLA DELLE FORMOLE,

che apparteugeno alle Progressioni Arimmetiche.

Date	Si trova	Per mezzo delle Formole
d, n, x		$a = x - (n - 1)\, d$
n, x, s	a	$a = \frac{2s}{n} - x$
n, d, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{d}{2}(n - 1)$
d, s, x		$a =$ rad. equaz. $a^2 - da - x^2 - x + 2s = 0$
a, d, n		$x = a + (n - 1)\, d$
a, n, s	x	$x = \frac{2s}{n} - a$
n, d, s		$x = \frac{s}{n} + d\frac{(n-1)}{d}$
a, d, s		$x =$ rad. equaz. $x^2 + dx - a^2 + ad - 2s = 0$
a, d, x		$n = 1 + \frac{x - a}{d}$
a, s, x	n	$n = \frac{2s}{a + x}$
a, d, s		$n =$ rad. equaz. $n^2 + \left(\frac{2a}{d} - 1\right) n - 2s = 0$
d, s, x		$n =$ rad. equaz. $n^2 - \left(\frac{2x}{a} - 1\right) n + 2s = 0$
n, a, x		$d = \frac{x - a}{n - 1}$
a, n, s	d	$d = 2\frac{(s - an)}{n^2 - n}$
n, s, x		
a, s, x		$d = 2\frac{(nx - s)}{n^2 - n}$ $\quad d = \frac{x^2 - a^2}{2s - a - x}$
a, n, x		$s = \left(\frac{a + x}{2}\right) n$
a, d, n	s	$s = (a - d + dn)\frac{n}{2}$
d, n, x		$s = (2x - du + d)\frac{n}{2}$
a, d, x		$s = \frac{a + x}{2} + \frac{x^2 - a^2}{2d}$

Ecco pertanto, che date essendo tre delle quantità a, d, n, s, x, può sempre trovarsi una qualunque dell'altre due, e basta per quest'effetto scegliere nella Tavola esposta la formola corrispondente alla tripla di lettere data.

SEZIONE II.

Delle proporzioni, e progressioni Geometriche.

232. *Teor.* In ogni proporzione geometrica il prodotto dei termini medj è uguale al prodotto degli estremi. *Dimostrazione*. Nella formola generale $a : am :: b : bm$ si ha $a \times bm = am \times b$; dunque è vero generalmente &c.

233. In caso, che la proporzione fosse continua, sarebbe il quadrato del termine medio eguale al prodotto degli estremi; difatto nella formola generale $a : am :: am : am^2$, si ha sempre ..... $am \times am = a \times am^2$.

234. Da questo Teorema ne segue, che se vengano dati tre termini di una proporzione geometrica discreta, si può sempre trovare il quarto, e che se vengano dati due termini di una proporzione geometrica continua, si può trovare il terzo.

235. *Scol.* Qualora però i due termini dati sieno di segno diverso, non si può fra di loro inserire un medio proporzionale, perchè non può esser nè positivo, nè negativo. Sieno, per esempio, $\pm a$, $\mp c$ i due termini dati; e suppongasi $+b$ il medio richiesto; dovrà essere $\frac{\pm a}{+b} = \frac{+b}{\mp c}$

il che non è possibile, a motivo, che una quantità

tità positiva non può esser uguale ad una quantità negativa (*n.*84., *e seg.*). Lo stesso avviene, se il medio termine b si prenda negativo.

236. *Scol.* 2. Di quì si può dimostrare con raziocinio più concludente l'impossibilità delle radici di ordine pari delle quantità negative. Difatto una radice immaginaria qualunque si riduce alla forma $\sqrt[2m]{-a}$, e questa si riduce generalmente alla forma $\sqrt[2m]{-bc} = \sqrt{-bc}\;\sqrt{-bc}\;\sqrt{-bc}\;\sqrt{-bc}$ &c. finchè il numero di questi radicali quadratici sia $= m$. Ora per ottenere il valore di $\sqrt{-bc}$ fa d'uopo trovare un medio proporzionale fra $-b$, e c, ò b, e $-c$; ma questo è generalmente impossibile; dunque &c.

237. *Scol.* 3. Alla ricerca di un quarto proporzionale geometrico si può ridurre utilmente la moltiplicazione, e la divisione de'numeri complessi. Con questo, tali operazioni divengono più semplici, e si evita l'inconveniente di moltiplicar le regole senza necessità. Se per esempio, dato, che P $7\frac{2}{3}$ costino sc. $21\frac{1}{2}$, si voglia sapere, quanto debbano costare P $9\frac{1}{4}$, si formerà la proporzione P $7\frac{2}{3}$: P $9\frac{1}{4}$ :: sc. $21\frac{1}{2}$: sc. x; Si ridurrà tutto in frazione, onde si abbia P $\frac{23}{3}$: P $\frac{37}{4}$ :: sc. $\frac{43}{2}$: sc. x, e si avrà $x = 25 + \frac{43}{48}$.

238. *Scol.* 4. Il metodo, onde trovare un quarto proporzionale geometrico, è ciò, che dicesi Regola di Tre. Essa dee esser ben nota. Eccone i principj fondamentali.

Princ. I. Gli effetti prodotti dalle cagioni della medesima specie, e che in tempi eguali agiscono uniformemente, stanno fra di loro come le cagioni, cioè detto F l'effetto, e C la cagione, si ha $F : F^{I} :: C : C^{I}$.

Princ. II. Gli effetti prodotti da cagioni eguali, che agiscono uniformemente, stanno fra di loro, come i tempi T, T^{I} impiegati dalle cagioni; cioè si ha $F, F^{I} :: T : T^{I}$.

Princ. III. Gli effetti di cagioni diseguali, che agiscono in diversi tempi stanno fra di loro in ragione composta delle cagioni, e de' tempi, e perciò si ha $F : F^{I} :: C\ T : C^{I}\ T^{I}$, e su questo principio è fondata la regola del Tre composta.

Princ. IV. Se gli effetti prodotti da due cagioni sieno eguali, le cagioni sono reciprocamente proporzionali ai tempi, e si ha $C : T :: T^{I} : C^{I}$.

239. *Teor.* Ogni equazione tale, che ciascun suo membro sia un prodotto di due fattori, si può sciogliere in proporzione geometrica. *Dimostrazione*. Sia l'equazione $ab = cd$; è manifesto, che può sussistere la proporzione $a : c :: d : b$, perchè si ha per ipotesi il prodotto dei medj cd, eguali al prodotto degli estremi ab. Si vede poi, che i fattori di un membro formano con i fattori dell' altro membro una proporzione reciproca.

240. Le proporzioni geometriche si possono trasformare, salva la primitiva lor natura, (le proporzioni aritmetiche si possono anch' esse trasformare in questa maniera, con aggiungere, o

sottrarre da ciascun termine una medesima quantità.

Per determinare con maggior facilità le trasformazioni, di cui sono suscettibili le proporzioni geometriche, si riducano in equazione, onde $a : b :: c : d$ venga rappresentata dall'equazione $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Riguardando le proporzioni geometriche sotto questo punto di vista, si conosce,

Trasfor. I. Che se si moltiplichi, o si divida per una medesima quantità ciascun suo termine, non si altera punto nè la proporzionalità, nè il primitivo rapporto. In effetto $\frac{bm}{am} = \frac{b}{a}$, come pure $\frac{dm}{cm} = \frac{d}{c}$.

Con questo principio una proporzione geometrica si può trasformare in infinite altre di forma diversa, e dotate della medesima ragione.

Non trattandosi di conservare la primitiva ragione si posson' ottenere due altre trasformazioni, e sono,

Trasfor. II. Se ciascun termine di una proporzione geometrica s'inalzi ad una stessa potenza qualunque, si muta la ragione, ma non si toglie la proporzionalità. Per vederne la prova si prenda la formola generale $a : am :: b : bm$. Effettuando la trasformazione divisata, si ottiene $a^n : a^n m^n :: b^n : b^n m^n$; ora $\frac{a^n m^n}{a^n} = \frac{b^n m^n}{b^n}$.

Trasfor. III. Se da ciascun termine di una proporzione geometrica si estragga una medesima radice qualunque, i termini rimangono proporzionali. Difatto se in vece di n si ponga $\frac{1}{r}$, si ha come sopra $\frac{a^{\frac{1}{r}} m^{\frac{1}{r}}}{a^{\frac{1}{r}}} = \frac{b^{\frac{1}{r}} m^{\frac{1}{r}}}{b^{\frac{1}{r}}}$.

241. *Scol.* 1.° Qualora fra i termini della proporzione, su cui si opera, ve ne sieno due negativi, e la radice comune da estrarsi sia di grado pari, i termini risultanti, dopo l'estrazione della radice, non persistono in proporzione, perchè l'immaginarietà, che viene introdotta, distrugge la qualità dei rapporti. La verità di questo si comprenderà meglio nel seguente

242. *Scol.* 2.° Il Signor Leibnitz pretende, che la proporzione $a : -am :: -b : bm$, sia una proporzione impossibile. Per provar la sua proposizione si serve del raziocinio di M. d'Alembert, con cui egli, ammessa la realtà dell'addotta proporzione, pretende di dedurne, che le quantità negative non sieno minori di zero. Ecco il raziocinio di quest' insigni Matematici.

Il rapporto di $a : -bm$ è un rapporto di maggiore *ineguaglianza*; il rapporto di $-b : bm$ è un rapporto di minore *ineguaglianza*; ma questi rapporti sono diversi; dunque i termini, da cui derivano, non possono formar proporzione.

Io rispondo, che il rapporto di maggiore, e di minore *ineguaglianza* è un rapporto arimmetico, di cui non si dee aver considerazione alcuna, na, trattandosi di proporzioni geometriche.

Di poi col fatto stesso io provo la verità della proporzione, poichè fatta la divisione di ciascun conseguente per il suo antecedente, trovo per quoziente comune $-m$.

Posta adesso la sussistenza della proporzione ... $a:-am::-b:bm$, falsamente però si pretende da taluno, che debba sussistere ancora dopo l'estrazione di una radice pari da ciascun suo termine, e che sia vera, per esempio, la proporzione $\sqrt{a}:\sqrt{-am}::\sqrt{-b}:\sqrt{bm}$, ad onta, che il prodotto de'medj, sia di segno diverso dal prodotto degli estremi. Ed in effetto, affinchè si avesse la necessaria proporzionalità, converebbe, che fossero eguali i due rapporti, e perciò, che fosse $\frac{\sqrt{-am}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{-b}}$; Ora si ha $\frac{\sqrt{-am}}{\sqrt{a}}$ $=\frac{\sqrt{-1}\sqrt{am}}{\sqrt{a}}=\sqrt{-1}\sqrt{m}$, e $\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{-b}}$ è $=\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{-1}\sqrt{b}}$ $=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{-1}}$: Dunque dovrebbe esrere $\sqrt{-1}\sqrt{m}$ $=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{-1}}$, o sia $\sqrt{-1}=\frac{1}{\sqrt{-1}}$, e finalmente $1=1$, cioè $2=0$, che è assordo.

La proporzione $a:-am::-b:bm$, o, che è lo stesso, la proporzione $1:\sqrt{-1}::\sqrt{-1}:1$, perchè essa in questa ricade, e dalla verità di questa dipende, è stata supposta come vera da M. Euler nella sua Algebra de'Finiti, come pure da M. d'Alembert ne'suoi Opuscoli, e da M. Bougenville le jeune *Calcul. Integral. T. 1. §. 307.*

243. Oltre le trasformazioni, di cui abbiamo parlato, per cui le proporzioni possono prendere infinite forme, si hanno le variazioni proporzionali, che dentro di se contengono un genere di trasformazione non meno copioso, che elegante. Di esse conviene, che ci occupiamo.

Cinque sono i modi, con cui si può introdurre variazione in una proporzione geometrica, salva la proporzionalità, e sono I. La variazione degli estremi; II. La variazione de'medj; III. La variazione degli antecedenti; IV. La variazione de'conseguenti; V. La variazione di tutti i termini in una volta.

Per sodisfare a ciascuno di questi problemi conviene investigar delle formole generali, che ne contengano compitamente la soluzione.

244. Sia la proporzione $a:am::b:bm$, e varj l'estremo bm della quantità $\pm d$; in conseguenza di questa variazione l'estremo a divenga x; valore da determinarsi. Dovrà dunque aversi $x:am::b:bm\pm d$, e perciò l'equazione $x(bm\pm d)=abm$, cioè $x=a\mp\frac{da}{bm\pm d}$.

Ecco dunque, che se bm cresca di una quantità $\pm d$, il primo termine x dee crescere della quantità $\mp\frac{ad}{bm\pm d}$.

345. Suppongasi adesso, che la variazione cada sopra uno de'medj, onde sia $a:x::b\pm d:bm$ dove x rappresenta il medio am opportunamente variato. Ope-

Operando come sopra si dedurrà $x = \frac{abm}{b \pm d}$; dal che s'inferisce, che am dee ricevere una variazione espressa per $\frac{abm}{b \pm d}$.

Facendosi la variazione negli antecedenti, o nei conseguenti, le formole opportune si trovano nel modo seguente.

Variando gli antecedenti, si ha $x : am :: b \pm d : bm$, e di quì $x = \frac{am\,(b \pm d)}{bm} = \frac{a\,(b \pm d)}{b}$.

Se varino i conseguenti si ha parimente .... $a : x :: b : bm \pm d$, e perciò $x = \frac{a(bm \pm d}{b}$.

Entriamo finalmente a trattare del quinto caso, il quale ed ammette più soluzioni, ed è più vantaggioso nelle applicazioni.

Otto sono le maniere generali, con le quali, salva la proporzionalità, possono effettuarsi le variazioni di tutt'i termini di una proporzione geometrica.

Maniera. 1.ª Con accrescere il primo termine di ambedue le ragioni della differenza arimmetica de' suoi termini, e con diminuire nel tempo stesso il secondo termine della medesima differenza, e viceversa.

Difatto sussiste la proporzione generale .... ($\mathcal{A}$) ..... $a \pm (am - a) : am \mp (am - a) :: b \pm (bm - b) : bm \mp (bm - b)$; prima formola di variazione.

Maniera 2.ª Con accrescere il primo termine del secondo, ed accrescere del primo il secondo termine preso negativamente, o con diminuire il primo termine del secondo, ed accrescere del primo il secondo preso positivamente.

Sussiste infatti la proporzione generale .... $a \pm am : a \mp am :: b \pm bm : b \mp bm$ ..... (B); seconda formola di variazione.

Maniera 3.ª, *e* 4.ª Con variare tutt'i termini proporzionalmente con l' addizione, o con la sottrazione di quantità proporzionali, delle quali il rapporto geometrico sia lo stesso, che quello della proporzione data. Sieno le proporzioni $a : am :: b : bm$; $\Delta a : \Delta' a :: \Delta b : \Delta' b$.

Di queste si può formare la proporzione generale $a \pm \Delta a : am \pm \Delta' a :: b \pm \Delta b : bm \pm \Delta' b$, terza formola ..... ($C$).

Per concepire la verità di questo si faccia l'equazione fra il prodotto de' medj, e quello degli estremi; Si ottiene $amb \pm a\Delta' b \pm bm\Delta a \pm \Delta a\, \Delta' b = amb \pm am\Delta b \pm b\Delta' a \pm \Delta' a \Delta b$; Tolgasi ciò che vi è di comune, e rimarrà $a\Delta' b + bm\Delta a = b\Delta' a + am\Delta b$.

Per discuoprire da qual condizione dipenda la sussistenza di quest' equazione, si supponga vera, e per verificarla suppongasi inoltre $a\Delta' b = am\Delta b$, e $b\Delta' a = bm\Delta a$. Da ciascuna di quest' equazioni risulta, che la ragione della proporzione .... $\Delta a : \Delta' a :: \Delta b : \Delta' b$ dee esser la medesima, che quella della proporzione principale; e si vede che ciò essendo, la variazione indicata non altera punto la proporzionalità. E' facile a vedersi, che tolta la condizione dell'eguaglianza del rapporto fra le quantità Δa, $\Delta' a$, Δb, $\Delta' b$, ed i termini della proporzione principale, la variazione dee togliere la proporzionalità.

Maniera 5.ª e 6.ª Si può variare proporzionalmenmente una proporzione con moltiplicare, o dividere tutt' i suoi termini per quantità proporzionali.

Per vederne una prova, suppongasi, che le quantità Δa, $\Delta' a$, Δb, $\Delta' b$ sieno geometricamente proporzionali, e si moltiplichi ordinariamente per ciascuna di esse il termine corrispondente della formola $a : am :: b : bm$. Fatta la moltiplicazione si ha realmente $abm\Delta a\, \Delta' b = abm\Delta' a \Delta b$, come si richiede.

Nella guisa stessa, facendo la divisione per i suddetti termini proporzionali, si ottiene ....

$$\frac{abm}{\Delta a \Delta' b} = \frac{abm}{\Delta' a \Delta b}.$$

246. Dalla Teoria delle variazioni, che si posson fare nelle proporzioni geometriche per mezzo di quantità proporzionali, si possono adesso derivare con tutta naturalezza quei casi particolari, che in essa contengonsi, di cui l'uso è generale, ed interessante in tutta la Matematica.

Caso I. Nella formola delle variazioni de' medj, che è $x = \frac{abm}{b \pm d}$ si ponga $\frac{abm}{b \pm d} = b$, e si dedurrà $\pm d = \pm am \mp b$; Con questo la proporzione ..... $a : x :: b \pm d : bm$ diviene $a : b :: am : bm$.

247. Quindi si deduce, che non si altera una proporzione geometrica per rapporto all'assoluta sua proporzionalità, qualora variando i soli medj, le di loro variazioni sieno tali, che mentre, che uno cresce, l'altro decresca, e viceversa, in modo, che il maggiore divenga eguale al minore, ed il minore divenga eguale al maggiore. Questa specie di variazione dicesi *Alternazione*, perchè equivale alla traslazione di un medio in luogo dell' altro.

Cas. 2.°

Cas. 2.°, e 3.° Nella formola delle variazioni, che appartiene agli antecedenti, $x = am \frac{(b \pm d)}{bm}$, pongasi $\pm d = \pm bm$; si avrà, che la proporzione ..... $x : am :: b \pm d : bm$ diverrà $a \pm am : am :: b \pm bm : bm$. Se prendasi il segno superiore, la variazione riferita alla proporzione principale $a : am :: b : bm$, si chiama *Composizione*. Se prendasi il segno inferiore, la variazione dicesi *Divisione*.

Cas. 4.° e 5.° Si ponga nella formola, che appartiene alle variazioni dei conseguenti, $x = \frac{a(bm \pm d)}{b}$ $d = \pm b \mp 2bm$, e si avrà $x = \frac{a(bm \pm b \mp 2bm)}{b} = a(m \pm 1 \pm 2m) = \pm a \mp am$; quindi la proporzione $a : x :: b : bm \pm d$ prende la forma $a : \pm a \mp am :: b : \pm b \mp bm$. Se in questa prendasi il segno superiore, si ha la variazione detta *Conversione*, e se prendasi il segno inferiore, la variazione, che ne proviene, in altro non differisce dall' antecedente, che in essa i due conseguenti sono dotati di segno diverso.

Cas. 6.° Nella medesima formola si faccia $d = b$, e si avrà $x = a + am$, e perciò la proporzione $a : x :: b : bm \pm d$, ci darà $a : a + am :: b : b + am$ variazione, che dicesi *Controversione*.

Cas. 7.° Dalla formola $a \pm (am - a) : am \mp (am - a) :: b \pm (bm - b) : bm \mp (bm - b)$ si deduce, che la proporzione generale si può variare nella seguente maniera, $am : a :: bm : b$, variazione, che vien chiamata *Inversione*.

Cas. 8.° e 9.° La seconda formola $a \pm am : a \mp am :: b \pm bm :$

$b \pm bm : b \mp bm$ rappresenta una variazione composta. Se prendasi il segno superiore, ella è *Composto-Conversa*; se prendasi il segno inferiore, dicesi *Diviso-Composta* per *Inversione*.

Cas. 10.° Dalla terza formola $a \pm \Delta a : am \pm \Delta' a :: b \pm \Delta b : bm \pm \Delta' b$ ne segue, che sommando per ordine due, o più proporzioni geometriche omogenee, cioè dotate del medesimo rapporto, i termini risultanti sono parimente in proporzione.

Cas. 11.°, e 12.° Dalla quarta formola $a\Delta a : am\Delta' a :: b\Delta b : bm\Delta' b$ s'inferisce, che moltiplicando insieme ordinatamente due, o più proporzioni geometriche, i risultati sono pure in proporzione; e dalla formola quinta $\frac{a}{\Delta a} : \frac{am}{\Delta' a} :: \frac{b}{\Delta b} : \frac{bm}{\Delta' b}$ si ha, che la divisione ordinata di una proporzione per un' altra, produce de' quozienti, che sono egualmente in proporzione.

248. Ad oggetto di agevolare la memoria di tutti i divisati casi particolari, espongo qui una Tavola, in cui si vedono tutti a colpo d'occhio; ed in essa per semplicità maggiore scelgo la proporzione principale della forma $a : b :: c : d$.

TAVOLA DELLE VARIAZIONI PRINCIPALI DELLE PROPORZIONI GEOMETRICHE

Formola principale $a : b :: c : d$.

Variazioni semplici

- Alternazione; $a : c :: b : d$
- Composizione; $a+b : b :: c+d : d$
- Divisione; $a-b : b :: c-d : d$
- Conversione; $a : a-b :: c : c-d$
- Controversione; $a : a+b :: c : c+d$
- Inversione; $b : a :: d : c$

Variazioni Composte

- Compon.te Inv.sa $b : a+b :: c : c+d$
- Divis.ne Inv.sa $b : a-b :: d : c-d$
- Conver.ne Inv.sa; $a-b : a :: c-d : c$
- Composiz.ne Conv.sa $a+b : a-b :: c+d : c-d$
- Divis.ne Comp.to Inv.sa $a-b : a+b :: c-d : c+d$.

Variazioni Composte

- Composizione alternata; $a+b : c+d :: b : d$
- Divisione alternata; $a+b : c+d :: b : d$
- Conversione alternata $a : c :: a-b : c-d$
- Controversione alternata; $a : c :: a+b : c+d$
- Inversione alternata; $b : d :: a : c$

Proporzioni geometriche omogenee

$a : b :: c : d$; $e : f :: g : h$; $l : m :: n : r$ &c.

Variazioni Composte

Variazione per addizione

$a+e+l$ &c. $:: b+f+m$ &c. $:: c+g+n$ &c. $: d+h+r$

Variazione per sottrazione

$a-e : b-f :: c-g : d-h$;

$e-l : f-m :: g-n : h-r$ &c.

Essendo qualunque il rapporto delle proporzioni

Variazione per moltiplicazione ael &c. bfm &c. $::$ cgn &c. $: dhr$ &c.

Variazione per divisione ...... $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} :: \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ &c.

249. Fin qui abbiamo considerate le proporzioni geometriche in se stesse; conviene adesso passare a considerarle per rapporto ad altre proporzioni.

Prima di tutto ci si presentano le proporzioni dotate di un rapporto comune. Intorno a queste sia

250. *Teor.* Dato un numero qualunque di proporzioni geometriche, dotate di un rapporto comune, un numero qualunque di antecedenti sta ad un egual numero di respettivi conseguenti, come un' antecedente al suo conseguente. *Dimostrazione*. Sieno le proporzioni $a : am :: b : bm$; $c : cm :: d : dm$; $e : em : f : fm$ &c. Si avrà $a+b+c+d$ &c. $am+bm+cm+dm$ &c. $:: a : am :: b : bm$ &c. poichè si ha sempre il prodotto de' medj eguale al prodotto degl' estremi.

251. *Teor.* Date due proporzioni come sopra, $a : am :: b : bm$; $c : cm :: d : dm$, dico essere in generale $a-am : c-cm :: b-bm : d-dm$. *Dimostrazione*. Facendo il prodotto degl' estremi si ha $ad-2adm+adm^2$, e facendo il prodotto de' medj si trova $bc-2bcm+bcm^2$. Per veder l'eguaglianza, che sussiste fra queste due funzioni, si osservi, che le proporzioni essendo omogenee, debbono rimaner tali anche alternando; dunque dee aversi $a : b :: c : d$, e perciò $bc = ad$, il che basta per ravvisare la divisata eguaglianza.

252. Le proporzioni considerate relativamente possono avere in secondo luogo due termini comuni, e questo può avvenire in tre diverse maniere.

1.° I due termini comuni possono essere i medj, o gl'estremi; 2.° Possono essere gl'antecedenti, o i conseguenti; 3.° I due termini comuni pos-

possono essere in una proporzione gli antecedenti, e nell'altra i conseguenti, e viceversa. (Il caso, che formino i due termini di una ragione ricade nel Teor. antecedente.)

253. *Teor.* Se due proporzioni geometriche abbiano i medj, o gl'estremi comuni, i termini diversi di una sono reciprocamente proporzionali ai termini diversi dell'altra. *Dimostrazione*. Sieno le due proporzioni $a : b :: c : d$; $a : e : f : d$. Da queste ne deriva $bc = ef$, e perciò $b : e : f : c$. Lo stesso vale, se i termini comuni sieno i medj.

254. *Teor.* In due proporzioni geometriche, le quali abbiano gli antecedenti, o i conseguenti comuni, i termini diversi di una sono direttamente proporzionali ai termini diversi dell'altra. *Dimostrazione*. Sieno le proporzioni $a : b :: d : c$, $a : e :: d : f$; Alterando si ha $a : d :: b : c$, $a : d :: e : f$, e perciò $b : c :: e : f$, e alternando di nuovo $b : e :: c : f$.

255. *Teor.* In due proporzioni geometriche, le quali abbiano due termini comuni, con questa legge, che i conseguenti di una sieno antecedenti dell'altra, i due termini diversi della prima sono direttamente proporzionali ai due termini diversi dell'altra. *Dimostrazione*. Si hanno in questo caso le proporzioni $a : b :: c : d$; $b : e :: d : f$; Si prenda il valore di uno dei termini comuni, per esempio, di b, da una di esse, che sia, per esempio, la prima, e si sostituisca nella seconda. Fatta l'equazione si ha $\frac{adf}{c} = ed$, cioè $\frac{a}{c} = \frac{e}{f}$, e perciò $a : c :: e : f$.

256. *Teor.* Se abbiasi un numero qualunque di pro-

proporzioni geometriche tali, che i conseguenti della prima sieno antecedenti nella seconda, i conseguenti della seconda sieno antecedenti nella terza, e così in seguito, si avrà: la somma degli antecedenti delle prime ragioni di tutte le proporzioni alla somma degli antecedenti delle seconde ragioni, come il conseguente di una delle prime ragioni al conseguente della seconda ragione della medesima proporzione. *Dimostrazione*. Sieno le due proporzioni $a : am :: b : bm$; $am : amn :: bm : bmn$; è chiaro, che sarà $a+am : b+bm :: am : bm$; poichè i prodotti dei medj, e degli estremi sono eguali

Se le proporzioni sieno tre, cioè $a : am :: b : bm$; $am : amn :: bm : bmn$; $amn : amnr :: bmn : bnmr$; si avrà $a+am+amn : b+bm+bmn :: am : bm$ &c. Difatto, dividendo per m, si ha il prodotto de' medj $ab+abm+abmn$ eguale al prodotto degli estremi $ab+abm+abm$, e lo stesso può verificarsi in un maggior numero di proporzioni.

Venendo adesso alle progressioni geometriche si ha primieramente

257. *Teor.* Le somme, e le differenze fra i termini contigui di una progressione geometrica formano una progressione dotata del medesimo rapporto. *Dimostrazione*. Difatto la serie de' termini $a \pm am$, $am \pm am^2$, $am^2 \pm am^3$, $am^3 \pm am^4$ .... $am^{n-1} \pm am^n$ è una progressione geometrica dotata del medesimo rapporto m, di cui è dotata la progressione $a : am : am^2 : am^3 \ldots am^n$.

258. *Teor.* In ogni progressione geometrica, un termine qualunque sta al terzo termine, che gli succede, come la sua potenza quadrata sta alla potenza quadrata del termine, che gli è appresso;

 Stà

stà un termine qualunque al quarto, che gli succede, come il suo cubo sta al cubo del secondo termine, che gli viene appresso, ed in generale sta un termine qualunque a un termine $(n+1)$:^{esimo} susseguente, come la sua potenza $n.^{sima}$ sta alla potenza $n.^{sima}$ del termine, che gl'è appresso. *Dimostrazione*. Sia la formola generale $a : am : am^2 : am^3 \ldots am^n$; Si vede chiaramente, che si ha $a : am^2 :: a^2 : a^2m^2$, ... $a : am^3 :: a^3 : a^3m^3$, &c. $a : am^n :: a^n : a^nm^n$.

259. *Teor.* In ogni progressione geometrica la somma di tutti i termini meno il primo sta alla somma di tutti meno l'ultimo, come il secondo al primo, o come la ragione all'unità. *Dimostrazione*. Si ha in effetto $am + am^2 + am^3$ &c. $+ am^n : a + am + am^2$ &c. $+ am^{n-1} :: am : a :: m : 1$, perchè sussiste l'eguaglianza fra il prodotto dei medj, e quello degli estremi.

260. Di quì si può derivar con facilità una formola generale, che rappresenti la somma di qualunque progressione geometrica,

Pongasi il primo termine $= a$, il secondo $= b$ l'ultimo $= x$, e la somma di tutti $= s$.

In virtù del Teorema precedente si avrà la proporzione $s-a : s-x :: b : a$; Da questa dividendo si deduce $x-a : s-x :: b-a : a$, e di quì si ha $s = \dfrac{a(x-a)+x(b-a)}{b-a} = \dfrac{bx-a^2}{b-a}$ .... (A).

261. Nel caso, che la progressione sia decrescente, e che perciò il denominatore $b-a$ sia negativo, si farà uso della proporzione $s-x : s-a :: a : b$, che è l'inversa dell'antecedente, e dividendo,

do, come sopra si dedurrà $a-x : s-a :: a-b : b$, e quindi $s=\frac{b(a-x)+a(a-b)}{a-b}=\frac{a^2-bx}{a-b}$ ..... (B).

262. Impiegando finalmente la proporzione ..... $s-a : s-x :: m : 1$, (ovvero sostituendo in luogo di b il suo valore am preso dalla formola generale, nelle formole (A), (B) si ottiene la formola semplicissima $s=\frac{xm-a}{m-1}$ ...... (C).

263. *Scol.* Se i termini della progressione fossero tutti eguali, la prima formola (A), e la seconda (B) diverrebbero ambedue eguali a $\frac{0}{0}$, che è un espressione indeterminata (*n.*583.). Per sviluppare questa difficoltà si rifletta, che essendo n i termini della progressione, x è $=am^{n-1}=a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$ $=\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$, onde si ha $s=\frac{\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}} \quad b-a^2}{b-a}=\frac{b^n-a^n}{a^{n-2}(b-a)}$ formola, che fatta la divisione, e posta $a=b$, equivale ad na. Lo stesso ha luogo per rapporto alla formola (A).

264. Si può adesso sciogliere un problema intorno alle progressioni geometriche analogo a quello, che si è sciolso intorno alle progressioni arimmetiche.

265. *Probl.* Date, che sieno tre delle funzioni a, x, m, n, s vogliensi delle formole, mediante le quali si possa trovare immediatamente una dell'altre due. *Soluzione*. Dalla prima formola ...., $x=am^{n-1}$, se ne deducono tre, e sono ....

$a=$

$2.^a\ a=\frac{x}{m^{n-1}}$; $3.^a\ n=\frac{\log.x-\log.a+\log.m}{\log.m}$; $4.^a\ m=\sqrt[n-1]{\frac{x}{a}}$.

Dalla formola $5.^a\ s=\frac{xm-a}{m-1}$ se ne deducono pure tre altre, e sono $6.^a\ a=xm-sm+s$; $7.^a\ x=s-\frac{(s-a)}{m}$; $8.^a\ m=\frac{s-a}{s-t}$.

Trovate queste otto formole si sostituiscano successivamente i valori di x, a, m dedotti dalla formola di $x=am^{n-1}$. Con questo si avranno dodici altre formole, che insieme con le otto già trovate scioglieranno compitamente il problema.

Tali formole sono le seguenti.

Sostituito il valore di x, si ha $s=a\frac{(m^n-1)}{m-1}$;

$a=\frac{s(m-1}{m^n-1}$; $n=\frac{\log.(sm-s+a)-\log.a}{\log.m}$;

$m=e\frac{\log.1-a\log.a+\log.s}{an-1}$;

Sostituito il valore di a, si trova $s=\frac{x}{m^{n-1}}$ .... $\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right)x=sm^{n-1}\left(\frac{m-1}{m^n-1}\right)$; $n=1+$ .... $\frac{\log.x-\log.(xm+sm+s)}{\log.m}$ $m=\log.s-\log.(s-x)-\log.x$

Sostituito il valore di m si ottiene ....

$s=\frac{\frac{n}{t^{n-1}}-\frac{n}{a^{n-1}}}{\frac{1}{t^{n-1}}-\frac{1}{a^{n-1}}}$ $n=\frac{1+\log.x-\log.a}{\log.(s-a)-\log.(s-x)}$; .....

$(s-x)$

$$(s-x)x^{\frac{1}{n-1}}1 = (s-a)^{\frac{1}{n-1}}; (s-a)\,a^{\frac{1}{n-1}} = (s-x)\,x^{\frac{1}{n-1}}.$$

266. Per intender le operazioni logarimmiche basta saperne le prime regole, che si possono vedere anche nell'Arimmetica di M. Bezout, e di altri. Noi ne tratteremo in appresso.

Ecco pertanto, che qualora sieno date tre qualunque delle cinque funzioni a, m, x, n, s, può sempre trovare una dell'altre due.

La Tavola seguente mostra tutte le formole appartenenti a questo problema, tutte raccolte insieme, e disposte per ordine.

TA-

Tavola delle Formole che appartengono alle Progressioni Geometriche.

Date	Si trova	Per mezzo delle Formole
n, x, s	a	$(s-a)\,a^{\frac{1}{n-1}} = (s-x)\,x^{\frac{1}{n-1}}$.
n, m, s		$a = s\left(\frac{m-1}{m^n-1}\right)$.
x, m, s		$a = xm - sm + s$.
x, n, m		$a = \frac{x}{m^{n-1}}$.
a, m, n	x	$x = am^{n-1}$.
a, s, n		$(s-x)\,x^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)\,a^{\frac{1}{n-1}}$.
a, m, s		$x = s - \frac{(s-a)}{m}$.
m, n, s		$x = sm^{n-1} \times \left(\frac{m-1}{m^n-1}\right)$.
a, x, n	m	$m = \sqrt[n-1]{\frac{x}{a}}$.
a, n, s		$m^n = \frac{s}{a}\cdot m + \frac{s}{a} - 1 = 0$.
a, s, x		$m = \frac{s-a}{s-x}$.
n, x, s		$m^n = \frac{s}{s-x}\cdot m^{n-1} + \frac{x}{s-x}$.
a, x, m	n	$n = 1 + \frac{\log. x - \log. a}{\log. m}$.
a, s, x		$n = 1 + \frac{\log. x - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-x)}$.
a, m, s		$n = \log. (sq - s + a) - \log. a) : \log. q$.
x, m, s		$n = 1 + (\log. x - \log. (xm - sm + s)) : \log. q$.
a, x, n	s	$s = (x^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}) : (x^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}})$.
a, m, n		$s = a\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right)$.
a, x, m		$s = (xm - a) : (m - 1)$.
n, m, x		$s = \frac{x}{[illegible]}\left(\frac{m^n-1}{[illegible]}\right)$.

Si possono sciogliere adesso diversi problemi.

267. *Probl.* 1. Se da una potenza $n.^{sima}$ di una quantità intera qualunque p, si tolgano successivamente le potenze inferiori p^{n-1}, p^{n-2}, p^{n-3} &c. fino alla potenza prima inclusivamente, si dimanda se il residuo debba risultar positivo, o negativo. *Soluzione*. Dalla formola $s = \frac{xm - a}{m-1}$ si deduca la somma della progressione .... p^{n-1}, p^{n-2}, p^{n-3} &c. p, e questa si troverà $= \frac{p^n - p}{p-1}$. Trovata questa somma si ha $p^n - \frac{(p^n - p)}{p-1} = \frac{p^{n+1} - 2p^n + p}{p-1}$. Non si dee tardare adesso a conoscere, che questa funzione dee generalmente risultar positiva.

In effetto $p^{n+1} - 2p^n + p$ non può esser negativa, che nel caso in cui sia $p^{n+1} < 2p^n$, cioè $p < 2$. Ma nel caso, che sia $p = 1$, la suddetta espressione risulta $= 1$. Dunque il residuo proposto se p debba esser intero, non può esser mai negativo; e quando ancora p fosse una quantità fratta, non potrebbe il suddetto residuo esser negativo, che nei soli casi compresi fra 0, e 1.

268. *Probl.* 2. Un servo astuto trae ogni giorno dalla botte del suo padrone una misura di vino, a cui supplisce con egual porzione di acqua.

La botte contiene m fiaschi; Il derubamento dura n giorni; Si vuol sapere quanto di vino debba rimaner nella botte dopo gli n giorni.

Soluzione. Io primieramente osservo, che il vino, che si attinge il primo giorno è $= 1$, che quello,

che si attinge il secondo giorno è $= \frac{m-1}{m}$, perchè la quantità del vino, che si attinge successivamente dee diminuire nella ragione stessa con cui diminuisce il vino nella botte, e perciò si dee avere la proporzione $m : m-1 :: 1 : x = \frac{m-1}{m}$.

In virtù del medesimo raziocinio vedo, che il vino tratto il terzo giorno dee essere il quarto termine della proporzione $m : (m-1) - \frac{(m-1)}{m} :: \frac{m-1}{m} : x = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2$, e che nei giorni successivi dee essere $\left(\frac{m-1}{m}\right)^3$, $\left(\frac{m-1}{m}\right)^4$ &c. $\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n+1}$. Trovata in questa guisa la ragione, con cui va diminuendo il vino, che si trae, si deduce facilmente la ragione, con cui va diminuendo il vino nella botte medesima. Difatto si ha il vino rimanente dopo il primo giorno $= m-1$. Il vino rimanente dopo il secondo giorno $= (m-1) - \frac{(m-1)}{m} = \frac{(m-1)^2}{m}$; il vino rimanente dopo il terzo $= \frac{(m-1)^2}{m} - \left(\frac{(m-1)^2}{2}\right) = \frac{(m-1)^3}{m^2}$ &c. finchè dopo il giorno $n.^{simo}$ il vino rimanente diviene $= \frac{(m-1)^n}{m^{n-1}}$.

269. Se si volesse sapere adesso dopo quanti giorni il vino debba divenire uguale all'acqua, basterebb-

rebbe dedurre dall' equazione $\frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} = \frac{m}{2}$ il valore di n, il che si può ottenere mediante i logarimmi.

270. Se si cercasse, dopo quanti giorni debba esser terminato intieramente il vino, sarebbe facile il vedere, che ciò non può avvenir mai, perchè l'equazione $\frac{(m-1)^n}{m^{n-1}} = 0$, posto $m>1$ è assolutamente impossibile, perchè fatto $m-1=\pi$ converrebbe, che fosse $\frac{\pi^n}{(\pi+1)^{n-1}} = 0$. Di qui si ha pertanto una prova evidente della divisibilità della materia all' infinito.

271. *Scol.* Che le progressioni geometriche divergenti vadano crescendo con molta rapidità, ella è una verità ben nota. Non sarà però disaggradevole a chi non ha peranche tutta la pratica nello studio dell'Algebra, il trattenersi ad osservare quanto straordinaria, e sorprendente ella sia.

Ecco un esempio riferito dal P. Castelli nella sua *Matematique Universelle*, il quale riguarda una progressione dupla, che pure non è delle più rapide. Riferisce egli che l'Inventore del gioco degliScacchi, fu chiamato dal suo Principe, e che le fu esibita dal medesimo quella ricompensa, che più desiderasse. L'Inventore, dopo qualche renitenza si fece portare una scacchiera, e dimandò, che gli fosse dato un granello di frumento per la prima casella, due per la seconda, quattro per la terza, otto per la quarta, e così in seguito in progressione dupla, fino alla settantaquattresima casella. Al Principe sembrò lieve la dimanda, ma fatto il computo si trovò es-

esser la somma totale dei granelli $= \frac{a(m^n-1)}{m-1}$ $= 2^{64}-1 =$ 18. 446. 744. 073. 709. 551. 615. granelli di frumento.

Per ridurre tutta questa massa ad una misura precisa si faccia il calcolo, che segue.

Un pollice cubico contiene circa 450. granelli di frumento, e perciò un piede cubico ne contiene 777, 600. S'immagini un recinto quadrato di una lega di circonferenza, ridotto in granajo; Supponghasi la lega di piedi 14400, e che il grano vi sia nel divisato recinto all'altezza di 20 piedi. Ciascun lato del recinto sarà di 3600 piedi, e la di lui superficie di piedi quadrati $3600 \times 3600 = 12,$ 9600, 000; questi moltiplicati per l' altezza 20 danno 259. 200. 000 piedi cubici per la capacità del granajo, o sia per la massa del grano. Ora ciascun piede cubico contiene 777. 600 granelli; dunque il numero de granelli necessario per empire il granajo suddetto è $= 777.600 \times 259.$ 200. 000 = 201. 553. 920, 000. 000.

Dividasi adesso il numero 18. 446. 744. 073. 709. 551. 615 per quest' ultimo numero, per discuoprire il rapporto del grano contenuto nel granajo supposto, al grano richiesto dall' Inventore del gioco delli Scacchi.

Il quoziente è 91522. con una frazione, che si trascura, e che sarebbe sufficiente a far la fortuna di più di 6000 famiglie. Ecco pertanto che il grano espresso dalla somma $2^{64}-1$, non richiede minor recipiente di 91522 granaj, il di cui perimetro sia una lega, e la di cui altezza sia di 20 piedi.

Volendo valutare in denaro la somma suddetta pon pongasi ciascun piede cubico valere 4. lire. Il prezzo di ciascun granajo sarà di lire 1. 036. 800. 000, ed il prezzo di tutti i granaj presi insieme sarà di lire 94. 890. 009. 600. 000, valore, che ridotto in zecchini equivale in circa à 6. 320. 000. 640. 000 zecchini somma superiore d'assai al risultato dei Tesori di tutte le Potenze del Mondo riunite insieme.

SEZIONE III.

Delle proporzioni Armoniche.

272. Sieno a, b due quantità date, e si voglia trovare fra queste un medio proporzionale Armonico, e Contrarmonico. *Soluzione*. Per la natura delle proporzioni Armoniche fra tre quantità si deve avere (n.2[illegible]) $x-a : b-x :: a : b$, e perciò $x=\frac{2ab}{a+b}$ medio cercato.

Esempio. Sia $a=10$, e $b=20$, sarà $x=13+\frac{1}{3}$, onde i numeri 10, $13\frac{1}{3}$, 20 sono armonicamente proporzionali. Difatto si ha $3+\frac{1}{3} : 6+\frac{1}{3} :: 10:20$.

273. Trattandosi di un medio contrarmonico si ha $x-a : b-x :: b : a$, e perciò $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

274. Se vogliasi un terzo proporzionale armonico dopo le due quantità a, b, s'istituirà la proporzione $b-a : x-b :: a : x$, e si dedurrà .... $x=\frac{ab}{2a+b}$, e per il terzo proporzionale contrarmo-

nico si avrà l'equazione $x^2-bx=ab-a^2$, dalla quale si potrà dedurre il valor di x co'i metodi dell' Analisi.

275. Vogliasi trovar finalmente un quarto proporzionale armonico, e contrarmonico dopo tre quantità date a, b, c, s'istituirà nel primo caso la proporzione $b-a : x-c :: a : x$, e se ne dedurrà $x=\frac{ac}{2a-b}$; si formerà nel secondo caso la proporzione $b-a : x-c :: x : a$. e se ne inferirà l'equazione quadratica $x^2-cx=ab-a^2$ equazione, che essendo risciolta con i metodi dell' Analisi darà il valor cercato di x.

CAPITOLO VII.

Delle Serie.

276. La Teoria delle progressioni ci conduce adesso a trattare delle Serie, parte molto interessante in tutte le Matematiche, e che è la sola risorsa generale, di cui si prevalgono gli Analitici nei casi di esito disperato.

277. Serie dicesi un seguito di quantità, che succedonsi con una legge determinata.

Tre sono le specie principali delle serie.

Alla prima specie appartengono le Serie Arimmetiche; allo seconda le serie Geometriche; ed alla terza le serie Arimmetico-Geometriche.

278. Di qualunque specie però sieno le serie, posson' esse procedere in due maniere, cioè, o crescendo, e diconsi divergenti, ò decrescendo, e diconsi convergenti. Se debbasi, per esempio, cercare il valore della frazioni $\frac{1}{1+2}$; mediante la di-

visione si ottiene la serie divergente $1-2+4-8+16-32+64$ &c. Queste serie quanto più s'inoltrano, tanto più si discostano dal vero valore, che debban rappresentare, e la di loro somma non può aversi, che impropriamente, con prender cioè la quantità primitiva, dalla quale per mezzo di una legittima operazione, son derivate.

Se debbasi poi cercare il valore della frazione $\frac{1}{2+1}$, si ottiene la serie convergente $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ &c.

Queste serie con tanto maggior esattezza esprimo il valore, che rappresentano, quanto più sono inoltrate, cosicchè però solo dopo un infinito numero di termini danno il richiesto valore. Quindi è, che la somma di queste serie ancora può dirsi impropria, mentre la di loro somma, non è altro, che il limite, a cui si vanno approssimando infinitamente. Difatto per ottenerne la somma, convien porre $a=0$ nella formola $S=\frac{tm-a}{m-1}$, il che pure non ha luogo dopo qualunque numero di termini.

279. L' origine di queste serie si riferisce a Nicolao Mercatore, ed a Wallis, perchè sono stati essi i primi, che ne hanno trattato con maggior successo.

280. Le serie possono procedere ancora in modo, che non si accostino, nè si allontanino al vero valore nulla più del primo termine, ed in questo caso diconsi parallele. Se cerchisi il valore della funzione $\frac{1}{1+1}$ per mezzo della divisione, si trova per risultato la serie parallela $1-1+1-1+1-$ &c., di cui se prendasi un numero pari di termini la somma è sempre zero, e se prendasi un numero impari di termini, la somma è $=1$, valori, che differiscono egualmente ambedue dal valore principale $\frac{1}{2}$.

Fù da queste serie, che il P. Grandi pretese di dedurre una prova della creazione degli esseri. (*Quadrat. circ. & hyperb. prop. 7.*), ma si vede, che egli cadde in errore, perchè la serie $1-1+1-1+1$ &c. non equivale, com'egli suppone a $0+0+0+0+0$ &c. $=0$, ma equivale $0\pm\frac{1}{2}$, questo essendo il residuo, che rimane dopo qualunque divisione del numeratore 1 per il denominatore $1+1$. Si può vedere negl' Atti dell' Acc. delle Scienze all' an. 1715. una Memoria di M. Varignon in cui si tratta sù questo punto con molt'acutezza, ed ingegno.

281. Le serie divergenti, e convergente si debbon distinguere in serie finite, ed infinite. Ambedue queste sorte di serie ammettono un Termine generale, ed una somma generale. Per Termine generale (detto n il numero esprimente l'ordine di un termine qualunque della serie) intendesi una funzione di n tale, che se in essa si sostituiscano successivamente in luogo di n i numeri naturali $1, 2, 3, 4$ &c. si ottenga separatamente ciascun termine della serie, di cui l'ordine venga espresso dal numero delle unità, che si contengono nel numero

mero sostituito. Nella serie generale $\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{3}{c}, \overset{4}{d}, \ldots \overset{n}{y}$, il termine $n.^{\text{simo}}$ y è il termine generale, ed è chiaro, che deve egli esser funzione di n, perchè ciascun termine ha un valor particolare, dipendente dall'ordine, che occupa nella serie stessa. Per esempio nella serie particolare $1, 7, 13, 19$ &c. $6n-5$ è il termine generale, perchè sostituendovi per n i numeri naturali $1, 2, 3$ &c. si hanno per ordine, incominciando dal primo, tutti i termini della serie.

282. Dicesi poi somma generale di una serie una funzione di n, tale che per la sostituzione de' numeri naturali in luogo di n somministri la somma di tanti termini, cominciando dal primo, quante sono le unità contenute in n. Così la somma generale della serie $1, 7, 13, 19$ &c. è $3n^2-2n$, perchè questa funzione di n sodisfa alla condizione divisata. La ricerca di queste due funzioni è uno de' principali oggetti delle serie.

183. L'origine delle serie si ripete da tre fonti, e sono; la divisione, l'estrazione delle radici, e il Metodo dell'equazioni indefinite, al quale si riduce il metodo de' divisori evanescenti.

284. E' per il primo fonte, che effettuando la divisione indicata dalla frazione $\frac{a}{b\pm c}$, si ottiene la serie infinita $\frac{a}{b} \mp \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} \mp \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \ldots \pm \frac{ac^n}{b^{n+1}}$ dove si può osservare, che se abbiasi $b>c$ la serie è convergente, e viceversa; il che insegna, che mediante la divisione di una quantità qualunque

que per un binomio, si può formare una serie convergente, o divergente, come si vuole, e che nella divisione di un numero per un'altro basta separare il divisore in due parti, per ottenere immediatamente lo stesso effetto.

285. *Scol.* Se nella frazione $\frac{a}{b\pm c}$ si ponga $b=c$, e si prenda il segno negativo, la serie addotta diviene $\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}$ &c. all'infinito. Di quì deduce qualche Algebrista una prova dell'equazione $\frac{a}{0}=\infty$, la quale in realtà sussiste, come si è veduto (*n*.35.), ma è falsamente dedotta, perchè la suddetta serie non esprime in verun modo il quoziente di a diviso per $c-c$.

Che questo sia così, può dimostrarsi in tre modi.

1.° Osservando che $c-c$ non è $=0$ nel senso, in cui devesi prendere zero, quando si tratta di provare $\frac{a}{0}=\infty$, cioè non è una quantità infinitesima, ma un nulla assoluto; ora ∞ preso zero volte in senso rigoroso, non può esser uguale ad una quantità finita a.

2.° Osservando, che il prodotto della serie nel divisore non riproduce il dividendo a.

3.° Che non essendo omogenee le due quantità 0, ed a, non è possibile di trovarne il rapporto, o sia il quoziente, poichè non si può, per esempio, dividere un numero di piedi cubici per un numero di libbre.

286. Per il secondo fonte, effettuando l'estrazione

ne

ne della radice indicata dalla formola $(a+b)^{\frac{1}{n}}$, si ottiene parimente una serie infinita, cioè $a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b + \frac{1}{2n}\left(\frac{1-n}{n}\right) \times a^{\frac{1-2n}{n}} b^2$ &c. $= a^{\frac{1}{n}} + \frac{a^{\frac{1}{n}}}{na} + \left(\frac{1-n}{2n^2}\right) \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^2} b^2 +$ &c., dove, se a sia $> b$, la serie risulta convergente, e viceversa, il che fa vedere, che si può estrarre una radice qualunque da un binomio sordo, o da un numero parimente sordo, che sia espressa per serie convergente, o divergente a proprio piacere: anzi può vedersi facilmente, che tanto dalla divisione di due numeri primi, l'uno per l'altro, quanto dall'estrazione di una radice $n.^{sima}$ da un numero qualunque si possono dedurre per esprimere, il quoziente nel primo caso, e la radice nel secondo, un numero infinito di serie diverse tanto convergenti, che divergenti, potendosi separare il divisore nel primo caso, in due parti, in infinite maniere, come pure il numero sordo nel secondo caso.

SEZIONE I.

Delle serie arimmetiche.

287. Serie Arimmetica è un seguito di termini, fra i quali le successive differenze procedono con una legge costante. Se la serie arimmetica sia tale, che pigliandosi in essa successivamente le differenze dei termini contigui, di poi le differenze

 del-

delle differenze, e così in seguito, si giunga a delle differenze costanti, dicesi serie algebraica, e questa specie di serie arimmetica è di un uso assai più esteso delle serie arimmetiche, le quali non hanno differenze costanti. Frà le serie algebraiche si distinguono diversi ordini. Quelle serie arimmetiche, in cui le prime differenze sono costanti, diconsi serie Algebraiche di primo ordine: quelle, in cui le seconde differenze sono costanti, diconsi serie Algebraiche di second'ordine, ed in generale, diconsi serie algebraiche dell'ordine $n.^{simo}$ le serie, in cui sono costanti le differenze $n.^{sime}$.

288. Fra le serie Algebraiche si debbono annoverare le serie ricorrenti così dette dal Celebre Moivre, che ne ha trattato in modo particolare; perchè per ottenere ciascun loro termine, basta ricorrere ai termini precedenti, essendo ciascuno di essi una funzione qualunque dei termini, che lo precedono. Di queste serie avremo occasione di parlarne, quando esporremo il metodo di sviluppar le funzioni in serie.

LEMMA.

289. Essendo S la somma della serie, se in essa pongasi $n-1$ in luogo di n, ed il risultato, che sia s, si sottragga da S, la differenza risultante sarà sempre uguale al termine generale. *Dimostrazione.* Ponendo $n-1$ per n in S, la somma s, che si ottiene, è la somma di tutti i termini della serie stessa, eccettuato il termine $n.^{simo}$. Dunque la funzione $S-s$ rappresenta il termine $n.^{simo}$ della serie stessa, e perciò ne è il termine generale. Posto questo veniamo al

289.

290. *Probl.* Trovare le formole esprimenti i termini generali, e le somme generali delle serie algebriche.

Soluzione. Dovendo esser la somma generale una funzione di n tale, che posto $n=0$, anch'essa divenga $=0$, si supponga primieramente, che $\mathcal{A}n$ rappresenti la somma generale di una serie Algebrica. Si avrà $T=\mathcal{A}n-\mathcal{A}(n-1)=\mathcal{A}$; dunque la serie, di cui la somma generale è $\mathcal{A}n$, è composta di termini eguali $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$, &c.

Sia adesso la somma generale espressa per $\mathcal{A}n+Bn^2$; sarà $T=\mathcal{A}-B+2Bn$, dove se per n si sostituiscono successivamente i numeri naturali, ne nasce una serie algebrica di prim'ordine $\mathcal{A}+B$, $\mathcal{A}+3B$, $\mathcal{A}+5B$, $\mathcal{A}+7B$ &c. Dunque nelle serie algebriche di prim'ordine, il termine generale è $\mathcal{A}-B+2Bn$, e la somma è $\mathcal{A}n+Bn$.

Suppongasi $\mathcal{A}n+Bn^2+Cn^3$ somma generale di una serie; operando, come sopra, si avrà $T=\mathcal{A}-B+C+2Bn+3Cn+3Cn^2$ di dove, sostituiti per n i numeri naturali, si deduce la serie algebrica di secondo ordine $\mathcal{A}-B+C$, $\mathcal{A}+3B+7C$, $\mathcal{A}+5B+19C$ &c. Dunque nelle serie algebriche di second'ordine si ha il termine generale espresso per $\mathcal{A}-B+C+(2B+3C)n+3Cn^2$, e si ha la somma generale espressa per $\mathcal{A}n+Bn^2+Cn^3$. Nella guisa stessa potrà vedersi, che il termine generale di una serie di terz'ordine è $\mathcal{A}-B+C-D+(2B-3C+4D)n+(3C-6D)n^2-4Dn^3$, e che la somma generale è $\mathcal{A}n+Bn^2+Cn^3+Dn4$. In generale, riducendo la formola del termine generale alla forma seguente, si avrà

$$T=\mathcal{A}-(B-2Bn)+(C-3Cn+3Cn^2)-(D-4Dn+6Dn^2+4Dn^3)+\&c.\pm\mathcal{Q}(n-1)^{m+1}-\mathcal{Q}n^{m+1}\ldots(\mathcal{A})$$

$$S=\mathcal{A}n+Bn^2+Cn^3+Dn^4+\&c.\ \ldots\ldots\ \Pi n^{m+1}\ldots(B)$$

291. Da tutto questo si raccoglie, che una serie algebrica dell'ordine m deve avere per termine generale una funzione di n, in cui un termine sia costante, e gli altri sieno dotati delle successive potenze di n fino alla potenza $m.^{sima}$, e che deve avere per somma generale una funzione di n tale, che in essa niun termine sia costante, ma cominciando dal primo ciascuno sia dotato delle potenze successive di n fino al grado $\overline{m+1}^{simo}$.

292. *Scol.* A qualunque termine generale si può dare quella forma indeterminata, che si vuole, purchè si abbia riguardo alle potenze di n, a tenore di quanto si è detto di sopra, poichè gli opportuni valori delle indeterminate $\mathcal{A}$, B, C &c. compensano la diversità della forma. Quindi nella formola esposta del termine generale $(\mathcal{A})$ si possono rendere i segni tutti positivi, e sarà egualmente il risultato una formola generalissima del termine generale, cioè si potrà ugualmente supporre in generale ....

$$T=\mathcal{A}+(B+2Bn)+(C+3Cn+3Cn^2)+(D+4Dn+6Dn^2+4Dn^3)+\&c.\ldots+\mathcal{Q}(n+1)^{m+1}-\mathcal{Q}^{m+1}\ldots(\mathcal{A}')$$

formola usata da parecchj algebristi.

Ciò, che vi è d' incomodo è, che variando a piacere la forma del termine generale, o quella della somma convien poi saperne determinare in conseguenza la forma dell' altra funzione, cioè variando il termine generale bisogna saper variare opportunamente la somma, e viceversa.

Ecco però come si può questo ottenere.

Essendosi cangiata la formola $(\mathcal{A})$ nella formola $(\mathcal{A}')$, (lo stesso vale per il caso, che si cangi la formola (B) in un'altra qualunque (B')) si ponga ....

$$S=Pn+\mathcal{Q}n^2+Rn^3\ldots+\Pi n^{m+1}\ldots(C)$$

Facciasi $n=1$ in ambedue le formole (A^1) e (C), e si eguaglino i due risultati; di poi facciasi $n=2$ in ambedue dette formole, ed il risultato della formola (C) si eguagli alla somma di questo risultato col primo; si faccia $n=3$, e si eguagli il risultato della formola (C) colla somma dei tre risultati precedenti della formola (A^1); ed in generale si faccia $n=m$, ed il risultato della formola (C) si ponga eguale alla somma dei risultati della formola (A^1) derivanti dalle sostituzioni successive di $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots m$ in luogo di n.

Si avranno così tant'equazioni di primo grado, quante sono le quantità indeterminate A, B, C, &c. che perciò per il (*n.* 80.) si potranno determinar facilmente.

Con questo metodo si troverà, che la forma della somma corrispondente alla formola (A^1) è la seguente $S=An-(2Bn+Bn^2)+(3Cn+3Cn^2+Cn^3)+$ &c. .... $+\mathcal{Q}(n+1)^{m+1}-\mathcal{Q}^{m+1}\ldots$ (B^1) formola, che differisce da quella del termine generale in questo solamente, che le indeterminate B, C, D &c., che nella formola del termine generale esistevano isolate, sono moltiplicate per una potenza di n espressa dall'ordine delle stesse indeterminate; onde B, che è la seconda indeterminata, è moltiplicata per n^2, C che è la 3:ª è moltiplicata per $n.^3$, e così in seguito. Si può veder questa formola dedotta dal Ch. Signor Cavalier Lorgna nel primo Tomo degl'Atti della Società Italiana, dedotta, dissi, con grand'apparato di Teoremi dalla formola (A^1).

Vediamo adesso, come si possano determinare le quantità A, B, C &c. per mezzo di quantità dipendenti dalle serie stesse, affinchè, data una serie si possa trovare immediatamente il di lei termine generale, e la di lei somma.

293.

293. *Probl.* Trovare i valori delle indeterminate A, B, C &c. espressi per quantità dipendenti dalle serie stesse.

Soluzione. Si sostituiscano successivamente in una delle formole (A), (B) i numeri naturali, per esempio in (A) in luogo di n, e si ripetano queste sostituzioni, finchè il di loro numero eguagli quello delle indeterminate; cioè fatto si eguagli ciascun risultato al suo termine corrispondente della serie data, e si avranno tante equazioni di primo grado, quante sono le indeterminate, e perciò (A) si potranno determinare.

Vediamone la pratica.

Cominciando dalle serie di prim'ordine si ha $T=A-B+2Bn$, ed $S=An+Bn^2$. La serie generale data sia a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b \ldots\ldots a+nb$.

Pongasi in T, $n=1$, e si avrà l'equazione $A+B=a$; pongasi $n=2$, e si avrà $A+3B=a+b$; dalla prima si deduce $A=a-B$, e sostituendo nella seconda si ottiene $B=\frac{1}{2}b$, onde $A=a-\frac{1}{2}b$, e perciò $T=a-b+bn=a+(n-1)b$. ed $S=an-\frac{1}{2}bn+\frac{1}{2}bn^2=an+n\frac{(n-1)}{2}b$.

Avendosi una serie di second'ordine, in cui si ha $T=A-(B-2Bn)+(C-3Cn+3Cn^2)$, ed $S=An+Bn^2+Cn^3$, ed essendo data la serie a, $a+b$, $a+2b+c$, $a+3b+3c$ &c., fatte le sostituzioni si ottengono le tre equazioni $A+B+C=a$, $A+3B+7C=a+b$, $A+5B+19C=a+2b+c$, dalle quali se ne inferisce $A=a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c$, $B=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$,

c, $C = \frac{1c}{6}$: quindi risulta $T = a - b + c + bn - \frac{3}{2}cn + \frac{1}{2}cn^2 = a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{2}c$ &c., ed $S = an - \frac{1}{2}bn + \frac{1}{3}cn + \frac{1}{2}bn^2 - \frac{1}{2}cn^2 + \frac{1}{6}cn^3 = an + n\frac{(n-1)}{2}b + n\frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}c$.

Si applichi lo stesso raziocinio all'equazione di terz'ordine, e si troverà .... $T = a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{2}c + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}d$.

$$S = na + n\frac{(n-1)}{2}b + n^2\frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}c + n\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}d.$$

Dopo di questo riesce facile il conoscer la legge, con cui debbon procedere le formole determinate del Termine genarale, e della somma gerale di una serie qualunque a differenze costanti.

294. Il metodo è generale, qualunque sia la forma di tali funzioni, e nei casi particolari altro non si richiede, che sostituire i valori del primo termine, e delle successive differenze, fino all'ultima inclusivamente, il che, siccome si suppone data la serie, si può effettuar facilmente.

295. Quindi, se sia richiesta la somma della serie $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots n$, si avrà $S = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$; se sia dimandata la somma della serie $1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \ldots n^2$ si troverà $S = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$; e così seguito.

296.

296. Ecco pertanto, che data una serie algebrica qualunque, si può sempre trovar l'espressione di T, ed S: anzi essendo data una di tali funzioni T, S si può sempre trovar l'altra, com'è manifesto.

Può però avvenire, che la funzione T, o S data, sia indeterminata doppiamente, cioè, che oltre l'indeterminata n, contenga un'altra indeterminata m; in questo caso le formole addotte non sono di alcun uso, onde convien procedere alla ricerca di altri metodi, che possano soddisfare anche a questi casi.

Cominciando dalla somma, se essa sia doppiamente indeterminata basterà usare il metodo esposto al (n. 289. *Lemma*), e si avrà sempre il Termine generale cercato. Una sola cosa conviene avvertire, ed è che nell'espressione di $S - s$ si faccia, sempre che sia possibile, la riduzione, perchè altrimenti l'operazione può riuscire inutile.

Difatto se abbiasi $S = \frac{n}{2+n}$; si trova $T = S - s = \frac{n}{2+n} - \frac{(n-1)}{n+1}$.

Se in questa formola non facciasi veruna riduzione, sostituiti per n i numeri naturali, si ha ....
$\left(\frac{1}{3}\, \frac{2}{4}\, \frac{3}{5}\, \frac{4}{6}\, \frac{5}{7} \text{ \&c. } \frac{n}{2+n}\right) - \left(\frac{0}{2}\, \frac{1}{3}\, \frac{2}{4}\, \frac{3}{5}\, \frac{4}{6} \text{ \&c. } \frac{n-1}{1+n}\right) = \frac{n}{2+n}$, cioè il Termine generale in vece di dar successivamente tutti i termini della serie, a cui appartiene, dà in questa guisa la somma stessa, che già si aveva. Ma se trasformisi la suddetta espressio-

sione $\frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n-1}$, con ridurla al medesimo denominatore, ond' ella divenga, $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$, con sostituirvi per n i numeri naturali, si otterrà la serie $\frac{2}{2\times3}$, $\frac{2}{3\times4}$, $\frac{2}{4\times5}$, $\frac{2}{5\times6}$, $\frac{2}{6\times7}$ .... $\frac{2}{n\times n+1}$

297. Dato il termine generale per trovar la somma si richiede il calcolo Integrale.

In molti casi però può esser utile la soluzione seguente, che richiede integrazione, e che, sebbene particolare, è però di un uso assai esteso.

298. *Probl.* Dato il Termine generale espresso per la formola, $an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + dn^{m-3}$ &c. trovar la somma generale della serie, a cui esso appartiene.

Soluzione. Suppongasi $S = An^{m+1} + Bn^m$ .... $Cn^{m-1} + Dn^{m-2}$ &c. dove A, B, C &c. siano quantità da determinarsi, si avrà per il problema antecedente $S-s = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} +$ ec. $= An^{m+1} + Bn^{m+2} + Cn^{m-1} + Dn^{m-3}$ &c. $-$

$$\left(\begin{array}{l} An^{m+1} - A(m+1)n^m + A\frac{(m+1)m}{2}n^{m-1} - A\frac{(m+1)m(m-1)}{2.\ 3}n^{m-2} \text{ \&c.} \\ \qquad + Bn^m - Bmn^{m-1} + B\frac{m(m-1)}{2}n^{m-2} \text{ \&c.} \end{array}\right.$$

$$-\left(\begin{array}{l} \qquad\qquad + Cn^{m-1} - C(m-1)n^{m-2} \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\quad + Dn^{m-2} \end{array}\right.$$

$$= A(m+1)n^m - \frac{1}{2}Am(m+1)n^{m-1} + \frac{1}{2}A\frac{(m+1)m(m-1)}{2,\ 3}n^{m-2} \text{ \&c.}$$

$$+ Bmn^{m-1} - \frac{1}{2}Bm(m-1)n^{m-2} \text{ \&c.}$$

$$+ C(m-1)n^{m-2} \text{ \&c.}$$

Fac-

Facciasi eguale a zero ciascuna colonna verticale, e si avrà $A = \frac{a}{m+1}$; $B = \frac{1}{2}a + \frac{b}{m}$; $C = $......

$\left(\frac{c}{m-1} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{12}am\right) n^{m-1}$ &c.

Esempio. Sia la serie $1^m, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m$ &c. n^m il termine generale essendo n^m, b, c, d &c. sono eguali a zero; quindi $S = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{12}mn^{m-1}$ &c. dove n indica manifestamente il numero de' termini, di cui è composta la serie.

Se $m=1$, la somma della serie $1, 2, 3, 4.$ &c. n risulta $S = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$; se $m=2$ la somma della serie $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ &c. n^2, risulta $S = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2$..... $+ \frac{1}{6}n$, come sopra (n. [illegible]) e così dell'altra serie.

Se fosse $n = \infty$ svanirebbero tutte le potenze n^m, n^{m-1} &c. in paragone di n^{m+1}, e la somma S diverrebbe $= \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$.

299. La formola generale di S, vale ancora, come si vede, per il caso di m fratto, cosicchè se m sia $= \frac{p}{q}$, si avrà la somma della serie $1^{\frac{p}{q}}$, $2^{\frac{p}{q}}$, $3^{\frac{p}{q}}$, $4^{\frac{p}{q}}$, $5^{\frac{p}{q}}$ .... $n^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p+q}n^{\frac{p+q}{q}}$.... $+ \frac{1}{2}n^{\frac{p}{q}} + \frac{1}{12}\frac{p}{q}n^{\frac{p-q}{q}}$ &c. somma, che nel ca-

so-

so di $n=\infty$ diviene $=\frac{q}{p+q}\cdot\infty\frac{p+q}{q}$.

300. *Scol.* Nella formola esposta (*n.* 309.) si contiene la soluzione del seguente

Probl. Trovar la somma di un numero qualunque di termini in progressione arimmetica naturale, ciascuno essendo elevato ad una medesima potenza qualunque. Questo problema però si può sciogliere anche nella maniera seguente.

Sia la progressione arimmetica qualunque a, b, c, d, e, f, g ... ω. Siccome i numeri naturali differiscono di un'unità, dovrà essere, $\omega=g+1$, $g=f+1$, $f=e+1$ &c. quindi $\omega^m=g^m+mg^{m-1}+m\frac{(m-1)}{2}g^{m-2}+$ &c. : $g^m=f^m+mf^{m-1}+m\frac{(m-1)}{2}f^{m-2}$ &c... $f^m=e^m+me^{m-1}+m\frac{(m-1)}{2}e^{m-2}$ &c. onde facendo le sostituzioni ne deriva

$$\omega^m=a^m+m(g^{m-1}+f^{m-1}+e^{m-1}+d^{m-1}+c^{m-1}+b^{m-1}+a^{m-1})$$
$$+\frac{m(m-1)}{2}(g^{m-2}+f^{m-2}+e^{m-2}+d^{m-2}+c^{m-2}\text{ \&c.})$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}(g^{m-3}+f^{m-3}+e^{m-3}+d^{m-3}\text{ \&c.})$$

espressione, che fatta S eguale alla somma di tutti i termini, risulta dalla forma

$$\omega^m=a^m+m(S^{m-1}-\omega^{m-1})+\frac{m(m-1)}{2}(S^{m-2}-\omega^{m-2})$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}(S^{m-3}-\omega^{m-3})+\text{\&c.}$$

di dove, se $m=2$ si avrà S, se $m=3$, si avrà S^2 con sostituirvi il valore di S ottenuto nel caso di $m=2$, e così &c.

 Ecco

Eccone le formole per esteso:

301. Volendosi la somma semplice delle quantità a. b, c, d .... ω si deve porre $m=2$, e con ciò si ha $\omega^2=a^2+2(S-\omega)+\omega-a$, perchè $S^{m-2}-\omega^{m-2}=S-\omega$, e $g^{m-2}+f^{m-2}+e^{m-2}+d^{m-2}+c^{m-2}+b^{m-2}+a^{m-2}=1+1+1+1+1+1=\omega-a$. Volendosi la somma dei quadrati di ciascuna delle sudette quantità si avrà $m=3$, e nella formola $\omega^3=a^3+3(S^2-\omega^2)+3(S-\omega)+\omega-a$, si sostituirà il valore di S, trovato di sopra, e si avrà $\omega^3=a^3+3S^2-\frac{3}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\omega-\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}a$, di dove si deduce $S^2=\frac{1}{3}\omega^3+\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{6}\omega-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}a$, e se questo valore si sostituisca insieme con quello di S nella formola, che si ha con porre $m=4$, si otterrà $S^3=\frac{1}{4}\omega^4+\frac{1}{2}\omega^3+\frac{1}{4}\omega^2-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{4}a^2$, e così in seguito, d'onde si vede, che dato il primo, e l'ultimo termine di una serie arimmetica, si può sempre trovar la somma delle potenze n.sime di ciascun termine.

302. I numeri figurati, ed i numeri poligoni si riferiscono alle serie algebraiche, e perciò si applicano ad essi le Teorie già esposte: è necessario però, che ne diamo qualche nozione particolare.

303. La serie delle unità 1, 1, 1, 1 &c. dicesi serie dei numeri figurati di prim'ordine.

Le serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4 &c. ... n dicesi la serie dei numeri figurati di second'ordine.

Se in questa serie prendasi la somma dei termini suc-

successivamente, onde si abbia, $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4$ &c. ... $1+2+3+$ &c. $+n$, si avrà la serie dei numeri figurati di 3.° ordine, o sia la serie dei numeri triangolari, 1, 3, 6, 10. &c.

Prese le medesime somme dei termini di quest' ultima serie si ottiene la serie dei numeri figurati di 4.° ordine, o sia dei numeri piramidali 1, 4, 10, 20 &c., e così in seguito la serie dei numeri Triangolo-piramidali &c.

Ecco il prospetto di tutte queste serie.

Prim'ordine	1, 1, 1, 1, 1, &c.	Numeri costanti
2.° ordine	1, 2, 3, 4, 5, &c. n	Naturali
3.° ordine	1, 3, 6, 10, 15, &c.	triangolari
4.° ordine	1, 4, 10, 20, &c.	piramidali
5.° ordine	1, 5, 15, 35, &c.	triangolo-piramidali

&c. &c.

304. *Scol.* I numeri figurati si possono ottenere anche in un'altra facil maniera. Si dispongano i coefficienti delle successive potenze di un binomio nel modo, che segue

1 . 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
&c. &c.

La prima colonna verticale sarà quella dei numeri costanti, la 2.ª quello dei numeri naturali, la 3.ª quella dei numeri triangolari, la 4.ª quella dei numeri piramidali &c. La suddetta serie di cifre è ciò, che dicesi triangolo arimmetico. Di esso ha fatto un trattato il dottissimo M. Paschal.

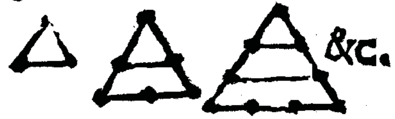
305. I numeri poligoni hanno un'origine poco differente. Essi risultano dalla somma dei termini consecutivi di progressioni arimmetiche, che cominciano da 1, come abbiamo veduto avvenire dei numeri figurati, e questi numeri si chiamano triangolari, quadrati, pentagoni, esagoni &c. secondo, che la differenza della progressione generatrice è 1, 2, 3, 4 &c.

Eccone la generazione in esteso.

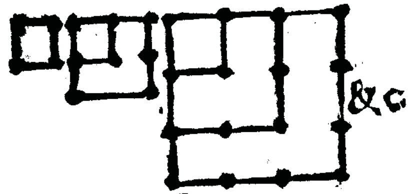
Progress. arimm. generanti,	Num. poligoni generati
1, 2, 3, 4 &c. diff.ª 1	1, 3, 6, 10 &c. Nu. triangolari
1, 3, 5, 7 &c. diff.ª 2	1, 4, 9, 16, 25 &c. Num. quadrati
1, 4, 7, 10 &c. diff.ª 3	1, 5, 12, 22, 35 &c. pentagoni
1, 5, 9, 13 &c. diff.ª 4	1, 6, 15, 28, 45 &c. esagoni

&c. &c.

Questi numeri diconsi poligoni, perchè le unità di ciascun loro termine si possono disporre in forma triangolare, quadrata, pentagona, esagona &c. Difatto i numeri triangolari si possono disporre nella forma seguente



I quadrati nella forma



I pentagoni nella forma

306. Osservando adesso le serie trovate dei numeri poligoni, si deduce una facil maniera di trovar ciascuna serie senza saper la serie generatrice. Difatto si vede, che il 2.° termine dei numeri triangolari è $=3$, e che il secondo termine dei numeri quadrati è $=4$, il secondo de' pentagoni $=5$, ed in generale, che il secondo degli m.goni $=m$. Oltre di questo si vede, che il 3.° dei numeri triangolari è = al 2.° termine moltiplicato per 2., che il 3.° de' quadrati è = al 2.° moltiplicato per 2 più 1; che il 3.° dei pentagoni è = al 2.° moltiplicato per 2 più 2; che il 3. degli esagoni è = al 2.° moltiplicato per 2 più 3, ed in generale, che il 3.° degli m.goni è = al 2.° moltiplicato per 2 più $m-3$. Di qui pertanto si raccoglie, che si posson trovar sempre i trè primi termini di una serie qualunque di numeri poligoni: mà dai primi trè termini di una serie di questo genere si conosce la legge, con cui progredisce; dunque indipendentemente dalla serie generatrice si può &c.

307. Delle due funzioni T, S, appartenenti ai numeri figurati, o poligoni, datane una, si può sempre trovar l'altra per i metodi esposti per le serie algebriche, poichè le serie dei numeri figurati sono serie algebriche di un'ordine marcato dal numero, che rappresenta l'ordine stesso della serie, diminuito di un'unità, e le serie poligone sono serie algebriche di second' ordine, in cui la differenza costante è uguale al numero, che esprime i lati del poligono, a cui si riferiscono, meno due.

SEZIONE II.

Delle serie geometriche.

308. Una serie geometrica qualunque si sa, che può rappresentarsi per AK; AK^2; AK^3; $AK^4 \ldots AK^n$, o più laconicamente per AK^n.

309. Queste serie, come le serie arimmetiche, si distinguono in diversi ordini: tali ordini poi risultano dalla somma, o dalla sottrazione ordinata dei termini di più serie geometriche, cosicchè l'ordine dicesi m.simo, se le serie, la di cui addizione, o sottrazione forma la serie data, sieno di numero m.

Quindi una serie geometrica di second' ordine si rappresenta per la formola $AK^n \pm BH^n$; una serie geometrica di 3.° ordine per la formola $AK^n \pm BH^n \pm CI^n$, e così in seguito.

310. La somma delle serie geometriche dicesi esponenziale, perchè nella formola, che le rappresenta, la lettera n ch'esprime il numero dei termini, tiene il luogo di esponente.

311. Serie algebrico=geometrica è la serie, che risulta dal prodotto di una serie algebrica $A+Bn+Cn^2$ &c. $+Kn^m$ per una serie geometrica.

312. *Teor.* Le serie geometriche di qualunque ordine sono serie ricorrenti del medesim' ordine.

Dimostrazione. Per rapporto alle serie di prim' ordine si vede subito, che qualunque termine moltiplicato per K produce il termine susseguente.

Per le serie di 2.° ordine, sia un termine qualunque espresso per $AK^n \pm BH^n$; il termine antecedente sarà $AK^{n-1} \pm BH^{n-1}$, ed il termine antecedente anche a questo, sarà $AK^{n-2} \pm BH^{n-2}$. Il primo AK^{n-1} $\pm BH^{n-1}$,

$\pm BH^{n-1}$, si moltiplichi per $K+H$, ed il 2.° AK^{n-2} $\pm BH^{n-2}$ si moltiplichi per $-KH$, e la somma dei prodotti sarà $= AK^n \pm BH^n$.

Per le serie di 3.° ordine sia un termine qualunque $AK^n \pm BH^n \pm CI^n$; i termini, che lo precedono, si moltiplichino, come segue

$(AK^{n-1} \pm BH^{n-1} \pm CI^{n-1}) \times (K+H+I)$;
$(AK^{n-2} \pm BH^{n-2} \pm CI^{n-2}) \times -(KH+KI+HI)$;
$(AK^{n-3} \pm BH^{n-3} \pm CI^{n-3}) \times KHI$, si sommino questi prodotti; e si avrà $AK^n \pm BH^n \pm CI^n$.

Egualmente riguardo alle serie di 4.° ordine, qualunque lor termine risulterà dalla somma dei quattro precedenti, l'ultimo de' quali sia moltiplicato per $K+H+I+L$, il penultimo per .... $-(KH+KI+KL+HI+HL+IL+)$ l'antepenultimo per $KHI+KHL+HIL$, e finalmente quello, che precede l'antepenultimo per $-KHIL$.

Lo stesso vale per le serie degli ordini superiori, onde si può concludere generalmente &c. &c.

313. Osservando adesso il modo, con cui ciascun termine risulta dai precedenti si può concludere in generale, che in una serie geometrica dell'ordine n.simo qualunque termine risulta dagli n termini, che lo procedono in questa guisa, che gli ultimi di essi, cominciando sempre di fondo, sia moltiplicato per un numero n di quantità date K, H, I, L &c. il penultimo sia moltiplicato per la somma dei prodotti delle medesime quantità combinate a due a due; l'antepenultimo per la somma dei prodotti delle suddette quantità combinate à tre a tre, e così &c. con l'alternazione dei segni.

314. *Probl.* Trovar le formole del termine; e della somma generale di qualunque serie geometrica.

Soluzione. Dato il primo termine a, il numero dei termini n, e il denominatore m, si vide (*n.*275.) esser $T=am^{n-1}$, con altre tre formole, che possono esser d'uso anche esse nella pratica.

Ivi si trovò pure frà le altre formole $S=\frac{a}{m-1}(m^n-1)$ se $m>1$, cioè se la serie sia crescente; poichè nel caso contrario si ha $S=\frac{a}{1-m}(1-m^n)$.

Qualora il denominatore della serie sia negativo, e che perciò i termini procedano con segni alternativi, ambedue le sudette formole potranno servire per ottenere la somma, come si può verificare facilmente. Se vogliasi, per esempio, la somma della serie $1-2+4-8+16-32$ &c. fino al quarto termine inclusivamente, si avrà dalla prima formola $S=\frac{1}{-3}(16-1)=-5$, e dalla 2.ª $S=\frac{1}{3}(1-16)=-5$. Non è dunque vero ciò, che asserisce il Signor Dottor Tommasini (*Introd. in Alg. Tomo* 2. §. 733), cioè che, se il primo termine sia positivo, si deve adoprare la formola delle serie decrescenti, e se sia negativo quella delle serie crescenti.

315. *Scol.* Delle serie geometriche degli ordini superiori al primo, siccome nascono dalla somma, o dalla differenza ordinata di serie geometriche di prim' ordine, i loro termini generali, non meno che le somme si ottengono con prender le somme, o le differenze dei termini, e delle somme generali delle serie componenti. Così se sieno A, B, C, D &c. serie geometriche di prim' ordine, e la serie proposta risulti da esse nel modo seguente, cioè con

fare $A+B+C-D$, il termine generale di questa serie sarà eguale alla somma dei termini generali delle serie A, B, C, meno il termine generale della serie D; il che si deve intendere anche delle somme.

Esempio. Sia una serie, che risulti dalla somma delle due $\frac{b}{c}, \frac{b^2}{c^2}, \frac{b^3}{c^3}, \frac{b^4}{c^4}$, &c., $\frac{e}{f}, \frac{e}{fg}, \frac{e}{fg^2}, \frac{e}{fg^3}$ &c.: il di lei termine generale sarà $\frac{b^n}{c^n} + \frac{e}{fg^{n-1}}$, e la somma sarà $\frac{b}{b-c}\left(\frac{b^n-c^n}{c^n}\right)+\frac{eg}{f(1-g)}\left(\frac{1-g^n}{g^n}\right)$.

316. È facile a vedersi, che se la serie suppongasi prodotta all' infinito, la somma generale deve divenire $=-\frac{b}{b-c}+\frac{eg}{f(g-1)}$, perchè essendo $\frac{b}{c}$ una frazione genuina, $\frac{b^\infty}{c^\infty}=0$, e $\frac{c^\infty}{c^\infty}=1$.

317. Nel modo stesso potrà vedersi, che data essendo la serie $\frac{5}{2}, \frac{39}{4}, \frac{271}{8}$ &c. generata da $A+B-C$ come segue

$$\begin{array}{l} 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162 \text{ \&c. } (A) + \\ 1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 256 \text{ \&c. } (B) - \\ \hline \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32} \text{ \&c. } - (C) \end{array}$$

ella deve avere il termine generale ....

$T=$ $^{n-1}$

$T=2\,3^{n-1}+4^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, e la somma generale

$S=(3^n-1)+\frac{1}{3}(4^n-1)-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n=3^n+\frac{1}{3}4^n-\frac{7}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

318. *Probl.* Dato il Termine generale di una serie geometrica, trovarne la somma generale,

Soluzione. Nel termine generale proposto si ponga $n=1$, e si avrà il primo termine, cioè p; si ponga quindi $n=2$; il risultato si divida per p già trovato, ed il quoziente sarà $=m$; sostituiscansi questi valori in $S=\frac{p}{m-1}(m^n-1)$ e si avrà la somma richiesta.

Sia per esempio. $T=\frac{4^{3n-1}}{2^{2n+1}}$; fatto $n=1$, si ha $T=2=p$; fatto $n=2$, $T=32$; quindi $m=\frac{32}{2}=16$, ed $S=\frac{2}{15}(16^n-1)$.

319. *Probl.* Data la somma generale trovare il termine generale. *Soluzione*. Si ponga $n-1$ per n la differenza $S-s$ sarà $=T$, come nelle serie algebriche.

SEZIONE III.

Delle serie Algebrico-Geometriche.

320. Venendo adesso alle serie Algebrico-geometriche si debbono in esse distinguere diversi ordini; al primo si debbon riferire quelle, che risultano dal prodotto di una serie geometrica espressa per K^n in una quantità costante A; al second' ordine quelle, che risultano dal prodotto di una serie geometrica in una serie algebrica di prim' ordi-

ordine; al terzo quelle, che risultano dal prodotto di una serie geometrica in una serie algebrica di second'ordine, e così in seguito. Posto questo sia

321. *Probl.* Trovare la formola indeterminata esprimente il termine generale di una serie algebrico-geometrica di qualunque ordine.

Soluzione. Siccome in queste serie ciascun termine altro non è, che il prodotto dei due termini corrispondenti delle serie componenti, si vede, che il termine generale, che gli appartiene, deve esser eguale al prodotto dei termini generali delle medesime serie componenti. Quindi sarà generalmente $T = \left(a + (n-1)\,b + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}\,c \text{ \&c.}\right) pm^{n-1}$.

322. *Probl.* Dato il termine generale di una serie algebrico-geometrica qualunque, trovarne la somma generale.

Soluzione. Pongasi la somma generale cercata eguale alla formola $S = (\mathcal{A} + Bn + Cn^2 + Dn^3 \text{ \&c.} + In^m)\,K^n - \mathcal{A}$, dove si pone K^n, perchè a motivo della serie geometrica si richiede una quantità potenziale in n, e si pone $\mathcal{A}$, perchè nel caso di $n=0$, la formola possa svanire totalmente, come si richiede: per riguardo poi alla forma $\mathcal{A} + Bn + Cn^2 + Dn^3 \text{ \&c.} + In^m$ si vedrà, che ella è legittima, ed opportuna.

Posto questo si ponga in $S\ n-1$ invece di n; si tolga il risultato s dal valore di S, e la differenza $S-s=T$ si eguagli al termine generale indeterminato $\left(a + (n-1)\,b + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}\,c \text{ \&c.},\right) pm^{n-1}$, pigliando in esso tanti termini $a + (n-1)\,b + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,c$ &c. finchè la potenza di n giunga al grado m.simo, ed eguagliando insieme partitamente i termini affetti dalla medesima potenza di n. Con questo si avranno tant' equazioni di primo grado, quante sono le indeterminate $\mathcal{A}$, B, C, &c. e perciò tutte si determineranno. Applichiamo la Teoria alla pratica, cominciando dalle serie algebrico-geometriche di second'ordine.

Il termine generale dato sarà $(a + \overline{n-1}\,b)\,pm^{n-1}$; la somma corrispondente pongasi $(\mathcal{A} + Bn)\,K^n - \mathcal{A}$. Fatta l'operazione indicata si avrà... $S - s = (\mathcal{A}(K-1) + B + \overline{K-1}\,Bn)\,K^{n-1}$ Quindi $Bn\,(K-1) = bpn$, e $B = \frac{bp}{K-1}$; $\mathcal{A}(K-1) + B = ap - bp$, ed $\mathcal{A} = \frac{ap - bp}{K-1} - \frac{bp}{(K-1)^2} = \frac{ap\,(K-1) - bpK}{(K-1)^2}$, $K^{n-1} = m^{n-1}$, o sia $K = m$, e finalmente $S = \left(\frac{ap\,(m-1) - bmp}{(m-1)^2} + \frac{bpn}{m-1}\right) m^n - ap\,\frac{(m-1) + bmp}{(m-1)^2}$ dove a rappresenta il primo termine della serie algebrica, b la prima differenza costante, p il primo termine della serie geometrica, ed m la ragione della medesima.

Esempio. Data la serie algebrico-geometrica .... 2, 20, 128, 740, 3584 &c. risultante dalle due .... 2, 5, 8, 11, &c. 1, 4. 16, 64 &c. sostituendo nelle formole trovate $a = 2$, $b = 3$, $m = 4$, si ottiene ....

$T = (2 + 3(n-1)\,4^{n-1}$, ed $S = \left(-\frac{2}{3} + n\right) 4^n + \frac{2}{3}$.

Venghiamo alle serie algebrico-geometriche di terz' or-

ordine. Di queste il termine generale dato sarà ...

$$T=\left(a+(n-1)\,b+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\,c\right)pm^{n-1}$$; pongasi la somma $S=(\mathcal{A}+Bn+Cn^2)K^n-\mathcal{A}$; fatta l' operazione come sopra si avrà $S-s$; e quindi $K=m$, $C=\frac{cp}{2(m-1)}$, $B=\frac{2bp(m-1)-cp(3m-1)}{2(m-1)^2}$, ed $\mathcal{A}=$ ......

$$\frac{2ap(m-1)^2-2bp(m-1)+2cpm^2}{2(m-1)^3}$$, e perci

$$S=\left(\frac{2ap(m-1)^2-2bp(m-1)+2cpm^2+}{2(m-1)^3}\right.\left.\frac{2bp(m-1)-cp(3m-1)n}{2(m-1)^2}+\frac{cpn^2}{2(m-1)}\right)m^n-\frac{(2ap(m-1)^2-2bp(m-1)+2cpm^2)}{2(m-1)^3}$$

Esempio. Data la serie $\frac{3\cdot 2}{2}$, $\frac{9\cdot 3}{2}$, $\frac{18\cdot 9}{2\cdot 2}$, $\frac{30\cdot 27}{2\cdot 4}$, $\frac{45\cdot 81}{2\cdot 8}$ &c. risultante dal prodotto ordinato della serie algebrica di second'ordine $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{18}{2}$, $\frac{30}{2}$ nella serie geometrica $2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \frac{81}{8}$ &c. siccome vien data, $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{6}{2}$, $c=\frac{3}{2}$, $p=2$, $m=\frac{3}{2}$ si avrà $T=(n+n^2)\left(\frac{3}{2}\right)^n$, ed $S=(24-9n+3n^2)\left(\frac{3}{2}\right)^n-24$; Con questo stesso metodo, si po-

potrà dedurre la somma del termine generale, qualunque sia l'ordine della serie data. Per trovare il termine generale data la somma, si vede come si debba procedere.

323. *Scol.* Se abbiasi la serie fratta generale .. $\frac{a}{b}$, $\frac{a\pm d}{bq}$, $\frac{a\pm 2d}{bq^2}$, $\frac{a\pm 3d}{bq^3}$, $\frac{a\pm 4d}{bq^4}$, &c. $\frac{a\pm nd}{bq^n}$ se ne potrà ottenere la somma per il metodo esposto, altro non ricercandosi, che sostituire d à b, $\frac{1}{b}$ à p, ed $\frac{1}{q}$ ad m: con questo si avrà ...

$$S=\left(\frac{aq(1-q)-dq}{b(1-q)^2}+\frac{qdn}{b(1-q)}\right)\frac{1}{q^n}-\frac{aq(1-q)-dq}{b(1-q)^2}$$

Ecco pertanto, che non è necessario ricorrere ad altri metodi particolari, come si usa.

SEZIONE IV.

Delle serie fratte Algebrico-Composte.

324. Se abbiasi una serie fratta, nella quale i numeratori formino una serie algebrica, e i denominatori sieno i successivi prodotti, che risultano dal moltiplicare ordinatamente un numero qualunque di serie algebriche, una tal serie dicesi Algegrico-Composta.

Due sono i problemi di somma importanza, che si posson proporre intorno a queste serie; il primo è

325. *Probl.* Data la somma generale di una serie fratta Algebrico-Composta, trovarne il termine generale.

Soluzione. Suppongasi, che la somma data sia *Ln*

$\frac{Ln}{M+Pn}$ (questa è la forma più semplice, che si possa supporre: qualora da essa non derivasse una serie della natura, che cerchiamo, si prenderebe una formola diversa). Posto $n-1$ in luogo di n, si trova

$$T=S-s=\frac{Ln}{M+Pn}-\frac{L(n-1)}{M+P(n-1)}=\frac{ML}{M+P(n-1)(M+Pn)},$$

che è appunto il termine generale di una serie, di cui trattiamo, e che si può chiamare di prim'ordine. Sia $S=\frac{L+Nn}{(M+P(n-1))(M+Pn)}$. Fatta la sostituzione di $n-1$ per n si ottiene $\frac{L(n-1)+N(n-1)^2}{(M+P)(n-2))(M+P(n-1))}$ e perciò.

$$T=\frac{\begin{matrix}ML-PLn\\ MN-PNn\\ +2MNn\end{matrix}}{(M+P(n-2))(M+P(n-1))(M+Pn)}$$

Con egual facilità si trovano i termini generali delle serie, delle quali le somme generali sieno

$$\frac{Ln+Nn^2+Qn^3}{(M+P(n-2))(M+P(n-1))(M+Pn)}$$

$$\frac{Ln+Nn^2+Qr^3+Rn^4}{(M+P(n-3))(M+P(n-2))(M+P(n-1))(M+Pn)}\ \text{\&c.}$$

326. Qualora le serie componenti il denominatore dovessero esser di second'ordine, si farebbe la somma generale $=\frac{Ln+Nn^2}{M+Pn+Sn^2}$; Sostituito infatti $n-1$ in vece di n, si deduce $T=S-s$ ....

$$=\frac{\begin{matrix}ML+2MNn+PMn^2\\ -MN-PNn-SLn^2\end{matrix}}{(M+P(n-1)+S(n-1)^2)(M+Pn+Sn^2)}\quad \text{e così delle altre.}$$

327. *Probl.* 2. Esprimere il termine, e la somma generale di una serie fratta Algebrico-Composta per i termini, e per le differenze delle serie algebriche componenti.

I.° *Soluzione*. Cominciando dalle serie di prim' ordine supponghasi, che le serie componenti il denominatore del loro Termine generale .... $\frac{ML}{(M+P(n-1))(M+Pn)}$ sieno a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ &c. $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ &c. cosicchè la seconda, la quale nasce dalla formola $M+Pn$ incominci dal secondo termine della prima.

Per determinare M, P per a, e b, si ponga $n=1$ nella formola $M+P(n-1)$, e fatto il paragone col primo termine della serie corrispondente, si trova $M=a$; si ponga $n=2$, e si faccia il paragone col secondo termine della serie stessa; si avrà $P=a+b-M=b$; facciasi la costante $ML=c$, e il termine generale diverrà $\frac{c}{(a+(n-1)b)(a+bn)}$, e la somma generale $\frac{Ln}{M+Pn}$, a motivo, che $L=\frac{c}{a}$, prenderà la forma: $\frac{cn}{a(a+bn)}$.

II. Passando alle serie di second'ordine osservo, che il numeratore del termine generale

ML-

$$\frac{\begin{array}{l}ML-PLn\\ -MN-PNn\\ +2MNn\end{array}}{(M+P(n-2))\,(M+P(n-1))\,(M+Pn)}$$

essendo anch' esso Termine generale di una serie algebrica di prim' ordiue, qualora dicasi $\mathcal{A}$ il primo termine, e B la differenza della serie da esso rappresentata, si può metter sotto la forma $\mathcal{A}+(n-1)B$. Per determinare M, e P, suppongansi come sopra tre serie: a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ &c. $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ &c. $a+2b$, $a+3b$ &c., e nella formola $M+P\,(n-2)$ si faccia $n=1$, e poi $n=2$, e dell'equazioni $M-P=a$, $M=a+b$, si dedurrà $M=a+b$, e $P=b$, e perciò

$$T=\frac{\mathcal{A}+(n-1)\,B}{(a+b+(n-2)b)\,(a+b+(n-1)b)\,(a+b+bn)}$$

Rimane, che si esprima per le medesime quantità la somma generale $\dfrac{Ln+Nn^2}{(M+P(n-1))\,(M+Pn)}$.

A quest'effetto pongo $n=1$ tanto nella somma, quanto nel termine generale, onde aver l'equazione $\dfrac{L+N}{(a+b)\,(a+2b)}=\dfrac{\mathcal{A}}{a(a+b)\,(a+2b)}$; Da questa deduco $L+N=\dfrac{\mathcal{A}}{a}$; e per trovare un altra equazione fra L, N, e quantità date, pongo $n=2$ nella somma generale, e il risultato lo paragono colla somma dei due valori, che provengono dal sostituire $n=1$, ed $n=2$ nel termine generale: ottengo l' equazione $\dfrac{2L+4N}{(a+2b)\,(a+3b)}$ ....

$=\dfrac{a\times(\mathcal{A}+B)+B\,(a+3b)}{a(a+b)\,(a+2b)\,(a+3b)}$, o sia $L+2N$ ......

O $=a$-

$=\dfrac{a(\mathcal{A}+B)+B\,(a+3b)}{2a(a+b)}$. Da questa sottraggo l'equazione $L+N=\dfrac{\mathcal{A}}{a}$, e trovo $N=$.......

$$\frac{a(\mathcal{A}+B)+B(a+3b)}{2a(a+b)}-\frac{\mathcal{A}}{a}=\frac{\mathcal{A}\,(b-a)+a\,(\mathcal{A}+B)}{2a(a+b)}$$

Trovato N, deduco $L=\dfrac{\mathcal{A}}{a}-N=$ ....

$\dfrac{\mathcal{A}(3a+b)-a(\mathcal{A}+B)}{2a(a+b)}$.

Avendo così i valori di M, P, L, N, mediante la sostituzione si ottiene finalmente $S=$...................

$$\frac{(\mathcal{A}(3a+b)-a(\mathcal{A}+B))\,n\,(\mathcal{A}\,(b-a)+a(\mathcal{A}+B))\,n^2}{2a(a+b)\,(a+b\,(n-1)\,b)\,(a+b+bn)}$$

III. Volendo ridurre in egual maniera il Termine, e la somma generale di una serie di terz' ordine si troverebbe

$$T=\frac{\mathcal{A}+\dfrac{(n-1)}{1}B+\dfrac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}C}{(a+2b+(n-3)b)(a+2b+(n-2)b)(a+2b+(n-1)b)(a+2b+bn}$$

ed $S=(a^2(6\mathcal{A}-3B+2C)+ab(12\mathcal{A}-4B+2C+4b^2\mathcal{A})\times n)$

$+(3a^2(B-C)+3ab(2\mathcal{A}+B-C)+6bc)n^2+$.........

$+(a^2C+ab(B+C)+2b^2\mathcal{A})n^3)$:

$(6a(a+b)\,(a+2b)\,(a+2b)+(n-2)\,b)\times$ ....

$(a+2b+(n-1)b)\,(a+2b+bn))$.

IV. Passiamo alle serie di prim'ordine, in cui le serie componenti sono di second'ordine.

Siccome nel Termine generale

$T=$

$$T=\frac{\begin{array}{l}ML+2MNn+PNn^2\\ -MN-PNn-SLn^2\end{array}}{(M+P(n-1)+S(n-1)^2)(M+Pn+Sn^2)}$$

il numeratore è il termine generale di una serie algebrica di second'ordine, se dicasi p il primo termine di una tal serie, q la prima differenza, ed r la differenza seconda, detto numeratore potrà mettersi sotto la forma $p+\frac{(n-1)}{1}q+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}r$

Venendo al denominatore, siccome esso è il prodotto dei termini generali di due serie algebriche di second'ordine, chiamando a il primo termine della prima serie, b la prima differenza, e c la differenza seconda, come pure chiamando d il primo termine della seconda serie, e la prima differenza, ed f la differenza seconda, è manifesto, che il denominatore accennato potrà ridursi alla forma ...

$$\left(a+b\frac{(n-1)}{1}+c\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\right)\times\ldots\ldots$$

$$\left(d+e\frac{(n-1)}{1}+f\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\right)$$ Dunque si ha finalmente il termine generale

$$T=\frac{p+\frac{(n-1)}{1}q+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}r}{\left(a+\frac{(n-1)}{1}b+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}c\right)\left(d+\frac{(n-1)}{1}e+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}f\right)}.$$

Per esprimere adesso per le medesime lettere la somma generale $\frac{Ln+Nn^2}{M+Pn+Sn^2}$ ……………

$$=\frac{Ln+Nn^2}{d+\frac{(n-1)}{1}e+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}f}$$ pongo $n=1$, ed ho $S=\frac{L+N}{d}$; faccio quindi $n=1$ nel Termine generale, ed ottengo l'equazione $\frac{L+N}{d}=\frac{p}{a}$. Ottenuta questa, faccio in S $n=2$ ed ho $S=\frac{2L+4N}{d+e}$, che paragono colla somma dei due primi termini della serie, dedotti dal Termine generale con porre $n=1$, $n=2$, e che è $\frac{p}{ad}+\frac{p+q}{(a+b)(d+e)}$

$$=\frac{p(a+b)(d+e)+ad(p+q)}{ad(a+b)(d+e)}$$ Trovo $L+2N$

$$=\frac{p(a+b)(d+e)+ad(p+q)}{2ad(a+b)},$$ onde inferisco $N=\frac{p(a+b)(d+e)+ad(p+q)}{2ad(a+b)}-\frac{p}{a}=\ldots$

$$\frac{p(a+b)(d+e)+ad(p+q)-2pd(a+b)}{2ad(a+b)},$$

e perciò trovo finalmente L ……………………

$$=\frac{4pd(a+b)-p(a+b)(d+e)-ad(p+q)}{2ad(a+b)}$$

Sostituisco adesso l'espressioni trovate nella somma, ed ho

$$S=\frac{\begin{array}{l}(4pd(a+b)-p(a+b)(d+e)-ad(p+q))\,n+\\ (p(a+b)(d+e)+ad(p+q)-2pd(a+b))\,n^2\end{array}}{2ad(a+b)\left(d+\frac{(n-1)}{1}e+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}f\right)}$$

Con un Metodo analogo a questo si trovan l' espressioni del termine, e della somma generale delle serie fratte Algebrico-Composte, nelle quali le serie componenti del denominatore sieno di un'ordine più elevato; e nelle quali il numeratore sia qualunque.

Esempio. Si debba trovare il termine, e la somma generale della serie $\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13}$, ... $\frac{7}{7\cdot 10\cdot 13\cdot 16}$, $\frac{17}{10\cdot 13\cdot 16\cdot 19}$, $\frac{31}{13\cdot 16\cdot 19\cdot 22}$, &c. che avendo i denominatori composti di quattro termini si riduce al Num.° (III), e perciò si ha il primo termine $A=1$, la prima differenza $B=6$, e la seconda $C=4$; Il primo termine della prima serie del denominatore è $a=4$, e la differenza comune delle quattro serie componenti è $b=3$. Sostituiscansi questi valori, e si avrà ....

$$T=\frac{1+6\frac{(n-1)}{1}+4\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}}{(10+3(n-3))(10+3(n-2))(10+3(n-1))(10+3n)}\text{, ed}$$

$$S=\frac{-76n+294n^2+202n^3}{1680(10+3(n-2))\;(10+3(n-1))(10+3n)}$$

$$=\frac{\frac{-19}{420}\cdot n+\frac{7\cdot}{40}n^2+\frac{101\cdot}{840}\cdot n^3}{(4+3n)(7+3n)(10+3n)}$$

Esempio. 2. Si voglia il termine, e la somma generale della serie $\frac{1}{2^2\cdot 5^2}$, $\frac{3}{5^2\cdot 8^2}$, $\frac{5}{8^2\cdot 11^2}$, ...

$\frac{7}{11^2\cdot 14^2}$, $\frac{9}{14^2\cdot 17^2}$ &c. che appartiene al Num.°(IV);

Fatte le sostituzioni si ha $p=1$, $q=2$, $r=0$. Inoltre, pigliando i termini della prima serie, 2^2, 5^2, 8^2, 11^2 &c. e le differenze, che ne nascono, si ha 4, 25, 64, 121, vale a dire $a=4$; $b=21$,

21, 39, 57

18, 18

$c=18$, e pigliando i termini della seconda serie colle loro differenze, si ha 5^2, 8^2, 11^2, 14^2, o sia 25, 64, 121, 196 &c., e perciò $d=25$, $e=39$

39, 57, 75 &c.

18, 18

Sostituiti questi valori nelle formole trovate al numero citato si ha

$$T=\frac{1+2(n-1)}{\left(4+21\frac{(n-1)}{1}+18\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\right)\left(25+39(n-1)+18\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\right)}$$

$$\text{ed } S=\frac{12n+13n^2}{100\left(25+39\frac{(n-1)}{1}+18\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\right)}$$

SEZIONE V.

Delle Serie Interrotte.

328. Interrompere una serie non è altro, che prendere in una serie data dei termini fra loro ugualmente distanti. I termini così presi formano una serie, che per rapporto alla prima, dicesi Interrotta.

Così pigliando nella serie 1, 2, 3, 4, 5 &c. .. (A) i ter-i termini primo, quinto, nono &c. si ha la serie interrotta 1, 5, 9, 13. &c. ...... (B).

329. La prima cosa, che si presenta da osservare in queste serie è, che in qualunque modo s'interrompa regolarmente una serie dell'ordine n, non si viene a mutar punto il suo ordine. Così, per esempio, se nella serie algebrica di prim'ordine a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$, $a+5b$, $a+6b$ &c. si prenda il primo, il quarto, il settimo &c. termine, si ha la serie a, $a+3b$, $a+6b$ &c., che è pure di prim'ordine; se prendasi il primo, terzo, quinto &c. termine si ha la serie a, $a+2b$, $a+4b$, $a+6b$ &c., che è di prim'ordine, e così in seguito per qualunque serie algebrica.

330. Prima di proceder più oltre, giova cercare una formola, che rappresesenti generalmente a qual posto della serie continuata corrisponda un determinato termine della medesima interrotta con una legge data.

331. Il numero di termini, che si omette successivamente dicasi β; Per avere il secondo termine della serie interrotta nella serie continuata, si dovrà prendere nella serie continuata il termine $(1+\beta+1)$: esimo $=(\beta+2)$: esimo; e perchè per avere il terzo termine della serie interrotta bisogna ometter di nuovo nella continuata un numero β di termini, perciò il terzo termine dev'essere il $(\beta+2+\beta+1)$: esimo o sià il $(2\beta+3)$: esimo della serie continuata. Per la stessa ragione il quarto termine dev'essere il $(3\beta+4)$: esimo, ed in generale, il termine m.simo della serie interrotta è l' $(\overline{m-1}\,.\,\beta+m)$esimo della serie continuata; Questo termine pongasi $=\mu$, e dall'equazione ......

$(\overline{m-1}\,.\beta+m)=\mu$, dato il posto di un termine qualunque in una serie interrotta con una data legge, si sa qual posto esso occupi nella serie continuata.

Se, per esempio, si voglia sapere, che termine sia nella serie (A) il termine quarto della serie (B), nella quale $\beta=3$ basta porre $m=4$ nell'equazione $(\overline{m-1}\,\beta+m)=\mu$, e si ha immediatamente $\mu=13$, cioè che il termine quarto della serie (B) è il decimo terzo della serie (A).

Viceversa, dato il posto di un termine nella serie continuata si può determinare qual termine egli sia nella serie interrotta, supposto che vi sia, e che sia data la legge dell'interruzione. Difatto, dall'equazione suddetta $(\overline{m-1}\,\beta+m)=\mu$. Si ha $m=\frac{\mu+\beta}{\beta+1}$.

Sia rischiesto, per esempio, che termine sia della serie (B) il termine nono della serie (A), fatto $\mu=9$, e $\beta=3$ si avrà $m=3$, cioè che esso è il terzo della serie (B).

Posto tutto questo, eccoci alla soluzione di due problemi, che si sogliono proporre intorno alle serie interrotte.

332. *Probl.* 1. Dato il termine generale di una serie qualunque, trovare il Termine generale della medesima, interrotta con una data legge.

Soluzione. Nel termine generale della serie data, si sostituisca $(m-1)\,.\beta+m$ in vece di m, ed il risultato sarà il Termine richiesto.

333. *Probl.* 2. Dato il Termine generale di una serie interrotta con una data legge, trovare il termine

mine generale della serie continuata.

Soluzione. Prendasi il Termine generale indeterminato, che appartiene all'ordine della data serie interrotta. Vi si sostituisca $(m-1)\beta+m$ in luogo di m; onde se ne abbia il termine generale di una serie interrotta espressa da β. Facciasi successivamente $m=1$, $=2$, $=3$ &c., e si paragoni il suddetto termine generale col primo termine, col secondo, col terzo &c. della serie interrotta, finchè si abbiano tant'equazioni quante sono le indeterminate del termine generale ipotetico, determinate queste si avrà il termine cercato. Sia data, per esempio, una serie interrotta di second' ordine; si prenda il termine generale corrispondente $a+bn+cn^2$ (n.302.); sostituito $(m-1)\beta+m$ in vece di n si ha $a+b\times\overline{(m-1)\beta+m}+c\times\overline{(m-1)\beta+m}^2$. Facciasi $m=1$, $=2$, $=3$ &c., e posto, per esempio, $\beta=4$ si avranno l'equazioni 1.ª $a+b+c=$ al 1.° termine della serie interrotta; 2.ª $a+6b+36c$ $=$ al 2.° termine 3.ª $a+11b+121c=$ al 3.° termine, dalle quali si ottiene il valore delle indeterminate a, b, c, e con ciò il termine generale cercato.

334. In questo problema si contiene il seguente: Data una serie Algebrica qualunque, inserire fra un termine, e l'altro un numero dato di medj, in guisa che l'ordine della serie proposta non venga mutato.

335. Trovato così il termine generale si può trovar facilmente la somma generale, perchè, come si vide (n.302.), in essa non vi sono altre indeterminate, che quelle, che hanno parte nel termine generale.

Resta da vedersi, in qual maniera, si possa render

der continuata una serie fratta Algebrico-Composta, che sia regolarmente interrotta.

336. Sia data la serie $\frac{1}{2.11}, \frac{1}{5.14}, \frac{1}{8.17}, \frac{1}{11.20}$ &c. siccome si sà, che il primo fattor 5 del secondo termine dev' essere il secondo fattore del denominatore del primo termine, come pure, che il primo fattore 8 del terzo termine dev'essere il terzo fattore del denominatore del primo termine, si vede, che nel denominatore del primo termine mancano i due fattori 5, 8; esso dunque dee ridursi alla forma $\frac{5.8}{2.5.8.11.}$. Per la stessa ragione il secondo termine dee ridursi alla forma $\frac{8.11}{5.8.11.14}$, e così degli altri, come segue $\frac{5.8}{2.5.8.11}$, $\frac{8.11}{5.8.11.14}$, $\frac{11.14}{8.11.14.17}$, $\frac{14.17}{11.14.17.20}$ &c. &c.

347. Ma supponiamo, che sia dato il termine generale di una di queste serie interrotte, e sia, per esempio, $\frac{\mathfrak{Q}}{(M+P(n-3))(M+Pn)}$. Siccome i fattori, che mancano nel denominatore sono $M+P(n-1)$, $M+P(n-2)$, si moltiplichi sotto, e sopra per il prodotto di questi fattori, ed il risultato
$$\frac{\mathfrak{Q}(M+P(n-1))(M+P(n-2))}{(M+P(n-3))(M+P(n-2))(M+P(n-1))(M+Pn)}$$
sarà il termine generale della serie continuata. Per render compite le serie, di cui trattiamo, convien dunque seguir la regola, che segue.

Re-

Regola. Qualora manchi uno, o più fattori intermedj nel denominatore del termine generale di una serie fratta Algebrico-Composta, si moltiplichi il numeratore, e il denominatore del medesimo per il prodotto dei fattori mancanti. Il termine generale trasformato somministrerà i termini della serie, composti di tutti i loro fattori.

SEZIONE VI.

Della maniera di sciogliere in serie le funzioni polinomie.

338. *Probl.* Si dimanda, come si possa ottenere l'evoluzione in serie di una funzione di x della forma $\frac{X}{Z}$, dove Z comprenda x, ed abbia per il meno due termini. *Soluzione*. *Met.* I. Facciasi $\frac{X}{Z} = \mathcal{A} + Bx + Cx^2$ &c., e sarà $X = Z(\mathcal{A} + Bx + Cx^2$ &c.$)$ Facciasi la moltiplicazione, e la trasposizione in un sol membro, e si avrà un'equazione a coefficienti indeterminati, che basterà verificarla, come riesca più comodo, a tenore di ciò, che si disse (*n.*81.)

339. *Scol.* X., e Z possono essere due serie qualunque, ordinate per x, ed il quoziente si otterrà egualmente. Si può dunque con questo metodo dividere facilmente una serie per un'altra. Questo soltanto deesi ossevare, cioè che il primo termine del denominatore Z sia costante, perchè altrimenti (appresso ne vedremo la ragione) il primo termine della serie potrebbe risultare infinito.

Per ottener questo basterà moltiplicare il numeratore della funzione proposta per il primo termine variabile, sviluppare in serie il risultato, e dividere poscia la serie ottenuta per il suddetto primo termine. Così, per esempio, se fosse data la funzione fratta $\frac{a + bx + cx^2}{x^m(1 + \alpha x + \beta x^2 \text{ \&c.}}$, e si dovesse svolgere in serie, si farebbe $\frac{a + bx + cx^2 \text{ \&c.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 \text{ \&c.}} = \mathcal{A} + Bx + Cx^2$ &c., e determinati i coefficienti si avrebbe $\frac{a + bx + cx^2 \text{ \&c.}}{x^m(1 + \alpha x + \beta x^2 \text{ \&c.}} = \frac{\mathcal{A}}{x^m} + \frac{B}{x^{m-1}} + \frac{C}{x^{m-2}}$.

340. *Probl.* Sciogliere in serie una funzione della forma $(a + bx + cx^2 \text{ \&c.})^m$, essendo m un numero intero, o fratto; Fatta l'equazione, come sopra, si formi la potenza m.sima di ambedue i membri; si faccia quindi il paragone dei termini omogenei, e si determineranno le quantità $\mathcal{A}, B, C$ &c.

341. *Scol.* Con questo metodo si formano le potenze, e si estraggono le radici dalle serie anche infinite. Qualora però i termini compresi sotto l'esponente sieno pochi, l'evoluzione in serie di queste funzioni, si ottiene con semplicità maggiore formando immediatamente la potenza intera, o fratta della funzione data a tenore della formola Newtoniana.

Venghiamo a degli esempj.

Sia da svolgersi in serie $\frac{a}{b + x}$, si avrà l'equazione $\frac{a}{b + x} = \mathcal{A} + Bx + Cx^2$ &c.; quindi $a = \ldots\ldots\ldots$

$$\begin{matrix} \mathcal{A}b + Bbx + Cbx^2 + Dbx^3 \\ + \mathcal{A}x + Bx^2 + Cx^3 \end{matrix} \text{ \&c. : trasponendo, e facen-}$$

cendo eguale a zero ciascuna colonna verticale di coefficienti dei termini omologi ; $\mathcal{A} = \frac{a}{b}$, $B = \frac{a}{b^2}$, $C = \frac{a}{b^3}$, $D = \frac{a}{b^4}$ &c. onde ..... $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^2}{b^4} +$ &c. serie , che si ottiene ancora per mezzo della divisione , e con moltiplicare a nella potenza $(b+x)^{-1}$.

342. Osservando adesso il valore di $\mathcal{A} = \frac{a}{b}$ si vede , che se fosse $b = 0$ sarebbe $\mathcal{A} = \frac{a}{0} = \infty$, il che se b fosse variabile potrebbe sempre avvenire : perciò si comprende la ragione per cui si è detto , che il primo termine del denominatore di una funzione fratta , da svolgersi in serie , non deve essser variabile .

Esempio 2.° Sia da svilupparsi in serie la funzione fratta $\frac{a+bx}{f+gx+hx^2}$; pongasi $a + bx = \ldots$

$$(f+gx+hx^2)(\mathcal{A}+Bx+Cx^2 \text{ \&c.}) =$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}f + Bfx + Cfx^2 + Dfx^3 \text{ \&c.} \\ &+\mathcal{A}gx + Bgx + Cgx^2 \text{\&c.} \\ &+\mathcal{A}hx^2 + Bhx^3 \text{\&c.} \end{aligned}$$

e si avrá dalle solite equazioni $\mathcal{A} = \frac{a}{f}$, $B = \frac{b}{f} - \frac{ag}{f^2}$ valori , che sostituiti nelle successive equazioni $Cf + Bg + \mathcal{A}h = 0$, $Df + Cg + Bh = 0$, $Ef + Dg + Ch = 0$ &c. fanno conoscere tutte le indeterminate rimanenti C, D , E &c.

In

In generale , se sia proposta la frazione ....

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \text{\&c.}}{1-\alpha x-\beta x^2-\gamma x^3-\delta x^4 \text{ \&c.}} = \mathcal{A}+Bx+Cx^2+Dx^3 \text{\&c.}$$

fatte al solito le comparazioni si avranno i coefficienti dalla serie seguente di equazioni ....

$\mathcal{A} = a$
$B = \alpha\mathcal{A} + b$
$C = \alpha B + \beta\mathcal{A} + c$
$D = \alpha C + \beta B + \gamma\mathcal{A} + d$
$E = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta\mathcal{A} + e$, le quali tosto che sieno terminati i coefficienti del numeratore , prendono una legge costante ; vale a dire , ciascun coefficiente vien determinato costantemente per gli n coefficienti , che lo precedono .

343. Di qui si vede , che le serie , nelle quali si sviluppano le funzioni fratte comprese nella forma generale $\frac{a+bx+cx^2+dx^3 \text{ \&c.} + Kx^n}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3 \text{\&c.} + \Pi x^n}$ sono tutte serie ricorrenti , e precisamente dell' ordine marcato dal numero dei termini meno uno , di cui è composto il denominatore della frazione proposta , non già dall' esponente massimo dell'incognita del denominatore suddetto, come asserisce il Signor Dottor Tommasini (*Introd. in Alg. Tom.* 2. §. 661.) poichè se nella frazione dell' esempio 2.° pongasi $g = 0$, sebbene l' esponente sia eguale a 2 , l'ordine della serie è il primo , e la frazione $\frac{a+bx}{f+hx^2}$ può essere ottimamente genuina .

Esempio 3.° Si debba esprimer per serie $\sqrt{1+x}$. Nell'equazione $\sqrt{1+x} = \mathcal{A}+Bx+Cx^2$ &c. si formi il quadrato di ciascun membro , e si avrà ...

$1+x$

$$1+x=A^2+2ABx+2ACx^2+2ADx^3+2AEx^4 \;\&c.$$
$$+B^2x^2+2BCx^3+2BDx^4 \;\&c.$$
$$+C^2x^4 \;\&c.$$

quindi $A=1$, $2AB=1$, e $B=\frac{1}{2}$: $C=-\frac{B^2}{2A}=-\frac{1}{8}$:

$$D=-\frac{2BC}{2A}=\frac{Bc}{A}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{16};\; E=-\frac{C^2+2BD}{2A}$$

$$=-\frac{1}{64}-\frac{1}{16}=-\frac{5}{642}=-\frac{5}{128} \;\&c. \;\&c. \text{ onde} \ldots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\&c.$$

344. Era facile a vedersi, che il primo termine delle serie doveva risultare $=1$, e perciò si poteva porre con vantaggio $\sqrt{1+x}=1+Ax+Bx^2+Cx^3$ &c. e si sarebbe trovata con più di semplicità la serie stessa.

345. Si poteva ancora sostituire $2x+x^2$ in luogo di x in ambedue i membri dell'equazione ipotetica, e così dispensarsi dalla formazione della potenza quadrata. In qualunque modo però si proceda, si ottiene sempre la medesima serie, esprimente il valore del radicale proposto.

346. *Scol.* Il metodo esposto dell'evoluzione in serie è ciò, che dicesi metodo dei coefficienti indeterminati, o sia dell'equazioni indeterminate, di cui si è fatto parola al (*n.* 81.)

347. *Met. Dei divisori evanescenti.* Data una funzione esplicita, che sia, per esempio X, funzione d' x, per ridurla in serie, si ponga $X=A+Bx+Cx^2$ &c. In ambedue i membri si faccia $x=0$, e si avrà il coefficiente A uguale a ciò, che diventa X nell'

X nell'ipotesi di $x=0$. Si trasponga nel primo membro il valor di A, e avendo diviso tutto per x, si faccia di nuovo $x=0$, e si avrà B. Si prosegua nel modo stesso, e si avranno gli altri coefficienti.

Esempio. Sia da svilupparsi in serie la frazione $\frac{a}{b-x}$. Suppongasi $\frac{a}{b-x}=A+Bx+Cx^2$ &c.. Siccome i due membri suppongonsi eguali, debbon rimaner tali per qualunque valor d' x dunque si ponga $x=0$, e si avrà $A=\frac{a}{b}$; Si trasponga, e si avrà $\frac{a}{b-x}-\frac{a}{b}=Bx+Cx^2+Dx^3$ &c.: In quest' equazione parimente i due membri debbon' essere eguali, dunque siccome il secondo è divisibile per x, tale dev'essere anche il primo; si divida per x, e nei due risultati si faccia $x=0$; si avrà $B=+\frac{a}{b^2}$. Nell' equazione $\frac{a}{b^2-bx}=B+Cx+Dx^2$, si ponga il valore di B, e si trasponga nel primo membro, onde si abbia $\frac{a}{b^2-bx}-\frac{a}{b^2}=Cx+Dx^2+Ex^3$ &c.

Riducendo, e dividendo per x, si avrà .... $\frac{a}{b^3-b^2x}=C+Dx+Ex^2$ &c.: si faccia $x=0$, sarà $C=\frac{a}{b^3}$. Nel modo stesso procedesi al ritrovamento degli altri coefficienti. E' questo un Metodo elegante, che finqul non è stato trasportato dal Cal-

Qualora tutti i termini del numeratore, o del denominatore, o di ambedue fossero affetti da x, si separerebbe un opportuno fattore in x, come al (n.351) e si opererebbe al solito.

348. *Scol.* Qualora la serie, che si ottiene coll' evoluzione divisata, sia convergente abbastanza, con prendere alcuni soltanto dei primi termini si avrà un valore assai prossimo al vero; qualora poi la funzione proposta sia numerica si potrà sempre dare una forma alla medesima, la quale affretti la sudetta convergenza, e questo con rendere il primo termine del denominatore maggiore del secondo più che sia possibile, trattandosi di frazioni, e con rendere nel modo stesso, maggiore il primo termine del secondo, trattandosi di un numero intero da inalzarsi ad una potenza. Quindi se vogliasi il valore di $\frac{1}{5}$ espresso per serie, si farà $\frac{1}{5}=\frac{1}{4+1}$ non già $=\frac{1}{3+2}$; e se vogliasi la radice quadrata di 5 non cerchisi già $\sqrt{3+2}$, ma bensì $\sqrt{4+1}$: Difatto

$$\frac{1}{4+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{1}{256}\ \&c.$$

$$\frac{1}{3+2}=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{4}{27}-\frac{8}{81}\ \&c.$$

dove pigliando anche due soli termini dalla prima si ha $\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$, e dalla seconda $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$, valore, che differisce più di $\frac{3}{16}$ dal valore $\frac{1}{5}$.

 Lo

Lo stesso potrà facilmente vedersi per rapporto alle radici.

349. *Scol.* La forma generale $A+Bx+Cx^2+Dx^3$ &c. ... Πx^m, sodisfa sempre all'intento: nondimeno giova alle volte darne una forma adattata al problema proposto, ond'evitare una lunghezza inutile di calcolo.

Si vedrà con la pratica esser utile alle volte fare il primo termine uguale ad una quantità determinata, supporre uguali a zero le potenze alternative pari, o impari, e così di altri casi.

Applichiamo adesso la Teoria esposta dell' evoluzione in serie; e sia

350. *Probl.* Estrarre la radice quadrata dalla funzione $a^2+4abx+(6ac+4b^2)x^2+12bcx^3+9c^2x^4$, per mezzo dello sviluppo in serie.

Soluzione. Sia $\sqrt{(a^2+4abx+(6ac+4b^2)x^2+12bcx^3+9c^2x^4)}=A+Bx+Cx^2$, poichè non vi può essere nella radice potenza veruna di $x>\sqrt{9c^2x^4}$.

Fatto il quadrato di ambedue i membri si avrà

$$(P)\ldots\ a^2+4abx+(6ac+4b^2)x^2+12bcx^3+9c^2x^4 = A^2+2ABx+2ACx^2+B^2x^2+2BCx^3+C^2x^4$$

Facciasi il paragone dei termini omologi, e si dedurrà facilmente $A=a$, $B=2b$, $C=3c$, e perciò la radice richiesta si trova $=a+2bx+3cx^2$:

351. *Scol.* Nel formare il secondo membro dell' equazione P, bastava prendere tre soli termini: in generale basterà formare tanti termini del membro indeterminato quante saranno le incognite A, B, C &c. da determinarsi.

352. *Probl.* 2. Dati due solidi simili, ed ineguali

guali, ed inoltre due solidi ad essi simili, uguali fra di loro, e tali che la somma delle loro superficie eguagli la somma delle superficie dei solidi ineguali, si dimanda qual delle due coppie di solidi avrà maggior solidità. *Soluzione*. Detta 1 la metà della superficie de' solidi eguali presi insieme, ed $1+x^2$ la superficie di uno dei solidi ineguali, la superficie dell' altro solido ineguale dovrà essere $= 1-x^2$; ciò posto la solidità de' solidi eguali starà alla solidità de' solidi ineguali come $2 : (1+x^2)\sqrt{1+x^2} + (1-x^2)\sqrt{1-x^2}$, si sciolgano in serie i radicali, e fatti i prodotti si troverà il conseguente della suddetta ragione $= 2 + \frac{x^4}{4} + \frac{6x^8}{128} +$ &c. quantità sempre $>$ dell'antecedente 2 qualunque sia il valor di x, e qualunque siane il segno, positivo, o negativo.

Dunque i solidi eguali contengono sempre una solidità maggiore dei solidi simili ineguali, dotati della medesima somma di superficie.

La solidità dei primi in confronto di quella dei secondi è ciò, che dicesi un massimo, e viceversa. Delle funzioni considerate con questa relazione avremo luogo di trattarne in appresso compitamente.

SEZIONE VII.

Del regresso delle serie.

353. Dare il regresso ad una serie consiste in questo: Che quando si ha una funzione di una quantità qualunque, espressa per le potenze di un'altra quantità, si trovi l'espressione di questa per

per le potenze della prima, cioè che se abbiasi funzione $(x) = A + Bz + Cz^2$ &c., si trovi z espresso per le potenze di x; Sia primieramente.

354. *Probl.* Data la serie $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c., e si voglia y espresso per le potenze di x.

Soluzione. Pongasi $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c.; sostituiscasi questo valore in luogo d'y nella serie $ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c., e si avrà

$$\left.\begin{array}{ll} ay = & Aax + Bax^2 + Cax^3 + Dax^4 \text{ \&c.} \\ by^2 = & A^2bx^2 + 2ABbx^3 + B^2bx^4 \text{ \&c.} \\ & + 2ACbx^4 \text{ \&c.} \\ cy^3 = & A^3cx^3 + 3A^2Bcx^4 \text{ \&c.} \\ dy^4 = & A^4dx^4 \text{ \&c.} \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}\right\} = x$$

Fatto il paragone dei termini omogenei, si trova $A = \frac{1}{a}$; $B = -\frac{b}{a^3}$; $C = \frac{2b^2-ac}{a^5}$; $D = \frac{5abc-a^2d-5b^3}{a^7}$ &c. onde $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{(2b^2-ac)}{a^5}x +$ .... $(5abc-a^2d-5b^3)\,x^4$ &c. dove nei casi particolari basta sostituire per a, b, c &c. i valori dati. Sia in secondo luogo

355. *Probl.* Data l'equazione $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ &c. $= \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3$ &c. si debba trovare y espresso per le potenze di x, e viceversa. *Soluzione*. Pongasi $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4$ &c. si sostituisca questo valore nell'equazione data, e paragonati i termini omologi si avrà $A = \frac{\beta}{a}$; ... $B = \frac{a^2\gamma - \beta^2}{a^3}$, $C = \frac{a^4\delta - a\beta^3c - 2a\gamma\beta b + 2b^2\beta^3}{a^5}$ &c. quindi

di si avrà (Π) $x = \frac{\beta}{a} y + \frac{a^2\gamma - \beta^2 b}{a^3} y^2 + \ldots\ldots\ldots$ $(a^4 - a\beta^3 c - 2a^2 b\beta\gamma + 2b^2\beta^3) y^3$ &c. formola generalissima, da cui facendo $a = 1$, $b = 0$ $c = 0$, $d = 0$ &c. si ha la soluzione del problema antecedente, e che può servire ancora per i casi in cui manchino i termini pari, o impari alternativamente altro non richiedendosi, che fare uguali a zero, i respettivi coefficienti.

356. *Probl.* Data l'equazione $y^m = ax + bx^2 + cx^3$ &c. si dimanda x espresso per le potenze di y. *Soluzione*. Si estragga la radice m.sima da ambedue i membri per mezzo della formola Newtoniana, e poscia si operi, come per il probl. 1.

357. *Probl.* Data l'equazione $ax + bxy + cy^2x + dy^3x$ &c. $= \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3$ &c. si dimanda x per y, e viceversa. *Soluzione*. Si ponga nel 1.° caso $x = Ay + By^2 + Cy^3$ &c., ed $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c. nel secondo; si facciano le sostituzioni delle potenze dell'espressioni suddette nell'equazione proposta: si paragonino i termini omologi, e si dedurranno i valori delle indeterminate A, B, C &c.

Lo stesso metodo si userà, qualora sia data l'equazione più composta $ax + bxy + cy^2x + dy^3x$ &c. $= \beta y + \gamma xy^2 + \delta x^2y^3 +$ &c., o in generale l'equazione $ax^m y^n + bx^{m'} y^{n'} + cx^{m''} y^{n''}$ &c. $= \alpha x^p y^q + \beta x^{p'} y^{q'}$ &c.

SEZIONE VIII.

Dell' Interpolazione delle serie.

358. Essendo A, B, C, D, E &c. due ordini di t, u, x, y, z &c.
quantità dipendenti fra di loro in maniera, che ciascuna quantità del prim'ordine abbia un determinato rapporto alla corrispondente del second'ordine, e questo sottoposto ad una legge comune, se venga data una nuova quantità in uno di tali ordini, il metodo, che insegna a trovare la sua corrispondente nell'altro, e che sia perciò sottoposta alla medesima legge comune, dicesi metodo d'Interpolazione.

359. *Scol.* Si suppone, che non sia data una legge costante, per cui venga determinato il rapporto di ciascuna quantità del prim' ordine a ciascuna quantità corrispondente del secondo, altrimenti basterebbe istituire fra la nuova quantità data, e la quantità richiesta una equazion'esprimente una tal legge, e dalla di lei soluzione, in virtù dei metodi dell'Analisi, si avrebbe il valore della quantità richiesta.

360. „ *Scol.* Poichè le quantità A, B, C, D &c.
„ si possono riguardare, come ordinate di varie
„ curve di cui t, u, x, y &c. sieno le ascisse cor-
„ rispondenti; anzi, poichè si possono, come si
„ vedrà, ridurre generalmente le quantità A, B,
„ C &c. ad essere ordinate di una stessa curva,
„ in cui le quantità t, u, x &c. sieno le corris-
„ pondenti ascisse, perciò le quantità del prim'
„ ordine le chiameremo ordinate, e quelle del
„ secondo ascisse, o vero le prime funzioni, e le
„ seconde radici.

„ Il metodo dell'Interpolazione è di due sorte:
„ altro è diretto, altro inverso. Quando è data un'
„ ascissa, e si cerca l'ordinata, che le corris-
„ ponde, il metodo, che insegna a riuscire in que-
„ sta ricerca, è il metodo diretto; quando è data
„ un'ordinata, e si cerca l'ascissa, che le ap-
„ partiene, il metodo, che insegna a trovarla, è
„ il metodo inverso. Posto questo sia

361.

361. *Probl.* Essendo dato un numero qualunque di funzioni, ed un'egual numero di radici, trovar la funzione, che corrisponde ad una nuova radice data.

Soluzione. I. Siccome si suppone incognita la relazione, che passa fra ciascuna radice, e la sua funzione, convien prima di tutto determinare una legge, la quale esprima generalmente una tal relazione, poichè altrimenti non si può trovare la funzione corrispondente alla nuova radice, e viceversa, a tenore della condizione proposta.

II. Per ridurre tutti i particolari ignoti rapporti ad una medesima legge comune, basta rappresentare la nuova funzione incognita per una funzione indeterminata della radice, che le deve corrispondere, cioè basta porre $Y = a + bp + cp^2 + dp^3$ &c., dove i termini del secondo membro sieno tanti, quante sono le quantità date di ciascun'ordine, il che a motivo delle indeterminate a, b, c &c. non altera punto il valor di Y, ne la legge comune.

III. Nell'equazione $Y = a + bp + cp^2 + dp^3$ &c. si debbon sostituire successivamente tutte le radici date in luogo di p, come pure le corrispondenti funzioni in luogo di Y.

IV. Ottenuto così un numero di equazioni eguale a quello de'coefficienti indeterminati a, b, c &c. convien determinare per di loro mezzo i coefficienti stessi.

V. Determinati i coefficienti si ha la legge comune richiesta, che esprime il rapporto di ciascuna funzione alla sua radice. Trovata questa, si ottiene immediatamente la funzione corrispondente ad una nuova ascissa con la semplice sostituzione del valore dato in luogo di p.

 Tut-

Tutta la difficoltà si riduce alla determinazione dei coefficienti: quindi passiamo ad esporre i metodi, che possono condurre al di loro ritrovamento.

362. Metodo I. Sieno date due funzioni A, B, e due ascisse t, u, e si voglia sapere la funzione, che deve corrispondere ad una radice nuova p. Si avrà in questo caso l'equazione $Y = a + bp$ e in questa facciansi le accennate sostituzioni, e si avranno le due equazioni $A = a + bt$ $B = a + bu$. Per determinare a, e b si sottragga una dall'altra, onde abbiasi, per esempio, $\frac{A - B}{t - u} = b$; si sostituisca nella prima, e si avrà $a + \frac{(A - B)}{t - u} t = A$, onde $a = \frac{Bt - Au}{t - u}$.

Data pertanto una nuova ascissa p, si avrà la funzione corrispondente $Y = \frac{Bt - Au}{t - u} + \frac{(A - B)}{(t - u)} p$.

Date tre funzioni A, B, C, e tre radici corrispondenti t, u, x si formerà l'equazione generale $Y = a + bp + cp^2$, e mediante le sostituzioni si dedurranno l'equazioni $A = a + bt + ct^2$; $B = a + bu + cu^2$; $C = a + bx + cx^2$.

Sottraendo la seconda dalla prima, si ottiene $\frac{A - B}{t - u} - c(t + u) = b$: Sostituendo questo valore nella prim'equazione si ha $\frac{Bt - Au}{t - u} + ctu = a$; sostituendo nella 3.ª i valori di a, e di b, ne viene ne $c = \frac{A(u-x)-B(t-x)+C(t-u)}{(t-u)(t-x)(u-x)}$, valore, che sostituito nell'espressioni di a, e di b si ottiene finalmente

$$a = \frac{A((u-x)ux-B(t-x)tx+C(t-u))\,tu}{(t-u)(t-x)(u-x)}$$

$$b = \frac{A((u-x)(u+x)-B(t-x)(t+x)+C(t-u)(t+u))}{(t-u)(t-x)(u-x)}$$

$$c = \frac{A(u-x)-B(t-x)+C(t-u)}{(t-u)(t-x)(u-x)}$$, onde si ha il valore di Y.

Se sieno date quattro ordinate A, B, C, D, con le quattro ascisse corrispondenti t, u, x, y, si formerà l'equazione indeterminata $Y = a+bp+cp^2+dp^3$, e mediante le solite sostituzioni si avranno l'equazioni che seguono

1.ª $A = a+bt+ct^2+dt^3$

2.ª $B = a+bu+cu^2+du^3$

3.ª $C = a+bx+cx^2+dx^3$

4.ª $D = a+by+cy^2+dy^3$. Dalla prima, e dalla seconda si dedurrà l'equazione

5.ª $\frac{A-B}{t-u} - c(t+u) - d(t^2+tu+u^2) = b$. Sostituito questo valore nella prima, e nella terza, si hanno l'equazioni

6.ª $a = \frac{Bt-Au}{t-u} + ctu + d\,(t^2+tu+u^2)$

7.ª $c = \frac{A(u-x)+B(t-x)+C(t-u)}{(t-u)(t-x)(u-x)} - d\,(t+u+x)$

La sostituzione di questo valore nell'equazioni 6, 5, 4 somministra le seguenti.

8.ª

8.ª $a = \frac{A(u-x)ux-B(t-x)tx+C(t-u)\,tu}{(t-u)(t-x)(u-x)} - tux$.

9.ª $b = \frac{A(u-x)(u+x) - B(t-x)(t+x)+C(t-u)(t+u)}{(t-u)(t-x)(u-x)} + d(tu+tx+ux)$

10.ª $d = \frac{A(u-x)(u-y)(x-y) - B(t-x)(t-y)(x-y) + C(t-u)(t-y)(u-y) - D(t-u)(t-x)(u-x)}{(t-u)(t-x)(t-y)(u-x)(u-y)(x-y)}$

Se finalmente si sostituisca il valore del coefficiente d nell'equazioni 9. 8. 7. si, otterranno i seguenti valori

$$c = \frac{\left(\begin{array}{l} A(u-x)(u-y)(x-y)(u+x+y) \\ -B(t-x)(t-y)(x-y)(t+u+x) \\ +C(t-u)(t-y)(u-y)(t+u+y) \\ -D(t-u)(t-x)(u-x)(t+u+x) \end{array}\right)}{(t-u)(t-x)(t-y)(u-x)(u-y)(x-y)}$$

$$b = \frac{\left(\begin{array}{l} A(u-x)(u-y)(x-y)(ux+uy+xy) \\ -B(t-x)(t-y)(x-y)(tx+ty+xy) \\ +C(t-u)(t-y)(u-y)(tu+ty+uy) \\ -D(t-u)(t-x)(u-x)(tu+tx+ux) \end{array}\right)}{(t-u)(t-x)(t-y)(u-x)(u-y)(x-y)}$$

$$a = \frac{\left(\begin{array}{l} A(u-x)(u-y)(x-y)\,uxy \\ -B(t-x)(t-y)(x-y)\,txy \\ +C(t-u)(t-y)(u-y)\,tuy \\ -D(t-u)(t-x)(u-x)\,tux \end{array}\right)}{(t-u)(t-x)(t-y)(u-x)(u-y)(x-y)}$$

Da questi coefficienti si comprende, senza inoltrar l'induzione di vantaggio, la legge, con cui procede la di loro formazione. Il

Il prodotto delle differenze delle radici date forma il denominatore di ciascuna frazione esprimente i valori dei coefficienti.

Il numeratore del primo coefficiente è formato dalla somma di prodotti di ciascuna funzione data nel prodotto delle differenze di tutte le radici, meno quella, che appartiene alla funzione moltiplicante, nel prodotto delle medesime radici, col segno alternativo; onde essendo n le radici, se tali prodotti dicansi successivamente A^{I}, B^{I}, C^{I}, D^{I} &c. e il denominator comune si chiami X, ed il coefficiente ultimo φ, la formola dell'ultimo coefficiente risulta dalla forma, $\varphi = \frac{A^{I} - B^{I} + C^{I} - D^{I}}{X}$ &c.

Se ciascun prodotto A^{I}, B^{I}, C^{I} &c. si moltiplichi per la somma dei prodotti di $n-1$ delle radici accennate, che dicasi S^{I}, si avrà il coefficiente penultimo π esposto generalmente per la formola $\pi = \frac{A^{I}S^{I} - B^{I}S^{I} + C^{I}S^{I} - D^{I}S^{I}}{X}$ &c.

Se ciascuno dei prodotti A^{I} B^{I} &c. si moltiplichi per la somma dei prodotti di $n-2$ delle medesime radici, somma, che dicesi S^{II}, si avrà il 2.° coefficiente $\lambda = \frac{A^{I}S^{II} - B^{I}S^{II} + C^{I}S^{II} - D^{I}S^{II}}{X}$ &c.

e generalmente il coefficiente n.simo sarà espresso per la formola $\delta = \frac{A^{I}S^{(n)} - B^{I}S^{(n)} + C^{I}S^{(n)} - D^{I}S^{(n)}}{X}$ &c.

363. Ma passiamo ad esporre il Metodo differenziale di Newton (*Opusculorum tom. 2. opusc. 5.*)

364. *Definizione*. Avendosi una serie di quantità A, B, C, D &c., $A-B$, $A-C$, $A-D$ &c. $B-C$

$B-C$, $B-D$ &c. $C-D$ &c. diconsi differenze prime. Posta $A-B=A^{I}$, $B-C=B^{I}$, $C-D=C^{I}$ &c. $A^{I}-B^{I}$, $B^{I}-C^{I}$ &c. diconsi differenze seconde, e così in seguito.

365. Ciò posto si formino le solite equazioni. Si sottragga la seconda dalla prima, la terza dalla seconda &c. si avrà così un numero di equazioni minore di un'unità del numero dell'equazioni date, le quali non conterranno il primo coefficiente, e ciascuna di esse sarà divisibile per la differenza di due delle radici date.

Dopo aver'effettuata la divisione per l'opportuna differenza di due delle radici, si faccia la sottrazione come sopra, e si otterrà un numero di equazioni minore di un' unità dell' equazioni antecedenti, che non conterranno il secondo coefficiente, e saranno divisibili ciascuna per la differenza di due delle radici date. Proseguendo così la medesima operazione si giungerà ad un'equazione, per cui si potrà conoscere il valore determinato dell'ultimo coefficiente, e per mezzo di esso si avranno i valori degli altri coefficienti.

Esempio. Sieno date le funzioni A, B, C, D, E, e le radici corrispondenti t, u, x, y, z. Si avranno prima di tutto l' equazioni

$$a+bt+ct^2+dt^3+et^4=A$$
$$a+bu+cu^2+du^3+eu^4=B$$
$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=C$$
$$a+by+cy^2+dy^3+ey^4=D$$
$$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4=E$$

Per la prima sottrazione si derivano le quattro

$$b(t-u)+c(t^2-u^2)+d(t^3-u^3)+e(t^4-u^4)=A-B$$
$$b(u-x)+c(u^2-x^2)+d(u^3-x^3)+e(u^4-x^4)=B-C$$
$$b(x-y)+c(x^2-y^2)+d(x^3-y^3)+e(x^4-y^4)=C-D$$
$$b(y-z)+c(y^2-z^2)+d(y^3-z^3)+e(y^4-z^4)=D-E$$

Divisa la prima per $t-u$, la seconda per $u-x$, la terza per $x-y$, e la quarta per $y-z$, che sono le quattro differenze di ciascuna coppia di radici contigue, si hanno le suddette equazioni ridotte alla forma

$$1.^a\ b+c(t+u)+d(t^2+ut+u^2)+e(t^3+t^2u+tu^2+u^3)=\frac{A-B}{t-u}$$

$$2.^a\ b+c(u+x)+d(u^2+ux+x^2)+e(u^3+u^2x+ux^2+x^3)=\frac{B-C}{u-x}$$

$$3.^a\ b+c(x+y)+d(x^2+xy+y^2)+e(x^3+x^2y+xy^2+y^3)=\frac{C-D}{x-y}$$

$$4.^a\ b+c(y+z)+d(y^2+yz+z^2)+e(y^3+y^2z+yz^2+z^3)=\frac{D-E}{y-z}$$

Si ponga $\frac{A-B}{t-u}=F$; $\frac{B-C}{u-x}=G$, $\frac{C-D}{x-y}=H$, $\frac{D-E}{y-z}=T$ e si ripetano le sottrazioni. Si otterranno l'equazioni

$c(t-x)+d(t^2+tu-ux-x^2)+e(t^3+t^2u+tu^2-u^2x-ux^2-x^3)$ $=F-G$.

$c(u-y)+d(u^2+ux-xy-y^2)+e(u^3+u^2x+ux^2-x^2y-xy^2-y^3)$ $=G-H$

$c(x-z)+d(x^2+yx-yz-z^2)+e(x^3+x^2y+xy^2-y^2z-yz^2-z^3)$ $=H-T$, Dividendo la prima par $t-x$, la seconda per $u-y$, e la terza per $x-z$, le tre addott' equazioni si riducono alla forma

$$5.^a\ c+d(t+u+x)+e(t^2+tu+u^2+tx+ux+x^2)=\frac{F-C}{t-x}$$

$$6.^a\ c+d(u+x+y)+e(u^2+uy+y^2+ux+xy+x^2)=\frac{G-H}{u-y}$$

$$7.^a\ c+d(x+y+z)+e(x^2+xy+y^2+xz+yz+z^2)=\frac{H-T}{x-z}$$

Si

Si ponga $\frac{F-G}{t-x}=K$, $\frac{G-H}{u-y}=L$; $\frac{H-T}{x-z}=M$, e ripetuta al solito la sottrazione, si avranno le due

$d(t-y)+e(t^2+tu+tx-uy-xy-y^2)=K-L$.

$d(u-z)+e(u^2+ux+uy-xz-yz-z^2)=L-M$

equazioni, che dividendo la prima per $t-y$, e la seconda pes $u-z$, divengono

$$8.^a\ d+e(t+u+x+y)=\frac{K-L}{t-y},$$

$$9.^a\ d+e(u+x+y+z)=\frac{L-M}{u-z}.$$

Posto finalmente $\frac{K-L}{t-y}=N$, ed $\frac{L-M}{u-z}=O$, e fatta la sottrazione si ottiene l'equazione

$10.^a\ e(t-z)=N-O$, d'onde si deduce $e=\frac{N-O}{t-z}$, o sia fatto $\frac{N-O}{t-z}=P$, si deduce $e=P$.

Ecco pertanto, che dall'equazione decima si ottiene $e=P$, dall'equazione ottava si ha .... $d=N-e(t+u+x+y)$, dall'equazione 3.ª .... $c=K-d(t+u+x)-e(t^2+tu+u^2+tx+ux+x^2)$ dalla quarta $b=F-c(t+u)-d(t^2+tu+u^2)$ ...... $e(t^3+t^2u+u^2t+u^3)$, e finalmente dalla quinta si ha $a=A-bt-ct^2-dt^3-et^4$.

E' facile a vedersi, che il metodo è generale.

366. Niente meno facile è il discuoprire, che questo metodo conviene precisamenre col primo. Per convincersene basta sostituire nell'espressioni trovate de' coefficienti a, b, c, d, e invece delle lettere A, F, K, N, B, i loro valori, e fare le debite riduzioni, che si vedranno l'espressioni

ni

ni de' suddetti coefficienti risultare le medesime che quelle, che si trovarono col primo metodo.

Del Metodo inverso dell' interpolazione.

367. *Probl.* Dato un numero qualunque di radici con le loro funzioni, trovar la radice corrispondente ad una nuova funzione data. *Soluzione.* Per la soluzione di questo problema, dopo che siensi fatte le operazioni praticate in virtù del metodo diretto, altro non rimane, che risciogliere un'equazione di un grado inferiore di un' unità al numero delle quantità di ciascun' ordine, poichè l'equazione finale è $a + bm + cm^2 + dm^3$ &c. $= K$ la quale ha tanti termini quante sono le quantità date di ciascun ordine. Per la soluzione poi di una tal' equazione si richiedono le regole dell'Analisi, di cui tratteremo in appresso.

368. *Scol.* Siccome non si ha una soluzione generale dell'equazioni superiori al quarto grado, come si avrà luogo di vedere a suo luogo, giova assai, ridurre la soluzione del metodo inverso dell' interpolazione, allorchè conduce ad un' equazione di quinto grado, giova, dissi, ridurla ad altra forma, onde non richieda, che la soluzione di un' equazione di quarto grado.

L' artificio, che si deve adoperare per riuscire in questa riduzione, devesi a M. de la Caille (*Astr. P.* 1. *Sect.* 1. *Ca.* 11. §. 106.), ed è concepito in questa maniera.

In vece d' interpolare i termini dati, si applichi l' interpolazione alle di loro differenze ottenute per mezzo della sottrazione della prima funzione dall' altre funzioni, e della prima radice dall'altre radici: queste saranno di numero inferiore di un' unità a quello de' termini dati, onde l'equazione fina-

finale risultante sarà ancor' essa inferiore di un' unità, e perciò, se operando sù i termini dati, si arrivava ad un' equazione di quinto grado, si arriverà in questa guisa ad un'equazione di quarto.

Fatto questo, si vede, che altro non rimane, che aggiungere al valore trovato il valore della prima funzione data, onde aver il valore della funzione richiesta.

Pigliando le seconde differenze, l'equazione finale si verrebbe a deprimere di due unità, e così in seguito.

Il metodo è generale, cosicchè, se l' equazione finale risulti del grado n, si può essa per mezzo di questo metodo ricondurre al grado $n-1$, e replicando l' operazione si può ridurre ad un grado $n-m$; e questa riduzione è utile non solo quando l' equazione finale supera il quarto grado, ma è utile ancora quando è di terzo grado; ed inoltre è utile anche quando è data la radice, e si cerca la funzione, che gli corrisponde, perchè si evita in questa maniera la complicazione del calcolo.

Vediamone un' esempio.

Esempio. Dato, che per mezzo dell'osservazione, sappiasi, che Mercurio il dì 25 di Giugno fosse in un punto della sua orbita marcato dai gradi seguenti $2^s, 5^\circ . 39' . 51''$ (dove s indica un segno astronomico, vale a dire 30 gradi, $^\circ$ indica un grado, $'$ un minuto primo, e $''$ un minuto secondo) che il dì 26 fosse in un punto dell'orbita espresso per $2^s, 12^\circ . 21' . 51''$; che il dì 27 fosse in un punto espresso per $2^s . 18^\circ . 26' . 18''$, e il dì 28 finalmente fosse in un punto espresso per $2^s . 24^\circ . 48' . 38''$, si voglia sapere in qual pun-

punto dell'orbita Mercurio fosse il dì 27 di Giugno ad ore sette: Si avrà in questo caso $A = 25$, $B = 26$, $C = 27$, $D = 28$, $t = 2^s . 5^\circ . 39' . 51''$, $u = 2^s . 12^\circ . 2' . 51''$; $x = 2^s . 18^\circ . 26' , 11''$, $y = 2^s . 24^\circ . 48' . 38''$, e l'equazione da determinarsi sarà $Y = a + bp + cp^2 + dp^3$; non si tarderà però a vedere, che il calcolo dei coefficienti è assai operoso, e prolisso, qualora si voglia seguire il metodo comune: sarà bene perciò adoperare il metodo compendioso di M. de la Caille.

Ad oggetto pertanto di ottenere la massima semplicità, prendasi $t' = u - t = 6^\circ . 23'$; prendasi $u' = x - t = 12^\circ . 46' . 27''$, e finalmente $x' = y - t = 19^\circ . 8' . 47''$, valori, che ridotti a secondi, sono $t' = 22980''$, $u' = 45987''$; $x' = 68927''$: per rapporto alle radici 25. 26. 27. 28. si avrà $B - A = A' = 1$, $C - A = B' = 2$; $D - A = C' = 3'$.

Sostituendo tutti questi valori nelle formole trovate per tre funzioni, e tre radici, si dedurranno facilmente i valori dei coefficienti a, b, c, e saranno $a = 15\frac{2}{3}$, $b = 60\frac{1}{2}$, $a = 22935\frac{1}{6}$, e l'equazione generale $Y = a + bp + cp^2$ diverrà $Y = 22935\frac{1}{6} + 60\frac{1}{2}x + 15\frac{2}{3}x^2$ dove sostituito finalmente il valor di $p = 2\frac{7}{24} = 2.29167$ si ottiene $Y = 52689'' = 14.^\circ 31' , 9''$.

Ecco pertanto ritrovata la differenza fra la prima funzione, e la funzione cercata: se le aggiunga dunque una tal differenza, cioè $2^s . 5^\circ . 39' . 51''$, e si avrà il luogo dell'orbita, in cui si deve trovar

Q

var Mercurio il dì 27. di Giugno ad ore sette, e sarà $2^s . 20^\circ . 18'$.

369. „ *Teor.* Il metodo d'Interpolazione si riduce a far passare una curva di genere parabolico, cioè una curva rappresentata generalmente dall'equazione indefinita $Y = a + bp + cp^2 + dp^3 \ldots up^n$ per un numero n di punti dati. *Dimostrazione*. Siccome un punto non può esser dato, che per la relazione a due rette date di posizione, quindi, supponendosi dato un punto, si suppone data l'ordinata, e l'ascissa, che gli appartengono: nel caso pertanto di n punti dati, debbon esser date n ordinate, ed n ascisse. Ciò posto, per far passare la divisata curva per n punti dati, si debbon prendere nell'equazione indefinita tanti termini, quanti sono i punti dati; si dee sostituire in essa successivamente ciascuna ascissa con l'ordinata corrispondente, onde si abbiano tante equazioni, quanti sono i coefficienti da determinarsi a, b, c &c.; mediante quest'equazioni con uno de' due metodi esposti si deve determinar ciascuno di essi coefficienti, e con ciò è trovata la curva parabolica sodisfacente alla condizione proposta. Ora tutta l'operazione esposta, non è altro, che il metodo d'Interpolazione. Dunque &c.

370. „ *Teor.* Il metodo d'Interpolazione è un metodo approssimante. *Dimostrazione*. Nell' interpolazione si parte dall'ipotesi, che le funzioni, come pure le radici corrispondenti, conservino fra loro una legge determinata, come lo avverte anche il Ch. M. de la Caille (*n.* 105.) *Ex quantitatibus æquis intervallis acceptis, ratio earum, quæ interjacent inter illas eruitur*

„ *ex*

„ *ex hypothesi, quod inæqualitas earum certam le-*
„ *gem sequatur.*

„ Si suppone per consequenza, che le funzio-
„ ni, e le radici considerate, come coordinate,
„ appartengano ad una curva determinata, e rego-
„ lare, qualunqu'ella sia. Ora con interpolare
„ non si fa, che condurre una curva di genere
„ parabolico per il vertice delle ordinate propo-
„ ste (*probl. ant.*). Ma data una nuova ascissa,
„ l'ordinata corrispondente (ò viceversa), che si
„ trova per mezzo dell'interpolazione, appartie-
„ ne alla curva stessa di genere parabolico, alla
„ di cui equazione ha condotto l'interpolazione;
„ dunque la funzione, che si ottiene, non è la
„ vera funzione richiesta, la quale doveva appar-
„ tenere alla curva, a cui appartenevano tutte le
„ altre funzioni.

„ Per vedere come data una nuova funzione,
„ l'ascissa, che le corrisponde, risulti approssi-
„ mata, basta supporre, che la curva parabolica
„ sia riferita ad un asse ortogonale al primo, per-
„ chè in questa guisa le ascisse divengono ordi-
„ nate, e viceversa, e con ciò ha luogo il ra-
„ ziocinio addotto per rapporto al metodo inverso.

„ Tal funzione però avrà un valore approssima-
„ to, e che si accosterà al vero in ragione diret-
„ ta del numero, e della prossimità delle quanti-
„ tà date, ed in ragione inversa della diversità,
„ che passa fra il progresso della curva paraboli-
„ ca determinata, ed il progresso della curva, a
„ cui appartenevano le coordinate proposte. Se-
„ gue M. de la Caille.

„ *Eo propius ad verum acceditur, quo inter-*
„ *valla minora sunt, & inequalitas terminorum*

„ *datorum minus irregularis* (cioè per rapporto
„ alla curva determinata) *& lex reperta veræ*
„ *vicinior, quam reipsa incrementa, vel decre-*
„ *menta (scilicet differentiæ functionum datarum)*
„ *sequntur.*

„ Difatto (per concepire anche meglio la veri-
„ tà della ragione diretta di sopra esposta) le or-
„ dinate delle due curve, si possono considerare,
„ come due serie, le quali convengono fra di lo-
„ ro in un dato numero di termini. Ora in que-
„ ste per il principio: *Determinata se habent in-*
„ *ter se uti determinantia*, si sa che due serie si
„ accostano tanto più ad una vicendevole affini-
„ tà, ed eguaglianza, quanto maggiore è il nume-
„ ro dei termini, nei quali convengono, (perchè
„ così tanto più convengono fra di loro le leggi,
„ che le determinano), e quanto più tali termini
„ sono vicini fra loro, com'è manifesto.

371. *Scol.* Si può qui osservare la falsità di una dimostrazione del suddetto Teorema, con la quale il P. Gandio dall'inesattezza dei coefficienti pretende di dedurre l'inesattezza dell'interpolazione.

Egli ragiona in questa maniera.

Sieno date due funzioni A, B, con le radici corrispondenti t, u, e si cerchi la funzione corrispondente ad una nuova radice x: si avrà, com'è noto, l'equazione $\frac{Bt-Au}{t-u}+\frac{A-B.}{t-u}x = C$.

Posto questo, suppongasi, che sieno date tanto x, che C, e per mezzo delle tre equazioni $a+bt+ct^2 = A, a+bu+cu^2 = B$, $a+bx+cx^2 = C$, si deducano i coefficienti: questi saranno, come ben si sa,

$$a=\frac{A(u-x)\,ux-B\,(t-x)\,tx+C\,(t-u)\,tu\,;}{(t-u)\,(t-x)\,(u-x)}$$

$$b=\frac{A(u-x)\,(u+x)-B(t-x)\,(t+x)+C\,(t-u)\,(t+u)}{(t-u)\,(t-x)\,(u-x)}$$

$$c=\frac{A(u-x)-B\,(t-x)+C\,(t-u)}{(t-u)\,(t-x)\,(u-x)}:$$

Si sostituiscano questi valori nell' equazione $a+bx+cx^2=C$, si avrà $C=C$, d'onde si vede, che questi ultimi valori di a, b, c, non i primi, sono i veri valori sodisfacienti alla questione. Ma io rispondo al citato Autore, che sostituendo i valori dei coefficienti a, b in una qualunque delle due equazioni $A=a+bt+ct^2$, $B=a+bu+cu^2$ si ottiene parimenti un'equazione identica, anzi che avendosi n equazioni con n coefficienti indeterminati, se dopo averli determinati, si sostituiscano i di loro valori in una qualunque delle n equazioni suddette, si avrà sempre un risultato identico, non essendo questo, che un corollario del metodo, per cui si è ottenuta la determinazione de' coefficienti: è dunque inconcludente la divisata dimostrazione.

372. *Teor.* Se il rapporto dei termini dati sia meramente fortuito, l'interpolazione non presenta verun risultato. *Dimostrazione*. Siccome l'interpolazione dei rapporti particolari di singoli i termini d'un genere, a singoli i termini dell'altro genere ne compone uno, che gli rappresenta, e gli contiene tutti, è manifesto, che se tali rapporti primitivi sieno fortuiti, il rapporto generale dedotto da essi dovrà pure esser fortuito, onde ne segue, che fortuito debba essere il risultato dell'interpolazione

zione, e perciò di niun significato.

373. *Teor.* Se la relazione di alcuni termini dipenda da una cagione, la quale non influisca negli altri termini impiegati nell'interpolazione, non si potrà, interpolando questi, determinare il prossimo valore di quelli. *Dimostrazione*. L' interpolazione ha per oggetto primariamente di ridurre le radici, e le funzioni ad una medesima legge relativa, affinchè dato un nuovo termine, possa trovargli il corrispondente, che sia sottoposto, cioè alla medesima relazione o legge, comune agli altri termini. Ora nell'Ipotesi addotta, dato un nuovo termine, non se gli può trovare il corrispondente divisato, perchè supponendosi, che nel termine cercato influisca una cagione particolare, che non influiva nei termini dati ad interpolarsi, deve il termine cercato necessariamente allontanarsi dalla legge comune, e perciò interpolando non se ne può ottenere un prossimo valore.

374. „ Questo si può anche meglio compren-
„ dere esaminando geometricamente la natura della
„ interpolazione. Considerando l'interpolazione in
„ questa maniera, si sa che le funzioni, e le ra-
„ dici date si concepiscono, come le coordinate di una
„ curva determinata, qualunque ella sia, e che me-
„ diante l'interpolazione si fa passare una curva
„ di genere parabolico per tutti i punti della pri-
„ ma curva, determinati dalle funzioni proposte;
„ e finalmente che dato un nuovo termine, si tro-
„ va il corrispondente espresso per una coordinata
„ della parabola. Ciò posto, qualora sia dato un
„ nuovo termine, e si supponga, che una cagio-
„ ne particolare agisca nel termine richiesto, è
„ patente, che esso non potrà più appartenere
„ al-

„ alla curva primitiva: quindi potrà allontanarsi
„ in qualunque modo dalla parabola, e perciò non
„ se ne otterrà neppure un valore sicuramente approssimato.

375. Non mancano esempj desunti dalla fisica, con cui confermare l'evidenza del dimostrato Teorema.

I. Un fiume con la sua corrente si dispone il fondo in maniera, che esso acquista un declivio dipendente, tutto il resto eguale, dall' azione del fiume stesso. Suppongasi, che nel di lui alveo entri un'altro fiume, ad una distanza qualunque a dalla sorgente. L'accresciuta quantità di acqua eserciterà un'azione maggiore sul fondo, e produrrà perciò una diversa declività.

L'interpolazione dei termini appartenenti al declivio del fiume innanzi all'ingresso del secondo, non potrà certamente contribuire a determinar la pendenza dell' alveo dopo l' ingresso del secondo fiume.

II. Gli spazj percorsi da Giove nella sua orbita sono sottoposti ad una legge costante: interpolando però alcune osservazioni dei moti di Giove innanzi che soffra perturbazione veruna dall'attrazione di Saturno, non si può certamente dedurre il prossimo spazio percorso da Giove nella sua orbita in un dato tempo, dopo la suddetta perturbazione.

376. *Teor.* Se qualche cagione influisca con irregolare diseguaglianza ne' rapporti delle funzioni alle radici, il valore di un termine trovato colla interpolazione, tanto più differirà dal vero, quanto maggiore sarà la sudetta irregolarità dell' azione.

Dimostrazione. Difatto per l' effetto dell' irregolare azione, i termini vengono rimossi in parte dal-

dalla legge comune, a cui debbono soggiacere, affinchè possano subire l'interpolazione; nondimeno quanto minore sarà l' azione della cagione suddetta, tanto più diverranno interpolabili, e tanto meno il nuovo termine ottenuto dall' interpolazione si allontanerà dal prossimo suo valore.

Così dall'interpolazione di più termini in parte appartenenti al declivio di un fiume innanzi all' ingresso di un'altro fiume, ed in parte appartenenti al declivio del medesimo dopo l' ingresso, si può ottenere, *cæteris paribus*, un altro termine appartenente al di lui declivio, e questo tanto più prossimo al vero, quanto minore sarà l' azione del secondo fiume, perchè così l'azione dell'acqua nel fondo, tanto più s'accosta alla regolarità.

377. Vi è un altro metodo d'interpolazione ritrovato dal Ch. M. de la Lande; esso però siccome non dotato di sufficiente generalità, e destinato unicamente ad agevolare la pratica dei calcoli astronomici, noi lo tralasciamo, rimettendo chi ne desideri la cognizione all'Astr. del medesimo *T.* 2. lib. 24. §. 3172., ed alle Mem. dell' Ac. R. delle Sc. all'an. 1761., dove si trova un'elegante correzione del suddetto metodo, immaginata dal dottissimo Autore.

SEZIONE IX.

Delle Frazioni continue.

378. Le frazioni continue sono una specie particolare di serie, di cui l'influenza è mirabile in tutta l'Analisi, e che per conseguenza convien qui trattare estesamente.

379. Frazione continua dicesi un sistema di frazio-

zioni, tale che il primo numeratore abbia per denominatore una quantità intera, più una frazione; questa seconda frazione abbia per denominatore una quantità intera, più una frazione, e così in seguito. Ecco la formola generale di questa sorta di frazioni.

$$\alpha+\cfrac{a}{\beta+\cfrac{b}{\gamma+\cfrac{c}{\delta+\cfrac{d}{\epsilon+\&c.}}}}$$

380. *Scol.* La scoperta di queste frazioni si riferisce comunemente a Milord Brouncker. Egli infatti in una lettera a Milord Wallis, da cui gli era stata partecipata una nuova serie esprimente la quadratura del circolo, asserisce che il rapporto dell' area circolare al quadrato del diametro si poteva rappresentare ancora per $1 : 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\&c.}}}}}$

nè si sa, che prima di lui fosse cognita a veruno questa specie di serie.

Huyghens perfezionò in seguito questa Teoria, e l'applicò alla Meccanica. I Signori Euler, e de la Grange, se ne sono occupati con successo, ed il secondo sull'orme di Waringh, è riuscito felicemente nell'applicarla alla soluzione approssimata dell'

dell'equazioni, ed inoltre le ha impiegate con vantaggio grande nella soluzione dei problemi indeterminati.

Passiamo intanto a considerar l'origine delle frazioni di cui parliamo.

381. Sia una frazione impropria $\frac{a}{b}$. Effettuata la divisione, sia $\frac{a}{b}=\alpha+\frac{c}{b}$; sarà $\frac{c}{b}$ una frazione genuina; rovesciandola diverrà impropria, onde si avrà $\frac{b}{c}=\beta+\frac{d}{c}$; nel modo stesso si avrà $\frac{c}{d}=\gamma+\frac{e}{d}$, $\frac{d}{e}=\delta+\frac{f}{e}$ &c. Adesso per ottenere il valore di $\frac{c}{b}$, si rovesci dinuovo ciascun membro dell'equazione $\frac{b}{c}=\beta+\frac{d}{c}$, e si avrà $\frac{c}{b}=\cfrac{1}{\beta+\cfrac{d}{c}}$ così pure si avrà $\frac{d}{c}=\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{e}{d}}$; $\frac{e}{d}=\cfrac{1}{\delta+\cfrac{f}{e}}$ &c.

Fatte tutte le sostituzioni, si trova in questa guisa la frazione continua, che segue, esprimente il valore di $\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\epsilon+\&c.\ \&c.}}}}$$

Esem-

Esempio. Si debba ridurre in frazione continua la frazione comune $\frac{3347}{2241}$. Operazione $\frac{3347}{2241}=1+\frac{1106}{2241}$

$$\frac{2241}{1106}=2+\frac{29}{1106}$$

$$\frac{1106}{29}=38+\frac{4}{29}$$

$$\frac{29}{4}=7+\frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{1}=4$$

Si rovescino i trovati quozienti come sopra, e fatte le sostituzioni si avrà

$$\frac{3347}{2241}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{38+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}$$

382. *Scol.* 1.° Alle volte riducendo in frazione continua una frazione ordinaria, succede, che i primi termini dei successivi denominatori compariscano ripetutamente con uno stess'ordine; in questi casi la frazione continua si dice *periodica*.

383. *Scol.* 2.° Il primo termine di una frazione continua può essere intero, o fratto, secondo che la frazione proposta sia impropria, o genuina. I numeratori poi, qualora però la frazione continua sia formata con qualche metodo particolare, possono esser maggiori dell'unità, come si vede nella serie di Milord Brouncker.

In generale si vede, che quanto più sieno piccoli i numeratori, e grandi i denominatori, tanto più la frazione deve risultar convergente.

384. *Scol.* 3.° Se la frazione proposta a svolgersi in frazione continua, sia razionale, la frazione avrà termine, perchè si dovrà giunger necessariamente a un divisore $=1$; qualora poi la frazione proposta sia irrazionale, siccome essa equivale ad una frazione dotata d'infinite cifre, non si potrà svolgere, che in una frazione continua infinita.

Sia, per esempio, da ridursi in frazione continua $\sqrt{2}$. Si avrà per le regole solite $\sqrt{2} = 1{,}41421356$ &c $= \frac{141421356\ \&c.}{100000000\ \&c.}$; Si riduca questa frazione in frazione continua, e si otterrà.

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ \&c.}}}}}}$$

&c. &c. all' infinito.

385. *Scol.* 4.° Se si presenti una frazione continua, nella quale i primi termini dei denominatori sieno fratti, si ridurranno tutti ad essere interi.

La formola di una tal riduzione è la seguente

$$a+\cfrac{1}{\cfrac{b}{B}+\cfrac{1}{\cfrac{c}{C}+\cfrac{1}{\cfrac{d}{D}+\cfrac{1}{\cfrac{e}{E}+\&c.}}}} = a+\cfrac{B}{b+\cfrac{BC}{c+\cfrac{CD}{d+\cfrac{DE}{e+\cfrac{EF}{\&c.\ \&c.}}}}}$$

&c. &c.

Dopo aver veduto, come si riduce una frazione ordinaria in frazione continua, convien passare al problema inverso: sia per tanto

386. *Probl.* Ridurre una frazione continua qualunque in frazione ordinaria. *Soluzione*. Cominciando dalle ultime due frazioni, si riducano esse al medesimo denominatore, e si aggiungano insieme; il risultato, e la frazione susseguente riducansi come sopra, e si aggiungano insieme: così operando successivamente si ridurrà tutta la frazione continua in frazione comune, come si richiede.

Esempio. Debbasi ridurre in frazione comune la frazion continua. $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{38+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}$

Operazione. Incominciando dalle ultime due $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}$ ridu-

riducendo 7 in frazione, che abbia per denominator 4, si ottiene $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}=\frac{4}{29}$, nel modo stesso si ottiene $\cfrac{1}{38+\cfrac{4}{29}}=\frac{29}{1106}$, $\cfrac{1}{2+\cfrac{29}{1106}}=\frac{1106}{2241}$. Finalmente $1+\frac{1106}{2241}=\frac{3347}{2241}$ frazione cercata.

Definizione. Nelle frazioni continue diconsi *termini equivalenti* le somme di due, tre, quattro, n frazioni successive, incominciando dalla prima, perchè queste equivalgono, come si vedrà, al prossimo valore della frazione totale.

387. *Probl.* Si dimanda un metodo generale, con cui trovare immediatamente qualunque termine equivalente.

Soluzione. Assumasi la frazione continua generale, $\alpha+\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma+\cfrac{d}{\delta+\cfrac{e}{\varepsilon\ \&c.}}}}$ e cominciando da α si prendano le somme successive delle frazioni. $\alpha+\frac{b}{\beta}$, $\alpha+\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma}}$, $\alpha+\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma+\cfrac{d}{\delta}}}$ &c.

Si otterranno così i termini equivalenti, che seguono (E) ...... $\frac{\alpha}{1}$, $\frac{\alpha\beta+b}{\beta}$, $\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha c+\gamma b}{\beta\gamma+c}$, $\frac{\alpha\beta\gamma\delta+\alpha\beta d+\alpha\delta c+\gamma\delta b+bd}{\beta\gamma\delta+\beta d+\delta c}$ &c. Con-

Considerando adesso questi termini, si può dedurre il metodo seguente, per formarne immediatamente qualunque si voglia.

Metodo. Si scrivano due frazioni, la prima delle quali sia $\frac{1}{0}$, e la seconda sia $\frac{\alpha}{1}$, sopra di queste, e delle susseguenti, che si troveranno per mezzo di esse, scrivasi successivamente ciascun denominatore β, γ, δ, ϵ &c. cominciando da α, e col medesim' ordine soscrivasi ad esso ciascun numeratore b, c, d, e &c. come si vede nella formola sottoposta

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon \\ \frac{1}{0}, & \frac{\alpha}{1}, & \frac{\alpha\beta+b}{\beta}, & \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha c+\gamma b}{\beta\gamma+c}, & \frac{\alpha\beta\gamma\delta+\alpha\beta l+\alpha\delta c+\gamma\delta b+bd}{\beta\gamma\delta+\beta\delta+\delta c} \\ b & c & d & e & f \end{array} \quad \&c.$$

Le cose essendo così disposte, per ottenere il numeratore di qualunque frazione equivalente, il numeratore dell'antecedente frazione esposta nella Tavola, si moltiplichi nella lettera sovraposta, ed il numeratore della precedente si moltiplichi nella lettera soscritta; la somma di questi prodotti formerà il numeratore della frazion'equivalente cercata.

Per ottenere il denominatore, si faccia il prodotto del denominatore della frazione antecedente nella lettera sovraposta, e del denominatore della frazione precedente nella lettera sottoposta, e la somma di questi prodotti sarà il denominator cercato.

388. Per rapporto alle frazioni periodiche è stata ritrovata con operosissimo calcolo da M. de la Grange (*vedi gli Atti dell'Acc. di Berl. all'an.* 1729.) la formola generale di un termine equivalente qualun-

lunque. Ella però è soggetta a quest'inconveniente, che richiede forse maggior calcolo per esser applicata, di quello, che richieda il metodo esposto, e perciò noi la tralasciamo.

389. *Scol.* 1.° Le formole dei termini equivalenti si possono ridurre ad espressione più semplice. Pongasi infatti

$$\begin{array}{ll} p = \alpha & p' = 1 \\ q = \alpha\beta + 1 & q' = \beta p' \\ r = q\gamma + p & r' = q'\gamma + p' \\ s = r\delta + q & s' = r'\delta + q' \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

ed i termini equivalenti diverranno $\frac{p}{p'}$, $\frac{q}{q'}$, $\frac{r}{r'}$, $\frac{s}{s'}$ &c.

390. *Scol.* 2.° Facendo adesso riflessione sopra i termini equivalenti si possono scoprire varie loro proprietà.

Primieramente, supposto che la frazione continua sia sotto la forma ordinaria

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta \;\&c.}}}$$

si vede, che si ha $qp' - pq' = 1$, $rq' - r'q = -1$ $sr' - s'r = 1$ &c. cosicchè se $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ sieno due frazioni equivalenti contigue, si vede, che deve aversi generalmente $mn' - mn' = \pm 1$.

Si vede 2.° che deve aversi $\frac{q}{q'} - \frac{p}{p'} = \frac{1}{p'q'}$, $\frac{r}{r'} - \frac{q}{q'} = -\frac{1}{q'r'}$, $\frac{s}{s'} - \frac{r}{r'} = \frac{1}{r's'}$ &c. $\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'} = \pm\frac{1}{nn'}$, d'onde de si raccoglie, che le differenze dei successivi termini equivalenti vanno continuamente diminuendo, perchè le frazioni $\frac{1}{p'q'}$, $\frac{1}{q'r'}$, $\frac{1}{r's'}$ &c. conservando lo stesso numeratore, acquistano successivamente un denominator più grande.

Si vede 3.°, che debbono aver luogo l'equazioni $\frac{q'}{p'}=\beta$, $\frac{r'}{q'}=\frac{\beta\gamma+1}{\beta}=\frac{\gamma+p'}{q'}$, $\frac{s'}{r'}=\frac{(\beta\gamma+1)\delta}{\beta\gamma+1}$ .... $+\frac{\beta}{\beta\gamma+1}=\delta+\frac{q'}{r'}$ &c. cioè $\beta=\frac{q'}{p'}$, $\gamma=\frac{r'}{q'}-\frac{p'}{q'}$, $\delta=\frac{s'}{r'}-\frac{q'}{r'}$ &c. &c.

4.° E'facile finalmente a vedersi, che data essendo una frazione razionale qualunque $\frac{m}{n}$, se ne può sempre trovare un'altra $\frac{m'}{n'}$ tale che sia $mn'-m'n=\pm 1$.

In effetto basta ridurre la frazione data in frazione continua; quindi ridurre in frazion comune la medesima frazione continua diminuita dell' ultimo termine, e con ciò si ha la seconda frazione richiesta.

391. *Scol.* 3. Poste le osservazioni, che veniamo da fare, si possono ridurre i termini equivalenti sotto diverse altre forme, che ci posson'esser utili in appresso.

Prime riduzioni $\frac{q}{q'}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}=\frac{p\beta+1}{p'\beta}$; $\frac{r}{r'}\ldots$ $=\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}$, e ponendo $\frac{q-1}{p}$ in luogo di β,

$=\frac{(\alpha q-\alpha+p)\gamma+\alpha p}{p(\beta\gamma+1)}$, e ponendo p per α, q' in vece di β, e p' in vece di 1, $=\frac{q\gamma+p}{q'\gamma+p'}$. Nel modo stesso si trovano $\frac{s}{s'}=\frac{r\delta+q}{r'\delta+q'}$; $\frac{t}{t'}=\frac{s\varepsilon+r}{s'\varepsilon+r'}$ &c. ...... (Q)

Seconde riduzioni: $\frac{p\beta+1}{p'\beta}=\frac{p}{p'}+\frac{1}{\beta}$; $\frac{q\gamma+p}{q'\gamma+p'}$ $=\frac{q}{q'}+\frac{q\gamma+p'}{q'\gamma+p'}-\frac{q}{q'}=\frac{q}{q'}+\frac{pq'-qp'}{q'(q'\gamma+p')}=\frac{q}{q'}$ $-\frac{1}{q'(q'\gamma+p')}$; e per lo stesso raziocinio $\frac{r\delta+q}{r'\delta+q'}$ $=\frac{r}{r'}+\frac{r\delta+q}{r'\delta+q'}-\frac{r}{r'}=\frac{r}{r'}+\frac{1}{r'(r'\delta+q')}$; $\frac{s\varepsilon+r}{s'\varepsilon+r'}$ $=\frac{s}{s'}-\frac{1}{s'(s'\varepsilon+r')}$ &c. &c. ..... (R).

392. *Teor.* I termini equivalenti sono alternativamente uno maggiore, e l'altro minore del valor totale della frazione continua. *Dimostrazione*. Sia la frazione continua $=\frac{a}{b}$, è manifesto, che α è $<\frac{a}{b}$, perchè per esserle uguale, le manca la serie

$$\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\&c.}}}$$

Il secondo termine $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$ è $>\frac{a}{b}$, perchè $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$ è $=\alpha+\frac{1}{\beta}$, ed $\frac{1}{\beta}$ è $>\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{+\&c.}}$

Il terzo termine $\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}$ è $<\frac{a}{b}$, perchè equivale ad $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}$, dove β è accresciuto di $\frac{1}{\gamma}$, mentre si doveva accrescere di $\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\&c.}}$ quantità $<$ di $\frac{1}{\gamma}$

Si prosegua lo stesso raziocinio, e si concluderà generalmente.

393. *Scol.* Alcuni Algebristi adducono un' altra dimostrazione. Suppongon'essi la frazione principale $\frac{a}{b}$ uguale successivamente a ciascun termine equivalente, ridotto alla forma trovata nello *Scol.* 3.°, onde sia $\frac{a}{b}=\frac{p}{p'}+\frac{1}{\beta}$, $\frac{a}{b}=\frac{q}{q'}-\frac{1}{q'(q'\gamma+p')}$, $\frac{a}{b}=\frac{r}{r'}+\frac{1}{r'(r'\delta+q')}$; $\frac{a}{b}=\frac{s}{s'}-\frac{1}{s'(s'\varepsilon+r')}$ &c., e di qui concludono con tutta facilità $\frac{p}{p'}-\frac{a}{b}=-\frac{1}{\beta}$; ....

$\frac{q}{q'}-\frac{a}{b}=\frac{1}{q'(q'\gamma+p')}$; $\frac{r}{r'}-\frac{a}{b}=-\frac{1}{r'(r'\delta+q')}$; $\frac{s}{s'}-\frac{a}{b}=\frac{1}{s'(s'\varepsilon+r')}$ &c. &c. cioè, che il primo termine $\frac{p}{p'}$ è $<\frac{a}{b}$, che $\frac{q}{q'}$ è $>\frac{a}{b}$ &c. alternativamente.

Se ben si osserva però, si vedrà esser questa una pura *petizione di principio*, poichè si suppongono l'equazioni fra la frazione principale, e ciascun termine equivalente, la di cui sussistenza dipende dalla verità del Teorema, che si deve dimostrare.

394. *Scol.* 1. Se la serie delle frazioni equivalenti $\frac{p}{p'}$, $\frac{q}{q'}$, $\frac{r}{r'}$, $\frac{s}{s'}$ &c. si divida in due, delle quali una contenga i termini di sito pari, e l'altra contenga i termini di sito impari, si avranno due serie $\frac{p}{p'}$, $\frac{r}{r'}$, $\frac{t}{t'}$ &c., $\frac{q}{q'}$, $\frac{s}{s'}$, $\frac{u}{u'}$ &c. delle quali la prima sarà composta dei soli termini $<\frac{a}{b}$, e la seconda dei soli termini $>\frac{a}{b}$.

395. *Scol.* 2.° I successivi termini equivalenti sono tanti limiti della frazione principale $\frac{a}{b}$.

396. *Scol.* 3.° Essendo $\frac{1}{p'q'}$, $\frac{1}{q'r'}$, $\frac{1}{r's'}$ &c. le differenze dei successivi termini equivalenti, siccome p' è $<q'$, $q'<r'$, $r'<s'$ &c. tali differenze deb.

debbono esser generalmente minori delle frazioni $\frac{1}{(p')^2}$, $\frac{1}{(q')^2}$, $\frac{1}{(r')^2}$ &c., cioè la differenza di qualunque termine equivalente da quello, che gli succede, è sempre minore dell'unità divisa per il quadrato del proprio denominatore.

Di qui pertanto si può formare qualche idea dell' approssimazione di ciascun termine; per conoscerla però con maggior'esattezza sia

397. *Probl.* Si dimanda un metodo, con cui determinare con una sufficiente esattezza, quanto un term'equivalente qualunque differisca dalla funzione principale.

Soluzione. Richiamate le formole $\frac{q}{q'}=\frac{p\beta+1}{p}$; $\frac{r}{r'}=\frac{q\gamma+p}{q'\gamma+p'}$; $\frac{s}{s'}=\frac{r\delta+q}{r'\delta+q'}$ &c. sia da determinarsi prossimamente quanto differisca da $\frac{a}{b}$ il termine $\frac{r}{r'}$.

Pongasi $\frac{a}{b}=\frac{s}{s'}=\frac{r\delta+q}{r'\delta+q'}$, onde sia $\frac{a}{b}-\frac{r}{r'}=\frac{r\delta+q}{r'\delta+q'}-\frac{r}{r'}=\frac{qr'-rq'}{r'(r'\delta+q')}=\frac{1}{r'(r'\delta+q')}$. Si avverta adesso, che $\frac{1}{r'(r'\delta+q')}$ per esser la vera differenza, richiederebbe, che δ fosse uguale alla somma di tutta la serie $\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\cfrac{1}{\zeta\ \&c.}}$

Per compensare in qualche modo quest' inesattez-

 ze

za di δ, basta osservare, che la somma di tutte le frazioni, che succedono a δ dev'essere <1; onde, chiamata d una tal somma, dev'esser d compreso fra δ, e $\delta+1$. Posta quest'osservazione si vede, che $\frac{1}{r'(r'd+q')}$ deve contenersi fra $\frac{1}{r'(r'\delta+q')}$, ed ...... $\frac{1}{r'(r'(\delta+1)+q')}$, o sia, ponendo per δ il suo valore $\frac{s'}{r'}-\frac{q'}{r'}$ fra $\frac{1}{r's'}$ ed $\frac{1}{r'(r'+s')}$: Questi per conseguenza dovranno essere i limiti, fra i quali si dovrà contenere la differenza cercata, e ne saranno per conseguenza le misure.

398. Ciò che si è detto per rapporto alla differenza fra $\frac{a}{b}$ ed $\frac{r}{r'}$ vale per ciascun'altra differenza, nè ci siamo serviti di un caso particolare, che per agevolare l'intelligenza della soluzione, per se stessa difficile a dettagliarsi.

399. *Teor.* La differenza, che passa fra due termini equivalenti successivi è la minima, in questo senso, che non v'ha nessun'altra frazione, non dotata di denominator più grande, del denominatore di uno dei termini successivi, la quale possa cadere fra di essi.

Dimostrazione. Sia la frazione $\frac{m}{n}$, che debba essere intermedia fra due termini qualunque $\frac{k}{k'}$, $\frac{\pi}{\pi'}$: dovrà essere $\frac{kn-k'm}{k'n}<\frac{1}{k'\pi'}$; ora siccome

kn-

$kn - k'm$ non può esser <1, rimane, che $\frac{1}{k'n}$ possa esser $< \frac{1}{k'\pi'}$: ma questo non può avvenire, se n non sia $> \pi'$.

Nel modo stesso, pigliando la differenza fra $\frac{m}{n}$ e $\frac{\pi}{\pi'}$ si vede, che essa non può risultar $< \frac{1}{k'\pi'}$ se n non sia $> k'$; Dunque è vero generalmente che &c. &c.

400. Da questo s'inferisce, che siccome il valore di $\frac{a}{b}$ cade sempre fra due termini equivalenti successivi, s'inferisce, dissi, che ciascuno di tali termini, per esempio $\frac{\pi}{\pi'}$, debba esprimere il suddetto valore $\frac{a}{b}$ più accuratamente di qualunque altra frazione $\frac{m}{n}$, in cui qualunqu'essendo il numeratore, sia $n < \pi'$.

401. *Scol.* Non è già per questo, che fra due termini successivi non si possano alle volte inserire delle frazioni intermedie, poichè, per esempio, fra $\frac{q}{q'}$ ed $\frac{r}{r'}$, o sia fra $\frac{p\alpha + 1}{p'}$ e $\frac{q\gamma + p}{q'\gamma + p'}$, qualora sia $\gamma > 1$, per esempio $=4$ si possono inserire le frazioni intermedie $\frac{q+p}{q'+p'}$, $\frac{2q'+p}{2q'+p'}$, $\frac{3q+p}{3q'+p'}$, e lo stesso vale per le altre coppie di termini equivalenti,

ti, purchè quella delle quantità α, β, γ, δ &c., che appartiene al secondo, sia > 1.

402. *Teor.* Ciascuno dei termini equivalenti è ridotto alla più semplic'espressione, cioè i di loro numeratori sono numeri primi respettivamente ai denominatori.

Dimostrazione ad assordo. Abbia un termine qualunque $\frac{m}{n}$ un fattor comune ai suoi due termini > 1, onde sia $m = eg$, $n = fg$; detto $\frac{m'}{n'}$ il termine, che gli succede, dovrà essere, $mn' - nm' = g(en' - fm') = \pm 1$, o sia dovrà essere $en' - fm' = \pm \frac{1}{g}$, il che, a motivo che e, n', f, m' sono quantità intere, non può assolutamente avvenire.

403. *Probl.* Trasformare una frazion continua qualunque in serie ordinaria.

Soluzione. Siccome si sa, che le differenze successive dei termini equivalenti contigui vanno continuamente decrescendo, si tolga successivamente ciascun termine da quello, che gli succede, e disponendo le differenze per ordine, si avrà la serie ....

$$\frac{\alpha}{1} + \frac{b}{\beta} - \frac{bc}{\beta(\beta\gamma + c)} + \frac{bdc}{\delta(\beta\gamma + c)^2 + \beta d(\beta\gamma + c)} - \frac{bcde}{\beta^2 e(\gamma\delta + d)^2 + \delta c(\beta\gamma + c)^2 + 2\delta ec(\gamma\delta + d) + \beta dc(\beta\gamma + c) + d^2 ec^2} \text{ \&c.}$$

e questa si può veder facilmente, che equivale alla serie continua $\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta \text{ \&c.}}}}$,

poi-

poichè sommandone successivamente i termini si ottengono i successivi termini equivalenti trovati al §. 397., onde ne segue, che facendo la somma di tutti i termini della serie, essa dev'essere uguale all'ultimo termine equivalente, cioè a dire, al valor totale della frazione.

Benchè la ragione di una tal'eguaglianza si può concepire anche meglio col seguente raziocinio.

Togliendo $\frac{\alpha}{1}$ da $\frac{\alpha\beta+b}{\beta}$ si ottiene una differenza positiva $\frac{b}{\beta}$, che essendo aggiunta ad $\frac{\alpha}{1}$ deve produrre necessariamente $\frac{\alpha\beta+b}{\beta}$.

Togliendo $\frac{\alpha\beta+b}{\beta}$ dal terzo termine $\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha c+\gamma b}{\beta\gamma+c}$ si ottiene una differenza negativa, la quale essendo aggiunta al termine sottratto, dee produrre il termine, da cui si fece la sottrazione, cioè il terzo termine equivalente, e così in seguito, finchè si ottenga l'ultimo, il quale non differisce dal valor totale della frazione.

Esempio. Si debba ridurre in serie comune la frazione continua $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{38+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}$

Prese le differenze divisate si avrà, omesso l'intero,

tero, $\frac{1}{2}$ per primo termine; $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{38}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{154}$

per secondo termine; $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{38+\cfrac{1}{7}}}-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{38}}=\frac{1}{41657}$ per

terzo termine; $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{38+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{38+\cfrac{1}{7}}}=-\frac{1}{1212381}$

per ultimo termine.

Si avrà per per conseguenza la serie finita ......

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{154}+\frac{1}{41657}-\frac{1}{1212381}.$$

In questa, effettuate le sottrazioni dei termini di sito pari, e sommati i residui, si avrà $S=\frac{3347}{2241}$ valore completo della frazione proposta (*n.* 398.)

404. *Scol.* Se vogliasi trasformata una frazione continua in una serie affetta da segni tutti positivi, non si ha, che a sommare successivamenre ciascun termine negativo col termine, che lo precede. In questa guisa la serie addotta diverrà della forma ...

$$(B)\ldots\frac{\alpha}{1}+\frac{b\gamma}{\beta\gamma+c}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{abc\varepsilon}{(\alpha\beta+c)(\beta\gamma\delta\varepsilon+c\delta\varepsilon+d\gamma\varepsilon+d\beta\varepsilon+d\beta\gamma+c\varepsilon)}+\&c.$$

Pas-

405. *Probl.* Trasformare una serie qualunque in frazione continua. *Soluzione*. Sia la serie proposta della forma $A-B+C-D+E-\dots\pm\Pi$. Questa si paragoni ordinatamente con la serie (A) diminuita dell'intero a, che non fa parte nella frazione, e si avranno l'equazioni, che seguono (1.°)

$$A=\frac{b}{\beta};\ B=\frac{bc}{\beta(\beta\gamma+c)};\ C=\frac{bcd}{\delta(\beta\gamma+c)+\beta d(\beta\gamma+c)},$$

$D=$ &c. Di qui (2.°) $A=\frac{b}{\beta}$, $\frac{A}{B}=\frac{c}{\beta\gamma+c}$, $\frac{B}{C}=\frac{\beta d}{\delta(\beta\gamma+c)+\beta d}$; $\frac{C}{D}$ &c.

Dalla prima si deduce $b=A\beta$; dalla seconda $c=\frac{B\beta\gamma}{A-B}$; Dalla terza $d=\frac{C\beta\gamma\delta+C\delta c}{\beta(B-C)}$, e sostituito il valore di c $\frac{AC\gamma\delta}{(A-B)(B-C)}$: Nel modo stesso trovansi gli altri numeratori e, f &c. Per rapporto ai denominatori, si avverta, che essi debbonsi prender tali, che i numeratori b, c, d &c. risultino interi: quindi si può far $B=1$, $\gamma=A-B$, $\delta=B-C$ &c. ne deriverà in questa guisa $b=A$, $c=B$, $d=AC$ &c.. e sostituendo questi valori nella frazione continua $x=\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma+\&c.}}$ si avrà

$$x=A+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{AC}{B-C+\cfrac{BD}{C-D\ \&c.}}}=A-B+C-D\ \&c.$$

Esempio 1.° Si debba ridurre in frazione continua la serie $\frac{a}{A}-\frac{a}{AB}+\frac{a}{ABC}-\frac{a}{ABCD}+$ &c.

Ope-

Operazione. Si formino l'equazioni di sopra esposte, onde si abbia $\frac{a}{A}=\frac{b}{\beta}$; $\frac{a}{AB}:\frac{a}{A}=\frac{1}{B}=\frac{c}{\beta\gamma+c}$; $\frac{a}{ABC}:\frac{a}{AB}=\frac{1}{C}=\frac{\beta d}{\delta(\beta\gamma+c)+\beta d}$ &c. e da queste si dedurrà $b=\frac{a\beta}{A}$, $c=\frac{\beta\gamma}{B-1}$, $d=\frac{B\gamma\delta}{(B-1)(C-1)}$ &c. Ora dovendo i numeratori esser tali, che i denominatori risultino interi, pongasi $\beta=A$, $\gamma=B-1$, $\delta=C-1$ &c. e perciò $b=a$, $c=\beta=A$, $d=B$ &c. e sostituiti questi valori nella formola generale si otterrà ....

$$x=\cfrac{a}{A+\cfrac{A}{B-1+\cfrac{B}{C-1+\cfrac{C}{D-1\ \&c.}}}}=\frac{a}{A}-\frac{a}{AB}+\frac{a}{ABC}-\frac{a}{ABCD}+\ \&c.$$

Sia, per esempio, $a=2$, $A=B=C$ &c. $=3$, e si avrà la serie

$$\frac{2}{3}-\frac{2}{9}+\frac{2}{27}-\frac{2}{81}\ \&c.=\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\&c.}}}$$

Esempio 2.° Sia da ridursi in frazione continua la serie $\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+$&c. Fatti i paragoni come sopra, si avrà $b=\frac{\beta}{A}$, $c=\frac{Abc}{B-A}$, d ....

$= \dfrac{B^2cd}{(B-A)\,(C-D)}$, $e = \dfrac{C^2de}{(C-B)\,(D-C)}$ &c. onde se pongasi come segue $\beta = A$, $\gamma = B-A$; $\delta = C-B$, $\varepsilon = D-C$&c., si avrà $b=1$, $c=A^2$, $d=B^2$, $e=D^2$ &c. e quindi sarà finalmente $x = \dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B} + \dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{D}$ &c. $= \cfrac{1}{A + \cfrac{A^2}{B-A + \cfrac{B^2}{C-B + \cfrac{C^2}{D-C \text{ \&c.}}}}}$

Sia, per esempio $A=1$, $B=3$, $C=5$, $D=7$&c. onde abbiasi la serie $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} -$&c. la quale come si vedrà, rappresentata l'ottava parte della periferia circolare, di cui sia il raggio $=1$; Sostituiti i valori si avrà $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}$ &c. ....

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 \text{ \&c.}}}}}}$$

Dicasi 2π la circonferenza del circolo, e sarà la suddetta frazione $= \dfrac{\pi}{4}$, e rovesciando ambedue i membri, si

si avrà $\pi = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 \text{ \&c.}}}}$ che è l'espressione di Brouncker.

Qualora la serie proposta fosse affetta da segni tutti positivi, si prenderebbe per serie comparativa la serie (B) e si opererebbe come sopra.

406. Siccome le frazioni continue altro non sono realmente, che serie convergenti (*n.* 402.) convien' osservare se sia possibile ottenerne la somma, poichè questa può esser utile ancora per sommar le serie ordinarie, le quali, come si è veduto, si possono sempre ridurre in frazione continua.

Passiamo dunque a questa ricerca.

Sia in generale $x = \lambda' + \dfrac{1}{x'}$, $x' = \lambda'' + \dfrac{1}{x''}$, $x'' = \lambda''' + \dfrac{1}{x'''}$ $x^{(m)} = \lambda^{(m+1)} + \dfrac{1}{x^{(m+1)}}$, e si avrà ....

$$x = \lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \cfrac{1}{\lambda''' + \cfrac{1}{\lambda'''' \text{\&c.} + \cfrac{1}{\lambda^{(m)}}}}}$$

Pongasi $l=1$, $l'=\lambda'$, $l''=\lambda''l'+l$, $l'''=\lambda'''l''+l'$... $l^{(m)} = \lambda^{(m)}l^{(m-1)} + l^{(m-2)}$ .... (K)
$L=0$, $L'=1$, $L''=\lambda''L'$, $L'''=\lambda'''L''+L'$ .... $L^{(m)}=\lambda^{(m)}L^{(m-1)} + L^{(m-2)}$ .... (K'), e si avranno i termini equivalenti, sotto le forme, che seguono .....

$\frac{l}{L}, \frac{l'}{L'}, \frac{l''}{L''}, \frac{l'''}{L'''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{l^{(m)}}{L^{(m)}}$.

Posto tutto questo, dall' equazione $x=\lambda'+\frac{1}{x'}$ si deduce $xx'=x'\lambda'+1$; nel secondo membro di questa si ponga per x' il suo valore $\lambda''+\frac{1}{x''}$, e moltiplicando per x'' si avrà $xx'x''=l''x''+l'$; si sostituisca, come sopra, $\lambda'''+\frac{1}{x'''}$ in luogo di x'', e moltiplicando per x''' si otterrà $xx'x''x'''=l'''x'''+l''$. onde si avrà in generale $xx'x''x'''x'''' \ldots\ldots\ldots\ldots x^{m} = l^{(m)}x^{(m)}+l^{(m-1)} \ldots (A)$

Per il medesimo raziocinio si avrà dall'equazione $x'=\lambda''+\frac{1}{x''}$, $x'x''=\lambda''x''+1$, $=L''x''+L'$, e sostituendo nel secondo membro $\lambda'''+\frac{1}{x'''}$ in luogo di x'', e moltiplicando per x'''; si dedurrà $x'x''x'''=(\lambda''L''+L')x'''+L''=L'''x'''+L''$, e in generale si avrà $x'x''x'''x''''x''''' \ldots x^{(m)} = L^{(m)}x^{(m)}+L^{(m-1)} \ldots (B)$

Ottenute così le due equazioni (A), e (B), si divida la prima per la seconda; e si otterrà ………

$$x=\frac{l^{(m)}x^{(m)}+l^{(m-1)}}{L^{(m)}x^{(m)}+L^{(m-1)}},$$

formola, dalla quale si avrà la somma di qualunque frazion continua finita. Difatto terminando la frazione col denominatore $x^{(m)}$ si ha $x^{(m)}=\lambda^{(m+1)}$, valore, che essendo sostituito nella formola esposta, la trasforma in questa

$$x=\frac{l^{(m)}\lambda^{(m+1)}+l^{(m-1)}}{L^{(m)}\lambda^{(m+1)}+L^{(m-1)}}$$

dove non si ha, che da determinare le quantità $l^{(m)}$, $l^{(m-1)}$, $L^{(m)}$, $L^{(m-1)}$ per mezzo delle formole (K), (K').

407. Per rapporto alle frazioni continue infinite non si hanno metodi generali. Si sanno però sommar quelle, che hanno i termini tutti eguali, e quelle, che gli hanno periodici. Incominciamo dalle prime, e sia

408. *Probl.* Si dimanda un metodo, con cui sommare una frazion continua infinita qoalunque, dotata di termini tutti eguali. *Soluzione*. La frazione generale, di cui si tratta, sia

$$\cfrac{\alpha}{\beta+\cfrac{\alpha}{\beta+\cfrac{\alpha}{\beta+\cfrac{\alpha}{\beta\ \&c.}}}}$$

e si ponga $=x$.

E' manifesto, che dovrá esser' ancora ………

$x=\frac{\alpha}{\beta+x}$ cioè $x^2+\beta x-\alpha=0$; Questa sarà l'equazione, la di cui soluzione, in virtù dei metodi dell'Analisi, darà il valor di x, cioè la somma richiesta.

409. *Probl.* Si dimanda un metodo, con cui sommare una frazione continua infinita qualunque, dotata di termini periodici. *Soluzione*. Sia la frazione generale periodica

$$\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\alpha}{c+\cfrac{\alpha}{b+\&c.}}}$$

e questa pongasi $=x$; è facile

cile a vedersi, che si avrà ugualmente $x = \cfrac{a}{b+\cfrac{a}{c+a\ \&c.}}$ .... : si faccia per maggior brevità $\cfrac{a}{b+\cfrac{a}{c}} = \frac{p}{q}$, onde sia $x = \frac{p}{q+x}$, e si avrà, come sopra, $x^2+qx-p=0$, ed in quest'equazione si comprenderà il valor di x, o sia la somma richiesta.

410. *Scol.* 1. Se vi fosse un numero di termini qualunque, antecedente al periodo, si prenderebbe la somma della frazione periodica, e poscia se le aggiungerebbe la somma di tali termini antecedenti al periodo, e con ciò si avrebbe la somma richiesta.

411. *Scol.* 2. Si potrà vedere a suo luogo, che la somma rappresentata dall' equazione di secondo grado, trovata coll'esposto metodo, non è che approssimata, a motivo, che il valor di x vien espresso per una funzione universalmente irrazionale.

412. *Scol.* 3. Siccome le frazioni continue sono riducibili in serie convergente, qualora la frazione continua infinita non abbia nè i termini eguali, né i termini periodici, si ridurrà in serie, e si osserverà, se la serie risultante sia suscettibile dei metodi esposti nel Capitolo della somma delle serie, e si avrà con ciò la somma della frazione continua, qualora si abbia quella della serie.

Viceversa, qualora non si sappia trovar la somma di una serie, si ridurrà in frazione continua, e si osserverà, se ella possa sommarsi.

CAPITOLO VIII.

Delle frazioni parziali.

413. Le frazioni parziali si distinguono con questo nome, perchè altro non sono, che le parti, nelle quali può sciogliersi una frazione data.

Sopra si è veduto (*n.*355.) che risolvendo in serie una frazione, si trova sempre una serie ricorrente di un'ordine marcato dal numero dei termini, che formano il denominatore. Per evitar le serie ricorrenti di un'ordine troppo elevato, si prendono le frazioni parziali, e ciascuna di esse si risolve in serie, dopo di che, per ottener la serie cercata, resta soltanto da sommare ordinatamente le serie ottenute.

L' uso principale però di queste frazioni è nel calcolo Integrale. Noi passiamo a trattarne compitamente.

414. Data una frazione qualunque a risciogliersi nelle frazioni parziali, la prima avvertenza, che si deve avere, è che il numeratore sia tale, che la massima potenza, che ha in esso l'incognita, o la quantità principale della funzione, sia minore della massima potenza della medesima quantità nel denominatore. Quando ciò non sia, si dividerà il numeratore per il denominatore, e si avrà con ciò la condizione richiesta. In questo modo la frazione $\frac{x^4}{a+bx^2}$ si riduce ad $\frac{x}{b} - \cfrac{\frac{a}{b}x}{a+bx^2}$.

La ragione di questo riguardo si comprenderà in appresso.

415. Posto questo, sia da risciogliersi nelle frazio-

zioni principali una frazione qualunque. Il denominatore di tal frazione dovrà esser composto 1.°, o di fattori tutti reali diseguali, 2.°, o di fattori tutti reali eguali, 3.°, o di fattori tutti reali in parte eguali, e in parte diseguali, 4.°, o di fattori tutti immaginarj, 5.° finalmente di fattori in parte reali, eguali, e diseguali, e in parte immaginarj, eguali, e diseguali.

Tutte queste diverse forme di composizione, che possono aver parte nella formazione del denominatore di una frazione proposta, vengono a costituire tanti diversi casi, che si debbono considerare distintamente.

Caso 1. Sia da sciogliersi nelle frazioni parziali la frazione a fattori reali diseguali ....

$\frac{X}{(x\pm a)(x\pm b)(x\pm c)\&c.}$ dove la potenza massima di x nel denominatore sia minore della massima potenza di x nel numeratore X, che si suppone essere una funzione qualunque algebraica di x.

Metodo 1.° Pongasi $\frac{X}{(x\pm a)(x\pm b)(x\pm c)}$ &c. $= \frac{A}{x\pm a}+\frac{B}{x\pm b}+\frac{C}{x\pm c}$&c. finchè vi sono fattori nel denominatore; Quindi si faccia la moltiplicazione di ambedue i membri per il denominatore $(x\pm a)(x\pm b)(x\pm c)$ &c., facciansi l'equazioni a zero di ciascun'aggregato di termini omologi, e si dedurranno così i valori di A, B, C, &c. con che saranno determinate le frazioni parziali.

Met. 2.°. Fatta come sopra la moltiplicazione per il denominatore della frazione proposta, si ponga eguale a zero successivamente ciascun fattore,

 (il

(il che si può fare, perchè i valori di A, B, C &c. non dipendono in modo alcuno dal valore di x): rimarrà così nel secondo membro dell'equazione ipotetica una sola delle indeterminate A, B, C &c. che perciò verrà immediatamente a determinarsi. Vediamo un esempio di ambedue i metodi.

Esempio 1.° del primo Metodo. Sia proposta la frazione $\frac{2x^2-6x-2}{x(x-1)(x+2)}$ a risciogliersi nelle frazioni parziali. Facciasi $=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$. Effettuata la moltiplicazione si avrà ....

$$\begin{aligned}2x^2-6x-2=-2A&+Ax+Ax^2 \;:\\ &+2Bx+Bx^2\\ &-Cx+Cx^2\end{aligned}$$

Traspongasi, e facciasi $=0$ ciascun' aggregato di termini omologi, e si avrà $A=1$, $B=-2$, $C=3$, e perciò $\frac{2x^2-6x-2}{x(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$.

Esempio 2.° Debbasi sciogliere nelle frazioni parziali la medesima frazione, mediante il secondo Metodo.

Fatta la moltiplicazione di sopra indicata, si ha $2x^2-6x-2=(x^2+x-2)A+(x^2+2x)B+(x^2-x)C$ Facciasi $x=0$, e si avrà $-2=-2A$, o sia $A=1$; Facciasi $x-1=0$, o sia $x=1$, e si avrà $-6=3B$, cioè $B=-2$; si faccia finalmente $x+2=0$, cioè .... $x=-2$, e si troverà $C=3$, perfettamente come sopra.

416. *Scol.* Si può adesso comprendere, perchè si debba render la potenza massima dell' incognita nel numeratore minore della massima potenza della

la medesima incognita nel denominatore, perchè si vede, che i termini del numeratore, i quali fossero affetti da una potenza eguale, o maggiore della massima del denominatore, non avrebbero alcun termine, col quale esser paragonati per esser posti eguali a zero.

Caso 2.° Sia data la frazione $\frac{X}{(p-qx)^m}$.

Il numeratore X dovendo contenere una potenza di $x<m$, dev'esser della forma $a+bx+cx^2 .. +kx^{m-1}$ essendo qualunque il valore di a, b, c &c. k, non escluso il zero. Ora la suddetta forma si riduce facilmente a quest'altra $A+B(p-qx)+C(p-qx)^2+ ... \Pi(p-qx)^{m-1}$ perchè sviluppando le potenze, e ordinando, ne deriva una funzione della forma stessa, la di cui identità, con la prima funzione non dipende che dai valori di A, B, C &c. Π che si possono sempre determinare opportunamente.

Posto questo, la frazione $\frac{X}{(p-qx)^m}$ si può metter sotto la forma (K) ....

$$\frac{X}{(p-qx)^m}=\frac{A+B(p-qx)+C(p-qx)^2 ... +\Pi(p-qx)^{m-1}}{(p-qx)^m}$$

funzione che si divide naturalmente nelle frazioni parziali $\frac{A}{(p-qx)^m}+\frac{B}{(p-qx)^{m-1}}+\frac{C}{(p-qx)^{m-2}}$ ...., $+\frac{\Pi}{p-qx}$.

Trovata così la forma, che debbono aver le frazioni parziali, nell'equazione (K) si trascuri il denominatore, si trasponga tutto in un membro, e si facciano l'equazioni a zero dei coefficienti di ciascuna potenza di x, e con ciò determinandosi A, B, C &c. Π si avranno le frazioni parziali cercate.

Met. 2.° Nell'equazione (K) deve aversi il numeratore del secondo membro identicamente uguale a quello del primo, altrimenti la somma delle frazioni parziali $\frac{A}{(p-qx)^m}$, $\frac{B}{(p-qx)^{m-1}}$ .... $\frac{\Pi}{p-qx}$, la quale ha per numeratore la funzione stessa, che forma il numeratore del suddetto secondo membro, non potrebbe risultare uguale ad X. Dunque se in ambedue i membri della suddetta equazione si ponga x eguale ad una data quantità, i due membri rimarranno eguali. Pongasi pertanto $x=\frac{p}{q}$, valore, che deriva dal fare $p-qx=0$: si avrà con questo A eguale a ciò, che diviene X con farvi $x=\frac{p}{q}$.

Determinato il valore di A, si sostituisca nell' equazione $X=A+B(p-qx)+C(p-qx)^2 .. \Pi(p-qx)^{m-1}$ trasponendolo nel primo membro, onde abbiasi, detto A' un tal valore ....

$$X-A'=B(p-qx)+C(p-qx)^2 .... +\Pi(p-qx)^{m-1}$$

Si dividano adesso ambedue i membri per $p-qx$, e si avrà $\frac{X-A'}{p-qx}=B+C(p-qx) ... +\Pi(p-qx)^{m-2}$

Avvertasi che $X-A'$ dev'esser divisibile esattamente per $p-qx$, perchè nella determinazione di A, si è trovato $X-A'=0$ nell'ipotesi di $p-qx=0$, il che mostra dover essere $p-qx$ un fattore di $X-A'$. Sia dunque Q il quoziente, onde abbiasi ....

$$(K') .. \; Q=B+C(p-qx)+D(p-qx)^2 .. +\Pi(p-qx)^{m-2}$$

Il

Il secondo membro dovrà essere identico al primo perchè son derivati ambedue da i due membri primitivi dell'equazione (K) (supposto in essa trascurato il denominatore), per mezzo di operazioni comuni a ciascuno di essi. Dunque facendo dinuovo $x=\frac{p}{q}$ cioè $p-qx=0$, i due risultati saranno eguali. Si avrà per conseguenza $B=$ ciò, che diventa $\mathfrak{Q}$ dopo che siavi fatto $x=\frac{p}{q}$, e che sia, per esempio B'.

Questo valore si sostituisca nell'equazione (K') e si trasponga nel primo membro onde sia.

$$\mathfrak{Q}-B'=C(p-qx)+D(p-qx)^2 \ldots\ldots +\Pi(p-qx)^{m-2}$$

Si divida per $p-qx$, e dovrà essere per il raziocinio addotto di sopra, $\mathfrak{Q}-B'$ divisibile per $p-qx$; perciò detto $\mathfrak{Q}'$ il quoziente si avrà ....

$$\mathfrak{Q}'=C+D(p-qx)+E(p-qx)^2 \ldots\ldots +\Pi(p-qx)^{m-3}$$

Facciasi $p-qx=0$, e si dedurrà $C=$ ciò, che diviene $\mathfrak{Q}'$ con farvi $x=\frac{p}{q}$, e così in seguito.

Esempio *del* 1. *Met.* Si debba sciogliere nelle frazioni parziali la frazione $\frac{2x}{(1-x)^3}$.

Operazione. Si ponga $\frac{2x}{(1-x)^3}=\frac{A}{(1-x)^3}\ldots\ldots+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1-x}$, e si avrà $2x-A-B(1-x)-C(1-x)^2=0$. Quindi $A=-B-C$; $B=-2C-2$, $C=0$.

Dalla 2.ª si ha $B=-2$, e sostituendo nella prima

ma $A=2$: perciò $\frac{2x}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1-x)^2}$.

Esempio 2.° Sia proposta la frazione $\frac{2x^2}{(1-x)^3}$.

Operazione. Si avrà $2x^2-A-B(1-x)-C(1-x)^2=0$; di qui $A=-B-C$, $B=-2C$, $C=2$; sostituendo il valore di C nella seconda, $B=-4$, e sostituendo i valori di C, e di B nella prima $A=2$; perciò $\frac{2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{4}{(1-x)^2}+\frac{2}{1-x}$.

Esempio 1.° *del* 2.° *Met.* Sia da sciogliersi nelle frazioni parziali la frazione $\frac{2x}{(1-x)^2}$; si avrà $\frac{2x}{(1-x)^2}=\frac{A}{(1-x)^2}+\frac{B}{(1-x)}$, e perciò $2x=A+B(1-x)$; facciasi $x=1$, e si avrà $A=2$; quindi si trasponga il valore di A, onde sia $2x-2=B(1-x)$; Dividasi per $1-x$, e ne risulterà $\frac{2x-2}{1-x}=-2=B$;

Dunque $\frac{2x}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{2}{1-x}$.

Esempio 2.° Sia data la frazione $\frac{2x^2}{(1-x)^2}$. Si avrà $2x^2=A+B(1-x)+C(1-x)^2$. Fatto $x=1$; si ottiene $A=2$. Quindi trasponendo il valore di A, e dividendo per $1-x$, $\frac{2x^2-2}{1-x}=-2x-2=B+C(1-x)$; facciasi $x=1$, e sarà $B=-4$; Traspongasi il valore di B, e si avrà ....

$-2x-2+4=-2x+2=C(1-x)$: dividasi per $1-x$, e si otterrà finalmente $C=-\frac{2x-2}{1-x}=+2$, e con questo le frazioni parziali risultano $\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{4}{(1-x)^2}+\frac{2}{1-x}$ che sono le medesime che quelle trovate nell' esempio 2.° col primo Metodo.

Caso 3.° Sia proposta la frazione $\frac{X}{(p-qx)^m S}$ dove sia S un fattor disuguale qualunque.

Pongasi $\frac{X}{(p-qx)^m S}=\frac{A}{(p-qx)^m}+\frac{B}{(p-qx)^{m-1}}+\frac{C}{(p-qx)^{m-2}}\ldots\ldots+\frac{\Pi}{p-qx}+\frac{P}{S}\ldots\ldots$

$$=\frac{AS+BS(p-qx)+CS(p-qx)^2\ldots+\Pi S(p-qx)^{m-1}+P(p-qx)^m}{(p-qx)^m S},$$

e lasciando solo in un membro P ....

$$\frac{X-AS-BS(p-qx)-CS(p-qx)^2\ldots\Pi S(p-qx)^{m-1}}{(p-qx)^m}=P$$

Quindi si ragioni in questa guisa.

Affinchè il primo membro risulti eguale ad una quantità intera P, conviene, che il suo numeratore sia divisibile per $(p-qx)^m$. Si supponga dunque divisibile sulle prime per $p-qx$; Facendo $p-qx=0$, dovrà svanire totalmente, e perciò dovrà aversi $A=\frac{X}{S}$, nell'ipotesi di $x=\frac{p}{q}$; Sia A' il valore di A così determinata, e si divida la funzione $X-A'S-BS(p-qx),\ldots-S\Pi(p-qx)^{m-1}$

per $p-qx$; detto $\frac{X-A'S}{p-qx}=X'$ si ha .... $X'-BS-CS(p-qx)\ldots\Pi S(p-qx)^{m-2}$, che deve esser divisibile per $(p-qx)^{m-1}$.

Si ponga divisibile per $p-qx$, e dovrà detta funzione svanire nell'ipotesi di $x=\frac{p}{q}$, e si avrà $B=\frac{X'}{S}$ fatto $x=\frac{p}{q}$; proseguendo nel modo stesso si trova $C=\frac{X''}{S}$ posto $x=\frac{p}{q}$, dove $X''=\frac{X'-BS}{p-qx}$; così pure si trova $D=\frac{X'''}{S}$ fatto $x=\frac{p}{q}$, e così in seguito.

Per rapporto a P, basta riguardar S, come un fattore, di cui la potenza m sia $=1$, e con ciò si trova il suo valore in un modo simile a quello, con cui si trovò A, cioè si trova $P=\frac{X}{(p-qx)^m}$ nell' ipotesi di $x+1=0$, cioè di $x=-1$.

Oltre di questo metodo si può adoperare ancora il metodo dell'equazioni a zero dei termini omologi praticato di sopra.

Esempio. Si debbano trovar le frazioni parziali della frazione.. $\frac{2x^2}{(1-x)^3(1+x)}$; Questa si ponga $=\frac{A}{(1-x)^3}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1-x}+\frac{P}{1+x}$ quindi ....

$$\frac{2x^2-A(1+x)-B(1+x)(1-x)-C(1+x)(1-x)^2}{(1-x)^3}=P$$

Perciò $A=\frac{2x^2}{1+x}$ fatto $x=1$, cioè $A=1$; $B=$

$\frac{2x+1}{1+x}$ nell'ipotesi di $x=1$, cioè $B=-\frac{3}{2}$;

$C=\frac{1}{2}\frac{1(1-x)}{1+x}:(1+x)$ fatto $x=1$, $=\frac{1}{2}:1+x$

$=\frac{1}{4}$; e $P=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$ fatto $x+1=0$, o sia $x=-1$,

cioè $P=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Con questo le frazioni richieste sono ....

$$\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{3}{2(1-x)^2}+\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1}{4(1+x)}.$$

Cas. 4.° Sia data una frazione, il di cui denominatore sia composto di fattori tutti immaginarj. Siccome ciascuna coppia di fattori immaginarj corrispondenti, forma un prodotto sempre reale di secondo grado, come si vedrà (*Teor. dell'equaz.*) la frazione data deve esser della forma ....

$$\frac{X}{(a+bx+cx^2)(e+fx+gx^2)(h+kx+lx^2)}\ \&c.$$

Questa frazione si ponga $=\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}$ ....

$+\frac{C+Dx}{e+fx+gx^2}+\frac{E+Fx}{h+kx+lx^2}$ &c. e si faccia per semplicità maggiore ....

$(e+fx+gx^2)(h+kx+lx^2)=Q$

$(a+bx+cx^2)(h+kx+lx^2)=R$

$(a+bx+cx^2)(e+fx+gx^2)=S$, e si avrà ......

$X=(A+Bx)Q+(C+Dx)R+(E+Fx)S$.

Pongasi adesso $a+bx+cx^2=0$, e saranno $R=0$, $S=0$, e risulterà $X=(A+Bx)Q$.

Sie-

Sieno i fattori di $a+bx+cx^2=0$, $t+rx=0$, $p+qx=0$, onde sia $x=-\frac{t}{r}$, $x=-\frac{p}{q}$. Preso il primo valore sarà $Q=(e-f\frac{t}{r}+g\frac{t^2}{r^2})(h-k\frac{t}{r}+l\frac{t^2}{r^2})$, e preso l'altro valore di x, si avrà un' altra espressione di Q, che sarà per esempio Q'. Sostituiscansi questi valori nell'equazione $X=(A+Bx)Q$, e si otterranno le due Funz.$^{ne}\left(-\frac{t}{r}\right)=\left(A-B\frac{t}{r}\right)$

Q; Funz.$^{ne}\left(-\frac{p}{q}\right)=\left(A-B\frac{p}{q}\right)Q'$, e perciò

$A=$ funzione $\left(-\frac{t}{r}\right):Q+B\frac{t}{r}$ ....(*)..............

$A=$ funzione $\left(-\frac{p}{q}\right):Q'+B\frac{p}{q}$.

Eguagliando adesso questi due valori si ha funzione $\left(-\frac{t}{r}\right):Q+B\frac{t}{r}=$ funzione $\left(-\frac{p}{q}\right):$

$Q'+B\frac{p}{q}$.

Da quest' equazione si deduca il valore di B; questo dipoi si sostituisca in una dell'equazioni (*), ed avendosi così il valore di A, rimarrà determinata la prima frazione parziale $\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}$.

Si trattino nel modo stesso gli altri fattori quadratici, e si determineranno C, D, E, F &c.

417. *Scol.* La supposizione fatta, che ciascun fattor

tor quadratico sia successivamente uguale a zero non si oppone in verun modo alla dovuta generalità, perchè le indeterminate A, B, C &c. dovendo esser le stesse, qualunque sia il valor di x, è permesso di determinarle, con dare ad x quel valore, che più ne agevoli la determinazione.

Caso 5.° Essendo finalmente proposta una frazione, il di cui denominatore sia composto di fattori reali, in parte uguali, ed in parte disuguali, e di fattori immaginarj, se ne troveranno le frazioni parziali nel modo seguente.

La frazione della qualitá divisata dev' esser della forma $\frac{X}{(x\pm a)(x\pm b)\&c.\,(p\pm qx)^{n}(a'+b'x+c'x^{2})}$ &c.:

Questa si ponga $=\frac{A}{x\pm a}+\frac{B}{x\pm b}$ &c. $+\frac{A'}{(p\pm qx)^{n}}$

$+\frac{B'}{(p\pm qx)^{n-1}}$.................. $+\frac{\Pi}{p\pm qx}+\frac{A''+B''x}{a'+b'x+c'x^{2}}$

$+\frac{C''+D''x}{d+ex+fx^{2}}+$ &c. &c.

Si moltiplichi per il denominatore della frazione data; si trasponga tutto in un membro, e si formino l'equazioni a zero dei termini omologi. e così verranno a determinarsi i numeratori A, B &c. A', B' &c. A'', B'', C'', D'' &c. e con ciò le frazioni richieste.

CAPITOLO IX.

Teoria delle Funzioni Logarimmiche.

418. Dolevansi da gran tempo gli Analisti dell' operosa lunghezza de' calcoli nelle moltiplicazioni, e nelle

e nelle divisioni dei numeri molto grandi, e sopratutto nella formazione delle potenze, e nell'estrazione delle radici un poco elevate; quando il genio felice di Nepero, Barone Scozzese, inmaginò una nuova specie di calcolo, cioè il Calcolo Logarimmico, per cui la difficoltà delle operazioni venne mirabilmente diminuita. Egl'infatti mediante il suo Metodo ridusse le moltiplicazioni a somme semplicissime; le divisioni a semplicissime sottrazioni; le formazioni delle potenze a facili moltiplicazioni, come pure l'estrazioni delle radici a divisioni egualmente facili, e pronte.

I lumi però di questa memoranda scoperta non si limitarono a sodisfare alla comodità dei calcoli; tutta l'Analisi ritrovò in lei delle risorse non meno inaspettate, che interessanti, e la Teoria dei logarimmi divenne ben tosto uno dei più vantaggiosi, e più fecondi oggetti delle Analitiche meditazioni.

Entriamo a trattarne,

419. Sia a^{n} il termine generale di una progressione geometrica, qualunque, in cui sia $a>1$, ed n un numero intero indeterminato. Si diano ad n successivamente i valori dei numeri naturali, e si faccia per maggior semplicità .... $a^{1}=A$, $a^{2}=B$, $a^{3}=C$, $a^{4}=D$ ...... $a^{n}=X$.

Quindi si dispongano per ordine gli esponenti n sopra le respettive potenze, onde abbiansi le due serie

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \ldots\ldots\ldots\ n$

$1,\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G \ldots\ldots\ldots\ X$

La serie superiore sarà ciò che dicesi serie de' Logarimmi; dunque i Logarimmi altro non sono che gli esponenti delle potenze, che procedono in serie continua.

420.

420. *Scol.* La quantità a dicesi la base del sistema logarimmico; e generalmente dicesi base quella quantità, che ha per logarimmo l'unità.

Si vede che la Base può esser qualunque, e che dalla natura di essa dipende la natura del sistema logarimmico.

421. Per acquistare un' idea geometrica del sistema logarimmico, si prendano sopra una linea retta AB le parti AP, AP', AP'' &c. in progressione arimmetica, di cui la ragione sia l' unità; su i punti P, P', P'' &c. s'inalzino le perpendicolari PM, $P'M'$, $P''M''$ &c. in progressione geometrica; è manifesto, che se il primo termine AP si prenda infinitamente piccolo, a ciascun punto della retta AB corrisponderà una perpendicolare, e che la serie di queste perpendicolari dovrà formare colle sue estremità M, M', M'' &c. una curva continua $LMM'M''$ &c. S; Questa dicesi curva Logarimmica. Noi ne parleremo a suo luogo (*ved. Fig.* 1.) Esposta così l' indole, e la natura dei Logarimmi passiamo a vederne gli usi.

422. Siccome si è veduto, che se abbiasi generalmente $a^n = X$, n è il Logarimmo d' X, essendo n un numero intero indeterminato; avendosi $a^q = S$, dovrà essere q il Logarimmo di S, ed avendosi $a^r = T$, dovrà errere r il Logarimmo di T.

Posto questo, suppongasi di dover moltiplicar S per T, si avrà $S.T = a^q.\ a^r = a^{q+r}$; pongasi $q+r = k$, ed $S.T = V$, e dall'equazione $a^k = V$ si avrà, che sia k il Logarimmo di V; ma $k = q+r = log.\ S + log.\ T$, ed $V = S.T$; dunque si ha generalmente $log.\ S + log.\ T = log.\ S.\ T$.

Sia $T = VY$, e si avrà $log.\ S + log.\ V + log.\ Y = log.\ SVY$, ed in generale $log.$

$log.\ S + log.\ T + log.\ V + log.\ Y + log.\ Z$ &c. $= log.\ STVYZ$ &c. .... (A).

423. Ecco dunque, che se debbasi moltiplicare insieme un numero qualunque di quantità, basta prender la somma dei Logarimmi di ciascuna; quindi cercare nelle Tavole Logarimmichè, di cui parleremo fra poco, il numero, che corrisponde al Logarimmo risultante dalla somma dei Logarimmi parziali; esso è il prodotto richiesto. Le moltiplicazioni son dunque ridotte a semplici addizioni.

424. Ritenute le denominazioni adoprate di sopra si debba dividere $a^q = S$ per $a^r = T$; Si avrà $\frac{S}{T} = a^{q-r}$; Sia $\frac{S}{T} = V$, e $q - r = k$, sarà $a^k = V$ perciò $k = log.\ V$, o sia $q - r = log. \left(\frac{S}{T}\right)$; Ma $q - r = log.S - log\ T$; dunque $log.S - log.T = log. \left(\frac{S}{T}\right)$;

Sia $T = \frac{V}{Y}$, e si avrà $log.S - log.T = log.S - log.V + log.Y = log. \left(\frac{SY}{V}\right)$: In generale sarà $log. \frac{S\ T\ V\ X\ Y \text{ \&c.}}{S'T'V'X'Y' \text{\&c.}}$

$log.S - log.S' + log.T - log.T' + log.V - log.V'$ &c.

425. Le divisioni son dunque ridotte a semplici sottrazioni, ed il quoziente è generalmente uguale al numero, che corrisponde alla differenza dei Logarimmi del dividendo, e del divisore. Perciò i Logarimmi delle frazioni proprie sono sempre negativi.

426. Venendo alle potenze, si faccia nella formola

mola ($\mathcal{A}$) $S=T=V=Y$ &c., e detto m il numero dei fattori, sarà m $log. S = log. (S^m)$.

427. Dunque per ottener la potenza m.sima di una funzione qualunque, basta moltiplicarne il Logarimmo per l'esponente della potenza, che si ricerca: il numero, che nelle Tavole corrisponde a un tal Logarimmo è uguale alla potenza richiesta.

Così le formazioni delle potenze vengon ridotte a pure somme.

428. Per rapporto all'estrazione delle radici, siccome i radicali altro non sono, che potenze fratte, si ponga $m = \frac{1}{n}$, e si vedrà, che per ottenere una radice n.sima di una funzione qualunque, basta dividerne il logarimmo per l'esponente n, e prender nelle Tavole il numero, che le corrisponde.

Si ha dunque generalmente $log. (S^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}$ $log. S$, e l'estrazione delle radici vien ridotta ad una facilissima sottrazione.

429. *Scol.* Da quanto si è detto intorno alla moltiplicazione, ed alla divisione per mezzo de' Logarimmi, si raccoglie, che la regola Algebrica di tali operazioni relativamente agli esponenti, deriva totalmente dalla Teoria de' Logarimmi. Di fatto, siccome si ha $log. S + log. T = log. ST$, dev' essere ancora $log. a^q + log. a^r = log. (a^q . a^r)$; ma $log. a^q = q\ log. a$, e $log. a^r = r\ log. a$; dunque $(q+r)$ $log. a = log. (a^q . a^r)$, e tornando dai Logarimmi ai numeri $a^{q+r} = a^q . a^r$.

Per rapporto alla divisione, si ha in virtù dell'

equa-

equazione $log. \frac{S}{T} = log. S - log. T$, $log. \left(\frac{a^q}{a^r}\right) = log. a^q - log. a^r$, o sia $log. \left(\frac{a^q}{a^r}\right) = (q-r)\ log. a$, e tornando dai Logarimmi ai numeri si ha $\frac{a^q}{a^r} = a^{q-r}$, come si è insegnato (§. 27. *Reg.* 4.)

430. *Scol.* 2. Oltre i Logarimmi semplici vi sono ancora i Logarimmi composti. Tali sono i Logarimmi espressi dalla formola $a^{n^m} = b$, $a^{n^{m^p}} = c$ &c. &c.

Questi però si posson ridurre a Logarimmi semplici. Per ridurli sia $a^{n^m} = b$, e facciasi $n^m = k$, si avrà $k\ log. a = log. b$, o sia $n^m\ log. a = log. b$.

Si prendano di nuovo i Logarimmi, e si otterrà finalmente $m\ log. n + log. log. a = log. log. b$.

Lo stesso vale per i Logarimmi più composti.

431. L'uso dei logarimmi non si estende soltanto ad agevolare il calcolo Algebrico, ma serve ancora mirabilmente per dedurre da alcune particolari equazioni il valore dell'incognita, che non si potrebbe ottenere altrimenti. Eccone degli esempj.

Sia I. $\frac{a^{px}}{b^{qx-m}} = d$. Operando con i Logarimmi si avrà $px\ log. a - (qx-m)\ log. b = log. d$; quindi $px\ log. a - qx\ log. b = log. d - m\ log. b$, e finalmente dividendo per il coefficiente d'x, si ha ....

$$x = \frac{log. d - m\ log. b}{p\ log. a - q\ log. b} = \frac{log. \left(\frac{d}{b^m}\right)}{log. \left(\frac{a^p}{b^q}\right)}.$$

Sia

Sia II. $a^x = \frac{b^{px+q}}{c^{rx+s}}$; sarà $x \log. a = (px+q) \log. b - (rx+s) \log. c$, o sia $x \log.a - px \log. b + rx \log. c = q \log.b - s \log.c$, ed in fine, dividendo come sopra, $x = \frac{q \log.b - s \log.c}{\log.a - p \log.b + r \log.c} = \frac{\log.\left(\frac{a^q}{c^s}\right)}{\log.\left(\frac{ac^r}{b^p}\right)}$.

III. Sieno date le due equazioni $x^x = a$, $x^{x+m} = b$. Dalla prima si avrà $\log.x = \frac{\log.a}{x}$; Dalla seconda si avrà $(x+m) \log.x = \log.b$, e perciò $\log.x = \frac{\log.b}{x+m}$. Si paragonino le due espressioni di $\log.x$, e si avrá $\frac{\log.a}{x} = \frac{\log.b}{x+m}$, e moltiplicando per $x(x+m)$, ...

$$x = \frac{m \log.a}{\log.b - \log.a}.$$

Fin qui dei Logarimmi in generale.

Conviene adesso discendere a trattare dei primarj sistemi, a cui possono riferirsi. A quest'effetto sia

432. *Probl.* Dato un numero qualunque, trovare una formola generale, che ne rappresenti il Logarimmo.

Soluzione. Il numero dato sia $1+x$; Pongasi $(1+x)^m = 1+z$, e sarà $m \log.(1+x) = \log.(1+z)$; Suppongasi $\log.(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c.$, e $\log.(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 \&c.$ Si avrà $m(Ax + Bx^2 + Cx^3 \&c.) = Az + Bz^2 + Cz^3 \&c.$; ... (P).

Siccome poi per m si può prender quel numero, che si vuole, purchè sia > 1, si faccia per maggior semplicità $m = 2$, onde si abbia .... $1 + 2x + x^2 = 1 + z$, e $z = 2x + x^2$. Ciò posto, nell'equazione (P) si metta per z il suo valore in x, ed il valore di m, e si otterrà ....

$$\begin{aligned} 2(Ax + Bx^2 + Cx^3 \&c.) = 2Ax + Ax^2 + 4Bx^3 + Bx^4 + 2Ex^5 \&c.& \\ + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 12Cx^4 + 6Cx^5 \&c.& \\ + 16Dx^4 + 32Dx^5 \&c.& \\ + 32Ex^5 \&c.& \end{aligned}$$

di dove paragonando i coefficienti dei termini omologi si deduce $A = A$, $B = -\frac{1}{2}A$, $C = \frac{1}{3}A$, $D = -\frac{1}{4}A$, $E = \frac{1}{5}A$, &c. &c., onde si ha finalmente $\log.(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 \&c.$ .... $= A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}-^5 \&c. \&c.$

433. Questa è la formola nella quale si contengono gl'infiniti sistemi possibili, perchè A, che dicesi il Modulo del sistema logarimmico, può ricever qualunque valore, e da ciascun valore di A ne deriva sempre un diverso valore della base, come si avrà luogo di vedere in appresso. Si vede pertanto, che non si può determinare il logarimmo di un numero dato, se dato non sia nel tempo stesso a qual sistema debb'appartenere.

Il sistema più naturale è quello, in cui si pone $A = 1$, e questo dicesi per conseguenza sistema de' Logarimmi naturali; o anche de'Logarimmi Iperbolici. Se ne vedrà la ragione chiaramente, quando parleremo dell'Iperbola.

434. Dalla formola del Logarimmo di $1+x$, si può dedurre $log. (a+x) = log. \left(a \left(1+\frac{x}{a} \right) \right) = log.$ $a + log. \left(1+\frac{x}{a} \right) = log. a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} \ldots\ldots$ $- \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5} - \&c.$, e fatto x negativo ....

$$log.(a-x) = log. a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} - \&c.$$

quindi $log \left(\frac{a+x}{a-x} \right) = \frac{2x}{a} + \frac{2x^3}{3a^3} + \frac{2x^5}{5a^5} + \frac{2x^7}{7a^7} + \&c. =$ $\frac{2x}{a} \left(1 + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{5a^4} + \frac{x^6}{7a^6} + \&c. \right)$ ....:(2) serie convergente, perchè dev' essere $a>x$ affinchè sia positiva la funzione $\frac{a+x}{a-x}$, come si suppone.

435. Nell'espressione di $log. (a-x)$ si ponga $a=1$; e si avrà $- log. (1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \&c.$ ma $-log. (1-x) = log. 1 - log. (1-x) = log. \left(\frac{1}{1-x} \right)$ perchè nel sistema Iperbolico si ha $log. 1=0$ dunque dividendo per x, si otterrà ....

$$\frac{1}{x} log. \left(\frac{1}{1-x} \right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} \ \&c.$$

Si moltiplichi quest'equazione per x^2-x, e fatte le riduzioni si avrà $x + (x-1)\ log. \left(\frac{1}{1-x} \right)$

$= \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} \ldots + \frac{x^m}{(m-1)m}$, equazione che può esser'utile.

436. Dal Probl. esposto si può dedurre una nuova dimostrazione del Teor. Newtoniano intorno alla formazione delle potenze.

Pongasi $(a+x)^m = a^m \left(1 + \frac{x}{a} \right)^m = A + Bx + Cx^2 \&c.$

e si avrà $m\ log. a + m\ log. \left(1 + \frac{x}{a} \right) = \ldots\ldots\ldots$

$log. A + log. \left(1 + \frac{Bx}{A} + \frac{Cx^2}{A} + \frac{Dx^3}{A} \ \&c. \right)$.

Questi Logarimmi si sciolgano in serie, in virtù del Probl. suddetto, e si troverà ....

$$m\ log. a + \frac{mx}{a} - \frac{mx^2}{2a^2} + \frac{mx^3}{3a^3} - \frac{mx^4}{4a^4} \ \&c. = \ldots\ldots$$

$$log. A + \frac{Bx}{A} + \frac{Cx^2}{A} + \frac{Dx^3}{A} \ \&c.$$
$$- \frac{B^2x^2}{2A^2} - \frac{2BCx^3}{2A^2} \ \&c.$$
$$+ \frac{B^3x^3}{3A^3} \ \&c.$$

Paragonati i termini omologi si trova ....

$$A = a^m,\ B = ma^{m-1},\ C = \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2},\ \&c.\ \&c.$$

valori, che essendo sostituiti nella forma generale $A+Bx+Cx^2+Dx^3$ &c. somministrano i termini della formola Neutoniana.

437. Questa dimostrazione però tanto è lungi, che

che sia diretta, come qualche Algebrista Moderno non ha temuto di asserire; che anzi ella è doppiamente induttiva; perchè la legge, con cui procede la serie, che rappresenta il Logarimmo di $1+x$, si è trovata per induzione, e perchè dei coefficienti A, B, C &c. non se ne possono determinare, che alcuni solamente.

438. Tornando adesso ad esaminare le serie trovate di sopra per l'espressione del Logarimmo di un numero qualunque, si vede facilmente, che poco sono adattate alla pratica, perchè generalmente non sono dotate di una convergenza tanto rapida, quanto si richiede. Convien pertanto, che passiamo ad investigarne un'altra, di cui si possa far'uso con maggior vantaggio.

439. A quest'effetto io richiamo la serie ($\mathfrak{Q}$), e pongo $\frac{a+x}{a-x}=\frac{z}{z-1}$. Da quest' equazione deduco $(a+x)(z-1)=(a-x)z$, e moltiplicando, e trasponendo $2zx-x=a$, o sia $x=\frac{a}{2z-1}$, ed $\frac{x}{a}=\frac{1}{2z-1}$: sostituisco questo valore di $\frac{x}{a}$ nella serie ($\mathfrak{Q}$), e trovo

$$log.\left(\frac{z}{z-1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=\frac{2}{2z-1}\left(1+\frac{1}{3(2z-1)^2}+\frac{1}{5(2z-1)^4}+\ \&c.\right)$$, e perciò
$$log.z=log.\overline{z-1}+\frac{2}{2z-1}\left(1+\frac{1}{3(2z-1)^2}+\frac{1}{5(2z-1)^4}\&c.\right)$$

serie sommamente convergente, da cui si possono de-

derivare l'espressioni le più comode di tutti i Logarimmi.

Esempio. Vogliasi il Logarimmo Iperbolico di 2. *Operazione*: Si ponga $m=2$, e si avrà $log.2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3.3^2}+\frac{1}{5.3^4}+\frac{1}{7.3^6}\ \&c.\right)$ dove pigliando otto termini, si ha $log.2=0,69314718$ Se vogliasi il Logarimmo di 5, si troverà $log.5 = 2\ log.2+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3.9^2}+\frac{1}{5.9^4}+\ \&c.\right)=\ldots$ 1, 60943791, e così degli altri.

440. E' dunque facile, per mezzo dell'esposta serie, trovare i Logarimmi dei numeri primi; ma trovati questi si trovano facilmente tutti gli altri, che altro non sono, che un composto di numeri primi.

Dunque una tal serie è utile generalmente per determinare i Logarimmi di qualsivoglia numero.

441. Un'altro sistema Logarimmico di grand' uso è il sistema dei Logarimmi volgari, i quali hanno la base $=10$. Le due serie de' numeri, e de' Logarimmi in questo sistema, sono le seguenti

0,	1,	2,	3,	4,	5,	&c.
1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	&c.

442. Siccome però in questo sistema i numeri procedono in progressione decupla, e per la pratica bisognano ancora i Logarimmi dei numeri intermedj, si sono inseriti 9, 999, 999 medj proporzionali Arimmetici fra ciascuna coppia di Logarimmi corrispondenti alle potenze di 10, e con questo la serie dei Logarimmi è divenuta .... 0; 0,00000001; 0, 00000002; 0, 00000003; ... 1 1, 0000001; 1, 00000002; 1, 00000003; ... 2; &c. do-

dove il Logarimmo 1 è il decimo millionesimo medio proporzionale, e così 2 per rapporto ad 1, &c. Posto questo ripiego dei medj Arimmetici, si vide subito la difficoltà di assegnare a ciascun numero intermedio ai termini della progressione decupla, il suo Logarimmo, e si procurò di sodisfarvi con immenso travaglio nel modo seguente.

Volendo il Logarimmo di un numero, il quale cada fra due numeri A, B, dei quali si conoscano i Logarimmi a, b, si cerchi un medio geometrico $C = \sqrt{AB}$. Se C non sia il Logarimmo richiesto, esso dovrà cadere fra A, e C, o fra B, e C; si cerchi dunque un medio geometrico $D = \sqrt{AC}$, ò $= \sqrt{BC}$, e se neppur questo sia il Logarimmo, che si cerca, si prosegua l'Operazione, finchè giungasi ad ottenerlo.

443. Con questo tentativo, che richiede un'immenso travaglio, furono costituite le prime Tavole de' Logarimmi, non conoscendosi allora le serie ingegnose, che furon trovate in appresso dai sommi Analisti Mercatore, Newton, Halley, e Leibnitz.

444. Da ciò, che si è detto fin quì, si raccoglie, che i Logarimmi volgari appartenenti ai numeri intermedj alla progressione decupla, sono composti di un numero intero, e di una frazione decimale.

Il numero intero dicesi Caratteristica Logarimmica, e la frazione decimale si appella Mantissa.

E' chiaro, che la Caratteristica, contiene sempre tante unità, quante cifre, meno una, contiene il numero, a cui appartiene il Logarimmo, e viceversa.

445.

445. *Scol.* Se alla Caratteristica di un Logarimmo volgare si aggiunga, o si tolga un numero m di unità, il risultato è nel primo caso il Logarimmo del medesimo numero, moltiplicato per il prodotto di m diecine, e nel secondo è il Logarimmo del medesimo numero diviso per il prodotto di m diecine. Questa verità si può render manifesta con degli esempj.

Si prenda il Logarimmo di 2267; questo è 3, 3554515; si moltiplichi per 10, onde sia $log. 2297 \times 10 = log. 2267 + log. 10 = 3, 3554515 + 1 = 4, 3554515$.

Il medesimo Logarimmo si moltiplichi per 100, e sarà $log. 2267 \times 100 = log. 2267 + log. 100 = 3 + 2, 3554515$, e così in seguito.

Dividendo per 10, si avrebbe $log. \frac{2267}{10} = ...$ $log. 2267 - log. 10 = 3 - 1, 3554515$.

Dividendo per 100, si avrebbe $log. \frac{2267}{100} = ...$ $log. 2267 - log. 100 = 3 - 2, 3554515$, e così in seguito.

446. Si può quì ricercare qual debba esser il Modulo A, perchè i Logarimmi Iperbolici divengano Logarimmi volgari, e viceversa. A quest' oggetto sia

447. *Probl.* Cangiare i Logarimmi Iperbolici in Logarimmi Volgari, e viceversa.

Soluzione. Sia $log. z$ un Logarimmo Volgare qualunque, ed L il Logarimmo Iperbolico di z; dovrà essere $log. z = A. L$, e perciò $A = \frac{log. z}{L}$.

Ma

Ma qualunque sia z, il valore del Modulo è sempre lo stesso; dunque per maggior commodità si ponga $z = 10$, onde si abbia $log.\, z = 1$, e si prenda il Logarimmo Iperbolico di 10, e si avrà $log.10 = log.5 + log.2 = 2,30258509$ &c. $= L$; quindi $A = \frac{1}{L} = \frac{1}{2,30258509 \text{ \&c.}} = \ldots\ldots\ldots$ $0,43429448$ &c.

Ecco pertanto, che per ridurre i Logarimmi Iperbolici a Logarimmi Volgari, basta moltiplicarli per $0,43429448$ &c., e che per cangiare i Logarimmi Volgari in Iperbolici basta moltiplicarli per $2,30258509$ &c.

Nel modo stesso si determinerebbe il Modulo in qualunque altro sistema.

448. Il Modulo de' Logarimmi Volgari, detto il Modulo di Briggs, perchè egli li calcolò il primo, è di un uso grande nella Trigonometrìa. Quello dei Logarimmi Iperbolici è di uso nel Calcolo Integrale.

Sia adesso

449. *Probl.* Dato un Logarimmo, trovare il numero, a cui appartiene.

Soluzione. Se il Logarimmo dato sia ordinario, cioè Volgare, si riduca ad Iperbolico in virtù di ciò, che si è detto quì sopra. Suppongasi pertanto, che il Logarimmo dato sia Iperbolico, ed $= z$.

Il numero, a cui appartiene si faccia $= 1 + x$, onde si abbia $z = log.(1 + x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \text{\&c.}$$

Per ottener x espresso per una funzione di z, si

si ponga $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$ &c., e si sostituisca questo valore nell' equazione ....

$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c. Essa diviene

$$z = \left\{\begin{array}{l} Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \text{ \&c.} \\ \qquad - \frac{1}{2}A^2z^2 - ABz^3 - \frac{1}{2}B^2z^4 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad - ACz^4 \text{ \&c.} \\ \qquad - \frac{1}{3}A^3z^3 + A^2Bz^4 \text{\&c.} \\ \qquad\qquad - \frac{1}{4}A^4z^4 \text{\&c.} \end{array}\right.$$

e paragonando i coefficienti verticali si troverà ....

$A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = \frac{1}{24}$ &c. onde ne risulterà

$$x = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \ldots\ldots \frac{z^n}{2.3.4\ldots\ldots n}$$

e percio $1 + x = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \ldots \frac{z^n}{2.3.4..n}$ ..(K) numero di cui il Logarimmo iperbolico è z.

450. Se per maggior semplicità pongasi adesso $1 + x = n$ si avrà, per esser $z = log.\, n$, $n = 1 + log.n +$ $log.\frac{(n)^2}{3} + log.\frac{(n)^3}{2.3} \ldots + \frac{log.\,(n)^m}{2.3.4\ldots m}$ serie, che ha per logarimmo iperbolico z.

Si può dunque rappresentare una funzione qualunque algebraica per una funzione Logarimmica infinita.

451. Ma la medesima equazione (K) si può ridurre ancora ad altre utili forme.

Si

Si faccia per esempio $z = log.(1+x) = u\ log.\ e$; sarà $1+x=e^u$, e perciò si avrà ....

$$e^u = 1 + \frac{u\ log.\ e}{1} + u^2\frac{\overline{log.e}^2}{1.2} + u^3\frac{\overline{log.e}^3}{1.2.3}\dots\frac{u^m\overline{log.e}^m}{1.2.3.....m}$$

Sia e la base Logarimmica, e sarà ....

$$e^u = 1+\frac{u}{1}+\frac{u^2}{1.2}+\frac{u^3}{1.2.3}+\frac{u^4}{1.2.3.4}\dots\dots+\frac{u^m}{1.2.,..m}$$

In virtù dello stesso raziocinio si avrà pure ...

$$e^{-u} = 1-\frac{u}{1}+\frac{u^2}{1.2}-\frac{u^3}{1.2.3}+\frac{u^4}{1.2.3.4}\dots\dots\pm\frac{u^m}{1.2....m}$$

Quindi $\frac{e^u + e^{-u}}{2} = 1+\frac{u^2}{1.2}+\frac{u^4}{1.2.3.4}+\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6}+\dots\frac{u^{2m}}{1.2..2m}$ ed ... $\frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{u}{1}+\frac{u^3}{1.2.3}+\frac{u^5}{1.2.3.4.5}+\frac{u^{2m+1}}{1.2.3....2m+1}$.

Per u pongasi $z\sqrt{-1}$, e si avrà ....

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = 1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}\dots\dots\pm\frac{z^{2m}}{1.2..2m}$$

ed

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = z-\frac{z^3}{1.2.3}\dots+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}\dots\dots\frac{z^{2m+1}}{1.2.3.....(2m+1)}.$$

452. L'esposta soluzione si può ancora applicare alla ricerca della base iperbolica; Difatto basta por-

porre nell' equazione $n = 1 + log.n + \frac{log.(n)^2}{2}\dots\dots + \frac{log.(n)^m}{1.2.....m}$, $log.n = 1$, e si avrà immediatamente la base cercata $e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+$ &c. $= 2,71828183$ &c.

453. *Teor.* I Logarimmi di due numeri in un sistema, sono geometricamente proporzionali ai Logarimmi dei numeri stessi in un'altro sistema.

Dimostrazione. Sieno m, n i logarimmi respettivi di A, e B nel sistema, che abbia per base a. In virtù dell'equazione $b = a^m = a^{log.\ b}$, si avrà $A = a^m$, $B = a^n$; S'inalzi la prima equazione alla potenza n, e la seconda alla potenza m, onde si abbia. $A^n = a^{mn}$, $B^m = a^{nm}$; è manifesto che dovrà aversi $A^n = B^m$, cioè $A = B^{\frac{m}{n}}$.

Sieno m', n' i Logarimmi respettivi di A, e B nel sistema di cui la base sia b, e si troverà nel modo stesso $A = B^{\frac{m'}{n'}}$ quindi s'inferirà $B^{\frac{m}{n}} = B^{\frac{m'}{n'}}$ e perciò $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, o sia $m:n::m':n'$ il che é ciò &c.

Sia adesso per compimento del Teorema di M. d'Alembert (§ 155.) il seguente.

454. *Teor.* Data qualsivoglia funzione logarimmica immaginaria della forma $log.(m+n\sqrt{-1})^v$ dove l'esponente v sia una quantità qualunque reale, o imaginaria, si dice che può sempre ridursi alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$.

Di-

Dimostrazione. Cominciamo dal càso che v sia una quantità reale, e si avrà $log.\,(m+n\sqrt{-1})^v$ $= v\,log.\,(m+n\sqrt{-1}) = v\,log.\left(\frac{1+n\sqrt{-1}}{m}\right)m$

$= v\,log.\left(\frac{1+n\sqrt{-1}}{m}\right) + v\,log.\,m$.

Ma $log.\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}$ &c. dunque se pongasi $x = \frac{n\sqrt{-1}}{m}$, ne nascerà ....

$$log.\left(\frac{1+n\sqrt{-1}}{m}\right) = \frac{n\sqrt{-1}}{m} + \frac{n^2}{2m^2} - \frac{n^3\sqrt{-1}}{3m^3} + \&c.$$

la somma dei termini reali $+\,log.\,m$ si faccia $= P$, e la somma dei termini immaginarj $= Q\sqrt{-1}$: si avrà $log.\left(\frac{1+n\sqrt{-1}}{m}\right) log.m = P + Q\sqrt{-1}$;

quindi $v\,log.\left(\frac{1+n\sqrt{-1}}{m}\right) + v\,log.\,m = \ldots\ldots\ldots$ $v(P+Q\sqrt{-1})$; sia $vP = A$, ed $vQ = B$, e si avrà finalmente $log.\,(m+n\sqrt{-1})^v = A + B\sqrt{-1}$.

Se fosse $v = p+q\sqrt{-1}$. Si avrebbe $v(P+Q\sqrt{-1}) =$ $(p+q\sqrt{-1})(P+Q\sqrt{-1}) = pP - qQ + (pQ+qP)\sqrt{-1}$, e fat-

e fatto $pP - qQ = A$, $pQ + qP = B$, $= A + B\sqrt{-1}$.

Se fosse $v = r^s$, si avrebbe $log.\,(m+n\sqrt{-1})r^s =$ $(A+B\sqrt{-1})^s = A' + B'\sqrt{-1}$ (*n.*155.), e così in seguito.

Esposta così la Teoria dei Logarimmi convien trattare adesso della pratica.

455. *Probl.* Si dimanda un metodo col quale si possano formar le Tavole dei Logarimmi comuni.

Soluzione. Preso il Modulo $= \frac{1}{L} = 0{,}43329448$&c Si faccia successivamente $1+x$ eguale a tutti i numeri primi, e per mezzo del prob. (*n.*450.) si trovino i Logarimmi, che gli appartengono. Trovati questi, si avranno i Logarimmi di tutti gli altri numeri i quali risultano dal prodotto dei numeri primi in se stessi, o fra di loro, poichè si sa essere $log.\,S.T = log.\,S + log.\,T$.

Così $log.\,4 = log.\,2 + log.\,2$; $log.6 = log.\,2 +$ $log.\,3$, &c. I Logarimmi trovati in questa maniera, si dispongano per ordine, e si avranno le Tavole richieste. Qualora poi da queste si vogliano dedurre le Tavole dei Logarimmi Iperbolici, altro non si avrà, che da moltiplicare ciascun Logarimmo Comume per 2, 30258509 &c.

Si possono consultar le Tavole di Ullacq, Ozanam, Granier, Deparcieux, Toaldo &c.

456. *Probl.* Dato un numero qualunque, trovarne il Logarimmo Volgare per mezzo delle Tavole. *Soluzione*. Se il numero sia intero, e minore del massimo delle Tavole, presso al numero proposto si trova il logarimmo cercato.

Se il numero sia una frazione ordinaria si ridu- ca ca in frazione decimale; si prenda il Logarimmo del numero espresso dalle cifre significative considerate come interi, e da esso tolgansi tante unità, quante cifre decimali conteneva il numero dato, ed il residuo sarà il Logarimmo richiesto. Un esempio farà comprendere la ragione della regola.

Si voglia il Logarimmo volgare di o, 0103; prendo il Logarimmo di 103, e trovo 2, 0128372.

Da questo tolgo quattro unità, ed ho —2, 0128372 Logarimmo cercato. Per vedere che questo sia veramente il Logarimmo che si cerca, si prenda $log. \left(\frac{103}{10000}\right) = log. 103 - log. 10000$; e si avrà realmente 2, 0128372—4 = —2, 0128372 come sopra.

Può avvenire che al numero proposto sia annessa una frazione decimale. In questo caso si farà uso del

Met. 1. Si tolga al numero dato il segno decimale, e se ne cerchi il Logarimmo al solito. Dopo si tolgano alla Caratteristica del Logarimmo trovato tante unità, quante erano le cifre decimali. Il residuo è il Logarimmo cercato.

Verifichiamo la regola con un esempio.

Si voglia il Logarimmo di 22, 67; Sarà .....

$log. 22, 67 = log. \left(\frac{2267}{100}\right) = log. 2267 - log. 100 = 3. 3554515 - 2 = 1, 3554515$.

Met. 2. Si prenda il logarimmo del numero intero, e la differenza di questo dal Logarimmo del numero stesso accresciuto di un'unità. Quindi si di-

dica: Se il numero intero si accrescesse di un'unità, il suo Logarimmo si accrescerebbe della differenza trovata; dunque accrescendolo della data frazione, quanto si accrescerà il suo Logarimmo?

Esempio Volendosi il Logarimmo di 257, 325, si prenda il Logarimmo di 258, e da questo si tolga il Logarimmo di 257; si ha per differenza 16866; dunque $1 : 16866 :: \frac{325}{100} : x = 5481$; dunque al Logarimmo di 257 si aggiunga 5481, e si avrà *log.* 257, 325 = 2, 4104812.

457. Questo Metodo è a sufficienza esatto, perchè sebbene le differenze de'numeri non sieno proporzionali alle differenze de'Logarimmi, nondimeno, trattandosi di piccole differenze, l'errore diviene quasi insensibile.

458. Ma se il numero dato superasse il più grande di quelli che si hanno nelle Tavole? Si opererà come segue.

Andando dalla destra verso la sinistra, si riguardino come decimali tante cifre, quante si richiede, perchè il numero divenga =, ò < del massimo numero delle Tavole. Si trovi come sopra il logarimmo del numero che ne risulta; a questo si aggiungano tante unità alla Caratteristica, quante furono le cifre riguardate per decimali, e si avrà il logarimmo che si dimanda.

Sia per esempio da trovarsi il Logarimmo del numero 257325, che sia maggiore del massimo numero delle Tavole; si riguardino come decimali le tre ultime cifre, e si avrà *log.* 157, 325 = 2, 4104812; si aggiunga 3. alla Caratteristica, e sarà *log.* 257325 = 5, 4104812.

Ri-

Rimane adesso, che si applichi la dottrina esposta alla soluzione di qualche problema.

459. *Probl.* Dato un capitale a, di cui il frutto per una porzione c sia annualmente uguale a b, supposto, che si aggiunga ogn'anno il frutto al capitale, e che questo si ripeta per un numero m di anni, si cerca qual debba essere il capitale dopo un tal numero di anni.

Soluzione. In virtù delle condizioni proposte si ha la proporzione $c : c+b :: a : x = a\frac{(c+b)}{c}$, capitale dopo il prim'anno. Nel modo stesso si ha $c : c+b : a\frac{(c+b)}{c} : x = a\frac{(c+b)^2}{c^2}$, che è il capitale dopo il second'anno. Così dopo il terz'anno sarà il capitale $a\frac{(c+b)^3}{c^3}$, ed in generale, dopo un numero m di anni, sarà $= a\frac{(c+b)^m}{c^m}$.

Presi pertanto i Logarimmi si deduce, il Logarimmo del capitale richiesto $= log.a + m\, log.\left(1+\frac{b}{c}\right)$.

Trovato questo Logarimmo, non si ha, che da prendere nelleTavole il numero, che gli corrisponde.

460. *Probl.* 2. Sia n il numero degli Abitanti di una Provincia, e suppongasi, che ogn'anno cresca di $\frac{1}{30}$; dimandasi il di loro numero dopo m anni.

Soluzione. A tenore delle condizioni, la popolazione dev'essere dopo il prim'anno $= n + \frac{n}{30} = \frac{31.n}{30}$; do-

dopo il secondo deve essere $= \frac{31.n}{30} + \frac{31.n}{30.30} = \frac{961.n}{900} = \left(\frac{31}{30}\right)^2.n$; dopo il terzo dev'essere $= \frac{619.n}{900} + \frac{961.n}{900.30} = \left(\frac{31}{30}\right)^3.n$, e così in seguito, finchè dopo m anni sarà $= \left(\frac{31}{30}\right)^m.n$.

Di questa funzione se ne prenda il Logarimmo, e si avrà il Logarimmo del numero cercato $= log.n + m\,(log.31 - log.30)$; Il numero corrispondente a questa somma sarà il numero, che si cerca.

461. Se l'accrescimento si supponesse $= \frac{1}{x}$, la formola esprimente il numero degli abitanti dopo un numero m di anni sarebbe $n\left(\frac{x+1}{x}\right)^m$.

In questa si ponga $n = 6$, ed $m = 200$, e si avrà, che qualora la popolazione sia di 6 persone, qual fu quella del Mondo; dopo il Diluvio, posto l'accrescimento annuo eguale a $\frac{1}{16}$, si avrà, dissi, che dopo 200 dev'essere $= 1000000$.

Di fatto, si ponga $6\left(\frac{x+1}{x}\right)^{200} = 1000000$, e sarà $\frac{x+1}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$; quindi $log.\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{200}\, log.\left(\frac{1000000}{6}\right) = \frac{1}{200} . 5,2218487 = 0,$

$0,0261092$, onde $\frac{x+1}{x} = \frac{1061963}{1000000}$, e finalmente $61963\ x = 1000000$, o sia $x = 16$ prossimamente.

462. La medesima formola può servire ancora per determinare, qual debba esser l'accrescimento annuo di una popolazione, perchè al termine di ciascun secolo divenga moltipla di un'ordine dato.

Se vogliasi, per esempio, sapere, qual debba esser l'annuo accrescimento, perchè una popolazione dal termine di ciascun secolo divenga doppia, si avrà $n\left(\frac{x+1}{x}\right)^{100} = 2n$, cioè $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{100} = 2$; perciò $log.\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{100} log.\ 2 = 0,0030103$; onde $\frac{x+1}{x} = \frac{10069556}{1000000}$, e finalmente $x = 144$ prossimamente.

463. In ultimo se si volesse sapere, dopo quanti anni una popolazione n, la quale cresca ogn'anno di $\frac{1}{100}$, debba divenir decupla, non si avrebbe, che da fare $n\left(\frac{101}{100}\right)^{x} = 10\ n$, ò sia $\left(\frac{101}{100}\right)^{x} = 10$.

Quindi $x = \frac{log.\ 10}{log.101 - log.100} = \frac{10000000}{43214} = 231$, vale a dire, che la popolazione n diverrà decupla dopo ciascun periodo di 231 anni.

Soggiungiamo quì le Tavole de Logarimmi volgari fino à 1000.

TA-

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
1	0, 0000000	36	1, 5563025	71	1, 8512583
2	0, 3010300	37	1, 5682017	72	1, 8573325
3	0, 4771213	38	1, 5797836	73	1, 8633229
4	0, 6020600	39	1, 5610646	74	1, 8692317
5	0, 6989700	40	1, 6020600	75	1, 8750613
6	0, 7781512	41	1, 6127839	76	1, 8808136
7	0, 8450980	42	1, 6232493	77	1, 8864907
8	0, 9030900	43	1, 6334685	78	1, 8920946
9	0, 9542425	44	1, 6434527	79	1, 8976271
10	1, 0000000	45	1, 6532125	80	1, 9030900
11	1, 0413927	46	1, 6627578	81	1, 9084850
12	1, 0791812	47	1, 6720979	82	1, 9138138
13	1, 1139433	48	1, 6812412	83	1, 9190781
14	1, 1461280	49	1, 6901961	84	1, 9242793
15	1, 1760913	50	1, 6989700	85	1, 9294189
16	1, 2041200	51	1, 7075707	86	1, 9344984
17	1, 2304489	52	1, 7160033	87	1, 9395192
18	1, 2552725	53	1, 7242759	88	1, 9444827
19	1, 2787536	54	1; 7323938	89	1, 9493900
20	1, 3010300	55	1, 7403627	90	1, 9542425
21	1, 3222193	56	1, 7481880	91	1, 9590414
22	1, 3424227	57	1, 7558749	92	1, 9637878
23	1, 3617278	58	1, 7634280	93	1. 9684829
24	1, 3802112	59	1, 7708520	94	1, 9731279
25	1, 3979400	60	1, 7781512	95	1, 9777236
26	1, 4149733	61	1, 7853298	96	1, 9822712
27	1, 4313638	62	1, 7923917	97	1, 9867717
28	1, 4471580	63	1, 7993405	98	1, 9912261
29	1, 4623980	64	1, 8061800	99	1, 9956352
30	1, 4771213	65	1, 8129134	100	2, 0000000
31	1, 4913617	66	1, 8195439	101	2, 0043214
32	1, 5051500	67	1, 8260748	102	2, 0086002
33	1, 5185139	68	1, 8325089	103	2, 0128372
34	1, 5314789	69	1, 8388491	104	2; 0170333
35	1, 5440680	70	1, 8450980	105	2, 0211893

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
106	2, 0253059	141	2, 1492191	176	2, 2455127
107	2, 0293838	142	2, 1522883	177	2, 2479733
108	2, 0334238	143	2, 1553360	178	2, 2504200
109	2, 1374265	144	2, 1583625	179	2, 2528530
110	2, 0413927	145	2, 161 680	180	2, 2552725
111	2, 0453230	146	2, 1643529	181	2, 2576786
112	2, 0492180	147	2, 1672173	182	2, 2600714
113	2, 0530784	148	2, 1702619	183	2, 2624511
114	2, 0569049	149	2, 1731863	184	2, 2648178
115	2, 0606978	150	2, 1769913	185	2, 2671717
116	2, 0644580	151	2, 1789769	186	2, 26951 9
117	2, 0681859	152	2, 1818436	187	2, 2718416
118	2, 0718820	153	2, 1746914	188	2, 2745578
119	2, 0755470	154	2, 1875207	189	2, 2764618
120	2, 0791812	155	2, 1903317	190	2, 2787536
121	2, 0827854	156	2, 1931246	191	2, 2810334
122	2, 0863598	157	2, 1958996	192	2, 2833012
123	2, 0899051	158	2, 1986571	193	2, 28555 3
124	2, 0934217	159	2, 2013971	194	2, 2878017
125	2, 0969100	160	2, 2041200	195	2, 2900346
126	2, 1003705	161	2, 2068259	196	2, 2922561
127	2, 1038037	162	2, 2095150	197	2, 2944662
128	2, 1072100	163	2, 2121876	198	2, 2966652
129	2, 1105897	164	2, 2148438	199	2, 2988531
130	2, 1139433	165	2, 2174839	200	2, 3010300
131	2, 1172713	166	2, 2201081	201	2, 3031961
132	2, 1205739	167	2, 2227165	202	2, 3053541
133	2, 1238516	168	2, 2253093	203	2, 3074960
134	2, 1271048	169	2, 2278867	204	2, 3096,02
135	2, 1303338	170	2, 2304489	205	2, 3117539
136	2, 1335389	171	2, 2329961	206	2; 3138672
137	2, 1367206	172	2, 2355284	207	2, 3159703
138	2, 1398791	173	2, 2380461	208	2, 3180633
139	2, 1430148	174	2, 2405492	209	2, 3201463
140	2, 1461280	175	2, 2430380	210	2, 3222193

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
211	2, 3242825	246	2, 3909351	281	2, 4487063
212	2, 3263359	247	2, 3926970	282	2, 4502491
213	2, 3283790	248	2, 3944517	283	2, 4517864
214	2, 3304138	249	2, 3961993	284	2, 4533183
215	2, 3324385	250	2, 3979400	285	2, 4548449
216	2, 3344537	251	2, 3996737	286	2, 4563660
217	2, 3364597	252	2, 4014005	287	2, 4578819
218	2, 3384565	253	2, 4031205	288	2, 4593925
219	2, 3404441	254	2, 4048337	289	2, 4608978
220	2, 3424227	255	2, 4065402	290	2, 4623980
221	2, 3443923	256	2, 4082400	291	2, 4638930
222	2, 3463530	257	2, 4099331	292	2, 4653828
223	2, 3483049	258	2, 4116197	293	2, 4668676
224	2, 3502480	259	2, 4132998	294	2, 4683473
225	2, 3521825	260	2, 4149733	295	2, 4698220
226	2, 3541084	261	2, 4166405	296	2, 4712917
227	2, 3560259	262	2, 4183013	297	2, 4727564
228	2, 3579348	263	2, 4199557	298	2, 4742163
229	2, 3598355	264	2, 4216939	299	2, 4756712
230	2, 3617278	265	2, 4232459	300	2 : 4771213
231	2, 3636120	266	2, 4248816	301	2, 4785665
232	2, 3654880	267	2, 4265113	302	2, 4800069
233	2, 3673559	268	2, 4281348	303	2, 4814426
234	2, 3692159	269	2, 4297523	304	2, 4828736
235	2, 3710679	270	2, 4313638	305	2, 4842998
236	2, 3729120	271	2, 4329693	306	2, 4857214
237	2, 3747483	272	2, 4345689	307	2, 4871384
238	2, 3765770	273	2, 4361626	308	2, 4885507
239	2, 3783979	274	2, 4377506	309	2, 4899585
240	2, 3802112	275	2, 4393327	310	2, 4913617
241	2, 3820170	276	2, 4409091	311	2, 4927604
242	2, 3838154	277	2, 4424798	312	2, 4941546
243	2, 3856063	278	2, 4440448	313	2, 4955443
244	2, 3873898	279	2, 4456042	314	2, 4969296
245	2, 3891661	280	2, 4471580	315	2, 4983106

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
316	2, 4996871	351	2, 5453071	386	2, 5865873
317	2, 5010593	352	2, 5465427	387	2, 5877110
318	2, 5024271	353	2, 5477747	388	2, 5888317
319	2, 5037907	354	2, 5490033	389	2, 5899496
320	2, 5051500	355	2, 5502284	390	2, 5910646
321	2, 5065050	356	2, 5514500	391	2, 5921768
322	2, 5078559	357	2, 5526682	392	2, 5932861
323	2, 5092025	358	2, 5538830	393	2, 5943925
324	2, 5105450	359	2, 5550944	394	2, 5954962
325	2, 5118834	360	2, 5563025	395	2, 5965971
326	2, 5132176	361	2, 5575072	396	2, 5976952
327	2, 5145477	362	2, 5587086	397	2, 5987905
328	2, 5158738	363	2, 5599066	398	2, 5998831
329	2, 5171959	364	2, 5611014	399	2, 6009729
330	2, 5185139	365	2, 5622929	400	2, 6020600
331	2, 5198280	366	2, 5634811	401	2, 6031444
332	2, 5211381	367	2, 5646661	402	2, 6042261
333	2, 5224442	368	2, 5658478	403	2, 6053050
334	2, 5237465	369	2, 5670264	404	2, 6063814
335	2, 5250448	370	2, 5682017	405	2, 6074550
336	2, 5263393	371	2, 5693739	406	2, 6085269
337	2, 5276299	372	2, 5705429	407	2, 6095944
338	2, 5289167	373	2, 5717088	408	2, 6106602
339	2, 5301997	374	2, 5728716	409	2, 6117233
340	2, 5314789	375	2, 5740313	410	2, 6127839
341	2, 5327544	376	2, 5751878	411	2, 6138418
342	2, 5340261	377	2, 5763413	412	2, 6148972
343	2, 5352941	378	2, 5774918	413	2, 6159500
344	2, 5365584	379	2, 5786392	414	2, 6170003
345	2, 5378191	380	2, 5797836	415	2, 6180481
346	2, 5390761	381	2, 5806280	416	2, 6190933
347	2, 5403295	382	2, 5820634	417	2, 6201361
348	2, 5415792	383	2, 5831988	418	2, 6211763
349	2, 5428254	384	2, 5843312	419	2, 6222140
350	2, 5440680	385	2, 5854607	420	2, 6232493

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
421	2, 6242821	456	2, 6589648	491	2, 6910815
422	2, 6253124	457	2, 6599162	492	2, 6919651
423	2, 6263404	458	2, 6608655	493	2, 6928469
424	2, 6273659	459	2, 6618127	494	2, 6937269
425	2, 6283889	460	2, 6627578	495	2, 6946052
426	2, 6294096	461	2, 6630709	496	2, 6954817
427	2, 6304279	462	2, 6646420	497	2, 6963564
428	2, 6314438	463	2, 6655810	498	2, 6972293
429	2, 6324573	464	2, 6665180	499	2, 6981005
430	2, 6334685	465	2, 6674529	500	2, 6989700
431	2, 6344773	466	2, 6683859	501	2, 6998377
432	2, 6354837	467	2, 6693162	502	2, 7007037
433	2, 6364879	468	2, 6702459	503	2, 7015680
434	2, 6374897	469	2, 6711728	504	2, 7024305
435	2, 6384893	470	2, 6720979	505	2, 7032914
436	2, 6394865	471	2, 6730209	506	2, 7041505
437	2, 6404814	472	2, 6739420	507	2, 7060080
438	2, 6414741	473	2, 6748611	508	2, 7058637
439	2, 6424645	474	2, 6757783	509	2, 7062178
440	2, 6434527	475	2, 6766936	510	2, 7075702
441	2, 6444386	476	2, 6776069	511	2, 7084209
442	2, 6454223	477	2, 6785184	512	2, 7092700
443	2, 6464037	478	2, 6794279	513	2, 7101174
444	2, 6473830	479	2, 6803355	514	2, 7109631
445	2, 6483600	480	2, 6812412	515	2, 7118072
446	2, 6493349	481	2, 6821451	516	2, 7126497
447	2, 6503075	482	2, 6830470	517	2, 7134905
448	2, 6512780	483	2, 6839471	518	2, 7143298
449	2, 6522463	484	2, 6848454	519	2, 7151674
450	2, 6532125	485	2, 6857417	520	2, 7160033
451	2, 6541765	486	2, 6866363	521	2, 7168377
452	2, 6551384	487	2, 6875290	522	2, 7176705
453	2, 6560982	488	2, 6884198	523	2, 7185017
454	2, 6570558	489	2, 6893089	524	2, 7193313
455	2, 6580114	490	2, 6901961	525	2, 7201593

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
526	2 , 7209857	561	2 , 7489629	596	2 , 7752463
527	2 , 7218106	562	2 , 7497363	597	2 , 7759743
528	2 , 7226339	563	2 , 7505084	598	2 , 7767012
529	2 , 7234557	564	2 , 7512791	599	2 , 7774268
530	2 , 7242759	565	2 , 7520484	600	2 , 7781512
531	2 , 7250945	566	2 , 7528164	601	2 , 7788745
532	2 , 7259116	567	2 , 7535831	602	2 , 7795965
533	2 , 7267272	568	2 , 7543483	603	2 , 7803173
534	2 , 7275413	569	2 , 7551123	604	2 , 7810369
535	2 , 7283538	570	2 , 7558749	605	2 , 7817554
536	2 , 7291648	571	2 , 7566361	606	2 , 7824726
537	2 , 7299743	572	2 , 7573960	607	2 , 7831887
538	2 , 7307823	573	2 , 7581546	608	2 , 7839036
539	2 , 7315888	574	2 , 7589119	609	2 , 7846173
540	2 , 7323938	575	2 , 7596678	610	2 , 7853298
541	2 , 7331973	576	2 , 7604225	611	2 , 7860412
542	2 , 7339993	577	2 , 7611758	612	2 , 7867514
543	2 , 7347998	578	2 , 7619278	613	2 , 7874605
544	2 , 7355989	579	2 , 7626786	614	2 , 7881684
545	2 , 7363965	580	2 , 7634280	615	2 , 7888751
546	2 , 7371926	581	2 , 7641761	616	2 , 7897807
547	2 , 7379873	582	2 , 7649230	617	2 , 7902852
548	2 , 7387806	583	2 , 7656686	618	2 , 7909885
549	2 , 7395723	584	2 , 7664128	619	2 , 7916906
550	2 , 7403627	585	2 , 7671559	620	2 , 7923917
551	2 , 7411516	586	2 , 7678976	621	2 , 7930416
552	2 , 7419391	587	2 , 7686381	622	2 , 7937904
553	2 , 7427251	588	2 , 7693773	623	2 , 7944880
554	2 , 7435098	589	2 , 7701153	624	2 , 7951846
555	2 , 7442930	590	2 , 7708520	625	2 , 7958800
556	2 , 7450748	591	2 , 7715875	626	2 ; 7965743
557	2 , 7458552	592	2 , 7723217	627	2 , 7972675
558	2 , 7466342	593	2 , 7730547	628	2 , 7979596
559	2 , 7474118	594	2 , 7737864	629	2 , 7986506
560	2 , 7481880	595	2 , 7745170	630	2 , 7993405

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
631	2 , 8000294	666	2 , 8234742	701	2 , 8457180
632	2 , 8007171	667	2 , 8241258	702	2 , 8463371
633	2 , 8014037	668	2 , 8247765	703	2 , 8409553
634	2 , 8020893	669	2 , 8254261	704	2 , 8475727
635	2 , 8027737	670	2 , 8260748	705	1 , 8481891
636	2 , 8034571	671	2 , 8267225	706	2 , 8488047
637	2 , 8041394	672	2 , 8273693	707	2 , 8494194
638	2 , 8048207	673	2 , 8280151	708	2 , 8500333
639	2 , 8055009	674	2 , 8286599	709	2 , 8506462
640	2 , 8061800	675	2 , 8293038	810	2 , 8511583
641	2 , 8068580	676	2 , 8299467	711	2 , 8518996
642	2 , 8075350	677	2 , 8305887	712	2 , 8524800
643	2 , 8082110	678	2 , 8312297	713	2 , 8530895
644	2 , 8088859	679	2 , 8318698	714	2 , 8536982
645	2 , 8095597	680	2 , 8325089	715	2 , 8543060
646	2 , 8102325	681	2 , 8331471	716	2 , 8549130
647	2 , 8109043	622	2 , 8337844	717	2 , 8555192
648	2 , 8115750	683	2 , 8344207	718	2 , 8561244
649	2 , 8122447	684	2 ; 8350561	719	2 , 8567289
650	2 , 8129134	685	2 , 8356906	720	2 , 8593325
651	2 , 8135810	686	2 , 8363241	721	2 , 8579353
652	2 , 8142476	687	2 , 8369567	722	2 , 8585372
653	2 , 8147132	688	2 , 8375884	723	2 , 8591383
654	2 , 8155777	689	2 , 8382192	724	2 , 8597386
655	2 , 8162413	690	2 , 8388491	725	2 , 8603380
656	2 , 8169038	691	2 , 8399780	726	2 , 8609366
657	2 , 8175954	692	2 , 8401061	727	2 , 8615344
658	2 , 8182259	693	2 , 8407332	728	2 , 8621314
659	2 , 8188854	694	2 , 8413595	729	2 , 8627275
660	2 , 8195439	695	2 , 8419848	730	2 , 8633229
661	2 , 8202025	696	2 , 8426092	731	2 , 8639174
662	2 , 8208580	697	2 , 8432328	732	2 , 8645111
663	2 , 8215135	698	2 , 8438554	733	2 , 8651040
664	2 , 8221681	699	2 , 8444772	734	2 , 8656961
665	2 , 8228216	700	2 , 8450980	735	2 ; 8662873

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
736	2, 8668778	771	2, 8870544	806	2, 9063350
737	2, 8674675	772	2, 8876173	807	2, 9068735
738	2, 8680564	773	2, 8881795	808	2, 9074114
739	2, 8686444	774	2, 8887410	809	2, 9079485
740	2, 8692317	775	2, 8893017	810	2, 9084850
741	2, 8698182	776	2, 8898617	811	2, 9090209
742	2, 8704039	777	2, 8904210	812	2, 9095560
743	2, 8709888	778	2, 8909796	813	2, 9100905
744	2, 8715729	779	2, 8915375	814	2, 9106244
745	2, 8721563	780	2, 8921946	815	2, 9037
746	2, 8727383	781	2, 8926510	816	2, 9116902
747	2, 8733206	782	2, 8932068	817	2, 9122221
748	2, 8739016	783	2, 8937618	818	2, 9127533
749	2, 8744818	784	2, 8943161	819	2, 9132839
750	2, 8750613	785	2, 8948697	820	2, 9138138
751	2, 8756399	786	2, 8954225	821	2, 9143432
752	2, 8762178	787	2, 8959747	822	2, 9148718
753	2, 8767950	788	2, 8965262	823	2, 9153998
754	2, 8773712	789	2, 8970770	824	2, 9159272
755	2, 8779469	790	2, 8976271	825	2, 9164539
756	2, 8785218	791	2, 8981765	826	2, 9169800
757	2, 8780959	792	2, 8987252	827	2, 9175055
758	2, 8796692	793	2, 8992732	828	2, 9180303
759	2, 8802418	794	2, 8998205	829	2, 9185545
760	2, 8888136	795	2, 9003571	830	2, 9190781
761	2, 8813847	796	2, 9009131	831	2, 9196010
762	2, 8819550	797	2, 9014583	832	2, 9201233
763	2, 8825245	798	2, 9020029	833	2, 9206450
764	2, 8830934	799	2, 9025468	834	2, 9211660
765	2, 8836614	800	2, 9030900	835	2, 9216865
766	2, 8842288	801	2, 9036325	836	2, 9222063
767	2, 8847954	802	2, 9041744	837	2, 9227255
768	2, 8853612	803	2, 9047155	838	2, 9232440
769	2, 8859263	804	2, 9052568	839	2, 9237620
770	2, 8864907	805	2, 9057959	840	2, 9242793

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
841	2, 9247960	876	2, 9425041	911	2, 9595184
842	2, 9253121	877	2, 9429996	912	2, 9599948
843	2, 9258276	878	2, 9434945	913	2, 9604708
844	2, 9263424	879	2, 9439889	914	2, 9609462
845	2, 9268567	880	2, 9444827	915	2, 9614211
846	2, 9273704	881	2, 9449759	916	2, 9618955
847	2, 9278834	882	2, 9454680	917	2, 9623653
848	2, 9283958	883	2, 9459607	918	2, 9628427
849	2, 9289077	884	2, 9464523	919	2, 9633155
850	2, 9294189	885	2, 9469433	920	2, 9637878
851	2, 9299296	886	2, 9474337	921	2, 9642596
852	2, 9304396	887	2, 9479236	922	2, 9647309
853	2, 9309490	888	2, 9484130	923	2, 9652017
854	2, 9314579	889	2, 9489018	924	2, 9656720
855	2, 9319661	890	2, 9493900	925	2, 9661417
856	2, 9324738	891	2, 9498777	926	2, 9666110
857	2, 9329808	892	2, 9503648	927	2, 9670797
858	2, 9334873	893	2, 9508514	928	2, 9675480
859	2, 9339932	894	2, 9513375	929	2, 9680157
860	2, 9344984	895	2, 9518230	930	2, 9684829
861	2, 9350031	896	2, 9523080	931	2, 9689497
862	2, 9355073	897	2, 9527924	932	2, 9694159
863	2, 9360108	898	2, 9532763	933	2, 9698816
864	2, 9365137	899	2, 9537597	934	2, 9703469
865	2, 9370161	900	2, 9542425	935	2, 9708116
866	2, 9375179	901	2, 9547248	936	2, 9712758
867	2, 9380191	902	2, 9552065	937	2, 9717396
868	2, 9385197	903	2, 9556877	938	2, 9722028
869	2, 9390198	904	2, 9561684	939	2, 9726656
870	2, 9395192	905	2, 9566486	940	2, 9731279
871	2, 9400181	906	2, 9571282	941	2, 9735896
872	2, 9405165	907	2, 9576073	942	2, 9740509
873	2, 9410142	908	2, 9580858	943	2, 9745117
874	2, 9415114	909	2, 9585639	944	2, 9749720
875	2, 9420080	910	2, 9590414	945	2, 9754318

N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.	N.	Logarimmi.
946	2, 9758911	966	2, 9849771	986	2, 9938769
947	2, 9763500	967	2, 9854265	987	2, 9943171
948	2, 9768083	968	2, 9858754	988	2, 9947569
849	2, 9772662	969	2, 9863238	989	2, 9957963
950	2, 9777236	970	2, 9867717	990	2, 9956352
951	2, 9781805	971	2, 9872192	991	2, 9960737
952	2, 9786369	972	2, 9876663	992	2, 9965117
953	2, 9790929	973	2, 9881128	993	2, 9969492
954	2, 9795484	974	2, 9885590	994	2, 9973864
955	2, 9800034	975	2, 9890046	995	2, 9978231
956	2, 9804579	976	2, 9894498	996	2, 9982593
957	2, 9809119	977	2, 9898946	997	2, 9986952
958	2, 9813655	978	2, 9903389	998	2, 9991305
959	2, 9818186	979	2, 9907827	999	2, 9995655
960	2, 9822712	980	2, 9912261	1000	3, 0000000
961	2, 9827234	981	2, 9916690		
962	2, 9831751	982	2, 9921115		
963	2, 9836263	983	2, 9925535		
964	2, 9840770	984	2, 9929951		
965	2, 9845273	985	2, 9934362		

INDICE

DELLE COSE PRINCIPALI CONTENUTE NEL PRIMO TOMO

PARTE I.

PARTE II.

Delle

Delle

AL CORTESE LETTORE

Non avendo potuto assistere l' Autore all' Edizione dell' Opera, sono sfuggiti i seguenti errori.

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI.
27	8	$m>n=n+r$	$m(>n)=n+r$
	15	$m>n=n-r$	$m(>n)=n-r$
31	10	denominatore	numeratore
40	3	de' numeratori	de' denominatori
47	15	Le seconde	Le altre
50	11	costituziscono	costituiscono
57	ult.	diversori	divisori
58	26	e pe $2ab$	e per $2ab$
64	4	è chiaro questa potenza	è chiaro che questa potenza
79	ult.	$=2^r-3-2$	$=2^r-2$
80	4	$=\frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} \dots P^{m-r}}{1 . 2 . 3 \dots ^{r+1}}$	$=\frac{B^m B^{m-1} B^{n-2} \dots P^{m-r}}{1 . 2 . 3 . r+1}$
81	8	$+\frac{i}{a}\frac{(i^{-1})}{(a)}x^2$	$+\frac{i}{a}\frac{(i-1)}{(a)}x^2$
84	13	impari	pari
98	12	indizione	indicazione
107	24	Quante unità meno una si contengono nell' esponente della radice proposta	Quante unitá si contengono nell' esponente della radice proposta considerata come potenza di 2
108	26	$\sqrt{\frac{(bm^3c)}{(3m)}}$	$\sqrt{\frac{(b-m^3c)}{(3m)}}$
penult.		$G+Hx_{\frac{1}{p}}$	$G+Hx^{\frac{1}{p}}$
	ult.	si faccia $=a$	si faccia $=z$
140	3	si ot-	si ottiene
140	6	$\left(\frac{\frac{(z^s-A^r)-C}{C}}{D}\right)$	$=\left(\frac{\frac{z^s-A^r}{B}-C}{D}\right)^q$
148	20	$n-2s=0$.	$n-\frac{2s}{d}=0$.
149	4	$n+2s=0$	$n+\frac{2s}{d}=0$.
	9	$-2s=0$	$-2ds=0$.
	10	$+2s=0$	$+2ds=0$.
....	14	che formole	che le formole
151	7	$+2s=0$	$+2ds=0$
	10	$+d\frac{(n-1)}{d}$	$+d\frac{(n-1)}{2}$
	11	$-2s=0$	$-2ds=0$
	14	$-2s=0$	$n-\frac{2s}{d}=0$
	15	$-\left(\frac{2x}{a}-1\right)n+2s=0$	$-\left(\frac{2x}{d}-1\right)n+\frac{2s}{d}=0$
158	pen.	$a:x::b\pm d$,	$a:x::b\pm d:bm$,
166	17	alterando	alternnado
169	20	sciolso	sciolto
	ult.	se ne deducon tre	se ne deducon tre altre
172	ult.	$s=\frac{x}{m-1}\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right)$	$s=\frac{x}{m^{n-1}}\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right)$
175	pen.	settantaquattro	sessantaquattro
179	4	debban	debbon
183	3	$a^{\frac{1-n}{n}}b+\frac{1}{2n}\left(\frac{1-n}{u}\right)$	$a^{\frac{1-n}{n}}b+\frac{1}{24}\left(\frac{1-n}{u}\right)\dots$

X

		$\times a\frac{1-nn}{n}b^2$ &c.	$\times a\frac{1-2n}{n}b^2$ &c.
189	ult.	e così seguito	e così in seguito.
191	8	che richiede	che non richiede
	11	$+bn^{-1}+n+$	$+bn^{m-1}+cn^{m}+$
192	12	dell'altra	dell' altre
223	6	$\frac{1}{64}-\frac{1}{16}-=\frac{5}{642}$	$\frac{1}{64}-\frac{1}{16}=-\frac{40}{1024}$
257	7	$=\frac{\gamma+p^1}{q^1}$	$=\gamma+\frac{p^1}{q^1}$
287	26	errere	essero
295	27	può determinare	può determinarle
297	18	furon costituite	furou costruite