MICHELE GREMIGNI

Sulla teoria delle linee di curvatura

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze, S. 1, vol. 2 (1879), p. 237-284

<http://mathematica.sns.it>

SULLA TEORIA
DELLE LINEE DI CURVATURA

TESI

PER L'ESAME DI ABILITAZIONE ALL'INSEGNAMENTO

Presentata alla R. Scuola Normale Superiore di Pisa

DAL

D.r MICHELE GREMIGNI

INTRODUZIONE

Nel lavoro che qui ho l'onore di presentare, prendo a studiare le linee tracciate sopra le superficie, e più specialmente, quelle che si distinguono col nome di *linee di curvatura*.

La scoperta di queste linee è dovuta a *Monge;* il quale ne dimostrava l'esistenza insieme a molte delle loro proprietà, quando i suoi studi avevano tutt' altro di mira che la teoria delle superficie. Ecco come l'illustre geometra veniva a fare una delle sue più belle ed importanti scoperte.

Verso la fine del secolo passato, e precisamente nell'anno 1781, pubblicava egli una Memoria intitolata: — *Théorie des déblais et des remblais* — nella quale, propostosi di risolvere dal lato economico la questione del trasporto delle terre, si formulava il seguente problema: «dati « due volumi eguali di materia, trovare nel secondo volume

« il punto ove dev'essere trasportata ciascuna molecola del « primo, perchè la somma de' prodotti delle molecole mol- « tiplicate ciascuna per lo spazio percorso sia un minimo. » Fu appunto in questa circostanza che egli, ammettendo che fra i due volumi dati non vi fossero ostacoli, ed osservando che per avere il minimo richiesto bisognava che le molecole si muovessero in linea retta, venne nella necessità di studiare i sistemi di rette nello spazio che obbediscono ad una data legge. E trovò allora che è possibile determinare la detta legge in modo che attorno ad ogni retta del sistema ne esistano in generale altre due, infinitamente vicine, tali che godano della proprietà di essere con essa in un medesimo piano; e che questi due piani siano perpendicolari tra di loro. Egli dimostrò inoltre, e qui sta il punto interessante, che tal proprietà appartiene esclusivamente alle normali ad una stessa superficie; per cui egli fu in grado d'enunciare la proposizione che segue: « tutte le « normali d' una superficie qualsivoglia, sono sempre le « intersezioni di due serie di superficie sviluppabili, tali « che ciascuna superficie della prima serie taglia tutte « quelle della seconda in linee rette e ad angolo retto, e « reciprocamente ».

Tale proposizione, mentre permetteva a *Monge* di risolvere la questione che si era proposto, questione che poi rimase incompleta e di nessuna importanza, apriva altresì al medesimo la via a nuovi studi e a nuove scoperte. E' seppe infatti collegare i suoi resultati con quelli che ventun' anno avanti (1760) erano stati ottenuti da *Euler*, dimostrando che i punti ove ciascuna normale è tagliata dalle due normali infinitamente vicine, sono precisamente le estremità dei due raggi di curvatura massima e minima; di maniera che le intersezioni della superficie colle sviluppabili d' una serie vengono ad essere le linee di curvatura massima, e le intersezioni colle sviluppabili dell'altra serie vengon ad essere le linee di curvatura minima.

Continuando poi le sue ricerche, *Monge* si occupò anche di diversi casi particolari. Studiò le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane e situate in piani paralleli, e ne trovò le equazioni in termini finiti; studiò pure le superficie che hanno un raggio di curvatura costante, quelle in cui i due raggi di curvatura principali sono eguali e dello stesso segno o di segno contrario; ed infine stabilì il modo di generazione delle superficie di cui le normali sono tangenti ad un cono retto, o ad una superficie sviluppabile in generale.

Dopo i lavori di *Monge*, altri distinti geometri s'occuparono della teoria delle linee di curvatura. E fra questi sono da notarsi principalmente *Dupin* che dimostrò un bellissimo teorema sui sistemi tripli di superficie ortogonali; *Joachimstal*, al quale si deve il teorema che se una linea di curvatura è piana il suo piano taglia la superficie sotto un angolo costante; *Serret* e *Bonnet* i quali nel 1853 pubblicarono dei bellissimi resultati intorno alle superficie che hanno le linee di curvatura piane o sferiche: ed in particolare quest' ultimo dette pel primo l'equazioni in termini finiti delle superficie a linee di curvatura piane; *Picart* ha pure studiato le superficie aventi le linee di curvatura piane o sferiche, ed ha pubblicato una bellissima Memoria, di cui è il resoconto nel vol. 46 dei *Comptes rendus* dell'anno 1858, *Weingarten* ha per il primo fatto attenzione alla proprietà, dimostrata da *Monge*, che nella superficie de' centri di curvatura (massima o minima), le linee evolute di quelle di curvatura corrispondenti costituiscono un sistema di geodetiche di questa medesima superficie, ed ha quindi dimostrato un elegante teorema sulle superficie evolute di quelle nelle quali un raggio di curvatura è funzione dell'altro. Ulteriori studi poi sono stati fatti anche da altri geometri; e quì ricordando fra gli altri i lavori del Prof. *Dini* dirò che per mezzo di formule semplicissime, da lui stesso stabilite, egli ha trovato sotto una forma nuova e di un' applicazione assai facile le equazioni in termini finiti delle superficie a linee di curvatura piane, ed ha fatto conoscere tutte le superficie nelle quali un raggio di curvatura è una funzione dell'altro, e le linee di curvatura d'un solo o di tutti e due i sistemi sono piane. Ha poi, sulle superficie aventi un sistema di linee di curvatura sferiche, dato un teorema, per mezzo del quale in varii casi la ricerca di tali superficie è resa semplice; ed infine, generalizzando il teorema di *Weingarten*, ha fatto conoscere come i problemi sulle superficie applicabili su una data superficie potevano farsi dipendere da quelli sulle superficie evolute di altre superficie; e viceversa.

Riassunte così in brevi parole le principali nozioni storiche sulla teoria delle linee di curvatura, passo ora ad esporre sommariamente il contenuto di questa tesi, la quale, per la novità di alcuni dei risultati che in essa si trovano, e per il metodo di esposizione adottato, spero non sarà trovata del tutto priva di un certo interesse.

Io divido il mio lavoro in quattro parti. Nella prima di queste stabilita anzitutto una nota espressione semplicissima per il raggio di curvatura d'una linea piana, passo a dare, fondandomi esclusivamente sul metodo degli infinitamente piccoli, una nuova dimostrazione del teorema di *Monge*, generalizzato da *Bertrand*; e quindi, ritrovata la formola d'*Euler*, vengo per altra via a provar l'esistenza sopra ogni superficie delle linee di curvatura. Dipoi, definita la superficie evoluta relativa ad un sistema di queste linee, ritrovo la notevole proprietà che, su essa, le evolute delle linee di curvatura corrispondenti costituiscono un sistema di geodetiche.

Nella seconda parte, dopo d' aver dimostrato, indipendentemente però dalla considerazione dell'indicatrice di *Dupin*, che le tangenti alle linee di curvatura del secondo sistema, lungo i punti d'una linea qualunque del primo, formano una superficie sviluppabile, la quale è per conseguenza circoscritta alla superficie data lungo questa medesima linea, trovo che le porzioni di dette tangenti comprese fra la linea di curvatura considerata e lo spigolo di regresso della sviluppabile, misurano i raggi di curvatura geodetica relativi a' punti della linea di curvatura stessa. Egli è perciò che dopo d'aver messa in evidenza l'analogia che esiste fra la sviluppabile delle normali e la sviluppabile circoscritta alla superficie lungo una stessa linea di curvatura, faccio osservare che come gli estremi de' raggi di curvatura principali relativi ad un sistema di linee di curvatura sono situati in una medesima superficie, (la superficie evoluta di quella considerata) così le estremità de' raggi di curvatura geodetica relativi al medesimo sistema son pure situati sopra una nuova superficie, che chiamo la *superficie de' centri geodetici delle linee di curvatura di quel sistema.*

Dopo di che, rivolgo la mia attenzione allo studio di questa nuova superficie, e dimostro che, su essa, le evolute delle linee di curvatura corrispondenti non godono della medesima proprietà di quelle tracciate sopra la superficie evoluta, altro che nel caso particolare che il secondo sistema di linee di curvatura sia formato di geodetiche; nel qual caso, si vede facilmente che son comprese anche le superficie canali e le superficie *moulures*.

Ritrovo quindi il teorema di *Brioschi* sulle superficie che hanno le linee di curvatura didonie; e dopo d'aver enunciata una proprietà notevole di cui godono le rette polari d'una linea di curvatura qualsivoglia stabilisco una relazione semplicissima che esiste fra la curvatura ordinaria e quella geodetica ne' punti d'una stessa linea di curvatura e la curvatura della sezione principale corrispondente.

La terza parte poi l' ho destinata a riassumere e dimostrare con un sol metodo le principali proposizioni della teoria delle linee di curvatura; e faccio quindi conoscere una proprietà delle superficie studiate da *Picart*, di quelle, cioè, che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche e situate su sfere concentriche.

Finalmente nella quarta parte, traendo sempre profitto dalle considerazioni svolte nella seconda, stabilisco due formole semplicissime per mezzo delle quali ritrovo molto facilmente, quelle differenziali del Prof. *Dini* fra i raggi di curvatura principali e i coefficienti dell'elemento lineare della superficie. Ritrovo quindi il teorema che le superficie sviluppabili sono le sole superficie che abbiano un raggio di curvatura infinito, ed infine ottenuto l' elemento lineare della superficie dei centri geodetici, ne faccio il confronto con quello della superficie evoluta, e me ne servo per confermare i resultati precedentemente ottenuti.

I.

1. Per procedere con ordine in questi studi prima di dimostrare come sopra ogni superficie (*) esistano delle linee che godono di speciali proprietà, e che si distinguono col nome di *linee di curvatura*, fa d'uopo ch' io ritrovi una nota espressione semplicissima del raggio di curvatura d'una linea piana.

È noto che per ogni punto d'una linea piana qualsivoglia esiste un cerchio, *il cerchio osculatore o cerchio di curvatura*, il quale oltr'essere tangente alla curva nel punto considerato, passa anche per un altro punto della medesima a quello infinitamente vicino, ed è tale inoltre che trascurando gl' infinitamente piccoli dell' ordine superiore al secondo, un suo arco infinitamente piccolo del primo ordine, contato a partire dal punto in questione, si può immaginar confuso coll'arco della curva, contato dallo stesso punto, e che sia stato assunto per infinitamente piccolo principale.

(*) Dirò una volta per tutte che in questa tesi suppongo sempre che nei punti delle linee e delle superficie che si considerano non si abbiano singolarità, in modo cioè che le loro coordinate siano funzioni finite e continue delle variabili indipendenti insieme a quelle fra le loro derivate che occorrerà di considerare, ec. . .

Preso adunque a considerare un punto M d'una curva piana, e il punto M' ad esso infinitamente vicino, potremo all' infuori degli infinitamente piccoli del terzo ordine, essendo MM' l' infinitamente piccolo principale, ritenere che l' arco MM' appartenga al cerchio osculatore della curva in M. Allora condotta la tangente MT, e il diametro TM'N per una nota proprietà delle trasversali nel cerchio, sarà $MT^2 = TM' \times TN$; e chiamando R il raggio del cerchio, e denotando con h e k respettivamente le quantità infinitamente piccole MT ed M'T, si avrà

$$h^2 = k(2R + k)$$

Ora la quantità k, infinitamente piccola di fronte alla quantità finita 2 R, può esser trascurata, e perciò si può ritenere che sia:

$$h^2 = 2kR\ ,$$

da cui ricavasi,

$$R = \frac{h^2}{2k} \tag{1}$$

In questa espressione R è appunto il raggio di curvatura della linea nel punto M considerato; e perciò si può dire che: « Il raggio di curvatura, in un punto d'una curva « piana, è eguale al quadrato d'una lunghezza infinita- « mente piccola contata sulla tangente a partire da questo « punto diviso pel doppio della porzione della normale alla « curva condotta dall'estremo di quella lunghezza, e com- « presa fra questo stesso estremo e la curva. ».

2. Dalla (1) deducesi subito che la quantità k è infinitamente piccola del secondo ordine. Se supponiamo che, rimanendo h costante, oppur variando d'una quantità infitamente piccola d'ordine superiore al primo, la quantità k venga per qualche modo a variare, e denotiamo con k' il nuovo valore ch'essa assume, e con R' il corrispondente di R, sarà

$$\mathrm{R}-\mathrm{R}'=\frac{h^2}{2}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k'}\right\}=\frac{h^2}{2}\frac{(k'-k)}{kk'};$$

dalla quale si vede che, se la differenza $k'-k$ è del secondo ordine, vale a dire è del medesimo ordine di k e k', l'altra differenza R—R' è una quantità finita.

A volere dunque che quest' ultima differenza sia infinitamente piccola, è necessario e sufficiente che $k'-k$ sia infinitamente piccola d' un ordine superiore al secondo. Ora, quando ciò avviene, per un teorema noto sugl' infinitamente piccoli, le due quantità k e k' potranno esser sempre sostituite l'una all'altra sia nella ricerca del limite d'un rapporto, che in quello d'una somma.

Così pure, per lo stesso teorema, nella (1), alla k potrà esser sostituita la lunghezza TM'', ossia la porzione di perpendicolare alla tangente inalzata dall' estremo T della lunghezza h, e compresa tra questo stesso estremo e la curva; perchè la differenza di queste due lunghezze, essendo l'angolo ch'esse fanno fra di loro eguale all'angolo di contingenza, è del terzo ordine, e perciò da trascurarsi. Lo stesso può dirsi d'un'altra lunghezza TM''' qualsivoglia

la quale faccia con TM', o con TM'', un angolo infinitamente piccolo.

Per le stesse ragioni anche alla h, può sostituirsi, o l'arco corrispondente della curva, o qualsivoglia altro infinitamente piccolo del primo ordine, purchè la differenza fra quello ed h, sia infinitamente piccola per rapporto a ciascuna di queste quantità. Tutte queste osservazioni saranno utili nella dimostrazione seguente.

3. Sia O un punto qualunque d'una superficie, OZ la normale corrispondente, ed OX, OY due rette ortogonali tracciate nel piano tangente in O. Consideriamo le sezioni OA, OB prodotte nella superficie dai piani ZOX e ZOY respettivamente; e da' punti a e b, presi respettivamente sulle rette OX ed OY a distanze eguali ed infinitamente piccole da O, si tirino a quelle sezioni le normali aAD, bBE; e poi s'immaginino condotti i piani passanti per queste rette, l'uno perpendicolarmente al piano ZOX, e l' altro al piano ZOY. Tali piani intersecano il piano XOY. secondo le rette infinitamente piccole ac, bc; incontrantisi nel punto c, e la superficie secondo le curve AC, BC.

La tangente alla curva AC. nel punto A non sarà in generale normale al piano ZOX, ma farà colla normale Ap a questo piano un angolo infinitamente piccolo del primo ordine. Dico che quest'angolo è eguale a quello che la normale AD$_1$ in A alla superficie fa col piano ZOX. Difatti, la normale in A alla superficie, essendo perpendicolare al piano tangente corrispondente, è pur perpendicolare a ciascuna delle rette At, At' tangenti respettive, nel punto A, alle due curve AC, AO. Ora l'esser perpendicolare ad At', fa sì ch'essa si trovi nel piano tAD; e l'esser perpendicolare ad At, vuol dire che fa con AD ossia col piano ZOX, un angolo eguale all'angolo tAp, come volevasi dimostrare.

Vediamo di trovare l'espressione di quest'angolo. Chiamandolo δ è chiaro che si ha:

$$\delta = \frac{pt}{Ap} = \frac{pc - tc}{Ap} = \frac{pc - (Cc - Ct)}{Ap} = \frac{pc + Ct - Cc}{Ap}$$

Ma per le osservazioni fatte nel numero precedente, è facile vedere che in questo rapporto possono sostituirsi a pc, Aa; a Ct, Bb; ad Ap, ac. Infatti, a pc può sostituirsi Aa, perchè l'angolo che queste due lunghezze fanno fra di loro essendo infinitamente piccolo, la loro differenza è del terzo ordine, e quindi trascurabile di fronte ad esse; a ct può sostituirsi Bb, perchè la superficie essendo continua il raggio di curvatura della OB nel punto O è infinitamente poco differente dal raggio di curvatura di AC in A, e quindi per una medesima lunghezza h nella (1), o per una lunghezza che ne differisca d'un ordine superiore al primo, le quantità k corrispondenti sono sostituibili l'una all'altra. Per ragioni analoghe possiamo infine alla Ap sostituire la ac. Resulta quindi da ciò che l'angolo δ ossia l'angolo DAD_1, è eguale al rapporto

$$\frac{Aa + Bb - Cc}{ac};$$

il quale è positivo o negativo a seconda che la tangente alla curva AC è al disotto o al disopra della parallela condotta da A alla ac ossia, a seconda che la AD_1 è al di dentro o al di fuori del diedro XOZY.

Ripetendo le medesime considerazioni per il punto B, si giungerà a provare che l'angolo EBE_1 è eguale all'altro rapporto

$$\frac{Aa + Bb - Cc}{bc},$$

e che, secondo che esso è positivo o negativo la normale BE_1 è pure, come la AD_1 situata nell'interno o all'esterno dell'angolo XOY. Ma le ac e bc, respettivamente eguali alle Ob, Oa, che sono state prese eguali, son pur eguali fra di loro, dunque i rapporti precedenti sono eguali, e così pure gli angoli DAD_1, EBE_1 sono uguali fra loro, il che costituisce appunto il celebre teorema di *Bertrand*, che enuncieremo così:

« Se in un punto qualunque O, preso sopra una superficie, si conduce la normale OZ, e poi, per O, si fanno « passare sulla superficie due linee fra di loro ortogonali, « sulle quali si prendono delle lunghezze infinitamente piccole eguali OA, OB, la normale in A farà col piano « ZOA un angolo eguale a quello che la normale in B « forma col piano ZOB: e di più, le due normali sono « tutte e due nell'interno dell'angolo diedro AOB, o « tutt' e due al di fuori ».

4. Supponiamo ora che il piano AOZ, girando attorno ad OZ venga a coincidere col piano BOZ; la normale alla superficie, nel punto A, varierà essa pure di posizione e finirà col sovrapporsi alla normale in B. Si vede adunque, per il teorema precedente, che ci deve essere almeno una posizione del piano mobile AOZ, nella quale la normale in A alla superficie è nel piano stesso ed incontra quindi la normale OZ infinitamente vicina. E come abbiamo dimostrato che ad ogni sezione normale, ne corrisponde sempre un' altra, in cui l' angolo indicato con δ è lo stesso, e queste sezioni sono in direzioni ortogonali fra di loro, ne viene che per ogni sezione, in cui quest' angolo è zero, ci sarà pure la sezione ad essa ortogonale, nella quale il suddetto angolo è pure zero. Resta così dimostrato che attorno ad un punto qualunque d'una superficie, ne esistono almeno due altri, ad esso infinitamente vicini ed in direzioni ortogonali fra di loro, tali che le normali alla super-

ficie condotte per essi incontrano la normale nel punto considerato.

Rimane però a vedersi che di tali coppie di direzioni ortogonali non ce n' è in generale che una. Per far ciò supponiamo che le sezioni normali O A, O B corrispondano ora ad una di quelle coppie ortogonali, nelle quali le normali alla superficie ne' punti infinitamente vicini ad O, incontrano la normale in questo punto.

Evidentemente, essendo zero l' angolo δ, dall' espressione (2) si ha qualunque siano $O a$, $O b$ purchè infinitamente piccole dello stesso ordine

$$\text{(3)} \qquad Aa+Bb=Cc$$

Ora, se indichiamo con R_1, R_2 ed R i raggi di curvatura respettivi delle sezioni O A, O B, O C, nel punto O, e chiamiamo φ l'angolo $a \, O \, c$, per la (1), si ha pure

$$\frac{1}{R_1}=\frac{2Aa}{Oa^2}\;;\;\frac{1}{R_2}=\frac{2Bb}{O\,b^2}\;;\;\frac{1}{R}=\frac{2\,C\,c}{O\,c^2}\;;$$

e quindi

$$A\,a=\frac{O\,a^2}{2R_1}\;;\;B\,b=\frac{O\,b^2}{2\,R_2}\;;\;C\,c=\frac{O\,c^2}{2\,R}\,.$$

Sostituendo ora nella (3), e facendo

$$O\,a=O\,c\cos\varphi \quad , \quad O\,b=O\,c\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,$$

trovasi

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi+\frac{1}{R_2}\,\mathrm{sen}^2\varphi\,,$$

che è la formula d' *Euler;* dalla quale si ricava

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\mathrm{sen}^2\varphi$$

E di qui si vede, che supponendo per fissare le idee,

$\frac{1}{R_2}>\frac{1}{R_1}$, la $\frac{1}{R}$ è una funzione continua di φ, sempre crescente a misura che φ va da 0 a $\pm$ 90°, ed ha un sol minimo nel valore $\frac{1}{R_1}$, ed un sol massimo nell' altro $\frac{1}{R_2}$.

Ora, se oltre le direzioni $\varphi=0$, $\varphi=90^0$ se ne avessero per es. due altre $\varphi=\alpha$, $\varphi=\alpha+\frac{\pi}{2}$ per le quali le normali infinitamente vicine alla superficie s' incontrassero, anche per quest' ultime i valori corrispondenti di $\frac{1}{R}$ dovrebbero essere l' uno massimo e l' altro minimo e questo è in contradizione con ciò che si è ora dimostrato; dunque possiamo ritenere come completamente provato che per ogni punto d' una superficie esistono due sole direzioni ortogonali fra di loro, nelle quali le normali alla superficie ne' punti infinitamente vicini a quello considerato godono della proprietà d' incontrare la normale in questo punto; e queste direzioni sono precisamente quelle che corrispondono alle sezioni di curvatura massima e minima.

Tali sezioni si dicono *le sezioni principali;* e i raggi di curvatura corrispondenti *raggi principali.*

5. Prendiamo ora a considerare un punto qualunque O d' una superficie, e siano A e B i due punti infinitamente vicini ne' quali le normali A C, B D alla superficie incontrano respettivamente in C e D la normale in O. Intorno ad A esistono pure, per le cose dette, altri due punti, ad esso infinitamente vicini A' ed E, tali che le normali, in essi, alla superficie incontrano la normale in A. Consideriamo di questi punti quello che unito con A fa colla direzione O A un angolo infinitamente piccolo, e per esso ripetiamo lo stesso ragionamento. Verremo in questa guisa a trovare una serie di punti succedentisi con continuità, e tali che le normali alla superficie condotte per essi, s'in-

contrano due a due, e formano quindi una superficie sviluppabile.

Facendo altrettanto nella direzione OB; e poi ripetendo per ciascun punto della superficie quello che abbiamo detto per O, si vede come si possono così venire a tracciare sopra una superficie qualsivoglia due sistemi di linee ortogonali fra di loro, caratterizzate dalla proprietà che le normali alla superficie lungo i punti di ciascuna di esse formano una superficie sviluppabile. Sono queste le linee che si chiamano di *curvatura*.

Osservazione — Una linea geodetica d' una superficie non può esser linea di curvatura, se non quando è piana.

6. Ad ogni linea di curvatura O A A′ . . . corrisponde la linea de' centri C , C′ , C″ . . . , la quale, essendo lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile delle normali, è un' evoluta della prima linea.

Se immaginiamo ora che la linea di curvatura considerata muovendosi e cambiando convenientemente di forma, venga a sovrapporsi a tutte le altre linee di curvatura del medesimo sistema, e così a generare la superficie data, la linea dei centri corrispondenti genererà pur essa una superficie che gode della proprietà di essere tangente a tutte le normali della proposta. Quella superficie si chiama la superficie *evoluta* di questa.

Parrebbe a prima vista che le superficie sviluppabili formate colle normali relative ad un sistema di linee di curvatura toccassero la superficie evoluta corrispondente. Ma ciò non può essere per la ragione che due generatrici consecutive di ciascuna di quelle son tali che la linea che unisce i loro punti di contatto sulla evoluta, si confonde al limite con una delle stesse generatrici; e perciò non si può asserire che il piano formato dalle medesime, risulti tangente alla superficie evoluta. Tornando dunque a considerare il piano A O C del n.° precedente non si può dire che sia tangente alla superficie de' centri C.

Invece il piano O B C lo è certamente, perchè esso contiene oltre alle due tangenti O C , B G alla detta superficie; anche la retta che unisce i loro punti di contatto, la quale, al limite, è distinta da ciascuna di esse. Ciò vuol dire che il piano A O C, essendo perpendicolare a B O C, è normale alla superficie de' punti C; e la linea C C′, che ha per piani osculatori i piani come A O C, è una geodetica di questa stessa superficie. Dunque: « le linee che sulla superficie de' centri di curvatura principali sono le evolute « delle linee di curvatura corrispondenti, costituiscono un « sistema di geodetiche di questa superficie ».

È questa la proprietà importante che dette luogo a *Weingarten* di dimostrare quel bel teorema sulle superficie evolute di quelle nelle quali un raggio di curvatura è funzione dell' altro; e di cui ho fatto cenno nell' introduzione.

Quello che si è detto per un sistema di linee di curvatura si può ripetere per l' altro; e così è resa evidente l'esistenza di due superficie evolute d' una superficie data, che sono, tangenti a tutte le normali di questa e inoltre son tali che i piani tangenti dell' una, sono piani normali nell' altra.

II.

7. Sia ancora A A′ A″ . . . la linea di curvatura che si considera, e CC′ C″ . . . l' evoluta corrispondente formata dalle normali alla superficie. Si conducano le tangenti A G, A′ G′ . . . alle linee di curvatura dell' altro sistema lungo i punti della linea A A′ A″ . . . dico che esse formano una superficie sviluppabile. Difatti, le rette A G , A′ G′ . . . essendo tangenti alle linee di curvatura del secondo sistema, sono situate ne' piani G A C , G′ A′ C′ . . . , normali alla linea di curvatura A A′ A″. . . e fanno respettivamente

colle A C , A′C′ . . . corrispondenti (cioè, che partono dagli stessi punti di A A′ A″ . . .) un angolo retto; esse dunque costituiscono una serie continua di normali alla linea A A′ A″ . . . facenti un angolo costante colle normali corrispondenti dell'altra serie A C , A′C′ . . ., che già formano una superficie sviluppabile. Ora noi sappiamo che per passare da un' evoluta d' una linea qualsivoglia ad un' altra, basta far ruotare le normali che inviluppano la prima d'uno stesso angolo attorno al punto ove incontrano la curva, senza però farle uscire dal piano normale, ove ciascuna di esse è contenuta. Gli è perciò, che quando, applicando questa regola, si passa dall' evoluta C C′ . . . di A A′, a quella che si ottiene facendo girare le normali che la inviluppano d' un angolo retto, le nuove posizioni che queste vengono ad assumere sono evidentemente quelle delle tangenti A G , A′ G′ . . . Queste rette adunque debbono di necessità incontrarsi due a due, ne' punti G , G′. . . , e dar luogo quindi ad una superficie sviluppabile, come dovevasi provare.

8. Uniamo ora i punti C e G , C′ e G′ . . . ; saranno le rette C G , C′ G′ . . . , le generatrici della superficie delle rette polari della linea di curvatura A A′A″ . . . per cui se da un punto qualunque di questa linea, A per es., s'abbassa la perpendicolare A P sulla retta polare corrispondente C G, questa perpendicolare ci rappresenterà in grandezza e direzione il raggio di curvatura ordinaria della linea nel punto considerato. Inoltre, osservando che il piano osculatore in A della curva A A′ . . . contiene la A P e la tangente corrispondente ad A A′, e il piano tangente alla superficie nel medesimo punto contiene la A G e la stessa tangente; e le A G , A P sono situate nello stesso piano normale ad A A′ in A, si vede chiaro che l' angolo G A P, che la normale A P fa con G A, misura l' inclinazione del piano osculatore della linea di curvatura, sul piano tangente alla superficie. Perciò, se poniamo $AC=R_1$, $AP=\rho$, $PAG=\alpha$, $AG=R_g$, dal triangolo A C P , essendo l' angolo $C=\alpha$, avremo

$$(5) \qquad \rho=R_1 \operatorname{sen} \alpha$$

che non è altro che la formula di *Meunier* applicata alla linea di curvatura; e dal triangolo A P G, avremo pure

$$(6) \qquad \frac{1}{R_g}=\frac{\cos \alpha}{\rho}.$$

Ora da un teorema noto sappiamo che la curvatura geodetica in un punto d' una linea tracciata sopra una superficie è sempre eguale al prodotto della sua curvatura ordinaria in quel punto, per il coseno dell' angolo che il piano osculatore della linea fa col piano tangente alla superficie nel punto considerato. Segue adunque da ciò che il rapporto $\frac{1}{R_g}=\frac{1}{AG}$ ci rappresenta la curvatura geodetica della linea di curvatura al punto A, e che A G ne è il raggio di curvatura geodetica corrispondente. Dunque: « le « porzioni delle generatrici della superficie sviluppabile « circoscritta ad una superficie lungo una linea di curva- « tura, comprese fra i punti di questa e i punti corrispon- « denti dello spigolo di regresso rappresentano in grandezza « e direzione i raggi di curvatura geodetica relativi ai « punti della linea di curvatura stessa ».

I punti dello spigolo di regresso li chiameremo i *centri di curvatura geodetica corrispondenti* a' punti della linea di curvatura.

9. Immaginando ora che la linea di curvatura si muova, e modificandosi di forma, venga ad assumere la posizione di tutte le linee di curvatura del medesimo sistema, lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile circoscritta

alla superficie verrà a generare una nuova superficie che ha per tangenti le tangenti alle linee di curvatura del secondo sistema, e sulla quale si trovano i centri di curvatura geodetica delle linee del primo.

Si dirà questa la *superficie de' centri geodetici* relativa a tal sistema.

Lo stesso è a dirsi dell' altro sistema di linee di curvatura.

Si vede dunque: 1.° che mentre le normali ad una superficie lungo una linea di curvatura s'incontrano due a due, determinando i centri e i raggi di curvatura principali corrispondenti, le tangenti condotte all' altro sistema di linee di curvatura lungo i punti della linea in questione s' incontrano pure due a due, e determinano in tal maniera i centri e i raggi di curvatura geodetica corrispondenti a' suoi punti; 2.° che mentre gli spigoli di regresso delle sviluppabili delle normali relative a ciascuno de' sistemi di linee di curvatura generano una superficie a cui son tangenti tutte le normali della superficie data, gli spigoli di regresso invece delle sviluppabili circoscritte alla superficie secondo le linee di un medesimo sistema danno origine ad una superficie alla quale son tangenti soltanto le tangenti alle linee dell'altro sistema.

Si potrebbe ora aggiungere altresì che mentre ciascuna sviluppabile formata colle normali alla superficie lungo una linea di curvatura taglia tutte le sviluppabili appartenenti all' altro sistema secondo linee rette e ad angolo retto, invece ciascuna delle sviluppabili circoscritte alle linee di un sistema tocca tutte quelle dell' altro sistema secondo le tangenti alla corrispondente linea di contatto.

10. Abbiamo già veduto (n.° 6) che il piano GAC normale in A alla linea di curvatura A A'. . . è tangente in C alla superficie de' centri di curvatura principali corrispondente; e di più (n.° 8) che l'angolo ACG formato dalla retta

polare CG colla C A, è eguale all'angolo che il piano osculatore corrispondente della curva AA'. . . fa col piano tangente alla superficie nel medesimo punto A. Segue da ciò che: « nella evoluta di una superficie qualsivoglia, le direzioni coniugate delle tangenti d'una stessa geodetica che è l'evo- « luta d' una linea di curvatura della superficie data, sono « le rette polari di queste stesse linee; gli angoli che le « medesime direzioni fanno colle stesse tangenti sono eguali « a quelli che i piani osculatori corrispondenti fanno coi « piani tangenti alla superficie; quelle direzioni contengono « inoltre i centri geodetici corrispondenti delle linee di cur- « vatura, ad una distanza dal punto di contatto che è « eguale alla radice quadrata della somma de' quadrati del « raggio di curvatura principale e del raggio di curvatura « geodetico corrispondente ».

11. Dalle cose dette (n.° 8) resulta subito evidente un teorema dovuto al Prof. *Brioschi*, sulle superficie che hanno le linee di curvatura *didonie*, vale a dire a curvatura geodetica costante. Difatti, se una linea di curvatura ha la sua curvatura geodetica costante, la sviluppabile circoscritta alla superficie data lungo la medesima linea si riduce ad un cono, il vertice del quale si può considerare come il centro d'una sfera di raggio uguale al raggio di curvatura geodetica costante, e che taglia la superficie ad angolo retto secondo la linea di curvatura considerata. Possiamo quindi enunciare il seguente teorema del prof. *Brioschi:* « se una superficie ha un sistema di linee di « curvatura didonie, queste sono anche sferiche ed apparten- « gono a sfere che tagliano ad angolo retto la superficie, e « il cui raggio è eguale al raggio di curvatura geodetica « delle stesse linee ».

Reciprocamente: « Se una superficie ha un sistema di « linee di curvatura sferiche e tracciate su sfere normali « alla superficie esse sono didonie ». In vero, con questa ipotesi si vede subito che la sviluppabile circoscritta alla superficie secondo ciascuna linea di curvatura è un cono col vertice nel centro della sfera a cui quella linea appartiene, e che ha per conseguenza tutti i suoi lati eguali al raggio di questa. Dunque, il raggio di curvatura geodetica di ciascuna di queste linee è costante; e le medesime linee sono didonie.

12. Possiamo ora, servendoci delle formule (5) e (6) ricavare una relazione semplicissima che esiste fra la curvatura della sezione principale tangente in un punto ad una linea di curvatura, e le curvature ordinaria e geodetica di quella medesima linea nell stesso punto. Difatti, dalla (5) abbiamo

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\rho}$$

e dalla (6)

$$\frac{1}{R_g}=\frac{\cos\alpha}{\rho}\ :$$

quadrando e sommando si ha appunto

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_g^2}=\frac{1}{\rho^2} \tag{7}$$

Dunque: « il quadrato della curvatura ordinaria in un « punto d'una linea di curvatura è eguale alla somma dei « quadrati della curvatura geodetica della medesima linea, « e della curvatura della sezione principale tangente alla « linea di curvatura nel punto considerato ».

13. Al n.º 6 abbiamo dimostrato che gli spigoli di regresso delle sviluppabili formate dalle normali alla superficie e corrispondenti ad un medesimo sistema di linee di curvatura, sono altrettante geodetiche della superficie dei centri di curvatura corrispondente. Vediamo ora, se tale proprietà si mantiene rispetto alla superficie de' centri geodetici; se, cioè, gli spigoli di regresso della sviluppabile circoscritta alla superficie lungo ciascuna linea di curvatura del sistema considerato costituiscono un sistema di geodetiche della superficie de' medesimi centri.

Sebbene le due tangenti A G , A′ G′ dello spigolo di regresso G G′ siano pur tangenti alla superficie **E** de' centri geodetici, non si può asserir lo stesso del piano che le contiene, cioè del piano tangente in A alla superficie data: inquantochè la retta G G′ che unisce i loro punti di contatto si confonde al limite con una delle stesse rette, cioè colla A′ G′. Invece, se noi abbiamo riguardo al piano osculatore della linea di curvatura A B dell'altro sistema, apparisce chiaro che è desso il piano tangente in G alla superficie **E**. Questo piano contiene infatti due tangenti consecutive della linea A B, cioè la A G e la B G_1, le quali toccano in G e G_1 respettivamente la superficie **E**.

Ora quando **E** non si riduce a un punto o a una linea e non siano in punti singolari di essa, i punti G e G_1 son tali che uniti fra di loro, la retta G G_1 è certamente distinta dalle A G e B G_1; per conseguenza il piano osculatore considerato, contenendo le tre tangenti A G , B G_1 , e G G_1 alla superficie **E**, ne è al limite il piano tangente in G, come dovevasi dimostrare.

Si ha intanto questo risultato che: « la superficie dei « centri geodetici relativi ad un sistema di linee di curva- « tura d'una superficie qualunque è inviluppata da' piani « osculatori dell'altro sistema di linee di curvatura ».

Da ciò risulta subito che la linea G G′ . . ; la quale ha per piani osculatori i piani tangenti alla superficie lungo i punti di AA′.., non può esser in generale geodetica della superficie de' centri geodetici; e soltanto lo diventa quando i piani osculatori del secondo sistema di linee di curvatura sono normali alla superficie, ossia quando questo secondo sistema di linee è formato da geodetiche della superficie stessa.

Ora è noto che in tal caso la superficie data si può considerar come generata da una linea qualsivoglia che sia descritta sopra il piano tangente d'una superficie sviluppabile, mentre questo piano ruota, però senza strisciare, attorno alle generatrici successive della medesima superficie: dimodochè il sistema di linee geodetiche è dato appunto dalle posizioni successive della linea mobile, e l'altro sistema dalle linee che ciascuno dei suoi punti, durante il movimento viene a descrivere. Ciò ammesso è facile vedere che le linee di curvatura di quest'ultimo sistema hanno per superficie polare comune la sviluppabile direttrice, la quale è al tempo stesso la superficie evoluta e quella de' centri geodetici.

Dunque: « nel caso particolare soltanto che un sistema « di linee di curvatura sia formato di geodetiche, le linee « che sulla superficie de' centri geodetici sono le evolute « dell'altro sistema di linee di curvatura, sono geodetiche « di quest' ultima superficie, la quale viene in tal caso ad « essere una superficie sviluppabile ».

Si può notare inoltre che le due geodetiche formate dai centri C e G, hanno, ne' punti corrispondenti, direzioni complementarie, e che esse non possono essere trajettorie delle generatrici della superficie su cui sono tracciate, se non nel caso che le linee di curvatura del sistema non geodetico, taglino la superficie sotto un angolo costante, cioè, siano anch'esse linee piane, come vedremo in seguito.

14. Un caso particolare delle superficie sopra considerate, ce l'offrono le superficie *canali*.

Queste in generale si definiscono come l'inviluppo d'una sfera di raggio costante, il cui centro si muove sopra una linea data a piacere, oppure si considerano come generate da un cerchio di raggio costante, il cui centro si muove lungo una linea data, mentre il suo piano si conserva sempre ad essa perpendicolare. In tal caso, è evidente che il

sistema di linee di curvatura geodetiche è costituito dalle posizioni successive del cerchio mobile, le cui tangenti inviluppano appunto la superficie polare della linea direttrice: tal superficie è dunque la superficie dei centri geodetici. Si può quindi concludere che nelle superficie canali, mentre un sistema di linee di curvatura è geodetico, l'altro sistema ha i suoi centri geodetici tutti situati sopra una superficie sviluppabile la quale si riduce ad un cono, quando la linea direttrice è piana, e ad una retta quando la medesima direttrice è circolare. Il toro è compreso in quest' ultimo caso.

III.

15. Passiamo ora a studiare altre proprietà delle linee di curvatura, e a dimostrarne i principali teoremi, servendoci esclusivamente delle relazioni che esistono fra le medesime linee e le loro rappresentazioni sferiche fatte col metodo di Gauss; vale a dire, conducendo pel centro d'una sfera di raggio uno le parallele alle normali (esterne o interne alla superficie della quale si cercano le linee di curvatura, e considerando come corrispondenti i punti della superficie e della sfera che hanno le normali parallele.

Sia AB una linea di curvatura qualsivoglia della superficie data, ab la corrispondente sferica; di maniera che ad A corrisponda a, a B, b. Poichè i raggi ca, cb delle sfere sono respettivamente paralleli alle normali CA, CB della superficie, il piano $c\,a\,b$ è parallelo al piano CAB, e la tangente in a alla ab è parallela alla tangente in A alla AB; si può dire intanto che, nelle rappresentazioni di Gauss, le tangenti delle linee che sulle sfere corrispondono alle linee di curvatura della superficie sono, ne' punti corrispondenti, respettivamente parallele a quelle delle linee di curvatura stessa. Dunque: « come nelle superficie le

« linee di curvatura formano un doppio sistema di linee « ortogonali, così nella sfera, le loro rappresentazioni « formano pure un doppio sistema di linee ortogonali ».

Come conseguenza di questa notissima proprietà si ha ancora che i piani normali della linea di curvatura AB sono paralleli a quelli della linea sferica *ab*, e lo stesso avviene delle loro respettive intersezioni, cioè, delle rette polari; ragione per cui gli angoli ACG, *acg* vengono ad essere eguali fra di loro. Ma l'angolo ACG, lo abbiamo già dimostrato uguale all'inclinazione che il piano osculatore della linea ha sul piano tangente alla superficie; e l'angolo *acg* è misurato dall'arco *ag* normale ad *ab*, in *a*, cioè, nel punto corrispondente di A. Ne segue dunque che: « gli archi di circolo mas« simo normali alla linea sferica, che è la rappresentazione « d'una linea di curvatura, compresi fra la stessa linea e « la sua evoluta sferica, misurano gli angoli che i piani « osculatori ne' punti corrispondenti delle linee di curvatu« ra fanno co' respettivi piani tangenti alla superficie ».

16. Questo risultato potrebbe essere utile per studiare il modo col quale varia l'angolo che il piano osculatore in ciascuno de' punti d'una linea di curvatura fa col respettivo piano tangente alla superficie. È chiaro infatti che il differenziale di quest'angolo è eguale all'arco elementare della evoluta sferica della linea che è la rappresentazione sulla sfera della linea di curvatura considerata; e che un arco qualunque della medesima evoluta, per una proprietà già nota, misura la differenza degli angoli che i piani osculatori alla linea di curvatura, ne' punti corrispondenti agli estremi di quest' arco fanno co' respettivi piani tangenti alla superficie. Talchè quando si avessero a considerare superficie tali che, in esse, un sistema di linee di curvatura rappresentato sulla sfera dasse luogo a linee aventi una medesima sviluppata sferica (ciò che vuol dire che i piani osculatori delle linee del medesimo sistema lungo le linee

dell'altro sistema sono paralleli fra loro) si vedrebbe subito, per mezzo delle osservazioni precedenti, che i piani tangenti alla superficie, lungo una stessa linea di curvatura, fanno un medesimo angolo co' piani corrispondenti (cioè, che i loro punti di contatto sono sopra una stessa linea di curvatura dell'altro sistema) che sono tangenti alla superficie ne' punti d' una linea di curvatura qualunque del medesimo sistema, e quindi che l' inclinazione de' piani osculatori alla stessa linea di curvatura sulla superficie varia d'una quantità costante nel passare da una qualunque di esse ad un'altra. Di tali proprietà godono appunto le superficie studiate da *Picart*, quelle, cioè, che hanno un sistema di linee di curvature sferiche e situate su sfere concentriche. Difatti, in tal caso, i piani normali di tutte le linee sferiche passano ciascuno per il centro comune delle sfere, e quindi le superficie sviluppabili delle normali, lungo le linee dell'altro sistema si riducono o a piani o a coni col vertice in quel medesimo centro. Ora questa seconda ipotesi non è ammissibile, perchè la superficie data dovrebbe allora ridursi ad una sfera, caso che noi escludiamo. Si vede adunque che le linee dell'altro sistema non solo sono piane ma ancora geodetiche, e i loro piani inviluppano una superficie conica col vertice nel centro comune della sfera, su cui sono tracciate le linee dell'altro sistema. Tali superficie possono allora ritenersi come generate da una linea tracciata sopra il piano tangente ad una superficie conica, mentre questo piano si muove, però senza strisciare, attorno alla generatrice successiva della stessa superficie; per cui si vede chiaro che il sistema di linee di curvatura sferiche rappresentate sopra una sfera di raggio uno ha una medesima sviluppata sferica e perciò le superficie di *Picart* godono appunto delle proprietà di cui dicevo sopra.

17. Dopo ciò che abbiamo concluso al n. 15, il teore-

ma di *Joachimstal* sulle linee di curvatura piana è reso evidente. Quando infatti una linea di curvatura è piana la linea sferica che la rappresenta, dovendo avere le sue tangenti parallele alle tangenti di quella sarà pur piana, e dovrà quindi ridursi ad un cerchio. Ora la sviluppata sferica d'un cerchio essendo un punto, gli archi che misurano gli angoli che il piano della linea di curvatura, ne' suoi diversi punti, fa colla superficie son tutti eguali fra loro; lo che ci fa concludere che il piano stesso taglia la superficie sotto un angolo costante.

La reciproca di questo teorema è pur vera, e la si dimostrerebbe subito facendo delle considerazioni analoghe alle precedenti.

18. Dimostriamo invece un altro teorema pur noto ma più generale di quello di *Joachimstal;* esso può enunciarsi così: « Se due superficie qualsivogliano si tagliano secondo « una linea che è di curvatura per ambedue, esse si taglia- « no secondo un angolo costante, e viceversa se esse si « tagliano sotto angolo costante la linea d'intersezione è « linea di curvatura dell'una, essa lo è anche dell'altra ».

Infatti, sia A B la linea di curvatura comune a due superficie S e S'; A C, B C due normali alla superficie S, ed A C', B C' due normali ad S'. Conduciamo le parallele ca, cb alle normali di S, e le ca', cb' alle normali di S'; si vede subito che le due linee sferiche ab, $a'b'$, dovendo avere la medesima sviluppata, sono in tutti i loro punti egualmente distanti fra di loro, per cui gli archi aa', bb' sono eguali, e così pure gli angoli CAC', CBC'..; dunque le due superficie si tagliano secondo un angolo costante

Reciprocamente, supponiamo che le due superficie si taglino sotto un angolo costante, e che la linea A B sia linea di curvatura di S; si vuol dimostrare ch'essa lo è anco di S'. Invero, sia ab la rappresentazione sferica di AB, sarà la tangente in a alla ab parallela alla tangente in A alla A B. Si conducano le parallela ca', cb' alle AC', BC' normali di S'; esse, per l'ipotesi fatta, determineranno sugli archi di circolo massimo aa', bb' normali ad ab delle lunghezze costanti; e perciò sarà la tangente in a' alla curva $a'b'$ parallela alla tangente in a, ed anche alla tangente in A alla curva data. Ne segue che il piano tangente, secondo la generatrice ca', alla superficie conica che ha le sue generatrici parallele alle normali dalla superficie S' lungo la linea A B, contiene al limite tre rette parallele respettivamente alla tangente in A di A B, e alle due normali C'A, C'B; ciò vuol dire che queste due normali sono in uno stesso piano, e perciò s'incontrano. Dunque, le normali della superficie S' lungo la A B incontrandosi due a due, questa linea è di curvatura anche per S', come dovevasi dimostrare.

Da questo teorema si deducono subito, come casi particolari, quello di *Joachimstal* pel piano, ed un altro analogo per la sfera. Difatti, ogni linea situata sopra un piano, o sopra una sfera, potendosi ritenere come linea di curvatura di questa superficie, tutte le volte che una linea tracciata sopra una superficie, sarà piana o sferica, il piano o la sfera corrispondente taglieranno la superficie secondo un angolo costante; e viceversa, quando un piano od una sfera taglieranno una superficie data sotto un angolo costante, la linea d'intersezione sarà linea di curvatura della superficie medesima.

19. Nelle superficie sviluppabili è facile vedere che le linee di curvatura sono le generatrici, e le loro trajettorie ortogonali. Se facciamo la rappresentazione sferica d'una di queste superficie, evidentemente non otteniamo che una sola linea sulla sfera, cioè la linea delle intersezioni delle perpendicolari al sistema di piani inviluppanti la superficie data; la qual linea gode della proprietà d'aver le sue tan-

genti parallele a quelle delle trajettorie ortogonali delle generatrici della sviluppabile. Vediamo subito di quì che non si può considerare una superficie sviluppabile con una linea di curvatura piana, senza che abbia anche tutte le altre linee di curvatura piane e situate in piani paralleli, e di più senza che si riduca ad un elicoide sviluppabile, il quale ha per spigolo di regresso un'elica tracciata sopra un cilindro colle generatrici perpendicolari a' piani delle linee di curvatura.

Viceversa, un elicoide sviluppabile ha le linee di curvatura piane e situate in piani paralleli. Difatti, le medesime linee non sono altro che le evolventi dell' elica spigolo di regresso, e come tali, avendo per superficie polare comune il cilindro su cui è tracciata l'elica, sono di necessità piane e situate su piani perpendicolari alle generatrici del cilindro. Si può perciò dire che: « gli elicoidi sono le « sole superficie sviluppabili che abbiano le linee di curva- « tura piane ».

Si vede anche che le linee di curvatura d' un elicoide sviluppabile sono le evolventi delle sezioni rette del cilindro, su cui è tracciata l' elica spigolo di regresso; e quindi che nel caso d'un elicoide il cui spigolo di regresso sia un' elica appartenente ad un cilindro di rivoluzione le linee di curvatura sono tante evolventi di cerchio, e nel caso d' un elicoide che ha per spigolo di regresso un' elica cilindro-conica son tante spirali logaritmiche, come già ebbi luogo di far notare anche nella mia tesi sulle linee a doppia curvatura.

20. Prendiamo ora a considerare una superficie che abbia tutte le linee di curvatura piane, e cerchiamo quali relazioni di posizione esistano fra i piani di quelle linee. Per le cose dette precedentemente, la rappresentazione sulla sfera si farà in tal caso per mezzo di due sistemi di cerchi ortogonali fra di loro, i piani de' quali saranno pa-

ralleli (ciascuno al proprio corrispondente) a quelli delle linee di curvatura della superficie. Se ora consideriamo uno qualunque de' cerchi del primo sistema, si vede subito che il cono retto circoscritto alla sfera secondo il medesimo ha il suo vertice situato sopra ciascuno de' piani de' cerchi del secondo sistema; ciò che vuol dire che tutti questi piani passano pel medesimo vertice. Quello che avviene per uno de' coni, lo si può ripetere per tutti gli altri, resulta adunque da ciò che il secondo sistema de' piani de' cerchi, dovendo avere un' infinità di punti a comune (i vertici de' coni retti circoscritti ai cerchi dell' altro sistema) passano tutti per una stessa retta xy.

Il ragionamento è evidentemente applicabile all' altro sistema di cerchi; dunque anche i piani di questi passano tutti per una stessa retta $x'y'$. Dico ora che le due rette xy , $x'y'$ sono perpendicolari fra di loro. Consideriamo infatti una qualunque delle due rette, per es. la xy; essa è il luogo geometrico de' vertici de' coni retti circoscritti ad un sistema di cerchi della sfera; talmente che ad ogni punto della medesima corrisponde sempre un circolo della sfera, il piano del quale passa per l'altra retta $x'y'$.

Quindi anche il punto all'infinito della retta deve avere il suo cerchio corrispondente, che sarà il cerchio di contatto fra la sfera ed il cono retto che ha per vertice quel punto. In questo caso il cono si riduce al cilindro circoscritto alla sfera parallelamente alla retta xy; ed il piano del cerchio di contatto (che è un cerchio massimo) è per conseguenza perpendicolare a questa stessa retta. Ma d' altra parte quel piano, come tutti gli altri del medesimo sistema, deve contenere la retta $x'y'$; si vede dunque che le due rette xy , $x'y'$ sono perpendicolari fra di loro.

Tornando ora alla superficie primitiva, possiamo dunque enunciare il seguente teorema, dovuto a *Bonnet:*

« Se tutte le linee di curvatura d'una superficie sono

« piane, i piani di ciascun sistema sono paralleli ad una « stessa retta ($x\,y$, o $x'\,y'$), e queste due rette sono per- « pendicolari fra di loro ».

21. Nel caso particolare che le linee di curvatura d'un sistema siano piane, e situate in piani paralleli fra loro, la rappresentazione sulla sfera delle medesime facendosi allora per mezzo d'un sistema di paralleli, quella del secondo sistema dovrà farsi secondo un sistema di meridiani. Per la qual cosa, è evidente che anche le linee del secondo sistema sono piane non solo, ma altresì geodetiche; e i loro piani inviluppano un cilindro colle generatrici perpendicolari a' piani delle linee del primo sistema, di maniera che queste stesse linee vengono ad essere delle evolventi delle sezioni rette del cilindro.

Ora se ben si considerano le superficie *moulures*, si vede ch'esse non differiscono affatto dalle superficie sopra considerate. Si può dunque non fare distinzione di sorta fra queste superficie; ed invece di parlar di superficie che hanno le linee di curvatura d'un sistema in piani paralleli, si può addirittura parlare di superficie *moulures* considerando queste come generate anche in quest'altro modo, cioè: da una curva qualsivoglia fissa di posizione sopra il piano tangente d'un cilindro direttore, che viene da questo piano trasportata, mentre esso ruota, però senza strisciare, attorno alle successive generatrici del cilindro.

Rammentando ora ciò che fu detto al n.° 13, si può concludere che le superficie *moulures* sono le sole superficie fra quelle che godono della proprietà che le evolute formate da' centri geodetici delle linee di curvatura, siano al tempo stesso geodetiche e trajettorie delle generatrici della superficie de' centri geodetici. Esse sono infatti eliche appartenenti al cilindro direttore.

IV.

22. Siano x, y, z le coordinate dei punti d'una superficie qualunque riferiti ad un sistema di assi ortogonali; e X, Y, Z le coordinate de' punti corrispondenti della sfera, su cui si fà la rappresentazione della superficie col metodo di *Gauss;* siano poi

$$\text{(8)} \qquad \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2, \\ ds'^2 &= \mathrm{E}'\,du^2 + \mathrm{G}'\,dv^2 \end{aligned} \right.$$

i quadrati degli elementi lineari della superficie e della sfera, quando si prendono per coordinate le linee di curvatura e le loro corrispondenti sferiche: sarà

$$\text{ed} \quad \left. \begin{aligned} \mathrm{E} &= \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2, \\ \mathrm{G} &= \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2, \\ \mathrm{E}' &= \left(\frac{d\mathrm{X}}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{Y}}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{Z}}{du}\right)^2, \\ \mathrm{G}' &= \left(\frac{d\mathrm{X}}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{Y}}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{Z}}{dv}\right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

e poichè abbiamo già dimostrato (n.° 15) che le tangenti alle linee di curvatura sono parallele alle tangenti delle linee corrispondenti sulla sfera, avremo:

$$\frac{dx}{ds_v} = \frac{d\mathrm{X}}{ds'_v}, \quad \frac{dy}{ds_v} = \frac{d\mathrm{Y}}{ds'_v}, \quad \frac{dz}{ds_v} = \frac{d\mathrm{Z}}{ds'_v}$$

$$\frac{dx}{ds_u} = \frac{d\mathrm{X}}{ds'_u}, \quad \frac{dy}{ds_u} = \frac{d\mathrm{Y}}{ds'_u}, \quad \frac{dz}{ds_u} = \frac{d\mathrm{Z}}{ds'_u}$$

ossia

$$
(10)\quad \begin{cases}
\dfrac{dx}{\sqrt{\mathrm{E}}du}=\dfrac{d\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{E'}}du}\,,\ \dfrac{dy}{\sqrt{\mathrm{E}}du}=\dfrac{d\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{E'}}du}\,,\ \dfrac{dz}{\sqrt{\mathrm{E}}du}=\dfrac{d\mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{E'}}du}\,,\\[2ex]
\dfrac{dx}{\sqrt{\mathrm{G}}dv}=\dfrac{d\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{G'}}dv}\,,\ \dfrac{dy}{\sqrt{\mathrm{G}}dv}=\dfrac{d\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{G'}}dv}\,,\ \dfrac{dz}{\sqrt{\mathrm{G}}dv}=\dfrac{d\mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{G'}}dv}\,.
\end{cases}
$$

Ora, se indichiamo con r_1 e r_2 i raggi di curvatura principali relativi allo linee u e v respettivamente, ed osservando che ds'_v, ds'_u misurano gli angoli di contingenza delle sezioni principali nel punto di coordinate (u, v) avremo pure

$$\frac{ds_v}{ds'_v}=r_2\quad,\quad\frac{ds_u}{ds'_u}=r_1$$

da cui si ricava

$$(11)\qquad \frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\sqrt{\mathrm{E'}}}=r_2\quad,\quad\frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{\sqrt{\mathrm{G'}}}=r_1$$

per mezzo delle quali le (10) si trasformano nelle altre

$$
(12)\quad \begin{cases}
\dfrac{dx}{du}=r_2\dfrac{d\mathrm{X}}{du}\,,\ \dfrac{dy}{du}=r_2\dfrac{d\mathrm{Y}}{du}\,,\ \dfrac{dz}{du}=r_2\dfrac{d\mathrm{Z}}{du}\,,\\[2ex]
\dfrac{dx}{dv}=r_1\dfrac{d\mathrm{X}}{dv}\,,\ \dfrac{dy}{dv}=r_1\dfrac{d\mathrm{Y}}{dv}\,,\ \dfrac{dz}{dv}=r_1\dfrac{d\mathrm{Z}}{dv}\,,
\end{cases}
$$

che sono le formule di *Rodriguez* che qui abbiamo trovate col metodo dato dal Prof. *Dini* nella sua memoria.

23. Analoghe alle (11) si possono ora ottenere altre due formule, che m' interessa di far conoscere non solo per la loro semplicità, ma ancora perchè dalle medesime si ricavano subito due formule del Prof. *Dini*, che sono d'una grandissima importanza nella teoria delle superficie.

Sia A B una linea di curvatura qualunque del sistema v, ed A G$=r_{gv}$, A C$=r_2$ ne siano il raggio di curvatura geodetica, ed il raggio di curvatura principali corrispondenti. Poichè l' angolo A C G, come abbiamo già avuto luogo di far osservare, è eguale all'angolo α che il piano osculatore in A della linea di curvatura fa col piano tangente alla superficie, sarà

$$(13)\qquad r_{gv}=r_2\operatorname{tang}\alpha\,.$$

Ma se $a\,b$ è la linea sferica corrispondente ad A B, e g è l'intersezione de' due archi di circolo massimo normali ad $a\,b$ ne' punti infinitamente vicini a e b, si ha (n.° 15)

$$a\,g=\alpha$$

e quindi anche tang $a\,g$=tang α.

Ora l'espressione $\dfrac{1}{\operatorname{tang} a\,g}$ (V. *Bertrand,* Calc. Differ. pag. 576) è la curvatura geodetica della linea sferica $a\,b$ nel punto a, dunque tang α=tang $a\,g$ ne sarà il raggio di curvatura geodetica corrispondente; per cui, indicandolo con r'_{gv}, sarà

$$r'_{gv}=\operatorname{tang}\alpha\,,$$

e perciò la (13) si trasformerà nell'altra:

$$(14)\qquad \frac{r_{gv}}{r'_{gv}}=r_2\,.$$

Similmente si troverebbe

$$(15)\qquad \frac{r_{gu}}{r'_{gu}}=r_1\,.$$

Queste due sono appunto le formule di cui parlavo.

Per vedere ora come da esse si ricavano quelle del Prof. *Dini*, basta sostituire in luogo dei raggi di curvatura geodetica delle linee u e v sulla superficie e sulla sfera, le loro espressioni in funzione dei coeficienti degli elementi lineari corrispondenti. Difatti, avendosi

$$\frac{1}{r_{gu}} = \frac{d\log\sqrt{\mathrm{E}}}{\sqrt{\mathrm{G}}\,dv}\ , \quad \frac{1}{r_{gu}} = -\frac{d\log\sqrt{\mathrm{G}}}{\sqrt{\mathrm{E}}\,du}\ ,$$

$$\frac{1}{r'_{gv}} = \frac{d\log\sqrt{\mathrm{E'}}}{\sqrt{\mathrm{G'}}\,dv}\ , \quad \frac{1}{r'_{gu}} = -\frac{d\log\sqrt{\mathrm{G'}}}{\sqrt{\mathrm{E'}}\,du}\ ,$$

sostituendo questi valori nella (14), si troverà:

$$\frac{d\log\sqrt{\mathrm{E'}}}{\sqrt{\mathrm{G'}}\,dv} = r_2\,\frac{d\log\sqrt{\mathrm{E}}}{\sqrt{\mathrm{G}}\,dv}\ ,$$

ed usando della seconda delle (11) si avrà:

$$(16) \qquad r_1\,\frac{d\log\sqrt{\mathrm{E'}}}{dv} = r_2\,\frac{d\log\sqrt{\mathrm{E}}}{dv}\ .$$

Ma dalla prima delle (11) abbiamo:

$$\sqrt{\mathrm{E}} = r_2\sqrt{\mathrm{E'}}\ ,$$

dalla quale si ha

$$\log\sqrt{\mathrm{E}} = \log r_2 + \log\sqrt{\mathrm{E'}}$$

e derivando rispetto a v si ottiene:

$$\frac{d\log\sqrt{\mathrm{E}}}{dv} = \frac{1}{r_2}\,\frac{dr_2}{dv} + \frac{d\log\sqrt{\mathrm{E'}}}{dv}$$

e quindi la (16) diviene:

$$r_1\,\frac{d\log\sqrt{\mathrm{E'}}}{dv} = \frac{dr_2}{dv} + r_2\,\frac{d\log\sqrt{\mathrm{E'}}}{dv}$$

oppure

$$(17) \qquad (r_1-r_2)\frac{d\log\sqrt{\mathrm{E'}}}{dv} - \frac{dr_2}{dv} = 0.$$

Nel medesimo modo si troverebbe

$$(17) \qquad (r_1-r_2)\frac{d\log\sqrt{\mathrm{G'}}}{du} + \frac{dr_1}{du} = 0$$

Se invece di eliminare il coeficiente E, dalla (16), si fosse eliminato E', e dalla analoga invece di eliminare G si fosse eliminata G', avremmo trovato le due formule seguenti:

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{d\log\sqrt{\mathrm{E}}}{dv} - \frac{d\,\frac{1}{r_2}}{dv} = 0 \\ &\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{d\log\sqrt{\mathrm{G}}}{du} + \frac{d\,\frac{1}{r_1}}{du} = 0 \end{aligned} \right.$$

le quali, fa d'uopo notare che valgono per tutte le superficie, tranne le sviluppabili.

24. Il Prof. *Dini* dalle formule (17) e le (18) da lui trovate ha dedotti molti teoremi ed anche le equazioni in termini finiti delle superficie le cui linee di curvatura sono piane.

La risoluzione di questo problema è per altro dovuta al signor *Bonnet*, il quale dette pel primo tre equazioni nelle coordinate x, y, z de' punti di tali superficie, fra le quali restano però ad eliminarsi, per ogni determinazione particolare delle due funzioni arbitrarie in esse contenute, le due derivate parziali del primo ordine di z. Invece il Pr. *Dini* ha trovato le coordinate de' vari punti delle superficie a linee di curvatura piana in funzione de' parametri delle linee di curvatura e con due funzioni arbitrarie, l'una d'una variabile, l'altra dell'altra; di modo che i calcoli da farsi per ogni determinazione speciale delle funzioni arbitrarie sono soltanto quadrature.

25. Se supponiamo ora che sia $\sqrt{G} = \varphi(v)$, e quindi le u siano geodetiche, e di più che sia $r_1 = \psi(r_2)$, si vede subito che anche $\sqrt{E}$ deve essere una funzione di v solamente; e perciò si può dire che: « Fra le superficie che « hanno un sistema di linee di curvatura geodetiche, quelle « nelle quali un raggio di curvatura è una funzione « determinata dell'altro sono soltanto le superficie di « rivoluzione.

26. Per mezzo delle (18) si può dimostrare anche quest'altro teorema: « le superficie sviluppabili sono le sole « superficie in cui uno de' raggi di curvatura sia infinito. »

Difatti, supponiamo che sia data una superficie con un raggio di curvatura infinito, e sia p. es. $r_1 = \infty$: allora, escludendo il caso di $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2}$, dalla seconda delle (18) si ha che G è funzione di v solamente; e questo porta che, nell'ipotesi fatta, le $u =$ cost. sono geodetiche della superficie data. Ora una linea di curvatura non può esser geodetica se non è piana; quindi le u=cost. sono piane, ed il loro raggio di curvatura ordinaria coincide col raggio di curvatura principale corrispondente. Se questo è sempre infinito, le linee u non possono essere

che rettilinee; e perciò le sviluppabili circoscritte alla superficie lungo le medesime si riducono a dei piani. Dunque l'ipotesi che una superficie abbia un raggio di curvatura infinito, porta a concludere ch' essa non può essere che l' inviluppo di piani, che colle loro successive intersezioni danno uno dei sistemi di linee di curvatura della superficie stessa, o più brevemente, che questa superficie non può essere altro che una sviluppabile. Le sviluppabili però essendo state escluse necessariamente dalle nostre considerazioni nella rappresentazione sferica, il teorema non può dirsi ancora dimostrato; però siccome è noto, e lo si vede anche molto facilmente, che tutte le superficie sviluppabili hanno un raggio di curvatura infinito, ne segue che tal proprietà è caratteristica delle superficie sviluppabili, e che il teorema sopra enunciato è vero.

27. Passiamo ora a dare l'elemento lineare della superficie dei centri geodetici per aver luogo dapprima di confermare seguendo una via diversa, alcuni de' resultati già trovati, e poi per vedere se possono esistere classi di tali superficie applicabili l'una sull'altra, e su una superficie tipo, fra quelle che già si conoscono.

Indichiamo sempre con x, y, z le coordinate dei punti della superficie data, con ξ, η, ζ quelle de' punti della superficie de' centri geodetici; evidentemente abbiamo:

$$\xi = x - r_{gv}\frac{dx}{\sqrt{G}dv}, \quad \eta = y - r_{gv}\frac{dy}{\sqrt{G}dv}, \quad \zeta = z - r_{gv}\frac{dz}{\sqrt{G}dv},$$

e ponendo per brevità di scrittura

$$\frac{\sqrt{G}}{r_g} = \frac{d\log\sqrt{E}}{dv} = \frac{1}{a},$$

sarà

$$\xi = x - a\frac{dx}{dv}\ ,\quad \eta = y - a\frac{dy}{dv}\ ,\quad \zeta = z - a\frac{dz}{dv}\ .$$

Differenziando e poi quadrando e sommando, si ottiene per l' elemento lineare $d\sigma$ della superficie de' centri geodetici, la seguente espressione:

$$(19)\quad d\sigma^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}dv^2 + a^2\left[\left(d.\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{dv}\right)\right]^2 + $$
$$+\mathrm{G}\,da^2 - 2a\left[dx\,d.\frac{dx}{dv} + \ldots\right] - 2da\left[da\frac{dx}{dv} + \ldots\right] + 2\,a\,d\,a\,d\mathrm{G}$$

che ora semplicizzeremo.

Si ha intanto

$$d.\frac{dx}{dv} = \frac{d^2x}{du\,dv}du + \frac{d^2x}{dv^2}dv$$
$$d.\frac{dy}{dv} = \frac{d^2y}{du\,dv}du + \frac{d^2y}{dv^2}dv$$
$$d.\frac{dz}{dv} = \frac{d^2z}{du\,dv}du + \frac{d^2z}{dv^2}dv$$

quadrando e sommando, viene

$$(20)\quad \left(d.\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{dv}\right)^2 = du^2\left[\left(\frac{d^2x}{du\,dv}\right)^2 + \ldots\right] +$$
$$dv^2\left[\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right)^2 + \ldots\right] + 2\,du\,dv\left[\frac{d^2x}{du\,dv}\,\frac{d^2x}{dv^2} + \ldots\right].$$

Ma dalle (12) scritte sotto questa forma

$$\frac{1}{r_2}\frac{dx}{du} = \frac{d\mathrm{X}}{du}\ ,\quad \frac{1}{r_2}\frac{dy}{du} = \frac{d\mathrm{Y}}{du}\ ,\quad \frac{1}{r_2}\frac{dz}{du} = \frac{d\mathrm{Z}}{du}$$
$$\frac{1}{r_1}\frac{dx}{dv} = \frac{d\mathrm{X}}{dv}\ ,\quad \frac{1}{r_1}\frac{dy}{dv} = \frac{d\mathrm{Y}}{dv}\ ,\quad \frac{1}{r_1}\frac{dz}{dv} = \frac{d\mathrm{Z}}{dv}$$

si ricava

$$(21)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2x}{du\,dv} + \frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{dx}{du} = 0 \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2y}{du\,dv} + \frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}\frac{dy}{du} = 0 \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2z}{du\,dv} + \frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}\frac{dz}{du} = 0 \end{cases}$$

e perciò:

$$\left(\frac{d^2x}{du\,dv}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{du\,dv}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{du\,dv}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2}\left\{\mathrm{E}\left(\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\right)^2 + \mathrm{G}\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\right)^2\right\}$$

Si ha poi identicamente

$$\frac{dx}{ds_u} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{dx}{dv}\ ,\quad \frac{dy}{ds_u} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{dy}{dv}\quad \frac{dz}{ds_u} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{dz}{dv}$$

e derivando

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{ds_u^2} = \frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d^2x}{dv^2} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}}{dv}\frac{dx}{dv}, \\ \frac{d^2y}{ds_u^2} = \frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d^2y}{dv^2} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}}{dv}\frac{dy}{dv}, \\ \frac{d^2z}{ds_u^2} = \frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d^2z}{dv^2} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}}{dv}\frac{dz}{dv}, \end{cases}$$

per cui quadrando e sommando, verrà:

$$\left(\frac{d\,x^2}{ds_u^2}\right)^2+\,..=\frac{1}{\rho_u^2}=-\left(\frac{d\sqrt{\frac{1}{G}}}{dv}\right)^2+\frac{1}{G^2}\left[\left(\frac{d^2\,x}{d\,v^2}\right)^2+\ldots\right]$$

e quindi

$$(23)\quad \left(\frac{d^2x}{d\,v^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{d\,v^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{d\,v^2}\right)^2=\frac{G^2}{\rho_u^2}+\left(\frac{d\sqrt{G}}{dv}\right)^2$$

dove $\frac{1}{\rho_u}$ è la curvatura della linea u=cost nel punto di coordinate $(u\,,\,v)$.

Dalle (21) si ricava

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2x}{du\,dv}=\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{dx}{du}-\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dx}{dv},$$

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2y}{du\,dv}=\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{dy}{du}-\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dy}{dv},$$

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{d^2z}{du\,dv}=\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{dz}{du}-\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{dz}{dv};$$

le quali moltiplicate respettivamente per

$$\frac{d^2x}{d\,v^2}\;,\;\frac{d^2y}{d\,v^2}\;,\;\frac{d^2z}{d\,v^2}\;,$$

ed avendo riguardo alla seguente:

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}=0,$$

e all' altra:

$$\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{dv^2}+\ldots=-\left(\frac{d^2x}{du\,dv}\frac{dv}{dx}+\text{s}\,.\right)=-\frac{1}{2}\frac{dG}{du}\;,$$

danno:

$$(24)\quad \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{d^2x}{du\,dv}\frac{d^2x}{d\,v^2}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}\frac{dG}{dv}\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}-\frac{1}{2}\frac{dG}{du}\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}.$$

Sostituendo quindi nella (20) i valori (22), (23), (24), trovasi

$$(25)\qquad \left(d.\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{dv}\right)^2=$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2}\left\{E\left(\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\right)^2+G\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{dv}\right)^2\right\}du^2+$$

$$-\left\{\frac{G^2}{\rho^2_u}+\left(\frac{d\sqrt{G}}{dv}\right)\right\}\frac{1}{dv^2\,\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}-\left\{\frac{1}{2}\frac{dG}{dv}\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}+\frac{dG}{dv}\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\right\}du\,dv$$

E così è calcolato uno de' termini della (19).

Per calcolare anche gli altri, osserviamo che avendosi

$$dx=\frac{dx}{du}du+\frac{dx}{dv}dv\;\;,\;\;d.\frac{dx}{dv}=\frac{d^2x}{du\,dv}du+\frac{d^2x}{d\,v^2}dv$$

$$dy=\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv\;\;,\;\;d.\frac{dy}{dv}=\frac{d^2y}{du\,dv}du+\frac{d^2y}{d\,v^2}dv$$

$$dz=\frac{dz}{du}du+\frac{dz}{dv}dv\;\;,\;\;d.\frac{dz}{dv}\,dv=\frac{d^2z}{du\,dv}du+\frac{d^2z}{dv^2}dv$$

sarà

$$(26)\quad dx\, d.\frac{dx}{dv}+dy\, d.\frac{dy}{dv}+dz\, d.\frac{dz}{dv}=du^2\left[\frac{d^2x}{du\,dv}\frac{dx}{du}+\ldots\right]+$$

$$+dv^2\left[\frac{dx}{dv}\frac{d^2x}{d\,v^2}+\ldots\right]=\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{dv}du^2+\frac{1}{2}\frac{d\,\mathrm{G}}{d\,v}d\,v^2$$

Similmente si trova

$$(27)\qquad dx\frac{dx}{dv}+dy\frac{dy}{dv}+dz\frac{dz}{dv}=\mathrm{G}\,dv\,.$$

Inoltre, essendo

$$da=\frac{da}{du}du+\frac{da}{dv}dv\quad,\quad d\,\mathrm{G}=\frac{d\mathrm{G}}{du}du+\frac{d\mathrm{G}}{dv}dv$$

abbiamo

$$(28)\qquad da^2=\left(\frac{da}{du}\right)^2du^2+\left(\frac{da}{dv}\right)^2dv^2+2\frac{da}{du}\frac{da}{dv}du\,dv,$$

e

$$(29)\quad da\,d\,\mathrm{G}=\frac{da}{du}\frac{d\mathrm{G}}{du}du^2+\frac{da}{dv}\frac{d\mathrm{G}}{dv}dv^2+du\,dv\left[\frac{da}{dv}\frac{d\mathrm{G}}{du}+\frac{da}{du}\frac{d\mathrm{G}}{dv}\right].$$

Sostituiamo ora nella (19), i valori trovati (25), (26), (27) (28), (29) avremo:

$$d\sigma^2=\Bigg[\mathrm{E}+\frac{r_g^2}{\mathrm{G}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2}\left\{\mathrm{E}\left(\frac{d\frac{1}{r_2}}{d\,v}\right)^2+\mathrm{G}\left(\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\right)^2\right\}+$$

$$+\mathrm{G}\left(\frac{d\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}}{du}\right)^2-\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\mathrm{E}}{dv}+\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)}{du}\frac{d\mathrm{G}}{du}\Bigg]du^2+$$

$$+\Bigg[\mathrm{G}+\frac{\mathrm{G}r_g^2}{\rho_u^2}+\frac{r_g^2}{\mathrm{G}}\left(\frac{d\sqrt{\mathrm{G}}}{dv}\right)^2+\mathrm{G}\left(\frac{d\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}}{d\,v}\right)^2-\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\,\mathrm{G}}{dv}-$$

$$2\mathrm{G}\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)}{dv}+\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d\mathrm{G}}{dv}\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)}{dv}\Bigg]dv^2+$$

$$+2\Bigg[-\frac{r_g^2}{\mathrm{G}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\left\{\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}\frac{d\mathrm{G}}{dv}+\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}\frac{d\mathrm{G}}{du}\right\}+$$

$$+\mathrm{G}\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)}{d\,u}\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)}{dv}-\mathrm{G}\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)}{d\,u}+$$

$$+\frac{r_g}{2\sqrt{\mathrm{G}}}\left\{\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)}{du}\frac{d\mathrm{G}}{d\,u}+\frac{d\left(\frac{r_g}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)}{d\,u}\frac{d\mathrm{G}}{d\,v}\right\}\Bigg]du\,dv\,,$$

la quale, per mezzo della (18) si riduce alla seguente:

$$(30)\quad d\sigma^2=\left(\frac{d\,r_g}{du}\right)^2du^2+2\frac{d\,r_g}{du}\left(\frac{d\,r_g}{dv}-\sqrt{\mathrm{G}}\right)du\,dv+$$

$$+\left\{\mathrm{G}\frac{r_g^2}{\rho_u^2}+\left(\frac{d\,r_g}{dv}-\sqrt{\mathrm{G}}\right)^2\right\}dv^2.$$

27. Di quì si vede subito che quando, essendo $r_{gv}=\varphi(v)$, la curvatura geodetica è costante lungo le linee v, l'elemento $d\sigma$ non è più quello di una superficie, ma bensì quello d'una linea, sulla quale sono disposti i centri delle sfere che tagliano ad angolo retto la superficie, e che contengono le linee del sistema v, ($n.^o$ 20).

28. Se cercassimo con un metodo analogo al precedente l'elemento della superficie evoluta delle linee v, troveremmo:

$$(31)\quad d\sigma^2=\left(\frac{dr_2}{du}\right)^2 du^2+2\frac{dr_2}{du}\frac{dr_2}{dv}du\,dv+\left\{G\left(\frac{r_1-r_2}{r_1}\right)^2+\left(\frac{dr_2}{dv}\right)^2\right\}dv^2,$$

il quale, ha una certa analogia col precedente. Tale analogia però non è completa poichè, mentre in quest'ultimo è facile far sparire il rettangolo $du\,dv$ facendo un cambiamento di variabili e sostituendo alla u=cost., la r_2=cost., nel primo ciò non può ottenersi coll' analoga sostituzione di r_{gv} = cost. in luogo di u=cost., appunto a cagione della differenza $\frac{dr_g}{dv}-\sqrt{G}$ che è nella (30) e non nella (31).

Quindi si vede che mentre nella superficie evoluta le linee corrispendenti su essa alle r_2=cost. della primitiva sono trajettorie ortogonali delle linee evolute di quelle di curvatura corrispondenti, le linee prodotte nella superficie dei centri geodetici col fare r_{gv}=cost. non godono della proprietà analoga alla precedente, talchè per far sparire dalla (30) il rettangolo delle variabili bisogna alla u sostituire un'altra variabile α diversa dalla r_{gv}, e far quindi:

$$u=u(\alpha\,,\,v)\quad,\quad v=v\,.$$

Allora

$$du=\frac{du}{d\alpha}d\alpha+\frac{du}{dv}dv,$$

$$du^2=\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2+\left(\frac{du}{dv}\right)^2 dv^2+2\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{dv}d\alpha\,dv\,,$$

$$2\,du\,dv=2\frac{du}{d\alpha}d\alpha\,dv+2\frac{d\alpha}{dv}dv^2\,;$$

e perciò si ha:

$$d\sigma^2=E_1\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2+2\left[E_1\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{dv}+F_1\frac{du}{d\alpha}\right]d\alpha\,dv+$$
$$\left[E_1\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2F_1\frac{du}{dv}+G_1\right]dv^2,$$

ove E_1, F_1 e G_1 sono i coeficienti della (30). Volendo dunque che manchi il rettangolo $d\alpha dv$, basterà determinare la relazione che lega u ad α in modo che si abbia

$$\left(\frac{dr_g}{du}\right)^2\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{dv}+\frac{dr_g}{du}\frac{du}{d\alpha}\left(\frac{dr_g}{dv}-\sqrt{G}\right)=0\,,$$

ossia

$$(32)\qquad \frac{dr_g}{du}\frac{du}{dv}+\frac{dr_g}{dv}=\sqrt{G}=\left(\frac{dr_g}{dv}\right),$$

dove la parentesi sta ad indicare che la derivata è presa nell'ipotesi che tutto sia stato espresso per v ed α.

Dopo ciò, l'elemento $d\sigma$ si riduce subito alla forma seguente:

$$(33)\qquad d\sigma^2=\left(\frac{dr_g}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2+\left(\frac{dr_g}{dv}\right)^2\frac{r_{gv}^2}{\rho_u^2}dv^2\,,$$

che è la più semplice ch' io abbia potuto trovare; e nella quale non bisogna dimenticare che r_{gv} è il raggio di curvatura geodetico delle linee v al punto di coordinate

$(u\,,\,v)$, ed $\frac{1}{\rho_u}$ è la curvatura ordinaria delle linee $u=$ cost. nel medesimo punto.

29. Quando conformemente a quanto fu fatto da Weingarten si trasformasse la (31) sostituendo, come dicevo sopra r_2 ad u, troveremmo invece:

$$(34) \qquad d\sigma_1^2 = dr_2^2 + \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1}\right)^2 G\,d\,v^2\,,$$

da cui vediamo subito che le $v=$cost. sono geodetiche della superficie de' centri di curvatura principali; e così abbiamo una conferma di ciò che asserimmo al n. 6.

Se poi supponiamo che sia r_1 una funzione determinata di r_2, si vede subito, per mezzo della (18), che anche G diviene funzione di r_2 solamente; per cui l'elemento (34) assume in tal caso la forma di quello delle superficie di rivoluzione; ciò vuol dire che: « le superficie evolute di quelle nelle « quali un raggio di curvatura è una funzione determinata « dell'altra costituiscono una classe completa di superficie « applicabili l'una sull'altra, e su una superficie di rivoluzione. » È precisamente questo il teorema di *Weingarten*, di cui il Prof. *Dini* ha dato poi una generalizzazione per la quale i problemi sulle superficie applicabili su una data superficie possono farsi dipendere da quelli sulle superficie evolute di altre superficie, e viceversa.

Tali resultati appunto, e l'analogia che esiste, almeno nel modo di generazione, fra la superficie de' centri geodetici, e la superficie de' centri di curvatura principali, mi avevano fatto sperare di poter ricavar qualche cosa di più importante dallo studio della superficie de' centri geodetici. Ora invece vedo che l'elemento (33) per essere assai più complicato del (34), non è tale, almeno

per ora, da offrirmi de' risultati d'un certo interesse. Tuttavia convien sempre sperare che o facendo un cambiamento di variabili, o sostituendo al raggio di curvatura geodetico delle linee v i coeficienti dell'elemento della superficie data, o i coeficienti dell'elemento sferico, o i raggi principali della superficie data, possa essa ridursi più semplice.

30. Valendomi ora delle formole precedenti mi limito a considerare un sol caso particolare, tanto per aver luogo di confermare il resultato già ottenuto al n.° 12.

Supponiamo che sia G funzione di v soltanto, ciò che porta che le $u=$cost. sulla superficie data siano geodetiche. Allora la (32) s'integra subito, ed abbiamo,

$$r_{gv} = \varphi(v) - \alpha,$$

e quindi:

$$\frac{dr_{gv}}{d\alpha} = -1 \quad , \quad \frac{dr_{gv}}{dv} = \varphi'(v)\,.$$

Di più, essendo le $u=$cost geodetiche, il raggio di curvatura ordinaria delle medesime coincide col raggio di curvatura principale corrispondente, e perciò si ha:

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{r_1}\,.$$

Ma dalla seconda delle (18), si vede che per l'ipotesi fatta di $G = \varphi_1(v)$, anche $\frac{1}{r_1} = f(v)$, e per conseguenza

$$\frac{1}{\rho_u} = f(v).$$

L' elemento (33) si trasforma ora nell' altro:

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + \frac{\varphi'(v)}{f(v)} \left\{ \varphi(v) - \alpha \right\}^2 dv^2$$

oppure

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + (\alpha - \varphi(v_1))^2 dv_1^2$$

che è appunto l' elemento d' una superficie sviluppabile.

Nel medesimo modo potrebbero studiarsi altri casi, ne' quali la (32) fosse facilmente integrabile.