STORIA
DELL' ORIGINE E DE' PROGRESSI
DELLE
MATEMATICHE
DI PIU' AUTORI

RIUNITA IN COMMENTARJ

A FORMA DI CRONACA

dal Sacerdote

D. GIUSEPPE DE' SALLUSTJ

AD USO

DE' GIOVANI STUDENTI

Illa ego, quae gestis praesum custodia rebus,
Digero quod caveas, quodque sequaris iter:
Priscaque ne veteris vanescat gloria saecli,
Vivida defensant quae monumenta damus.

BEYERLINCK in verbo Historia.

Volume Quarto

ROMA
TIPOGRAFIA GISMONDI
CON PERMESSO
1846

PREFAZIONE

AI PROGRESSI DELLE MATEMATICHE NELLA NUOVA ASTRONOMIA, NUOVA OTTICA, E NUOV'ANALISI IN PARTICOLARE, DA NEWTON AD EULERO.

Uno de'più grandi, e più ragguardevoli concepimenti, che onorano la mente umana, è senza dubbio *Il Metodo delle flussioni* ossia *l'Analisi Infinitesimale*, tanto pel carattere dell'invenzione, che per la varietà, ed importanza de'suoi usi. Poichè noi vedremo, che sin dal suo nascere ha ella impresso alla geometrìa, e successivamente alle altre parti delle Matematiche un movimento, che si accelera con rapidità, a misura che l'arte si perfeziona. Problemi ribelli o estranei agli antichi metodi si sottomettono senza resistenza alla nuova analisi. La generalità, ed uniformità de'mezzi ravvicinano sotto il medesimo punto di veduta teorìe, che sembravano isolate, ed indipendenti le une dalle altre. Quindi un'edifizio regolare, e magnifico s' innalza sopra una salda base, che mantiene tutte le parti in giusta proporzione, ed in perfetto equilibrio. Se i due più grandi geometri dell'antichità, Archimede, ed Apollonio potessero rivivere, rimarrebbero eglino ancora sorpresi dallo stupore e, dalla maraviglia, nel contemplare i progressi, che le scienze esatte hanno fatto, dopo

il di loro tempo sino al nostro, a traverso di secoli barbari, che hanno tante volte interrotto il cammino del genio.

Ma l'ingegno umano non deve per questo concepire un' opinione troppo orgogliosa delle sue forze, di cui non avrebbe alcun ragionevole fondamento. Poichè se in questo complesso di cognizioni accumulate dal tempo si potesse separare il prodotto della memoria, e fissare la parte unicamente dovuta alla sagacità primitiva di ciascun' inventore, si troverebbe un numero assai grande di piccole porzioni. Tutto è sottomesso alla legge di continuità nel mondo intellettuale, come nella successione degli esseri fisici. Noi per ordinario progrediamo non senza stento da una verità alla verità vicina. Il genio può raccorciare la catena dei principj, e delle conseguenze, ma non la distrugge, e non cammina mai a salti. Qualche volta un' idea rinchiusa apparentemente in uno spazio fisso, o determinato, s' ingrandisce a poco a poco colla riflessione, e forma il nocciuolo d'un corpo di scienza, che non ha più confini. Ne abbiamo quì un grande esempio. Il metodo di condurre le tangenti alle linee curve per mezzo della nuova analisi è la pietra fondamentale del vasto edifizio delle scienze nel suo stato attuale, come un ruscello debole alla sua origine, accresciuto successivamente dalle acque, che riceve, diventa in fine un fiume maestoso.

Gli antichi conducevano le tangenti alle sezioni coniche, ed alle altre curve geometriche di loro invenzione, con mezzi particolari, derivati in ciascun caso dalle proprietà individuali della curva, di cui trattavasi. Archimede determinò in modo simile le tangenti della spirale, curva meccanica. Tra i moderni Cartesio, Fermat, Roberval, Barrow, Sluze ec. avevano trovato metodi uniformi, più o meno semplici, per condurre le tangenti delle curve geometriche: lo che era già un gran passo. Ma faceva d' uopo prima di ogni altra cosa, che le equazioni delle curve fossero libere dalle quantità radicali, quando ne erano affette: e quest' operazione esigeva qualche volta calcoli immensi, ed anche assolutamente impraticabili. La tangente della cicloide, curva meccanica moderna, non era stata determinata, che per mezzo di alcuni artifizj fondati sopra la sua natura, e da cui non si poteva trarre alcun lume per altri esempj. Rimaneva da trovarsi un metodo generale, che si applicasse indistintamente ad ogni specie di curve geometriche, o meccaniche, senza che fosse necessario in alcun caso di fare sparire la quantità radicale. Leibnizio pubblicò il primo questa sublime scoperta negli atti di Lipsia pel

mese di Ottobre del 1684, e fu d'esso il primo passo del Calcolo Differenziale.

Riservandoci d' indicare nel Commentario di Leibnizio al secondo Capo, che segue la natura, e la divisione dell'Analisi ossia del *Calcolo Infinitesimale*, facciamo quì riflettere, che non i soli progressi dell'Analisi sono tutto lo scopo de' seguenti volumi. Vedremo in essi progredire ancora la Meccanica, l'Astronomìa, e l'Ottica, le quali scienze coi soccorsi dell' analisi infinitesimale si sono avanzate maestosamente a passi di giganti. Poichè a cominciare dalla prima, si sa che la Meccanica è fondata sopra un piccolo numero di principj generali, i quali quando si sono una volta trovati, tutte le applicazioni, che si possono fare, appartengono propriamente alla geometrìa: ma queste applicazioni soprattutto ne' problemi relativi al movimento, richieggono sovente molta sagacità: e formano una scienza particolare, che i moderni hanno portata molto avanti col soccorso dell'Analisi Infinitesimale.

Una delle principali parti della Meccanica è certamente la Statica, alla quale essendosi applicati in modo speciale La Hire, Varignon, Camus, ed altri, vedremo che si resero ad essa grandemente benemeriti, pei rilievi che vi fecero, e per le nuove cose, delle quali l'arricchirono. Vedremo ancora, che molti de' principali problemi relativi alla Statica, i quali erano già stati risoluti da altri, vennero riassunti, e risoluti anche da Daniele Bernoulli, da Eulero, da Ermanno, a da altri: ma con nuove estensioni, e nuove difficoltà superate, le quali aumentarono la gloria del successo, ed il dominio della scienza dell' Analisi Infinitesimale.

Altra non meno estesa, che interessante parte della Meccanica è il moto: giacchè sappiamo, che la teorìa generale de' moti variati aprì un campo nuovo, ed immenso alle ricerche de' geometri, che possedevano l'Analisi Infinitesimale. Vedemmo, che Galileo aveva fatto conoscere le proprietà del moto rettilineo, uniformemente accelerato: Huguens aveva considerato il moto curvilineo: egli si era sollevato gradatamente alla bella teorìa delle forze centrali nel cerchio, la quale si applica egualmente al moto in una curva qualunque, riguardando tutte le curve come serie infinite di piccoli archi di cerchio, secondo l' idea che egli medesimo ne aveva data nella sua teorìa generale delle evolute.

Da un'altro canto le leggi della comunicazione del moto abbozzate da Cartesio, portate più oltre da Wallis, de Huguens, e da Wrenn, avevano fatto un nuovo passo considerabilissimo,

mediante la soluzione, che diede Huguens del famoso problema de' centri d'oscillazione.

Tutte queste cognizioni, dapprima isolate ed in certo modo indipendenti le une dalle altre, essendo state ridotte ad un piccolo numero di formole generali, semplici e comode per mezzo dell' analisi infinitesimale, la meccanica prese un volo, il quale non potrà essere ritenuto, se non che dalle difficoltà tuttavia inerenti alla natura dell'istrumento.

Volendo il lettore formarsene una qualche idea, fa d'uopo che percorra prima di tutto l' introduzione ad Eulero nel Capo primo del quinto volume: di poi il nuovo sviluppo che Giacomo Bernoulli diede alla teorìa della comunicazione del moto sul principio del di lui Commentario al Capo terzo di questo volume: e quindi in fine del Commentario di Leibnizio, e ne'due Commentarj d' Alembert, e di Gio. Alberto Eulero troverà generalizzato, e completato da questi due grandi geometri il principio di *Dinamica* ossia della comunicazione del moto sviluppato dal Bernoulli: e vedrà pure in d'Alembert, aver'egli formato dell' *Idrodinamica*, e dell'*Idraulica*, che sono la scienza de' fluidi, una scienza quasi nuova, come aveva fatta della *Dinamica*.

Passando ora all'Astronomìa, vale a dire alla scienza degli Astri ossia de' corpi celesti, questa è considerata ne' seguenti volumi relativamente a' suoi progressi, come Astronomìa pratica, e come Astronomìa fisica. La prima è la cognizione de' moti celesti, fondata immediatamente sopra le osservazioni, e sopra le conseguenze delle osservazioni: La seconda è la spiegazione de' movimenti, coll'applicare la geometrìa alle leggi, che regolano questi movimenti.

Circa l'Astronomìa pratica muniti gli Astronomi moderni di eccellenti strumenti non solo perfezionarono tutte le antiche teorìe de'moti celesti, ma ne stabilirono ancora molte altre della più alta importanza, appena travedute, o anche assolutamente nuove. Tali sono, per esempio, la Librazione della Luna, i movimenti di aberrazione delle stelle fisse, la Nutazione dell'asse della terra, i Cataloghi delle stelle fisse, la figura della terra, le leggi generali del moto delle comete ec. come vedremo in Bradley, Lacaille ec. oltre alle cose, che abbiamo già riferite in Gian-Domenico Cassini, in Halley ec. astronomi moderni coetanei di Newton, e di Leibnizio riportati peraltro in fine dell'antecedente Volume.

L'Astronomìa fisica presentemente si appoggia tutta sopra la legge generale dell' attrazione vicendevole, che tutte le molecole, ed altre

parti della materia esercitano le une su le altre: ed a questa legge si dà ordinariamente il nome di *Sistema*: la qual denominazione è certamente impropriissima: poichè la gravitazione universale è ora una verità dimostrata. Ciò non ostante è permesso di così chiamarla per brevità del discorso, onde evitare le circunlocuzioni.

Quì peraltro fa d' uopo avvertire, che nelle materie di Fisica è d'una necessità indispensabile l'interrogare la sperienza: poichè essendoci quasi sempre sconosciute le molle, colle quali la natura agisce; non ci rimane altra risorsa, se non che di studiarne, e ravvicinarne gli effetti. Da ciò avvenne, che avendo gli antichi trascurata ordinariamente nelle dette materie di fisica la sperienza, mostrandosi dominati dallo spirito di Sistema nel senso più cattivo: e più solleciti a sfoggiare le loro congetture, e le loro opinioni, di quello che animati dalla solida gloria d' istruirsi prima eglino medesimi coll'osservazione seguita, e ragionata de'fenomeni; introdussero nelle loro spiegazioni fisiche di questi fenomeni le *forme sostanziali*, le *qualità occulte* ec. grandi parole vote affatto di senso, e solo inventate, per abbandonarsi a tutti gli slanci della immaginazione.

Per siffatti difetti tale vedemmo essere stato Cartesio nella sua Astronomìa fisica, benchè dotato d'altronde di molto genio, ed elevatezza di mente: e tali furono non meno di esso altri molti. Noteremo al contrario, che l' avvedutissimo Newton, perchè seppe abbandonare saviamente i prestigj dell' immaginazione, e studiò la natura nella natura medesima, giunse in fine ad indovinarne il segreto a forza di meditazioni, e di ricerche. E così pure vedremo con piacere risplendere lodevolmente gli altri, che si attennero alle sicure tracce di Newton nella fisica delle di loro astronomiche ricerche.

Dopo le indicate idee di Meccanica, e di Astronomìa, passando ora all' Ottica, di cui solo ci resta a parlare, a fine di completare il Prospetto ossia idea generale de' seguenti volumi; avvertiamo che, dopo un' insigne opera di Newton, nella quale vedremo progredire le teorìe dell'Ottica ad una somma elevatezza, questa scienza, non avendo potuto fare altri notabili avanzamenti nella teorìa, li andrà facendo, dopo la detta opera assai ragguardevoli nella pratica ossia nella parte meccanica della medesima. Poichè vedremo, che gl' Ingegneri ottici non solamente migliorarono gli strumenti che vi erano, ma ne inventarono, e ne costruirono eziandìo altri nuovi in soccorso grande della vista: dal che si ritrassero vantaggi notabili nelle speculazioni astronomiche, ed in molti usi della vita.

Posto ciò, i due elevatissimi matematici, che fanno epoca nel secolo XVII. Newton, e Leibnizio cominceranno i primi a sviluppare la vasta idea delle grandi cose indicate nel presente Apparato ossia Prospetto generale di questo, e del Volume seguente, che pensava di esporli in uno solo, per la concatenazione della di loro materia, e contemporaneità de'principali Autori: ma vedendolo troppo grande, e sformato, ho stimato meglio di dividerli.

Avverto ancora, che per non interrompere al giovane lettore l' affilamento, e concatenazione delle idee, durante lo sviluppo dell' Analisi Infinitesimale, onde più facile gli riesca il necessario concepimento, e piena intelligenza della medesima, si tralasceranno i Commentarj di più Matematici, i lavori de' quali non sieno stati diretti alla spiegazione della detta Analisi: nè abbiano per lo meno ad essa una qualche vantaggiosa relazione le di loro produzioni. Ma questi Matematici si riassumeranno quindi separatamente, completato che sarà lo sviluppo dell'indicata Analisi. Poichè essendo questa elevata, e bastantemente difficile di sua natura, ed interessando d'altronde al sommo grado la perfetta intelligenza della medesima al felice avanzamento della Matematica sublimiore; dobbiamo noi facilitarne il cammino al giovane studente nel miglior modo possibile.

STORIA
DELL' ORIGINE E DE' PROGRESSI
DELLE
MATEMATICHE

CAPO PRIMO

Delle moltiplici, e singolarissime scoperte del gran Newton, considerato perciò come il creatore d'una nuova Astronomìa, e d'una nuova Ottica: ed inventore elevatissimo dell' Analisi Infinitesimale.

Dalla Storia precedente si è potuto rilevare, che l'Inghilterra ha prodotto in tutti i tempi grandi Matematici, ed Astronomi del prim' ordine, i quali si resero assai utili all' Astronomìa colle loro scoperte, e con delle belle ricerche, che vi fecero. Peraltro il più che si ammira tra i tanti matematici Inglesi è il famosissimo cavaliere Isacco Newton, il quale oltre all'essere stato unitamente a Copernico, ed a Keplero il creatore dell'Astronomìa presente, fu altresì un profondo geometra analista, e fisico acutissimo, che riformò l'Ottica, e diede ad essa il nuovo impianto, che vi si ammira, e si contrastò in fine con Leibnizio il dritto all'invenzione dell'Analisi Infinitesimale. L'estratto delle sue opere importerebbe un volume. Noi però, per la

limitazione della presente Storia, ci contenteremo d'indicarle soltanto in questo di lui breve Commentario.

Anni di G. C. 1680

Isacco Newton, nato nel 1640 e morto nel 1727, venne alla luce dotato dalla natura d' un' intelligenza sublime in un tempo, in cui Hariot, Wrenn, Wallis, Barrow, ed altri suoi connazionali avevano già rese floride le Matematiche in Inghilterra. Egli ebbe inoltre il vantaggio di ricevere nella sua prima gioventù lezioni di Matematica da Barrow nell' Università di Cambridge. Tutte le forze del suo genio si portarono verso questo genere di studj: ed i successi, che egli vi ottenne, furono prodigiosi. Fontanelle applicò ad esso ciò che Lucano aveva detto del Nilo, *che non fu concesso agli uomini di vederlo debole, e nascente*. Si assicura che sino dall'età di venticinque anni verso il 1667 egli aveva gettato i fondamenti delle grandi teorìe, che lo hanno poi reso tanto singolare.

Abbiamo di fatti nella di lui storia, che essendo egli ancor giovane, possedeva tutti i rami particolari dell'Analisi, che si conoscevano sino a verso l'anno 1670 in cui fioriva il di lui maestro Barrow: nel di cui commentario riferimmo, che quando Barrow pubblicò nel 1674 le sue Lezioni d' Ottica, Newton aveva di già concepito, e dato dei saggi della sua grand'opera in questa scienza in alcuni scritti stampati tra quelli delle *Transazioni filosofiche* della Società reale di Londra negli anni 1671, 1672 ec. e fece in quel tempo la sua principale scoperta della diversa refrangibilità de' raggi della luce. Vedemmo pure antecedentemente in Giacomo Gregori, il quale fiorì verso l'anno 1660, che non essendo riuscito il celebre Wallis a quadrare col suo metodo le curve, che hanno delle ordinate complesse, e radicali; vi riuscì Newton, e fece anche di più. Egli risolvè il problema in un modo diretto, e molto più semplice, per mezzo della formola che trovò, per isvolgere in una serie infinita una potenza, qualunque sia l'esponente della potenza intero o rotto, positivo o negativo. La serie infinita poi, che quindi risulta per la quadratura del cerchio, fu trovata anche in un' altra maniera da Giacomo Gregori.

Ma queste, ed altre molte ricerche ne'diversi rami dell'Analisi siccome non avevano fatto perdere di vista il problema della risoluzione generale delle equazioni; quindi è, che Newton vi si volle applicare, benchè giovane. Egli ne cercò per lungo tempo la soluzione: e sebbene non gli riuscisse di trovarla; estese nondimeno considerabilmente in questa circostanza i confini dell'Algebra. Diede un metodo, onde risolvere, quando la cosa è possibile, un' equazione in fattori commensurabili: metodo che si estende a tutti i gradi, e la sua pratica è semplice, quanto mai possa desiderarsi. Egli sommò le potenze qualunque delle radici d'un' equazione: spiegò l'arte di estrarre, quando si può, le radici dalle quantità in parte commensurabili, ed in parte incommensurabili: insegnò a formare delle serie infinite, per trovare in un modo prossimo le radici delle equazioni numeriche, e letterali di tutti i gradi ec. La maggior parte di queste ricerche si trova dilucidata, e commentata nelle opere medesime.

Ma non siamo ancora alle opere grandi di Newton: prima di giungere alle quali, fa d'uopo rammentarsi, cosa avvertimmo di esso in fine di Richer: ed è lo

schiacciamento successivo, che trovò della terra un poco più grande di quello di Huguens, andando dall'equatore verso i poli: e la di lui opinione su la natura della gravità primitiva, riguardandola egli, come il risultato di tutte le attrazioni reciproche delle molecole del globo terrestre, e che lascia il centro un pò da una parte: nozioni che vanno a far parte in una delle più grandi teorìe, che seguono di Newton.

La produzione più grande di questo elevatissimo,
Anni di G.C. 1686 ed incomparabile Analista è il di lui libro pubblicato sul fine dell'anno 1686 col titolo: *Philosophiae naturalis principia mathematica*: opera immensa, e profonda, nella quale si è proposto di spiegare, per mezzo dell' osservazione e del calcolo, i principali fenomeni della natura, ed in particolare i movimenti de' corpi celesti. La chiave de'più difficili problemi in essa risoluti è il Metodo delle flussioni, ossia l'Analisi Infinitesimale: ma presentata destramente sotto una forma, che la nascondeva, e rendeva l'opera difficoltosa da studiarsi. Dal che avvenne, che non ebbe da principio tutto il successo, che meritava. In essa si trovavano delle oscurità, delle dimostrazioni prese da sorgenti troppo remote, un' uso troppo affettato del metodo sintetico degli antichi, mentre l'analisi avrebbe fatto conoscere molto meglio lo spirito, ed il progresso dell' invenzione. Quindi l'estrema concisione di alcuni luoghi, proveniente da una straordinaria sagacità di Newton, che lo faceva presumere un poco troppo della penetrazione de' suoi lettori, rendeva nel tutto insieme quel libro divino talmente oscuro e difficile, che la grande celebrità di esso non comincia, se non che dal princi-

pio del secolo decimo ottavo, in cui l'Analisi Infinitesimale, già molto avanzata, pose i geometri in istato di comprenderlo. Allora si rilevò in un modo da non poterne dubitare, che alcuni teoremi, e problemi involti in una sintesi completa, erano stati originalmente trovati coll'analisi. Onde si rese insiememente a Newton la dovuta giustizia di riconoscere, che all'epoca della pubblicazione del suo libro, egli possedeva il Metodo delle flussioni, ossia l'Analisi Infinitesimale in un modo eminente almeno in quanto alla parte, che concerne la quadratura delle curve.

E quì in decisione della tanto celebre, e tanto agitata controversia, se l'invenzione dell'Analisi Infinitesimale spetti a Newton, o a Leibnizio, gioverà il fare avvertire sin da ora, che secondo l'esame della questione, tanto Newton, che Leibnizio sono inventori della detta Analisi, avendone fatta la scoperta separatamente uno dall'altro, e senza aver nulla preso uno dall' altro: e se Leibnizio la pubblicò il primo, fu peraltro Newton, che l' inventò prima di lui. Poichè Leibnizio pubblicò la sua sublime scoperta dell'Analisi Infinitesimale, primo passo del calcolo differenziale, nel 1684: quando che sappiamo dal *Commercium Epistolicum de Analisi promota*, che Newton ne era in possesso prima di quel tempo. Difatti sono riportate nel detto Commercio ossia corrispondenza di lettere molte scoperte analitiche fatte da Newton sino dall' anno 1669. Nel suo Trattato: *De analisi per aequationes numero terminorum infinitas*, oltre al metodo, per risolvere le equazioni per approssimazione, Newton insegna a quadrare delle curve, le di cui or-

dinate sono espresse da monomj e da somme di monomj: e quando le ordinate racchiudono de' radicali complessi, egli riduce la questione al primo caso, svolgendo l'ordinata in una serie infinita di termini semplici, per mezzo della formola del binomio, ciò che niuno aveva per anco fatto. Sluze, e Gregori avevano trovato, ciascuno dal proprio canto, un metodo per le tangenti. Newton in una sua lettera a Collins, in data del 10 dicembre 1672, prova che egli pure ne aveva trovato uno: egli lo applica ad un'esempio, senza aggiungervi la dimostrazione: in seguito egli dice, ch'esso altro non è, se non che un corollario d'un'altro metodo generale, ch' egli ha per condurre le tangenti, quadrare le curve, trovare le loro lunghezze, ed i loro centri di gravità ec., senza essere ritenuto dalle quantità radicali: come lo è Hudde nel suo metodo pei *massimi, e minimi*. Gl'Inglesi hanno veduto chiaramente il metodo delle flussioni in questi due scritti di Newton, dopo che altronde era stato conosciuto in tutta l' Europa, medianti gli scritti di Leibnizio, e dei fratelli Bernoulli. Ma i geometri delle altre nazioni non hanno avuto i medesimi occhi. Eglino confessano soltanto, che i due scritti di Newton *de Analisi per aequationes numero terminorum infinitas*, e la lettera del 1672 contengono, se si voglia, un' indicazione vaga del Metodo delle flussioni: indicazione per avventura sufficiente a mostrare, che Newton possedeva allora i primi principj di questo metodo, ma troppo oscura, per renderne intelligente il lettore.

Tralasciando tante altre cose della lunga controversia, concludiamo, che si hanno in essa tre soli scritti decisivi: 1.° una lettera di Newton ad Oldembourg segretario della Società reale di Londra, scritta li 24 di Ottobre 1676, e comunicata l'anno seguente a Leibnizio. In essa contengonsi parecchi teoremi, che hanno per base il metodo delle flussioni: ma Newton ne cela le dimostrazioni. Egli si contenta di dire d'averli ricavati dalla soluzione d'un problema generale, che enunzia enigmaticamente sotto alcune lettere trasposte, ed il cui senso, spiegato troppo tardi, è questo: *Data un'equazione che contenga delle quantità fluenti, trovare le flussioni: e reciprocamente.* Niun vero lume poteva ritrarre Leibnizio da un sì fatto logogrifo: e solo serve a mostrare, che all'epoca di essa lettera, Newton già possedeva il metodo delle flussioni, vale a dire il metodo delle tangenti, e delle quadrature soltanto; non trattandosi allora di altro metodo: poichè il metodo per l'integrazione dell'equazioni differenziali non è venuto, che molto più tardi.

2.° La risposta di Leibnizio ad Oldembourg dei 21 giugno 1677, la quale comincia dal dire, d'avere riconosciuto, come Newton, che il metodo di Sluze per le tangenti era imperfetto. In seguito egli spiega apertamente e senza mistero quello del Calcolo Differenziale, assicurando che da lungo tempo se ne serviva, per condurre le tangenti delle linee curve. Ed ecco pertanto la soluzione chiara e positiva del problema, di cui Newton cercava con tanto impegno, e circospezione di riservarsi il privativo possesso.

3.° Uno Scolio contenuto nel citato libro *Dei Principj di Newton*, nel quale egli scrive così: *In un commercio di lettere, che io manteneva dieci anni fà* (per mezzo di Oldembourg) *col dottissimo geometra Sig. Leibnizio, avendogli partecipato, che io possedeva un metodo, per determinare i massimi e minimi, condurre le tangenti, e fare altre cose simili, il quale riusciva egualmente nelle equazioni razionali, e nelle quantità radicali, ed avendo nascosto questo metodo sotto alcune lettere trasposte, che significavano*: data una equazione, che contenga un numero qualunque di quantità fluenti, trovare le flussioni: e reciprocamente, *quest' uomo celebre rispose, che egli aveva trovato un metodo simile, e mi comunicò il suo metodo, che non differiva dal mio, se non che nell'enunciato, e nella notazione.* L'edizione del 1714 aggiunge: *e nell' idea della genesi delle quantità.* Non si può dire in un modo più formale, che Leibnizio aveva trovato dal canto suo il metodo delle flussioni, e che lo aveva comunicato francamente, senza nascondersi nelle tenebre come Newton.

Egli è dunque certo da questi tre scritti, che se fù Newton il primo a trovare il metodo delle flussioni, come si pretende stabilire dalla sua lettera del 10 Dicembre 1672; Leibnizio lo trovò egualmente dal canto suo, senza nulla prendere in prestito dal suo rivale. Questi due grandi uomini sono arrivati colla forza del di loro genio, alla medesima scoperta per istrade diverse: uno con riguardare le flussioni come semplici rapporti di quantità, che nascono, e svaniscono nel medesimo istante: l'altro col considerare, che in una serie di quantità, le quali *crescono, o decrescono*; la differenza tra due termini consecutivi può divenire infinitamente piccola, vale a dire, più piccola d'ogni grandezza finita determinabile.

Dopo tuttociò, una profonda geometrìa, e la teorìa delle forze centrali scoperta da Huguens, fecero trovare a Newton la legge della forza, che ritiene la luna nella sua orbita intorno alla terra, ossia che fa gravitare continuamente la Luna verso la terra. In seguito egli estese questa legge a tutti i corpi del nostro sistema planetario: ed ecco in un dipresso la gradazione delle sue idee sopra questo vasto argomento.

Noi vediamo, che una palla da cannone lanciata dall'esplosione della polvere, va a cadere tanto più lontano, quanto è più forte l'impulso della polvere: inoltre dalla teorìa di Huguens si apprende, che se la palla, animata da una gravità sempre costante, e sempre diretta al centro della terra, fosse lanciata orizzontalmente con una velocità eguale a quella, che acquisterebbe, se cadesse liberamente in linea retta da un'altezza eguale al semi-raggio del globo terrestre, essa girerebbe senza fine circolarmente intorno alla terra, (fatta astrazione da ogni resistenza), passando in ciascuna rivoluzione pel punto, da cui fosse partita. Il medesimo ragionamento ha egualmente luogo, serbata la proporzione, se la palla in vece di partire da un punto situato sopra la superficie della terra, partisse da un punto elevato sopra questa superficie una lega, due leghe, ec. Noi dunque possiamo trasportarlo sino alla Luna, e supporre che essa sia la luna medesima, la quale gira difatti circolarmente intorno alla terra: ed allora dalla velocità colla quale gira la luna troveremo il rapporto della forza, che la ritiene nella sua orbita, o che la devìa continuamente dalla direzione rettilinea, alla gravità, che fa cadere quaggiù i corpi alla superficie della terra. Ora secondo le osservazioni astronomiche, e geodesiche, il raggio del globo terrestre vale 57000 tese (1): la media distanza dalla luna alla terra, ossia il raggio medio dell'orbita lunare, vale 60 volte il raggio del globo terrestre: la luna fa la sua rivoluzione intorno alla terra in 27 giorni, 7 ore, e 43 minuti. Dietro questi dati si trova 1.° la circonferenza intera dell'orbita lunare, e la lunghezza dell'arco che la luna percorre in un dato tempo, per esempio, in un minuto: 2.° la forza centripeta della luna, ossia la quantità, da cui quest'astro è tratto verso la terra, in un minuto: essendo questa quantità sensibilmente una terza proporzionale al diametro dell'orbita lunare, ed all'arco che descrive in un minuto. Il risultato di tutti questi calcoli si è, che la quantità onde la luna devia dalla tangente, o s'avvicina alla terra in un minuto, è di circa 15 piedi. E siccome, da un' altro canto, si sa, per esperienza, che i corpi gravi, cadendo alla superficie della terra, percorrono 15 piedi in un secondo, ossia 3600 piedi in un minuto; si rileva, che dalla terra alla luna la gravità non è costante, e che si è essa diminuita nel rapporto di 3600 ad 1, cioè a dire, nel rapporto del quadrato di 60 al quadrato di 1, ossia del quadrato della distanza della luna alla terra, al quadrato del raggio della terra. Tale è il primo esempio di questa famosa legge della gravitazione degli astri in ragione inversa de'quadrati delle distanze.

(1) *Si trascurano ne' calcoli, di cui trattasi, alcune piccole quantità, le quali altro non farebbero, se non che allungarli inutilmente: poichè qui non si tratta di altra cosa, se non che di far conoscere chiaramente a tutti lo spirito del metodo in questione.*

Allorchè Newton ebbe riconosciuta la legge della gravitazione della Luna verso la terra, non gli fu difficile il determinare ugualmente la tendenza de' pianeti principali verso il sole, e quelle de' satelliti verso i loro pianeti principali. Quì le leggi di Keplero somministrarono gli elementi del calcolo.

I pianeti principali descrivono delle ellissi intorno al sole, che occupa uno de' fuochi, e medesimamente i satelliti descrivono delle ellissi intorno ai loro pianeti principali. Ora per la prima legge di Keplero, i tempi impiegati a percorrere le parti d'una medesima orbita, stanno tra loro come le aree comprese tra l'asse maggiore dell' Ellisse, un raggio vettore qualunque, e l'arco percorso: donde si concluse, che il Pianeta principale è spinto verso il Sole, o il Satellite verso il suo Pianeta principale, con una forza reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza del corpo girante dal centro di tendenza. Si aveva dunque così il mezzo di paragonare le gravitazioni d' un medesimo pianeta in due punti qualunque della sua orbita. Ma ciò non era sufficiente: bisognava inoltre saper paragonare le gravitazioni di due pianeti differenti: perciocchè poteva avvenire, che da un pianeta all'altro la gravitazione non seguitasse il rapporto del quadrato inverso delle distanze: ciò che avrebbe tolto al principio la sua generalità, ed i suoi vantaggi più essenziali. La seconda legge di Keplero compisce questa teorìa, e riduce tutte le gravitazioni alla medesima unità. Essa prova che tutti i pianeti principali sono spinti verso il sole dalla medesima forza, che varia in ragione inversa de' quadrati delle distanze. Così, per esempio, la tendenza di Marte verso il Sole sta alla tendenza di Giove verso il Sole, come il quadrato della distanza di Giove dal Sole, al quadrato della distanza di Marte dal Sole. Lo stesso avviene pei satelliti riguardo ai loro pianeti principali.

La gravitazione è reciproca fra tutti i corpi dell' universo. In quella guisa, che i principali pianeti pesano verso il Sole, ed i satelliti verso i loro pianeti principali; così il Sole pesa a vicenda verso i pianeti principali, ed i pianeti principali verso i loro satelliti. Una pietra, che cade alla superficie della terra, è attratta dal globo della terra: essa attrae a vicenda questo globo. L'attrazione, che ciascun corpo esercita, è proporzionale alla sua massa: giacchè non v' è alcuna ragione, perchè la virtù attrattiva esista in una molecola del corpo, piuttostochè in un'altra: essa è comune a tutte, e l'attrazione totale è proporzionale alla massa. Se dunque due corpi sono in presenza uno dell' altro, percorreranno uno verso l'altro degli spazj reciprocamente proporzionali alle loro masse. Di quì si scorge nel nostro esempio, che a motivo della enorme sproporzione delle masse, la tendenza del globo terrestre verso la pietra deve sembrare nulla in confronto di quella della pietra verso il globo terrestre. In quanto alla diminuzione che soffre la gravità, a misura che aumenta la distanza; essa non può divenire sensibile, se non che quando la distanza diventa grandissima. Quindi due corpi, che cadono da altezze differenti, ma sempre mediocri, sulla superficie della terra, soffrono delle gravità che sembrano eguali, e le due altezze percorse sono proporzionali ai quadrati de' tempi, come Galileo ha trovato il primo: ma questa legge non ha più luogo, quando le due altezze differiscono considerabilmente, come, per esempio, se una essendo di 100 piedi, l'altra fosse eguale al raggio dell'orbita lunare: poichè dalla terra alla luna, la gravità diminuisce nel rapporto di 3600 ad 1.

Dall'attrazione reciproca, che due pianeti, come la Terra e la Luna, esercitano uno su l'altro, risulta che la Terra deve accostarsi alla Luna, nel tempo stesso che la luna si accosta alla terra, di modo che il movimento della luna si fa intorno ad un punto mobile: ma questo movimento non segue perciò leggi diverse da quelle che seguirebbe, se la terra fosse fissa: poichè se in generale si cercano le curve descritte da due corpi, che per le loro attrazioni vicendevoli percorrono l'uno verso l'altro degli spazj reciprocamente proporzionali alle loro masse, e che sono lanciati nello spazio secondo qualunque direzione, e con velocità qualunque; si troverà che questi corpi descrivono quattro curve simili tra loro: vale a dire, ciascuno una intorno all'altro corpo considerato come immobile, e ciascuno una intorno al loro centro comune di gravità, il quale può altronde essere in quiete, o muoversi uniformemente in linea retta.

Se non vi fossero nel cielo, che due corpi giranti uno intorno all'altro, in virtù d'un moto d'impulsione primitiva, e dell'attrazione newtoniana, sempre operante; essi si moverebbero in una maniera rigorosamente conforme alle leggi di Keplero: ma tosto che vi sono più di due corpi, (e questo è il caso della natura), il movimento ellittico de'due primi è alterato in ciascun' istante dalle attrazioni degli altri. La più

che a noi interessa di queste alterazioni, ed ineguaglianze di moto ne' corpi celesti cagionate dalla reciproca gravitazione o attrazione de' medesimi, è quella che soffre la luna, la quale essendo il nostro satellite, deve naturalmente fissare i nostri primi sguardi.

L' attrazione della terra sopra la Luna è la più forte, che soffre questo satellite, ed è perciò ch'esso gira intorno alla terra: viene in seguito l' attrazione del sole, che turba il moto ellittico della Luna, e non possiamo dispensarci dal considerarla, se vogliamo ottenere risultati precisi. Anche gli altri corpi celesti producono alcune alterazioni in questo movimento, ma sono piccolissime, e vengono perciò trascurate. Similmente nella ricerca de'movimenti di Giove, e di Saturno, non si considerano, che le ineguaglianze cagionate dalle attrazioni vicendevoli di questi due pianeti. Quindi i geometri si sono proposto il seguente problema generale conosciuto sotto il nome di *Problema dei tre corpi: determinare le curve che descrivono tre corpi, lanciati nello spazio secondo qualunque direzione, con qualsivoglia velocità, ed esercitanti gli uni su gli altri delle attrazioni, che sono come i quozienti delle loro masse divise pei quadrati delle distanze.* Questo problema al tempo di Newton non era suscettibile d'una soluzione rigorosa nello stato d'imperfezione, in cui era allora l'Analisi: e solo poteva darsene qualche soluzione approssimata, più o meno perfetta, secondo la sagacità de' geometri, e la scelta delle osservazioni, sopra le quali il calcolo deve esser fondato. In seguito, di mano in mano che si è progredito in queste teorìe, si sono avute soluzioni più approssimate, e si è riconosciuto, che in molte occasioni bisognava considerare le attrazioni di più di tre corpi. Ma i metodi di approssimazione pel problema dei tre corpi si applicano egualmente all'altro di più di tre corpi, come vedremo.

Newton aveva determinato colla teorìa della gravitazione molte grandi ineguaglianze della Luna: vale a dire, 1.° la variazione, la cui quantità è di circa 35 minuti negli *Ottanti* della Luna, cioè a dire, quando la luna è a circa 45 gradi dal Sole o dalla terra: 2.° il moto annuo, e retrogrado de' nodi dell'orbita lunare, la cui quantità è di circa 19 gradi all'anno: 3.° la principale equazione, o ineguaglianza del movimento de' nodi, la quale ascende ad un grado e 50 minuti: 4.° finalmente, la variazione dell' inclinazione dell' orbita lunare al piano dell' ecclittica: variazione che è di circa 8 in 9 minuti, ora in una dimensione, ed ora in un'altra. Tutti questi calcoli sono fondati sopra l'ipotesi, che l'orbita della luna è presso a poco un'ellisse, della quale Newton trascura parimente l'eccentricità: ma questa supposizione si allontana sensibilmente dal vero, e non dà, se non che alcune approssimazioni, delle quali non è permesso al presente di contentarsi. Vi sono molte altre ineguaglianze della luna, tra le quali se ne trovano alcune, che Newton dice di aver calcolate colla medesima teorìa, senza indicare altronde il cammino da lui seguìto: tali sono quella, che dipende dall'equazione al centro del sole, e quella che dipende dalla distanza dal sole al nodo della luna: ma si ha luogo di temere, che egli non abbia posto maggior precisione in questi calcoli, che in quelli delle inegua-

glianze precedenti. Finalmente egli si è limitato a dedurre unicamente dalle osservazioni il movimento dell' apogèo, l'equazione assai considerabile di questo movimento, la variazione non meno importante dell'eccentricità, ed alcune altre ineguaglianze.

Dalle cose indicate, e da altre molte, che si sono omesse, si rileva che la teorìa di Newton della Luna, benchè sia un grande sforzo di genio, era però insufficiente, ed aveva bisogno, non solo di essere perfezionata quasi in tutte le sue parti, ma ancora di essere completata a molti altri riguardi: come vedremo in seguito aver fatto Eulero, Clairaut, d'Alembert, Mayer, ed altri matematici rispettabilissimi.

Più felicemente riuscì Newton nella sua supposizione della figura della terra in forma d'una sferoide ellittica compressa, dipendente dalle leggi dell'idrostatica. Noi vedemmo, che Huguens aveva spiegato l'esperienza di Richer a Cajenna, mediante la combinazione della forza centrifuga con una gravità primitiva costante, sempre diretta al centro della terra. Newton sostituì a questa gravità la risultante di tutte le attrazioni particolari, che le molecole del globo terrestre esercitano le une su le altre. Presentemente tra queste due leggi di gravità non vi è alcuna scelta da fare. Il principio di Newton è confermato dalla natura: vediamo l'uso ch' egli ne ha fatto, e l'estensione considerabile, che si è data alla sua teorìa.

Newton suppone tacitamente, e senza dimostrarlo, che la terra originalmente fluida ed omogenea, formi in virtù dell'attrazione reciproca delle sue parti, e della forza centrifuga una sferoide ellittica compressa:

egli calcola i pesi della colonna centrale equatoriana, e della colonna centrale polare. Dal peso della prima colonna sottrae la somma delle forze centrifughe di tutte le molecole che la compongono, ed uguaglia il rimanente al peso della colonna polare: dal che trova pel rapporto del diametro dell' equatore all'asse di rivoluzione quello de' numeri 230, e 229 in circa.

Indipendentemente dalla differenza delle ipotesi, che Huguens e Newton avevano adottate sopra la natura della gravità primitiva, eglino determinarono la figura della terra con metodi differenti. Huguens partiva da questa condizione, che la risultante della gravità primitiva, e della forza centrifuga deve essere dappertutto perpendicolare alla superficie del fluido: Newton da quest'altra, che le colonne dirette secondo gli assi della sferoide debbano vicendevolmente controbilanciarsi. Queste due condizioni sembrano egualmente necessarie ad un tempo, una per istabilire l'equilibrio alla superficie del fluido, l'altra nell' interno della massa. Da ciò Bouguer, e Maupertuis presero occasione di cercare, coll' uno e l'altro metodo, la natura del meridiano in differenti ipotesi di gravità dirette verso uno o più centri: e rigettarono tutti i casi, in cui i due metodi non si accordavano nel dare la medesima curva pel meridiano, il che accadeva molto spesso: ma tutti questi problemi, altronde poco difficili, non erano in sostanza, che giuochi di geometrìa. La natura della gravità è fissata: ed in ogni altro principio diverso da quello d'un' attrazione reciprocamente proporzionale ai quadrati delle distanze è quì estraneo alla vera questione.

La proposizione fondamentale di Newton, che la

terra è una sferoide ellittica compressa, aveva bisogno di essere dimostrata: essa lo fu da Stirling nel caso, in cui il fluido essendo interamente omogeneo, lo schiacciamento è supposto piccolissimo: Clairaut la dimostrò altresì in questa medesima supposizione d' uno schiacciamento piccolissimo, non solo quando il fluido è interamente omogeneo, ma ancora quando è composto di strati di densità differenti. Osserviamo nondimeno, che egli s' ingannò nel secondo caso, riguardando gli strati come simili: ciò non può aver luogo, quando gli strati sono fluidi, come riconobbe egli medesimo nella sua *Teorìa della figura della terra* pubblicata nel 1743.

In Maclaurin, Clairaut, d'Alembert, ed in altri Matematici troveremo altre importanti teorìe, che dall' indicata Astronomìa fisica di Newton si derivano. Ma fra tante ricchezze, che nell' aureo libro de' Principj di Newton si racchiudono, non manca il medesimo di notabili difetti, i quali ci convincono della limitazione della nostra mente, e che l'uomo, per quanto di genio ed elevato che sia, non può esser mai perfetto in tutte le sue operazioni: *nam quandoque etiam bonus dormitat Homerus.* Tale ci si mostra il gran Newton nello spiegare co' suoi principj alcune teorìe d'Idrodinamica, e precisamente nell' Idraulica.

Poichè il principio d'ugual pressione applicato alle
Anni di G.C. 1686 leggi generali dell'Idrostatica, bastava per ispiegare tutti i casi particolari d'equilibrio, che a questo si riferiscono: ma la scienza del moto de' fluidi era sempre rimasta, in quanto alla parte teorica, alla sola proposizione di Torricelli, cioè a dire, alla cognizione dell' efflusso de' fluidi per orifizj infinitamente piccoli, o fisicamente piccolissimi.

Newton intraprese nel suo libro *De' Principj* a risolvere il problema, senza astringersi a questa supposizione particolare. Egli considera un vaso cilindrico verticale perforato nel suo fondo da un' apertura di grandezza qualunque, per la quale l'acqua scaturisce, mentre il vaso ne riceve continuamente dall'alto una quantità eguale a quella che versa: di modo che può supporsi, che l'acqua affluente formi uno strato di grossezza uniforme, istantaneamente estesa e posata sopra l'acqua del cilindro, che perciò rimane sempre pieno alla medesima altezza: in seguito egli concepisce, che l'acqua del cilindro sia divisa in due parti, una centrale, e liberamente mobile, ch' ei chiama *cateratta*; l'altra adjacente ed immobile, ritenuta esternamente dalle pareti del vaso. Egli suppone, che la velocità d'una sezione orizzontale qualunque della cateratta sia dovuta all'altezza corrispondente dell'acqua del cilindro, comprendendo in quest' altezza la grossezza dello strato di surrogazione: e siccome da un' altro canto fa d'uopo, per la continuità della cateratta, che le velocità delle sue differenti sezioni orizzontali sieno in ragione inversa delle loro superficie; così il calcolo mostra, che la cateratta deve prendere la forma di un solido prodotto dalla rivoluzione d' un' iperbola del quarto genere intorno alla linea verticale, che passa pel centro dell' orifizio. Con ciò si conosce la quantità dell'acqua erogata in un tempo dato.

L'autore non avendo da principio notata la diminuzione del dispendio, che deve cagionare la contrazione della vena fluida all'uscire dall'orifizio; aveva concluso, che la velocità a questa uscita è unicamente

dovuta alla metà dell' altezza dell' acqua nel cilindro, il che è contrario alle sperienze de' getti d'acqua. Nella seconda edizione egli corresse questo sbaglio: ma la sua teorìa generale non restò meno vaga, precaria, ed anche falsa in quanto alla sostanza: le leggi dell'Idrostatica, e la sperienza hanno dimostrato ad evidenza, che la formazione, e la figura della cateratta newtoniana sono fisicamente impossibili.

Ma questo, ed altri non molto rilevanti difetti, che si trovano nel libro *De' Principj*, non deprimono punto la grandezza di quell' immenso edifizio: nè ecclissano a Newton lo splendore del suo merito, e della gloria indefettibile, che deriva a lui anche da tante altre sue opere grandiose. Sul finire dell' anno 1704 egli pubblicò in un medesimo volume le sue lezioni d' Ottica in inglese, un' enumerazione *delle linee del terz' ordine* in latino, ed il trattato delle *quadrature* delle curve parimente in latino. Le lezioni d' Ottica sono state sempre riguardate con occhio d'ammirazione, e di sorpresa: come l' enumerazione delle linee del terz'ordine è stata da tutti considerata per un'opera originale, e profonda, benchè unicamente fondata sopra l'analisi ordinaria, e sopra la teorìa delle serie, che Newton aveva portata tanto oltre: essa non contiene, per così dire, che degli enunziati, e de' risultati: è stata in seguito commentata da parecchi dotti geometri, ai quali ha somministrato un ampia messe di curiosissime ricerche. Il trattato delle quadrature appartiene alla nuova geometrìa.

Questo trattato ha per oggetto speciale l'integrazione delle formole differenziali del primo ordine ad una sola variabile: donde dipende la quadratura delle curve, o esatta, o almeno approssimata. Newton forma con molta sagacità delle serie, per mezzo delle quali riduce l' integrazione di certe formole complicate a quelle di altre formole più semplici: e queste serie venendo in certi casi ad interrompersi, danno allora gl'integrali in termini finiti. Lo sviluppo di questa teorìa offre una lunga catena di bellissime proposizioni, ove tra gli altri problemi curiosi si rileva il metodo, per integrare le frazioni razionali: lo che era allora difficile, soprattutto quando le radici sono eguali. Un cominciamento sì felice, e sì importante, ci fa rincrescere, che l'autore non abbia dato, se non che i primi principj dell'analisi delle equazioni differenziali. Egli, a dir vero, insegna bensì a prendere le flussioni d' un' ordine qualunque d' un' equazione ad un numero qualunque di variabili: lo che appartiene al calcolo differenziale: ma non insegna a risolvere il problema inverso, cioè a dire, egli non ha indicato alcun mezzo d' integrare le equazioni differenziali, o immediatamente, o colla separazione delle indeterminate, o colla riduzione in serie ec. Nondimeno questa teorìa aveva già fatto allora de' progressi considerabilissimi in Germania, nell' Olanda, ed in Francia, come si può giudicarne dai problemi della catenaria delle curve isocrone, della curva elastica, e principalmente dalla soluzione, che Giacomo Bernoulli aveva dato del problema degli isoperimetri. Gli avversarj di Newton hanno da questo trattato delle quadrature preso motivo di affermare, che nell' epoca in cui comparve quest' opera, l'autore non conosceva perfettamente del calcolo inte-

grale, se non che la parte delle quadrature, e non quella dell' integrazione delle equazioni differenziali.

Newton ha rifuso quasi interamente il trattato *Delle quadrature* in un'altro intitolato: *Metodo delle flussioni, e delle serie infinite.* Questo non contiene, che semplici elementi della geometrìa infinitesimale, cioè a dire i metodi, per determinare le tangenti delle linee curve, *i massimi ed i minimi* ordinarj, le lunghezze delle curve, gli spazj che esse rinchiudono, alcuni facili problemi sopra l' integrazione delle equazioni differenziali ec. L' intenzione dell'autore era stata più volte di farlo stampare: ma ne fu sempre distolto da varie ragioni, la prima delle quali fu certamente, che quest'opera nulla poteva aggiungere alla di lui gloria, e nemmeno contribuire all'avanzamento della profonda geometria. Il dottore Pemberton lo fece comparire con pubblico gradimento in inglese nel 1736 nove anni dopo la morte di Newton e nel 1740 fu tradotto in francese.

Comparve nel 1711 un'altra opera di Newton, il suo *Metodo Differenziale*, di cui aveva gettato già i fondamenti sotto una forma alquanto differente nel suo libro De' *Principj*. L'oggetto di questo metodo è di far trovare i coefficienti lineari d'un' equazione, che soddisfa a tante condizioni, quanti sono i coefficienti, ossia di costruire una curva di genere parabolico, che passi per un numero qualunque di punti dati. Ne risulta un mezzo facile e comodo di quadrare per approssimazione le curve, di cui si può determinare un certo numero di ordinate. Oltre a ciò, Newton non ha adoprato in quest'opera, se non che la semplice Algebra ordinaria, ed a torto alcuni suoi ammiratori, un poco troppo zelanti, e dominati dall'entusiasmo hanno creduto trovarvi i primi elementi del calcolo Integrale alle differenze finite, tanto celebre a' nostri giorni.

Qualche tempo prima della di lui morte Leibnizio, volendo *tastare il polso agl' Inglesi*, com' egli diceva, fece loro proporre il famoso problema delle Trajettorie ortogonali, il quale consisteva nel trovare la curva, che taglia una serie di curve date sotto un angolo costante, o sotto un' angolo variabile secondo una data legge. Si narra, che Newton tornando a casa molto stanco, ricevè il problema a quattr'ore, e non si coricò, se non dopo di averlo sciolto (1). Il suo metodo si riduce a queste poche parole (2): » La natura delle curve da tagliarsi dà le di loro tangenti » ai punti d' intersezione: gli angoli d'intersezione danno le perpendicolari delle curve seganti: due perpendicolari vicine danno coi loro punti di concorso » il centro di curvatura della curva segante. Situate » convenientemente l'asse delle ascisse, e prendete la » flussione prima per l'unità; la flussione della perpendicolare darà la flussione prima dell'ordinata alla » curva cercata, e la curvatura di questa curva medesima darà la flussione dell' ordinata: quindi il problema sarà sempre ridotto ad equazione. In quanto » all'integrazione dell'equazione, *soggiungeva l'autore*, » essa appartiene ad un' altro metodo ».

Gl'Inglesi cominciavano a trionfare: ma Giovanni Bernoulli, incaricato della causa di Leibnizio, che da poco era morto, derise altamente questo progetto di

(1) Font. Elog. di Newton.
(2) Transaz. fil. 1716.

soluzione: egli sostenne non esservi cosa più facile, che lo giugnere all' equazione della trajettoria: che inoltre si erano già da lungo tempo trattate con buon'esito molte quistioni particolari di questa specie: che la difficoltà essenziale consisteva nell' integrare l'equazione differenziale della trajettoria, quando era possibile, o esattamente, o per mezzo delle quadrature delle curve: che questa integrazione, lungi dall' essere estranea al problema, n'era anzi il necessario complemento. Laonde conchiudeva con derisione, che Newton, non avendo dato per ciò mezzo alcuno, aveva eluse, e non superate le difficoltà della quistione.

Checchè sia di questa critica del Bernoulli, noi avvertiamo per ora, che se non è essa indebita, eccede se non altro i riguardi scambievoli, che le sociali convenienze impongono a tutti gli uomini. Nel commentario di Taylor riassumeremo questa controversia, e vedremo in essa il giudizio, che dovrà farsene. E riservandoci di parlare a suo luogo di altre molte cose di Newton, per maggior brevità, e chiarezza delle medesime; chiudiamo questo di lui commentario colla grande riforma, e nuovo impianto, che egli fece dell' Ottica.

Si conoscevano da lungo tempo le principali proprietà della luce, la sua reflessibilità, la sua refrangibilità, il suo calore, quando è raccolta al fuoco di un vetro ustorio ec. senza conoscere la sua intima tessitura, ossia la natura delle parti integranti, onde questo fluido è composto. Newton è il primo, che abbia penetrato, e rivelato questo gran segreto: egli ha, per così dire, anatomizzato la luce, ed i colori. Sempre attento ad allontanare lo spirito di sistema, sempre guidato dall'esperienza, egli approfondì l'Ottica per tant'anni: e dopo aver dato per intervalli alcuni saggi delle sue meditazioni nelle *Transazioni filosofiche* della Società Reale di Londra; raccolse alla fine le sue idee antiche, e nuove in un *Trattato d' Ottica*, che uscì nel 1706: opera originale, paragonabile al libro *De' Principj*: ed eccone un' idea generale.

La luce, secondo la nuova Ottica dell'avveduto Newton, non è già, come si credeva per lo addietro, una sostanza pura ed omogenea: essa è composta di sette specie principali di atomi luminosi, differenti in colori, in refrangibilità, ed in reflessibilità. Questi sette raggi primitivi sono il rosso, il rancio, il giallo, il verde, il turchino, l'indaco o porporino, ed il violetto. Newton li separò coll'esperienza seguente conosciuta oggidì da tutti. Introducendo per un piccolo foro i raggi del sole in una camera oscura, e loro presentando obliquamente una delle facce di un prisma triangolare di vetro, il cui asse è perpendicolare a quello del fascetto de'raggi; si osserva che questo fascetto si spezza, ossia cangia di strada entrando nel vetro: attraversa il prisma in linea retta, ripassa nell' aria spezzandosi ancora, e va a formare sopra un cartone bianco, distante 15, o 18 piedi, un' immagine oblonga, ove si distinguono chiaramente sette fasce colorate secondo quest'ordine dal basso all'alto: rosso, rancio, giallo, verde, turchino, indaco, e violetto. Il fascetto interno è dunque composto di sette raggi, che hanno delle refrangibilità differenti. Il raggio rosso è meno refrangibile di tutti, siccome quello che meno si scosta dalla perpendicolare alla faccia di emergenza del prisma: la refran-

gibilità aumenta progressivamente per gli altri raggi, sino al raggio violetto, che è l' altro estremo. Se si colloca un numero qualunque di prismi al seguito del primo, e che il fascetto attraversa tutti questi prismi; vi saranno delle nuove rifrazioni: l' immagine dipinta sul cartone si rovescerà, o si raddrizzerà: ma le sette fasce colorate sussisteranno sempre le medesime inalterabilmente, e conserveranno sempre tra loro il medesimo ordine di situazione.

Gli oggetti, che non sono luminosi per se stessi, o che non hanno, se non che una chiarezza riflessa; ci sembrano rossi, ranci, gialli ec. secondochè ci trasmettono, almeno per la massima parte, de' raggi rossi, ranci, gialli ec. Il colore bianco è formato dal concorso di tutti i raggi: il nero assorbisce i raggi, che riceve, e non si scorge, se non che mediante il riflesso dei raggi, che vengono dagli oggetti circonvicini. In tutti i casi si fa una perdita di raggi, i quali rimangono negli interstizj dell' oggetto, o sono dispersi da una parte, e dall'altra. I raggi assorbiti possono produrre un colore sensibile: così, per esempio, ai raggi del Sole un cappello nero è più caldo d'un cappello bianco.

Un raggio di luce, che passa da un mezzo in un' altro, si spezza: e si accosta, o si discosta dalla linea retta condotta al punto d' ingresso perpendicolarmente alla superficie di separazione, secondo che il primo mezzo è meno, o più denso del secondo: e l'effetto è tanto più sensibile, quanto più le densità de' due mezzi sono differenti: ma il rapporto del seno dell'angolo d'incidenza al seno dell'angolo di rifrazione rimane sempre lo stesso per ogni sorte d'obliquità: esso cangia soltanto di valore, quando i due mezzi comparativi vengono a cangiarsi. Per esempio, se il raggio passa dall'aria nell'acqua, i due seni sono come i numeri 4 e 3; o come 12 e 9; e se passa dall'aria nel vetro, essi sono come i numeri 3 e 2, o come 12 ed 8.

I sette raggi primitivi, avendo refrangibilità differenti; quando si parla in generale della rifrazione di un fascetto di luce, che comprende tutti i raggi, si tratta della rifrazione media: essa è presso a poco quella del verde. Qualche volta non si ha bisogno, se non che di questa rifrazione media: qualche volta bisogna avere riguardo alle differenze di refrangibilità di tutti i raggi, come si vedrà, quando parleremo de' *Cannochiali Acromatici*.

Se un raggio di luce, dopo di essere passato da un mezzo meno denso in un'altro più denso, come, per esempio, dall'aria nell'acqua, ritrocedesse; esso ritrocederebbe esattamente per la medesima strada. Quindi, essendosi accostato alla perpendicolare nel primo caso, se ne discosterebbe nel secondo. Da ciò, e dal rapporto costante, che esiste sempre tra il seno d' incidenza, ed il seno di rifrazione, può accadere, che la rifrazione si cangi in riflessione: e reciprocamente. Per esempio, un raggio di luce, che entra dall'aria nell'acqua, quasi radendo l'acqua, o facendo un'angolo d' incidenza quasi retto; si spezza sotto un'angolo di circa 48 gradi, e 50 minuti: dunque se il raggio ritornasse dall'acqua nell'aria, si rifrangerebbe sotto un'angolo vicino a 90 gradi, ossia non farebbe che radere la superficie dell' acqua: e se l'angolo di ritorno fosse maggiore di 48 gradi e 50 minuti, il raggio nell'acqua si rifletterebbe.

La refrangibilità, e la reflissibilità dei raggi dipendono dalla medesima causa. Quelli che sono meno

refrangibili, sono altresì meno riflessibili. Per esempio, il raggio rosso ha bisogno d'un maggior'angolo d'incidenza degli altri, affinchè la rifrazione si cangi in riflessione.

Newton spiega partitamente tutti questi fenomeni della luce: Il suo Trattato *di Ottica* ha fatto epoca in questa scienza, come il suo libro *De' Principj* nell'Astronomìa fisica. Alcune delle sue sperienze furono da principio contrastate, perchè si ripetevano malamente: gli sono soltanto sfuggiti, in questa moltitudine di fatti, di osservazioni, e di ragionamenti, alcuni leggeri sbagli, che non portano alcun nocumento al fondo dell'opera.

Alcuni celebri geometri, camminando su le tracce di Newton, si sono applicati a sviluppare, ed a sottoporre al calcolo le leggi della rifrazione, e della riflessione della luce secondo i principj dell'attrazione. Merita di essere considerata principalmente la memoria, che diede Clairaut su di ciò, come vedremo in esso.

Conchiudiamo intanto a compimento del presente Commentario, che dal detto sin quì si rileva, essere stato il nostro Newton uno di quei sommi Matematici dottissimi, i quali fanno epoca nel secolo decimo settimo, e tra di essi occupa egli certo il primo posto, contrastatogli tra' suoi contemporanei da Huguens, da Leibnizio, dai fratelli Giacomo, e Giovanni Bernoulli, e dal grand'Eulero. Questi elevatissimi Matematici sono tutti sommi in genere di nuove teorìe, e nuovi ritrovati: ma nella particolarità del più utile, e più meritevole di essi al pubblico nell'avanzamento delle Matematiche, si dà comunemente a Newton quest' onore speciale, pel di lui Sistema planetario, per l'invenzione ed uso della nuov' Analisi, e pel suo impianto d'una nuova Ottica.

CAPO SECONDO

Scoperta dell'Analisi Infinitesimale fatta da Leibnizio separatamente da Newton per vie diverse, senza essersi nulla preso, o comunicato uno all'altro.

L'Analisi o Calcolo Infinitesimale è quello, in cui si fanno entrare l'espressioni di gradi eguali, ed infinitamente piccoli, determinati da una stessa legge. Poichè dovendosi, o almeno potendosi supporre ogni grandezza pervenuta, o ridotta ad un certo stato per mezzo d'un' aumento, o decremento continuo, ed uniforme, per la regolarità della natura nelle sue operazioni ordinarie; i geometri, per giungere al di loro scopo nel Calcolo Infinitesimale, sogliono anch' eglino accrescere, o diminuire *all' infinito*, come suol dirsi, le grandezze variabili per mezzo di gradi eguali, ed infinitamente piccoli, determinati da una certa legge regolare: i quali gradi si chiamano le *Differenze* o le *Differenziali* delle grandezze nel Calcolo Infinitesimale.

L' idea peraltro, che quì si ha dell' *infinito*, è un' idea astratta, la quale non esiste, che nella nostra mente soltanto: e si concepisce da noi l' *infinito*, come il *limite* del *finito*, vale a dire come il termine, a cui il finito tende sempre, e vi si accosta, senza potervi mai arrivare. Quando si dice, per esempio, che *una curva è un poligono d' infiniti lati*, s' intende dire, che questa curva è il *limite* de' poligoni, che si possono ad essa iscrivere, o circoscrivere: e che

quanti più lati avranno questi poligoni, tanto più si accosteranno ad essere uguali alla curva, da cui si può supporre, che differiscano quanto poco si vuole, aumentando a nostro piacimento il numero de' loro lati. Per quantità poi *infinitamente piccole* non si devono già intendere le quantità d'una piccolezza *infinita reale*, le quali non esistono, ma d'una tal piccolezza, che sia sempre minore di qualunque quantità assegnabile.

Il *Calcolo Infinitesimale* si divide in *Differenziale*, ed *Integrale*. Il calcolo *Differenziale* consiste a trovare una quantità infinitamente piccola, la quale presa un numero infinito di volte, sia eguale ad una quantità data. Il calcolo *Integrale* al contrario consiste a trovare la quantità, alla quale appartiene la data differenza infinitamente piccola. Nel calcolo *Differenziale* si conosce la somma, e si cerca la differenza infinitamente piccola: nell' *Integrale* si conosce la differenza infinitamente piccola, e si cerca la somma. E poichè nel calcolo *Differenziale* le parti della quantità, che si vuole accrescere, o diminuire, *quasi fluunt* una dall'altra con una certa legge regolare; quindi è che detto calcolo è chiamato da Newton, e dagl' Inglesi il *Metodo delle Flussioni*: a motivo ancora, perchè hanno eglino considerato gli aumenti momentanei della quantità come generati dal *flusso* ossia scorrimento del punto, per formare la linea: dal *flusso* della linea, per costruire la superficie: e dal *flusso* della superficie per comporne il solido: corpo largo, lungo, e profondo.

Per formarsi un' idea distinta, e ben comprendere la *Differenziale*, o sia una *quantità infinitamente piccola*, fa d'uopo avvertire, per esempio, le infinite seganti, che tirano i geometri, per trovare la tangente in un dato punto d'una curva, la qual tangente viene ad essere il *limite* delle seganti: e le seganti saranno sempre tali, e non giungeranno mai alla tangente cercata, se l'ultima segante non si combaci con essa perfettamente, e non divengano insieme una stessa linea: restando allora soltanto assolutamente nulle le differenze delle seganti: e non vi sarà più rapporto vero tra esse e la tangente, che si cercava: mentre non si dà rapporto reale tra due cose, che non esistono punto. Essendo svanito colla tangente trovata il *limite* del rapporto, che le differenze avevano tra loro, quando erano tuttavia qualche cosa; cessato il limite del rapporto, deve cessare anche la ricerca: mentre il rapporto, e valore del *limite* era quello, che conduceva a determinare la tangente, e il valore della medesima.

Sotto quest' ultimo aspetto il *Calcolo Differenziale consiste a trovare il limite del rapporto tra la differenza finita di due quantità, e la differenza finita di due altre quantità, che hanno colle due prime un'analogìa d'una legge nota.*

A compimento di queste prenozioni epilogate del Calcolo Differenziale, per una semplice idea del medesimo, convien notare in ultimo cosa sia la *variabile*, e la *costante*, due linee che sono in esso nominate frequentemente.

Dicesi *costante* ogni quantità, che si considera come giunta ad uno stato fisso. *Variabile* chiamasi quella quantità, che si riguarda come attualmente suscettibile d'accrescimento, o di diminuzione. In un dato circolo il diametro è una *costante*, una corda è una

variabile. Bene intese queste prenozioni per l'intelligenza delle nuove voci.

Leibnizio di nazione Tedesco, nato nel 1646 e morto nel 1716, non trovò in Germania, che mediocri soccorsi per la sua istruzione: egli si formò, per così dire, da sè stesso. Il suo genio vasto, e rapido, secondato da una memoria straordinaria, abbracciava tutti i rami delle umane cognizioni: letteratura, storia, poesia, diritto delle genti, scienze esatte, fisica ec. Questa moltiplicità di gusti pregiudicò necessariamente alla rapidità de' suoi progressi in ciascun genere: quindi egli non si annunziò come grande matematico, se non che sette, o otto anni dopo Newton, di cui era soli quattro anni più giovane. Si rese nondimeno al più presto competitore sì grande del medesimo, che si contrastarono lungo tempo tra loro il primato della gloria nelle Matematiche.

Anni di G. C. 1680

Da principio Leibnizio non molto vi attese. Le sue cure principali nelle Università di Germania erano dirette al Diritto pubblico, e alla Storia. Ciò non ostante nel 1666 pubblicò un piccolo libro sopra alcune proprietà de' numeri, non disprezzabile: ed uscito quindi dalle dette Università, si diede a viaggiare, a fine di erudirsi. Si portò subito in Francia nel 1672: ed acquistati molti lumi nelle Università, e coll'avvicinarsi a quei dotti, passò a Londra nel principio del 1673. Vide ivi Oldembourg segretario assai dotto della Società reale delle scienze, e strinsero insieme una corrispondenza di lettere. In una di esse scritta in Londra medesima ad Oldembourg Leibnizio gli espose, che avendo veduto un metodo di sommare certe serie, per mezzo delle loro differenze in un libro stampato di Mouton, Canonico di S. Paolo in Lione, sopra *i diametri del Sole, e della Luna*; egli aveva immaginato un'altra maniera da lui spiegata, per formare le differenze, e per concluderne le somme delle serie: e gli diceva ancora, esser' egli in istato di sommare una serie di frazioni, i cui numeratori sono l'unità, ed i denominatori sono o i termini delle serie de' numeri naturali, o quelli della serie de'numeri triangolari, o quelli della serie de' numeri piramidali ec: ricerche ingegnose, le quali sembrano avere un rapporto almeno lontano col calcolo delle differenze.

Dopo alcuni mesi di soggiorno in Londra, Leibnizio tornò a Parigi, ove strinse amicizia con Huguens, che gli aprì il Santuario della più profonda geometrìa. Egli trovò ben presto la quadratura approssimata del cerchio con una serie analoga a quella, che aveva data Mercatore per la quadratura prossima dell'iperbole: comunicò la sua serie ad Huguens, che ne fece grandi elogi, e ad Oldembourg, il quale gli rispose, che Newton aveva già trovato cose simili, non solo pel cerchio, ma ancora per altre curve, e che ne mandava de' saggi. Di fatti la teorìa delle serie era già molto avanzata sino da quel tempo in Inghilterra: e sebbene Leibnizio vi avesse fatto dal canto suo non pochi progressi, egli ha però sempre riconosciuto, che gl' Inglesi, e sopra tutti Newton lo avevano preceduto, e superato in questo ramo dell'Analisi, che apre la strada al Calcolo Differenziale.

Ascoltiamo dunque, e ponderiamo la Storia, che fa Leibnizio della sua scoperta del Calcolo Differenziale. Egli racconta, che aggiungendo le sue antiche rifles-

sioni sopra le differenze dei numeri alle sue nuove meditazioni di geometrìa, trovò questo calcolo verso l'anno 1676: che ne fece delle maravigliose applicazioni alla geometrìa: che essendo obbligato verso il medesimo tempo a ritornare ad Annover, non potè seguire interamente il filo delle sue meditazioni: che cercando nondimeno di *far valere* la sua nuova scoperta, passò per l' Inghilterra, e per l'Olanda: che restò alcuni giorni in Londra, ove fece la conoscenza di Collins, il quale gli mostrò molte lettere di Gregori, di Newton, e di altri Matematici, le quali si aggiravano principalmente sopra le serie. Secondo questa esposizione sembrerebbe, che Leibnizio, volendo spargere *la sua nuova scoperta*, avrebbe dovuto allora far conoscere in Inghilterra il suo nuovo Calcolo Differenziale. Ma convien dire, che Leibnizio nol fece. Poichè in una lettera di Collins dei 5 Marzo $167\frac{6}{7}$ diretta a Newton gli dice, che Leibnizio essendo stato una settimana in Londra nel mese di Ottobre 1676, gli aveva rimesso alcuni scritti, de'quali soggiungeva, che esso Newton riceverebbe incessantemente degli estratti, o delle copie. Ma Collins non dinota in detta lettera la natura degli scritti, i quali peraltro fa d'uopo dire, che nulla contenevano dell'indicata scoperta del Calcolo Differenziale fatta da Leibnizio: perchè costui avrebbe rivendicato una tal notizia, quando la Società reale di Londra tentò spogliarlo dell'onore di detta scoperta, per adornarne privativamente il solo Newton. In prova di che riferisce Collins un' altra lettera di Leibnizio ad Oldembourg in data di Amsterdam del $\frac{18}{82}$ Novembre 1676, nella quale Leibnizio propone di costruire alcune tavole di formole tendenti a perfezionare il metodo di Sluze, in vece di spiegare, o almeno d'indicare il Calcolo Differenziale, come molto più spedito, e più comodo. Ma potrebbe supporsi, che Leibnizio proponesse enimmaticamente di perfezionare il metodo di Sluze, per non dire apertamente, che egli lo aveva già perfezionato, e trasformato nella natura essenzialmente diversa del Calcolo Differenziale: e seguitare così a tenere celata una sua scoperta sommamente gelosa.

Ma comunque sia la cosa, ciò che deve inferirsi da questo racconto si è, che nè Leibnizio aveva appreso da Newton per mezzo di Oldembourg, o di Collins il Calcolo Differenziale, che pubblicò prima di esso Newton, nè Newton apprese da Leibnizio il detto Calcolo ossia *Metodo delle Flussioni*, che diede alla luce due anni, dopo che l'aveva pubblicato Leibnizio nella sua grand' opera. Di Newton lo abbiamo dimostrato ad evidenza nel suo Commentario: di Leibnizio poi si rileva con altrettanta chiarezza dalla riferita Storia. Poichè se Leibnizio avesse appreso dagl' Inglesi il Calcolo Differenziale nel suo passaggio per Londra in Ottobre del 1676, bisognerebbe dire che fosse egli quindi caduto in demenza, per osare di proporre un mese dopo a quel Segretario della Società reale, uomo assai dotto in siffatte materie, i mezzi di perfezionare il metodo di Sluze per sè stesso, senza parlare nulla affatto di un'altro metodo molto più semplice, e più comodo, che gli era stato insegnato in Inghilterra.

Similmente gli scritti di Newton, ne' quali pretendevano alcuni dotti della Società reale di Londra,

aver Leibnizio rilevato l'Analisi Infinitesimale, e precisamente il suo Calcolo delle differenze, sono l'opera di Newton *De Analisi per aequationes*, e la di lui lettera del 10 Dicembre 1672 a Collins, in cui prova al medesimo di aver trovato un metodo per le tangenti, come avevano fatto Gregori, e Sluze, ciascuno dal canto suo. Ma Leibnizio o leggesse, o nò nelle sue due dimore in Londra i detti scritti di Newton; da niuno di essi poteva rilevare il suo Calcolo Differenziale. Non dall'*Analisi per aequationes*: perchè o non lo contiene affatto, o se vi è in alcun modo contenuto, rimane da sì dense tenebre coperto, che niuno affatto dei dotti Inglesi ve lo seppe rilevare, anche dopo pubblicata la grande opera di Newton *De' Principj*, che lo contiene realmente: e solo giunsero a comprenderlo in questa grand' opera di Newton nel principio del secolo decim'ottavo, quando l'Analisi Infinitesimale pubblicata da Leibnizio nel 1684 si era di già ingigantita per tutta l'Europa nel principio del 1800. Molto meno potè Leibnizio rilevare la sua analisi o calcolo differenziale dalla citata lettera di Newton: perchè in essa l'autore applica il suo metodo ad un'esempio senza prova: ed in conseguenza oltre a non contenere detta lettera, se non che alcuni risultati senza dimostrazione; non è ben certo neppure, che essa indichi un metodo essenzialmente diverso da quello di Sluze: giacchè scrive Newton ad Oldembourg, che *In quanto ai metodi*, cioè il suo, e quello di Sluze, *essi sono i medesimi, benchè* io (prosegue Newton) *li creda tratti da principj differenti. Non so però, se i principj del Sig. Sluze sieno così fecondi*, *come i miei*, *che si estendono* *alle equazioni affette di termini irrazionali, senza che sia necessario di cangiarne la forma.* Queste parole di Newton decidono assolutamente, che il suo metodo per le tangenti è lo stesso di quello di Sluze: ed è certo perciò, che non può esso contenere il Calcolo Differenziale, che è essenzialmente differente dal metodo di Sluze. Il più che potrebbe da esso rilevarsi, è un' idea del detto calcolo: ma sembra che Leibnizio, se pur lo vide, neppur quest' idea vi rilevasse, per l'oscurità del medesimo relativamente al calcolo delle differenze, e a tutta l'Analisi Infinitesimale ossia al Metodo delle Flussioni.

Conchiudo dunque con tutta franchezza, che spetta a Leibnizio indipendentemente da Newton la gloria indefettibile della sublime scoperta da esso fatta dell' Analisi Infinitesimale (primo passo al calcolo delle differenze) che egli pubblicò negli atti di Lipsia pel mese di Ottobre del 1684. Lo scritto per sempre memorabile, che lo contiene è intitolato: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* In esso trovasi il metodo per differenziare ogni sorte di quantità, razionali, frazionarie, radicali: e l'applicazione di questi Calcoli ad un' esempio molto complicato, che indica la via per tutti i casi. In seguito l'autore risolve un problema *De maximis et minimis*, il cui oggetto è di trovare la strada, che deve seguire un corpuscolo di luce, che attraversa due mezzi differenti, affine di arrivare da un punto ad un' altro pel cammino più facile. Il risultato della sua soluzione si è, che i seni degli

angoli d' incidenza, e di rifrazione debbano stare tra loro in ragione reciproca delle resistenze de' due mezzi. Finalmente egli applica il suo nuovo calcolo ad un problema, che Beaune aveva altre volte proposto a Cartesio, e di cui questi aveva dato una soluzione incompleta. Si trattava di trovare una curva, la cui sottangente fosse dappertutto la medesima. Leibnizio fa vedere in due tratti di penna, che la curva cercata è tale, che se le ascisse formano una progressione aritmetica, le ordinate formano una progressione geometrica: proprietà, da cui si riconosce la logaritmica ordinaria.

Qualche tempo dopo nel 1685 in due piccoli scritti sopra le quadrature delle curve, egli gettò le prime nozioni del *Calcolo Sommatorio* o *Integrale.* Queste idee sono sviluppate di più in un'altro scritto intitolato: *De Geometria recondita, et Analisi indivisibilium, atque infinitorum.* Leibnizio vi dà la regola fondamentale del Calcolo Integrale: spiega in che consistano i problemi del metodo inverso delle tangenti, che in seguito è stato variato in tante maniere. Barrow aveva laboriosamente dimostrato, che in ogni curva la somma dei prodotti degli intervalli infinitesimi delle ordinate per le sotto normali della curva, è uguale alla metà del quadrato dell'ordinata estrema. Leibnizio trova quasi per divertimento il medesimo risultato per mezzo del Calcolo Integrale: ed osserva in generale, che tutti i problemi delle quadrature, dati prima dai geometri, si risolvono senza alcuna difficoltà col suo metodo.

Mentre Leibnizio trovavasi seriamente occupato nella sua felice scoperta dell' Analisi Infinitesimale, e de' due calcoli Differenziale, ed Integrale in essa contenuti, per desiderio de' suoi amici si determinò, come per divertimento e riposo della sua mente, a conciliare una controversia avuta da Fermat coi Cartesiani su la diversità, che trovasi tra le leggi della rifrazione della luce, e quelle de' corpi solidi. Siccome la spiegazione di Fermat da noi riferita nel di lui Commentario non era piaciuta ai fisici, perchè faceva dipendere la riflessione, e la rifrazione della luce da principj troppo differenti; quindi è, che per l'uniformità di spiegazioni, che i fisici desideravano, Leibnizio si determinò a fare uno scritto ingegnosissimo, che fu pubblicato negli atti di Lipsia del 1682 sotto questo titolo: *Unicum Opticae*, *Catoptricae*, *et Dioptricae principium*. La supposizione, sopra la quale è appoggiato questo principio unico, si è che un raggio di luce andando da un dato punto ad un altro dato, o direttamente, o per riflessione, o per rifrazione; deve in tutti i casi seguire il cammino più breve. Rimane da determinarsi la facilità del cammino ne'tre casi proposti.

Allorchè il moto è diretto, o si fa nel medesimo mezzo, egli è evidente che il cammino più facile è il più breve, ossia la semplice linea retta condotta da un punto all' altro. Nel moto riflesso il cammino più facile è ancora il più breve, ossia la somma delle due linee condotte dal punto di riflessione ai due punti dati: laonde risulta, che l'angolo di riflessione deve essere uguale all'angolo d' incidenza. Finalmente nel moto rifratto, dove le due parti del cammino non sono uniformi, la facilità di ciascuna parte è tanto più grande, quanto è più piccolo il prodotto dello spazio percorso moltiplicato per la resistenza del mezzo: e per

conseguenza la facilità del cammino totale è come la somma de' prodotti delle resistenze de' due mezzi pei cammini percorsi. Laonde uguagliando questa somma ad un *minimum*, si trova che i seni di riflessione, e di rifrazione sono in un rapporto costante, che è il rapporto inverso delle resistenze de'due mezzi. Ben si scorge, che questo terzo caso rinchiude i due altri, supponendo perciò, che le densità de' due mezzi diventino eguali. Tutta questa teorìa è sicuramente molto interessante, e molto preferibile a quella di Cartesio, e di Fermat. Nondimeno siccome essa è fondata, come quella di Fermat, sopra la metafisica delle cause finali; fa d'uopo confessare, che una soluzione diretta è migliore. Il sistema dell'attrazione, o piuttosto la legge della gravitazione universale, dimostrata da tutti i fenomeni, dà questa soluzione nel modo più preciso, più soddisfacente, ed assolutamente al coperto da qualunque difficoltà.

Ad un' altra distrazione più grande della riferita andò soggetto Leibnizio nel mentre che era più che mai occupato a perfezionare la nuova Analisi. Fu d'essa la celebre questione, ch' egli ebbe coi Cartesiani sopra la misura delle forze motrici, o sia delle forze vive. Siccome pretendevano Cartesio, e i suoi discepoli, che la forza de' corpi in moto detta perciò *viva e motrice* dovesse misurarsi col semplice prodotto della massa, e della velocità; Leibnizio negli atti di Lipsia del 1686 fece intendere, che eglino si erano ingannati: ed imprese a sostenere, che bisognava misurare le dette forze col prodotto della massa, e del *quadrato* della velocità. Poichè è noto, diceva Leibnizio, che per alzare un peso d'una libbra a quattro piedi d'altezza, vi vuole la medesima forza, che si esige, per alzare un peso di quattro libbre ad un piede di altezza. Ora un corpo che cade da quattro piedi, ed un corpo che cade da un piede, acquistano delle velocità le quali sono tra loro come due ed uno: dunque secondo i Cartesiani le forze sarebbero nel nostro caso come due e quattro, in vece di essere eguali.

I Cartesiani risposero, che doveva aversi riguardo alla differenza de'tempi delle cadute ne'due casi. Leibnizio rispose, che la considerazione del tempo doveva esser messa in disparte: che la forza esisteva in sè stessa, e che poco importava di sapere come era stata acquistata. Ma vedendo finalmente Leibnizio, che i Cartesiani si perdevano in sottigliezze metafisiche, le quali facevano brillare l' ingegno, senza punto rischiarare la questione: e che esigevano in fine ad ogni modo *tempi eguali* per la misura, e pel confronto delle forze motrici; quest' ultima esigenza gli fece venire l' idea di proporre ad essi un problema, il quale o li obbligasse a tacere per la sua elevatezza, o rendesse almeno utile alla geometrìa la discussione del quesito, ed il fine della controversia, a cui era diretto. Il problema consisteva nel trovare la curva *Isocrona*: vale a dire *la curva, che deve seguire un corpo pesante, per allontanarsi, o avvicinarsi egualmente in tempi eguali da un punto orizzontale.* Ammutolitisi i Cartesiani alla difficoltà di questo problema, il prudentissimo Huguens, che non aveva preso mai parte nell' interminabile questione su la misura delle forze vive, giudicando il problema degno della sua applicazione, pubblicò nel 1687 le proprietà, e la costruzione della richiesta curva, senza aggiungervi la dimostrazione: ed era questa curva *la seconda parabola cubica.*

Leibnizio dopo avere aspettato in vano per lo spazio di tre anni la soluzione de' Cartesiani, nominò la medesima curva di Huguens, e dimostrò che essa soddisfaceva al problema. E per offrire, egli diceva, *la pariglia* a' suoi avversarj, nello stesso anno 1689 propose loro di trovare *la curva isocrona paracentrica*, in cui il corpo deve presentemente allontanarsi, o avvicinarsi egualmente in tempi eguali rispetto ad un punto fisso: ma questo secondo problema, che vedremo risoluto dai fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli nel Commentario del primo, era più intralciato dell'antecedente: e la pretesa pulitezza di Leibnizio poteva riguardarsi come una derisione.

Questa piccola guerra, ed altre opere assolutamente estranee alle Matematiche toglievano a Leibnizio un tempo, che egli avrebbe voluto consacrare tutto intero al progresso della nuova geometrìa. A fronte peraltro di tante sue distrazioni, egli diffondeva continuamente nei giornali delle idee, che tendevano a questo fine. Tale fu, per esempio, il suo metodo di differenziare *de curva in curvam* da lui rinvenuto in occasione del difficile problema della curva *sincrona* propostogli da Giovanni Bernoulli, dopo che egli aveva tentato in vano di risolverlo. E quando vide che Leibnizio lo sciolse prestissimo, e che inventò a questo proposito il celebre metodo sudetto, trasportato dal giubilo, e dalla maraviglia nel riceverne la lettera, si lagnò amichevolmente, perchè *il Dio della geometrìa aveva ammesso Leibnizio prima di lui nel suo San-*

tuario. Ci duole, che questo primo movimento, il quale fu quello della giustizia, Giovanni Bernoulli tentasse di variarlo dopo la morte di Leibnizio: cercando di farsi riguardare come coinventore del detto metodo, il quale annunziato che fu dai giornali, appena inventato, era rimasto inedito sino al 1745, in cui fu pubblicato sotto il proprio nome di Leibnizio nella raccolta della sua corrispondenza con Giovanni Bernoulli. Questi non vi aveva altro merito, se non che quello di averne fatte delle belle applicazioni, come può vedersi nel secondo tomo delle sue opere.

Siccome l'Analisi Infinitesimale, o sia il Metodo delle Flussioni, che comprende i due Calcoli Differenziale, ed Integrale, si è sviluppato per gradi per mezzo della risoluzione di varj problemi, come abbiamo in parte veduto; quindi è che per evitare una inutile ripetizione di cose, e per essere anche più metodici, e più chiari, ci riserviamo d'indicare le altre operazioni di Leibnizio per l'ingrandimento, e perfezione di questa sua nuova geometrìa ne' rispettivi luoghi, ove cadono, parlando degl' illustri fratelli Giacomo, e Giovanni Bernoulli, del Marchese dell' Hopital, e di qualche altro Matematico, che più degli altri si distinse con esso Leibnizio nel perfezionamento dell'Analisi sudetta.

Giudico intanto, che non sarà cosa sgradevole a chi legge l'avvertire quì, per un piccolo parallelo di Leibnizio, e di Newton, che non è forse mai esistito un' uomo come Newton, dotato d'un'intendimento, e d'un vigore di mente capace di concepire, di continuare, ed eseguire un vasto piano. Leibnizio non ha dato alcuna opera particola, che per l'importanza, e

concatenamento delle materie sia paragonabile al libro *De'Principj*: troppo trasportato dalla vivacità del suo genio, dalla moltitudine, e varietà delle sue occupazioni, da' suoi viaggi, dalle sue corrispondenze letterarie colla maggior parte dei dotti di tutti i paesi del mondo; egli non poteva obbligarsi a meditare per molto tempo il medesimo argomento, nè a seguire partitamente tutte le cognizioni di un grande principio: ma la raccolta delle sue opere, ed il suo *Commercio epistolare* con Giovanni Bernoulli portano dappertutto il più alto carattere dell' invenzione. Egli semina ad ogni passo idee nuove, e germi di teorìe, lo sviluppo delle quali produrrebbe qualche volta trattati interi. Egli ha sopra Newton il vantaggio d'avere inventato, e di molto avanzato il Calcolo Integrale delle equazioni differenziali. Se non ha uguagliato il geometra inglese nella profondità, sembra però che lo sorpassi in quella rapida penetrazione ed acutezza d' ingegno, con cui concepisce in qualsivoglia materia le quistioni più sottili, e più ingegnose. Il primo ha lasciato una massa più grande di verità geometriche: l'altro ha accelerato di più al suo tempo i progressi della scienza colla semplice, e comoda notazione del suo Calcolo, colle appplicazioni che ne fece egli medesimo, o per quelle che ai dotti diede motivo di fare, per gl'incoraggiamenti che loro dava, e per le nuove strade che continuamente apriva alle loro meditazioni. Finalmente, comunque grande fosse la fatica, che ha potuto richiedere il libro *De'Principj*; non si deve dimenticare, che quest'opera è comparsa soltanto due o tre anni, dopo che Leibnizio aveva pubblicato il suo Calcolo Differenziale, ed alcuni saggi del Calcolo Integrale. Leibnizio dunque, come inventore del calcolo tanto differenziale, che integrale, contenuti ed espressi in oggi sotto il nome generico di Analisi Infinitesimale, è inventore di quest' Analisi in tutta la sua estensione. Newton poi, come inventore del solo Calcolo Differenziale, è un'inventore parziale dell'Analisi Infinitesimale, per quel che concerne il suo calcolo differenziale soltanto: avvertimento necessariissimo, onde rimuovere in oggi ogni confusione, e non pregiudicare i diritti di Leibnizio, quando si dice, esser Newton inventore dell' Analisi Infinitesimale, che abbraccia presentemente i detti due calcoli insieme Differenziale, ed Integrale.

A compimento intanto del presente commentario, non dobbiamo trascurare uno scritto di Leibnizio sopra le curve, che si formano d'un' infinità di linee rette o curve, che vanno a concorrere ad una serie di punti sottoposti ad una data legge. Questo scritto poco sviluppato contiene alcune viste generali per la soluzione di molti problemi, come quelli delle caustiche, delle curve, che ne tagliano una serie di altre sotto un' angolo dato ec. Leibnizio si dedicava di raro ai lavori di dettaglio: tosto che si vedeva in possesso d' un metodo, lo abbandonava, lasciando ad altri il piacere d'intenderlo, e perfezionarlo: effetto di fervidezza d' ingegno, e d'un genio penetrante avido sempre di novità.

CAPO TERZO

Dei grandi progressi, che i due fratelli Giacomo, e Giovanni Bernoulli hanno fatto fare all'Analisi Infinitesimale con dei problemi, e dell'opere stimate.

La somma riputazione di Leibnizio presso i dotti di tutte le nazioni, e la singolarità, ed importanza del suo ritrovato dell'Analisi Infinitesimale mossero a seguirlo ben presto tra gli altri molti i due illustri fratelli Giacomo, e Giovanni Bernoulli, i quali adottarono il di lui nuovo metodo con ardore, se lo resero come loro proprio, e ne fecero tante belle applicazioni, che Leibnizio con un' abbandono veramente degno d' un' uomo sì grande, ed ingenuo pubblicò più volte ne' giornali, che il suo metodo doveva non meno dalle loro cooperazioni ripetersi, che da lui medesimo.

Anni di G. C. 1680

Giacomo primogenito de' fratelli Bernoulli, nato in Basilèa degli Svizzeri nel 1654 e morto professore di Matematica in detta capitale nel 1705, uomo di somma sagacità, ed uno dei più grandi geometri de' suoi tempi, celebre per varie opere di geometrìa, di meccanica, e di fisica di molta stima, iniziò nelle Matematiche il suo fratello Giovanni. I progressi che fecero insieme, e separatamente questi due faticosissimi campioni, furono rapidi, ed ammirabili. Una nobile emulazione stretta dai vincoli del sangue, dell'amicizia, e della riconoscenza, diresse i di loro studj per due, o tre anni. Avidi soltanto d' istruirsi, altro non avevano allora di mira, se non che la sublime ambizione di penetrare nel laberinto scientifico aperto alla loro attività: e quella sventurata rivalità, che segue le tracce dell' invidia, non turbava per anche sì dolci godimenti, come li turbò disgraziatamente in appresso.

Tra le altre prime produzioni di Giacomo Bernoulli è celebre il suo nuovo sviluppo, che diede alla teorìa della comunicazione del moto. I problemi della comunicazione del moto detti ordinariamente *problemi di Dinamica* richiedevano nuovi principj. Essi consistono, per esempio, nel determinare i movimenti, che risultano dalla percossa vicendevole di più corpi, il centro d'oscillazione d'un pendolo composto, i movimenti di più corpi infilati dalla medesima verga, alla quale s' imprime un moto di rotazione intorno ad un punto fisso ec. Ora egli è chiaro, che in queste specie di casi i movimenti non sono i medesimi, come se i corpi fossero liberi ed isolati, ma deve farsi tra i corpi di un sistema una distribuzione di forze tale, che i moti perduti da alcuni di questi corpi sieno guadagnati dagli altri. Il moto perduto, o ricevuto si calcola sempre dal prodotto della massa nella velocità perduta, o ricevuta: sia che le comunicazioni, o le perdite di moto si producano in ciascun' istante per gradi finiti, come nella percossa de' corpi duri, ovvero che in ogni istante le velocità non cangino, che per gradi infinitamente piccoli, come ne' movimenti di più corpi infilati da una verga mobile, e generalmente in tutti i casi, in cui le forze agiscono alla maniera della gravità.

Allorchè Huguens diede la sua soluzione del problema de' centri d'oscillazione, alcuni cattivi geometri

la impugnarono ne' giornali. Giacomo Bernoulli la sostenne nel 1686: ed intraprese a dimostrarla immediatamente col principio della leva. Egli non considerò dapprima se non, che due pesi eguali attaccati ad una verga inflessibile, e non grave: mobile intorno ad un'asse orizzontale. Avendo in seguito osservato, che la velocità del peso più vicino all'asse di rotazione deve essere necessariamente minore, e che al contrario quella dell'altro peso deve essere maggiore che non sarebbe, se ciascun peso agisse separatamente sopra la verga; ne concluse perciò che la forza perduta, e la forza guadagnata si fanno equilibrio: e che quindi il prodotto di una massa per la velocità che perde, ed il prodotto dell' altra massa per la velocità che guadagna, debbano essere reciprocamente proporzionali alle braccia della leva.

La sostanza di questo luminoso ragionamento era esatta. Solamente Giacomo Bernoulli sbagliò da principio, in quanto che considerava le velocità dei due corpi come se fossero finite, laddove avrebbe dovuto considerare le velocità elementari, e paragonarle colle velocità elementari prodotte in ogni istante dall'azione della gravità. Il Marchese dell'Hopital rilevò questo sbaglio, e nel rettificarlo, trovò, senza peraltro discostarsi dal principio di Giacomo Bernoulli, il centro d'oscillazione de' due corpi. Volendo in seguito passare ad un terzo peso, egli *riunì* i due primi al loro centro d'oscillazione, e combinò questo nuovo peso col terzo, come aveva combinato insieme i due primi: così di seguito. Ma la *riunione* proposta era un poco precaria, e non poteva essere ammessa senza dimostrazione. La memoria del Marchese dell'Hopital non produsse quindi altro vantaggio, che d'impegnare Giacomo Bernoulli a rivedere la sua prima soluzione, a perfezionarla, e ad estenderla ad un numero qualunque di corpi. Tuttociò fu eseguito successivamente. Da principio nel 1691 Giacomo Bernoulli cominciò a riformare la sua prima soluzione: di poi abbozzò la soluzione generale: ed in fine nel 1703 risolvè completamente il problema, qualunque fosse il numero, e la posizione de'corpi elementari del sistema.

Il suo metodo consiste nel risolvere, per un istante qualunque, il movimento di ciascun corpo in due altri movimenti: uno che il corpo prende realmente: l'altro che è distrutto, e nel formare delle equazioni che esprimono le condizioni dell'equilibrio tra i movimenti perduti. Con ciò il problema è ridotto alle leggi ordinarie della Statica. L'autore applica il suo principio a diversi esempj e dimostra rigorosamente, e nel modo più evidente la proposizione, che Huguens aveva impiegata per base della sua soluzione. Al seguito poi della sua insigne memoria, egli fa vedere coi medesimi principj, che il centro d'oscillazione, ed il centro di percossa sono situati in un punto medesimo.

Questa pregevole, ed attenta soluzione del sagacissimo Bernoulli sembrava non lasciare più nulla a desiderare. Nondimeno nel 1714 il di lui fratello Giovanni Bernoulli, e Taylor ricondussero su la scena il problema: e ne diedero due soluzioni, che nella sostanza erano assolutamente le medesime, per cui si accusarono di plagio reciprocamente: e differivano dalla soluzione di Giacomo Bernoulli in questo soltanto, che nella nuova maniera di trattare la questione, si sup-

pone che nel luogo de'pesi elementari, onde il pendolo è composto, si sostituiscano nel medesimo punto altri pesi tali, che i loro movimenti di accelerazione angolare, ed i loro movimenti riguardo all'asse di rotazione sieno i medesimi, e che il nuovo pendolo oscilli come il primo. Confessando, che questa nuova soluzione merita encomj; tutti i geometri convengono presentemente, che essa non è così luminosa, nè così semplice, come quella di Giacomo Bernoulli, fondata immediatamente sopra le leggi dell'equilibrio.

Quando Giacomo Bernoulli fece pubblicare nelle memorie dell'Accademia di Parigi del 1703, come si è detto, la sua bellissima soluzione generale del problema de' centri d'oscillazione, egli era già in possesso del nuovo metodo di Leibnizio dell'Analisi Infinitesimale: e sin dal suo primo ingresso alla carriera di questa nuova geometrìa nel 1690, vi si distinse colla soluzione, ed analisi del problema della curva *Isocrona* ordinaria. Egli trovò come Leibnizio, ed Huguens, che questa curva è la seconda parabola cubica. Da ciò prese occasione di proporre ai geometri un problema, che Galileo aveva altre volte inutilmente tentato di risolvere: esso era di *trovare la curva, che forma la catenaria, o un filo pesante flessibile ed inestensibile, attaccato nelle sue estremità a due punti fissi.*

Questo uso di proporre pubblicamente de' problemi, già da lungo tempo introdotto tra i geometri, ed al quale Leibnizio, ed i fratelli Bernoulli hanno dato principalmente una gran voga, era allora un possente mezzo, per aguzzare gl' ingegni, e far concorrere tutte le loro facoltà al progresso d'una geometrìa nascente: tale fu l'effetto che produsse il problema della catenaria.

Mentre se ne cercava la soluzione, Giacomo Bernoulli pubblicò due memorie, nelle quali determina colla nuova Analisi le tangenti, le quadrature degli spazj, e le rettificazioni di tre curve famose: la spirale parabolica, la spirale logaritmica, e la lossodromìa: alle quali aggiunse per supplemento la misura dell'area de' triangoli sferici. Questi due scritti contengono i primi saggi un poco sviluppati, che siansi dati del calcolo integrale, al progresso del quale essi hanno di fatti sensibilmente contribuito. L'autore non si ristrinse già alla semplice teorìa: ma inoltre indicò alcune proprietà utili della Lossodromìa.

Anche Leibnizio fece comparire dal canto suo sopra la quadratura aritmetica delle sezioni coniche, che hanno un centro, uno scritto nel quale stabilisce alcune formole analitiche semplicissime, e facilmente convertibili in numeri: ed applicò il suo metodo ad alcuni problemi concernenti la lossodromìa.

Il problema della Catenaria fu risoluto da Huguens, Leibnizio, e Giovanni Bernoulli nel 1691. Siccome allora i due fratelli Bernoulli lavoravano ordinariamente in comune, così si presume che la soluzione di Giovanni Bernoulli sia il lavoro dell'uno e dell'altro. Questo problema è la vera epoca, in cui l'Analisi delle equazioni differenziali comincia a prendere un carattere fisso e certo. Da principio non si considerarono, che catenarie uniformemente pesanti. Giacomo Bernoulli estese la soluzione al caso, in cui il peso della catenaria variasse da un punto all'altro secondo una data legge. Di mano in mano, e per l'analogìa delle materie, il medesimo geometra determinò la curva che forma un'arco

teso, quella d'una lana elastica saldamente fermata ad un capo, ed aggravata d'un dato peso all'altro capo: egli fissò più particolarmente la sua attenzione sopra la curvatura, che prende una vela flessibile enfiata dal vento, sperando che questa ricerca potrebbe essere utile alla navigazione: egli trovò, che nella supposizione, in cui il vento, dopo aver colpita la vela, avesse tutta la libertà di scappare, la curva della vela è una catenaria ordinaria: ma se la vela, sempre supposta perfettamente flessibile, fosse enfiata da un fluido, che pesasse verticalmente su di essa, come l'acqua pesa su le pareti d'un vaso, che la contiene; essa formerebbe una curva conosciuta sotto il nome di *lintearia*, e la sui natura è espressa dalla medesima equazione della curva elastica ordinaria, in cui le estensioni sono supposte proporzionali alle forze applicate a ciascun punto: Giacomo Bernoulli mostrò in questa quistione, ed in alcune altre del medesimo genere una profonda sagacità, che rese ammirati tutti i Geometri.

Nel tempo che egli era occupato delle sue prime meditazioni sopra la curvatura della vela, ne comunicava successivamente i progressi al suo fratello, allora assente da Basilèa. Chiaramente si rileva, che queste aperture condussero Giovanni Bernoulli alla soluzione, che pubblicò del medesimo problema nel 1692 nel giornale de' dotti, e da cui risulta egualmente, che la curva della vela è una catenaria. Egli medesimo dal modo, con cui espone i fatti, ci somministra la prova del soccorso, che aveva ricevuto. Dopo di che non abbiamo ragione di essere alquanto sorpresi, nel trovare quì i primi indizj di quella gelosìa, che mostrò in seguito troppo apertamente contro il suo primo maestro?

La teorìa delle curve che, rivolgendosi sopra sè stesse, ne producono delle altre, fu per Giacomo Bernoulli nel 1692 un campo di notabili scoperte. Egli suppone che, data una curva qualunque, e considerata come immobile, si faccia rotolare sopra di essa una curva eguale e simile: determina l'evoluta, e la caustica dalla specie di girella, che descrive un punto della curva girante: egli ne ricava due altre curve analoghe, che chiama l' *antievoluta*, e *la pericaustica*. Tutte queste curve offrivano una moltitudine di proprietà degne certamente di stimolare la curiosità de' geometri, soprattutto in un tempo, in cui erano ancor poco esercitati nel maneggio della Nuova Analisi. Applicando i suoi metodi alla Spirale logaritmica, Giacomo Bernoulli trovò, che questa curva è essa stessa la sua evoluta, la sua caustica, la sua antievoluta, e la sua pericaustica: carattere singolare, di cui fu talmente meravigliato, che non potè a meno di manifestare con calore, che se vi fosse ancora l'uso, come al tempo d'Archimede di porre delle figure, e delle iscrizioni sopra il sepolcro de' geometri; egli avrebbe desiderato, che sopra il suo fosse incisa una spirale logaritmica con queste parole: *Eadem mutata resurgo*.

La Cicloide ha delle proprietà analoghe a quelle indicate della Spirale. Giacomo Bernoulli le fece conoscere in un'addizione alla sua prima memoria: ed avverte nel medesimo tempo, che suo fratello era giunto dal canto suo a simili risultati.

In Giovanni Bernoulli, in Viviani, nel Marchese dell' Hopital, ed in Tschirnhaus vedremo gli altri più notabili problemi risoluti da Giacomo Bernoulli per la

continuazione delle scoperte della Nuova Analisi sino all'anno 1694, in cui giunse egli a sciogliere il difficile problema della curva *Isocrona paracentrica* proposto da Leibnizio nel 1689 ai Cartesiani, che non seppero risolverlo. Sembrava che i geometri avessero dimenticato questo problema, di cui teneva Leibnizio sempre celata la soluzione. Il motivo di tal dimenticanza apparente era certamente la difficoltà di separare le indeterminate dell'equazione che trovasi, quando si riferisce la curva a coordinate perpendicolari. Giacomo Bernoulli superò la difficoltà, prendendo per ordinate delle rette parallele, e per ascisse le corde d'un' infinità di cerchi, che hanno tutti per centro il punto fisso. Ottenne in tal modo un' equazione separata, che costruì dapprima colla rettificazione della curva elastica, ed in seguito con quella d'una curva algebrica. Poco tempo dopo, Giovanni Bernoulli risolse parimente questo problema. Egli ne diede un' Analisi dettagliata, che andrebbe molto lodata, se egli medesimo non lo avesse fatto, e se si fosse astenuto dal criticare ingiustamente le costruzioni di suo fratello, alle quali parimente si riferisce quest'analisi in quanto alla sostanza. Leibnizio pubblicò nel medesimo tempo la sua soluzione, che non differisce essenzialmente da quella dei due Bernoulli, ma che è accompagnata da riflessioni utili al progresso della geometrìa.

L'anno seguente 1695 Giacomo Bernoulli risolvè altro problema della curva d'equilibrio nei ponti levatoi, come vedremo nell' Hopital: e quindi circa il medesimo tempo pubblicò un'eccellente suo scritto, il quale contiene la più esquisita dottrina della curva elastica, delle curve isocrone, e circa il cammino di direzione media nel corso de' navigli, il metodo inverso delle tangenti ec. Egli aveva già trattato la maggior parte di questi argomenti: quì egli li estende, li rettifica, e li perfeziona. Alle discussioni scientifiche egli frammischia alcuni dettagli storici, che si leggono con piacere: rispinge per la prima volta gli assalti ingiusti, e reiterati di suo fratello: egli lo avverte di moderare le sue pretensioni, di dare meno importanza ad alcune scoperte, che l'istrumento, onde si erano muniti entrambi, rendeva facili, e di riconoscere, *che siccome le quantità in geometrìa crescono per gradi, così pure ogni uomo provveduto del medesimo istrumento avrebbe trovato gradatamente i medesimi risultati*: parole modeste, e molto notabili nella bocca di uno dei più grandi geometri, che la terra abbia veduto.

Questa memoria era terminata dall'invito, che Giacomo Bernoulli faceva ai geometri d' integrare un'equazione differenziale generalissima, e del maggior'uso nell' analisi. La soluzione ch' egli aveva trovata di questo problema, e quella che ne diedero Leibnizio, e Giovanni Bernoulli, furono pubblicate negli atti di Lipsia.

Comparve nell'anno 1696 un gran numero di opere, che diedero una nuova estensione all'Analisi Infinitesimale: tali furono la memoria di Giacomo Bernoulli sopra le quadrature delle superficie sferoidali, ove trovansi de' problemi analoghi a quello di Viviani: ma più generali, e più complicati: molti belli teoremi di Giovanni Bernoulli sopra queste medesime quadrature: la terza parte del trattato delle *serie* di Giacomo Bernoulli, e principalmente il celebre libro del Marchese

dell' Hopital, intitolato: *Analisi degli Infinitamente piccoli, per l'intelligenza delle linee curve.*

Oltre le memorie, che abbiamo indicate di Giacomo Bernoulli, ve ne sono altre molte scritte da lui sopra varj argomenti di geometrìa, di meccanica, d'Idraulica, e di altre classi della Matematica. La carica, per esempio, di professore di siffatta scienza, che egli occupava nell' Università di Basilèa, fruttò a'suoi allievi, ed al pubblico un'eccellente Trattato sopra la sommazione delle serie: la di cui prima parte era comparsa nel 1689, e la seconda fu pubblicata nel 1692.

Tralasciando per altro miglior luogo le rimanenti cose di Giacomo Bernoulli, termino questo di lui ricco, ed utile commentario col fare avvertire, esser cosa provatissima dalle opere postume del medesimo, che quando trovò Leibnizio il suo *Metodo di differenziare di curva in curva*, Giacomo Bernoulli ne aveva trovato un'altro simile, di cui si era servito nel risolvere i problemi propostigli dal fratello, durante la di loro disputa sopra gl'*Isoperimetri.* Egli si era limitato ad indicare le sue soluzioni sotto alcuni anagrammi, volendo evitare qualunque diversione, prima che l'affare degli isoperimetri fosse terminato. Questi problemi incidenti erano relativi al metodo *De maximis et minimis.* Ne citerò uno soltanto, che basterà per dare un' idea generale di tutti. Giovanni Bernoulli domandava: *qual'era tra tutte le Semi-ellissi, che potevansi descrivere nel medesimo piano verticale, e sopra il medesimo asse orizzontale dato, quella che era percorsa nel minimo tempo possibile, da un corpo grave, il cui movimento cominciava ad una delle estremità dell'asse dato.*

Una quantità innumerabile d'altre ricerche curiose, e difficili occupava allora i geometri: esse erano la quadratura di certi spazj cicloidali, la sezione indefinita degli archi circolari, la curva di ugual pressione, la trasformazione di curve in curve della medesima lunghezza, nuovi metodi d'approssimazione per le quadrature e le rettificazioni delle curve, il modo di trovare certe curve per mezzo di date relazioni de' loro rami ec. Si vedevano sempre comparire su la scena Leibnizio, i fratelli Bernoulli, il Marchese dell'Hopital ec. Tutte queste ricerche non avevano il medesimo grado di utilità, ma tutte hanno contribuito più o meno al progresso della geometrìa.

Le straordinarie fatiche di Giacomo Bernoulli, e le grandi amarezze, che gli vedremo cagionate dal suo fratello minore, rapirono alle scienze questo insigne geometra, compianto da tutti i dotti della terra, nel cinquantesimo anno della sua vita, che formava il più bel meriggio dell'età letteraria. La perdita incalcolabile, che fece la geometria in questo fatto si vedrà in qualche modo riparata da molti bravi discepoli di quest'uomo insigne, come Giacomo Ermanno suo concittadino, Nicolò Bernoulli suo degno nipote, Giovanni Bernoulli fratello, e da non pochi altri di non dissimile celebrità.

Giovanni Bernoulli Svizzero, nato nel 1667 e morto nel 1748, fu d'un genio sublime per le Matematiche, nelle quali, dopo essere stato iniziato, ed istruito da Giacomo suo fratello maggiore, vi si applicò per più anni insieme con esso in Basilèa con un successo il più felice, che si potesse sperare. Le assidue cure, e la nobile di loro emulazione, animata dall'amore della

Anni di G. C. 1690

gloria, e resa unanime dai vincoli del sangue, e dalla cordiale amicizia di due germani fratelli, che si riguardavano uno come il benefico maestro amante de' progressi, e dell' onore del suo allievo, e l' altro come l'affezionato, e riconoscente discepolo; rendevano i concordi loro studj sommamente proficui, e piacevoli. Le soluzioni di più ardui problemi, ed altre difficili teorìe della nuova geometrìa, che il maggiore sviluppava sempre in compagnìa del minore, a fine d'istruirlo, si pubblicavano quindi in modo, che ne risultasse una egual gloria ad entrambi.

Dopo che si fu allontanato il minore da Basilèa, non mancò per qualche tempo il maggiore di tener con esso relazioni pacifiche, ed assidue, animate dall'impegno, che aveva di renderlo inteso di ogni sua scientifica operazione, onde viemaggiormente istruirlo. Dal che avvenne, che Giovanni Bernoulli coll'ajuto del fratello divenuto sempre più celebre, e rinomato, fu con invito onorifico nominato nel 1695 Professore di Matematica in Groninga, ove si recò: e fu questa l'epoca, in cui ebro delle grandi lodi, che da per tutto riceveva, vinto ed accecato dall'amor proprio, si rese emulo del suo antico maestro: col quale entrò finalmente in un'aperta guerra letteraria, senza più rammentarsi, che le cure, e le istruzioni del medesimo lo avevano elevato all'onore di quella Cattedra.

Poichè sa, per esempio, ognuno degli Storici, che fu Giacomo Bernoulli quello, il quale, studiando seco lui le matematiche in Basilèa Giovanni suo fratello, lo ajutò, e lo diresse nella soluzione del celebre problema della Catenaria, che pubblicò con somma sua lode nel 1691.

Sa ognuno degli Storici, che mentre Giacomo Bernoulli faceva le sue prime meditazioni sopra la curvatura della vela d'un naviglio, ne comunicava successivamente i progressi con lettere al suo fratello Giovanni, partito, e lontano allora da Basilèa, come avvertimmo di sopra: e che queste aperture condussero il medesimo Giovanni alla soluzione di quel problema, che pubblicò nel 1692, dimostrando con lode ed applauso di tutti, che la curva di detta vela è una vera catenaria.

Sa finalmente ognuno degli Storici, che avendo Giacomo Bernoulli proseguito per circa tre anni a ragguagliare delle principali sue operazioni il suo allievo Giovanni, onde istruirlo con esse; dobbiamo da ciò conchiudere, che Giovanni Bernoulli dalle cure, e dalle istruzioni del fratello doveva ripetere tutto il suo posteriore avanzamento nella nuova geometrìa, basato in quelle prime istruzioni, ed avvertimenti attentissimi del fratello maggiore: non avendovi altro merito il minore, se non che di aver saputo coll'acutezza della mente, ed elevatezza del suo genio ampliare il numero, o i limiti de' suoi principj di matematica, trarre da essi nuove applicazioni, e nuove teorìe, e fare altri sforzi, per portare la Nuova Analisi a quella chiarezza, ed alto posto d' ingrandimento, a cui egli, e il suo fratello maggiore, più che ogni altro geometra, seppero condurla.

E si deduce ancora dalle giustissime avvertenze di questi tre ultimi paragrafi, che avendo Giovanni Bernoulli assalito arditamente più volte il suo fratello maggiore colle pubbliche proposte di problemi da risolversi dai geometri, senza usare a lui la dovuta convenienza d'in-

dicargliene la soluzione, anche per sentirne il parere, come suo benefico maestro; quanto ne sia perciò riprensibile: e quanto sia da lodarsi al contrario la trascendente prudenza di Giacomo Bernoulli, il quale colla massima disinvoltura scioglieva i problemi, e ne pubblicava le soluzioni, senza punto risentirsi del cattivo procedere del fratello, e senza ne anche privarlo della sua pacifica corrispondenza, come se non si fosse nulla avveduto delle pessime mire del fratello di sorprenderlo, e farlo scomparire in pubblico. Allora soltanto il prudentissimo Giacomo Bernoulli concepì colla sua solita disinvoltura l' idea di frenare gl' ingiusti assalti dell'ardito fratello, quando osò questi criticare indebitamente colla massima imprudenza la di lui accurata soluzione del celebre problema della curva *Isocrona paracentrica* proposto da Leibnizio ai Cartesiani nel 1689, e risoluto quindi non prima del 1694 da esso Giacomo Bernoulli, e poco tempo dopo risoluto dal suo fratello Giovanni ancora. Eseguì egli colla massima prudenza questa sua giusta riprensione nell' eccellente suo scritto, che fece girare verso l'anno 1695 su la curva elastica, su le curve isocrone, e su di altri oggetti rilevanti, come vedemmo in fine dell'antecedente Commentario. Alla qual pubblica riprensione Giovanni Bernoulli ruppe ogni vincolo di pace, nè volle più riconciliarsi col fratello, che seguitò tuttavìa ad amarlo per qualche tempo, per non dire costantemente, come vedremo dall'operato del medesimo in appresso.

Essendo le memorie de' geometri di questo tempo tutte complicate una coll'altra, per la circostanza speciale di essersi sviluppata la di loro nuova geometrìa col mezzo di una moltitudine di problemi differenti, che si proponevano in pubblico scambievolmente; quindi è che non può aversi una completa idea di ciascun Commentario dei principali di detti geometri specialmente, se non si percorrano i commentarj degli altri, come accade in questo di Giovanni Bernoulli, i di cui problemi o proposti, o sciolti da esso sono sparsi in gran parte in Leibnizio, in Giacomo Bernoulli, nel marchese dell' Hopital, e nel *Commercium epistolicum* di Leibnizio con esso Giovanni Bernoulli. In questo Commercio ossia corrispondenza di lettere pubblicate solennemente nel 1745 si scorge che sino dall'anno 1694 questi due geometri avevano trovato ciascuno dal canto suo quel ramo della nuova analisi, che chiamasi *Calcolo Esponenziale.* Leibnizio ha la priorità di data: ma Giovanni Bernoulli ne fece la scoperta da sè medesimo: pubblicò nel 1697 le regole, e l'uso di questo calcolo: e si crede ordinariamente, che ne sia egli il primo, ed anche il solo inventore.

Lo stesso Commercio di lettere offre sotto l'anno 1695 una importante riflessione di Leibnizio sopra l'analogìa, che regna tra le potenze d'un polinomio composto di termini variabili, e le differenziali (dello stesso ordine) del prodotto di questi termini. Da ciò dedusse Giovanni Bernoulli un metodo, per integrare in certi casi, alcune formole differenziali di tutti gli ordini.

L'anno seguente 1696 Giovanni Bernoulli pubblicò molti bei Teoremi sopra le quadrature delle superficie sferoidali. Si rese poi sommamente benemerito alle scienze, quando l'anno appresso 1697, per risolvere i problemi, che hanno bisogno di ambedue i cal-

coli differenziale, ed integrale, chiamò l'attenzione de' geometri, a rinvenire la teorìa generale *de' Massimi, e de' Minimi*, col proporre ad essi la soluzione del famoso problema della *Brachistocrona* ossia *d'una curva tale, che un corpo pesante, discendendo lungo la sua concavità, arrivi nel minimo tempo possibile da un punto ad un'altro, essendo i due punti non situati nella medesima linea verticale.* Questo problema era in allora talmente difficile, che Newton essendosene proposto per lo stesso fine un' altro più facile, non riuscì a risolverlo completamente. Ciò non ostante l' acutissimo Leibnizio sciolse adequatamente il problema della *Brachistocrona* nel giorno stesso che ricevè il programma da Giovanni Bernoulli, il quale convenne con Leibnizio di tenere occulta la di lui soluzione, e la sua: ed accordò un'anno di tempo agli altri geometri per la soluzione di esso.

A poco tempo uscirono le soluzioni di Newton, e dell' Hopital: ed al termine di circa quattro mesi Giacomo Bernoulli diede la sua. Quella di Newton uscì anonima nelle *Transazioni Filosofiche* della Società reale di Londra: ma Giovanni indovinò l'autore *tamquam ex ungue leonem*, com' ei disse. Egli lodò molto Leibnizio, il marchese dell' Hopital, e Newton. Disse ancora che suo fratello aveva risoluto il problema: ma lo accusò di avervi impiegato troppo tempo, senza riflettere, che nei tre, o quattro mesi da lui impiegativi, egli non solamente aveva risoluto il problema proposto, ma ne aveva anche concepita la teorìa generale, ed eseguito i difficilissimi calcoli per la dimostrazione di essa nel grande problema degli *Isoperimetri* che proponeva, e di cui aveva pronta la soluzione in istato di comparire: cosa che rese tutti attoniti, ed ammirati, quando ne conobbero l'idea sublime, e l'artificio difficilissimo, concepito da lui in questo modo.

Giacomo Bernoulli dimostrò, che la curva *Brachistocrona* richiesta è un'arco di cicloide. Egli nel cercarla si era sollevato ad alcuni problemi sopra gl'Isoperimetri, di una speculazione anche più profonda: e dopo di averli adequatamente risoluti e dimostrati, li propose pubblicamente al suo fratello in seguito del suo metodo per la detta curva della più veloce discesa. Il motivo d'una tal disfida fu questo. Si è indicato altrove, che Giovanni Bernoulli aveva più volte assalito per malignità d'animo il suo fratello maggiore, di cui aveva anche osato criticare a torto la risoluzione del problema della curva *isocrona paracentrica*: e si era protestato con varj amici, i quali s' interposero per la riconciliazione, che egli non sarebbe più tornato in pace col suo fratello, per la pubblica ammonizione, che gli aveva fatta nel suo scritto della curva elastica ec. ma che sarebbe stato sempre in guerra con esso. Trovandosi pertanto gli animi siffattamente inaspriti, e non essendo Giacomo Bernoulli uomo da soffrire più lungo tempo gl' ingiusti assalti d'un fratello suo discepolo, e minore di lui in tutti i riguardi; per vendicarsi finalmente in un modo strepitoso, ma utile nello stesso tempo alla geometrìa, nel dare la sua soluzione della Brachistocrona, provocò nominatamente il suo fratello a risolvere il problema seguente: *Trovare tra tutte le curve isoperimetre, entro dati limiti, una curva tale, che costruendo una seconda curva, le cui ordinate sieno funzioni qualunque delle ordinate, o degli archi di quella, l'area della seconda curva formi un MAXIMUM, o un MINIMUM.* A questo problema principale unì un'altro più analogo a quello della Brachistocrona: esso era *di trovare tra tutte le cicloidi che un corpo grave può descrivere, per arrivare da un punto ad una linea data di posizione, la cicloide che viene descritta nel minimo tempo possibile.* Egli terminò la sua disfida presso a poco in questi termini.

» Una persona, di cui sono risponsabile, (*Prodit Non*
» *Nemo pro quo caveo*) s' impegna a dare indipen-
» dentemente dalle lodi meritate un premio di cin-
» quanta fiorini a mio fratello, sotto la condizione,
» che in tre mesi prometta di risolvere questi proble-
» mi, e che in un'anno ne pubblichi le soluzioni le-
» gittime: se a capo di questo tempo niuno avrà ri-
» soluti i problemi, io pubblicherò le mie soluzioni ».

Giovanni Bernoulli guidato ciecamente dalla sua eccessiva fervidezza d'ingegno, credendo che la sua teorìa della Brachistocrona bastasse sola, per risolvere i detti problemi; pretese di risolverli a tenore di essa: e persuaso quindi del suo metodo, nel trasmetterlo al fratello, scrisse per leggerezza così. » Comunque difficili sembrino essere questi problemi, io non
» ho mancato di applicarmi ad essi nel momento stesso
» che li ho ricevuti: ma guardate con qual successo!
» in vece di tre mesi che mi sono dati, per tastare il
» guado, ed in vece di tutto il rimanente di quest'an-
» no, per trovarne la soluzione; non ho impiegato in
» tutto, che tre minuti di tempo, per tentare, co-
» minciare, e finire di esaminare a fondo tutto il mi-

» stero : » vanità precipitosa, che condusse in fine l'incauto Bernoulli a grandissime amarezze.

Poichè la costruzione del problema della Brachistocrona, ossia della cicloide rispetto alla più veloce discesa fatta da Giovanni Bernoulli era certamente esatta. Si scorge però, che egli aveva incontrato a caso la vera soluzione, o piuttosto il vero risultato d'un caso degl' isoperimetri : ma il suo metodo non si estendeva al problema generale, e non poteva perciò dalla sua sola teorìa d'un caso particolare dedurre la soluzione del problema generale a lui proposto. Ond'è, che Giacomo Bernoulli ben sicuro della sua soluzione, trovando che i due metodi non davano le medesime equazioni, allorchè le ordinate della seconda curva sono funzioni degli archi della prima; fece stampare un'*Avviso*, in cui asseriva, che il metodo di suo fratello era difettoso : egli accordava ancora qualche tempo ai geometri, per cercare la soluzione : e se nessuno l'avesse data, egli s' impegnava di tre cose : 1.° d' indovinare per l'appunto l'analisi di suo fratello: 2.° qualunque cosa fosse, di farvi vedere dei paralogismi : 3.° di dare la vera soluzione del problema in tutte le sue parti. Al che aggiunse questa scommessa d'una specie frizzante, che se alcuno per il progresso delle scienze avesse tanto interesse da arrischiare un premio per ciascuno di questi articoli, egli s' impegnava di perdere altrettanto, se non soddisfaceva al primo, di perdere il doppio, se non riusciva nel secondo, ed il triplo, se lasciava di sciogliere il terzo.

La singolarità di questo avviso, e l'autorità dell' autore in geometrìa, scossero un poco la confidenza,

che Giovanni Bernoulli aveva nel suo metodo: egli ripassò la sua soluzione, e riconobbe che si era in qualche cosa ingannato: lo che attribuiva *ad una troppo grande precipitazione*. Egli mandò un nuovo risultato, ma senza prendere un tuono più modesto, e domandando sempre il premio proposto dal *Non Nemo*.

A queste pretensioni Giacomo Bernoulli rispose laconicamente » prego mio fratello di ripassare di nuo-
» vo l'ultima sua soluzione, di esaminare attentamente
» tutti i punti, e di dirci poi se ogni cosa vada be-
» ne, dichiarandogli che, dopo aver data la mia, i
» pretesti di precipitazione non saranno più ascoltati ».

Giovanni Bernoulli impressionato d'aver colto il punto, ricusò di riesaminare il suo metodo. Conobbe allora Giacomo, che le disposizioni da lui prese non erano state eseguite. Nel pubblicare il suo *primo Avviso*, egli scrisse una lettera a Varignon da inserirsi subito nel giornale de' dotti, onde Giovanni fosse al caso di esserne inteso, e correggere il suo metodo. Poichè l'oggetto di essa lettera era di soddisfare alle due prime condizioni, che Giacomo Bernoulli si era imposte, vale a dire d'indovinare il metodo di suo fratello, e di mostrare in che esso peccava : vi esponeva a questo fine un' analisi per sè stessa difettosa, ove nondimeno alcune falsità corrette da altre falsità conducevano in certi casi ad un risultato vero : e per mezzo di quest'analisi trovava le equazioni di suo fratello, il quale non avendo emendato i difetti della sua analisi, congetturò che la citata sua lettera non era stata pubblicata. Ond'è, che Giacomo Bernoulli unì a questa lettera un secondo *Avviso*, in cui l'aria trionfante del suo fratello nell' annunziare le sue soluzioni, il rifiuto che faceva di riesaminare l'ultima di esse, ed il pretesto di questo rifiuto essendo messi in ridicolo con un sale piccante; ciò fece sì, che Giovanni Bernoulli nel ricevere il giornale, in cui erano inseriti tutti questi opuscoli, la lettera a Varignon col secondo Avviso, entrò in un furore inesprimibile, che si esalò in un torrente d' ingiurie grossolane ed insipide contro suo fratello, che le sentì vivamente, e con danno. I giornali ebbero la troppo facile condiscendenza di stamparle: ma noi in grazia del genio dell'Autore per le scienze le lasceremo nell' obblìo: avvertendo peraltro che lo sbaglio commesso da Varignon di non pubblicare la prima lettera (la quale avrebbe mosso Giovanni ad emendare il suo metodo coi lumi, che gli dava il fratello *delle falsità corrette da altre falsità nell' Analisi per sè stessa difettosa*) fu motivo della biasimevole irruenza di esso Giovanni contro del benefico fratello, e della irreparabile perdita di questo grandissimo geometra fatta dalle Matematiche nel più bel meriggio della di lui età scientifica.

A terminare pertanto la disfida in questo stato di cose non v'era più altro mezzo, se non che di pubblicare da una parte, e dall'altra i due metodi, e sottometterli al giudizio dei più esperti geometri d'Europa. Giovanni Bernoulli dimandava per arbitro Leibnizio, a motivo, che avendogli già mandate le sue soluzioni, le aveva imprudentemente approvate, per non averle, senza dubbio riesaminate con attenzione bastante. Giacomo Bernoulli acconsentì, che non solamente Leibnizio fosse preso per giudice imparziale, ma che a lui si unissero anche

Newton, il marchese dell'Hopital, e tutti gli altri primi geometri di quel tempo, purchè si fosse lasciata ad ognuno tutta la libertà di parlare, e di mettere la verità nella piena sua luce.

Le cose restarono in questo stato per quasi due anni. Nel 1700 Giacomo Bernoulli fece stampare in Basilèa una lettera diretta a suo fratello, nella quale con una grande moderazione, ove nondimeno si scorge un poco di tuono della superiorità, lo invitava a pubblicare il suo metodo: e finiva con dare, senza dimostrazioni, le formole del problema. Queste formole furono anche inserite negli atti di Lipsia. Allora Giovanni Bernoulli vide in che differiva da suo fratello in quanto ai risultati: ma non iscoprendovi il principio della vera soluzione, e sempre persuaso, che il suo metodo fosse esatto, lo sviluppò in una memoria, che fu mandata sotto sigillo all'Accademia delle scienze di Parigi nel corso di Febbrajo dell'anno 1701, colla condizione di non aprirla, senza il suo assenso, e quando Giacomo Bernoulli avrebbe dato la sua Analisi.

Istruito di questa spedizione Giacomo Bernoulli non ebbe più alcuna ragione di tener celato il suo metodo. Egli pertanto lo espose, e lo fece sostenere in forma di Tesi in Basilèa nel mese di marzo del 1701 con una dedica ai quattro illustri geometri, l'Hopital, Leibnizio, Newton, e Fazio Duillier. Lo fece inoltre stampare separatamente a Basilèa, e negli atti di Lipsia pel mese di maggio 1701, sotto questo titolo: *Analisis magni problematis isoperimetrici*. Esso fu riguardato come un prodigio d'invenzione, e di sagacità. Difatti si può assicurare, che avuto riguardo al tempo, non è mai stato risoluto un problema più difficile. Il marchese dell' Hopital scrisse a Leibnizio, che lo aveva letto con avidità, e lo aveva trovato direttissimo, ed esattissimo: testimonianza che Leibnizio medesimo trasmise a Giovanni Bernoulli, benchè d'altronde fosse molto prevenuto in suo favore.

Sembrava che, dopo tanta pubblicità, Giovanni Bernoulli avrebbe impugnate le soluzioni del suo fratello, o ne avrebbe riconosciuta pubblicamente la giustizia. Ma da quel tempo in poi quest'uomo sì ardente ed impetuoso si pose in un profondo silenzio. Niuna osservazione, e niuna critica dalla sua parte: ed in vece di mettere il suo metodo in opposizione con quello di suo fratello, egli lo lascia dormire pacificamente per cinque anni nel deposito dell'Accademia. Finalmente la morte rapisce prematuramente Giacomo Bernoulli alle scienze nel 1705: e ben presto dopo la morte di costui, il metodo che sembrava dormire nella dimenticanza, e nell'obblìo comparisce tra le memorie dell' Accademia per l'anno 1706, e fa pensare fondatamente ai critici, che Giovanni Bernoulli con questa sua strana condotta tenne occulto il suo metodo sino alla morte del fratello nella speranza, che tolto questo giudice, gli verrebbe approvato, o per condiscendenza, o per non esservi altro geometra, che potesse scoprirne i difetti, come avvenne. Poichè Fontenelle nell' elogio di Giacomo Bernoulli, e quarantatre anni dopo Fouchì in quello di Giovanni Bernoulli parlarono delle di loro soluzioni, come se fossero entrambi egualmente esatte, ed egualmente generali.

Ma i profondi geometri portarono un giudizio assai

diverso: le palme della vittoria furono decretate ai soli metodi di Giacomo Bernoulli. Malgrado tutti i raggiri di Giovanni Bernoulli, malgrado tutti i mezzi speciosi; che impiegava, per dare l'apparenza della verità al suo metodo, esso era realmente difettoso, come suo fratello aveva sempre sostenuto: l'errore radicale di Giovanni Bernoulli proveniva dal non considerare, se non che due elementi della curva, laddove bisognava considerarne tre, o impiegare una condizione equivalente. Ne' problemi del medesimo genere di quello della più veloce discesa, ove trattasi unicamente di adempiere la condizione del *maximum* o del *minimum*, basta di applicare questa condizione a due elementi, per trovare l'equazione differenziale della curva: ma quando oltre il *maximum* o il *minimum*, fa d'uopo che la curva abbia ancora una proprietà, come di essere isoperimetra ad un' altra; questa nuova condizione esige, che un terzo elemento della curva abbia una certa inclinazione per rapporto agli altri due: ed ogni determinazione fondata unicamente sopra la prima considerazione darà de' risultati falsi, eccettuato il caso, in cui una curva non possa soddisfare ad una delle due condizioni, senza soddisfare nel medesimo tempo all'altra. Indarno credeva Giovanni Bernoulli di adempire la condizione dell' isoperimetrismo, senza derogare al *maximum* o al *minimum*, considerando due elementi della curva, come due piccole linee rette condotte da un punto intermedio ai due fuochi di un' ellisse infinitamente piccola. Questa supposizione non introduceva già nel calcolo una nuova condizione: ma faceva il solo effetto di rendere costante, o variabile la differenziale dell'ascissa. Giacomo Bernoulli aveva esplicitamente impiegato tre elementi della curva: e quindi egli era giunto a soluzioni esatte, generali, e complete.

Questa considerazione dei tre elementi era allora talmente essenziale, che alla fine Giovanni Bernoulli, più di tredici anni dopo la morte di suo fratello, ne fece la base di una nuova soluzione, confessando che si era ingannato nella prima: confessione tarda, ma che almeno avrebbe onorato l'autore, se avesse inoltre riconosciuto, che la sua nuova soluzione non era altra cosa in sostanza, che quella di suo fratello, presentata sotto una forma, che abbrevia molto il calcolo: e se non avesse cercato di rilevare con una specie d'affettazione alcune inutilità, che trovansi in questa, ma che non ne alterano punto l'esattezza, e la generalità.

E quì si avverta, non senza qualche sorpresa, che nessun' altro geometra di quel tempo, fuori dei due fratelli Giacomo, e Giovanni Bernoulli, intraprese almeno pubblicamente a risolvere i due citati problemi: poichè sebbene Giacomo Bernoulli avesse provocato suo fratello in particolare, ognuno aveva la libertà di concorrere: ed oltre che Giacomo l'invitava, le questioni proposte riunivano tutti i vantaggi capaci di eccitare l'emulazione: novità dell'argomento, grandi difficoltà da vincere, e l' ingrandimento della geometrìa.

Si avverta ancora seriamente di non farsi mai vincere dall'amor proprio, nè mai ardire di sollevarsi contro de' proprj maestri, soprattutto quando abbiano questi del merito, e sieno veramente fondati nelle scienze, che professano: perchè hanno sempre de' colpi di riserva, e la maniera di sorprendere i loro allievi, e farli pen-

tire del di loro temerario ardimento, come avvenne all' incautamente cimentoso Giovanni Bernoulli.

Circa l'altro problema della Cicloide della più veloce discesa ad una linea data di posizione, che Giacomo Bernoulli aveva unito al problema degl' Isoperimetri, per compire in qualche modo la teorìa della Brachistocrona; egli dimostrò, che la cicloide richiesta è quella, che taglia ad angoli retti la linea data di posizione: ed insegnò in generale a trovare tra le curve simili, che terminano ad una linea data di posizione, quella che gode qualche proprietà di *maximum*, o di *minimum*. Giovanni Bernoulli dal canto suo era pervenuto a simili risultati con un metodo alquanto tortuoso, ma molto ingegnoso, e che diede luogo ad una notabile estensione dell'Analisi Infinitesimale. Egli impiegò in questa ricerca la considerazione della curva *sincrona*, ossia d'una curva, che taglia una serie di curve simili e similmente poste, per modo tale che gli archi di queste ultime curve, compresi tra un punto dato, e la sincrona, sono percorsi in tempi eguali da un corpo pesante. Egli dimostrò, che tra tutte le cicloidi così tagliate, quella che lo è perpendicolarmente, è percorsa in meno tempo d'alcun'altra parimente terminata alla sincrona. Altro dunque non si trattava, che di saper condurre, sotto una data direzione, una tangente alla sincrona delle cicloidi: e per risolvere il problema in generale, non faceva d'uopo, che quì la soluzione fosse dipendente unicamente dalle proprietà della cicloide, ma da' principj applicabili ad ogni altra serie di curve simili e similmente poste. Giovanni Bernoulli determinò con una costruzione geometrica la sincrona corrispondente alla cicloide del tempo più breve: ma non potè giungere a trovare l' espressione analitica della sottangente delle sincrone per tutte le specie di curve simili. Avendo per lungo tempo cercato in vano la soluzione di questo problema; egli lo propose a Leibnizio, che lo risolvè prestissimo, ed inventò a questo proposito il celebre metodo di differenziare *da curva in curva*, come indicammo nel commentario di esso Leibnizio.

Nel commentario di Giacomo Bernoulli vedemmo ancora, che Giovanni suo fratello volle riformare la di lui soluzione del problema de' centri d'oscillazione, e che riuscì a dare una nuova soluzione molto ingegnosa e lodevole: ma non è affatto preferibile a quella di Giacomo, la quale è assai più luminosa e semplice, fondata immediatamente sopra le leggi dell' equilibrio.

Lo stesso Giovanni Bernoulli avendo adottata l'opinione di Leibnizio, che valutava le forze de' corpi in moto per mezzo de' prodotti delle masse, e de' quadrati delle velocità; diede al principio di Huguens pel problema de' centri d'oscillazione il nome di *principio della conservazione delle forze vive*, nome che è rimasto, perchè effettivamente, ne' movimenti d'un sistema di corpi pesanti, la somma de' prodotti delle masse pei quadrati delle velocità rimane la stessa, quando i corpi discendono unitamente, e quando risalgono in seguito separatamente colle velocità che hanno acquistato per la discesa. Huguens medesimo ne aveva fatto brevemente l'osservazione in una lettera sopra la prima memoria di Giacomo Bernoulli, e sopra quella del marchese dell' Hopital. Questa legge si osserva egualmente nell' urto de' corpi perfettamente elastici, ed in tutti i movimenti de'corpi, che agiscono gli uni su gli altri con forze di pressione: essa deriva necessariamente dalla natura di questi movimenti: ed è indipendente da ogni sistema sopra la misura delle forze vive. Laonde i geometri del secolo passato l'hanno posta in uso con ottimo successo in molti problemi di Dinamica. Ma siccome essa non dà che, una sola equazione, da cui bisognava in seguito eliminare la velocità, o il tempo; quindi si giungeva a questo ultimo fine per diversi mezzi. Giovanni Bernoulli vi adoperava il principio delle *tensioni*: Eulero quello delle *pressioni*: Daniele Bernoulli *la potenza virtuale che ha un sistema di corpi di ristabilirsi nel suo stato primiero*: ed in certi casi Eulero e Daniele Bernoulli *la quantità costante di moto circolatorio intorno ad un punto fisso*. Quando finalmente si erano stabilite tutte le equazioni differenziali del problema, altro più non rimaneva, che la difficoltà d' integrarle: nuovo scoglio, in faccia al quale i mediocri Analisti venivano qualche volta a naufragare.

Tralasciando altre molte cose di Giovanni Bernoulli, le quali si troveranno inviluppate nelle lavorazioni di altri Matematici, che seguono; termineremo questo di lui Commentario con un breve parallelo di esso Giovanni Bernoulli con Giacomo suo fratello.

L'estensione, la forza, e la profondità caratterizzano il genio di Giacomo Bernoulli: si trova in Giovanni Bernoulli più di flessibilità, e di quello spirito, che si porta indifferentemente verso tutti gli oggetti. Il primo ha dato molte opere veramente originali, e che appartengono a lui solo: tali sono la teorìa delle spirali, il problema della curva elastica, quello degli isoperimetri, che occupa un sì gran posto nella Storia della geometrìa, il principio, da cui si è tratta in seguito la soluzione de' problemi di Dinamica, il trattato *De Arte conjectandi* ec. il secondo scieglieva in tutte le parti delle Matematiche questioni disparate e curiose: aveva un'arte particolarissima di proporre, e di risolvere nuovi problemi: qualunque argomento venisse presentato alle sue indagini, egli vi entrava prestissimo, e non ne ha mai trattato alcuno, senza mostrarlo sotto l'aspetto più luminoso, e senza farvi qualche importante scoperta. Finalmente Giacomo Bernoulli si è formato da sè solo, ed è morto di cinquant'anni: Giovanni Bernoulli è stato iniziato alle Matematiche da suo fratello, ed è vissuto ottant' anni: nel che ha avuto un vantaggio immenso. Di fatti, se tutte le facoltà dello spirito umano s' indeboliscono coll'età, questa perdita è compensata nelle scienze esatte (frutti dello studio, e del ragionamento) dalla massa delle cognizioni acquistate, e da un lungo uso de' metodi geometrici, che fa discernere il più acconcio alla soluzione d'un problema: lo che risparmia sovente molti tentativi inutili, e non opprime le forze dello spirito. Tutto bilanciato, io paragono, conchiude Bossut, Giacomo Bernoulli a Newton, e Giovanni Bernoulli a Leibnizio: colla differenza peraltro, io soggiungo: che Leibnizio si è sempre veduto rispettoso, e pieno delle dovute convenienze verso di Newton nelle di loro rivalità circa l'invenzione dell'Analisi Infinitesimale: nè mai si volse contro di esso coll' irruenza d'inique invettive, e sarcasmi, come fece ingiustamente Gio. Bernoulli contro di Giacomo suo fratello maggiore, e benemerente.

CAPO QUARTO

Della nuova estensione data all'Analisi Infinitesimale da più geometri, in particolare dell'Hopital, che sviluppò tutte le serie del Calcolo Differenziale ridotto in forma d'Istituzione da spiegarsi nelle Scuole.

Di tanti problemi anche difficilissimi da noi riportati, e di altri ommessi, o da riportarsi, uno soltanto, che si riferisce al metodo *De maximis, et minimis* per l' avanzamento dell'Analisi, occupò lungo tempo senza successo i fratelli Bernoulli: esso era di *trovare il giorno del più piccolo crepuscolo per un luogo di latitudine data*. Siffatta questione trattata col metodo analitico conduce ad un' equazione di quarto grado, nella quale è cosa incomoda il separare le radici utili da quelle, che devono essere rigettate: ma facendo uso del metodo sintetico, i due fratelli Bernoulli giunsero, ciascuno dal canto suo ad un' analogìa semplicissima, e comodissima nel Calcolo Astronomico. Fuori di questo, non vi fu altro problema, che potesse arrestare l'efficacia del metodo Leibniziano della Nuova Analisi tanto nelle disfide tra gli occidentali, quanto in quelle, che mossero i geometri di altri popoli ancora della nostra Europa.

Anni di G.C. 1690

Vincenzo Viviani sommo geometra Italiano, eccitato dalla moltitudine di problemi, che si proponevano scambievolmente i più rinomati geometri delle nazioni occidentali d'Europa per l'avanzamento, e perfezione dell'Analisi Infinitesimale; ne propose uno assai curioso anch'egli nel 1692 sotto questo enunziato: *Aenigma geometricum de miro opificio testudinis quadrabilis hemisphericae.* L'autore fingeva, che tra gli antichi monumenti della dotta Grecia esistesse tuttavìa un Tempio di forma emisferica, traforato da quattro finestre eguali con un'arte tale, che il rimanente della volta fosse assolutamente quadrabile: e sperava, che gli *illustri Analisti del secolo* (così denotava i geometri in possesso de'nuovi calcoli) indovinerebbero facilmente questo enigma. Egli non fu deluso nella sua speranza: il giorno medesimo, in cui Leibnizio, e Giacomo Bernoulli riceverono il Programma di Viviani, risolverono il problema: e gli altri geometri *infinitarj* lo avrebbero senza dubbio risoluto egualmente, se in tempo fosse giunto a di loro notizia. Viviani era profondo nell' antica geometrìa: egli si era principalmente distinto colla *divinazione*, ossia *restituzione* de' cinque libri delle Coniche dell'antico Aristèo: che si erano perduti: ma quando comparve la geometrìa degli infinitamente piccoli, egli era troppo avanzato in età, per istudiarla, ed approfondarla: egli era altronde un uomo veramente modesto, che non aveva certamente avuta l'intenzione di dare la tortura agli *illustri analisti*. Nondimeno convien confessare, che la di lui soluzione fondata sul metodo sintetico degli antichi, è molto commendabile per la sua semplicità, ed eleganza: egli dimostrò, che si soddisfaceva al quesito, innalzando perpendicolarmente alla base della volta emisferica due cilindri retti, i di cui assi passino pei mezzi di due raggi, che formano il medesimo diametro del cerchio della base.

Hopital ossia il Marchese dell'Hopital, nato nell'

anno 1661 e morto nel 1704, può dirsi formato nella nuova geometrìa da Giovanni Bernoulli. Poichè recatosi questi a Parigi nel 1692, vi fu accolto con distinzione dal marchese dell'Hopital, il quale poco tempo dopo lo condusse nella sua terra d'Ourques in Turena, ove passarono quattro mesi interi a studiare insieme la nuova geometrìa, di cui Giovanni Bernoulli compose a bella posta un'Istituzione ad uso del suo marchese. Tutte le attenzioni, e le maggiori testimonianze di gratitudine furono profuse al detto forestiero. Ben presto il marchese dell'Hopital con un lavoro ostinato e violento, che alterò per sempre la sua salute, si trovò in istato di risolvere i grandi problemi, che i geometri si proponevano. Sino dall'anno 1693 egli comparve in questa dotta tenzone, e vi si distinse sino alla sua morte. Circa il 1695 la nuova geometria camminava rapidamente in tutti i suoi rami. I problemi volavano da tutte le parti, ed i giornali erano divenuti una specie di dotta arena, ove si vedevano combattere i più grandi geometri di quel tempo, Huguens, Leibnizio, i fratelli Bernoulli, Newton, ed il marchese dell' Hopital, che era messo sin da quel tempo nel primo ordine de' geometri d'Europa, e sostenne degnamente tra di essi per più anni l'onore della Francia: grande esempio pei Signori di molto possesso e facoltosi, onde spendere senza economìa o risparmio, per avere in casa buoni maestri all'educazione scientifica, morale, e civile de' loro figli: la più grande eredità, che possano lasciare ai medesimi.

Anni di G. C. 1690

Accennammo in Huguens, che il problema seguente, proposto da Giovanni Bernoulli, contribuì molto al progresso de' metodi, per integrare le equazioni differenziali: *Trovare una curva tale, che le tangenti terminate all'asse fossero in data ragione colle parti dell'asse, comprese tra la curva e queste tangenti.* Esso fu risoluto da Huguens, da Leibnizio, da Giovanni Bernoulli, e dal marchese dell' Hopital: e vedemmo in Huguens, che rese egli in questa occasione una testimonianza onorevolissima ai nuovi calcoli della di loro somma utilità all'avanzamento della Geometrìa sublime.

Nel numero de' più notabili problemi, che girarono nel 1695, si deve contare quello della curva di equilibrazione nei ponti levatoi, risoluto dal marchese dell' Hopital: egli meritò principalmente l' attenzione de' geometri, attesa l'utilità, che se ne sperava per la pratica. Giovanni Bernoulli osservò, che la curva domandata, di cui il marchese dell' Hopital aveva data l'equazione generale, era una *epicicloide*, ossia che essa poteva essere generata da uno stile fissato in un cerchio, che gira sopra un' altro cerchio. Leibnizio, e Giacomo Bernoulli diedero lodevolmente anch' eglino la soluzione di questo problema.

Vedemmo in Giacomo Bernoulli, che tra le molte opere, le quali nel 1696 diedero una nuova estensione all' Analisi Infinitesimale, si distinse principalmente il celebre libro del marchese dell'Hopital intitolato: *Analisi degli infinitamente piccoli, per l'intelligenza delle linee curve*: sul quale fa d'uopo fermarsi alcun poco.

Era molto tempo, che si desiderava un' opera sì fatta. » Sino a quel tempo, dice Fontenelle nell'elogio » del marchese dell' Hopital, la nuova Geometrìa al- » tro non era stata, che una specie di mistero, e per

» così dire, una scienza cabalistica rinchiusa tra cin- » que o sei persone. Sovente si davano ne' giornali le » soluzioni, senza lasciare apparire il metodo, che le » aveva prodotte: ed altresì quando si scopriva, non » erano, che alcuni debboli raggi di questa scienza, che » sfuggivano, e le nubi tosto ricomparivano. Il pub- » blico, o per dir meglio, il piccolo numero di quelli » che aspiravano alla geometria sublime, erano col- » piti da una inutile ammirazione, che non dava loro » alcuno schiarimento: e si trovava il mezzo di ot- » tenere i loro applausi, col ritenere l'istruzione, con » cui si sarebbe dovuto ricompensarli ». L'opera del marchese dell' Hopital svelò tutta la scienza del Calcolo Differenziale: essa fu ricevuta con applauso universale, tenuta allora, ed anche presentemente nel numero de'libri classici. Ma non era ancora tempo di trattare allo stesso modo il Calcolo Integrale, il quale è immenso nei dettagli, e malgrado i considerabili progressi, che ha fatti, non è ancora in gran parte del tutto inventato, dice il Bossut. Leibnizio prometteva un libro, che, sotto il titolo di *Scientia infiniti*, doveva comprendere il calcolo Differenziale, ed Integrale: ma quest' opera, la quale allora sarebbe stata molto utile, non ha mai veduto la pubblica luce.

L'anno seguente 1697 nel celebre problema della *Brachistocrona* il marchese dell'Hopital si distinse nella soluzione, che ne diede: ma stentò molto nel trovarla. Essa può nondimeno ricavarsi assai facilmente da un principio, che adopra egli medesimo, allorchè cerca la strada, che deve seguire un viaggiatore, per arrivare nel minimo tempo possibile da un luogo ad un'altro: attraversando due campagne, ove soffre nel camminare delle resistenze, che fanno variare la velocità in un dato rapporto: perciocchè se si riguardano le due campagne come i due elementi d'una curva situata in un piano verticale, e suppongasi, conforme alla teorìa della caduta de'gravi, che le velocità d'un corpo pesante, lungo una curva qualunque, sieno come le radici quadrate delle altezze, da cui il corpo è disceso; si giunge immantinente all'equazione differenziale della cicloide. Ma niuno fece allora questa riflessione, e non avvicinò delle idee, che ci sembrano al presente tanto prossime.

In fine il marchese dell'Hopital lasciò morendo un' opera manoscritta sopra la teorìa generale, e le proprietà particolari delle *Sezioni Coniche*, della quale si diede un' edizione nel 1707. Quantunque quest' opera sia trattata interamente coll' Analisi Cartesiana, merita tuttavia di essere distinta, sì per la ricchezza stessa del fondo, sì ancora perchè ha aperto il campo ad alcuni problemi, in cui l'Analisi Infinitesimale era necessaria. Essa è contata nel piccolo numero de' libri classici.

Peraltro l'opera veramente classica in tutta la sua estensione, la più lodevole, e la più utile del marchese dell' Hopital è il citato suo libro dell' Analisi degli infinitamente piccoli, il quale fu chiamato per lungo tempo: *il Breviario de' giovani studenti*. Alle nozioni generali, che ne abbiamo date, aggiungeremo quì, che indipendentemente dalla teorìa delle tangenti, e dei massimi, e minimi, che faceva il principal' oggetto del Calcolo Differenziale; l'Autore ha risoluto molti altri problemi allora difficili, ed interessanti. Alcuni di questi problemi erano nuovi: le soluzioni degli altri erano

state date senza analisi, e senza dimostrazioni. Il marchese dell'Hopital svelò tutti questi misteri, e rese quindi alle scienze uno de'più importanti servigi, che abbiano mai ricevuto. Per esempio, nelle sezioni VI e VII egli spiega nel modo più chiaro e completo tutta la teorìa delle caustiche per riflessione, e per rifrazione: curve, famose che Tschirnaus aveva indicate ai geometri, e di cui Giacomo Bernoulli si era contentato di enunziare le proprietà principali. La sezione VIII è impiegata nella ricerca delle linee rette, o curve, che toccano un' infinità di linee date, rette o curve: argomento curioso per sè stesso, e che racchiude delle questioni applicabili alla Balistica. Nella sezione IX l'Autore espone la famosa regola, per trovare il valore d'una frazione, il di cui numeratore, e denominatore svaniscono nel medesimo tempo. La X ed ultima sezione presenta il Calcolo Differenziale sotto un nuovo punto di vista: dal che il marchese dell' Hopital deduce i metodi di Cartesio, e di Hudde per le tangenti. Quest'oggetto peraltro trattato in seguito più adequatamente da altri, non può avere al presente altra utilità, che quella di esercitare i giovani geometri.

Finchè visse il marchese dell' Hopital, nessuno si era arbitrato di disputargli la proprietà dell' ingegnosissima regola da lui esposta nella IX sezione, per trovare il valore d'una frazione, il di cui numeratore, e denominatore svaniscono nel medesimo tempo, quando si dà alla variabile, che vi entra, un certo valore determinato. Circa un mese dopo la di lui morte, Giovanni Bernoulli avendo riflettuto, che questa regola era incompleta, vi fece un' addizione necessaria, e da ciò prese occasione di dichiararsene autore. Molti amici del marchese dell' Hopital si lagnarono altamente e con calore d'un reclamo, che avrebbe dovuto farsi più presto, se aveva qualche fondamento. Ma in vece di ritrattare la sua asserzione, Giovanni Bernoulli andò anche più oltre: egli giunse per gradi sino a rivendicare tutto ciò che vi è di più importante nell' analisi degli infinitamente piccoli. Ma è provatissimo in oggi dal Bossut nel capo quarto del suo terzo volume del Saggio Storico, e da altri, che a torto Giovanni Bernoulli tentò di appropriarsi ciò che era proprio dell' Hopital. Egli di fatto avrebbe dovuto reclamarlo mentre viveva: e non farsi conoscere per uno de' suoi più ardenti encomiatori, i quali sollevarono forse il marchese dell'Hopital ad un troppo alto grado d'onore, e di gloria mentre viveva, per cui l'ingiusta accusa di Giovanni Bernoulli facendo un contrapposto troppo grande a tante lodi da lui date all' Hopital vivente, la giustizia deve ristabilire finalmente l'equilibrio, rigettato il reclamo.

I frammenti di lettere prodotti da Giovanni Bernoulli non provano totalmente ciò che egli asserisce: vi si trova soltanto, che Giovanni Bernoulli aveva composto Lezioni di geometrìa pel marchese dell' Hopital, e che lo aveva egli formato nella nuova analisi: ma non può già dirsi, che queste lezioni sieno il libro degli infinitamente piccoli: l'allievo, l'uomo di genio, quando lo compose, era divenuto maestro, e volava colle proprie ale. Si scorge ancora in detti frammenti, che il marchese dell' Hopital, mentre lavorava intorno al suo libro, domandava colla confidenza dell' amicizia degli schiarimenti a Giovanni Bernoulli sopra certe

quistioni, che vi sono trattate: ma noi non abbiamo le risposte di Giovanni Bernoulli, nè sappiamo se egli abbia dato questi schiarimenti, o se il marchese dell' Hopital, facendovi ulteriori riflessioni, le abbia spianate, e chiarificate da sè. In tutte queste incertezze il partito più saggio e più giusto si è di attenerci alla dichiarazione generale, che fa il marchese dell'Hopital nella sua prefazione, *di dovere molto ai lumi* di Giovanni Bernoulli, e di pensare, che se egli avesse avuto delle obbligazioni d'una natura particolare, non avrebbe osato di inviluparle nelle espressioni d'una riconoscenza vaga e generale. Se malgrado tutte queste ragioni, si voglia credere Giovanni Bernoulli su la sua parola, quando si dà per autore del libro degli infinitamente piccoli, la morale almeno non lo assolverà mai dall' aver turbato le ceneri d' un benefattore generoso, per un miserabile interesse d' amor proprio, tanto più malinteso, quanto che Giovanni Bernoulli, era molto ricco per sè medesimo. Del rimanente questo esempio deve essere una gran lezione per gli uomini ambiziosi, che vogliono troppo presto correr dietro alla riputazione: esso li avverte di rifiutare i servigi sollecitati, offerti sovente piuttosto per vanità, che per benevolenza, e di persuadersi, che non si arriva mai alla vera e solida gloria, se non che colle proprie fatiche.

Anni di G. C. 1690

La Hire, nato nel 1640 e morto nel 1718, cominciò a figurare sin dal 1683, quando il governo francese lo spedì verso la parte del Nord non solamente a verificare la lunghezza d'un grado del Meridiano terrestre trovata da Picard di 57060 tese, ma a prolungare altresì la meridiana sino a Dunkerque nel Nord, nel mentre che Domenico Cassini spedito alla parte del Mezzodì faceva le stesse operazioni, prolungando la meridiana sino a Colioure di detta parte per l'estensione di circa otto gradi in ambedue le parti: dal che risultò nel 1701 la lunghezza media del grado terrestre in Francia di 57061 tese, maggiore di circa una tesa di quella di Picard: e si ebbe quindi dalla estensione di circa otto gradi una maggior sicurezza di rilevare la figura della terra: al che erano dirette tutte queste operazioni, non essendo a ciò sufficiente l'estensione di un sol grado, come vedemmo meglio nel Commentario di Giandomenico Cassini.

Nel 1695 La Hire diede un *Trattato di Meccanica*, il cui oggetto generale è, come quello che vedremo in Varignon, l'equilibrio delle macchine. Esso contiene molte diverse applicazioni delle macchine alle arti, nelle quali l'autore era molto versato. Al seguito di quest'opera vi è un *Trattato delle Epicicloidi, e del di loro uso* nelle *meccaniche*. La Hire dimostra, che i denti delle ruote, destinate a comunicare il movimento per mezzo degl' incastramenti, debbono avere la figura d'epicicloidi, delle quali determina le proprietà, e le dimensioni. Questa teorìa è bellissima, ed assai lodevole: ma Leibnizio nelle sue lettere a Giovanni Bernoulli (Tom. I. pag. 347) assicura che essa appartiene a Roëmer, dal quale gli era stata comunicata più di vent'anni prima che il libro di La Hire vedesse la pubblica luce. Ed in conferma di ciò, dice Bossut, esservi poca verosimiglianza, che La Hire, *geometra di un sapere assai comune*, abbia fatto una tale scoperta. Difatti non si trova alcun'altro Trattato di genio nella

sua *Meccanica*. Per lo contrario vi s'incontra un paralogismo grossolano a proposito dell'Isocronismo della cicloide. L'autore, volendo dimostrare nella proposizione CXX, che un corpo pesante, il quale discende lungo una cicloide rovesciata, arriva sempre nel medesimo tempo al punto più basso, da qualunque luogo abbia cominciato a discendere, fa uso d'un ragionamento, dal quale conclude, che il tempo della discesa per la semicicloide rovesciata è doppio del tempo della caduta pel diametro verticale del cerchio generatore: proposizione falsa, poichè si sa dalle dimostrazioni incontrastabili di Huguens, e si può assicurarsene in molte altre maniere, che il primo tempo sta al secondo, come la semicirconferenza del cerchio al suo diametro. Il paralogismo di La Hire proviene dall' aver preso per principio, che se abbiasi una serie di *proporzioni qualunque*, la somma di tutti i primi antecedenti sta alla somma di tutti i primi conseguenti, come la somma di tutti i secondi antecedenti alla somma di tutti i secondi conseguenti: il che non è vero nel solo caso, in cui tutte le proporzioni, altronde *qualunque*, sono composte di rapporti *eguali*.

Dagli atti dell'Accademia di Parigi dell'anno 1702 pag. 118 si rileva, che La Hire non sapeva risolversi a collocare le comete nello stesso ordine de' pianeti, per l'antica opinione, che le comete non sieno che ammassi di materia soggetti a dissiparsi. Ecco come egli si esprime a questo proposito. » Se le Comete fossero pianeti, » che si facessero vedere soltanto dalla terra, quando ne » sono molto vicine, non vi ha dubbio che esse do- » vrebbero sembrare aumentarsi a poco a poco, nella

» stessa maniera che si veggono ordinariamente a sva-
» nire, ed a sparire, tanto rapporto al di loro mo-
» vimento, il quale diventa più lento sul fine della
» loro apparizione, quanto per la diminuzione della
» loro luce, che si estingue parimente presso a poco
» nella medesima proporzione: ma noi cominciamo qua-
» si sempre a vedere le comete, quando sono nel di
» loro maggior lume, e quando percorrono un mag-
» gior cammino apparente: e ciò potrebbe far credere,
» che le medesime non sieno, se non che fuochi, i
» quali accendendosi subitamente, si dissipano a po-
» co a poco, diminuendo di velocità, e di chiarore ec.»

Questa congettura non può essere attribuita, se non che alla cognizione ancor troppo imperfetta, che si aveva del moto delle comete nel tempo, di cui parlo. Gli astronomi, specialmente occupati nel movimento de' pianeti, non erano molto attenti nel fare la rivista di tutte le parti del cielo, e lasciavano sfuggire molte comete, senza osservarle: ne osservavano delle altre, molto tempo dopo che erano visibili: si voleva che la luce delle comete fosse simile a quella de' pianeti, supposizione gratuita: non si faceva attenzione, che siccome la terra ha una densa atmosfera, e molto differente da quella della luna, e degli altri pianeti; così le comete hanno delle atmosfere più o meno estese, più o meno dense, che fanno variare in molti modi le loro apparizioni. Tutte queste cause d'illusione sono state alla fine successivamente dileguate da una maggiore assiduità nel visitare l'estensione degli spazj celesti, e dalle particolari ricerche, che si sono fatte coll' ajuto de' più eccellenti strumenti del corso delle comete, e di tutte le circostanze, che lo accompagnano.

Anni di G. C. 1690

Tschirnhaus nato nel 1651 e morto nel 1708, fece conoscere circa il 1690 le famose curve dette *caustiche*. Esse sono formate, come è noto, dal concorso de' raggi di luce, che un'altra curva qualunque ha riflessi, o rifratti. Tschirnhaus col solo soccorso della geometrìa ordinaria ne aveva scoperto molte belle proprietà, come per esempio, ch'esse sono eguali alle linee rette, quando le curve, che le producono, sono geometriche. La geometrìa degli infinitamente piccoli facilitò estremamente queste ricerche, e Giacomo Bernoulli nel 1693 le portò molto oltre, principalmente la teorìa delle caustiche per rifrazione.

Anni di G. C. 1690

Nicolò Fazio di Duillier ginevrino ritirato in Inghilterra, uno dei quattro geometri, ai quali Giacomo Bernoulli dedicò la pubblica conclusione, che fece sostenere in Basilèa nel 1701 sul suo metodo degli Isoperimetri in forma di Tesi, fu quegli che eccitò la prima scintilla di guerra tra Leibnizio, e Newton su la scoperta dell'Analisi Infinitesimale. Da una parte spinto dagl'Inglesi, dall'altra da un risentimento personale contro Leibnizio, dal quale pretendeva di non avere ricevuto le dimostrazioni di stima, che gli erano dovute, quando egli in Londra fu a visitare gli altri geometri, e non lui, si avvisò di dire (in un piccolo scritto sopra *la curva della più veloce discesa*, e sopra *il solido della minima resistenza*, pubblicato nel 1699) che Newton era il *primo inventore* de' nuovi calcoli: che egli parlava così per l'onore della verità, e per uno scarico della sua coscienza: e che lasciava ad altri la cura di decidere ciò che Leibnizio, *secondo inventore*, aveva preso in prestito dal geometra inglese. Leibnizio giustamente offeso da questa anteriorità d' invenzione, che si attribuiva a Newton, e dalla maligna conseguenza, che s' insinuava, rispose con molta moderazione, che Fazio parlava certamente di sua testa: ch'egli non poteva pensare, che Newton lo approvasse: che non voleva entrare in lite con quest' uomo celebre, per cui egli aveva, e mostrava in tutte le occasioni una profonda venerazione: che quando si erano incontrati in alcune invenzioni geometriche, Newton medèsimo aveva dichiarato nel suo libro *De' Principj*, che eglino non prendevano nulla l'uno all'altro: che quando pubblicò il suo Calcolo Differenziale nel 1684, egli ne era in possesso da circa otto anni: che verso il medesimo tempo Newton gli aveva bensì annunziato, senza alcuna spigazione, ch' egli sapeva condurre le tangenti con un metodo generale, che non era ritenuto dalle quantità irrazionali. ma che non poteva giudicare, se questo metodo fosse il Calcolo Differenziale; poichè Huguens, che allora non conosceva questo calcolo, asseriva parimente di averne uno dotato de' vantaggi medesimi: che la prima opera degli Inglesi, in cui il Calcolo Differenziale fosse spiegato in un modo positivo, era la prefazione dell'Algebra di Wallis, pubblicata soltanto nel 1693: che sopra tutte queste cose egli si riportava interamente alla testimonianza, ed al candore di Newton ec. L'asserzione di Fazio, mancante assolutamente di prove, fu per molti anni obbliata. In fine del presente capo sarà da noi riassunta in Saurin, ed ivi ritoccata.

Fazio intanto, dopo di aver goduta qualche riputazione tra i geometri, come rilevasi dalla stima, che

ne fecero i due primi di quel tempo Giacomo Bernoulli, e Newton, si voltò in demenza, di cui diede uno strano spettacolo col pretendere di volere risuscitare pubblicamente un morto nella chiesa di San Paolo in Londra.

Renau ossia il cavaliere di Renau Luogotenente generale delle armate generali della Francia sino dall'an-

Anni di G. C. 1690

no 1689 intraprese a sottoporre il movimento della nave al calcolo in un' opera intitolata: *Teorìa della manovra del vascello.* Una delle sue principali proposizioni era, che se un naviglio è spinto nel medesimo tempo dalle azioni di due vele perpendicolari tra loro, e si rappresentino queste forze coi lati contigui d'un parallelogrammo rettangolo costruito sopra le loro direzioni, il naviglio soffrirà per parte dell' acqua una resistenza rappresentata dalla diagonale. Huguens osservò, che la proposizione sarebbe vera, se le resistenze dell' acqua fossero come le semplici velocità: ma che essa è falsa nell' ipotesi conforme alla natura, che le resistenze sono come i quadrati delle velocità. Di fatti seguendo quest' ipotesi, bisogna dapprima costruire un parallelogrammo, per rappresentare le due velocità, che le due vele tendono ad imprimere al naviglio: indi fa d'uopo costruire un secondo parallelogrammo, che può chiamarsi il *parallelogrammo delle resistenze*, tale che i suoi lati, avendo altronde la stessa direzione come quelli del primo, sieno proporzionali ai loro quadrati: allora la diagonale di questo secondo parallelogrammo esprimerà la resistenza composta: e la velocità del naviglio, diretta secondo questa stessa diagonale, sarà proporzionale alla sua radice quadrata. Renau non si rese punto alle dimostrazioni di Huguens: egli persistette nella sua opinione erronea, finchè alla fine Giovanni Bernoulli nel suo *Saggio sopra la manovra de' navigli*, pubblicato nel 1714, pose la verità in tutta la sua luce, e fece vedere i paralogismi, ne'quali l'autore francese s' inviluppava. Giovanni Bernoulli rilevò ancora un'altro errore non meno capitale di Renau sopra l'angolo della deriva nelle rette oblique. Sebbene Giovanni Bernoulli non abbia risoluto con sufficiente generalità la maggior parte de'problemi, che il suo soggetto comportava, egli nondimeno ha reso un grandissimo servigio all'arte nautica, collo stabilire esattamente i principj allora ricevuti, sui quali le quistioni di questa natura devono essere fondate. In Daniele Bernoulli, ed in Eulero sarà ritoccata la stessa materia della scienza navale di molta importanza.

Anni di G. C. 1690

Parent, nato nel 1666 e morto nel 1716, si rese grandemente benemerito all' Analisi Infinitesimale per la soluzione d'un bellissimo, ed utilissimo problema *De maximis, et minimis*. Avendo rilevato in generale, che se in una macchina la disposizione delle parti è tale, che la velocità del peso *motore* diventi più grande o più piccola, secondo che al contrario quella del peso *mosso* diventi più piccola o più grande; esiste un rapporto tra le due velocità, affinchè l'effetto della macchina sia un *maximum*, o un *minimum*: egli dimostrò, che il *maximum* di effetto ha luogo nelle ruote idrauliche mosse dall' urto dell' acqua, quando la velocità della ruota è il terzo della velocità della corrente. (Mem. dell'Accad. 1704). Si trovano molte altre idee ingegnosissime ne' suoi scritti numerosi: ma in generale egli aveva il difetto di essere oscuro, cosa che

ha molto pregiudicato alla sua riputazione. Conveniva egli medesimo di questo difetto. Il celebre Fontenelle amico del nostro Bossut gli raccontò un giorno, che avendo fatto, nella sua qualifica di segretario dell'Accademia delle scienze di Parigi, l'estratto d'una memoria di Parent; questi fu talmente maravigliato di vedersi in esso assai chiaro, che lo ringraziò con queste parole: *Domine, illuminasti tenebras meas*. Il padre Malebranche dipingeva l'oscurità di questo stesso geometra in un modo molto ingegnoso: *il Sig. Parent*, egli diceva, *ha molto spirito, ma non ne ha la chiave*. Giacchè parlando, e scrivendo noi, per farci intendere; la chiarezza è la prima cosa, che si richiede: come la chiave per entrare a vedere *un'edifizio ben fatto*, secondo la metafora di Malembranche.

Anni di G. C. 1690

Varignon, nato nel 1654 e morto nel 1722, ha goduto un'assai grande celebrità. Egli la doveva alla sua carica di professore di Matematica nel collegio Mazarino, ed al merito che aveva di chiaramente esporre le sue idee, benchè il suo stile fosse altronde scorretto, languido, e diffuso. Egli era totalmente privo di genio: non si vede, che abbia mai risoluto qualche gran problema del suo tempo: ma egli era dotato di un'eccellente memoria: leggeva molto, volgeva, e rivolgeva gli scritti degl' inventori: generalizzava i loro metodi, si appropriava le loro idee, ed alcuni allievi prendevano alcune reminiscenze celate, o amplificate per iscoperte. Egli ha pubblicato a parte un Trattato di *Meccanica generale*, ove applica con chiarezza, ed esattezza il principio del parallelogrammo delle forze alle leggi dell' equilibrio. Le memorie dell'Accademia delle scienze di Parigi sono piene de' suoi calcoli in tutti i generi. A lui si ha principalmente l'obbligazione d'avere rischiarato molti luoghi del libro *De' Principj Matematici*: al nostro tempo, dice Bossut, avrebbe commentato Eulero, e d'Alembert.

Dopo che Archimede aveva fissato la base della Statica, non era difficile di riconoscere le condizioni dell'equilibrio per ciascun caso particolare, ed esse avevano diretto lo spirito d'invenzione in una gran quantità di macchine: ma non erano per anche state ridotte ad un principio generale, ed uniforme. Varignon intraprese, ed eseguì questo piano di riunione colla teorìa de'moti composti. Ne diede alcuni saggi nel 1687 nel suo *Progetto d'una nuova meccanica*: in seguito egli esaurì, per così dire, tutte le combinazioni dell'equilibrio delle macchine nella sua *Meccanica generale* pubblicata dopo la sua morte nel 1725. Quest'opera, che ho già citata, è molto prolissa, e molto faticosa a leggersi: ma è anche molto commendabile per la chiarezza di dettaglio in tutti i luoghi occorrenti.

Varignon ha inserito nel secondo volume le prime nozioni del famoso principio delle *velocità virtuali*, dietro una lettera, che gli fu scritta da Giovanni Bernoulli nel 1717. Si chiama *velocità virtuale* d'un corpo lo spazio infinitamente piccolo, che questo corpo, sollecitato al movimento, tende a percorrere in un istante: ed il principio, di cui trattasi, applicato all'equilibrio, può enunciarsi in generale così. » Sia un sistema
» qualunque di piccoli corpi spinti o tirati da potenze
» qualunque, e facentisi equilibrio: s'imprima un pic-
» colo movimento a questo sistema, di modo che cia-

» scun corpo percorra uno spazio infinitamente piccolo,
» che esprima la sua velocità virtuale: la somma de'pro-
» dotti delle potenze moltiplicate ciascuna pel piccolo
» spazio, che percorre il corpo, al quale essa è appli-
» cata, sarà sempre uguale a zero, sottraendo i mo-
» vimenti in un verso dai movimenti nel verso op-
» posto ». Varignon fa l'applicazione di questo principio all'equilibrio di tutte le macchine semplici.

Anni di G. C. 1700

Guglielmini, nato nel 1685 e morto nel 1710, avendo dato al teorema di Torricelli sull'efflusso dei fluidi per Orificj infinitamente piccoli ossia fisicamente piccolissimi più estensione che non comporta, come avean fatto prima di lui Varignon, ed altri Autori; non potè a meno, se non che stabilire al pari di essi sopra la natura degli efflussi, e precisamente sul movimento delle acque correnti ne'canali, proposizioni ipotetiche, incerte, e qualche volta contraddette apertamente dalla sperienza. Ma questo difetto nel *Trattato de' fiumi* di Guglielmini è bastantemente compensato da eccellenti riflessioni fisiche sopra il corso delle acque. Aggiungiamo, che la difficoltà del problema deve far perdonare tutti questi tentativi inutili, o infruttuosi. Non parlo già della difficoltà inerente ad una soluzione rigorosa: sì fatta soluzione è impossibile: poichè siccome in generale non si sanno determinare, neppure colla geometrìa, e col calcolo i movimenti d'un sistema qualunque finito di corpi solidi; come mai si troverà il movimento d'una massa fluida, composta d'un' infinità d'elementi, de'quali non si conosce precisamente nè la grossezza, nè la figura?

Non si può quindi sperare di risolvere il problema dell' efflusso de' fluidi, se non per approssimazione: e bisogna altresì per ciò, 1.° che la sperienza, o qualche proprietà particolare de' fluidi cominci a formare, se mi è lecito di così dire, un ponte di comunicazione tra la teorìa del movimento de' corpi fluidi, e quella de' corpi solidi: 2.° che le formole idrauliche sieno trattabili, e conducano a risultati, che si possano comodamente applicare alla pratica. Ogni altro metodo più generale, e più diretto in apparenza, non sarà, che una semplice speculazione di geometrìa: esso produrrà delle espressioni complicate, delle quali non si potrà far uso nella spiegazione de' fenomeni della natura, se non che restringendole con supposizioni qualche volta precarie, sempre però limitate, le quali faranno perdere alle medesime tutti i pretesi vantaggi della generalità primordiale.

Saurin, celebre orologiaro in Parigi, nato nel 1659 e morto nel 1737, amico di Varignon, che l' istruì nelle Matematiche in età quasi virile, fu d'una tempra di spirito assai più forte di lui, e più prossima al vero genio dell' invenzione. Si rileva pure dalle poche opere matematiche, che di lui ci rimangono, che se egli avesse cominciato più di buon'ora a studiare la geometrìa, e si fosse applicato ad un genere particolare; si sarebbe sollevato al primo ordine. Egli ha dato nel 1709 una bellissima soluzione generale del problema, ove tra un' infinità di curve simili, descritte nel medesimo piano verticale, ed aventi il medesimo asse, e lo stesso punto d'origine, si tratta di determinare quella, il di cui arco compreso tra il punto d'origine ed una linea retta, o curva data di posizione, è

Anni di G. C. 1700

percorso nel più breve tempo possibile. Egli è il primo, che negli atti dell' Accademia del 1716, 1723, 1727 abbia pienamente rischiarato la teorìa delle tangenti ne' punti moltiplici delle curve. Le sue cognizioni in tutte le parti teoriche, e pratiche della orologerìa erano profondissime: e se ne ha la prova in due memorie, che diede sopra questo argomento all'Accademia delle scienze negli anni 1720, e 1722.

Dopo Sluze, e Barrow, che furono i primi motori, tutti i dotti, che abbiamo nominati da Newton, e Leibnizio in poi, e parecchi altri d' un' ordine inferiore, concorsero al progresso del metodo degli infinitamente piccoli. Una guerra sorda, che fermentava da molti anni, e che scoppiò finalmente con violenza nel 1711, a proposito del diritto alla prima invenzione di questo metodo, fece temere da principio, che non si perdesse in discussioni polemiche un tempo, che doveva essere impiegato totalmente a perfezionarlo: ma queste discussioni medesime finirono col divenire vantaggiose anch' esse alla scienza.

Nicolò Fazio mosse, come vedemmo in esso, la prima scintilla della guerra. Keil nel 1708, eccitato forse dagl' Inglesi, o dallo stesso Newton, rinnovò la medesima accusa. Leibnizio osservò, che Keil, altronde da lui chiamato un'uomo *dotto*, era troppo nuovo, per pronunziare un giudizio *sicuro* di cose avvenute già da molti anni: e ripetè a lui quanto aveva detto prima a Fazio, che si riportava al candore, ed alla buona fede di Newton medesimo. Keil tornò ad insistere nel 1711: ed in una lettera diretta ad Hansloane, segretario della Società di Londra, non si contentò più di dire, che

Newton era il primo inventore, ma fece intendere chiaramente, che Leibnizio, dopo avere attinto il metodo negli scritti di Newton, se lo era appropriato, con applicarvi soltanto una notazione particolare, tacciandolo, ed accusandolo così di plagio ingiustamente.

Leibnizio sdegnato all' eccesso da tale imputazione, portò le più vive lagnanze alla Società reale, e domandò altamente che si reprimessero *i clamori* di un'uomo inconsiderato, che attaccava senza ragione, e senza pudore la sua riputazione, e la sua buona fede. La Società reale nominò alcuni Commissarj, per esaminare tutti gli scritti, che riguardavano siffatta quistione: ed essa li pubblicò nel 1612 col rapporto de' Commissarj sotto questo titolo: *Commercium epistolicum de Analisi promota*. Senza essere assolutamente affermativa, la conclusione del rapporto fu, che Keil non aveva calunniato Leibnizio. L'opera fu sparsa con profusione in tutta l' Europa.

Newton allora era Presidente della Società reale di Londra, ove godeva la più alta considerazione, ed il potere più esteso. Egli per delicatezza del suo candore commendato da Leibnizio, e della rettitudine del Giudizio, doveva commettere il processo, e la decisione ad altro Tribunale, che nulla affatto dipendesse da lui, onde allontanare ogni sospetto di parzialità, e di prevenzione in di lui favore: e per non compromettere due rispettabilissime nazioni, l'Inghilterra, e la Germania nella gran guerra letteraria, che tra loro si accese.

Non permettendomi la brevità prefissami sin da principio il riferire in dettaglio la gran disputa, rimetto il lettore al mio epilogo, e all'accurata decisione del

Bossut riportata in Newton e in Leibnizio. E fo quindi riflettere in fine, che le produzioni del genio essendo beni d' un' ordine infinitamente superiore a tutti gli altri oggetti dell'umana ambizione, non deve far maraviglia il calore, con cui Leibnizio, e Newton si hanno disputato la scoperta della nuova geometria. Questi due illustri rivali, e grandissimi matematici, o a meglio dire, la Germania, e l' Inghilterra combatterono in certo modo per l' Impero delle scienze: nel che non solamente sono compatibili, ma dovevano altresì farlo ad ogni modo per la gloria inestimabile ognuna della propria nazione, e per amore della verità.

CAPO QUINTO

Reyneau ordina gli elementi del Calcolo Integrale, nel mentre che altri Matematici, e i due Nicolò, e Daniele Bernoulli faticano grandemente anch'eglino per l'avanzamento della nuov' Analisi.

Fu osservato nel capo antecedente, che la grand'opera *Degli infinitamente piccoli* del marchese dell'Hopital venne per molto tempo riguardata come il Breviario de' giovani apprendisti, che la studiavano in quasi tutte le scuole. Siccome fu essa ben presto seguita da un' altra opera di una utilità anche più grande, e più generale in Francia specialmente, ed altrove, portante il titolo: *Dell'Analisi dimostrata* del padre Reyneau; quindi è, che come fu questa pubblicata per la prima volta nel 1708, cominciò a decadere nelle scuole di Francia il citato libro dell' Hopital, e fu sostituita ad esso la detta *Analisi dimostrata*, che divenne in seguito per lungo tempo la sola guida de' principianti francesi, per istruirsi ne' nuovi calcoli.

Nacque da ciò una certa emulazione, che rese lo studio della Nuov'Analisi sempre più comune: e all' ingrandimento di esso travagliarono contemporaneamente assai Montmort, Ermanno, Manfredi, e i due Nicolò, e Daniele Bernoulli: a distinzione de' quali fa d'uopo avvertire, che dai due fratelli Giacomo, e Giovanni Bernoulli si ebbero tre geometri, i quali si distinsero, e si resero assai celebri nella nuova Analisi Infinitesimale. Furono eglino Nicolò Bernoulli figlio di Giacomo, Nicolò Bernoulli figlio di Giovanni, e Daniele Bernoulli altro figlio di esso Giovanni: i quali due Nicolò, per non farli confondere, nel nominarli separatamente, sogliono chiamarsi uno *Nicolò figlio*, cioè di Giovanni, e l'altro *Nicolò nepote*, vale a dire figlio di Giacomo, e nepote di Giovanni. Ciò premesso,

Il padre Reyneau due oggetti si era proposto nella citata sua opera: il primo fu quello di dimostrare, e rischiarare diversi metodi d'Algebra pura: l'altro di esporre, secondo il medesimo spirito, gli elementi del Calcolo Differenziale, e del Calcolo Integrale. Egli si estende poco sopra il Calcolo Differenziale, sufficientemente conosciuto dal libro del marchese dell'Hopital: si è principalmente applicato a sviluppare gli elementi del Calcolo Integrale, che nasceva quasi allora: e vi riuscì in guisa, che la sua opera era chiamata *L'Euclide dell'alta geometrìa*. Ma dopo una lunga durata di siffatta celebrità, conservando la stima dovuta all'auto-

Anni di G. C. 1710

re, il suo libro fu insensibilmente dimenticato, per altre opere più dotte, e più complete, che lo superarono: frutto del progresso della scienza.

Il metodo degli infinitamente piccoli, che il marchese dell' Hopital, ed il padre Reyneau avevano adottato, era soggetto ad alcune difficoltà, che questi autori avevano eluse, e non avevano sufficientemente rischiarate. Solamente a forza di presentarlo, di applicarlo a nuovi usi, e di far rilevare all'occasione la conformità de' risultati, che dava con quelli degli antichi metodi, si era finalmente giunto a farlo ricevere universalmente, come egualmente certo, ed egualmente esatto, che le altre teorìe geometriche. Esso nondimeno lasciava ancora alcune oscurità nella mente di quelli, che non ne penetravano abbastanza i veri principj. Per cui mi sia permesso di citare a questo proposito, dice Bossut di se stesso, un piccolo trattato che lo riguardava. Allorchè cominciai, dice egli, a studiare il libro del marchese dell' Hopital, io avevo della difficoltà a concepire, che si potesse trascurare assolutamente, senza errore qualunque, una quantità infinitamente piccola, in confronto d'una quantità fisica. Confidò il suo imbarazzo al geometra suo amico Fontaine, il quale gli rispose: *Ammettete gli infinitamente piccoli come ipotesi, studiate la pratica del calcolo, e la fede vi verrà.* La fede gli venne effettivamente: e si convinse, che la metafisica dell'Analisi Infinitesimale era la medesima di quella del metodo d'esaustione degli antichi geometri.

Si è sovente rinnovata la medesima obbiezione contro la pretesa inesattezza de' nuovi calcoli. Nel 1734 uscì in Inghilterra una lettera intitolata *l'Analisi*, nella quale l'autore, uomo d'un merito assai distinto per altri riguardi, rappresentava il Metodo delle flussioni come pieno di misteri, e come fondato sopra falsi ragionamenti. Non si potevano annientare per sempre queste strane imputazioni, se non che collo stabilire questa teorìa sopra principj talmente certi, e talmente evidenti, che qualunque uomo ragionevole, ed istrutto, non possa ricusare di ammetterli.

Anni di G. C. 1710

Rugiero Cotes, nato nel 1682 e morto nel 1716, fu professore di Matematica in Cambrige. Egli trattò assai lodevolmente la celebre materia dell'integrazione delle frazioni razionali: e ridusse la di loro integrazione in formole generali, ed assai comode nella sua celebre opera intitolata: *Harmonia mensurarum*: ma quest'opera non vide la pubblica luce, che sei anni dopo la morte dell'autore: indubitatamente Taylor, ed i Bernoulli non ne conoscevano il tenore. Si trovano nel medesimo volume di Cotes molte altre scoperte utilissime, come il suo metodo per apprezzare gli errori nelle matematiche miste, le sue riflessioni sopra il metodo Differenziale di Newton, il suo famoso teorema per la risoluzione delle equazioni quadratiche etc. Cotes morì nel fiore della sua età. Newton lo stimava infinitamente: egli diceva sovente di lui: *se il Sig. Cotes avesse vissuto, ci avrebbe insegnato qualche cosa.*

Anni di G. C. 1710

Montmort ossia Raimondo di Montmort nato nell'anno 1678 e morto nel 1718, fece comparire nel 1711 la sua *Analisi de' giuochi d'azzardo*: opera piena di viste acute, e profonde, il di cui oggetto è di sottoporre alcune probabilità al calcolo, di apprezzare gli azzardi, di regolare le scommesse ec. Essa non appar-

tiene propriamente alla nuova geometria: nondimeno contribuì a' suoi progressi, sia nell'aguzzare in generale lo spirito delle combinazioni, sia per alcune estensioni, che diede l'autore alla teorìa delle serie: felice supplemento all'imperfezione de'metodi rigorosi in tutte le parti delle matematiche.

Anni di G. C. 1710

Giacomo Ermanno nato nell'anno 1678 e morto nel 1743, degno discepolo di Giacomo Bernoulli, del quale riparò in parte la perdita nella prematura di lui morte, si fece dapprima conoscere con un metodo, per trovare i raggi osculatori nelle curve polari: poco tempo dopo pubblicò una bella soluzione del problema *della sezione indefinita degli archi circolari*, agitato allora tra i fratelli Bernoulli.

Egli si distinse ancor più in seguito nella soluzione de' problemi della catenaria della vela enfiata dal vento, della curva elastica, ed in altri indicati da noi ne' precedenti geometri, nel dar conto de'progressi dell'Analisi Infinitesimale, ai quali hanno immediatamente contribuito. I quali problemi, e parecchi altri della medesima natura relativi alla Statica saranno altresì risoluti tra gli altri da Daniele Bernoulli, e da Eulero ad immitazione di Ermanno: ma con nuove estensioni, e nuove difficoltà, che aumentarono grandemente la gloria del successo, ed il dominio della scienza.

Nel 1716 Ermanno intraprese a spiegare in un Trattato di *Foronomia* ciò che riguarda la meccanica, tanto de' corpi solidi, quanto de' corpi fluidi: cioè a dire la Statica, la scienza del moto de'corpi solidi, l'Idrostatica, e l'Idraulica. Questa moltitudine di oggetti non gli ha permesso di svilupparli colla necessaria estensione, e chiarezza. Egli altronde affetta, come Newton, di adoprare, quanto gli è possibile, il metodo sintetico: lo che rompe sovente la catena, e la connessione de' problemi. Si aggiunga, che l'autore si è in alcuni luoghi ingannato.

Ermanno s' ingannò ancora in gran parte nella soluzione da lui data del celebre problema proposto da *Ernesto* d' Offemburg. Questo geometra, altronde assai poco conosciuto, ad immitazione del problema di Viviani sopra la quadratura della volta emisferica da noi riferito, propose di traforare una strada emisferica di un numero qualunque di finestre di forma ovale, con questa condizione, che i loro contorni fossero espressi da quantità algebriche: ovvero in altri termini, che bisognava determinare sopra la superficie d' una sfera delle curve algebricamente rettificabili. Si scorge primieramente, che le curve domandate non possono esser formate dalla intersezione d'un piano colla sfera: poichè tutte queste intersezioni, da qualunque parte si facciano, non sono mai altro, se non che cerchi: esse appartengono alla classe delle curve a doppia curvatura. Questo problema, quantunque curioso, e difficile, rimase nondimeno intatto per molto tempo, e s' ignora altresì, se l'autore lo abbia risoluto.

Ermanno, come si ha negli atti dell'Accademia di Pietroburgo del 1726, in una memoria sopra la rettificazione dell'epicicloidi sferiche, credette, che queste curve soddisfacessero in generale alla quistione d'Offemburg, ossia che esse fossero algebricamente rettificabili: ma ciò non avviene che in certi casi particolari: la rettificazione delle epicicloidi sferiche dipende

in generale dalla quadratura dell'iperbola. Giovanni Bernoulli rilevò l' errore di Ermanno: e non contento di aver' assegnato la vera epicicloide algebrica, e rettificabile, risolvè direttamente, ed *a priori* il problema di Offemburg, cioè a dire: egli diede il metodo generale, per determinare le curve rettificabili, che si possono descrivere sopra la superficie d'una sfera.

Nel 1719 Ermanno propose per gli atti di Lipsia due problemi, i quali occuparono per qualche tempo i geometri con molta utilità: il primo consisteva nel trovare una curva, la cui arca fosse uguale ad una certa funzione proposta delle coordinate: il secondo, molto più difficile, era di determinare una curva algebrica tale, che l'espressione indefinita della sua lunghezza racchiudesse la quadratura d'una curva algebrica data, più o meno un numero *dato* di quantità algebriche, come negli atti di Lipsia del 1719. Nicolò Bernoulli, figlio risolvè il primo, come negli atti sudetti del 1720. In quanto al secondo egli confessò candidamente (sebbene scrivesse sotto gli occhi di suo padre) di non poterlo risolvere, se non che in certe supposizioni, le quali ne restringevano la generalità, come dai detti atti di Lipsia 1723. Ermanno diede la soluzione generale con un metodo ingegnosissimo, fondato sopra la teorìa delle evolute, ed in questa occasione egli ebbe il vantaggio sopra i Bernoulli.

Un'anno dopo (Atti di Lipsia 1725) Giovanni Bernoulli ritornò su la medesima quistione, e la trattò in un modo più diretto, e più analitico con darle una nuova estensione. Nell' introduzione al capo che segue si ritoccherà questa materia a compimento del presente

Commentario di Ermanno. Facciamo intanto avvertire, che in tutti i problemi nell' indicato modo dipendenti dall'Analisi Infinitesimale v' è una vera difficoltà di risolverli : e si comprende coll'osservare in generale, che si arriva d'ordinario assai facilmente a metterli in equazione : la principale difficoltà si è d'integrare queste equazioni : essa è sovente tale, che supera tutte le forze dell'Analisi. Laonde i più grandi geometri si sono occupati a perfezionare il Calcolo Integrale, ossia l'integrazione delle equazioni differenziali di tutti gli ordini.

Gabriele Manfredi Italiano, nato nel 1681 e morto nel 1761, si rese grandemente benemerito alla nostra Italia, per la mossa che diede ai di lei geometri di fare considerabili progressi nella nuova geometrìa al principio del secolo decim' ottavo. Egli impresse ai nostri geometri questo movimento colla sua opera, che pubblicò nel 1707 sotto questo titolo : *De constructione Aequationum Differentialium primi gradus* : opera in cui l'autore dimostra molta perizia nell'assoggettare certe equazioni differenziali alle condizioni, che le rendono integrali. Egli si è incontrato per la conformità del genio, e della dottrina con Giovanni Bernoulli, sul metodo di separare le indeterminate nelle equazioni differenziali omogenee del prim' ordine. Anni di G.C. 1810

Di Gabriele Manfredi si hanno ancora delle ingegnose memorie di geometrìa, e di analisi, che pubblicava di tempo in tempo ne' giornali, e nei *Commentarj* dell' Università di Bologna.

Nicolò Bernoulli figlio di Giacomo nato nel 1683 e morto nel 1759, si rese ben tosto celebre *nell'arte di congetturare*, camminando su le tracce di suo padre, di cui è nota l'eccellente opera intitolata : *Ars conjectandi*. Nel 1709 Nicolò Bernoulli fece un' importante applicazione de' principj di quest' opera alle probabilità della durata della vita umana. A lui si devono ancora molte altre profonde ricerche in geometrìa, che noteremo espressamente, quando si tratterà degli argomenti, ai quali si riferiscono. Anni di G.C. 1810

Intanto fa d'uopo avvertire, che Bossut fa nascere per equivoco da Giovanni Bernoulli tanto il presente, quanto Nicolò che segue : contraddizione troppo manifesta per la diversità di epoche della di loro nascita, come al volume terzo nelle pagini 66, e 102 del di lui Saggio storico delle matematiche, edizione di Milano del 1802 con le addizioni del Fontana.

Anni di G.C. 1720 Nicolò Bernoulli figlio di Giovanni, nato nel 1695 e morto nel 1726, nel problema delle Trajettorie ortogonali proposto da Leibnizio agl' Inglesi, si distinse nel risolvere in un modo elegantissimo il caso particolare, in cui le curve intersecate sono iperboli del medesimo centro, e del medesimo vertice, come negli atti di Lipsia del 1716. Il di lui cugino Nicolò Bernoulli, ed Ermanno trattarono la questione più generalmente, con metodi che si riducevano al medesimo, senza essersi nulla comunicato, come nei detti atti all'anno 1717. Questi metodi si applicavano facilmente a tutti i casi, in cui le curve intersecate sono geometriche, e parimente ad alcune curve trascendenti. Ermanno avendo voluto dare alle formole più estensione, che non comportavano ; cadde in alcuni sbagli, che furono rilevati dai Bernoulli. Nel rimanente, eglino si accordavano tutti a riguardare la soluzione di Newton come insufficiente, e di nessun' uso.

Il nostro Nicolò Bernoulli, oltre alla soluzione, che vedemmo aver data dei due problemi proposti da Ermanno, lo vedremo anche distinguersi in Riccati nella quistione, che questi propose ai geometri d' integrare un'equazione differenziale del prim' ordine, a due variabili detta: *L'equazione di Riccati.*

Nella colonia de' famosi matematici, e di altri scientifici, e chiarissimi letterati, che fu chiamata da tutte le parti dell' Europa a Pietro Burgo nella fondazione di quella celebratissima Accademia, uno de' primi invitati fu Nicolò Bernoulli figlio di Giovanni, il quale unitamente ad altri membri residenziali, e socj stranieri, pieni di genio, ardenti e laboriosi, si affrettarono ad arricchire le collezioni di quell' illustre Società. Quindi nel primo volume del 1726 si distinguono due, o tre eccellenti memorie del nostro Nicolò Bernoulli, il quale nello stesso anno fu rapito sventuratamente dalla morte, quasi al suo primo ingresso nella carriera delle matematiche in dett'Accademia.

Alla fondazione dell'Accademia di Pietroburgo, si vide rinnovarsi l' esempio, che Tolomèo Filadelfo aveva dato rapporto al Musèo d' Alessandria: una colonia di geometri, d'astronomi, di fisici, di naturalisti ec. fu chiamata da tutti i paesi dell' Europa a Pietroburgo. Si contano in questo numero Nicolò Bernoulli, figlio di Giovanni, Daniele Bernoulli, Eulero, Leutmann, Bulfinger ec. Oltre a questi membri residenti, l'Accademia aveva molti illustri socj stranieri, come Giovanni Bernoulli, Wolfio, Poleni, Michelotti ec. Tutti questi uomini pieni di genio, attivissimi, e faticatori si affrettavano, come si disse, ad arricchire le collezioni di quella sceltissima, ed illustre Società.

Anni di G. C. 1720

Daniele Bernoulli, nato nel 1700 e morto nel 1782, sviluppò fin dai primi anni della sua età giovanile una grande elevatezza d' ingegno, e molto genio per le matematiche sotto la direzione del padre. Egli si distinse al pari dello zio, e del fratello nella celebre quistione proposta ai geometri da Riccati nel 1725, come vedremo nel di lui Commentario. Chiamato quindi da Caterina I. vedova di Pietro il Grande come membro residente alla prefata Accademia, che creò l'anno seguente 1726 in Pietroburgo, vi si applicò con tale assiduità, e felice riuscita insieme col suo ridetto fratello Nicolò, che fecero pubblicare ambedue delle eccellenti memorie negli atti di quel primo anno dell'Accademia: e rapitogli nello stesso anno dalla morte il suo amato fratello, si mise in una gara amichevole col famoso Leonardo Eulero, altro insigne membro residente di quella sceltissima Società, talchè i due uomini, che più contribuirono alla gloria della Nuova geometrìa nella erezione, e nel seguito dello stabilimento, furono Daniele Bernoulli, ed Eulero.

La maggior parte de' problemi, ne' quali si erano occupati i geometri nella prima effervescienza della nuova geometrìa, avevano per oggetto alcune teorìe particolari, alle quali non si era data tutta l'estensione, di cui erano suscettibili. Daniele Bernoulli, ed Eulero generalizzarono molti di questi antichi problemi, come quelli delle catenarie, e degli isoperimetri: ne trattarono altri assolutamente nuovi, e molto difficili: come, per esempio, la determinazione de'movimenti oscillatorj d'una catena pesante, sospesa verticalmente: la ricerca de'suoni, che rende una lama elastica percossa:

i movimenti, che risultano dalla percossa eccentrica de' corpi ec. Siffatte quistioni richiedevano una grande sagacità primitiva, ed una profonda scienza del calcolo. I nostri due geometri le risolvevano dal canto loro: e non dobbiamo dimenticarci di notare il raro esempio di moderazione, e di onoratezza, che diedero allora, e dal quale non si sono mai dipartiti nel seguito. Si vedevano a proporsi reciprocamente de' problemi, e lavorare sopra i medesimi argomenti, senza che la rivalità de' talenti, o la diversità delle opinioni sopra certi punti, che dipendevano dalla fisica, abbia mai alterato la stretta amicizia, che avevano insieme contratta nella gioventù. Tutti due si rendevano con franchezza, e senza restrinzione, una vicendevole giustizia. Nella scienza analitica Daniele Bernoulli abbassava bandiera innanzi ad Eulero, ch'egli chiamava suo *Ammiraglio*: ma nelle quistioni, che esigevano più finezza d'ingegno, che profonda geometrìa, Daniele Bernoulli a vicenda stava nel posto più eminente: difatti egli aveva un talento particolarissimo di applicare la geometrìa alla fisica, e di sottoporre ad un calcolo preciso alcuni fenomeni, che non si conoscevano, se non che in un modo generale, e vago.

Dopo che si cominciò ad applicare il principio del parallelogrammo delle forze alla Statica, come vedemmo in Renau, non si pensò ad esaminare il fondamento col dovuto rigore. Tutti i geometri si erano da principio accordati a riconoscere, che se un corpo venga spinto nel medesimo tempo da due forze, capaci di fargli percorrere separatamente, e nel medesimo tempo, i lati d'un parallelogrammo, esso colla

di loro azione combinata percorrerà la diagonale. In seguito si estese la medesima legge alle semplici forze di *pressione*: e si concluse, che essendo due forze di quest' ultima specie rappresentate dai lati d'un parallelogrammo; la loro risultante veniva rappresentata dalla diagonale, come negli atti dell'Accademia di Pietroburgo del 1726. Ma Daniele Bernoulli non trovando una sufficiente connessione d'evidenza nel passaggio da un caso all'altro; dimostrò la seconda proposizione in un modo immediato, ed indipendente da ogni considerazione del moto composto. Parecchi altri geometri, ed in particolare d'Alembert, l'hanno egualmente dimostrata con diversi metodi più o meno composti. Sventuratamente tutte queste dimostrazioni sono troppo lunghe, e troppo imbarazzanti, per poter comodamente trovar luogo ne' trattati elementari di Statica: ma esse esistono se non altro negli scritti de' geometri, come sicure mallevadrici d'una verità, della quale altronde abbiamo la prova con altri mezzi più semplici, e più appropriati agli ordinarj bisogni de' principianti.

Due anni dopo negli atti dell'Accademia di Pietroburgo del 1728 si ha, che Daniele Bernoulli, e il suo commilitone Eulero nello sciogliere i grandi problemi indicati in Ermanno, aumentarono con nuove estensioni, e nuove difficoltà la gloria del successo, ed il dominio della scienza, come più volte si è detto.

Così pure la teorìa degli efflussi per orifizj di qualunque grandezza, restava sempre nell' imperfezione, allorchè Daniele Bernoulli, dopo alcuni felici tentativi, giunse a sottoporla ad un calcolo generale e rigoroso, con ammettere alcune ipotesi bastantemente conformi alla sperienza. Tale è l'oggetto del suo *Trattato d'Idrodinamica* pubblicato nel 1738. L'autore suppone 1.° che la superficie superiore d'un fluido, che esce da un' orifizio qualunque, rimanga sempre orizzontale: 2.° che dividendo la massa fluida in un' infinità di sezioni orizzontali, tutti i punti d'una medesima sezione si abbassino secondo la verticale colla medesima velocità reciprocamente proporzionale all'estensione della sezione: 3.° che tutte le sezioni conservando così il loro parallelismo, sieno sempre contigue, e non cangino velocità, se non che per gradi insensibili, alla maniera de' corpi pesanti. Avendo fissato questi fondamenti del calcolo, Daniele Bernoulli fa uso del principio, *che vi è sempre uguaglianza tra la discesa attuale del fluido nel vaso, e l'ascensione virtuale*: il che in altri termini vuol dire la conservazione delle forze vive. Con ciò egli arriva in un modo semplicissimo, ed elegantissimo alle equazioni del problema: ne applica le formole generali a molti casi particolari, utili nella pratica. Quando la figura del vaso non è sottoposta alla legge di continuità, o quando per qualche altra causa, si fanno de' cambiamenti bruschi, e finiti nella velocità delle sezioni; vi è una perdita di forze vive: e le equazioni fondate sopra la conservazione intera di queste forze hanno bisogno di essere modificate. Daniele Bernoulli mostra quì ancora la sagacità d'un geometra fisico, attento, ed avvezzo a seguire l'andamento della natura. Il calcolo non è mai per lui, se non che un' istrumento del bisogno, e non già un vano sfoggio di formole puramente teoriche. Qualunque sieno i progressi, che la scienza del moto delle acque abbia fatto dopo

l'epoca, in cui l' Idrodinamica di Daniele Bernoulli è comparsa inaspettatamente; la giusta posterità conterà sempre quest' opera pregevole tra le più belle, e più sensate produzioni del genio matematico.

Malgrado il successo luminoso, che essa ebbe sino dalla sua pubblicazione, Giovanni Bernoulli, padre dell'autore, e Maclaurin, giudicando che il principio secondario della conservazione delle forze vive, benchè vero per se stesso, non doveva essere impiegato immediatamente nella determinazione del movimento de' fluidi; risolverono il problema con altri metodi, d'altronde molto diversi tra loro, che riguardarono come più diretti, e più strettamente connessi colle prime leggi della meccanica. I loro principali risultati si trovarono conformi a quelli di Daniele Bernoulli. Ma rendendo giustizia ai loro metodi assai dotti, si sono notate in essi dalle oscurità, ed alcune supposizioni precarie. Non entrerò in questa discussione. L' Idraulica di Giovanni Bernoulli è stampata nel tomo IV delle sue opere, e nelle raccolte dell' Accademia di Pietroburgo per gli anni 1737 e 1738: la teorìa di Maclaurin fa parte del suo Trattato delle Flussioni.

Si è osservato, che i geometri si erano impegnati sino a questo tempo ne' più difficili problemi della manovra de' vascelli, senza aver molto esaminato le condizioni essenziali all'equilibrio di questa specie di corpi: condizioni, da cui dipendono nondimeno la sicurezza della navigazione, e nel tempo stesso tutti i vantaggi, che possono renderla pronta, e felice. Eglino pertanto ritornarono su i primi passi, e ripigliarono in qualche modo la scienza navale dalle fondamenta.

Si sapeva da lungo tempo che, affinchè un corpo solido, galleggiante sopra un fluido rimanga in equilibrio, fa d'uopo 1.° che il suo peso assoluto, e quello del fluido che esclude, sieno tra loro eguali: 2.° che il centro di gravità di questo corpo, e quello della sua parté sommersa, considerata come omogenea, sieno situati sopra la medesima linea verticale. Ma ciò non basta, per formare un' equilibrio solido e permanente. Daniele Bernoulli negli atti dell'Accademia di Pietroburgo del 1735 fece inoltre vedere, che considerate le diverse situazioni respettive, che i due centri di gravità possono avere sulla linea verticale, esistono diversi stati d'equilibrio, più o meno fermi. Allorchè il centro di gravità del sistema di tutte le materie, che compongono il carico d'un vascello, è situato sotto il centro di gravità della *Carena* ossia della parte sommersa; l'equilibrio è sempre fermo, e tende a ristabilirsi, se è stato turbato da qualche causa esterna: onde nell'agitazione delle ondate, nell'ineguaglianza degl' impulsi del vento ec. il vascello ritorna alla prima sua situazione con tanto più di energia, quanto il suo centro di gravità è situato più basso. Ma quando i due centri di gravità si confondono, o allorchè quello del naviglio è più elevato di quello della caena, l'equilibrio è *versatile*: e vieppiù versatile, a misura che questa elevazione aumenta. Daniele Bernoulli dà alcune formole, per valutare il grado di stabilit del vascello in tutti i casi. Sembra che Eulero avese trovato dal canto suo, e nel medesimo tempo de' risultati simili: egli li sviluppa, e li dimostra nella sua bell'opera intitolata: *Scientia navalis*, pubblicata nel 1749.

Daniele Bernoulli, singolare in ogni sua produzione, si distinse grandemente nello eliminare la velocità, o il tempo nell'unica equazione, che dà la legge *della conservazione delle forze vive* secondo il principio di Leibnizio, applicata essa legge a molti problemi di Dinamica, come vedemmo in Giovanni Bernoulli. Più dettagliatamente ancora si distinse Daniele Bernoulli nello spiegare il celebre fenomeno delle marèe. Poichè tutti sanno, che ne' mari vasti e profondi le acque ascendono, e discendono a vicenda, durante lo spazio di circa sei ore: di modo che in ventiquattr'ore vi sono due marèe, essendo ciascuna composta d'un flusso, e d'un riflusso. La forza del flusso fa retrocedere i fiumi, che si gettano nel mare: durante il flusso, le acque riprendono il di loro corso ordinario. Il fenomeno delle marèe accade ne' mari, e in tutti gli ammassi di acqua, come ne' laghi, golfi, fiumi ec. Peraltro assai sensibile è nel solo Oceano: e qualche volta ne' mari Mediterranei, le acque sforsate a passare in luoghi rinserati, manifestano i movimenti di flusso, e riflusso, come alla punta del golfo di Venezia: essi sono piccolissimi, e quasi nulli nella maggior parte della costa dei Mediterraneo.

I Cartesiani pretendevano, che la luna giunta al meridiano, gravitando su l'Atmosfera tra essa e la terra; facesse inalzare le acque del mare, e che queste ricadessero, quando la luna si abbassa: spiegazione precaria, e del tutto insussistente delle marèe, quasi che l'Atmosfera indicata sotto la pressione della Luna avesse de' punti d'appoggio, che le impedissero di dilatarsi, ed estendersi per ogni verso.

Essendo in oggi provatissima la gravitazione, ed attrazione reciproca tra tutti i corpi dell'universo; non v' ha più dubbio, che i movimenti di flusso, e riflusso del mare sieno prodotti dalle attrazioni della Luna, e del Sole, combinate col moto giornaliero di rotazione della terra intorno al suo asse. Poichè da ciò avviene, che la luna, la quale è attratta dalla terra, quando è giunta al meridiano, attrae anch' essa tutta la massa della terra, che fa d'uopo riguardare come raccolta interamente al suo centro. Quindi siccome le acque sono più vicine alla luna, che il centro della terra; così esse sono più attratte che il centro: ed in conseguenza devono, per così dire, abbandonare la terra, ed innalzarsi, lo che produce il flusso: per lo contrario, nel punto diametralmente opposto ossia agli antipodi del luogo attuale, le acque, come più lontane, sono *meno* attratte che il centro della terra, e per conseguenza devono sembrare *fuggire* questo centro, ovvero *elevarsi*: lo che produce ancora il flusso. Quindi, nell' uno e nell' altro luogo, il movimento del flusso è prodotto dalla differenza tra le attrazioni della luna sopra le acque, e sopra il centro della terra, e deve accadere nel medesimo tempo alle due estremità del diametro terrestre diretto verso la luna. In quanto al riflusso, esso accade quando la luna avendo passato il meridiano, la sua forza d'attrazione diminuisce, e lascia alla gravità propria delle acque la forza di abbassarle.

Ora tutto ciò che è stato detto relativamente alla luna, si applica egualmente al sole: e sottoponendo al calcolo le azioni, che questi due astri esercitano sopra le acque del mare, sia ch'esse si accrescano, o

che si distruggano in parte, si ottengono de' risultati conformi ai fenomeni: lo che è una nuova prova della gravitazione universale. Questa interessante materia è trattata con tutti i dettagli necessarj nelle tre eccellenti dissertazioni di Daniele Bernoulli, di Maclaurin, e d'Eulero, che divisero il premio, che l'Accademia delle scienze di Parigi aveva assegnato per la completa soluzione di questo problema, che il sommo geometra dell' Inghilterra Isacco Newton aveva solamente abbozzata.

CAPO SESTO

Delle insigni operazioni di Riccati, Taylor, Moivre, Nicole, e Fagnani, per l'avanzamento, ed ordinato sviluppo della nuova analisi: e delle grandi cose operate da Giacomo Cassini nell'Astronomìa.

Prima di passare più avanti, fa d'uopo avvertire la vera difficoltà di risolvere i problemi dipendenti dall' Analisi Infinitesimale: poichè vedemmo in Ermanno la fatica, che addossò questi a Giovanni Bernoulli nel secondo problema da lui proposto, tal che Bernoulli dovè stentarvi a diverse riprese: e trattare in fine la questione in un modo più diretto, e più analitico, con dare ad essa una nuova estensione.

V' è dunque un' osservazione generale a farsi sopra tutti i problemi in tal modo dipendenti dall' Analisi Infinitesimale: ed è, che si arriva d'ordinario assai facilmente a metterli in equazione: la principale difficoltà si è d' integrare queste equazioni: essa è sovente tale, che supera tutte le forze dell'Analisi. Laonde i più grandi geometri si sono occupati seriamente con studio indefesso a perfezionare il Calcolo Integrale, ossia l'integrazione delle equazioni differenziali di tutti gli ordini con fatica non piccola. Premesso ciò,

Il conte Giacomo Riccati nato nel 1690 e morto nel 1735, impegnatosi coll'indicata mira a perfezionare il calcolo integrale ossia l'integrazione delle equazioni differenziali di tutti gli ordini, per facilitare la soluzione dei problemi dipendenti dall' Analisi Infinitesimale, secondo l'esposto metodo di Ermanno, fondato sopra la teorìa dell'evolute; s'imbattè in una equazione differenziale del prim' ordine a due variabili. Era la medesima molto semplice in apparenza: ma non essendo riuscito ad integrarla nella sua generalità, propose la quistione ai geometri negli atti di Lipsia del 1725. Nessuno potè conseguire completamente lo scopo: ma si assegnò un gran numero di casi, ove le indeterminate sono separabili, ed ove per conseguenza l'equazione s'integra per le quadrature delle curve.

Anni di G. C. 1720

Gli autori di queste scoperte sono il conte Riccati medesimo, Nicolò Bernoulli nipote, Nicolò Bernoulli figlio, Daniele Bernoulli suo fratello, e Goldebach. Tutti arrivarono con metodi differenti ai medesimi risultati. Ordinariamente l'equazione, di cui si tratta, e chiamata: *L'equazione di Riccati*, quantunque essa fosse già stata considerata da Giacomo Bernoulli, che ne aveva integrati alcuni casi particolari: essa è nell'Analisi Infinitesimale ad un dipresso ciò che è la quadratura del cerchio nella geometrìa elementare. Allorchè un' equazione vi è ridotta, il problema si reputa come sciol-

to. Se l'equazione non cade ne' casi separabili, non si ha più altra risorsa, se non che di integrarla co' metodi di approssimazione.

Taylor nato nel 1685 e morto nel 1731, fu uno degli amici, e discepoli di Newton più animoso, e più valente, il quale si distinse tra loro più di tutti nel combattimento scientifico, che i medesimi continuarono contro i Geometri della Germania, quando abbandonò Newton il campo di battaglia, dopo di aver conosciuto dagli scritti di Giovanni Bernoulli, più ancora dalle soluzioni del di lui figlio, e del nipote, e da quella di Ermanno, che realmente la soluzione da esso data del problema propostogli da Leibnizio era insufficiente, e di niun' uso. Quindi è, che l'avveduto Taylor, senza punto fermarsi a svolgere la soluzione di Newton, ne diede una di proprio fondo, la quale soddisfaceva a tutta l'estensione della quistione, come da Leibnizio era stata proposta (Trans. filos. 1717). Se non avesse fatto altro, non si sarebbe meritato, che degli encomj: ma trasportato dal suo risentimento contro Giovanni Bernoulli, che aveva parlato di lui un poco leggermente in altra occasione; pose alla testa della sua soluzione alcune riflessioni ingiuriose contro i partigiani di Leibnizio, avendo principalmente in vista Giovanni Bernoulli loro capo: tra le altre cose diceva, che se eglino non vedevano come la soluzione di Newton conduceva alle equazioni del problema, bisognava ciò attribuire alla loro ignoranza: *illorum imperitiae tribuendum*. L'uomo, a cui si dirigeva questo strano insulto, non era punto sofferente, e ne trasse una vendetta la più umiliante per la vanità di Taylor.

Anni di G. C. 1720

In una dissertazione (Atti di Lipsia 1718) sopra le *Trajettorie Ortogonali*, composta in comune da Giovanni Bernoulli, e da Nicolò suo figlio, si cominciò a confessare, che la soluzione di Taylor era esatta, e che inoltre supponeva in lui della sagacità: ma in seguito si fece vedere, che essa non era in gran parte abbastanza generale, e che esistevano moltissimi casi risolubili, ai quali non poteva applicarsi. Nel medesimo tempo Giovanni Bernoulli diede un'altro metodo, che al vantaggio di essere incomparabilmente più semplice univa quello di abbracciare tutte le curve geometriche, tutte le curve meccaniche *completamente* simili, e finalmente moltissimé curve meccaniche *incompletamente* simili. Queste scoperte erano il prodotto di un'analisi profonda, nuova, e delicata. L'autore aveva tra le mani un' istrumento, che maneggiava con destrezza, il metodo di differenziare *de curva in curvam*. La sua vittoria non fu equivoca: e Taylor malgrado il tuono di sufficienza, che da principio aveva preso, fu costretto di riconoscere quì un superiore.

Noterò di passaggio, che gli autori di questa dissertazione riferiscono a questo medesimo argomento un piccolo scritto di Nicolò Bernoulli nipote, in cui trovasi, per la prima volta, il famoso teorema di condizione, da cui dipende la realità delle equazioni differenziali del prim' ordine a tre variabili: teorema che alcuni geometri moderni hanno cercato di attribuirsi.

Nel tempo che trattavasi la quistione delle Trajettorie, Taylor propose diversi problemi allora nuovi, e molto difficili sopra l' integrazione delle frazioni razionali (Mem. dell'Acc. 1702). Giovanni Bernoulli,

che aveva già dato alcuni saggi in questo genere, risolvè facilmente tutti questi problemi: e de' risultati, ai quali pervenne, formò una serie di teoremi curiosi (Atti di Lips. 1719), lo sviluppo, e le dimostrazioni de'quali esercitarono utilmente suo figlio e suo nipote.

Le animosità, che regnavano tra Giovanni Bernoulli, e Taylor, aumentavano ogni giorno. Oltre quella indicata in Giovanni sudetto (quando egli e Taylor ricondussero su la scena nel 1714 il famoso problema de' centri d'oscillazione risoluto da Huguens, e generalizzato da Giacomo Bernoulli) fa d'uopo avvertire, che sino dall'anno 1715 Taylor aveva pubblicato il suo libro intitolato: *Methodus incrementorum directa et inversa*: opera profonda, ed un poco oscura, nella quale l'autore, senza citare alcuno, aveva trattato molti problemi già risoluti (Atti di Lip. 1716). Nel 1716 comparve in lode di Giovanni Bernoulli una lettera, nella quale Taylor era apertamente tacciato da *plagiario*. Egli se ne dolse amaramente: ritorse l' accusa, facendo vedere, che Giovanni Bernoulli nell'ultima sua soluzione del problema degli Isoperimetri non aveva fatto altro, che travestire la soluzione di suo fratello, e tutte le semplificazioni, che vi aveva fatte, non ne cangiavano la natura. Allora Giovanni Bernoulli non serbò più riguardo alcuno: fece comparire sotto il nome di un certo *Burcard*, maestro di scuola in Basilèa, una risposta a Taylor, piena d' ingiurie e di facezie, in mezzo alle quali nondimeno s' incontrano alcune verità vantaggiose.

L'indicato problema delle Trajettorie ortogonali condusse a quello delle Trajettorie reciproche proposto in fine della dissertazione de' Bernoulli padre, e figlio. Si domandavano le curve, che essendo costruite in due direzioni contrarie sopra il medesimo asse dato di posizione, poi venendo a muoversi parallelamente a se stesse con velocità ineguali, si tagliassero costantemente sotto il medesimo angolo dato. Fu questo un nuovo argomento di difficoltà analitiche da vincere, e di estensione per la scienza. Esso fu per molto tempo agitato tra Giovanni Bernoulli, ed un Inglese anonimo, che si seppe dappoi, essere stato il celebre dottore Pemberton, amico particolare di Newton. Noi siamo quì ancora obbligati di dire, che Giovanni Bernoulli mantenne con decoro la sua superiorità, per la singolare semplicità ed eleganza delle sue soluzioni.

I geometri inglesi Taylor, ed altri avevano formata una lega contro Giovanni Bernoulli, e lo assalivano sopra ogni sorte di argomenti. Solo, dice Fontenelle, come il famoso Orazio Coclite, sosteneva sul ponte tutto lo sforzo della loro armata. Keil, soldato più ardito che valente, credette di aver trovata l'occasione d'invilupparlo. La teorìa della resistenza de' mezzi al movimento de'corpi, che li traversano, formava una parte considerabile del libro *De' Principj*. Newton aveva determinata la curva, che descrive un projettile in un mezzo resistente come la velocità semplice: ma non aveva toccato il caso allora più difficile, in cui il mezzo resiste come il quadrato della velocità. Keil propose questo caso a Giovanni Bernoulli, che non solo lo risolvè in pochissimo tempo, ma estese altresì la soluzione all' ipotesi generale, in cui la resistenza del mezzo fosse come una potenza qualunque della ve-

locità del mobile. Trovata questa teorìa, l'autore offrì a diverse riprese di mandarla ad un' uomo di confidenza in Londra, sotto la condizione, che Keil rimetterebbe anch' egli la sua soluzione: ma Keil, benchè vivamente interpellato, serbò un profondo silenzio. La ragione era facile ad indovinarsi: egli non aveva punto risoluto il suo problema nel proporlo si aspettava, che nessuno troverebbe ciò che era sfuggito alla sagacità di Newton. Egli restò crudelmente ingannato nella sua congettura: e la sua sfida, più che indiscreta, gli tirò addosso, per parte del geometra di Basilèa, una riprensione tanto più pungente, in quanto che il solo mezzo di rispondere solidamente era quello di risolvere il problema, e che Keil non potè trovare questo mezzo nè colle proprie forze, nè col soccorso de' suoi amici, e di altri geometri inglesi Taylor ec. Il trionfo di Giovanni Bernoulli fu completo. Nella prima ebbrezza della sua vittoria egli si abbandonò contro i suoi rivali a sarcasmi, ed a facezie, che non erano di buon gusto: ma certamente perdonabili al carattere franco e leale d' un' uomo assalito insidiosamente, che aveva da vendicare gli oltraggi fatti a sè medesimo, e ad un'illustre amico, di cui piangeva tuttavia la perdita.

Queste dotte contese fissavano l'attenzione di tutti i geometri: e malgrado l'asprezza, che vi frammischiavano le umane passioni, riscaldavano gli spiriti, e facevano nascere da tutte le parti nuovi animosi proseliti alla coltura delle Matematiche.

Intanto fa d'uopo avvertire, che sebbene in questa guerra, e letteraria disfida de' geometri inglesi contro Giovanni Bernoulli restarono dal medesimo abbattuti, e che il libro di Taylor intitolato: *Methodus incrementorum directa, et inversa* fosse da lui assai criticato; dobbiamo nondimeno confessare, esser d'esso un'opera celebre anche al presente, nella quale l'Autore chiama *incrementa* o *decrementa* delle quantità variabili, le differenze finite o infinitesime di due termini consecutivi nella medesima serie formata secondo una data legge. Allorchè queste differenze sono infinitesime, il di loro calcolo, diretto o inverso, appartiene all'Analisi Leibniziana, ossia al Metodo delle flussioni: e Taylor risolvè moltissimi problemi di questo genere. Ma quando le differenze sono finite, il metodo di trovare i rapporti, che esse hanno colle quantità che le producano, forma un nuovo ramo di calcolo, di cui Taylor ha dato i primi principj: ed a questo riguardo il suo libro è originale. Egli ha sommato in questo modo alcune serie curiosissime. L'estrema concisione, o piuttosto l'oscurità, colla quale è scritta quest'opera ritardò per molto tempo il successo, che doveva avere.

Taylor aveva determinato nello stesso suo libro la curva, che forma una corda vibrante tesa da un dato peso, supponendo 1.° che la corda nelle sue maggiori escursioni poco si allontani dalla direzione rettilinea dell'asse: 2.° che tutti i suoi punti arrivino nel medesimo tempo all'asse. Egli trovò, che questa curva è una trocoide allungatissima: indi assegnò la lunghezza del pendolo semplice, che fa le sue oscillazioni nello stesso tempo, che la corda vibrante fa le sue. Era questo allora un problema nuovo, ed originale. Parecchi altri geometri lo hanno trattato, seguendo i medesimi dati. La prima supposizione, che le escursioni della

corda da ambe le parti dell' asse rimangano sempre piccolissime, è sufficientemente conforme allo stato fisico delle cose: altronde essa è la sola, che si possa sottomettere al calcolo, anche nello stato attuale dell' Analisi. In quanto alla seconda, che tutti i punti della corda arrivino nel medesimo tempo all' asse, essa è assolutamente precaria, e bisognerebbe liberare il problema da questa limitazione. D' Alembert ha trovato una soluzione, che ne è indipendente (Acc. di Berlino 1747). Egli ha determinato direttamente, ed *a priori* la curva, che forma in ciascun' istante una corda vibrante, senza fare altra supposizione, se non che ne'suoi maggiori scostamenti, poco si allontani dall'asse. La natura di questa curva è da principio espressa da una equazione di second' ordine, un membro della quale è il differenziale secondo dell' ordinata, preso col far variare soltanto l'ascissa, e col supporre il suo differenziale costante. Laonde soddisfacendo successivamente a queste due condizioni, si risale ad un equazione finita di tal natura, che l'ordinata ha per valore l'aggregato di due funzioni arbitrarie, una della somma dell'ascissa, e del tempo, l'altra della loro differenza. Si rileva, che per mezzo di questa equazione, date due qualunque delle tre variabili, l'ordinata, l'ascissa, ed il tempo, si conoscerà la terza, e tutte le circostanze del movimento della curva.

Eulero colpito dalla bellezza di questo problema, si è in esso occupato per lunghissimo tempo, e vi è ritornato a più riprese nelle memorie delle Accademie di Berlino, di Pietroburgo, e di Torino. Malgrado la conformità, che si trova tra i risultati de'due grandi geometri, che ho citati, eglino ebbero insieme una lunga disputa sopra l'estensione, che si poteva dare alle funzioni arbitrarie, che entrano nell' equazione della corda vibrante. D'Alembert voleva, che la curvatura iniziale della corda fosse assoggettata alla legge di continuità: Eulero la credeva assolutamente arbitraria, ed introduceva nel calcolo delle funzioni discontinue. Altri geometri hanno pensato, che questa discontinuità delle funzioni poteva essere ammessa, ma che essa doveva essere sottoposta ad una legge, e che bisognava, che tre punti consecutivi della curva iniziale appartenessero sempre ad una curva continua. Ma fin quì non sembra, che alcuno abbia dato delle prove interamente dimostrative della sua opinione, dice Bossut: e soggiunge che non doveva far maraviglia; perchè siffatta quistione dipende da alcune idee metafisiche: ed i problemi di meccanica, o di pura analisi, ai quali fu applicato questo nuovo genere di calcolo, non avevano ancora somministrato alcun mezzo di discernere tra queste differenti opinioni quella, che dava risultati conformi, o contrarj alle verità già riconosciute, e confermate universalmente da tutti.

Senza prendere alcun partito in questa disputa, (Acc. di Berlino 1753) il celebre Daniele Bernoulli fece i più grandi elogj ai calcoli di D'Alembert, e di Eulero: ma nel tempo stesso intraprese a far vedere, che la corda vibrante forma sempre, o una trocoide semplice, quale viene data dalla teorìa di Taylor, o un'aggregato di queste trocoidi: e che tutte le curve determinate dal D'Alembert, e da Eulero non potevano essere ammesse, e non erano realmente applicabili alla

natura, se non in quanto che erano riducibili ad una forma siffatta. Questa discussione gli diede luogo di esaminare a fondo la fisica formazione del suono, che allora non si conosceva, se non che assai imperfettamente. Egli spiega, per esempio, con tutta la chiarezza possibile, come una corda posta in vibrazione, o in generale come un corpo sonoro qualunque può rendere ad un tempo più suoni differenti, componenti il medesimo sistema. Ma ammirando la sua perizia nel semplificare l'argomento, e nel presentare l'appoggio dell'esperienza ai suoi ragionamenti, i geometri convengono, che la sua soluzione è meno generale, e meno perfetta di quella dei due suoi rivali. Di fatti queste ultime (qualunque estensione si voglia ad esse attribuire) sono fondate sopra un genere di calcolo incontrastabile, e contengono come caso particolare la soluzione generale di Daniele Bernoulli. Lo stesso deve dirsi relativamente al problema della propagazione del suono, che è della stessa natura di quello delle corde vibranti, ed al quale Eulero, e Daniele Bernoulli hanno egualmente applicato ciascuno i loro metodi particolari.

I veri punti di vista, sotto i quali Eulero ha ravvisato e presentato il calcolo integrale alle differenze parziali, hanno fissato la sua vera natura, e fatto conoscere le applicazioni, di cui è suscettibile in una moltitudine di problemi fisico-matematici. Finalmente egli ne ha sviluppato a fondo il metodo, e dato l'algoritmo in un' eccellente memoria intitolata (Acc. di Pietroburgo 1762): *Investigatio functionum ex data differentialium conditione.* Laonde alcuni geometri riguardano Eulero, se non come il solo, almeno come il principale inventore del calcolo, di cui trattasi: ma non bisogna dimenticarsi, che D'Alembert il primo ne ha fatto un'applicazione importante ed originale, che ha dato delle aperture ad Eulero, come egli medesimo ne conviene. Laonde conchiude Bossut, che questi due illustri geometri D'Alembert, ed Eulero abbiano presso a poco un'egual diritto alla gloria di sì bella scoperta.

Nicole geometra francese assai distinto, nato nell' anno 1683 e morto nel 1758, ebbe il vanto di esser giunto il primo ad intendere il *Metodo degli Incrementi* estremamente conciso, ed oscuro di Taylor. Egli sviluppò chiarissimamente il metodo per l'integrazione delle differenze finite, e vi aggiunse molte nuove serie di sua invenzione. Le due eccellenti memorie, che pubblicò sopra questo argomento nella raccolta dell' Accademia delle scienze di Parigi, una nel 1717, e l'altra nel 1728, possono riguardarsi come il primo Trattato elementare, metodico, e luminoso, che sia comparso del Calcolo Integrale alle differenze finite. Anni di G.C. 1720

Nicole diede ancora il metodo, per trovare l'espressione generale della rettificazione delle epicicloidi sferiche, e per determinare in seguito i casi, in cui queste curve diventano algebriche, e rettificabili.

Si potrebbero citare molte altre opere di quel tempo: ma bisogna esser breve, sul riflesso altresì, che le altre molte cose di Nicole, sparse nelle altrui opere, nelle collezioni accademiche, e nei giornali di Germania, di Francia, d' Inghilterra, e d' Italia, benchè sieno memorie preziose, poco o nulla peraltro contribuiscono al vero progresso delle matematiche.

Abramo de Moivre, nato nell'anno 1668 e morto

Anni di G.C. 1720 nel 1754, tre anni dopo la pubblicazione *Dell'analisi de' giuochi di azzardo* di Montmort, fece comparire sopra il medesimo argomento un piccolo Trattato, che intitolò: *Mensura sortis*. È d'esso principalmente notabile, in quanto che contiene gli elementi, ed alcune ingegnosissime applicazioni della teorìa delle serie ricorrenti. Questo saggio, accresciuto successivamente dalle riflessioni dell'Autore, è divenuto un'opera insigne, ammirata da tutti i geometri. La migliore edizione, che allora ne fu fatta, è quella del 1737 in inglese, sotto il titolo: *Doctrine of Chances*. Egli è noto, che Moivre era un geometra francese, che la rivocazione dell'editto di Nantes aveva costretto a spatriare: e si era ritirato a Londra. Ivi, benchè nato con un talento superiore per la geometrìa, nondimeno il cattivo stato della sua fortuna l'obbligava a dare lezioni di Matematica per vivere. In seguito le sue produzioni analitiche lo accreditarono fra gl' illustri geometri. Tale in fatti si dimostrò nella sua *Miscellanea Analytica*, opera assai stimata, ed in una memoria inserita nelle *Transazioni Filosofiche* dell'Accademia di Londra per l'anno 1698: memoria che fu molto gradita, ed encomiata, di cui il Franchini fa un piccolo rilievo assai pregevole.

Ma l'opera veramente stimata e degna di molta lode del Signor Moivre è la sua *Mensura sortis*: *Doctrinae of Chances*, Dottrina degli azzardi, tradotta, ed arricchita di note, e di giunte dal Padre Gregorio Fontana, e ristampata in Milano dal Galeazzi nel 1776.

Il Franchini nella sua Biografia, dopo di avere avvertito, essere la citata opera di Moivre un libro molto ingegnoso, e generalmente apprezzato, per cui dice, che si astiene volentieri dal farvi qualunque critica osservazione; pure non manca di farvi un rilievo giustissimo, che va onninamente osservato dagli amatori di tal dottrina. Avvertiamo noi intanto, che Newton aveva pel Sig. Abramo de Moivre Di Vitry nella Sciampagna la più alta stima. Si racconta che, quando ne' dieci, o dodici ultimi anni della vita di esso Newton si andava a domandargli alcune spiegazioni sopra le sue opere, egli rimetteva i consultanti a Moivre, dicendo: *Vedete il Signor Abramo de Moivre: egli sa tutte queste cose assai meglio di me.*

Giulio Carlo Fagnani conte, e marchese morto nell' anno 1766 nacque nel 6 Dicembre del 1682 da Camilla Bartolini, e Francesco Fagnani degli antichi Signori di Castel Fagnano di Sinigallia in oggi SINIGAGLIA, fortunata patria del Supremo Gerarca, e Sommo Pontefice l'immortal PIO IX felicemente regnante, esemplare e modello perfettissimo de'veri Sovrani, la di cui fama gloriosa combatterà vittoriosamente coi secoli de'secoli, senza esser mai lesa dal tempo edace, che tutto rode, e consuma: essendo egli un Principe amantissimo, il quale intimamente persuaso di quel grande attributo, di cui si gloria Iddio, come Principe de'Principi: SALUS POPULI EGO SUM (1); altro non medita, che la salute, la pace, e la felicità de'popoli: unico, e vero principio, che consolida gl' Imperi, e li fa combattere trionfantemente col tempo, e gareggiare coll'eternità: mentre non si dà vera fermezza stabile de' Regni, e sicurezza certa

Anni di G. C. 1720

(1) *Salus populi ego sum, dicit Dominus: De quacumque tribulatione clamaverint ad me, exaudiam eos, et ero illorum Deus in perpetuum. Eccl.*

de' Regnanti, senza l'amore de' sudditi, che nasce soprattutto dall'utile di vedersi ben governati: e poichè ama, e benefica PIO IX i suoi sudditi per solo principio di sua innata bontà di un cuore magnanimo, e ben fatto, quale ho io ravvisato costantemente in esso ne' due anni, che ho avuto la bella sorte di viaggiare seco lui in America; posso quindi con franchezza assicurare, che come sarà costante PIO IX nel beneficare i suoi sudditi estesi in tutto l'orbe cattolico, così sarà riamato anch'egli dai medesimi: e fiorirà in tal guisa una felicità reciproca, finchè ce lo conserverà la bontà di Dio in vita, quale gli auguro pel pubblico bene felicissima per tutti gli anni accordati agli antichi Patriarchi pria del Diluvio Adamo, Noè ec. Nè fia mai, o amatissimo Principe, che abbiano ad arrestarla, o a scoraggirla le opposizioni de' contrarj, sapendo bene la Santità Vostra, che le grandi operazioni sono quasi sempre contrariate. Le annunziai francamente poco prima che entrasse Ella in Conclave, che il popolo Romano, di cui udiva io le voci, La desiderava Sommo Pontefice: e nel vederla altamente SGOMENTATA a tal mio annunzio cordiale, Le dissi ancora, che la voce del popolo era quella di Dio: e soggiunsi tosto, conoscendo io bene la sua idoneità al Pontificato: E SE DIO PER BENE DEL SUO POPOLO LA VOLESSE A SUO SOMMO PONTEFICE? Vostra Santità, chinò allora saviamente la testa: e quando Le augurai tosto nel Pontificato gli anni di S. Pietro *duplicati*: mi rispose anche più saviamente, che quando si fosse servito Dio e il suo popolo pienamente, null'altro desiderava. Dio dunque, che ha udito le voci del suo popolo, Lo ha eletto qual'altro Mosè, onde lo feliciti, e lo conduca alla Terra Promessa del Santo Paradiso: e non deve per questo arrestarsi. Venendo unicamente da Dio la sua elezione, da lui riceverà anche i lumi, e le forze, onde perfezionarne le altissime ingerenze. *Omne datum optimum, et omne donum perfectum de sursum est, descendens a Padre luminum, apud quem non est transmutatio, nec vicissitudinis obumbratio* (1). Dio ha cominciato per Suo mezzo la grande opera della felicitazione dell'amato suo popolo esultante, e Dio per Suo mezzo la perfezionerà. *Confidens hoc ipsum, quia qui caepit in vobis opus bonum, perficiet usque in diem Christi Jesu* (2): *confirmabit, solidabitque* (3).

Ma dove mai nell'entusiasmo universale mi trasportano l'amore del pubblico bene, e il mio speciale attaccamento rispettoso verso un Principe adorabile? Non sono più io ne' limiti della mia semplice Cronaca dell' origine, e progressi delle Matematiche: e nel tornare ad essa, prego il mio benevole lettore a compatirmi. Giacchè il mio innato amore del pubblico bene, che mi fa dare alla luce la presente mia Cronaca, mi ha anche trasportato a questa utile digressione, nel nominare l'eccelsa patria del Sommo PIO IX. E tornando ora allo scopo, fo tosto notare, che

Il gran conte Fagnani, quanto onorato, e nobile per elevatezza de' suoi natali, altrettanto più rispettabile, e più nobile per singolarità di dottrina nelle Matematiche specialmente, egli come si ha dai giornali d'Italia del 1718, insegnò sin da quest' anno a determi-

(1) Epistola Cath. B. Jacob. Ap. cap. 1. v. 17.
(2) *Epist. B. Pauli Ap. ad Philipp.* cap. 1. v. 6.
(3) Epist. 1. B. Petri Ap. cap. 5. ver. 10.

nare degli archi d' ellisse, e d' iperbola, che hanno per differenza una quantità algebrica (Giorn. d' Italia 1718). Leibnizio, e Gio. Bernoulli, che avevano tentato questa ricerca, giudicarono, ch'essa non poteva essere sottoposta ai nuovi calcoli: eglino avevano soltanto risoluto la quistione per la parabola, ma con far' uso del calcolo algebrico ordinario: essa è pure risoluta col medesimo mezzo nel Trattato delle *Sezioni Coniche* del Marchese dell'Hopital. Fagnani applicò con molta perizia il Calcolo Integrale agli archi d'ellisse, e d' iperbola, il che comprende la parabola, come un caso particolare. Il suo metodo consiste nel trasformare il polinomio differenziale, che rappresenta l'arco elementare ellittico, o iperbolico in un' altro polinomio negativamente simile: laonde colla sottrazione, e coll'integrazione susseguente, risulta una quantità algebrica. La gloria d'avere scavato quest' angolo della geometrìa, se così è lecito di esprimermi, ha collocato Fagnani nel posto degli analisti i più acuti.

Molto tempo dopo, avendo Eulero considerato la stessa materia, giunse non solo a risolvere i problemi di Fagnani in un modo nuovo, ma si sollevò ancora ad un metodo, per integrare una classe molto estesa di equazioni differenziali separate, i due membri delle quali, non essendo integrabili ciascuno in particolare, formano nondimeno un tutto assolutamente integrabile. Si sapevano integrare delle equazioni di questa specie, allorchè i due membri dipendono nel medesimo tempo dagli archi di cerchio, o dai logaritmi. Le nuove integrazioni d' Eulero sono molto più estese: esse formano un nuovo ramo utilissimo, ed importantissimo del Calcolo Integrale: l'autore vi spiegò tutte le risorse del genio, e della scienza analitica la più profonda.

A questi lavori d'Eulero essendosi uniti altri consimili del Landen, e di Lagrange; poterono le scoperte del Fagnani così ampliate, e perfezionate servire di base alla gran Teorìa delle funzioni ellittiche di Legendre: e questa Teorìa fu elevata quindi al più alto grado per le immense fatiche dell' illustre Abel di Cristianìa, e del sommo geometra Signor Jacobi.

Oltre l' indicate operazioni singolarissime del Fagnani, ne fece egli altre molte, le quali sebbene non sempre contenevano nuovi ritrovati di scienze esatte, erano peraltro siffattamente pregevoli, che lo posero in altissima stima tanto in Italia, che altrove presso i primi Matematici del suo tempo, i quali rilevasi dal di loro carteggio, che si misero in corrispondenza letteraria col medesimo. Per esempio Guido Grandi fu a visitarlo in Sinigaglia, e contentissimo di averne fatta la conoscenza, comunicava quindi con esso, interpellandolo spesso su varj punti matematici, e sempre con sua piena soddisfazione, com' ei diceva. Anche Boscovich si recò a fare la conoscenza personale del Fagnani in Sinigaglia: e ne concepì tanta stima, che scrisse di lui: *essere troppo bramoso d' imparare da un uomo di tanta fama, che in tutte le cose, che ha messo fuora, ha dato tanto da imparare anche ai più sperimentati nell' Analisi.* Lagrange sommo matematico Italiano stimava tanto il Fagnani, che non pubblicava cosa alcuna di tante sue pregevolissime produzioni, se non ne aveva prima inteso il preciso parere, e l'approvazione del medesimo, con cui si carteggiò costan-

temente. L'immortal Fontenelle, Segretario allora inamovibile dell' Accademia delle Scienze di Parigi, con lettera autografa del 30 Novembre 1722 scrisse a nome di quel Consesso rispettabilissimo al nostro Fagnani così. *Uno de'nostri Matematici ha reso conto alla Società del vostro merito scientifico: egli era bene istruito sulla disputa geometrica col Signor Nicolò Bernoulli . . . . . L'Accademia si terrà sempre avventurata di potervi numerare fra quelli, ai quali darà i suoi suffragi.*

E per tacere di tanti altri, i tre Padri rispettabilissimi, grandi letterati, e più grandi Matematici di professione ancora, Boscovich, Le Seur, e Jacquier sottomisero al giudizio del Fagnani il progetto, che presentarono al Sommo Pontefice Benedetto XIV da lui ad essi commesso, onde riparare con cerchiatura di ferro le rovine, che minacciava la gran Cupola del Tempio di San Pietro in Vaticano: progetto di lavorazione, che avvalorato da serie riflessioni di esso Fagnani, venn'eseguito secondo le modificazioni del medesimo.

Ecco l' onorifica lettera, che gli fece dirigere il lodato Pontefice a suo nome da Monsignor Antonelli Segretario di Propaganda ». Minacciando rovina la cu-
» pola del Vaticano, il Santo Padre, dopo averne in-
» teso gli Architetti, ha voluto sentirne il parere de'
» Matematici. Quindi da tre religiosi versati in tal fa-
» coltà si è fatta una scrittura, che è stata già trasmes-
» sa a diversi uomini dotti nelle predette scienze: ed
» essendo in quel numero la persona di Vostra Signo-
» rìa, avendo lunedì avuto discorso su di ciò colla
» Santità Sua; mi ha Ella ordinato di trasmettergliela,

» onde si contenti leggerla nella sua diligenza, e col
» suo profondo sapere, ed elevato intendimento dare
» il suo sincero sentimento ».

Il voto del Fagnani fu, come s' indicò talmente dotto, e ragionato, che lo rese più che mai rispettabile al Principe, ed a Roma nel dotto consesso del Manfredi, del Galliani, del Poleni, e di altri molti dello stesso merito: e nel premiare la pontificale munificenza il marchese Poleni di mille scudi d'oro, di una scatola col suo ritratto, e di una pensione a favore del figlio; significò a Monsignor Antonelli, che bramando il conte Fagnani di pubblicare la sua Opera di Matematica, se l'avesse fatta spedire immantinente, ed approvata che fosse dai Padri Le Seur, e Jacquier, l'avesse fatta subito stampare, e pubblicare dal Pagliarini a spese dell' Erario Pontificio.

Essendo la voluminosa opera del Fagnani sommamente pregevole al suo tempo, come lo è in parte anche al presente; i due Censori, dopo averla attentamente letta, ed esaminata ognuno da sè, ne diedero sin dal 1744 una piena approvazione al prelodato Antonelli, che non mancò quindi di praticare le dovute attenzioni, come benevolo protettore, ed amico del Fagnani. Ma il fatto è, che la stampa della detta opera non fu mai fatta in Roma, per gl' intrighi forse di qualche malevolo, come fu detto, e non già per la molta spesa di migliaja di scudi, stante la notissima munificenza, e generosità *sovrana* di Benedetto XIV, il quale, anche ad un qualche atto di ossequio speciale a lui fatto da alcuno de' suoi amici distinti, soleva rispondere generosamente *Esto Comes*: dichiarandolo così *Conte* per complimento.

Fagnani, per appagare le proprie brame, e quelle di altri primi Matematici suoi amici, di vedere stampata, e pubblicata la sua Opera, ne ritirò il manoscritto da Roma, e lo fece subito stampare in Pesaro nel 1750 con lettera dedicatoria al lodato Benedetto XIV, e coll' indicata approvazione dei due Censori da esso Pontefice deputati, stesa dal P. Le Seur, come il più dotto e più stimabile di essi in questi termini. *Manuscriptum volumen, cui titulus*, generalis proportionum geometricarum theoria cum aliis scriptis mathematicis, auctore comite Julio Carolo de Fagnanis, *legi diligentissime. Illustris. auctor pluribus jam editis dissertationibus orbi erudito notus, tria potissimum hoc suo opere complexus est: videlicet proportionum theoriam, triangulorum rectilineorum proprietates, et plura ad calculum finitarum infinitarumque spectantia. A quibus, omnium fere veritatum mathematicarum quae paulo altioris sunt indaginis, inventio atque demonstratio pendent. Plurima et maxime universalia theoremata invenit proprio marte: quae ab aliis jam erant inventa, aut ad majorem universalitatem adduxit, aut suis propriis sedibus restituta novis demonstrationibus munivit: ubique veterum demonstrandi rigorem cum recentiorum perspicuitate conjunxit. Totum igitur opus tum ob praeclara inventa quae continet, tum ob methodum accuratissimam, tum ob demonstrationum veritatem ac copiam, rerumque usum amplissimum, luce publica dignissimum judicarem.*

Questa egregia dichiarazione della grand' Opera di Fagnani fatta meritamente da due celebri Matematici dell' Istituto di Francia mandati dal Re come un dono al Sommo Pontefice, che lo aveva pregato di un valente Matematico teorico, e meccanico per gl' indicati ripari della Cupola di San Pietro, e il merito intrinseco di essa opera la fecero spargere a volo in tutta l' Europa, ed altrove: ed una infinità di congratulazioni, e di lodi furono dirette da ogni parte all' Autore, che venne ascritto con diplomi onorevoli a tutte le prime Accademie di Pietroburgo, di Berlino ec.

E poichè l'ingenuo conte Fagnani, benchè fosse intimamente persuaso del sommo pregio della sua grand' Opera; pure nel vederne ritardata per più anni la stampa, dopo tante premure mostrate dal Pontefice, e dall' Antonelli di volerla subito stampare a vantaggio del pubblico, dubitò di qualche seria imperfezione della medesima, e con lettera obbligante pregò ad averne contezza dall' ingenuo Padre Jacquier, il quale chiuse la sua bella risposta così: *sono tanto persuaso della sua profonda dottrina, che stimerò promovere il bene pubblico, promovendo l'edizione della sua dottissima Opera* ec. E per tacere di tante altre consimili testimonianze dirette al Fagnani dai primi Matematici dell'eccellenza della di lui Opera appena fu pubblicata, ecco come parlò di essa il massimo de' Matematici Italiani Lagrange nella sua lettera stampata del 23 luglio 1754 contenente *una nuova serie pei differenziali, ed integrali di qualsivoglia grado corrispondente alla Newtoniana per le potestà, e le radici* » Sa bene, *diceva egli*
» *del Fagnani, dopo di averlo chiamato Matematico*
» *celebratissimo*, sa bene tutto il mondo letterato (co-
» me le sottili sue opere, ed i grandissimi applausi
» dalle più celebri Accademie ricevuti lo attestano)

» che a lui basta il proporsi a snodare qualunque più
» riposto arcano delle Matematiche, per comprenderne
» tosto in uno (*ossia insiememente*) e lo scioglimen-
» to, e le conseguenze »: espressioni vivissime, per notare la somma penetrazione del Fagnani nei più difficili arcani, e Teoremi delle Matematiche sublimi. Quasi tutte le lettere del Sommo Lagrange dirette al Fagnani sono dello stesso tenore, come d'un' affezionato discepolo al suo amato maestro. In quella, per esempio, *a stampa* del 31 luglio detto 1754, lo pregava dicendo: » mi faccia partecipe di qualcuna delle tante
» produzioni, che va tuttavia facendo il suo sottilis-
» simo ingegno: chè questo oltre che me lo recherò
» a onor sommo, mi sarà grato che niente più: giac-
» chè *altro diletto, che imparar, non ho.*

Termino il piccolo Commentario di Fagnani coll' avvertire, essere la di lui grand' Opera tanto chiara, e precisa, che può intenderla ognuno da sè: e mi astengo perciò di riferire l'accurato estratto, che egli ne fece, qual giudice imparziale di sè stesso, onde farla conoscere, prima che si stampasse, alle tre insigni Accademie di Parigi, di Berlino, e di Pietroburgo. Non ho potuto però astenermi dal rintracciare tante piccole notizie, per far conoscere ai giovani un'uomo sì grande, che andò a rintracciare anch' egli l' ignoto angolo della geometrìa, onde riuscire a presentarci la sua nobile scoperta consistente, come s' indicò da principio, nell'aver'egli dimostrato 1.° che in ogni ellissi, od iperbola si possano sempre assegnare in un' infinità di modi due archi, la differenza de' quali sia uguale ad una quantità algebrica: 2.° in dimostrare nello stesso tempo, che la lemniscata di Bernoulli gode di questa prerogativa singolare, che i suoi archi possono essere moltiplicati, o divisi algebricamente, come gli archi del circolo, quantunque ciascuno di quelli sia un trascendente di un' ordine superiore. Scoperta, che fece tanto strepito: atteso che Leibnizio, e Gio. Bernoulli avevano dichiarato, non esser possibile di ottenerla coi nuovi calcoli dell'Analisi, come è riuscito al Fagnani. Onde conchiudo francamente, che Fagnani fu allora ne'calcoli della nuov'Analisi il Principe di tutti gli Analisti, il quale non riconosceva altro Analista superiore a sè. Poichè i due primi Analisti furono Leibnizio, e Newton. Superato, come vedemmo, Newton da Giovanni Bernoulli; restarono primi Analisti Leibnizio, e Gio. Bernoulli. Avendo quindi l'elevatissimo Fagnani superato Leibnizio, e il Bernoulli; restò egli solo primo Analista tanto in Italia, che altrove. Ed oh! fortunatissima Sinigaglia, che ha saputo dare al mondo due sommi Principi, l'insigne Fagnani come maestro nelle scienze esatte, e l'impareggiabile PIO IX, che colla sua clemenza felicita i sudditi, ed insegna ai Sovrani il vero modo di farsi amare stabilmente col tenere insieme unite la giustizia, e la pace, e col far prevalere, tutte le volte che si può, al rigore la clemenza: ad imitazione di Dio, il quale c' insegna una tal pratica, coll'anteporre spesso anch'egli alle asprezze della pena le attrattive della misericordia.

Giacomo Cassini, nato nel 1677 e morto nel 1756, figlio del famoso Gian-Domenico Cassini, di cui si è parlato nel capo decimo del terzo volume, istruito dal suo padre nelle matematiche, si acquistò grandissima Anni di G. C. 1720

riputazione in particolare nell'astronomìa. Considerando questi due grandi astronomi l'oscillazione della Luna intorno al suo centro detta *la librazione di essa*, vale a dire il movimento di rotazione intorno ad un asse, attribuito da Galileo alla luna nello stesso tempo che gira la medesima intorno alla terra; ne penetrarono talmente la natura, che furono eglino i primi, i quali ci diedero di questi movimenti della luna una spiegazione completa, ed esatta, conforme alle osservazioni: ed adottata perciò meritamente da tutti gli astronomi. Essa è esposta da Giacomo Cassini nelle memorie dell'Accademia delle scienze di Parigi per l'anno 1721, e ne'suoi *Elementi d'Astronomìa* del 1740. Secondo questo autore, la librazione della Luna è prodotta dalla combinazione di due movimenti, uno de' quali è la rivoluzione della Luna intorno alla terra, l'altro è il suo movimento di rotazione intorno ad un' asse, coll'assoggettare quest' ultimo movimento alle condizioni seguenti.

1.° L'asse di rotazione della Luna è inclinato di 87 gradi e mezzo sul piano dell'ecclittica, e di 82 gradi e mezzo sul piano dell'Orbita Lunare: di modo che il piano dell'equatore del globo della luna fa un'angolo di due gradi e mezzo col piano dell'ecclittica, ed un'angolo di sette gradi e mezzo col piano dell' orbita Lunare.

2.° I poli del globo della luna sono situati sopra la circonferenza del cerchio, che formasi, tagliando in ciascun'istante questo globo con un piano parallelo al cerchio massimo celeste, che passa pei poli dell' ecclittica, e per quelli dell'orbita lunare. Si può chiamare questo cerchio *il Coluro della Luna*, per la stessa ragione, che chiamasi *Coluro dei solstizj* il cerchio massimo, che passa pei poli dell'ecclittica, e per quelli del cerchio equinoziale.

3.° Il globo della luna gira intorno al suo asse, secondo l'ordine delle linee, ossia d'Occidente in Oriente, nello spazio di 27 giorni e 5 ore, con un periodo eguale a quello del ritorno della Luna al nodo della sua orbita coll'ecclittica. Questo movimento è analogo alla rivoluzione, che la terra fa intorno al suo asse, secondo l'ordine delle linee, ritornando al medesimo coluro nello spazio di 23 ore, e 56 minuti.

Da queste supposizioni risulta in generale, che prolungando col pensiere l'asse del globo della Luna sino al cielo, le estremità di quest' asse ci sembreranno descrivere intorno ai poli dell'ecclittica, da cui sono distanti due gradi e mezzo, due cerchi polari d'Oriente in Occidente in 18 anni e 7 mesi, nel medesimo tempo, e dalla stessa parte de' nodi della luna. Si rileva, che questo movimento è simile a quello, per cui i poli della terra fanno le loro rivoluzioni intorno ai poli dell' ecclittica d'Oriente in Occidente, secondo due cerchi, che ne sono lontani 23 gradi e mezzo, in un periodo di circa 25000 anni: lo che produce il movimento apparente delle stelle d'Occidente in Oriente nel medesimo tempo, e quindi la precessione degli equinozj. La spiegazione dettagliata de'fenomeni della librazione della luna non appartiene a quest' opera, ma bisogna cercarla ne' Trattati d'Astronomìa.

Si è già avvertito in Gian-Domenico Cassini al decimo capo del terzo volume di questa Storia, che Giacomo di lui figlio lo coadjuvò nelle Astronomiche operazioni, quando verso il 1700 unitamente a La Hire

aumentarono di circa una tesa la misura del grado del meridiano terrestre rinvenuta da Picard. Ma si dovè anche avvertire, che se le dette operazioni furono riguardate esatte circa la lunghezza di detto grado, non lo furono però egualmente rispetto alla figura della terra, e alla misura de' gradi meridiani dall'equatore verso i poli ossia dal mezzodì al Nord: per cui contro le indicate misure de' gradi del meridiano terrestre, e la figura della terra insorse una lunga controversia de' geometri francesi, la quale non si potè decidere, se non che per mezzo d'una dispendiosa spedizione di celebri Matematici a Cajenna della Laponia, e al Perù dell' America Meridionale, che fu riferita dettagliatamente in Gian-Domenico Cassini, onde rimettere ad essa il lettore al presente, ed in appresso, a scanso d'inutili ripetizioni della medesima.

A compimento di quel dettaglio mancano soltanto pei curiosi i quattro cattivi versi, che Voltaire fece incidere sotto la figura del vanissimo Maupertuis vestito riccamente, e con caricatura da Lapone: ed eccoli.

Ce globe mal connu, qu'il a su mesurer,
Devient un monument, où sa gloire se fonde:
Son sort est defixer la figure du monde,
De Lui plaine, et de l'eclairer.

Giacchè fu detto nel citato racconto, che Maupertuis, per dare più tuono, ed un'aria d'imponenza ai risultati delle sue operazioni nella Laponia, si fece rappresentare in una Incisione a foggia de' Laponi con aria maestosa ed imponente, appoggiato al globo della Terra, come per comprimerla, e schiacciarla nei poli: ed aveva sotto i detti versi compassionevoli.

CAPO SETTIMO

Eulero percorre rapidamente tutte le parti delle Matematiche da riformatore, e da maestro: e perfeziona le teorìe della scienza analitica, del moto de' corpi, e dell' Idrodinamica con ammirazione e sorpresa.

Le grandi mosse, e lo spirito d'emulazione che (pei validi sforzi di Newton, di Leibnizio, dei fratelli Bernoulli, dell'Hopital, e di altri grandi Matematici) i progressi della nuov' analisi circa il fine del secolo decimo settimo e l' ingresso del decim' ottavo, seppero imprimere ai geometri amatori della medesima, li fecero entrare in essa, come vedemmo, in una vera gara tra loro. Animata quindi la nobile contesa, ed invigorita sempre più dai nuovi incitamenti, che con nuovi validissimi sforzi andranno imprimendo ai geometri Eulero, Clairaut, D'Alembert, ed altri, vedremo rendersene la carriera ogni giorno più accalorita, e più stretta: ed una nuova gloria coronerà i nuovi successi, che nei tre citati geometri, in Eulero specialmente, si troveranno grandissimi, e della massima utilità ed importanza. Nel seguito poi se l'impronta dei passi sembrerà meno estesa, o meno profonda, i veri giudici in queste materie sapranno proporzionare la loro stima alla resistenza superata, o all'utilità delle scoperte: e questa stima è la più degna ricompensa, a cui possa aspirare l'uomo sensibile, che la merita.

Leonardo Eulero, quell'uomo celeberrimo desti-

nato a fare una rivoluzione nella scienza analitica, nato nel 1707 e morto nel 1783, si annunziò, e si fece conoscere qual geometra del prim'ordine sino dal 1725 per le molte ricerche da lui fatte nella famosa questione, che vedemmo proposta ai geometri da Riccati: dando in quella circostanza tra le altre sue molte operazioni esquisite, una bellissima soluzione del problema delle Trajettorie reciproche, la quale estesa, e perfezionata quindi da lui, fu pubblicata negli atti di Lipsia del 1727. Egli aveva preso le prime lezioni di matematica sotto Giovanni Bernoulli, il quale in fine della sua soluzione della indicata questione di Riccati predisse ciò che un giorno sarebbe divenuto il suo allievo.

Anni di G. C. 1725

Di fatti chiamato Eulero da Caterina I. come membro residente all'Accademia di Pietroburgo nella fondazione di essa, vi si distinse in guisa, che egli, e Daniele Bernoulli suo amico indivisibile furono i due, che contribuirono più di tutti alla gloria della geometrìa nell'erezione, ed in seguito di quell' illustre Stabilimento. Oltre le grandi cose operate d'accordo con Daniele Bernoulli, quali fa d'uopo vedere nel Commentario di esso, fu detto di lui, che come si è attribuito a Pascal il progetto di far piegare tutti gli uomini al dovere della religione colla forza del ragionamento, e dell'eloquenza; così sembra del pari, ch' Eulero abbia voluto far dominare l'analisi sopra tutte le parti delle matematiche. Egli si vedeva continuamente occupato a perfezionare questo grande istrumento, ed a mostrare l'arte di ben maneggiarlo (1).

(1) Acc. di Pietroburgo 1728.

Era egli appena nell'età di vent'anni, quando diede un metodo nuovo, e generale, per integrare delle classi intere di equazioni differenziali del second'ordine, assoggettate a certe condizioni. Prima di lui non si otteneva l'intento, se non che in alcuni casi particolari, ed anche piuttosto per sagacità dell'analisi, di quello che per mezzo di metodi uniformi, e determinati.

Circa un'anno dopo si distinse Eulero nella celebre soluzione del problema delle *Tautocrone* ne'mezzi resistenti. Il problema delle tautocrone è celebre nella storia della geometria, tanto per la sua natura singolare, quanto per le difficoltà, che si sono dovute superare per risolverlo. Esso consiste, come è noto, nel trovare una curva tale, che un corpo pesante discendendo lungo la sua concavità, arrivi sempre nel medesimo tempo al punto più basso, qualunque sia il punto della curva dal quale comincia a discendere. Huguens, esaminando le proprietà della cicloide, trovò ch'essa aveva quella di essere la curva tautocrona nel voto: Newton riconobbe, nel suo libro *De' Principj*, che la medesima curva era altresì tautocrona, allorchè il corpo sempre sottoposto all'azione d'una gravità costante, soffre di più in ogni istante, per parte dell'aria o del mezzo nel quale si muove, una resistenza proporzionale alla sua velocità (1). Eulero e Gio. Bernoulli determinarono, ciascuno del canto loro, la curva tautocrona in un mezzo resistente come il quadrato della velocità (2). Questi tre casi formano tre problemi dif-

(1) Acc. di Pietr. 1729.
(2) Acc. di Parigi 1730.

ferenti, per ciascuno de' quali si fece uso di metodi diversi. Allorchè ne' due primi, il corpo, dopo essere disceso, risale pel secondo ramo della cicloide, esso percorre l'arco ascendente nello stesso tempo che ha percorso l'arco discendente, di modo che tutte le oscillazioni, che sono composte ciascuna d'una discesa, e d'una ascesa, si fanno nel medesimo tempo. Ma nell' ipotesi della resistenza come il quadrato della velocità, l'arco discendente tautocrono non è lo stesso dell' arco ascendente tautocrono, e bisogna cercarli separatamente. Essi si trovano altronde esattamente nello stesso modo, e quindi basta considerare l' uno, o l' altro. In Fontaine, e De Lagrange riassumeremo la stessa materia, e la vedremo portata ad un più alto grado di perfezione, medianti le nuove ricerche, e nuovi sforzi di genio, che vi fece lo stesso Eulero.

Gl'indicati lavori d' Eulero sono certamente grandi. Egli peraltro ci è benemerito di produzioni anche maggiori. Noi dobbiamo ad Eulero principalmente l'Algebra de'seni, e de' coseni, che è uno di quei mezzi d'abbreviazione, al quale tutte le parti delle matematiche, e sopratutto l'astronomìa fisica, hanno inapprezzabili obbligazioni. Per mezzo della combinazione degli archi, seni, coseni, e loro differenziali, si ottengono delle formole, le quali facilmente si sottomettono in molti casi ai metodi d' integrazione: il che conduce alla soluzione d'una moltitudine di problemi, che saremmo costretti di abbandonare per la lunghezza, o la difficoltà de'calcoli, se si volessero adoperare gli archi, i seni, e coseni, sotto la loro forma ordinaria, o anche sotto la forma esponenziale.

In mancanza delle soluzioni rigorose, siamo costretti di ricorrere ai metodi di approssimazione, e ad essi dobbiamo in gran parte il successo delle matematiche pratiche. La teorìa delle serie infinite è il principal fondamento di tutti questi metodi. Vi vuole sovente molt'arte, e s' incontra molta difficoltà a formare le serie atte a risolvere, in un modo spedito e sufficientemente prossimo al vero, le quistioni che ad esse conducono. Gl' Inglesi, come Newton, Wallis, Stirling, ec. hanno molto coltivato questo bel ramo dell' Analisi: ma nessuno lo ha portato tant' oltre come ha fatto Eulero, nessuno ha sommato tante serie curiose, ha tanto applicato questo metodo alla soluzione d'una moltitudine di problemi delicati ed importanti. Le raccolte degli accademici di Pietroburgo, e di Berlino, e delle sue opere particolari, sono piene delle sue scoperte in questo genere, che si riguardano come uno de' principali monumenti del suo genio.

Mancava alla teorìa dell'equazioni differenziali la cognizione di qualche proprietà generale, che potesse servire a dirigere i metodi d' integrazione. Poichè dopo il problema delle Catenarie, da cui questa teorìa ha cominciato a prender corpo, si erano integrate molte equazioni differenziali di tutti gli ordini: ma quanti erano i casi particolari, altrettanti erano i metodi particolari: per lo più non si otteneva l'intento, se non che per una specie di tentativo, che poteva bensì far ammirare il genio, e la sagacità dell'Analista: ma che, infine, non dava alcuna apertura pei problemi d' un genere diverso. I geometri pertanto desideravano un segno, un carattere per mezzo del quale si potesse ri-

conoscere, se un'equazione nello stato in cui si presenta, sia immediatamente integrabile, o se abbia bisogno di qualche apparecchio per divenir tale. Si scorge di fatti quanti falsi tentativi di calcolo una tal cognizione deve risparmiare. La Germania, e la Francia dividono la gloria d'aver fatto questa bella scoperta per le equazioni differenziali del prim' ordine. Eulero, Fontaine e Clairaut vi giunsero, ciascuno dal canto loro, quasi nel medesimo tempo, o almeno senza essersi dato a vicenda soccorso alcuno. La giustizia però non permette di tacere, che Eulero ha portato i primi colpi: nella sua *Meccanica* pubblicata nel 1736 (1) fa uso d'una equazione dipendente da questa teorìa, ma ne ha data la dimostrazione soltanto nelle memorie dell'accademia di Pietroburgo, per l'anno 1734, pubblicate nel 1740. Ora le ricerche di Fontaine, e di Clairaut sono dell' anno 1739 (2), di modo che non potevano allora conoscere quelle di Eulero.

Vedremo in seguito in Condorcet, che il medesimo Eulero trovò felicemente le condizioni d'integrabilità per l'equazioni differenziali degli ordini più elevati. Eulero si distinse eziandìo mirabilmente tra i grandi geometri, che di tempo in tempo rimisero in campo il rinomato problema degl' isoperimetri, per semplificarne la soluzione generale. Eulero in fine diede altri molti saggi d'una profonda geometria, stampati nelle raccolte dell'Accademia di Pietroburgo, che sarebbe cosa troppo lunga il descriverli. Onde per la connessione delle materie passiamo immediatamente a dare

(1) Tomo II, pag. 49.
(2) Acc. di Parigi 1739 e 1740.

un' idea del di lui famoso libro intitolato: *Methodus inveniendi lineas maximi, minimive proprietate gaudentes*, pubblicato nel 1744.

L'autore distingue due specie di massimi o minimi, gli assoluti, ed i relativi. I massimi o minimi sono assoluti, quando la curva gode senza restrizione d'una certa proprietà di massimo o minimo, tra tutte le curve corrispondenti alla medesima ascissa: tale è la curva della più veloce discesa. I massimi o minimi sono relativi, quando la curva che deve godere di una proprietà di massimo o minimo, deve inoltre soddisfare ad un'altra condizione: come, per esempio, d'essere eguale in contorno a tutte le curve terminate con essa a due punti dati: tale è il cerchio che ha la proprietà di racchiudere lo spazio più grande tra tutte le curve d'eguale contorno. I metodi, che adopera Eulero, per risolvere tutti questi problemi, sono semplicissimi, ed hanno tutta la generalità che si può esigere. Egli a questo proposito è stato il primo a trovare e dimostrare un teorema della più alta importanza: esso è, che i problemi della seconda classe possono sempre ridursi a quelli della prima, moltiplicando le due espressioni che rappresentano le due condizioni della curva, per mezzo di coefficienti costanti, sommando i due prodotti, e supponendo che la somma formi un massimo o un minimo. L'opera d'Eulero contiene moltissime applicazioni curiose, ove si vede brillare dappertutto la più profonda scienza del calcolo, e la più grande eleganza nelle soluzioni: sotto questo punto di vista, esso ha tutta la perfezione possibile nello stato attuale dell'Analisi: ma le soluzio-

ni generali sono state ancora semplificate, e sottoposte a calcoli facili per mezzo del metodo delle variazioni (1), che Eulero medesimo ha adottato in seguito, ed ha sviluppato in diverse memorie particolari, ed in un appendice al terzo volume del suo Trattato di calcolo integrale (2). In fine, egli ha ridotto questo genere di calcolo al calcolo integrale ordinario.

Un' altra produzione egualmente grande d' Eulero è la sua eccellente memoria intitolata: *Investigatio functionum ex data differentialium conditione*, pubblicata negli atti dell'Accademia di Pietroburgo nel 1762. Questa memoria ha per oggetto di sviluppare a fondo il metodo del calcolo integrale, e darne il vero algoritmo. Poichè nelle molte produzioni d' Eulero, che abbiamo indicate, ed in altre, che andremo a vedere in D'Alembert, ed in altri grandi geometri, i varj punti di vista, sotto i quali Eulero aveva ravvisato e presentato il calcolo integrale alle differenze parziali; avevano già fissata la sua vera natura, e fatto conoscere, le applicazioni, onde è suscettibile, in una moltitudine di problemi fisico-matematici: e solo mancava al compimento della grand'opera lo sviluppo del metodo, ed il suo vero algoritmo: quali due cose furono in fine da Eulero egregiamente eseguite. Per lo che alcuni geometri riguardavano Eulero, se non come il solo, almeno come il principale inventore del calcolo, di cui trattasi: ma non bisogna dimenticarsi, che D'Alembert il primo ne ha fatto un'applicazione importante ed originale, che ha dato delle aperture ad Eulero,

(1) Acc. di Pietr. 1764.
(2) Acc. di Pietr. 1771.

come egli medesimo ne conviene. Ond'è, che i critici sono d'avviso concordemente, che questi due uomini illustri abbiano presso a poco un'egual diritto alla gloria di sì bella, ed utile scoperta.

Essendo l'Analisi la vera chiave di tutti i grandi problemi di Meccanica, e di Astronomia fisica, che invano si tenterebbe risolvere colla sintesi: e trovandosi la medesima Analisi, come vedremo in Maclaurin, incompleta per molti riguardi, e sparsa in infinite produzioni de' geometri, che avevano arricchita, e continuavano ad arricchire la scienza analitica; era da desiderarsi, che si raccogliessero, e si perfezionassero in corpo di dottrina usuale tutte le scoperte nella detta scienza. Questa gloria era riservata ad Eulero, il quale oltre all' aver' esteso, e perfezionato tutte le parti dell'Analisi nelle innumerabili memorie, che di lui esistono tra quelle dell'Accademia di Pietroburgo, e di Berlino, ed in molte altre raccolte; egli ha inoltre pubblicato su questo proposito alcune opere particolari, adattate in un modo speciale all' istruzione de' lettori di tutti gli ordini. Una delle prime, e delle più importanti è il libro: *Methodus inveniendi lineas curvas maxima, minimave proprietate gaudentes*: del quale abbiamo dato una sufficiente nozione. Al seguito di questo Trattato, si trova una dotta teorìa della curvatura delle lame elastiche, ed una memoria in cui l'autore determina col metodo *de maximis et minimis* il movimento de'projettili in un mezzo non resistente: prima applicazione di questo metodo alla classe de' problemi di meccanica, suscettibili di soluzioni per mezzo della teorìa delle cause finali.

L' introduzione dell'Analisi degli infiniti: opera più elementare del medesimo autore del 1748 contiene in due libri le cognizioni d'Analisi pura, e di geometrìa, necessarie per la perfetta intelligenza de' calcoli differenziale ed integrale. Eulero spiega nel primo tutto ciò che riguarda le funzioni algebriche o trascendenti, i loro svolgimenti in serie, la teorìa de' Logaritmi, quella della moltiplica degli angoli, la sommazione di molte serie curiosissime e d'una profonda ricerca, la risoluzione delle equazioni in fattori trinomj, ec. Nel secondo libro l'autore comincia a stabilire i principj generali della teorìa delle curve geometriche, e della loro divisione in ordini, classi, e generi: in seguito egli applica partitamente questi principj alle sezioni coniche, tutte le proprietà delle quali sono quì dedotte dalla loro equazione generale. Egli finisce con una teorìa elegantissima delle superficie de' corpi geometrici: insegna a trovare le equazioni di queste superficie, con riferirle a tre coordinate perpendicolari tra loro: le divide in ordini, classi e generi, come ha fatto per le semplici curve descritte sopra un piano, ec. Tutti questi oggetti sono trattati con una chiarezza, e con un metodo che ne facilitano lo studio in guisa che ogni lettore di mediocre intelligenza può eseguirli da sè stesso, e senza alcun'estraneo soccorso.

Finalmente Eulero ha raccolto in cinque o sei volumi in quarto tutta la scienza del calcolo differenziale ed integrale. Le ricchezze dell'arte conosciute dapprima, e un maggior numero di teorìe assolutamente nuove, sono quì presentate, e dilucidate nella maniera più luminosa, e più istruttiva: e sotto quella forma originale e comoda, che l'autore ha fatto prendere a tutte le parti delle matematiche sublimi. La riunione di questi diversi trattati compone il più vasto, ed il più bel corpo di scienza analitica, che l'ingegno umano abbia prodotto. Tutti i geometri, che sono stati alla portata di leggere queste opere, vi hanno acquistato delle cognizioni, ed alcuni ancora si sono fatti onore coi metodi che quivi si trovano. Se il P. Reyneau ha potuto per un momento, e per esagerazione essere chiamato l'Euclide dell'alta geometria, si può dire con verità che Eulero è questo Euclide, ed anche soggiungere che nel genio e nella fecondità è molto superiore all'antico.

L'indicata meccanica d'Eulero pubblicata nel 1736 contiene tutte le teorie del moto rettilineo, o curvilineo d'un corpo isolato, sottoposto all' azione delle forze acceleratrici qualunque, nel voto, o in un mezzo resistente. L'autore ha seguìto dappertutto il metodo analitico: il che, riducendo tutti i rami di questa teorìa all' uniformità; ne facilita tanto più l'intelligenza, in quanto che Eulero maneggia altronde il calcolo con una sagacità, ed un'eleganza, di cui non vi era per anche stato esempio veruno. Egli non solo risolve una gran quantità di problemi difficili, alcuni de' quali erano allora nuovi; ma perfeziona altresì l'analisi stessa con integrazioni nuove, e delicate: alle quali il suo argomento lo conduce. Quanto ai principj di meccanica, per mettere i problemi in equazione, egli adopra quelli, che ho indicati di sopra.

Sebbene questa maniera di porre la base del calcolo fosse assai comoda, si poteva però giungere ancor più semplicemente allo scopo medesimo: la cosa

consisteva nel risolvere in ciascun' istante le forze, ed i movimenti, in altre forze ed altri movimenti, paralleli a linee fisse, di posizione data nello spazio. Allora d'altro più non si trattava, che di applicare a queste forze, ed a questi movimenti le equazioni del principio della forza d' inerzia, e non si aveva punto bisogno di ricorrere al teorema di Huguens. Questa idea semplice e felice, di cui Maclaurin il primo ne ha fatto uso nel suo trattato delle flussioni, ha sparsa una nuova luce sopra la meccanica, ed ha singolarmente facilitata la soluzione di diversi problemi. Allorchè il corpo si muove sempre nel medesimo piano, si prendono soltanto due assi fissi, che si suppongono perpendicolari tra loro, per la maggior semplicità: ma quando è obbligato, per la natura delle forze, a cangiare continuamente di direzione per ogni verso, e a descrivere una curva a doppia curvatura; allora fa d'uopo impiegare tre assi fissi, perpendicolari tra loro, ossia formanti gli spigoli d'un paralellepipedo rettangolo.

Mentre l'idrodinamica faceva in Francia i più brillanti progressi, Eulero era occupato a ridurre tutta questa scienza a formole generali ed uniformi, che presentano uno di que' bei quadri analitici, pei quali l'autore è stato tanto eccellente in tutte le parti delle matematiche. Egli ha dato questa teorìa in una prima memoria stampata tra quelle dell'Accademia di Berlino (1); l'ha in seguito estesa e perfezionata in quattro grandi memorie, che fanno parte della raccolta dell' accademia di Pietroburgo (2). L' idrostatica, tante vol-

(1) Acc. di Berlino an. 1755.
(2) Acc. di Pietroburgo 1768, 1769, 1770, 1771.

te maneggiata e rimaneggiata, è quì presentata in una nuova maniera, e con applicazioni interessantissime. Tutta la teorìa del movimento de' fluidi è compresa in due equazioni differenziali del second' ordine: l'autore applica i principj generali agli efflussi per gli orifizj de' vasi, all'ascensione dell'acqua nelle trombe, al suo corso ne' tubi di condotto di diametri costanti o variabili, ec. Egli ha pure considerato il movimento de' fluidi elastici: quello dell' aria lo conduce a formole semplicissime sopra la propagazione del suono, e sopra la maniera, onde il suono è prodotto ne' tubi d'organo, o di flauto. Tutte queste ricerche offrono oggetti del più grande interesse pe' geometri.

Vi sono alcune scienze, che per la loro natura non sembrano destinate, se non che a nutrire la curiosità o l'inquietudine dello spirito umano: altre ve ne sono, che uscendo da questo ordine puramente intellettuale, debbono applicarsi ai bisogni della società: tale è in particolare l' idrodinamica: ma per una sventura inevitabile, ed annessa alla cosa medesima, i calcoli di D'Alembert, e d' Eulero sono sì complicati, che non possono riguardarsi, se non come verità geometriche preziosissime per sè stesse, e non già come simboli atti a dirigere il pratico nella cognizione del movimento attuale e fisico d'un fluido.

Vedemmo in Daniele Bernoulli, che nella completa spiegazione del fenomeno delle marèe proposto con assegnazione di premio dall' Accademia delle scienze di Parigi, Eulero vi riuscì con tale applauso, che ne divise il premio col detto Bernoulli, e con Maclaurin. Nello stesso modo riuscì Eulero con altri due grandi

geometri Clairaut, e D'Alembert nell'investigazione assai più difficile della perturbazione de' movimenti celesti, in particolare di quei della Luna. Poichè non essendo riuscito Newton a spiegare adequatamente questo importante problema; nel 1747 cominciarono ad occuparsene Eulero, Clairaut, e D'Alembert, ciascuno separatamente, e senza nulla comunicarsi gli uni agli altri. I progressi, che l'Analisi aveva fatto da sessant'anni, ed una maggior' esattezza nelle osservazioni astronomiche, posero questi tre geometri non solo in istato di determinare, con più precisione che Newton non aveva potuto fare, le ineguaglianze ch'egli aveva considerate, ma ancora di riconoscerne o di confermarne molte altre delle quali non ne aveva fatta menzione, o che aveva semplicemente dedotte dalle osservazioni.

Con tutto ciò il movimento dell'apogèo della Luna parve da principio fare un'eccezione al vantaggio, che il sistema della gravitazione aveva di render facilmente ragione delle ineguaglianze di questo pianeta. Si sa che questo punto della massima distanza dalla Luna alla terra non è fisso nel cielo, ma corrisponde successivamente a differenti gradi dello zodiaco, e che la sua rivoluzione secondo l'ordine de' segni, si compie nello spazio di circa 9 anni, a capo de'quali ritorna presso a poco al medesimo luogo, donde era partito. Clairaut, Eulero, e D'Alembert trovarono, ciascuno co' loro calcoli particolari, che la formola per questo movimento non ne dava che circa la metà. Questo divario tra la teorìa, e l'osservazione fece molto strepito. Si credette, ed i Cartesiani già ne trionfavano, che il sistema dell'attrazione, rovesciato in un punto essenziale, crollerebbe da tutte le parti ad un nuovo esame. Clairaut, partigiano di questo sistema, ma ancor più amante della verità, annunziò (15 Nov. 1747) in una pubblica assemblèa dell'accademia delle scienze, che la legge del quadrato inverso delle distanze gli sembrava insufficiente per rendere un' intera ragione delle ineguaglianze della Luna: e proponeva l'addizione di un nuovo termine, per ispiegare in particolare l'altra metà del moto dell'apogèo. Ma un esame più attento dei suoi primi calcoli (1749) gli fece comprendere, che non aveva spinta oltre abbastanza l'approssimazione della serie, che rappresentava il movimento dell' apogèo. Avendo posta in questa operazione la necessaria precisione, trovò l'altra metà di questo movimento, senza nulla aggiungere alla legge dell'attrazione newtoniana. Eulero, e D'Alembert fecero dal canto loro la medesima riflessione. Allora l' attrazione fu ristabilita con onore negli spazj celesti, da cui i Cartesiani avevano sperato di vederla sbandita.

Le teorìe di questi tre grandi geometrì sopra la luna, sono state stampate, o nelle raccolte delle accademie, o separatamente negli anni 1752, 1753, 1754.

Nel tempo che Eulero era occupato nel problema della luna, componeva la sua bella dissertazione *sopra la teorìa dei movimenti di Saturno, e di Giove*, che riportò il premio dell'Accademia delle scienze di Parigi per l'anno 1748. Questo problema è della medesima natura di quello de' moti della Luna. Saturno e Giove turbano reciprocamente i moti ellittici, che questi due pianeti dovrebbero avere separatamente intorno al sole. Le ricerche d' Eulero sopra questo soggetto sono notabili per una profonda analisi, e per molte serie d'una specie assolutamente nuova. Nondimeno, siccome la difficoltà, e l'immensa estensione de' calcoli, che una sì fatta questione esigeva, non gli avevano permesso di portare tutto ad un tratto questa teorìa alla sua perfezione; così l'accademia delle scienze propose di nuovo il medesimo argomento pel premio del 1750, e lo rimise ancora pel 1752, con un premio doppio. Eulero mandò una seconda dissertazione, che riportò questo premio: essa è fondata sopra un metodo nuovo per molti riguardi. Nella prima l'autore era stato condotto ad alcune approssimazioni, sopra la sufficienza delle quali si potevano formare alcuni dubbj, attesochè essendo il numero delle ineguaglianze come infinito, quelle che egli aveva determinate, dipendevano, secondo questo metodo, da altre ineguaglianze ch' egli aveva trascurate: il che rendeva i loro valori incompleti, ed anche un poco incerti. La dissertazione del 1752 è più perfetta a questo riguardo: essa separa e distingue meglio le ineguaglianze, che bisogna scoprire successivamente: e quindi essa conduce ad alcune formole analitiche più semplici, e più facilmente applicabili alle osservazioni. L'autore si è dispensato dal trattare di nuovo le ineguaglianze che affettano la linea de' nodi, e l' inclinazione vicendevole delle orbite dei due pianeti, essendo stata questa parte dell' argomento perfettamente sviluppata nella dissertazione del 1748.

L'Accademia delle scienze di Parigi avendo proposto per premio del 1754, ed in seguito per premio doppio del 1756, *la teorìa delle ineguaglianze, che i pianeti possono cagionare al moto della terra*;

la dissertazione che Eulero mandò al concorso fu coronata. L'autore comincia a dare delle formole generali, per determinare le alterazioni, che si cagionano scambievolmente i pianeti principali nei loro movimenti intorno al sole. Per non complicare inutilmente la quistione, coll'introdurvi i termini che possono essere trascurati, egli non considera ad un tempo, se non che due pianeti: e determina le alterazioni, che il moto ellittico di uno intorno al sole, deve soffrire dall'attrazione dell'altro: alterazioni che essendo piccolissime, non produrrebbero che degli infinitesimi del second' ordine, se si combinassero con quelle, che possono provenire degli altri pianeti. Applica in seguito questa teorìa generale all'argomento proposto: egli analizza successivamente, e per ordine le alterazioni, che Saturno, Giove, Marte, e Venere cagionano nel moto della terra: trova che il di loro effetto generale si è di far' avanzare il punto dell'afelio della terra, secondo l'ordine de' segni: di far variare l'obliquità dell'ecclittica, la latitudine, e la longitudine del sole, ec. In quanto all'azione della Luna sopra l'orbita della terra, Eulero non l' ha punto considerata, sia perchè non l' ha riguardata, come facente parte del problema proposto dall'accademia, sia perchè D'Alembert aveva già trattato questa quistione nel secondo volume delle sue *Ricerche sopra il sistema del mondo*, pubblicate nel 1754.

Clairaut, in una memoria letta nel 1757 all'Accademia delle scienze di Parigi, e stampata anticipatamente nel volume del 1754, fece l'applicazione del suo metodo pel problema de'tre corpi al moto della terra: e alle perturbazioni considerate da Eulero, aggiunse l'azione della luna: il che tendeva a compire adequatamente questa bella teorìa.

Peraltro malgrado gli sforzi de'geometri, la teorìa della luna rimaneva sempre imperfetta per certi riguardi. Clairaut, e Mayer avevano determinato, colle sole osservazioni destramente combinate, molte equazioni, che si sarebbero dovute distruggere dal sistema della gravitazione. La principal causa di queste difficoltà proveniva dall'attribuire alla Luna un' orbita mobile sul piano dell'ecclittica, e che fa da un istante all' altro un'angolo variabile con questo piano medesimo: di modo che per conoscere il vero luogo della Luna, ossia la sua longitudine e la sua latitudine; conveniva da principio determinare l' intersezione dell'orbita lunare coll'ecclittica, o la linea dei nodi, ed in seguito l'inclinazione delle due orbite: il che conduceva ad un grandissimo numero di equazioni, alcune delle quali erano incerte o precarie.

Nel 1769, Eulero considerando la quistione sotto un punto di vista nuovo, pervenne ad una soluzione più semplice, più chiara, e più esatta di tutte quelle, che si conoscevano. Egli determina il vero luogo della luna, col riferirlo a tre coordinate normali, due delle quali sono situate nel piano dell'ecclittica, e la terza gli è perpendicolare. I valori di queste coordinate si trovano in ciascun'istante per mezzo di equazioni fondate sopra otto specie di quantità, la metà costanti, e l' altra metà variabili. Le quattro quantità costanti sono l'eccentricità media dell'orbita lunare, l'inclinazione media di quest'orbita sul piano dell'ecclittica, l'eccentricità media dell'orbita terrestre, ed in fine il rapporto tra la distanza media dalla terra al sole, e la distanza media dalla luna alla terra. Le quattro quantità variabili sono quattro angoli proporzionali al tempo: vale a dire l'elungazione media dalla Luna al Sole, l'anomalìa media della Luna, l'argomento medio della latitudine della Luna, e l'anomalìa media del Sole. Tali sono le basi sopra le quali tutte le equazioni delle ineguaglianze della luna sono stabilite. In tal modo queste ineguaglianze si trovano distribuite in differenti classi, e le operazioni di calcolo si eseguiscono separatamente: cosicchè non si ha punto da temere, che gli errori commessi in una parte entrino ancora nelle altre. Finalmente, Eulero ha costruito, sopra questa teorìa, delle nuove tavole lunari, in cui il numero delle equazioni è minore, e l'uso più comodo, che cogli antichi metodi. Questo immenso lavoro è l'oggetto di una sua opera particolare stampata a Pietroburgo nel 1772 sotto questo titolo: *Theoria motuum lunae, nova methodo pertracta*. Siccome l'autore era sino d'allora quasi interamente cieco, così tre de' suoi più illustri discepoli, Gio. Alberto Eulero suo figlio, Luigi Krafft, e Gio. Lexel, hanno eseguito o verificato i calcoli. L'Accademia delle scienze di Parigi, che aveva proposto per oggetti dei suoi premj, negli anni 1770 e 1772, di perfezionare la teorìa della luna, decretò in totalità o in parte questi premj alle due dissertazioni, che Eulero le mandò, e nelle quali la sua nuova teorìa è ancora assai distintamente semplificata.

Vedremo in Bouguer, aver'egli stabilito su le ricerche delle forze animate, che i decrementi della forza dell'uomo procedono con quella medesima propor-

zione, con cui procedono gl' incrementi della sua velocità: poichè, dice egli, *un marinajo rematore, andando due, o tre volte più velocemente; il suo sforzo riceve una diminuzione due, o tre volte più grande*: la quale ipotesi era stata generalmente ricevuta ed adottata, dopo la sua pubblicazione fatta nel 1767 nella grand' opera di Bouguer sopra *la manovra de' vascelli*. Ma il grande Eulero, che niuna parte delle Matematiche lasciò intentata, e tutte le corse in aria di conquistatore, essendo entrato in questa discussione nelle due eccellenti dissertazioni sopra la *teorìa delle macchine*, inserite ne' tomi 3.° ed 8.° *de'nuovi Commentarj* dell'Accademia di Pietroburgo, e nelle due altre sopra *la teorìa delle trombe* nel tomo 8.° dell'Accademia di Berlino, propone su questo punto una nuova idea, e stabilisce un' altra legge.

Egli vuole, che le forze dell'uomo, e degli altri animali in tutti i lavori, a' quali vengono applicati, seguano ne' loro incrementi successivi non già la ragione semplice inversa delle velocità, con cui agiscono, ma bensì la ragione inversa duplicata di tali velocità. Il fondamento, a cui questo gran geometra appoggia la detta legge, è un ingegnosissimo confronto, ch'egli fa della forza dell'uomo con quella d'una corrente di acqua, la quale si porta contro un piano, mobile nella direzione stessa della corrente, e va a percuoterlo nell' atto che questo, per la velocità concepita, le fugge davanti: ove è manifesto dalla teorìa comune della percossa de' fluidi, che lo sforzo o impulso dell' acqua contro il piano è proporzionale al quadrato della velocità *respettiva*, cioè al quadrato dell' eccesso della velocità della corrente sopra quella del piano.

Per tacere di tante altre produzioni del grande Eulero, termino questo breve di lui Commentario coll' indicare, essere stato egli il primo, che portò la luce nella Diottrica. Ma nella sua opera sopra questa scienza, la seconda parte, che tratta della fabbricazione de' cannocchiali, aveva bisogno d'un nuovo travaglio di molta considerazione, particolarmente intorno agli obbjettivi composti, come vedremo in Klügel.

Eulero fortemente occupato in tante sue cose, concepisce la prima idea de' cannocchiali acromatici, come negli atti dell'Accademia di Berlino del 1747. Egli propose di correggere l'aberrazione di refrangibilità, componendo gli obbiettivi con due lenti di vetro, che rinchiudessero tra loro dell'acqua: e determinò col calcolo le curvature, che ad esse bisognava dare, affinchè le ineguaglianze di rifrazione del vetro, e dell'acqua si compensassero vicendevolmente. Egli punto non dubitava del buon'esito di questo progetto: citava per esempio, ed in prova, l'occhio umano, in cui i raggi luminosi traversano quattro umori differentemente rifrangibili, e vanno a raccogliersi nel medesimo fuoco. Peraltro egli trovò delle opposizioni, che andremo a vedere combattute in Dollond.

Si rifletta intanto, che Eulero considerando seriamente l'osservazione fatta da Newton nella sua ottica (che se non fosse la diversa refrangibilità de' raggi di luce, i Telescopj potrebbero portarsi ad un gran punto di perfezione, mediante il comporre il vetro obbiettivo di due vetri con acqua frammezzo, secondo la formola di Newton emendata da Young, il quale conchiude che col detto mezzo le refrazioni de' lati

concavi dei vetri correggeranno *moltissimo* gli errori delle refrazioni de' lati convessi, in quanto che derivano dalla sfericità della figura); l'accorto Eulero profittando di questo cenno, concepì la speranza di poter con qualche artifizio impedire la dispersione, che viene cagionata dalla differenza di refrangibilità. Egli trovò questo mezzo, e l'espose nell' indicata memoria, che pubblicò negli atti di Berlino per l'anno 1747. Questa memoria eccitò l'attenzione del Sig. Dollond, e fece nascere quella controversia, che terminò sì felicemente colla gloriosa scoperta del Telescopio acromatico, come si vedrà in Dollond.

Ma prima di passare avanti, e chiudere l'elogio di Eulero, dobbiamo far quì alcune necessarie avvertenze su i vantaggi dell'Algebra de' seni e coseni, su le utilità de'metodi di approssimazione, e su quelle de' cannocchiali acromatici procurate da Eulero all' astronomìa, e ad altri rami delle scienze matematiche.

L'algebra de' seni e coseni, dovuta principalmente ad Eulero, è uno di quei mezzi di abbreviazione, al quale tutte le parti delle matematiche, e soprattutto l'astronomìa fisica, hanno inapprezzabili obbligazioni. Per mezzo della combinazione degli archi, seni, coseni, e loro differenziali, si ottengono delle formole, che facilmente si sottomettono in molti casi ai metodi d' integrazione: il che conduce alla soluzione di una moltitudine di problemi, che saremmo costretti ad abbandonare per la lunghezza, o la difficoltà de' calcoli, se si volessero adoprare gli archi, i seni, e coseni, sotto la loro forma ordinaria, o anche sotto la forma esponenziale.

Circa la second'avvertenza, in mancanza delle soluzioni rigorose, siamo costretti di ricorrere ai metodi di approssimazione, e ad essi dobbiamo in gran parte il successo delle matematiche pratiche. La teorìa delle serie infinite è il principal fondamento di tutti questi metodi. Vi vuole sovente molt'arte, e s'incontra molta difficoltà a formare le serie atte a risolvere, in un modo spedito, e sufficientemente prossimo al vero, le quistioni che ad esse conducono. Gl' Inglesi, come Newton, Wallis, Stirling, ec. hanno molto coltivato questo bel ramo dell'analisi: ma nessuno lo ha portato tant'oltre, come ha fatto Eulero: nessuno ha sommato tante serie curiose, ha tanto applicato questo metodo alla soluzione d' una moltitudine di problemi delicati ed importanti. Le raccolte degli accademici di Pietroburgo, e di Berlino, e delle sue opere particolari, sono piene delle sue scoperte in questo genere, le quali si riguardano come uno de' principali monumenti del suo genio singolare.

La posterità non dimenticherà mai le grandissime obbligazioni, che deve ad Eulero, uomo d'una somma penetrazione di mente, e d'una fecondità prodigiosa. In tutto il corso della sua vita i giornali, e le raccolte delle Accademie ridondavano delle sue ricerche. Egli inoltre pubblicò separatamente moltissime opere d'invenzioni brillanti: e morendo, lasciò cent'ottanta eccellenti Memorie manoscritte all'Accademia di Pietroburgo, la quale impiegò circa quarant'anni, per farle pubblicare dignitosamente ne' respettivi tempi stabiliti a vantaggio della Repubblica letteraria.

Il semplice Catalogo ossia notamento delle indi-

cate prozduioni del sommo Eulero importerebbe un grosso volume, che non potrebbe aver luogo nel Compendio di questa Storia dell'origine, e progressi delle Matematiche. Giacchè il nostro faticantissimo Eulero compose circa cinquanta grossi volumi di opere complete, e circa settecento Memorie scientifiche di molta importanza: e si è rinvenuto quindi un copioso carteggio delle di lui corrispondenze letterarie con altri primi Matematici del suo tempo, che è stato pubblicato colle stampe, per le rilevanti cose, che vi sono: e con ciò si fanno ascendere tutte le produzioni di Leonardo Eulero a circa cinquanta voluminosi Tomi in ottavo grande: lavoro che sembra onninamente impossibile nel breve corso di vita, che potè impiegarvi.

Giacchè Leonardo Eulero cominciò le sue produzioni in età di 18 anni, in cui si distinse, come fu detto, nel risolvere la famosa questione proposta ai Geometri dal Conte Riccati. Successe quindi a Daniele Bernoulli, che per motivi di salute si ritirò dalla Cattedra di Pietroburgo: ma non trovando colà tutte le sue convenienze, passò nel 1741 alla Cattedra di Berlino, dove si trattenne sino al 1760: indi tornò alla prima sua residenza, e vi perdè poco dopo la vista nell'età di 53 anni, come meglio in appresso.

Eulero dunque, dopo la detta sua prima produzione sul Teorema di Riccati, non godè della sua vista, per farne delle altre, se non che trentacinque anni, dai 18 ai 53 dell'età sua: e sempre obbligato a consumare gran tempo nel disimpegno materiale delle sue Cattedre di Pietroburgo, e di Berlino.

È vero però, che mentre fu sano di vista, egli non conobbe altra passione, che quella delle scienze: ed era insensibile alle attrattive di buon gusto, e nemico degli spettacoli Teatrali: dilettandosi soltanto con trasporto delle inette rappresentazioni de' Burattini: lo che ci comprova la gran verità, che la natura non è mai prodiga di tutti i suoi doni, anche nel dispensarli a larga mano a' suoi favoriti.

Nei 23 anni poi della di lui cecità, essendo egli dotato d'una memoria tenacissima, faceva a mente i calcoli più difficili, che dettava a' suoi discepoli: ed altre volte chiamava a sè i discepoli più capaci, come fu, per esempio, il nostro defunto Pessuti, e indicava ad essi come si doveva ordire un qualche difficile Calcolo: e quando si arrenavano in esso, scioglieva le loro difficoltà, e suggerendo quindi il modo di proseguirlo; li conduceva in tal guisa al compimento di esso: e potè così supplire alla mancanza della vista in una quantità di Memorie, e di altre pregevolissime produzioni, che ebbe la gloria di lasciarci.

E quì ad istruzione di tutti, onde non s' impedisca mai ai giovani di applicarsi a quella lecita, onorata, e decente professione, alla quale è più inclinata la di loro natura, secondo la condizione di ognuno; non manco di avvertire, che Leonardo Eulero, qual'altro Biagio Pascal divenne sommo Matematico a vantaggio del pubblico per solo genio, ed inclinazione naturale, contro la volontà de'proprii genitori Paolo Eulèr, e Margherita Brucker, i quali lo diedero alla luce li 15 di Aprile del 1707 nel piccolo, e meschinissimo villaggio di Riechen presso Basilèa, la più bella, e più ricca città dell' Elvezia nella Svizzera, capitale d'un

Cantone di tal nome. Il detto Paolo, come uomo assai istruito, e rigido Calvinista, era il Pastore ossia Parroco del villaggio. Egli educò il piccolo suo figlio Leonardo nel massimo rigore, in cui sempre si mantenne, della disciplina Calviniana: e dopo di averlo ben' istruito nella lingua latina, e negli studj di Umanità, e Rettorica; lo applicò attentamente nell'Aritmetica, e nell'Algebra: e quindi nella Geometrìa Sintetica, che apprese a perfezione col massimo trasporto.

Molto si compiaceva l' affezionato genitore della somma vivacità de'copiosi talenti del figlio, che lo trasportavano con ansietà, e felice riuscita ad ogni genere di studio: in particolare però a quello delle Matematiche. Bramoso egli peraltro, come privo di beni proprj, di collocarlo in qualche Cura o Rettorìa di anime simile alla sua, nel mandarlo a compiere il corso de' suoi studj in Basilèa, gli ordinò espressamente, che fatto lo studio di Filosofia, si applicasse a quello della Sacra Teologìa con predilezione, ed animo speciale, onde basarsi bene in esso, come studio della sua Professione, che doveva dargli da vivere. Ma l'avveduto giovane, che sentiva bene le sue inclinazioni naturali alle Matematiche, volle perfezionarsi in esse nella rinomatissima Scuola dell' esimio Professore Giovanni Bernoulli, il quale conosciuta l'egregia indole del giovane, lo ebbe a suo discepolo prediletto: ed in brevissimo tempo ebbe la somma consolazione di vederlo ascendere di volo al pieno intendimento delle sue alte Teorìe della Nuova Geometrìa ossia Analisi Infinitesimale.

Avendo saputo Paolo Eulèr, rigidissimo Calvinista, come si disse, che il figlio non aveva obbedito alle sue disposizioni, andò subito a Basilèa, ove ripresolo acremente, e levatolo dalla Scuola del Bernoulli, lo pose a studiare la sola Filosofia, imponendogli di applicarsi quindi alla Sacra Teologìa, per tornarsene tosto a Riechen, ove non gli sarebbe mancata una qualche buona Rettorìa o Cura di anime ne' vicini villaggi. Obbedì il giovane al comando del padre: ma d'accordo coll'ottimo Professore Giovanni Bernoulli, una volta la settimana andava a prendere lezione di Matematica da esso, che l'istruiva sempre nelle teorìe più recondite della Nuova Analisi in compagnìa de' suoi figli Nicolò, e Daniele, coi quali strinse una grande amicizia: e quando chiamati da Caterina I alla sua Accademia li vide partire per Pietroburgo, senza speranza di rivederli, li pregò con un profluvio di lagrime amichevoli a provvedergli un qualche collocamento colà, che gli fu dai medesimi promesso.

Consolato intanto il dispiacente Giovanni Bernoulli nel distacco degli amatissimi suoi figli dall'assidua compagnìa del diletto Eulero, che per l'egregia sua indole riguardava qual suo proprio figlio; proseguì ad istruirlo in guisa, che potè annunziare al mondo, come fu detto, la sorprendente riuscita, che avrebbe fatta nelle Matematiche quel suo esimio discepolo Leonardo Eulero. Studiò questi con molto profitto tutti i rami della Filosofia, e quindi anche la Sacra Teologìa: e mentre figurava, e si distingueva mirabilmente in Basilèa in tutti questi studj, i due suoi amici compagni Nicolò, e Daniele Bernoulli, fedeli alla loro promessa, lo chiamarono a Pietroburgo. Esultò il giovane Eulero a questo fausto annunzio, e dopo qualche mese,

avendo disposte le sue cose, scrisse un'affettuosa lettera ai suoi genitori, senza curarsi di rivedere il padre, onde non essere dal medesimo distolto, con dispiacere scambievole nel distaccarsi dal suo amatissimo maestro, e benemerito protettore, e mecenate Giovanni Bernoulli, (che gli raccomandava l'amicizia, ed attaccamento costante a' suoi figli prediletti, il primo dei quali Nicolò trovavasi malato), si pose felicemente in viaggio alla volta di Pietroburgo, senza altra scorta di denaro, e di equipaggio, fuori del sussidio, che aveva potuto dargli l'affettuoso Bernoulli, che assai lo amava.

Leonardo Eulero intraprese quel viaggio con cattivi auspicj. Dopo qualche giorno di cammino venne egli funestato dal tristo annunzio, che Nicolò Bernoulli era passato agli eterni riposi, vittima immatura dell'aspro clima di Pietroburgo, e nel giorno che entrò nell'Impero della Russia fu l'ultimo della vita di Caterina I: avvenimento funesto, che sembrò tosto minacciare una prossima dissoluzione, e decadimento della grande Accademia, che questa benefica Imperatrice, fedele alle brame del marito, era felicemente riuscita colla sua istancabile attività ad erigere di recente con ammirazione, e sorpresa.

Giunto Eulero a Pietroburgo in questo sconvolgimento di cose, che non lo rendevano sicuro in alcun'impiego dell'Accademia, prese la risoluzione di entrare nella Marina Russa: ed un'Ammiraglio di Pietro I. il Grande gli aveva già promesso un posto, allorquando, rasserenatosi il cielo, si dissipò il turbine della fiera tempesta, che si era contro le Scienze sollevata. Leonardo Eulero ebbe l'onorifico titolo di Professore designato dell'Accademia con paga attuale, e si unì col suo pristino amico Daniele Bernoulli, che era successo al suo fratello Giovanni nella Cattedra della Matematica. Egli poi ottenne questa Cattedra nel 1733, allorchè Daniele Bernoulli la rinunziò, ritirandosi a Basilèa per motivo di salute. Nello stesso anno Eulero si congiunse in matrimonio colla Signora Gsell della stessa sua patria, figlia d'un pittore, che Pietro I. aveva portato seco nella Russia al ritorno del suo primo viaggio, nel passare per Basilèa.

Essendo passato Eulero dalla massima libertà, ed eguaglianza, che regnava fra tutti nella Repubblica di Basilèa, al duro stato di servitù, che trovò in Pietroburgo, ove in allora erano tutti schiavi del Sovrano, e conveniva nel discorso ponderare bene le parole, per non essere accusato, e punito: vedendo, che non vi era colà tutta la sua convenienza, lo abbandonò, e si trasferì a professare la Matematica nel 1741 in Berlino, ove lo invitava cortesemente il Sovrano. La nobile Pricipessa, che gli fece molt'accoglienza, e mostrava somma brama di conversare familiarmente con un'uomo di tanta fama, essendosi seco lui lamentata, che non poteva ottenere da esso, che de' monosillabi; Eulero allora le rispose, che non si arrischiava a parlare: perchè veniva da un paese, ove quando uno parla, è subito *impiccato*.

Eulero restò in Berlino dal 1741 al 1760 circa diciannove anni, nel qual tempo fu sempre onorato da una moltitudine di discepoli, che vi si recavano da tutte le parti, chiamati dalla di lui celebrità. Nel 1750 andò a trovarlo la madre, che fu a riceverla in Francfort,

e portatala seco a Berlino, vi si trattenne undici anni: sommamente contenta in tutto questo tempo, per l'affetto del figlio, e per le sempre nuove dimostrazioni di onorificenza, e di stima parziale, che gli vedeva fatte dal Sovrano, dalla Corte, e da tutti i Grandi, e basso ceto della Prussia.

La Principessa di Anhalt-Dessau, nipote del Re di Prussia, bramando di avere Lezioni di Fisica da Eulero; egli la compiacque pienamente con soddisfazione: e pubblicò quindi le sue Lezioni sotto nome di *Lettere ad una Principessa d'Alemagna*: Opera preziosa, per la chiarezza singolare, con cui ha esposto le verità le più importanti della meccanica, dell' astronomìa fisica, dell'ottica, e delle teorìe de' suoni: non che per le vedute ingegnose, meno filosofiche, ma più savie di quelle, che hanno fatto servire il labro della pluralità del mondo al Sistema de' *Vortici*.

Saputo intanto la Russia, che Leonardo Eulero si era ritirato a Berlino, per la falsa voce allarmante, sparsa all'arrivo del Generale d'armata Tottleben, che era questi venuto, per far guerra alle Scienze; la Corte di Pietroburgo non considerò mai il prefato Eulero, come uno straniero spatriato: quindi, non ostante la di lui lontananza, gli passò sempre porzione della paga, come suo Professore dell' Accademia: e per impegno dello stesso General Tottleben l'Imperatrice Elisabetta nel 1760 aggiunse alla detta paga, per le perdite da lui fatte, un premio di quattro mila fiorini, e con sua rispettosa lettera commovente l'indusse a tornare in detto anno 1760 al gradito esercizio di Professore di Matematica nella sua Accademia, che sommamente lo desiderava: e vi restò, benchè cieco come si disse, sino alla morte: che le dannose influenze di quel clima gli resero accelerata, e penosa. Poichè nel 1735, avendo voluto fare in pochi giorni un lungo Calcolo Astronomico della massima difficoltà, pel quale gli altri Accademici di Pietroburgo chiedevano più mesi di tempo; a questo sforzo di vista straordinario perdè un'occhio: e lo avvisarono i Fisici, che se non si moderava, o non cambiava cielo, andava a perdere l'altr'occhio ancora. Non permettendogli il bisogno di sua famiglia di mutar cielo all'istante, procurò di astenersi dalle straordinarie applicazioni notturne specialmente, fin tanto che il provvido Dio nel 1741 lo fece chiamare a Berlino, ove potè applicare giorno, e notte, senza pericolo alcuno della sua vista. Ma richiamato disgraziatamente a Pietroburgo nel 1760, ve la perdè del tutto poco dopo: e rimasto cieco all'impensata, qual'altro San Paolo, *quaerebat cui manum daret*, stendeva la mano, per essere appoggiato: e trovò realmente, come l'Apostolo, il suo sostegno in Dio, il quale gli aumentò le forze della mente, e quelle de'nervi, e fibre corporee in guisa, che faceva a memoria i più difficili calcoli colla massima speditezza, e precisione possibile, dettandoli ai suoi discepoli continuamente. Gli amici poi, e tutto Pietroburgo, per disposizione dello stesso Dio, si prestavano a gara, per guidarlo, e sostenerlo nel corpo attentamente in ogni suo bisogno.

Di fatti nel 1771 soffrì quella grande, e preziosa metropoli della Russia un'incendio terribile, nel quale sboccate alle spinte del vento le infuriate fiamme ondose entro la casa d'Eulero, vi si trovò egli nel

mezzo, quando il coraggioso Signor *Pietro Grimon*, il di cui nome merita certamente di essere immortalato, entrò dentro, e postoselo su le spalle, lo estrasse intatto, qual vecchio Anchise dall'incendio di Troja, portando in mano un fascio de'suoi manoscritti, come l'annoso Trojano portava i suoi Dei Penati: ed intanto l'immortal Signor *Conte Orloff* entrò animoso tra le fiamme anch'egli, ed afferrati tutti gli altri scritti, li avvoltò in un tappeto di lana, e sottrasse dai vortici delle fiamme addensate senza sfogo in quella casa di legno, come da un'ardente fornace, quel'inapprezzabile tesoro ancora: restando vittima del fuoco il mobilio, e la di lui ricca Bibliotèca, come quella de'Tolomèi d'Egitto all'incendio di essa.

Lo splendito Sovrano fece subito riedificare, ed ingrandire la sua casa ad Eulero: e la generosa Imperatrice glie la mobiliò con sovrana magnificenza: e confortò l'afflitto Eulero coll'esibirgli cortesemente qualsivoglia soccorso ne'suoi bisogni, e in quelli della sua famiglia in appresso. Ma il moderatissimo Professore ringraziandola di vero cuore, proseguì a vivere frugalmente da Filosofo: facendosi condurre spesso all'Accademia, per mantenerla in buon'ordine, e nel suo pieno dovere: animando tutti a travagliare fedelmente, e con impegno, per lo splendore, ed avanzamento delle Scienze, e delle Arti, tanto pel dovere, e proprio onore di ognuno; quanto per corrispondere alle brame del magnanimo Sovrano, che spendeva a larga mano per quel suo Scientifico Istituto dell'Impero, che gli stava sommamente al cuore: e tutto il mondo ne ha ammirato, e risentito i benefici effetti.

Il resto de' suoi giorni infelici lo passava Eulero a meditare in sua casa in seno della propria famiglia, che educò fedelmente a norma de' falsi principj della sua religione nel più rigido Calvinismo. Ei tutte le sere, quando era a studiare in Basilèa, si ritirava a pregare in qualche Chiesa, come avev'appreso da' suoi genitori: e quando ebbe la famiglia, dopo di averla fatta attentamente istruire in cose di religione della moglie nell'infanzia, divenuta grandicella, ed al caso di capire, nel giorno se l'istruiva da sè, o per mezzo di altri negli studj, e la sera se la riuniva insieme coi servi, e serve in compagnìa della moglie: e fatte delle preci, leggeva, o faceva leggere ad essi impreteribilmente un qualche capo della Sacra Bibbia, ne faceva loro la spiegazione, ed aggiungeva spesso un patetico discorso analogo, o altra commovente allocuzione istruttiva su i proprj doveri ora verso Dio, ora verso gli altri, ora verso loro stessi: ora su le virtù, e doveri sociali: ed ora su di altri soggetti importanti. Giacchè Eulero nella vastità della sua mente era versato in tutto: Letteratura, Storia d'ogni specie, Filosofia, Sacra Teologìa, Mitologìa, Mineralogìa, Bottanica, Meccanica, Dritto Naturale, Dritto Civile, e tutti i rami delle Scienze Esatte, che formavano la sua Professione della Matematica. Quindi è, che il Principe Ereditario del reame di Prussia nel suo viaggio, e tutti gli altri Sovrani, e Primi Signori d'Europa, che capitarono allora a Pietroburgo, si fecero un pregio di visitare in sua casa il cieco vecchio Eulero, per sentire qual Regina Saba presso Salomone, quel grande oracolo di ogni umano sapere, il quale seduto nel suo letto, sano sempre di mente, e di forze intellettuali, e corporee, disputava di tutto con tutti qual cieco Omero, o qual vecchio Seneca infermo, i quali prossimi a compiere la loro vita lodevole disputavano anche eglino di Scienze, e di elevati Dommi di Religione, e di Politica. E quando mancava ad Eulero la compagnìa dei dotti, si chiamava i suoi figli istruttissimi, o qualche discepolo più capace, e dettava loro dei Calcoli, e delle Memorie pregevolissime.

Quindi quando egli morì nel 1783, senza presentimento alcuno del suo prossimo transito, perchè sano di mente, e di forze, si era chiamato l'istruttissimo Lexell suo discepolo prediletto: e ragionò con esso d'un Calcolo, che gli dettò su di una lastra di Lavagna circa le leggi del moto ascensionale delle macchine areostatiche, la di cui recente scoperta occupava allora l'Europa. Egli desinò col Signor Lexell, e colla sua famiglia: parlò dei pianeti di Herschell, e dei calcoli delle di loro orbite: si chiamò poco dopo il suo figlio minore, e scherzò alquanto con esso nel prendere qualche tazza di Thè, quando ad un tratto gli cadde di mano la pippa, e cessò di calcolare, e di vivere: morte veramente gloriosa sul suo campo di battaglia, senza il presentimento, e la minima conoscenza della medesima.

Tal fu il fine di uno degli uomini i più grandi, e i più straordinarj, che la natura ha giammai prodotto, il di cui genio fu egualmente capace dei più grandi sforzi, e d'una fatica la più continuata: il quale moltiplicò, e portò le sue produzioni al di là di ciò, che niuno aveva osato attendere dalle forze umane: ed il quale intanto fu originale in tutto: la di cui testa fu sempre occupata, e l'anima sempre tranquilla: ed il quale, per un destino disgraziatamente troppo raro, riunì, e meritò di riunire una felicità quasi senz'ombra ad una gloria, che non gli fu giammai contrastata.

La di lui morte è stata riguardata come una pubblica perdita, la stessa qual nel paese, che egli abitava. L'Accademia di Pietroburgo trasportò con pompa solenne a tumulare il suo cadavere, e gli fece scolpire a sue spese un busto di marmo, che fu collocato nelle sale d'assemblèe. Essa gli aveva di già reso, durante la sua vita, un'onore forse anche più singolare. In un quadro allegorico la figura della Geometria si appoggiava ad una tavola carica di calcoli: ed erano essi le formole della di lui nuova Teorìa della Luna, che l' Accademia ordinò d' incidervi. In tal guisa un Paese, che al principio dello scorso secolo decim'ottavo l'Europa riguardava tuttavìa come barbaro, insegnò nella morte d'Eulero alle nazioni le più civilizzate della medesima ad onorare la vita degli uomini grandi, e la di loro memoria recente. Egli diede a queste nazioni un'esempio, che forse molte di esse ebbero ad arrossirsi di non aver saputo prevenire, nè imitare.

FINE DEL QUARTO VOLUME

OPERE PRINCIPALI DI L. EULERO

PUBBLICATE SEPARATAMENTE

Introductio in Analysim Infinitorum 2 *vol. in* 4.
Institutiones Calculi Differentialis 2 *vol. in* 4.
Institutiones Calculi Integralis 4 *vol. in* 4.
Mechanica sive Motus Scientia 2 *vol. in* 4.
Tentamen Novae Theoriae Musicae 1 *vol. in* 4.
Methodus Inveniendi lineas maximi minimique proprietate gaudentes 1 *vol. in* 4.
Dioptrica 3 *vol. in* 4.
Theoria Planetarum et Cometarum 1 *vol. in* 4.
Opuscula Analytica 2 *vol. in* 4.
Opuscula Varii argumenti 3 *vol. in* 8.
Scientia Navalis 2 *vol. in* 4.
Theoria Motus Corporum Rigidorum 1 *vol. in* 4.
Theoria Motuum Lunae 1 *vol. in* 4 1753.
Theoria Motuum Lunae nova methodo pertracta 1 *vol. in* 4 1772.
Algebra 2 *vol. in* 8.
Lettres à une Princesse d'Allemagne 3 *vol. in* 8.

Oltre queste opere principali di Leonardo Eulero, ed altre quasi nulla inferiori pubblicate anch' esse, ve ne sono non poche, le quali restano tuttavìa a pubblicarsi: e si spera, che l' insigne Accademia di Pietroburgo si renderà benemerita alla Repubblica Letteraria della pubblicazione di queste Opere ancora. Poichè, comunque infime fossero, anche tra le arene del Gange, e nei cenciacci degli Orefici si trova l' oro prezioso.

INDICE

CAPO PRIMO

Delle moltiplici, e singolarissime scoperte del Gran Newton, considerato perciò come il creatore d'una nuova Astronomia, e d' una nuova Ottica: ed inventore elevatissimo dell' Analisi Infinitesimale.

CAPO SECONDO

Scoperta dell' Analisi Infinitesimale fatta da Leibnizio separatamente da Newton per vie diverse, senza essersi nulla preso, o comunicato uno all' altro.

CAPO TERZO

Dei grandi progressi, che i due fratelli Giacomo, e Gio. Bernoulli hanno fatto fare all' Analisi Infinitesimale con dei problemi, e dell' opere stimate.

CAPO QUARTO

Della nuova estensione data all' Analisi Infinitesimale da più geometri, in particolare dall' Hopital, che sviluppò tutte le serie del Calcolo Differenziale ridotto in forma d'Istituzione da spiegarsi nelle Scuole.

CAPO QUINTO

Reyneau ordina gli elementi del Calcolo Integrale, nel mentre che altri Matematici, e i due Nicolò, e Daniele Bernoulli faticano grandemente anch'eglino per l'avanzamento della nuov' Analisi.

CAPO SESTO

Delle insigni operazioni di Riccati, Taylor, Moivre, Nicole, e Fagnani, per l'avanzamento, ed ordinato sviluppo della nuova analisi: e delle grandi cose operate da Giacomo Cassini nell'Astronomìa.

CAPO SETTIMO

Eulero percorre rapidamente tutte le parti delle Matematiche da riformatore, e da maestro: e perfeziona le teorìe della scienza analitica, del moto de' corpi, e dell'Idrodinamica con ammirazione, e sorpresa.

FINE DELL' INDICE

NIHIL OBSTAT

Barnabas Tortolini in Archigymnasio Romano
Calculi Sublimioris Professor, et Censor Deputatus

IMPRIMATUR

Fr. Dom. Buttaoni Or. Pr. Sac. Pal. Ap. Mag.

IMPRIMATUR

Jos. Canali Patr. Constant. Vicesg.