SUL MOTO PERTURBATO
DELLE COMETE

TESI

PER L'ESAME DI ABILITAZIONE ALL'INSEGNAMENTO

PRESENTATA ALLA R. SCUOLA NORMALE

SUPERIORE DI PISA

DALL' ALUNNO

DOTTOR ADOLFO VENTURI

SUL MOTO PERTURBATO

DELLE COMETE

§. 1.

I. Dai più recenti studi sul moto perturbato dei corpi celesti risulta esser più vantaggioso il calcolo delle perturbazioni delle coordinate polari di essi, anzichè quello delle perturbazioni degli elementi ellittici. Nondimeno, se trattasi di una cometa anche questo secondo metodo è inattuabile a causa delle grandi eccentricità e inclinazioni delle orbite di questi corpi celesti, perchè siamo condotti a serie lentamente convergenti. Il metodo che ci proponiamo di trattare, dovuto in sostanza ad Hansen (*) e da noi in varie parti modificato, consiste in un cangiamento di variabile, pel quale si hanno serie convergenti quanto si vuole. Si vedrà che per accrescere la convergenza si dovrà aumentare del pari la lunghezza di alcuni calcoli: ma tenendo un giusto mezzo, questo metodo è realmente vantaggioso, e di pratica applicazione.

II. Fra le varie specie di equazioni del moto di un corpo celeste, noi, per la ragione sopra detta, sceglieremo quella che è relativa alle coordinate polari, e propriamente all' anomalia

(*) Sur les perturbations qu' éprouvent les Comètes, Paris, 1848.

media, al logaritmo del raggio vettore e al seno della latitudine. Tali equazioni del moto furono stabilite dallo stesso Hansen nella sua teoria generale delle perturbazioni planetarie (*); e limitandole alla 1.ª approssimazione, sono le seguenti:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta z &= \int \overline{\mathrm{W}_0}\, dt \\ \nu &= -\tfrac{1}{2}\int \left(\overline{\frac{d\mathrm{W}_0}{d\tau}}\right) dt \\ \delta s &= q \operatorname{sen} f - p \cos f \end{aligned}\right.$$

essendo δz, ν, δs le perturbazioni rispettivamente, dell' anomalìa media, del logaritmo del raggio vettore e del seno della latitudine: inoltre W_0, p, q sono tre funzioni date dalle equazioni:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{W}_0}{dt} &= \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left\{2\frac{\rho}{r}\cos(f-\omega)-1+2\frac{\rho}{a(1-e^2)}\left[\cos(f-\omega)-1\right]\right\}\frac{d\Omega}{df}+ \\ &\qquad +2\frac{an}{\sqrt{1-e^3}}\frac{\rho}{r}\operatorname{sen}(f-\omega)r\frac{d\Omega}{dr} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\cos i \operatorname{sen} \mathrm{I} \operatorname{sen} f \operatorname{sen}(f'+\beta)\frac{d\Omega}{d\mathrm{H}} \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\cos i \operatorname{sen} \mathrm{I} \cos f \operatorname{sen}(f'+\beta)\frac{d\Omega}{d\mathrm{H}} \end{aligned}\right.$$

In queste (1) e (2) a, e, n, r, f, i indicano il semiasse maggiore, l' eccentricità, il moto medio, il raggio vettore, l' anomalìa vera e l' inclinazione del corpo perturbato: le stesse lettere con indici rappresentano gli elementi stessi relativi al pianeta pertubatore. Inoltre t è il tempo, Ω la funzione perturbatrice, β la longitudine del perielio del corpo perturbatore contata dalla intersezione delle due orbite; I è l' inclinazione scambievole di queste orbite, H il coseno dell' angolo compreso fra r, r'.

(*) Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten v. P. A. Hansen.

Infine τ è una quantità costante ausiliaria: ρ, ω son due funzioni di τ, composte cogli elementi ellittici e con τ come r, f son composte con detti elementi e con t. La lineetta sovrapposta a W_0 ed a $\frac{d\mathrm{W}_0}{d\tau}$ indica, che ottenuto W_0 e derivatolo rispetto a τ si dee cangiare nelle funzioni così ottenute la τ in t e conseguentemente ρ in r ed ω in f.

III. Prima di passare all' integrazione delle (2) bisogna svolgerle in serie ordinate pei seni e coseni dei multipli dell'anomalia media g' del pianeta perturbatore.

La funzione perturbatrice può assumere la forma:

$$(3)\qquad \Omega = m'\left\{\frac{1}{\Delta}-\frac{r}{r'^2}\cos(r, r')\right\}$$

essendo m' la massa del pianeta perturbatore, e

$$(4)\qquad \Delta^2 = r^2+r'^2-2rr'\cos(r, r') = r^2+r'^2-2rr'\mathrm{H}\,.$$

Per aver l' espressione di H, si osservi che essendo OC, OP le orbite, C', P' i perieli, C, P la posizione della cometa e del pianeta (fig. 1.ª) abbiamo:

$$\mathrm{OP'}=\beta,\qquad \mathrm{COP}=\mathrm{I}$$
$$\mathrm{C'C}=f\qquad \mathrm{P'P}=f'$$

e se si pone

$$\mathrm{OC'}=\alpha$$

si ha dal triangolo COP:

$$(5)\qquad \mathrm{H}=\cos(f+\alpha)\cos(f'+\beta)+\operatorname{sen}(f+\alpha)\operatorname{sen}(f'+\beta)\cos\mathrm{I}$$

sviluppando ora questa e ponendo:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\beta &= \gamma \operatorname{sen} \mathrm{G}\ , & -\operatorname{sen}\beta &= \gamma' \operatorname{sen} \mathrm{G}' \\ \cos \mathrm{I} \operatorname{sen}\beta &= \gamma \cos \mathrm{G}\ , & \cos \mathrm{I}\cos\beta &= \gamma' \cos \mathrm{G}' \end{aligned}\right.$$

si trova:

$$\mathrm{H}=\gamma\cos f\cos f'\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\mathrm{G})+\gamma\,\mathrm{sen}\,f\cos f'\cos(\alpha+\mathrm{G})+$$
$$+\gamma'\cos f\,\mathrm{sen}\,f'\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\mathrm{G}')+\gamma'\,\mathrm{sen}\,f\,\mathrm{sen}\,f'\cos(\alpha+\mathrm{G}')$$

o, infine, ponendo,

$$\alpha+\mathrm{G}=\Gamma,\qquad\qquad \alpha+\mathrm{G}'=\Gamma'$$

abbiamo

$$\mathrm{H}=\gamma\cos f'\,\mathrm{sen}\,(f+\Gamma)+\gamma'\,\mathrm{sen}\,f'\,\mathrm{sen}\,(f+\Gamma') \tag{7}$$

Le Γ, Γ' son costanti in 1.ª approssimazione, perchè le (6) danno:

$$\mathrm{cotg}\ \mathrm{G}=\cos \mathrm{I}\ \mathrm{tg}\,\beta;\quad \mathrm{cotg}\ \mathrm{G}'=-\cos \mathrm{I}\ \mathrm{cotg}\,\beta$$

e α si prende pur costante. Così pure son costanti le γ, γ'.

IV. Sviluppiamo ora le derivate di Ω. Dalle (3), (4) abbiamo

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{df}=\frac{m'}{\Delta^3}rr'\frac{d\mathrm{H}}{df}-\frac{m'}{r'^3}rr'\frac{d\mathrm{H}}{df}\\
&\frac{d\Omega}{d\mathrm{H}}=m'\frac{rr'}{\Delta^3}-m'\frac{rr'}{r'^3}\\
&r\frac{d\Omega}{dr}=m'\frac{rr'}{\Delta^3}\mathrm{H}-m'\frac{r^2}{\Delta^3}-m'\frac{rr'}{r'^3}\mathrm{H}
\end{aligned}\right.$$

ma dalla (7) si deduce:

$$\frac{d\mathrm{H}}{df}=\gamma\cos f'\cos(f+\Gamma)+\gamma'\,\mathrm{sen}\,f'\cos(f+\Gamma')$$

quindi le precedenti divengono:

$$\frac{d\Omega}{df}=m'rr'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\left\{\gamma\cos f'\cos(f+\Gamma)+\gamma'\,\mathrm{sen}\,f'\cos(f+\Gamma')\right\}$$
$$\frac{d\Omega}{d\mathrm{H}}=m'\frac{rr'}{\Delta^3}-m'\frac{rr'}{r'^3}$$
$$r\frac{d\Omega}{dr}=m'rr'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\left\{\gamma\cos f'\,\mathrm{sen}(f+\Gamma)+\gamma'\,\mathrm{sen}\,f'\,\mathrm{sen}(f+\Gamma')\right\}-m'\frac{r^2}{\Delta^3}$$

Esprimiamo ora f' per l' anomalia eccentrica u' col mezzo delle relazioni:

$$r'\cos f'=a'\cos u'-a'e'$$
$$r'\,\mathrm{sen}\,f'=a'\,\mathrm{sen}\,u'\sqrt{1-e'^2}$$

e ponendo:

$$\gamma'\sqrt{1-e'^2}=\gamma_1$$

si avrà:

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{df}=m'a'r\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\left\{\gamma\cos(f+\Gamma)(\cos u'-e')+\gamma_1\cos(f+\Gamma')\,\mathrm{sen}\,u'\right\}\\
&\frac{d\Omega}{d\mathrm{H}}=m'\frac{rr'}{\Delta^3}-m'\frac{rr'}{r'^3}\\
&r\frac{d\Omega}{dr}=m'a'r\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\left\{\gamma\,\mathrm{sen}(f+\Gamma)(\cos u'-e')+\gamma_1\mathrm{sen}(f+\Gamma')\,\mathrm{sen}\,u'\right\}-m'\frac{r^2}{\Delta^3}
\end{aligned}\right.$$

V. Prima di sostituire le (9) nelle (2), si osservi che nella 1.ª di queste, sviluppando, si trova un termine che contiene ρ senza $\mathrm{sen}\,\omega$ nè $\cos\omega$. In detto termine, si sostituisca per ρ il valore dato da

$$\rho=a(1-e^2)-e\,\rho\cos\omega$$

che nasce dall' equazione

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega}$$

che dev' essere verificata, per la natura delle funzioni ρ, ω; e dopo ciò si sostituiscano le (9) nelle (2). Ponendo in evidenza le quantità relative al pianeta perturbatore le (2) diverranno:

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\mathrm{W}_0}{dt}=\mathrm{P}(\cos u'-e')\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)+\mathrm{Q}\,\mathrm{sen}\,u'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)+\mathrm{R}\frac{1}{\Delta^3}\\
&\frac{dp}{dt}=\mathrm{S}(\cos u'-e')\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)+\mathrm{T}\,\mathrm{sen}\,u'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\\
&\frac{dq}{dt}=\mathrm{U}(\cos u'-e')\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)+\mathrm{V}\,\mathrm{sen}\,u'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)
\end{aligned}\right.$$

ove P, Q, R, S, T, U, V dipendono solo dal corpo celeste perturbato, e son date da:

$$
(11)\left\{\begin{aligned}
&P=\frac{m'aa'n}{\sqrt{1-e^2}}\Big\{2\rho\gamma\cos(\Gamma+\omega)-3r\gamma\cos(f+\Gamma)+\frac{2\rho r\gamma\cos(f+\Gamma)}{a(1-e^2)}\Big[\cos(f-\omega)+ecc\\
&Q=\frac{m'aa'n}{\sqrt{1-e^2}}\Big\{2\rho\gamma_1\cos(\Gamma'+\omega)-3r\gamma_1\cos(f+\Gamma')+\frac{2\rho r\gamma_1(f+\Gamma')}{a(1-e^2)}\Big[\cos(f-\omega)+ecc\\
&R=\frac{-2m'anr}{\sqrt{1-e^2}}\rho\,\mathrm{sen}(f-\omega)\\
&S=\frac{m'aa'n}{\sqrt{1-e^2}}\mathrm{sen}\,I\cos i\gamma' r\,\mathrm{sen}\,G'\,\mathrm{sen}\,f\\
&T=\frac{-m'aa'n}{\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{sen}\,I\cos i\gamma_2 r\,\mathrm{sen}\,G\,\mathrm{sen}\,f\\
&U=\frac{m'aa'n}{\sqrt{1-e^2}}\mathrm{sen}\,I\cos i\gamma' r\,\mathrm{sen}\,G'\cos f\\
&V=\frac{-m'aa'n}{\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{sen}\,I\cos i\gamma_2 r\,\mathrm{sen}\,G\cos f
\end{aligned}\right.
$$

ove si è posto per brevità:

$$\gamma_2=\gamma\sqrt{1-e^2}$$

VI. Bisogna ora svolgere in serie le parti delle (10) che dipendono dal pianeta perturbatore. Faremo prima lo svolgimento dei termini che non contengono Δ, e che rientrano nella forma

$$r^m\cos n u \qquad r^m\mathrm{sen}\,nu$$

la quale vogliamo sviluppare.

Poniamo lo sviluppo di Fourier:

$$
(12)\left\{\begin{aligned}
&r^m\cos nu=\alpha_0+\alpha_1\cos g+\alpha_2\cos 2g+\ldots+\alpha'_1\mathrm{sen}\,g+\alpha'_2\mathrm{sen}\,2g+\text{ecc.}\\
&r^m\mathrm{sen}\,nu=\beta'_0+\beta'_1\cos g+\beta'_2\cos 2g+\ldots+\beta_1\mathrm{sen}\,g+\beta_2\mathrm{sen}\,2g+\text{ecc.}
\end{aligned}\right.
$$

ove

$$
(13)\left\{\begin{aligned}
&\alpha_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}r^m\cos nu\cos\lambda g\,dg;\quad \alpha'_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}r^m\cos nu\,\mathrm{sen}\,\lambda g\,dg\\
&\beta_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}r^m\,\mathrm{sen}\,nu\,\mathrm{sen}\,\lambda g\,dg;\quad \beta'_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}r^m\mathrm{sen}\,nu\cos\lambda g\,dg.
\end{aligned}\right.
$$

Per calcolare questi integrali, si ponga

$$y=\varepsilon^{iu} \qquad z=\varepsilon^{ig}$$

essendo ε la base Neperiana ed $i=\sqrt{-1}$.

Essendo:

$$r=a\,(1-e\cos u),$$

se s' introduce per u la y, e si pone:

$$e=\mathrm{sen}\,\varphi \qquad \psi=\tan\tfrac{1}{2}\varphi,$$

si trova, dopo qualche riduzione:

$$(14)\qquad r=a\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,(1-\psi\, y)\,(1-\psi\, y^{-1})$$

Inoltre

$$g=u-e\,\mathrm{sen}\,u$$

da cui

$$(15)\qquad z=y\varepsilon^{-\frac{e}{2}(y-y^{-1})}$$

quindi

$$\cos\lambda g=\frac{z^\lambda+z^{-\lambda}}{2}=\tfrac{1}{2}\Big\{y^\lambda\varepsilon^{-\beta(y-y^{-1})}+y^{-\lambda}\varepsilon^{\beta(y-y^{-1})}\Big\}$$

ove

$$\beta = \frac{e\lambda}{2}$$

Differenziando la (15) e servendosi delle relazioni precedenti, si trova:

$$\frac{dz}{z} = \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi (1-\psi y)\left(1-\psi y^{-1}\right)\frac{dy}{y}$$

e siccome dalla posizione deriva:

$$dg = \frac{dz}{iz}$$

sarà:

$$dg = \frac{1}{i}\cos^2 \frac{1}{2}\varphi (1-\psi y)\left(1-\psi y^{-1}\right)\frac{dy}{y}$$

VII. Sostituendo tutto nelle α, β, queste saranno ridotte a funzioni di y. Ponendo per brevità:

$$\varepsilon^{i\pi} = w$$

avremo:

$$\alpha_\lambda = \frac{a^m \cos^{2m+2}\tfrac{1}{2}\varphi}{4\pi i}\int_{\frac{1}{w}}^{w}(1-\psi y)^{m+1}\left(1-\psi y^{-1}\right)^{m+1}\left(y^n + y^{-n}\right)$$
$$\left[y^{\lambda}\varepsilon^{-\beta\left(y-y^{-1}\right)} + y^{-\lambda}\varepsilon^{\beta\left(y-y^{-1}\right)}\right]\frac{dy}{y}$$

e analogamente per β, β', α'. Se ora si pone:

$$(16)\quad \mathrm{I}(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{\frac{1}{w}}^{w}(1-\psi y)^{\alpha}\left(1-\psi y^{-1}\right)^{\alpha} y^{\beta}\varepsilon^{\gamma\left(y-y^{-1}\right)}\frac{dy}{y}$$

è facile vedere che si ha:

$$\alpha_\lambda = \frac{a^m \cos^{2m+2}\tfrac{1}{2}\varphi}{4\pi i}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{I}(m+1, \lambda+n, -\beta)+\mathrm{I}(m+1, \lambda-n, -\beta)+ \\ +\mathrm{I}(m+1, n-\lambda, \beta)+\mathrm{I}(m+1, -n-\lambda, \beta)\end{array}\right\}$$

Quanto alle α', β, β' si può verificare, che indicando con I, I_1, I_2, I_3, rispettivamente le quattro funzioni precedenti, e ponendo per un momento:

$$\frac{a^m \cos^{2m+2}\tfrac{1}{2}\varphi}{4\pi i} = \mathrm{K}$$

si ha:

$$\alpha'_\lambda = -\mathrm{K}(\mathrm{I}+\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_2-\mathrm{I}_3)$$
$$\beta'_\lambda = -\mathrm{K}(\mathrm{I}-\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2-\mathrm{I}_3)$$
$$\beta_\lambda = -\mathrm{K}(\mathrm{I}-\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3)$$

Per effettuare l' integrazione indicata dalla (16), svolgeremo in serie le funzioni:

$$(1+\psi y)^{\alpha},\ \varepsilon^{\gamma y},\ \left(1-\psi y^{-1}\right)^{\alpha},\ \varepsilon^{-\gamma y^{-1}}$$

e moltiplicheremo le due prime serie fra loro, le ultime due fra loro e poi i risultati ottenuti. Si avrà così:

$$(17)\quad (1-\psi y)^{\alpha}(1-\psi y^{-1})^{\alpha}\varepsilon^{\gamma(y-y^{-1})} = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 y + \mathrm{C}_2 y^2 + \ldots$$
$$-\mathrm{D}_1 y^{-1} + \mathrm{D}_2 y^{-2} - \ldots$$

ove

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l}\mathrm{C}_s = \mathrm{A}_s - \mathrm{A}_{s+1}\mathrm{B}_1 + \mathrm{A}_{s+2}\mathrm{B}_2 - \ldots. \\ \mathrm{D}_s = \mathrm{B}_s - \mathrm{B}_{s+1}\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_{s+2}\mathrm{A}_2 - \ldots. \\ \text{nelle quali} \\ \mathrm{A}_h = \dfrac{\gamma^h}{\underline{|h}} - \dfrac{\gamma^{h-1}}{\underline{|h-1}}\dbinom{\alpha}{1}\psi + \dfrac{\gamma^{h-2}}{\underline{|h-2}}\dbinom{\alpha}{2}\psi^2 - \ldots \pm \dbinom{\alpha}{h}\psi^h \\ \mathrm{B}_h = \dfrac{\gamma^h}{\underline{|h}} + \dfrac{\gamma^{h-1}}{\underline{|h-1}}\dbinom{\alpha}{1}\psi + \dfrac{\gamma^{h-2}}{\underline{|h-2}}\dbinom{\alpha}{2}\psi^2 + \ldots + \dbinom{\alpha}{h}\psi^h\end{array}\right.$$

Abbiamo dunque:

$$\mathrm{I}(\alpha,\beta,\gamma)=\int_{\frac{1}{w}}^{w}\left\{\mathrm{C}_0 y^{\beta}+\mathrm{C}_1 y^{\beta+1}+\mathrm{C}_2 y^{\beta+2}+\ldots-\mathrm{D}_1 y^{\beta-1}+\mathrm{D}_2 y^{\beta-2}-\ldots\right\}\frac{dy}{y}$$

Ora, se p è diverso da zero, si ha:

$$(19)\qquad \int_{\frac{1}{w}}^{w} y^{p}\,dy=0 \quad \text{e inoltre} \quad \int_{\frac{1}{w}}^{w}\frac{dy}{y}=2\,\pi i$$

Quando, adunque, β è positivo, abbiamo:

$$\mathrm{I}(\alpha,\beta,\gamma)=(-1)^{\beta}2\,\pi i\,\mathrm{D}_{\beta}(\alpha,\gamma)$$

e se β è negativo:

$$\mathrm{I}(\alpha,-\beta,\gamma)=2\,\pi i\,\mathrm{C}_{\beta}(\alpha,\gamma)$$

e se $\beta=0$:

$$\mathrm{I}(\alpha,0,\gamma)=2\pi i\,\mathrm{C}_0(\alpha,\gamma):$$

intendendo con $\mathrm{D}(\alpha,\gamma)$ e $\mathrm{C}(\alpha,\gamma)$ le D, C relative ai parametri α,γ che entrano nelle espressioni delle A, B.

Siccome poi, com'è facile vedere dalle (18), si ha:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{D}_h(\alpha,-\gamma)=(-1)^h\mathrm{C}_h(\alpha,\gamma)\\ \mathrm{C}_h(\alpha,-\gamma)=(-1)^h\mathrm{D}_h(\alpha,\gamma)\end{array}\right\}\mathrm{C}_0(\alpha,-\gamma)=\mathrm{C}_0(\alpha,\gamma)$$

troveremo infine, se $\lambda>n$:

$$(20)\qquad \begin{array}{c}\alpha_\lambda=a^m\cos^{2m+2}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\mathrm{C}_{\lambda-n}(m+1,\beta)+\mathrm{C}_{\lambda+n}(m+1,\beta)\right\}\\ \alpha'_\lambda=\beta'_\lambda=0\\ \beta_\lambda=a^m\cos^{2m+2}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\mathrm{C}_{\lambda-n}(m+1,\beta)-\mathrm{C}_{\lambda+n}(m+1,\beta)\right\}\end{array}$$

Così pure, se è invece $\lambda<n$ si troverà:

$$\sigma_\lambda=a^m\cos^{2m+2}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\mathrm{C}_{\lambda+n}(m+1,\beta)+(-1)^{n-\lambda}\mathrm{D}_{n-\lambda}(m+1,\beta)\right\}$$

$$\alpha'_\lambda=\beta'_\lambda=0,$$

$$\beta_\lambda=-a^m\cos^{2m+2}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\mathrm{C}_{\lambda+n}(m+1,\beta)-(-1)^{n-\lambda}\mathrm{D}_{n-\lambda}(m+1,\beta)\right\}$$

Infine, se $\lambda=n$, abbiamo com'è facile verificare:

$$\alpha_\lambda=a^m\cos^{2m+2}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\mathrm{C}_{\lambda+n}(m+1,\beta)+\mathrm{C}_0(m+1,\beta)\right\}$$

$$\alpha'_\lambda=\beta'_\lambda=0$$

$$\beta_\lambda=-a^m\cos^{2m+2}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\mathrm{C}_{\lambda+n}(m+1,\beta)-\mathrm{C}_0(m+1,\beta)\right\}$$

Gli sviluppi (12) adunque, si ridurranno a

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l}r^m\cos n\,u=\alpha_0+\alpha_1\cos g+\alpha_2\cos 2g+\ldots\\ r^m\,\mathrm{sen}\,n\,u=\qquad\beta_1\,\mathrm{sen}\,g+\beta_2\,\mathrm{sen}\,2g+\ldots\end{array}\right.$$

ove i coefficienti α e β sono dati immediatamente dalle formole precedenti.

VIII. Per mezzo delle (21) noi potremo sviluppar subito le funzioni:

$$\frac{\cos u'-e}{r'^3},\qquad \frac{\mathrm{sen}\,u'}{r'^3}$$

che si trovano nelle (10). Gli sviluppi si ottengono facendo prima:

$$m=-3,\ n=1,\ \text{poi}\ m=-3,\ n=0$$

per la prima funzione; e facendo

$$m=-3,\quad n=1$$

per la seconda; dunque si porrà:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \frac{\cos u'-e'}{r'^3} &= \xi_0+\xi_1\cos g'+\xi_2\cos 2g'+\ldots\ldots \\ \frac{\operatorname{sen} u'}{r'^3} &= \qquad \chi_1 \operatorname{sen} g'+\chi_2 \operatorname{sen} 2g'+\ldots\ldots \end{aligned}$$

ove le ξ, χ son conosciute.

Per mezzo delle stesse formole (20) (21) si possono anche sviluppare le funzioni $\cos u'$, $\operatorname{sen} u'$: basta evidentemente fare nelle (20) (21)

$$m=0, \qquad n=1$$

e le (18) vengono modificate corrispondentemente, Potremo dunque porre:

$$(23)\qquad \begin{cases} \cos u'=\rho_0+\rho_1\cos g'+\rho_2\cos 2g'+\ldots\ldots \\ \operatorname{sen} u'= \quad \mu_1 \operatorname{sen} g'+\mu_2 \operatorname{sen} 2g'+\ldots\ldots \end{cases}$$

nelle quali le ρ, μ son conosciute.

IX. Bisogna adesso sviluppare la funzione Δ^{-3} pei seni e coseni di g' per svolgere in serie tutto ciò che è relativo al pianeta perturbatore.

Abbiamo:

$$(24)\qquad \Delta^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(r,r')$$

ove $\cos(r,r')$ è dato dalla (7). Inoltre:

$$(25)\qquad \begin{cases} r'=a'(1-e'\cos u') \\ r'\operatorname{sen} f'=a'\sqrt{1-e'^2}\operatorname{sen} u',\quad r'\cos f'=a'\cos u'-a'e' \end{cases}$$

sostituendo nella (24) abbiamo:

$$(26)\qquad \Delta^2=G_0+G_1\cos u'+G_2\cos^2 u'+G_3\operatorname{sen} u'$$

ove

$$\begin{aligned} G_0&=a'^2+r^2+2e'a'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma) \\ G_1&=-2\,[a'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma)+a'^2e'] \\ G_2&=a'^2e'^2 \\ G_3&=-2a'\gamma_1 r\operatorname{sen}(f+\Gamma'). \end{aligned}$$

Siccome nel caso del pianeta si può in prima approssimazione negligere e'^2 così è facile ridurre Δ^2 in una funzione periodica e finita di $\operatorname{sen} g'$ e di $\cos g'$. Infatti trascurando e'^2 le (23) unite colle (20) e (18) danno:

$$\begin{aligned} \cos u'&=-e'+\cos g'+e'\cos^2 g' \\ \operatorname{sen} u'&=\operatorname{sen} g'+\tfrac{1}{2}e'\operatorname{sen} 2g' \end{aligned}$$

Sostituendo nella (26) e negligendo e'^2 si ha facilmente:

$$(27)\quad \Delta^2=L_0+L_1\cos g'+L_2\cos^2 g'+L_3\operatorname{sen} g'+L_4\operatorname{sen} g'\cos g'$$

ove è:

$$\begin{aligned} L_0&=a'^2+r^2+4a'e'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma) \\ L_1&=-2[a'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma)+a'^2e'] \\ L_2&=-2a'e'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma) \\ L_3&=-2a'\gamma_1 r\operatorname{sen}(f+\Gamma') \\ L_4&=-2a'e'\gamma_1 r\operatorname{sen}(f+\Gamma') \end{aligned}$$

X. Cerchiamo di sviluppare la (27) in un prodotto di due fattori binomi. Poniamo:

$$(28)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}g'=\omega \\ \text{da cui} \\ \operatorname{sen} g'=\dfrac{2\omega}{1+\omega^2} \qquad \cos g'=\dfrac{1-\omega^2}{1+\omega^2} \end{cases}$$

sostituendo nella (27), essa diviene:

$$(29)\qquad \Delta^2=\frac{M_0\,\omega^4+M_1\,\omega^3+M_2\,\omega^2+M_3\,\omega+M_4}{(1+\omega^2)^2}$$

ove

$$(30)\qquad \begin{cases} M_0=a'^2+r^2+2a'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma)+2[a'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma)+a'^2]e' \\ M_2=-4a'\gamma_1 r\operatorname{sen}(f+\Gamma')(1-e') \\ M_2=2[a'^2+r^2+6a'e'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma)] \\ M_3=-4a'\gamma_1 r\operatorname{sen}(f+\Gamma')(1+e') \\ M_4=a'^2+r^2-2a'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma)+2[a'\gamma r\operatorname{sen}(f+\Gamma)-a'^2]e' \end{cases}$$

Ponendo uguale a zero il numeratore della (29) si avranno quattro radici ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, e la stessa (29) diverrà:

$$\Delta^2 = \frac{M_0}{(1+\omega^2)^2}(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)(\omega-\omega_3)(\omega-\omega_4)$$

Supporremo ora che la cometa non possa urtare il pianeta perturbatore; allora l'equazione precedente avrà le quattro radici immaginarie, giacchè Δ^2 non potrà mai annullarsi. Sieno ω_1, ω_2 ed ω_3, ω_4 le due coppie coniugate, si avrà:

$$\Delta^2 = \frac{M_0}{(1+\omega^2)^2}(\omega^2-\alpha_1\omega+\beta_1)(\omega^2-\alpha_2\omega+\beta_2) \tag{31}$$

ove

$$\alpha_1 = \omega_1 + \omega_2 \qquad \beta_1 = \omega_1\,\omega_2$$
$$\alpha_2 = \omega_3 + \omega_4 \qquad \beta_2 = \omega_3\,\omega_4$$

Rimettendo nella (31) il valore di ω dato dalla (28) ed osservando che risulta

$$\frac{1}{1+\omega^2} = \cos^2 \tfrac{1}{2} g'$$

si trova, dopo qualche riduzione:

$$\Delta^2 = \frac{M_0}{4}(1+\beta_1)(1+\beta_2)\left\{1-\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}\cos g'-\frac{\alpha_1}{1+\beta_1}\operatorname{sen} g'\right\}\cdot \left\{1-\frac{1-\beta_2}{1+\beta_2}\cos g'-\frac{\alpha_2}{1+\beta_2}\operatorname{sen} g'\right\} \tag{32}$$

se infine si pone

$$\frac{M_0}{4}(1+\beta_1)(1+\beta_2) = H \tag{33}$$
$$\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1} = \varphi_1 \cos \Phi_1 \qquad \frac{\alpha_1}{1+\beta_1} = \varphi_1 \operatorname{sen} \Phi_1$$
$$\frac{1-\beta_2}{1+\beta_2} = \varphi_2 \cos \Phi_2 \qquad \frac{\alpha_2}{1+\beta_2} = \varphi_2 \operatorname{sen} \Phi_2$$

dalle quali

$$\operatorname{tang} \Phi_1 = \frac{\alpha_1}{1-\beta_1} \qquad \operatorname{tang} \Phi_2 = \frac{\alpha_2}{1-\beta_2}$$
$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{(1-\beta_1)^2+\alpha_1^2}}{1+\beta_1} \qquad \varphi_2 = \frac{\sqrt{(1-\beta_2)^2+\alpha_2^2}}{1+\beta_2} \tag{34}$$

la (32) diviene

$$\Delta^2 = H\{1-\varphi_1\cos(g'-\Phi_1)\}\{1-\varphi_2\cos(g'-\Phi_2)\} \tag{35}$$

e così Δ^2 è ridotto in fattori.

XI. Occupiamoci adesso di esprimere le φ, Φ per le (30). Trascurando e'^2, si trovano le due radici ω_1 ω_2 date da

$$\omega_1 = (1+e')\sqrt{-1}, \qquad \omega_2 = -(1+e')\sqrt{-1}$$

Per avere ω_3, ω_4 approssimate sino ad e'^2 escluso dividiamo l'equazione:

$$M_0\omega^4 + M_1\omega^3 + M_2\omega^2 + M_3\omega + M_4 = 0$$

pel prodotto

$$\{\omega-(1+e')\sqrt{-1}\}\{\omega+(1+e')\sqrt{-1}\} = \omega^2+(1+e')^2$$

rimarrà:

$$N_0\omega^2 + N_1\omega + N_2 = 0$$

ove

$$N_0 = a'^2 + r^2 + 2a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma) + 2[a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma) + a'^2]e'$$
$$N_1 = -4a'\gamma_1 r \operatorname{sen}(f+\Gamma')(1-e')$$
$$N_2 = a'^2 + r^2 - 2a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma) - 2[2a'^2 + r^2 - 3a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)]e'$$

Ora, siccome, a noi occorrono $\omega_3\,\omega_4$ e $\omega_3+\omega_4$, queste posson subito ricavarsi dai coefficienti della precedente equazione che ha appunto per radici i valori approssimati fino ad e'^2 delle ω_3, ω_4. Abbiamo quindi:

$$\omega_3+\omega_4=\frac{4a'\gamma_1 r \operatorname{sen}(f+\Gamma')(1-e')}{a'^2+r^2+2a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)+2[a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)+a'^2]e'}$$
$$\omega_3\,\omega_4=\frac{a'^2+r^2-2a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)+2\,[3a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)-2a'^2-r^2]e'}{a'^2+r^2+2a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)+2[a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)+a'^2]e'}$$

sicchè si avrà :

$$(36)\quad \begin{cases} \varphi_2 \cos\Phi_2=\dfrac{2a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)+[3a'^2+r^2-2a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)]e'}{a'^2+r^2-\{a'^2+r^2-4a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)\}e'} \\ \varphi_2 \operatorname{sen}\Phi_2=\dfrac{2a'\gamma_1 r \operatorname{sen}(f+\Gamma')(1-e')}{a'^2+r^2-\{a'^2+r^2-4a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)\}e'} \end{cases}$$

Inoltre, per le precedenti, si ha :

$$\omega_1+\omega_2=0\,, \qquad \omega_1+\omega_2=1+2\,e'$$

quindi:

$$\varphi_1 \cos\Phi_1=-e' \qquad \varphi_1 \operatorname{sen}\Phi_1=0$$

Finalmente l' espressione (35) diviene :

$$(37)\qquad \Delta^2=\mathrm{H}\{1+e'\cos g'\}\{1-\varphi_2\cos(g'-\Phi_2)\}$$

ove

$$(38)\qquad \mathrm{H}=(1+e')\{(a'^2+r^2)(1-e')+4a'\gamma r \operatorname{sen}(f+\Gamma)e'\}$$

Si può osservare che $\varphi_2<1$, perchè essendo ω_3 ed ω_4 coniugate, avranno la forma :

$$\omega_3=m+in \qquad \omega_4=m-in$$

da cui

$$\alpha_2=2\,m \qquad \beta_2=m^2+n^2$$

epperò ;

$$\varphi_2{}^2=\frac{1+m^4+n^4+2m^2n^2+2m^2-2n^2}{1+m^4+n^4+2m^2n^2+2m^2+2n^2}<1.$$

epperò anche $\varphi_2<1$.

XII. Passiamo ora allo sviluppo di Δ^{-3}. Ponendo

$$\Delta^2=\mathrm{P}$$

basterà sviluppare la funzione $\mathrm{P}^{-\frac{3}{2}}$.

Si faccia ora

$$(39)\qquad g'-\Phi_2=\pi-2\,\theta\,, \qquad g'=2\,\xi:$$

avremo :

$$\cos(g'-\Phi_2)=-\cos 2\theta=-1+2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$\cos g'=1-2\operatorname{sen}^2\xi$$

e la (37) diviene:

$$\Delta^2=\mathrm{H}\{1+e'-2\,e'\operatorname{sen}^2\xi\}\{1+\varphi_2-2\,\varphi_2\operatorname{sen}^2\theta\}$$

ossia

$$\Delta^2=\mathrm{H}(1+e')(1+\varphi_2)\left\{1-\frac{2\,e'}{1+e'}\operatorname{sen}^2\xi\right\}\left\{1-\frac{2\,\varphi_2}{1+\varphi_2}\operatorname{sen}^2\theta\right\}$$

od infine, ponendo:

$$(40)\qquad \mathrm{H}(1+e')(1+\varphi_2)=\mathrm{Z},\ \frac{2e'}{1+e'}=\varepsilon^2,\ \frac{2\varphi_2}{1+\varphi_2}=\eta^2$$

si avrà :

$$(41)\qquad \Delta^2=\mathrm{Z}(1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2\xi)(1-\eta^2\operatorname{sen}^2\theta)$$

ove le ε^2, η^2 sono minori di 1, perchè tali sono e', φ_2. Si ha dunque:

$$(42)\qquad \Delta^{-3}=\mathrm{Z}^{-\frac{3}{2}}(1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2\xi)^{-\frac{3}{2}}(1-\eta^2\operatorname{sen}^2\theta)^{-\frac{3}{2}}$$

XIII. Svolgiamo in serie il 1.° fattore; lo stesso svolgimento potrà poi applicarsi al 2.°

Poniamo:

$$W = (1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 \xi)^{-\frac{3}{2}} \tag{43}$$

Applicando a W lo sviluppo di Fourier abbiamo:

$$W = \gamma_0 + \gamma_1 \cos \xi + \gamma_2 \cos 2\xi + \dots$$

la serie riducendosi ai soli coseni perchè

$$W(-\xi) = W(\xi)$$

I coefficienti son dati da

$$\gamma_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W \cos i\xi \, d\xi$$

ossia:

$$\gamma_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} W \cos i\xi \, d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} W \cos i\xi \, d\xi$$

o infine, facilmente si trova

$$\gamma_i = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} W \cos i\xi \, d\xi .$$

Ma possiamo scrivere:

$$\gamma_i = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} W \cos i\xi \, d\xi - \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} W \cos i\xi \, d\xi$$

e mutando ξ in $\pi - \xi$ nel secondo integrale abbiamo:

$$\gamma_i = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} W \cos i\xi \, d\xi + \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} W \cos (i\pi - i\xi) \, d\xi$$

Ora, per i pari abbiamo:

$$\gamma_{2i} = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} W \cos 2i\xi \, d\xi . \tag{44}$$

e per i dispari:

$$\gamma_{2i+1} = 0.$$

Dunque la serie che dà W sarà

$$W = \gamma_0 + \gamma_2 \cos 2\xi + \gamma_4 \cos 4\xi + \dots \tag{45}$$

XIV. Le γ si riducono agl'integrali ellittici completi. Prima stabiliremo una ricorrenza fra le γ; a tal fine consideriamo la funzione:

$$R = \frac{1}{\pi} (1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 \xi)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} 2i\xi$$

Differenziandola, si può facilmente ridurre alla forma:

$$dR = \frac{2i}{\pi} (1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 \xi) \, W \cos 2i\xi \, d\xi + \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \operatorname{sen} 2i\xi \operatorname{sen} 2\xi \, W \, d\xi$$

ovvero:

$$dR = \frac{i(2 - \varepsilon^2)}{\pi} W \cos 2i\xi \, d\xi + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \frac{(2i-1)}{\pi} W \cos 2(i+1)\xi \, d\xi$$
$$+ \frac{1}{4} \varepsilon^2 \frac{(2i+1)}{\pi} \cos 2(i-1)\xi . \, W \, d\xi .$$

Integrando e limitando fra $-\pi$ e π, coll'osservare che R così limitata si annulla, otteremo:

$$4i(2 - \varepsilon^2)\gamma_{2i} + \varepsilon^2 (2i-1) \gamma_{2(i+1)} + \varepsilon^2 (2i+1) \gamma_{2(i-1)} = 0 \tag{46}$$

che è una relazione fra tre γ consecutive: basta dunque calcolare γ_0 e γ_1 per aver tutte le altre.

Si può intanto esprimere la γ_2 per γ_0. Infatti:

$$\gamma_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\,\xi\, d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2 \xi)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\xi\, d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{3}{2}}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,\mathrm{sen}^2\xi\, d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi) d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}}}$$

e moltiplicando per $\frac{4}{\pi}$ si ha:

$$\text{(47)} \qquad \gamma_2 = \frac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2}\gamma_0 + \frac{8}{\pi\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}}}$$

e nel secondo membro comparisce l'integrale ellittico completo di prima specie che possiamo considerare come noto.

XV. Per avere γ_0 prendiamo la funzione:

$$Z = (1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{sen}\, 2\xi.$$

Differenziando, potremo scrivere

$$dZ = \frac{2\cos 2\xi\, d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\cos 4\xi\, d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando e limitando fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, se si moltiplica il risul-

tato per $\frac{4}{\pi}$ si trova:

$$0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\xi\, d\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varepsilon^2}{4}\gamma_0 - \frac{\varepsilon^2}{4}\gamma_4$$

Eliminando da questa la γ_4 per mezzo della (46) ove si faccia $i=1$, diviene

$$\text{(48)} \qquad 0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\,\xi\, d\,\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^2\gamma_0 + (2-\varepsilon^2)\gamma_2$$

Ora, collo stesso metodo tenuto per la determinazione di γ_2 si trova che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\,\xi\, d\,\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}}\, d\,\xi$$

Sostituendo nella (48) abbiamo infine

$$\text{(49)} \quad 0 = \varepsilon^2\gamma_0 + (2-\varepsilon^2)\gamma_2 + \frac{8(\varepsilon^2-2)}{\pi\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\xi}{(1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{16}{\pi\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\varepsilon^2 \mathrm{sen}^2\xi)^{\frac{1}{2}} d\xi$$

Questa colla (47), daranno i valori di γ_0, γ_2 in funzione degl' integrali ellittici completi di 1.ª e 2.ª specie che compariscono nelle due equazioni. Chiamando F l' integrale ellittico completo di 1.ª specie, ed E quello di 2.ª, si ricava dalla (47), (49):

$$(50)\quad \begin{cases} \gamma_0 = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{E}{1-\varepsilon^2} \\ \gamma_2 = \dfrac{4}{\varepsilon^2\pi}\left\{2\,F + \dfrac{\varepsilon^2-2}{1-\varepsilon^2}E\right\} \end{cases}$$

e siccome gl' integrali ellittici posson ritenersi noti, per le (50) e (46) saranno note tutte le γ.

Quanto al 2.° fattore della (42), indicandolo con V, si avrà, analogamente:

$$(51)\qquad V = \nu_0 + \nu_2 \cos 2\,\theta + \nu_4 \cos 4\,\theta + \ldots.$$

in cui i coefficienti si calcolano con formule analoghe a quelle che danno le γ. Queste si calcolano immediatamente perchè ε^2 è dato dalle (40) per e': e la (45) sarà convergentissima perchè e' è piccola. Le ν per ora non possono calcolarsi, perchè η_i^2 è funzione delle coordinate della cometa; ma si calcoleranno in seguito.

Si vedrà più avanti che le quantità γ, ν decrescono rapidamente in valore assoluto; dunque le serie dei moduli dei termini delle serie W e V sono convergenti, e pel teorema di Dirichlet, queste sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini.

XVI. Così è facile sviluppare Δ^{-3}, perchè

$$(52)\qquad \Delta^{-3} = Z^{-\frac{3}{2}}\,V\,W.$$

e le (45), (51) divengono, per le (39):

$$\begin{aligned} W &= \gamma_0 + \gamma_2 \cos g' + \gamma_4 \cos 2\,g' + \ldots. \\ V &= \nu_0 - \nu_2 \cos \Phi_2 \cos g' + \nu_4 \cos 2\,\Phi_2 \cos 2\,g' - \ldots. \\ &\quad - \nu_2 \operatorname{sen} \Phi_2 \operatorname{sen} g' + \nu_4 \operatorname{sen} 2\,\Phi_2 \operatorname{sen} 2\,g' - \ldots. \end{aligned}$$

Si avrà dunque

$$\begin{aligned} (53)\qquad V\,W = \lambda'_0 &+ \lambda'_1 \cos g' + \lambda'_2 \cos 2\,g' + \ldots \\ &+ \sigma'_1 \operatorname{sen} g' + \sigma'_2 \operatorname{sen} 2\,g' + \ldots \end{aligned}$$

ove, per la teoria della moltiplicazione delle serie:

$$(54)\quad \begin{cases} \lambda'_i = \gamma_{2i}\,\nu_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{2}\,\nu_{2n}\,(\gamma_{2n+2i} + \gamma_{2n-2i}) \cos n\,\Phi_2 \\ \text{ad eccezione di} \\ \qquad \lambda'_0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\nu_{2n}\,\gamma_{2n} \cos n\,\Phi_2 \\ \text{e inoltre} \\ \sigma'_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\tfrac{1}{2}\,\nu_{2n}\,(\gamma_{2n+2i} - \gamma_{2n-2i}) \operatorname{sen} n\,\Phi_2 \end{cases}$$

colle seguenti avvertenze:

1.° Quando si presenta γ_{-m}, questo sarà un simbolo che s'interpreta coll'eguaglianza:

$$\gamma_{-m} = \gamma_m$$

2.° Quando in $(\gamma_{2n+2i} + \gamma_{2n-2i})$ si presenta γ_0, questo dee cambiarsi in $2\,\gamma_0$.

Si osservi che la (53) è rapidamente convergente, perchè le γ impiccoliscono con rapidità,

Introducendo la (53) nella (52) si avrà:

$$\begin{aligned} (55)\qquad \Delta^{-3} = \lambda_0 &+ \lambda_1 \cos g' + \lambda_2 \cos 2\,g' + \ldots. \\ &+ \sigma_1 \operatorname{sen} g' + \sigma_2 \operatorname{sen} 2\,g' + \ldots. \end{aligned}$$

ove abbiamo

$$(56)\quad \begin{cases} \lambda_i = Z^{-\frac{3}{2}}\gamma_{2i}\,\nu_0 + \tfrac{1}{2}\,Z^{-\frac{3}{2}}.\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\nu_{2n}\,(\gamma_{2n+2i} + \gamma_{2n-2i}) \cos n\,\Phi_2 \\ \sigma_i = \tfrac{1}{2}\,Z^{-\frac{3}{2}}.\sum(-1)^{n-1}\,\nu_{2n}\,(\gamma_{2n+2i} - \gamma_{2n-2i}) \operatorname{sen} n\,\Phi_2 \end{cases}$$

XVII. Per lo svolgimento delle (10) mancano tuttora le funzioni

$$(\cos u' - e')\frac{1}{\Delta^3} \qquad\qquad \operatorname{sen} u' \cdot \frac{1}{\Delta^3}$$

Ora $\cos u' - e'$ si ha dalla 1.ª delle (23): sicchè basterà moltiplicare le (23) per la (55). Si troverà

$$(57) \qquad (\cos u' - e')\frac{1}{\Delta^3} = y_0 + y_1 \cos g' + y_2 \cos 2g' + \ldots \\ + x_1 \operatorname{sen} g' + x_2 \operatorname{sen} 2g' + \ldots$$

ove:

$$y_i = (\rho_0 - e')\lambda_i + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(\lambda_{n+i} + \lambda_{n-i})$$

$$x_i = (\rho_0 - e')\sigma_i + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=i} \rho_n(\sigma_{n+i} + \sigma_{n-i}) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=i+1}^{\infty} \rho_n(\sigma_{n+i} - \sigma_{n-i})$$

eccezione fatta di

$$y_0 = (\rho_0 - e')\lambda_0 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \lambda_n$$

e in queste, colle avvertenze precedenti, si tenga $\sigma_0 = 0$.

Analogamente:

$$(58) \qquad \operatorname{sen} u' \frac{1}{\Delta^3} = z_0 + z_1 \cos g' + z_2 \cos 2g' + \ldots \\ + w_1 \operatorname{sen} g' + w_2 \operatorname{sen} 2g' + \ldots$$

ove:

$$z_i = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=i} \mu_n(\sigma_{n+i} - \sigma_{n-i}) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=i+1}^{n=\infty} \mu_n(\sigma_{n+i} + \sigma_{n-i})$$

$$w_i = \lambda_0 \mu_i + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=} \lambda_n(\mu_{n+i} + \mu_{n-i}) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=i+1}^{\infty} \lambda_n(\mu_{n+i} - \mu_{n-i})$$

ad eccezione di:

$$z_0 = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \mu_n$$

colle solite avvertenze, e $\mu_0 = 0$.

XVIII. Col mezzo delle (22), (55), (57) e (58) le (10) divengono:

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dW_0}{dt} &= M_0 + M_1 \cos g' + M_2 \cos 2g' + \ldots. \\ &\quad + N_1 \operatorname{sen} g' + N_2 \operatorname{sen} 2g' + \ldots. \\ \frac{dp}{dt} &= M_0^{(1)} + M_1^{(1)} \cos g' + M_2^{(1)} \cos 2g' + \ldots. \\ &\quad + N_1^{(1)} \operatorname{sen} g' + N_2^{(1)} \operatorname{sen} 2g' + \ldots. \\ \frac{dq}{dt} &= M_0^{(2)} + M_1^{(2)} \cos g' + M_2^{(2)} \cos 2g' + \ldots. \\ &\quad + N_1^{(2)} \operatorname{sen} g' + N_2^{(2)} \operatorname{sen} 2g' + \ldots. \end{aligned} \right.$$

ove

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} M_i &= P(y_i - \xi_i) + Qz_i + R\lambda_i \\ N_i &= Px_i + Q(w_i - \chi_i) + R\sigma_i \\ M_i^{(1)} &= S(y_i - \xi_i) + Tz_i \\ N_i^{(1)} &= Sx_i + T(w_i - \chi_i) \\ M_i^{(2)} &= U(y_i - \xi_i) + Vz_i \\ N_i^{(2)} &= Ux_i + V(w_i - \chi_i) \end{aligned} \right.$$

Nelle (59) i coefficienti son funzioni soltanto delle coordinate della cometa; sicchè le coordinate dei due astri restano separate.

§. 2.

I. Dopo aver ridotto le equazioni differenziali del moto alla forma precedente, sotto la quale saranno usate in seguito, occorre adesso, per rendere praticamente attuabile la loro integrazione, fare un cangiamento di variabili. Introduciamo quindi una nuova variabile k, legata alle antiche variabili dalla equazione:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} u = \pm p \, (1 - l^2 \cos^2 k)$$

essendo u, come avanti, l' anomalìa eccentrica della cometa, e p, l due costanti per ora indeterminate.

Occupiamoci ora di ridurre le quantità relative alla cometa, a funzioni di k; e prima operiamo per r.

Avendosi, dal moto ellittico:

$$\text{(2)} \qquad r = a\,(1 - e \cos u)$$

se sostituiamo per $\cos u$ il valore che si deduce da (1), si trova dopo qualche riduzione:

$$\text{(3)} \quad r = a \left\{ 1 - e + ep^2(2 - 2l^2 + \tfrac{3}{4} l^4) - ep^2 l^2 (2 - l^2) \cos 2k + \tfrac{1}{4} e p^2 l^4 \cos 4k \right\}$$

la quale dico che rappresenta una sola porzione di ellisse compresa fra due raggi ρ_1 ρ_2 arbitrari e che dipendono dai valori di p, l.

II. Infatti, si deduce dalla (1) che k deve farsi variare solo in un quadrante perchè facendola variare oltre un quadrante, si ritrovano gli stessi valori di u in ordine inverso, epperò la (3) darà gli stessi punti dell'ellisse, benchè percorsi in ordine inverso. Facciamo adunque variare k da 0 a $\frac{\pi}{2}$. Ponendo in (3) $k = 0$, r prenderà un certo valore ρ_1, dato da

$$\text{(4)} \qquad \rho_1 = a \left\{ 1 - e + 2\, e\, p^2 + 2\, e\, p^2\, l^4 - 4\, e\, p^2\, l^2 \right\}$$

e che dipende da p, l. Si potranno dunque determinare queste arbitrarie in modo che ρ_1 abbia un dato valore compreso fra $a(1-e)$ ed $a(1+e)$. Per ciò basta risolvere la (4) rispetto ad l^2, ritenendo ρ_1 come dato. Si avrà:

$$\text{(5)} \qquad l^2 = 1 \pm \frac{1}{p} \sqrt{\frac{\rho_1 - a(1-e)}{2ae}}$$

Questo valore posto nella (3) fa si che per $k=0$ viene da essa rappresentato il raggio ρ_1, che è quello corrispondente all'anomalia eccentrica u_0 data da:

$$\text{(6)} \qquad u_0 = 2 \operatorname{arc\,sen} \left[\pm p (1 - l^2) \right]$$

ove l^2 è dato da (5), e che si ricava facendo $k=0$ nella (1).

Nella (5) la p resta ancora indeterminata.

Ponendo ora in (3) $k = \frac{\pi}{2}$ la r assumerà un' altro valore ρ_2 dato da:

$$\text{(7)} \qquad \rho_2 = a(1 - e + 2\, e\, p^2)$$

Da questa potremo quindi determinare la p in modo che ρ_2 abbia un dato valore. Si avrà:

$$\text{(8)} \qquad p = \sqrt{\frac{\rho_2 - a(1-e)}{2ae}}$$

e per questo valore la (3) darà per $k = \frac{\pi}{2}$ il raggio ρ_2 che corrisponde all' anomalia eccentrica $u_{\frac{\pi}{2}}$ data da:

$$\text{(9)} \qquad u_{\frac{\pi}{2}} = 2 \operatorname{arc\,sen} (\pm p)$$

che si ottiene dalla (1) col fare $k = \frac{\pi}{2}$.

III. Sostituendo la (8) nella (5) abbiamo:

$$\text{(10)} \qquad l^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{\rho_1 - a(1-e)}{\rho_2 - a(1-e)}}$$

e prendendo per p, l^2 i valori dati dalle (8), (10), la (3) rappresenta la parte di ellisse compresa fra i raggi ρ_1 e ρ_2, perchè la k variando con continuità da 0 a k la u varia pure con continuità da u_0 ad $u_{\frac{\pi}{2}}$, epperò tutti i raggi compresi fra ρ_1 e ρ_2 vengono rappresentati.

Se si pone per semplicità:

$$q = \sqrt{\frac{\rho_1 - a(1-e)}{2ae}} \tag{11}$$

valendosi di questa e delle (8) (10) la (3) diviene:

$$r = a \left\{ 1 - e + \tfrac{3}{4} e (p^2 + q^2 \mp \tfrac{2}{3} pq) + e(q^2 - p^2) \cos 2k + \tfrac{1}{4} e (p \pm q)^2 \cos 4k \right\} \tag{12}$$

ove i segni superiori od inferiori debbono prendersi, secondochè in l^2 si prende il segno $+$ o il segno $-$.

Si può osservare che le p, q sono comprese fra 0 ed 1. Infatti il massimo e il minimo di ρ_1 e ρ_2 essendo rispettivamente $a(1+e)$, $a(1-e)$, la proprietà è evidente sostituendo questi valori nelle (8), (11).

Resta a vedersi ora, quale delle due parti in cui resta divisa l'ellisse da ρ_1 ρ_2, sia quella rappresentata da (12).

IV. Per un dato valore di k, la (1) dà due valori per u ai quali corrispondono due raggi simmetrici. Per togliere questa ambiguità, ora che si tratta solo di fissare la posizione di un raggio vettore, stabiliremo di contare u da 0 a π e da 0 a $-\pi$ a partir dal perielio: e inoltre di prendere per u l'arco positivo o negativo che ha il minimo valore assoluto.

Ciò posto, supponiamo di prendere nella (10) il segno $+$; sarà allora $l^2 > 1$.

Le (6), (9) divengono allora, per le (10), (11):

$$u_0 = 2 \text{ arc sen} (\mp q) \qquad u_{\frac{\pi}{2}} = 2 \text{ arc sen} (\pm p)$$

Se nella (1) si prende il segno superiore, si ha da queste, per la convenzione precedente, che ρ_1 sarà al disotto e ρ_2 al disopra dell'asse maggiore: e l'opposto avviene se nella (1) si prende il segno inferiore. Ora se ρ_1 ρ_2 son diversi da $a(1-e)$, $a(1+e)$, per $u=0$, la (1) dà

$$0 = 1 - l^2 \cos^2 k$$

da cui

$$k_0 = \text{arc . cos} \frac{1}{l} \tag{13}$$

e k_0 è reale, perchè è ora $l^2 > 1$ epperò $\frac{1}{l} < 1$. Dunque a k_0 corrisponde il perielio, com'è facile verificare dalla (12); epperò questa, quando nella (10) si prende il $+$, dà la parte d'ellisse compresa fra ρ_1 e ρ_2 che include il perielio, prendendo in essa (12) i segni superiori.

V. Supponiamo invece di prendere nella (10) il segno $-$. Allora $l^2 < 1$, se il radicale < 1; e le (6) (9) divengono

$$u_0 = 2 \text{ arc sen} (\pm q) \qquad u_{\frac{\pi}{2}} = 2 \text{ arc sen} (\pm p)$$

epperò se nella (1) si prende il $+$, i raggi ρ_1 ρ_2 saranno entrambi situati al disopra dell'asse maggiore; se nella (1) si prende il $-$, i raggi suddetti saranno entrambi situati al disotto. Ma in questi casi il perielio non è rappresentato, perchè essendo $l^2 < 1$ la (13) dà per k_0 un valore immaginario; e per la posizione di ρ_1 ρ_2 non sarà quindi rappresentato neppur l'afelio.

Si può osservare che per avere l reale bisogna che sia $\rho_1 < \rho_2$ come si vede dalla (10).

Dunque prendendo nella (10) il segno $-$, la (12), ove si prendano i segni inferiori, rappresenta la parte d'ellisse compresa nell'angolo $< \pi$ che fanno i raggi ρ_1 e ρ_2: e questa parte sarà al di sopra dell'asse maggiore se in (1) si prende il $+$, al disotto se si prende il $-$.

Accenniamo soltanto, che per mezzo della (12) si può, come caso particolare, rappresentare la semiellisse superiore, inferiore, laterale destra e sinistra.

VI. Il cangiamento di variabile ora effettuato non può dar formule che rappresentino una parte d'ellisse racchiudente l'afelio. Per far ciò bisognerà fare un' altra posizione, cioè porre

$$\cos \tfrac{1}{2} u = \pm p' \left(1 - l'^2 \cos^2 k' \right) \tag{14}$$

essendo k' la nuova variabile e p', l' due arbitrarie che posson determinarsi in modo che ai valori estremi di k' corrispondano due dati raggi vettori ρ_1 e ρ_2. Sostituendo la (14) nella (2) ed operando come avanti si troverebbe:

$$r = a \left\{ 1 + e - \tfrac{3}{4} e (p'^2 + q'^2 \mp \tfrac{2}{3} p' q') - e (q'^2 - p'^2) \cos 2k' - \tfrac{1}{4} e (p' \pm q')^2 \cos 4k' \right. \tag{15}$$

ove

$$p' = \sqrt{\frac{a(1+e) - \rho_2}{2ae}}\,, \quad q' = \sqrt{\frac{a(1+e) - \rho_1}{2ae}} \tag{16}$$

e si ha

$$l'^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{a(1+e) - \rho_1}{a(1+e) - \rho_2}} \tag{17}$$

Si vedrebbe, come nei n^i IV e V, che se nella (15) si prendono i segni superiori, essa rappresenta la parte di ellisse racchiudente l'afelio, compresa fra i raggi ρ_1 e ρ_2, dei quali ρ_1 è al disopra dell'asse maggiore e ρ_2 al di sotto, se in (14) si prende il $+$; avviene l'opposto se nella (14) si prende il $-$.

Inoltre, se nella (15) si prendono i segni inferiori, essa rappresenta la parte dell'ellisse compresa nell'angolo $< \pi$ fatto da $\rho_1\ \rho_2$: e detta parte sarà situata al disopra dell' asse maggiore, se nella (14) si prende il $+$; al disotto, se si prende il $-$.

VII. Per mezzo delle due nuove variabili k, k' che possiamo chiamare rispettivamente *anomalia parziale inferiore e superiore*, si può rappresentare tutta l' ellisse, dividendola non solo in due parti, come avviene se i raggi $\rho_1\ \rho_2$ della (12) sono gli stessi che quelli della (15), ma spezzandola in quante parti si vuole, rappresentando ciascuna con una formola analoga alla (12) o alla (15). Si può mostrare che in queste formule i coefficienti delle variabili k o k' posson rendersi piccoli quanto si vuole. Infatti considerando la (12) e in essa i segni superiori: per render piccoli i detti coefficienti basta prendere $\rho_1\ \rho_2$ vicini al perielio, perchè allora le $\rho_1\ \rho_2$ essendo minori di a possiamo porre:

$$\rho_1 = a(1 - \varepsilon) \qquad \rho_2 = a(1 - \eta)$$

ove ε, η son comprese fra 0 ed e: e le (8), (11) divengono

$$p = \sqrt{\frac{e - \eta}{2e}} \qquad q = \sqrt{\frac{e - \varepsilon}{2e}}$$

il che mostra che le p, q decrescono quanto più $\rho_1\ \rho_2$ son vicine al perielio e così i coefficienti di k nella (12) son piccoli quanto si vuole.

Se invece nella (12) si prendono i segni inferiori, per render piccoli i soliti coefficienti, basta prendere i raggi $\rho_1\ \rho_2$ poco differenti, perchè tali saranno pure le p, q: e i detti coefficienti sono

$$e(q^2 - p^2) \qquad \text{ed} \quad \frac{1}{2} e \, (p - q)^2$$

Lo stesso avviene per la (15): nel caso che si prendano i segni superiori, i coefficienti di k' son tanto più piccoli quanto più le p', q' son vicine all' afelio.

Si vede però, che quanto più son piccoli i coefficienti delle (12), (15) in tanto maggior numero di parti bisogna aver diviso l'ellisse; del resto il vantaggio di questo metodo sarà meglio apprezzato più avanti.

VIII. Bisogna ora ridurre le equazioni differenziali del moto, funzioni della nuova variabile. Per brevità, faremo la sostituzione solo nella prima di dette equazioni, anche perchè lo stesso metodo deve tenersi colle altre.

Si ha

$$\frac{dW_0}{dk} = \frac{dW_0}{dt}\frac{dt}{dk} \tag{18}$$

sicchè la prima delle (59) a cui limitiamo il calcolo, diverrà

$$\begin{aligned}\frac{dW_0}{dk} = A_0 + A_1 \cos g' + A_2 \cos 2g' + \ldots \\ + B_1 \operatorname{sen} g' + B_2 \operatorname{sen} 2g' + \ldots\end{aligned} \tag{19}$$

ove

$$A_i = M_i \frac{dt}{dk}, \qquad B_i = N_i \frac{dt}{dk} \tag{20}$$

Ma dalle formule del moto ellittico si ha

$$n\,dt = \frac{r}{a}\,du$$

sicchè

$$n\frac{dt}{dk} = \frac{r}{a}\frac{du}{dk}$$

Differenziando la (1) ed eliminando la u si trova, col badare alla (10)

$$n\frac{dt}{dk} = \frac{r}{a}\,\frac{\pm 2(p \pm q)\operatorname{sen} 2k}{\sqrt{1-p+(p\pm q)\cos^2 k}\,\sqrt{1+p-(p\pm q)\cos^2 k}} \tag{21}$$

Sostituendo questa nella (20) e badando alla forma delle

P, Q, R date dalle (11) ove le $\rho, \omega, \Gamma, \gamma$ debbono ritenersi costanti, è facile vedere che le A_i, B_i prendono la forma

$$\begin{aligned}A_i = X_1 r + X_2\, r.r \operatorname{sen} f + X_3\, r.r \cos f + X_4 (r\cos f)^2 \\ + X_5\, r\cos f\, r \operatorname{sen} f + X_6 (r \operatorname{sen} f)^2\end{aligned} \tag{22}$$

ove le X sono funzioni delle costanti e delle stesse quantità r, $r \operatorname{sen} f$, $r\cos f$.

Infatti, le X contengono le $\lambda, \sigma, x, y, z, w$ che entrano nelle M_i N_i (60); e le dette λ, σ, ec., dipendono dalle ν, che, come risulta dal n.° XI e segg., sono funzioni di η^2 epperò di φ_2. Ora dalle (36) è chiaro che φ_2 è funzione di r^2, $r\cos f$, $r \operatorname{sen} f$: epperò anche le X saranno funzioni di queste quantità, e potremo scrivere

$$A_i = F(r, r\operatorname{sen} f, r\cos f)$$

essendo F il simbolo di funzione: e forma analoga hanno le B_i.

IX. Per ridurre ora le A_i, B_i a funzioni di k o di k', siccome la r è già espressa per queste quantità mediante le (12) (15), resta solo ad esprimere per k, o k', $r\cos f$, $r\operatorname{sen} f$.

Pel moto ellittico, si ha

$$\left\{\begin{aligned} r\cos f &= a\cos u - a e \\ r\operatorname{sen} f &= a \operatorname{sen} u \sqrt{1-e^2}\end{aligned}\right. \tag{23}$$

Se da queste eliminiamo u mediante la (1), abbiamo:

$$\left\{\begin{aligned} r\cos f &= a\left\{1 - e - \tfrac{3}{4}(p^2+q^2 \mp \tfrac{2}{3}pq) - (q^2-p^2)\cos 2k - \tfrac{1}{4}(p\pm q)^2\cos 4k\right\} \\ r\operatorname{sen} f &= \pm a\sqrt{1-e^2}\,[(p\mp q)-(p\pm q)\cos 2k]\sqrt{1-p+(p\pm q)\cos^2 k}\,\sqrt{1+p-(p\pm q)\cos^2 k},\end{aligned}\right. \tag{24}$$

e se invece eliminiamo u servendoci della (14) avremo:

$$\left\{\begin{aligned} r\cos f &= a\left\{-1 - e + \tfrac{3}{4}(p'^2+q'^2 \mp \tfrac{2}{3}p'q') + (q'^2-p'^2)\cos 2k' + \tfrac{1}{4}(p'\pm q')^2\cos 4k'\right\} \\ r\operatorname{sen} f &= \pm a\sqrt{1-e^2}\,[(p'\mp q')-(p'\pm q')\cos 2k'] \\ &\quad \sqrt{1-p'+(p'\pm q')\cos^2 k'}\,\sqrt{1+p'-(p'\pm q')\cos^2 k}\end{aligned}\right. \tag{25}$$

Se poi nelle (18), (19), (20) invece di k, prendiamo k', la (21) diviene:

$$(26)\qquad n\frac{dt}{dk'}=\frac{r}{a}\,\frac{\mp 2(p'\pm q')\,\mathrm{sen}\,2\,k'}{\sqrt{1-p'+(p'\pm q')\cos^2 k'}\,\sqrt{1+p'-(p'\pm q')\cos^2 k'}}$$

In tutte queste formule, il doppio segno interno è relativo a quello delle (10) (17); e l'esterno ha relazione con quello delle (1) (14).

Si può osservare che anche in queste formule i coefficienti di k, k' possono rendersi piccoli quanto si vuole, per le ragioni esposte al n.° VII. §. 2.

Per mezzo ora delle precedenti relazioni noi possiamo ridurre i coefficienti della (19) a funzioni di k o di k'.

Dopo di ciò, resta da ridurre in funzione di k o di k' anche la g' che comparisce nella (19). Ecco come ciò può effettuarsi. Si ha

$$g' = n\,t + c'$$

essendo c' la longitudine media del perielio; quindi la (19) diviene:

$$(27)\qquad \begin{aligned}\frac{dW_0}{dk} &= C_0 + C_1\cos c' + C_2\cos 2\,c' + \ldots.\\ &\quad + D_1\,\mathrm{sen}\,c' + D_2\,\mathrm{sen}\,2\,c' + \ldots.\end{aligned}$$

ove

$$(28)\qquad \begin{cases} C_i = A_i\cos i\,n'\,t + B_i\,\mathrm{sen}\,i\,n'\,t\\ D_i = B_i\cos i\,n' t - A_i\,\mathrm{sen}\,i\,n'\,t\end{cases}$$

Ora le A, B son già ridotte a funzioni di k; per ridur tale anche t, non si ha che ad integrare la (21) e si troverà, indicando con F il simbolo di funzione

$$t = F\,(k)$$

Sostituendo infine questa espressione di t nella (28), il secondo membro della (27) può ritenersi espresso in funzione di k, e tenendo un metodo analogo si potrebbe esprimere in funzione di k'.

X. Effettuiamo ora la trasformazione delle A_i B_i sinora semplicemente accennata, ed anche quella di g'. Bisogna perciò sviluppare in serie i radicali che entrano nelle (21), (24) ec. Poniamo

$$(29)\qquad \begin{cases} R = \sqrt{1-p+(p\pm q)\cos^2 k}\\ S = \sqrt{1+p-(p\pm q)\cos^2 k}\end{cases}$$

ossia

$$(30)\qquad \begin{cases} R = (1\pm q)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{p\pm q}{1\pm q}\,\mathrm{sen}^2 k\right]^{\frac{1}{2}}\\ S = (1+p)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{p\pm q}{1+p}\cos^2 k\right]^{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

Svolgiamo in serie R^{-1}, S^{-1}, ponendo

$$\frac{p\pm q}{1\pm p}=\eta^2,\qquad \frac{p\pm q}{1+p}=\varepsilon^2$$

e adoperando lo sviluppo di Fourier.

Per R^{-1} si ponga:

$$(31)\qquad (1-\eta^2\,\mathrm{sen}^2 k)^{-\frac{1}{2}} = \tau_0 + \tau_2\cos 2\,k + \tau_4\cos 4\,k + \ldots$$

ove

$$(32)\qquad \tau_{2i} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\,i\,k\,dk}{\sqrt{1-\eta^2\,\mathrm{sen}^2 k}}$$

e la forma di questi coefficienti come anche l'annullarsi delle τ_{2i+1} si posson dimostrare come al n.° XIII del §. 1.

Per S^{-1} si ponga invece

$$(33) \qquad (1-\varepsilon^2\cos^2 k)^{-\frac{1}{2}} = \zeta_0+\zeta_2\cos 2\,k+\zeta_4\cos 4\,k+\dots$$

essendo

$$(34) \qquad \zeta_{2i} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\,i\,k\,d\,k}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 k}}$$

XI. Per calcolare le τ, ζ stabiliremo una relazione fra tre ζ successive, e poi si vedrà che le τ si deducono facilmente dalle ζ. Prendiamo la funzione

$$W = (1-\varepsilon^2\cos^2 k)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} 2\,i\,k$$

differenziandola, potremo scrivere:

$$d\,W = \frac{2\,i(1-\varepsilon^2\cos^2 k)\cos 2\,i\,k\,dk}{(1-\varepsilon^2\cos^2 k)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\operatorname{sen} 2\,i\,k \operatorname{sen} 2\,k\,d\,k}{(1-\varepsilon^2\cos^2 k)^{\frac{1}{2}}}$$

Sostituendo ai prodotti dei seni e coseni le somme di coseni, integrando, limitando fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, siccome

$$[W]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

si avrà:

$$(35) \qquad 4\,i\,(2-\varepsilon^2)\,\zeta_{2i} - \varepsilon^2(2\,i+1)\,\zeta_{2i+2} - \varepsilon^2(2\,i-1)\,\zeta_{2i-2} = 0$$

che ci fa conoscere tutti i coefficienti, dati che sieno ζ_0 e ζ_2; e questi si ottengono mediante integrali ellittici completi. Infatti

$$\zeta_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,k}{(1-\varepsilon^2\cos^2 k)^{\frac{1}{2}}}$$

mutando in questa la k in $\frac{\pi}{2}-k$, essa diviene

$$\zeta_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,k}{(1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}}}$$

che è l'integrale ellittico completo di prima specie.

Facendo poi lo stesso cangiamento nella equazione

$$\zeta_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\,k\,d\,k}{(1-\varepsilon^2\cos^2 k)^{\frac{1}{2}}}$$

si ottiene

$$\zeta_2 = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\,k\,d\,k}{(1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}}},$$

ma è facile vedere che si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\,k\,d\,k}{(1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,k}{(1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 k\,dk+dk-dk}{(1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}}}$$

e quindi

$$\frac{\pi}{4}\zeta_2 = \frac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,k}{(1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\varepsilon^2\operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}}\,d\,k$$

per cui ζ_2 è espresso per mezzo degli integrali ellittici completi di prima e seconda specie. Quindi (§. 1. n.° XV.) abbiamo:

$$\zeta_0 = \frac{4}{\pi} \mathrm{F} \tag{36}$$
$$\zeta_2 = \frac{4}{\pi} \frac{2-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \mathrm{F} - \frac{8}{\varepsilon^2 \pi} \mathrm{E}$$

talchè le ζ posson considerarsi come note.

XII. Per dedurre le τ dalle ζ si cambi nella (34) k in $\frac{\pi}{2} - k$: si troverà, per i pari:

$$\zeta_{2i} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\, i\, k\; d\, k}{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}}}$$

e per i dispari

$$\zeta_{2i} = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\, i\, k\; d\, k}{(1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}}}$$

sicchè indicando con $\zeta(\alpha^2)$, $\tau(\beta^2)$ le funzioni ζ, τ quando il modulo sia α^2, β^2, potremo scrivere, per la (32):

$$\tau_{2i}(\eta^2) = \pm\, \zeta_{2i}(\eta^2) \tag{37}$$

epperò le τ si calcolano come le ζ.

Si può osservare che nel caso che sia $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}$ e $\eta^2 = \frac{1}{2}$ le τ, ζ decrescono rapidissimamente. Infatti si trova per $\eta^2 = \frac{1}{2}$

$$\tau_{16} = 0{,}0000004$$

e mostreremo che si può sempre rendere contemporaneamente η^2, ε^2 poco diversi da $\frac{1}{2}$.

Nella (21) comparisce il prodotto $(\mathrm{R} \,.\, \mathrm{S})^{-1}$; per ottenerlo in serie, si moltiplichino le (31) (33) e si avrà:

$$(\mathrm{R\,S})^{-1} = [(1+p)(1\pm q)]^{-\frac{1}{2}} (\omega_0 + \omega_2 \cos 2k + \omega_4 \cos 4k + \ldots) \tag{38}$$

ove è

$$\omega_{2i} = \tau_0\, \zeta_{2i} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{2n} (\zeta_{2n+2i} + \zeta_{2n-2i}) \tag{39}$$

ad eccezione di

$$\omega_0 = \tau_0\, \zeta_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{2n}\, \zeta_{2n}$$

XIII. Sviluppiamo ora il prodotto R S che comparisce nella (24). Per la R, si ponga:

$$(1 - \eta^2 \operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}} = r_0 + r_2 \cos 2\, k + r_4 \cos 4\, k + \ldots \tag{40}$$

ove è

$$r_{2i} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta^2 \operatorname{sen}^2 k)^{\frac{1}{2}} \cos 2\, i\, k\; d\, k \tag{41}$$

e per la S si può porre:

$$(1 - \varepsilon^2 \cos^2 k)^{\frac{1}{2}} = s_0 + s_2 \cos 2\, k + s_4 \cos 4\, k + \ldots \tag{42}$$

in cui avremo:

$$s_{2i} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 k)^{\frac{1}{2}} \cos 2\, i\, k\; d\, k. \tag{43}$$

Le r si calcolano, vedremo, come le s e queste ultime si deducono con facilità dalle ζ. Infatti eseguendo per parti l'integrazione della (43) avremo:

$$s_{2i} = -\frac{\varepsilon^2}{\pi i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2\,i k \operatorname{sen} 2 k\, d k}{(1-\varepsilon^2 \cos^2 k)^{\frac{1}{2}}}$$

ossia

$$s_{2i} = -\frac{\varepsilon^2}{2\,i\,\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2(i-1)\,k - \cos 2(i+1)k}{(1-\varepsilon^2 \cos^2 k)^{\frac{1}{2}}}\,d k$$

o infine, badando alla (34):

$$s_{2i} = \frac{\varepsilon^2}{8i}\left(\zeta_{2i+2} - \zeta_{2i-2}\right) \tag{44}$$

e così le s son date per le ζ. La s_0 non è che l'integrale ellittico completo di seconda specie, come si vede mutando k in $\frac{\pi}{2} - k$.

Con dimostrazione analoga a quella fatta al n.º XIII. si troverebbe

$$r_{2i}(\eta^2) = \pm\, s_{2i}(\eta^2) \tag{45}$$

e in questa e nella (37) il $\pm$ è relativo ai valori pari o dispari di i.

Effettuando ora il prodotto R . S abbiamo:

$$\mathrm{RS} = [(1+p)(1\pm q)]^{\frac{1}{2}} \left\{\psi_0 + \psi_2 \cos 2\,k + \psi_4 \cos 4\,k + \ldots\right\} \tag{46}$$

ove:

$$\psi_{2i} = r_0\, s_{2i} + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r_{2n}\left(s_{2n+2i} + s_{2n-2i}\right) \tag{47}$$

ad eccezione di

$$\psi_0 = r_0\, s_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r_{2n} s_{2n};$$

in queste e nelle (39) debbonsi tenere le stesse avvertenze fatte avanti: cioè si dee porre

$$s_{-m} = s_m\,, \qquad \zeta_{-m} = \zeta_m$$

ed ove si trova s_0, ζ_0 si dee sostituire $2\,s_0$, $2\,\zeta_0$.

Tutte queste serie son convergentissime se η^2, ε^2 sono $<\frac{1}{2}$; ora è sempre possibile render piccole quanto si vuole le η^2, ε^2, per l'osservazione fatta al n.º VII.

XIV. Merita qui speciale menzione un caso particolare comodissimo in pratica, cioè quando i raggi estremi, da bande opposte dell'asse maggiore sono uguali fra loro. In questo caso è $p=q$ e bisogna prendere i segni superiori nelle (29). Con facili trasformazioni, da queste si ottiene

$$\mathrm{R\,S} = \sqrt{1 - p^2\,\frac{1+\cos 4\,k}{2}} \tag{48}$$

e con un secondo cangiamento di variabile si possono svolgere direttamente i prodotti R S, (R S)$^{-1}$. Si ponga:

$$\frac{1+\cos 4\,k}{2} = \operatorname{sen}^2 h$$

essendo h una nuova variabile: da questa equazione si ha

$$\operatorname{sen} h = \pm \cos 2\,k$$

ossia

$$2\,h = 4\,k \pm \pi \tag{49}$$

e di qui risulta che, mentre k varia in un quadrante, la h

deve variare in due: epperò diremo la h *anomalìa doppia*. Con questa posizione la (48) diviene

$$R\,S = (1 - p^2 \operatorname{sen}^2 h)^{\frac{1}{2}}$$

e si ha

$$(50) \qquad R\,S = \rho_0 + \rho_2 \cos 2\,h + \rho_4 \cos 4\,h + \ldots$$

ove

$$\rho_{2i} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - p^2 \operatorname{sen}^2 h)^{\frac{1}{2}} \cos 2\,i\,h\,d\,h$$

e queste si calcolano come le r_{2i} del numero precedente, giacchè si vede subito che

$$(51) \qquad \rho_{2i} = r_{2i}(p^2)$$

Pel prodotto $(R\,S)^{-1}$ possiamo porre

$$(52) \qquad (R\,S)^{-1} = \varphi_0 + \varphi_2 \cos 2\,h + \varphi_4 \cos 4\,h + \ldots$$

ove

$$\varphi_{2i} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\,i\,h\,d\,h}{(1 - p^2 \operatorname{sen}^2 h)^{\frac{1}{2}}}$$

le quali non son che le τ ove invece di η^2 sia posto p^2; e però:

$$(53) \qquad \varphi_{2i} = \tau_{2i}(p^2)$$

Ma per le (37), (44), (45) abbiamo:

$$\rho_{2i} = \pm \frac{p^2}{8\,i}\Big(\zeta_{2i+2}(p^2) - \zeta_{2i-2}(p^2)\Big)$$
$$\varphi_{2i} = \pm \zeta_{2i}(p^2)$$

e così, calcolate le ζ, si hanno subito i due sviluppi (50) (52).

Vedremo in seguito la grande importanza pratica di questo caso: s' intende però, che usando questo metodo, bisogna sostituire in tutte le formule il valore di k desunto dalla (49).

XV. Ritornando al caso generale, ed occupandoci per ora esclusivamente dell' anomalìa inferiore, possiamo ritenere svolte in serie le formule di trasformazione (21) (24); giacchè sostituendo in queste le espressioni date dalle (38), (46) ed unendovi anche la (12), esse prendono la forma:

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} r &= a_0 + a_2 \cos 2\,k + a_4 \cos 4\,k + \ldots \\ r \cos f &= b_0 + b_2 \cos 2\,k + b_4 \cos 4\,k + \ldots \\ r \operatorname{sen} f &= c_0 + c_2 \cos 2\,k + c_4 \cos 4\,k + c_6 \cos 6\,k + \ldots \\ \frac{dt}{dk} &= d_2 \operatorname{sen} 2\,k + d_4 \operatorname{sen} 4\,k + d_6 \operatorname{sen} 6\,k + \ldots \end{aligned} \right.$$

ove i coefficienti son costanti e calcolabili preventivamente perchè dipendono esclusivamente dalle p, q. Le serie inoltre son convergentissime se $\varepsilon^2\,\eta^2$ sono poco diversi da $\frac{1}{2}$, cosa sempre possibile.

Ed ora bisogna occuparsi di svolgere in serie i coefficienti (28) della prima equazione del moto, per mezzo delle precedenti (54). Ricordiamo, che nelle (28) le A, B dipendono, come risulta dalla (22), da r, $r \cos f$, $r \operatorname{sen} f$ e anche dalle $\lambda, \sigma, x, y, z, w$ che pur dipendono da queste quantità. Per conseguenza bisognerà prima svolgere in serie le η^2, Φ_2 dei num. XI, XII. §. 1.°, dalle quali dipendono i coefficienti della (22).

XVI. Dalle (36) del §. 1. si vede che le quantità $\varphi_2 \cos \Phi_2$, $\varphi_2 \operatorname{sen} \Phi_2$ hanno la forma

$$(55). \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_2 \cos \Phi_2 &= \frac{A\,r^2 + B\,r \operatorname{sen} f + C\,r \cos f + D}{E\,r^2 + F\,r \operatorname{sen} f + G\,r \cos f + H} \\ \varphi_2 \operatorname{sen} \Phi_2 &= \frac{K\,r \operatorname{sen} f + L\,r \cos f}{E\,r^2 + F\,r \operatorname{sen} f + G\,r \cos f + H} \end{aligned} \right.$$

Servendosi delle (54) si ha

$$\varphi_2 \cos \Phi_2 = \frac{P_0 + P_2 \cos 2k + P_4 \cos 4k + P_6 \cos 6k + \ldots}{Q_0 + Q_2 \cos 2k + Q_4 \cos 4k + Q_6 \cos 6k + \ldots}$$

$$\varphi_2 \operatorname{sen} \Phi_2 = \frac{R_0 + R_2 \cos 2k + R_2 \cos 4k + R_6 \cos 6k + \ldots}{Q_0 + Q_2 \cos 2k + Q_4 \cos 4k + Q_6 \cos 6k + \ldots}$$

e siccome il quoziente di due serie trigonometriche come le precedenti è un' altra serie della stessa forma così avremo:

$$(56) \quad \begin{cases} \varphi_2 \cos \Phi_2 = M_0 + M_2 \cos 2k + M_4 \cos 4k + \ldots \\ \varphi_2 \operatorname{sen} \Phi_2 = N_0 + N_2 \cos 2k + N_4 \cos 4k + \ldots \end{cases}$$

Dividendo queste eguaglianze una per l'altra, si trova, per l'osservazione precedente, la equazione

$$(57) \qquad \operatorname{tang} \Phi_2 = L_0 + L_2 \cos 2k + L_4 \cos 4k + \ldots$$

Quadrando le serie (56), sommando i quadrati ed estraendo dalla serie risultante la radice quadrata, si troverà com' è facile assicurarsi, una serie della medesima forma: talchè potremo porre:

$$(58) \qquad \varphi_2 = K_0 + K_2 \cos 2k + K_4 \cos 4k + \ldots$$

Le (57) (58) ci danno gli svolgimenti delle Φ_2, φ_2 dalle quali dipendono i coefficienti della (22), poichè contengono le quantità $\lambda, \sigma, x, y, z, w$.

XVII. Occorre dunque sviluppare le quantità λ, σ ec. le cui espressioni si trovano nei numeri XVI-XVII del §. 1. Ma le dette quantità dipendon tutte dalle ν date nel numero XV; epperò ci occuperemo di queste.

Faremo prima due osservazioni:

1.ª Le ν posson ridursi a serie ordinate per le potenze di η^2; poichè, come risulta dal numero XV, le ν dipendono dagl' integrali ellittici, che si possono svolgere in serie ordinate come abbiamo detto.

2.ª Facendo le operazioni algebriche su serie trigonometriche della forma di quelle considerate nel numero precedente, si ottiene sempre una serie della stessa forma. Di ciò è facile assicurarsi, applicando le regole delle dette operazioni.

Ciò premesso, ricordiamo che

$$\eta^2 = \frac{2\varphi_2}{1 + \varphi_2}$$

per la (40) del §. 1; per la (58) e per la seconda osservazione precedente, si avrà

$$(59) \qquad \eta^2 = H_0 + H_2 \cos 2k + H_4 \cos 4k + \ldots$$

e siccome le ν dipendono da η^2 come si è detto nella prima osservazione, così per l'osservazione seconda applicata alla (59) avremo per ν_0 e ν_2:

$$\nu_0 = G_0 + G_2 \cos 2k + G_4 \cos 4k + \ldots$$
$$\nu_2 = G'_0 + G'_2 \cos 2k + G'_4 \cos 4k + \ldots$$

Ora, le altre ν dipendono algebricamente da queste: si potrà dunque scrivere in generale:

$$(60) \qquad \nu_{2i} = G_0^{(i)} + G_2^{(i)} \cos 2k + G_4^{(i)} \cos 4k + \ldots$$

XVIII. Per mezzo di questa formula e della (57) è facile sviluppare le $\lambda, \sigma, x, y, z, w$, perchè queste (V. numeri XVI-XVII, §. 1) dipendono dalle ν, da Φ_2 e da Z. Ma questa si può ridurre colle osservazioni precedenti alla forma:

$$(61) \qquad Z^{-\frac{3}{2}} = H'_0 + H'_2 \cos 2k + H'_4 \cos 4k + \ldots$$

come può rilevarsi dalla (40) e dalla (38) del §. 1.

Quanto alle funzioni $\operatorname{sen} n\Phi_2$, $\cos n\Phi_2$ che compariscono nelle λ, σ, osserviamo che si ha:

$$
(62)\quad \begin{cases} \cos n\,\Phi_2 = \cos^n \Phi_2 - \dfrac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos^{n-2}\Phi_2 \operatorname{sen}^2\Phi_2 + \ldots. \\ \operatorname{sen} n\Phi_2 = n\cos^{n-1}\Phi_2 \operatorname{sen}\Phi_2 - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{n-3}\Phi_2 \operatorname{sen}^3\Phi_2 + \ldots \end{cases}
$$

per la formula di Moivre: e inoltre

$$
\operatorname{sen}\Phi_2 = \frac{\operatorname{tg}\Phi_2}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\Phi_2}}
$$

$$
\cos\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\Phi_2}}
$$

Introducendo in queste la (57), per la seconda osservazione del numero precedente, avremo

$$
(63)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\Phi_2 = M'_0 + M'_2 \cos 2k + M'_4 \cos 4k + \ldots\ldots \\ \cos\Phi_2 = N'_0 + N'_2 \cos 2k + N'_4 \cos 4k + \ldots\ldots \end{cases}
$$

e per l'osservazione medesima, le (62) per mezzo delle (63), assumono la forma:

$$
(64)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} n\Phi_2 = M_0^{(n)} + M_2^{(n)} \cos 2k + M_4^{(n)} \cos 4k + \ldots. \\ \cos n\Phi_2 = N_0^{(n)} + N_2^{(n)} \cos 2k + N_4^{(n)} \cos 4k + \ldots. \end{cases}
$$

Infine, siccome le ν son già state sviluppate, abbiamo nelle (60), (61), (64) tutti gli elementi per lo sviluppo delle λ, σ date dalle (56) del §. 1; e troveremo subito la forma:

$$
(65)\quad \begin{cases} \lambda_i = \lambda_0^{(i)} + \lambda_2^{(i)} \cos 2\,k + \lambda_4^{(i)} \cos 4\,k + \ldots. \\ \sigma_i = \sigma_0^{(i)} + \sigma_2^{(i)} \cos 2\,k + \sigma_4^{(i)} \cos 4\,k + \ldots. \end{cases}
$$

col mezzo di queste si potranno avere le altre (V. numero XVII, §. 1.):

$$
(66)\quad \begin{aligned} x_i &= x_0^{(i)} + x_2^{(i)} \cos 2\,k + \ldots. \\ y_i &= y_0^{(i)} + y_2^{(i)} \cos 2\,k + \ldots. \\ z_i &= z_0^{(i)} + z_2^{(i)} \cos 2\,k + \ldots. \\ w_i &= w_0^{(i)} + w_2^{(i)} \cos 2\,k + \ldots. \end{aligned}
$$

XIX. Ora ricordiamo che i coefficienti A_i hanno la forma:

$$
(67)\quad \begin{aligned} A_i = {} & X_1^{(i)} r + X_2^{(i)} r\,.\,r \operatorname{sen} f + X_3^{(i)} r\,.\,r \cos f + X_4^{(i)} (r\cos f)^2 + \\ & + X_5^{(i)} r \cos f\,.\,r \operatorname{sen} f + X_6 (r \operatorname{sen} f)^2 \end{aligned}
$$

e le X hanno la forma

$$
(68)\quad X_k^{(i)} = \Omega_0 + \Omega_1\, \rho \operatorname{sen} \omega + \Omega_2\, \rho \cos \omega
$$

in cui è

$$
(69)\quad \Omega_i = (m_0 \xi_i + m_1 y_i + m_2 z_i + m_3 \lambda_i) \frac{\pm 2\,(p \pm q) \operatorname{sen} 2\,k}{\sqrt{1 - p + (p \pm q) \cos^2 k}\,\sqrt{1 + p - (p \pm q) \cos^2 k}}
$$

s

essendo le m funzioni delle costanti note $a, e, m', \gamma, \Gamma, \gamma_1, \Gamma'$ come risulta dalle (11) e (60), quindi sono costanti esse pure; però alcune di esse possono essere nulle.

Badando ora alle (29) (38) è facile vedere che si troverà l'equazione

$$
(70)\quad \begin{aligned} & \frac{\pm 2\,(p \pm q) \operatorname{sen} 2\,k}{\sqrt{1 - p + (p \pm q) \cos^2 k}\,\sqrt{1 + p - (p \pm q) \cos^2 k}} = \\ & = D_2 \operatorname{sen} 2\,k + D_4 \operatorname{sen} 4\,k + D_6 \operatorname{sen} 6\,k + \ldots. \end{aligned}
$$

Inoltre essendosi già trovata la forma delle ξ, y, z, λ, non è difficile assicurarsi che sarà:

$$
(71)\quad \Omega_i = \Omega_2^{(i)} \operatorname{sen} 2\,k + \Omega_4^{(i)} \operatorname{sen} 4\,k + \Omega_6^{(i)} \operatorname{sen} 6\,k + \ldots.
$$

Infine sostituendo nella (67) per le X le loro espressioni, ordinando rispetto a $\rho \cos\omega$ ed a $\rho \operatorname{sen}\omega$ e ponendo poi in luogo di $r, r\operatorname{sen} f$ $r \cos f$ i loro sviluppi dati dalle (54) avremo la forma delle A_i:

$$
(72)\quad \begin{aligned} A_i = {} & (A_{0,2}^{(i)} \operatorname{sen} 2\,k + A_{0,4}^{(i)} \operatorname{sen} 4\,k + A_{0,6}^{(i)} \operatorname{sen} 6\,k + \ldots.) \\ & + \rho \cos \omega\, (A_{1,2}^{(i)} \operatorname{sen} 2\,k + A_{1,4}^{(i)} \operatorname{sen} 4\,k + \ldots.) \\ & + \rho \operatorname{sen} \omega\, (A_{2,2}^{(i)} \operatorname{sen} 2\,k + A_{2,4}^{(i)} \operatorname{sen} 4\,k + \ldots.) \end{aligned}
$$

Col medesimo procedimento sinora tenuto, si troverebbe

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_i &= \mathrm{B}_{0,2}^{(i)} \operatorname{sen} 2\,k + \mathrm{B}_{0,4}^{(i)} \operatorname{sen} 4\,k + \text{ec.}\,) \\ &+ \rho \cos \omega\, (\mathrm{B}_{1,2}^{(i)} \operatorname{sen} 2\,k + \mathrm{B}_{1,4}^{(i)} \operatorname{sen} 4\,k + \text{ec.}\,) \\ &+ \rho \operatorname{sen} \omega\, (\mathrm{B}_{2,2}^{(i)} \operatorname{sen} 2\,k + \mathrm{B}_{2,4}^{(i)} \operatorname{sen} 4\,k + \text{ec.}\,) \end{aligned} \tag{73}$$

e in queste i coefficienti $\mathrm{A}^{(i)}$ e $\mathrm{B}^{(i)}$ son funzioni delle costanti note $a, e, m', \gamma, \gamma_1, \Gamma, \Gamma'$, e posson ritenersi come noti.

XX. Ma il nostro ultimo scopo è quello di trovare le espressioni delle C_i, D_i date dalle (28).

L'ultima delle (54) dà:

$$d\,t = d_2 \operatorname{sen} 2\,k\, dk + d_4 \operatorname{sen} 4\,k\, d\,k + \ldots.$$

Integrando, abbiamo la forma:

$$t = \mathrm{Q}_0 + \mathrm{Q}_2 \cos 2\,k + \mathrm{Q}_4 \cos 4\,k + \ldots. \tag{74}$$

essendo Q_0 la costante arbitraria che determineremo in seguito.

Ora si ha:

$$\cos i\,n'\,t = 1 - \frac{(i\,n'\,t)^2}{1.2} + \frac{(i\,n'\,t)^4}{1.2.3.4} - \text{ec.}$$

$$\operatorname{sen} i\,n'\,t = i\,n'\,t - \frac{(i\,n'\,t)^3}{1.2.3} + \frac{(i\,n'\,t)^5}{1.2.3.4.5} - \text{ec.}$$

ed essendo $i\,n'\,t$ della forma (74), saranno pur tali le potenze di $i\,n'\,t$, per l' osservazione fatta al numero XVII; sicchè potremo scrivere:

$$\left\{ \begin{aligned} \cos i\,n'\,t &= c_{0,i} + c_{2,i} \cos 2k + c_{4,i} \cos 4k + \text{ec.} \\ \operatorname{sen} i\,n'\,t &= s_{0,i} + s_{2,i} \cos 2k + s_{4,i} \cos 4k + \text{ec.} \end{aligned} \right. \tag{75}$$

Introducendo ora nelle (28) gli sviluppi dati dalle (72) (73) e (75) si trova subito:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_i &= (\mathrm{C}^{(i)}_{0,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{C}^{(i)}_{0,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}) \\ &+ \rho \cos \omega\, (\mathrm{C}^{(i)}_{1,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{C}^{(i)}_{1,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}) \\ &+ \rho \operatorname{sen} \omega\, (\mathrm{C}^{(i)}_{2,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{C}^{(i)}_{2,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}) \\ \mathrm{D}_i &= (\mathrm{D}^{(i)}_{0,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{D}^{(i)}_{0,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}) \\ &+ \rho \cos \omega\, (\mathrm{D}^{(i)}_{1,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{D}^{(i)}_{1,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}) \\ &+ \rho \operatorname{sen} \omega\, (\mathrm{D}^{(i)}_{2,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{D}^{(i)}_{2,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}). \end{aligned}$$

Sostituendo ora queste espressioni nella (27) e ponendo:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Upsilon}{dk} &= \sum_{i=0}^{\infty} [\mathrm{C}^{(i)}_{0,2} \operatorname{sen} 2\,k + \mathrm{C}^{(i)}_{0,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}] \cos i\,c' \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} [\mathrm{D}^{(i)}_{0,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{D}^{(i)}_{0,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}] \operatorname{sen} i\,c' \\ \frac{d\Phi}{dk} &= \sum_{i=0}^{\infty} [\mathrm{C}^{(i)}_{1,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{C}^{(i)}_{1,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}] \cos i\,c' \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} [\mathrm{D}^{(i)}_{1,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{D}^{(i)}_{1,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}] \operatorname{sen} i\,c' \\ \frac{d\Xi}{dk} &= \sum_{i=0}^{\infty} [\mathrm{C}^{(i)}_{2,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{C}^{(i)}_{2,4} \operatorname{sen} 4k + \text{ec.}] \cos i\,c' \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} [\mathrm{D}^{(i)}_{2,2} \operatorname{sen} 2k + \mathrm{D}^{(i)}_{2,4} \operatorname{sen} 4\,k + \text{ec.}] \operatorname{sen} i\,c' \end{aligned} \right. \tag{76}$$

essa (27) diviene:

$$\frac{d\mathrm{W}_0}{dk} = \frac{d\Upsilon}{dk} + \rho \cos \omega \frac{d\Phi}{d\,k} + \rho \operatorname{sen} \omega \frac{d\Xi}{dk} \tag{77}$$

e le ρ, ω essendo costanti, potremo integrare separatamente ciascuna delle (76).

Analoghe espressioni si troverebbero per le altre due equazioni del moto (10) del §. 1; ma non contenendo queste ρ, nè ω, si avrebbe:

$$
(78)\quad
\begin{aligned}
\frac{dp}{dk} &= \sum_{i=0}^{\infty} [E^{(i)}_2 \text{ sen } 2k + E^{(i)}_4 \text{ sen } 4k + \ldots] \cos\, i\, c' \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} [F^{(i)}_2 \text{ sen } 2k + F^{(i)}_4 \text{ sen } 4k + \ldots] \text{ sen } i\, c'
\end{aligned}
$$

e così per $\frac{dq}{dk}$.

XXI. Quando le equazioni del moto sieno ridotte alla forma precedente, la loro integrazione si può immediatamente effettuare. Ma la determinazione dei coefficienti in funzione delle costanti, è, con questo metodo, praticamente quasi impossibile, come si vede dalle operazioni che abbiamo dovute indicare per giungere a trovare la forma ultima delle dette equazioni. Bisognerà dunque calcolare numericamente i coefficienti delle (76), (78) per mezzo dei valori numerici delle costanti, servendoci di un altro metodo che ci fornirà valori sufficientemente approssimati pei coefficienti che cerchiamo.

Prenderemo soltanto a considerare la prima delle (76) le altre trattandosi analogamente; e la scriveremo più semplicemente così:

$$
(79)\quad
\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{dk} &= \sum_{i=0}^{\infty} [C^{(i)}_2 \text{ sen } 2k + C^{(i)}_4 \text{ sen } 4k + \text{ec.}] \cos\, i\, c' \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} [D^{(i)}_2 \text{ sen } 2k + D^{(i)}_4 \text{ sen } 4k + \text{ec.}] \text{ sen } i\, c'
\end{aligned}
$$

Se ora, generalmente, A è una funzione di ρ sen ω, $\rho \cos \omega$ come la (77), indicheremo con A_0 la parte di A indipendente da $\rho \cos \omega$ e da ρ sen ω. Quindi badando alle (20), (27) e (28) di questo paragrafo e alle (60) del §. 1, e ricordando che P, Q, R sono funzioni di $\rho \cos \omega$, ρ sen ω, si ha subito:

$$
(80)\quad
\begin{aligned}
& C^{(i)}_2 \text{ sen } 2\,k + C_4^{(i)} \text{ sen } 4\,k + \text{ec.} = \\
&= [P_0(y_i - \xi_i) + Q_0 z_i + R_0 \lambda_i] \frac{dt}{dk} \cos in't + [P_0 x_i + Q_0(w_i - \chi_i) + R_0 \sigma_i] \frac{dt}{dk} \text{ sen } in't \\
& D_2^{(i)} \text{ sen } 2\,k + D_4^{(i)} \text{ sen } 4\,k + \text{ec.} = \\
&= [P_0 x_i + Q_0(w_i - \chi_i) + R_0 \sigma_i] \frac{dt}{dk} \cos in't - [P_0(y_i - \xi_i) + Q_0 z_i + R_0 \lambda_i] \frac{dt}{dk} \text{ sen } in't
\end{aligned}
$$

i valori di P_0, Q_0, R_0 deducendosi dalle (11) del §. 1.

XXII. Le serie coefficienti di $\cos i c'$, sen $i c'$ nella (79) sono convergentissime se la divisione dell'orbita è fatta in modo che η_i^2, ε^2 sieno poco differenti da $\frac{1}{2}$; perchè in questo caso abbiam veduto che le serie dipendenti da η_i^2, ε^2 son rapidamente convergenti, e da queste derivano gli sviluppi delle C_i, D_i. Possiamo dunque considerare ciascuna di quelle serie coefficienti, come un polinomio, rigettando tutti i termini successivi ad uno piccolissimo che si sceglie come ultimo. Ora, siccome la somma di ciascuna di queste serie è data dalle (80), se ci arrestiamo al termine l^{esimo} avremo:

$$
(81)\quad C^{(i)}_2 \text{ sen } 2k + C_4^{(i)} \text{ sen } 4k + \ldots + C^{(i)}_{2l} \text{ sen } 2lk = \Gamma
$$

ove abbiamo per la prima delle (80):

$$
(82)\quad \Gamma = [P_0(y_i - \xi_i) + Q_0 z_i + R_0 \lambda_i] \frac{dt}{dk} \cos in't + [P_0 x_i + Q_0(w_i - \chi_i) + R_0 \sigma_i] \frac{dt}{dk} \text{ sen } i\, n'\, t.
$$

Ciò posto, noi possiamo calcolare la Γ per un valore qualunque di k senza difficoltà, perchè basta calcolare le singole parti della (82), P_0, Q_0, R_0, y_i, ξ, ec.; e le λ, σ, y ec., si prestano al calcolo numerico, perchè dato k, si ha subito φ_2, Φ_2 e η_i^2 e la serie che danno λ σ, ec., sono convergentissime. Calcolata quindi Γ, e introducendo lo stesso valore di k nel primo membro della (81), avremo un' equazione sensibilmente esatta fra le $C^{(i)}$ e indicando con Γ_1, Γ_2 ec. i valori calcolati delle Γ, pei valori k_1, k_2 ec. di k, avremo il sistema:

$$(83) \quad \begin{cases} C^{(i)}_2 \operatorname{sen} 2k_1 + C^{(i)}_4 \operatorname{sen} 4k_1 + \ldots . + C^{(i)}_{2l} \operatorname{sen} 2l\, k_1 = \Gamma_1 \\ C^{(i)}_2 \operatorname{sen} 2k_2 + C^{(i)}_4 \operatorname{sen} 4k_2 + \ldots . + C^{(i)}_{2l} \operatorname{sen} 2l\, k_2 = \Gamma_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ C^{(i)}_2 \operatorname{sen} 2k_l + C^{(i)}_4 \operatorname{sen} 4k_l + \ldots . + C^{(i)}_{2l} \operatorname{sen} 2l\, k_l = \Gamma_l \end{cases}$$

Le C son le stesse in ogni equazione perchè indipendenti da k; esse son le sole incognite, essendosi calcolati anche sen $2k$, sen $4k$, ec.; inoltre abbiamo tante equazioni quante incognite; quindi il sistema (83) servirà a darci i valori delle C con sufficiente approssimazione.

XXIII. Si può osservare che la risoluzione del sistema (83) si agevola in pratica colle seguenti avvertenze:

Si prenda l potenza di 2, e si ponga dapprima $l=2n$. Inoltre degli l valori delle k si tengano per ora indeterminati i primi n, e si prendano gli altri n come segue:

$$(84) \qquad k_{n+1} = \frac{\pi}{2} + k_1,\ k_{n+2} = \frac{\pi}{2} + k_2,\ \ldots .\ k_l = \frac{\pi}{2} + k_n.$$

Sostituendo questi valori nelle (83) e sommando e sottraendo le equazioni 1.ª ed $(n+1)^a$, 2.ª e $(n+2)^a$, ... n^a ed l^a, il sistema si scinde negli altri due:

$$(85) \quad C^{(i)}_2 \operatorname{sen} 2k_r + C^{(i)}_6 \operatorname{sen} 6k_r + \ldots . + C^{(i)}_{2l-2} \operatorname{sen} (2l-2)k_r = A_r$$

e

$$(86) \quad C^{(i)}_4 \operatorname{sen} 4k_r + C^{(i)}_8 \operatorname{sen} 8k_r + \ldots . + C^{(i)}_{2l} \operatorname{sen} 2l\, k_r = B_r$$

in ciascuno dei quali $r=1, 2, 3 \ldots . n$.

Quest' ultimo sistema può scindersi in due altri; poichè per ipotesi si può porre $n=2n'$, e si possono determinare le $k_{n'+1}, k_{n'+2}, \ldots . k_n$ in modo che sia

$$k_{n'+1} = \frac{\pi}{4} + k_1,\ k_{n'+2} = \frac{\pi}{4} + k_2,\ \ldots . k_n = \frac{\pi}{4} + k_{n'}$$

Sostituendo nella (86), ed operando come già si è fatto, questo sistema si scinde negli altri due:

$$C^{(i)}_4 \operatorname{sen} 4k_r + C^{(i)}_{12} \operatorname{sen} 12k_r + .. + C^{(i)}_{2l-4} \operatorname{sen} (2l-4)\, k_r = C_r$$

$$(87) \quad C^{(i)}_8 \operatorname{sen} 8k_r + C^{(i)}_{16} \operatorname{sen} 16k_r + \ldots . C^{(i)}_{2l} \operatorname{sen} 2l\, k_r = D_r$$

ove $r=1, 2, 3 \ldots . n'$

Analogamente procedendo nel sistema (87), e determinando altre n'' delle k, se $n'=2n''$, col porre:

$$k_{n''+1} = \frac{\pi}{8} + k_1 \ldots . k_n = \frac{\pi}{8} + k_{n''}$$

quel sistema si scinde ancora in due. Così continuando, si giungerà, se è $l=2^m$, al sistema:

$$C^{(i)}_{2^m} \operatorname{sen} 2^m\, k_r + C^{(i)}_{2^{m+1}} \operatorname{sen} 2^{m+1}\, k_r = X_r$$

per $r=1, 2$.

Se ora si pone finalmente

$$k_2 = \frac{\pi}{2^m} + k_1$$

quel sistema si scinde nelle due equazioni:

$$C^{(i)}_{2^m} \operatorname{sen} 2^m\, k_1 = Y \qquad C^{(i)}_{2l} \operatorname{sen} 2l k_1 = Z$$

e resta arbitraria k_1. Tutte le altre k si trovano con successive sostituzioni espresse da

$$k_1,\ k_1 + \frac{\pi}{l},\ k_1 + \frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ k_1 + \frac{l-1}{l}\pi$$

Prendiamo ora $k_1 = \dfrac{\pi}{4l}$ poichè così non si annulla nelle (83) alcun termine e le k risultano fra loro equidistanti: si avrà allora:

$$k_1=\frac{\pi}{4l},k_2=\frac{5\pi}{4l},k_3=\frac{9\pi}{4l}\dots k_l=\frac{4l-3}{4l}\pi$$

e questi saranno i valori delle k da prendersi affinchè il sistema (83) si scinda in molti altri, ciascuno con un numero minore d'incognite.

XXIV. Per mezzo di questo metodo si possono ritenere calcolati tutti i coefficienti delle equazioni del moto, e in modo relativamente spedito, poichè il calcolo delle Γ, (82), dipende da quello delle P, Q, R, λ_i, σ_i, x_i, y_i, z_i, w_i, $\frac{dt}{dk}$, cos$in't$, e sen$in't$. Dato un valore k_1 di k, si calcola subito la η^2 del numero XII §. 1, da cui dipendono gl'integrali ellittici e però le $\xi, y, x, z, w, \lambda, \sigma$ che si trovano facilmente calcolate, essendo espresse per serie convergentissime. Le P, Q, R dipendono da r sen f, r cos f: e questi elementi si calcolano numericamente senza troppa difficoltà per mezzo delle serie (54) che posson rendersi convergenti a piacere: infine $\frac{dt}{dk}$ si calcola coll'ultima delle (54) e cos $in't$ si ottiene per mezzo del valor numerico di t calcolato colla (74), lasciando indeterminata la costante arbitraria.

Abbiamo dunque, come ci eravamo proposti in questo paragrafo, svolte in serie le equazioni del moto, in funzione della nuova variabile, per mezzo della quale ci è stato possibile di calcolare i coefficienti delle serie medesime con sufficiente facilità ad onta delle grandi eccentricità ed inclinazioni delle orbite cometarie.

§. 3.

I. In questo ultimo paragrafo ci occuperemo dell'integrazione delle equazioni del moto, già ridotte ad una forma a cui è applicabile l'integrazione immediata.

Bisogna dapprima determinare la costante arbitraria che entra nelle equazioni da integrarsi, e che fu introdotta nella espressione del tempo data dalla (74) del §. 2. Si prenderà perciò per origine del tempo l'istante in cui $k=0$, cioè quando la cometa passa pel punto dell'orbita che ha per cordinate ρ_1, u_0. (V. n.° II §. 2.°). Allora la (74) diviene per $t=0$, $k=0$:

$$0=Q_0+Q_2+Q_4+\dots$$

da cui

$$Q_0=-\sum_{i=1}^{\infty}Q_{2i} \tag{1}$$

e così la costante è determinata: quindi i coefficienti delle equazioni del moto posson ritenersi interamente conosciuti.

Prima ancora di passare alle integrazioni, bisogna dividere l'orbita in varie parti, per calcolare con formule analoghe a quelle stabilite nel paragrafo precedente, le perturbazioni in tutta l'orbita. Questo modo di divisione è arbitrario: abbiamo però già osservato, che quanto più piccole si prendono le varie parti dell'orbita, tanto più convergenti riescono le serie che servono al calcolo numerico dei coefficienti.

D'altra parte però, più sono le parti dell'orbita e più bisogna ripetere i calcoli sinora indicati: converrà dunque tenere un giusto mezzo per conciliare una sufficiente convergenza delle serie con un numero piuttosto piccolo di punti di divisione.

II. Per effettuare le integrazioni noi sceglieremo il caso particolare in cui si prendano due soli punti di divisione situati agli estremi dell'asse minore. Questo caso corrisponde all'anomalia doppia di cui si parlò nel numero XIV del §. 2.°, ed in pratica è sufficientissimo, poichè ora i raggi estremi che dividono le due parti sono:

$$\rho_1=\rho_2=a$$

epperò la p^2 data dalla (8) §. 2.°, diviene

$$p^2 = \frac{1}{2}$$

per l'anomalia inferiore ed anche $p'^2 = \frac{1}{2}$ per la superiore: sicchè tutte le serie in questo caso dipendendo da p^2 o da p'^2 come si vede al numero XIV, esse sono convergentissime il che risulta dal n.° XII.

Adottando dunque le anomalìe doppie, bisogna supporre di avere trasformate le formule differenziali, colla equazione (49) §. 2.° che è

$$2\,h = 4\,k \pm \pi \tag{2}$$

Prendendo il segno inferiore, la h andrà da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$: e la (79) prende la forma

$$\begin{aligned}\frac{d\Upsilon}{dh} &= \sum_{i=0} [C^{(i)}_1 \cos h + C^{(i)}_2 \operatorname{sen} 2h + C^{(i)}_3 \cos 3h \dots] \cos i\,c'_0 \\ &+ \sum_{i=1} [D^{(i)}_1 \cos h + D^{(i)}_2 \operatorname{sen} 2h + D^{(i)}_3 \cos 3h \dots] \operatorname{sen} i\,c'_0\end{aligned} \tag{3}$$

ove le C, D si deducono subito da quelle della (79); supposte però, queste, calcolate per $\rho_1 = \rho_2 = a$.

Analogamente, per l'anomalìa superiore, si troverebbe:

$$\begin{aligned}\frac{d\Upsilon}{dh'} &= \sum_{i=0} [\Gamma^{(i)}_1 \cos h' + \Gamma^{(i)}_2 \operatorname{sen} 2h' + \Gamma^{(i)}_3 \cos 3h' + \dots] \cos i\,c' \\ &+ \sum_{i=1} [\Delta^{(i)}_1 \cos h' + \Delta^{(i)}_2 \operatorname{sen} 2h' + \Delta^{(i)}_3 \cos 3h' + \dots] \operatorname{sen} i\,c'\end{aligned} \tag{4}$$

e nella precedente, c'_0 indica l'anomalìa media del pianeta per l'origine del tempo che abbiamo scelta.

Tutte le altre formule differenziali relative a Ψ, Ξ, p, q sono analoghe alle precedenti epperò tratteremo solo le (3), (4).

III. Avendo preso nella (1) del §. 2 il segno superiore, a $k=0$, cioè ora ad $h = -\frac{\pi}{2}$, corrisponderà l'estremo inferiore dell'asse minore: ivi è l'origine e la indicheremo con γ. Rispetto poi alla (4) si può far variare h' da $\frac{\pi}{2}$ a $3\frac{\pi}{2}$, e avendo preso nella (14) §. 2, il segno inferiore, si ha che a $\frac{\pi}{2}$ corrisponde l'estremo superiore del detto asse, estremo, che indicheremo con γ'. Si può infine concepire una cometa fittizia che percorra l'orbita con moto ellitico, essendo le sue posizioni determinate dalle h, h': e allora per ogni posizione della cometa fittizia, le formule del moto ci daranno il luogo reale della vera cometa.

Integrando ora le (3), (4) abbiamo:

$$\Upsilon = C + \sum_{i=0} F_i(h) \cos i\,c'_0 + \sum_{i=1} f_i(h) \operatorname{sen} i\,c'_0 \tag{5}$$

$$\Upsilon = C' + \sum_{i=0} \Phi_i(h) \cos i\,c'_0 + \sum_{i=1} \varphi_i(h) \operatorname{sen} i\,c'_0 \tag{6}$$

ove le C, C′ son le costanti arbitrarie da determinarsi; e

$$\begin{aligned} F_i(h) &= C^{(i)}_1 \operatorname{sen} h - \tfrac{1}{2} C^{(i)}_2 \cos 2h + \tfrac{1}{3} C^{(i)}_3 \operatorname{sen} 3h - \dots \\ f_i(h) &= D^{(i)}_1 \operatorname{sen} h - \tfrac{1}{2} D^{(i)}_2 \cos 2h + \tfrac{1}{3} D^{(i)}_3 \operatorname{sen} 3h - \dots \end{aligned} \tag{7}$$

e le Φ_i φ_i sono analoghe a queste rispetto ad h' ed alle Γ, Δ.

La (5) da le perturbazioni di Υ nella metà inferiore dell'orbita, e la (6) le da nella superiore.

IV. Per determinare la costante C si indichi con Υ_0 il valore di Υ per $t=0$; essendo allora $h = -\frac{\pi}{2}$, avremo:

$$\Upsilon_0 = C + \sum_{i=0} F_i(-\tfrac{\pi}{2}) \cos i c_0' + \sum_{i=1} f_i(-\tfrac{\pi}{2}) \operatorname{sen} i c'_0$$

donde

$$C=\Upsilon_0-\sum_{i=1}F_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos i\,c'_0-\sum_{i=1}f_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} i\,c'_0$$

e la (5) diviene

$$\Upsilon=\Upsilon_0-\sum_{i=0}F_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos i\,c'_0-\sum_{i=1}f_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} i\,c'_0 \qquad (8)$$
$$+\sum_{i=0}F_i(h)\cos i\,c'_0+\sum_{i=1}f_i(h)\operatorname{sen} i\,c'_0$$

Quanto alla (6), bisogna prima determinare la costante che entra nell' espressione del tempo. Sia t_1 il tempo in cui la cometa fittizia giunge in γ': allora abbiamo

$$t=t_1 \qquad h'=\frac{\pi}{2}$$

e facendo tali sostituzioni nella espressione di t per h', analoga alla (74), la costante vien determinata. Indicando inoltre con c'_1 il valore di c' per $t=t_1$, e facendo nella (6) $h'=\frac{\pi}{2}$, $c'=c'_1$ e $\Upsilon=\Upsilon_1$ essendo Υ_1 ciò che diviene Υ per $t=t_1$ si avrà

$$\Upsilon_1=C'+\sum_{i=0}\Phi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos i\,c'_1+\sum_{i=1}\varphi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} i\,c'_1,$$

epperò la (6) diverrebbe

$$\Upsilon=\Upsilon_1-\sum\Phi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos i\,c'_1-\sum\varphi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} i\,c'_1 \qquad (9)$$
$$+\sum\Phi_i(h')\cos i\,c'_1+\sum\varphi_i(h')\operatorname{sen} i\,c'_1$$

Si può però esprimere Υ_1 per Υ_0.

Infatti osservando che Υ_1 non è che il valore (8) di Υ per $h=\frac{\pi}{2}$ perchè l'istante iniziale della (6) coincide coll'istante finale della (5), si trova, facendo in (8) $h'=\frac{\pi}{2}$:

$$\Upsilon_1=\Upsilon_0+\sum_{i=0}\left[F_i\left(\frac{\pi}{2}\right)-F_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cos i\,c'_0+\sum_{i=1}\left[f_i\left(\frac{\pi}{2}\right)-f_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\operatorname{sen} i\,c'_0$$

sicchè il valore (9) di Υ nella seconda metà dell' orbita, diviene:

$$\Upsilon=\Upsilon_0+\sum\left[F_i\left(\frac{\pi}{2}\right)-F_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos i\,c'_0+\sum\left[f_i\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\operatorname{sen} i\,c'_0$$
$$-\sum\Phi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos i\,c'_1-\sum\varphi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} i\,c'_1 \qquad (10)$$
$$+\sum\Phi_i(h')\cos i\,c'_1+\sum\varphi_i(h')\operatorname{sen} i\,c'_1$$

V. Terminata la prima rivoluzione, e la cometa ripassando per γ, bisogna tornare a determinare le costanti per la seconda rivoluzione. Ciò si fa nello stesso modo: solo osserveremo che il valore di Υ della (5) in quell'istante sarà Υ_2 e quello di c' sarà c'_2. Si può poi eliminare Υ_2 per mezzo della (10) poichè la Υ_2 si ottiene da quella equazione col farvi $h'=\frac{3\pi}{2}$ per la solita osservazione. Quanto alla (6), si farà lo stesso col chiamare c'_3 il valore di c' quando la cometa fittizia ripassa per γ', e Υ_3 il valore corrispondente di Υ, che può eliminarsi nel solito modo.

Continuando con questo metodo, si troverà per la $(2s+1)^a$ semirivoluzione:

$$\Upsilon=\Upsilon_0+\sum_{i=0}\left[F_i\left(\frac{\pi}{2}\right)-F_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\{\cos i c'_0+\cos i c'_2+\ldots+\cos i c'_{2s-2}\}$$
$$+\sum_{i=1}\left[f_i\left(\frac{\pi}{2}\right)-f_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\{\operatorname{sen} i c'_0+\operatorname{sen} i c'_2+\ldots+\operatorname{sen} i c'_{2s-2}\}$$
$$-\sum_{i=0}\left[\Phi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)-\Phi_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\{\cos i c'_1+\cos i c'_3+\ldots+\cos i c'_{2s-1}\}$$
$$-\sum_{i=1}\left[\varphi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)-\varphi_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\{\operatorname{sen} i c'_1+\operatorname{sen} i c'_3+\ldots+\operatorname{sen} i c'_{2s-1}\} \qquad (11)$$
$$-\sum_{i=0}F_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos i c'_{2s}-\sum_{i=1}f_i\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} i c'_{2s}$$
$$+\sum_{i=0}F_i(h)\cos i c'_{2s}+\sum_{i=1}f_i(h)\operatorname{sen} i c'_{2s}.$$

e per la semirivoluzione $(2s+2)^a$:

$$\Upsilon = \Upsilon_0 + \sum_{i=0} F_i\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\left\{\cos i c'_0 + \cos i c'_2 + \dots + \cos i c'_{2s}\right\}$$
$$+ \sum_{i=1}\left[f_i\left(\frac{\pi}{2}\right) - f_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\left\{\operatorname{sen} i c'_0 + \operatorname{sen} i c'_2 + \dots + \operatorname{sen} i c'_{2s}\right\}$$
$$- \sum_{i=0}\left[\Phi_i\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Phi_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\left\{\cos i c'_1 + \cos i c'_3 + \dots + \cos i c'_{2s-1}\right\}$$
$$(12) \qquad - \sum_{i=1}\left[\varphi_i\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varphi_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\left\{\operatorname{sen} i c'_1 + \operatorname{sen} i c'_3 + \dots + \operatorname{sen} i c'_{2s-1}\right\}$$
$$- \sum_{i=0}\Phi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos i c'_{2s+1} - \sum_{i=1}\varphi_i\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} i c'_{2s+1}$$
$$+ \sum_{i=0}\Phi_i(h')\cos i c'_{2s+1} + \sum_{i=1}\varphi_i(h')\operatorname{sen} i c'_{2s+1}$$

VI. I valori $c'_0\, c'_2\, c'_4 \dots$ si possono esprimere pei valori estremi. Poichè la cometa fiittizia fa una r.voluzione sia a partire da γ che da γ' impiegando lo stesso tempo, segue che occorrerà lo stesso tempo τ, affinchè l'anomalìa media passi da c'_0 a c'_2 e da c'_2 a c'_4 ec. Essendo quindi T l'aumento che l'anomalìa media del pianeta acquista nel tempo τ, avremo:

$$c'_2 = c'_0 + T \quad c'_4 = c'_2 + T = c'_0 + 2\,T \quad \text{ec.}$$
$$c'_{2s} = c'_0 + s\,T$$

e inoltre, analogamente

$$c'_3 = c'_1 + T \dots \qquad c'_{2s-1} = c'_1 + (s-1)\,T$$

Quindi

$$\cos i c'_0 + \cos i c'_2 + \dots + \cos i c'_{2s-2} =$$
$$= \cos i c'_0 \left[1 + \cos i T + \cos 2 i T + \dots + \cos (s-1) i T\right]$$
$$- \operatorname{sen} i c'_0 \left[\operatorname{sen} i T + \operatorname{sen} 2 i T + \dots + \operatorname{sen} (s-1) i T\right]$$

e poichè per note formule trigonometriche si ha

$$1 + \cos i T + \cos 2 i T + \dots + \cos (s-1) i T =$$
$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} (i s T) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T - \tfrac{1}{2} \cos (i s T)$$
$$\operatorname{sen} i T + \operatorname{sen} 2 i T + \dots + \operatorname{sen} (s-1) i T =$$
$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T - \tfrac{1}{2} \cos (i s T) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} (i s T)$$

osservando che $c'_0 + s\,T = c'_{2s}$, abbiamo:

$$\cos i c'_0 + + \cos i c'_2 + \dots + \cos i c'_{2s-2} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos i c'_0 - \operatorname{sen} i c'_0 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T + \operatorname{cotg} i T \operatorname{sen} i c'_{2s} - \cos i c'_{2s}\right]$$

Nello stesso modo, si troverebbero i valori delle altre somme di seni e coseni, cioè:

$$\operatorname{sen} i c'_0 + \operatorname{sen} i c'_2 + \dots + \operatorname{sen} i c'_{2s-2} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen} i c'_0 + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \cos i c'_0 - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \cos c'_{2s} - \operatorname{sen} i c'_{2s}\right]$$
$$\cos i c'_0 + \cos i c'_2 + \dots + \cos i c'_{2s} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos i c'_0 - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \operatorname{sen} i c'_0 + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \operatorname{sen} i c'_{2s} + \cos i c'_{2s}\right]$$
$$\operatorname{sen} i c'_0 + \operatorname{sen} i c'_2 + \dots + \operatorname{sen} i c'_{2s} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen} i c'_0 + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \cos i c'_0 - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \cos i c'_{2s} + \operatorname{sen} i c'_{2s}\right]$$
$$\cos i c'_1 + \cos i c'_3 + \dots + \cos i c'_{2s-1} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos i c'_1 - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \operatorname{sen} i c'_1 + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \operatorname{sen} i c'_{2s+1} - \cos i c'_{2s+1}\right]$$
$$\operatorname{sen} i c'_1 + \operatorname{sen} i c'_3 + \dots + \operatorname{sen} i c'_{2s-1} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen} i c'_1 + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \cos i c'_1 - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} i T \cos i c'_{2s+1} - \operatorname{sen} i c'_{2s+1}\right]$$

VII. Introducendo queste espressioni nelle precedenti formule, per la $(2s+1)^a$ semirivoluzione avremo la forma:

$$(13) \quad \Upsilon = \Upsilon_0 + A + \sum_{i=0} B_i \cos i c'_{2s} + \sum_{i=1} C_i \operatorname{sen} i c'_{2s} + \sum_{i=0} D_i \cos i c'_{2s+1} +$$
$$+ \sum_{i=1} E_i \operatorname{sen} i c'_{2s+1} + \sum_{i=0} F_i(h) \cos i c'_{2s} + \sum_{i=1} f_i(h) \operatorname{sen} i c'_{2s}$$

e per la $(2s+2)^a$:

$$(14)\quad \Upsilon = \Upsilon_0 + G + \sum_{i=0} H_i \cos i\, c'_{2s} + \sum_{i=1} K_i \operatorname{sen} i\, c'_{2s} + \sum_{i=0} L_i \cos i\, c'_{2s+1}$$
$$+ \sum_{i=1} M_i \operatorname{sen} i\, c'_{2s+1} + \sum_{i=0} \Phi_i(h') \cos i\, c'_{2s+1} + \sum_{i=1} \varphi_i(h') \operatorname{sen} i\, c'_{2s+1}$$

e in queste, le A, B, C .... L, M sono funzioni dei coefficienti delle (3), (4) di c'_0, c'_1 e di T; epperò sono completamente conosciute. Determinando la Υ_0 coll' osservazione, la funzione Υ risulta determinata dalle (13), (14) in tutta l' orbita.

Nello stesso modo si determinerebbero le altre funzioni Ψ e Ξ, che prenderebbero la stessa forma delle (13) (14): solo, invece di Υ_0 si avrebbe rispettivamente Ψ_0 e Ξ_0. I coefficienti di Ψ, Ξ potranno indicarsi colle stesse lettere A, B ..... unendovi un' apice o due in alto; e così per le funzioni F_i, f_i, Φ_i, φ_i.

VIII. Integrando la (77) del §. 2.° si ha

$$(15)\qquad W_0 = \Upsilon + \rho \cos\omega\, \Psi + \rho \operatorname{sen}\omega\, \Xi$$

senz' aggiungere costanti arbitrarie essendo già state aggiunte alle Υ, Ψ, Ξ ed anche determinate.

Ricordando ora che ρ, ω son formate con τ, come r, f son composte con t, si avranno le equazioni:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \rho \cos\omega &= a \cos\eta - a e \\ \rho \operatorname{sen}\omega &= a \sqrt{1-e^2} \,.\, \operatorname{sen}\eta \end{aligned}$$

corrispondendo η all' anomalìa eccentrica: sicchè

$$(17)\qquad n\tau + c = \eta - e \operatorname{sen}\eta$$

Si ha anche

$$(18)\qquad \rho = a(1 - e\cos\eta) \qquad \rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega}$$

Le (16) dànno

$$(19)\qquad \begin{aligned} \frac{d\rho\cos\omega}{d\tau} &= -a \operatorname{sen}\eta \frac{d\eta}{d\tau}, \\ \frac{d\rho\operatorname{sen}\omega}{d\tau} &= a\sqrt{1-e} \,.\, \cos\eta \frac{d\eta}{d\tau}, \end{aligned}$$

e dalle (17) e (18) si ha

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{n a}{\rho}$$

Sostituendo questa nelle (19) ed eliminandovi sen η e cos η per mezzo delle (16) si trova

$$(20)\qquad \begin{aligned} \frac{d\rho\cos\omega}{d\tau} &= -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen}\omega \\ \frac{d\rho\operatorname{sen}\omega}{d\tau} &= \frac{an}{\rho}\sqrt{1-e^2}\,(a e + \rho\cos\omega) \end{aligned}$$

Derivando ora la (15) rispetto a τ, e servendosi delle (**20**) abbiamo:

$$\frac{dW_0}{d\tau} = -\frac{a n}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \Upsilon \operatorname{sen}\omega - \Psi \frac{1-e^2}{\rho} (\rho\cos\omega + a e) \right\}$$

Ma dalla seconda delle (18) si ha

$$\frac{a(1-e^2)}{\rho} = 1 + e\cos\omega$$

sicchè la precedente diviene

$$(21)\qquad \frac{dW_0}{d\tau} = -\frac{a n}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \Upsilon \operatorname{sen}\omega - \Psi(\cos\omega + e) \right\}$$

IX. Si può ora passare alla determinazione delle perturbazioni. Le due prime equazioni (1) del §. 1, possono scriversi come segue:

$$\frac{d\,\delta z}{d\,t} = \overline{W_0}$$

$$\frac{d\nu}{dt} = -\tfrac{1}{2}\left(\overline{\frac{dW_0}{d\tau}}\right)$$

la linea sovrapposta indicando che si dee mutare τ in t e quindi $\rho\,,\omega$ in $r\,,f$ nelle funzioni W_0 e $\frac{d\,W_0}{d\,\tau}$. Ora, facendo l'accennato cambiamento nelle (15) e (21) si ha:

$$\frac{d\,\delta z}{dt} = \Upsilon + \Psi\, r\cos f + \Xi\, r \operatorname{sen} f$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{a\,n}{2\sqrt{1-e^2}}\left\{\Upsilon \operatorname{sen} f - \Psi\,(\cos f + e)\right\}$$

Per effettuare queste integrazioni, bisogna anzitutto cambiar variabile, come si è fatto per le $W_0\,,p\,,q$. Nel nostro caso, introdurremo la h: si ha

$$\frac{d\,\delta z}{d\,h} = \frac{d\,\delta z}{d\,t}\frac{d\,t}{d\,h}\ ;\ \frac{d\nu}{dh} = \frac{d\nu}{dt}\frac{d\,t}{d\,h}$$

sicchè

$$\frac{d\,\delta z}{d\,h} = \Upsilon\frac{d\,t}{d\,h} + \Psi\frac{d\,t}{d\,h}\, r\cos f + \Xi\frac{d\,t}{d\,h}\, r\operatorname{sen} f \tag{22}$$

$$\frac{d\,\nu}{d\,h} = \frac{a\,n}{2\sqrt{1-e^2}}\left\{\Upsilon\frac{d\,t}{d\,h}\operatorname{sen} f - \Psi\frac{d\,t}{d\,h}(\cos f + e)\right\} \tag{23}$$

e analogamente per l'anomalia superiore.

Ricordando che ora

$$2\,h = 4\,h - \pi$$

la (21) del §. II. diviene

$$n\frac{d\,t}{d\,h} = \frac{r}{a}\,\frac{2\,p\cos h}{\sqrt{1-p^2\operatorname{sen}^2 h}}$$

giacchè è chiaro doversi, nell'attual modo di divisione prendere i segni superiori in detta (21): e allora le (22) (23) divengono:

$$\frac{d\delta z}{d\,h} = \Upsilon\frac{d\,t}{d\,h} + \Psi\frac{d\,t}{d\,h}\, r\cos f + \Xi\frac{d\,t}{d\,h}\, r\operatorname{sen} f$$

$$\frac{d\,\nu}{d\,h} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\Upsilon\frac{p\cos h}{\sqrt{1-p^2\operatorname{sen}^2 h}}\, r\operatorname{sen} f - \Psi\frac{p\cos h}{\sqrt{1-p^2\operatorname{sen}^2 h}}(r\cos f + e\,r)\right\}$$

X. Ciò fatto, l'integrazione delle precedenti non offre alcuna altra difficoltà. Infatti, dalle (54) §. II. si deducono subito, con opportuni cambiamenti, gli sviluppi di $r\,,r\cos f\,,r\operatorname{sen} f\,,\frac{dt}{dh}$

La funzione $\frac{p\cos h}{\sqrt{1-p^2\operatorname{sen}^2 h}}$ non offre maggiori difficoltà. Infatti per la (52) del §. II. abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2\operatorname{sen}^2 h}} = \varphi_0 + \varphi_2\cos 2\,h + \varphi_4\cos 4\,h + \ldots .$$

si avrà quindi la forma

$$\frac{p\cos h}{\sqrt{1-p^2\operatorname{sen}^2 h}} = \lambda_1\cos h + \lambda_3\cos 3\,h + \lambda_5\cos 5\,h + \ldots .$$

Con tutti questi sviluppi, e col ricordare le espressioni delle $\Upsilon\,,\Psi$ e Ξ, non è difficile trovare per $\frac{d\,\delta z}{d\,h}$ la forma seguente, relativa alla $(2s+1)^a$ semirivoluzione:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,\delta z}{dh} &= \Theta\,(P_1 \cos h + P_3 \cos 3h + \ldots.). \\
&+ \Lambda\,(P_2 \operatorname{sen} 2h + P_4 \operatorname{sen} 4h + \ldots.) \\
&+ \sum_{i=0} [X_{1,i} \cos h + X_{2,i} \operatorname{sen} 2h + X_{3,i} \cos 3h + \ldots] \cos i\,c'_{2s} \\
(24) \quad &+ \sum_{i=1} [Y_{1,i} \cos h + Y_{2,i} \operatorname{sen} 2h + Y_{3,i} \cos 3h + \ldots] \operatorname{sen} i\,c'_{2s} \\
&+ \sum_{i=0} [V_{1,i} \cos h + V_{2,i} \operatorname{sen} 2h + V_{3,i} \cos 3h + \ldots] \cos i\,c'_{2s+1} \\
&+ \sum_{i=1} [W_{1,i} \cos h + W_{2,i} \operatorname{sen} 2h + W_{3,i} \cos 3h + \ldots] \operatorname{sen} i\,c'_{2s+1}
\end{aligned}
$$

ove Θ e Λ contengono gli elementi Υ_0, Ψ_0 e Ξ_0 da determinarsi coll'esperienza. Gli altri coefficienti son noti.

Per $\frac{d\nu}{dh}$ si troverebbe una forma completamente analoga: e così pure per l'anomalìa superiore h'.

XI. Indicando in generale con $\overset{(i)}{\underset{a}{F}}(h)$ la funzione:

$$
(25) \qquad F^{(i)}_a(h) = A_{1,i} \operatorname{sen} h - \tfrac{1}{2} A_{2,i} \cos 2h + \tfrac{1}{3} A_{3,i} \operatorname{sen} 3h - \ldots
$$

ed integrando la precedente, si ha

$$
\begin{aligned}
\delta z &= C + \Theta \sum_{i=0} 2\frac{P_{2n+1}}{n+1} \operatorname{sen}(2n+1)h - \Lambda \sum \frac{P_{2n}}{2n} \cos 2nh \\
(26) \quad &+ \sum_{i=0} F_x^{(i)}(h) \cos i c'_{2s} + \sum_{i=1} F_y^{(i)}(h) \operatorname{sen} i c'_{2s} + \sum_{i=0} F_v^{(i)}(h) \cos i c'_{2s+1} \\
&+ \sum F_w^{(i)}(h) \operatorname{sen} i c'_{2s+1}
\end{aligned}
$$

si ha un'altra espressione analoga per la parte superiore dell'orbita.

Abbiamo poi da determinare la costante C che entra nella (26) e quella che entra nell'espressione di δz relativa ad h'. Tal determinazione si fa in modo perfettamente simile a quello tenuto per determinare la costante di Υ. Tutto dipenderà adunque da un certo valore iniziale di δz che diremo δz_0, epperò la (26) dopo la determinazione di C, conterrà la quantità δz_0, Υ_0, Φ_0, Ξ_0 di cui bisogna conoscere i valori numerici.

È facile assicurarsi che, determinata la C, la (26) può porsi sotto la forma

$$
\delta z = \delta z_0 + R + \Upsilon_0 S + \Psi_0 T + \Xi_0 U + V
$$

essendo R una costante determinata, perchè funzione di c'_0, c'_1 ec.: S, T, U, V funzioni di h espresse per serie trigonometriche. Ora il valore numerico di δz_0 si ha subito, osservando che esso è la differenza fra l'anomalìa media ellittica della cometa e quella realmente osservata in quell'istante.

I valori di Υ_0, Ψ_0, Ξ_0 si otterranno con tre osservazioni che dieno tre valori di δz. Indicandoli con δz_1, δz_2, δz_3 e supponendo che essi abbian luogo in una data semirivoluzione, pei valori h_1, h_2, h_3, di h, si troverà la forma

$$
\begin{aligned}
\delta z_1 &= A_0 + A_1 \Upsilon_0 + A_2 \Psi_0 + A_3 \Xi_0 \\
\delta z_2 &= B_0 + B_1 \Upsilon_0 + B_2 \Psi_0 + B_3 \Xi_0 \\
\delta z_3 &= C_0 + C_1 \Upsilon_0 + C_2 \Psi_0 + C_3 \Xi_0
\end{aligned}
$$

ove le A, B, C son costanti numeriche note. Da queste tre equazioni, si hanno i valori di Υ_0, Ψ_0 Ξ_0.

XII. Così la δz risulta completamente determinata.

In modo perfettamente analogo si determinerebbero le funzioni ν e δs: quest'ultima poi più facilmente delle altre perchè non richiede una seconda integrazione.

Possiamo dunque ritenere risoluto il problema della determinazione delle perturbazioni del moto d'una cometa in 1^a approssimazione.

ERRATA CORRIGE

Pag. 24 linea penultima: la prima somma va estesa da 1 ad i

» 25 le ultime formule vanno segnate col numero 60.

» 34 linea 15 leggasi

$$g' = n' t + c'$$

» 35 linea 15 leggasi

$$n^2 = \frac{p \pm q}{1 \pm q}$$

» 58 penultima linea leggasi $h = \frac{\pi}{2}$

» 59 formula (11) linea penultima invece di $f_i\left(\frac{\pi}{2}\right)$ leggasi $f_i\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

» 63 nella seconda delle formule (19) leggasi $\sqrt{1 - e^2}$ invece di $\sqrt{1 - e}$