DEL MOTO

SOPRA

UN ELLISSOIDE DI UN PUNTO SOLLECITATO DA FORZE

CHE HANNO UNA CERTA FUNZIONE POTENZIALE

Il Sig. CARLO NEUMANN in una memoria pubblicata nel Vol. 56 del giornale di *Crelle* e che ha per titolo: « *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur* » tratta del moto di un punto costretto a rimanere sopra una sfera quando sia sollecitato da forze che hanno una funzione potenziale della forma

$$ax^2+by^2+cz^2.$$

Nel presente lavoro io tratto un analogo problema quello cioè nel quale il punto deve muoversi o sopra un ellissoide a tre assi o sopra uno di rivoluzione, con che si viene a fare un' applicazione degli integrali Abeliani.

I principii dei quali faccio uso sono gli stessi ed alcuni dei risultati sono pure in relazione con quelli del NEUMANN.

Le curve descritte dal punto mobile nel caso dell'ellissoide a tre assi hanno molta analogia colle geodetiche, e dagli stessi principii scaturisce molto semplicemente la nota equazione delle geodetiche stesse.

La funzione potenziale delle forze essendo della forma

$$Mx^2+Ny^2+Pz^2$$

il problema avrebbe in se alcunchè di interessante, poichè, supponendo che M, N, P siano i coefficienti di x^2, y^2, z^2 nella formola che dà la funzione potenziale dell' ellissoide sopra i punti situati sulla sua superficie, si studierebbe così il moto che anima un punto sopra un ellissoide per la sola azione di questo secondo la legge di NEWTON. Ciò però non può farsi in generale, poichè per poter ridurre il problema alle quadrature è d' uopo che M, N, P soddisfacciano ad una equazione di condizione, cui non soddisfanno in generale i coefficienti suddetti, ed essendo essi funzioni dei tre assi, se si volessero determinare i valori di questi che soddisfacessero alla condizione suddetta, si giungerebbe al risultato che l'ellissoide dovrebbe essere di rivoluzione (ed allora tutte le formole pel caso dell' ellissoide a tre assi prendono una forma indeterminata), o dovrebbe ridursi ad un ellisse.

Considerando poi a parte un ellissoide di rivoluzione (per esempio intorno all'asse x) suppongo che la funzione potenziale delle forze sia della forma

$$Mx^2+N(y^2+z^2)$$

e non dovendo M ed N essere soggette a nessuna condizione posso supporre siano i coefficienti di x^2 e di (y^2+z^2) nella formola che dà la funzione potenziale dell'ellissoide di rivoluzione sopra i punti situati sulla sua superficie, ed avere così il moto di un punto sopra un ellissoide di rivoluzione per la sola azione di questo quando l' azione abbia luogo secondo la legge newtoniana, il moto per esempio di un proiettile che si muova senza attrito sulla superficie della terra considerata come un ellissoide di rivoluzione.

I.

In tutto ciò che segue faremo uso del seguente principio di meccanica, di cui si è servito il NEUMANN nella memoria citata.

Sia $F(x,y,z)=0$ l'equazione di una superficie sopra la quale debba rimanere, durante il suo moto, un punto mobile sollecitato da forze la cui funzione potenziale è $U=f(x,y,z)$.

Prendiamo un sistema di coordinate curvilinee u, e v sulla superficie, e l'elemento lineare ds di essa verrà dato dalla equazione

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

essendo al solito

$$E=\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2,$$

$$F=\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv},$$

$$G=\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2.$$

Se determiniamo ora dall' equazione

$$(1)\qquad \left(2U-2\frac{dS}{dT}\right)\left(EG-F^2\right)+\begin{vmatrix} 0 & \frac{dS}{du} & \frac{dS}{dv} \\ \frac{dS}{du} & E & F \\ \frac{dS}{dv} & F & G \end{vmatrix}=0$$

la quantità S per modo che sia funzione di u, v, del tempo T e che contenga, oltre alla costante additiva, due altre costanti A e B, la determinazione del moto del punto dipenderà dalle due equazioni

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dS}{du}=E\dfrac{du}{dT}+F\dfrac{dv}{dT}\,, \\[2mm] \dfrac{dS}{dv}=F\dfrac{du}{dT}+G\dfrac{dv}{dT}\,. \end{cases}$$

Se le curve u, v sono ortogonali, $F=o$ e le (1), (2) diventano

$$(3)\quad U-\frac{dS}{dT}-\left(\frac{dS}{du}\right)^2\frac{1}{2E}-\left(\frac{dS}{dv}\right)^2\frac{1}{2G}=o$$

$$(4)\quad \frac{dS}{du}=E\frac{du}{dT}\;,\quad \frac{dS}{dv}=G\frac{dv}{dT}.$$

II.

Ciò premesso, un punto mobile di coordinate x, y, z, sollecitato da forze la cui funzione potenziale è

$$(1)\quad U=Mx^2+Ny^2+Pz^2$$

M, N, P, essendo quantità indipendenti da x, y, z e da T, sia obbligato a rimanere sopra la superficie di un ellissoide di equazione

$$(2)\quad \frac{x^2}{t-a}+\frac{y^2}{t-b}+\frac{z^2}{t-c}=1$$

dove $a<b<c$; determiniamo le proprietà del moto di questo punto.

Prendiamo sull' ellissoide le coordinate ellittiche u, v ed allora avremo tra le x, y, z e u, v le relazioni

$$\frac{x^2}{u-a}+\frac{y^2}{u-b}-\frac{z^2}{c-u}=1,$$

$$\frac{x^2}{v-a}-\frac{y^2}{b-v}-\frac{z^2}{c-v}=1,$$

in cui come è noto è

$$\infty>t>c>u>b>v>a,$$

che unitamente alla (2) ci danno

$$(3)\quad \begin{cases} x^2=\dfrac{(t-a)\,(u-a)\,(v-a)}{(a-b)\,(a-c)}\,, \\[2mm] y^2=\dfrac{(t-b)\,(u-b)\,(v-b)}{(b-a)\,(b-c)}\,, \\[2mm] z^2=\dfrac{(t-c)\,(u-c)\,(v-c)}{(c-a)\,(c-b)}\,, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} F=o,\quad E=\frac{1}{4}\dfrac{(u-t)\,(u-v)}{(u-a)\,(u-b)\,(u-c)}, \\[2mm] \qquad\qquad G=\frac{1}{4}\dfrac{(v-t)\,(v-u)}{(v-a)\,(v-b)\,(v-c)}. \end{cases}$$

Sostituendo nella (1) per x^2, y^2, z^2 i valori (3), se si pone

$$I=M(t-a)\,(b-c)-N(t-b)\,(a-c)+P(t-c)\,(a-b)$$

$$K=\frac{M(t-a)\,(b^2-c^2)-N(t-b)\,(a^2-c^2)+P(t-c)\,(a^2-b^2)}{(a-b)\,(a-c)\,(b-c)}$$

$$H=\frac{-M(t-a)\,(b-c)\,(b^2+c^2)+N(t-b)\,(a-c)\,(a^2+c^2)}{(a-b)\,(a-c)\,(b-c)}$$
$$-\frac{P(t-c)\,(a-b)\,(a^2+b^2)}{(a-b)\,(a-c)\,(b-c)}$$

si ottiene per mezzo di un calcolo molto semplice

$$\mathrm{U}=uv\frac{\mathrm{I}}{(a-b)(a-c)(b-c)}-(u+v)\left[\frac{\mathrm{I}(a+b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}-\mathrm{K}\right]$$
$$+\frac{\mathrm{I}(a^2+b^2+c^2)}{(a-b)\,(a-c)\,(b-c)}+\mathrm{H}.$$

Sottoponiamo ora M, N, P a verificare la relazione

$$(5)\qquad \mathrm{I}=\mathrm{o};$$

allora la U diventa

$$\mathrm{U}=\mathrm{H}+\mathrm{K}(u+v).$$

Il caso particolare M=N=P=R soddisfa all'equazione (5) e dà

$$\mathrm{K}=\mathrm{R},\quad \mathrm{H}=\mathrm{R}[\,t-(a+b+c)\,].$$

Ora sostituiti per E, G i valori (4), e per U l'ultimo suo valore nella (3) §. I, otteniamo

$$(6)\ \mathrm{K}(u^2-v^2)+(u-v)\left[\mathrm{H}-\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{T}}\right]-\left(\frac{d\mathrm{S}}{du}\right)^2\frac{2(u-a)\,(u-b)\,(u-c)}{u-t}$$
$$+\left(\frac{d\mathrm{S}}{dv}\right)^2\frac{2(v-a)\,(v-b)\,(v-c)}{v-t}=\mathrm{o}.$$

Se indichiamo con M il primo membro di questa equazione e poniamo.

$$\mathrm{M}_0=\mathrm{H}-\frac{ds}{d\mathrm{T}}+\mathrm{KA}+\mathrm{KB}$$
$${}_1=\left(\frac{d\mathrm{S}}{du}\right)^2\frac{2(u-a)\,(u-b)\,(u-c)}{u-t}-\mathrm{K}(u-\mathrm{A})(u-\mathrm{B}),$$
$$\mathrm{M}_2=\left(\frac{d\mathrm{S}}{dv}\right)^2\frac{2(v-a)\,(v-b)\,(v-c)}{v-t}-\mathrm{K}(v-\mathrm{A})\,(v-\mathrm{B}),$$

essendo A e B due costanti, abbiamo

$$\mathrm{M}=(u-v)\mathrm{M}_0-\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2.$$

Se ricaviamo da ciascuna delle equazioni

$$\mathrm{M}_0=\mathrm{o},\quad \mathrm{M}_1=\mathrm{o},\quad \mathrm{M}_2=\mathrm{o}$$

il valore rispettivo di S e lo indichiamo con

$$\mathrm{S}_0,\quad \mathrm{S}_1,\quad \mathrm{S}_2$$

è chiaro che S_0 è funzione solo di T, S_1 di u, S_2 di v e la

$$(7)\qquad \mathrm{S}=\mathrm{S}_0+\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2$$

contenendo le due costanti A e B e soddisfacendo la (6), sarà la funzione che cerchiamo.

La (7) ci dà

$$\frac{d\mathrm{S}}{du}=\frac{d\mathrm{S}_1}{du}\ ,\quad \frac{d\mathrm{S}}{dv}=\frac{d\mathrm{S}}{dv}\ ,$$

ed i valori di $\frac{d\mathrm{S}_1}{du}$, $\frac{d\mathrm{S}_2}{dv}$ ricavati dalle $\mathrm{M}_1=\mathrm{o}$, $\mathrm{M}_2=\mathrm{o}$ sono

$$\frac{d\mathrm{S}}{du}=\sqrt{\frac{\mathrm{K}(u-\mathrm{A})\,(u-\mathrm{B})\,(u-t)}{2(u-a)\,(u-b)\,(u-c)}}\ ,$$
$$\frac{d\mathrm{S}}{dv}=\sqrt{\frac{\mathrm{K}(v-\mathrm{A})\,(v-\mathrm{B})\,(v-t)}{2(v-a)\,(v-b)\,(v-c)}}\ ,$$

in seguito alle quali le equazioni (4) § I, divengono nel nostro caso,

$$\sqrt{\frac{K(u-A)(u-B)(u-t)}{2(u-a)(u-b)(u-c)}}=4\,\frac{(u-t)(u-v)}{(u-a)(u-b)(u-c)}\frac{du}{dT},$$
$$\sqrt{\frac{K(v-A)(v-B)(v-t)}{2(v-a)(v-b)(v-c)}}=4\,\frac{(v-t)(v-u)}{(v-a)(v-b)(v-c)}\frac{dv}{dT},$$

le quali, posto

$$L_1=\sqrt{8K(u-A)(u-B)(u-t)(u-a)(u-b)(u-c)}$$
$$L_2=\sqrt{8K(v-A)(v-B)(v-t)(v-a)(v-b)(v-c)},$$

ci danno

$$(8)\quad\begin{cases}\dfrac{L_1}{u-t}=(u-v)\dfrac{du}{dT},\\[2mm] \dfrac{L_2}{v-t}=(v-u)\dfrac{dv}{dT}\end{cases}$$

e da queste

$$(9)\quad\begin{cases}\dfrac{(u-t)du}{L_1}+\dfrac{(v-t)dv}{L_2}=o,\\[2mm] \dfrac{u(u-t)du}{L_1}+\dfrac{v(v-t)dv}{L_2}=dT,\end{cases}$$

che integrate danno

$$(10)\quad\begin{cases}\displaystyle\int\frac{(u-t)du}{L_1}+\int\frac{(v-t)dv}{L_2}=C,\\[2mm] \displaystyle\int\frac{u(u-t)du}{L_1}+\int\frac{v(v-t)dv}{L_2}=T+C'.\end{cases}$$

La prima di queste equazioni è l'equazione della curva percorsa dal punto mobile e i due integrali che entrano nel primo membro sono ultraellittici di prima specie e di primo ordine; la seconda equazione ci dà il tempo T, e gli integrali che entrano nel suo primo membro sono pure ultraellittici di primo ordine, ma però di terza specie.

III.

Facendo uso del principio meccanico del §. I. troviamo pure immediatamente l'equazione delle geodetiche sopra un ellissoide. Perciò poniamo U=o nella (3) §. I. ed avremo

$$M=-(u-v)\,\frac{dS}{dT}-\left(\frac{dS}{du}\right)^2\frac{2(u-a)(u-b)(u-c)}{u-t}+\left(\frac{dS}{dv}\right)^2\frac{2(v-a)(v-b)(v-c)}{v-t}=o.$$

Avremo quindi

$$M=M_0-M_1+M_2$$

se si pone

$$M_0=-\left(\frac{dS}{dT}+A+B\right)(u-v)$$
$$M_1=\frac{2(u-a)(u-b)(u-c)}{u-t}\left(\frac{dS}{du}\right)^2-(u-A)B-(u-B)A$$
$$M_2=\frac{2(v-a)(v-b)(v-c)}{v-t}\left(\frac{dS}{dv}\right)^2-(v-A)B-(v-B)B.$$

Ragionando ora come nel caso precedente avremo

$$\frac{dS}{du}=\sqrt{\frac{(u-t)[u(A+B)-2AB]}{2(u-a)(u-b)(u-c)}}$$
$$\frac{dS}{du}=\sqrt{\frac{(v-t)[v(A+B)-2AB]}{2(v-a)(v-b)(v-c)}},$$

onde, posta

$$A+B=\alpha, \quad \frac{2AB}{A+B}=\beta$$

$$\sqrt{8\alpha(u-t)(u-\beta)(u-a)(u-b)(u-c)}=L'_1,$$

$$\sqrt{8\alpha(v-t)(v-\beta)(v-a)(v-b)(v-c)}=L'_2,$$

le (4) del §. I. diventano

$$(1)\begin{cases} \dfrac{(u-t)\mathrm{d}u}{L_1'}+\dfrac{(v-t)\,\mathrm{d}v}{L'_2}=0, \\ \dfrac{u(u-t)\mathrm{d}u}{L'_1}+\dfrac{v(v-t)\,\mathrm{d}v}{L'_2}=d\mathrm{T}, \end{cases}$$

dalle quali si ricava

$$\int\frac{(u-t)\mathrm{d}u}{L_1'}+\int\frac{(v-t)\,\mathrm{d}v}{L'_2}=C$$

$$\int\frac{u(u-t)\mathrm{d}u}{L'_1}+\int\frac{v(v-t)\,\mathrm{d}v}{L'_2}=\mathrm{T}+C'.$$

La prima delle equazioni precedenti è la nota equazione delle geodetiche (*), la seconda ci dà il tempo espresso per integrali ultraellittici di seconda specie.

Le costanti α e β si determinano subito, poichè dalle (1) si ricava facilmente, chiamando ds l'elemento d'arco di geodetica,

$$\frac{ds}{d\mathrm{T}}=\sqrt{2\alpha},$$

(*) Vedi Jacobi *Vorlesungen über Dynamik*.

e chiamando i l'angolo che la geodetica fà colle linee v,

$$(2) \qquad v\cos^2 i+u\,\mathrm{sen}^2\, i=\beta,$$

che è il noto teorema di Joamchimsthal e determina β.

IV.

Ritornando ora al nostro problema, determiniamo la velocità da cui è animato il punto ed il modo di trovare le costanti A e B.

L'elemento dell'arco s della traiettoria del punto sarà

$$(1) \qquad ds=\sqrt{\mathrm{E}du^2+\mathrm{G}dv^2}$$

dove tra u e v esiste la relazione (9) del §. II, la quale può anche porsi sotto la forma

$$(2) \qquad -\frac{\mathrm{G}(u-\mathrm{A})(u-\mathrm{B})}{\mathrm{E}(v-\mathrm{A})(v-\mathrm{B})}=\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}v^2},$$

onde sostituendo nella (1) si trova

$$\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}u(u-v)(u-t)}{L_1}\sqrt{2\mathrm{K}(u+v-\mathrm{A}-\mathrm{B})}$$

la quale, in virtù delle (8) del §. II. diviene,

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{dT}}=\sqrt{2\mathrm{K}(u+v-\mathrm{A}-\mathrm{B})},$$

che ci dà la velocità del punto mobile alla fine del tempo T.

Chiamando i l'angolo che la nostra curva fa colle linee di curvatura v, la (2) ci dà

$$\frac{\cos^2 i}{\operatorname{sen}^2 i} = -\frac{(u-\mathrm{A})(u-\mathrm{B})}{(v-\mathrm{A})(v-\mathrm{B})},$$

dalla quale si ricava

$$(4) \qquad uv-(u+v-\mathrm{A}-\mathrm{B})(v\cos^2 i+u\operatorname{sen}^2 i)=\mathrm{AB}$$

che è un integrale primo analogo a quello (2) del §. III. delle geodetiche.

La formola precedente, che in virtù della (3) può scriversi

$$uv-\frac{1}{2\mathrm{K}}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2(v\cos^2 i+u\operatorname{sen}^2 i)=\mathrm{AB}$$

e la (3) stessa

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=u+v-\frac{1}{2\mathrm{K}}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2$$

ci permettono di determinare A e B come radici dell' equazione di secondo grado

$$x^2-\left[u+v-\frac{1}{2\mathrm{K}}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2\right]x+$$
$$\left[uv-\frac{1}{2\mathrm{K}}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2(v\cos^2 i+u\operatorname{sen}^2 i)\right]=0.$$

Le quantità A e B saranno sempre reali poichè abbiamo

$$2x=u+v-\frac{1}{2\mathrm{K}}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2-$$
$$-\sqrt{\left[u+v-\frac{1}{2\mathrm{K}}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2\right]^2-4\left[uv-\frac{1}{2\mathrm{K}}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2(v\cos^2 i+u\operatorname{sen}^2 i)\right.}$$

e sviluppando la quantità sotto il radicale, essa diventa

$$\left[u-v-\frac{1}{2\mathrm{K}}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2\cos 2i\right]^2+\frac{1}{4\mathrm{K}^2}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^4\operatorname{sen}^2 2i,$$

quantità essenzialmente positiva.

Conosciuti intanto i valori di u, v, $\frac{ds}{d\mathrm{T}}$, i in un istante qualunque, per esempio al principio del moto, sono conosciuti i valori di A e B.

V.

L' essere nel nostro caso l' equazione della traiettoria data per mezzo di integrali ultraellittici ci mostra l'analogia che esiste tra queste curve e le geodetiche; la considerazione dell' equazione (4) del §. IV ci mostrerà che quest'analogia può essere spinta più oltre.

Cominciamo primieramente dal vedere quali valori possano prendere le costanti A e B.

Dovendo aversi costantemente

$$\infty > t > c > u > b > v > a$$

avremo

$$(u-t)\,(u-a)\,(u-b)\,(u-c)>0,$$
$$(v-t)\,(v-a)\,(v-b)\,(v-c)<0,$$

e le quantità L_1, L_2 dovendo essere reali, se supponiamo $\mathrm{K}>0$, (sono evidenti le modificazioni da introdursi, anche per ciò che segue, quando si abbia $\mathrm{K}<0$), dovrà essere

$$(u-\mathrm{A})\;(u-\mathrm{B})>0$$
$$(v-\mathrm{A})\;(v-\mathrm{B})<0$$

e per conseguenza supposto $A < B$ dovrà aversi

$$u > B > v > A$$

e saranno quindi possibili i quattro casi seguenti

$$c > u > B > b > v > A > a,$$
$$c > u > B > b > v > a > A,$$
$$c > u > b > B > v > A > a,$$
$$c > u > b > B > v > a > A.$$

Nel primo caso quindi, il punto potrà muoversi in quella porzione di ellissoide i punti della quale corrispondono ai valori di u compresi tra c e B e a quelli di v compresi tra tra b e A. Le quattro curve $u=B$, $v=A$ limitano quindi due spazii separati, in uno dei quali si muoverà il punto.

Nel secondo caso sarà possibile il movimento nei punti che corrispondono a tutti i valori possibili di v e a quelli di u compresi tra c e B; è quindi nella striscia limitata dalle due curve $u=B$ che il punto si muoverà.

Nel terzo caso potrà il punto muoversi in una delle due zone separate determinate dalle quattro curve $v=B$ e $v=A$, e finalmente nel quarto caso nella striscia compresa tra le due curve $v=B$.

Tutto questo è in stretta relazione con ciò che succede sulla sfera, come trovasi nella citata memoria del sig. NEUMANN.

Ciò posto, prendiamo l'equazione (4) del §. IV.

$$(1) \quad uv - (u+v-A-B)(v\cos^2 i + u \operatorname{sen}^2 i) = AB.$$

È noto che dall'equazione (2) del §. III. si deduce che tutte le geodetiche che essa rappresenta sono tangenti alla curva $v=\beta$.

Nel nostro caso l'equazione (1) ci mostrerà come le curve che essa rappresenta siano tangenti alle linee di curvatura $u,v=B,A$, secondo i casi.

Consideriamo separatamente i quattro casi antecedenti.

Nel primo caso la (1) è soddisfatta da $u=B$, $v=A$ qualunque sia l'angolo i; tutte le curve rappresentate da essa passano quindi per uno dei quattro punti $u=B$, $v=A$ i quali hanno quindi una proprietà analoga a quella dei quattro ombilichi nel caso delle geodetiche.

Nel secondo caso posto $u=B$, l'equazione (1) diviene

$$Bv-(v-A)(v\cos^2 i + B\operatorname{sen}^2 i) = AB$$

che è soddisfatta da $i=\frac{\pi}{2}$; tutte le curve (1) sono quindi tangenti alla linea $u=B$.

Nel terzo caso posto primieramente $v=A$ e poi $v=B$ si hanno le equazioni

$$Au-(u-B)(A\cos^2 i + u\operatorname{sen}^2 i) = AB,$$
$$Bu-(u-A)(B\cos^2 i + u\operatorname{sen}^2 i) = AB,$$

le quali entrambe sono soddisfatte da $i=o$; le linee (1) sono quindi tangenti alle due $v=A$ e $v=B$.

Finalmente nell'ultimo caso posto nella (1) $v=B$ essa è soddisfatta da $i=o$ e le (1) inviluppano la $v=B$.

VI.

Per ricavare dalle equazioni (10) del §. II. i valori di u e v possiamo solamente far uso della prima di esse, poichè la seconda contiene integrali di terza specie, dei quali non possiamo servirci per fare l'inversione. Sarà dunque necessario prendere una variabile ausiliaria in cui entrino integrali di prima specie e unitamente alla prima delle (10) del §. II. fare con esse l'inversione.

Analogamente a ciò che hanno fatto LIOUVILLE, e WEIERSTRASS nella memoria — *Sulle linee geodetiche di un ellissoide a tre assi* — (*Monatsbericht der Preuss. Akad. ann.* 1861), prenderemo per variabile ausiliaria la quantità

$$(1)\qquad \mathrm{M}=-\int\frac{du}{\mathrm{L}_1}+\int\frac{dv}{\mathrm{L}_2}$$

che a cagione della (8) del §. II. sarà data anche da

$$-\int\frac{d\mathrm{T}}{(u-t)\,(v-t)}$$

Consideriamo l'equazione della nostra curva

$$(2)\qquad \int_\alpha^u\frac{(x-t)\,dx}{\mathrm{L}}+\int_\beta^v\frac{(x-t)\,dx}{\mathrm{L}}=\mathrm{M}_0$$

dove M_0 è costante,

$$\mathrm{L}=\sqrt{8\mathrm{K}(x-t)\,(x-\beta_1)\,(x-\beta_2)\,(x-\beta_3)\,(x-\beta_4)\,(x-\beta_5)}$$

e le $\beta_1\ \beta_2, \ldots$ sono le $a,\ b, \ldots$ nel loro ordine di grandezza

$$t>\beta_1>\beta_2>\beta_3>\beta_4>\beta_5 .$$

Sostituiamo alla x una nuova variabile z per mezzo della sostituzione razionale

$$z=\frac{x-\beta_1}{x-t}$$

Da questa avremo

$$x=\frac{zt-\beta_1}{z-1},\ dx=\frac{\beta_1-t}{(z-1)^2}dz\ ,\ x-t=\frac{t-\beta_1}{z-1}$$

ed indicando con β_s una qualunque delle β_2, β_3, β_4, β_5 si ha

$$x-\beta_s=\frac{z(t-\beta_s)-(\beta_1-\beta_s)}{z-1}$$

$$=\frac{z(t-\beta_s)-(\beta_1-\beta_s)}{t-\beta_1}(x-t).$$

I nuovi limiti da porsi nella (2) e nella

$$(3)\qquad \mathrm{M}=\int_\alpha^u\frac{dx}{\mathrm{L}}+\int_\beta^v\frac{dx}{\mathrm{L}}$$

che non è altro che la (1), chiamati u_1, u_2, a_1, a_2 saranno

$$u_1=\frac{u-\beta_1}{v-t}\ ,\ \ a_1=\frac{\alpha-\beta_1}{a-t}\ ,$$

$$u_2=\frac{v-\beta_1}{v-t}\ ,\ \ a_2=\frac{\beta-\beta_1}{\beta-t}\ ,$$

Fatte le sostituzioni, le quantità

$$\int\frac{(x-t)dx}{\mathrm{L}}\ ,\ \int\frac{dx}{\mathrm{L}}\ ,$$

diventano rispettivamente

$$\frac{\beta_1-t}{\sqrt{8\mathrm{K}(t-\beta_2)(t-\beta_3)(t-\beta_4)(t-\beta_5)}}\times$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z\left(z-\frac{\beta_1-\beta_2}{t-\beta_2}\right)\left(z-\frac{\beta_1-\beta_3}{t-\beta_3}\right)\left(z-\frac{\beta_1-\beta_4}{t-\beta_4}\right)\left(z-\frac{\beta_1-\beta_5}{t-\beta_5}\right)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8K(t-\beta_2)(t-\beta_3)(t-\beta_4)(t-\beta_5)}}\times$$

$$\int\frac{(1-z)dz}{\sqrt{z\left(\frac{\beta_1-\beta_2}{t-\beta_2}\right)\left(z-\frac{\beta-\beta_3}{t-\beta_3}\right)\left(z-\frac{\beta_1-\beta_4}{t-\beta_4}\right)\left(z-\frac{\beta_1-\beta_5}{t-\beta_5}\right)}}$$

Le quantità

$$\frac{\beta_1-\beta_s}{t-\beta_s}$$

sono tutte maggiori di zero, e chiamandole α_1, α_2, α_3, α_4 per modo che

$$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4>o,$$

posto

$$\sqrt{z(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}=\sqrt{z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$$

le (2), (3) diventano

$$\int_{a_1}^{u_1}\frac{dz}{\sqrt{z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}}+\int_{a_2}^{u_2}\frac{dz}{\sqrt{z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}}\quad M_1$$

$$\int_{a_2}^{u_1}\frac{(1-z)dz}{\sqrt{z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}}+\int_{a_2}^{u_2}\frac{(1-z)\,dz}{\sqrt{z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}}=M_2$$

dove

$$M_1=\frac{M_0}{\beta_1-t}\sqrt{8K(t-\beta_2)(t-\beta_3)(t-\beta_4)(t-\beta_5)}$$

$$M_2=M\sqrt{8K(t-\beta_2)(t-\beta_3)(t-\beta_4)(t-\beta_5)}$$

Se ora poniamo

$$w_1=\int\frac{dz}{\sqrt{z,\alpha_1,\alpha_2\alpha_3,\alpha_4}}\ ,\ w_2=\int\frac{(1-z)dz}{\sqrt{z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}}$$

saranno le w_1, w_2 funzioni di una superficie di *Riemann* di due fogli, cinque volte connessa, i cui punti di diramazione saranno sull'asse delle quantità reali nei punti, $o,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\,\infty$. Per mezzo di w_1, w_2 costruiamo ora gli integrali normali U_1, U_2, cioè tali che fatte le sezioni a_1, a_2, b_1, b_2 come fa RIEMANN [1], che riducono la superficie semplicemente connessa, U_1 abbia il modulo di periodicità uguale a πi nella sezione b_1 e uguale a zero nella b_2, ed U_2 uguale a zero nella b_1 e πi nella b_2; se allora si indicano con a_{11}, a_{12}; a_{21}, a_{22} i moduli di periodicità di U_1, U_2 nelle sezioni a_1, a_2 si ha $a_{12}=a_{21}$.

Posto quindi

$$U_1=A_1\,w_1+A_2\,w_2,$$
$$U_2=A_1'\,w_1+A_2'\,w_2$$

dovranno le A_1, A_2 ricavarsi dalle equazioni

$$\frac{\pi i}{2}=A_1\int_0^{\alpha_1}dw_1+A_2\int_0^{\alpha_1}dw_2,\qquad o=A_1\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}dw_1+A_2\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}dw_2,$$

(1) Vedi RIEMANN *Theorie der Abel'schen Functionen* Crelle Vol. 54 e PRYM *Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen* (Acc. di Vienna Vol. XXIV) e *Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche* (Acc. dei Nat. Svizzeri Vol. XXII).

e le A_1' , A_2' dalle

$$o=A_1'\int_0^{\alpha_1} dw_1+A_2'\int_0^{\alpha_1} dw_2\,, \qquad \frac{\pi i}{2}=A_1'\int_{\alpha_2}^{\alpha_2} dw_1+A_2'\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dw_2,$$

onde, indicando con Δ il determinante formato coi coefficienti di A_1 , A_2 ,

$$A_1=\frac{\pi i}{2\Delta}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dw_2\,,\quad A'_1=-\frac{\pi i}{2\Delta}\int_0^{\alpha_1} dw_2$$

$$A_2=-\frac{\pi i}{2\Delta}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dw_1\,,\quad A'_2=\frac{\pi i}{2\Delta}\int_0^{\alpha_1} dw_1\,,$$

con che

$$(4)\begin{cases} U_1=\dfrac{\pi i}{2\Delta}\left[w_1\displaystyle\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dw_2-w_2\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dw_1\right]\,, \\[2ex] U_2=-\dfrac{\pi i}{2\Delta}\left[w_1\displaystyle\int_0^{\alpha_1} dw_2-w_2\int_0^{\alpha_1} dw_1\right]\,, \end{cases}$$

$$a_{11}=-\frac{\pi i}{\Delta}\left[\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dw_2\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dw_1+\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dw_1\right)-\right.$$

$$\left.\int_{\alpha_3}^{\alpha_2} d\,w_1\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dw_2+\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dw_2\right)\right]\,,$$

$$a_{22}=\frac{\pi i}{\Delta}\left[\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dw_1\int_0^{\alpha_1} dw_2-\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dw_2\int_0^{\alpha_1} dw_1\right]\,,$$

$$a_{12}=a_{21}=-\frac{\pi i}{\Delta}\left[\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dw_1\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dw_2-\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dw_2\int_0^{\alpha_3} dw_1\right]=$$

$$\frac{\pi i}{\Delta}\left[\int_0^{\alpha_1} dw_2\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dw_1+\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dw_1\right)-\int_0^{\alpha_1} dw_1\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dw_2+\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} dw_2\right)\right]$$

Se ora poniamo

$$\omega_1=\int_{a_1}^{u_1} dU_1+\int_{a_2}^{u_2} dU_1\,,\qquad \omega_2=\int_{a_1}^{u_1} dU_2+\int_{a_2}^{u_2} dU_2\,,$$

possiamo per mezzo delle funzioni ς esprimere le u_1 u_2 per ω_1 , ω_2 , e se si osserva, che ponendo nelle equazioni precedenti per U_1 , U_2 i loro valori (4) si ottiene

$$\omega_1=\frac{\pi i}{2\Delta}\left[M_1\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dw_2-M_2\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dw_1\right],$$

$$\omega_2=\frac{-\pi i}{2\Delta}\left[M_1\int_0^{\alpha_1} dw_2-M_2\int_0^{\alpha_1} dw_1\right],$$

si vede che in tal guisa si ottiene lo scopo prefisso di esprimere u_1, u_2 per M_1, M_2.

Essendo dunque

$$\vartheta_{\substack{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\\ \varepsilon'_1\,\varepsilon'_2}}(\omega_1\,,\,\omega_2)=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum(-1)^{m\varepsilon_1+n\varepsilon_2}\,e^{\left(m+\frac{\varepsilon'_1}{2}\right)^2 a_{11}+2\left(m+\frac{\varepsilon'_1}{2}\right)\left(n+\frac{\varepsilon'_2}{2}\right)a_{12}}\times$$

$$\times\, e^{\left(n+\frac{\varepsilon'_2}{2}\right)^2 a_{22}+2\left(m+\frac{\varepsilon'_1}{2}\right)\omega_1+2\left(n+\frac{\varepsilon'_2}{2}\right)\omega_2}$$

e servendoci delle formole date dal ROSENHAIN, si trova facilmente

$$u_1-u_2=-\sqrt{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\,\frac{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}$$

$$(\alpha_1-u_1)(\alpha_1-u_2)=-\sqrt{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_1)}\,\frac{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}$$

$$(\alpha_2-u_1)(\alpha_2-u_2)=\sqrt{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)}\,\frac{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}$$

$$(\alpha_3-u_1)(\alpha_3-u_2)=\sqrt{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)}\,\frac{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}$$

$$(\alpha_4-u_1)(\alpha_4-u_2)=\sqrt{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)}\,\frac{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}{\vartheta^2_{\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}}(\omega_1\,,\,\omega_2)}$$

VII.

Se nella funzione potenziale delle forze che sollecitano il punto

$$(1)\qquad U=Mx^2+Ny^2+Pz^2$$

le M, N, P, non dovessero verificare nessuna relazione tutto il detto fin qui sarebbe applicabile al movimento di un punto sopra un ellissoide per la sola azione di questo, poichè posto

$$(2)\quad \begin{cases} M=-\pi\displaystyle\int_0^\infty\frac{ds}{(t-a+s)\Delta}\,, & N=-\pi\displaystyle\int_0^\infty\frac{ds}{(t-b+s)\Delta} \\ P=-\pi\displaystyle\int_0^\infty\frac{ds}{(t-c+s)\Delta} \end{cases}$$

essendo

$$\Delta=\sqrt{\left(1+\frac{s}{t-a}\right)\left(1+\frac{s}{t-b}\right)\left(1+\frac{s}{t-c}\right)}$$

la (1) è precisamente la funzione potenziale dell' ellissoide, quando le sue molecole si attraggono secondo la legge di Newton.

Dovendo però le M, N, P soddisfare alla relazione (5) del §. II., bisognerà che si abbia la relazione:

$$I=-\pi(a-b)(b-c)(c-a)\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}\times$$

$$\int_0^\infty\frac{s\,ds}{\{(t-a+s)(t-b+s)(t-c+s)\}^{\frac{3}{2}}}=0$$

e siccome l' integrale che qui comparisce non può annullarsi, onde questa relazione sia soddisfatta, bisognerà che si annulli uno degli altri fattori.

Ora perchè si annulli il radicale è d' uopo che sia $t=c$, ed allora l'ellissoide si riduce ad un ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{c-a}+\frac{y^2}{c-b}=1\ ;$$

se poi si annulla uno degli altri fattori, l'ellissoide sarà di rivoluzione, ma allora tutte le formole fin qui trovate prendono una forma indeterminata.

Per il moto di un punto sopra un vero ellissoide a tre assi per la sola azione di questo non si può quindi applicare il metodo fin qui tenuto.

VIII.

Passiamo adesso al caso di un ellissoide di rivoluzione attorno al suo piccolo asse.

Prendiamo nello spazio un sistema di coordinate ortogonali, costituito da piani passanti per una retta, l' asse delle x, e da ellissoidi ed iperboloidi omofocali generati dalla rivoluzione, intorno all'asse x, di ellissi e di iperbole omofocali descritte su uno di questi piani. Indichiamo con ψ l'angolo che i piani mobili fanno col piano $x\ y$, e con η la distanza di un punto preso sopra uno di questi piani dall' asse $o\ x$; avremo

$$y=\eta\cos\psi$$
$$z=\eta\,\text{sen}\,\psi.$$

Sul piano che consideriamo possiamo prendere le equazioni delle ellissi e iperbole omofocali sotto la forma

$$\frac{\eta^2}{a^2\cos\text{h}^2\theta}+\frac{x^2}{a^2\text{senh}^2\theta}=1,$$

$$\frac{\eta^2}{a^2\cos^2\varphi}-\frac{x^2}{a^2\text{sen}^2\varphi}=1;$$

ψ, θ e φ sono quindi i parametri delle tre superficie che compongono il sistema suddetto.

Le equazioni precedenti danno

$$x=a\,\text{sen h}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$$
$$\eta=a\cos\text{h}\,\theta\cos\varphi,$$

e siccome

$$dy=d\eta\cos\psi-\eta\,\text{sen}\,\psi\,d\psi$$
$$dz=d\eta\,\text{sen}\,\psi+\eta\cos\psi\,d\psi$$

l'elemento lineare ds dello spazio sarà dato dalla espressione

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=dx^2+d\eta^2+\eta^2d\psi^2.$$

Ora

$$dx=a\cos\text{h}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\,d\,\theta+a\,\text{sen h}\,\theta\cos\varphi\,d\varphi,$$
$$d\eta=a\,\text{sen h}\,\theta\cos\varphi\,d\,\theta-a\cos\text{h}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\,d\,\varphi$$

per cui

$$ds^2=a^2(\cos\text{h}^2\,\theta-\cos^2\varphi)\,(d\theta^2+d\varphi^2)+a^2\cos\text{h}^2\,\theta\cos^2\varphi\,d\,\psi^2,$$

quindi l'elemento lineare dell'ellissoide di rivoluzione: $\theta =$ costante, sarà

$$ds^2 = a^2(\cos h^2 \theta - \cos^2 \varphi)\, d\varphi^2 + a^2 \cos h^2 \theta \cos^2 \varphi d\psi^2,$$

Supponiamo ora che un punto materiale debba muoversi su questo ellissoide sollecitato da forze la cui funzione potenziale è

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= \mathrm{M}x^2 + \mathrm{N}(y^2+z^2) \\ &= \mathrm{M}\, a^2 \operatorname{sen} h^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi + \mathrm{N}\, a^2 \cos h^2 \theta \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Allora l'equazione (3) del §. I. diviene

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}a^2 \operatorname{sen} h^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi + \mathrm{N}a^2 \cos h^2 \theta \cos^4 \varphi - \frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{T}} \cos^2 \varphi - \left(\frac{d\mathrm{S}}{d\varphi}\right)^2 \frac{\cos^2 \varphi}{2a^2(\cos h^2 \theta - \cos^2 \varphi)} - \left(\frac{d\mathrm{S}}{d\psi}\right)^2 \frac{1}{2a^2 \cos h^2 \theta} = 0$$

e indicando con A e B due costanti, e ponendo

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{T}} + \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{M}_0,$$

$$\mathrm{A} \cos^2 \varphi - \mathrm{B} \operatorname{sen}^2 \varphi + \mathrm{M}\, a^2 \operatorname{sen} h^2 \theta \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^3 \varphi + \mathrm{N}\, a^2 \cosh^2 \theta \cos^4 \varphi - \left(\frac{d\mathrm{S}}{d\varphi}\right)^2 \frac{\cos^2 \varphi}{2a^2(\cosh^2 \theta - \cos^2 \varphi)} = \mathrm{M}_1,$$

$$\left(\frac{d\mathrm{S}}{d\psi}\right)^2 \frac{1}{2a^2 \cos h^2 \theta} - \mathrm{B} = \mathrm{M}_2$$

abbiamo

$$\mathrm{M} = -\mathrm{M}_0 \cos^2 \varphi + \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2$$

laonde ragionando come al §. II. otterremo:

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\varphi} = \sqrt{\left\{ 2a^2(\cosh^2\theta - \cos^2\varphi)[\mathrm{A} - \mathrm{B}\operatorname{tang}^2\varphi + \mathrm{M}a^2 \operatorname{senh}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi + \mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi] \right\}}$$

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\psi} = a\cosh\theta\sqrt{2\mathrm{B}},$$

per cui le (4) del §. I. daranno, nel nostro caso,

$$(1)\quad \frac{d\varphi}{d\mathrm{T}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}\operatorname{tang}^2\varphi + \mathrm{M}a^2\operatorname{senh}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi}{a^2(\cosh^2\theta - \cos^2\varphi)}}$$

$$\cos^2\varphi \frac{d\psi}{d\mathrm{T}} = \frac{\sqrt{2\mathrm{B}}}{a\cosh\theta}$$

dalle quali ricaviamo l'equazione differenziale della traiettoria del punto

$$(2)\quad \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\sqrt{\mathrm{B}(\cosh^2\theta - \cos^2\varphi)}}{\cosh\theta\cos^2\varphi\sqrt{\mathrm{A} - \mathrm{B}\operatorname{tang}^2\varphi + \mathrm{M}a^2\operatorname{senh}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi}}$$

da cui integrando

$$\psi - \psi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi\sqrt{\mathrm{B}(\cosh^2\theta - \cos^2\varphi)}}{\cosh\theta\cos^2\varphi\sqrt{[\mathrm{A} - \mathrm{B}\operatorname{tang}^2\varphi + \mathrm{M}a^2\operatorname{sen}h^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^4\varphi]}}$$

φ_0 e ψ_0 essendo i valori di φ e ψ ad un istante del moto, per esempio al principio. Poniamo

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{x}}\ ,\quad d\varphi=\frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$$

ed avremo

$$\psi-\psi_0=\sqrt{\mathrm{B}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx(x\cosh^2\theta-1)}{2\cosh\theta\sqrt{\left\{\begin{array}{c}(x-1)(x\cosh^2\theta-1)[\mathrm{A}x-\mathrm{B}(x-1)x+\\ \mathrm{M}a^2\mathrm{senh}^2\theta(x-1)+\mathrm{N}a^2\cosh^2\theta]\end{array}\right\}}}$$

che ridurremo alla forma canonica degli integrali ellittici di terza specie.

IX.

Cerchiamo ora l' arco s della trajettoria e la velocità del punto mobile e determiniamo le costanti A e B.

Abbiamo

$$ds=\sqrt{\mathrm{E}d\varphi^2+\mathrm{G}d\psi^2}$$

e in virtù della (2) del §. VIII.

$$ds=d\varphi\sqrt{\frac{a^2(\cosh^2\theta-\cos^2\varphi)[\mathrm{A}+\mathrm{BM}a^2\mathrm{senh}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi+\mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^4\varphi]}{\mathrm{A}\cos^2\varphi-\mathrm{B}\,\mathrm{sen}^2\varphi+\mathrm{M}a^2\mathrm{senh}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\varphi+\mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^4\varphi}}$$

la quale avuto riguardo alla (1) dol §. VIII. ci dà la velocità

$$\frac{ds}{d\mathrm{T}}=\sqrt{2[\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{M}a^2\mathrm{sen}^2\mathrm{h}\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi+\mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi]}$$

Determiniamo ora il valore delle costanti A e B. Se i è l' angolo della trajettoria colle linee $\psi=$ costante, abbiamo in generale

$$\frac{\mathrm{sen}^2 i}{\cos^2 i}=\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}\frac{d\psi^2}{d\varphi^2}$$

che nel nostro caso diventa

$$\mathrm{B}\cos^2 i=\mathrm{sen}^2 i[\mathrm{A}\cos^2\varphi-\mathrm{B}\,\mathrm{sen}^2\varphi+\mathrm{M}a^2\mathrm{senh}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\varphi$$
$$+\mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^4\varphi]$$

Abbiamo quindi per determinare A e B le due equazioni

$$\mathrm{B}(\cos^2 i+\mathrm{sen}^2 i\,\mathrm{sen}^2\varphi)-\mathrm{A}\,\mathrm{sen}^2 i\cos^2\varphi=$$
$$\mathrm{sen}^2 i\cos^2\varphi[\mathrm{M}a^2\mathrm{senh}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi+\mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi],$$
$$\mathrm{B}+\mathrm{A}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2-[\mathrm{M}a^2\mathrm{senh}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi+\mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi],$$

dalle quali si ha subito

$$\mathrm{B}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2\mathrm{sen}^2 i\cos^2\varphi,$$
$$\mathrm{A}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right)^2(\cos^2 i+\mathrm{sen}^2 i\,\mathrm{sen}^2\varphi)-[\mathrm{M}a^2\mathrm{senh}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi+\mathrm{N}a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi];$$

conosciuti quindi i valori di $\left(\frac{ds}{d\mathrm{T}}\right),\varphi,i$ ad un istante qualunque del moto, sono determinate le costanti A e B.

X.

Riprendiamo l'equazione della traiettoria, che è la (3) dei §. VIII. se poniamo

$$P = A + B + M a^2 \operatorname{senh}^2\theta$$

$$Q = (A + B + M a^2 \operatorname{senh}^2\theta)^2 + 4B(N a^2 \cosh^2\theta - M a^2 \operatorname{senh}^2\theta)$$

$$x_1 = \frac{P + \sqrt{Q}}{2B}\ , \quad x_2 = \frac{P - \sqrt{Q}}{2B}$$

essa diventa, posto $\psi - \psi_0 = \psi'$

$$\psi' = \frac{-i}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{dx\left(x - \frac{1}{\cosh^2\theta}\right)}{\sqrt{(x-1)\left(x - \frac{1}{\cosh^2\theta}\right)(x - x_1)(x - x_2)}}$$

Se si indica con e l'eccentricità dell'ellissoide di rivoluzione, si ha

$$e^2 = \frac{1}{\cosh^2\theta}$$

onde

$$(m) \quad \psi' = \frac{-i}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{dx(x - e^2)}{\sqrt{(x-1)(x-e^2)(x-x_1)(x-x_2)}}\ .$$

Riduciamo quest' integrale alla forma canonica.

Se in un integrale della forma

$$(n) \quad \int \frac{dx(x-\gamma)}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

poniamo

$$x = \frac{\gamma(\beta-\alpha)\, z^2 + \alpha\,(\gamma-\beta)}{(\beta-\alpha)z^2 + \gamma - \beta}$$

esso si trasforma in

$$\frac{2(\alpha-\gamma)}{\sqrt{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)}} \int \frac{dz}{\left(1 - \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} z^2\right)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

essendo

$$k^2 = \frac{(\delta-\gamma)\,(\beta-\alpha)}{(\alpha-\delta)\,(\gamma-\beta)}$$

e k^2 deve essere reale, positivo, e minore dell' unità.

Nel nostro caso poniamo

$$\alpha = x_2\ ,\quad \beta = x_1\ ,\quad \gamma = e^2\ ,\quad \delta = 1;$$

allora la trasformazione da farsi sarà

$$(1) \quad x = \frac{e^2(x_2 - x_1)z^2 + x_2(e^2 - x_1)}{(x_1 - x_2)z^2 + e^2 - x_1}$$

e sarà

$$(2)\quad k^2=\frac{(1-e^2)(x_1-x_2)}{(x_2-1)(e^2-x_1)}=\frac{(1-e^2)\frac{\sqrt{Q}}{B}}{(x_2-1)(e^2-x_1)}$$

Se ora noi supponiamo che il moto abbia luogo per l'azione dell'ellissoide stesso, allora

$$Na^2\cosh^2\theta - Ma^2\operatorname{senh}^2\theta > o$$

ed il numeratore di k^2 è positivo, e k^2 è reale. Supponiamo ora che il denominatore sia positivo; allora se $k^2<1$, starà bene la trasformazione (1) col valore (2) di k^2; se è $k^2>1$ poniamo

$$\alpha=x_2\ ,\ \beta=1\ ,\ \gamma=e^2\ ,\ \delta=x_1$$

con che

$$x=\frac{e^2(1-x_2)\,z^2+x_2(e^2-1)}{(1-x_2)z^2+e^2-1}$$

$$k^2=\frac{(x_1-e^2)\,(1-x_2)}{(x_2-x_1)\,(e^2-1)}\,,$$

avremo che $k^2<1$.

Se il denominatore della (2) è negativo, poniamo

$$\alpha=x_1\quad,\quad\beta=1\quad,\quad\gamma=e^2\quad,\quad\delta=x_2$$

allora sarà

$$(3)\quad x=\frac{e^2(1-x_1)\,z^2+x_1(e^2-1)}{(1-x_1)z^2+e^2-1}\,,$$

$$(4)\quad k^2=\frac{(x_2-e^2)\,(1-x_1)}{(x_1-x_2)(e^2-1)}\,.$$

Ora il denominatore è negativo, e lo è ancora il numeratore, poichè essendo

$$(x_2-1)\,(e^2-x_1)<o$$

ciò succede, o perchè

$$x_2>1\quad,\quad x_1>e^2$$

ma allora, poichè $x_1>x_2$, $1>e^2$, sarà anche

$$x_2>e^2,\quad x_1>1$$

e quindi

$$(a)\qquad (x_2-e^2)\,(1-x_1)<o;$$

o perchè

$$1>x_2\quad,\quad e^2>x_1$$

ed allora è anche

$$e^2>x_2\quad,\quad 1>x_1$$

e quindi è verificata la (a).

Il k^2 dato dalla (4) è positivo e se è <1 possiamo ritenere la trasformazione (3); se è >1 , posto

$$\alpha=x_1\ ,\ \beta=x_2\ ,\ \delta=1\ ,\ \gamma=e^2$$

con che

$$x=\frac{e^2(x_2-x_1)z^2+x_1(e^2-x_2)}{(x_2-x_1)z^2+e^2-x_2},\quad k^2=\frac{(1-e^2)\,(x_2-x_1)}{(x_1-1)\,(e^2-x_2)}\,,$$

sarà $k^2<1$.

Calcolate dunque le quantità

$$(1-e^2)(x_1-x_2)\,,\ (x_2-1)(e^2-x_1)$$

si vedrà quale sarà da scegliersi tra le quattro trasformazioni precedenti.

Le quattro trasformazioni precedenti riducono la (m) rispettivamente alla forma

$$\psi'=\frac{i(e^2-x_2)}{\sqrt{(x_2-1)(e^2-x_1)}}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\left(1-z^2\frac{x_1-x_2}{x_1-e^2}\right)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$\psi'=\frac{i(e^2-x_2)}{\sqrt{(x_2-x_1)(e^2-1)}}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\left(1-z^2\frac{1-x_2}{1-e^2}\right)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$\psi'=\frac{e^2-x_1}{\sqrt{(x_1-x_2)(1-e^2)}}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\left(1-z^2\frac{1-x_1}{1-e^2}\right)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$\psi'=\frac{e^2-x_1}{\sqrt{(1-x_1)(e^2-x_2)}}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\left(1-z^2\frac{x_2-x_1}{x_2-e^2}\right)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

le quali si possono tutte porre sotto la forma

$$\psi'=\mathrm{R}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{(1-cz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

che è un integrale ellittico di terza specie.

Ora se si pone

$$(5)\quad w=\int_0^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad w_0=\int_0^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\,,$$

$$c=k^2\mathrm{sn}^2a$$

$$\psi'=\mathrm{R}(w-w_0)+\mathrm{R}c\left[\int_0^{z}\frac{z^2dz}{(1-cz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}-\int_0^{z_0}\frac{z^2dz}{(1-cz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\right]$$

giacchè

$$\psi'=\mathrm{R}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}+\mathrm{R}c\int_{z_0}^{z}\frac{z^2dz}{(1-cz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$=\mathrm{R}\int_0^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}-\mathrm{R}\int_0^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$+\mathrm{R}c\int_0^{z}\frac{z^2\,dz}{(1-cz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}-\mathrm{R}c\int_0^{z_0}\frac{z^2\,dz}{(1-cz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Ora in virtù della prima delle (13) del §. 5. parte II. della monografia delle funzioni ellittiche del Ch. Prof. Enrico Betti (*Annali di matematica pura ed applicata,* serie 1.ª Tomo II.) si ricava

$$(6) \quad \psi' = \mathrm{R}(w - w_0) + \frac{\mathrm{R}c}{k^2 \mathrm{sn}a\mathrm{cn}a\mathrm{dn}a}$$

$$\left[\mathrm{Z}_{10}(a)\,(w - w_0) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\theta_0(a + w_0)\vartheta_{10}(a - w)}{\theta_{10}(a - w_0)\theta_{10}(a + w)}\right]$$

Dalla equazione (5) si trae

$$z = \mathrm{sn}\, w$$

e quindi la (n) diviene

$$x = \frac{\gamma(\beta - \alpha)\mathrm{sn}^2 w + \alpha(\gamma - \beta)}{(\beta - \alpha)\mathrm{sn}^2 w + \gamma - \beta}$$

che racchiude le quattro formole particolari relative a ciascuna delle precedenti trasformazioni.

Ora essendo

$$x = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

abbiamo

$$\cos^2\varphi = \frac{(\beta - \alpha)\mathrm{sn}^2 w + \gamma - \beta}{\gamma(\beta - \alpha)\mathrm{sn}^2 w + \alpha(\gamma - \beta)}\,.$$

Questa formola e la (6) risolvono completamente il problema, perchè esprimono le coordinate del punto mobile in funzione di una sola variabile indipendente w.

D. Francesco D'Arcais.