SUL TEOREMA
DI ADDIZIONE DELLE FUNZIONI ABELIANE

TESI

DEL DOTT. ALBERTO TONELLI

Il Sig. Weber in una memoria inserita nel giornale di Crelle (vol. LXX pag. 193) intitolata «*Ueber das Additionstheorem der Abelschen Functionen*» ha risoluto il problema dell' addizione delle funzioni Abeliane.

Supponendo date le quantità $v_1, v_2, \ldots v_p, w_1, w_2, \ldots, w_p$ e per mezzo di queste determinati i punti $x_1, x_2, \ldots x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p$ colle relazioni

$$v_h = \int_{c_1}^{x_1} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{x_p} du_h$$

$$w_h = \int_{c_1}^{y_1} du_h + \int_{c_2}^{y_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{y_p} du_h$$

$$h = 1, 2, \ldots p,$$

ha determinato i punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$ per i quali si ha,

$$v_h + w_h = \int_{c_1}^{z_1} du_h + \int_{c_2}^{z_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{z_p} du_h$$

$$h = 1, 2, \ldots p,$$

costruendo una funzione ζ monodroma dei punti della superficie T di Riemann, che ammetta p infinitesimi di primo ordine nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$; oppure, considerando il problema sotto un punto di vista più generale come suol farsi anche nella inversione, determinando i coefficienti di una equazione

$$(3) \qquad \psi(\sigma) = \sigma^{p} + M_1 \sigma^{p-1} + M_2 \sigma^{p-2} + \ldots + M_p = 0$$

la quale ha per radici i p valori che la funzione nota σ diramata come T assume nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Seguendo il metodo tenuto dal Sig. Weber io ho cercato di generalizzare la soluzione del medesimo problema considerando un numero qualunque r di sistemi v_h: così facendo, dal teorema dell' addizione io passo a quello della moltiplicazione supponendo uguali fra loro i sistemi $v_h^{(i)}$.

Ho determinato la funzione ζ che ammette gl' infinitesimi nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$ che voglionsi determinare, come pure i coefficienti della equazione (3) che ha per radici i valori $\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \ldots, \sigma_{z_p}$, ed ho cercato di esprimere i risultati per mezzo delle funzioni $\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ (che ho designato col simbolo $\vartheta((u_h))$ analogo all'altro $\vartheta\left(\begin{smallmatrix} p \\ h(u_h) \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ adoprato da Riemann) con argomenti dipendenti dalle v_h, il che facendo, nel calcolo compariscono anche le derivate delle medesime funzioni sulle quali sarebbe molto utile uno studio speciale per determinarne le proprietà e per iscoprire se sia possibile la eliminazione delle medesime dai risultati finali.

I.

Sieno dati gli r sistemi

$$(4) \quad \begin{cases} v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots . v_p^{(1)} \\ v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots . v_p^{(2)} \\ \ldots \ldots \ldots \\ v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, \ldots . v_p^{(r)} \end{cases}$$

e mediante le relazioni

$$(5) \quad v_h^{(i)} = \int_{c_1}^{x_1^{(i)}} du_h + \int_{c_2}^{x_2^{(i)}} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{x_p^{(i)}} du_h$$

$$h = 1, 2, \ldots, p$$
$$i = 1, 2, \ldots, r$$

colla inversione, determinati gli r sistemi di punti

$$(6) \quad \begin{cases} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots . x_p^{(1)}, \\ x_1^{(2)} x_2^{(2)}, \ldots . x_p^{(2)}, \\ \ldots \ldots \ldots \\ x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots . x_p^{(r)}; \end{cases}$$

mi propongo di determinare per mezzo delle quantità note (4), (6) i p punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$ per i quali si ha

$$(7) \quad w_h = \sum_{1}^{r} {}_i\, v_h^{(i)} = \int_{c_1}^{z_1} du_h + \int_{c_2}^{z_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{z_p} du_h$$

$$h = 1, 2, \ldots, p$$

Nella (7) elimino colle (5) le $v^{(i)}$ ed ottengo

$$\sum_1^r \left\{ \int_{c_1}^{x_1^{(i)}} du_h + \int_{c_2}^{x_2^{(i)}} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{x_p^{(i)}} du_h \right\} = \int_{c_1}^{z_1} du_h + \int_{c_2}^{z_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{z_p} du_h$$

ovvero

$$\sum_2^{(r)}{}_i \left\{ \int_{x_1^{(i)}}^{c_1} du_h + \int_{x_2^{(i)}}^{c_2} du_h + \ldots + \int_{x_p^{(i)}}^{c_p} du_h \right\} + \int_{x_1^{(1)}}^{z_1} du_h + \int_{x_2^{(1)}}^{z_2} du_h + \ldots + \int_{x_p^{(1)}}^{z_p} du_h$$

Da questa relazione deduco che esiste una funzione ζ, la quale, diviene infinita nei punti (6) e infinitesima nei punti che formano i limiti superiori degli integrali della (8). Ora è noto che determinando una funzione ζ diramata come T che divenga infinita di primo ordine in rp punti, per esempio, negli rp punti (6), essa conterrà $rp-p+1$ costanti arbitrarie, le quali potranno sempre essere determinate in modo che la medesima funzione ζ acquisti $rp-p=p(r-1)$ infinitesimi arbitrari. Se io determino queste costanti in modo che la funzione ζ divenga infinitesima di ordine $r-1$ nei p punti $c_1, c_2, \ldots, c_p$, essa dovrà pure acquistare gl'infinitesimi $z_1, z_2 \ldots, z_p$ di primo ordine, e così avremo determinata la funzione che si cercava.

Sarà facile dimostrare che la funzione ζ non contiene irrazionalità rispetto alle quantità $z_{x_i^{(l)}} s_{x_i^{(l)}}$ corrispondenti ai punti (6).

Infatti è noto che una funzione diramata come T, la quale diviene infinita di primo ordine nei punti (6), se questi in generale sono differenti fra loro, può porsi sotto la forma

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} \zeta = {} & a_0 + a_1^{(1)} t_{x_1^{(1)}} + a_2^{(1)} t_{x_2^{(1)}} + \ldots + a_p^{(1)} t_{x_p^{(1)}} + \\ & + a_1^{(2)} t_{x_1^{(2)}} + a_2^{(2)} t_{x_2^{(2)}} + \ldots + a_p^{(2)} t_{x_p^{(2)}} + \ldots \\ & \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots + \\ & + a_1^{(r)} t_{x_1^{(r)}} + a_2^{(r)} t_{x_2^{(r)}} + \ldots + a_p^{(r)} t_{x_p^{(r)}} = \\ & = a_0 + \sum_1^r{}_l \sum_1^p{}_i a_i^{(l)} t_{x_i^{(l)}} \end{aligned}$$

essendo $t_{x_i^{(l)}}$ l'integrale di seconda specie che diviene infinito nel punto $x_i^{(l)}$. Supponendo che quelli integrali di seconda specie sieno *normali* avranno uguali a zero i moduli di periodicità relativi alle sezioni a_ν, ed alle sezioni b_ν li avranno uguali a $-2\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_i^{l)}}}$

Ciò posto la nostra funzione ζ resta invariata attraversando le sezioni a_ν, e perchè avvenga lo stesso relativamente alle sezioni b_μ basterà che i coefficienti $a_i^{(l)}$ sodisfino le cond izioni

$$\begin{aligned} -2 \Big\{ & a_1^{(1)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_1^{(1)}}} + a_2^{(1)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_2^{(1)}}} + \ldots + a_p^{(1)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_p^{(1)}}} + \\ & a_2^{(1)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_1^{(2)}}} + a_2^{(2)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_2^{(2)}}} + \ldots + a_p^{(2)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_p^{(2)}}} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_1^{(r)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_1^{(r)}}} + a_2^{(r)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_2^{(r)}}} + \ldots + a_p^{(r)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_p^{(r)}}} \Big\} = 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$(b)\qquad \sum_{1}^{p}{}_i \sum_{1}^{r}{}_l\, a_i^{(l)} \left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_i^{(l)}}} = 0$$

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots, p;$$

e le equazioni lineari (b) determinano p coefficienti $a_i^{(l)}$ razionalmente per mezzo delle quantità

$$\left(\frac{du_\mu}{dz}\right)_{z_{x_i^{(l)}}},$$

le quali sono razionali in $z_i^{(l)}$ ed $s_i^{(l)}$. Così la funzione (a) contiene dei coefficienti razionali rispetto agli elementi dei punti (6), e quando anche si vengono a determinare gli altri coefficienti colla condizione che la funzione assuma gl'infinitesimi $c_1\, c_2 \ldots c_p$ di ordine $r - 1$, è evidente che resta sempre razionale rispetto alle quantità considerate.

II.

Visto così come possa determinarsi la funzione ζ, cerchiamo di costruire l'equazione (3) la quale ha per radici i p valori che la funzione σ diramata come T, assume nei punti $z_1, z_2 \ldots z_p$.

Supponiamo che la funzione σ divenga infinita di primo ordine in μ punti $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$; allora assumerà un valore qualunque in μ punti della superficie di cui è funzione monodroma, e quindi la funzione ζ considerata come funzione di σ sarà a μ valori.

Chiamiamo $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(\mu)}$ i μ rami di ζ rispetto a σ, il prodotto

$$\zeta^{(1)} \cdot \zeta^{(2)} \cdot \ldots \cdot \zeta^{(\mu)}$$

sarà una funzione monodroma, e quindi razionale di σ, che diviene infinita di primo ordine solamente negli rp punti (6), infinitesima di ordine r-1 nei punti $c_1, c_2, \ldots, c_p$, e di primo ordine nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Per questo l'espressione

$$\frac{\zeta^{(1)} \cdot \zeta^{(2)} \ldots \zeta^{(\mu)} \prod_1^r \left(\sigma - \sigma_{x_1^{(l)}}\right)\left(\sigma - \sigma_{x_2^{(l)}}\right) \ldots \left(\sigma - \sigma_{x_p^{(l)}}\right)}{\psi(\sigma) \left\{\left(\sigma - \sigma_{c_1}\right)\left(\sigma - \sigma_{c_2}\right) \ldots \left(\sigma - \sigma_{c_p}\right)\right\}^{r-1}}$$

razionale in σ, non diviene nè infinita nè infinitesima per alcun valore di σ, e non potrà differire da una costante, e ponendo per amor di brevità

$$\left(\sigma - \sigma_{a_1}\right)\left(\sigma - \sigma_{a_2}\right) \ldots\ldots \left(\sigma - \sigma_{a_p}\right) = \psi^{(a)}(\sigma)$$

avremo

$$C \frac{\psi(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)} = \zeta^{(1)} \cdot \zeta^{(2)} \ldots \zeta^{(\mu)} \prod_1^r \frac{\psi^{(x^l)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}.$$

Accennando con $\zeta_\infty^{(1)}, \zeta_\infty^{(2)}, \ldots, \zeta_\infty^{(\mu)}$ i valori di $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(\mu)}$ per $\sigma = \infty$ avremo

$$C = \zeta_\infty^{(1)} \cdot \zeta_\infty^{(2)} \cdot \ldots \cdot \zeta_\infty^{(\mu)}$$

e quindi

$$(9)\qquad \frac{\psi(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)} = \frac{\zeta^{(1)} \cdot \zeta^{(2)} \cdot \ldots \cdot \zeta^{(\mu)}}{\zeta_\infty^{(1)} \cdot \zeta_\infty^{(2)} \cdot \ldots \cdot \zeta_\infty^{(\mu)}} \prod_1^r \frac{\psi^{(x^l)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}$$

Ponendo in questa formula p valori differenti di σ

successivamente, otteniamo p equazioni lineari rispetto ai coefficienti della (3) le quali servono a determinarli completamente in modo che la equazione

$$\sigma^{p}+\mathrm{M}_1\sigma^{p-1}+\mathrm{M}_2\sigma^{p-2}+\ldots+\mathrm{M}_p=0$$

ammetta per radici i valori $\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \ldots, \sigma_{z_p}$ che la funzione σ assume nei punti $z_1, z_2, \ldots z_p$.

III.

Introduciamo nelle formule le funzioni

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots u_p)$$

con argomenti dipendenti dai sistemi $v_h^{(i)}$.

Innanzi tutto osservo che il quoziente

$$\frac{\psi^{(x^l)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}$$

si esprime immediatamente per le funzioni ϑ.

Infatti applicando il teorema di Abel agl' integrali di terza specie servendoci della funzione σ diramata come T, che assume un valore qualunque nei punti $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_p$ e il valore ∞ nei punti $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_p$ si ha

$$\sum_1^{\mu}\int_{\eta_i}^{\xi_i} d\pi(c_\rho, x_\rho)=\log\frac{\sigma-\sigma_{x_\rho}}{\sigma-\sigma_{c_\rho}}$$

da cui, facendo percorrere a ρ i valori $1, 2, \ldots, p$

$$\sum_1^{\mu}\int_{\eta_i}^{\xi_i}\sum_1^{p}{}_\rho\, d\pi(c_\rho\, x_\rho)=\sum_1^{p}{}_\rho\int_{c_\rho}^{x_\rho}\sum_1^{\mu}{}_i\, d\pi(\eta_i, \xi_i)=\log\frac{\psi^{(x)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}$$

e ricordando la formula

$$\sum_1^{p}{}_\rho\int_{c_\rho}^{x_\rho} d\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)=\log \mathrm{C}\,\frac{\vartheta\left(\left(u_h^{\varepsilon_2}-\sum_1^{p}\int_{c_\rho}^{x_\rho} du_h+k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h^{\varepsilon_1}-\sum_1^{p}\int_{c_\rho}^{x_\rho} du_h+k_h\right)\right)},$$

si deduce

$$\frac{\psi^{(x)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}=\prod_1^{\mu}{}_i\, \mathrm{C}\,\frac{\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i}-\sum_1^{p}\int_{c_\rho}^{x_\rho} du_h+k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i}-\sum_1^{p}\int_{c_\rho}^{x_\rho} du_h+k_h\right)\right)}$$

e facendo coincidere le x colle c

$$\mathrm{C}=\frac{\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i}+k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i}+k_h\right)\right)}$$

onde finalmente

$$\frac{\psi^{(x_l)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}=\prod_1^{\mu}{}_i\,\frac{\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i}-v_h^{(l)}+k_h\right)\right).\,\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i}+k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i}-v_h^{(l)}+k_h\right)\right).\,\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i}+k_h\right)\right)}.$$

Per esprimere la funzione ζ per mezzo delle funzioni ϑ osservo che

$$\vartheta\left(\left(u_h - \overset{(l)}{v_h} + k_h\right)\right)$$
$$\vartheta\left(\left(u_h + k_h\right)\right)$$
$$\vartheta\left(\left(u_h - w_h + k_h\right)\right),$$

quando le k_h sieno convenientemente scelte, divengono infinitesime di primo ordine respettivamente nei punti

$$\overset{(l)}{x_1}, \overset{(l)}{x_2}, \ldots, \overset{(l)}{x_p}$$
$$c_1, c_2, \ldots, c_p$$
$$z_1, z_2, \ldots, z_p$$

sicchè la funzione

$$(10)\quad \frac{\vartheta\left(\left(u_h - \sum_1^r \overset{i)}{v_h} + k_h\right)\right)\vartheta\left(\left(u_h + k_h\right)\right)^{r-1}}{\prod_1^r {}_i\, \vartheta\left(\left(u_h - \overset{(i)}{v_h} + k_h\right)\right)}$$

non potrà differire da ζ altro che per un fattor costante.

Però la forma (10) per la ζ non si presta per la soluzione del problema di addizione comparendovi nell'argomento di una funzione ϑ la w_h, mentre il problema deve risolversi con espressioni contenenti le v_h separatamente e le $x_i^{(l)}$.

Osservando peraltro che la funzione ζ, quando è stata sottoposta alle condizioni di ammettere gl'infiniti (6) di primo ordine, contiene ancora $pr-p+1$ costanti arbitrarie le quali debbono determinarsi in modo che essa acquisti gl'infinitesimi $c_1, c_2, \ldots, c_p$ di ordine $r-1$, e quindi può esprimersi linearmente per mezzo di $p(r-1)$ altre funzioni $\zeta_s{}^t$ le quali sodistino la condizione di avere esse o la loro somma gl' infiniti di ζ, potremo porre

$$(11)\qquad \zeta = a_0{}^0 + \sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^p{}_l\, \overset{(i)}{a_l}\, \overset{(i)}{\zeta_l}\,.$$

Determiniamo ora la forma delle $\zeta_l{}^{(i)}$ le quali dovendo divenire infinite nei punti (6) avranno per denominatore

$$\prod_1^r \vartheta\left(\left(u_h - \overset{(s)}{v_h} + k_h\right)\right);$$

e se prendiamo per numeratore

$$\prod_1^r \vartheta\left(\left(u_h - \overset{(s)}{v_h} g_h + {}^{(s)} + k_h\right)\right)$$

saranno date dalla espressione

$$(12)\qquad \overset{(i)}{\zeta_l} = \frac{\prod_1^r \vartheta\left(\left(u_h - \overset{(s)}{v_h} + \overset{(s)(i)}{g_{h\,l}} + k_h\right)\right)}{\prod_1^r {}_s\, \vartheta\left(\left(u_h - \overset{(s)}{v_h} + k_h\right)\right)}$$

dove le $\overset{(s)(i)}{g_{h,l}}$ dovranno essere determinate in modo che le $\zeta_l{}^{(i)}$ sieno diramate come T, e che almeno la loro somma divenga infinita nei punti (6)

Vediamo quali condizioni debbono essere sodisfatte dalle g.

Prescindendo per semplicità dagli indici i, l i quali rimangono i medesimi per ogni funzione $\zeta_l{}^{(i)}$, e ricordando che ad ogni sezione b_μ le funzioni

$$\vartheta\left(v_1, v_2 \ldots, v_p\right)$$

acquistano il fattore

$$e^{-2v_\mu - a_{\mu\mu}},$$

essendo $a_{s,t}$ il modulo di periodicità dell'integrale Abeliano di prima specie u_s alla sezione b_t, vedremo che la funzione (12) acquista alla sezione b_μ il fattore

$$e^{-2\sum_{1}^{(r)} g_\mu^{(s)}} = e^{-2\left(g_\mu^{(1)}+g_\mu^{(2)}+\,.\,.\,+\,g_\mu^{(r)}\right)};$$

e se la $\zeta_t^{(i)}$ deve avere le diramazioni di T le g dovranno sodisfare la condizione

$$g_\mu^{(1)}+g_\mu^{(2)}+\ldots+g_\mu^{(r)} = k'_\mu\,\pi i \tag{13}$$

dove k'_μ rappresenta un numero intero qualunque.

Resta a vedersi ora se è possibile determinare $p(r-1)$ sistemi di valori per le g che sodisfino le relazioni (13) e che nello stesso tempo ci forniscano per mezzo della (12) altrettante funzioni $\zeta_t^{(i)}$ tutte differenti fra loro e tali che almeno la loro somma divenga infinita nei punti (6).

Le relazioni (13) si traducono nelle congruenze

$$\left.\begin{array}{l} g_1^{(1)}+g_1^{(2)}+\ldots+g_1^{(r)} \equiv 0 \\ g_2^{(1)}+g_2^{(2)}+\ldots+g_2^{(r)} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_p^{(1)}+g_p^{(2)}+\ldots+g_p^{(r)} \equiv 0 \end{array}\right\} (\bmod\ \pi i) \tag{14}$$

e si vede che le g situate sulla medesima colonna compariscono tutte in una funzione ϑ, e quindi essendo tutte eguali a zero la funzione ϑ cui appartengono coinciderebbe colla sua corrispondente del denominatore, e la $\zeta_t^{(i)}$ corrispondente non diventerebbe infinita nei p punti in cui diveniva infinitesima questa funzione. Ciò però non impedisce che la nostra funzione ζ divenga infinita in tutti quanti i punti (6) quando, almeno in una delle $\zeta_t^{(i)}$, comparisca ognuna delle

$$\vartheta\left(\left(u_h - v_h^{(l)} + k_h\right)\right)$$

al denominatore.

Non ostante queste limitazioni resta ancora tanta arbitrarietà nelle g da permetterci di costruire non solo uno, ma più sistemi di $p(r-1)$ funzioni $\zeta_t^{(i)}$.

Incominciamo dall'osservare che le quantità

$$\frac{\pi i}{r},\ \frac{2\pi i}{r},\ \frac{3\pi i}{r},\ldots,\ \frac{(r-1)\pi i}{r}$$

sono tali che ripetute r volte danno una quantità congrua zero, modulo πi, onde ponendo

$$\left\{\begin{array}{l} g_1^{(1)} = 0\,,\ g_1^{(2)} = 0\,,\ldots,\ g_1^{(r)} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{\mu-1}^{(1)} = 0\,,\ g_{\mu-1}^{(2)} = 0\,,\ldots,\ g_{\mu-1}^{(r)} = 0 \\ g_\mu^{(1)} = \dfrac{k\pi i}{r}\,,\ g_\mu^{(2)} = \dfrac{k\pi i}{r}\,,\ldots,\ g_\mu^{(r)} = \dfrac{k\pi i}{r} \\ g_{\mu+1}^{(1)} = 0\,,\ g_{\mu+1}^{(2)} = 0\,,\ldots,\ g_{\mu+1}^{(r)} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_p^{(1)} = 0\,,\ g_p^{(2)} = 0\,,\ldots,\ g_p^{(r)} = 0 \end{array}\right. \tag{15}$$

questo sistema sodisfarà le (14) e tutte le altre condizioni cui debbono sodisfare le g, ed ognuna delle funzioni $\zeta_t^{(i)}$ diverrà con questo sistema infinita in tutti i punti (6).

Se nella (15) facciamo variare k da uno fino a $r-1$ otterremo $r-1$ sistemi differenti di g cui corrisponderanno altrettanti sistemi di funzioni $\zeta_t^{(i)}$ pure differenti non potendosi aver mai

$$\frac{k\pi i}{r} - \frac{k'\pi i}{r} = k''\pi i\,;$$

inoltre osservando che due funzioni ϑ della forma

$$\vartheta(v_1, v_2 .. v_h+g .. v_p) \ , \ \vartheta(v_1, v_2, .., v_h, .., v_h'+g, .., v_p)$$

ammettono infinitesimi differenti, se alla linea delle g che hanno il valore $\frac{k\pi i}{r}$ facciamo percorrere tutte le p posizioni, per ogni valore di k otteniamo p sistemi differenti di g, e quindi in tutto ne otterremo

$$p(r-1)$$

appunto quanti ne sono necessari per la costruzione della nostra funzione ζ.

Ciò premesso, se accenniamo con

$$\vartheta_\mu^{(k)}((v_h)) = \vartheta_\mu^{(k)}(v_1, v_2 \dots v_p)$$

la funzione

$$\vartheta\left(v_1, v_2, \dots, v_\mu + \frac{k\pi i}{r}, \dots v_p\right)$$

avremo

$$\zeta_l^{(i)} = \prod_{1}^{r}{}_s \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta_l((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

da cui finalmente per mezzo della (11)

$$(16) \quad \zeta = a_0^0 + \sum_{1}^{r-1}{}_i \sum_{1}^{p}{}_l a_l^{(i)} \prod_{1}^{r}{}_s \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta_l((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}.$$

Questa espressione della funzione ζ diventa precisamente

quella data dal sig. Weber nella memoria citata quando si supponga $r=2$.

Infatti la formula del sig. Weber è

$$(17) \quad \zeta = a_0 + \sum_{1}^{p} a_s \frac{\vartheta_s((u_h - v_h^{(1)} + k_h))\vartheta_s((u_h - v_h^{(2)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(1)} + k_h))\vartheta((u_h - v_h^{(2)} + k_h))}.$$

essendo

$$\vartheta_s(v_1, v_2 \dots v_p) = \vartheta\left(v_1, v_2, \dots, v_s + \frac{\pi i}{2}, \dots v_p\right),$$

e se nella (16) facciamo $r=2$ sparisce naturalmente la somma relativa all'indice i, e il prodotto si riduce a due sole funzioni ϑ che coincidono con quelle che compariscono nella (17).

IV.

In questo modo il problema è teoricamente risoluto.

Però nella funzione ζ sopra determinata le funzioni ϑ, che vi compariscono contengono negli argomenti frazioni del modulo di periodicità πi i cui denominatori sono r e perciò non sono di quelle ϑ che si designano col simbolo

$$\vartheta_{\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2' \dots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}}((v_h))$$

le quali contengono negli argomenti solo le metà dei moduli di periodicità degli integrali Abeliani di prima specie.

Sarà utile vedere se è possibile introdurre negli argomenti delle funzioni ϑ che determinano le $\zeta_l^{(i)}$ solamente le metà dei moduli di periodicità e per maggior semplicità le metà dei moduli di periodicità πi.

Vediamo prima se ciò è possibile poi passeremo alla effettiva determinazione.

Ricordando che basta divenga infinita in ognuno dei punti (6) la somma delle $\zeta_i^{(l)}$, osservo che se considero nella (14) una linea per esempio la s esima e in questa faccio tutte le combinazioni a due a due dando alle g di ciascuna combinazione il valore $\frac{\pi i}{2}$, ottengo

$$\frac{r(r-1)}{2}$$

sistemi differenti di g cui corrispondono altrettante funzioni $\zeta_i^{(l)}$ differenti, e se questo lo ripeto per tutte le p linee successivamente ne ottengo

$$\frac{r}{2}(r-1)\,p \geqq (r-1)\,p$$

che mi serviranno certamente alla formazione della funzione ζ.

Evidentemente fra le $\zeta_i^{(l)}$ che in questo modo si costruiscono ve ne sono certamente di quelle che divengono infinite in un sistema qualunque

$$x_1^{(t)}\,,\ x_2^{(t)}\,,\ \ldots\,,\ x_p^{(t)}$$

dei punti (6), e quindi la loro somma diviene certamente infinita in ognuno dei punti (6).

Dimostrata la possibilità determiniamo effettivamente queste funzioni $\zeta_i^{(l)}$.

Per far questo consideriamo una linea per esempio la l esima ed in questa prendiamo una g per esempio la m esima cui do costantemente il valore $\frac{\pi i}{2}$ mentre successivamente assegno

il medesimo valore alla 1.ª, 2.ª, $m-1$ esima, $m+1$ esima,.., r esima; in questo modo ottengo $r-1$ sistemi di g, e ripetendo questo per tutte le linee ne vengo ad ottenere appunto

$$p(r-1)$$

cui corrisponderanno altrettante $\zeta_i^{(l)}$ delle quali p divengono infinite in un sistema qualunque di punti

$$x_1^{(t)}\,,\ x_2^{(t)}\,,\ \ldots\,,\ x_p^{(t)},$$

e, se m è costante, ognuna diviene infinita nel sistema

$$x_1^{(m)}\,,\ x_2^{(m)}\,,\ \ldots\,,\ x_p^{(m)}.$$

Indichiamo con

$$\vartheta_l(v_1\,,v_2\,,\ldots\,,v_p)=\vartheta_l((v_h))$$

la funzione

$$\vartheta(v_1\,,v_2\,,\ldots\,,v_l+\frac{\pi i}{2}\,,\ldots\,,v_p)$$

ed avremo

$$(18)\qquad \zeta_l^{(i)}=\frac{\vartheta_l((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta_l((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}$$

e quindi

$$(19)\qquad \zeta=a_0^0+\sum_{1}^{r-1}{}_i\sum_{1}^{p}{}_l\,a_l^{(i)}\frac{\vartheta_l((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta_l((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}{\vartheta((u_h-v_h^{(m)}+k_h))\,\vartheta((u_h-v_h^{(i)}+k_h))}$$

nella quale le funzioni ϑ contengono negli argomenti solamente le metà dei moduli πi di periodicità.

Le funzioni $\zeta_i^{(l)}$ che compariscono nella (19) non divengono infinite di primo ordine altro che in due dei sistemi

$$x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \ldots, x_p^{(t)};$$

non è difficile però costruire una funzione ζ col mezzo di $\zeta_i^{(l)}$ che divengano infinite in ognuno dei punti (6) prendendo per le g solo le metà dei moduli di periodicità πi.

Per questo distingueremo prima i casi di r pari e di r dispari.

Se r è pari mentre nella linea $l$esima do alle g quei valori adottati nel caso precedente, in un altra qualunque $l+n$ esima do a tutte le g il valore $\frac{\pi i}{2}$; tenendo fisso n, che supporrò primo con p e minor di p, e facendo percorrere ad l tutta la serie dei valori $1, 2, \ldots, p$ ottengo

$$p(r-1)$$

funzioni $\zeta_i^{(l)}$ differenti che divengono infinite in ognuno dei punti (6).

Se r è dispari invece nella linea $l+n$ esima non potendo dare a tutte le g il valore $\frac{\pi i}{2}$ lo darò ad $r-1$ escludendo per esempio la $m$esima perchè questa nella linea $l$esima son sicuro che ha sempre il valore $\frac{\pi i}{2}$.

Per $l+n$ intendo il più piccolo numero che sodisfa la congruenza

$$l+n \equiv x \pmod{p}.$$

Ciò posto avremo per r pari

$$(20)\quad \zeta_l^{(i)} = \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))} \cdot \prod_1^r{}_s \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

per r dispari

$$(20')\quad \zeta_l^{(i)} = \frac{\vartheta_l((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))} \cdot \prod_1^r{}_s \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

onde nel primo caso

$$) \zeta = a^0{}_0 + \sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^p{}_l a_l^{(i)} \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))} \cdot \prod_1^r{}_s \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))} =$$

$$= a_0{}^0 + \sum_1^p{}_l \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))} \prod_1^r{}_s \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))} \cdot \sum_1^{r1}{}_i \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(i)} + k_h))} a_l^{(i)}$$

e nel secondo

$$(21')\ \zeta = a^0{}_0 + \sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^{p} a_l{}^{(i)} \frac{\vartheta_l((u_h - v_h{}^{(m)} + k_h))\,\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h{}^{(i)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h{}^{(m)} + k_h))\,\vartheta_{l+n}((u_h - v_h{}^{(i)} + k_h))} \cdot$$

$$\cdot \prod_1^{r}{}_s \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h{}^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h{}^{(s)} + k_h))}$$

$$= a_0{}^0 + \sum_1^{p}{}_l \frac{\vartheta_l((u_h - v_h{}^{(m)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h{}^{(m)} + k_h))} \prod_1^{r}{}_s \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h{}^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h{}^{(s)} + k_h))} \cdot$$

$$\cdot \sum_1^{r-1} \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h{}^{(i)} + k_h))}{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h{}^{(i)} + k_h))}\, a_l{}^{(i)}$$

Da queste forme della funzione ζ si ricava facilmente, come era da prevedersi, l'espressione (19) col sostituire respettivamente le funzioni ϑ_l, ϑ alle $\vartheta_{l,l+n}$ e ϑ_{l+n}.

Del resto poi tanto alla (19) quanto alle (21) (21') possiamo dare un' altra forma introducendo appunto le funzioni

$$\vartheta_{\left\{\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots, & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, & \varepsilon'_2, & \dots, & \varepsilon'_p \end{smallmatrix}\right\}}((u_h)).$$

Essendo

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 = \frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2}a_{11} + \frac{\varepsilon_2}{2}a_{12} + \dots + \frac{\varepsilon_p}{2}a_{1p} \\ \mathrm{H}_2 = \frac{\varepsilon'_2}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2}a_{21} + \frac{\varepsilon_2}{2}a_{22} + \dots + \frac{\varepsilon_p}{2}a_{2p} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{H}_p = \frac{\varepsilon'_p}{2}\pi i + \frac{\varepsilon_1}{2}a_{p1} + \frac{\varepsilon_2}{2}a_{p2} + \dots + \frac{\varepsilon_p}{2}a_{pp} \end{array}\right.$$

si ha

$$\vartheta_{\left\{\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2 & \dots, & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, & \varepsilon'_2, & \dots & \varepsilon'_p \end{smallmatrix}\right\}}((v_h)) = e^{\Sigma_h \varepsilon_h v_h}\, \vartheta((v_h + \mathrm{H}_h))$$

dove le quantità $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_p, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_p'$, rappresentano o zero o uno; per cui ove i punti $c_1, c_2, \dots, c_p$ (*) sieno tali che le k_h corrispondenti vengano espresse per mezzo di metà dei moduli di periodicità sotto la forma (*a*) avendosi

$$\vartheta((u_h - v_h + k_h)) = e^{-\Sigma_h \varepsilon_h (u_h - v_h)}\, \vartheta_{\left\{\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots, & \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \dots, & \varepsilon_p' \end{smallmatrix}\right\}}((u_h - v_h))$$

sarà pure

$$\vartheta_{s,t}((u_h - v_h + k_h)) = e^{-\Sigma_h \varepsilon_h (u_h - v_h)}\, \vartheta_{\left\{\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots, & \varepsilon_s, & \dots, & \varepsilon_t, & \dots, & \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \dots, & \varepsilon'_s+1, & \dots, & \varepsilon'_t+1, & \dots, & \varepsilon'_p \end{smallmatrix}\right\}}((u_h - v_h))$$

e quindi le (19), (21), (21') diverranno respettivamente:

$$\zeta = a_0{}^0 + \sum_1^{r-1}{}_i \sum_1^{p} a_l^{(i)} \frac{\vartheta_{\left\{\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots, & \varepsilon_l, & \dots, & \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \dots, & \varepsilon_l'+1, & \dots, & \varepsilon_p' \end{smallmatrix}\right\}}((u_h - v_h{}^{(m)}))\; \vartheta_{\left\{\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots, & \varepsilon_l, & \dots, & \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \dots, & \varepsilon_l'+1, & \dots, & \varepsilon_p' \end{smallmatrix}\right\}}((u_h - v_h{}^{(i)}))}{\vartheta_{\left\{\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots, & \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \dots, & \varepsilon_p' \end{smallmatrix}\right\}}((u_h - v_h{}^{(m)}))\; \vartheta_{\left\{\begin{smallmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \dots, & \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \dots, & \varepsilon_p' \end{smallmatrix}\right\}}((u_h - v_h))}$$

(*) Vedasi la memoria del signor WEBER intitolata «*Zur Theorie der Umkehrung der Abelschen Integrale*» nel Volume LXX del giornale di Crelle pag, 314 paragrafo 7.

$$\zeta = a_0^0 + \sum_1^p {}_l \frac{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l'+1, \varepsilon_{l+n}'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h^{(m)}))}{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{l+n}'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h))} \prod_1^r {}_s \frac{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{l+n}'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h^{(s)}))}{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h))}.$$

$$\cdot \sum_1^{r-1} \frac{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l'+1, \ldots, \varepsilon_{l+n}'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h^{(i)}))}{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{l+n}'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h^{(i)}))} a_l^{(i)}$$

$$\zeta = a_0^0 + \sum_1^p {}_l \frac{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_p' \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l'+1, \ldots, \varepsilon_p\end{matrix}\right\}((u_h - v_h))}{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h))} \prod_1^r {}_s \frac{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{l+n}'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h^{(s)}))}{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h^{(s)}))}.$$

$$\cdot \sum_1^{r-1} {}_i \frac{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l'+1 \ldots, \varepsilon_{l+n}'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h^{(i)}))}{\vartheta\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{l+n}'+1, \ldots, \varepsilon_p'\end{matrix}\right\}((u_h - v_h))} a_l^{(i)}$$

Nelle formule (19) (21) (21') la ζ è espressa per funzioni $\zeta_l^{(i)}$ le quali dipendono dall'indice i che si riferisce ai diversi sistemi delle v, per cui quando questi sistemi sieno differenti, quelle sono veramente $p(r-1)$; ma quando per esempio quei sistemi si riducessero tutti uguali fra loro

come è nel caso della moltiplicazione, allora il numero delle $\zeta_l^{(i)}$ differenti fra loro si riduce semplicemente a p, e quindi nè la (19), nè la (21), nè la (21') possono servire per la risoluzione del problema della moltiplicazione.

Bisognerà dunque vedere se è possibile costruire $p(r-1)$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$ differenti, e che tali rimangano anche quando i sistemi v coincidano.

Distinguo al solito il caso di r pari dal caso di r dispari, ed osservo che nel primo dando alle g della linea l esima a 2, a 4, a r il valore $\frac{\pi i}{2}$ vengo ad ottenere $\frac{r}{2}$ sistemi differenti di g cui mi corrisponderanno altrettante funzioni $\zeta_l^{(i)}$, e se il medesimo faccio nella linea $l+n$ contemporaneamente, ne ottengo altrettante, e quindi in tutto r, e facendo percorrere ad l la serie dei valori $1, 2, \ldots, p$ ne ottengo pr, e quindi posso fra queste prenderne

$$p(r-1)$$

le quali mi serviranno alla costruzione della funzione ζ.

Evidentemente in questo modo le funzioni $\zeta_l^{(i)}$ non dipendono dagli indici dei sistemi $v^{(i)}$.

Nel caso di r dispari dando a 2, 4, . . . $r-1$ delle g della linea $l$esima il valore $\frac{\pi i}{2}$ otteniamo $\frac{r-1}{2}$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$ e se la stessa operazione la eseguiamo anche sulle g della linea $l+n$esima contemporaneamente otterremo $r-1$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$ e dando ad l i valori $1, 2, \ldots, p$ ne otterremo appunto

$$p(r-1).$$

Nel caso di r pari sarà

$$\zeta_l^{(i)} = \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta_l((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

e quando i varia da 1 ad $\frac{r}{2}$ otteniamo le prime $\frac{r}{2}$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$; per avere le altre $\frac{r}{2} - 1$ basterà prendere

$$\zeta_l^{\left(\frac{r}{2}+i\right)} = \prod_{1}^{2i} \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

dove i varia da 1 ad $\frac{r}{2} - 1$. Quando l prende i valori $1, 2, \ldots, p$ otterremo $p(r-1)$ funzioni $\zeta_l^{(i)}$, per cui sarà

$$(22)\quad \zeta = a_0^0 + \sum_{1}^{p}{}_l \left\{ \sum_{1}^{\frac{r}{2}} a_l^{(i)} \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta_l((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))} + \right.$$
$$\left. + \sum_{1}^{\frac{r}{2}-1}{}_i a_l^{\left(\frac{r}{2}+i\right)} \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))} \right\}.$$

Se r è dispari

$$\zeta_l^{(i)} = \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta_l((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

dove i va da 1 ad $\frac{r-1}{2}$, e per avere le altre $\frac{r-1}{2}$ basterà prendere

$$\zeta_l^{\left(\frac{r-1}{2}+i\right)} = \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta_l((u_h - v_h^{(t)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta((u_h - v_h^{(t)} + k_h))} \cdot$$
$$\cdot \prod_{1}^{2i-1}{}_s \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

dove l'indice m che si suppone fisso corrisponde all' indice di quella g che resta zero nella linea l esima quando alle altre $r-1$ si dà il valore $\frac{\pi i}{2}$; per cui

$$(22')\quad \zeta = a_0^0 + \sum_{1}^{p}{}_l \left\{ \sum_{1}^{\frac{r-1}{2}} a_l^{(i)} \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta_l((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))} + \right.$$
$$+ \sum_{1}^{\frac{r-1}{2}}{}_i a_l^{\left(\frac{r-1}{2}+i\right)} \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta_l((u_h - v_h^{(t)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(m)} + k_h))\, \vartheta((u_h - v_h^{(t)} + k_h))} \cdot$$
$$\left. \cdot \prod_{1}^{2i-1}{}_s \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))} \right\}$$

Quando n sia primo con p io dico che dando ad l tutti i valori $1, 2, \ldots, p$ non si ricade mai in un sistema di g già considerato perchè le due congruenze

$$\left. \begin{array}{l} l + n \equiv x \\ x + n \equiv l \end{array} \right\} \pmod{p}$$

conducendo all' altra

$$2n \equiv o \pmod{p}$$

sono impossibili contemporaneamente a meno che non sia $p=1$ o $p=2$.

Considerando il caso particolare di $n=1$ si vede subito che esclusi i valori 1, 2 di p si ottengono p sistemi differenti di g facendo assumere ad l tutti i valori $1, 2, \ldots, p$. Anche dalla espressione (22) di ζ si ritorna facilmente alla formola del signor Weber supponendo

$$r=2.$$

Le formule (22) (22') non sono applicabili quando sia

$$p=1 \text{ o } p=2,$$

per cui bisognerà trattare questi due casi in un modo speciale onde ottenere la funzione ζ espressa per mezzo di funzioni

$$\vartheta^{((v_h))}\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix}$$

e tale che possa servire anche pel problema della moltiplicazione.

Osservo intanto che le formule (16) (19) (21) (21') sono giuste anche per questi casi, essendo nelle (21) (21') $n=0$ per $p=1$. Incominciamo dal caso più semplice e cioè da quello che corrisponde a

$$p=1;$$

la congruenza

$$g_1+g_2+\ldots+g_r \equiv 0 \;(\bmod.\ \pi i)$$

rappresenta la (14), e quando alle g si dia a due a quattro . . . a r o ad $r-1$ il valore $\frac{\pi i}{2}$ otteniamo semplicemente $\frac{r}{2}$ o $\frac{r-1}{2}$ sistemi di g (che non coincidono con $(r-1)$ altro che nel caso speciale di $r=2$) per cui dovremo far uso anche dei moduli di periodicità relativi alle sezioni b_ν.

Ciò posto se r è pari oltre considerare i sistemi delle g che si ottengono dando a due, a quattro, a $2\,l$ (l fino ad $\frac{r}{2}$) il valore $\frac{\pi i}{2}$, terremo conto anche dei sistemi che si ottengono dando successivamente a due, quattro . . $2\,l$ (l fino ad $\frac{r}{2}$) il valore $\frac{\pi i}{2} \pm \frac{a_{11}}{2}$ in modo che ad l corrisponda il segno superiore ed alle altre l il segno inferiore. Così otterremmo r sistemi differenti, e possiamo escluderne uno a piacere onde adoperarne $r-1$ come a noi abbisognano.

Ciò posto le prime $\frac{r}{2}$ funzioni $\zeta^{(s)}$ avranno la forma

$$\zeta^{(i)}=\prod_1^{2i}\frac{\vartheta\left(u-(v^{(s)}+\frac{\pi i}{2})+k\right)}{\vartheta(u-v^{(s)}+k)}$$

andando i da 1 ad $\frac{r}{2}$, e le altre $r-1$ avranno la forma

$$^{+i)}=\prod_1^{i}\frac{\vartheta\left(u-(v^{(s)}+\frac{\pi i}{2}-\frac{a_{11}}{2})+k\right)\vartheta\left(u-(v^{(s')}+\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}}{2})+k\right)}{\vartheta(u-v^{(s)}+k)\;\vartheta(u-v^{(s')}+k)}$$

dove i va da uno fino ad $\frac{r}{2}-1$; cosicchè avremo per r pari

$$(23)\ \zeta = a_0 + \sum_{1}^{\frac{r}{2}} a_i \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta\left(u - \left(v^{(s)} + \frac{\pi i}{2}\right) + k\right)}{\vartheta(u - v^{(s)} + k)} +$$

$$+ \sum_{1}^{\frac{r}{2}-1} a_{\frac{r}{2}+i} \prod_{1}^{i} \frac{\vartheta\left(u - \left(v^{(s)} + \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)\vartheta\left(u - \left(v^{(s')} + \frac{\pi i}{2} - \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)}{\vartheta(u - v^{(s)} + k)\,\vartheta(u - v^{(s')} + k)}$$

Quando r è dispari allora fissato per una g il valore $\frac{a_{11}}{2}$ potremo ad un' altra dare il valore $\frac{\pi i}{2}$, e ad un'altra perciò il valore $\frac{\pi i}{2} - \frac{a_{11}}{2}$, e a due, a quattro . . . a $2l$ (l fino ad $\frac{r-3}{2}$) il valore $\frac{\pi i}{2} \pm \frac{a_{11}}{2}$, dove per l si prende il segno superiore, e per le altre l l'inferiore, così otteniamo $\frac{r-1}{2}$ sistemi cui corsispondono altrettante $\zeta^{(s)}$, e se poi diamo a due, a quattro, a $2l$ (l fino ad $\frac{r-1}{2}$) delle g il valore $\frac{\pi i}{2}$ solamente, otteniamo altre $\frac{r-1}{2}$ funzioni $\zeta^{(s)}$ che hanno la forma

$$\zeta^{(s)} = \prod_{1}^{2i}{}_s \frac{\vartheta\left(u - \left(v^{(s)} + \frac{\pi i}{2}\right) + k\right)}{\vartheta(u - v^{(s)} + k)}$$

dove i va da uno fino ad $\frac{r-1}{2}$, mentre le altre $\frac{r-1}{2}$ hanno la forma

$$\zeta^{\left(\frac{r-1}{2}+1+i\right)} = \frac{\vartheta\left(u - \left(\overset{(s)}{v} + \frac{\pi i}{2}\right) + k\right)\vartheta\left(u - \left(\overset{(s')}{v} + \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)\vartheta\left(u - \left(\overset{(s'')}{v} + \frac{\pi i}{2} - \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)}{\vartheta(u - v^{(s)} + k)\,\vartheta(u - v^{(s')} + k)\,\vartheta(u - v^{(s'')} + k)}$$
$$\times \prod_{0}^{i} \frac{\vartheta\left(u - \left(\overset{(l)}{v} + \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)\vartheta\left(u - \left(\overset{(l')}{v} + \frac{\pi i}{2} - \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)}{\vartheta(u - v^{(l)} + k)\,\vartheta(u - v^{(l')} + k)}$$

dove i va da zero ad $\frac{r-3}{2}$; per cui

$$(23')\ \zeta = a_0 + \sum_{1}^{\frac{r-1}{2}} a_i \prod_{1}^{2i} \frac{\vartheta\left(u - \left(\overset{(s)}{v} + \frac{\pi i}{2}\right) + k\right)}{\vartheta(u - v^{(s)} + k)} +$$

$$+ \sum_{0}^{\frac{r-3}{2}} a_{\left(\frac{r-1}{2}+1+i\right)} \frac{\vartheta\left(u - \left(\overset{(s)}{v} + \frac{\pi i}{2}\right) + k\right)\vartheta\left(u - \left(\overset{(s')}{v} + \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)}{\vartheta(u - v^{(s)} + k)\,\vartheta(u - v^{(s')} + k)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\vartheta\left(u - \left(\overset{(s'')}{v} + \frac{\pi i}{2} - \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)}{\vartheta(u - v^{(s'')} + k)} \times$$

$$\times \prod_{0}^{i} \frac{\vartheta\left(u - \left(\overset{(l)}{v} + \frac{\pi i}{2} + \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)\vartheta\left(u - \left(\overset{(l')}{v} + \frac{\pi i}{2} - \frac{a_{11}}{2}\right) + k\right)}{\vartheta(u - v^{(l)} + k)\,\vartheta(u - v^{(l')} + k)}$$

Per il caso di $p=2$ si può in una linea delle g ripetere quello che si è fatto pel caso di $p=1$, come pure si potrebbe procedere in altro modo, il che tralascio di fare per brevità contentandomi di aver fatto vedere come la soluzione sia possibile anche in questi casi speciali per mezzo di funzioni $\zeta^{(s)}$ che non dipendono dagl' indici dei sistemi $v_h^{(i)}$.

V.

Per considerare il problema della moltiplicazione, supponiamo che i sistemi delle v coincidano; allora la (7) diviene

$$(24)\qquad w_h = r v_h = \int_{c_1}^{z'_1} du_h + \int_{c_2}^{z'_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{z'_p} du_h$$
$$h = 1, 2, \ldots, p$$

mentre la (5) si riduce semplicemente a

$$(25) \quad v_h = \int_{c_1}^{x_1} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{x_p} du_h$$

$$h = 1, 2, \ldots, p$$

Per determinare i punti $z'_1, z'_2, \ldots, z'_p$ seguendo il solito metodo elimino fra la (24) e la (25) le v_h ed ottengo:

$$\int_{x_1}^{z_1'} du_h + \int_{x_2}^{z_2'} du_h + \ldots + \int_{x_p}^{z_p'} du_h +$$
$$(r-1)\left\{ \int_{x_1}^{c_1} du_h + \int_{x_2}^{c_2} du_h + \ldots + \int_{x_p}^{c_p} du_h \right\} = 0$$

la qual formula si deduceva immediatamente, come è naturale, dalla (8) sol che vi si supponessero i sistemi delle $x_i^{(i)}$ uguali fra loro.

Determinando adunque una funzione ζ' la quale divenga infinita di ordine r nei p punti $x_1, x_2, \ldots, x_p$ e infinitesima di ordine $r-1$ nei p punti $c_1, c_2, \ldots, c_p$ essa diverrà infinitesima di primo ordine anche nei punti

$$z'_1, z'_2, \ldots, z'_p.$$

La forma della funzione ζ' sappiamo che sarà la seguente

$$\zeta' = a^0{}_0 + \sum_1^r{}_s \sum_1^p{}_l \frac{d^{s-1} t_{x_l}}{d^{s-1} z_{x_l}} a_l^{(s)}$$

dove p dei $pr+1$ coefficienti arbitrari debbono determinarsi in modo che la funzione ζ' abbia le diramazioni di T, ed è chiaro che con questa determinazione non si introducono irrazionalità rispetto alle $z_{x_l} s_{x_l}$; le altre $p(r-1)+1$ debbono determinarsi in modo che la ζ' ammetta gl'infinitesimi $c_1, c_2, \ldots, c_p$ di ordine $r-1$.

Per determinare i coefficienti dell'equazione

$$(26) \qquad \psi(\sigma) = \sigma^p + A_1 \sigma^{p-1} + \ldots + A_p = 0$$

che ha per radici i p valori che la funzione σ prende nei punti $z'_1, z'_2, \ldots, z'_p$ osservo che la (9) diventa

$$\frac{\psi(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)} = \frac{\zeta'_1 \ldots \zeta'_2 \ldots \ldots \zeta'_\mu}{\zeta'\infty_1 . \zeta'\infty_2 \ldots \zeta'\infty_\mu} \left\{ \frac{\psi^{(x)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)} \right\}^r$$

donde, al solito, dando a σ p valori differenti si ottengono altrettante equazioni che ci servono a determinare i coefficienti della (26).

Per introdurre nel calcolo le funzioni ϑ osservo prima di tutto che si ha

$$\frac{\psi(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)} = \frac{\zeta_1' \ldots \zeta_2' \ldots \ldots \zeta_p'}{\zeta'\infty_1, \zeta'\infty_2, \ldots, \zeta'\infty_\mu} \cdot$$
$$\cdot \prod_1^\mu \left\{ \frac{\vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i} - v_h + k_h\right)\right) \vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i} + k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u_h^{\eta_i} - v_h + k_h\right)\right) \vartheta\left(\left(u_h^{\xi_i} + k_h\right)\right)} \right\}^r$$

Inoltre ponendo

$$\zeta = a^0{}_0 + \sum_1^p{}_l \sum^{r-1}{}_i a_l^{(i)} \zeta_l^{(i)\prime}$$

essendo le funzioni $\zeta_l^{(i)\prime}$ diramate come T, e tali che almeno la loro somma divenga infinita di ordine r nei punti $x_1, x_2, \ldots, x_p$, e quindi deducendosi dalle $\xi_l^{(i)}$ ponendo in queste uguali i sistemi delle v, cioè

$$v_\mu^{(1)} = v_\mu^{(2)} = \ldots = v_\mu^{(r)} = v_\mu$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, p.$$

avremo, considerando primieramente la forma (16) della funzione ζ

$$(27) \quad \zeta' = a_0^0 + \sum_1^p {}_l \sum_{1\,i}^{r-1} a_l^{(i)} \left\{ \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\}^r$$

riducendosi evidentemente, coll' ipotesi fatta, le funzioni

$$\zeta_l^{(i)} = \prod_1^r {}_s \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h^{(s)} + k_h))}$$

alla forma

$$\zeta_l^{(i)\prime} = \left\{ \frac{\vartheta_l^{(i)}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta_l((u_h - v_h + k_h))} \right\}^r .$$

Se volessimo ora la soluzione del medesimo problema per mezzo di funzioni ϑ che contenessero semplicemente le metà dei moduli di periodicità πi non potremmo servirci delle formule (19) (21) (21') ma bensì delle (22) (22').

Infatti da queste si ha

$$\zeta' = a_0^0 + \sum_1^p {}_l \left\{ \sum_{1\,i}^{\frac{r}{2}} a_l^{(i)} \left\{ \frac{\vartheta_l((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\}^{2i} + \right.$$
$$\left. + \sum_{1\,i}^{\frac{r}{2}-1} a_l^{\left(\frac{r}{2}+i\right)} \left\{ \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\}^{2i} \right\}$$

se r è pari, e

$$\zeta' = a_0^0 + \sum_1^p {}_l \left\{ \sum_1^{\frac{r-1}{2}} a_l^{(i)} \left\{ \frac{\vartheta_l((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\}^{2i} + \right.$$
$$\left. + \sum_1^{\frac{r-1}{2}} a_l^{\left(\frac{r-1}{2}+i\right)} \left\{ \frac{\vartheta_{l,l+n}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \left\{ \frac{\vartheta_l((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\}^{2i-1} \frac{\vartheta_{l+n}((u_h - v_h + k_h))}{\vartheta((u_h - v_h + k_h))} \right\} \right\}$$

se r è dispari; e introducendo le funzioni

$$\vartheta \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix}$$

se le quantità k_h si esprimono per mezzo di metà dei moduli di periodicità

$$\zeta' = a_0^0 + \sum_1^p {}_l \left\{ \sum_1^{\frac{r}{2}} a_l^{(i)} \frac{\vartheta^{2i} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_l + 1, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix} ((u_h - v_h))}{\vartheta^{2i} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix} ((u_h - v_h))} \right.$$
$$\left. + \sum_1^{\frac{r}{2}-1} {}_i a_l^{\left(\frac{r}{2}+i\right)} \frac{\vartheta^{2i} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_l + 1, \ldots, \varepsilon'_{l+n} + 1, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix} ((u_h - v_h))}{\vartheta^{2i} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix} ((u_h - v_h))} \right\}$$

e

$$
\begin{aligned}
\zeta' = a^{\vartheta}_0 + \sum_{1}^{p} {}_l \Bigg\{ & \sum_{1}^{\frac{r-1}{2}} a_l^{(i)} \frac{\vartheta^{2i}((u_h - v_h))\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l'+1, \ldots, \varepsilon_p \end{Bmatrix}}{\vartheta^{2i}((u_h - v_h))\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p \end{Bmatrix}} + \\
& \sum_{1}^{\frac{r}{2}-1} {}_i a_l^{\left(\frac{r}{2}+i\right)} \frac{\vartheta^{2i-1}((u_h - v_h))\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_l+1, \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix}}{\vartheta^{2i-1}((u_h - v_h))\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_p' \end{Bmatrix}} \cdot \\
& \frac{\vartheta((u_h - v_h))\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_l'+1, \ldots, \varepsilon_p' \end{Bmatrix} \vartheta((u_h - v_h))\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+n}, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon'_{l+n}+1, \ldots, \varepsilon_p' \end{Bmatrix}}{\vartheta^2((u_h - v_h))\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p \end{Bmatrix}} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

In tutte le espressioni che si sono date per la funzione ζ che serve per le soluzioni dei problemi di addizione e moltiplicazione i coefficienti arbitrari debbono determinarsi in modo che la funzione acquisti gl'infinitesimi $c_1, c_2, \ldots, c_p$ di ordine $r-1$.

È appunto facendo questa determinazione che si introducono nel calcolo le derivate delle funzioni ϑ, sulle quali uno studio speciale sarebbe molto utile specialmente allo scopo di vedere se sia possibile la loro eliminazione dai risultati finali.

VI.

Le formule stabilite fin qui ci servono per la soluzione dei due problemi di addizione e di moltiplicazione estesi

anche alle funzioni Abeliane di seconda e terza specie.

Vediamo prima di tutto come si enunciano questi problemi seguendo sempre la generalizzazione degli studi del signor Weber esposti nella memoria sopra citata.

Sieno i punti (6) determinati per mezzo delle quantità (4) mediante le (5) col teorema di inversione, e consideriamo le due somme

$$
(28) \qquad \int_{c_1}^{x_1^{(i)}} dt(\varepsilon) + \int_{c_2}^{x_2^{(i)}} dt(\varepsilon) + \ldots + \int_{c_p}^{x_p^{(i)}} dt(\varepsilon)
$$

$$
(28') \qquad \int_{c_1}^{x_1^{(i)}} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2) + \int_{c_2}^{x_2^{(i)}} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2) + \ldots + \int_{c_p}^{x_p^{(i)}} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)
$$

essendo le vie d'integrazione in queste espressioni le medesime che nelle formule (5); queste somme dipendono dalle

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}$$

conseguentemente dalle

$$v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_p^{(i)}$$

e potremo indicarle con

$$Z_{\varepsilon}(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_p^{(i)}) = Z_{\varepsilon}((v_h^{(i)}))$$

$$P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_p^{(i)}) = P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}((v_h^{(i)}));$$

e se ricordiamo che i punti

$$z_1, z_2, \ldots, z_p$$

corrispondono alle quantità

$$\sum_{1}^{r} v_1^{(i)}, \sum_{1}^{r} v_2^{(i)}, \ldots, \sum_{1}^{r} v_p^{(i)}$$

avremo

$$(29)\ Z_\varepsilon\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)=\int_{c_1}^{z_1} dt(\varepsilon)+\int_{c_2}^{z_2} dt(\varepsilon)+\ldots+\int_{c_p}^{z_p} dt(\varepsilon)$$

$$(29')\ P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)=\int_{c_1}^{z_1} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\int_{c_2}^{z_2} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\ldots+\int_{c_p}^{z_p} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)$$

e il problema consiste nel determinare le (29) (29′) in funzione delle (28) (28′) respettivamente, e delle quantità note $v_h^{(i)}$.

La funzione ζ determinata ci dà il modo di risolvere immediatamente il problema: infatti se dalla (29) si sottraggono tutti i sistemi che si ottengono dalla (28), quando ad i si diano successivamente tutti i valori $1, 2, \ldots, r$, otterremo

$$Z_\varepsilon\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)-\sum_1^r Z_\varepsilon\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)=\int_{x_1^{(1)}}^{z_1} dt(\varepsilon)+\int_{x_2^{(1)}}^{z_2} dt(\varepsilon)+\ldots+\int_{x_p^{(1)}}^{z_p} dt(\varepsilon)+$$
$$+\sum_2^r{}_i\left\{\int_{x_1^{(i)}}^{c_1} dt(\varepsilon)+\int_{x_2^{(i)}}^{c_2} dt(\varepsilon)+\ldots+\int_{x_p^{(i)}}^{c_p} dt(\varepsilon)\right\}$$

e analogamente dalle (29′) e (28′)

$$P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)-\sum_1^r P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)=\int_{x_1^{(1)}}^{z_1} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\int_{x_2^{(1)}}^{z_2} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)++\int_{x_p^{(1)}}^{z_p} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+$$
$$+\sum_2^r{}_i\left\{\int_{x_1^{(i)}}^{c_1} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\int_{x_2^{(i)}}^{c_2} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)+\ldots+\int_{x_p^{(i)}}^{c_p} d\pi(\varepsilon_1\varepsilon_2)\right\}.$$

Ora la funzione ζ diramata come T diviene infinita di primo ordine nei punti $x_l^{(i)}$, infinitesima di primo ordine

nei punti $z_1, z_2, \ldots, z_p$, infinitesima di ordine $r-1$ nei punti $c_1, c_2, \ldots, c_p$; per cui pel teorema di Abel avremo osservando che

$$\frac{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=z_\varepsilon}}{\zeta_{x_l}^{(i)}-\zeta_\varepsilon}\ ,\quad l\,\frac{\zeta_{x_l}^{(i)}-\zeta_{\varepsilon_1}}{\zeta_{x_l}^{(i)}-\zeta_{\varepsilon_2}}$$

sono zero,

$$(30)\ Z_\varepsilon\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)=\sum_1^r Z_\varepsilon\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)-\frac{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=z_\varepsilon}}{\zeta_\varepsilon}$$

$$=\sum_1^r Z_\varepsilon\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)-\left(\frac{dl\zeta}{dz}\right)_{z=z_\varepsilon}$$

$$(30')\ P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(\sum_1^r v_h^{(i)}\right)\right)=\sum_1^r P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)+l\,\frac{\zeta_{\varepsilon_1}}{\zeta_{\varepsilon_2}};$$

le quali formule risolvono il problema.

Da queste si passa facilmente a quelle che danno la risoluzione del problema della moltiplicazione supponendo i sistemi delle v tutti uguali fra loro; allora si ottiene:

$$(31)\ Z_\varepsilon\left(\left(r\,v_h^{(i)}\right)\right)=r\,Z_\varepsilon\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)-\left(\frac{d\,l\zeta'}{dz}\right)_{z=z_\varepsilon}$$

$$(31')\ P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(r\,v_h^{(i)}\right)\right)=r\,P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(\left(v_h^{(i)}\right)\right)+l\,\frac{\zeta'_{\varepsilon_1}}{\zeta'_{\varepsilon_2}}$$

dove ζ' è la funzione sopra determinata per la risoluzione del medesimo problema relativo alle trascendenti di prima specie.

Le formule (30) (30') (31) (31') valgono anche per integrali di seconda e terza specie qualunque, e non è punto necessario supporre che sieno integrali normali.

Pisa, Luglio 1873

ALBERTO TONELLI.