# SAGGIO

SULLA

STORIA GENERALE

DELLE

# MATEMATICHE

DI

CARLO BOSSUT.

*prima edizione italiana con riflessioni ed aggiunte*

DI

GREGORIO FONTANA.

TOMO TERZO

MILANO 1802.

presso { NOBILE e TOSI, Librai-Stampatori *sulla corsia del Duomo.*
G.P. GIEGLER, Libraio *sulla corsia de' Servi.*

# QUARTO PERIODO

## PROGRESSO DELLE MATEMATICHE

### DALLA SCOPERTA DELL'ANALISI INFINITESIMALE SINO AI NOSTRI GIORNI.

I progressi che le matematiche hanno fatto in questo quarto Periodo, essendo dovuti, la maggior parte, all' *analisi infinitesimale*, altrimenti chiamata *il metodo delle flussioni*, comincerò dalla storia di questa nuova analisi, e la condurrò senza interruzione sino ai nostri giorni. In seguito ripiglierò successivamente, e secondo il medesimo piano, le altre parti delle matematiche.

Siccome l'analisi infinitesimale si è sviluppata per gradi, e colla soluzione di diversi problemi, alcuni de' quali sono relativi alla geometria pura, altri alla meccanica, altri all'astronomia, ec., così sarò costretto di frammischiare questi problemi; ma da ciò non risulterà alcun disordine, nè confusione



veruna, avendo tutti l'oggetto medesimo; cioè il progresso dell'arte per mezzo della quale sono stati risolati. Riserverò per ciascuna parte delle matematiche i problemi che ad essa si riferiscono, allorchè non hanno immediatamente concorso allo scopo indicato.

Tutti i fatti che prendo a narrare, sono cavati dalle sorgenti, cioè a dire, da' giornali del tempo di cui parlo, dalle memorie delle accademie, da' trattati pubblicati separatamente, e dalle raccolte delle opere di Leibnizio, di Newton, de' fratelli Bernoulli, ec. Sarebbe stata cosa troppo lunga il citare partitamente i titoli di tutti gli scritti sui quali mi appoggio, e che ho letti con attenzione: ciò ho fatto solamente quando la cosa mi è sembrata necessaria. Ma ho indicato esattamente le date delle scoperte, o nel testo medesimo, o nelle note marginali.

## CAPO PRIMO.

*Scoperta dell' analisi infinitesimale: Leibnizio è il primo a pubblicarne gli elementi; Newton fa uso d' un metodo simile nel suo libro de' principj matematici.*

Di tutti i grandi concepimenti che onorano la mente umana, l' analisi infinitesimale è per avventura il più ragguardevole, sì pel carattere dell' invenzione, che per la varietà ed importanza de' suoi usi. Pressochè nella sua origine, ella imprime alla geometria, e di mano in mano alle altre parti delle matematiche, un movimento che si accelera con rapidità, a misura che l' arte si perfeziona. Problemi ribelli o estranei agli antichi metodi, si sottomettono senza resistenza alla nuova analisi. La generalità ed uniformità dei mezzi ravvicinano sotto il medesimo punto di veduta delle teorie che sembravano isolate ed indipendenti le une dalle altre. Un edifizio regolare e magnifico s' innalza sopra una salda base, che mantiene tutte le parti in giusta proporzione ed in perfetto equilibrio. Se i due più grandi geometri dell' antichità, Archimede ed Apollonio, potessero rivivere,



sarebbero eglino medesimi colpiti dallo stupore e dalla maraviglia, nel contemplare i progressi che le scienze esatte hanno fatto dopo il loro tempo sino al nostro, a traverso di secoli barbari che hanno tante volte interrotto il cammino del genio.

Ma l' ingegno umano non deve per ciò prendere un' opinione troppo orgogliosa delle sue forze, mentre non avrebbe alcun ragionevole fondamento. Se in questa massa di cognizioni, accumulate dal tempo, si potesse separare il prodotto della memoria, e fissare la parte unicamente dovuta alla sagacità primitiva di ciascun inventore, si troverebbe un numero assai grande di piccole porzioni. Tutto è sottomesso alla legge di continuità, nel mondo intellettuale, come nella successione degli esseri fisici. Noi ci strasciniamo, per così dire, da una verità alla verità vicina. Il genio può raccorciare la catena dei principj e delle conseguenze, ma non la distrugge, e non cammina mai per salti. Qualche volta un' idea rinchiusa apparentemente in uno spazio fisso e determinato, s' ingrandisce a poco a poco colla riflessione, e forma il nocciuolo d' un corpo di scienza, che non ha più confini. Qui si presenta un grande esempio. Il metodo di condurre le tan-

genti alle linee curve per mezzo della nuova analisi, è la pietra fondamentale del vasto edifizio delle scienze nel suo stato attuale, come un ruscello, debole alla sua origine, accresciuto successivamente dalle acque che riceve, diventa finalmente un fiume maestoso.

Gli antichi conducevano le tangenti alle sezioni coniche ed alle altre curve geometriche di loro invenzione, con mezzi particolari, derivati in ciascun caso dalle proprietà individuali della curva di cui si trattava. Archimede determinò, in modo simile, le tangenti della spirale, curva meccanica. Tra i moderni, Cartesio, Fermat, Roberval, Barrow, Sluze, ec., avevano trovato de' metodi uniformi, più o meno semplici, per condurre le tangenti delle curve geometriche; il che era già un gran passo: ma faceva d'uopo prima d'ogni cosa che le equazioni delle curve fossero libere dalle quantità radicali, se ne contenevano; e quest' operazione esigeva qualche volta de' calcoli immensi, ed anche assolutamente impraticabili. La tangente della cicloide, curva meccanica moderna, non era stata determinata che per mezzo d'alcuni artifizj fondati sopra la sua natura, e da cui non si poteva trarre alcun lume per altri esempj. Rimaneva da trovarsi



un metodo generale che si applicasse indistintamente ad ogni specie di curve, geometriche o meccaniche, senza che fosse necessario in alcun caso di far sparire le quantità radicali.

*Leibnizio, nato nel* 1646, *e morto nel* 1716.

Leibnizio pubblicò questa sublime scoperta (primo passo del calcolo differenziale), negli atti di Lipsia pel mese di ottobre 1684. Lo scritto per sempre memorabile che la contiene, è intitolato: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*. In esso trovasi il metodo per differenziare ogni sorta di quantità, razionali, frazionarie, radicali, e l'applicazione di questi calcoli ad un esempio molto complicato che indica la via per tutti i casi. In seguito l'autore risolve un problema *de maximis et minimis*, il cui oggetto è di trovare la strada che deve seguire un corpuscolo di luce che attraversa due mezzi differenti, affine di arrivare da un punto ad un altro pel cammino più facile. Il risultato della sua soluzione si è che i seni degli angoli d'incidenza e di rifrazione deb-

bono stare tra loro in ragione reciproca delle resistenze de' due mezzi. Finalmente, egli applica il suo nuovo calcolo ad un problema che Beaune aveva altre volte proposto a Cartesio, e di cui questi aveva dato una soluzione incompleta. Si trattava di trovare una curva la cui sottangente fosse dappertutto la medesima: Leibnizio fa vedere in due tratti di penna, che la curva cercata è tale, che se le ascisse formano una progressione aritmetica, le ordinate formano una progressione geometrica: proprietà da cui si riconosce la logaritmica ordinaria.

Qualche tempo dopo, in due piccioli scritti sopra le quadrature delle curve, egli gettò le prime nozioni del *calcolo sommatorio o integrale*. Queste idee sono sviluppate di più in un altro scritto intitolato: *De Geometria recondita et Analisi indivisibilium atque infinitorum*. Leibnizio vi dà la regola fondamentale del calcolo integrale: spiega in che consistano i problemi del metodo inverso delle tangenti, che in seguito è stato variato in tante maniere. Barrow aveva laboriosamente dimostrato che in ogni curva la somma de' prodotti degli intervalli infinitesimi delle ordinate per le sotto normali della curva, è uguale alla metà del quadrato dell'ordinata

Anno 1685

Anno 1686



estrema. Leibnizio trova quasi per divertimento il medesimo risultato, per mezzo del calcolo integrale; ed osserva in generale che tutti i problemi delle quadrature, dati prima dai geometri, si risolvono senza alcuna difficoltà col suo metodo.

*Newton, nato nel* 1642, *e morto nel* 1727.

Nel tempo che Leibnizio era in possesso di tutte queste ricchezze, Newton non aveva per anche pubblicato alcuna cosa che potesse far conoscere ch'egli era dal canto suo pervenuto a simili risultati; ma sul finire dell' anno 1686, venne alla luce il suo libro intitolato: *Philosophiae naturalis principia mathematica*; opera immensa e profonda, nella quale si è proposto di spiegare, per mezzo dell'osservazione e del calcolo, i principali fenomeni della natura, ed in ispecie i movimenti de' corpi celesti. Parlerò in dettaglio di quest'opera, quando sarò giunto all'astronomia fisica. Qui mi contento di notare che la chiave de' più difficili problemi in essa risoluti, è il metodo delle flussioni, ossia l'analisi infinitesimale, ma presentata sotto una forma che la nascondeva, e rendeva l'opera difficoltosa da studiarsi. Laonde non ebbe

da principio tutto il successo che meritava; in essa si trovarono delle oscurità, delle dimostrazioni prese da sorgenti troppo rimote, un uso troppo affettato del metodo sintetico degli antichi, mentre l'analisi avrebbe fatto conoscere molto meglio lo spirito ed il progresso dell'invenzione. L'estrema concisione d'alcuni luoghi fece pensare, o che Newton, dotato d'una sagacità straordinaria, avesse un po' troppo presunto della penetrazione dei suoi lettori, o che, per una debolezza da cui gli uomini più grandi non sono sempre esenti, avesse cercato di sorprendere un'ammirazione che il volgo facilmente accorda alle cose che oltrepassano o stancano la sua intelligenza. Comunque sia la cosa, la grande celebrità del libro de' principj non comincia che dal principio del secolo passato, in cui l'analisi infinitesimale, già molto avanzata, pose i geometri in istato di comprenderlo. Allora si rilevò, in modo da non poterne dubitare, che de' teoremi e de' problemi involti in una sintesi complicata, erano stati originariamente trovati coll'analisi: ma nel tempo stesso si rese a Newton la giustizia di riconoscere che all'epoca della pubblicazione del suo libro, egli possedeva il metodo delle flussioni in un grado eminente, almeno in



quanto alla parte che concerne le quadrature delle curve. Esaminerò nel seguito il diritto ch'egli ha, in concorrenza con Leibnizio, all'invenzione di questo metodo: aspettiamo, per parlarne, le circostanze nelle quali s'impegnò questa specie di processo, e continuiamo qui il compendio storico de' progressi della scienza.

## CAPO II.

*Leibnizio continua ad estendere la sua nuova analisi: è secondato dai fratelli Bernoulli. Varj problemi proposti e risoluti. Analisi degli infinitamente piccoli dell' Hopital.*

Nel tempo che Leibnizio era più che mai occupato a perfezionare la nuova analisi, ne fu prima un po' frastornato da una disputa ch'ebbe co' cartesiani sopra la misura delle forze vive. Egli aveva avanzato che Cartesio (1) ed i suoi discepoli si erano ingannati nel misurare la forza de' corpi in moto col semplice prodotto della massa e della velocità, e che bisognava misurarla col prodotto della

(1) *Act. Lips.* 1686.

massa e del quadrato della velocità; la sua prova si riduceva a questo ragionamento semplicissimo. Per confessione d'ognuno, vi vuole la medesima forza per alzare un peso d'una libbra a quattro piedi d'altezza, che per alzare un peso di quattro libbre ad un piede d'altezza; ora un corpo che cade da quattro piedi, ed un corpo che cade da un piede, acquistano delle velocità che sono come due ed uno: dunque, secondo i cartesiani, le forze sarebbero qui come due e quattro, invece di essere eguali. I cartesiani risposero che si doveva aver riguardo alla differenza de' tempi delle cadute ne' due casi: Leibnizio replicò che la considerazione del tempo doveva essere posta in disparte; che la forza esisteva in sè stessa, e che poco importava di sapere come era stata acquistata. Ben presto i contendenti si perdettero in sottigliezze metafisiche che facevano brillare l'ingegno senza rischiarare la quistione. Finalmente, l'egualità dei tempi, che i cartesiani esigevano assolutamente per la misura e pel confronto delle forze motrici, fece nascere a Leibnizio l'idea d'un problema curioso, che loro propose come un mezzo di rendere la discussione almeno utile alla geometria: esso consisteva nel trovare la curva



*isocrona*; cioè a dire, *la curva che deve seguire un corpo pesante per allontanarsi o avvicinarsi egualmente, in tempi eguali, da un piano orizzontale*. Ma i cartesiani, fino a quel punto, molto prodighi di *spiegazioni*, *di annotazioni*, *di repliche*, serbarono qui un profondo silenzio, e l'analisi del loro maestro, tanto da essi esaltata, non somministrò loro alcun mezzo di rispondere alla sfida che loro veniva diretta.

Anno 1687 Huguens che non aveva preso alcuna parte nella questione sopra la misura delle forze vive, giudicò il problema degno della sua applicazione; egli pubblicò le proprietà e la costruzione della curva, senza aggiungerne le dimostrazioni. Questa curva è la seconda parabola cubica.

Leibnizio, dopo avere aspettato invano per tre anni la soluzione de' cartesiani, nominò la medesima curva di Huguens, e dimostrò ch'essa soddisfaceva al problema. E per *offrire*, egli diceva, *la pariglia* a' suoi avversarj, propose loro di trovare la curva *isocrona paracentrica*, in cui il corpo deve presentemente allontanarsi o avvicinarsi egualmente, in tempi eguali, rispetto ad un punto fisso; ma questo secondo problema era più intralciato dell'altro, e la pretesa poli-

[illegible] di Leibnizio poteva riguardarsi come una derisione.

Questa piccola guerra, ed altre opere assolutamente estranee alle matematiche, toglievano a Leibnizio un tempo ch' egli avrebbe voluto consecrare tutto intero al progresso della nuova geometria. Malgrado tante distrazioni, egli diffondeva continuamente nei giornali delle idee che tendevano a questo fine. Egli fu ben presto secondato da due uomini illustri che adottarono il suo metodo con ardore, se lo appropriarono, e ne fecero tante belle applicazioni, che Leibnizio ha più volte pubblicato ne' giornali, con un abbandono veramente degno d' un uomo sì grande, ch' esso doveva non meno da loro ripetersi che da lui medesimo. Si scorge che voglio parlare de' due fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli.

*Giacomo Bernoulli, nato nel 1654, e morto nel 1705. Giovanni Bernoulli, nato nel 1667, e morto nel 1748.*

Il primogenito (Giacomo Bernoulli), già celebre per varie opere di geometria, di meccanica e di fisica, aveva iniziato suo fratello nelle matematiche. I progressi che fe-





cero unitamente o separatamente nella nuova analisi, furono rapidi. Una nobile emulazione, stretta dai vincoli del sangue, dell' amicizia e della riconoscenza, diresse i loro studj per due o tre anni. Avidi soltanto d' istruirsi, altro non avevano allora dinanzi agli occhi che la sublime ambizione di penetrare nel laberinto scientifico aperto alla loro curiosità; e quella sventurata rivalità che si rassomiglia all' invidia, non turbava per anche sì dolci godimenti.

Anno 1690 Nel suo ingresso nella carriera, Giacomo Bernoulli diede la soluzione e l' analisi del problema della curva isocrona ordinaria: egli trovò, come Leibnizio ed Huguens, che questa curva è la seconda parabola cubica. Da ciò prese occasione di proporre ai geometri un problema che Galileo aveva altre volte inutilmente tentato di risolvere: esso era di *trovare la curva che forma la catenaria, o un filo pesante flessibile ed inestensibile, attaccato nelle sue estremità a due punti fissi*.

Questo uso di proporre pubblicamente de' problemi, già da lungo tempo introdotto tra i geometri, ed al quale Leibnizio ed i fratelli Bernoulli hanno dato principalmente una gran voga, era allora un possente mezzo per aguzzare gli ingegni, e far concorrere

tutte le loro facoltà al progresso d'una geometria nascente: tale fu l'effetto che produsse il problema della catenaria.

Mentre se ne cercava la soluzione, Giacomo Bernoulli pubblicò due memorie, nelle quali determina colla nuova analisi le tangenti, le quadrature degli spazj, e le rettificazioni di tre curve famose: la spirale parabolica, la spirale logaritmica, e la lossodromia; alle quali aggiunse per supplemento la misura dell'area de' triangoli sferici. Questi due scritti contengono i primi saggi un poco sviluppati che siensi dati del calcolo integrale, al progresso del quale essi hanno di fatti sensibilmente contribuito. L'autore non si ristrinse alla semplice teoria: indicò alcune proprietà utili della lossodromia. Anno 1691

Dal canto suo, Leibnizio fe' comparire, sopra la quadratura aritmetica delle sezioni coniche che hanno un centro, uno scritto nel quale stabilisce alcune formole analitiche semplicissime e facilmente convertibili in numeri: egli applicò il suo metodo ad alcuni problemi concernenti la lossodromia.

Il problema della catenaria fu risoluto da Huguens, Leibnizio e Giovanni Bernoulli. Siccome allora i due fratelli Bernoulli lavoravano ordinariamente in comune, così si Anno 1690



presume che la soluzione di Giovanni Bernoulli sia il lavoro dell'uno e dell'altro. Questo problema è la vera epoca in cui l'analisi delle equazioni differenziali comincia a prendere un carattere fisso e certo. Da principio non si considerarono che catenarie uniformemente pesanti: Giacomo Bernoulli estese la soluzione al caso in cui il peso della catenaria variasse da un punto all'altro secondo una data legge. Di mano in mano e per l'analogia delle materie, il medesimo geometra determinò la curva che forma un arco teso, quella d'una lana elastica saldamente fermata ad un capo, ed aggravata d'un dato peso all'altro capo: egli fissò più particolarmente la sua attenzione sopra la curvatura che prende una vela flessibile enfiata dal vento, sperando che questa ricerca potrebbe essere utile alla navigazione: egli trovò che nella supposizione in cui il vento, dopo aver colpita la vela, avesse tutta la libertà di scappare, la curva della vela è una catenaria ordinaria, ma se la vela, sempre supposta perfettamente flessibile, fosse enfiata da un fluido che pesasse verticalmente su di essa, come l'acqua pesa su le pareti d'un vaso che la contiene, essa formerebbe una curva conosciuta sotto il nome di *linteq-* Anno 1692

$ma$, e la cui natura è espressa dalla medesima equazione della curva elastica ordinaria, in cui le estensioni sono supposte proporzionali alle forze applicate a ciascun punto: Giacomo Bernoulli mostrò in questa quistione, ed in alcune altre del medesimo genere, una profonda sagacità.

Nel tempo ch' egli era occupato delle sue prime meditazioni sopra la curvatura della vela, ne comunicava successivamente i progressi con lettere a suo fratello, allora assente da Basilea. Chiaramente si rileva che queste aperture condussero Giovanni Bernoulli alla soluzione che pubblicò del medesimo problema, nel giornale de' dotti, e da cui risulta egualmente che la curva della vela è una catenaria. Egli medesimo, dal modo con cui espone i fatti, ci somministra la prova del soccorso che aveva ricevuto. Dopo ciò non s'ha egli ragione d'essere un po' sorpresi nel trovare qui i primi indizj di quella gelosia che mostrò nel seguito troppo apertamente contro il suo antico maestro? Anno 1692

La teoria delle curve che, rivolgendosi sopra sè stesse, ne producono delle altre, fu per Giacomo Bernoulli un campo di notabili scoperte. Egli suppone che data una curva qualunque, e considerata come immobile, si Anno 1692



faccia rotolare sopra di essa una curva eguale e simile; determina l'evoluta e la caustica dalla specie di girella che descrive un punto della curva girante; egli ne ricava due altre curve analoghe, che chiama *l'antievoluta* e la *pericaustica*. Tutte queste curve offrivano una moltitudine di proprietà degne certamente di stimolare la curiosità de' geometri, soprattutto in un tempo in cui erano ancor poco esercitati nel maneggio della nuova analisi. Applicando i suoi metodi alla spirale logaritmica, Giacomo Bernoulli trovò che questa curva è essa stessa la sua evoluta, la sua caustica, la sua antievoluta e la sua pericaustica: carattere singolare, di cui fu talmente meravigliato, che non potè a meno di manifestare con calore che se vi fosse ancora l'uso, come al tempo d'Archimede, di porre delle figure e delle iscrizioni sopra il sepolcro de' geometri, egli avrebbe desiderato che sopra il suo fosse incisa una spirale logaritmica con queste parole: *Eadem mutata resurgo*.

La cicloide ha delle proprietà analoghe a quelle che ho riferite alla spirale: Giacomo Bernoulli le fece conoscere in un' addizione alla sua prima memoria; egli avverte nel

medesimo tempo che suo fratello era giunto dal canto suo a simili risultati.

Non devo tralasciare uno scritto di Leibnizio sopra le curve che si formano d' un' infinità di linee rette o curve, che vanno a concorrere ad una serie di punti sottoposti ad una data legge. Questo scritto poco sviluppato contiene alcune viste generali per la soluzione di molti problemi, come quelli delle caustiche, delle curve che ne tagliano una serie di altre sotto un angolo dato, ec. Leibnizio si dedicava di raro ai lavori di dettaglio; tosto che si vedeva in possesso d' un metodo, lo abbandonava, lasciando ad altri il piacere d' intenderlo e perfezionarlo.

In questa moltitudine di problemi, ne comparve uno molto curioso, proposto da Viviani, celebre geometra italiano, sotto questo titolo: *AEnigma geometricum de miro opificio testitudinis quadrabilis hemisphaericae*. L'autore fingeva che, tra gli antichi monumenti della dotta Grecia, esistesse ancora un tempio di forma emisferica, traforato da quattro finestre eguali, con un'arte tale, che il rimanente della volta fosse assolutamente quadrabile; e sperava che gli *illustri analisti del secolo* (così denotava i geometri in possesso de' nuovi calcoli), indovinerebbero facilmente

Anno 1692



questo enigma. Egli non fu deluso nella sua speranza: il giorno medesimo in cui Leibnizio e Giacomo Bernoulli ricevettero il programma di Viviani, risolvettero il problema; e gli altri geometri *infinitarj* l' avrebbero certamente del pari risoluto, se a tempo fosse giunto a loro notizia. Viviani era profondo nell' antica geometria: egli si era principalmente distinto colla *divinazione* ossia la *restituzione* de' cinque libri delle coniche dell' antico Aristeo, che sono perduti; ma quando comparve la geometria degli infinitamente piccoli, egli era troppo avanzato in età per istudiarla ed approfondirla; egli era altronde un uomo veramente modesto, che non aveva certamente avuta l' intenzione di dare la tortura agli *illustri analisti*. Nondimeno egli è forza di riconoscere che la di lui soluzione, fondata sul metodo sintetico degli antichi, è molto commendabile per la sua semplicità ed eleganza: egli dimostrò che si soddisfaceva al quesito innalzando, perpendicolarmente alla base della volta emisferica, due cilindri retti, i cui assi passino pei mezzi di due raggi che formano il medesimo diametro del cerchio della base.

Un problema che si riferisce al metodo *de maximis et minimis*, occupò lungo tempo

Anno 1625

senza successo i fratelli Bernoulli; esso era di *trovare il giorno del più piccolo crepuscolo per un luogo di latitudine data*. Questa quistione, trattata col metodo analitico, conduce ad un' equazione del quarto grado, nella quale è cosa incomoda il separare le radici utili da quelle che debbono essere rigettate; ma, facendo uso del metodo sintetico, i due fratelli giunsero, ciascuno dal canto suo, ad un' analogia semplicissima e comodissima nel calcolo astronomico.

La carica di professore di matematica nell' università di Basilea, che occupava Giacomo Bernoulli, fruttò a' suoi allievi ed al pubblico un eccellente trattato sopra la sommazione delle serie; la prima parte era comparsa nel 1689, e la seconda fu pubblicata nel 1692.

*Hopital, nato nel* 1661, *e morto nel* 1704.

Tutte le parti della nuova geometria camminavano rapidamente. I problemi volavano da tutte le parti; ed i giornali erano divenuti una specie di dotta arena, dove si vedevano combattere i più grandi geometri di quel tempo, Hugueus, Leibnizio, i fratelli Bernoulli, Newton, ed il marchese dell' Hopital,



che vi sostenne degnamente, per più anni, l' onore della Francia.

Il problema seguente, proposto da Giovanni Bernoulli, contribuì molto al progresso de' metodi per integrare le equazioni differenziali: *trovare una curva tale che le tangenti terminate all' asse fossero in data ragione colle parti dell' asse, comprese tra la curva e queste tangenti*. Esso fu risoluto da Huguens, Leibnizio, Giacomo Bernoulli e dal marchese dell' Hopital.

In quest' occasione Huguens rese una testimonianza tanto più onorevole ai nuovi calcoli, quanto che questo grand' uomo avendo fatto molte sublimi scoperte senza questi calcoli, poteva essere dispensato dal celebrarne i vantaggi: egli confessa che vedeva *con sorpresa e maraviglia l' estensione e fecondità di quest' arte*; che da qualunqne parte *volgesse lo sguardo, ne scopriva nuovi usi, e che per fine vi concepiva un progresso ed una speculazione infinita*. Quale sventura ch' egli sia stato rapito alle scienze in un' età in cui, col soccorso di questo nuovo istrumento, poteva ancora rendere loro de' servigi tanto importanti!

*Tschirnhaus, nato nel* 1651, *e morto nel* 1708.

Tschirnhaus aveva fatto conoscere, già da molti anni, le famose curve chiamate *caustiche*: esse sono formate, come è noto, dal concorso de' raggi di luce che un' altra curva qualunque ha riflettuti o rifratti. Tschirnhaus col solo soccorso della geometria ordinaria ne aveva scoperto molte belle proprietà, come per esempio, ch' esse sono eguali alle linee rette, quando le curve che le producono sono geometriche. La geometria degli infinitamente piccoli facilitò estremamente tutte queste ricerche, e Giacomo Bernoulli le portò molt' oltre, principalmente la teoria delle caustiche per rifrazione. Anno 1693

L' abbondanza delle materie ed i limiti di questo saggio mi costringono a passare sotto silenzio molte altre memorie di Giacomo Bernoulli, sopra varj argomenti di geometria, meccanica, idraulica, ec. Ometto parimente le riflessioni di Leibnizio su la maniera di risolvere i problemi delle quadrature, colla costruzione di certe curve che descrive per mezzo di movimenti soggetti a leggi date. La descrizione della *trattoria* è un esempio di questi movimenti, ed è difatti Anno 1693



nell'occasione di questa curva, di cui Claudio Perrault gli aveva richiesta la natura, che Leibnizio propose queste riflessioni nelle quali si riconosce la di lui ordinaria acutezza. Dico la stessa cosa d' una nuova applicazione che Leibnizio fece del suo calcolo differenziale per costruire le curve dietro una condizione delle tangenti. Altri geometri diedero, verso il medesimo tempo, delle opere, o delle soluzioni di problemi, che sarebbe troppo lungo il riferire.

Sembrava che i geometri avessero dimenticato il problema della curva isocrona paracentrica, che Leibnizio aveva proposto nel 1689, e di cui teneva sempre celata la soluzione. La cagione di questa dimenticanza apparente era certamente la difficoltà di separare le indeterminate dell' equazione che trovasi, quando si riferisce la curva a coordinate perpendicolari. Giacomo Bernoulli superò la difficoltà, prendendo per ordinate delle rette parallele, e per ascisse le corde d'un'infinità di cerchi che hanno tutti per centro il punto fisso: ottenne in tal modo un' equazione separata, che costruì dapprima colla rettificazione della curva elastica, ed in seguito con quella d' una curva algebrica. Poco tempo dopo, Giovanni Bernoulli risolse Anno 1694

parimente questo problema: egli ne diede un' analisi dettagliata e completa, che avrei molto lodata, se egli medesimo non lo avesse fatto, e se si fosse astenuto dal criticare ingiustamente le costruzioni di suo fratello, alle quali parimente si riferisce quest' analisi in quanto alla sostanza. Leibnizio pubblicò nel medesimo tempo la sua soluzione, che non differisce essenzialmente da quella dei due Bernoulli, ma che è accompagnata da riflessioni utili al progresso della geometria.

Nel *Commercium epistolicum* di Leibnizio e Giovanni Bernoulli, pubblicato solamente nell'anno 1745, si scorge che sino dall' anno 1794 (1) eglino avevano trovato ambidue, ciascuno dal canto suo, quel ramo della nuova analisi, che chiamasi *calcolo esponenziale*. Leibnizio ha la priorità di data; ma Giovanni Bernoulli ha fatto la scoperta da sè medesimo: egli pubblicò, nel 1697, le regole e l'uso di questo calcolo, e si crede ordinariamente ch' egli ne sia il primo ed anche il solo inventore.

Questo medesimo *commercio* offre, sotto l'anno 1695, una importante riflessione di Anno 1695

(1) *Tom. I, pag.* 10.



Leibnizio sopra l'analogia che regna tra le potenze d' un polinomio composto di termini variabili, e le differenziali (del medesimo ordine) del prodotto di questi termini. Da ciò Giovanni Bernoulli dedusse un metodo per integrare, in certi casi, alcune formole differenziali di tutti gli ordini.

Anno 1695 Nel numero de' più curiosi problemi di quel tempo si deve contare quello della curva d' equilibrazione nei ponti levatoi, risoluto dal marchese dell' Hopital: egli meritò principalmente l' attenzione de' geometri, attesa l' utilità che se ne sperava per la pratica. Giovanni Bernoulli osservò che la curva domandata, di cui il marchese dell' Hopital aveva data l' equazione generale, era una *epicicloide*, ossia ch' essa poteva essere generata da uno stilo fissato in un cerchio che gira sopra un altro cerchio. Leibnizio e Giacomo Bernoulli diedero essi pure delle soluzioni di questo problema.

Verso il medesimo tempo si distingue un eccellente scritto di Giacomo Bernoulli, concernente la curva elastica, le curve isocrone, il cammino di direzione media nel corso de' navigli, il metodo inverso delle tangenti, ec. Egli aveva già trattato la maggior parte di questi argomenti: qui egli li esten-

de, li rettifica e li perfeziona. Alle discussioni scientifiche egli frammischia alcuni dettagli storici che si leggono con piacere: rispinge per la prima volta gli assalti ingiusti e reiterati di suo fratello: egli lo avverte di moderare le sue pretensioni, di dare meno importanza ad alcune scoperte che l'istrumento, onde si erano muniti entrambi, rendeva facili, e di riconoscere che *siccome le quantità in geometria crescono per gradi, così pure ogni uomo provveduto del medesimo strumento avrebbe trovato gradatamente i medesimi risultati*: parole modeste e molto notabili nella bocca di uno de' più grandi geometri che la terra abbia portato.

Questa memoria era terminata dall' invito che Giacomo Bernoulli faceva ai geometri d'integrare un' equazione differenziale generalissima e del maggior uso nell' analisi. La soluzione ch' egli aveva trovata di questo problema, e quelle che ne diedero Leibnizio e Giovanni Bernoulli, furono pubblicate negli atti di Lipsia.

Comparve, nell' anno 1696, un gran numero di opere che diedero una nuova estensione all' analisi infinitesimale: tali furono la memoria di Giacomo Bernoulli sopra le quadrature delle superficie sferoidali, dove trovansi



de' problemi analoghi a quello di Viviani, ma più generali e più complicati; molti bei teoremi di Giovanni Bernoulli sopra queste medesime quadrature; la terza parte del trattato delle *serie* di Giacomo Bernoulli, e principalmente il celebre libro del marchese dell' Hopital, intitolato: *Analisi degli infinitamente piccoli per l' intelligenza delle linee curve*, sul quale mi fermerò per un momento.

Era molto tempo che si desiderava un' opera sì fatta.» Sino a quel tempo, dice « Fontenelle nell' elogio del marchese dell' « Hopital, la nuova geometria altro non era « stata che una specie di mistero, e per così « dire, una scienza cabalistica rinchiusa tra « cinque o sei persone. Sovente si davano « ne' giornali le soluzioni, senza lasciare ap« parire il metodo che le aveva prodotte; « ed altresì quando si scopriva, non erano « che alcuni deboli raggi di questa scienza « che sfuggivano, e le nubi tosto ricompari« vano. Il pubblico, o per dir meglio, il « piccol numero di quelli che aspiravano « alla geometria sublime, erano colpiti da una « inutile ammirazione che non dava loro al« cuno schiarimento: e si trovava il mezzo « di ottenere i loro applausi, col ritenere « l' istruzione con cui si sarebbe dovuto ri-

a ricompensarli. » L' opera del marchese dell' Hopital svelò tutta la scienza del calcolo differenziale; essa fu ricevuta con applauso universale, tenuta allora, ed anche presentemente, nel numero de' libri classici. Ma non era ancora giunto il tempo di trattare allo stesso modo il calcolo integrale, che è immenso nei dettagli, e che malgrado i considerabili progressi che ha fatti, non è ancora in gran parte del tutto inventato. Leibnizio prometteva un libro che, sotto il titolo di *Scientia infiniti*, doveva comprendere il calcolo differenziale ed integrale; ma quest' opera, che allora sarebbe stata molto utile, non ha mai veduta la luce.

## CAPO III.

*Insigne movimento nella teoria* de Maximis et Minimis. *Disputa de' fratelli Bernoulli sopra il problema degli isoperimetri.*

Tutti i problemi *de maximis et minimis* che erano stati risoluti sino al tempo in cui siamo, avevano avuto il solo oggetto di trovare, nel numero delle funzioni esplicite che racchiudono una sola variabile, o riducibili ad una sola variabile, quelle che, tra le loro Anno 1696





simili, possono diventare de' *massimi* o *minimi*. Cartesio, Fermat, Sluze, Hudde, ec., si erano fatti de' metodi particolari per questi problemi: ma il metodo del calcolo differenziale gli aveva tutti fatti sparire, per la sua semplicità e generalità. Rimaneva un' altra classe di problemi del medesimo genere, ma molto più profonda e più complicata, dove il calcolo differenziale ed integrale erano necessarj l'uno e l'altro: essa consisteva nel trovare tra le funzioni *implicite* o affette dai segni *sommatorj*, quelle che danno de' *massimi* o *minimi*; come, per esempio, la curva che rinchiude lo spazio più grande secondo alcune date condizioni, o che produce colla sua rivoluzione il solido più grande tra alcuni limiti parimente dati, ec. Newton (1), dopo aver determinato, fra tutti i coni retti troncati, della medesima altezza, quello che, mosso in un fluido colla base minore (incognita) secondo la direzione del suo asse, soffre la minima resistenza possibile (problema del genere antico), aveva enunziato senza dimostrazione una proporzione, da cui si ricava l' equazione differenziale della curva,

(1) *Prin. Math. lib.* II, *prop.* 34

che, girando intorno al suo asse, produce *il solido della minima resistenza*: problema relativo al secondo genere. Il principio di questa soluzione, di cui Newton, secondo il suo costume, ne aveva fatto un mistero, si è che, quando una proprietà di *maximum* o *minimum* conviene ad una curva, o ad una porzione finita di curva, essa conviene altresì ad una porzione infinitamente piccola: esso ha dell' analogia coi mezzi che si sono più volte usati nella geometria; come, per esempio, quando si dimostra l'eguaglianza d'una zona sferica colla superficie corrispondente del cilindro circoscritto, per mezzo della reciproca eguaglianza de' loro elementi. Ma quand' anche Newton avesse indicato formalmente questo principio, il problema generale aveva ancora, in ciascun caso particolare, la sua particolare difficoltà, tanto per trovare l'equazione differenziale della curva, quanto per conseguirne la integrazione. Quindi le scienze hanno un' obbligazione della più alta importanza a Giovanni Bernoulli, d'avere rivolta l'attenzione de' geometri sopra questa teoria generale, loro proponendo il famoso problema della *Brachistocrona*, ossia *d' una curva tale, che un corpo pesante discendendo lungo la sua concavità, arrivi nel minimo tempo possibile da* Anno 1697



*un punto ad un altro, essendo i due punti non situati nella medesima linea verticale*. Egli è certo che, nell' epoca di cui trattasi, questo problema era più difficile di quello del solido della minima resistenza, di cui Newton aveva altresì lasciata la soluzione incompleta, poichè non aveva integrato l'equazione differenziale della curva generatrice.

Al primo aspetto, ognuno è portato a credere che la linea retta, come il più breve cammino da un punto all' altro, debba essere altresì il cammino della più veloce discesa; ma il geometra attento si astiene di pronunziare, allorquando considera che in una curva concava descritta da un punto all'altro, il mobile discende da principio più verticalmente, ed acquista per conseguenza una maggiore velocità, che sopra il semplice piano inclinato; il che produce un compenso, e può far arrivare il corpo più prontamente secondo la linea curva, che secondo la linea retta. Dunque la sola metafisica non può risolvere il quesito; bisognava assolutamente ricorrere ad un calcolo preciso. Ora il risultato di questo calcolo fece conoscere che effettivamente il cammino cercato è una curva, ed un arco di cicloide rovesciata: nuova proprietà notabilissima della cicloide, che le

ricerche di Huguens e Pascal avevano già reso tanto celebre.

Leibnizio risolse il problema il giorno medesimo che ricevette il programma da Giovanni Bernoulli (1), al quale ne diede tosto l'avviso: ambidue convennero di tenere celate le loro soluzioni, e di accordare un anno agli altri geometri per esercitarsi sopra un quesito sì bello. Questo ritardo fu annunziato ne' giornali, e in un foglio volante che Giovanni Bernoulli mandò per tutte le parti.

Il termine non era per anche spirato, allorchè oltre alle soluzioni di Giovanni Bernoulli e Leibnizio, ne comparvero ancora tre altre, i cui autori erano Newton, il marchese dell' Hopital e Giacomo Bernoulli. Quella di Newton comparve anonima, nelle *transazioni filosofiche* della società reale di Londra; ma Giovanni indovinò l'autore, *tamquam*, disse egli, *ex ungue leonem*.

Il marchese dell' Hopital ebbe molta difficoltà nel trovare la sua: essa può nondimeno ricavarsi molto facilmente da un principio che adopera egli medesimo, allorchè

(1) *Leibn. et John. Bern., com. epist. tom.* 1, *pag.* 172.



cerca la strada che deve seguire un viaggiatore per arrivare, nel minimo tempo possibile, da un luogo ad un altro, attraversando due campagne, dove soffre nel camminare delle resistenze che fanno variare la velocità in un dato rapporto; perciocchè se si riguardano le due campagne come i due elementi d'una curva situata in un piano verticale, e suppongasi, conforme alla teoria della caduta de' gravi, che le velocità d'un corpo pesante lungo una curva qualunque, sieno come le radici quadrate delle altezze da cui il corpo è disceso, si giugne immantinente all' equazione differenziale della cicloide. Ma niuno fece allora questa riflessione, e non avvicinò delle idee che ci sembrano presentemente tanto vicine.

Finalmente, Giacomo Bernoulli diede, prima che spirasse il termine prescritto da suo fratello, una soluzione ove dimostra che la curva domandata è un arco di cicloide. Nel cercarla, egli si era sollevato ad alcuni problemi sopra gli isoperimetri, di una speculazione ancor più profonda; e dopo averli risoluti, li propose pubblicamente, di seguito al suo metodo per la curva della più veloce discesa.

Tutte queste soluzioni comparvero nel medesimo tempo, e senza che gli autori ne avessero potuto trarre lume alcuno gli uni dagli altri.

*Storia del problema degli isoperimetri.*

La rivalità di gloria che divideva da lungo tempo i fratelli Bernoulli, si spiegò tutta intera in questa occasione: essa era stata da principio un poco temperata dall' abitudine di vedersi, almeno di tempo in tempo, e dall' interposizione di alcuni amici comuni; ma il minore essendo stato nominato professore di matematica in Groninga, nel 1695, ben presto non mantennero più relazioni particolari: non si parlavano più che ne' giornali, e ciò facevano per proporsi i problemi i più difficili. Giovanni Bernoulli era l' aggressore; ma suo fratello aveva per avventura mostrato un po' troppo di alterigia nella prima risposta che gli fece, e di cui ho riferito il transunto. Gli animi si erano inaspriti; Giovanni Bernoulli tornava spesso ad assalire, ed il suo antico maestro non era uomo da soffrire più lungo tempo degli assalti ingiusti per sè medesimi, ed indipendentemente dai motivi di riconoscenza che avrebbero dovuto



impedirli. Con queste disposizioni, Giacomo Bernoulli volendo finalmente vendicarsi in un modo strepitoso, ma utile nello stesso tempo alla geometria, provocò nominatamente suo fratello a risolvere il problema seguente: *Trovare tra tutte le curve isoperimetre entro dati limiti, una curva tale che, costruendo una seconda curva, le cui ordinate sieno funzioni qualunque delle ordinate o degli archi di quella, l' area della seconda curva formi un* maximum *o un* minimum. A questo problema principale ne unì un altro più analogo a quello della Brachistocrona: esso era *di trovare fra tutte le cicloidi che un corpo grave può descrivere per arrivare da un punto ad una linea data di posizione, la cicloide che viene descritta nel minimo tempo possibile*. Egli terminò la sua disfida presso a poco in questi termini: « Una « persona di cui sono risponsabile (*Prodit NON « NEMO pro quo caveo*) s' impegna a dare, « indipendentemente dalle lodi meritate, un « premio di cinquanta fiorini a mio fratello, « sotto la condizione che in tre mesi prometta di risolvere questi problemi, e che in « un anno ne pubblichi delle soluzioni legittime: se a capo di questo tempo niuno « avrà risoluto i problemi, io pubblicherò le « mie soluzioni. ».

Tosto che Giovanni Bernoulli ebbe ricevuto i diversi scritti che contenevano le soluzioni del suo problema della *Brachistocrona*, egli si credette in diritto, e non mancò di dirne il suo parere: egli lodò molto Leibnizio, il marchese dell' Hopital e Newton. Riconobbe altresì che suo fratello aveva bensì risoluto il problema; ma lo accusò di avervi impiegato troppo: egli certamente si dimenticava che in quel medesimo spazio di quattro o cinque mesi, Giacomo Bernoulli aveva inoltre concepito la teoria generale, ed eseguito i calcoli del grande problema degli isoperimetri che proponeva, e di cui teneva la soluzione in punto di comparire. In seguito passando ai nuovi problemi che a lui medesimo venivano proposti, e credendo che la sua teoria della Brachistocrona bastasse sola per risolverli, Giovanni Bernoulli si lasciò sfuggire queste espressioni d'una vanità molto singolare: « Comunque difficili sembrino « essere questi problemi, io non ho mancato di applicarmi ad essi nel momento stesso che li ho ricevuti; ma guardate con « qual successo! invece di tre mesi che mi « sono dati per tastare il guado, ed invece « di tutto il rimanente di quest' anno per « trovare la soluzione, non ho impiegato in



« tutto che tre minuti di tempo per tentare, « cominciare e finire di esaminare a fondo « tutto il mistero. » Queste belle promesse erano accompagnate dalle costruzioni che dava de' problemi, e dalla domanda che quindi faceva, che gli venisse rilasciato il denaro del premio, volendo, egli diceva, darlo ai poveri, giacchè altronde troppo poco gli era costato il guadagnarlo. Ma l'affare non era però tanto avanzato come egli credeva; e certamente si sarebbe risparmiata tutta questa fattanza, se avesse preveduto ch' essa andava a tirargli addosso dei disgusti tanto più amari, quanto che ad un talento sublime per la geometria egli accoppiava la franchezza o la disavvedutezza di mostrare un po' troppo apertamente l' opinione vantaggiosa ch' egli medesimo ne aveva.

La sua costruzione del problema della cicloide rispetto alla più veloce discesa era esatta. Si scorge ancora ch' egli aveva incontrato a caso la vera soluzione, o piuttosto il vero risultato d'un caso degli isoperimetri; ma il suo metodo non si estendeva al problema generale; e Giacomo Bernoulli, ben sicuro della sua soluzione, trovando che i due metodi non davano la medesima equazione, allorchè le ordinate della seconda curva sono

funzioni degli *ARCHI* della prima, fece stampare un *Avviso*, in cui asseriva che il metodo di suo fratello era difettoso: egli accordava ancora qualche tempo ai geometri per cercare la soluzione, e se nessuno l'avesse data, egli s'impegnava di tre cose: 1.° d'indovinare per l'appunto l'analisi di suo fratello; 2.° qualunque essa fosse, di farvi vedere dei paralogismi; 3.° di dare la vera soluzione del problema in tutte le sue parti. Al che aggiunse questa scommessa d'una specie frizzante: che se alcuno per il progresso delle scienze avesse tanto interesse da arrischiare un premio per ciascuno di questi articoli, egli s'impegnava di perdere altrettanto, se non soddisfaceva al primo, di perdere il doppio, se non riusciva nel secondo, ed il triplo, se lasciava di sciogliere il terzo.

La singolarità di questo avviso, e l'autorità dell'autore in geometria, scossero un poco la confidenza che Giovanni Bernoulli aveva nel suo metodo: egli ripassò la sua soluzione, e riconobbe che si era in qualche cosa ingannato; il che attribuiva *ad una troppo grande precipitazione*. Egli mandò un nuovo risultato, ma senza prendere un tuono più modesto, e domandando sempre il premio proposto dal *NON NEMO*.



A queste pretensioni, Giacomo Bernoulli rispose laconicamente: « prego mio fratello « di ripassare di nuovo l'ultima sua soluzio- « ne, di esaminare attentamente tutti i punti, « e di dirci poi se ogni cosa vada bene, dichia- « randogli che, dopo aver dato la mia, i pre- « testi di precipitazione non saranno più ascol- « tati. «

Nel tempo stesso in cui Giacomo Bernoulli pubblicò il suo primo *avviso*, scrisse su questo proposito una lettera a Varignon, la quale doveva essere tosto inserita nel giornale de' dotti. Non so perchè si differì di farla pubblicare; essa non vide la luce che quattro mesi dopo la seconda soluzione di Giovanni Bernoulli; solamente i giornalisti ebbero la premura di avvertire che questa seconda soluzione non aveva fatto cangiare d'opinione all'autore della lettera. Essa aveva per oggetto di soddisfare alle due prime condizioni che Giacomo Bernoulli si era imposte, cioè a dire, d'indovinare il metodo di suo fratello, e di mostrare in che esso peccava; vi esponeva un'analisi per sè stessa difettosa, ove nondimeno alcune falsità corrette da altre falsità conducevano in certi casi ad un risultato vero; e per mezzo di questa analisi trovava le equazioni di suo fratello,

donde congetturava che secondo tutte le apparenze, esse ne erano emanate.

A questa lettera Giacomo Bernoulli unì un *avviso* recentemente composto in occasione della seconda soluzione di suo fratello, e nel quale l'aria trionfante onde Giovanni Bernoulli aveva annunziato le sue soluzioni, il rifiuto che faceva di rivedere l'ultima, ed il pretesto di questo rifiuto, sono messe in ridicolo con un sale ed una specie di leggerezza che non si suole aspettare da' geometri, e che fa tanto più maraviglia di qui trovare, in quanto che Giacomo Bernoulli, svizzero di nazione e d'abitazione, si serve della lingua francese. « Non ho mai creduto, egli « dice, che mio fratello possedesse la vera « soluzione pel problema degli isoperime- « tri . . . . Io ne dubito più che mai, veduta « la difficoltà ch' egli fa di ripassare le sue « soluzioni. S'egli non ha impiegato *che tre* « *minuti*, come dice, *per tentare*, *cominciare* « *e finire d'esaminare a fondo tutto il mistero*, « vi è apparenza che la revisione non gli co- « sterà di più: d'altronde, quando ne mettesse « il doppio, sarebbe egli vero che *sei minuti* « impiegati in questo esame diminuirebbero « di tanto il numero delle sue nuove sco- « perte? »



Allorchè Giovanni Bernoulli ricevette il giornale in cui erano inseriti questi opuscoli, entrò in un furore che non si può esprimere: esso si esalò in un torrente d'ingiurie grossolane ed insipide contro suo fratello. I giornalisti ebbero la troppo facile compiacenza di stamparle. In grazia del genio dell' autore per le scienze le lasceremo nell' obblio.

Non vi era più altro mezzo per terminare la disputa, che di pubblicare dall' una e l'altra parte i metodi, e di sottometterli al giudizio de' più esperti geometri d'Europa. Giovanni Bernoulli domandava Leibnizio per arbitro; ei gli aveva mandato le sue soluzioni, e Leibnizio, che certamente non le aveva esaminate con bastante attenzione, le aveva approvate. Dal canto suo, Giacomo Bernoulli acconsentì che non solo Leibnizio fosse preso per giudice, ma che a lui si aggiungessero ancora Newton, il marchese dell' Hopital, e tutti gli altri geometri di quel tempo, purchè gli fosse lasciata tutta la libertà di parlare, e di mettere la verità in tutta la sua luce.

Le cose rimasero in questo stato per quasi due anni. Nel 1700, Giacomo Bernoulli fece stampare a Basilea una lettera diretta a suo fratello, nella quale con una gran-

de moderazione, ove nondimeno si scorge un poco il tuono della superiorità, lo invita a pubblicare il suo metodo: finisce con dare, senza dimostrazioni, le formole del problema. Queste formole furono ancora inserite negli atti di Lipsia (1). Allora Giovanni Bernoulli vide in che differiva da suo fratello in quanto a' risultati; ma non iscoprendovi il principio della vera soluzione, e sempre persuaso che il suo metodo fosse esatto, lo sviluppò in una memoria che fu mandata sotto sigillo all' accademia delle scienze di Parigi, nel corso di febbraio dell' anno 1701, colla condizione di non aprirla, senza il suo assenso, e quando Giacomo Bernoulli avrebbe dato la sua analisi.

Istrutto di questa spedizione, Giacomo Bernoulli non ebbe più alcuna ragione di tener celato il suo metodo: egli pertanto lo espose, e lo fece sostenere in forma di tesi

(1) *I giornalisti soppressero la prima parte della lettera. Essa è stata parimente esclusa, per l' influenza di Giovanni Bernoulli, dall' edizione delle opere di Giacomo Bernoulli, data nel* 1744; *io l' ho fatta ristampare nel* 1792 *nel giornale di fisica* (*settembre*).



a Basilea, nel mese di marzo 1701, con una dedica ai quattro illustri geometri, l' Hopital, Leibnizio, Newton e Fazio de Duillier. Lo fece inoltre stampare separatamente a Basilea e negli atti di Lipsia, pel mese di maggio 1701, sotto questo titolo: *Analisis magni problematis isoperimetrici*. Esso fu riguardato come un prodigio d' invenzione e di sagacità: difatti si può assicurare, che avuto riguardo al tempo, non è mai stato risoluto un problema più difficile. Il marchese dell' Hopital (1) scrisse a Leibnizio che lo aveva letto con avidità, e lo aveva trovato direttissimo ed esattissimo: testimonianza che Leibnizio medesimo trasmise a Giovanni Bernoulli, benchè d'altronde fosse molto prevenuto in suo favore.

Si aveva luogo d' aspettarsi che dopo tante pubblicità, Giovanni Bernoulli impugnerebbe le soluzioni di suo fratello, o ne riconoscerebbe pubblicamente la giustezza; ma da quel momento in poi, egli serbò un profondo silenzio; nessuna osservazione, nessuna critica dalla sua parte; in vece di mettere il suo metodo in opposizione con quello del

(1) *Com. epist. tom. II, pag.* 48.

suo rivale, egli lo lasciò dormire pacificamente per cinque anni nel deposito dell' accademia; finalmente Giacomo Bernoulli muore nel 1705, e ben presto dopo, questo metodo comparisce tra le memorie dell' accademia per l' anno 1706. Che mai si deve pensare di questa strana condotta di Giovanni Bernoulli? Si supporrà egli contro ogni apparenza, che quest' uomo sì ardente, sì impetuoso, abbia voluto lasciar cadere una disputa di cui era stanco? Non è egli molto più verosimile che sospettando qualche vizio nel suo metodo, temette di sottoporlo al giudizio di suo fratello, ma che morto questo fratello, la vergogna di comparire vinto agli occhi di tutta l' Europa, lo determinò a pubblicare la memoria mandata nel 1701, sulla speranza che niuno esaminerebbe abbastanza a fondo la quistione per pronunziare tra i due metodi, e che almeno passerebbe nell' opinione di alcuni dotti come se avesse egli pure risoluto il problema? Questa congettura acquisterà nuova forza, se ci richiameremo alla mente, che difatti Fontenelle, nell' elogio di Giacomo Bernoulli, e quarantatrè anni dopo, Fouchi, in quello di Giovanni Bernoulli, hanno parlato delle loro soluzioni, come se





fossero egualmente esatte, ed egualmente generali.

I profondi geometri portarono un giudizio assai diverso: le palme della vittoria furono decretate ai metodi di Giacomo Bernoulli. Malgrado tutti i raggiri di Giovanni Bernoulli, malgrado tutti i mezzi speciosi che impiegava per dare l' apparenza della verità al suo metodo, esso era realmente difettoso, come suo fratello aveva sempre sostenuto: l' errore radicale di Giovanni Bernoulli proveniva dal non considerare se non che due elementi della curva, laddove bisognava considerarne tre, o impiegare una condizione equivalente. Ne' problemi del medesimo genere di quello della più veloce discesa, ove trattasi unicamente di adempire la condizione del *maximum* o del *minimum*, basta di applicare questa condizione a due elementi, per trovare l' equazione differenziale della curva; ma quando oltre il *maximum* o il *minimum* fa d' uopo che la curva abbia ancora una proprietà, come di essere isoperimetra ad un' altra, questa nuova condizione esige che un terzo elemento della curva abbia una certa inclinazione per rapporto agli altri due; ed ogni determinazione fondata unicamente sopra la prima considerazione, darà de' risultati

risi, eccetto il caso in cui una curva non possa soddisfare ad una delle due condizioni, senza soddisfare nel medesimo tempo all' altra. Indarno credeva Giovanni Bernoulli di adempire la condizione dell' isoperimetismo, senza derogare al *maximum* o al *minimum*, considerando due elementi della curva come due piccole linee rette condotte da un punto intermedio, ai due fuochi di un' ellisse infinitamente piccola: questa supposizione non introduceva già nel calcolo una nuova condizione; ma faceva il solo effetto di rendere costante o variabile la differenziale dell' ascissa. Giacomo Bernoulli aveva esplicitamente impiegato tre elementi della curva; e quindi egli era giunto a soluzioni esatte, generali e complete.

Questa considerazione dei tre elementi era allora talmente essenziale, che alla fine Giovanni Bernoulli, più di tredici anni dopo la morte di suo fratello, ne fece la base di una nuova soluzione, confessando che si era ingannato nella prima (1); confessione tarda, ma che almeno avrebbe onorato l' autore se avesse inoltre riconosciuto che la sua nuova

(1) *Mem. dell' Acc.* 1718.



soluzione non era altra cosa in sostanza che quella di suo fratello, presentata sotto una forma che abbrevia molto il calcolo, e se non avesse cercato di rilevare con una specie d' affettazione alcune inutilità che trovansi in questa, ma che non ne alterano punto l' esattezza e la generalità.

Ho creduto di dover raccontare di seguito la disputa de' fratelli Bernoulli sopra gli isoperimetri. Prima di lasciarla, non posso a meno di manifestare ancora la mia sorpresa nel vedere che nessun altro geometra di quel tempo, intraprese, almeno pubblicamente, a risolvere questi problemi: perciocchè sebbene Giacomo Bernoulli avesse provocato suo fratello in particolare, ognuno aveva la libertà di concorrere; e le quistioni proposte riunivano tutti i vantaggi capaci di eccitare l' emulazione: novità dell' argomento, grandi difficoltà da vincere, e l' ingrandimento della geometria.

## CAPO IV.

*Soluzioni di diversi problemi. Leibnizio inventa il metodo per differenziare* de curva in curvam. *Giustificazione del marchese dell'Hopital. Opere di Newton. Nozioni sopra alcuni altri geometri.*

La disputa, di cui ho reso conto, mi ha fatto un poco anticipare l'ordine de' tempi, e mi ha costretto a lasciare indietro molti problemi interessanti e notabili su i quali ora ritorno.

Proponendo il problema degli isoperimetri, Giacomo Bernoulli vi aveva unito quello della cicloide della più veloce discesa ad una linea data di posizione, per compire in qualche modo la teoria della Brachistocrona. Egli dimostrò che la cicloide richiesta è quella che taglia ad angoli retti la linea data di posizione; ed insegnò in generale a trovare tra le curve simili che terminano ad una linea data di posizione, quella che gode di qualche proprietà di *maximum* o *minimum*. Giovanni Bernoulli, dal canto suo, era pervenuto a simili risultati, con un metodo un po' tortuoso, ma molto ingegnoso, e che diede Anno 1697



luogo ad una notabile estensione dell'analisi infinitesimale. Egli impiegò in questa ricerca la considerazione della curva *sincrona*, ossia d'una curva che taglia una serie di curve simili e similmente poste, per modo tale che gli archi di queste ultime curve, compresi tra un punto dato e la sincrona, sono percorsi in tempi eguali da un corpo pesante: egli dimostrò che tra tutte le cicloidi così tagliate, quella che lo è perpendicolarmente, è percorsa in meno tempo d'alcun' altra parimente terminata alla sincrona. Altro adunque non si trattava, che di saper condurre, sotto una data direzione, una tangente alla sincrona delle cicloidi; e per risolvere il problema in generale, non faceva d'uopo che qui la soluzione fosse dipendente unicamente dalle proprietà della cicloide, ma da' principj applicabili ad ogni altra serie di curve simili e similmente poste. Giovanni Bernoulli determinò con una costruzione geometrica la sincrona corrispondente alla cicloide del tempo più breve; ma non potè giugnere a trovare l'espressione analitica della sottangente delle sincrone per tutte le specie di curve simili. Avendo per lungo tempo cercato in vano la soluzione di questo problema, egli lo propose a Leibnizio, che lo risolse pre-

stissimo, ed inventò a questo proposito il celebre metodo di differenziare *de curva in curvam*.

Giovanni Bernoulli, nel ricevere la lettera che conteneva questo metodo, fu trasportato dal giubilo e dalla maraviglia (1): egli si lagnò amichevolmente, perchè *il Dio della geometria aveva ammesso Leibnizio più innanzi di lui nel suo santuario*. Questo primo movimento fu quello della giustizia: ci duole di vedere che nel seguito, e dopo la morte di Leibnizio, Giovanni Bernoulli abbia cercato di farsi riguardare come il co-inventore di questo metodo, quantunque non abbia realmente che il merito di averne fatto delle bellissime applicazioni, come può vedersi nel secondo tomo delle sue opere. Leibnizio non lo ha mai pubblicato egli medesimo; esso è comparso la prima volta sotto il suo nome solamente nel 1745, nella raccolta della sua corrispondenza con Giovanni Bernoulli.

Dalle opere postume di Giacomo Bernoulli si rileva, ch' egli aveva pure trovato dal canto suo un metodo simile, e che lo aveva usato nel risolvere i problemi che suo

(1) *Com. epist. tom.* 1, *pag.* 19.



fratello gli proponeva nel corso della disputa sopra gli isoperimetri: egli si era limitato ad indicare le sue soluzioni sotto alcuni anagrammi, volendo evitare qualunque diversione prima che l'affare degli isoperimetri fosse terminato. Questi problemi incidenti erano relativi al metodo *de maximis et minimis*. Ne citerò uno solo che basterà per dare un' idea generale di tutti: Giovanni Bernoulli domandava *qual' era, tra tutte le semi ellissi che potevansi descrivere nel medesimo piano verticale e sopra il medesimo asse orizzontale dato, quella che era percorsa nel minimo tempo possibile, da un corpo grave, il cui movimento cominciava ad una delle estremità dell' asse dato*.

Anni 1699, 1700, 1701, ec.

Una quantità innumerabile d'altre ricerche curiose e difficili occupava allora i geometri: esse erano la quadratura di certi spazj cicloidali, la sezione indefinita degli archi circolari, la curva d'ugual pressione, la trasformazione di curve in altre della medesima lunghezza, nuovi metodi d'approssimazione per le quadrature e le rettificazioni delle curve, il modo di trovare certe curve per mezzo di date relazioni de' loro rami, ec. Si vedevano sempre comparire su la scena Leibnizio, i fratelli Bernoulli, il marchese dell' Hopital, ec. Tutte queste ricerche non avevano il

medesimo grado di utilità, ma tutte hanno contribuito più o meno al progresso della geometria. Non finirei mai, se cercassi di farle conoscere con qualche dettaglio: mi tratterrò solo un poco sopra uno scritto di Giovanni Bernoulli, perchè attacca la memoria d'un illustre francese, che debbo, quanto so e posso, difendere.

Il marchese dell' Hôpital aveva esposto nel libro *degli infinitamente piccoli* una regola ingegnosissima per trovare il valore d'una frazione, il cui numeratore e denominatore svaniscono nel medesimo tempo, quando si dà alla variabile che vi entra un certo valore determinato. Nessuno si era avvisato di disputargli questa proprietà finchè visse. Circa un mese dopo la sua morte, Giovanni Bernoulli avendo riflettuto che questa regola era incompleta, vi fece un' addizione necessaria, e da ciò prese occasione di dichiararsene autore. Molti amici del marchese dell' Hopital si lagnarono altamente e con calore d' un reclamo che avrebbe dovuto farsi più presto, se aveva qualche fondamento. Ma invece di ritrattare la sua asserzione, Giovanni Bernoulli andò anche più oltre: egli giunse per gradi sino a rivendicare tutto ciò che vi è di più importante nell' analisi degli infinitamente piccoli. Mi sia permesso d'esaminare qualche poco la sua pretensione.



Nel 1694, Giovanni Bernoulli era venuto a Parigi: egli vi fu accolto con distinzione dal marchese dell' Hopital, che poco tempo dopo lo condusse nella sua terra d' Ourques in Turena, dove passarono quattro mesi interi a studiare insieme la nuova geometria. Tutte le attenzioni e le maggiori testimonianze di gratitudine furono profuse al dotto forestiero. Ben presto il marchese dell' Hopital, con un lavoro ostinato e violento che alterò per sempre la sua salute, si trovò in istato di risolvere i grandi problemi che i geometri si proponevano. Sino dall' anno 1693, egli comparisce in questa dotta tenzone, e vi si distingue sino alla sua morte. In quel tempo egli era messo nel primo ordine de' geometri d' Europa, e si osserva in particolare che Giovanni Bernoulli era uno de' suoi più ardenti encomiatori. Forse egli fu sollevato troppo in alto, nel tempo che viveva; ma l' accusa che Giovanni Bernoulli intenta contro di lui quando è morto, forma un contrappeso troppo grande, e la giustizia deve ristabilire l' equilibrio. Ora io ho la franchezza di domandare, se sia mai verosimile, che un geometra, il quale avanti la pubblicazione del li-

bro degli infinitamente piccoli aveva dato tante prove di profondo sapere, che aveva, per esempio, risoluto il problema d'equilibrio ne' ponti levatoi, non sia stato che un semplice compilatore in tutte le parti difficili di quest'opera? Si può egli presumere che abbia avuto così poca delicatezza per domandare o accettare tanti soccorsi umilianti? Non si sa forse altronde, che egli era d'animo molto elevato? I frammenti di lettere, prodotti da Giovanni Bernoulli, non provano totalmente ciò ch' egli asserisce: vi si trova bensì a dir vero che Giovanni Bernoulli aveva composto delle lezioni di geometria pel marchese dell'Hopital, ma non già che queste lezioni sieno il libro degli infinitamente piccoli; l'allievo, l'uomo di genio, era divenuto maestro, e volava colle proprie ali. Si scorge ancora in questi frammenti che il marchese dell'Hopital, mentre lavorava intorno al suo libro, domandava, colla confidenza dell'amicizia, degli schiarimenti a Giovanni Bernoulli sopra certe quistioni che vi sono trattate; ma noi non abbiamo le risposte di Giovanni Bernoulli; non sappiamo s'egli abbia dato questi schiarimenti, o se il marchese dell'Hopital, facendovi ulteriori riflessioni, non le abbia finalmente trovate. In tutte queste incertezze



il partito più saggio e più giusto si è di attenerci alla dichiarazione generale che fa il marchese dell'Hopital nella sua prefazione, *di dovere molto ai lumi* di Giovanni Bernoulli; e di pensare che se gli avesse avuto delle obbligazioni d'una natura particolare, non avrebbe osato di invilupparle nelle espressioni d'una riconoscenza vaga e generale. Se, malgrado tutte queste ragioni, si voglia credere Giovanni Bernoulli su la sua parola, quando si dà per autore del libro degli infinitamente piccoli, la morale almeno non lo assolverà mai dall'aver turbato le ceneri d'un benefattore generoso, per un miserabile interesse d'amor proprio, tanto più malinteso, quanto che Giovanni Bernoulli era molto ricco per sè medesimo. Del rimanente, quest'esempio deve essere una grande lezione per gli uomini ambiziosi, che vogliono troppo presto correr dietro alla riputazione; esso li avverte di rifiutare i servigi sollecitati, offerti sovente piuttosto per vanità che per benevolenza, e di persuadersi che non si arriva mai alla vera e solida gloria che colle proprie fatiche.

*Lavori degl' Inglesi nella geometria.*

Dopo il libro *de' Principj*, gli Inglesi non avevano fatto comparire alcuna scoperta un poco importante nella nuova geometria, se non che la soluzione del problema della Brachistocrona. Sul finire dell' anno 1704, Newton pubblicò, in un medesimo volume, le sue lezioni d' *ottica* in inglese, un' enumerazione *delle linee del terz' ordine* in latino, ed il trattato delle *quadrature* delle curve, parimente in latino. Le lezioni d' ottica non appartengono al caso presente. L' enumerazione delle linee del terz' ordine è un' opera originale e profonda, benchè unicamente fondata sopra l' analisi ordinaria e sopra la teoria delle serie che Newton aveva portata tanto oltre; essa non contiene, per così dire, che degli enunziati e de' risultati; è stata in seguito commentata da parecchi dotti geometri, ai quali ha somministrato un' ampia messe di curiosissime ricerche. Il trattato delle quadrature appartiene alla nuova geometria.

Questo trattato ha per oggetto speciale l' integrazione delle formole differenziali del primo ordine ad una sola variabile: donde dipende la quadratura delle curve, o esatta,



o almeno approssimata. Newton forma con molta sagacità delle serie, per mezzo delle quali riduce l' integrazione di certe formole complicate a quelle di altre formole più semplici; e queste serie venendo in certi casi ad interrompersi, danno allora gli integrali in termini finiti. Lo sviluppo di questa teoria offre una lunga catena di bellissime proposizioni, ove tra gli altri problemi curiosi si rileva il metodo per integrare le frazioni razionali; lo che era allora difficile, soprattutto quando le radici sono eguali. Un cominciamento sì felice, e sì importante, ci fa rincrescere che l' autore non abbia dato che i primi principj dell' analisi delle equazioni differenziali. Egli a dir vero insegna bensì a prendere le flussioni d' un ordine qualunque d' un' equazione ad un numero qualunque di variabili; lo che appartiene al calcolo differenziale: ma non insegna a risolvere il problema inverso, cioè a dire, egli non ha indicato alcun mezzo d' integrare le equazioni differenziali, o immediatamente, o colla separazione delle indeterminate, o colla riduzione in serie, ec. Nondimeno questa teoria aveva già fatto allora de' progressi considerabilissimi in Germania, in Olanda ed in Francia, come si può giudicarne dai problemi

della catenaria, delle curve isocrone, della curva elastica, e principalmente dalla soluzione che Giacomo Bernoulli aveva data del problema degli isoperimetri. Gli avversarj di Newton hanno da questo trattato delle quadrature preso motivo di affermare che nell' epoca in cui comparve quest' opera, l'autore non conosceva perfettamente del calcolo integrale che la parte delle quadrature, e non quella dell' integrazione delle equazioni differenziali.

Newton ha rifuso quasi interamente il trattato *delle quadrature* in un altro intitolato: *Metodo delle flussioni e delle serie infinite*. Questo non contiene che i semplici elementi della geometria infinitesimale, cioè a dire, i metodi per determinare le tangenti delle linee curve, i *massimi* ed i *minimi* ordinarj, le lunghezze delle curve, gli spazj ch'esse rinchiudono, alcuni facili problemi sopra l'integrazione delle equazioni differenziali, ec. L' intenzione dell' autore era stata più volte di farlo stampare; ma ne fu sempre distolto da varie ragioni, la prima delle quali fu certamente che quest' opera nulla poteva aggiugnere alla di lui gloria, e nemmeno contribuire all' avanzamento della profonda geometria. Il dottore Pemberton lo fece comparire in inglese nel



1736, nove anni dopo la morte di Newton. Nel 1740 fu tradotto in francese, preceduto da una prefazione, in cui Leibnizio è ribassato con un eccesso, e con un tuono decisivo che potrebbe imporre ad alcuni lettori, se l'autore di questa prefazione non offrisse egli medesimo la confutazione della sua critica, per la mediocre intelligenza che mostra della materia. Malgrado alcuni sforzi pubblici, spesso rinnovati, non ha mai potuto penetrare un poco innanzi nell' alta geometria: ognuno si ricorda ancora l' aneddoto sopra il senso strano che aveva dato a queste voci latine *de testitudine quadrabili* di Viviani, e donde aveva formata una piccola dissertazione che uno de' suoi amici gli fece fortunatamente levare da quella prefazione medesima. La posterità non lo conosce più che per la sua *Storia naturale*, in cui i filosofi, condannando alcuni traviamenti della immaginazione, non possono a meno di non ammirare molte idee grandi e vere, e nel tempo stesso la pompa e l' eleganza dello stile.

Comparve nel 1711, un' altra opera di Newton, il suo *Metodo differenziale*, di cui aveva già gettato i fondamenti, sotto una forma un poco differente, nel suo libro dei *Principi*. L' oggetto di questo metodo si è di

far trovare i coefficienti lineari d'un' equazione che soddisfa a tante condizioni quanti sono i coefficienti, ossia di costruire una curva di genere parabolico, che passi per un numero qualunque di punti dati. Ne risulta un mezzo facile e comodo di quadrare per approssimazione le curve, di cui si può determinare un certo numero di ordinate. Oltre a ciò, Newton non ha adoperato in quest' opera che la semplice algebra ordinaria, ed a torto alcuni suoi ammiratori, un po' troppo zelanti, hanno creduto trovarvi i primi elementi del calcolo integrale alle differenze finite, tanto celebre a' nostri giorni.

*Manfredi, nato nel* 1681, *e morto nel* 1761.

L'Italia fece considerabili progressi nella nuova geometria al principio del secolo passato: essa ne fu principalmente debitrice all' opera che Gabriele Manfredi pubblicò nel 1707, sotto questo titolo: *De constructione Æquationum differentialium primi gradus*: opera in cui l'autore dimostra molta perizia nell'assoggettare certe equazioni differenziali alle condizioni che le rendono integrali. Egli si è incontrato per la conformità del genio e della dottrina con Giovanni Bernoulli, sul





metodo di separare le indeterminate nelle equazioni differenziali omogenee del primo ordine.

La perdita che la Germania aveva fatta in geometria per la morte di Giacomo Bernoulli fu in qualche modo riparata dai discepoli di quest' uomo celebre, come Giacomo Ermanno, suo concittadino, Nicolò Bernoulli suo nipote, ed altri che non potrei citare partitamente, senza essere troppo lungo.

*Ermanno, nato nel* 1678, *e morto nel* 1743.

Ermanno si fece dapprima conoscere con un metodo per trovare i raggi osculatori nelle curve polari: poco tempo dopo pubblicò una bella soluzione del problema *della sezione indefinita degli archi circolari*, agitato allora tra i fratelli Bernoulli. Egli si distinse ancor più nel seguito per diverse opere di cui avrò occasione di parlare.

*Nicolò Bernoulli, nato nel* 1683, *e morto nel* 1759.

Nicolò Bernoulli si rese celebre assai di buon' ora *nell' arte di congetturare*, camminando su le tracce di suo zio Giacomo Bernoulli,

di cui è nota l'eccellente opera intitolata: *Ars conjectandi*. Nel 1709, Nicolò Bernoulli fece un'importante applicazione de' principj di quest'opera alle probabilità della durata della vita umana. A lui si debbono molte altre profonde ricerche in geometria, che noteremo espressamente quando si tratterà degli argomenti ai quali si riferiscono.

In Francia, il marchese dell'Hopital non ebbe contemporanei, nè successori immediati della sua forza in geometria. Noi possedevamo nondimeno allora parecchi dotti geometri che, senza avere esteso, almeno in un modo insigne, i confini della scienza, hanno però superato delle difficoltà annesse allora ai metodi d'applicazione: i principali sono Parent, Varignon e Saurin.

*Parent, nato nel* 1666, *e morto nel* 1716.

Si deve a Parent la soluzione d'un bellissimo ed utilissimo problema *de maximis et minimis*. Avendo rilevato in generale che se in una macchina la disposizione delle parti è tale che la velocità del peso *motore* diventi più grande o più piccola, secondo che al contrario quella del peso *mosso* diventi più piccola o più grande, esiste un rapporto tra



le due velocità, affinchè l'effetto della macchina sia un *maximum* o un *minimum*; egli dimostrò che il *maximum* di effetto ha luogo nelle ruote idrauliche, mosse dall'urto dell'acqua, quando la velocità della ruota è il terzo della velocità della corrente (1). Si trovano molte altre idee ingegnosissime ne' suoi scritti numerosi; ma in generale egli aveva il difetto di essere oscuro, cosa che ha molto pregiudicato alla sua riputazione. Conveniva egli medesimo di questo difetto. Il celebre Fontenelle, che ho avuto l'onore di conoscere negli ultimi anni della sua vita, e le cui bontà mi richiamo alla mente con tenerezza, mi raccontava un giorno che avendo fatto, nella sua qualità di segretario dell'accademia delle scienze, l'estratto d'una memoria di Parent, questi fu maravigliato di trovarsi in esso così chiaro, e ne lo ringraziò con queste parole: *Domine, illuminasti tenebras meas*. Il p. Malebranche dipingeva l'oscurità di questo stesso geometra in un modo molto ingegnoso: *Il sig. Parent*, egli diceva, *ha molto spirito, ma non ne ha la chiave*.

---

(1) *Mem. dell'Acc.* 1704.

*Varignon, nato nel* 1654, *e morto nel* 1722.

Varignon ha goduto un' assai grande celebrità: egli la doveva alla sua carica di professore di matematica nel collegio Mazarino, ed al merito che aveva di chiaramente esporre le sue idee, benchè il suo stile fosse altronde scorretto, languido e diffuso. Egli era totalmente privo di genio; non si vede che abbia mai risoluto qualche gran problema del suo tempo: ma egli era dotato di un' eccellente memoria, leggeva molto, volgeva e rivolgeva gli scritti degli inventori, generalizzava i loro metodi, si appropriava le loro idee; ed alcuni allievi prendevano alcune reminiscenze celate o amplificate, per iscoperte. Egli ha pubblicato a parte un trattato di *meccanica generale*, dove applica con chiarezza ed esattezza il principio del parallelogrammo delle forze alle leggi dell' equilibrio. Le memorie dell' accademia delle scienze di Parigi sono piene de' suoi calcoli in tutti i generi. A lui si ha principalmente l' obbligazione d' avere rischiarato molti luoghi del libro de' *principj matematici*: al nostro tempo, avrebbe comentato Eulero e d' Alembert.



*Saurin, nato nel* 1659, *e morto nel* 1737.

Saurin non ha certamente scritto tanto come Varignon, ma egli aveva una tempra di spirito assai più forte e più prossima al vero genio dell' invenzione. Si giudica pure dalle poche opere matematiche che di lui ci rimangono, che s' egli avesse cominciato più di buon' ora a studiare la geometria, e si fosse applicato ad un genere particolare, si sarebbe sollevato al primo ordine. Egli ha dato (1) una bellissima soluzione generale del problema, ove tra un' infinità di curve simili, descritte nel medesimo piano verticale, ed aventi il medesimo asse e lo stesso punto d' origine, si tratta di determinare quella il cui arco compreso tra il punto d' origine ed una linea, retta o curva data di posizione, è percorso nel più breve tempo possibile. Egli è il primo (2) che abbia pienamente rischiarato la teoria delle tangenti ne' punti moltiplici delle curve. Le sue cognizioni in tutte le parti teoriche e pratiche dell' orolo-

(1) *Mem. dell' Acc.* 1709.
(2) *Ibid.* 1716, 1723, 1727.

gieria erano profondissime: la prova si ha in due memorie che ha date sopra questo argomento all' accademia delle scienze (1).

Tutti questi dotti, e parecchi altri d' un ordine inferiore, concorrevano al progresso del metodo degli infinitamente piccoli. Una guerra sorda, che fermentava da molti anni, e che scoppiò finalmente con violenza nel 1711, a proposito del diritto alla prima invenzione di questo metodo, fece temere da principio che non si perdesse in discussioni polemiche un tempo che doveva essere impiegato a perfezionarlo; ma queste discussioni medesime finirono col divenire vantaggiose alla scienza. Questa controversia ha fatto troppo rumore; essa è ancora presentemente un oggetto troppo grande d' interesse e di curiosità, perchè possa dispensarmi dal riferirla: mi studierò di trattare e rischiarare la quistione con più accuratezza che non si è fatto fino ad ora.

---

(1) *Mem. dell' Acc.* 1720, 1722.



## CAPO V.

*Esame de' dritti di Leibnizio e di Newton all' invenzione dell' analisi infinitesimale.*

Le produzioni del genio essendo beni d' un ordine infinitamente superiore a tutti gli altri oggetti dell' umana ambizione, non dee far maraviglia il calore con cui Leibnizio e Newton si hanno disputato la scoperta della nuova geometria. Questi due illustri rivali, o piuttosto la Germania e l' Inghilterra, combattevano in certo modo per l' impero delle scienze.

La prima scintilla di guerra fu eccitata da Nicolò Fazio di Duillier, ginevrino, ritirato in Inghilterra, quello stesso che nel seguito diede uno strano spettacolo di demenza, con volere risuscitare pubblicamente un morto nella chiesa di s. Paolo di Londra, ma che aveva allora la mente sana, ed anche qualche riputazione tra i geometri. Da una parte spinto dagli Inglesi, dall' altra da un risentimento personale contro Leibnizio, dal quale pretendeva di non avere ricevuto le dimostrazioni di stima che gli erano dovute, si avvisò di dire in un piccolo scritto sopra

*la curva della più veloce discesa*, e sopra *il solido della minima resistenza*, pubblicato nel 1699, che Newton era il *primo inventore* de' nuovi calcoli; ch' egli parlava così per l'onore della verità e per uno scarico della sua coscienza, e che lasciava ad altri la cura di decidere ciò che Leibnizio, *secondo inventore*, aveva preso ad imprestito dal geometra inglese. Leibnizio giustamente offeso da questa anteriorità d'invenzione, che si attribuiva a Newton, e dalla maligna conseguenza che s'insinuava, rispose con molta moderazione che Fazio parlava certamente di sua testa; ch' egli non poteva pensare che Newton lo approvasse; che non voleva entrare in lite con quest' uomo celebre, per cui egli aveva e mostrava in tutte le occasioni una profonda venerazione; che quando si erano incontrati in alcune invenzioni geometriche, Newton medesimo aveva dichiarato nel suo libro *de' principj*, ch' eglino non prendevano nulla l'uno dall' altro; che quando pubblicò il suo calcolo differenziale nel 1684, egli ne era in possesso da circa otto anni; che verso il medesimo tempo Newton gli aveva bensì annunziato, senza alcuna spiegazione, ch' egli sapeva condurre le tangenti con un metodo generale che non era ritenuto dalle quantità irrazionali, ma che non poteva giudicare se questo metodo fosse il calcolo differenziale, poichè Huguens, che allora non conosceva questo calcolo, asseriva parimente di averne uno, dotato de' vantaggi medesimi; che la prima opera degli Inglesi, in cui il calcolo differenziale fosse spiegato in un modo positivo, era la prefazione dell' algebra di Wallis, pubblicata soltanto nel 1693; che sopra tutte queste cose, egli si riportava interamente alla testimonianza ed al candore di Newton, ec. L' asserzione di Fazio, assolutamente mancante di prove, fu per molti anni obbliata.



Nel 1708, Keil, eccitato per avventura da Newton, o almeno certo di non essere contraddetto, rinnovò la medesima accusa. Leibnizio osservò che Keil, altronde da lui chiamato un uomo *dotto*, era troppo *nuovo* per pronunciare un giudizio sicuro di cose avvenute già da molti anni; e ripetè quanto aveva detto prima, che si riportava al candore ed alla buona fede di Newton medesimo. Keil ritornò ad insistere; ed in una lettera diretta ad
Anno 1711 Hansloane, segretario della società di Londra, non si contentò più di dire che Newton era il primo inventore, ma fece intendere chiaramente che Leibnizio dopo aver attinto

il metodo negli scritti di Newton, se lo era appropriato, con applicarvi soltanto una notazione particolare: il che era, in altri termini, un tacciarlo di plagio. Leibnizio, sdegnato da tale imputazione, ne portò delle vive lagnanze alla società reale, e domandò altamente che si reprimessero i *clamori* d'un uomo inconsiderato, che attaccava, senza ragione e senza pudore, la sua riputazione e la sua buona fede. La società reale nominò alcuni commissarj per esaminare tutti gli scritti che riguardavano siffatta quistione; ed essa li pubblicò nel 1712, col rapporto de' commissarj sotto questo titolo: *Commercium epistolicum de analisi promota*. Senza essere assolutamente affermativa, la conclusione del rapporto si è che Keil non ha calunniato Leibnizio. L'opera fu sparsa con profusione in tutta l'Europa.

Newton era allora presidente della società reale, dove godeva la più alta considerazione, ed il potere più esteso: forse egli doveva per delicatezza far costruire il processo ad un altro tribunale. Egli è vero che Fontenelle ha detto, nel suo elogio di Leibnizio, che *Newton non era comparso, e che riguardo alla sua gloria confidava sopra de' concittadini assai destri*. Ma egli parlava così dopo



la morte di Leibnizio, mentre Newton era ancor vivo. Egli certamente era stato ingannato da false memorie: poichè nel corso della disputa, Newton scrisse due lettere amarissime contro Leibnizio, nelle quali altresì non senza sorpresa si rileva un' arte un po' troppo ingegnosa, per rivocare o indebolire le testimonianze d'alta stima che altre volte gli aveva date in varie occasioni, e segnatamente nel famoso *scolio* che accompagnava la proposizione VII del secondo libro *de' principj*.

Sembra che la società reale, affrettandosi a pubblicare le carte che potevano essere di aggravio a Leibnizio, senza aspettare quelle ch' egli prometteva in sua difesa, abbia compreso ella medesima che non si tralascerebbe di accusarla di parzialità o di precipitazione, poichè ella ebbe l'impegno di dichiarare subito dopo che non aveva avuto l'intenzione di giudicare la lite a fondo, e che lasciava ad ognuno la libertà di discuterla, e di dirne il suo parere. Domando adunque il permesso d'intraprendere questo esame; vi porterò tutta l'attenzione di cui sono capace. Leibnizio e Newton mi sono indifferenti; da essi non ho ricevuto, se mi è lecito d'adoperare un' espressione di Tacito, *nè benefizio*,

*nè ingiuria*. La sublimità del loro genio esige un profondo omaggio; ma dobbiamo ancora un maggior rispetto alla verità (1).

Newton avendo avuto dalla natura un'intelligenza sublime, ed essendo nato in un tempo in cui Hariot, Wrenn, Wallis, Barrow, ec., avevano già reso floride le matematiche in Inghilterra, ebbe inoltre il vantaggio di ricevere, nella sua prima gioventù, le lezioni di Barrow nell'università di Cambridge. Tutte le forze del suo genio si portarono verso questo genere di studj; i successi ch'egli vi ottenne, furono prodigiosi. Fontenelle gli ha applicato ciò che Lucano aveva detto del Nilo, *che non fu concesso agli uomini di vederlo debole e nascente*. Si assicura che sino dall'età di venticinque anni, egli aveva gettato i fondamenti delle grandi teorie che lo hanno poi reso cotanto famoso. Leibnizio, più giovine di quattr'anni, non trovò in Germania che mediocri soccorsi per la sua istruzione; egli si formò, per così dire, da sè solo. Il suo genio vasto e rapido, secondato da una memoria

(1) *Mihi Galba, Otho, Vitellius nec beneficio, nec iniuria cogniti*. Tac. Hist. lib. I.



straordinaria, abbracciava tutti i rami delle umane cognizioni: letteratura, storia, poesia, diritto delle genti, scienze esatte, fisica, ec. Questa moltiplicità di gusti pregiudicò necessariamente alla rapidità de' suoi progressi in ciascun genere: quindi egli non si annunziò come grande matematico che sette od otto anni dopo Newton.

Questi due grand' uomini possedevano l'uno e l'altro la nuova analisi molto tempo prima di darla alla luce. Se la priorità della pubblicazione portasse seco la priorità della scoperta, Leibnizio avrebbe pienamente guadagnato la causa; ma questo mezzo non è sufficiente per pronunziare nel caso presente con tutta la certezza. L'inventore potè per lungo tempo riservare a sè stesso il suo segreto; egli potè lasciarne sfuggire alcuni raggi, di cui un altro avrà profittato. Risaliamo adunque, s'egli è possibile, alla sorgente, e procuriamo di riconoscere l'essere benefico che, come il prometeo della favola, rapì il fuoco agli dei per farne parte agli uomini, secondo la bella comparazione di Fontenelle.

Il *Commercium epistolicum* contiene primieramente, cominciando dall'anno 1669, molte scoperte analitiche di Newton. Nell' opuscolo intitolato: *De analisi per aequatio-*

*nes numero terminorum infinitas*, oltre al metodo per risolvere le equazioni per approssimazione, di cui non si tratta in questo luogo, Newton insegna a quadrare delle curve, le cui ordinate sono espresse da monomj, o da somme di monomj; e quando le ordinate racchiudono de' radicali complessi, egli riduce la questione al primo caso, svolgendo l'ordinata in una serie infinita di termini semplici, per mezzo della formola del binomio; ciò che niuno aveva per anche fatto. Sluze e Gregori avevano trovato, ciascuno dal proprio canto, un metodo per le tangenti. Newton in una lettera a Collins, in data del 10 dicembre 1672, prova ch' egli pure ne aveva trovato uno: egli lo applica ad un esempio, senza aggiungervi la dimostrazione; in seguito egli dice ch' esso altro non è che un corollario d' un altro metodo generale, ch' egli ha per condurre le tangenti, quadrare le curve, trovare le loro lunghezze ed i loro centri di gravità, ec., senza essere ritenuto dalle quantità radicali, come lo è Hudde nel suo metodo pei *massimi* e *minimi*. Gli Inglesi hanno veduto chiaramente il metodo delle flussioni in questi due scritti di Newton, dopo che altronde era stato conosciuto in tutta l' Europa mediante gli scritti di Leibnizio e dei



fratelli Bernoulli; ma i geometri delle altre nazioni non hanno certamente avuto i medesimi occhi. Convenendo che lo sviluppo dei radicali in serie è un passo considerabile fatto da Newton, eglino veggono immediatamente, e senza il soccorso di alcun lume posteriore e congetturale, che i metodi di Fermat, di Wallis e di Barrow potevano servire a trovare i risultati concernenti le quadrature, che Newton si contenta di enunziare, poichè dopo lo sviluppo de' radicali, se ve ne sono, d'altro più non si tratta che di sommare delle quantità monomie. Eglino confessano che i due scritti di cui trattasi, contengono, se si vuole, un' indicazione vaga del metodo delle flussioni: indicazione per avventura sufficiente per mostrare che Newton possedeva allora i primi principj di questo metodo, ma troppo oscura per darne intelligenza al lettore. E ciò che rende questa congettura molto verosimile, si è che Oldembourg, segretario della società reale, mandando (il 10 luglio 1673) a Sluze un esemplare del metodo di questo ultimo per le tangenti, che era stato stampato a Londra, riferisce un frammento di lettera di Newton, in cui, dopo aver detto che questo metodo appartiene veramente a Sluze, Newton prosiegue così: *In quanto ai*

*metodi* (egli intende quello di Sluze ed il suo), *essi sono i medesimi, benchè io li creda tratti da principj differenti. Non so però se i principj del sig. Sluze sieno così fecondi come i miei, che si estendono alle equazioni affette di termini irrazionali, senza che sia necessario di cangiarne la forma*. Avrebbe egli parlato con tanta riserva, e non avrebbe egli detto chiaramente che il metodo di Sluze e quello delle flussioni erano differenti, se avesse allora posseduto l'ultimo di questi metodi in un grado sì avanzato, come si è preteso dopo quel tempo? Si supporrà egli che abbia così parlato per modestia? Ma si può ben dire la verità, anche quando ci è vantaggiosa, senza uscire dai confini della modestia. Tutte queste considerazioni provano, mi pare, che se i due scritti *de Analisi per aequationes, ec.*, e la lettera del 1672, contengono il metodo delle flussioni, esso almeno vi era da dense tenebre coperto. Ma, o vi fosse o no, io prendo a dimostrare che prima d'aver trovato il suo calcolo differenziale, o Leibnizio non ha avuto alcuna partecipazione di questi due scritti, ovvero non ne ha ritratto lume alcuno. È questo un punto capitale che i suoi difensori non hanno sufficientemente stabilito, e sul





quale spero di non lasciare più dubbio veruno.

Leibnizio venne in Francia nel 1672, dopo essere uscito dalle università di Germania, dove si era principalmente occupato nel diritto pubblico e nella storia: egli era nondimeno già iniziato nelle matematiche, poichè nel 1666, aveva pubblicato un piccolo libro sopra alcune proprietà de' numeri. Egli passò a Londra nel principio del 1673; colà vide Oldembourg, e strinsero insieme un commercio di lettere. In una di queste lettere, scritta da Londra stessa ad Oldembourg, Leibnizio espone che avendo trovato una maniera di sommare certe serie, per mezzo delle loro differenze, gli era stato mostrato questo metodo già stampato in un libro di Monton, canonico di s. Paolo di Lione, sopra *i diametri del sole e della luna*; ch' egli allora immaginò un' altra maniera da lui spiegata, per formare le differenze, e per concluderne le somme delle serie; ch' egli è in istato di sommare una serie di frazioni, i cui numeratori sono l'unità, ed i denominatori sono, o i termini della serie de' numeri naturali, o quelli della serie de' numeri triangolari, o quelli della serie de' numeri piramidali, ec. Tutte queste ricerche sono inge-

gnose, e sembrano avere un rapporto almeno lontano col calcolo delle differenze. Gl' Inglesi non hanno mai detto, ed altronde non n' esiste la minima prova, che in questo primo viaggio Leibnizio abbia veduto i due scritti citati di Newton.

Dopo alcuni mesi di soggiorno a Londra, Leibnizio ritornò a Parigi, dove strinse amicizia con Huguens, che gli aprì il santuario della più profonda geometria. Egli trovò ben presto la quadratura approssimata del cerchio, con una serie analoga a quella che aveva data Mercatore per la quadratura prossima dell' iperbola: comunicò la sua serie ad Huguens, che ne fece grandi elogi, e ad Oldembourg, il quale gli rispose che Newton aveva già trovato cose simili, non solo pel cerchio, ma ancora per altre curve, e e che ne mandava de' saggi. Di fatti la teoria delle serie era già molto avanzata fino da quel tempo in Inghilterra; e sebbene Leibnizio vi avesse fatto dal canto suo non pochi progressi, egli ha però sempre riconosciuto che gl' Inglesi, e sopra tutto Newton, lo avevano preceduto e superato in questo ramo dell' analisi; ma essa non è già il calcolo differenziale, e gl' Inglesi hanno mostrato



una parzialità troppo evidente, cercando di unire insieme questi due oggetti.

Ascoltiamo, e pesiamo la storia che fa Leibnizio della sua scoperta del calcolo differenziale. Egli racconta che aggiungendo le sue antiche riflessioni sopra le differenze dei numeri alle sue nuove meditazioni di geometria, trovò questo calcolo verso l' anno 1676; che ne fece delle maravigliose applicazioni alla geometria; che essendo obbligato, verso il medesimo tempo, a ritornare ad Annover, non potè seguire interamente il filo delle sue meditazioni; che cercando nondimeno *di far valere* la sua nuova scoperta, passò per l' Inghilterra e per l' Olanda; che restò alcuni giorni a Londra, dove fece la conoscenza di Collins, che gli mostrò molte lettere di Gregori, di Newton e di altri matematici, le quali si aggiravano principalmente sopra le serie. Secondo questa esposizione sembrerebbe che Leibnizio volendo spargere *la sua nuova scoperta*, avrebbe allora fatto conoscere in Inghilterra il calcolo differenziale. Aggiungiamo che in una lettera di Collins a Newton, del 5 marzo 167 $\frac{6}{7}$, viene detto che Leibnizio essendo stato una settimana a Londra, nel mese di ottobre 1676, *aveva rimesso*

a *Collins alcuni scritti* (1) di cui Newton riceverebbe incessantemente degli estratti o delle copie. Collins non dinota la natura di questi *scritti*, e non se ne trova vestigio alcuno nel *Commercium epistolicum*. Ma se il racconto di Leibnizio è fedele, ovvero se la sua memoria non lo ha ingannato quando ha detto che possedeva il calcolo differenziale prima del secondo viaggio in Inghilterra, allora sicuramente gli sopraggiunse qualche motivo particolare di tener ancora celata la sua scoperta, contro il progetto che da principio aveva formato di *farla valere*: poichè in questa stessa lettera Collins ne riferisce un' altra di Leibnizio ad Oldembourg, scritta da Amsterdam, il $\frac{18}{28}$ novembre 1676, dove Leibnizio propone di costruire alcune tavole di formole tendenti a perfezionare il metodo di Sluze, invece di spiegare, o almeno d' indicare il calcolo differenziale come molto più spedito e più comodo. Gl' Inglesi hanno dunque

(1) *Questo passo e molti altri grandi squarci di questa lettera, sono stati soppressi nel* Commercium epistolicum. *Si vegga tutta intera nelle opere di Wallis, tom. III, pag.* 646.



avuto ragione di dire che nel suo passaggio a Londra nel 1676, Leibnizio non ha loro insegnato il calcolo differenziale; ma dovevano riconoscere che la medesima lettera prova coll' ultima evidenza, ch' egli non ha neppure da loro appreso cosa alcuna su questo proposito. Difatti, se, come eglino hanno avanzato in seguito, alcuno gli avesse allora dato contezza del metodo delle flussioni, non si dovrebbe dire ch' egli fosse caduto in demenza, per osare di proporre un mese dopo, al segretario della società reale di Londra, uomo molto dotto in queste materie, i mezzi di perfezionare il metodo di Sluze per sè stesso, senza parlare nulla affatto d' un altro metodo molto più semplice che gli era stato insegnato in Inghilterra? Credo adunque di poter concludere affermativamente, o che Leibnizio punto non vide nel mese di ottobre l' opera *de Analisi per aequationes*, ec., e la lettera di Newton, del 10 dicembre 1672, ovvero se vide questi due scritti, non ne ritrasse alcun soccorso, come non ne ritrassero neppure i dotti geometri inglesi che avevano avuto tutto il tempo di meditarli, e che altronde erano a portata di domandare all' autore i necessarj schiarimenti. Gl' Inglesi non hanno mai detto in termini formali che

egli avesse veduto l' opera *de Analisi per aequationes*, ec.: si sono contentati di avanzare positivamente ch' egli aveva veduto la lettera del 10 dicembre 1672; ma quand' anche ciò fosse vero, nulla si può inferire contro Leibnizio; poichè oltre a non contenere questa lettera che alcuni risultati senza dimostrazione, non è ben certo ch' essa indichi un metodo essenzialmente differente da quello di Sluze, come si è potuto rilevare dalle parole di Newton da me riferite.

In tutto questo affare non vi sono che tre scritti veramente decisivi: vale a dire, 1.° una lettera di Newton ad Oldembourg, del 24 ottobre 1676, lettera comunicata l' anno seguente a Leibnizio; 2.° la risposta che Leibnizio fece ad Oldembourg, il 21 giugno 1677, relativamente a questa medesima lettera; 3.° *lo scolio*, già citato, del libro *de' principj di Newton*: opera pubblicata sul finire del 1686. Analizziamo brevemente questi tre scritti.

La lettera di Newton contiene, indipendentemente da varie ricerche sopra la serie che qui bisogna mettere da parte, parecchi teoremi che hanno per base il metodo delle flussioni; ma l' autore ne cela le dimostrazioni. Egli si contenta di dire d' averli ricavati



dalla soluzione d' un problema generale che enunzia enigmaticamente sotto alcune lettere trasposte, ed il cui senso spiegato troppo tardi, è questo: *Data un' equazione che contenga delle quantità fluenti, trovare le flussioni: e reciprocamente*. Qual lume Leibnizio poteva ritrarre da un sì fatto logogrifo? Tutto ciò che si può concludere da questa lettera, si è che nel tempo in cui fu scritta, Newton possedeva il metodo delle flussioni, per cui nondimeno bisogna intendere soltanto il metodo delle tangenti e delle quadrature; giacchè allora non si trattava del metodo per l' integrazione delle equazioni differenziali, che non è venuto che molto più tardi, come di sopra si è veduto.

Leibnizio, nella sua lettera ad Oldembourg, comincia dal dire d' avere riconosciuto, come Newton, che il metodo di Sluze per le tangenti era imperfetto. In seguito egli spiega apertamente e senza mistero quello del calcolo differenziale, assicurando che da lungo tempo se ne serviva per condurre le tangenti delle linee curve. Ecco pertanto la soluzione chiara e positiva del problema, di cui Newton cercava con tanto impegno di riservarsi il possesso.

Lo scolio del libro *de' principj* porta: *In un commercio di lettere ch' io manteneva, sono dieci anni* (1), *col dottissimo geometra sig. Leibnizio, avendogli partecipato ch' io possedeva un metodo per determinare i massimi e minimi, condurre le tangenti e fare altre cose simili, il quale riusciva egualmente nelle equazioni razionali e nelle quantità radicali, ed avendo nascosto questo metodo sotto alcune lettere trasposte che significavano*: Data un' equazione che contenga un numero qualunque di quantità fluenti, trovare le flussioni: e reciprocamente; *quest' uomo celebre rispose ch' egli aveva trovato un metodo simile, e mi comunicò il suo metodo, che non differiva dal mio se non che nell' enunciato e nella notazione*. L' edizione del 1714 aggiugne: *E nell' idea della genesi delle quantità*. Si può egli dire in un modo più formale che Leibnizio aveva trovato dal canto suo il metodo delle flussioni, e che lo aveva comunicato francamente, senza nascondersi nelle tenebre come Newton?

Egli è adunque provato da questi tre scritti, che se Newton ha il primo trovato il metodo delle flussioni, come si pretende di

(1) *Per mezzo di Oldembourg*.



stabilire dalla sua lettera del 10 dicembre 1672, Leibnizio lo ha egualmente trovato dal canto suo, senza pigliar nulla ad imprestito dal suo rivale. Questi due grandi uomini sono arrivati, colla forza del loro genio, alla medesima scoperta, per istrade diverse: uno, con riguardare le flussioni come semplici rapporti di quantità che nascono e svaniscono nel medesimo istante; l'altro, col considerare che in una serie di quantità *che crescono o decrescono*, la differenza tra due termini consecutivi può divenire infinitamente piccola, cioè a dire, più piccola d' ogni grandezza finita determinabile.

Quest' opinione oggidì ricevuta universalmente, eccetto che in Inghilterra, era quella di Newton medesimo, quando pubblicò per la prima volta il suo libro *de' Principj*, come si rileva dallo scolio citato. La verità era allora vicina alla sua sorgente, e le passioni non l' avevano per anche alterata. Invano Newton, tratto in seguito dall' adulazione de' suoi discepoli e de' suoi concittadini, ha cangiato linguaggio; invano ha egli preteso che la gloria d' una scoperta apparteneva tutta intera al primo inventore, e che i secondi inventori non dovevano avere alcuna pretensione. Primieramente, senza discutere la sua pretesa

anteriorità, gli fu risposto che due uomini i quali fanno separatamente la medesima scoperta importante, hanno egual dritto all'ammirazione, e che quegli che la pubblica il primo, ha altresì il primo dritto alla pubblica riconoscenza. In seguito gli fu provato che il suo principio non aveva in questo caso una giusta applicazione.

Il progetto di spogliare Leibnizio e di farlo riguardare come plagiario, fu portato sì oltre in Inghilterra, che nel calore della disputa si osò dire (e Newton medesimo non ebbe rossore di appoggiare l'obbiezione) che il calcolo differenziale di Leibnizio non era altra cosa che il metodo di Barrow. Come mai pensate, rispose Leibnizio, di farmi tale imputazione? Voi volete nello stesso tempo, che il calcolo differenziale sia il metodo di Barrow, quando io me lo attribuisco, e che il sig. Newton ne sia l'inventore, quando si tratta di rapirmelo? È egli possibile che la passione vi acciechi al segno di non sentire questa manifesta contraddizione? Se il calcolo differenziale era realmente il metodo di Barrow (e voi sapete benissimo che non lo è), chi meriterebbe più d'essere chiamato *plagiario*, il sig. Newton, che è stato il discepolo, l'amico di Barrow, che è stato



a portata di attingere nella conversazione quelle idee che Barrow non ha poste ne' suoi libri, o pure io, che non ho potuto conoscere che i libri, e che non ho mai avuto relazioni coll' autore?

Giovanni Bernoulli, che aveva appreso, in compagnia di suo fratello, l'analisi infinitesimale negli scritti di Leibnizio, oppose al *Commercium epistolicum* una lettera in cui espose, che non solo il metodo delle flussioni non aveva preceduto il calcolo differenziale, ma che poteva da esso averne avuta l'origine, e che Newton non l'aveva ridotto ad operazioni analitiche generali in forma d'algoritmo, se non dopo che il calcolo differenziale era già diffuso in tutti i giornali d'Olanda e Germania. Le ragioni di Giovanni Bernoulli sono in sostanza, 1.° che il *Commercium epistolicum* non offre alcun vestigio che Newton, negli scritti allegati, avesse usato le lettere punteggiate per denotare le flussioni; 2.° che nel libro *de' principj*, dove l'autore aveva sì spesso l'occasione di adoperare questo calcolo, non lo ha fatto; che egli procede dappertutto per mezzo di linee e figure, senza alcuna analisi determinata, e soltanto alla maniera di Huguens, Roberval, Cavalieri, ec.; 3.° che le lettere pun-

teggiate non hanno cominciato a vedersi che nel terzo volume delle opere di Wallis, molti anni dopo che il calcolo differenziale era conosciuto in ogni luogo; 4.° che il vero metodo di differenziare le differenze, ossia di prendere le flussioni delle flussioni, era ignorato da Newton, poichè anche nel suo trattato delle *Quadrature*, pubblicato solamente nel 1704, la regola che dà alla fine per determinare le flussioni di tutti gli ordini, con riguardare queste flussioni come i termini della potenza d'un binomio formato d'una quantità variabile e della sua flussione prima, e con trattare questa flussione prima come costante, è falsa, colla sola eccezione pel termine che corrisponde alla flussione prima; 5.° che alla medesima epoca del 1704, Newton non era versato nel calcolo integrale delle equazioni differenziali, che Leibnizio ed i fratelli Bernoulli avevano già portato tanto innanzi: altrimenti non avrebbe tralasciato di trattare questa parte, la più difficile dell'analisi infinitesimale, e per lo meno tanto degna di essere promulgata e perfezionata, quanto le quadrature su le quali si era molto esteso.

A questa lettera gl' Inglesi risposero che la notazione non faceva il metodo; che i principj del calcolo delle flussioni erano



contenuti nelle lettere e nella grand' opera di Newton; che la regola del trattato delle *quadrature* per trovare le flussioni di tutti gli ordini era vera, col sopprimere i denominatori de' termini della serie, e dava per conseguenza delle quantità *proporzionali* alle vere flussioni. Non veggo che essi abbiano risposto all' ultima obbiezione.

I partigiani di Leibnizio replicarono che i vantaggi d'un metodo analitico dipendono in gran parte dalla semplicità dell'algoritmo; che la caratteristica di Leibnizio aveva già fatto fare immensi progressi alla nuova analisi in un tempo in cui appena s'intendeva il libro di Newton; che in vano si tentava di negare o di palliare l'errore della regola di Newton per trovare le flussioni di tutti gli ordini, e che non si poteva mai dire che i termini d'una serie di frazioni fossero *proporzionali* ai termini d'un' altra serie di frazioni, quando i termini corrispondenti avevano denominatori differenti come accadeva in questo caso.

Tali furono presso a poco le ragioni allegate e dibattute tra i due partiti, per più di quattr' anni. La morte di Leibnizio, accaduta nel 1716, pareva che dovesse porre fine alla contesa; ma gl' Inglesi inseguendo l' ombra di questo grand' uomo, pubblicarono

nel 1726 un' edizione del libro *de' Principj*, nella quale fu soppresso lo *scolio* che concerneva Leibnizio. Ciò era lo stesso che confessare la sua scoperta in un modo assai autentico e sconcio. Non dovevano essi comprendere che si attribuirebbe ad una prevenzione nazionale, o fors' anche ad un sentimento più ingiusto, il disegno chimerico di annientare la testimonianza che una nobile emulazione aveva altre volte resa alla verità in un modo sì solenne?

Ne' tempi posteriori vi sono stati dei geometri che, senza prendere un partito decisivo tra Newton e Leibnizio, hanno obbiettato a quest' ultimo che la metafisica del suo metodo era oscura o anche difettosa; che non vi sono quantità infinitamente piccole, e che rimangono de' dubbi sopra l' esattezza d' un metodo ove queste quantità sono introdotte. Ma Leibnizio può rispondere: io non ho proposto che sussidiariamente l' esistenza delle quantità infinitesime, o come una semplice ipotesi che serve ad abbreviare il calcolo ed i ragionamenti sopra de' quali è fondato; non ho già bisogno che vi sieno delle quantità infinitesime, ma mi basta, come ho stampato in molte opere, che le mie *differenze* sieno minori di qualunque quantità *finita*



che voi siate per assegnare, o che quindi l' errore che può risultare dalla mia supposizione, sia più piccolo di qualunque errore determinabile, cioè a dire, assolutamente nullo. La maniera onde Archimede dimostra la proporzione della sfera al cilindro, ha per base un principio simile. Il sig. Fontenelle, che altronde era ben intenzionato per me, ha avuto torto di contentarsi di dire alla testa della *sua geometria dell' infinito*, che dopo avere ammesso dapprima gl' infinitamente piccoli, io m' era rallentato nel seguito sino al segno di ridurre gli infinitesimi di varj ordini, a non essere che degli *incomparabili*, nel senso che un grano di sabbia sarebbe incomparabile col globo della terra: egli doveva aggiungere che questa similitudine non mi serve che a presentare un' idea generale e sensibile delle mie differenze alla immaginazione di certi lettori, e che nella memoria alla quale fa allusione, (1) finisco con rilevare espressamente che invece dell' infinito o dell' infinitamente piccolo, bisogna prendere delle quantità tanto grandi, o tanto piccole quanto è necessario, affinchè l' errore sia più pic-

(1) *Leib. Op. tom. II, pag.* 370.

colo di qualunque errore dato. La metafisica del mio calcolo è dunque totalmente conforme a quella del metodo di *esaustione* degli antichi, del quale niuno ha mai rivocata in dubbio la certezza: e per quanto si sia voluto dire, il mio rivale non ha realmente a questo riguardo sopra di me vantaggio alcuno.

Finalmente è stato detto che malgrado l'affettazione di Newton a non adoperare che la sintesi nel suo libro *de' principj*, non si può presentemente dubitare ch' egli non avesse trovato molte proposizioni col metodo analitico delle flussioni; che quest' applicazione ad una moltitudine d' oggetti sì grandi suppone una lunga serie di meditazioni; e che per lo meno secondo tutte le apparenze, egli possedeva il metodo delle flussioni prima di Leibnizio; giacchè ha dovuto impiegare non pochi anni a comporre il suo libro. Esaminiamo le conseguenze che si vogliono ritrarre da questa induzione.





*Parallelo di Newton e di Leibnizio.*

Non è forse mai esistito un uomo, come Newton, dotato d' un intendimento e d' un vigore di mente capace di concepire, di continuare ed eseguire un vasto piano. Leibnizio non ha dato alcuna opera particolare, che per l'importanza e concatenamento delle materie sia paragonabile al libro *de' principj*: troppo trasportato dalla vivacità del suo genio, dalla moltitudine e varietà delle sue occupazioni, da' suoi viaggi, dalle sue corrispondenze letterarie colla maggior parte dei dotti di tutti i paesi del mondo, egli non poteva obbligarsi a meditare per molto tempo il medesimo argomento, nè a seguire partitamente tutte le cognizioni d' un grande principio; ma la raccolta delle sue opere, ed il suo *commercio epistolare* con Giovanni Bernoulli portano dappertutto il più alto carattere dell'invenzione. Egli semina ad ogni passo idee nuove, e germi di teorie, lo sviluppo delle quali produrrebbe qualche volta trattati interi. Egli ha sopra Newton il vantaggio d'avere inventato e di molto avanzato il calcolo integrale delle equazioni differenziali. Se non ha uguagliato il geometra inglese nella

profondità, sembra però che lo sorpassi in quella rapida penetrazione ed acutezza d'ingegno, con cui concepisce in qualsivoglia materia le quistioni più sottili e più ingegnose. Il primo ha lasciato una massa più grande di verità geometriche; l'altro ha accelerato di più al suo tempo i progressi della scienza, colla semplice e comoda notazione del suo calcolo, colle applicazioni che ne fece egli medesimo, o per quelle che ai dotti diede motivo di fare, per gli incoraggimenti che loro dava, e per le nuove strade che continuamente apriva alle loro meditazioni. Finalmente, comunque grande fosse la fatica che ha potuto richiedere il libro de' *principj*, non si deve dimenticare che quest' opera è comparsa soltanto due o tre anni dopo che Leibnizio aveva pubblicato il suo calcolo differenziale, ed alcuni saggi del calcolo integrale.



## CAPO VI.

*Continuazione della medesima controversia. Guerra di problemi tra Giovanni Bernoulli e gl' Inglesi. Varietà.*

In questa lunga disputa, si dimenticarono troppo spesso i riguardi scambievoli che le sociali convenienze impongono a tutti gli uomini; ma essa ebbe almeno il vantaggio di eccitare la più viva emulazione tra i geometri più grandi di quel tempo. Si venne ad alcune sfide di problemi difficilissimi, le cui soluzioni produssero nuove teorie, ed accrebbero considerabilmente il dominio della geometria.

Qualche tempo prima della sua morte, Leibnizio volendo *tastare il polso agl' Inglesi*, come egli diceva, fece loro proporre il famoso problema delle traiettorie ortogonali, il quale consisteva nel trovare la curva che taglia una serie di curve date, sotto un angolo costante, o sotto un angolo variabile secondo una data legge. Si narra che Newton ritornando a casa, molto stanco, ricevette il problema a quattr' ore, e non si coricò se

non dopo averlo sciolto (1). Il suo metodo si riduce a queste poche parole (2): *La natura delle curve da tagliarsi dà le loro tangenti ai punti d' intersezione: gli angoli d' intersezione danno le perpendicolari delle curve secanti; due perpendicolari vicine danno co' loro punti di concorso il centro di curvatura della curva secante. Situate convenientemente l' asse delle ascisse, e prendete la flussione prima per l' unità: la posizione della perpendicolare darà la flussione prima dell' ordinata alla curva cercata, e la curvatura di questa curva medesima darà la flussione dell' ordinata: quindi il problema sarà sempre ridotto ad equazione. In quanto all' integrazione dell' equazione*, soggiungeva l' autore, *essa appartiene ad un altro metodo*. Gl' Inglesi cominciavano a trionfare; ma Giovanni Bernoulli, incaricato della causa di Leibnizio che da poco era morto, derise altamente questo progetto di soluzione; egli sostenne non esservi cosa più facile che lo giugnere all' equazione della traiettoria; che inoltre si erano già da lungo tempo trattate con buon esito molte quistioni particolari di questa specie;

(1) *Font. Elog. di Newton*.
(2) *Trans. fil.* 1716.



che la difficoltà essenziale consisteva nell' integrare l' equazione differenziale della traiettoria, quando era possibile, o esattamente, o per mezzo delle quadrature delle curve; che questa integrazione lungi dall' essere estranea al problema, n' era anzi il necessario complemento; laonde concludeva che Newton non avendo dato per ciò mezzo alcuno, aveva eluse, e non superate le difficoltà della quistione.

*Nicolò Bernoulli, nato nel* 1695, *e morto nel* 1726.

Nicolò Bernoulli (figlio di Giovanni) risolse in un modo elegantissimo il caso particolare, in cui le curve intersecate sono iperboli del medesimo centro e del medesimo vertice (1). Suo cugino Nicolò Bernoulli ed Ermanno trattarono la quistione più generalmente, con metodi che si riducevano al medesimo, senza essersi nulla comunicato (2). Questi metodi si applicavano facilmente a tutti i casi, in cui le curve intersecate sono geo-

(1) *Atti di Lips.* 1716.
(2) *Ib.* 1717.

metriche, e parimente ad alcune curve trascendenti. Ermanno avendo voluto dare alle formole più estensione che non comportavano, cadde in alcuni sbagli che furono rilevati dai Bernoulli. Nel rimanente, eglino si accordavano tutti a riguardare la soluzione di Newton come insufficiente e di nessun uso.

*Taylor, nato nel* 1685, *e morto nel* 1731.

Sembra che fino d'allora Newton abbandonasse interamente il campo di battaglia. Alcuni de' suoi amici o de' suoi discepoli continuarono la guerra con calore. Taylor fu quegli che più si distinse. Senza fermarsi a svolgere la soluzione di Newton, ne diede una di proprio fondo, la quale soddisfaceva a tutta l'estensione della quistione, come da Leibnizio era stata proposta (1). Se non avesse fatto altro, non si sarebbe meritati che degli encomj; ma trasportato dal suo risentimento contro Giovanni Bernoulli, che aveva parlato di lui un poco leggermente in altra occasione, pose alla testa della sua soluzione alcune riflessioni ingiuriose contro i partigiani di Leibnizio, avendo principalmente in vista Giovanni Bernoulli loro capo: tra le altre cose, diceva, che s'eglino non vedevano come la soluzione di Newton conduceva alle equazioni del problema, bisognava ciò attribuire alla loro ignoranza: *illorum imperitiae tribuendum*. L'uomo a cui si dirigeva questo strano insulto, non era punto sofferente, e ne trasse la vendetta più umiliante per la vanità di Taylor.

(1) *Trans. filos.* 1717.



In una dissertazione (1) sopra le *traiettorie ortogonali*, composta in comune da Giovanni Bernoulli e da Nicolò suo figlio, si cominciò a confessare che la soluzione di Taylor era esatta, e che inoltre supponeva in lui della sagacità; ma in seguito si fece vedere ch' essa non era in gran parte abbastanza generale, e che esistevano moltissimi casi risolubili, ai quali non poteva applicarsi. Ne medesimo tempo, Giovanni Bernoulli diede un altro metodo, che al vantaggio di essere incomparabilmente più semplice univa quello di abbracciare tutte le curve geometriche, tutte le curve meccaniche *completamente* simili, e finalmente moltissime curve meccani-

(1) *Atti di Lips.* 1718.

che *incompletamente* simili. Queste scoperte erano il prodotto d' un' analisi profonda, nuova e delicata. L' autore aveva tra le mani un istrumento che maneggiava con destrezza, il metodo di differenziare *de curva in curvam*. La sua vittoria non fu equivoca; e Taylor malgrado il tuono di sufficienza che da principio aveva preso, fu costretto di qui riconosere un superiore.

Noterò di passaggio che gli autori di questa dissertazione riferiscono a questo medesimo argomento un piccolo scritto di Nicolò Bernoulli, nipote, dove trovasi, per la prima volta, il famoso teorema di condizione, da cui dipende la realità delle equazioni differenziali del prim' ordine a tre variabili: teorema che alcuni geometri moderni hanno cercato di attribuirsi.

Nel tempo che trattavasi la quistione delle traiettorie, Taylor propose diversi problemi, allora nuovi e molto difficili, sopra l' integrazione delle frazioni razionali (1). Giovanni Bernoulli che aveva già dato alcuni saggi in questo genere, risolse facilmente tutti questi problemi: e de' risultati ai quali pervenne, for-

(1) *Mem. dell' Acc.* 1702.



mò una serie di teoremi curiosi (1), lo sviluppo e la dimostrazioni de' quali esercitarono utilmente suo figlio e suo nipote.

*Rugiero Cotes nato nel* 1682, *e morto nel* 1716.

Non dobbiamo dimenticarci di qui aggiungere, ad onore dell' Inghilterra, che Rugiero Cotes, professore di matematica a Cambridge, aveva trattato la medesima materia, e ridotta l' integrazione delle frazioni razionali in formole generali ed assai comode, nella sua celebre opera intitolata: *Harmonia mensurarum*; ma quest' opera non vide la luce che sei anni dopo la morte dell' autore: indubitatamente Taylor ed i Bernoulli non ne conoscevano il tenore. Vi sono, nel medesimo volume di Cotes, molte altre scoperte utilissime, come il suo metodo per apprezzare gli errori nelle matematiche miste, le sue riflessioni sopra il metodo differenziale di Newton, il suo famoso teorema per la risoluzione delle equazioni quadratiche, ec. Cotes morì nel fiore della sua età. Newton lo sti-

(1) *Atti di Lips.* 1719.

mava infinitamente; egli diceva sovente di lui: *se il sig. Cotes avesse vissuto, ci avrebbe insegnato qualche cosa*.

L' animosità che regnava tra Giovanni Bernoulli e Taylor aumentava ogni giorno. Sino dall' anno 1715, Taylor aveva pubblicato il suo libro intitolato: *Methodus incrementorum directa et inversa*; opera profonda ed un poco oscura, nella quale l' autore, senza citare alcuno, aveva trattato molti problemi già risoluti. (1) Nel 1716 comparve, in lode di Giovanni Bernoulli, una lettera nella quale Taylor era apertamente trattato da *plagiario*. Egli se ne dolse amaramente: ritorse l' accusa, facendo vedere che Giovanni Bernoulli, nell' ultima sua soluzione del problema degli isoperimetri, non aveva fatto altro che travestire la soluzione di suo fratello, e tutte le semplificazioni che vi aveva fatte, non ne cangiavano la natura. Allora Giovanni Bernoulli non serbò più alcun riguardo; fece comparire sotto il nome d' un certo *Burcard*, maestro di scuola a Basilea, una risposta a

(1) *Atti di Lips.* 1716.



Taylor, piena d' ingiurie e di facezie, in mezzo alle quali nondimeno s' incontrano alcune verità vantaggiose.

*Traiettorie reciproche.*

Il problema delle traiettorie ortogonali diede l' origine a quello delle traiettorie reciproche, proposto alla fine della dissertazione de' Bernoulli padre e figlio. Si domandavano le curve che essendo costruite in due direzioni contrarie sopra il medesimo asse dato di posizione, poi venendo a muoversi parallelamente a sè stesse, con velocità ineguali, si tagliassero costantemente sotto il medesimo angolo dato. Fu questo un nuovo argomento di difficoltà analitiche da vincere, e di estensione per la scienza. Esso fu per molto tempo agitato tra Giovanni Bernoulli ed un Inglese anonimo, che si seppe dappoi essere il dottore Pemberton, amico particolare di Newton. Noi siamo qui ancora obbligati di dire che Giovanni Bernoulli mantenne la sua superiorità, per la semplicità ed eleganza delle sue soluzioni.

I geometri inglesi avevano formato una lega contro Giovanni Bernoulli, e lo assalivano sopra ogni sorta di argomenti. Solo, dice

Fontenelle, come il famoso Orazio Coclite, sosteneva sul ponte tutto lo sforzo della loro armata. Keil, soldato più ardito che valente, credette di aver trovato l'occasione d'invilupparlo. La teoria della resistenza de' mezzi al movimento de' corpi che li traversano, formava una parte considerabile del libro *dei principj*. Newton aveva determinato la curva che descrive un proiettile in un mezzo resistente come la velocità semplice; ma non aveva toccato il caso, allora più difficile, in cui il mezzo resiste come il quadrato della velocità. Keil propose questo caso a Giovanni Bernoulli, che non solo lo risolse in pochissimo tempo, ma estese altresì la soluzione all'ipotesi generale in cui la resistenza del mezzo fosse come una potenza qualunque della velocità del mobile. Trovata questa teoria, l'autore offrì, a diverse riprese, di mandarla ad un uomo di confidenza in Londra, sotto la condizione che Keil rimetterebbe egli pure la sua soluzione; ma Keil, benchè vivamente interpellato, serbò un profondo silenzio. La ragione era facile ad indovinarsi; egli non aveva punto risoluto il suo problema: nel proporlo, si aspettava che nessuno troverebbe ciò che era sfuggito alla sagacità di Newton. Egli restò crudelmente ingannato nella



sua congettura; e la sua sfida, più che indiscreta, gli tirò addosso, per parte del geometra di Basilea, una riprensione tanto più pungente, in quanto che il solo mezzo di rispondere solidamente si era quello di risolvere il problema, e che Keil non potè trovare questo mezzo, nè nelle proprie forze, nè nel socoorso de' suoi amici. Il trionfo di Giovanni Bernoulli fu completo. Nella prima ebbrezza della sua vittoria, egli si abbandonò contro i suoi rivali a sarcasmi ed a facezie che non erano di buon gusto, ma certamente perdonabili al carattere franco e leale d'un uomo assalito insidiosamente, che aveva da vendicare gli oltraggi fatti a sè medesimo, e ad un illustre amico di cui piangeva ancora la perdita.

Queste dotte contese fissavano l'attenzione di tutti i geometri: e malgrado l'asprezza che vi frammischiavano le umane passioni, riscaldavano gli spiriti, e facevano nascere da tutte le parti nuovi proseliti alle matematiche.

Ritorno donde sono partito, e ripiglio alcuni altri argomenti che sono stato obbligato di lasciare indietro.

*Montmort, nato nel* 1678; *e morto nel* 1718.

Nel 1711 comparve *l'analisi de' giuochi d'azzardo* di Raimondo di Montmort: opera piena di viste acute e profonde, il cui oggetto è di sottoporre alcune probabilità al calcolo, di apprezzare gli azzardi, di regolare le scommesse, ec. Essa non appartiene propriamente alla nuova geometria; nondimeno contribuì a' suoi progressi, sia nell' aguzzare in generale lo spirito delle combinazioni, sia per alcune estensioni che diede l'autore alla teoria delle serie; felice supplemento all' imperfezione de' metodi rigorosi, in tutte le parti delle matematiche.

*Moivre, nato nel* 1668, *e morto nel* 1754.

Tre anni dopo, Moivre fece comparire sopra il medesimo argomento un piccolo trattato intitolato: *Mensura sortis*, principalmente notabile in quanto che contiene gli elementi ed alcune ingegnosissime applicazioni della teoria delle serie ricorrenti. Questo saggio, accresciuto successivamamente dalle riflessioni dell'autore, è divenuto un' opera insigne, ammirata da tutti i geometri. La migliore



edizione che ne sia stata fatta è quella del 1737, in inglese, sotto il titolo: *Doctrine of Chances*. Egli è noto che Moivre era un geometra francese che la revocazione dell' editto di Nantes aveva costretto di espatriare; egli si era ritirato a Londra. Nato con un talento superiore per la geometria, il cattivo stato della sua fortuna l' obbligava di dare delle lezioni di matematica per vivere. Newton aveva per lui la più alta stima. Si racconta che quando ne' dieci o dodici ultimi anni della vita del geometra inglese si andava a domandargli alcune spiegazioni sopra le sue opere, egli rimandava i consultanti a Moivre, dicendo: *Vedete il sig. de Moivre; egli sa tutte queste cose meglio di me*.

Nicolò Bernoulli, nipote, venne a Parigi nel 1711. Una grande riputazione, costumi dolci e facili gli acquistarono molti illustri amici. Di questo numero fu Montmort, col quale formò una stretta unione, per conformità di carattere, e di gusto per l' analisi delle probabilità. Eglino passarono tre mesi interi alla campagna, unicamente occupati a risolvere i più difficili problemi su questa materia. Tutte queste nuove ricerche e gli schiarimenti ai quali diedero luogo, produs-

sero una seconda edizione del libro di Montmort, molto superiore alla prima.

Ho detto per occasione alcune parole del libro di Taylor, *Methodus incrementorum*, ec. Quest' opera, celebre anche al presente, merita una menzione più espressa.

L' autore chiama *incrementa* o *decrementa* delle quantità variabili, le differenze, finite o infinitesime, di due termini consecutivi nella medesima serie formata secondo una data legge. Allorchè queste differenze sono infinitesime, il loro calcolo, diretto o inverso, appartiene all' analisi leibniziana, o al metodo delle flussioni: Taylor risolve moltissimi problemi di questo genere. Ma quando le differenze sono finite, il metodo di trovare i rapporti ch' esse hanno colle quantità che le producono, forma un nuovo ramo di calcolo, di cui Taylor ha dato i primi principj, ed a questo riguardo il suo libro è originale. Egli ha sommato in questo modo alcune serie curiosissime.

L'estrema concisione, o piuttosto l'oscurità colla quale è scritta quest' opera, ritardò per molto tempo il successo che doveva avere.





*Nicole, nato nel* 1683, *e morto nel* 1758.

Nicole, geometra francese assai distinto, giunse però ad intender quest' opera; egli sviluppò chiarissimamente il metodo per l'integrazione delle differenze finite, e vi aggiunse molte nuove serie di sua invenzione. Si possono riguardare le due eccellenti memorie che pubblicò sopra questo argomento, nella raccolta dell' accademia delle scienze di Parigi, come il primo trattato elementare, metodico e luminoso, che sia comparso del calcolo integrale alle differenze finite.

Anno 1717 e 1728

Potrei citare ancora molte altre opere di quel tempo; ma bisogna esser breve. Invito i miei lettori a consultare i giornali di Germania, di Francia, d'Inghilterra, d'Italia, ec., e le collezioni accademiche: quivi troveranno una moltitudine di preziose memorie sopra tutte le parti delle matematiche.

*Stabilimento ed utilità delle accademie.*

Si è già veduto che la società reale di Londra e l'accademia delle scienze di Parigi presero la loro origine quasi nel medesimo tempo, verso l'anno 1660. L'accademia di Berlino, il cui stabilimento era stato progettato sino dall'anno 1700, ricevette nel 1710 una forma regolare e legale, sotto gli auspicj di Federico I, elettore di Brandeburgo, primo re di Prussia; e Leibnizio ne fu nominato presidente perpetuo. L'università di Bologna fu fondata nel 1713 dietro le insinuazioni del conte Marsigli, a cui la storia naturale ha tante obbligazioni. Nel 1726, Caterina I, vedova di Pietro il Grande, creò l'accademia di Pietroburgo. Nel seguito si sono formate molte altre dotte società, che troppo lungo sarebbe d'indicare partitamente. Tutti questi stabilimenti sono stati infinitamente utili al progresso delle scienze.



## CAPO VII.

*Continuazione de' progressi della geometria. Soluzioni di diversi problemi.*

Due problemi molto curiosi (1), proposti da Ermanno, occuparono per qualche tempo i geometri con molta utilità: il primo consisteva nel trovare una curva, la cui area fosse eguale ad una certa funzione proposta delle coordinate; il secondo, molto più difficile, era di determinare una curva algebrica, tale che l'espressione indefinita della sua lunghezza racchiudesse la quadratura d'una curva algebrica data, più o meno un numero *dato* di quantità algebriche. Nicolò Bernoulli, figlio, risolse il primo (2). In quanto al secondo, egli confessò (sebbene scrivesse sotto gli occhi di suo padre) di non poterlo risolvere che in certe supposizioni che ne restringevano la generalità (3). Ermanno diede la solu-

(1) *Atti di Lips.* 1719.
(2) *Ibid.* 1720.
(3) *Ibid.* 1723.

zione generale, con un metodo ingegnosissimo, fondato sopra la teoria delle evolute; ed in quest' occasione egli ebbe del vantaggio sopra i Bernoulli.

Un anno dopo (1), Gio. Bernoulli ritornò su la medesima quistione, e la trattò in un modo più diretto e più analitico, con darle una nuova estensione.

*Vera difficoltà di risolvere i problemi dipendenti dall' analisi infinitesimale.*

Vi è un' osservazione generale da farsi sopra tutti i problemi in tal modo dipendenti dall' analisi infinitesimale. Si arriva d' ordinario assai facilmente a metterli in equazione: la principale difficoltà si è d' integrare queste equazioni; essa è sovente tale che supera tutte le forze dell' analisi. Laonde i più grandi geometri si sono occupati a perfezionare il calcolo integrale, ossia l' integrazione delle equazioni differenziali di tutti gli ordini.

(1) *Atti di Lips.* 1725.



*Riccati, nato nel* 1690, *e morto nel* 1735.

Con questa mira, il conte Giacomo Riccati essendosi imbattuto in un' equazione differenziale del prim' ordine, a due variabili, molto semplice in apparenza, ma non avendo potuto giugnere ad integrarla nella sua generalità, propose la quistione ai geometri (1). Nessuno potè conseguire completamente lo scopo; ma si assegnò un gran numero di casi dove le indeterminate sono separabili, e dove per conseguenza l' equazione s' integra per le quadrature delle curve.

*Daniele Bernoulli, nato nel* 1700, *e morto nel* 1782.

Gli autori di queste scoperte sono Riccati medesimo, Nicolò Bernoulli, nipote, Nicolò Bernoulli, figlio, Daniele Bernoulli, suo fratello, e Goldebach. Tutti arrivarono con metodi differenti ai medesimi risultati. Ordinariamente l' equazione di cui trattasi, si chiama *l' equazione di Riccati*, quantunque essa

(1) *Atti di Lips.* 1725.

fosse già stata considerata da Giacomo Bernoulli, che ne aveva integrati alcuni casi particolari: essa è nell' analisi infinitesimale ad un dipresso ciò che è la quadratura del cerchio nella geometria elementare. Allorchè un' equazione vi è ridotta, il problema si reputa come sciolto. Se l' equazione non cade ne' casi separabili, non si ha più altra risorsa che di integrarla co' metodi d' approssimazione.

*Eulero, nato nel* 1707, *e morto nel* 1783.

Il celebre Eulero, quell' uomo destinato a fare una rivoluzione nella scienza analitica, si annunziò fino da quel tempo con diverse ricerche, e tra le altre con una bellissima soluzione del problema delle traiettorie reciproche, ch' egli ha di poi estesa e perfezionata (1). Egli aveva preso le prime cognizioni di matematica sotto Gio. Bernoulli, il quale alla fine della sua soluzione del problema menzionato, predice ciò che un giorno sarebbe diventato un tale allievo.

(1) *Atti di Lips.* 1727.

*Primi successi dell' accademia di Pietroburgo.*

Alla fondazione dell' accademia di Pietroburgo, si vide rinnovarsi l' esempio che Tolomeo Filadelfo aveva dato, rapporto al museo d' Alessandria: una colonia di geometri, d' astronomi, di fisici, di naturalisti, ec., fu chiamata da tutti i paesi dell' Europa a Pietroburgo. Si contano in questo numero, Nicolò Bernoulli, figlio, Daniele Bernoulli, Eulero, Leutmann, Bulfinger, ec. Oltre a questi membri residenti, l' accademia aveva molti illustri socj stranieri, come Giovanni Bernoulli, Wolf, Poleni, Michelotti, ec. Tutti questi uomini, pieni di genio, ardenti e laboriosi, si affrettavano ad arricchire le collezioni di questa società.

Anno 1726 Nel primo volume si distinguono due o tre eccellenti memorie di Nicolò Bernoulli, figlio: sventuratamente egli fu rapito dalla morte quasi al suo ingresso nella carriera. I due uomini che hanno più contribuito alla gloria della geometria in questo stabilimento, alla sua origine e nel seguito, sono Daniele Bernoulli ed Eulero.

La maggior parte de' problemi ne' quali si erano occupati i geometri nella prima effer-

vescenza della nuova geometria, avevano per oggetto alcune teorie particolari, alle quali non si era data tutta l'estensione onde erano suscettibili. Daniele Bernoulli ed Eulero generalizzarono molti di questi antichi problemi, come quelli delle catenarie, degli isoperimetri; ne trattarono altri assolutamente nuovi e molto difficili, come, per esempio, la determinazione de' movimenti oscillatorj d'una catena pesante, sospesa verticalmente, la ricerca de' suoni che rende una lama elastica percossa, i movimenti che risultano dalla percossa eccentrica de' corpi, ec. Siffatte quistioni richiedevano una grande sagacità primitiva ed una profonda scienza del calcolo. I nostri due geometri le risolvevano ciascuno dal canto loro; e non dobbiamo dimenticarci di notare il raro esempio di moderazione e di onoratezza che diedero allora, e dal quale non si sono mai dipartiti nel seguito. Si vedevano a proporsi reciprocamente de' problemi, lavorare sopra i medesimi argomenti, senza che la rivalità de' talenti, o la diversità delle opinioni sopra certi punti che dipendevano dalla fisica, abbia mai alterato la stretta amicizia che avevano insieme contratta nella gioventù. Tutti due si rendevano, con franchezza e senza restrizione, una vi-



cendevole giustizia: nella scienza analitica, Daniele Bernoulli abbassava bandiera innanzi ad Eulero, ch' egli chiamava suo *ammiraglio*; ma nelle quistioni che esigevano più finezza d' ingegno che profonda geometria, Daniele Bernoulli a vicenda stava nel posto più eminente: difatti, egli aveva un talento particolarissimo di applicare la geometria alla fisica, e di sottoporre ad un calcolo preciso alcuni fenomeni che non si conoscevano che in modo generale e vago.

Si è attribuito a Pascal il progetto di far piegare tutti gli uomini sotto il giogo della religione, colla forza del ragionamento e dell' eloquenza: sembra del pari che Eulero abbia voluto far dominare l'analisi sopra tutte le parti delle matematiche. Egli si vede continuamente occupato a perfezionare questo grande istrumento, ed a mostrare l' arte di ben maneggiarlo (1). Era egli appena nell' età di ventun' anni, quando diede un metodo nuovo e generale per integrare delle classi intere di equazioni differenziali del second' ordine, assoggettate a certe condizioni. Prima di lui non si otteneva l' intento che in alcuni casi

(1) *Acc. di Pietroburgo* 1728.

particolari, ed anche piuttosto per la sagacità dell' analista, che per mezzo di metodi uniformi e determinati.

In Italia, Gabriele Manfredi pubblicava di tempo in tempo delle ingegnose memorie di geometria e di analisi ne' giornali e nei *commentarj* dell' università di Bologna.

*Fagnani, nato nel* 1682, *e morto nel* 1766.

Un altro geometra della medesima nazione, il conte *Fagnani*, si aprì un campo di problemi nuovi e d' una specie singolare. Egli insegnò a determinare degli archi d' ellisse, o d' iperbola, che hanno per differenza una quantità algebrica (1). Leibnizio e Gio. Bernoulli che avevano tentato questa ricerca, giudicarono ch'essa non poteva essere sottoposta ai nuovi calcoli: eglino avevano soltanto risoluto la quistione per la parabola, ma con far uso del calcolo algebrico ordinario; essa è pure risoluta, col medesimo mezzo, nel trattato delle *sezioni coniche* del marchese dell' Hopital. Fagnani applicò con molta perizia il calcolo integrale agli archi d' ellisse e d' iperbola;

(1) *Giorn. d' Italia* 1718.



il che comprende la parabola, come un caso particolare. Il suo modo consiste nel trasformare il polinomio differenziale che rappresenta l' arco elementare, ellittico o iperbolico, in un altro polinomio negativamente simile; laonde colla sottrazione, e coll' integrazione susseguente, risulta una quantità algebrica. La gloria d' avere scavato quest' angolo della geometria, se così è lecito di esprimermi, ha collocato Fagnani nel posto degli analisti più acuti.

Molto tempo dopo, avendo Eulero considerato la stessa materia, giunse non solo a risolvere i problemi di Fagnani in un modo nuovo, ma si sollevò ancora ad un metodo per integrare una classe molto estesa di equazioni differenziali separate, i due membri delle quali non essendo integrabili ciascuno in particolare, formano nondimeno un tutto assolutamente integrabile. Si sapevano integrare delle equazioni di questa specie, allorchè i due membri dipendono nel medesimo tempo dagli archi di cerchio, o dai logaritmi. Le nuove integrazioni d' Eulero sono molto più estese; esse formano un nuovo ramo utilissimo ed importantissimo del calcolo integrale: l' autore vi spiegò tutte le risorse del genio e della scienza analitica la più profonda.

Il problema di Viviani sopra la quadratura della volta emisferica, ne fece nascere molto tempo dopo un altro d' egual natura, proposto da un geometra, altronde assai poco conosciuto, per nome *Ernesto* d'*Offemburg*: esso era di traforare una strada emisferica di un numero qualunque di finestre di forma ovale, con questa condizione che i loro contorni fossero espressi da quantità algebriche; ovvero, in altri termini, bisognava determinare sopra la superficie d' una sfera delle curve algebricamente rettificabili. Si scorge primieramente che le curve domandate non possono essere formate dall' intersezione d' un piano colla sfera, poichè tutte queste intersezioni, da qualunque parte si facciano, non sono mai altro che cerchi: esse appartengono alla classe delle curve a doppia curvatura. Questo problema, quantunque curioso e difficile, rimase intatto per molto tempo, e si ignora altresì se l' autore lo abbia risoluto.

Ermanno, (1) in una memoria sopra la rettificazione delle epicicloidi sferiche, credette che queste curve soddisfacessero in generale alla quistione d' Offemburg, ossia ch' es-

(1) *Acc. di Pietroburgo* 1726.



se fossero algebricamente rettificabili: ma ciò non avviene che in certi casi particolari; la rettificazione delle epicicloidi sferiche dipende in generale dalla quadratura dell' iperbola (1). Gio. Bernoulli rilevò l'errore di Ermanno; e non contento di avere assegnato la vera epicicloide algebrica e rettificabile, risolse direttamente ed *a priori* il problema di Offemburg, cioè a dire, egli diede il metodo generale per determinare le curve rettificabili che si possono descrivere sopra la superficie d' una sfera.

*Maupertuis, nato nel* 1698, *e morto nel* 1759.

In seguito egli propose la medesima ricerca a Maupertuis, come al capo de' geometri francesi di quel tempo, offrendosi altronde di mandare la sua soluzione se fosse stata richiesta. L' offerta fu accettata. Mentre la soluzione di Bernoulli era per istrada, Maupertuis risolse egli pure il problema; ciò almeno egli assicura, soggiungendo d'aver avuto gran premura di far ben constare la sua scoperta: precauzione che divenne effettiva-

(1) *Acc. di Parigi* 1732.

mente tanto più necessaria, quanto che le due soluzioni sono interamente le medesime riguardo alla sostanza.

Nicole diede nel medesimo tempo il metodo per trovare l' espressione generale della rettificazione delle epicicloidi sferiche, e per determinare in seguito i casi in cui queste curve diventano algebriche e rettificabili.

*Clairaut, nato nel* 1713, *e morto nel* 1765.

Clairaut, allora assai giovane e già vantaggiosamente conosciuto per le sue *ricerche sopra le curve a doppia curvatura*, trattò la quistione nel medesimo senso di Nicole; ma il suo metodo porta quel carattere particolare di eleganza che ha sempre distinto le sue diverse produzioni.

La geometria fece poco tempo dopo un altro importantissimo acquisto (1). Clairaut prese in considerazione una classe di problemi già abbozzata da Newton e dai Bernoulli: si trattava di trovare alcune curve, la cui proprietà consiste in una certa relazione tra i loro rami, espressa da una data equazione. Non vi sarebbe alcuna difficoltà, se per soddisfare

(1) *Acc. di Parigi* 1734.



alla data equazione, fosse permesso d' impiegare i rami di due curve; ma qui fa d' uopo che i rami appartengano ad una sola e medesima curva, ed allora il calcolo è d' un genere nuovo e delicato. In questa ricerca, Clairaut fece un' osservazione che è principalmente degna d' attenzione: vi sono delle quistioni di questo genere, che ammettono due soluzioni, una immediata ed indipendente dal calcolo integrale, l' altra fondata sopra questo calcolo. La seconda, dove si suppone d' aver avuto l' attenzione d' introdurre una costante arbitraria, dovrebbe, mi pare, rinchiudere la prima, dando alla costante tutti i valori onde è suscettibile. La cosa però non è così: qualunque valore si dia alla costante, non si cade mai nella prima soluzione. Questa specie di paradosso nel calcolo integrale, rilevato da Clairaut, lo fu nel tempo stesso da Eulero, come si vede nella sua *meccanica*, che comparve nel 1736, come pure dalle memorie dell' accademia delle scienze di Parigi, per l' anno 1734. Tale è stato il germe della famosa teoria *degli integrali particolari*, che Eulero e parecchi altri dotti geometri hanno completamente sviluppata. Non sembra che Clairaut abbia continuato le sue prime idee sopra questo argomento.

## CAPO VIII.

PROBLEMA DELLE TAUTOCRONE NE' MEZZI RESISTENTI. RIFLESSIONI GENERALI SOPRA I PROBLEMI DI PURA TEORIA. ALGEBRA DE' SENI E COSENI. UTILITA' DE' METODI D'APPROSSIMAZIONE, ED IN PARTICOLARE DELLE SERIE INFINITE.

### *Problema delle tautocrone.*

Il problema delle tautocrone è notabile nella storia della geometria, tanto per la sua natura singolare, quanto per le difficoltà che si sono dovute superare per risolverlo. Esso consiste, come è noto, nel trovare una curva tale che un corpo pesante discendendo lungo la sua concavità, arrivi sempre nel medesimo tempo al punto più basso, qualunque sia il punto della curva dal quale comincia a discendere. Huguens, esaminando le proprietà della cicloide, trovò ch' essa aveva quella di essere la curva tautocrona nel voto; Newton riconobbe, nel suo libro *de' principj*, che la medesima curva era altresì tautocrona, allorchè il corpo, sempre sottoposto all' azione d'una gravità costante, soffre di più in





ogni istante, per parte dell' aria o del mezzo nel quale si muove, una resistenza proporzionale alla sua velocità (1). Eulero e Gio. Bernoulli determinarono, ciascuno dal canto loro, la curva tautocrona in un mezzo resistente come il quadrato della velocità (2). Questi tre casi formano tre problemi differenti, per ciascuno de' quali si fece uso di metodi diversi. Allorchè ne' due primi, il corpo, dopo essere disceso, risale pel secondo ramo della cicloide, esso percorre l' arco ascendente nello stesso tempo che ha percorso l' arco discendente, di modo che tutte le oscillazioni, che sono composte ciascuna d' una discesa e d' una ascesa, si fanno nel medesimo tempo. Ma nell' ipotesi della resistenza come il quadrato della velocità, l' arco discendente tautocrono non è lo stesso dell' arco ascendente tautocrono, e bisogna cercarli separatamente. Essi si trovano altronde esattamente nello stesso modo, e quindi basta considerare l' uno o l' altro.

---

(1) *Acc. di Pietr.* 1729.
(2) *Acc. di Parigi* 1730.

*Fontaine, nato nel* 1705, *e morto nel* 1771.

Fontaine fece un gran passo in questa teoria. Egli immaginò un metodo d'un ordine veramente originale, col quale solo risolse i tre casi proposti: anzi ne aggiunse un quarto, in cui la resistenza fosse come il quadrato della velocità, più il prodotto della velocità, per un coefficente costante (1). E ciò che è molto notabile si è, che la tautocrona in questo quarto caso, è la medesima come nel terzo. Lo spirito di questo metodo consiste nel considerare le quantità variabili, ora relativamente alla differenza di due archi vicini, ora relativamente all'elemento d'un medesimo arco: l'autore fa uso de' differenziali di Leibnizio per le variazioni della prima specie, e delle flussioni di Newton per quelle della seconda. Taylor aveva dato qualche apertura per questo metodo *flusso-differenziale*: Fontaine ha avuto con lui un'altra conformità, il difetto di essere oscuro; ma tutti due sono stati geometri profondi.

(1) *Acc. di Parigi* 1734.



Eulero, che non contento di arricchire senza interruzione la geometria col proprio fondo, ha qualche volta rifatto le opere degli altri, e sempre in meglio, sviluppò e pose nel più gran lume il metodo di Fontaine, dandogli altronde tutte le lodi che merita (1). Egli percorre tutti i casi già risoluti: ne aggiunge un altro che li comprende tutti, quello in cui la resistenza è composta di tre termini, del quadrato della velocità, del prodotto della velocità per un dato coefficiente, e d'una quantità costante. Il metodo di Fontaine non va più oltre. Di più, siccome esso fa trovare la tautocrona indipendentemente dalla considerazione del tempo, così rimaneva ancora da determinarsi l'espressione del tempo che il corpo impiega a percorrere un arco qualunque della curva: Eulero ha risoluto questo nuovo problema, che dipendeva dall'integrazione d'un'equazione differenziale complicatissima.

Fontaine credeva talmente di avere esaurito la teoria delle tautocrone, che nella raccolta delle sue opere, pubblicata nel 1764, parlando della sua soluzione del 1734, dice

(1) *Acc. di Pietr.* 1764.

che dopo la sua pubblicazione, *non si parlò più di questo problema*: fortunatamente se n' è parlato ancora. Non bastava già d' avere trovato le tautocrone in certe ipotesi di forze acceleratrici: bisognava ancora, invertendo il problema, dare i mezzi di discernere quali sono le ipotesi di forze acceleratrici che ammettono il tautocronismo: due grandi geometri hanno fatto questa scoperta, ed hanno quindi aperto un nuovo campo di problemi su questa materia (1).

Allorchè i mezzi sono rari, o poco resistenti, la ricerca delle tautocrone è più facile. Eulero ha risoluto con molta semplicità ed eleganza, nella sua *Meccanica*, molti casi di questa natura, qualunque sieno le potenze della velocità, alle quali la resistenza sia proporzionale.

---

(1) *Acc. di Berlino* 1765.



*Utilità generale de' problemi teorici.*

I nemici della geometria, ossia quelli che non la conoscono che imperfettamente, riguardano tutti questi difficili problemi teorici come giuochi d'ingegno, che assorbiscono e tempo e meditazioni, che si potrebbero meglio impiegare; ma eglino non riflettono che niuna cosa è più capace di eccitare e di sviluppare tutte le forze dell' umana intelligenza; che lo spirito ha i suoi bisogni come il corpo, giusta l' espressione di Fontenelle; e che finalmente quella speculazione che a primo aspetto sembrava sterile, finisce col trovare la sua applicazione, o fa nascere qualche volta, quando meno si aspetta, delle nuove vedute rapporto ad alcuni oggetti di pubblica utilità. Lasciamo un libero slancio al genio: il geometra cerchi e contempli le verità intellettuali, mentre il poeta dipinge le passioni del cuore, o le bellezze della natura.

*Pratica degl' inventori nelle scienze.*

Questa facoltà d'inventare nelle scienze, quanto più di attrattiva ha per quelli che le coltivano, tanto più li porta ad evitare un lavoro materiale che non produrrebbe alla fine alcun nuovo ed utile risultato. Quindi, allorchè giugniamo a superare tutte le difficoltà analitiche d'un problema astratto, di raro terminiamo il calcolo, d'ordinario ci contentiamo d'indicarlo chiaramente; ovvero, ne' casi che lo esigono, lo richiamiamo a certe formole che si sottraggono ad un' analisi rigorosa, come la quadratura del cerchio, l'equazione di Riccati, ec.: quando siamo giunti a questo punto, riguardiamo il problema come risoluto. Ma quando si vogliono applicare le formole dell' analisi alle scienze fisico-matematiche, dove tutte le quantità debbono essere finalmente espresse con numeri, non si può allora dispensarsi dall' effettuare interamente i calcoli analitici; e quindi si ha spesse volte bisogno di metodi che servono ad abbreviarli, sia che essi vadano a terminare a risultati algebrici, o sia che contengano delle espressioni, i cui valori non si possano determinare che per approssimazione.



*Vantaggi dell' algebra de' seni e coseni.*

L'algebra de' seni e coseni, dovuta principalmente ad Eulero, è uno di que' mezzi di abbreviazione, al quale tutte le parti delle matematiche, e soprattutto l'astronomia fisica, hanno inapprezzabili obbligazioni. Per mezzo della combinazione degli archi, seni, coseni, e loro differenziali, si ottengono delle formole che facilmente si sottomettono, in molti casi, ai metodi d'integrazione; il che conduce alla soluzione d'una moltitudine di problemi che saremmo costretti di abbandonare per la lunghezza o la difficoltà de' calcoli, se si volessero adoperare gli archi, i seni e coseni, sotto la loro forma ordinaria, o anche sotto la forma esponenziale.

*Utilità de' metodi di approssimazione.*

In mancanza delle soluzioni rigorose, siamo costretti di ricorrere ai metodi di approssimazione, e ad essi dobbiamo in gran parte il successo delle matematiche pratiche. La teoria delle serie infinite è il principal fondamento di tutti questi metodi. Vi vuole

sovente molt' arte, e s' incontra molta difficoltà a formare le serie atte a risolvere, in un modo spedito e sufficientemente prossimo al vero, le quistioni che ad esse conducono. Gl' Inglesi, come Newton, Wallis, Stirling, ec., hanno molto coltivato questo bel ramo dell' analisi; ma nessuno lo ha portato tant' oltre come ha fatto Eulero; nessuno ha sommato tante serie curiose, ha tanto applicato questo metodo alla soluzione d' una moltitudine di problemi delicati ed importanti. Le raccolte degli accademici di Pietroburgo e di Berlino, e delle sue opere particolari, sono piene delle sue scoperte in questo genere, che si riguardano come uno de' principali monumenti del suo genio.



## CAPO IX.

CONTINUAZIONE. PROGRESSO DE' METODI PER INTEGRARE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI. NUOVI PASSI DEL PROBLEMA DEGLI ISOPERIMETRI. CALCOLO INTEGRALE ALLE DIFFERENZE PARZIALI.

### *Condizioni d' integrabilità delle equazioni differenziali.*

Mancava alla teoria delle equazioni differenziali la cognizione di qualche proprietà generale che potesse servire a dirigere i metodi d' integrazione. Dopo il problema delle catenarie, da cui questa teoria ha cominciato a prender corpo, si erano integrate molte equazioni differenziali di tutti gli ordini; ma quanti erano i casi particolari, altrettanti erano i metodi particolari: per lo più non si otteneva l' intento che per una specie di tentativo che poteva bensì far ammirare il genio e la sagacità dell' analista, ma che, infine, non dava alcuna apertura pei problemi d' un genere diverso. I geometri pertanto desideravano un segno, un carattere per mezzo del quale si potesse riconoscere se un' equa-

zione nello stato in cui si presenta, sia immediatamente integrabile, o se abbia bisogno di qualche apparecchio per divenir tale. Si scorge di fatti quanti falsi tentativi di calcolo una tal cognizione deve risparmiare. La Germania e la Francia dividono la gloria d'aver fatto questa bella scoperta per le equazioni differenziali del prim' ordine. Eulero, Fontaine e Clairaut vi giunsero, ciascuno dal canto loro, quasi nel medesimo tempo, o almeno senza essersi dato a vicenda soccorso alcuno. La giustizia però non permette di tacere che Eulero ha portato i primi colpi: nella sua *Meccanica* pubblicata nel 1736 (1), fa uso d'un' equazione dipendente da questa teoria; ma ne ha data la dimostrazione soltanto nelle memorie dell' accademia di Pietroburgo, per l'anno 1734, pubblicate nel 1740. Ora le ricerche di Fontaine e di Clairaut sono dell' anno 1739 (2); di modo che non potevano allora conoscere quelle di Eulero.

---

(1) *Tomo II*, *pag.* 49.
(2) *Acc. di Parigi* 1739 *e* 1740.



*Condorcet, nato nel* 1743, *e morto nel* 1794.

Il medesimo Eulero avendo in seguito trovato le condizioni d'integrabilità per le equazioni differenziali degli ordini più elevati, le fece trasmettere a Condorcet, ma senza aggiungervi le dimostrazioni. Quest' ultimo non solo le scoprì per una via molto diretta e molto semplice, ma diede ancora una nuova estensione a questa teoria: primo saggio di un gran talento per l'analisi, al quale rincrescerà eternamente, che l'autore non si sia interamente dedicato, tanto pel suo proprio onore, quanto per l'avanzamento delle scienze. Tutti sanno che Condorcet essendosi gettato nelle discussioni politiche della rivoluzione francese, fu obbligato di darsi la morte per evitare il palco.

*Problema degli isoperimetri considerato nel senso più esteso.*

Il problema degli isoperimetri, tanto agitato tra i fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli, ricompariva ancora di tempo in tempo su la scena, sia per alcune nuove applicazioni, sia pei tentativi che facevano i geometri per

semplificarne le soluzioni generali. Tra quelli che se ne sono occupati, bisogna distinguere principalmente Eulero. Passo sotto silenzio i suoi primi saggi, stampati nelle raccolte dell' accademia di Pietroburgo: vengo immediatamente al suo famoso libro: *Methodus inveniendi lineas maximi, minimive proprietate gaudentes*, pubblicato nel 1744. L'autore distingue due specie di *massimi* o *minimi*, gli assoluti, ed i relativi. I massimi o minimi sono assoluti quando la curva gode senza restrizione d'una certa proprietà di massimo o minimo, tra tutte le curve corrispondenti alla medesima ascissa: tale è la curva della più veloce discesa. I massimi o minimi sono relativi, quando la curva che deve godere di una certa proprietà di massimo o minimo, deve inoltre soddisfare ad un' altra condizione, come, per esempio, d'essere eguale in contorno a tutte le curve terminate con essa a due punti dati: tale è il cerchio che ha la proprietà di racchiudere lo spazio più grande tra tutte le curve d'eguale contorno. I metodi, che adopera Eulero per risolvere tutti questi problemi, sono semplicissimi, ed hanno tutta la generalità che si può esigere. Egli a questo proposito è stato il primo a trovare e dimostrare un teorema della più



alta importanza: esso è, che i problemi della seconda classe possono sempre ridursi a quelli della prima, moltiplicando le due espressioni che rappresentano le due condizioni della curva, per mezzo di coefficienti costanti, sommando i due prodotti, e supponendo che la somma formi un *massimo* o un *minimo*. L'opera d'Eulero contiene moltissime applicazioni curiose, ove si vede brillare dappertutto la più profonda scienza del calcolo, e la più grande eleganza nelle soluzioni: sotto questo punto di vista, esso ha tutta la perfezione possibile nello stato attuale dell' analisi; ma le soluzioni generali sono state ancora semplificate e sottoposte a calcoli facili per mezzo del metodo delle *variazioni* (1), che Eulero medesimo ha adottato in seguito, ed ha sviluppato in diverse memorie particolari ed in un' appendice al terzo volume del suo trattato di calcolo integrale (2). In fine, egli ha ridotto questo genere di calcolo al calcolo integrale ordinario.

---

(1) *Acc. di Pietr.* 1764.
(2) *Ibid.* 1771.

*Calcolo integrale alle differenze parziali.*

*D'Alembert, nato nel* 1717, *e morto nel* 1783.

Si fece, verso la metà del secolo passato, una nuova scoperta analitica, la cui estensione ed applicazioni non hanno confine. Essa è dovuta, almeno in parte, all' illustre d'Alembert, uno degli uomini che fanno più onore alla Francia come geometra del prim' ordine, e si può aggiungere come autore della bella prefazione dell' *enciclopedia*. Voglio parlare di quel ramo di calcolo integrale che chiamasi presentemente *il calcolo integrale alle differenze parziali*. La natura di quest' opera non mi permette di darne qui un' idea abbastanza distinta a' miei lettori: mi contenterò di dire che questo genere di calcolo ha per oggetto di trovare una funzione di più variabili, quando si conosce la relazione de' coefficienti che affettano le differenziali delle quantità variabili onde questa funzione è composta. Supponiamo, per esempio, un' equazione differenziale del prim' ordine, a tre variabili: ne' problemi del calcolo integrale ordinario, i coefficienti differenziali sono dati immediatamente dalle condizioni della quistio-



ne; ed allora si tratta d'integrare l'equazione, o esattamente quando si può; o moltiplicandola per un fattore; o separandone le indeterminate; o finalmente coi metodi d'approssimazione: si giugne con uno qualunque di questi mezzi ad un' equazione finita che racchiude una costante arbitraria. Ma se nell' equazione differenziale proposta, i coefficienti differenziali sono previamente dati, il metodo che bisogna adoperare per trovare l'equazione finita appartiene al calcolo integrale alle differenze parziali. Quest' equazione racchiude una funzione arbitraria di una delle tre variabili, e può inoltre contenere una costante arbitraria compresa nella funzione. Vi sarebbero delle funzioni arbitrarie di due variabili, se l'equazione differenziale primitiva fosse del second' ordine. In generale, le operazioni del calcolo integrale alle differenze parziali introducono le funzioni arbitrarie, nello stesso modo, e nello stesso numero, come le integrazioni ordinarie introducono le costanti arbitrarie.

Si trovano alcuni vestigj di questo nuovo genere di calcolo in una memoria d' Eulero, che ho già citata colla data dell' anno 1734 (1).

(1) *Acc. di Pietr.* 1734.

L'opera di d'Alembert, *sopra la causa generale de' venti*, ne contiene delle nozioni un poco più dilucidate. Il medesimo geometra è il primo che lo abbia usato in un modo esplicito, sebbene un po' troppo sottoposto al calcolo integrale ordinario, nella soluzione generale del problema delle corde vibranti.

*Problema delle corde vibranti, risoluto da Taylor, in un caso limitato, generalizzato da d'Alembert.*

Taylor aveva determinato nel suo libro: *Methodus incrementorum*, la curva che forma una corda vibrante, tesa da un dato peso, supponendo 1.° che la corda nelle sue maggiori escursioni poco si allontani dalla direzione rettilinea dell'asse; 2.° che tutti i suoi punti arrivino nel medesimo tempo all'asse. Egli trovò che questa curva è una trocoide allungatissima; indi assegnò la lunghezza del pendolo semplice che fa le sue oscillazioni nello stesso tempo che la corda vibrante fa le sue. Era questo allora un problema nuovo ed originale. Parecchi altri geometri lo hanno trattato seguendo i medesimi dati. La prima supposizione, che le escursioni della corda da ambe le parti dell'asse rimangano sempre





piccolissime, è sufficientemente conforme allo stato fisico delle cose; altronde essa è la sola che si possa sottomettere al calcolo, anche nello stato attuale dell'analisi. In quanto alla seconda, che tutti i punti della corda arrivino nel medesimo tempo all'asse, essa è assolutamente precaria, e bisognerebbe liberare il problema da questa limitazione. D'Alembert ha trovato una soluzione che n'è indipendente. (1) Egli ha determinato direttamente ed *a priori* la curva che forma in ciascun istante una corda vibrante, senza fare altra supposizione, se non che ne' suoi maggiori scostamenti poco si allontana dall'asse. La natura di questa curva è da principio espressa da un'equazione del secondo ordine, un membro della quale è il differenziale secondo dell'ordinata, preso col far variare soltanto l'ascissa, e col supporre il suo differenziale costante. Laonde, soddisfacendo successivamente a queste due condizioni, si risale ad un'equazione finita, di tal natura che l'ordinata ha per valore l'aggregato di due funzioni arbitrarie, una della somma dell'ascissa e del tempo, l'altra della loro differenza. Si rileva

(1) *Acc. di Berlino* 1747.

che per mezzo di questa equazione, date due qualunque delle tre variabili, l'ordinata, l'ascissa ed il tempo, si conoscerà la terza e tutte le circostanze del movimento della corda.

Eulero colpito dalla bellezza di questo problema, si è in esso occupato per lunghissimo tempo, e vi è ritornato a più riprese nelle memorie delle accademie di Berlino, di Pietroburgo e di Torino. Malgrado la conformità che si trovava tra i risultati de' due grandi geometri che ho citati, eglino ebbero insieme una lunga disputa sopra l'estensione che si poteva dare alle funzioni arbitrarie che entrano nell'equazione della corda vibrante. D'Alembert voleva che la curvatura iniziale della corda fosse assoggettata alla legge di continuità: Eulero la credeva assolutamente arbitraria, ed introduceva nel calcolo delle funzioni discontinue. Altri geometri hanno pensato che questa discontinuità delle funzioni poteva essere ammessa, ma ch'essa doveva essere sottoposta ad una legge, e che bisognava che tre punti consecutivi della curva iniziale appartenessero sempre ad una curva continua. Ma fin qui non sembra che alcuno abbia dato delle prove interamente dimostrative della sua opinione; e non dee far maraviglia. Siffatta quistione dipende da al-

Anni 1748, 1753, 1760, ec.



cune idee metafisiche; ed i problemi di meccanica o di pura analisi, ai quali è stato applicato questo nuovo genere di calcolo, non hanno ancora somministrato alcun mezzo di discernere, tra queste opinioni, quella che dava risultati conformi o contrarj alle verità già riconosciute e confermate universalmente.

Senza prendere alcun partito in questa disputa, (1) il celebre Daniele Bernoulli fece i più grandi elogj ai calcoli di d'Alembert e di Eulero, ma nello stesso tempo intraprese a far vedere che la corda vibrante forma sempre, o una trocoide semplice, quale viene data dalla teoria di Taylor, o un aggregato di queste trocoidi; e che tutte le curve determinate da d'Alembert e da Eulero non potevano essere ammesse, e non erano realmente applicabili alla natura, se non in quanto che erano riducibili ad una forma siffatta. Questa discussione gli diede luogo di esaminare a fondo la fisica formazione del suono, che allora non si conosceva che assai imperfettamente; egli spiega, per esempio, con tutta la chiarezza possibile, come una corda posta in vibrazione, o in generale un corpo sonoro

(1) *Acc. di Berlino*, 1753.

qualunque, può rendere ad un tempo più suoni differenti, componenti il medesimo sistema. Ma ammirando la sua perizia nel semplificare l'argomento, e nel prestare l'appoggio dell'esperienza ai suoi ragionamenti, i geometri convengono che la sua soluzione è meno generale e meno perfetta di quella dei suoi due rivali. Difatti queste ultime (qualunque estensione si voglia ad esse attribuire) sono fondate sopra un genere di calcolo incontrastabile, e contengono come caso particolare la soluzione generale di Daniele Bernoulli. Intendo di dire le medesime cose relativamente al problema della propagazione del suono, che è della stessa natura di quello delle corde vibranti, ed al quale Eulero e Daniele Bernoulli hanno egualmente applicato ciascuno i loro metodi particolari.

I varj punti di vista, sotto i quali Eulero ha ravvisato e presentato il calcolo integrale alle differenze parziali, hanno fissato la sua vera natura, e fatto conoscere le applicazioni onde è suscettibile in una moltitudine di problemi fisico-matematici. Finalmente egli ne ha sviluppato a fondo il metodo, e dato l'algoritmo, in un'eccellente memoria intitolata (1);

(1) *Acc. di Pietroburgo* 1762.



*Investigatio functionum ex data differentialium conditione*. Laonde alcuni geometri riguardano Eulero, se non come il solo, almeno come il principale inventore del calcolo di cui trattasi; ma non bisogna dimenticarsi che d'Alembert il primo ne ha fatto un'applicazione importante ed originale, che ha dato delle aperture ad Eulero, come egli medesimo ne conviene. Se mi è permesso di dire il mio parere, credo che questi due uomini illustri abbino presso a poco un egual dritto alla gloria di sì bella scoperta.

A misura che si è esaminato a fondo questo nuovo calcolo, e che di esso si è riconosciuta l'utilità, parecchi si sono applicati a coltivarlo con tanto più di ardore, in quanto che esso offre un campo immenso di ricerche. Alcuni geometri del nostro tempo vi hanno già ottenuto de' brillanti successi. Una nuova gloria coronerà de' nuovi sforzi. Se la carriera diventa ogni giorno più stretta, e se, avanzandosi in essa, l'impronta dei passi sembra meno estesa o meno profonda, i veri giudici in queste materie sanno proporzionare la loro stima alla resistenza superata, o all'utilità delle scoperte; e questa stima è la più degna ricompensa a cui possa aspirare l'uomo che la merita.

## CAPO. X.

### *Di alcune opere sopra l' analisi.*

Non ho voluto interrompere la storia dei nuovi calcoli coll' enumerazione delle opere particolari che si sono pubblicate in grandissimo numero in questo quarto Periodo, tanto sopra l'analisi delle quantità finite, quanto sopra quella delle quantità infinitamente piccole; vado ora a percorrere rapidamente le principali di queste opere relative all' analisi infinitesimale, o come trattati immediati, o almeno come trattati preparatorj. Mi ristringo sempre agli autori morti.

Abbiamo già rilevato che l' analisi degli infinitamente piccoli del marchese dell' Hopital è la prima opera in cui il calcolo differenziale sia stato spiegato partitamente. Essa per molto tempo è stata chiamata il breviario de' giovani geometri. Alle nozioni generali che ne ho date, aggiugerò qui che indipendentemente dalla teoria delle tangenti, e dei massimi e minimi, che faceva il principal oggetto del calcolo differenziale, l' autore ha risoluto molti altri problemi allora difficili ed interessanti. Alcuni di questi problemi erano



nuovi; le soluzioni degli altri erano state date senza analisi e senza dimostrazioni. Il marchese dell' Hopital svelò tutti questi misteri, e rese quindi alle scienze uno de' più importanti servigi che abbiano mai ricevuto. Per esempio, nelle sezioni VI e VII, egli spiega, nel modo più chiaro e completo, tutta la teoria delle caustiche per riflessione e per rifrazione, curve famose che Tschirnaus aveva indicate ai geometri, e di cui Giacomo Bernoulli si era contentato di enunziarne le proprietà principali. La sezione VIII è impiegata nella ricerca delle linee rette o curve che toccano un' infinità di linee date, rette o curve: argomento curioso per sè stesso, e che racchiude delle questioni applicabili alla balistica. Nella sezione IX, l' autore espone la famosa regola per trovare il valore d' una frazione, il cui numeratore e denominatore svaniscono nel medesimo tempo. La X. ed ultima sezione presenta il calcolo differenziale sotto un nuovo punto di vista; dal che il marchese dell' Hopital deduce i metodi di Cartesio e di Hudde per le tangenti. Quest' oggetto, trattato colla medesima esattezza e chiarezza degli altri, non può avere presentemente altra utilità che quella di esercitare i giovani geometri.

Il marchese dell' Hopital lasciò morendo un' opera manoscritta sopra la teoria generale e le proprietà particolari delle *sezioni coniche*, della quale si diede un' edizione nel 1707. Quantunque quest' opera sia trattata interamente coll' analisi cartesiana, merita però di essere distinta, sì per la ricchezza stessa del fondo, sì ancora perchè ha aperto il campo ad alcuni problemi, in cui l'analisi infinitesimale era necessaria. Essa è contata nel piccol numero de' libri classici.

Essa fu ben presto seguita da un' altra opera di un' utilità ancor più generale, almeno in Francia, dell' *Analisi dimostrata* del p. Reyneau, pubblicata per la prima volta nel 1708. L' autore si è proposto due oggetti: il primo di dimostrare e rischiarare diversi metodi d' algebra pura; l' altro di esporre, secondo il medesimo spirito, gli elementi del calcolo differenziale e del calcolo integrale. Egli si estende poco sopra il calcolo differenziale, sufficientemente conosciuto dal libro del marchese dell' Hopital; si è principalmente applicato a sviluppare gli elementi del calcolo integrale, che non faceva, per così dire, cha nascere. Essa è stata per molto tempo la sola guida che avessero i principianti presso di noi per istruirsi ne' nuovi



calcoli: essa era chiamata l' Euclide dell' alta geometria. Ma insensibilmente, conservando la stima dovuta all' autore, si è dimenticato il libro, che è stato superato da altre opere più dotte e più complete, frutto del progresso delle scienze.

Il metodo degli infinitamente piccoli, che il marchese dell' Hopital ed il p. Reyneau avevano adottato, era soggetto ad alcune difficoltà che questi autori avevano eluse, o non avevano sufficientemente rischiarate. Solamente a forza di presentarlo, di applicarlo a nuovi usi, e di far rilevare all' occasione la conformità de' risultati che dava, con quelli degli antichi metodi, si era finalmente giunto a farlo ricevere universalmente, siccome egualmente certo ed egualmente esatto che le altre teorie geometriche. Esso nondimeno lasciava ancora alcune oscurità nella mente di quelli che non ne penetravano abbastanza i veri principj. Mi sia permesso di citare a questo proposito un piccol tratto che mi riguarda. Allorchè cominciai a studiare il libro del marchese dell' Hopital, io aveva della difficoltà a concepire che si potesse trascurare assolutamente, senza errore qualunque, una quantità infinitamente piccola, in confronto d' una quantità finita. Confidai il mio imba-

razzo ad un famoso geometra (1), che mi rispose: *Ammettete gli infinitamente piccoli come ipotesi, studiate la pratica del calcolo, e la fede vi verrà.* La fede è venuta effettivamente: mi sono convinto che la metafisica dell' analisi infinitesimale è la medesima di quella del metodo d'esaustione degli antichi geometri.

Si è sovente rinnovata la medesima obbiezione contro la pretesa inesattezza de' nuovi calcoli. Nel 1734, uscì in Inghilterra una lettera intitolata l'*Analisi*, nella quale l'autore, uomo d'un merito assai distinto per altri riguardi, rappresentava il metodo delle flussioni come pieno di misteri, e come fondato sopra falsi ragionamenti. Non si potevano annientare per sempre queste strane imputazioni, che collo stabilire questa teoria sopra principj talmente certi, talmente evidenti, che qualunque uomo ragionevole ed istrutto non possa ricusare di ammetterli.

(1) *Fontaine*.



*Maclaurin, nato nel* 1698, *e morto nel* 1746.

Maclaurin intraprese questo lavoro difficile e necessario. Egli pubblicò nel 1742 il suo *Trattato delle flussioni*, ove dimostra i principj di questo calcolo, a tutto rigore, ed alla maniera degli antichi geometri, che non è mai stata accusata d'imperfezione nella scelta e nella solidità delle prove. Questo metodo sintetico è un poco prolisso, e qualche volta faticoso a seguirsi; ma esso trasmette alla mente una luce ed una soddisfazione che non si saprebbero acquistare a prezzo troppo alto. Dopo aver bene assicurato il suo cammino, Maclaurin offre alla curiosità del lettore una gran quantità di bellissimi problemi di geometria, di meccanica e d'astronomia, alcuni de' quali sono nuovi; tutti sono risoluti con un' eleganza notabile per la scelta de' mezzi che l'autore impiega. Questi vantaggi collocano il libro di Maclaurin nel numero delle produzioni di genio che onorano l'autore e la Scozia sua patria. Esso è stato tradotto nella nostra lingua; e parecchi matematici francesi, divenuti celebri nel seguito, lo hanno preso per guida ne' loro studj della nuova geometria.

Dando così a quest' opera eccellente tutti gli encomj che merita, e riconoscendo che Maclaurin ha contribuito più di chiunque altro a nutrire il sacro fuoco dell' antica geometria tra gl' Inglesi, che si fanno un punto d' onore particolare di conservarlo diligentemente, noi non possiamo dissimulare che anche nell' epoca in cui il trattato delle flussioni venne alla luce, la parte analitica era incompleta per molti riguardi. Nondimeno l'analisi, alla quale non bisogna dare una predilezione esclusiva, è la vera chiave di tutti i grandi problemi di meccanica e d' astronomia fisica, che invano si tenterebbe di risolvere colla sintesi. Egli era quindi da desiderarsi che si raccogliessero in corpo di dottrina usuale tutte le scoperte onde i geometri avevano arricchito e continuavano ad arricchire la scienza analitica.

Questa gloria era riservata ad Eulero. Oltre all' avere esteso e perfezionato tutte le parti dell' analisi nelle innumerabili memorie che di lui esistono tra quelle delle accademie di Pietroburgo e di Berlino, ed in molte altre raccolte, egli ha inoltre pubblicato su questo proposito alcune opere particolari, specialmente adattate all' istruzione de' lettori di tutti gli ordini. Una delle prime e delle più



importanti è il libro: *Methodus inveniendi lineas curvas maxima minimave proprietate gaudentes*, del quale ho dato una sufficiente nozione. Al seguito di questo trattato, si trova una dotta teoria della curvatura delle lame elastiche, ed una memoria in cui l' autore determina, col metodo *de maximis et minimis*, il movimento de' proiettili in un mezzo non resistente, prima applicazione di questo metodo alla classe de' problemi di meccanica, suscettibili di soluzioni per mezzo della teoria delle cause finali.

Anno 1748 *L' introduzione dell' Analisi degli infiniti*, opera più elementare del medesimo autore, contiene in due libri le cognizioni d' analisi pura e di geometria, necessarie per la perfetta intelligenza de' calcoli differenziale ed integrale. Eulero spiega nel primo tutto ciò che riguarda le funzioni algebriche o trascendenti, i loro svolgimenti in serie, la teoria de' Logaritmi, quella della moltiplica degli angoli, la sommazione di molte serie curiosissime e d' una profonda ricerca, la risoluzione delle equazioni in fattori trinomj, ec. Nel secondo libro l' autore comincia a stabilire i principj generali della teoria delle curve geometriche e della loro divisione in ordini, classi e generi; in seguito egli applica parti-

tamente questi principj alle sezioni coniche, tutte le proprietà delle quali sono qui dedotte dalla loro equazione generale. Egli finisce con una teoria elegantissima delle superficie de' corpi geometrici: insegna a trovare le equazioni di queste superficie, con riferirle a tre coordinate perpendicolari tra loro; le divide in ordini, classi e generi, come ha fatto per le semplici curve descritte sopra un piano, ec. Tutti questi oggetti sono trattati con una chiarezza ed un metodo che ne facilitano lo studio, a segno che ogni lettore di mediocre intelligenza può seguirli da sè stesso e senza alcun estraneo soccorso.

Finalmente Eulero ha raccolto in cinque o sei volumi in quarto tutta la scienza del calcolo differenziale ed integrale. Le ricchezze dell'arte conosciute dapprima, un maggior numero di teorie assolutamente nuove, sono qui presentate e dilucidate nella maniera più luminosa e più istruttiva, e sotto quella forma originale e comoda che l'autore ha fatto prendere a tutte le parti delle matematiche sublimi. La riunione di questi diversi trattati compone il più vasto ed il più bel corpo di scienza analitica che l'ingegno umano abbia prodotto. Tutti i geometri che sono stati alla portata di leggere queste opere, vi hanno



acquistato delle cognizioni, ed alcuni ancora si sono fatti onore coi metodi che quivi si trovano. Se il p. Reyneau ha potuto per un momento e per esagerazione essere chiamato l'Euclide dell'alta geometria, si può dire con verità che Eulero è questo Euclide, ed anche soggiungere che nel genio e nella fecondità è molto superiore all'antico.

*Cramer, nato nel* 1704, *e morto nel* 1752.

Non debbo dimenticarmi di citare con distinzione Cramer tra i benefattori della nuova geometria. La sua *Introduzione all' analisi delle linee curve algebriche* è il trattato più completo che esista sopra questa materia. L'autore non lascia nulla da desiderare su la teoria de' rami infiniti delle curve, su i punti multipli, ed in generale sopra tutti i sintomi che servono a caratterizzarle. Egli era contemporaneo di Daniele Bernoulli e di Eulero; allievo al pari di essi di Giovanni Bernoulli. Egli si è molto accostato a questi uomini grandi. A lui è dovuto un eccellente *Commentario* sopra le opere di Giacomo Bernoulli.

*Le Seur e Jacquier, l'uno morto nel* 1770, *l'altro nel* 1788.

Nel 1768, i p. p. minimi Le Seur e Jacquier pubblicarono un *trattato di calcolo integrale*: opera un poco prolissa e mancante qualche volta di metódo, ma nella quale per altro si trovano molte cose nuove ed interessanti, come per esempio uno sviluppo chiarissimo del trattato delle *quadrature* di Newton.

*Bezout, nato nel* 1730, *e morto nel* 1783.

L'arte di eliminare le incognite, ossia di ridurre le equazioni d'un problema al più piccol numero possibile, è una parte essenziale dell'analisi. Parecchi geometri si sono in essa occupati. Cramer l'aveva già molto estesa e semplificata. Bezout ne ha fatto l'oggetto d'un dotto trattato, ove ha portato la materia molto più oltre che non si èra fatto per l'addietro.





*Cousin, nato nel* 1739, *e morto nel* 1801.

Le scienze hanno perduto ultimamente Cousin, che ha dato diverse opere, e particolarmente un trattato di calcolo integrale. Si rimprovera a questo trattato un poco di oscurità e di disordine; ma altronde si conviene ch'esso è dottissimo, e che contiene molte cose nuove, principalmente sopra l'integrazione delle equazioni alle differenze parziali.

## CAPO XI.

### *Progresso della meccanica.*

La meccanica è fondata sopra un piccolo numero di principj generali, e quando sono una volta trovati, tutte le applicazioni, che si possono fare, appartengono propriamente alla geometria; ma queste applicazioni, soprattutto ne' problemi relativi al movimento, richieggono sovente molta sagacità, e formano una scienza particolare che i moderni hanno portata molto oltre, col soccorso dell'analisi infinitesimale.

*Statica.*

Dopo che Archimede aveva fissato la base della statica, non era difficile di riconoscere le condizioni dell' equilibrio per ciascun caso particolare, ed esse avevano diretto lo spirito d'invenzione in una gran quantità di macchine; ma non erano per anche state ridotte ad un principio generale ed uniforme. Varignon intraprese ed eseguì questo piano di riunione, colla teoria de' moti composti. Ne diede alcuni saggi nel suo *Progetto d' una nuova meccanica*; in seguito egli esaurì, per così dire, tutte le combinazioni dell' equilibrio delle macchine, nella sua *Meccanica generale*, pubblicata soltanto dopo la sua morte. Quest' opera che ho già citata, è molto prolissa e molto faticosa a leggersi, ma è commendabile per la chiarezza di dettaglio.

1687

1725

Varignon ha inserito nel secondo volume le prime nozioni del famoso principio delle *velocità virtuali*, dietro una lettera che gli fu scritta da Giovanni Bernoulli nel 1717. Si chiama *velocità virtuale* d' un corpo lo spazio infinitamente piccolo che questo corpo, sollecitato al movimento, tende a percorrere in un istante, ed il principio di cui trattasi, ap-



plicato all' equilibrio, può enunciarsi in generale così: *Sia un sistema qualunque di piccoli corpi spinti o tirati da potenze qualunque e facentisi equilibrio; s' imprima un piccolo movimento a questo sistema, di modo che ciascun corpo percorra uno spazio infinitamente piccolo, che esprima la sua velocità virtuale: la somma de' prodotti delle potenze moltiplicate ciascuna pel piccolo spazio che percorre il corpo al quale essa è applicata, sarà sempre eguale a zero, sottraendo i movimenti in un verso dai movimenti nel verso opposto.* Varignon fa l' applicazione di questo principio all' equilibrio di tutte le macchine semplici.

*La Hire, nato nel* 1640, *e morto nel* 1718.

Nel 1695, La Hire diede un *trattato di meccanica*, il cui oggetto generale è come quello di Varignon, l' equilibrio delle macchine. Esso contiene inoltre diverse applicazioni delle macchine alle arti, nelle quali l'autore era molto versato. Al seguito di questa opera vi è un trattato *delle epicicloidi e del loro uso nelle meccaniche*. La Hire dimostra che i denti delle ruote destinate a comunicare il movimento per mezzo degl' incastramenti, debbono avere la figura d' epicicloidi, delle

quali determina le proprietà e le dimensioni. Questa teoria è bellissima, e dovrebbe fargli molto onore; ma Leibnizio, nelle sue lettere a Giovanni Bernoulli (1), assicura ch' essa appartiene a Roëmer, dal quale gli era stata comunicata più di vent' anni prima che il libro di La Hire vedesse la luce.

Se si potesse sospettare Leibnizio di qualche parzialità a favore di Roëmer, ben presto cesserebbe il sospetto, attesa la poca verosimiglianza che La Hire, geometra d' un sapere assai comune, abbia fatto una tale scoperta: difatti, non si rileva alcun altro tratto di genio nella sua *meccanica*; per lo contrario vi s' incontra un paralogismo grossolano (e forse non è il solo) a proposito dell' isocronismo della cicloide. L' autore volendo dimostrare (prop. CXX) che un corpo pesante, che discende lungo una cicloide rovesciata, arriva sempre nel medesimo tempo al punto più basso, da qualunque luogo abbia cominciato a discendere, fa uso d' un ragionamento, dal quale conclude che il tempo della discesa per la semicicloide rovesciata è doppio del tempo della caduta pel diame-

(1) *Tom. I, pag.* 347.



tro verticale del cerchio generatore: proposizione falsa; poichè si sa, dalle dimostrazioni incontrastabili di Huguens, e si può assicurarsene in molte altre maniere, che il primo tempo sta al secondo, come la semicirconferenza del cerchio al suo diametro. Il paralogismo di La Hire proviene dall' avere preso per principio, che se abbiasi una serie *di proporzioni qualunque*, la somma di tutti i primi antecedenti sta alla somma di tutti i primi conseguenti, come la somma di tutti i secondi antecedenti alla somma di tutti i secondi conseguenti; il che non è vero nel solo caso in cui tutte le proporzioni, altronde *qualunque*, sono composte di rapporti *eguali*.

*Camus, nato nel* 1699, *e morto nel* 1768.

Sono stati pubblicati molti altri trattati elementari di meccanica statica: il mio piano non mi permette di darne l' analisi, ed una semplice nomenclatura sarebbe inutile. Mi contenterò di citare la meccanica di Camus, come un' opera molto stimabile per la chiarezza ed il rigore delle dimostrazioni. L' autore espone, tra gli altri oggetti, tutta la teoria delle ruote dentate, con metodo e con molta esattezza. Egli non era già un geome-

tra assai profondo; ma aveva l'ingegno giustissimo e molto esercitato nel metodo sintetico degli antichi, di cui con ragione faceva il più gran caso. Egli ha risoluto per questa via il problema di mettere in equilibrio, tra due piani inclinati, una verga aggravata d'un peso in un luogo qualunque della sua lunghezza. Questo problema è per verità facilissimo col metodo analitico; ma conduce ad un calcolo un poco lungo. La soluzione sintetica di Camus merita attenzione per la sua semplicità ed eleganza: vantaggio che la sintesi ha qualche volta su l'analisi, e che all'occasione non dee trascurarsi.

La descrizione delle macchine inventate da circa un secolo, anche ristringendosi alle più ingegnose, o alle più utili, richiederebbe una grand' opera a parte. Se essa appartenesse al mio argomento, non dimenticherei la macchina a fuoco che deve mettersi nel prim' ordine delle produzioni del genio delle meccaniche. Diciamo soltanto che questa macchina ha per forza movente il vapore dell'acqua alternativamente dilatato e condensato, e che il suo movimento si eseguisce con mezzi meccanici presso a poco della stessa natura di quelli delle mostre o degli orologi. Sembra che la forza del vapore dell'acqua non



abbia cominciato a conoscersi che dalle sperienze del duca di Worcester in Inghilterra, verso l'anno 1660. In seguito Papino, medico francese, avendo approfondita di più la natura di questo agente col suo famoso *digestore*, costrusse nel 1698 la prima macchina a fuoco che siasi veduta: essa era imperfettissima; ma fece nascere quella del capitano Saveri, molto superiore, e che è stata seguita da parecchie altre ancor più perfette. Presentemente esistono delle macchine a fuoco in tutti i paesi dell' Europa, per diversi servigi. Ripiglio la teoria generale della meccanica.

### *Esame del principio del parallelogrammo delle forze nella statica.*

Dopo che si cominciò ad applicare il principio del parallelogrammo delle forze alla statica, non si pensò ad esaminarne il fondamento col dovuto rigore. Tutti i geometri si erano da principio accordati a riconoscere che se un corpo venga spinto nel medesimo tempo da due forze, capaci di fargli percorrere separatamente, e nel medesimo tempo, i lati d'un parallelogramo, esso colla loro azione combinata percorrerà la diagonale. In

seguito si estese la medesima legge alle semplici forze di *pressione*: si concluse che essendo due forze di quest' ultima specie rappresentate dai lati d' un parallelogrammo, la loro risultante veniva rappresentata dalla diagonale (1). Ma Daniele Bernoulli non trovando una sufficiente connessione d' evidenza nel passaggio da un caso all' altro, dimostrò la seconda proposizione in un modo immediato, ed indipendente da ogni considerazione del moto composto. Parecchi altri geometri, ed in particolare d' Alembert, l' hanno egualmente dimostrata, con diversi metodi più o meno composti. Sventuratamente tutte queste dimostrazioni sono troppo lunghe, troppo imbarazzanti, per poter comodamente trovar luogo ne' trattati elementari di statica; ma esse esistono se non altro negli scritti dei geometri, come sicure mallevadrici d' una verità, della quale altronde ne abbiamo la prova con altri mezzi più semplici e più appropriati agli ordinarj bisogni de' principianti.

(1) *Acc. di Pietroburgo* 1726.



*Problemi relativi alla statica.*

Ho già parlato de' problemi della catenaria, della vela enfiata dal vento, della curva elastica, ec., nel render conto de' progressi dell' analisi infinitesimale, ai quali hanno immediatamente contribuito. Questi problemi, e parecchi altri della medesima natura, furono ancora risoluti da Daniele Bernoulli, da Eulero, da Ermanno, ec.; ma con nuove estensioni, e nuove difficoltà che aumentavano la gloria del successo ed il dominio della scienza (1).

*Meccanica del moto.*

La teoria generale de' moti variati aprì un campo nuovo ed immenso alle ricerche de' geometri che possedevano l' analisi infinitesimale. Galileo aveva fatto conoscere le proprietà del moto rettilineo, uniformemente accelerato; Huguens aveva considerato il moto curvilineo; egli si era sollevato gradatamente alla bella teoria delle forze centrali nel cer-

(1) *Acc. di Pietroburgo* 1728, ec.

chio (1), la quale si applica egualmente al moto in una curva qualunque, riguardando tutte le curve come serie infinite di piccoli archi di cerchio, secondo l'idea che egli medesimo ne aveva data nella sua teoria generale delle evolute.

Da un altro canto, le leggi della comunicazione del moto, abbozzate da Cartesio, portate più oltre da Wallis, da Huguens e da Wrenn, avevano fatto un nuovo passo considerabilissimo, mediante la soluzione che diede Huguens del famoso problema de' centri d'oscillazione.

Tutte queste cognizioni, dapprima isolate ed in certo modo indipendenti le une dalle altre, essendo state ridotte ad un piccolo numero di formole generali, semplici e comode, per mezzo dell'analisi infinitesimale, la meccanica prese un volo che non può essere ritenuto che dalle difficoltà ancora inerenti alla natura dell'istrumento. Procuriamo di farcene qualche idea.

---

(1) *Horol. oscill. ad finem.*



*Due classi di movimento.*

Tutti i problemi del moto si possono disporre sotto due classi. La prima comprende le proprietà generali del moto d'un corpo isolato, sollecitato da forze qualunque; la seconda, i movimenti che risultano dall'azione e reazione che più corpi esercitano gli uni sopra gli altri, in un modo qualunque.

*Movimento d'un corpo isolato.*

Nel moto isolato, noi osserviamo che essendo la materia per sè stessa indifferente al moto ed alla quiete, un corpo posto in movimento dovrebbe in esso perseverare uniformemente, e che la sua velocità non può aumentare o diminuire che per l'azione istantanea d'una forza costante o variabile. Di qui risultano due principj; quello della forza d'inerzia, e quello del moto composto, sui quali è fondata tutta la teoria del moto rettilineo o curvilineo, costante o variabile secondo una legge qualunque. In virtù della forza d'inerzia, il moto in ciascun istante è essenzialmente rettilineo ed uniforme, pre-

scindendo da qualunque resistenza, e da qualunque ostacolo: per la natura del moto composto, un corpo sottoposto all' azione d'un numero qualunque di forze, che tendono tutte ad un tempo a cangiare la quantità e la direzione del suo moto, prende nello spazio un cammino tale che nell' ultimo istante giugne al medesimo luogo a cui sarebbe giunto, se avesse ubbidito successivamente, con tutta la libertà, a ciascuna delle forze proposte.

*Moto rettilineo variabile.*

Applicando il primo di questi principj al moto rettilineo, uniformemente accelerato, si rileva 1.° che in questo moto, la velocità crescendo per gradi eguali, ossia proporzionalmente al tempo, la forza acceleratrice deve essere costante, ovvero dare al mobile de' colpi incessantemente eguali; e che per conseguenza la velocità finale è come il prodotto della forza acceleratrice nel tempo; 2.° ciascuno spazio elementare percorso essendo come il prodotto della velocità corrispondente per l' elemento del tempo, lo spazio totale percorso è come il prodotto della forza acceleratrice pel quadrato del tempo. Ora, queste due medesime proprietà hanno egualmen-



te luogo per ciascun elemento d'un moto variabile qualunque; poichè nulla impedisce di considerare in generale la forza acceleratrice, benchè variabile da un istante all' altro come costante in tutta la durata di ciascun istante, ossia tale che non riceva le sue variazioni se non se al principio di ciascuno degli elementi del tempo. Laonde, in ogni moto rettilineo, variabile secondo una legge qualunque, l' incremento della velocità è come il prodotto della forza acceleratrice per l' elemento del tempo; e la differenziale seconda dello spazio percorso è come il prodotto della forza acceleratrice pel quadrato dell' elemento del tempo.

*Moto curvilineo.*

Se ora a questo principio si aggiunge quello del moto composto, si arriverà alla cognizione di qualunque moto curvilineo. Di fatti, qualunque sieno le forze applicate ad un corpo che descrive una curva qualunque, si può, in ciascun istante, ridurre tutte queste forze a due sole, una tangente, l' altra perpendicolare all' elemento della curva. Allora la prima produce un movimento istantaneo rettilineo, al quale si applica il principio della

forza d' inerzia; la seconda ha per espressione il quadrato della velocità attuale del corpo, diviso pel raggio osculatore, giusta la teoria delle forze centrali nel cerchio; il che riduce al medesimo principio il moto in direzione del raggio osculatore.

Tali sono i mezzi che per molto tempo si sono impiegati a fine di determinare i movimenti de' corpi isolati, animati da forze acceleratrici qualunque, in quantità ed in direzioni. Newton ha seguito questo metodo: egli ha soltanto inviluppato le sue soluzioni con una sintesi che sotto le apparenze della semplicità e dell' eleganza, nasconde sovente le difficoltà le più grandi.

### *Foronomia di Ermanno.*

Nel 1716, Ermanno intraprese a spiegare, in un trattato di *Foronomia*, ciò che riguarda la meccanica, tanto de' corpi solidi, quanto de' corpi fluidi, cioè a dire, la statica, la scienza del moto de' corpi solidi, l' idrostatica e l' idraulica. Questa moltitudine di oggetti non gli ha permesso di svilupparli colla necessaria estensione e chiarezza. Egli altronde affetta, come Newton, di adoperare, quanto gli è possibile, il metodo sintetico;



il che rompe sovente la catena e la connessione de' problemi. Si aggiunga che l' autore si è in alcuni luoghi ingannato.

### *Meccanica d' Eulero.*

La *meccanica* d' Eulero, pubblicata, nel 1736, contiene tutta la teoria del moto rettilineo o curvilineo d' un corpo isolato, sottoposto all' azione delle forze acceleratrici qualunque, nel voto, o in un mezzo resistente. L' autore ha seguito dappertutto il metodo analitico; il che, riducendo tutti i rami di questa teoria all' uniformità, ne facilita tanto più l' intelligenza, in quanto che Eulero maneggia altronde il calcolo con una sagacità ed un' eleganza di cui non vi era per anche stato esempio veruno. Egli non solo risolve una gran quantità di problemi difficili, alcuni de' quali erano allora nuovi, ma perfeziona altresì l' analisi stessa, con integrazioni nuove e delicate, alle quali il suo argomento lo conduce. Quanto ai principj di meccanica per mettere i problemi in equazione, egli adopera quelli che ho indicati di sopra.

*Semplificazione de' principj del moto.*

Sebbene questa maniera di porre la base del calcolo fosse assai comoda, si poteva però giungere ancor più semplicemente allo scopo medesimo: la cosa consisteva nel risolvere in ciascun istante le forze ed i movimenti, in altre forze ed altri movimenti, paralleli a linee fisse, di posizione data nello spazio. Allora d'altro più non si trattava che di applicare a queste forze ed a questi movimenti le equazioni del principio della forza d'inerzia, e non si aveva punto bisogno di ricorrere al teorema di Huguens. Questa idea semplice e felice, di cui Maclaurin il primo ne ha fatto uso nel suo *trattato delle flussioni*, ha sparsa una nuova luce sopra la meccanica, ed ha singolarmente facilitata la soluzione di diversi problemi. Allorchè il corpo si muove sempre nel medesimo piano, si prendono soltanto due assi fissi, che si suppongono perpendicolari tra loro, per la maggiore semplicità; ma quando è obbligato, per la natura delle forze, a cangiare continuamente di direzione per ogni verso, e a descrivere una curva a doppia curvatura, allora fa d'uopo impiegare tre assi fissi, perpendicolari tra lo-





ro, ossia formanti gli spigoli d'un paralellepipedo rettangolo.

*Comunicazione del moto.*

I problemi della comunicazione del moto, detti ordinariamente *problemi di dinamica*, richiedevano nuovi principj. Essi consistono, per darne qualche esempio, nel determinare i movimenti che risultano dalla percossa vicendevole di più corpi, il centro d'oscillazione d'un pendolo composto, i movimenti di più corpi infilati dalla medesima verga, alla quale s'imprime un moto di rotazione intorno ad un punto fisso, ec. Ora, egli è chiaro, che in queste specie di casi, i movimenti non sono i medesimi come se i corpi fossero liberi ed isolati, ma deve farsi tra i corpi di un sistema una distribuzione di forze, tale che i moti perduti da alcuni di questi corpi sieno guadagnati dagli altri. Il moto perduto o ricevuto si calcola sempre dal prodotto della massa nella velocità perduta o ricevuta, sia che le comunicazioni, o le perdite di moto, si producano in ciascun istante per gradi finiti, come nella percossa de' corpi duri, ovvero che in ogni istante le velocità non cangino che per gradi infinitamente

piccoli, come ne' movimenti di più corpi infilati da una verga mobile, e generalmente in tutti i casi in cui le forze agiscono alla maniera della gravità.

Allorchè Huguens diede la sua soluzione del problema de' centri d' oscillazione, alcuni cattivi geometri la impugnarono ne' giornali. Giacomo Bernoulli la sostenne, ed intraprese a dimostrarla immediatamente col principio della leva. (1) Egli non considerò da principio che due pesi eguali, attaccati ad una verga inflessibile e non grave, mobile intorno ad un asse orizzontale: avendo in seguito osservato che la velocità del peso più vicino all' asse di rotazione deve essere necessariamente minore, e che al contrario quella dell' altro peso deve essere maggiore che non sarebbe se ciascun peso agisse separatamente sopra la verga, ne concluse perciò che la forza perduta e la forza guadagnata si fanno equilibrio, e che quindi il prodotto d' una massa per la velocità che perde, ed il prodotto dell' altra massa per la velocità che guadagna, debbono essere reciprocamente proporzionali alle braccia di leva. La sostanza

(1) *Atti di Lips.* 1686.



di questo luminoso ragionamento era esatta. Solamente Giacomo Bernoulli sbagliò da principio, in quanto che considerava le velocità de' due corpi come se fossero finite, laddove avrebbe dovuto considerare le velocità elementari, e paragonarle colle velocità elementari prodotte in ogni istante dall' azione della gravità. Il marchese dell' Hopital (1) rilevò questo sbaglio, e nel rettificarlo, trovò, senza per altro discostarsi dal principio di Giacomo Bernoulli, il centro d' oscillazione de' due pesi. Volendo in seguito passare ad un terzo peso, egli *riunì* i due primi al loro centro d' oscillazione, e combinò questo nuovo peso col terzo, come aveva combinato insieme i due primi; così di seguito. Ma la *riunione* proposta era un poco precaria, e non poteva essere ammessa senza dimostrazione. La memoria del marchese dell' Hopital non produsse quindi altro vantaggio che d' impegnare Giacomo Bernoulli a rivedere la sua prima soluzione, a perfezionarla e ad estenderla ad un numero qualunque di corpi. Tutto ciò fu eseguito successivamente. Da prima Giacomo Bernoulli cominciò a ri-

(1) *Storia delle opere de' dotti* 1690.

formare la sua prima soluzione (1), e ad abbozzare la soluzione generale: in fine risolse completamente il problema (2), qualunque fosse il numero e la posizione de' corpi elementari del sistema. Il suo metodo consiste nel risolvere, per un istante qualunque il movimento di ciascun corpo in due altri movimenti; uno che il corpo prende realmente, l' altro che è distrutto, e nel formare delle equazioni che esprimono le condizioni dell' equilibrio tra i movimenti perduti. Con ciò il problema è ridotto alle leggi ordinarie della statica. L' autore applica il suo principio a diversi esempj; dimostra rigorosamente, e nel modo più evidente, la proposizione che Huguens aveva impiegata per base della sua soluzione. Al seguito di questa insigne memoria, egli fa vedere, co' medesimi principj, che il centro d' oscillazione ed il centro di percossa sono situati in un punto medesimo.

(1) *Atti di Lips.* 1691.
(2) *Memorie dell' Acc. di Parigi* 1703.



*Altre soluzioni del problema de' centri d' oscillazione.*

Questa soluzione del problema de' centri d' oscillazione sembrava non lasciare più nulla a desiderare; nondimeno, nel 1714, Giovanni Bernoulli e Taylor ricondussero ancora su la scena questo problema, e ne diedero alcune soluzioni (1) che erano assolutamente le medesime, in quanto alla sostanza; conformità che eccitò tra loro la più viva contesa; eglino si accusarono reciprocamente di plagio. In questa nuova maniera di trattare la quistione, si suppone che nel luogo de' pesi elementari onde il pendolo è composto, si sostituiscano nel medesimo punto altri pesi, tali che i loro movimenti di accelerazione angolare ed i loro momenti riguardo all' asse di rotazione sieno i medesimi, e che il nuovo pendolo oscilli come il primo. Confessando che questa soluzione merita encomj, tutti i geometri convengono presentemente ch' essa non è così luminosa,

(1) *Acc. di Parigi, e Trans. filos.*

nè così semplice come quella di Giacomo Bernoulli, immediatamente fondata sopra le leggi dell'equilibrio.

*Nozione ed uso del principio della conservazione delle forze vive.*

Abbiamo veduto che Leibnizio valutava le forze de' corpi in moto per mezzo de' prodotti delle masse e de' quadrati delle velocità. Giovanni Bernoulli avendo adottato questa opinione, diede al principio d' Huguens, pel problema de' centri d' oscillazione, il nome di *principio della conservazione delle forze vive*, nome che è rimasto, perchè effettivamente, ne' movimenti d' un sistema di corpi pesanti, la somma de' prodotti delle masse pei quadrati delle velocità rimane la stessa, quando i corpi discendono unitamente, e quando risalgono in seguito separatamente colle velocità che hanno acquistato per la discesa. Huguens medesimo ne aveva fatto brevemente l'osservazione (1), in una lettera sopra la prima memoria di Giacomo Bernoulli e sopra quella del marchese dell' Hopital. Questa leg-

(1) *Storia delle opere de' dotti*. 1690.



ge si osserva egualmente nell' urto de' corpi perfettamente elastici, ed in tutti i movimenti de' corpi che agiscono gli uni su gli altri con forze di pressione: essa deriva necessariamente dalla natura di questi movimenti; ed è indipendente da ogni sistema sopra la misura delle forze vive. Laonde i geometri del secolo passato l'hanno posta in uso con ottimo successo, in molti problemi di dinamica. Ma siccome essa non dà che una sola equazione, da cui bisognava in seguito eliminare la velocità o il tempo, si giungeva a questo ultimo fine per diversi mezzi. Giovanni Bernoulli vi adoperava il principio delle *tensioni*; Eulero, quello delle *pressioni*; Daniele Bernoulli, *la potenza virtuale che ha un sistema di corpi di ristabilirsi nel suo stato primiero*; ed in certi casi, Eulero e Daniele Bernoulli, *la quantità costante di moto circolatorio intorno ad un punto fisso*. Quando finalmente si erano stabilite tutte le equazioni differenziali del problema, altro più non rimaneva che la difficoltà d' integrarle, nuovo scoglio in faccia al quale i mediocri analisti venivano qualche volta a naufragare.

*Principio di dinamica di d' Alembert.*

Nel 1743, venne a d'Alembert il felice pensiero di generalizzare il principio di cui Giacomo Bernoulli aveva fatto uso per risolvere il problema de' centri di oscillazione. Egli stabilì che, qualunque sia il modo con cui i corpi d'un sistema agiscono gli uni su gli altri, si può sempre risolvere i loro movimenti, in ciascun istante, in due altre specie di movimenti, di cui gli uni sono distrutti nell' istante seguente, gli altri sono conservati, e che per le condizioni dell' equilibrio tra i moti distrutti, si conoscono necessariamente i moti conservati. Questo principio generale si applica a tutti i problemi di dinamica, e per lo meno ne riduce tutte le difficoltà a quelle de' problemi di semplice statica. Esso rende inutile quello della conservazione delle forze vive. D' Alembert ha risoluto per questa via una gran quantità di bellissimi e difficilissimi problemi, alcuni de' quali erano assolutamente nuovi, come, per esempio, quello della precessione degli equinozj. Il suo *Trattato di dinamica* deve quindi essere riguardato come un' opera originale. In vano si opporrebbe che Giacomo Bernoulli gli ave- Anno 1749



va segnata la strada: essa era egualmente segnata per gli altri geometri più antichi di d'Alembert, e che nello spazio di quarant'anni, non l'avevano osservata.

La dinamica, giunta così successivamente ad un alto grado di perfezione, si arricchì ancora nel 1755 d'una scoperta importante e feconda di corollarj. In una piccola memoria intitolata: *Specimen theoriae turbinum*, Segner osservò che se, dopo avere impresso ad un corpo di grandezza e di figura qualunque, de' moti di rotazione, ossia di *giramento*, per ogni verso, si abbandoni quindi interamente a sè stesso, esso avrà sempre *tre assi principali di rotazione*; cioè a dire, che tutti i moti di rotazione onde è affetto possono sempre ridursi a tre, che si fanno intorno a tre assi, perpendicolari tra loro, che passano pel centro di gravità o d' inerzia del corpo, e conservano sempre la medesima posizione nello spazio assoluto, mentre il centro di gravità è in quiete, o si muove uniformemente in linea retta. La posizione di questi tre assi si determina con un' equazione del terzo grado, le cui tre radici reali si riferiscono a ciascuno di essi.

*Gio. Alberto Eulero, nato nel 1734, e morto nel 1800.*

Questa teoria, che l'autore non aveva sufficientemente sviluppata, è stata trattata a lungo da Gio. Alberto Eulero, degno figlio del grande Eulero, nella sua memoria sopra *la disposizione delle mercanzie ne' vascelli*, che divise il premio dell' accademia delle scienze di Parigi, nel 1761: essa è stata trattata ancora, secondo lo stesso metodo, da Eulero il padre, nelle memorie dell' accademia di Berlino, per l'anno 1759, e nella sua opera intitolata: *Theoria motus corporum rigidorum*, 1765. Finalmente d'Alembert ha fatto vedere nel tomo IV de' suoi *Opuscoli matematici*, pubblicato nel 1768, che la soluzione di questo problema si deduceva dalle formole che aveva dato in una *Memoria per determinare il movimento d'un corpo di figura qualunque, animato da forze qualunque*, stampata nel tomo I de' suoi opuscoli, nel 1761.

La cognizione di questi movimenti di rotazione libera intorno a tre assi principali, conduce facilmente alla determinazione del movimento intorno ad un asse variabile qualunque. Laonde, se ora suppongasi che il



corpo sia sottoposto all' azione di forze acceleratrici qualunque, si comincierà prima a determinare il moto rettilineo o curvilineo del centro di gravità, prescindendo da qualunque moto di rotazione; indi combinando questo moto progressivo col moto di rotazione d'un punto dato del corpo, intorno ad un asse variabile, si conoscerà in ciascun istante il moto composto di questo punto nello spazio assoluto. Eulero ha risoluto in questo modo molti nuovi problemi di dinamica.

## CAPO XII.

### Progressi dell' idrodinamica.

#### *Idrostatica.*

Il principio d'ugual pressione, applicato alle leggi generali dell' idrostatica, bastava per ispiegare tutti i casi particolari d'equilibrio, che a questo si riferiscono; ma la scienza del moto de' fluidi era sempre ristretta, in quanto alla parte teorica, alla sola proposizione di Torricelli, cioè a dire, alla cognizione dell' efflusso de' fluidi per orifizj infinitamente piccoli, o fisicamente piccolissimi.

*Idraulica*.

Newton intraprese, nel suo libro *de' principj*, a risolvere il problema, senza astringersi a questa supposizione particolare. Egli considera un vaso cilindrico verticale perforato nel suo fondo da un' apertura di grandezza qualunque, per la quale l' acqua scaturisce, mentre il vaso ne riceve continuamente dall' alto una quantità eguale a quella che versa; di modo che può supporsi che l' acqua affluente formi uno strato di grossezza uniforme, istantaneamente estesa e posata sopra l' acqua del cilindro, che perciò rimane sempre pieno alla medesima altezza; in seguito egli concepisce che l' acqua del cilindro sia divisa in due parti, una centrale e liberamente mobile, ch' ei chiama *cateratta*, l' altra adiacente ed immobile, ritenuta esternamente dalle pareti del vaso. Egli suppone che la velocità d' una sezione orizzontale qualunque della cateratta sia dovuta all' altezza corrispondente dell' acqua del cilindro, comprendendo in quest' altezza la grossezza dello strato di surrogazione; e siccome da un altro canto, fa d' uopo per la continuità della cateratta, che le velocità delle sue differenti

Anno 1686



sezioni orizzontali sieno in ragione inversa delle loro superficie, così il calcolo mostra che la cateratta deve prendere la forma di un solido prodotto dalla rivoluzione d' un' iperbola del quarto genere intorno alla linea verticale che passa pel centro dell' orifizio. Con ciò, si conosce la quantità d' acqua erogata in un tempo dato.

L' autore non avendo da principio notata la diminuzione del dispendio che deve cagionare la contrazione della vena fluida all' uscire dall' orifizio, aveva concluso che la velocità a questa uscita è unicamente dovuta alla metà dell' altezza dell' acqua nel cilindro, il che è contrario alle sperienze de' getti d' acqua. Nella seconda edizione, egli corresse questo sbaglio; ma la sua teoria generale non restò meno vaga, precaria ed anche falsa in quanto alla sostanza: le leggi dell' idrostatica e la sperienza hanno dimostrato che la formazione e la figura della cateratta newtoniana sono fisicamente impossibili (1).

Parecchi autori, come Varignon, Guglielmini, ec., dando al teorema di Torricelli

(1) *Joh. Bern. tom. IV, pag.* 484.

più estensione che non comporta, stabilirono sopra la teoria degli efflussi, o sul movimento delle acque correnti ne' canali, soltanto delle proposizioni ipotetiche, incerte, e qualche volta apertamente contraddette dalla sperienza.

*Guglielmini, nato nel* 1685, *e morto nel* 1710.

Questo difetto, nel *trattato de' fiumi* di Guglielmini, è compensato da eccellenti riflessioni fisiche sopra il corso delle acque. Aggiungiamo che la difficoltà del problema deve far perdonare tutti questi tentativi inutili o infruttuosi. Non parlo qui della difficoltà inerente ad una soluzione rigorosa: sì fatta soluzione è impossibile; perciocchè, siccome in generale non si sanno determinare neppure colla geometria, e col calcolo i movimenti d'un sistema qualunque finito di corpi solidi, come mai si troverà il movimento d'una massa fluida, composta d'un' infinità d'elementi, de' quali non si conosce nè la grossezza, nè la figura?

Non si può quindi sperare di risolvere il problema dell' efflusso de' fluidi se non per approssimazione; e bisogna altresì per ciò,



1.° che la sperienza, o qualche proprietà particolare de' fluidi, cominci a formare, se mi è lecito di così dire, un ponte di comunicazione tra la teoria del movimento de' corpi fluidi e quella de' corpi solidi; 2.° che le formole idrauliche sieno trattabili, e conducano a risultati che si possano comodamente applicare alla pratica. Ogni altro metodo, più generale e più diretto in apparenza, non sarà che una semplice speculazione di geometria: esso produrrà delle espressioni complicate, delle quali non si potrà far uso nella spiegazione de' fenomeni della natura, che restringendole con supposizioni qualche volta precarie, sempre limitate, che loro faranno perdere tutti i pretesi vantaggi della generalità primordiale.

La teoria degli efflussi per orifizj di qualunque grandezza, restava sempre nell' imperfezione, allorchè Daniele Bernoulli, dopo alcuni felici tentativi, giunse a sottoporla ad un calcolo generale e rigoroso, con ammettere alcune ipotesi bastantemente conformi alla sperienza. Tale è l'oggetto del suo *Trattato d' idrodinamica*, pubblicato nel 1738. L' autore suppone, 1.° che la superficie superiore d' un fluido che esce da un orifizio qualunque, rimane sempre orizzontale; 2.° che dividendo

la massa fluida in un' infinità di sezioni orizzontali, tutti i punti d'una medesima sezione si abbassano secondo la verticale colla medesima velocità reciprocamente proporzionale all'estensione della sezione; 3.° che tutte le sezioni conservando così il loro parallelismo sono sempre contigue, e non cangiano velocità che per gradi insensibili, alla maniera de' corpi pesanti. Avendo fissato questi fondamenti del calcolo, Daniele Bernoulli fa uso del principio, *che vi è sempre eguaglianza tra la discesa attuale del fluido nel vaso, e l' ascensione virtuale*; il che in altri termini vuol dire la conservazione delle forze vive. Con ciò, egli arriva, in un modo semplicissimo ed elegantissimo, alle equazioni del problema; ne applica le formole generali a molti casi particolari, utili nella pratica. Quando la figura del vaso non è sottoposta alla legge di continuità, o quando, per qualche altra causa, si fanno de' cambiamenti bruschi e finiti nella velocità delle sezioni, vi è una perdita di forze vive; e le equazioni fondate sopra la conservazione intera di queste forze hanno bisogno di essere modificate. Daniele Bernoulli mostra qui ancora la sagacità d'un geometra fisico, attento ed avvezzo a seguire l'andamento della natura. Il calcolo non è





mai per lui che un istrumento del bisogno, e non già un vano sfoggio di formole puramente teoriche. Qualunque sieno i progressi che la scienza del moto delle acque abbia fatti dopo l'epoca in cui l'idrodinamica di Daniele Bernoulli è comparsa, la giusta posterità conterà sempre quest' opera tra le più belle e più sensate produzioni del genio matematico.

Malgrado il successo luminoso che essa ebbe sino dalla sua pubblicazione, Giovanni Bernoulli (padre dell' autore), e Maclaurin, giudicando che il principio secondario della conservazione delle forze vive, benchè vero per sè stesso, non doveva essere impiegato immediatamente nella determinazione del movimento de' fluidi, risolsero il problema con altri metodi (d'altronde molto diversi tra loro) che riguardarono come più diretti e più strettamente connessi colle prime leggi della meccanica. I loro principali risultati si trovarono conformi a quelli di Daniele Bernoulli. Ma rendendo giustizia ai loro metodi assai dotti, si sono in essi notate dell' oscurità ed alcune supposizioni precarie. Non entrerò in questa discussione. L'idraulica di Giovanni Bernoulli è stampata nel tomo IV delle sue opere, e nelle raccolte dell' accademia di Pietroburgo,

per gli anni 1737 e 1738; la teoria di Maclaurin fa parte del suo trattato *delle flussioni*.

D'Alembert, dopo aver fatto della dinamica una scienza quasi nuova, per mezzo del principio di cui Giacomo Bernoulli aveva prodotto il germe, applicò questo principio col medesimo successo al movimento dei fluidi. Egli pubblicò sopra questo argomento, nel 1744, un' opera molto estesa, intitolata: *Trattato dell' equilibrio e del moto dei fluidi*. Nel problema degli efflussi per orifizj qualunque, egli fa da principio le medesime supposizioni preliminari come Daniele Bernoulli: ma ecco tutto ciò che hanno di comune, quanto alle basi del calcolo. D'Alembert considera in ciascun istante il movimento di una sezione qualunque come composto del movimento che aveva nell' istante precedente, e d'un altro movimento che ha perduto; egli stabilisce facilmente, ed in molte maniere elegantissime, le condizioni dell' equilibrio tra i movimenti perduti. Allora le equazioni risultanti fanno conoscere i movimenti conservati, e tutte le circostanze dell' efflusso per l'orifizio. L'autore risolve in tal guisa con molta semplicità, non solo i problemi dei geometri che lo hanno preceduto, ma anco-



ra molti altri del tutto nuovi e molto difficili.

Dopo quest' opera, d'Alembert non ha mai cessato sino alla sua morte di perfezionare ed arricchire l'idrodinamica. Egli vedeva con ripugnanza che la determinazione del moto d'un fluido in un vaso fosse astretta all' ipotesi, che le sezioni conservino il loro parallelismo, e che tutti i punti d'una medesima sezione si muovano secondo una sola e medesima direzione. Alcuni tentativi reiterati gli fecero finalmente trovare delle formole per rappresentare il movimento d'un punto fluido in qualunque direzione. Queste formole, la cui risoluzione non dipende più che dall' analisi, sono fondate sopra questi due principj che derivano essi stessi immediatamente dalle prime leggi dell' idrostatica: vale a dire, 1.° che un canale rettangolare preso dovunque in una massa fluida in equilibrio, è separatamente in equilibrio; 2.° che una porzione di fluido, passando da un luogo all' altro, conserva il medesimo volume quando il fluido è incompressibile, ovvero si dilata secondo una data legge, quando il fluido è elastico, cosicchè nell' uno e nell' altro caso la massa rimane continua. Egli pubblicò questa nuova soluzione nel suo *Saggio sopra la resi-*

*stenza de' fluidi*; in seguito l'ha sviluppata e perfezionata in parecchi volumi de' suoi *Opuscoli matematici*.

Mentre l'idrodinamica faceva così brillanti progressi in Francia, Eulero era occupato a ridurre tutta questa scienza a formole generali ed uniformi, che presentano uno di que' bei quadri analitici pei quali l'autore è stato tanto eccellente in tutte le parti delle matematiche. Egli ha dato questa teoria in una prima memoria stampata tra quelle dell' accademia di Berlino (1); l'ha in seguito estesa e perfezionata in quattro grandi memorie che fanno parte della raccolta dell' accademia di Pietroburgo (2). L'idrostatica, tante volte maneggiata e rimaneggiata, è qui presentata in una nuova maniera e con applicazioni interessantissime. Tutta la teoria del movimento de' fluidi è compresa in due equazioni differenziali del second' ordine; l'autore applica i principj generali agli efflussi per gli orifizj de' vasi, all' ascensione dell' acqua nelle trombe, al suo corso ne' tubi di condotto di dia-

(1) *Acc. di Berlino an.* 1755.

(2) *Acc. di Pietroburgo* 1768, 1769, 1770, 1771.



metri costanti o variabili, ec. Egli ha pure considerato il movimento de' fluidi elastici: quello dell' aria lo conduce a formole semplicissime sopra la propagazione del suono, e sopra la maniera onde il suono è prodotto ne' tubi d'organo, o di flauto. Tutte queste ricerche offrono oggetti del più grande interesse pe' geometri.

Vi sono alcune scienze che per la loro natura non sembrano destinate che a nutrire la curiosità o l'inquietudine dello spirito umano: altre ve ne sono che uscendo da questo ordine puramente intellettuale, debbono applicarsi ai bisogni della società: tale è in particolare l'idrodinamica; ma per una sventura inevitabile ed annessa alla cosa medesima, i calcoli di d'Alembert e d'Eulero sono sì complicati, che non possono riguardarsi se non come verità geometriche preziosissime per sè stesse, e non già come simboli atti a dirigere il pratico nella cognizione del movimento attuale e fisico d'un fluido.

### *Resistenza de' fluidi.*

Si riferisce ordinariamente all' idrodinamica una teoria particolare che appartiene altresì alla meccanica de' corpi solidi: essa ha

per oggetto di determinare la percossa d'un fluido in moto contro un corpo solido, ossia la resistenza che soffre un corpo solido nel dividere un fluido. I geometri hanno fatto gli ultimi sforzi per istabilire sopra questo soggetto delle leggi generali che la sperienza potesse confermare. Un' idea semplicissima e vera in parte, alla quale si pose mente da principio, si fu di riguardare un fluido in moto, come composto d'un' infinità di filetti paralleli che danno ciascuno il loro colpo al corpo solido, senza essere impediti dai filetti vicini. Quindi si trovò, 1.° che nell' urto perpendicolare d'un fluido contro un piano, o d'un piano contro il fluido, la percossa o la resistenza è come il prodotto del piano per la densità del fluido e pel quadrato della velocità colla quale si fa la percossa; 2.° che nell' urto obliquo, la percossa che risulta perpendicolarmente al piano, è come il prodotto del piano per la densità del fluido, pel quadrato del seno dell' angolo d'incidenza, e pel quadrato della velocità. Newton ha impiegato queste regole nella determinazione del solido della minima resistenza; esse sono state egualmente seguite dai moltissimi autori d'idraulica.



Non v'ha cosa più facile e più comoda di questa teoria: essa dà semplicissimi risultati e soddisfa ad un gran numero di casi. La sperienza prova che le resistenze d'un medesimo corpo di figura qualunque che separa un fluido con velocità differenti, sono sensibilmente proporzionali ai quadrati di queste velocità; che le resistenze dirette e perpendicolari delle superficie piane, sotto le medesime velocità, sono presso a poco come queste superficie; ma negli urti obliqui la teoria di cui trattasi non è così conforme alla sperienza; essa se ne discosta altresì interamente quando gli urti diventano molto obliqui, cioè a dire, per esempio, quando gli angoli d'obliquità sono minori di quarantacinque gradi. Laonde si rileva ch' essa non può essere impiegata con esattezza per trovare il solido della minima resistenza, nè in generale per determinare alcuna curva idonea ad adempiere un oggetto proposto; il che la esclude da un gran numero di usi nella marina: poichè in queste specie di problemi, la legge della curvatura essendo un elemento incognito, non si può farla dipendere da una teoria che diventa falsa oltre certi limiti.

Questo difetto considerabile ha eccitato parecchi geometri a cercare nuove teorie, o

a rettificare quella di cui si è parlato, con certe supposizioni che non si discostano molto dal vero. Ma tutti questi tentativi non hanno avuto che un successo mediocre e limitato a certi casi: nessuno abbraccia la generalità del problema.

Quelli che desideravano che l'idrodinamica fosse finalmente ridotta ad alcune regole di un'applicazione certa nella pratica, e che sentivano l'impossibilità di giungervi per la sola strada della teoria, invitavano i geometri a sottoporre almeno i due rami principali di questa scienza, il problema degli efflussi e quello della resistenza de' fluidi, ad una serie numerosa di sperienze, fatte in grande (senza però oltrepassare i limiti compatibili colla esattezza); a discutere accuratamente queste esperienze; ed a confrontarle colla teoria, a fine di riconoscere precisamente in che essa pecca, e di apportarvi il rimedio. L'esecuzione di questo progetto ha qualche difficoltà; ma ha de' vantaggi che dovevano incoraggiare a tentarla. Tanti moltiplici fatti, analizzati con attenzione, e ridotti, per quanto è possibile, a leggi generali, possono rettificare i risultati della teoria, e comporre essi stessi, colla loro unione ben combinata, una specie di teoria, priva in vero del rigore geo-



metrico, ma semplice, facile ed appropriata ai bisogni più ordinarj della pratica. Questo lavoro lungo e penoso è stato intrapreso: i lettori mi dispenseranno dal renderne conto.

*Scienza navale. Moti del vascello.*

La scienza navale, sotto la quale comprendo tutte le cognizioni relative alla costruzione de' vascelli, alla loro forma, ed ai loro movimenti di solco, o di evoluzione in mare, offre un immenso campo di problemi utili, dipendenti dalla meccanica de' corpi solidi e fluidi. Quindi i geometri marini non hanno mancato di portare la luce della teoria nella pratica. Sino dall'anno 1689, il cavaliere di Renau, luogotenente generale delle armate generali della Francia, intraprese a sottoporre il movimento della nave al calcolo, in un'opera intitolata: *Teoria della manovra del vascello*. Una delle sue principali proposizioni era che se un naviglio è spinto nel medesimo tempo dalle azioni di due vele perpendicolari tra loro, e si rappresentino queste forze coi lati contigui d'un parallelogrammo rettangolo costruito sopra le loro direzioni, il naviglio soffrirà per parte dell'acqua una resistenza rappresentata dalla diagonale. Huguens os-

servò che la proposizione sarebbe vera, se le resistenze dell' acqua fossero come le semplici velocità; ma che essa è falsa, nell' ipotesi conforme alla natura, che le resistenze sono come i quadrati delle velocità. Difatti, seguendo quest' ipotesi, bisogna dapprima costruire un parallelogrammo, per rappresentare le due velocità che le due vele tendono ad imprimere al naviglio: indi fa d' uopo costruire un secondo parallelogrammo, che può chiamarsi il *parallelogrammo delle resistenze*, tale che i suoi lati, avendo altronde la stessa direzione come quelli del primo, sieno proporzionali ai loro quadrati: allora la diagonale di questo secondo parallelogrammo esprimerà la resistenza composta; e la velocità del naviglio, diretta secondo questa stessa diagonale, sarà proporzionale alla sua radice quadrata. Renau non si rese punto alle dimostrazioni di Huguens: egli persistette nella sua opinione erronea, finchè alla fine Giovanni Bernoulli, nel suo *Saggio sopra la manovra de' vascelli*, pubblicato nel 1714, pose la verità in tutta la sua luce, e fece vedere i paralogismi ne' quali l' autore francese si inviluppava. Giovanni Bernoulli rilevò ancora un altro errore non meno capitale di Renau, sopra l' angolo della deriva nelle rotte obli-



que. Sebbene Giovanni Bernoulli non abbia risoluto con sufficiente generalità la maggior parte de' problemi che il suo soggetto comportava, egli nondimeno ha reso un grandissimo servigio all' arte nautica, stabilendo esattamente i principj allora ricevuti, sui quali le quistioni di questa natura dovevano essere fondate.

*Stabilità del vascello.*

I geometri si erano da principio impegnati ne' più difficili problemi della manovra de' vascelli, senza avere troppo esaminato le condizioni essenziali all' equilibrio di queste specie di corpi: condizioni da cui dipendono nondimeno la sicurezza della navigazione, e nel tempo stesso tutti i vantaggi che possono renderla pronta e facile. Eglino pertanto ritornarono su i primi passi, e ripigliarono in qualche modo la scienza navale dalle fondamenta. Si sapeva da lungo tempo che, affinchè un corpo solido, galleggiante sopra un fluido, rimanga in equilibrio, fa d' uopo 1.° che il suo peso assoluto, e quello del fluido che esclude, sieno tra loro eguali; 2.° che il centro di gravità di questo corpo, e quello della sua parte sommersa, considerata come

omogenea, sieno situati sopra la medesima linea verticale. Ma ciò non basta per formare un equilibrio solido e permanente. Daniele Bernoulli fece inoltre vedere (1), che considerate le diverse situazioni rispettive che i due centri di gravità possono avere sulla linea verticale, esistono diversi stati d' equilibrio, più o meno *fermi*. Allorchè il centro di gravità del sistema di tutte le materie che compongono il carico d' un vascello, è situato sotto il centro di gravità della carena ossia della parte sommersa, l' equilibrio è sempre fermo, o tende a ristabilirsi se è stato turbato da qualche causa esterna, come l' agitazione delle ondate, l' ineguaglianza negli impulsi del vento, ec.: il vascello ritorna alla sua prima situazione con tanto più di energia, quanto il suo centro di gravità è situato più basso. Ma quando i due centri di gravità si confondono, o allorchè quello del naviglio è più elevato di quello della carena, l' equilibrio è *versatile*, e vieppiù versatile, a misura che questa elevazione aumenta. Daniele Bernoulli dà alcune formole per valutare il grado di stabilità del vascello in tutti i casi.

(1) *Acc. di Pietroburgo*. 1735.



Sembra che Eulero avesse trovato dal canto suo, e nel medesimo tempo, de' risultati simili: ei gli sviluppa e li dimostra nella sua opera: *Scientia navalis*, 1749.

*Bouguer, nato nel* 1698, *e morto nel* 1758.

Bouguer spiega a lungo la medesima teoria, in una maniera nuova e semplicissima, nel suo *Trattato del naviglio*, pubblicato nel 1746. Egli fa conoscere sotto il nome di *metacentro*, il limite sotto il quale deve essere situato il centro di gravità di tutto il carico del vascello; esamina la miglior posizione degli alberi delle navi, l' estensione che bisogna dare alle vele, e i diversi movimenti dai lati, e da poppa a prora che possono accadere, a motivo de' cambiamenti del *punto velico*, cioè a dire, del punto al quale si può concepire raccolto tutto lo sforzo del vento contro le vele. Le cognizioni pratiche ch' egli univa ad una profonda teoria, lo hanno posto in istato di spargere sopra questo soggetto de' lumi molto utili ai marinai.

Bouguer ha trattato ancora più specialmente *della manovra de' vascelli*, o de' movimenti del naviglio, in un' altr' opera ch' egli pubblicò nel 1757. Ma sventuratamente vi

è in queste ricerche un vizio radicale, che notabilmente ne diminuisce l'utilità nella pratica: esse sono fondate per la maggior parte sopra la teoria ordinaria della resistenza dei fluidi, della quale non si può far uso che colle restrizioni già indicate.

L'accademia delle scienze di Parigi, intenta a cogliere tutti i mezzi di perfezionare la navigazione, ha proposto per argomenti de' suoi premj molti quesiti relativi a questo importante oggetto, come, per esempio, il modo migliore di alberare i vascelli, tanto rapporto alla situazione, quanto al numero ed all'altezza degli alberi; la forma e la fabbricazione più perfetta delle ancore; la correzione ed il perfezionamento dell'argano; le condizioni della disposizione più vantaggiosa delle mercanzie, sia per diminuire i movimenti ai lati, e da poppa a prora, sia per aumentare la velocità del solco, sia per rendere il naviglio più o meno sensibile all'azione del timone, ec. Le memorie che hanno riportato questi premj, hanno procurato dei vantaggi che i dotti ed esperimentati uomini di mare si affrettano di riconoscere.



## CAPO XIII.

### *Progressi dell' astronomia.*

I progressi che ha fatti l'astronomia da cent' anni ecciterebbero la maraviglia, se non si pensasse ai soccorsi ch'essa ha ritratti dalla fisica, dalla meccanica e dalla geometria, sia per perfezionare gli antichi strumenti, o per inventarne di nuovi, sia per mettere maggiore esattezza nelle osservazioni, sia finalmente per valutare e fare sparire tutte le cause di alterazioni reali o apparenti, dalle quali queste osservazioni possono essere affette. Tutto è concorso a dare, per così dire, una nuova vita a questa scienza, ed a legare più strettamente tutte le sue parti colla cognizione più intima de' loro vicendevoli rapporti. Si sono scoperti molti nuovi fenomeni celesti; si è perfezionata la teoria de' pianeti principali o secondarj, e sonosi costruite alcune tavole de' loro movimenti, di gran lunga superiori a quelle che prima esistevano; è stato osservato con somma diligenza un numero grande di comete, ec. Dal canto loro, i geometri si sono sforzati di assegnare con precisione le cause fisiche de' movimenti celesti;

ed i loro calcoli sono stati infinitamente utili all' astronomia pratica, pel vantaggio ch' esse hanno di collegare insieme le osservazioni di un medesimo fenomeno, e di assoggettare alla legge di continuità i fatti isolati che queste osservazioni fanno conoscere.

Ben si scorge non essere possibile di qui esporre partitamente tanti lavori: ciò richiederebbe una storia particolare. Rinchiudendomi sempre nel mio piano, debbo ristringermi a riportare le scoperte che caratterizzano specialmente l'astronomia in questo quarto periodo.

Dividerò questo capo in due sezioni: la prima comprenderà l'astronomia pratica, cioè a dire, la cognizione de' moti celesti, fondata immediatamente sopra le osservazioni, o sopra le conseguenze delle osservazioni; la seconda, l'astronomia fisica, ossia la spiegazione de' movimenti, coll' applicare la geometria alle leggi che regolano questi movimenti.





## SEZIONE PRIMA.

### *Astronomia pratica.*

Gli astronomi moderni, muniti di eccellenti strumenti, hanno non solo perfezionato tutte le antiche teorie de' moti celesti; ma ne hanno ancora stabilito molte altre della più alta importanza, appena travedute, o anche assolutamente nuove. Distinguo in questo numero la librazione della luna, i movimenti di aberrazione delle stelle fisse, la nutazione dell' asse della terra, i cataloghi delle stelle fisse, la figura della terra, e le leggi generali del moto delle comete.

### *Librazione della luna.*

Tosto che si cominciò a considerare la luna, si trovò ch' essa presentava sempre la medesima faccia alla terra, cioè a dire, alcune macchie sempre le medesime, e sempre disposte tra loro nella stessa maniera. Gli antichi astronomi non si trattennero gran fatto su questa osservazione generale. Un attento esame delle macchie della luna fece conoscere a Galileo che questo pianeta aveva, inter-

fio al suo centro, un' oscillazione per mezzo della quale certe macchie scompariscono per un tempo verso gli orli, poi ricompariscono, spariscono ancora, per ricomparire di nuovo, e così di seguito. Questa oscillazione è ciò che chiamasi *la librazione* della luna. Galileo la spiegava in generale, per un movimento di rotazione intorno ad un asse, che attribuiva alla luna, nello stesso tempo che gira intorno alla terra; ma egli non determinò la posizione esatta di questo asse, nè le quantità precise de' movimenti di librazione, che doveva produrre, tanto in latitudine, quanto in longitudine.

Siccome i pianeti principali, che girano sopra i loro assi, ci presentano diverse macchie, o le medesime macchie in diverse posizioni, e che queste apparenze sono anche i caratteri dai quali si sono riconosciuti i loro movimenti di rotazione, Cartesio non vedendo nulla di simile nella luna, sostenne che essa non ha alcun moto di rotazione. Per ispiegare l'apparenza costante delle medesime macchie, egli suppone che il globo lunare sia composto di due emisferi, di gravità disuguali, separati dal cerchio perpendicolare alla linea condotta dalla terra al centro della luna; e conclude che di questi due emisferi



sottoposti l'uno e l'altro all' azione della forza centrifuga che proviene dal moto di rivoluzione della luna intorno alla terra, il più pesante, o il più massiccio, avendo la maggior forza centrifuga, deve tenersi costantemente da noi più lontano. Quanto al moto di librazione, esso è prodotto, secondo il medesimo autore, da una piccola oscillazione del cerchio che forma la base de' due emisferi. Non ho bisogno di far rilevare quanto sia ipotetica tutta questa spiegazione: la pretesa disuguaglianza di gravità o di massa de' due emisferi è fuori d' ogni verosimiglianza, ed altronde essa non rende che una ragione vaga ed insufficiente de' fenomeni della librazione.

### *Giacomo Cassini, nato nel* 1677, *e morto nel* 1756.

Il famoso Domenico Cassini ed il suo degno figlio Giacomo Cassini, sono i primi che abbiano dato di questi movimenti della luna una spiegazione completa, esatta, conforme alle osservazioni, ed adottata in conseguenza da tutti gli astronomi. Essa è esposta da Giacomo Cassini, nelle memorie dell' accademia delle scienze di Parigi, per l' anno 1721, e ne' suoi *Elementi d'astronomia*, 1740.

Secondo questo autore, la librazione della luna è prodotta dalla combinazione di due movimenti, uno de' quali è la rivoluzione di questo pianeta intorno alla terra, l'altro è un movimento di rotazione della luna intorno ad un asse, coll' assoggettare quest' ultimo movimento alle condizioni seguenti:

1.° L' asse di rotazione della luna è inclinato di 87 gradi e mezzo sul piano della ecclittica, e di 82 gradi e mezzo sul piano dell' orbita lunare; di modo che il piano dell' equatore del globo della luna fa un angolo di 2 gradi e mezzo col piano dell' ecclittica, ed un angolo di 7 gradi e mezzo col piano dell' orbita lunare.

2.° I poli del globo della luna sono situati sopra la circonferenza del cerchio che formasi tagliando in ciascun istante questo globo con un piano parallelo al cerchio massimo celeste, che passa pei poli dell' ecclittica, e per quelli dell' orbita lunare. Si può chiamare questo cerchio *il coluro della luna*, per la stessa ragione che chiamasi *coluro dei solstizj* il cerchio massimo che passa pei poli dell' ecclittica e per quelli del cerchio equinoziale.

3.° Il globo della luna gira intorno al suo asse, secondo l' ordine delle linee, ossia



d' Occidente in Oriente, nello spazio di 27 giorni 5 ore, con un periodo eguale a quello del ritorno della luna al nodo della sua orbita coll' ecclittica. Questo movimento è analogo alla rivoluzione che la terra fa intorno al suo asse, secondo l' ordine delle linee, ritornando al medesimo coluro nello spazio di 23 ore 56 minuti.

Da queste supposizioni risulta in generale che prolungando, col pensiero, l' asse del globo della luna sino al cielo, le estremità di quest' asse ci sembreranno descrivere intorno ai poli dell' ecclittica, da cui sono distanti di 2 gradi e mezzo, due cerchi polari, d' Oriente in Occidente, in 18 anni 7 mesi, nel medesimo tempo e dalla stessa parte de' nodi della luna. Si rileva che questo movimento è simile a quello per cui i poli della terra fanno le loro rivoluzioni intorno ai poli dell' ecclittica, d' Oriente in Occidente, secondo due cerchi che ne sono lontani di 23 gradi e mezzo, in un periodo di circa 25000 anni; il che produce il movimento apparente delle stelle d' Occidente in Oriente nel medesimo tempo, e quindi la precessione degli equinozj. La spiegazione dettagliata de' fenomeni della librazione della luna non appartiene a

quest' opera ; ma bisogna cercarla ne' trattati d' astronomia .

*Aberrazioni apparenti delle stelle .*

*Bradley , nato nel* 1692 *, e morto nel* 1762.

Una scoperta più grande per la sua difficoltà particolare e per la sua influenza sopra tutte le parti dell' astronomia , è quella delle cause che producono il movimento di aberrazione apparente delle stelle fisse . Essa è dovuta a Bradley , l' Ipparco dell' Inghilterra .

Tra le ragioni che si allegarono nel tempo di Copernico contro il suo sistema , si diceva, come abbiamo già riferito , che se la terra gira effettivamente intorno al sole, essa deve fare apparire nelle stelle una parallasse ( che chiamavasi *la parallasse del grand' orbe* ), quando passa da un punto della sua orbita al punto diametralmente opposto . L'obbiezione era solida. Copernico e Galileo non vi poterono rispondere che con varie congetture , le quali non riportavano un perfetto assenso . Gli astronomi seguenti , persuasi dell' esistenza della parallasse del grand' orbe , impiegarono tutti i mezzi per riconoscerne la quantità . Alcuni credettero d' averla fissata , e si azzardarono a dire ch' essa era di 4 in 5 secondi ; gli altri in maggior numero , appoggiati sopra le osservazioni più precise , la trovarono assolutamente insensibile , ed alla fine questa ultima opinione prevalse ; ma essa non rovesciò punto il sistema di Copernico : si concluse solamente che la distanza della terra alle stelle era sì prodigiosamente grande , che faceva d' uopo riguardarla come infinita per rapporto al diametro dell' orbita terrestre . Nondimeno rimanevano sempre da spiegarsi certi movimenti sensibili che si osservavano nelle stelle , e contrarj , per la maggior parte , a quelli che avrebbero dovuto dare la parallasse del grand' orbe e la precessione degli equinozj . Questi movimenti irregolari si denotavano sotto la denominazione generale *di aberrazioni apparenti delle stelle fisse* . Non sapendo a che attribuirli, gli astronomi prendevano tutte le precauzioni per evitare gli errori che avrebbero potuto introdurre nella determinazione del movimento de' pianeti per rapporto alle stelle .



Molineux , astronomo irlandese , intraprese nel 1725 , a determinare questi movimenti di aberrazione; egli li osservò a Kew, nelle vicinanze di Londra , con un eccellente

bettore di Graham; ma non potè pervenire a sottoporli a leggi generali.

Bradley fu più fortunato. Eccellente osservatore, dotto geometra, proseguì nel medesimo luogo la stessa ricerca, con una costanza che lo condusse finalmente alla perfetta cognizione di tutti questi fenomeni singolari. Egli riconobbe che certe stelle sembravano avere, nello spazio d'un anno, una specie di oscillazione in longitudine, senza cambiare in verun modo di latitudine; e che finalmente alcune altre (ed era il numero maggiore) sembravano descrivere nel cielo, nello spazio d'un anno, una piccola ellissi più o meno allungata. Questo periodo *d'un anno*, al quale corrispondevano tutti questi movimenti, benchè altronde sì differenti, era un indizio certo che avevano alcuni rapporti col moto della terra nella sua orbita intorno al sole; ma ciò pure altro non era che un primo riconoscimento generale, insufficiente per rendere una ragione precisa e completa de' fenomeni. Bradley fece un nuovo passo che decise la quistione; egli concepì il bel pensiero, che l'aberrazione apparente delle stelle fisse sia prodotta dalla combinazione del moto progressivo della luce col moto annuo



della terra: egli vi giunse col fare a sè stesso questo ragionamento.

La teoria di Roëmer m'insegna che la velocità della luce non è istantanea, e che essa ha un rapporto finito, in circa quello di 10000 ad 1, alla velocità della terra nella sua orbita intorno al sole; dunque un raggio di luce, che parte da una stella, e porta l'impressione di questa stella al mio occhio, non arriva se non dopo che la terra ha cambiato sensibilmente di luogo dopo l'istante in cui è partito: laonde quando il mio occhio riceve il colpo, deve riferire la stella ad un luogo differente da quello a cui l'avrebbe riferita, se io fossi sempre rimasto nel medesimo sito. Quindi un osservatore terrestre non vede mai le stelle nei loro veri luoghi nel cielo, e deve attribuir loro diversi movimenti che dipendono dalle diverse posizioni ch'esse hanno, riguardo a lui medesimo.

Munito di questa chiave, Bradley spiegò tutti i movimenti di aberrazioni apparenti delle stelle fisse, in una maniera esatta, precisa, conforme alle sue proprie osservazioni ed a quelle di tutti gli altri astronomi. D'allora in poi tutte le incertezze furono dissipate. Alle prove che già si avevano del sistema di Copernico, ne aggiunse in tal guisa una nuo-

va, che può chiamarsi una dimostrazione matematica.

Non contento d'avere gettato i fondamenti di questa teoria colle osservazioni, egli la ridusse a formole trigonometriche, delle quali pubblicò i risultati, senza dimostrazione, nelle *Transazioni filosofiche* della società reale di Londra. Anno 1727

La novità e l'interesse dell'argomento fissarono l'attenzione degli astronomi e dei geometri. Clairaut diede le dimostrazioni che Bradley aveva soppresse (1); e vi aggiunse molti altri teoremi d'un uso facile e comodo: servigio importante che ha non poco contribuito ad accelerare i progressi di questo nuovo ramo dell'astronomia.

Circa dieci anni dopo (2), il medesimo geometra applicò la teoria dell'aberrazione al moto de' pianeti e delle comete. Di fatti, ben si comprende ch'essa vi deve egualmente aver luogo. Il tempo che mette la luce a venire da un pianeta o da una cometa alla terra, produce necessariamente qualche cambiamento apparente nella posizione del pianeta o della

(1) *Mem. dell'Acc.* 1737.
(2) *Ibid.* 1746.



cometa. Dunque il problema è qui della stessa natura come per le stelle, con questo divario però che le stelle essendo fisse, laddove i pianeti e le comete hanno de' movimenti dei quali bisogna tener conto, le formole di aberrazione sono un po' più complicate pei pianeti e per le comete, che per le stelle. Alla qual cosa si deve soprattutto aggiungere la difficoltà di calcolo, che proviene dall'eccentricità delle orbite planetarie o cometarie.

### *Nutazione dell'asse della terra.*

L'astronomia moderna deve ancora a Bradley un'altra scoperta non meno importante, quella della nutazione dell'asse della terra, alla quale la geometria gli aprì la strada, coll'indicare le osservazioni che bisognava fare per arrivarvi.

Istrutto in generale che le ineguaglianze delle attrazioni della luna o del sole sopra le diverse parti della sferoide terrestre, dovevano far prendere diversi movimenti al suo asse, per rapporto al piano dell'ecclittica, Bradley si applicò a riconoscere ed a separare questi movimenti, con una lunga serie di osservazioni penose e delicate, fatte nelle posizioni del sole e della luna, le più atte a

manifestare gli effetti che cercava. Egli trovò 1.° che l'asse della terra ha un movimento conico, per il quale le sue estremità descrivono intorno ai poli dell'ecclittica, e contro l'ordine de' segni, un cerchio intero in 25000 anni; ossia un arco di circa 50 secondi in un anno: il che produce la precessione degli equinozj; 2.° che quest'asse medesimo ha, per rapporto al piano dell'ecclittica, un movimento di librazione, o di oscillazione alternativa, per cui s'inclina di circa 18 secondi durante una rivoluzione de' nodi della luna, la quale si fa, contro l'ordine de' segni, nello spazio di circa 19 anni; dopo di che ritorna alla sua prima posizione, per inclinarsi di nuovo, e così di seguito. Queste osservazioni, conformi al sistema dell'attrazione newtoniana, ne sono una nuova dimostrazione, come noterò più espressamente nel seguito. Dopo queste scoperte, la nutazione dell'asse della terra entra nel calcolo astronomico sì essenzialmente quanto la precessione degli equinozj, di cui già si conosceva presso a poco la quantità prima di questo astronomo.

Anno 1747



*Cataloghi delle stelle. Altri oggetti.*

Siccome le stelle sono i segnali a cui si riferiscono i movimenti de' pianeti, gli astronomi di tutti i tempi si sono applicati colla più grande attenzione a moltiplicare questi segnali ed a fissare le loro rispettive posizioni. Tale è il doppio oggetto del catalogo delle stelle. Si è veduto che Ipparco aveva fatto l'enumerazione esatta delle stelle conosciute al suo tempo. Nel seguito, Tolomeo e gli astronomi arabi perfezionarono questo lavoro. Ho parlato, nel periodo precedente, del catalogo di Flamstéed per le stelle visibili nei nostri climi, e di quello che fu formato per le stelle australi, sopra le osservazioni di Halley all'isola s. Elena.

*Lacaille, nato nel 1713, e morto nel 1762.*

Lacaille, uno de' migliori e de' più infaticabili astronomi che sieno stati giammai, dopo aver calcolato le posizioni d'un gran numero di stelle in Francia, intraprese nel 1751 il viaggio del capo di Buona-Speranza, coll'intenzione di estendere e perfezionare il catalogo delle stelle australi. Non entrerò nel

dettaglio de' mezzi e delle precauzioni che impiegò per eseguire questa grande impresa sì utile all' astronomia, ed al presente uno de' suoi principali fondamenti: aggiungerò solamente ch' egli riportò in Europa un catalogo esatto e ben verificato di più di 9800 stelle comprese tra il polo australe ed il tropico del Capricorno.

Durante il corso di queste osservazioni principali, Lacaille ne faceva secondo l' occasione delle altre, sopra diversi punti d' astronomia, come le rifrazioni, l' altezza del polo, la lunghezza del pendolo a secondi, la longitudine del capo di Buona-Speranza, sopra la quale le opinioni de' più abili geografi erano divise, e differivano di più di tre gradi; egli si applicò in particolare ad osservare le altezze meridiane di Marte, di Venere e della luna; il che lo pose in istato di determinare con precisione le parallassi di questi pianeti, col paragonare le sue osservazioni con quelle che si facevano nel medesimo tempo in Francia, in Inghilterra, in Svezia ed in Prussia. Finalmente egli misurò un grado della terra, di cui avrò occasione di parlare più a lungo nell' articolo seguente.



*Figura della terra.*

La quistione della figura della terra è un oggetto della più alta importanza per l' astronomia e per la navigazione. Quindi in tutti i tempi si sono fatti de' tentativi per risolverla; ma solamente dopo la misura di Picard si è cominciato ad ottenere de' risultati, sopra l' esattezza de' quali si potesse ragionevolmente contare.

Quest' astronomo trovò che la lunghezza d' un grado del meridiano terrestre era di 57060 tese, per una latitudine boreale di 49 gradi 23 minuti. Sebbene questa dimostrazione fosse giudicata incomparabilmente più esatta di tutte quelle che l' avevano preceduta, essa però lasciava ancora qualche cosa da desiderare, tanto pel difetto di precisione di certi elementi, quanto perchè non bastava per dare una nozione completa della figura e delle dimensioni del globo terrestre. L' autore aveva impiegato tredici triangoli, sopra un' estensione di circa trentadue leghe, per calcolare la lunghezza del grado terrestre. Ora, non potrebbero essersi insinuati alcuni errori sensibili nelle risoluzioni trigonometriche di tanti triangoli? Da un altro canto, i

migliori strumenti allora conosciuti non potevano dare che a quattro secondi circa il valore dell' arco celeste corrispondente all' arco terrestre; e questi quattro secondi, riportati sopra la terra, valgono circa sessantasei tese. Finalmente, un solo grado non poteva far conoscere se la terra sia sferica, o si discosti da questa figura.

Essendo state presentate queste considerazioni al governo francese, sempre portato a favorire il progresso delle scienze, egli ordinò che non solo la misura di Picard fosse verificata, ma ancora che a partire da questo punto, la meridiana fosse prolungata a traverso la Francia fino a Dunkerque, verso il Nord, e sino a Colioure, verso il Mezzodì; il che comprendeva un' estensione di circa 8 gradi. La Hire fu incaricato della parte del 1683
Nord; Domenico Cassini di quella del Mezzodì, nella quale fu in seguito aiutato da suo figlio Giacomo Cassini: risultò da tutte que- 1701
ste operazioni che la lunghezza media del grado terrestre, in Francia, era di 57061 tese, maggiore di circa una tesa di quella di Picard.

Gli autori di queste nuove misure, persuasi, dalla sperienza del raccorciamento del pendolo a Caienna, e dalle teorie di Huguens





e di Newton, che la terra era una sferoide schiacciata verso i poli, ma ingannati da una falsa applicazione della geometria, che loro fece credere che in sì fatta sferoide i gradi terrestri dovevano diminuire di lunghezza, andando dal Mezzodì al Nord, non istettero forse abbastanza in guardia contro le sorgenti d' illusione che questo pregiudizio poteva cagionare. Sia per questa causa, o pel difetto di aggiustatezza ne' loro istrumenti, o per alcune negligenze quasi inevitabili in una lunga serie di osservazioni, eglino trovarono che i gradi terrestri diminuivano effettivamente di lunghezza dal Mezzodì al Nord; e si affrettarono di pubblicare questo risultato con tanto più di confidenza, quanto che credevano con ciò di confermare lo schiacciamento della terra, che riguardavasi come molto probabile.

La quistione pareva completamente risoluta: si restò per molti anni nella sicurezza, che le osservazioni si accordavano colla teoria, almeno quanto alla conseguenza generale; ma alla fine i geometri vennero a turbare questa tranquillità: eglino dimostrarono che questo preteso accordo delle osservazioni colla teoria era fondato sopra un paralogismo di Geometria, e che in una sferoide compianata

verso i poli, i gradi di latitudine dovevano aumentare dal Mezzodì al Nord, e diminuire al contrario in una sferoide allungata. Di fatti, si scorge, senza il soccorso di alcuna figura di geometria, che nella sferoide compianata, il meridiano terrestre essendo più curvo vicino all' equatore che intorno al polo, la lunghezza dell' arco terrestre d' un grado, corrispondente ad un arco celeste d' un grado, deve andare aumentando a misura che la curvatura del meridiano terrestre diminuisce, o a misura che si avanza verso il polo. Il contrario deve aver luogo per la sferoide allungata. La verità di questo ragionamento così semplice e così concludente, non poteva lasciare di colpire ben presto tutti gli spiriti. Allora gli autori delle nuove misure furono molto imbarazzati. Da una parte, non potendo rigettare le dimostrazioni che loro si opponevano, dall' altra non volendo abbandonare delle osservazioni che riguardavano come certissime, furono alla fine ridotti a dire che la terra era una sferoide allungata verso i poli. Delle nuove misure, prese egualmente in Francia, negli anni 1733 e 1736, sembrarono fortificare l' opinione che le lunghezze de' gradi terrestri diminuivano dal Mezzodì al Nord. Quindi la terra fu, per lo



spazio di circa quarant' anni, una sferoide allungata, almeno in Francia, a dispetto di Huguens e di Newton.

Ciò non ostante i geometri non n' erano convinti. Eglino rinnovavano di tempo in tempo le loro proteste contro un sistema che non potevano conciliare colle leggi dell' idrostatica: sostenevano che anche supponendo che le osservazioni fatte in Francia avessero tutta l' esattezza possibile, le differenze tra i gradi erano troppo piccole, per essere prese perfettamente, e che non potevansi ottenere delle differenze bene contrassegnate e sufficienti, che col paragone di gradi misurati in luoghi molto distanti gli uni dagli altri, nella direzione del meridiano. De' riclami così bene motivati furono ascoltati dal governo francese. Il conte di Maurepas, allora ministro dell' accademia delle scienze, ordinò che una truppa di matematici andrebbe a misurare il grado del meridiano al Perù, nella vicinanza dell' equatore, mentre un' altra truppa andrebbe a fare una simile operazione nella Laponia, sotto il cerchio polare.

Godin, Bouguer e la Condamine partirono pel primo viaggio nel 1735; l' anno seguente, Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier, ai quali si unì Celsio, celebre pre-

fessore d'astronomia in Upsal, si portarono in Laponia. I primi soffrirono ogni specie di contraddizioni e di ritardi nelle loro operazioni, e non poterono ritornare in Francia che circa sette anni dopo la loro partenza: gli altri ebbero ogni cosa prospera; il loro lavoro fu cominciato e terminato in pochissimo tempo; ritornarono nel loro paese a capo di quindici in sedici mesi di assenza.

Sembra che si sarebbe dovuto aspettare il ritorno degli accademici del Perù, per rendere un conto di operazioni tutte intraprese colla medesima intenzione: questo era il parere de' dotti moderati e giusti. Maupertuis, capo della truppa del Nord, uomo avido di fare dello strepito, rigettò una proposizione sì contraria al suo intento. Egli non ebbe altra maggior premura che di annunziare dappertutto, all' accademia, al pubblico, nel gran mondo che molto frequentava, il risultato di un' operazione della quale si appropriava in qualche modo tutta la gloria, ed alla quale però non aveva avuto come cooperatore che una parte mediocre. Questo risultato si era che la lunghezza del grado del meridiano, sotto il cerchio polare vale, assai ad un di presso, 57438 tese. Paragonandolo con quello del grado di Francia, che vale 57061 tese, si



vede che le lunghezze de' gradi aumentano incontrastabilmente dal Mezzodì al Nord, e che per conseguenza la terra è una sferoide compressa verso i due poli: si trova inoltre che l'asse di rivoluzione di questa sferoide ed il diametro del suo equatore, stanno presso a poco tra loro come i numeri 177 e 178.

Un numeroso partito adottò con entusiasmo queste conclusioni. Maupertuis fu esaltato, come se avesse portato agli uomini una verità nuova e straordinaria. Non si chiamava più in certi luoghi, che lo *schiacciatore* della terra. Egli medesimo si fece dipingere da Lapone, che s' appoggia sul globo terrestre, come per fargli prendere la forma sferoidale; e Voltaire, allora suo amico, pose sotto della stampa quattro cattivi versi che furono ammirati, e che più giustamente furono obbliati nel seguito (1).

I partigiani dell' allungamento della terra vedevano con dispiacere il progresso d' un

---

(1) Eccoli:

*Ce globe mal connu, qu'il a su mesurer,*
*Devient un monument où sa gloire se fonde:*
*Son sort est de fixer la figure du monde,*
*De lui plaire et de l'éclairer.*

sistema che rovesciava in un momento tutto il loro edifizio, innalzato sì lentamente e con tante spese. Sempre persuasi dalle osservazioni fatte in Francia, che la lunghezza de' gradi terrestri andava diminuendo dall' equatore al polo, gettarono de' dubbj sopra l' esattezza della misura del Nord: eglino pretesero che essa era stata fatta leggermente, e che inoltre il rigore del clima aveva potuto impedire che in essa si portasse tutto lo scrupolo, e tutta la necessaria precisione. Questa imputazione fu rispinta con calore. Gli scritti polemici si moltiplicarono da una parte e dall' altra; e ben presto si manifestò più l' amor proprio che l' amore della verità. Un ardente difensore dell' allungamento, credendo di avere confutata vittoriosamente l' opinione contraria, non volle però consegnare il suo manoscritto allo stampatore, prima di averlo comunicato a Fontenelle, la cui autorità era d' un grandissimo peso. Fontenelle lesse l' opera, e nel restituirla all' autore, gli consigliò di pubblicarla. Questi, un poco indeciso, un poco incerto sull' opinione del giudice, dopo un momento di silenzio disse: *Voi mi date, signore, un consiglio che non avete seguito per voi stesso; molto si è scritto contro di voi, e non avete mai risposto*. . . *Oh!* ripigliò final-



mente il saggio segretario dell' accademia delle scienze, *io non era così sicuro come voi di aver ragione*.

*Cassini di Thury, nato nel 1714, e morto nel 1784.*

In questa lotta, il sistema dello schiacciamento della terra prevaleva di giorno in giorno, pel doppio vantaggio che riuniva, di essere fondato sopra alcune osservazioni, e sopra la teoria delle forze centrali. I Cassini, autori del sistema dell' allungamento, furono eglino medesimi scossi: finirono col riconoscere la necessità di verificare i gradi di Francia, con istrumenti più perfetti di quelli di cui si erano serviti. Nel 1739 e 1740 Cassini di Thury, figlio di Giacomo Cassini, e l' abate di Lacaille, fecero questa verificazione, usando tutti i migliori strumenti e tutte le precauzioni possibili per assicurarne la perfetta precisione. Eglino riconobbero che la maggior parte de' gradi andava aumentando dal Mezzodì al Nord, e che un piccolissimo numero soltanto sembrava diminuire. La conseguenza che quindi derivava era in favore dello schiacciamento della terra. D' altro più non si trattava che di manifestarla in una for-

ma autentica. Cassini di Thury, col consenso di suo padre, ebbe il nobile coraggio d'annunziare in una pubblica assemblea dell' accademia delle scienze, che si erano insinuati alcuni errori nelle prime misure dei gradi di Francia, e di concludere che le nuove combinavano con quelle del Nord, nel provare che la terra era una sferoide compressa verso i poli. Egli pubblicò tutto questo lavoro in un libro intitolato: *Meridiana dell' Osservatorio reale, verificata*, ec. Allora la terra prese, dal comune accordo degli astronomi, e con grande soddisfazione de' geometri, la figura schiacciata che le era stata sì lungo tempo disputata.

Maupertuis, che si voleva sempre far riguardare come l'autore di questa rivoluzione, avrebbe goduto di un trionfo puro, se, per una conseguenza del suo carattere inquieto e geloso, non avesse avuto continuamente innanzi agli occhi il timore di veder arrivare al primo giorno gli accademici dal Perù, coi quali si dovrebbe di nuovo discutere tutta la quistione. Gli uomini istrutti e disinteressati, senza rivocare in dubbio lo schiacciamento della terra, aspettavano questo ritorno, per prendere una più perfetta cognizione della forma e delle dimensioni del globo terrestre.



Si sapeva che Godin e Bouguer erano astronomi del prim' ordine, e che di più Bouguer era un grandissimo geometra; che la Condamine, senza uguagliare i suoi due colleghi in sapere, aveva superato col suo zelo e colla sua attività moltissimi ostacoli che si opponevano al buon esito delle operazioni. Quindi si aveva tutto il motivo di pensare che i loro lavori spargerebbero una nuova luce sopra questa materia. Gli amici di Maupertuis si sforzavano con tutti i mezzi, di distruggere e d'indebolire così giuste speranze: eglino non cessavano di ripetere che il problema era risoluto; che le misure del Perù non insegnerebbero nulla di nuovo, o al più non farebbero che confermare una verità già conosciuta. Per anticipatamente combatterle si adoperava ancora l'arma del ridicolo. Maupertuis, nato caustico e mordace, diceva nelle società di gente frivola, a cui uno scherzo buono o cattivo tien luogo di ragione: *Quando i peruviani arriveranno, saranno assai più imbarazzati della loro figura che della figura della terra*. Tutto ciò fu inutile; malgrado gli intrighi ed i sarcasmi, le misure del Perù ricevettero l'accoglienza che meritavano. Bouguer, nel suo libro *della figura della terra*, espose le precauzioni essenziali ch' egli ed i

suoi colleghi avevano prese, tanto per la verificazione e la perfetta giustezza degli strumenti, quanto ancora per fare la miglior scelta ed il miglior uso delle osservazioni; egli discusse varj punti d'astronomia che non erano ancora stati rischiarati; fece l'importante riflesso che la figura ellittica non conveniva esattamente a tutti i punti de' meridiani della terra; tentò delle altre ipotesi più conformi alla verità in moltissimi casi, ec. Tante belle ricerche impressero alle operazioni del Perù un carattere d'evidenza e di certezza, che le fece riguardare come le più perfette che fossero state ancora eseguite in questo genere. Il tempo non ha fatto che confermare questo giudizio vantaggioso. Non si pensa già così favorevolmente, in gran parte, della misura del Nord.

Del rimanente, la conclusione fu sempre che la terra è compressa verso i poli. La lunghezza del primo grado del meridiano all' equatore è di 56753 tese, donde risulta, paragonandola a quella del grado di Francia, che gli assi della terra stanno tra loro come i due numeri 178 e 179, con pochissimo divario.



*Dubbj sopra la regolarità della terra.*

Si direbbe che il nostro sventurato pianeta è destinato a tormentare gli uomini sotto tutti i rapporti: esso aveva appena riconquistata la sua figura schiacciata, che si venne a disputargli la regolarità della sua costituzione, che non si era mai rivocata in dubbio; perciocchè se le osservazioni del Perù avevano data, in certi casi, l'esclusione alla forma ellittica pei meridiani, si riguardava almeno sempre la terra come un solido di rivoluzione. Nuove osservazioni misero in problema un' opinione sì naturale, e che pareva una conseguenza necessaria della rotazione uniforme della terra intorno al suo asse.

Anno 1752 Lacaille nel suo viaggio al capo di Buona-Speranza, avendo misurata la lunghezza d'un grado terrestre, per una latitudine australe di 33 gradi 18 minuti, trovò ch' essa era di 57037 tese; lunghezza che essendo maggiore di quella del grado all' equatore, e minore di quella del grado al cerchio polare, indica bensì uno schiacciamento nella terra; ma essa è minore di quella che se ne doveva concludere, paragonandola con quella del grado in Francia; il che sembra indicare uno

schiacciamento irregolare. I gesuiti Boscovich e Lemaire hanno stabilita questa irregolarità in una maniera che sarebbe ancor più decisiva, se essa fosse assolutamente incontrastabile. Per mezzo di misure fatte in Italia, di parecchi gradi del meridiano, a latitudini eguali a quella de' gradi misurati in Francia, eglino hanno trovato delle lunghezze sensibilmente differenti dalle lunghezze di Francia. Vi è di più: supponendo i meridiani della terra eguali e simili, non hanno potuto conciliare le proprie misure tra loro, nè colle operazioni del Nord e del Perù. Laonde hanno concluso che fa d'uopo abbandonare l'ipotesi della similitudine de' meridiani. Allora cadono molte teorie astronomiche: la terra non essendo più un solido di rivoluzione, la direzione del filo a piombo non indicherà più quella della perpendicolare alla superficie della terra, nè quella del piano del meridiano; l'osservazione della distanza delle stelle al zenit non darà più la vera misura de' gradi nel cielo, nè per conseguenza quella dei gradi terrestri corrispondenti, ec. Queste spiacevoli conseguenze non fermano punto gli autori di questo nuovo sistema. Perchè, dicono essi, la terra avrebbe ella essenzialmente una figura regolare? Se essa fosse stata

Anno 1775



nella sua origine una massa fluida ed omogenea, l'attrazione reciproca delle sue parti, combinata col moto di rotazione intorno al suo asse, le avrebbe fatta prendere la figura d'una sferoide ellittica compressa; ovvero se essa fosse stata da principio composta di fluidi di densità differenti, questi fluidi cercando di mettersi in equilibrio, si sarebbero finalmente disposti in un ordine regolare, ed i meridiani sarebbero ancora stati simili. Ma perchè volere che la terra sia stata originariamente fluida, in un modo o in un altro; e quando pure fosse stata tale, perchè avrebbe ella conservata la sua forma primitiva? Nello stato attuale delle cose, una parte della sua superficie è solida, e composta di materie di densità differenti, distribuite confusamente, e senza alcun ordine di cui si possa assegnare la causa. Gli sconvolgimenti che questa superficie ha sofferti, i cambiamenti di terre in mari, lo sprofondamento del globo in certi luoghi, il suo innalzamento in altri: tutte queste rivoluzioni non hanno elleno dovuto alterare considerabilmente la forma primitiva della terra, qualunque si voglia supporre? Non è egli molto verosimile, ch'esse non abbiano soltanto modificata la superficie della terra, ma si sieno propagate sino nell'in-

terno del globo? Finalmente, se le osservazioni imperiosamente l'esigono, si dovrà certamente riconoscere che i meridiani della terra non sono nè eguali nè simili.

A questi ragionamenti se ne oppongono degli altri che li distruggono, se non in un modo assolutamente dimostrativo, almeno molto sufficiente per convertire in semplici dubbj alcune asserzioni troppo affermative. Comincio dalle considerazioni fisiche.

Primieramente egli è certo che il globo della terra è presso a poco sferico, o almeno si può riguardarlo come una sferoide ellittica molto compressa. In prova di ciò si citano le altezze del polo che si trovano eguali, a latitudini eguali sotto meridiani differenti; le regole della nautica fondate sopra questa supposizione, le quali sono tanto più sicure, quanto più sono state osservate con accuratezza; la rotazione costante ed uniforme della terra intorno al suo asse; la regolarità dell'ombra della terra negli ecclissi di luna, ec. Si aggiunge che la superficie della terra nella sua maggior estensione è fluida, e per conseguenza omogenea; che inoltre, la materia solida che forma il rimanente di questa superficie è quasi dappertutto poco differente in gravità dall'acqua comune; e che quindi



la figura della terra deve essere presso a poco la stessa come sarebbe stata nell'ipotesi d'un' intera fluidità primitiva. Le ineguaglianze che si osservano alla superficie del globo, le profondità de' mari, le elevazioni delle più alte montagne, sono pochissimo considerabili in confronto del raggio della terra, essendo la più grande differenza minore che non sarebbe un decimo di linea sopra un globo di due piedi di diametro. Le più grosse montagne non hanno che piccolissime masse relativamente a tutta la massa del globo: di fatti, si è osservato al Perù che alcune montagne elevate di più d'una lega non discostano il pendolo dalla sua direzione che di circa sette secondi. Ora, una montagna emisferica, d'una lega di altezza o di saetta, dovrebbe scostare il pendolo di circa un minuto 18 secondi; donde segue che le montagne hanno pochissima materia rapporto al resto del globo; conseguenza appoggiata sopra altre osservazioni che ci hanno scoperte immense cavità in queste montagne. Queste ineguaglianze che ci sembrano sì considerabili, e che lo sono effettivamente così poco, sono state prodotte dagli sconvolgimenti che la terra ha sofferti, ed il cui effetto si dee congetturare che non

siasi esteso molto oltre la superficie ed i primi strati.

Non vi ha dunque alcuna ragione, presa nella fisica, che provi la dissimilitudine dei meridiani della terra. Vediamo se apprenderemo qualche cosa di più dalle osservazioni.

L'irregolarità che risulta dalla misura di Lacaille non è molto grande, e si può spiegarla, senza farle troppa violenza, nella supposizione de' meridiani simili. Si dà maggior peso alla misura d'Italia. Ma per apprezzare le conseguenze che se ne vogliono ritrarre, fa d'uopo osservare che la differenza tra il grado misurato in Francia ed il grado misurato in Italia, a pari latitudine, è solamente di 70 tese, cioè a dire, di circa 35 tese per ciascuno de' due gradi. Ora, questa differenza è ella abbastanza grande per non poter essere attribuita agli errori delle osservazioni, per quanto esatte si suppongano? Due secondi d'errore nella sola misura dell'arco celeste danno 32 tese d'errore sopra la lunghezza del grado terrestre; e come mai si può egli rispondere che le operazioni astronomiche e geodesiche non abbiano dato un tal errore? Sembra adunque che nell'epoca in cui si ragionava dietro gli elementi che ho indicati, nulla obbligasse a riguardare i me-





ridiani della terra come non soggetti ad alcuna legge costante e regolare. Per decidere completamente la quistione, converrebbe misurare, per latitudini differentissime, molti gradi del medesimo meridiano, e per longitudini differentissime, molti gradi di meridiani corrispondenti a latitudini eguali. I governi, e principalmente la Francia, hanno fatto misurare moltissimi gradi de' meridiani, per latitudini molto ineguali. Si conoscono le eccellenti operazioni eseguite ultimamente secondo questa intenzione. Tutte queste misure hanno perfettamente adempito l'oggetto che era stato proposto. Sarebbe ora da desiderarsi, che si paragonassero moltissimi archi terrestri, a latitudini e longitudini differentissime. Alla qual cosa si può pervenire senza difficoltà e con poca spesa, per mezzo di calcoli fondati sopra la lunghezza del pendolo che batte i secondi in ciascun luogo. Queste determinazioni hanno il vantaggio di potere esser ripetute, in tutti i tempi, da astronomi di tutti i paesi; laddove le misure immediate de' gradi terrestri, richieggono un apparato e spese immense, alle quali i governi, che soli possono farle eseguire, non hanno sempre i mezzi o la volontà di consecrare le somme necessarie. Aggiungiamo ch' egli è qualche

volta pericolosissimo di fare ricominciare queste grandi operazioni, che non si possono verificare secondo il bisogno; poichè se di due operazioni, la seconda si accorda colla prima, le persone sospettose o maligne possono dire che si sono fatti coincidere i risultati; e se esse differiscono, si dà luogo a discussioni di preferenza, nelle quali può essere difficile di riconoscere la verità. Finalmente, non tutti i paesi sono adattati a queste operazioni: tutti lo sono per le operazioni del pendolo.

*Astronomia delle comete.*

Egli è noto, ed ognuno conviene presentemente che le comete sono corpi solidi ed opachi come i pianeti, e che tutti questi astri descrivono delle ellissi nelle quali il sole occupa uno de' fuochi. Vi è nondimeno questa differenza, che i pianeti si muovono d'Occidente in Oriente, in una fascia sferica di circa 16 gradi di larghezza, e descrivono delle orbite poco differenti dal cerchio, almeno per la maggior parte; laddove le comete attraversano gli spazj celesti in tutte le direzioni, e descrivono qualche volta delle ellissi sì allungate, che possono prendersi



per parabole. Ma ben si scorge che queste diversità di direzioni e di orbite sono estranee ai corpi medesimi, e non possono stabilire delle distinzioni reali tra i pianeti e le comete: esse servono soltanto a formare due specie di denominazioni generali che semplificano ed abbreviano il discorso.

*Incertezza di alcuni astronomi del secolo passato sopra la natura delle comete.*

L'antica opinione che le comete non sieno che ammassi di materia soggetti a dissiparsi, aveva gettato delle radici sì profonde, che nel secolo passato si sono trovati ancora degli astronomi di riputazione che hanno tentato di sostenerla o di rinnovarla. Per esempio, La Hire non può risolversi a collocare le comete nello stesso ordine de' pianeti (1). Ecco come si esprime a questo proposito: « Se le comete fossero pianeti che si fa« cessero vedere soltanto dalla terra quando « ne sono molto vicine, non vi ha dubbio « ch' esse dovrebbero sembrare aumentarsi « a poco a poco, nella stessa maniera che

(1) *Acc. di Parigi* 1702, *pag.* 118.

« si veggono ordinariamente a svenire ed a « sparire, tanto rapporto al loro movimento, « il quale diventa più lento sulla fine della « loro apparizione, quanto per la diminuzio- « ne della loro luce che si estingue parimen- « te presso a poco nella medesima propor- « zione: ma noi cominciamo quasi sempre a « vedere le comete quando sono nel loro « maggior lume, e quando percorrono un « maggior cammino apparente; e ciò potreb- « be far credere che non sieno che fuochi « che accendendosi subitamente, si dissipano « a poco a poco diminuendo di velocità, ec. »

Questa congettura non può essere attribuita che alla cognizione ancor troppo imperfetta che si aveva del moto delle comete, nel tempo di cui parlo. Gli astronomi, specialmente occupati nel movimento de' pianeti, non erano molto attenti nel fare la revista di tutte le parti del cielo, e lasciavano sfuggire molte comete senza osservarle: ne osservavano delle altre molto tempo dopo che erano visibili; si voleva che la luce delle comete fosse simile a quella de' pianeti: supposizione gratuita; non si faceva attenzione che siccome la terra ha una densa atmosfera, e molto differente da quella della luna e degli altri pianeti, così le comete hanno delle atmosfere



più o meno estese, più o meno dense, che fanno variare in molti modi le loro apparizioni. Tutte queste cause d' illusione sono state alla fine successivamente dileguate da una maggiore assiduità nel visitare l' estensione degli spazj celesti, e dalle particolari ricerche che si sono fatte, coll' aiuto de' più eccellenti strumenti, del corso delle comete e di tutte le circostanze che lo accompagnano.

*Pingré, nato nel* 1711, *e morto nel* 1796.

Non posso qui che indicare gli oggetti ed i progressi della cometografia. Quelli che vorranno esaminare a fondo questa parte interessante dell' astronomia, troveranno ampiamente di che soddisfarsi nella lettura della eccellente opera che Pingré, uno de' nostri più celebri astronomi, pubblicò sopra questo argomento nel 1783. Egli non ha nulla obbliato: storia, fisica, osservazioni, probabilità, congetture, tutto è riferito ed analizzato coll' esattezza la più scrupolosa.

*Enumerazione delle comete.*

Egli è impossibile di determinare il numero delle comete che sono comparse dopo

che si è cominciato ad osservare il cielo; ma si ha luogo di pensare ch'esso sia grandissimo. Pingré ha rilevato, a contare dalla nascita di Gesù Cristo sino all'anno 1783, circa 380 comete, la cui apparizione gli pareva molto probabile. Ve ne sono molte altre che non si possono citare che per congettura. Se a queste comete conosciute o sospettate si aggiungono tutte quelle che si sono lasciate passare senza vederle, sia a motivo della loro piccolezza apparente, sia a motivo della loro vicinanza al sole, sia a motivo dello splendore della luna, sia perchè il cattivo tempo non ha permesso di osservarle, sia finalmente perchè esse saranno state invisibili sopra l'orizzonte dell'Europa, si riconoscerà che il numero delle comete deve essere immenso. Sopra di che però bisogna notare che tra le comete che sono state vedute, molte possono essere state le medesime ritornate periodicamente.

*Calcolo astronomico delle comete.*

Gli antichi non ci hanno tramandato alcun mezzo di seguire il movimento delle comete: i moderni hanno fatto varj tentativi per risolvere questo spinoso problema. Dopo



avere riconosciuto che le comete descrivono, come i pianeti, delle ellissi intorno al sole, si è cercato di determinare le dimensioni di queste ellissi, dietro un certo numero di esatte osservazioni. La loro grande eccentricità ha permesso di riguardarle, almeno in una parte della loro estensione, come parabole; il che semplifica il problema, essendo l'equazione della parabola meno complicata di quella dell'ellisse. Qualche volta ancora si può riguardare una porzione di orbita cometaria, come una semplice linea retta. Queste supposizioni facilitano la ricerca del movimento prossimo della cometa; ma in seguito esse stesse hanno sovente bisogno di essere rettificate per mezzo di calcoli fondati sopra la vera curva che la cometa descrive.

*Predizioni del ritorno delle comete.*

Malgrado tutte le attenzioni colle quali gli astronomi moderni hanno osservato il moto delle comete, non se ne può ancora citare che una sola, di cui si conosca il ritorno periodico: essa è quella che porta il nome di Halley, perchè questo grande astronomo è stato il primo a fissare il suo moto.

In un piccolo trattato di cometografia che egli pubblicò nel 1705, portò all' ultima evidenza la parità di movimento delle comete con quello de' pianeti. Avendo calcolato con un' estrema diligenza, dietro un metodo di Newton, e dietro le migliori osservazioni, una tavola generale del moto delle comete in un orbe parabolico, ed avendo in seguito applicato questa tavola ai movimenti di diverse comete, riconobbe che una cometa la quale era comparsa negli anni 1531, 1607, e che osservò egli medesimo colla massima attenzione nel 1681, si era mostrata con circostanze tanto simili nel suo movimento, sia per la forma, o per la grandezza, o per la posizione della sua orbita, che punto non dubitò ch' essa fosse il medesimo astro. Vi erano a dir vero alcune differenze assai considerabili ne' tempi delle rivoluzioni; ma questa difficoltà non trattenne Halley. Già istrutto dalla teoria della gravitazione reciproca dei pianeti, che questi corpi turbavano i movimenti gli uni degli altri; che, per esempio, il moto di Saturno era alterato dagli altri pianeti, e soprattutto da Giove, di modo che non si poteva determinarlo che ad alcuni giorni circa, egli pensò che il moto della cometa poteva parimente essere stato alterato



dall' attrazione de' pianeti ai quali essa si era avvicinata, ed in particolare dall' attrazione di Giove. Per mezzo di calcoli ch' egli per altro non dava che per approssimazioni suscettibili d' una latitudine di alcuni mesi, annunziò che la cometa ricomparirebbe verso la fine dell' anno 1758, o al principio dell' anno 1759: predizione dall' evento verificata. Si vide la cometa in Sassonia, nel mese di dicembre 1758; essa passò al perifelio il 15 marzo 1759. Questa cometa descrive pertanto una ellisse, come i pianeti, intorno al sole: la sola differenza si è che la sua orbita è molto eccentrica, laddove le orbite de' pianeti si accostano molto al cerchio, se però si eccettui quella di Mercurio, la cui eccentricità è assai grande.

Il medesimo astronomo aveva sospettato che la cometa del 1661 fosse già comparsa nel 1532; che il suo periodo era di 128 a 129 anni, e che potrebbe ricomparire verso l' anno 1789 o 1790; ma egli non è stato così fortunato questa volta come la prima: la cometa non si è riveduta.

Egli ha pensato ancora che la gran cometa del 1680 fosse la stessa di quella ch' era apparsa alla morte di Giulio Cesare: egli ha fissato (ma con modestia e circospezione) la

durata del suo periodo a 575 anni circa; la posterità deciderà s'egli abbia colto nel segno.

Pingré crede che la cometa del 1556 potrebbe ben essere la stessa di quella del 1264; ch' essa fa la sua rivoluzione in 292 anni circa, e che si rivedrà nel 1848. Vi sono ancora alcune altre comete, di cui si è azzardato d'annunziare il ritorno; ma tutte queste predizioni sono vaghissime ed incertissime. Se gli antichi ci avessero lasciate delle osservazioni un poco esatte sopra le comete, noi conosceremmo meglio i movimenti di questi astri: i moderni le osservano con attenzione, e preparano quindi i materiali d'un edifizio che non può essere innalzato che dalla posterità.

### *Comete che cadono nel sole.*

Si crede che cadano di tempo in tempo delle comete nel sole, ed inoltre si fa servire questo mezzo a riparare la perdita di sostanza che fa il sole per la prodigiosa quantità di raggi luminosi che manda da tutte le parti negli spazj celesti. Non vi ha in ciò nulla d'impossibile. Essendo stata una cometa lanciata secondo una certa direzione, ed essendo



nel tempo stesso attratta continuamente dal sole, descriverebbe intorno ad esso un' ellisse rigorosa di cui occuperebbe uno de' fuochi, se questi due astri esistessero soli nell' universo; ma nello stato reale delle cose, la cometa, oltre la sua tendenza principale verso il sole, soffre ancora l'attrazione di molti altri corpi celesti, stelle o pianeti; e può accadere che tutte queste forze si combinino insieme per tal modo che la forza risultante precipiti la cometa nel sole, o gli faccia solcare la sua superficie. Questa giusta combinazione deve essere molto rara; ma alla fine essa è nell' ordine delle possibilità; e certamente nel numero immenso di comete, alcune si sono trovate che hanno subito questo destino. Secondo alcuni calcoli, la cometa del 1680 passò così vicino al sole, che nel momento del suo perifelio, essa non era distante dalla superficie di quest' astro che di una quantità eguale circa al terzo del semidiametro solare. Forse ella finirà col cadere nel sole. Ma questo avvenimento (se accade) è lontanissimo, e noi non dobbiamo punto allarmarci. In generale, una cometa qualunque cadendo nel sole non può scostarlo dal suo luogo, a segno di far temere la distruzione del nostro sistema planetario.

*Le comete sono esse abitate?*

L'opinione molto verosimile, che la luna, Venere, Marte, ec., che sono corpi solidi ed opachi come la terra, abbiano degli abitanti com' essa, ha fatto pensare, che lo stesso potrebbe essere delle comete. Ma egli è difficile di ammettere questo sistema. Le comete debbono essere soggette a vicende di caldo e di freddo, di luce e di tenebre, che non sembrano compatibili con una costituzione qualunque di animali. Newton avendo calcolato il grado di calore che la cometa del 1680 ha dovuto soffrire nel suo perifelio, ha stimato che questo calore fosse duemila volte maggiore di quello d' un ferro rovente: da un altro canto, la cometa ha dovuto ricevere a proporzione un accrescimento immenso di luce per parte del sole. Ora, supponendo che la durata della sua rivoluzione periodica sia di 575 anni, si trova che il diametro del sole sarebbe veduto dalla cometa sotto un angolo di 73 gradi, nel perifelio, e sotto un angolo di 45 secondi soltanto nell' afelio; laonde risulta che dal perifelio all' afelio si passerebbe da un calore prodigioso ad un estremo freddo, e da una chiarezza eccessiva



a profonde tenebre. Come mai gli animali potrebbero sopportare tutte queste alternative, a meno che non fossero d' una natura straordinaria, di cui gli animali terrestri non ci somministrano alcuna idea?

## SEZIONE SECONDA.

### *Astronomia fisica.*

Tutta l' astronomia fisica s' appoggia presentemente sopra la legge generale dell' attrazione vicendevole che tutte le parti della materia esercitano le une su le altre. Si dà ordinariamente il nome di *sistema* a questa legge: denominazione impropriissima (giacchè la gravitazione universale è ora una verità dimostrata), ma che è permesso di adoperare per brevità, o per evitare le circonlocuzioni.

### *Fisica degli antichi.*

Gli antichi hanno di raro interrogato la sperienza nelle materie di fisica, dove essa è nondimeno d' una necessità indispensabile; perciocchè le molle con le quali la natura agisce, essendoci quasi sempre sconosciute, non

ci rimane che la risorsa di studiarne e di ravvicinarne gli effetti. Dominati dallo spirito di sistema, nel senso più cattivo, e più solleciti a sfoggiare le loro congetture, e le loro opinioni, che animati dalla solida gloria di istruirsi prima eglino medesimi coll'osservazione seguita e ragionata de' fenomeni, introdussero nelle loro spiegazioni fisiche di questi fenomeni le forme sostanziali, le qualità occulte, ec: grandi parole vote di senso, inventate per abbandonarsi a tutti gli slanci dell'immaginazione.

*Fisica di Cartesio.*

Cartesio si avvide che sì fatta maniera di filosofare non era che una sorgente perpetua di falsi ragionamenti e di false conclusioni. Egli volle ogni cosa spiegare colla materia e col moto, senza ammettere ne' corpi altre proprietà che quelle di cui sono essenzialmente dotati. Con questa intenzione, egli pose per principio che tutti i corpi sono composti de' medesimi elementi; che la loro costituzione, interna o esterna, dipende unicamente da alcune forme semplici nelle loro parti integranti, e che queste forme primordiali, una volta riconosciute, altro più non



si trattava che di estendere e di seguire le loro combinazioni ne' diversi accidenti di quiete e di moto, alle quali i corpi sono soggetti. Questa introduzione era ragionevole, ed annunziava delle viste che, dirette dall'esperienza, avrebbero potuto condurre a verità utilissime. Ma ben presto imbarazzato dal numero e dalla varietà de' fenomeni da spiegarsi, abbagliato da alcune esperienze imperfette, e credendo di poterne indovinare delle altre colla sola forza del suo genio, Cartesio ammise, nelle parti costituenti la materia, delle configurazioni e delle grandezze arbitrarie, de' movimenti e delle situazioni di cui non esisteva altra causa che il bisogno del sistema; egli finse de' fluidi invisibili, d'un'estrema sottigliezza, agitati da movimenti segreti, penetranti i pori de' corpi senza soffrire alcuna resistenza, e sempre ubbidienti, se così posso esprimermi, ai differenti ordini ch'egli loro intimava secondo le circostanze. Finalmente, da supposizioni in supposizioni, egli giunse ad immaginare que' famosi vortici, ossia quelle vaste correnti di materia eterea dalle quali faceva portare i pianeti, come un fiume porta un battello. I suoi discepoli non furono più moderati, nè di lui più fortunati: costretti ad abbandonare il suo sistema in molti punti

l'impulsione della polvere: inoltre dalla teoria di Huguens si apprende che se la palla, animata da una gravità sempre costante e sempre diretta al centro della terra, fosse lanciata orizzontalmente con una velocità eguale a quella che acquisterebbe se cadesse liberamente in linea retta da un' altezza eguale al semi-raggio del globo terrestre, essa girerebbe senza fine circolarmente intorno alla terra (fatta astrazione da ogni resistenza), passando in ciascuna rivoluzione pel punto da cui fosse partita. Il medesimo ragionamento ha egualmente luogo, serbata la proporzione, se la palla invece di partire da un punto situato sopra la superficie della terra, partisse da un punto elevato sopra questa superficie, d'una lega, di due leghe, ec. Noi possiamo dunque trasportarlo sino alla luna, ossia supporre che essa è la luna stessa, la quale gira difatti circolarmente intorno alla terra; ed allora, dalla velocità colla quale gira la luna, troveremo il rapporto della forza che la ritiene nella sua orbita, o che la devia continuamente dalla direzione rettilinea, alla gravità che fa cadere quaggiù i corpi alla superficie della terra. Ora, secondo le osservazioni astronomiche e geodesiche, il raggio del



essenziali, vi sostituivano in ciascuna occasione, delle nuove ipotesi, egualmente precarie, ed egualmente fragili come quelle del loro maestro. Malgrado tanti sforzi e sostegni, tutto questo vasto edifizio è crollato pressochè interamente.

### *Fisica di Newton.*

Newton, allontanando saviamente i prestigi dell' immaginazione, studiò la natura nella natura medesima, della quale giunse finalmente ad indovinare il segreto, a forza di meditazioni e di ricerche. Una profonda geometria, e la teoria delle forze centrali scoperta da Huguens, fecero trovare al dotto inglese la legge della forza che ritiene la luna nella sua orbita intorno alla terra, ossia che fa gravitare continuamente il primo di questi pianeti verso il secondo. In seguito egli estese questa legge a tutti i corpi del nostro sistema planetario. Ecco presso a poco la gradazione delle sue idee sopra questo vasto argomento.

Noi vediamo che una palla da cannone, slanciata dall' esplosione della polvere, va a cadere tanto più lontano, quanto è più forte

globo terrestre vale 57000 tese (1); la media distanza dalla luna alla terra, ossia il raggio medio dell' orbita lunare, vale 60 volte il raggio del globo terrestre; la luna fa la sua rivoluzione intorno alla terra in 27 giorni 7 ore 43 minuti. Dietro questi dati, si trova 1.° la circonferenza intera dell' orbita lunare, e la lunghezza dell' arco che la luna percorre in un dato tempo, per esempio, in un minuto; 2.° la forza centripeta della luna, ossia la quantità da cui quest' astro è tratto verso la terra, in un minuto, essendo questa quantità sensibilmente una terza proporzionale al diametro dell' orbita lunare ed all' arco che descrive in un minuto. Il risultato di tutti questi calcoli si è che la quantità onde la luna devia dalla tangente, o s' avvicina alla terra, in un minuto, è di circa 15 piedi. E siccome, da un altro canto, si sa per esperienza, che i corpi gravi, cadendo alla superficie della terra, percorrono 15 piedi in un secondo, ossia 3600 piedi in un minuto,

(1) *Trascuro ne' calcoli, di cui trattasi, alcune piccole quantità che altro non farebbero che allungarli inutilmente, poichè qui non si tratta che di far conoscere lo spirito del metodo.*



si rileva che dalla terra alla luna la gravità non è costante, e ch' essa si è diminuita nel rapporto di 3600 ad 1, cioè a dire, nel rapporto del quadrato di 60 al quadrato di 1, ossia del quadrato della distanza dalla luna alla terra, al quadrato del raggio della terra. Tale è il primo esempio di questa famosa legge della gravitazione degli astri in ragione inversa de' quadrati delle distanze.

Prima di passare più oltre, non posso a meno di far qui notare una nuova prova ben significante della lentezza colla quale le umane cognizioni si succedono. Sino dall' anno 1673, quindici anni prima che uscisse il libro di Newton, Huguens aveva dato in tredici proposizioni le proprietà della forza centrifuga o centripeta nel cerchio; s' egli avesse applicata questa teoria al moto di rotazione della terra intorno al suo asse, ed al moto della luna intorno alla terra, avrebbe scoperto la legge della gravitazione della luna verso la terra. Difatti, secondo le proposizioni II e III, combinate insieme, la forza centrifuga della luna sta alla forza centrifuga alla superficie della terra, come il quadrato dello spazio che la luna percorre in un minuto, diviso per 60, sta al quadrato dello spazio che un punto della superficie della terra percorre altresì in un minuto, diviso per 1; e giusta la proposizione V, combinata colla teoria

ordinaria della caduta de' gravi, la forza centrifuga d'un punto alla superficie della terra, sta alla gravità alla superficie della terra, come 1 a 289. Ora, moltiplicando termine per termine queste due proposizioni, ed effettuendo i calcoli indicati, si trova che la forza centrifuga sta alla gravità alla superficie della terra come 1 a 3600; che è il risultato di Newton. Ma Huguens non ha fatto questa applicazione, e la gloria d'avere scoperto e confermato col calcolo la legge della gravitazione degli astri, appartiene al geometra inglese.

Allorchè Newton ebbe riconosciuta la legge della gravitazione della luna verso la terra, non gli fu difficile il determinare egualmente la tendenza de' pianeti principali verso il sole, e quelle de' satelliti verso i loro pianeti principali. Qui le leggi di Keplero somministrarono gli elementi del calcolo.

I pianeti principali descrivono delle ellissi intorno al sole che occupa uno de' fuochi, e medesimamente i satelliti descrivono delle ellissi intorno ai loro pianeti principali. Ora, per la prima legge di Keplero, i tempi impiegati a percorrere le parti d'una medesima orbita, stanno tra loro come le aree comprese tra l'asse maggiore dell'ellisse, un raggio vettore qualunque, e l'arco percorso; donde si concluse che il pianeta principale è



spinto verso il sole, o il satellite verso il suo pianeta principale, con una forza reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza del corpo girante dal centro di tendenza. Si aveva dunque così il mezzo di paragonare le gravitazioni d'un medesimo pianeta in due punti qualunque della sua orbita. Ma ciò non era sufficiente: bisognava inoltre saper paragonare le gravitazioni di due pianeti differenti; perciocchè poteva avvenire che da un pianeta all'altro la gravitazione non seguitasse il rapporto del quadrato inverso delle distanze: ciò che avrebbe tolto al principio la sua generalità ed i suoi vantaggi più essenziali. La seconda legge di Keplero compisce questa teoria, e riduce tutte le gravitazioni alla medesima unità: essa prova che tutti i pianeti principali sono spinti verso il sole dalla medesima forza, che varia in ragione inversa de' quadrati delle distanze. Così, per esempio, la tendenza di Marte verso il sole sta alla tendenza di Giove verso il sole, come il quadrato della distanza di Giove dal sole, al quadrato della distanza di Marte dal sole. Lo stesso avviene pei satelliti riguardo a' loro pianeti principali.

La gravitazione è reciproca fra tutti i corpi dell'universo. In quella guisa che i

pianeti principali pesano verso il sole, ed i satelliti verso i loro pianeti principali, così il sole pesa a vicenda verso i pianeti principali, ed i pianeti principali verso i loro satelliti. Una pietra che cade alla superficie della terra è attratta dal globo della terra; essa attrae a vicenda questo globo. L'attrazione che ciascun corpo esercita è proporzionale alla sua massa; giacchè non vi è alcuna ragione perchè la virtù attrattiva esista in una molecola del corpo piuttosto che in un'altra; essa è comune a tutte, e l'attrazione totale è proporzionale alla massa. Se adunque due corpi sono in presenza l'uno dell'altro, percorreranno l'uno verso l'altro degli spazj reciprocamente proporzionali alle loro masse. Di qui si scorge, nel nostro esempio, che a motivo della enorme sproporzione delle masse, la tendenza del globo terrestre verso la pietra deve sembrare nulla in confronto di quella della pietra verso il globo terrestre. In quanto alla diminuzione che soffre la gravità a misura che aumenta la distanza, essa non può divenire sensibile che quando la distanza diventa grandissima. Quindi, due corpi che cadono da altezze differenti, ma sempre mediocri, sulla superficie della terra, soffrono delle gravità che sembrano eguali, e le due



altezze percorse sono proporzionali ai quadrati de' tempi, come Galileo ha trovato il primo; ma questa legge non ha più luogo, quando le due altezze differiscono considerabilmente, come, per esempio, se una essendo di 100 piedi, l'altra fosse eguale al raggio dell'orbita lunare; poichè dalla terra alla luna, la gravità diminuisce nel rapporto di 3600 ad 1.

Dall'attrazione reciproca che due pianeti, come la terra e la luna, esercitano l'uno su l'altro, risulta che la terra deve accostarsi alla luna, nel tempo stesso che la luna si accosta alla terra; di modo che il movimento della luna si fa intorno ad un punto mobile; ma questo movimento non seguita per ciò delle leggi diverse da quelle che seguirebbe se la terra fosse fissa; poichè se in generale si cercano le curve descritte da due corpi, che per le loro attrazioni vicendevoli percorrono l'uno verso l'altro degli spazj reciprocamente proporzionali alle loro masse, e che sono lanciate nello spazio secondo qualunque direzione, e con velocità qualunque, si troverà che questi corpi descrivono quattro curve simili tra loro: vale a dire, ciascuno una intorno all'altro corpo considerato come immobile, e ciascuno una intorno al loro cen-

tro comune di gravità, il quale può altronde essere in quiete o muoversi uniformemente in linea retta.

Se non vi fossero nel cielo che due corpi giranti l'uno intorno all'altro, in virtù di un moto d'impulsione primitiva e dell'attrazione newtoniana, sempre operante, essi si moverebbero in una maniera rigorosamente conforme alle leggi di Keplero; ma tosto che vi sono più di due corpi, (e questo è il caso della natura) il movimento ellittico de' due primi è alterato in ciascun istante dalle attrazioni degli altri. Parlerò di queste ineguaglianze: entro prima a considerare alcune applicazioni particolari che si sono fatte del principio dell'attrazione ad alcuni problemi d'un altro genere.

Tra questi problemi si presenta primieramente la quistione della figura della terra, in quanto essa dipende dalle leggi dell'idrostatica. Huguens aveva spiegato, come abbiamo già detto, l'esperienza di Richer a Cajenna, mediante la combinazione della forza centrifuga con una gravità primitiva costante, sempre diretta al centro della terra: Newton sostituì a questa gravità la risultante di tutte le attrazioni particolari che le molecole del globo terrestre esercitano le une su le altre.



Presentemente tra queste due leggi di gravità non vi è alcuna scelta da fare. Il principio di Newton è confermato dalla natura: vediamo l'uso ch'egli ne ha fatto, e l'estensione considerabile che si è data alla sua teoria.

Newton suppone tacitamente, e senza dimostrarlo, che la terra originariamente fluida ed omogenea, formi in virtù dell'attrazione reciproca delle sue parti, e della forza centrifuga, una sferoide ellittica compressa; egli calcola i pesi della colonna centrale equatoriana e della colonna centrale polare. Dal peso della prima colonna, sottrae la somma delle forze centrifughe di tutte le molecole che la compongono, ed uguaglia il rimanente al peso della colonna polare; dal che trova pel rapporto del diametro dell'equatore all'asse di rivoluzione quello de' numeri 230 e 229, ad un dipresso.

Indipendentemente dalla differenza delle ipotesi che Huguens e Newton avevano adottate sopra la natura della gravità primitiva, eglino determinarono la figura della terra con metodi differenti. Huguens partiva da questa condizione, che la risultante della gravità primitiva e della forza centrifuga deve essere dappertutto perpendicolare alla superficie del fluido; Newton da quest'altra, che le colon-

ne dirette secondo gli assi della sferoide debbono vicendevolmente controbilanciarsi. Queste due condizioni sembrano egualmente necessarie ad un tempo, una per istabilire l'equilibrio alla superficie del fluido, l'altra nell'interno della massa (1). Da ciò Bouguer e Maupertuis presero occasione di cercare, coll'uno e l'altro metodo, la natura del meridiano in differenti ipotesi di gravità diretta verso uno o più centri; e rigettarono tutti i casi in cui i due metodi non si accordavano nel dare la medesima curva pel meridiano, il che accadeva molto spesso; ma tutti questi problemi, altronde poco difficili, non erano in sostanza che giuochi di geometria. La natura della gravità è fissata; ed ogni altro principio diverso da quello d'un' attrazione reciprocamente proporzionale ai quadrati delle distanze è qui estraneo alla vera quistione.

La proposizione fondamentale di Newton, che la terra è una sferoide ellittica compressa, aveva bisogno di essere dimostrata: essa lo fu da Stirling, nel caso in cui il fluido essendo interamente omogeneo, lo schiaccia-

(1) *Acc. di Parigi*, 1734.



mento è supposto piccolissimo (1); Clairaut la dimostrò altresì in questa medesima supposizione d'uno schiacciamento piccolissimo, non solo quando il fluido è interamente omogeneo, ma ancora quando è composto di strati di densità differenti. Osserviamo nondimeno ch'egli s'ingannò nel secondo caso, riguardando gli strati come simili; ciò non può aver luogo quando gli strati sono fluidi, come riconobbe egli medesimo nella sua *Teoria della figura della terra*, pubblicata nel 1743.

Maclaurin è il primo che abbia dimostrato questo bel teorema (2): che qualunque sia la maniera onde una massa fluida omogenea, le cui particelle si attraggono in ragione inversa de' quadrati delle distanze, nello stesso tempo che gira intorno ad un asse, abbia presa la forma d'una sferoide ellittica compressa o allungata, d'una quantità qualunque, essa resterà in equilibrio, ovvero conserverà la sua figura. Egli non si contenta di stabilire l'equilibrio per le colonne cen-

(1) *Trans. filos. An.* 1736 e 1737.

(2) *Premj dell' Acc. delle scienze di Parigi* 1740.

trali, sia nella direzione degli assi della sferoide, sia in tutte le altre direzioni: egli fa vedere di più che un punto qualunque, preso nell' interno della sferoide, è in equilibrio, ossia egualmente premuto in tutti i versi; il che forma in certo modo una prova sovrabbondante. Egli estende questa proposizione al caso in cui le particelle della terra, indipendentemente dalle loro attrazioni reciproche e dalle loro forze centrifughe, sono inoltre attratte dal sole e dalla luna. Dà moltissimi altri teoremi notabilissimi sopra le attrazioni delle sferoidi ellissoidali, che hanno per equatore de' cerchj o delle ellissi; ed applica tutta questa teoria alla figura de' pianeti ed ai fenomeni delle maree. Il metodo che egli adopera per dimostrare le sue principali proposizioni è puramente sintetico, e passa, a giudizio de' geometri, per un capo d'opera d'invenzione e di sagacità, eguale a tutto ciò che Archimede ed Apollonio ci hanno lasciato di più maraviglioso. Vedete il *Trattato delle flussioni* di quest' autore, tomo II, capo XIV.

Ristringendo questa teoria al caso particolare in cui la terra, originariamente fluida ed omogenea, forma una sferoide ellittica compressa, in virtù dell' attrazione e della



forza centrifuga, si trova che i due assi di questa sferoide stanno tra loro nel rapporto di 230 a 229, come Newton aveva concluso dalle sue supposizioni, che con ciò sono verificate.

Clairaut, che aveva tanti motivi per esaminare a fondo la medesima quistione, poichè egli aveva partecipato all' operazione del Nord, ed aveva già dimostrate in parte le supposizioni di Newton, Clairaut, dissi, compose a questo proposito l'opera che ho già citata, e nella quale tratta la materia a lungo, secondo le leggi dell' idrostatica. Siccome i problemi di Bouguer e di Maupertuis avevano fissata l'attenzione de' geometri, Clairaut credette di doverli considerare anch' egli. Ei dimostra che esiste un' infinità d'ipotesi di gravità, in cui il fluido non sarebbe in equilibrio, benchè le colonne centrali si controbilanciassero scambievolmente, e che la direzione della gravità fosse perpendicolare alla superficie del fluido; egli dà un metodo generale per riconoscere le ipotesi di gravità, che ammettono l'equilibrio, e per determinare la figura che il fluido deve prendere; egli fa vedere che quando la gravità è il risultato delle attrazioni di tutte le parti, e della forza centrifuga, basta che uno de' prin-

cipj, quello di Huguens o quello di Newton, sia osservato, perchè l'altro lo sia del pari, e che il pianeta sia in equilibrio. Venendo in seguito al vero stato della quistione, fondata sopra l'attrazione newtoniana, Clairaut determina primieramente la figura della terra nell'ipotesi dell'omogeneità delle sue parti; ed a questo riguardo egli abbandona il proprio metodo per seguitare quello di Maclaurin, al quale dà la preferenza. Quindi, senza prender più nulla ad imprestito da alcuno, egli passa ad altre indagini molto profonde. Spiega la maniera di riconoscere le variazioni della gravità, dall'equatore sino al polo, in una sferoide composta di strati le cui densità ed ellitticità seguitano una legge qualunque dal centro alla superficie; egli determina la figura che la terra avrebbe, se, supponendola interamente fluida, essa fosse altronde un ammasso d'un'infinità di fluidi di densità differenti; paragona la sua teoria colle osservazioni; ed in questo paragone, esamina gli errori che converrebbe attribuire alle osservazioni, affinchè le dimensioni della sferoide terrestre fossero tali presso a poco quali la teoria le richiede. Tante viste nuove ed utili hanno posto quest' opera di Clairaut nel nu-



mero delle produzioni di genio, che onorano le scienze.

Contuttociò rimanevano ancora in questa materia spinosa e feconda molti punti importanti da rischiarare, tanto sopra la legge delle della sferoide terrestre, quanto su le condizioni dell'equilibrio, alle quali questa legge è sottoposta, secondo i casi differenti. D'Alembert ha pubblicato moltissime eccellenti memorie sopra questo argomento, nel suo *Saggio sopra la resistenza de' fluidi*, nelle sue *Ricerche sopra il sistema del mondo*, e ne' suoi *Opuscoli matematici*. Mi dispiace ch'esse non sieno qui suscettibili di estratto. Mi contenterò di notare che l'autore ha dato un metodo lungo tempo desiderato da' geometri, per determinare l'attrazione della sferoide terrestre, in un'infinità d'ipotesi diverse da quella della figura ellittica; egli immagina che il raggio della sferoide terrestre sia rappresentato da un'espressione che racchiude una quantità costante, più la serie di tutte le potenze dei seni di latitudine, e trova l'attrazione d'una sì fatta sferoide sopra un corpuscolo situato alla sua superficie; il che racchiude, come caso particolare, la supposizione ordinaria in cui di tutte queste potenze non entra che il quadrato del seno della latitudine. Queste

Anni 1752 1756 e 1768

importante problema e le sue conseguenze formano un nuovo trattato della figura della terra. L'autore vi suppone che i meridiani della terra sieno eguali e simili. Ma, con un nuovo sforzo, egli è giunto altresì a determinare l'attrazione d'una sferoide che non è un solido di rivoluzione; il che sarebbe utile, se effettivamente il globo terrestre avesse una figura irregolare.

*Moti di rotazione de' pianeti: schiacciamenti che ne risultano.*

Dopo l'invenzione del telescopio, si è riconosciuto successivamente, dall'osservazione delle macchie de' pianeti, che questi astri hanno, come la terra, de' movimenti di rotazione intorno a' loro assi; dal che si deve concludere che tutti i pianeti sono compressi, e lo sono più o meno secondo che la loro rotazione è più o meno rapida. La terra gira uniformemente intorno al suo asse in 24 ore; ma a motivo della ineguaglianza del suo moto ellittico annuo, e della posizione obliqua del suo equatore rapporto all'ecclittica, i giorni o gl'intervalli di tempo che il sole impiega, col suo moto apparente, a ritornare allo stesso meridiano, sono ineguali, ora più lunghi, ora





più brevi; la loro durata media è di 23 ore 56 minuti. Il sole fa una rivoluzione intorno al suo asse in 25 giorni e mezzo; Venere in 23 ore 20 minuti; Marte in 24 ore 40 minuti; Giove in 9 ore 56 minuti; Saturno in 10 ore 16 minuti. Quanto a Mercurio, la sua piccolezza e la sua grande vicinanza al sole impediscono di poter riconoscere se abbia un moto di rotazione; ma sicuramente rassomiglia in ciò agli altri pianeti.

*È verosimile che le stelle abbiano pure de' movimenti di rotazione.*

Le stelle che sono soli simili al nostro, ed intorno alle quali girano verosimilmente de' pianeti e delle comete, come nel nostro mondo, hanno altresì, secondo tutte le apparenze, de' movimenti di rotazione. Inoltre, l'asse di rotazione d'una stella può cambiare di posizione nel cielo, sia per l'attrazione e la disposizione de' pianeti da' quali è circondata, sia per l'attrazione di alcune grosse comete de' sistemi vicini. Queste ipotesi molto ammissibili servono a spiegare facilmente perchè si veggano qualche volta certe stelle apparire o disparire, e perchè alcune

cambino di grandezza e di chiarezza (1). Quando una stella ci presenta il piano del suo equatore, noi la vediamo sotto la forma circolare, e nella sua maggiore chiarezza, come se fosse perfettamente sferica. Ma se una stella è molto compressa, e il piano del suo equatore venga ad inclinarsi rapporto a noi, essa diminuisce di grandezza e di chiarezza; essa potrà anche sparire interamente a' nostri occhi, allorchè venendo a presentarci il suo taglio, non riceveremo più luce sufficiente per vederla. Per un movimento contrario del piano dell' equatore, noi potremo vedere nuove stelle che spariranno in seguito ritornando al loro stato primiero: tale fu la grande stella che si vide, nel 1572, nella costellazione di Cassiopea.

*I due movimenti de' pianeti spiegati per la causa medesima.*

Il moto di rotazione de' pianeti intorno ai loro assi non seguita le medesime leggi del loro moto di traslazione intorno al sole. Questo è tanto più lento, quanto il pianeta

(1) *Maupert.* Figura degli astri.



circolante è più lontano dal sole; mentre, per esempio, Giove, più distante di Venere, della terra e di Marte, gira più rapidamente intorno al proprio asse che questi tre ultimi pianeti. Tuttavia queste due specie di movimenti possono essere prodotti da una sola e medesima causa: basta per ciò che i pianeti sieno stati primitivamente lanciati nello spazio da forze, le cui direzioni non sieno passate pei loro centri di gravità o di massa. Imperciocchè in questa ipotesi un pianeta riceve due movimenti, uno di traslazione, l'altro di rotazione; la velocità del primo è indipendente dalla direzione della forza rapporto al centro di gravità, e sarà sempre la stessa, per la medesima quantità di forza; ma il pianeta girerà tanto più velocemente intorno al suo asse, quanto la direzione della forza passerà più lontano dal centro di gravità. Così avviene che una palla da cannone, nell' uscire dal tubo, ha un movimento di rotazione, quando la forza risultante dall' impulsione della polvere, dall' attrito, e da alcuni urti contro le pareti del tubo, non passa pel suo centro di gravità, il che deve accadere nel maggior numero de' casi.

Questa spiegazione del doppio movimento de' pianeti è dovuta a Giovanni Ber-

noulli (1). Io non posso lasciare questo grande geometra senza rendergli un nuovo omaggio. Non ho dissimulato alcune debolezze colle quali pagò il tributo all' umanità; ma la posterità non vede più in lui che l' uomo di genio, ed il degno rivale di suo fratello Giacomo Bernoulli. Ognuno certamente si aspetta qui che io li paragoni tra loro: farò adunque in poche parole questa specie di parallelo, dietro l' opinione ricevuta universalmente, per quanto mi pare, tra i geometri.

*Parallelo de' due fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli.*

L' estensione, la forza e la profondità caratterizzano il genio di Giacomo Bernoulli: si trova in Giovanni Bernoulli più di flessibilità e di quello spirito che si porta indifferentemente verso tutti gli oggetti. Il primo ha dato molte opere veramente originali, e che appartengono a lui solo: tali sono la teoria delle spirali, il problema della curva elastica, quello degli isoperimetri, che occupa

(1) *Joh. Bern. Op. tom. IV, pag.* 282.



un sì gran posto nella storia della geometria; il principio da cui si è tratta in seguito la soluzione de' problemi di dinamica, il trattato *de Arte conjectandi*, ec.: il secondo sceglieva in tutte le parti delle matematiche, delle quistioni disparate e curiose; aveva un' arte particolarissima di proporre e di risolvere nuovi problemi; qualunque argomento venisse presentato alle sue indagini, egli vi entrava prestissimo, e non ne ha mai trattato alcuno senza mostrarlo sotto l' aspetto più luminoso e senza farvi qualche importante scoperta. Finalmente Giacomo Bernoulli si è formato da sè solo, ed è morto di cinquanta anni; Giovanni Bernoulli è stato iniziato alle matematiche da suo fratello, ed è vissuto ottant' anni: nel che ha avuto un vantaggio immenso. Di fatti, se tutte le facoltà dello spirito umano s' indeboliscono coll' età, questa perdita è compensata nelle scienze esatte, frutti dello studio e del ragionamento, dalla massa delle cognizioni acquistate, e da un lungo uso de' metodi geometrici, che fa discernere il più acconcio alla soluzione d' un problema; il che risparmia sovente molti tentativi inutili, e non opprime le forze dello spirito. Tutto bilanciato, io paragono Giaco-

mo Bernoulli a Newton, e Giovanni Bernoulli a Leibnizio.

Ritorno alla spiegazione de' grandi fenomeni della natura mediante il principio dell' attrazione. Di questo numero è il movimento alternativo del flusso e riflusso del mare.

*Fenomeno delle maree.*

Tutti sanno che ne' mari vasti e profondi, le acque ascendono e discendono a vicenda, durante lo spazio di circa sei ore; di modo che in ventiquattr' ore vi sono due maree, essendo ciascuna composta d'un flusso e d'un riflusso. La forza del flusso fa retrocedere i fiumi che si gettano nel mare: durante il riflusso, le acque ripigliano il loro corso ordinario. Non vi è che l'Oceano dove i movimenti di flusso e riflusso sieno bene sensibili: non si fanno osservare che pochissimo, o anche nulla affatto, ne' laghi, golfi, fiumi, ed in generale in tutti gli ammassi di acqua poco considerabili rapporto all' oceano. Qualche volta però ne' mari Mediterranei, le acque sforzate a passare in luoghi rinserrati, manifestano de' movimenti di flusso e riflusso: per esempio, vi sono di sì fatti movimenti sensibili alla punta del golfo di Venezia; essi



sono piccolissimi, o come nulli nella maggior parte della costa del Mediterraneo.

I cartesiani pretendevano che le acque del mare s'innalzassero in virtù d'una pressione che la luna, giunta al meridiano, esercita su la porzione d'atmosfera situata tra essa ed il mare, e che in seguito ricadessero, per la loro gravità, quando la luna si abbassa. Ma perchè una tale pressione avesse luogo, converrebbe che l'atmosfera, situata sotto la luna, trovasse de' punti d'appoggio che le impedissero di estendersi per ogni verso: diversamente la luna non fa che prendere il luogo d'un volume d'aria eguale al suo, e lascia le acque del mare nel medesimo stato in cui erano.

Non vi è alcun dubbio presentemente che essendo la gravitazione reciproca fra tutti i corpi dell' universo, i movimenti di flusso e riflusso del mare non sieno prodotti dalle attrazioni della luna e del sole, combinate col moto giornaliero di rotazione della terra intorno al suo asse. Quando la luna è nel meridiano, essa attrae altresì tutta la massa della terra, che fa d'uopo riguardare come raccolta interamente al suo centro. Ora, siccome le acque sono più vicine alla luna che il centro della terra, così esse sono più

attratte che il centro, e per conseguenza debbono, per così dire, abbandonare la terra, ed innalzarsi; il che produce il flusso: per lo contrario, nel punto diametralmente opposto ossia agli antipodi del luogo attuale, le acque, come più lontane, sono *meno* attratte che il centro della terra, e per conseguenza debbono sembrare *fuggire* questo centro, ovvero elevarsi; lo che produce ancora il flusso. Quindi, nell' uno e nell' altro luogo, il movimento del flusso è prodotto dalla differenza tra le attrazioni della luna sopra le acque e sopra il centro della terra, e deve accadere nel medesimo tempo alle due estremità del diametro terrestre diretto verso la luna. In quanto al riflusso, esso accade quando la luna avendo passato il meridiano, la sua forza d' attrazione diminuisce, e lascia alla gravità propria delle acque la forza di abbassarle. Tutto ciò che ho detto relativamente alla luna, si applica egualmente al sole; e sottoponendo al calcolo le azioni che questi due astri esercitano sopra le acque del mare, sia ch' esse si aggiungano, o che si distruggano in parte, si ottengono de' risultati conformi ai fenomeni; il che è una nuova prova della gravitazione universale. Questa interessante materia è trattata con tutti i det-



tagli necessarj, nelle tre eccellenti dissertazioni di Daniele Bernoulli, di Maclaurin e d' Eulero, che divisero il premio che l' accademia delle scienze di Parigi aveva assegnato per la completa soluzione di questo problema, che Newton aveva solamente abbozzata.

*Causa generale de' venti.*

Accade nell' atmosfera ciò che accade nel mare: le attrazioni della luna e del sole vi eccitano de' venti, ossia de' movimenti simili a quelli del flusso o riflusso ne' mari. La ricerca *della causa generale de' venti* fu l' oggetto d' un premio che l' accademia di Berlino propose per l' anno 1749. D'Alembert che riportò questo premio, trovò la causa che si domandava, nelle attrazioni della luna e del sole, e ne modificò gli effetti relativamente all' altezza ed alla direzione delle montagne che cuoprono la terra. La sua dissertazione è notabile per la soluzione di molti nuovi problemi difficilissimi, e soprattutto perchè vi si trova una cognizione già un poco estesa del calcolo integrale alle differenze parziali.

*Perturbazione de' movimenti celesti.*

Il moto ellittico di due pianeti d' un medesimo sistema è continuamente alterato, come abbiamo già detto, dalle attrazioni degli altri corpi celesti: nuovo campo di problemi, nel quale i geometri hanno fatta una immensa raccolta. Prendo a riferire in sostanza il risultato de' loro lavori, cominciando dalla luna, che, essendo il nostro satellite, deve naturalmente fissare i nostri primi sguardi.

*Teoria della luna.*

L' attrazione della terra sopra la luna è la più forte che soffre questo satellite, ed è per ciò ch' esso gira intorno alla terra: viene in seguito l' attrazione del sole, che turba il moto ellittico della luna, ed alla quale non possiam dispensarci di aver riguardo, quando si vogliono ottenere risultati precisi. Gli altri corpi celesti producono bensì essi pure alcune alterazioni in questo movimento, ma sono piccolissime, e vengono trascurate. Nel modo stesso, nella ricerca de' movimenti di Giove e di Saturno, non si considerano che



le ineguaglianze cagionate dalle attrazioni vicendevoli di questi due pianeti. Quindi i geometri si sono proposti il seguente problema generale, conosciuto sotto il nome di *Problema de' tre corpi*: *DETERMINARE le curve che descrivono tre corpi, lanciati nello spazio secondo qualunque direzione, con qualsivoglia velocità, ed esercitanti gli uni sugli altri delle attrazioni che sono come i quozienti delle loro masse divise pei quadrati delle distanze.* Questo problema non è suscettibile d' una soluzione rigorosa nello stato attuale d' imperfezione dell'analisi; ma se ne può dare qualche soluzione approssimata, più o meno perfetta, secondo la sagacità de' geometri e la scelta delle osservazioni sopra le quali il calcolo deve essere fondato.

A misura che si è progredito in queste teorie, si è riconosciuto che in molte occasioni bisognava considerare le attrazioni di più di tre corpi; ma i metodi di approssimazione pel problema de' tre corpi si applicano egualmente all' altro: quindi i geometri hanno impiegato tutti gli elementi essenziali a ciascuna quistione, senza temere la lunghezza de' calcoli.

*Teoria di Newton.*

Newton aveva determinato, colla teoria della gravitazione, molte grandi ineguaglianze della luna: vale a dire, 1.° la variazione, la cui quantità è di circa 35 minuti negli ottanti della luna, cioè a dire, quando la luna è a circa 45 gradi dal sole o dalla terra; 2.° il moto annuo e retrogrado de' nodi dell' orbita lunare, la cui quantità è di circa 19 gradi all' anno; 3.° la principale equazione o ineguaglianza del movimento de' nodi, la quale ascende ad un grado e 50 minuti; 4.° finalmente, la variazione dell' inclinazione dell' orbita lunare al piano dell' ecclittica, variazione che è di circa 8 in 9 minuti, ora in una direzione ed ora in un' altra. Tutti questi calcoli sono fondati sopra l' ipotesi che l' orbita della luna è presso a poco un' ellisse, della quale Newton trascura parimente l' eccentricità; ma questa supposizione si allontana sensibilmente dal vero, e non dà che alcune approssimazioni delle quali non è permesso al presente di accontentarsi. Vi sono molte altre ineguaglianze della luna, tra le quali se ne trovano alcune che Newton dice di avere calcolate colla medesima teoria, senza indi-



care altronde il cammino da lui seguito: tali sono quella che dipende dall' equazione al centro del sole, e quella che dipende dalla distanza dal sole al nodo della luna; ma si ha luogo di temere ch' egli non abbia posto maggior precisione in questi calcoli che in quelli delle ineguaglianze precedenti. Finalmente, egli si è limitato a dedurre unicamente dalle osservazioni il movimento dell' apogeo, l' equazione considerabile di questo movimento, la variazione dell' eccentricità, ed alcune altre ineguaglianze.

Si rileva da questo compendio, che la teoria della luna di Newton, benchè sia un grande sforzo di genio, era però insufficiente, ed aveva bisogno, non solo di essere perfezionata quasi in tutte le sue parti, ma ancora di essere completata a molti altri riguardi.

*Lavori de' geometri moderni sopra le perturbazioni de' corpi celesti.*

Nel 1747, Eulero, Clairaut e d' Alembert cominciarono ad occuparsi di questo importante problema, ciascuno separatamente, e senza nulla comunicarsi gli uni agli altri. I progressi che l' analisi aveva fatti da sessanta

anni, ed una maggiore esattezza nelle osservazioni astronomiche, posero questi tre geometri non solo in istato di determinare, con più precisione che Newton non aveva potuto fare, le ineguaglianze ch' egli aveva considerate, ma ancora di riconoscerne o di confermarne molte altre delle quali non ne aveva fatta menzione, o che aveva semplicemente dedotte dalle osservazioni.

Con tutto ciò il movimento dell' apogeo della luna parve da principio fare un' eccezione al vantaggio che il sistema della gravitazione aveva di render facilmente ragione delle ineguaglianze di questo pianeta. Si sa che questo punto della massima distanza dalla luna alla terra non è fisso nel cielo, ma corrisponde successivamente a differenti gradi dello zodiaco, e che la sua rivoluzione, secondo l' ordine de' segni, si compie nello spazio di circa 9 anni, a capo de' quali ritorna presso a poco al medesimo luogo donde era partito. Clairaut, Eulero e d'Alembert trovarono, ciascuno co' loro calcoli particolari, che la formola per questo movimento non ne dava che circa la metà. Questo divario tra la teoria e l' osservazione fece molto strepito. Si credette, ed i Cartesiani già ne trionfavano, che il sistema dell' attrazione, rovesciato in



un punto essenziale, crollerebbe da tutte le parti ad un nuovo esame. Clairaut, partigiano di questo sistema, ma ancor più amante della verità, annunziò in una pubblica as-
15 Nov. 1747 semblea dell' accademia delle scienze, che la legge del quadrato inverso delle distanze gli sembrava insufficiente per rendere un' intera ragione delle ineguaglianze della luna; e proponeva l' addizione d' un nuovo termine per ispiegare in particolare l' altra metà del moto dell' apogeo. Ma un esame più attento dei
1749 suoi primi calcoli gli fece comprendere che non aveva spinta oltre abbastanza l' approssimazione della serie che rappresentava il movimento dell' apogeo. Avendo posta in questa operazione la necessaria precisione, trovò l' altra metà di questo movimento, senza nulla aggiungere alla legge dell' attrazione newtoniana. Eulero e d'Alembert fecero dal canto loro la medesima riflessione. Allora l' attrazione fu ristabilita con onore negli spazj celesti, da cui i Cartesiani avevano sperato di vederla sbandita.

Le teorie di questi tre gran geometri sopra la luna, sono state stampate, o nelle raccolte delle accademie, o separatamente negli anni 1752, 1753, 1754.

*Teoria di Saturno e di Giove.*

Nel tempo che Eulero era occupato nel problema della luna, componeva la sua bella dissertazione *sopra la teoria dei movimenti di Saturno e di Giove*, che riportò il premio dell' accademia delle scienze di Parigi per l'anno 1748. Questo problema è della medesima natura di quello de' moti della luna: Saturno e Giove turbano reciprocamente i moti ellittici che questi due pianeti dovrebbero avere separatamente intorno al sole. Le ricerche d' Eulero sopra questo soggetto sono notabili per una profonda analisi, e per molte serie d' una specie assolutamente nuova. Nondimeno, siccome la difficoltà e l' immensa estensione de' calcoli che una sì fatta quistione esigeva, non gli avevano permesso di portare tutto ad un tratto questa teoria alla sua perfezione, così l' accademia delle scienze propose di nuovo il medesimo argomento pel premio del 1750, e lo rimise ancora pel 1752, con un premio doppio. Eulero mandò una seconda dissertazione che riportò questo premio: essa è fondata sopra un metodo nuovo per molti riguardi. Nella prima l'autore era stato condotto ad alcune approssimazioni so-





pra la sufficienza delle quali si potevano formare alcuni dubbj, attesochè essendo il numero delle ineguaglianze come infinito, quelle ch' egli aveva determinate, dipendevano, secondo questo metodo, da altre ineguaglianze ch' egli aveva trascurate; il che rendeva i loro valori incompleti ed anche un poco incerti. La dissertazione del 1752 è più perfetta a questo riguardo: essa separa e distingue meglio le ineguaglianze che bisogna scoprire successivamente; e quindi essa conduce ad alcune formole analitiche più semplici e più facilmente applicabili alle osservazioni. L' autore si è dispensato dal trattare di nuovo le ineguaglianze che affettano la linea de' nodi, e l' inclinazione vicendevole delle orbite dei due pianeti, essendo questa parte dell' argomento stata perfettamente sviluppata nella dissertazione del 1748.

L' accademia delle scienze di Parigi avendo proposto per premio del 1754, ed in seguito per premio doppio del 1756, *la teoria delle ineguaglianze che i pianeti possono cagionare al moto della terra*, la dissertazione che Eulero mandò al concorso fu coronata. L' autore comincia a dare delle formole generali per determinare le alterazioni che si cagionano scambievolmente i pianeti principali nei

loro movimenti intorno al sole. Per non complicare inutilmente la quistione, coll' introdurvi i termini che possono essere trascurati, egli non considera ad un tempo che due pianeti, e determina le alterazioni che il moto ellittico di uno intorno al sole, deve soffrire dall' attrazione dell' altro: alterazioni che essendo piccolissime non produrrebbero che degli infinitesimi del second' ordine, se si combinassero con quelle che possono provenire dagli altri pianeti. Applica in seguito questa teoria generale all' argomento proposto: egli analizza successivamente e per ordine le alterazioni che Saturno, Giove, Marte e Venere cagionano nel moto della terra; trova che il loro effetto generale si è di far avanzare il punto dell' afelio della terra, secondo l' ordine de' segni, di far variare l' obliquità dell' ecclittica, la latitudine e la longitudine del sole, ec. In quanto all' azione della luna sopra l' orbita della terra, Eulero non l' ha punto considerata, sia perchè non l' ha riguardata come facente parte del problema proposto dall' accademia, sia perchè d' Alembert aveva già trattato questa quistione nel secondo volume delle sue *Ricerche sopra il sistema del mondo*, pubblicate nel 1754.



Clairaut, in una memoria letta nel 1757 all' accademia delle scienze di Parigi, e stampata anticipatamente nel volume del 1754, fece l' applicazione del suo metodo pel problema de' tre corpi al moto della terra: alle perturbazioni considerate da Eulero, aggiunse l' azione della luna; il che tendeva a compire questa teoria.

*Mayer, nato nel* 1720, *e morto nel* 1762.

Anni 1754 1759 e 1764

Il celebre astronomo Mayer, ch' era nel medesimo tempo un dotto geometra, costruì in parte sopra la teoria d' Eulero, in parte sopra le osservazioni, alcune nuove tavole della luna, più esatte di tutte quelle che erano già comparse. Clairaut ne costruì dal canto suo delle buonissime sopra la sua propria teoria. Non si saprebbero troppo spesso rinnovare o correggere queste sorte di tavole, che richieggono moltissime attenzioni scrupolose, ed una scelta delle più eccellenti osservazioni da cui dipendono i dati del problema.

*Nuovo movimento nella teoria della luna*

Malgrado gli sforzi de' geometri, la teoria della luna rimaneva sempre imperfetta per certi riguardi. Clairaut e Mayer avevano determinato, colle sole osservazioni destramente combinate, molte equazioni che si sarebbero dovute distruggere dal sistema della gravitazione. La principal causa di queste difficoltà proveniva dall' attribuire alla luna un' orbita mobile sul piano dell' ecclittica, e che fa da un istante all' altro un angolo variabile con questo piano medesimo; di modo che per conoscere il vero luogo della luna, ossia la sua longitudine e la sua latitudine, conveniva da principio determinare l' intersezione dell' orbita lunare coll' ecclittica, o la linea dei nodi, ed in seguito l' inclinazione delle due orbite; il che conduceva ad un grandissimo numero di equazioni, alcune delle quali erano incerte o precarie.

Nel 1769, Eulero considerando la quistione sotto un punto di vista nuovo, pervenne ad una soluzione più semplice, più chiara e più esatta di tutte quelle che si conoscevano. Egli determina il vero luogo della luna, col riferirlo a tre coordinate normali, due



delle quali sono situate nel piano dell' ecclittica, e la terza gli è perpendicolare: i valori di queste coordinate si trovano in ciascun istante per mezzo di equazioni fondate sopra otto specie di quantità, la metà costanti, e l' altra metà variabili; le quattro quantità costanti sono l' eccentricità media dell' orbita lunare, l' inclinazione media di quest' orbita sul piano dell' ecclittica, l' eccentricità media dell' orbita terrestre, ed in fine il rapporto tra la distanza media della terra al sole, e la distanza media dalla luna alla terra; le quattro quantità variabili sono quattro angoli proporzionali al tempo: vale a dire, l' elungazione media dalla luna al sole, l' anomalia media della luna, l' argomento medio della latitudine della luna, e l' anomalia media del sole. Tali sono le basi sopra le quali tutte le equazioni delle ineguaglianze della luna sono stabilite. In tal modo queste ineguaglianze si trovano distribuite in differenti classi, e le operazioni di calcolo si eseguiscono separatamente, cosicchè non si ha punto da temere che gli errori commessi in una parte entrino ancora nelle altre. Finalmente, Eulero ha costruito, sopra questa teoria, delle nuove tavole lunari, in cui il numero delle equazioni è minore, e l' uso più comodo, che

cogli antichi metodi. Questo immenso lavoro è l'oggetto d'un' opera particolare, stampata a Pietroburgo, nel 1772, sotto questo titolo: *Theoria motuum lunae, nova methodo pertractata*. Siccome l'autore era sino d'allora quasi interamente cieco, così tre de' suoi più illustri discepoli, Gio. Alberto Eulero suo figlio, Luigi Krafft, e Gio. Lexel, hanno eseguito o verificato i calcoli. L'accademia delle scienze di Parigi, che aveva proposto per oggetti dei suoi premj, negli anni 1770 e 1772, di perfezionare la teoria della luna, decretò in totalità o in parte questi premj alle due dissertazioni che Eulero le mandò, e nelle quali la sua nuova teoria è ancora semplificata.

### *Teoria delle ineguaglianze de' satelliti di Giove.*

La luna non è il solo satellite di cui siasi considerato il movimento: si è altresì applicato con successo il principio della gravitazione alle ineguaglianze de' satelliti di Giove.



### *Teoria delle ineguaglianze delle comete.*

Dopo avere riconosciuto che le comete sono corpi interamente simili ai pianeti, e sottoposti alle medesime leggi di moto intorno al sole, non si poteva tralasciare di estendere alle comete le ricerche sopra le ineguaglianze de' pianeti, tanto più che la cometa d'Halley offriva un' applicazione immediata di questi nuovi calcoli. Questo astronomo aveva trovato che in virtù dell' attrazione di Giove, la cometa di cui trattasi impiegherebbe un po' più d'un anno nel suo periodo cominciato nel 1682, che non ne aveva impiegato in quello dal 1607 al 1682; ma egli non aveva potuto, col soccorso della geometria del suo tempo, mettere la precisione necessaria in questo calcolo. Inoltre, egli aveva trascurata l'attrazione di Saturno, ch'è per altro assai paragonabile con quella di Giove, poichè la massa di Saturno è circa il terzo della massa di Giove. L'attrazione della terra influisce pure in un modo sensibile sopra il moto della cometa. Tutto adunque invitava i geometri, che avevano trattato con tanto successo le perturbazioni de' pianeti, ad esami-

nare, secondo i medesimi principj, quelle che soffrono le comete.

Clairaut fu il primo ad applicare la sua soluzione del problema de' tre corpi al moto delle comete, ed in particolare a quello della cometa di Halley. Egli fece entrare ne' suoi calcoli le attrazioni di Giove e di Saturno. Il nuovo problema aveva le sue difficoltà proprie. Nel movimento de' pianeti, le orbite sono poco eccentriche, e poco inclinate le une rapporto alle altre: in quello delle comete, i raggi vettori variano considerabilmente, e l'orbita della cometa può fare un grandissimo angolo coll'orbita del pianeta perturbatore; queste differenze cambiano necessariamente la natura di alcuni de' mezzi che bisogna impiegare ne' due casi per arrivare a formole convergenti. Clairaut superò, almeno in gran parte, le difficoltà annesse al movimento delle comete. Avendo finito quasi del tutto i suoi calcoli, annunziò in una pubblica assemblea dell'accademia delle scienze, del 14 novembre 1758, che la cometa del 1682 comparirebbe al principio del 1759, e che passerebbe al suo perifelio verso il 15 aprile. Questo annunzio eccitò l'attenzione e la curiosità pubblica. Tosto che si vide la cometa, nei primi giorni di gennaio, la nuova sparsa de-



stramente nelle principali società di Parigi, dove Clairaut aveva molti amici, portò il suo nome al più alto grado di celebrità; la moltitudine lo riguardò come il solo autore della predizione del ritorno della cometa; la voce de' dotti che riclamavano i diritti di Halley fu soffocata. Alcuni discepoli di Clairaut, un po' troppo zelanti per la gloria del loro maestro, arrivarono sino a dire che la sua soluzione del problema de' tre corpi aveva sopra tutte le altre un vantaggio particolare, che la rendeva sola facilmente applicabile al movimento delle comete.

Quest' ultima asserzione che Clairaut aveva la debolezza di sordamente appoggiare, era un' ingiustizia rivoltante verso Eulero e d'Alembert. Il geometra straniero non la rilevò punto, unicamente occupato nella quistione medesima, sopra la quale compose una eccellente dissertazione coronata, in concorrenza d' una nuova memoria di Clairaut, dall' accademia di Pietroburgo nel 1762. D'Alembert, vivendo in mezzo al vortice di Parigi, non potè mostrare la stessa indifferenza; egli fece vedere che non solo la soluzione analitica di Clairaut non aveva il vantaggio esclusivo che si pretendeva di attribuirle, ma ch' essa era altresì incompleta, o almeno d'un uso inco-

modissimo e poco esatto in certe parti dell' orbita della cometa. Portò ancora più oltre la sua critica; e risalendo fino ai principj di questa soluzione, vi fece rilevare alcuni difetti essenziali, anche riguardo al movimento de' pianeti. In quanto al problema delle comete, egli lo trattò con un metodo semplicissimo, completissimo ed esente da qualunque obbiezione. Ma troppo dedito al suo gusto per le ricerche speculative, e lasciandosi atterrire dal penoso lavoro delle applicazioni numeriche, si era lasciata rapire in quest' occasione, come ha fatto in molte altre circostanze, la gloria di mostrare una grande utilità pratica della geometria. Clairaut, molto meno fertile in iscoperte analitiche, ma più destro nel cogliere i mezzi d' eccitare gli applausi pubblici de' quali era molto avido, dirigeva ordinariamente i suoi lavori verso oggetti di cui moltissime persone potevano apprezzare, se non la teoria, almeno i risultati. Egli lavorava le sue opere colla maggiore accuratezza, e quasi sempre dava loro tutta la perfezione onde erano susceettibili. Quindi ha egli goduto, anche in vita, della più alta riputazione. Il suo carattere dolce, la sua gentilezza, e l' estrema attenzione che aveva di non offendere l' amor proprio di al-



cuno, lo facevano ricercare nel mondo da tutte le parti. Sventuratamente per le scienze, egli si dedicò troppo a queste richieste: impegnato nelle cene, nelle veglie, ed in un genere di vita ch' egli voleva e non poteva conciliare colle sue ordinarie occupazioni, la sua salute si alterò, e morì, giovane ancora, benchè fosse altronde d' una buona costituzione fisica. D' Alembert, forte della sua propria superiorità, sdegnava le lodi di tradizione, e non sentite. Uomo eccellente, amico tenero e compassionevole, benefattore generoso, ebbe tutte le virtù essenziali. I difetti che gli sono stati rimproverati avevano la loro sorgente in un fondo di brio e di piacevolezza, alla quale si abbandonava qualche volta, senza serbare le misure della moderazione e della prudenza. Egli rieusava con una fredda accoglienza gli adulatori o gli importuni che venivano ad assediarlo: *amo piuttosto*, egli diceva, *di essere incivile che annoiato*. Non domandando mai nulla agli uomini in carica, egli si era riservato il privilegio, che possedeva nel più alto grado, di dar loro finalmente il ridicolo, quando lo meritavano. Con tali principj e con tale condotta, egli si fece moltissimi nemici. Alcuni uomini di lettere, bassi e gelosi, non gli perdonavano di

voler dividere i loro lavori ed i loro allori: eglino avrebbero rispettato in lui il gran geometra solo; cercavano di ribassare il letterato divenuto loro rivale; e perchè egli non era per avventura nel primo posto in quest' ordine di facoltà umane, l'invidia tentava di far credere che non vi era neppure nell' altro: ragionamento sofistico ed insignificante; per lo contrario si sarebbe dovuto piuttosto concludere che questo passaggio dalle spine dell' alta geometria ai fiori della letteratura, denotava la flessibilità d' un genio del prim' ordine, il cui talento principale si portava alle scienze esatte.

*Problema della precessione degli equinozj, e della nutazione dell' asse della terra.*

Mentre i geometri erano occupati nel problema de' tre corpi, d' Alembert ne risolse egli solo un altro, per lo quale gli fu mestieri di creare una meccanica nuova per certi riguardi: si trattava di assegnare la causa fisica che produce la precessione degli equinozj e la nutazione dell' asse della terra, nel sistema newtoniano.

Le osservazioni avevano insegnato che l'asse della terra ha un movimento circolare intor-



no ai poli dell' ecclittica, contro l'ordine de' segni, e ch' esso soffre ancora, per rapporto al piano dell' ecclittica, un' oscillazione che si compie durante una rivoluzione de' nodi della luna, per ritornare in seguito alla sua prima posizione, e continuare del pari alternativamente: da un altro canto, si sapeva che il globo della terra non è sferico, e che forma una sferoide schiacciata. Ora, inscrivendo nella sferoide terrestre una sfera che abbia per diametro l'asse di rivoluzione o di figura di questa sferoide, si vedrà che a motivo dell' inclinazione reciproca dell' ecclittica e dell' equatore terrestre, la luna o il sole non esercita attrazioni eguali sopra due punti corrispondenti della crosta sferoidale, eccesso della sferoide terrestre sopra la sfera inscritta; onde ne segue che la forza risultante di tutte le attrazioni di questi due astri non passa (se non è accidentalmente) pel centro di gravità o di massa della sferoide terrestre, e che per conseguenza essa farà prendere all' asse della terra un certo movimento per rapporto al piano dell' ecclittica. Questo movimento è composto in ciascun istante del moto medio retrogrado de' punti equinoziali, e dell' oscillazione dell' asse terrestre rapporto al piano dell' ecclittica. Si trattava pertanto di

sottoporlo ad un calcolo rigoroso, almeno per quanto l'imperfezione dell'analisi poteva permetterlo.

Newton impiegando come assiomi certe proposizioni, alcune delle quali non erano abbastanza evidenti per sè stesse, e le altre si discostavano un poco dal vero, fece nondimeno una combinazione così ingegnosa e così felice delle forze alle quali supponeva che l'asse della terra doveva ubbidire, che giunse a trovare la quantità media della precessione degli equinozj di circa 50 secondi all'anno, come la danno le osservazioni; ma nel 1749, tempo nel quale d'Alembert assalì questo problema con metodi dimostrati e non ipotetici, si poteva tanto meno contentarsi della soluzione di Newton, in quanto che indipendentemente da' difetti che ho rilevati, l'autore non aveva conosciuta, o almeno sottoposta al calcolo la nutazione dell'asse della terra. D'Alembert adunque rese un servigio della più alta importanza all'astronomia fisica ed al sistema newtoniano, col determinare secondo le leggi d'una meccanica rigorosa e profonda tutte le forze che alterano il parallelismo dell'asse della terra, e che imprimono a quest'asse le due specie di movimenti de' quali abbiamo parlato, cioè a dire, uno



di circolazione retrograda intorno ai poli dell'ecclittica, l'altro di oscillazione per rapporto al piano dell'ecclittica. I risultati delle sue formole si accordano colle osservazioni di Bradley, e somministrano una nuova prova molto significante del sistema della gravitazione universale. Aggiungiamo che la maniera onde d'Alembert trova il movimento dell'asse terrestre, è stata il germe della teoria generale per determinare il movimento d'un corpo di figura qualunque, sollecitato da forze qualunque, che in seguito si è portata all'ultimo grado di perfezione per parte della meccanica, ed in cui altro più non rimane che la difficoltà d'integrare le equazioni alle quali siamo condotti.

Questa prima soluzione del problema della precessione degli equinozj era suscettibile d'una perfezione che l'autore ha cercato di darle successivamente, sia per mezzo di integrazioni più rigorose delle equazioni differenziali del problema, sia per le correzioni di alcuni coefficienti numerici dietro le nuove osservazioni. Egli aveva supposto che i meridiani della terra fossero delle ellissi eguali e simili (1): nel seguito, esaminò altresì la

(1) *Acc. di Parigi*, 1754.

quistione nell' ipotesi in cui i meridiani fossero dissimili; lo che produsse alcune leggere differenze ne' risultati.

## CAPO XIV.

### *Progressi dell' ottica.*

Si conoscevano da lungo tempo le principali proprietà della luce, la sua riflessibilità, la sua refrangibilità, il suo calore quando è raccolta al fuoco d'un vetro ustorio, ec., senza conoscere la sua intima tessitura, ossia la natura delle parti integranti onde questo fluido è composto. Newton è il primo che abbia penetrato e rivelato questo gran segreto: egli ha, per così dire, anatomizzato la luce ed i colori. Sempre attento ad allontanare lo spirito di sistema, sempre guidato dall' esperienza, egli approfondì l' ottica per trent' anni; e dopo aver dato per intervalli alcuni saggi delle sue meditazioni nelle *Transazioni filosofiche* della società reale di Londra, raccolse alla fine le sue idee antiche e nuove in un *trattato d' ottica*, che uscì nel 1706: opera originale, paragonabile al libro de' *principj*.





### *Idea generale dell' ottica di Newton.*

La luce non è già, come si credeva per l' addietro, una sostanza pura ed omogenea: essa è composta di sette specie primordiali di atomi luminosi, differenti in colori, in refrangibilità ed in riflessibilità. Questi sette raggi primitivi sono il rosso, il rancio, il giallo, il verde, il turchino, l' indaco o porporino, ed il violetto. Newton li separò coll' esperienza seguente conosciuta oggidì da tutti. Introducendo per un piccolissimo foro i raggi del sole in una camera oscura, e loro presentando obliquamente una delle facce di un prisma triangolare di vetro, il cui asse è perpendicolare a quello del fascetto di raggi, si osserva che questo fascetto si spezza, ossia cangia di strada entrando nel vetro, attraversa il prisma in linea retta, ripassa nell' aria spezzandosi ancora, e va a formare sopra un cartone bianco, distante 15, o 18 piedi, un' immagine oblonga, dove si distinguono chiaramente sette fasce colorate secondo quest' ordine dal basso all' alto: rosso, rancio, giallo, verde, turchino, indaco e violetto. Il fascetto intero è dunque composto di sette raggi, che hanno delle refrangibilità

differenti. Il raggio rosso è il meno refrangibile di tutti, siccome quello che meno si scosta dalla perpendicolare alla faccia di emergenza del prisma; la refrangibilità aumenta progressivamente per gli altri raggi, sino al raggio violetto che è l'altro estremo. Se si colloca un numero qualunque di prismi al seguito del primo, e che il fascetto attraversi tutti questi prismi, vi saranno delle nuove rifrazioni; l'immagine dipinta sul cartone si rovescerà o si raddrizzerà; ma le sette fasce colorate sussisteranno sempre le medesime inalterabilmente, e conserveranno sempre tra loro il medesimo ordine di situazione.

Gli oggetti che non sono luminosi per se stessi, o che non hanno che una chiarezza riflessa, ci sembrano rossi, ranci, gialli, ec., secondo che ci trasmettono (almeno per la massima parte) de' raggi rossi, ranci, gialli, ec.: il colore bianco è formato dal concorso di tutti i raggi; il nero assorbisce i raggi che riceve, e non si scorge che mediante il riflesso de' raggi che vengono dagli oggetti circonvicini. In tutti i casi, si fa una perdita di raggi, i quali rimangono negli interstizj dell' oggetto, o sono dispersi da una parte e dall' altra. I raggi assorbiti possono produrre un calore sensibile: così, per esempio, ai



raggi del sole un cappello nero è più caldo d' un cappello bianco.

Un raggio di luce che passa da un mezzo in un altro si spezza, e si accosta o si discosta dalla linea retta condotta al punto d' ingresso perpendicolarmente alla superficie di separazione, secondo che il primo mezzo è meno o più denso del secondo; e l' effetto è tanto più sensibile, quanto più le densità de' due mezzi sono differenti; ma il rapporto del seno dell' angolo d' incidenza al seno dell' angolo di rifrazione rimane sempre lo stesso per ogni sorta d' obliquità: esso cangia soltanto di valore, quando i due mezzi comparativi vengono a cangiarsi. Per esempio, se il raggio passa dall' aria nell' acqua, i due seni sono come i numeri 4 e 3, o come 12 e 9; e se passa dall' aria nel vetro, essi sono come i numeri 3 e 2, o come 12 ed 8.

I sette raggi primitivi avendo refrangibilità differenti, quando si parla in generale della rifrazione d' un fascetto di luce, che comprende tutti i raggi, si tratta della rifrazione media: essa è presso a poco quella del verde. Qualche volta non si ha bisogno che di questa rifrazione media: qualche volta bisogna avere riguardo alle differenze di re-

frangibilità di tutti i raggi, come si vedrà, quando parleremo de' *cannocchiali acromatici*.

Se un raggio di luce dopo di essere passato da un mezzo in un altro più denso, come, per esempio, dall' aria nell' acqua, ritrocedesse, esso ritornerebbe esattamente per la medesima strada. Quindi, essendosi accostato alla perpendicolare nel primo caso, se ne discosterebbe nel secondo. Da ciò, e dal rapporto costante che esiste sempre tra il seno d' incidenza ed il seno di rifrazione, può accadere che la rifrazione si cangi in riflessione: e reciprocamente. Per esempio, un raggio di luce che entra dall' aria nell' acqua, quasi radendo l' acqua, o facendo un angolo d' incidenza quasi retto, si spezza sotto un angolo di circa 48 gradi 50 minuti; dunque se il raggio ritornasse dall' acqua nell' aria, si rifrangerebbe sotto un angolo vicino a 90 gradi, ossia non farebbe che radere la superficie dell' acqua; e se l' angolo di ritorno fosse di più di 48 gradi 50 minuti, il raggio nell' acqua si rifletterebbe.

La refrangibilità e la reflissibilità dei raggi dipendono dalla medesima causa. Quelli che sono meno refrangibili sono altresì meno riflessibili. Per esempio, il raggio rosso ha bisogno d' un maggior angolo d' incidenza



degli altri, affinchè la rifrazione si cangi in riflessione.

Newton spiega partitamente tutti questi fenomeni della luce. Il suo trattato d' *ottica* ha fatto epoca in questa scienza, come il suo libro *de' principj*, nell' astronomia fisica. Alcune delle sue esperienze furono da principio contrastate, perchè si ripetevano malamente: gli sono solamente sfuggiti, in questa moltitudine di fatti, di osservazioni e di ragionamenti, alcuni leggeri sbagli, che non portano alcun nocumento al fondo dell' opera.

Alcuni celebri geometri, camminando sulle tracce di Newton, si sono applicati a sviluppare ed a sottoporre al calcolo le leggi della rifrazione e della riflessione della luce secondo i principj dell' attrazione. La memoria, che Clairaut ha dato sopra questo argomento, merita principalmente di essere considerata (1).

---

(1) *Acc. di Parigi*, 1739.

*Rifrazioni astronomiche.*

La rifrazione della luce modifica in un modo sensibile le osservazioni astronomiche, e non ci possiamo dispensare di spogliarle da quella sorgente d' illusione che tende a fare comparire gli astri in un luogo diverso da quello in cui sono realmente nel cielo. Di fatti, il globo terrestre è coperto, sopra molte leghe d' altezza, da una massa o inviluppo sferico di aria, i cui strati diminuiscono di densità, a misura che c' innalziamo sopra la sua superficie. Se un astro è situato al zenit d' un osservatore, il raggio luminoso che ne apporta l' immagine, e che entra perpendicolarmente allo strato superiore ed estremo dell' atmosfera, non cambia di direzione; esso altro non fa che indebolirsi, e l' astro è veduto nel suo vero luogo nella volta celeste. Ma in tutti gli altri casi, il raggio entrando obliquamente nell' atmosfera, si spezza e cambia strada da uno strato all' altro, poichè le densità degli strati sono differenti; esso adunque descrive una curva, il cui ultimo elemento, quello che termina all' occhio dell' osservatore, fa comparire l' astro più alto che non è realmente. Per l' effetto di



questa rifrazione, il sole comincia o cessa di far sentire la sua luce, quando è a 18 gradi sotto l' orizzonte, prima del suo nascere, o dopo il suo tramontare; il che forma i due crepuscoli, della mattina e della sera. La durata del minimo crepuscolo, per un luogo di cui è data la latitudine, si determina col metodo *de maximis et minimis*, come ho già notato.

Ben si scorge che la rifrazione agisce qui in senso contrario della parallasse; questa tende ad abbassare l' astro, quella tende ad alzarlo. Se adunque si conoscesse esattamente la quantità della rifrazione per tutte le distanze angolari nelle quali un astro può trovarsi per riguardo al zenit, si determinerebbe con un solo e medesimo calcolo l' effetto risultante dalla parallasse e dalla rifrazione, prendendo la differenza dell' una dall' altra. Ma le rifrazioni sono molto incostanti; esse variano in ragione de' cambiamenti che accadono nello stato dell' atmosfera: diminuendo, quando l' aria è pura, come sopra le alte montagne, o quando è rarefatta dal calore, come nella vicinanza dell' equatore: aumentando, quando l' aria è aggravata di densi vapori. Gli antichi conoscevano all' ingrosso gli effetti delle rifrazioni; ma non

vediamo ch' eglino le abbiano fatte entrare nel calcolo astronomico. Ticone Brahé è stato il primo a sottoporle a leggi generali, che, sebbene assai imperfette, hanno almeno rivolta l' attenzione degli astronomi sopra questo importante oggetto. Bouguer, in una dissertazione che riportò il premio dell' accademia delle scienze di Parigi nel 1729, ha determinata la curva che descrive un corpuscolo di luce traversando obliquamente l' atmosfera, ed ha in conseguenza costruito una tavola delle rifrazioni astronomiche per tutti i gradi d' elevazione d' un astro sopra l' orizzonte; ma questa tavola un poco ipotetica nella teoria, non ha tutta l' esattezza che si poteva desiderare. Qualche tempo dopo la sua morte, Bradley pose tra le mani degli astronomi una formola molto semplice e molto comoda pel calcolo delle rifrazioni.

*Paragone delle forze della luce.*

Tutti gli autori d' ottica, Newton medesimo ed i suoi primi successori, non avevano considerato che le leggi generali del movimento della luce, la sua propagazione in linea retta nello stesso mezzo, la sua riflessione nell' incontro d' un ostacolo, la sua rifrazione



quando cambia di mezzo, ec.: rimaneva da misurare la sua forza o la sua vivacità; si voleva, per esempio, sapere, di quanto la luce del sole nel meridiano del solstizio d' estate sia più forte della sua luce nel meridiano del solstizio d' inverno; di quanto la luce del sole superi quella della luna, per una medesima altezza sopra l' orizzonte, ec. Huguens aveva sparso alcune idee sopra questo nuovo ramo dell' ottica (1); egli aveva indicato un metodo per valutare la quantità di luce che Giove e Saturno ricevono dal sole, e per paragonare la luce del sole con quella delle stelle. Ma oltrechè questo metodo era appoggiato sopra alcune ipotesi vaghe ed un poco incerte, la quistione richiedeva d' essere rischiarata con una serie di esperienze esatte e numerose, dalle quali si potessero facilmente ricavare i mezzi di misurare le luci in tutti i casi.

Bouguer intraprese e portò molto oltre questo lavoro delicato; e con ciò egli si è appropriato un soggetto curioso per sè stesso, e d' una frequente applicazione nelle materie di fisica. Pubblicò le sue prime ricer-

(1) *Cosmoth. lib. II.*

che in una piccola opera intitolata: *Saggio di ottica sopra la gradazione della luce*, molto aumentata in seguito, e stampata dopo la morte dell' autore, sotto il titolo di *Trattato d' ottica sopra la gradazione della luce*. Questo trattato contiene una lunga serie di sperienze, di osservazioni, di discussioni fisiche e matematiche e di applicazioni interessanti ai diversi problemi che la materia comporta; vi si apprende a confrontare le luci trasmesse da diversi corpi, come il sole, la luna, i pianeti, le stelle, ec.; a conoscere la quantità di luce che riflettono le superficie lisce o scabre, e quella che si perde per l' assorbimento o la dispersione de' raggi; a valutare i differenti gradi di trasparenza de' corpi, ec. Non posso che indicare all' ingrosso tutti questi oggetti, sopra i quali fa d' uopo consultare l' opera medesima.

Anno 1729

Anno 1760

*Strumenti d' ottica.*

L' utilità dell' ottica si fa principalmente rilevare nella costruzione degli strumenti destinati ad aiutare la vista. Prima delle sperienze di Newton, credevano i dotti che l' imperfezione de' cannocchiali diottrici provenisse dalla forma sferica che si usava di dare agli



obbiettivi: perciocchè cadendo i raggi sopra una superficie sferica un po' estesa, non vanno già, dopo averla traversata, a raccogliersi nel punto medesimo; ciascun raggio lineare ha il suo fuoco particolare, e quanto più è grande l' aggregato di tutti questi fuochi, tanto meno è distinta la visione. Ciò chiamasi *aberrazione di sfericità*. Per procurarsi un' immagine viva e chiara, era necessario di dare poca apertura agli obbiettivi, conservando la forma sferica. Cartesio ed altri geometri proposero di abbandonare questa forma, e di sostituirvi delle curvature ricavate dalle sezioni coniche, la cui proprietà era di raccogliere tutti i raggi nel medesimo punto. Ma oltrechè sì fatti obbiettivi erano come impossibili ad eseguirsi con una sufficiente precisione, non avrebbero potuto rimediare che ad una parte del male: essi lasciavano sussistere l' *aberrazione di refrangibilità*, cioè a dire, la dispersione de' raggi che proviene dalle loro rifrazioni ineguali. Si dovette pertanto ritornare alla forma sferica; ed allungando molto i cannocchiali, si poteva dare una certa estensione agli obbiettivi, senza produrre una grande aberrazione di sfericità; ma questo allungamento diminuiva il campo della visione. Newton aveva sospettato che fosse possibile

di fare sparire interamente l'aberrazione di sfericità, col comporre gli obbiettivi con due vetri, il cui spazio intermedio fosse pieno di acqua; ma non si rileva ch' egli abbia posta quest' idea in esecuzione, nè che abbia cercato d'impiegare il medesimo mezzo per correggere l'aberrazione di rifrangibilità. Vi è di più: il rispetto dovuto alla verità non ci permette di tacere che l'inesattezza d'una delle sue principali proposizioni fece per lungo tempo un ostacolo alla perfezione di questo ramo della diottrica, come presto vedremo.

*Telescopio gregoriano.*

I geometri ed i costruttori ottici disperando di potere far perdere ai vetri diottrici i colori dell' iride, che turbano la visione, non vedevano altri mezzi, per rimpiazzare i lunghi cannocchiali, imbarazzanti a maneggiarsi, e soggetti ad incurvarsi, che i telescopj catadiottrici, capaci altronde di effetti ancor maggiori. Si sa che vi sono due specie principali di questi telescopj, quello di Gregori e quello di Newton: tutti i mezzi che in appresso si sono impiegati, per perfezionarne la costruzione e l'uso, non ne cambiano pun-



to la natura. Il telescopio gregoriano fa vedere direttamente gli oggetti, colla combinazione di due specchi concavi, opposti l'uno all' altro, e con un oculare diottrico; lo specchio grande, quello del fondo, è traforato nel suo centro con un' apertura, alla quale è adattato l'oculare; la corona rimanente riceve immediatamente la luce, e la rimanda al secondo specchio che la riflette a vicenda verso l'oculare. Questo meccanismo, altronde molto ingegnoso, è soggetto ad alcuni gravi inconvenienti. 1.° La parte centrale dello specchio grande, quella la cui curvatura è la più facile a formarsi esattamente, non riceve luce alcuna: tutta la riflessione si fa dallo spazio anulare, dove i difetti inevitabili di costruzione sono i più sensibili; 2.° egli è difficilissimo di situare esattamente bene gli assi de' due specchi sopra la medesima linea retta. 3.° Quest' istrumento è molto dispendioso e molto soggetto a scompigliarsi.

*Telescopio newtoniano.*

Il telescopio newtoniano è molto più semplice: la luce va primieramente a percuotere tutto il fondo concavo e ben liscio del tubo; essa è riflettuta verso uno specchio

piano che la rimanda all' occhio dell' osservatore, per mezzo d' una lente interposta ed adattata ad un' apertura laterale fatta nel tubo. Con questa disposizione, gli oggetti non sono veduti direttamente; e per accelerare le operazioni, si adopera un cannocchiale laterale che serve a dirigere l' istrumento verso il luogo del cielo che si vuole osservare. Qualunque sieno i cambiamenti e le perfezioni che si possano apportare alla costruzione de' telescopj, le grandi dimensioni che loro bisogna dare, il loro peso, la difficoltà di maneggiarli, ed i prezzi esorbitanti che costano, non permettono di farne uso nell' astronomia corrente: si debbono riservare per le osservazioni che richieggono una gran quantità di luce, come, per esempio, per discoprire nuovi pianeti, nuove stelle, ec. Quindi gli astronomi hanno desiderato che si perfezionassero i cannocchiali diottrici, e che si trovasse finalmente qualche mezzo per sostituire ai lunghi cannocchiali degli altri più corti, ma però capaci presso a poco degli effetti medesimi.



*Eulero concepisce la prima idea de' cannocchiali acromatici. (Acc. di Berlino 1747.)*

Eulero fortemente occupato in tutte queste idee, propose di correggere l' aberrazione di refrangibilità, componendo gli obbiettivi con due lenti di vetro, che rinchiudessero tra loro dell' acqua; e determinò col calcolo le curvature che ad esse bisognava dare, affinchè le ineguaglianze di rifrazione del vetro e dell' acqua si compensassero vicendevolmente. Egli punto non dubitava del buon esito di questo progetto: citava, per esempio, ed in prova, l' occhio umano, in cui i raggi luminosi traversano quattro umori differentemente rifrangibili, e vanno a raccogliersi nel medesimo fuoco.

*Dollond, morto assai vecchio nel 1761.*

Dollond, celebre ottico inglese, consumato nella teoria e nella pratica della sua arte, colse con avidità questa idea generale; ma giudicando che le ipotesi dell' autore sopra il rapporto delle rifrazioni dell' acqua e del vetro, non erano sufficientemente esatte, vi sostituì quelle che risultano dalle sperienze

di Newton (1): allora trovò colle formole di Eulero che tutti i raggi non potevano essere raccolti nel fuoco medesimo, a meno che il telescopio non avesse una lunghezza infinita: inconveniente che rovesciava il progetto di Eulero, se le sperienze di Newton erano perfettamente esatte; e come mai osare di muover dubbj su la specie d'infallibilità che si attribuiva al creatore dell' ottica moderna?

Eulero, senza permettersi sì fatti dubbj, rispose (2) che si opponevano alle sue formole delle quantità troppo piccole per indebolire una teoria che gli sembrava incontrastabilmente fondata sopra le proprietà delle rifrazioni; egli dimostrò alcune incompatibilità ne' calcoli che Dollond inferiva dalle sperienze di Newton; insisteva di nuovo sopra la similitudine del suo telescopio cogli occhi degli animali, dove la natura ha collocato differenti umori, le cui qualità rifrattive scambievolmente si correggono: finalmente, sosteneva che si arriverebbe tosto o tardi a togliere tutte le difficoltà che sembravano contrarie alla sua teoria.

(1) *Trans. filos. an.* 1752.
(2) *Acc. di Berlino* 1753.





Egli fu ben presto secondato da Klingestierna, celebre geometra svedese (1). Quest' ultimo fece rimettere a Dollond, nel mese d'ottobre 1754, uno scritto per mezzo del quale combatteva, colle armi della geometria e della metafisica, una sperienza di Newton, che si opponeva ad Eulero. Allora Dollond, gagliardamente scosso, sospettò che Newton poteva essersi ingannato, e prese il partito di ripetere la sperienza, seguendo altronde il processo dell' autore.

La proposizione esperimentale di Newton è concepita in questi termini: *Se i raggi di luce traversano due mezzi contigui, di densità differenti, come l'acqua ed il vetro, sia che le superficie rifrangenti sieno parallele, o inclinate, e che tuttavia la rifrazione di una distrugga la rifrazione dell' altra, di modo che i raggi emergenti sieno parelleli ai raggi incidenti: allora la luce esce sempre bianca* (2).

Questa conclusione *LA LUCE ESCE SEMPRE BIANCA* era la quistione da esaminarsi. Per sapere come era la cosa, Dollond fece entrare i raggi del sole, per un

(1) *Acc. di Parigi* 1756.
(2) *Ott. di Newton, ediz. lat.* 1740, *p.* 92.

piccol foro, in una camera oscura: a poca distanza dal foro, egli situò un prisma di vetro, le cui facce erano perfettamente piane; lo spigolo era abbasso in una situazione orizzontale; a canto della faccia più vicina al foro, egli adattò, col cemento una piastra di vetro, che faceva con questa faccia un secondo prisma voto, aperto in alto, nel quale pose dell' acqua; il tutto era disposto in modo che la rifrazione prodotta dall' acqua fosse distrutta dalla rifrazione nel prisma di vetro, e che i raggi emergenti fossero paralleli ai raggi incidenti. Tutto questo apparato era quindi lo stesso come nella proposizione controversa; ma il colore de' raggi emergenti non fu già bianco, come Newton aveva asserito; pel contrario, l' orlo inferiore del sole era fortemente tinto di azzurro, e l' orlo superiore era d' un colore rossastro. Laonde Dollond riconobbe da principio che l' acqua non disperde i colori tanto quanto il vetro, a rifrazioni eguali; indi, avendo variato l' angolo al vertice del prisma d' acqua, per modo tale che la dispersione de' colori fosse la medesima ne' due casi, trovò che allora le due rifrazioni non erano eguali. Tutte queste osservazioni fecero ritornare Dollond al progetto d' Eulero, e più non dubitò ch' esso non potesse essere realizzato, se non coll' acqua e col vetro, almeno con altre materie trasparenti, di densità differenti.



Egli dapprima adoperò a tal effetto il vetro e l' acqua come Eulero aveva proposto; ma riconobbe subito, dietro le formole del geometra tedesco, che le curvature da darsi agli obbiettivi erano troppo considerabili per non produrre un' aberrazione molto sensibile nel fuoco, e che sì fatto inconveniente non poteva essere tolto che da un altro, quello di troppo diminuire l' apertura degli obbiettivi. Eulero aveva compreso ed annunziato egli medesimo che queste erano le sole e vere difficoltà che la sua teoria potesse soffrire nella pratica.

Dollond, perfettamente versato nella cognizione delle differenti specie di vetri, e convinto che dovevano trovarsene alcune, le cui virtù rifrattive fossero molto differenti, immaginò di adoperare due sorte di vetri conosciuti in Inghilterra, sotto i nomi di *flint-glass* e di *crownglass* (1). Il primo è un vetro bianchissimo e molto trasparente, che dà le iridi le più notabili, e per conseguenza quelle

(1) *Trans. filos. an.* 1754.

nel quale la rifrazione del rosso differisce di più da quella del violetto. Il secondo ha un colore verdastro, e rassomiglia molto in qualità al nostro vetro comune; esso dà la minima differenza tra le rifrazioni del rosso e del violetto. Dollond misurò i rapporti delle rifrangibilità coll'istesso mezzo che aveva impiegato pel vetro e per l'acqua: egli trovò che il rapporto delle differenze di rifrangibilità nelle due materie era in circa quello di 3 a 2. Avendo fatta questa sostituzione nelle formole d'Eulero, ottenne da principio dei risultati che non erano molto soddisfacenti. Ma finalmente, a forza di tentativi e di combinazioni, sia nella scelta delle materie d'una eccellente qualità, sia in quella delle differenti specie di sfere che sono egualmente atte, per la natura del problema, a raccogliere i fuochi di tutt' i colori, egli giunse a costruire de' cannocchiali acromatici, molto superiori a' cannocchiali ordinarj. Ne costruì dapprima uno di cinque piedi, il cui effetto era lo stesso di quello d'un cannocchiale ordinario di quindici piedi. Del rimanente, egli non indicò la strada che aveva seguita per iscegliere le sfere atte a distruggere le aberrazioni.



Questo problema era d'una natura da eccitare le indagini de' geometri, per la sua utilità generale, e per la varietà de' casi che racchiude in ragione del numero più o meno grande de' vetri onde un telescopio o un microscopio può essere composto. Quindi, Eulero, Clairaut e d'Alembert hanno dato, sopra tutta questa teoria de' cannocchiali acromatici, opere eccellenti, dove si ammirano le finezze dell' analisi, l'eleganza delle soluzioni, e le conseguenze che ne hanno saputo ritrarre. Oltre alle memorie che abbiamo già citate d'Eulero, egli ne ha fatto stampare ancor due nella raccolta dell' accademia di Berlino, per l'anno 1757: egli ha dappoi compreso tutta questa materia nel suo *Trattato di diottrica*, stampato a Pietroburgo, nel 1773. Vi sono tre memorie di Clairaut sopra lo stesso argomento, ne' volumi dell' accademia delle scienze di Parigi, per gli anni 1756, 1757, 1761. D'Alembert ne ha fatto l'oggetto del terzo volume tutto intero de' suoi *Opuscoli matematici*, pubblicato nel 1761, e di un' eccellente memoria stampata nel volume dell' accademia, per l'anno 1765. Egli ha ancora dato molte continuazioni di questi scritti, ne' tomi IV, V, e VII de' suoi *Opuscoli*

*matematici*. Le formole ch' egli ha trovate per annientare l'aberrazione di rifrangibilità, hanno un notabile vantaggio: esse servono a diminuire questa aberrazione in una data ragione; il che può ovviare all' inconveniente in cui si cadrebbe, se, per distruggere totalmente questa aberrazione, si aumentasse troppo l' aberrazione di sfericità, o la curvatura delle superficie. Egli fa moltissime osservazioni interessanti, ed applicabili al progresso dell' arte. Io rimetto a tutte queste eccellenti opere, per la perfetta cognizione dell' argomento: aggiungerò solamente che la costruzione dei cannocchiali acromatici ha fatto rapidamente de' progressi immensi: l'astronomia e la fisica ne hanno già ritratto, e non cesseranno mai di ritrarne i più preziosi vantaggi.

La posterità non dimenticherà mai ch' ella deve la prima idea di questa scoperta ad Eulero, uomo d'un genio grande e d' una fecondità prodigiosa. In tutto il corso della sua vita, i giornali e le raccolte delle accademie ridondano delle sue ricerche; egli inoltre pubblicò separatamente moltissime opere brillanti d'invenzione: morendo, lasciò più di cento eccellenti memorie manoscritte all' accademia



di Pietroburgo, che le fa successivamente pubblicare.

*Fine del quarto periodo e del terzo tomo.*

---

*Il seguente volume conterrà il* Discorso su la vita e le opere di Pascal, *scritto dal medesimo autore, ed una* Notizia delle principali opere di Carlo Bossut; *e finalmente le* Addizioni *del rinomato matematico italiano* Gregorio Fontana.

# INDICE

## DE' CAPITOLI

CONTENUTI IN QUESTO TERZO TOMO.

## QUARTO PERIODO.

*Progresso delle matematiche dalla scoperta dell' analisi infinitesimale sino ai nostri giorni.* pagina 5

CAPITOLI

I. *Scoperta dell' analisi infinitesimale: Leibnizio è il primo a pubblicarne gli elementi; Newton fa uso di un metodo simile nel suo libro dei principj matematici* . . . . . 7

II. *Leibnizio continua ad estendere la sua nuova analisi: è secondato dai fratelli Bernoulli. Varj problemi proposti e risoluti. Analisi degli infinitamente piccoli dell' Hopital* . . . . . 14

III. *Insigne movimento nella teoria* de Maximis et Minimis. *Disputa de' fratelli Bernoulli sopra il problema degli isoperimetri* . . . . 33

IV. *Soluzioni di diversi problemi. Leibnizio inventa il metodo per differenziare* de curva in curvam. *Giustificazione del marchese dell' Hopital. Opere di Newton. Nozioni sopra alcuni altri geometri.* 53

V. *Esame de' dritti di Leibnizio e di Newton all' invenzione dell' analisi infinitesimale* . . . . . 72

VI. *Continuazione della medesima controversia. Guerra di problemi tra Gio. Bernoulli e gl' Inglesi. Varietà* . . . . . 100

VII. *Continuazione de' progressi della geometria. Soluzioni di diversi problemi* . . . . . 116

VIII. *Problema delle tautocrone ne' mezzi resistenti. Riflessioni generali sopra i problemi di pura teoria. Algebra de' seni e coseni. Utilità de' metodi d' approssimazione, ed in particolare delle serie infinite* . . . . . 129

IX. *Continuazione. Progresso de' metodi per integrare le equazioni diffe-*

CAPITOLI pagina

*renziali. Nuovi passi del problema degli isoperimetri. Calcolo integrale alle differenze parziali* . . 138

X. *Di alcune opere sopra l' analisi* . . 151

XI. *Progressi della meccanica* . . . . 162

XII. *Progressi dell' idrodinamica* . . . 188

XIII. *Progressi dell' astronomia* . . . . 208

SEZIONE PRIMA.

*Astronomia pratica* . . . . . 210

SEZIONE SECONDA.

*Astronomia fisica* . . . . . 254

XIV. *Progressi dell' ottica* . . . . . 305