Dott. ONORATO NICCOLETTI

SOPRA UN CASO SPECIALE

DEL

PROBLEMA DI PLATEAU

Ad ogni superficie ad area minima, che contenga delle rette e delle geodetiche piane, è coordinato un gruppo di operazioni, che risulta dai ribaltamenti attorno alle rette e dalle riflessioni rispetto ai piani delle geodetiche: e, secondochè questo gruppo è propriamente od impropriamente discontinuo, la superficie è o no *periodica*, cioè in ogni campo finito dello spazio entra un numero finito od infinito di elementi superficiali. In tal modo alla teoria delle superficie minime si connette quella dei gruppi di movimenti (1). Così il sig. Neovius (2) ha trovato le tre superficie minime periodiche, sulle quali si può limitare un triangolo, di cui due lati sono rettilinei, il terzo è una geodetica piana: e il sig. Schönflies (3) ha trovato le superficie minime periodiche limitate da un quadrilatero gobbo.

Nella prima parte del presente lavoro ho esteso il metodo dello Schönflies, considerando, invece dei quadri-

---

(1) Cf. Bianchi. *Lezioni di geometria differenziale*, pag. 382 e seg.

(2) E. R. Neovius. *Bestimmung zweier speciellen Minimalflächen .....* (Helsingfors, 1883).

(3) *Comptes Rendus*, 2 mars 1891.

lateri, i contorni di quattro elementi (rette e piani), che danno luogo ad un gruppo discontinuo del tipo dell'ottaedro: ho così trovato il numero delle superficie minime periodiche che incontrano ortogonalmente le faccie di un tetraedro, ed ho dimostrato che queste superficie sono le coniugate nell' applicabilità di quelle trovate dallo Schönflies; ho osservato di più tra i contorni ottenuti una relazione notevole, la quale mi ha suggerito il problema di vedere se e quando la coniugata nell'applicabilità di una superficie minima periodica sia anche essa periodica, ma non mi è riuscito risolverlo: lo lascio dunque ad uno più valente di me. Nella seconda parte poi ho dato un teorema generale sul gruppo di una superficie minima periodica, sulla quale si possa limitare un poligono di rette e di geodetiche piane, che racchiuda una porzione finita di superficie: quindi, valendomi di un teorema del Dick, ho costruito i gruppi relativi ad alcuni tra i contorni ottenuti. Infine in una nota, in relazione al problema accennato nella prima parte, ho dato le formule relative ad una superficie minima, il cui gruppo gode di proprietà affatto particolari tra i gruppi discontinui di movimenti.

O. Niccoletti.

INTRODUZIONE

1. I teoremi generali sulla esistenza degli integrali delle equazioni a derivate parziali ci dicono che una superficie integrale di una equazione a derivate parziali del 2.° ordine

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

è individuata, quando ne sia assegnata una striscia analitica, (cioè una curva (analitica) per la quale la superficie debba passare e lungo questa i piani tangenti) che non sia una striscia caratteristica per l'equazione.

Ne segue che, se l'equazione data è invariante rispetto ai movimenti ed alle simmetrie dello spazio, (come in particolare accadrà sempre, quando essa abbia un significato geometrico indipendente dalla scelta degli assi coordinati), e se sopra una sua superficie integrale esiste una retta od una geodetica piana, che non siano linee caratteristiche per l'equazione, la retta sarà un asse di simmetria della superficie, il piano della geodetica un piano di simmetria. Se quindi si potrà su una tale superficie limitare un poligono chiuso da geodetiche piane o rettilinee (le quali non siano linee caratteristiche), la superficie stessa in tutta la sua estensione si otterrà dalla porzione elementare limitata dal poligono considerato, ribaltando attorno alle rette, e riflettendo rispetto ai piani del contorno, e a quelle rette e a quei piani che con queste operazioni se ne deducono. Allora, se il gruppo generato dai ribaltamenti e dalle simmetrie considerate è propriamente discontinuo, la superficie si diffonderà nello spazio in modo uniforme, cioè in qualunque campo finito dello spazio penetrerà un numero finito di ripetizioni della porzione elementare, e la superficie si dirà *periodica;* se invece, come accadrà in generale, il gruppo delle operazioni considerate sarà impropriamente discontinuo, in ogni porzione finita dello spazio entrerà un numero infinito di ripetizioni della porzione elementare di superficie, la quale non si diffonderà nello spazio in modo uniforme.

2. Inversamente, data una equazione a derivate parziali del 2.° ordine, ci si può proporre il problema di determinarne, se è possibile, una superficie integrale, sulla quale si possa limitare un poligono di geodetiche piane o rettilinee, del quale sia nota la forma o per lo meno il numero e la successione dei suoi elementi, in guisa però che la superficie sia periodica. Ammettendo l'esistenza della superficie corrispondente ad un dato poligono, osserviamo che le rette del contorno assegnato dovranno essere assi binarii, quaternarii o senarii di un gruppo discontinuo di movimenti, ed i piani del contorno piani di simmetria di un tal gruppo, ampliato mediante una riflessione (1). Ma questa condizione oltrechè necessaria è anche sufficiente; poichè, quando essa sia soddisfatta, determinata in un modo qualunque la porzione elementare di superficie limitata dal poligono dato, la sua continuazione analitica si otterrà come già si è detto; e poichè il gruppo delle operazioni è stato preso *a priori* propriamente discontinuo, la superficie sarà certamente periodica. Preso dunque un contorno nel modo ora detto, tutta la questione si riduce a vedere se esiste ed in tal caso

(1) Sui gruppi discontinui di operazioni confronta:

JORDAN. — *Sur les groupes de mouvements.* (Annali di matematica, serie 2a, t. 2o, pag. 167).

A. SCHÖNFLIES. — *Beweis eines Satzes über Bevegungsgruppen.* (Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1886, pag. 497). — *Ueber Gruppen von Bevegungen.* (Mathematische Annalen Bd. 28, 29). — *Ueber Gruppen von Trasformationen des Raumes in sich.* (Mathematische Annalen Bd. 34).

a determinare la porzione elementare di superficie limitata dal contorno assegnato, cosa in generale difficilissima.

Ma, anche se non è nota la superficie che risolve il problema, anzi affatto indipendentemente dalla particolare equazione considerata, possiamo studiare quei contorni di rette e di piani che danno luogo a gruppi discontinui di operazioni; e i risultati che si otterranno, varranno senz'altro per tutte le superficie di cui abbiamo parlato.

3. Queste considerazioni valgono in particolare per le superficie ad area minima, la cui equazione è

$$(1+q^2)\,r-2\,p\,q\,s+(1+p^2)\,t=0\,.$$

Per esse le linee caratteristiche sono date dall'equazione

$$(1+p^2)\,dx^2+2\,p\,q\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2=0\,;$$

sono cioè le linee di lunghezza nulla; quindi, come conseguenza immediata dei teoremi generali, avremo che qualunque retta che giace su una superficie minima, ne è un asse di simmetria, qualunque piano che la taglia ortogonalmente, un piano di simmetria. Questi teoremi risultano altresì pel caso delle superficie minime dalle formule di Schwarz, che danno le coordinate dei punti di una superficie minima, della quale sia assegnata una striscia analitica. Il problema generale accennato dianzi diventa per le superficie minime quello che lo Schwarz ha trattato nelle " *Fortgesetzte Untersuchungen über Minimalflächen* " (1) e il contorno corrispondente si dirà un contorno di Schwarz.

Mi sono proposto in quel che segue di determinare quei contorni di Schwarz di quattro elementi, che danno luogo ad un

(1) H. A. SCHWARZ. — *Gesammelte Mathematische Abhandlungen.* (Iulius Springer, Berlin). 2er Band. seite 126.

gruppo discontinuo di operazioni, appartenente al tipo dell' ottaedro (1).

---

(1) Perchè la locuzione adoperata sia chiara ed anche per il seguito osserviamo:

Se abbiamo un gruppo discontinuo di movimenti, e per un punto conduciamo tante rette parallele agli assi del gruppo e riguardiamo ognuna di queste rette come asse di un movimento di rotazione, la cui ampiezza sia uguale all'ampiezza della rotazione del movimento che accade attorno all'asse corrispondente, otteniamo un gruppo di rotazioni, che lo Schönflies chiama *gruppo ausiliario* (*Hilfsgruppe*) del gruppo dato. Fatta eccezione del caso speciale che il gruppo di movimenti risulti da un movimento elicoidale, il cui angolo di rotazione sia irrazionale con π, o da un tale movimento combinato con un ribaltamento, il cui asse incontri ortogonalmente l'asse del movimento elicoidale, il gruppo ausiliario di un gruppo discontinuo di movimenti è uno dei gruppi dei movimenti che riportano in sè stesso un poliedro regolare. Poichè di più il caso dell'icosaedro viene subito escluso, i gruppi discontinui di movimenti si possono dal loro gruppo ausiliario dividere in quattro tipi: ciclico, diedrico, tetraedrico, ottaedrico. (Cf. le memorie citate sui gruppi di operazioni).

CAPITOLO PRIMO

4. Cominciamo dal costruire tutti i quadrilateri gobbi, che danno origine ad una superficie minima periodica della simmetria dell' ottaedro (1).

Osserviamo perciò che il gruppo dei movimenti più generale del tipo ottaedrico si ottiene aggiungendo al gruppo dei movimenti che riportano il cubo in sè stesso, una traslazione uguale in grandezza e senso ad uno dei lati del cubo (2). In questo gruppo i lati del cubo di lato metà di quello dato sono assi quaternarii, le diagonali delle faccie assi binarii, ed ugualmente accade per ogni divisione regolare dello spazio, di cui il cubo sia il poliedro generatore. Da questa semplice osservazione segue che: " *qualunque quadrilatero gobbo formato cogli spigoli e colle diagonali delle faccie del cubo dà luogo ad una superficie minima periodica* ".

La questione è così ricondotta alla determinazione di tutti i quadrilateri distinti che si possono formare cogli spigoli e colle diagonali delle faccie del cubo. Prendiamo perciò gli assi coordinati paralleli agli spigoli del cubo, ed indichiamo con x, y, z tre segmenti equipollenti ai lati del cubo. Un lato qualunque di uno dei quadrilateri cercati è un segmento parallelo ad uno dei piani

---

(1) Questo caso è stato trattato dallo Schönflies. (*Comptes Rendus*, tome CXII, pag. 478, 2 mars 1891), al cui metodo mi attengo in questo caso, e finchè è possibile, anche nei casi ulteriori.

(2) Il gruppo corrispondente è designato dallo Schönflies con O_4 (Mathematische Annalen Bd. 29, Seite 77).

coordinati, la cui espressione geometrica è data da una delle nove espressioni seguenti

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha x \quad , \quad \beta y \quad , \quad \gamma z \\ \alpha_1 (y+z) \ , \ \beta_1 (z+x) \ , \ \gamma_1 (x+y) \\ \alpha_2 (y-z) \ , \ \beta_2 (z-x) \ , \ \gamma_2 (x-y) \ , \end{cases}$$

dove le $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sono numeri intieri.

Ma, poichè la somma geometrica dei quattro lati del quadrilatero è nulla, deve essere nulla la somma aritmetica corrispondente. Si tratta quindi di formare tutte le possibili somme di quattro termini (1), identicamente nulle.

Per ognuna di queste somme avremo tre casi, in generale distinti, da considerare, i quali si otterranno facendo variare l'ordine di successione dei termini della somma e prendendo la medesima successione dei lati del quadrilatero, ciò che dà appunto tre possibilità. Ottenuti così tutti i quadrilateri possibili, rimane a vedere quali siano distinti, dovendosi ritenere come identici quelli che si deducono l'uno dall'altro con una omotetia, un movimento, una simmetria o con più di queste operazioni insieme.

Venendo alla costruzione effettiva di queste somme, è evidente che al più due delle quantità α, β, γ saranno diverse da zero; ad es. α e β. Avremo allora tre casi distinti:

1.° tutti due i numeri α e β sono diversi da zero. Si hanno i tre quadrilateri:

(1) $x \ , \ y \ , \ z-x \ , \ -(y+z) \quad \{3\}$
(2) $x \ , \ y \ , \ -(y+z) \ , \ z-x \quad \{4\}$
(3) $x \ , \ z-x \ , \ y \ , \ -(y+z) \quad \{5\}$;

2.° uno solo dei due numeri α e β, ad es. α, è diverso da zero: una sola delle altre espressioni contiene la x; si hanno i due quadrilateri:

(4) $2x \ , \ z-y \ , \ -2(z+x) \ , \ y+z \quad \{1\}$
(5) $2x \ , \ y+z \ , \ z-y \ , \ -2(z+x) \quad \{2\}$;

due delle altre espressioni contengono la x; si hanno due altri quadrilateri:

(6) $2x \ , \ z-y \ , \ -(z+x) \ , \ y-x \quad \{8\}$
(7) $2x \ , \ y-x \ , \ z-y \ , \ -(z+x) \quad \{9\}$;

3.° tutti tre i numeri α, β, γ sono nulli. I lati del quadrilatero sono tutti paralleli alle diagonali delle faccie del cubo. Si hanno due quadrilateri:

(8) $x+y \ , \ -(y+z) \ , \ z-y \ , \ y-x \quad \{6\}$
(9) $x+y \ , \ z-y \ , \ y-x \ , \ -(y+z) \quad \{7\}$.

Abbiamo quindi " *nove quadrilateri che danno origine ad una* " *superficie minima periodica della simmetria dell'ottaedro* ".

5. Non tutte queste superficie minime sono distinte: infatti dal teorema di Schwarz sulla unicità della superficie minima limitata da un quadrilatero gobbo [1] segue che, se uno dei quadrilateri ha degli assi di simmetria, la superficie minima corrispondente avrà gli stessi assi di simmetria e conterrà quelli che si appoggiano a due lati del quadrilatero. Ora il quadrilatero (9) ha due assi binarii di simmetria, che si appoggiano a due lati opposti; risulta quindi di quattro quadrilateri (1); il quadrilatero (4) ha un asse binario di simmetria, risulta dunque di due quadrilateri (1); il quadrilatero (7) ha un asse binario di simmetria, e risulta di due quadrilateri (5). Il numero delle superficie minime distinte è così ridotto a sei.

Aggiungiamo che queste sono le sole superficie minime periodiche limitate dagli spigoli di un quadrilatero gobbo. Infatti il gruppo dei movimenti di una tal superficie deve appartenere ad uno dei quattro tipi: ciclico, diedrico, tetraedrico, ottaedrico. Ma nel primo tipo, essendo gli assi dei movimenti tutti paralleli, nel secondo paralleli od ortogonali ad una direzione fissa, non si può con essi formare un quadrilatero gobbo. Siccome poi ogni gruppo

[1] H. A. Schwarz. — *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche.* (Ges Mat. Abh. Bd. I, s. 111).

del tipo tetraedrico è un sottogruppo di uno del tipo ottaedrico, ne segue la verità di quanto si era affermato.

Quindi:

" *Vi sono sei superficie minime periodiche limitate dagli spigoli* " *di un quadrilatero gobbo* ".

Si può ancora osservare che i quadrilateri (1) e (8) danno luogo alla superficie di Schwarz ed alla sua coniugata nell' applicabilità; il quadrilatero (2) alla superficie del Neovius [1].

6. Veniamo ora alla determinazione dei contorni di Schwarz di un piano e tre rette che danno luogo ad una superficie minima periodica della simmetria dell' ottaedro.

Seguendo perciò il metodo dello Schönflies, aggiungiamo al gruppo di movimenti considerato dianzi la riflessione rispetto ad uno dei piani di simmetria della divisione cubica dello spazio; ammettendo l'esistenza della superficie minima corrispondente ad un dato contorno, avremo che " *qualunque contorno di quattro* " *elementi, che siano assi binarii o quaternarii o piani di simmetria* " *di questo gruppo ampliato, darà luogo ad un gruppo discontinuo* " *e quindi ad una superficie minima periodica della simmetria del-* " *l'ottaedro* ". L'ampliamento del gruppo si può fare in due modi, sia aggiungendo la riflessione rispetto ad una delle faccie del cubo, sia rispetto ad uno dei piani medii. Nel primo caso tutte le faccie e tutti i piani diagonali di ogni cubo della divisione cubica sono piani di simmetria del gruppo ampliato; nel secondo lo sono soltanto i piani medii. Questo ultimo modo dà luogo, come si riconosce facilmente, a dei casi particolari del primo.

I contorni cercati saranno dunque composti di uno di questi piani di simmetria e di tre rette, la cui espressione geometrica è data da tre delle espressioni (1) del n. 4. Essi sono certamente

[1] H. A. Schwarz. — *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche.*
E. R. Neovius. — *Bestimmung zweier speciellen Minimalflächen......* (Helsingfors 1883).

in numero infinito; infatti la spezzata formata dalle tre rette del contorno è assoggettata alla sola condizione di avere i suoi estremi sul piano scelto di simmetria; questa condizione sarà espressa analiticamente da una sola equazione lineare omogenea a coefficienti intieri tra tre indeterminate da risolvere in numeri intieri, la quale avrà dunque infinite soluzioni. I contorni corrispondenti alle diverse soluzioni non saranno in generale simili: potranno soltanto distribuirsi in un numero finito di tipi.

Escluderemo, come privi di interesse, quei contorni pei quali esiste un piano che ne contiene le rette e taglia ortogonalmente il piano: riguarderemo di più come identici due contorni che si deducano l'uno dall'altro per una similitudine, un movimento, od una simmetria, o due tipi, uno dei quali sia contenuto nell'altro [1].

7. Posto ciò, supponiamo dapprima che il piano, mediante il quale è stato ampliato il gruppo dei movimenti, sia una delle faccie del cubo.

Il piano del contorno sia, mantenendo le stesse convenzioni del caso antecedente, un piano coordinato, ad es. il piano $y=0$. Per l'osservazione antecedente non dovranno riguardarsi come distinti due contorni che si deducano l'uno dall'altro per le riflessioni rispetto ai piani $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=z$, $x+z=0$, cioè cogli scambi $x \sim -x$, $y \sim -y$, $z \sim -z$, $x \sim z$, $x \sim -z$, disponendo opportunamente delle costanti arbitrarie. Per le rette del contorno basterà prendere tre delle solite espressioni (1) in modo che la somma corrispondente alla coordinata y sia nulla.

Venendo alla costruzione effettiva di queste somme, supponiamo dapprima che un termine non sia mai ripetuto, cioè che nel contorno non vi siano due rette parallele. Una almeno delle tre quantità α, β, γ deve essere nulla: di più nelle espressioni delle tre rette dovranno comparire tutte tre le coordinate x, y, z e due almeno dovranno contenere la y.

[1] Le stesse convenzioni s'intendono fatte senz'altro anche pei casi ulteriori.

Due delle quantità α, β, γ siano diverse da zero: β lo sarà certamente: sia di più $\alpha \neq 0$.

Abbiamo un solo tipo dato da

$$(1) \qquad a\,y \;,\quad b\,x \;,\quad -a\,(y+z) \qquad \}29\{$$

essendo a e b due numeri intieri arbitrarii.

Una sola delle quantità α, β, γ, e precisamente β, sia diversa da zero. Una sola delle altre espressioni contenga la y. Si ha il tipo

$$(2) \qquad a\,y \;,\quad b\,(z+x) \;,\quad a\,(x+y) \qquad \}48\{\,.$$

Sia ancora $\beta \neq 0$; tutte due le altre espressioni contengano la y. Si hanno i due tipi:

$$(3) \qquad (a+b)\,y \;,\quad -a\,(y+z) \;,\quad -b\,(x+y) \qquad \}61\{$$

$$(4) \qquad -b\,(x+y) \;,\quad (a+b)\,y \;,\quad -a\,(y+z) \qquad \}57\{\,.$$

Sia invece $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$. Si hanno i due tipi:

$$(5) \qquad b\,(y+z) \;,\quad a\,x \;,\quad b\,(z-y) \qquad \}25\{$$

$$(6) \qquad b\,(y+z) \;,\quad a\,x \;,\quad -b\,(x+y) \qquad \}52\{\,.$$

Sia $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Tutte tre le espressioni contengano la y. Si hanno i due tipi:

$$(7) \qquad a\,(y+z) \;,\quad b\,(y-z) \;,\quad -(a+b)\,(x+y) \qquad \}39\{$$

$$(8) \qquad b\,(y-z) \;,\quad -(a+b)\,(x+y) \;,\quad a\,(y+z) \qquad \}34\{\,.$$

Due sole espressioni contengano la y. Si hanno i tre tipi:

$$(9) \qquad a\,(y+z) \;,\quad b\,(z+x) \;,\quad a\,(z-y) \qquad \}35\{$$

$$(10) \qquad a\,(y+z) \;,\quad b\,(z+x) \;,\quad -a\,(x+y) \qquad \}65\{$$

$$(11) \qquad a\,(y+z) \;,\quad b\,(z+x) \;,\quad a\,(x-y) \qquad \}20\{\,.$$

Due rette del contorno siano parallele. Si hanno i tre tipi:

$$(12) \qquad a\,(y+z) \;,\quad b\,x \;,\quad -a\,(y+z) \qquad \}\,4\,\{$$

$$(13) \qquad a\,(y+z) \;,\quad (a+b)\,(x-y) \;,\quad b\,(y+z) \qquad \}\,9\,\{$$

$$(14) \qquad a\,(y+z) \;,\quad b\,(z+x) \;,\quad -a\,(y+z) \qquad \}10\{\,.$$

Il piano del contorno sia un piano diagonale; ad es. il piano $x = y$. Uno qualunque dei contorni che otterremo non può essere simile ad uno degli antecedenti. Infatti al lato x del cubo andrebbe sostituita la diagonale $x+y$, al lato y la $x-y$, invece il lato z, che ha con queste un rapporto incommensurabile, rimarrebbe fermo. Nè la coordinata z può mai mancare, altrimenti il piano $z = 0$ conterrebbe le tre rette e incontrerebbe ortogonalmente il piano $x = y$.

Nella somma aritmetica delle tre rette il coefficiente della x deve uguagliare quello della y: di più sono identiche due soluzioni che si deducono l'una dall'altra cogli scambi: $x \sim y$, $x \sim -y$, $z \sim -z$.

Ciò premesso, supponiamo che due rette del contorno non siano mai parallele.

Tutte tre le quantità α, β, γ siano diverse da zero. Si ha l'unico tipo:

$$(15) \qquad a\,x \;,\quad b\,z \;,\quad a\,y \qquad \}24\{\,.$$

Sia $\beta = 0$; $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Si hanno i tre tipi:

$$(16) \qquad a\,x \;,\quad b\,z \;,\quad a\,(y+z) \qquad \}33\{$$

$$(17) \qquad a\,x \;,\quad b\,z \;,\quad -a\,(z+x) \qquad \}16\{$$

$$(18) \qquad 2\,a\,x \;,\quad b\,z \;,\quad a\,(y-x) \qquad \}31\{\,.$$

Sia $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$; si hanno i tre tipi:

$$(19) \qquad (a+b)\,x \;,\quad a\,y \;,\quad b\,(y+z) \qquad \}32\{$$

$$(20) \qquad a\,y \;,\quad b\,(y+z) \;,\quad (a+b)\,x \qquad \}28\{$$

$$(21) \qquad b\,(y+z) \;,\quad (a+b)\,x \;,\quad a\,y \qquad \}30\{\,.$$

Sia $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$. Tutte due le altre espressioni contengano la z. Si hanno i tre tipi:

$$(22) \qquad a\,(y+z) \;,\quad b\,z \;,\quad a\,(z-y) \qquad \}18\{$$

$$(23) \qquad a\,(y+z) \;,\quad b\,z \;,\quad a\,(x+z) \qquad \}60\{$$

$$(24) \qquad a\,(y+z) \;,\quad b\,z \;,\quad a\,(x-z) \qquad \}59\{\,.$$

Una sola delle altre espressioni contenga la z. Si ha l'unico tipo

(25) $2a(y+z)\,,\quad bz\,,\quad a(x-y)\qquad \{53\}$.

Sia invece $\beta=\gamma=0$, $\alpha\neq 0$. Tutte due le altre espressioni contengano la z. Si hanno i tipi:

(26) $(a+b)x\,,\quad a(y+z)\,,\quad b(y-z)\qquad \{27\}$

(27) $a(y+z)\,,\quad (a+b)x\,,\quad b(y-z)\qquad \{26\}$

(28) $ax\,,\quad b(z+x)\,,\quad (a+b)(z-x)\qquad \{19\}$

(29) $b(z+x)\,,\quad ax\,,\quad (a+b)(z-x)\qquad \{17\}$

(30) $ax\,,\quad (a+b)(y+z)\,,\quad b(z+x)\qquad \{50\}$

(31) $(a+b)(y+z)\,,\quad b(z+x)\,,\quad ax\qquad \{45\}$

(32) $b(z+x)\,,\quad ax\,,\quad (a+b)(y+z)\qquad \{56\}$

(33) $(a+b)x\,,\quad a(y+z)\,,\quad b(z-x)\qquad \{49\}$

(34) $a(y+z)\,,\quad b(z-x)\,,\quad (a+b)x\qquad \{44\}$

(35) $b(z-x)\,,\quad (a+b)x\,,\quad a(y+z)\,.\qquad \{55\}$

Sia ancora $\alpha\neq 0$. Una sola espressione contenga la z. Si hanno i tipi:

(36) $ax\,,\quad b(x+y)\,,\quad a(y+z)\qquad \{46\}$

(37) $ax\,,\quad b(x+y)\,,\quad -a(x+z)\qquad \{63\}$

(38) $ax\,,\quad (a+2b)(y+z)\,,\quad b(x-y)\qquad \{51\}$

(39) $(a+2b)(y+z)\,,\quad b(x-y)\,,\quad ax\qquad \{47\}$

(40) $b(x-y)\,,\quad ax\,,\quad (a+2b)(y+z)\,.\qquad \{54\}$

(41) $(a+2b)x\,,\quad -a(x+z)\,,\quad b(y-x)\qquad \{62\}$

(42) $-a(x+z)\,,\quad b(y-x)\,,\quad (a+2b)x\qquad \{64\}$

(43) $b(y-x)\,,\quad (a+2b)x\,,\quad -a(x+z)\,.\qquad \{58\}$

Sia $\alpha=\beta=\gamma=0$. Tutte tre le espressioni contengano la z. Si hanno i tre tipi:

(44) $a(y+z)\,,\quad b(y-z)\,,\quad (a+b)(x+z)\qquad \{42\}$

(45) $b(y-z)\,,\quad (a+b)(x+z)\,,\quad a(y+z)\qquad \{38\}$

(46) $(a+b)(x+z)\,,\quad a(y+z)\,,\quad b(y-z)\qquad \{41\}$

Due sole espressioni contengano la z. Sia $\gamma_1\neq 0$. Si hanno i tipi:

(47) $a(y+z)\,,\quad b(x+y)\,,\quad a(z-y)\qquad \{36\}$

(48) $a(y+z)\,,\quad b(x+y)\,,\quad a(x+z)\qquad \{67\}$

(49) $a(y+z)\,,\quad b(x+y)\,,\quad a(x-z)\,.\qquad \{22\}$

Sia $\gamma_1=0$. Si hanno i tipi:

(50) $a(y+z)\,,\quad b(x-y)\,,\quad (2b-a)(y-z)\qquad \{37\}$

(51) $b(x-y)\,,\quad a(y+z)\,,\quad (2b-a)(y-z)\qquad \{40\}$

(52) $(a+2b)(y+z)\,,\quad b(x-y)\,,\quad a(x+z)\qquad \{23\}$

(53) $b(x-y)\,,\quad (a+2b)(y+z)\,,\quad a(x+z)\qquad \{21\}$

(54) $(a+2b)(y+z)\,,\quad b(x-y)\,,\quad a(x-z)\qquad \{66\}$

(55) $b(x-y)\,,\quad (a+2b)(y+z)\,,\quad a(x-z)\,.\qquad \{68\}$

Una sola espressione contenga la z. Si ha l'unico tipo:

(56) $2a(y+z)\,,\quad b(x+y)\,,\quad a(x-y)\,.\qquad \{43\}$

Due rette del contorno siano parallele. Due delle quantità α,β,γ siano diverse da zero. Si ha il tipo:

(57) $ax\,,\quad bz\,,\quad -ax\qquad \{1\}$

Sia $\alpha=\beta=0$, $\gamma\neq 0$. Si ha il tipo:

(58) $a(y+z)\,,\quad bz\,,\quad -a(y+z)\,.\qquad \{7\}$

Sia $\alpha\neq 0$, $\beta=\gamma=0$; si hanno i tipi:

(59) $ax\,,\quad (a+b)(y+z)\,,\quad bx\qquad \{2\}$

(60) $ax\,,\quad -(a+b)(x+z)\,,\quad bx\qquad \{3\}$

(61) $a(y+z)\,,\quad (a+b)x\,,\quad b(y+z)\qquad \{5\}$

(62) $a(x+z)\,,\quad -(a+b)x\,,\quad b(x+z)\,.\qquad \{8\}$

Sia $\alpha=\beta=\gamma=0$. Si hanno i tipi:

(63)	$a\,(y+z)$	,	$(a+b)\,(z-y)$	,	$b\,(y+z)$	$\{6\}$
(64)	$a\,(y+z)$	,	$(a+b)\,(x+z)$	,	$b\,(y+z)$	$\{15\}$
(65)	$a\,(y+z)$	,	$(a+b)\,(x-z)$	,	$b\,(y+z)$	$\{14\}$
(66)	$a\,(y+z)$	,	$b\,(x+y)$	,	$-a\,(y+z)$	$\{12\}$
(67)	$a\,(y+z)$	,	$b\,(x-y)$	,	$(2\,b-a)\,(y+z)$	$\{13\}$
(68)	$a\,(x-y)$	,	$2\,(a+b)\,(y+z)$	,	$b\,(x-y)$.	$\{11\}$

8. Come è evidente, le due costanti intiere a e b devono essere prese in modo che la spezzata delle tre rette non traversi il piano del contorno: vanno di più ritenuti come identici due contorni dello stesso tipo, tali che le costanti a e b dell'uno siano proporzionali a quelle dell'altro; due tali contorni sono infatti simili.

Se il gruppo dei movimenti fosse stato ampliato mediante la riflessione rispetto ad uno dei piani medî del cubo, si sarebbe dovuto prendere come piano del contorno uno di questi piani e i contorni ottenuti non sarebbero stati che dei casi particolari dei tipi (1) — (14) e si sarebbero avuti prendendo il primo e terzo coefficiente dispari, con che quello medio risulta senz'altro pari.

Ma, quando si ammetta, almeno nei casi di cui ci occupiamo, l'unicità della superficie minima corrispondente ad un dato contorno, non tutti i contorni determinati antecedentemente daranno luogo a superficie minime distinte. Infatti, se il contorno si otterrà dalla riunione di due altri della stessa natura, le due superficie minime relative ai due contorni in questione saranno identiche. Così i contorni del tipo (5) risultano di due (1), quelli (9) di due (2), i (15) di due (18), i (23) di due (25), i (48) di due (56).

Se poi il contorno ammette anche dei piani di simmetria, il tipo corrispondente si deduce dalla riunione di due o più dei tipi che studieremo più in là (1).

(1) Ho discusso questo caso molto diffusamente, per potere essere più breve nella trattazione dei casi ulteriori.

9. Il contorno sia formato di due piani e due rette. Bisogna distinguere due casi:

1°: i due piani sono elementi consecutivi del contorno.

2°: i due piani non lo sono.

Cominciamo dal 2° caso.

I due piani del contorno siano paralleli e siano (conservando le notazioni antecedenti) i piani $y=0$, $y=a$: (1) siano A e B i punti comuni alle due rette e al piano $y=0$. Abbiamo i tipi

(1)	$\mathrm{A}\equiv(0\,,0\,,0)$	$a\,y$	;	$\mathrm{B}\equiv(b\,,0\,,c)$	;	$a\,(y+z)$	$\{28\}$
(2)	»	$a\,(y+z)$	;	»	;	$a\,(y-z)$	$\{17\}$
(3)	»	$a\,(y+z)$	;	»	;	$a\,(y+z)$	$\{9\}$
(4)	»	$a\,(y+z)$	;	»	;	$a\,(x+y)$.	$\{35\}$

I due piani ancora paralleli siano i piani $x=y$; $x=y-a$: siano A e B i punti comuni alle rette e al piano $x=y$. Abbiamo i tipi

(5)	$\mathrm{A}\equiv(0\,,0\,,0)$;	$a\,y$	;	$\mathrm{B}\equiv(b\,,b\,,c)$	;	$-a\,x$	$\{15\}$
(6)	»	$a\,y$	;	»		$-\frac{a}{2}(x-y)$	$\{31\}$
(7)	»	$a\,y$	;	»		$a\,(y+z)$	$\{33\}$
(8)	»	$a\,y$	;	»		$-a\,(x+z)$	$\{24\}$
(9)	»	$a\,y$	;	»		$a\,y$	$\{3\}$
(10)	»	$a\,(y+z)$	;	»		$a\,(y-z)$	$\{21\}$
(11)	»	$a\,(y+z)$	;	»		$-a\,(x+z)$	$\{45\}$
(12)	»	$a\,(y+z)$	;	»		$a\,(z-x)$	$\{43\}$
(13)	»	$a\,(y+z)$	;	»		$\frac{a}{2}(y-x)$	$\{39\}$
(14)	»	$a\,(y+z)$	;	»		$a\,(y+z)$.	$\{14\}$

I due piani del contorno siano ortogonali; siano i piani $x=0$,

(1) Ora e nel seguito prendiamo il lato del cubo uguale ad 1.

$y=0$: siano A e B i punti comuni alle rette e al piano $y=0$. Abbiamo i tipi

(15)	$A \equiv (a, 0, 0)$,	$-a(x+y)$;	$B \equiv (b, 0, c)$	$-b(x+y)$	}5{
(16)	„	, $-a(x+y)$;	„	, $b(y-x)$.	}18{

I due piani ancora ortogonali siano $x=y$, $x+y=0$: A e B i punti comuni alle rette ed al piano $x=y$. Si hanno i tipi

(17)	$A \equiv (-a, -a, 0)$;	$2ax$	$B \equiv (-b, -b, c)$	$2bx$	}2{
(18)	„	$2ax$	„	$2by$	}16{
(19)	„	$2ax$	„	$2b(y+z)$	}25{
(20)	„	$2ax$	„	$2b(x+z)$	}34{
(21)	„	$2a(y+z)$	„	$2b(y+z)$	}10{
(22)	„	$2a(y+z)$	„	$2b(y-z)$	}22{
(23)	„	$2a(y+z)$	„	$2b(x+z)$.	}44{

Se i due piani diagonali s'incontrassero lungo l'asse del cubo invece che lungo un lato, non si avrebbero tipi distinti dagli antecedenti: basterebbe infatti trasportare l'asse z nell'asse del cubo, supponendo il lato di questo uguale a 2; prendere poi nei tipi (17)—(23) a e b dispari, c pari.

I due piani ortogonali siano i piani $y=0$, $x=z$. Si hanno i tipi

(24)	$A \equiv (-a, 0, 0)$,	$a(x+y)$	$B \equiv (-b, 0, c)$	$(b+c)(x+y)$	}8{
(25)	„	$a(x+y)$	„	$(b+c)(x-y)$	}19{
(26)	„	$a(x+y)$	„	$-(b+c)(y+z)$	}37{
(27)	„	$a(x+y)$	„	$(b+c)(y-z)$.	}36{

I due piani si taglino sotto angolo di 45.° Siano i piani $y=0$, $x=y$. Si hanno i tipi

(28)	$A \equiv (a, 0\ 0)$	ay	$B \equiv (b, 0, c)$	by	}1{
(29)	„	ay	„	$\frac{b}{2}(y-x)$	}29{
(30)	$A \equiv (a, 0\ 0)$	ay	$B \equiv (b, 0, c)$	$b(y+z)$	}30{
(31)	„	$\frac{a}{2}(y-x)$	„	$\frac{b}{2}(y-x)$	}6{
(32)	„	$\frac{a}{2}(y-x)$	„	$b(y+z)$	}38{
(33)	„	$a(y+z)$	„	$b(y+z)$	}7{
(34)	„	$a(y+z)$	„	$b(y-z)$.	}20{

I due piani si taglino sotto angolo di 60.° Siano i due piani $x=y$, $x=z$. Si hanno i tipi

(35)	$A \equiv (-a, -a, 0)$	ax	$B \equiv (-b, -b, c)$	$(b+c)x$	}4{
(36)	„	ax	„	$-(b+c)(y+z)$	}27{
(37)	„	ax	„	$(b+c)(y-z)$	}26{
(38)	„	ax	„	$(b+c)(x-y)$	}32{
(39)	„	$a(x-y)$	„	$(b+c)(x-y)$	}13{
(40)	„	$a(x-y)$	„	$-(b+c)(y+z)$	}40{
(41)	„	$a(x-y)$	„	$(b+c)(y-z)$	}41{
(42)	„	$a(x-y)$	„	$\frac{b+c}{2}(x-z)$	}42{
(43)	„	$-a(y+z)$	„	$-(b+c)(y+z)$	}12{
(44)	„	$-a(y+z)$	„	$(b+c)(y-z)$	}23{
(45)	„	$a(y-z)$	„	$(b+c)(y-z)$.	}11{

10. I due piani siano elementi consecutivi del contorno. Siano i piani $x=0$, $y=0$. Sia A il punto comune ad una delle rette ed al piano $y=0$. Abbiamo i tipi

(46)	$A \equiv (a, 0, 0)$	by ,	$-a(x+z)$	}55{
(47)	„	$b(y+z)$,	$-a(x+z)$	}80{
(48)	„	$b(y+z)$,	$-a(x+y)$.	}74{

I due piani siano i piani $x=y$, $x+y=0$. Sia A il punto comune ad una delle rette ed al piano $x=y$. Abbiamo i tipi

(49)	$A \equiv (a, a, 0)$	$b\,x$,	$-(2\,a+b)\,(x+z)$	}70{
(50)	„	$b\,x$,	$-(2\,a+b)\,(y+z)$	}59{
(51)	„	$b\,(x+z)$,	$-(2\,a+b)\,(x-z)$	}51{
(52)	„	$b\,(x+z)$,	$-(2\,a+b)\,(y+z)$	}90{
(53)	„	$b\,(x+z)$,	$-(2\,a+b)\,(y-z)$	}86{
(54)	„	$b\,(x+z)$,	$-\frac{2a+b}{2}\,(x+y)$.	}96{

Se i due piani diagonali s'incontrano lungo l'asse del cubo, vale la stessa osservazione che nel caso antecedente.

I due piani siano i piani $y=0$, $x=z$. Abbiamo i tipi

(55)	$A \equiv (a, 0, 0)$	$b\,y$,	$-a\,x$	}46{
(56)	„	$b\,y$,	$a(y+z)$	}64{
(57)	„	$b\,(x+y)$,	$-(a+b)\,x$	}65{
(58)	„	$b\,(y+z)$,	$(b-a)\,x$	}58{
(59)	„	$b\,(x+y)$,	$(a+b)\,(y-x)$	}50{
(60)	„	$b\,(x+y)$,	$\frac{a+b}{2}\,(z-x)$	}85{
(61)	„	$b\,(x+y)$,	$(a+b)\,(y+z)$	}76{
(62)	„	$b\,(x+y)$,	$(a+b)\,(z-y)$.	}75{

I due piani si taglino sotto angolo di 45.° Siano i piani $y=0$, $x=y$. Abbiamo i tipi

(63)	$A \equiv (a, 0, 0)$	$b\,y$,	$(a-b)\,(y+z)$	}63{
(64)	„	$b\,y$,	$(b-a)\,(x+z)$	}56{
(65)	„	$b\,(y+z)$,	$(b-a)\,x$	}57{
(66)	„	$b\,(x+y)$,	$a\,(y+z)$	}77{
(67)	„	$b\,(x+y)$,	$-a\,(x+z)$	}83{
(68)	„	$b\,(x-y)$,	$(a+2\,b)\,(y+z)$	}78{
(69)	„	$b\,(x-y)$,	$-(a+2\,b)\,(x+z)$	}84{
(70)	„	$b\,(y+z)$,	$(a-b)\,(y-z)$	}49{

(71)	$A \equiv (a, 0, 0)$	$b\,(y+z)$,	$(b-a)\,(x+z)$	}82{
(72)	„	$b\,(y+z)$,	$(b-a)\,(x-z)$	}81{
(73)	„	$b\,(y+z)$,	$\frac{b-a}{2}\,(x-y)$.	}79{

I due piani si taglino sotto angolo di 60.° Siano i piani $x=y$, $x=z$. Si hanno i tipi

(74)	$A \equiv (a, a, 0)$	$b\,x$,	$(a+b)\,z$	}48{
(75)	„	$b\,x$,	$(a+b)\,(y+z)$	}62{
(76)	„	$b\,x$,	$(a+b)\,(z-y)$	}61{
(77)	„	$b\,x$,	$-(a+b)\,(x+y)$	}66{
(78)	„	$b\,x$,	$(a+b)\,(y-x)$	}68{
(79)	„	$b\,x$,	$\frac{a+b}{2}\,(z-x)$	}73{
(80)	„	$b\,y$,	$a\,z$	}47{
(81)	„	$b\,y$,	$a\,(y+z)$	}81{
(82)	„	$b\,y$,	$a\,(z-y)$	}71{
(83)	„	$b\,y$,	$-a\,(x+y)$	}67{
(84)	„	$b\,y$,	$-a\,(x-y)$	}69{
(85)	„	$b\,y$,	$\frac{a}{2}\,(z-x)$	}60{
(86)	„	$b\,(y+z)$,	$(b-a)\,(y-z)$	}53{
(87)	„	$b\,(y+z)$,	$(b-a)\,(x+y)$	}91{
(88)	„	$b\,(y+z)$,	$(b-a)\,(x-y)$	}88{
(89)	„	$b\,(y+z)$,	$\frac{b-a}{2}\,(x-z)$	}89{
(90)	„	$b\,(y-z)$,	$(a+b)\,(y+z)$	}52{
(91)	„	$b\,(y-z)$,	$-(a+b)\,(x+y)$	}87{
(92)	„	$b\,(y-z)$,	$(a+b)\,(y-x)$	}92{
(93)	„	$b\,(y-z)$,	$-\frac{a+b}{2}\,(x-z)$	}93{

(94) $A \equiv (a\,,\, a\,0)$ $\quad b\,(x+z)\;,\quad -a\,(x+y)$ $\quad \}94\{$

(95) " $\quad b\,(x+z)\;,\quad a\,(x-y)$ $\quad \}95\{$

(96) " $\quad b\,(x+z)\;,\quad \frac{a}{2}\,(z-x)$ $\quad \}54\{$

(97) " $\quad b\,(x-z)\;,\quad (a+2\,b)\;(y-x)\,.$ $\quad \}97\{$

Le costanti intiere $a\,,\,b\,,\,c$, che figurano nelle espressioni antecedenti, devono naturalmente scegliersi in modo da avere dei veri contorni di rette e piani che soddisfino alle condizioni del problema.

Se il gruppo del cubo fosse stato ampliato con una simmetria rispetto ai piani medii del cubo, si sarebbero avuti casi particolari dei tipi antecedenti.

Ammettendo anche per questi contorni l'unicità della superficie minima corrispondente, non tutte queste superficie sono distinte. Se un contorno infatti possiede un piano od un asse di simmetria od ambedue, il contorno risulterà di due o più limitati da tre o quattro elementi (rette e piani); e la superficie minima sarà identica con quella corrispondente a questo contorno più semplice.

11. Il contorno sia formato di tre piani ed una retta. I tre piani non possono essere paralleli, poichè non racchiuderebbero uno spazio connesso.

Due piani del contorno siano paralleli: se la porzione elementare non deve avere settori infiniti, la retta deve appoggiarsi ai due piani paralleli.

I due piani paralleli siano i piani $y=0\,,\,y=a$; il terzo sia $x=0$: sia A il punto comune alla retta e al piano $y=0$. Si ha il tipo

(1) $A \equiv (b\,,\,0\,,\,0)$ $\quad a\,(y+z)\,.$ $\quad \}57\{$

Se il terzo piano è il piano $x=z$, si ha il tipo

(2) $A \equiv (0\,,\,0\,,\,c)$ $\quad a\,(y+z)\,.$ $\quad \}59\{$

Il terzo piano sia il piano $x=y$; si ha il tipo

(3) $A \equiv (b\,,\,0\,,\,0)$ $\quad a\,(y+z)\,.$ $\quad \}60\{$

I due piani paralleli siano i piani $x=y\,,\,x=y-a$: sia A il punto comune alla retta e al piano $x=y$. Il terzo piano sia il piano $z=0$. Si hanno i tipi

(4) $A \equiv (0\,,\,0\,,\,c)$ $\quad a\,y$ $\quad \}12\{$

(5) $A \equiv (0\,,\,0\,,\,c)$ $\quad a\,(y+z)\,.$ $\quad \}61\{$

Il terzo piano sia il piano $x+y=0$. Si ha il tipo

(6) $A \equiv (b\,,\,b\,,\,0)$ $\quad a\,(y+z)\,.$ $\quad \}63\{$

Il terzo piano sia il piano $x=0$. Si hanno i tipi

(7) $A \equiv (b\,,\,b\,,\,0)$ $\quad a\,(y+z)$ $\quad \}58\{$

(8) " $\quad -a\,(x+z)$ $\quad \}62\{$

Il terzo piano sia invece il piano $y=z$. Si hanno i tipi

(9) $A \equiv (b\,,\,b\,,\,c)$ $\quad a\,y$ $\quad \}13\{$

(10) " $\quad -a\,x$ $\quad \}14\{$

(11) " $\quad \frac{a}{2}\,(y-x)$ $\quad \}68\{$

(12) " $\quad a\,(y+z)$ $\quad \}66\{$

(13) " $\quad a\,(y-z)$ $\quad \}67\{$

(14) " $\quad -a\,(x+z)$ $\quad \}65\{$

(15) " $\quad a\,(z-x)\,.$ $\quad \}64\{$

I tre piani del contorno siano tutti tre paralleli ad una medesima retta; due di essi non siano paralleli.

I tre piani siano $x=0\,,\,y=0\,,\,x+y=a$. La retta deve appoggiarsi al piano $x+y=a$ e ad uno degli altri due, ad es. $y=0$.

Sia A il punto comune alla retta e al piano $y=0$. Si ha il tipo

(16) $\quad A \equiv (b\,,0\,,0) \qquad (a-b)\;(y+z)\,.$ }17{

I tre piani siano i piani $x=y\,,x+y=0\,;\,y=a$. La retta si appoggi ai due piani diagonali. Abbiamo i tipi

(17) $\quad A \equiv (b\,,b\,,0) \qquad -2\,b\,(y+z)$ }29{

(18) $\quad$ » $\qquad -2\,b\,(x+z)\,.$ }22{

La retta si appoggi ai piani $y=a$ e $x=y$. Si ha il tipo

(19) $\quad A \equiv (b\,,a\,,0) \qquad (b-a)\;(y+z)\,.$ }28{

I tre piani siano $x=y\,,x=z\,,y=z+a$. La retta si appoggi a due qualunque di essi, ad es. ai due $x=y\,,x=z$. Si hanno i tipi

(20) $\quad A \equiv (b\,,b\,,0) \qquad -b\,x$ }11{

(21) $\quad$ » $\qquad b\,(y-x)$ }53{

(22) $\quad$ » $\qquad b\,(y+z)$ }49{

(23) $\quad$ » $\qquad b\,(z-y)\,.$ }52{

I tre piani del contorno siano ortogonali e siano i piani $x=0$, $y=0\,,z=0$. Sia A il punto comune alla retta e al piano $y=0$. Si ha il tipo

(24) $\quad A \equiv (b\,,0\,,c) \qquad -c\,(y+z)\,.$ }15{

I tre piani ancora ortogonali siano i piani $x=y\,,x+y=0$, $z=0$. La retta si appoggi ai due piani diagonali. Si hanno i tipi

(25) $\quad A \equiv (b\,,b\,,c)\,, \qquad -2\,b\,x$ }5{

(26) $\quad$ » $\qquad -2\,b\,(x+z)\,.$ }27{

La retta si appoggi al piano $x=y$ e a $z=0$. Abbiamo il tipo

(27) $\quad A \equiv (b\,,b\,,c) \qquad -c\,(y+z)\,.$ }26{

Due soli piani del contorno siano ortogonali. Siano i piani $x=0\,,y=0$; il terzo piano sia il piano $y=z$. La retta si appoggi ai due piani $x=0\,,y=0$. Si ha il tipo

(28) $\quad A \equiv (b\,,0,\,c) \qquad -b\,(x+y)\,.$ }20{

La retta si appoggi ai due piani $y=0\,,y=z$. Si hanno i tipi

(29) $\quad A \equiv (b\,,0,\,c) \qquad c\,y$ }1{

(30) $\quad$ » $\qquad c\,(x+y)$ }21{

(31) $\quad$ » $\qquad \frac{c}{2}\,(y-z)\,.$ }18{

La retta si appoggi ai due piani $x=0\,,y=z$. Si hanno i tipi

(32) $\quad A \equiv (0\,,b\,,c) \qquad (c-b)\;(x+y)$ }19{

(33) $\quad$ » $\qquad (b-c)\;(x+z)\,.$ }16{

I due piani ortogonali siano i piani $x=y\,,x+y=0$. Il terzo piano sia $x=z$. La retta si appoggi ai due piani ortogonali. Abbiamo i tipi

(34) $\quad A \equiv (b\,,b\,,c) \qquad -2\,b\,x$ }8{

(35) $\quad$ » $\qquad -2\,b\,y$ }9{

(36) $\quad$ » $\qquad -2\,b\,(x+z)$ }47{

(37) $\quad$ » $\qquad -2\,b\,(x-z)$ }50{

(38) $\quad$ » $\qquad -2\,b\,(y+z)\,.$ }45{

La retta si appoggi ai due piani $x=y\,,x=z$. Si hanno i tipi

(39) $\quad A \equiv (b\,,b\,,c) \qquad (c-b)\,x$ }7{

(40) $\quad$ » $\qquad \frac{c-b}{2}\,(x-z)$ }51{

(41) $\quad$ » $\qquad (b-c)\;(y+z)$ }46{

(42) $\quad$ » $\qquad (c-b)\;(y-z)$ }44{

(43) $\quad$ » $\qquad (c-b)\;(x-y)\,.$ }56{

I due piani ortogonali siano i piani $y=0$, $x=z$. Il terzo piano sia il piano $y=z$. La retta si appoggi ai due piani ortogonali. Abbiamo i tipi

(44)	$A \equiv (b, 0, c)$	$(c-b)\ (x+y)$	$\{34\}$
(45)	"	$(c-b)\ (x-y)$	$\{31\}$
(46)	"	$(b-c)\ (y+z)$	$\{36\}$
(47)	"	$(c-b)\ (y-z)$.	$\{39\}$

La retta si appoggi ai due piani $y=0$, $y=z$. Si hanno i tipi

(48)	$A \equiv (b, 0, c)$,	$c\,y$	$\{2\}$
(49)	"	$c\,(x+y)$	$\{33\}$
(50)	"	$c\,(y-x)$	$\{30\}$
(51)	"	$\frac{c}{2}\,(y-z)$	$\{38\}$

La retta si appoggi ai due piani $x=z$, $y=z$. Si hanno i tipi

(52)	$A \equiv (b, c, b)$	$(c-b)\,z$	$\{6\}$
(53)	"	$(b-c)\ (x-z)$	$\{25\}$
(54)	"	$\frac{b-c}{2}\ (y-z)$	$\{40\}$
(55)	"	$(b-c)\ (x+y)$	$\{35\}$
(56)	"	$(c-b)\ (x-y)$.	$\{32\}$

Il contorno non abbia piani ortogonali. I tre piani siano $y=0$, $x=y$, $y=z$. La retta si appoggi ai due piani $x=y$, $y=z$. Abbiamo i tipi

(57)	$A \equiv (b, b, c)$	$(c-b)\,y$	$\{4\}$
(58)	"	$(b-c)\ (x-y)$	$\{43\}$
(59)	"	$(b-c)\ (x+z)$	$\{24\}$
(60)	" ,	$(c-b)\ (x-z)$.	$\{23\}$

La retta si appoggi ai piani $y=0$, $x=y$. Abbiamo i tipi

(61)	$A \equiv (b, 0, c)$,	$b\,y$	$\{3\}$
(62)	"	$\frac{b}{2}\,(y-x)$	$\{41\}$
(63)	"	$b\,(y+z)$	$\{37\}$
(64)	"	$b\,(y-z)$.	$\{42\}$

I tre piani siano i piani $x=y$, $x=z$, $y+z=0$. La retta si appoggi ai due piani $x=y$, $x=z$. Abbiamo i tipi

(65)	$A \equiv (b, b, c)$,	$(c-b)\,x$	$\{10\}$
(66)	"	$(b-c)\ (y+z)$	$\{54\}$
(67)	"	$(c-b)\ (y-z)$	$\{48\}$
(68)	"	$(c-b)\ (x-y)$.	$\{55\}$

Le costanti a, b, c, devono naturalmente scegliersi in modo che i contorni corrispondenti non presentino la solita eccezione.

12. Non tutti questi contorni daranno luogo a superficie minime distinte, quando anche per questi si ammetta l'unicità della superficie minima corrispondente.

Infatti, se uno dei contorni ammette un piano di simmetria, (il quale deve essere ortogonale alla retta e ad un piano e bisecare l'angolo diedro degli altri due) si deduce dalla riunione di due altri della stessa natura. Ora ciò non è possibile quando due piani del contorno siano paralleli o tutti tre paralleli ad una medesima retta [1]: per gli altri tipi invece il tipo (24) consta di due (31), il (25) di due (29), il (35) di due (47), il (60) di due

[1] Nel primo caso infatti il piano di simmetria dovrebbe essere parallelo ai due piani paralleli e quindi a meno delle dimensioni si avrebbero gli stessi tipi; nel secondo il piano di simmetria dovrebbe essere parallelo alla direzione comune ai tre piani e normale alla retta: questa dunque sarebbe in un piano normale ai tre piani del contorno, ciò che è escluso.

(53), il (67) di due (43). Se poi uno di questi contorni ha un asse di simmetria, esso si deduce dalla riunione di due contorni del caso antecedente.

È quasi superfluo avvertire che, se il gruppo fosse stato ampliato con una simmetria rispetto ai piani medii del cubo, non si sarebbero avuti tipi distinti.

13. È più interessante l'ultimo caso, in cui il contorno è formato di quattro piani. Se la porzione elementare da esso limitata non deve avere settori infiniti, dovremo limitarci a considerare quelle quaterne di piani di simmetria del cubo che formano un vero tetraedro. Infatti, se due piani del contorno sono paralleli o tre paralleli ad una medesima retta, la superficie minima corrispondente deve certamente avere dei settori infiniti, altrimenti la sua coniugata nell'applicabilità sarebbe limitata da un quadrilatero rettilineo chiuso, di cui due lati sarebbero paralleli o tre paralleli ad un medesimo piano; quindi il quadrilatero sarebbe piano.

Veniamo, posto ciò, alla costruzione effettiva di questi tetraedri. Mentre nei tre casi antecedenti avevamo un numero infinito di soluzioni, in questo ne avremo certamente un numero finito; sostituendo infatti ad un piano un piano parallelo, si ha un tetraedro simile al primitivo e che quindi non va considerato come distinto.

Tre delle faccie del tetraedro siano ortogonali; devono essere due piani diagonali ed una faccia del cubo: siano i piani $x=y$, $x+y=0$, $z=0$. Avremo un tetraedro limitato dai piani.

$$a) \quad x=y \;,\; x=-y \;,\; z=0 \;,\; y=z+1\,.$$

Due soli piani del contorno siano ortogonali. Si hanno i tre tetraedri

$$b) \quad x=0 \;,\; y=0 \;,\; x=z \;,\; y=z-2$$

$$c) \quad x=y \;,\; x=-y \;,\; x=z \;,\; x+z=2$$

$$d) \quad y=0 \;,\; x=z \;,\; y=z \;,\; x+y=1\,.$$

Non sono possibili altri casi; infatti poichè le sei faccie del cubo si distribuiscono in due terne di faccie ortogonali e i sei piani diagonali in 3 coppie di 2 piani ortogonali tra loro e a due faccie del cubo, almeno due piani del contorno devono essere ortogonali.

" *Vi sono dunque quattro tetraedri tali che il gruppo generato* " *dalle simmetrie rispetto alle loro faccie è un gruppo discontinuo del* " *tipo dell'ottaedro* "; ma è facile vedere che " *non vi sono altri tetraedri* " *che diano luogo ad un gruppo discontinuo* ". Infatti un tale tetraedro, che fosse diverso dagli antecedenti, dovrebbe dar luogo ad un gruppo del tipo del diedro, ciò che è impossibile, poichè i piani di simmetria di un tal gruppo sono tutti paralleli od ortogonali ad una medesima retta (1).

14. Ad un tetraedro corrispondono tre superficie minime, in generale distinte, le quali si ottengono facendo variare l'ordine, secondo cui la superficie deve incontrare le faccie del tetraedro; ciò che dà appunto tre possibilità. Risulta infatti dal teorema di Schwarz sull'unicità della superficie minima limitata da un quadrilatero gobbo un teorema affatto analogo per le superficie minime che incontrano ortogonalmente le faccie di un tetraedro in un ordine determinato; cioè " *non possono esistere due superficie mi-* " *nime distinte, che incontrino ortogonalmente nello stesso ordine le* " *faccie di uno stesso tetraedro* ". Infatti allora le loro coniugate nell'applicabilità sarebbero limitate da due quadrilateri simili e quindi sarebbero simili; ma dovrebbero addirittura coincidere, poichè altrimenti le loro coniugate, cioè le due superficie date, sarebbero limitate da due tetraedri non uguali, ma simili.

Se poi un tetraedro ammette un piano di simmetria, delle tre

(1) Di qui segue anche che i quattro tetraedri ora determinati sono gli unici che danno luogo ad una divisione regolare dello spazio in tanti tetraedri alternativamente simmetrici e congruenti. (Cfr. Schönflies. — *Ueber reguläre Gebietstheilungen des Raumes*. Nachr. von der Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1888, S. 223).

superficie minime relative a quel tetraedro due saranno identiche tra loro, l'altra ammetterà quel medesimo piano di simmetria, e precisamente quella che incontra le faccie del tetraedro in un ordine tale, che non viene alterato dalla simmetria considerata: potrà quindi essere generata dal tetraedro metà del dato, del quale però deve incontrare i lati in un ordine determinato (1). Analogamente se uno di questi tetraedri ammette un asse binario di simmetria, due delle tre superficie minime dovranno contenerlo, e precisamente quelle due che incontrano i due spigoli del tetraedro, a cui l'asse binario si appoggia (2); l'altra lo avrà come asse di simmetria.

Ciò posto, il tetraedro a) ha il piano di simmetria $x=0$: esso dà luogo a due superficie minime distinte che incontrano le faccie nell'ordine seguente:

(1) $z=0 \quad , \quad x+y=0 \quad , \quad y=z+1 \quad , \quad x=y \qquad \}4\{$

(2) $z=0 \quad , \quad x+y=0 \quad , \quad x=y \quad , \quad y=z+1\,. \qquad \}5\{$

Il tetraedro b) dà luogo alle tre superficie:

(3) $x=0 \quad , \quad y=0 \quad , \quad x=z \quad , \quad y=z-2 \qquad \}1\{$

(4) $x=0 \quad , \quad x=z \quad , \quad y=z-2 \quad , \quad y=0 \qquad \}2\{$

(5) $x=0 \quad , \quad y=z-2 \quad , \quad y=0 \quad , \quad x=z\,. \qquad \}3\{$

Il tetraedro c) ha il piano di simmetria $y=0$; dà luogo alle due superficie:

(1) Non deve quindi credérsi che tutte tre le superficie minime generate dal tetraedro metà di quello primitivo diano luogo ad altrettante superficie che incontrino quest'ultimo nel modo voluto; due di esse infatti incontreranno due volte una stessa faccia del tetraedro primitivo, le cui faccie limiterebbero quindi sulla superficie non un quadrilatero, ma un pentagono di geodetiche piane.

(2) Quest'asse deve infatti appoggiarsi a due spigoli opposti del tetraedro; poichè, se si appoggiasse a due faccie opposte, dovrebbe essere ortogonale ad ambedue, ciò che è assurdo.

(6) $x=y \quad , \quad x=z \quad , \quad x+z=2 \quad , \quad x+y=0 \qquad \}8\{$

(7) $x=y \quad , \quad x=z \quad , \quad x+y=0 \quad , \quad x+z=2\,. \qquad \}9\{$

Il tetraedro d) ha il piano di simmetria $x+z=1$; esso dà luogo alle due superficie:

(8) $y=0 \quad , \quad x=z \quad , \quad y=z \quad , \quad x+y=1 \qquad \}6\{$

(9) $y=0 \quad , \quad y=z \quad , \quad x=z \quad , \quad x+y=1 \qquad \}7\{$

15. La superficie (7) ammette due piani di simmetria ($y=0$, $z=1$), risulta dunque di quattro superficie (3), la (1) di due (3), la (9) di due (2); quindi

“ *Vi sono sei superficie minime periodiche sulle quali si può limitare un quadrilatero di archi geodetici piani* ”.

Le sei superficie minime ora trovate sono le coniugate nella applicabilità di quelle limitate da un quadrilatero gobbo, trovate dallo Schönflies. Infatti le coniugate nell'applicabilità delle sei superficie minime ora trovate sono limitate da quadrilateri rettilinei, i cui lati sono paralleli ai lati dei quadrilateri trovati dallo Schönflies: ogni quadrilatero è quindi simile ad uno di questi.

Allo stesso risultato si perviene altresì nel modo seguente: Le superficie minime coniugate nell'applicabilità di quelle ora trovate sono limitate da un quadrilatero, i cui lati sono dati da 4 delle espressioni (1) del n. 4, dove però non sappiamo più se i coefficienti $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ siano numeri intieri. Ma, esprimendo che il contorno è chiuso, si ottengono tre equazioni, le quali esprimono tre delle costanti in modo lineare ed intiero con coefficienti intieri per l'ultima, alla quale si può assegnare un valore arbitrario, il che fa variare solo la grandezza assoluta della superficie; dato quindi a questa costante un valore intiero, le altre risulteranno necessariamente intiere.

Possiamo osservare che le superficie (6) e (3) sono la superficie di Schwarz e la sua coniugata, la (4) la coniugata di quella di Neovius.

16. Chiudiamo questo capitolo colla osservazione seguente:

I contorni trovati si dispongono a due a due in una relazione notevolissima: ad un contorno di rette e piani ne corrisponde sempre un altro, i cui piani e le cui rette sono rispettivamente ortogonali alle rette e ai piani del primo. Questa relazione, che è stata messa in evidenza, scrivendo a destra di ciascun tipo il numero del tipo corrispondente, era, almeno nel nostro caso, prevedibile *a priori:* osservando infatti che i piani di simmetria del cubo sono rispettivamente ortogonali ai lati e alle diagonali delle faccie, segue immediatamente che " *dato un contorno di Schwarz che dia* " *luogo ad un gruppo discontinuo del tipo dell'ottaedro, vi è sem-* " *pre uno, o più contorni formati di rette e piani ortogonali ai piani* " *e alle rette del contorno dato, i quali danno pure luogo ad un gruppo* " *discontinuo del tipo dell'ottaedro* " [1].

Ora ad una superficie minima qualunque è coordinata la sua coniugata nell'applicabilità, che le corrisponde per parallelismo di normali ed ortogonalità di elementi; e se sulla superficie primitiva si ha un poligono limitato da geodetiche piane e rettilinee, sulla coniugata si può limitare un poligono analogo, in guisa che i piani e le rette di questo sono ordinatamente ortogonali alle rette ed ai piani del primo. L'immagine sferica delle porzioni elementari limitate dai due poligoni è identica per le due superficie. Ora è interessante vedere alcune delle relazioni che passano tra il gruppo delle operazioni che riportano in sè medesima una data superficie minima, e il gruppo delle operazioni relative alla immagine sferica, gruppo che per semplicità chiameremo gruppo *sferico* della superficie. I due gruppi sono isomorfi: alle traslazioni dell'uno corrisponde sulla sfera l'identità; alle simmetrie ed ai ribaltamenti della superficie le simmetrie della sfera rispetto ad un suo cerchio massimo, il cui piano è ortogonale all'asse del

(1) L'osservazione ora fatta poteva servire anche a dedurre da un tipo il tipo reciproco; ma ho preferito la ricerca diretta, che mette in chiara luce il metodo così semplice dovuto allo Schönflies.

ribaltamento o parallelo al piano di simmetria. Quindi ai movimenti della superficie in sè medesima, che risultano dalla composizione di un numero pari di ribaltamenti e di simmetrie corrispondono sulla sfera delle rotazioni con ampiezza uguale alle rotazioni dei movimenti considerati; agli altri movimenti operazioni di seconda specie.

Segue di qui che anche i gruppi di due superficie minime coniugate nell'applicabilità sono isomorfi, avendo essi il medesimo gruppo sferico; il che del resto si vede anche direttamente, facendo corrispondere alle operazioni elementari del gruppo dell'una superficie le operazioni elementari rispetto agli elementi (piani o rette) corrispondenti dell'altra. Due tali superficie hanno quindi la medesima simmetria; i loro gruppi appartengono cioè allo stesso tipo. Allo stesso risultato si perviene altresì osservando, che, come risulta dalle formule del Weierstrass [1], quando una superficie minima è data in grandezza e posizione, la sua coniugata nell'applicabilità è determinata a meno di una traslazione o di una simmetria o di ambedue le operazioni insieme; quindi qualunque operazione che riporti in sè medesima una delle due superficie, non può avere sull'altra altro effetto che una delle operazioni dianzi accennate; ciò fa nuovamente vedere quanto sia intima la relazione che lega i gruppi delle due superficie.

Da ciò che precede viene naturale il pensiero se si possa dimostrare che " *se una superficie minima è periodica, anche la sua coniugata lo è* " Questo teorema è forse vero, almeno in casi generalissimi; quasi tutte le superficie minime conosciute vi soddisfano; ma probabilmente non è possibile dimostrarlo con sole considerazioni dovute alla teoria dei gruppi di movimenti, partendo dalla relazione di ortogonalità, che lega due contorni corrispondenti delle due superficie. Ci sfuggono infatti in tal modo le relazioni metriche tra i due contorni, mentre da queste proprietà

(1) Cf. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*. Pisa, Spoërri 1894. Cap XIV, XV.

metriche dipende essenzialmente l' essere un gruppo di movimenti propriamente od impropriamente discontinuo. Invero si dimostra subito che i due gruppi sono isomorfi, corrispondendosi i due sottogruppi delle traslazioni; ma, almeno a me, non è riuscito dalla discontinuità di uno di questi sottogruppi dedurre la discontinuità dell' altro (¹).

(¹) Si può ancora osservare che, ove il teorema fosse dimostrato, si verrebbe in certo modo a rettificare le geodetiche piane della superficie, o, per lo meno, la loro rettificazione si ridurrebbe a quella di una tra esse: infatti i rapporti degli archi di due tali geodetiche sono uguali ai rapporti dei segmenti rettilinei corrispondenti della coniugata nell'applicabilità: e questi rapporti si avrebbero molto facilmente nel caso che anche la coniugata fosse periodica; molto probabilmente dunque la dimostrazione del teorema, se è vero, si otterrà analiticamente.

Cf. anche la nota in fondo.

CAPITOLO SECONDO

17. Determinati nel capitolo antecedente tutti i contorni di Schwarz di quattro elementi, che danno luogo ad un gruppo discontinuo del tipo dell' ottaedro, mi propongo ora di costruire i gruppi relativi ad alcuni tra i più noti ed interessanti dei tipi trovati. È chiaro *a priori* che uno qualunque di questi gruppi, è isomorfo al gruppo dell' ottaedro o ad uno dei suoi sottogruppi: questo isomorfismo sarà reso manifesto dall'applicazione del noto teorema del Dick sui gruppi di operazioni (¹).

Nella costruzione del gruppo relativo ad un dato contorno procederemo uniformemente col metodo seguente:

Situato il contorno in posizione opportuna, costruiremo le espressioni analitiche dei ribaltamenti attorno alle rette e delle riflessioni rispetto ai piani del contorno, e delle operazioni che riportano il contorno in sè stesso; determineremo quindi il gruppo dei movimenti, che amplieremo poi colle simmetrie, quando esistano. Per la determinazione del gruppo dei movimenti cercheremo di trovare il sottogruppo delle traslazioni; quindi, poichè il gruppo delle traslazioni è eccezionale nel gruppo totale, distribuiremo le operazioni del gruppo in tante classi, ponendo in una medesima classe due movimenti che si deducano l' uno dall' altro per una traslazione del gruppo, o, come diremo, due movimenti *equivalenti* rispetto al gruppo delle traslazioni. Otterremo in questo modo un numero finito di classi: non può infatti esistere un gruppo discontinuo di movimenti, in cui il gruppo delle traslazioni sia di indice infinito, come risulta subito dall' osservare che un gruppo discon-

(¹) W. Dick. *Gruppentheoretische studien* (Mathematische Annalen, Bd. 20); Klein-Fricke. *Elliptischen Modulfunctionen* (Teubner, Leipzig. Bd. I, S. 455).

tinuo è isomorfo al suo gruppo ausiliario e all'identità di questo corrispondono le traslazioni del gruppo (¹). Queste classi formano evidentemente un gruppo oloedricamente isomorfo al gruppo dell'ottaedro o ad un suo sottogruppo.

Notiamo ancora che dalla definizione di movimenti equivalenti segue che due movimenti equivalenti ad un terzo sono equivalenti tra loro; e, poichè il gruppo delle traslazioni è eccezionale nel gruppo totale, il prodotto di due movimenti è equivalente al prodotto di due loro equivalenti nello stesso ordine.

Osserviamo ancora che determinato un gruppo Γ di traslazioni, eccezionale nel gruppo totale G dei movimenti, non occorrerà dimostrare che esso è il gruppo totale delle traslazioni di G per poter dividere i movimenti di questo in classi equivalenti rispetto a Γ: solo, se si otterranno un numero infinito di classi, vi è certamente almeno una traslazione di G non contenuta in Γ: se invece si avrà un numero finito di classi, basterà aggiungere a Γ quelle traslazioni di G che compariscono nelle classi trovate per avere il gruppo totale delle traslazioni. Anzi talvolta può essere opportuno non considerare il gruppo totale delle traslazioni di G, ma solo un suo sottogruppo, specialmente quando si voglia vedere il modo di diffondersi della superficie nello spazio. Può accadere infatti che il parallelepipedo fondamentale del gruppo totale delle traslazioni non sia tale da lasciar vedere agevolmente come nel suo interno si disponga la superficie, mentre questo può riuscire molto più facile, considerando il parallelepipedo fondamentale di un sottogruppo: questa osservazione può essere utile quando si voglia realizzare fisicamente la figura che risulta di tutti i contorni elementari che cadono nel parallelepipedo fondamentale delle traslazioni.

(¹) A. Schönflies. *Ueber Gruppen von Bevegungen* (Mat. Ann. Bd. 29. S. 51). Veramente fa eccezione il solito caso speciale, osservato dallo Schönflies, ma questo gruppo non ha traslazioni.

18. Alla costruzione dei singoli gruppi premettiamo il seguente teorema generale:

" *Dato un contorno di Schwarz tale che non esista un piano che passi per le rette e sia ortogonale ai piani del contorno e che dia luogo ad una superficie minima periodica, la cui porzione elementare non abbia settori infiniti; il gruppo delle traslazioni della superficie è a tre dimensioni* ".

Il gruppo della superficie deve infatti appartenere ad uno dei quattro tipi: ciclico, diedrico, tetraedrico, ottaedrico; poichè il caso speciale notato dallo Schönflies, che non rientra in questi, dà luogo ad una superficie minima, la cui porzione elementare ha certamente settori infiniti (¹). Di più, se il gruppo non è uno di quelli che riportano in sè medesimo un poliedro regolare, nel qual caso la superficie minima corrispondente o non esiste o ha certamente settori infiniti (²), non tutte le rette ed i piani del contorno passeranno per un medesimo punto e quindi, poichè la superficie è periodica, nel gruppo sarà contenuta almeno una traslazione. Allora, se il gruppo appartiene al tipo tetraedico od ottaedrico, vi è certamente nel gruppo una operazione a periodo tre (³), il cui asse non ha la direzione della traslazione e che quindi la trasforma in due altre che non sono con essa in un medesimo piano; in questo caso quindi il teorema è dimostrato.

Rimane dunque a parlare dei gruppi del tipo ciclico e diedrico. Il primo tipo si esclude subito, poichè tutti gli assi del gruppo sono paralleli, i piani di simmetria o paralleli ad essi o tutti ortogonali ad essi e non è quindi possibile con tali elementi for-

(¹) Cf. la nota in fondo.

(²) La porzione elementare di superficie è infatti in tal caso limitata da tre piani di simmetria del poliedro; essa dunque, se esiste, ha certamente settori infiniti, altrimenti la sua coniugata nell'applicabilità sarebbe limitata da un triangolo rettilineo chiuso, sarebbe quindi un piano.

(³) Diciamo che una operazione è a periodo n, quando la sua potenza n^{ma} è l'identità, o una traslazione del gruppo.

mare un contorno che soddisfi alle condizioni del teorema. Resta dunque a discutere il tipo diedrico.

Allora, se il gruppo delle traslazioni è lineare, la traslazione deve aver la direzione dell'asse principale, (se il gruppo è un *Vierergruppe*, di uno qualunque dei tre) tutti i piani devono essere ortogonali all'asse principale o passare per esso, tutte le rette devono incontrare ortogonalmente l'asse o coincidere con esso. Non è possibile con questi elementi formare un contorno che soddisfi alle condizioni del teorema. L'unico caso da discutere infatti è quello in cui il contorno sia formato di due piani paralleli e due ortogonali ad essi; ma si è già visto (n.° 13) che la superficie minima corrispondente ha settori infiniti.

Se poi il gruppo delle traslazioni è a due dimensioni, il suo piano deve essere ortogonale alla direzione dell'asse principale, tutte le rette devono essere contenute in questo piano o normali ad esso, tutti i piani devono essergli ortogonali o coincidere con esso. Ancora con questi elementi è impossibile formare dei contorni che soddisfino alle condizioni del teorema. Infatti, se il contorno è chiuso, esso può avere una delle tre forme seguenti:

1.° n piani paralleli all'asse principale. V'è un piano che li taglia ortogonalmente.

2.° i piani del contorno sono paralleli all'asse principale, le rette normali ad esso: vi è ancora un piano che contiene le rette e taglia ortogonalmente il piano del contorno.

3.° n piani paralleli all'asse principale, uno ortogonale. La superficie minima corrispondente ha certamente dei settori infiniti: infatti, ove così non fosse, la sua coniugata nell'applicabilità sarebbe limitata da un poligono chiuso di $n+1$ rette, di cui n in un medesimo piano; sarebbe dunque un piano.

Il teorema è quindi completamente dimostrato.

19. Veniamo, posto ciò, alla costruzione dei gruppi.

Cominciamo dal costruire i gruppi relativi alle sei superficie

minime sulle quali si può limitare un quadrilatero gobbo. (Cfr. i n.i 4 e 5).

Il quadrilatero (1) dà luogo alla superficie di Schwarz; prendendo il lato del cubo uguale ad 1, esso può essere orientato in modo che i suoi lati abbiano per equazioni:

$$1)\ y=0\ ,\ z=0\ ;\ 2)\ x=1\ ,\ z=0\ ;\ 3)\ y=1\ ,\ x+z=1\ ;\ 4)\ x=0\ ,\ y=z$$

Le espressioni analitiche dei ribaltamenti corrispondenti sono:

$$\mathrm{S}_1)\ x, -y, -z\ (^1)\ ;\ \mathrm{S}_2)\ 2-x, y, -z\ ;\ \mathrm{S}_3)\ 1-z, 2-y, 1-x\ ;\ \mathrm{S}_4)\ -x, z, y$$

Di più il contorno è simmetrico rispetto al piano $x+y=1$; la simmetria corrispondente è

$$\Sigma)\ 1-y\ ,\ 1-x\ ,\ z\ .$$

Poniamo (²) $\mathrm{H}=\mathrm{S}_3\,\mathrm{S}_1)\ \ 1+z\ ,\ y+2\ ,\ 1-x$

Avremo le traslazioni

$$\mathrm{T}_1=\mathrm{S}_2\,\mathrm{H}^2)\ x, y+4, z\ ;\ \mathrm{T}_2=\mathrm{S}_4\,\mathrm{T}_1\,\mathrm{S}_4)\ x, y, z+4\ ;\ \mathrm{T}_3=\mathrm{S}_3\,\mathrm{T}_2\,\mathrm{S}_3)\ x+4, y, z;$$

e quindi la traslazione generale

$$\mathrm{T})\ x+4m\ ,\ y+4n\ ,\ z+4p$$

dove m, n, p sono numeri intieri qualunque.

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale nel gruppo G, poichè è permutabile colle operazioni fondamentali $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3, \mathrm{S}_4$. Il gruppo Γ è evidentemente discontinuo: il suo parallelepipedo fondamentale è il cubo di lato 4.

Poichè, indicando col simbolo $\equiv$ l'equivalenza rispetto al gruppo Γ delle traslazioni, $\mathrm{H}^4\equiv 1$, $(\mathrm{S}_4\,\mathrm{H})^3\equiv 1$, dal teorema del Dick

---

(¹) Con A) x', y', z' indichiamo che l'operazione A porta x in x', y in y', z in z'.

(²) Con A B indichiamo l'operazione che si ottiene eseguendo prima B, poi A.

risulta che il gruppo di Schwarz è isomorfo al gruppo del cubo. I movimenti di G si distribuiscono nelle 24 classi non equivalenti rispetto a Γ (1):

1) x, y, z ;	$S_4) -x, z, y$;
$H) 1+z, y+2, 1-x$;	$S_4H) -(z+1), 1-x, y+2$,
$H^2) 2-x, y, -z$;	$S_4H^2) x+2, -z, y$;
$H^3) 1-z, y+2, x-1$;	$S_4H^3) z-1, x-1, y+2$;
$HS_4) 1+y, z+2, 1+x$;	$H^2S_4) x+2, z, -y$;
$HS_4H) y-1, -(x+1), z+2$;	$H^2S_4H) z-1, 1-x, 2-y$;
$HS_4H^2) 1+y, 2-z, -(x+1)$;	$H^2S_4H^2) -x, -z, -y$;
$HS_4H^3) y-1, x+1, 2-z$;	$H^2S_4H^3) -(z+1), x-1, 2-y$;
$H^3S_4) 1-y, z+2, -(x+1)$;	$S_4H^2S_4) 2-x, -y, z$;
$H^3S_4H) -(y+1), -(x+1), 2-z$;	$S_4H^2S_4H) 1-z, 2-y, 1-x$;
$H^3S_4H^2) 1-y, 2-z, x+1$;	$S_4H^2S_4H^2) x, -y, -z$;
$H^3S_4H^3) -(y+1), x+1, z-2$;	$S_4H^2S H^3) z+1, 2-y, x-1$.

Queste 24 classi formano un gruppo, che, a causa delle equivalenze:

$$S_1 \equiv S_4 H^2 S_4 H^2 \quad , \quad S_2 \equiv H^2 \quad , \quad S_3 \equiv S_4 H^2 S_4 H \, ,$$

coincide col gruppo G di Schwarz. Il gruppo Γ ne è il gruppo totale delle traslazioni ed è in G di indice 24: quindi, poichè nessuna delle operazioni antecedenti lascia fermo il contorno, nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano 24 ripetizioni della porzione elementare della superficie minima di Schwarz.

Le operazioni di seconda specie del gruppo di Schwarz si ottengono dalle antecedenti, moltiplicandole per la simmetria Σ. Si hanno così le altre 24 classi:

(1) Ad una operazione se ne può sempre sostituire una equivalente.

$\Sigma) 1-y, 1-x, z$;	$\Sigma S_4) 1-z, 1+x, y$;
$\Sigma H) -(y+1), -z, 1-x$;	$\Sigma S_4 H) x, z+2, y+2$;
$\Sigma H^2) 1-y, x-1, -z$;	$\Sigma S_4 H^2) 1+z, -(x+1), y$;
$\Sigma H^3) -(y+1), z, x-1$;	$\Sigma S_4 H^3) 2-x, 2-z, y+2$;
$\Sigma H S_4) -(z+1), -y, 1+x$;	$\Sigma H^2 S_4) 1-z, -(x+1), -y$
$\Sigma H S_4 H) x+2, 2-y, z+2$;	$\Sigma H^2 S_4 H) x, 2-z, 2-y$;
$\Sigma H S_4 H^2) z-1, -y, -(x+1)$;	$\Sigma H^2 S_4 H^2) 1+z, 1+x, -y$;
$\Sigma H S_4 H^3) -x, 2-y, 2-z$;	$\Sigma H^2 S_4 H^3) 2-x, z+2, 2-y$;
$\Sigma H^3 S_4) -(z+1), y, -(x+1)$;	$\Sigma S_4 H^2 S_4), y+1, x-1, z$;
$\Sigma H^3 S_4 H) x+2, y+2, 2-z$;	$\Sigma_4 S_4 H^2 S_4 H) y-1, z, 1-x$;
$\Sigma H^3 S_4 H^2) z-1, y, x+1$;	$\Sigma S_4 H^2 S_4 H^2) 1+y, 1-x, -z$;
$\Sigma H^3 S_4 H^3) -x, y+2, z-2$;	$\Sigma S_4 H^2 S_4 H^3) y-1, -z, x-1$ (1).

20. Il quadrilatero (2) dà la superficie del Neovius. Esso può essere orientato in modo che i suoi lati abbiano per equazioni:

1) $y=0, z=0$; 2) $x=0, z=0$; 3) $x=0, y+z=1$; 4) $y=0, x+z=1$

I ribaltamenti corrispondenti sono:

$S_1) x, -y, -z$; $S_2) -x, y, -z$; $S_3) -x, 1-z, 1-y$; $S_4) 1-z, -y, 1-x$.

Il contorno è di più lasciato fermo dalla simmetria rispetto al piano $x=y$

$$\Sigma) \; y \; , \; x \; , \; z \, .$$

Poniamo

$$H = S_1 S_4) \; 1-z \, , \, y \, , \, x-1 \, ;$$

avremo le traslazioni:

$T_1 = H^2S_2) x+2, y, z$; $T_2 = S_4 T_1^{-1} S_4) x, y, z+2$; $T_3 = S_3 T_2^{-1} S_3) x, y+2, z$;

(1) Cf. Bianchi. *Lezioni di Geometria differenziale.* (Enrico Spoerri-Pisa, 1894, pag. 383).

e quindi la traslazione generale

$$\mathrm{T})\ x+2m\ ,\ y+2n\ ,\ z+2p\ ,$$

essendo m , n , p numeri intieri qualunque.

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale in G: il suo parallelepipedo fondamentale è il cubo di lato 2. L'isomorfismo di G col gruppo dell'ottaedro è dato da $\mathrm{H}^4 \equiv 1$, $(\mathrm{H\,S_3})^3 \equiv 1$. I movimenti di G si distribuiscono nelle 24 classi non equivalenti rispetto a Γ:

1) x, y, z ;	$\mathrm{S_3}$) $-x, 1-z, 1-y$;
H) $1-z, y, x+1$;	$\mathrm{S_3\,H}$) $z-1, -x, 1-y$;
$\mathrm{H_2}$) $-x, y, -z$;	$\mathrm{S_3\,H^2}$) $x, 1+z, 1-y$;
$\mathrm{H^3}$) $1+z, y, 1-x$;	$\mathrm{S_3\,H^3}$) $-(z+1), x, 1-y$;
$\mathrm{H\,S_3}$) $y, 1-z, 1-x$;	$\mathrm{H^2\,S_3}$) $x, 1-z, y-1$;
$\mathrm{H\,S_3\,H}$) $y, -x, z$;	$\mathrm{H^2\,S_3\,H}$) $1-z, -x, y-1$.
$\mathrm{H\,S_3\,H^2}$) $y, z+1, x+1$;	$\mathrm{H^2\,S_3\,H^2}$) $-x, z+1, y-1$;
$\mathrm{H\,S_3\,H^3}$) $y, x, -z$;	$\mathrm{H^2\,S^3\,H^3}$) $1+z, x, y-1$;
$\mathrm{H^3\,S_3}$) $-y, 1-z, x+1$;	$\mathrm{S_3\,H^2\,S_3}$) $-x, -y, z$;
$\mathrm{H^3\,S_3\,H}$) $-y, -x, -z$;	$\mathrm{S_3\,H^2\,S_3\,H}$) $z-1, -y, x-1$:
$\mathrm{H^3\,S_3\,H^2}$) $-y, z+1, 1-x$;	$\mathrm{S_3\,H^2\,S_3\,H^2}$) $x, -y, -z$;
$\mathrm{H^3\,S_3\,H^3}$) $-y, x, z$;	$\mathrm{S_3\,H^2\,S_3\,H^3}$) $1-z, -y, 1-x$.

Queste 24 classi esauriscono il gruppo G di Neovius. Infatti

$$\mathrm{S_1 \equiv S_3\,H^2\,S_3\,H^2} \quad ; \quad \mathrm{S_2 \equiv H^2} \quad ; \quad \mathrm{S_4 \equiv S_3\,H^2\,S^3\,H^3}$$

Ne segue che Γ è il gruppo totale delle traslazioni di G, che lo contiene come sottogruppo di indice 24. Poichè nessuna delle operazioni antecedenti lascia fermo il contorno elementare, nel cubo di lato 2 entrano 24 ripetizioni della porzione elementare della superficie del Neovius. Per avere le operazioni di seconda

specie, basta moltiplicare le antecedenti a sinistra per Σ, scambiare cioè la prima e la seconda coordinata.

21. Il quadrilatero (3) si può orientare in modo che i suoi lati abbiano per equazioni:

1) $y=0$, $z=0$; 2) $x=1$, $y=z$; 3) $x=1$, $z=1$; 4) $y=0$, $x=z$.

I ribaltamenti corrispondenti sono:

$\mathrm{S_1}$) $x, -y, -z$; $\mathrm{S_2}$) $2-x, z, y$; $\mathrm{S_3}$) $2-x, y, 2-z$; $\mathrm{S_4}$) $z, -y, x$.

Il quadrilatero ha l'asse binario di simmetria $x+y=1$, $z=\frac{1}{2}$; il ribaltamento corrispondente è

$$\mathrm{S_5})\ 1-y\ ,\ 1-x\ ,\ 1-z.$$

Le operazioni fondamentali del gruppo sono $\mathrm{S_1}$, $\mathrm{S_2}$, $\mathrm{S_5}$. Infatti

$$\mathrm{S_3 = S_5\,S_1\,S_5} \quad ; \quad \mathrm{S_4 = S_5\,S_2\,S_5}.$$

Poniamo

$$\mathrm{H = S_1\,S_4})\ z\ ,\ y\ ,\ -x\ ;$$

avremo le traslazioni:

$\mathrm{T_1 = S_5\,H^3\,S_2\,H}$) $x+1, y+1, z-1$; $\mathrm{T_2 = S_1\,T_1\,S_1}$) $x+1, y-1, z+1$;
$\mathrm{T_3 = T_1\,T_2}$) $x+2, y, z$; $\mathrm{T_4 = S_4\,T_3\,S_4}$) $x, y, z+2$; $\mathrm{T_5 = S_2\,T_4\,S_2}$) $x, y+2, z$;

e quindi la traslazione generale

$$\mathrm{T})\ x+m\ ,\ y+n\ ,\ z+p\ ,\ m \equiv n \equiv p \pmod 2).$$

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale nel gruppo G. Il suo parallelepipedo fondamentale ha per base il quadrato di lato 2, per terzo spigolo la diagonale del cubo di lato 1. L'isomorfismo del gruppo G col gruppo dell'ottaedro è dato da $\mathrm{H}^4 = 1$, $(\mathrm{S_2\,H})^3 \equiv 1$. I movimenti di G si distribuiscono rispetto a Γ nelle 24 classi:

$1)\ x,\ y,\ z\,;$	$S_2)\ -x,\ z,\ y\,;$
$H)\ z,\ y,\ -x\,;$	$S_2H)\ -z,\ -x,\ y\,;$
$H)\ -x,\ y,\ -z\,;$	$S_2H^2)\ x,\ -z,\ y\,;$
$H^3)\ -z,\ y,\ x\,;$	$S_2H^3)\ z,\ x,\ y\,;$
$HS_2)\ y,\ z,\ x\,;$	$H^2S_2)\ x,\ z,\ -y\,;$
$HS_2H)\ y,\ -x,\ z\,;$	$H^2S_2H)\ z,\ -x,\ -y\,;$
$HS_2H^2)\ y,\ -z,\ -x\,;$	$H^2S_2H^2)\ -x,\ -z,\ -y\,;$
$HS_2H^3)\ y,\ x,\ -z\,;$	$H^2S_2H^3)\ -z,\ x,\ -y\,;$
$H^3S_2)\ -y,\ z,\ -x\,;$	$S_2H^2S_2)\ -x,\ -y,\ z\,;$
$H^3S_2H)\ -y,\ -x,\ -z\,;$	$S_2H^2S_2H)\ -z,\ -y,\ -x\,;$
$H^3S_2H^2)\ -y,\ -z,\ x\,;$	$S_2H^2S_2H^2)\ x,\ -y,\ -z\,;$
$H^3S_2H^3)\ -y,\ x,\ z\,;$	$S_2H^2S_2H^3)\ z,\ -y,\ x\,;$

E' in tal modo esaurito il gruppo G: infatti

$$S_1 \equiv S_2 H^2 S_2 H^2 \quad , \quad S_5 \equiv H^3 S_2 H\,;$$

Γ è quindi il gruppo totale delle traslazioni di G. Poichè la S_5 lascia fermo il contorno elementare, nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano soltanto 12 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

22. Il quadrilatero (5) si può orientare in modo che i suoi lati abbiano per equazioni:

1) $y=0\,,\ z=0$; 2) $y=0\,,\ x=z$ 3) $x=1\,,\ y+z=1$ 4) $x=1\,,\ y=z$.

I ribaltamenti corrispondenti sono:

$S_1)\ x, -y, -z$; $S_2)\ z, -y, x$; $S_3)\ 2-x, 1-z, 1-y$; $S_4)\ 2-x, z, y$.

Il quadrilatero non ha nè piani, nè assi di simmetria.

Poniamo

$$H = S_1 S_2)\ z\ ,\ y\ ,\ -x\,;$$

avremo le traslazioni:

$$T_1 = S_3 S_4 S_1)\ x\ ,\ y+1\ ,\ z+1 \quad ; \quad T_2 = H T_1 H^{-1})\ x+1, y+1, z \quad ;$$

$$T_3 = S_3 T_2^{-1} S_3)\ x+1, y, z+1\,;$$

e quindi la traslazione generale:

$$T)\ x+m\ ,\ y+n\ ,\ z+p\ ;\ m+n+p \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)\,.$$

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale nel gruppo G: il suo parallelepipedo fondamentale ha come spigoli le diagonali di tre faccie del cubo di lato 1, che concorrono in un medesimo vertice. L'isomorfismo di G col gruppo dell'ottaedro è dato da $H^4 = 1$, $(S_4 H)^3 \equiv 1$. I movimenti di G si distribuiscono rispetto a Γ nelle 24 classi:

$1)\ x,\ y,\ z\,;$	$S_4)\ -x,\ z,\ y\,;$
$H)\ z,\ y,\ -x\,;$	$S_4H)\ -z,\ -x,\ y\,;$
$H^2)\ -x,\ y,\ -z\,;$	$S_4H^2)\ x,\ -z,\ y\,;$
$H^3)\ -z,\ y,\ x\,;$	$S_4H^3)\ z,\ x,\ y\,;$
$HS_4)\ y,\ z,\ x\,;$	$H^2S_4)\ x,\ z,\ -y\,;$
$HS_4H)\ y,\ -x,\ z\,;$	$H^2S_4H)\ z,\ -x,\ -y\,;$
$HS_4H^2)\ y,\ -z,\ -x\,;$	$H^2S_4H^2)\ -x,\ -z,\ -y\,;$
$HS_4H^3)\ y,\ x,\ -z\,;$	$H^2S_4H^3)\ -z,\ x\ -y\,;$
$H^3S_4)\ -y,\ z,\ -x\,;$	$S_4H^2S_4)\ -x,\ -y,\ z\,;$
$H^3S_4H)\ -y,\ -x,\ -z\,;$	$S_4H^2S_4H)\ -z,\ -y,\ -x\,;$
$H^3S_4H^2)\ -y,\ -z,\ x\,;$	$S_4H^2S_4H^2)\ x,\ -y,\ -z\,;$
$H^3S_4H^3)\ -y,\ x,\ z\,;$	$S_4H^2S_4H^3)\ z,\ -y,\ x\,.$

Queste 24 classi esauriscono il gruppo G: infatti

$$S_1 \equiv S_4 H^2 S_4 H^2 \quad ; \quad S_2 \equiv S_4 H^2 S_4 H^3 \quad ; \quad S_3 \equiv H^2 S_4 H^2\,;$$

Γ è quindi il gruppo totale delle traslazioni di G. Poichè nessuna delle operazioni antecedenti lascia fermo il contorno elementare, nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano 24 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

23. Il quadrilatero (6) si può orientare in modo che i suoi lati abbiano per equazioni:

1) $y=0\ ,\ z=0$ 2) $x=2\ ,\ y=z$; 3) $y=1\ ,\ x=z+1$; 4) $z=0\ ,\ x=y$

I ribaltamenti corrispondenti sono:

$S_1)\ x, -y, -z\ ;\ S_2)\ 4-x, z, y\ ;\ S_3)\ z+1,\ 2-y, x-1\ ;\ S_4)\ y, x, -z\,.$

Poniamo

$$H = S_1 S_4)\ y\ ,\ -x\ ,\ z\ ;$$

avremo le traslazioni:

$$T_0 = (S_3 S_4 S_1 S_4)^2)\ x+2\ , y, z-2 \quad ; \quad T_1 = S_1 T_0 S_1)\ x+2\ , y, z+2\ ;$$
$$T_2 = H\, T_0^{-1} H^{-1})\ x, y+2, z+2 \quad ; \quad T_3 = S_2 T_0^{-1} S_2)\ x+2, y+2, z\ ;$$
$$T_4 = T_1^2 T_2^{-1} T_3^{-2} S_3 H S_2 H^{-1})\, x+1, y, z+1\ ; T_5 = S_1 T_4^{-1} S_1)\ x-1, y, z+1\ ;$$
$$T_6 = H\, T_5 H^{-1})\ x, y+1,\ z+1 \quad ; \quad T_7 = S_2 T_5 S_2)\ x+1, y+1, z\ ;$$

e quindi la traslazione generale:

$$T)\ x+m\ ,\ y+n\ ,\ z+p\ ;\ m+n+p \equiv 0 \pmod 2)\,.$$

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale nel gruppo G: il suo parallelepipedo fondamentale è lo stesso del caso antecedente. L'isomorfismo di G col gruppo dell'ottaedro è dato da $H^4 = 1$, $(S_2 H)^3 \equiv 1$. I movimenti di G si distribuiscono rispetto a Γ nelle 24 classi:

$1)\ x, y, z\ ;$	$S_2)\ -x, z, y\ ;$
$H)\ y, -x, z\ ;$	$S_2 H)\ -y, z, -x\ ;$
$H^2)\ -x, -y, z\ ;$	$S_2 H^2)\ x, z, -y\ ;$
$H^3)\ -y, x, z\ ;$	$S_2 H^3)\ y, z, x\ ;$
$H S_2)\ z, x, y\ ;$	$H^2 S_2)\ x, -z, y\ ;$
$H S_2 H)\ z, y, -x\ ;$	$H^2 S_2 H)\ y, -z, -x\ ;$
$H S_2 H^2)\ z, -x, -y\ ;$	$H^2 S_2 H^2)\ -x, -z, -y\ ;$
$H S_2 H^3)\ z, -y, x\ ;$	$H^2 S_2 H^3)\ -y, -z, x\ ;$
$H^3 S_2)\ -z, -x, y\ ;$	$S_2 H^2 S_2)\ -x, y, -z\ ;$
$H^3 S_2 H)\ -z, -y, -x\ ;$	$S_2 H^2 S_2 H)\ -y, -x, -z\ ;$
$H^3 S_2 H^2)\ -z, x, -y\ ;$	$S_2 H^2 S_2 H^2)\ x, -y, -z\ ;$
$H^3 S_2 H^3)\ -z, y, x\ ;$	$S_2 H^2 S_2 H^3)\ y, x, -z\,.$

Queste 24 classi esauriscono il gruppo: infatti

$$S_1 \equiv S_2 H^2 S_2 H^2 \quad , \quad S_3 \equiv H S_2 H^3 \quad , \quad S_4 \equiv S_2 H^2 S_2 H^3\ ;$$

Γ è quindi il gruppo totale delle traslazioni di G. Poichè nessuna delle operazioni antecedenti lascia fermo il contorno elementare, nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano 24 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

24. Il quadrilatero (8) dà luogo alla superficie coniugata nella applicabilità di quella di Schwarz. Esso può essere orientato in modo che i suoi lati abbiano per equazioni:

$1)\ y = 0\,, x = z\ ;\ 2)\ y = 0, x+z = 2\ ;\ 3)\ x = 0\,, y+z = 2,\ 4)\ x = 0\,, y = z\,.$

I ribaltamenti corrispondenti sono:

$S_1)\ z, -y, x\ ;\ S_2)\ 2-z, -y, 2-x\ ;\ S_3)\ -x, 2-z, 2-y\ ;\ S_4)\ -x, z, y\,.$

Il quadrilatero ha i due piani di simmetria $x = y$, $z = 1$ e quindi l'asse binario $x = y$, $z = 1$. Le simmetrie ed il ribaltamento corrispondenti sono:

$$\Sigma_1)\ y\ ,\ x\ ,\ z \quad ; \quad \Sigma_2)\ x\ ,\ y\ ,\ 2-z \quad ; \quad S_5)\ y\ ,\ x\ ,\ 2-z\,.$$

Quali operazioni fondamentali del gruppo possono riguardarsi S_1, S_5, Σ_1. Infatti

$$S_4 = \Sigma_1 S_1 \Sigma_1 \ ;\ S_2 = S_5 S_4 S_5 \ ;\ S_3 = S_5 S_1 S_5 \ ;\ \Sigma_2 = \Sigma_1 S_5\,.$$

Poniamo

$$H = S_5 S_1 S_2)\ y\ ,\ 2-x\ ,\ z\ ;$$

avremo le traslazioni:

$$T_1 = (H S_4)^3)\ x+2, y+2, z+2\ ;\ T_2 = (S_1 S_5)^3)\ x+2, y-2, z-2\ ;$$
$$T_3 = \Sigma_1 T_2 \Sigma_1)\ x-2, y+2, z-2\,.$$

e quindi la traslazione generale

$$\mathrm{T})\ x+2m\ ,\ y+2n\ ,\ z+2p\ ;\ m\equiv n\equiv p\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale in G: il suo parallelepipedo fondamentale ha per base il quadrato di lato 4 e per terzo spigolo la diagonale del cubo di lato 2. L'isomorfismo di G col gruppo dell'ottaedro è dato da $H^4=1$, $(HS_1)^3\equiv 1$. I movimenti di G si distribuiscono rispetto a Γ nelle 24 classi:

$1)\ x, y, z;$	$S_1)\ z, -y, x;$
$H)\ y, 2-x, z;$	$S_1 H)\ z, x-2, y;$
$H^2)\ 2-x, 2-y, z;$	$S_1 H^2)\ z, y-2, 2-x;$
$H^3)\ 2-y, x, z;$	$S_1 H^3)\ z, -x, 2-y;$
$H S_1)\ -y, 2-z, x;$	$H^2 S_1)\ 2-z, y+2, x;$
$H S_1 H)\ x-2, 2-z, y;$	$H^2 S_1 H)\ 2-z, -x, y$
$H S_1 H^2)\ y, -z, -x;$	$H^2 S_1 H^2)\ 2-z, -y, 2-x;$
$H S_1 H^3)\ -x, 2-z, 2-y;$	$H^2 S_1 H^3)\ -z, x, -y;$
$H^3 S_1)\ y+2, z, x;$	$S_1 H^2 S_1)\ x, 2-y, 2-z;$
$H^3 S_1 H)\ -x, z, y;$	$S_1 H^2 S_1 H)\ y, x, 2-z;$
$H^3 S_1 H^2)\ -y, z, 2-x;$	$S_1 H^2 S_1 H^2)\ 2-x, y, 2-z;$
$H^3 S_1 H^3)\ x-2, z, 2-y;$	$S_1 H^2 S_1 H^3)\ -y, -x, -z.$

Poichè

$$S_4\equiv H^3 S_1 H\quad ,\quad S_5\equiv S_1 H^2 S_1 H$$

è in tal modo esaurito il gruppo dei movimenti. Le operazioni di seconda specie si ottengono dalle antecedenti moltiplicando a sinistra per Σ_1, scambiando cioè la prima e la seconda coordinata. Così è esaurito il gruppo totale della superficie coniugata a quella di Schwarz: Γ ne è il gruppo totale delle traslazioni ed è in esso di indice 48. Poichè le operazioni Σ_1, S_5 lasciano fermo il contorno elementare, nel parallelepipedo fondamentale di Γ en-

trano soltanto 12 ripetizioni della porzione elementare di superficie (1).

25. Nel caso che il contorno sia formato da un piano e tre rette, ci limitiamo a costruire il gruppo di due sole superficie, una delle quali si riduce a quella di Gergonne, l'altra a quella di Schwarz con opportuna determinazione delle costanti arbitrarie.

Il primo tipo è quello designato col n.° 1. Esso è limitato dal piano $y=0$ e dalle rette

$$1)\ x=0\ ,\ z=0\ ;\ 2)\ y=a\ ,\ z=0\ ;\ 3)\ x=b\ ,\ y=z+a\ .$$

La simmetria ed i ribaltamenti corrispondenti sono

$$\Sigma)\ x, -y, z;$$
$$S_1)\ -x, y, -z\ ;\ S_2)\ x, 2a-y, -z\ ;\ S_3)\ 2b-x, z+a, y-a\ .$$

Poniamo

$$S_4=\Sigma S_2 \Sigma)\ x, -(y+2a), -z\ ;\ S_5=\Sigma S_3 \Sigma)\ 2b-x, -(z+a), -(y+a);$$
$$H=S_1 S_3)\ x-2b, z+a, a-y\ .$$

Avremo le traslazioni

$$T_1=S_2 S_4)\ x\ ,\ y+4a\ ,\ z\ ;\quad T_2=S_3 T_1 S_3)\ x\ ,\ y\ ,\ z+4a\ ;$$
$$T_3=S_2 S_5 S_2)\ x\ ,\ y+2a\ ,\ z+2a\ ;\quad T_4=S_2 H^2)\ x-4b\ ,\ y\ ,\ z;$$

e quindi la traslazione generale

$$\mathrm{T})\ x+4mb\ ,\ y+2na\ ,\ z+2pa\ ;\ n\equiv p\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale nel gruppo totale $\overline{G}$, poichè permutabile con Σ, S_1, S_2, S_3. Il parallelepipedo fondamentale di Γ ha gli spigoli uguali a $4bx$, $2a(y+z)$, $2a(y-z)$. Poichè $H^4\equiv 1$, $(S_1 H)^2\equiv 1$, il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo

(1) Cf. BIANCHI. *Lezioni di Geometria differenziale*, pag. 389.

ampliato del diedro per $n=4$. I movimenti di $\overline{G}$ si distribuiscono rispetto a Γ nelle 8 classi

$$\left\{\begin{array}{ll} 1)\ x, y, z\,; & S_1)\ -x,\ y,\ -z\,; \\ H)\ x-2b,\ z+a,\ a-y\,; & S_1H)\ 2b-x,\ z+a,\ y-a\,; \\ H^2)\ x,\ 2a-y,\ -z\,; & S_1H^2)\ -x,\ 2a-y,\ z\,; \\ H^3)\ x-2b,\ a-z,\ y-a\,; & S_1H^3)\ 2b-x,\ a-z,\ a-y\,. \end{array}\right.$$

Le operazioni di seconda specie si distribuiscono in altre 8 classi, che si deducono dalle antecedenti moltiplicando a sinistra per Σ, cambiando cioè segno alla seconda coordinata. A causa delle equivalenze

$$S_2 \equiv H^2\ ,\ S_3 \equiv S_1 H\ ,\ S_5 \equiv S_1 H^3\,,$$

è esaurito il gruppo. Nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano quindi 16 ripetizioni della porzione elementare di superficie. Considerando invece il parallelepipedo che ha i lati uguali a $4bx$, $4ay$, $4az$, in esso (poichè non si tiene conto della T_3) entrano 32 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

Se si fa $a=b$, si ha la superficie di Gergonne, limitata da due diagonali inverse di due faccie parallele di un cubo e da due altre faccie parallele.

Osserviamo di più che fin qui abbiamo supposto che le costanti a e b fossero intiere, o, ciò che fa lo stesso, che il loro rapporto fosse razionale; ma, come è chiaro dal gruppo costruito, anche nel caso che il rapporto $\frac{b}{a}$ abbia un valore qualunque, si ha una superficie minima periodica, limitata da due diagonali inverse delle due basi di un parallelepipedo rettangolo a base quadrata e da due altre faccie parallele [1].

[1] Cfr. Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Vol. 1° pag. 487.

26. L'altro tipo, che vogliamo studiare, è quello designato col n.° 18. Il contorno è formato dal piano $x=y$ e dalle rette:

$$1)\ y=0\ ,\ z=0\ ;\ 2)\ x=2a\ ,\ y=0\ ;\ 3)\ y+x=2a\ ,\ z=b\,.$$

La simmetria ed i ribaltamenti corrispondenti sono:

$$\Sigma)\ y\,,\ x\,,\ z\ ;$$

$$S_1)\ x\,,\ -y\,,\ -z\ ;\ S_2)\ 4a-x\,,\ -y\,,\ z\ ;\ S_3)\ 2a-y\,,\ 2a-x\,,\ 2b-z\,.$$

Poniamo:

$$S_4 = \Sigma S_1 \Sigma)\ -x\,,\ y\,,\ -z\ \ ;\ \ S_5 = \Sigma S_2 \Sigma)\ -x\,,\ 4a-y\,,\ z\ ;$$

$$S_6 = S_3 S_1 S_3)\ 4a-x\,,\ y\,,\ 4b-z\ \ ;\ \ S_7 = S_3 S_4 S_3)\ x\,,\ 4a-y\,,\ 4b-z\,;$$

$$H = S_1 S_3)\ 2a-y\ ,\ x-2a\ ,\ z-2b\,.$$

Avremo le traslazioni:

$$T_1 = S_2 S_4 S_1)\ x+4a\ ,\ y\ ,\ z\quad ;\quad T_2 = S_3 T_1^{-1} S_3)\ x\ ,\ y+4a\ ,\ z\,;$$
$$T_3 = T_1^{-1} S_6 S_4)\ x\ ,\ y\ ,\ z+4b\,;$$

e quindi la traslazione generale:

$$T)\ x+4ma\ \ ,\ \ y+4na\ \ ,\ \ z+4pb$$

con m, n, p numeri intieri qualunque. Le traslazioni T formano un gruppo Γ eccezionale nel gruppo totale $\overline{G}$: il suo parallelepipedo fondamentale ha per lati $4ax$, $4ay$, $4bz$. Poichè $H^4=1$, $(S_1 H)^2 \equiv 1$, il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo ampliato del diedro per $n=4$. I movimenti di G si distribuiscono nelle 8 classi:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1)\ x,\ y,\ z\,; & S_1)\ x,\ -y,\ -z\,; \\ H)\ 2a-y,\ x-2a,\ z-2b\,; & S_1H)\ 2a-y,\ 2a-x,\ 2b-z\,; \\ H^2)\ -x,\ -y,\ z\,; & S_1H^2)\ -x,\ y,\ -z\,; \\ H^3)\ y+2a,\ 2a-x,\ z-2b\,; & S_1H^3)\ y+2a,\ x-2a,\ 2b-z\,. \end{array}\right.$$

Le operazioni di seconda specie si ottengono subito dalle antecedenti moltiplicando a sinistra per Σ, scambiando cioè la prima e la seconda coordinata. Il gruppo G è in tal modo esaurito, come risulta dalle equivalenze:

$$S_2 \equiv H^2 \;;\; S_3 \equiv S_1 H \;;\; S_4 \equiv S_1 H^2 \;;\; S_5 \equiv H^2 .$$

Gli assi dei movimenti $S_1, S_2, S_6, S_7, S_5, S_4$ nell'ordine scritto, limitano sulla superficie un esagono rettilineo gobbo, che si ottiene da un parallelepipedo rettangolo a base quadrata sopprimendo i lati che concorrono in due vertici opposti. Se si fa $a = b$, questo parallelepipedo è un cubo e la superficie corrispondente è quella di Schwarz. Infatti in tal caso per la simmetria è naturale ammettere che esistano sulla superficie tutte tre le congiungenti i punti medii di due spigoli opposti dell'esagono: allora la porzione di superficie limitata dall'esagono si deduce da un contorno di due rette perpendicolari e di un piano che le incontra sotto angoli di 45° e 30°; quindi si ha la superficie di Schwarz [1]. Abbiamo quindi: " *Sulla superficie di Schwarz si può limitare un* " *esagono rettilineo, che si ottiene da un cubo, sopprimendo gli spi-* " *goli che vanno a due vertici opposti* ".

Anche qui, come nel caso antecedente, il rapporto $\frac{b}{a}$ può avere un valore qualunque: la superficie corrispondente, come è chiaro dal gruppo, sarà sempre periodica.

27. Nel caso, in cui il contorno è formato di due piani e due rette, ci limiteremo a costruire i gruppi relativi a due tipi che contengono come casi particolari le superficie di Schwarz e di Neovius e le loro coniugate nell'applicabilità.

Uno di questi tipi è quello designato col n. 80: esso è limitato dai piani $x = z$, $x = y$, e dalle rette 1) $x = a$, $z = 0$; 2) $x = a$, $y = a + b$.

---

[1] E. R. Neovius. *Bestimmung zweier speciellen Minimalflächen.* ..... Helsingfors 1883, pag. 59 e seg.

Le simmetrie ed i ribaltamenti corrispondenti sono:

$$\Sigma_1)\, z, y, x \;;\; \Sigma_2)\, y, x, z \;;\; S_1)\, 2a - x, y, -z \;;\; S_2)\, 2a - x, 2a + 2b - y, z .$$

Poniamo:

$$S_3 = \Sigma_1 S_1 \Sigma_1)\; -x,\; y,\; 2a - z \;;\; S_4 = \Sigma_2 S_1 \Sigma_2)\; x,\; 2a - y,\; -z \;;$$
$$S_5 = \Sigma_1 S_2 \Sigma_1)\; x,\; 2a + 2b - y,\; 2a - z \;;\; S_6 = \Sigma_2 S_2 \Sigma_2)\; 2a + 2b - x,\; 2a - y,\; z \;;$$

$$U = \Sigma_1 \Sigma_2)\; z,\; x,\; y .$$

Avremo le traslazioni:

$$T_1 = S_2 S_5 S_3)\; x + 2a,\; y,\; z \;;\; T'_1 = \Sigma_1 T_1 \Sigma_1)\; x,\; y,\; z + 2a \;;$$
$$T_2 = T'^{-1}_1 S_5 S_4)\; x,\; y + 2b,\; z \;;\; T'_2 = \Sigma_2 T_2 \Sigma_2)\; x + 2b,\; y,\; z \;;$$

e quindi se δ è il m. c. d. di a e b, le traslazioni:

$$\Theta_1)\, x + 2\delta, y, z \;;\; \Theta_2 = \Sigma_2 \Theta_1 \Sigma_2)\, x, y + 2\delta, z \;;\; \Theta_3 = \Sigma_1 \Theta_1 \Sigma_1)\, x, y, z + 2\delta$$

e quindi la traslazione generale

$$\Theta)\; x + 2m\delta,\; y + 2n\delta,\; z + 2p\delta ;$$

con m, n, p numeri intieri qualunque.

Il gruppo Γ delle traslazioni Θ è eccezionale nel gruppo $\overline{G}$: il suo parallelepipedo fondamentale è il cubo di lato 2δ. Poichè $U^3 = 1$, $(U S_1)^3 \equiv 1$, il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo del tetraedro ampliato mediante una simmetria. I movimenti di $\overline{G}$ si distribuiscono rispetto a Γ nelle 12 classi:

$$\left\{\begin{array}{lll}
1)\; x, y, z ; & U)\; z, x, y ; & U^2)\; y, z, x ; \\
S_1)\; -x, y, -z ; & S_1 U)\; -z, x, -y ; & S_1 U^2)\; -y, z, -x ; \\
U S_1)\; -z, -x, y ; & U S_1 U)\; -y, -z, x ; & U S_1 U^2)\; -x, -y, z \\
U^2 S_1)\; y, -z, -x ; & U^2 S_1 U)\; x, -y, -z ; & U^2 S_1 U^2)\; z, -x, -y .
\end{array}\right.$$

Le operazioni di seconda specie si dividono in altre 12 classi, che si deducono dalle antecedenti moltiplicando a sinistra per Σ_2, scambiando cioè tra loro la prima e la seconda coordinata. Queste 24 classi esauriscono il gruppo $\overline{G}$: infatti

$$S_2 \equiv U\, S_1\, U^2 \ ; \ \Sigma_1 = \Sigma_2\, U^2 .$$

Nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano 24 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

Prendendo del contorno elementare il simmetrico rispetto ad uno dei due piani, e del contorno così ottenuto i due trasformati mediante le operazioni U ed U^2, si ha un dodecagono rettilineo gobbo ad angoli retti, i cui lati sono paralleli agli assi coordinati. Se si fa $a=b$, il contorno ammette l'asse binario di simmetria $x=a$, $y+z=2a$: quindi si deduce dalla riunione di due contorni formati da due rette inclinate di 45° e di un piano che le taglia sotto angoli di 45° e 30°; si ha cioè la superficie del Neovius (1). In questo caso però non si ha più sulla superficie un dodecagono, bensì un esagono rettilineo, il quale si ottiene da un cubo sopprimendo gli spigoli che concorrono in due vertici opposti. Se si fa invece $a=-b$, il contorno elementare ha il piano di simmetria $y=z$ e si deduce dalla riunione di due contorni formati di due piani inclinati di 60° e di una retta che li incontra sotto angoli di 45°, 45°; si ha cioè la superficie di Schwarz (1). Anche su questa non si ha più un dodecagono, sibbene un esagono; ritroviamo così un risultato già ottenuto al numero antecedente.

28. L'altro tipo che vogliamo studiare è quello designato col n.° 47. Esso corrisponde all'antecedente nella relazione notata al n.° 16. È limitato dai piani $x=0$, $y=0$; e dalle rette 1) $y=z$, $x=a$; 2) $x-a=z-b$, $y=b$.

(1) E. R. Neovius. *Bestimmung* . . . . pag. 59 e seg.

Le simmetrie ed i ribaltamenti corrispondenti sono:

$\Sigma_1) -x, y, z$; $\Sigma_2) x, -y, z$; $S_1) 2a-x, z, y$; $S_2) z+a-b, 2b-y, x+b-a$.

Poniamo:

$$\left|\begin{array}{l}
S_3 = \Sigma_1 S_2 \Sigma_1)\ -z+b-a,\ 2b-y,\ -x+b-a\ ;\\
S_4 = \Sigma_1 S_1 \Sigma_1)\ -(x+2a),\ z,\ y\ ;\\
S_5 = \Sigma_2 S_4 \Sigma_2)\ -(x+2a),\ -z,\ -y\ ;\\
S_6 = \Sigma_2 S_3 \Sigma_2)\ -z+b-a,\ -(y+2b),\ -x+b-a;\\
S_7 = \Sigma_2 S_2 \Sigma_2)\ z+a-b,\ -(y+2b),\ x+b-a\ ;\\
S_8 = \Sigma_2 S_1 \Sigma_2)\ 2a-x,\ -z,\ -y\ ;\\
S_9 = \Sigma_1 \Sigma_2)\ -x,\ -y,\ z\ ;\\
H = S_1 S_9)\ x+2a,\ z,\ -y\ .
\end{array}\right.$$

Avremo le traslazioni:

$$T_1 = S_1 S_4)\ x+4a,\ y,\ z \quad ; \quad T'_1 = S_2 T_1 S_2)\ x,\ y,\ z+4a\ ;$$
$$T_2 = S_2 S_7)\ x,\ y+4b,\ z \quad ; \quad T'_2 = S_1 T_2 S_1)\ x,\ y,\ z+4b\ ;$$

e quindi, indicando con δ il m. c. d. di a e b, le traslazioni:

$\Theta_1)\ x, y, z+4\delta$; $\Theta_2 = S_2 \Theta_1 S_2)\ x+4\delta, y, z$; $\Theta_3 = S_1 \Theta_1 S_1)\ x, y+4\delta, z$.

Abbiamo ancora l'altra traslazione:

$$T_3 = T_1'^{-1}\, T_2\, S_9\, S_2\, H^2\, S_2)\ x-2a+2b\ ,\ y\ ,\ z \qquad .$$

la quale, se $a \equiv b \pmod{2\delta}$, non ci dà alcuna nuova traslazione, in caso contrario ci dà le traslazioni:

$\Theta'_1)\ x\,,\ y\,,\ z+2\delta$; $\Theta'_2)\ x+2\delta\,,\ y\,,\ z$; $\Theta'_3)\ x\,,\ y+2\delta\,,\ z$.

Abbiamo dunque la traslazione generale:

$$\Theta)\ x+4m\delta\ ,\ y+4n\delta\ ,\ z+2p\delta \quad \text{se} \quad a \equiv b \pmod{2\delta}$$
$$\Theta'_1)\ x+2m\delta\ ,\ y+2n\delta\ ,\ z+2p\delta \quad \text{se} \quad a \not\equiv b \pmod{2\delta}$$

con $m\,,n\,,p$ numeri intieri qualunque.

In ambedue i casi il gruppo Γ generato dalle traslazioni Θ ($o\,\Theta'$) è eccezionale nel gruppo $\overline{G}$. Poichè di più $H^4 \equiv 1$, $(HS_2)^3 \equiv 1$, il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo ampliato dell'ottaedro.

Per avere sotto forma semplice le espressioni analitiche delle 24 classi nelle quali si distribuiscono rispetto a Γ i movimenti di $\overline{G}$, conviene distinguere tre casi:

1.° Se oltre essere $a \equiv b \pmod{2\delta}$ è anche $a \equiv b \pmod{4\delta}$, allora $a-b$ è una traslazione del gruppo: quindi poichè non è di certo $a \equiv 0 \pmod{2\delta}$, le espressioni analitiche delle 24 classi saranno:

$1)\ x, y, z;$	$S_2)\ z, 2\delta-y, x;$
$H)\ x+2\delta, z, -y;$	$S_2H)\ -y, 2\delta-z, x+2\delta;$
$H^2)\ x, -y, -z;$	$S_2H^2)\ -z, y+2\delta, x;$
$H^3)\ x+2\delta, -z, y;$	$S_2H^3)\ y, z+2\delta, x+2\delta;$
$HS_2)\ z+2\delta, x, y+2\delta;$	$H^2S_2)\ z, y+2\delta, -x;$
$HS_2H)\ 2\delta-y, x+2\delta, z+2\delta;$	$H^2S_2H)\ -y, z+2\delta, 2\delta-x;$
$HS_2H^2)\ 2\delta-z, x, 2\delta-y;$	$H^2S_2H^2)\ -z, 2\delta-y, -x;$
$HS_2H^3)\ y+2\delta, x+2\delta, 2\delta-z;$	$H^2S_2H^3)\ y, 2\delta-z, 2\delta-x;$
$H^3S_2)\ z+2\delta, -x, 2\delta-y;$	$S_2H^2S_2)\ -x, -y, z;$
$H^3S_2H)\ 2\delta-y, 2\delta-x, 2\delta-z;$	$S_2H^2S_2H)\ 2\delta-x, -z, -y;$
$H^3S_2H^2)\ 2\delta-z, -x, y+2\delta;$	$S_2H^2S_2H^2)\ -x, y, -z;$
$H^3S_2H^3)\ y+2\delta, 2\delta-x, z+2\delta;$	$S_2H^2S_2H^3)\ 2\delta-x, z, y.$

2.° Se è $a \equiv b \pmod{2\delta}$, ma non $a \equiv b \pmod{4\delta}$, allora $a-b$ non è una traslazione del gruppo; quindi le espressioni analitiche delle 24 classi sono:

$1)\ x, y, z;$	$S_2)\ z+2\delta, 2\delta-y, x+2\delta;$
$H)\ x+2\delta, z, -y;$	$S_2H)\ 2\delta-y, 2\delta-z, x;$
$H^2)\ x, -y, -z;$	$S_2H^2)\ 2\delta-z, y+2\delta, x+2\delta;$
$H^3)\ x+2\delta, -z, y;$	$S_2H^3)\ y+2\delta, z+2\delta, x;$
$HS_2)\ z, x+2\delta, y+2\delta;$	$H^2S_2)\ z+2\delta, y+2\delta, 2\delta-x;$
$HS_2H)\ -y, x, z+2\delta;$	$H^2S_2H)\ 2\delta-y, z+2\delta, -x;$
$HS_2H^2)\ -z, x+2\delta, 2\delta-y;$	$H^2S_2H^2)\ 2\delta-z, 2\delta-y, 2\delta-x;$
$HS_2H^3)\ y, x, 2\delta-z;$	$H^2S_2H^3)\ y+2\delta, 2\delta-z, -x;$
$H^3S_2)\ z, 2\delta-x, 2\delta-y;$	$S_2H^2S_2)\ -x, -y, z;$
$H^3S_2H)\ -y, -x, 2\delta-z;$	$S_2H^2S_2H)\ 2\delta-x, -z, -y;$
$H^3S_2H^2)\ -z, 2\delta-x, y+2\delta;$	$S_2H^2S_2H^2)\ -x, y, -z;$
$H^3S_2H^3)\ y, -x, z+2\delta;$	$S_2H^2S_2H^3)\ 2\delta-x, z, y.$

3.° Se non è $a \equiv b \pmod{2\delta}$, allora $2a$, $2b$ sono traslazioni del gruppo, non $a-b$: quindi le espressioni analitiche delle 24 classi sono:

$1)\ x, y, z;$	$S_2)\ z+\delta, -y, x+\delta;$
$H)\ x, z, -y;$	$S_2H)\ \delta-y, -z, x+\delta;$
$H^2)\ x, -y, -z;$	$S_2H^2)\ \delta-z, y, x+\delta;$
$H^3)\ x, -z, y;$	$S_2H^3)\ y+\delta, z, x+\delta;$
$HS_2)\ z+\delta, x+\delta, y;$	$H^2S_2)\ z+\delta, y, \delta-x;$
$HS_2H)\ \delta-y, x+\delta, z;$	$H^2S_2H)\ \delta-y, z, \delta-x;$
$HS_2H^2)\ \delta-z, x+\delta, -y;$	$H^2S_2H^2)\ \delta-z, -y, \delta-x;$
$HS_2H^3)\ y+\delta, x+\delta, -z;$	$H^2S_2H^3)\ y+\delta, -z, \delta-x;$
$H^3S_2)\ z+\delta, \delta-x, -y;$	$S_2H^2S_2)\ -x, -y, z;$
$H^3S_2H)\ \delta-y, \delta-x, -z;$	$S_2H^2S_2H)\ -x, -z, -y;$
$H^3S_2H^2)\ \delta-z, \delta-x, y;$	$S_2H^2S_2H^2)\ -x, y, -z;$
$H^3S_2H^3)\ y+\delta, \delta-x, z;$	$S_2H^2S_2H^3)\ -x, z, y.$

In ogni caso queste 24 classi esauriscono i movimenti di $\overline{G}$.

Infatti:

$$S_1 = S_4 = S_2 H^2 S_2 H^3 ; S_3 = H^2 S_2 H^2 ; S_7 = S_2 ; S_8 = S_2 H^2 ; S_2 H ; S_9 = S_2 H^2 S_2 .$$

Le operazioni di seconda specie si ottengono dalle antecedenti moltiplicando a sinistra per Σ_1, cambiando cioè segno alla prima coordinata. Nel parallelepipedo fondamentale di Γ, cioè nel cubo di lato 4δ nei primi due casi, in quello di lato 2δ nel terzo, entrano 48 ripetizioni della porzione elementare di superficie. Sulla superficie gli assi dei movimenti $S_1 S_2 \dots S_8$ limitano un ottagono rettilineo gobbo con angoli di 90° e 60°. Nel caso $a = b$, il contorno elementare possiede il piano di simmetria $x = y$: si deduce quindi dalla riunione di due contorni formati di due piani inclinati di 45° e di una retta che li incontra sotto angoli di 45° e 30°: si ha quindi la superficie coniugata nell'applicabilità di quella del Neovius (1). Dunque in particolare:

" *Sulla superficie coniugata nell' applicabilità di quella del Neovius si può limitare un ottagono rettilineo gobbo con lati tutti uguali, con angoli di 90° e 60°, con quattro piani ed un asse quaternario di simmetria* ".

Se invece si fa $a = -b$, il contorno elementare ha l'asse binario di simmetria $x + y = 0$, $z = -a$: si deduce quindi dalla riunione di due contorni formati di due rette inclinate di 60° e di un piano che lo incontra sotto angoli di 45° e 45°; si ha quindi la superficie coniugata nell' applicabilità di quella di Schwarz (1). Dunque in particolare:

" *Sulla superficie coniugata nell' applicabilità di quella di Schwarz, si può limitare un ottagono rettilineo gobbo, con lati tutti uguali, con angoli di 90° e 60°, con due piani e tre assi binarii di simmetria* ".

29. Nel caso che il contorno sia formato di tre piani ed una

(1) E. R. Neovius. *Bestimmung....* pag. 59. Per i due casi che si ottengono particolarizzando le costanti, cfr. i num. 27 e 16.

retta, studieremo i tipi corrispondenti a quelli studiati nei n. 25 e 26 nella relazione accennata al n.° 16.

Il primo di questi tipi è designato col n.° 29. Il contorno è formato nell'ordine in cui si succedono, dai piani:

1) $y = z$, 2) $x = 0$, 3) $y = 0$; e dalla retta $x = b$, $z = c$.

Le simmetrie ed il ribaltamento corrispondenti sono:

$$\Sigma_1)\ x, z, y\ ;\ \Sigma_2)\ -x, y, z\ ;\ \Sigma_3)\ x, -y, z\ ;\ S_1)\ 2b-x, y, 2c-z.$$

Poniamo:

$$S_2 = \Sigma_1 S_1 \Sigma_1)\ 2b-x,\ 2c-y, z\ ;\ S_3 = \Sigma_2 S_1 \Sigma_2)\ -(x+2b), y, 2c-z;$$
$$M_1 = \Sigma_1 \Sigma_2)\ -x, z, y\ ;\ M_2 = \Sigma_1 \Sigma_3)\ x, z, -y\ ;\ M_3 = \Sigma_2 \Sigma_3)\ -x, -y, z.$$

Avremo le traslazioni:

$$T_1 = S_1 S_3)\ x+4b, y, z\ ;\ T_2 = S_2 M_3)\ x+2b, y+2c, z\ ;$$
$$T_3 = \Sigma_1 T_2 \Sigma_1)\ x+2b, y, z+2c\ ;$$

e quindi la traslazione generale:

$$T)\ x + 2(2m+n+p)b\ ,\ y+2nc\ ,\ z+2pc\ ;$$

con m, n, p numeri intieri qualunque.

Il gruppo Γ generato dalle traslazioni T è eccezionale in $\overline{G}$; il suo parallelepipedo fondamentale ha per ispigoli i segmenti

$4bx$, $2bx + 2cy$, $2bx + 2cz$. Di più, poichè $M_2^4 = 1$, $(M_2 S_1)^2 = 1$,

il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo ampliato del diedro per $n = 4$. I movimenti di $\overline{G}$ si distribuiscono rispetto a Γ nelle 8 classi:

$$1)\ x, y, z\ ;\quad M_2)\ x, z, -y\ ;\quad M_2^2)\ x, -y, -z\ ;\quad M_2^3)\ x, -z, y\ ;$$
$$S_1)\ -x, y, -z\ ;\ S_1 M_2)\ -x, z, y\ ;\ S_1 M_2^2)\ -x, -y, z\ ;\ S_1 M_2^3)\ -x, -z, -y.$$

Le operazioni di seconda specie si ottengono dalle antecedenti, moltiplicandole a sinistra per Σ_2, cambiando cioè segno alla prima coordinata.

Queste 16 classi esauriscono il gruppo $\overline{G}$. Infatti

$$S_2 \equiv S_1 M_2^2 \;;\; S_3 \equiv S_1 \;;\; M_1 \equiv S_1 M_2 \;;\; M_3 \equiv S_1 M_2^2 .$$

Nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano dunque 16 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

Se del contorno elementare si prende il simmetrico rispetto al piano $y=0$, del contorno così ottenuto il simmetrico rispetto al piano $x=0$, si ha un contorno limitato da due piani ortogonali $y=z$, $y+z=0$ e da due rette uguali e parallele all'asse y. Questo tipo è il coniugato di quello di Gergonne.

Se insieme con questo ultimo contorno si prendono gli altri tre che gli sono adiacenti lungo l'asse x, si ottiene una superficie minima limitata da due quadrati uguali coi lati paralleli ed i cui centri sono su una perpendicolare comune ai piani dei due quadrati.

30. L'altro tipo è quello designato al n.° 31. Il contorno è formato dai piani:

$$1)\; y=z \;;\; 2)\; x=0 \;;\; 3)\; y-0 \text{ e dalla retta } x=b\,,\; y+z=c.$$

Le simmetrie ed il ribaltamento corrispondenti sono:

$$\Sigma_1)\; x, z, y \;;\quad \Sigma_2)\; -x, y, z \;;\quad \Sigma_3)\; x, -y, z \;;\quad S_1)\; 2b-x, c-z, c-y.$$

Poniamo:

$$S_2 = \Sigma_2 S_1 \Sigma_2)\; -(x+2b), c-z, c-y \;;\quad S_3 = \Sigma_3 S_1 \Sigma_3)\; 2b-x, z-c, y+c \;;$$
$$M_1 = \Sigma_1 \Sigma_2)\; -x, z, y \;;\; M_2 = \Sigma_1 \Sigma_3)\; x, z, -y \;;\; M_3 = \Sigma_1 \Sigma_2)\; -x, -y, z$$

Avremo le traslazioni

$$T_1 = M_2^2 S_1 S_3)\; x, y, z-2c \;;\quad T_2 = \Sigma_1 T_1 \Sigma_1)\; x, y-2c, z \;;$$
$$T_3 = S_1 S_2)\; x+4b, y, z \;;\quad T_4 = M_1 S_3)\; x-2b, y+c, z-c \;;$$

e quindi la traslazione generale:

$$T)\; x+2mb\,,\; y+nc\,,\; z+pc \;;\quad m \equiv n \equiv p \pmod 2.$$

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale in $\overline{G}$: il suo parallelepipedo fondamentale ha per base il quadrato di lato $2c$, per terzo spigolo la diagonale di un parallelepipedo rettangolo, la cui base è il quadrato di lato c, la cui altezza è $2b$. Poichè $M_2^4 = 1$, $(M_2 S_1)^2 \equiv 1$, il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo ampliato del diedro per $n=4$. I movimenti di $\overline{G}$ si distribuiscono rispetto a Γ nelle 8 classi:

$$1)\; x, y, z \;;\quad M_2)\; x, z, -y \;;\quad M_2^2)\; x, -y, -z \;;\quad M_2^3)\; x, -z, y \;;$$
$$S_1)\; -x, -z, -y \;;\; S_1 M_2)\; -x, y, -z \;;\; S_1 M_2^2)\; -x, z, y \;;\; S_1 M_2^3)\; -x, -y, z.$$

Le operazioni di seconda specie si ottengono moltiplicando per Σ_2, cambiando cioè segno alla prima coordinata. Queste 16 classi esauriscono il gruppo G; infatti

$$S_2 \equiv S_1 \;;\quad S_3 \equiv S_1 M_2^2 \;;\quad M_1 \equiv S_1 M_2^2 \;;\quad M_3 \equiv S_1 M_2^3 .$$

Nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano quindi 16 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

Se del contorno elementare si prende il simmetrico rispetto al piano $y=z$, del contorno risultante il simmetrico rispetto al piano $x=0$ e insieme con quest'ultimo contorno si considerano i tre che gli sono adiacenti lungo l'asse x, si ha ancora una superficie minima limitata da due quadrati che sono nella posizione del caso antecedente: solo mentre in quello il lato dei due quadrati e la distanza dei loro piani avevano un rapporto razionale, in questo caso il rapporto è irrazionale della forma $m\sqrt{2}$, essendo m un numero razionale.

Se invece del contorno elementare si prende il simmetrico rispetto al piano $y=z$, del contorno ottenuto il trasformato mediante la S_1, si ha un parallelepipedo rettangolo che ha per base il quadrato di lato c e l'altezza $2b$, le cui faccie sono incontrate ortogonalmente dalla superficie.

Facendo $c=2b$, questo parallelepipedo è un cubo e allora per la simmetria è naturale ammettere che la superficie possieda ancora i piani di simmetria $x=z$, $x=y$. Allora i due piani ortogonali $x=z$, $y=0$, incontrano la retta $y+z=2b$, $x=b$ sotto angoli di 45° e 30°: si ha cioè il contorno elementare della superficie coniugata nell'applicabilità di quella di Schwarz. Quindi in particolare:

„ *Sulla superficie coniugata nell'applicabilità di quella di*
„ *Schwarz, si può limitare un esagono di archi geodetici piani, i*
„ *cui piani sono le faccie di un cubo* „.

Notiamo finalmente che in questo caso, come nell'antecedente, il rapporto $\frac{b}{c}$ può avere un valore qualunque, razionale o no, senza che perciò il gruppo cessi di essere discontinuo: i due casi danno allora luogo allo stesso tipo discontinuo appartenente alla simmetria del diedro.

31. Nell'ultimo caso, in cui il contorno è formato di quattro piani, discuteremo tutti i tipi ottenuti. È evidente che le tre superficie minime corrispondenti ad uno stesso tetraedro hanno lo stesso gruppo, che è quello generato dalle simmetrie rispetto alle faccie del tetraedro e dai movimenti che riportano il tetraedro in sè medesimo. Riguardo alle simmetrie che trasformano in sè stesso il tetraedro, esse appartengono alla superficie minima che ne incontra le faccie in un ordine che non viene alterato dalla simmetria considerata: le altre due superficie, come già fu osservato, sono identiche.

Veniamo, ciò posto, alla costruzione di questi gruppi.

Il tetraedro (a) è limitato dai piani:

$$1)\ z=0 \quad ; \quad 2)\ x+y=0 \quad ; \quad 3)\ y=z+1 \quad ; \quad 4)\ x=y.$$

Indicando con α_{ik} l'angolo dei due piani i, k, gli angoli delle sue faccie sono:

$$\alpha_{12}=\frac{\pi}{2}\ ;\ \alpha_{13}=\frac{\pi}{4}\ ;\ \alpha_{14}=\frac{\pi}{2}\ ;\ \alpha_{23}=\frac{\pi}{3}\ ;\ \alpha_{24}=\frac{\pi}{2}\ ;\ \alpha_{34}=\frac{\pi}{3}$$

Ad esso corrisponde la sola superficie (2), la quale ne incontra le faccie nell'ordine 1324. Le simmetrie corrispondenti alle singole faccie sono:

$$\Sigma_1)\ x, y, -z\ ;\quad \Sigma_2)\ -y, -x, z\ ;\quad \Sigma_3)\ x, z+1, y-1\ ;\quad \Sigma_4)\ y, x, z.$$

Poniamo:

$$S_{12}=\Sigma_1\Sigma_2)-y_2-x,-z;\qquad S_{13}=\Sigma_1\Sigma_3)x,z+1,1-y;\ S_{14}=\Sigma_1\Sigma_4)y,x,-z;$$
$$S_{23}=\Sigma_2\Sigma_3)-(z+1),-x,y-1;\ S_{24}=\Sigma_2\Sigma_4)-x,-y,z;\ S_{34}=\Sigma_3\Sigma_4)y,z+1,x-1.$$

Avremo le traslazioni:

$$T_1=(S_{13}S_{24})^2)\ x, y+2, z+2\ ;\ T_2=\Sigma_4T_1\Sigma_4)\ x+2, y, z+2\ ;$$
$$T_3=\Sigma_3T_2\Sigma_3)\ x+2, y+2, z;$$

e quindi la traslazione generale:

$$T)\ x+2m\ ,\ y+2n\ ,\ z+2p\ ;\ m+n+p\equiv 0 \pmod 2).$$

Il gruppo Γ generato dalle traslazioni T è eccezionale in $\overline{G}$: il suo parallelepipedo fondamentale ha per ispigoli le diagonali di tre faccie concorrenti in uno stesso vertice del cubo di lato 2. Poichè $S_{13}^4=1$, $S_{14}^2=1$, $(S_{14}S_{13})^3\equiv 1$, il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo ampliato dell'ottaedro. I movimenti di $\overline{G}$ si distribuiscono rispetto a Γ nelle 24 classi:

$$\left\{\begin{array}{ll}
1)\ x, y, z\,; & S_{14})\ y, x, -z\,; \\
S_{13})\ x, z+1, 1-y\,; & S_{14}S_{13})\ z+1, x, y-1\,; \\
S_{13}^2)\ x, 2-y, -z\,; & S_{14}S_{13}^2)\ 2-y, x, z\,; \\
S_{13}^3)\ x, 1-z, y-1\,; & S_{14}S_{13}^3)\ 1-z, x, 1-y\,; \\
 & \\
S_{13}S_{14})\ y, 1-z, 1-x\,; & S_{13}^2S_{14})\ y, 2-x, z\,; \\
S_{13}S_{14}S_{13})\ z+1, y, 1-x\,; & S_{13}^2S_{14}S_{13})\ z+1, 2-x, 1-y\,; \\
S_{13}S_{14}S_{13}^2)\ 2-y, 1+z, 1-x\,; & S_{13}^2S_{14}S_{13}^2)\ -y, -x, -z\,; \\
S_{13}S_{14}S_{13}^3)\ 1-z, 2-y, 1-x\,; & S_{13}^2S_{14}S_{13}^3)\ 1-z, 2-x, y-1\,; \\
 & \\
S_{13}^3S_{14})\ y, 1+z, x-1\,; & S_{14}S_{13}^2S_{14})\ 2-x, y, -z\,; \\
S_{13}^3S_{14}S_{13})\ z+1, 2-y, x-1\,; & S_{14}S_{13}^2S_{14}S_{13})\ 2-x, z+1, y-1\,; \\
S_{13}^3S_{14}S_{13}^2)\ 2-y, 1-z, x-1\,; & S_{14}S_{13}^2S_{14}S_{13}^2)\ -x, -y, z\,; \\
S_{13}^3S_{14}S_{13}^3)\ 1-z, y, x-1\,; & S_{14}S_{13}^2S_{14}S_{13}^3)\ 2-x, 1-z, 1-y.
\end{array}\right.$$

Queste 24 classi esauriscono il gruppo dei movimenti. Infatti

$$S_{12} \equiv S_{13}^2 S_{14} S_{13}^2 \;;\; S_{23} \equiv S_{13}^2 S_{14} S_{13}^3 \;;\; S_{24} \equiv S_{14} S_{13}^2 S_{14} S_{13}^2 \;;\; S_{34} \equiv S_{13}^3 S_{14}\,.$$

Le operazioni di seconda specie di $\overline{G}$ si ottengono dalle antecedenti moltiplicandole a sinistra per Σ_1, cambiando cioè segno alla terza coordinata. Nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano 48 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

32. Il tetraedro (*b*) è limitato dai piani:

$$1)\ x=0 \;;\; 2)\ y=0 \quad;\quad 3)\ x=z \quad;\quad 4)\ y=z-2\,.$$

Gli angoli diedri delle sue faccie sono:

$$\alpha_{12} = \frac{\pi}{2}\,,\ \alpha_{13} = \frac{\pi}{4}\,,\ \alpha_{14} = \frac{\pi}{2}\,,\ \alpha_{23} = \frac{\pi}{2}\,,\ \alpha_{24} = \frac{\pi}{4}\,,\ \alpha_{34} = \frac{\pi}{3}\,.$$

Esso possiede l'asse binario di simmetria $x+y=0$, $z=1$. Questo asse esisterà dunque sulle superficie (3) e (4), che incon-

trano le faccie del tetraedro nell'ordine 1234, 1342: invece la (5), che incontra le faccie del tetraedro nell'ordine 1324, non lo contiene, ma lo ha come asse binario di simmetria: queste tre superficie hanno dunque lo stesso gruppo. Notiamo che le superficie (3) e (4) sono le coniugate nell'applicabilità di quelle di Schwarz e di Neovius.

Le simmetrie rispetto alle faccie del tetraedro sono:

$$\Sigma_1)\ -x, y, z\,;\quad \Sigma_2)\ x, -y, z\,;\quad \Sigma_3)\ z, y, x\,;\quad \Sigma_4)\ x, z-2, y+2\,.$$

Il ribaltamento attorno all'asse di simmetria è:

$$M)\ -y\ ,\ -x\ ,\ 2-z\,.$$

Poniamo:

$$S_{12} = \Sigma_1\Sigma_2) -x, -y, z\,;\ S_{13} = \Sigma_1\Sigma_3) -z, y, x\,;\quad S_{14} = \Sigma_1\Sigma_4) -x, z-2, y+2\,;$$
$$S_{23} = \Sigma_2\Sigma_3) z, -y, x\ ;\ S_{24} = \Sigma_2\Sigma_4) x, 2-z, y+2\ ;\ S_{34} = \Sigma_3\Sigma_4) y+2, z-2, x.$$

Avremo le traslazioni:

$$T_1 = S_{24}^2 S_{13}^2 S_{12}) x, y, z+4\,;\ T_2 = \Sigma_3 T_1 \Sigma_3) x+4, y, z\,;\ T_3 = \Sigma_4 T_1 \Sigma_4) x, y+4, z,$$
$$T_4 = M S_{13} S_{14} S_{13}^3) x+2, y+2, z+2\,;$$

e quindi la traslazione generale:

$$T)\ x+2m\ ,\ y+2n\ ,\ z+2p\ ;\ m \equiv n \equiv p \pmod 2)\,.$$

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale in $\overline{G}$. Il suo parallelepipedo fondamentale ha per base il quadrato di lato 4, per terzo spigolo la diagonale del cubo di lato 2. Poichè $S_{13}^4 = 1$, $S_{14}^2 = 1$, $(S_{13}S_{14})^3 \equiv 1$, il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo ampliato dell'ottaedro. I movimenti di $\overline{G}$ si distribuiscono rispetto a Γ nelle 24 classi:

$$\left\{\begin{array}{ll}
1)\ x, y, z\,; & S_{14})\ 2-x, z, y\,; \\
S_{13})\ -z, y, x\,; & S_{14}S_{13})\ z+2, x, y\,; \\
S_{13}^2)\ -x, y, -z\,; & S_{14}S_{13}^2)\ x+2, -z, y\,; \\
S_{13}^3)\ z, y, -x\,; & S_{14}S_{13}^3)\ 2-z, -x, y\,; \\
 & \\
S_{13}S_{14})\ -y, z, 2-x\,; & S_{13}^2S_{14})\ x-2, z, -y\,; \\
S_{13}S_{14}S_{13})\ -y, x, z+2\,; & S_{13}^2S_{14}S_{13})\ 2-z, x, -y\,; \\
S_{13}S_{14}S_{13}^2)\ -y, -z, x+2\,; & S_{13}^2S_{14}S_{13}^2)\ 2-x, -z, -y\,; \\
S_{13}S_{14}S_{13}^3)\ -y, -x, 2-z\,; & S_{13}^2S_{14}S_{13}^3)\ z-2, -x, -y\,; \\
 & \\
S_{12}^3S_{14})\ y, z, x-2\,; & S_{14}S_{13}^2S_{14})\ -x, -y, z\,; \\
S_{13}^3S_{14}S_{13})\ y, x, 2-z\,; & S_{14}S_{13}^2S_{14}S_{13})\ z, -y, x\,; \\
S_{13}^3S_{14}S_{13}^2)\ y, -z, 2-x\,; & S_{14}S_{13}^2S_{14}S_{13}^2)\ x, -y, -z\,; \\
S_{13}^3S_{14}S_{13}^3)\ y, -x, z-2\,; & S_{14}S_{13}^2S_{14}S_{13}^3)\ -z, -y, -x\,.
\end{array}\right.$$

Il tal modo è esaurito il gruppo dei movimenti di $\overline{G}$: infatti

$$S_{12} \equiv S_{14}S_{13}^2S_{14}\ ;\ S_{23} \equiv S_{14}S_{13}^2S_{14}S_{13}\ ;\ S_{24} \equiv S_{14}S_{13}^2\ ;\ S_{24} \equiv S_{13}^2S_{14}\,.$$

Le operazioni di seconda specie si ottengono dalle antecedenti moltiplicandole a sinistra per Σ_1, cambiando cioè segno alla prima coordinata. Poichè il ribaltamento M lascia fermo il contorno elementare, nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano 24 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

33. Il tetraedro (c) è limitato dai piani:

$$1)\ x=y\,;\quad 2)\ x=z\,;\quad 3)\ x+z=2\,;\quad 4)\ y+x=0\,.$$

Gli angoli diedri delle sue faccie sono:

$$\alpha_{12}=\frac{\pi}{3}\ ,\ \alpha_{13}=\frac{\pi}{3}\ ,\ \alpha_{14}=\frac{\pi}{2}\ ,\ \alpha_{23}=\frac{\pi}{2}\ ,\ \alpha_{24}=\frac{\pi}{3}\ ,\ \alpha_{34}=\frac{\pi}{3}\,.$$

Esso dà luogo alla superficie di Schwarz, che ne incontra le faccie nell'ordine scritto. Il tetraedro ammette i tre assi binarii di simmetria:

$$1)\ y=0\ ,\ z=1\ ;\ 2)\ y+z=1\ ,\ x=\frac{1}{2}\ 3)\ z-y=1\ ,\ x=\frac{1}{2}\,;$$

i primi due tra essi sono contenuti sulla superficie.

Le simmetrie rispetto alle faccie del tetraedro sono:

$$\Sigma_1)\ y\,,x\,,z\ ;\ \Sigma_2)\,z\,,y\,,x\ ;\ \Sigma_3)\ 2-z\,,y\,,2-x\ ;\ \Sigma_4)\ -y\,,-x\,,z\,.$$

I ribaltamenti attorno agli assi di simmetria sono:

$$M_1)\ x\,,-y\,,2-z\ ;\ M_2)\ 1-x\,,1-z\,,1-y\ ;\ M_3)\ 1-x\,,z-1\,,y+1.$$

Essi formano un Vierergruppe. Poniamo:

$$S_{12}=\Sigma_1\Sigma_2)\ y,z,x\ ;\ S_{13}=\Sigma_1\Sigma_3)y,2-z,2-x\ ;\ S_{14}=\Sigma_1\Sigma_4)-x,-y,z$$
$$S_{23}=\Sigma_2\Sigma_3)2-x,y,2-z\,;S_{24}=\Sigma_2\Sigma_4)z,-x,-y\,;S_{34}=\Sigma_3\Sigma_4)2-z,-x,y+2\,;$$
$$H=S_{13}M_2)\ 1-z,\,y+1,\,x+1\,.$$

Avremo le traslazioni:

$$T_1=S_{14}S_{23}M_1)x-2,y,z\ ;\ T_2=\Sigma_1T_1\Sigma_1)x,y-2,z\ ;\ T_3=\Sigma_2T_1\Sigma_2)x,y,z-2\ ;$$

e quindi la traslazione generale:

$$T)\ x+2m\quad,\quad y+2n\quad,\quad z+2p\,,$$

con m, n, p numeri intieri qualunque. Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale in $\overline{G}$: il suo parallelepipedo fondamentale è il cubo di lato 2. Poichè $H^4\equiv 1$, $(H\,M_2)^3=S_{13}^3\equiv 1$, il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo ampliato dell'ottaedro. I movimenti di $\overline{G}$ si distribuiscono nelle 24 classi:

$$\left\{\begin{array}{ll}
1)\ x, y, z\ ; & M_2)\ 1-x, 1-z, 1-y\ ; \\
H)\ 1-z, y+1, x+1\ : & M_2H)\ z, -x, -y\ ; \\
H^2)\ -x, y, -z\ ; & M_2H^2)\ 1+x, 1+z, 1-y\ ; \\
H^3)\ 1+z, y+1, 1-x\ ; & M_2H^3)\ -z, x, -y\ ; \\
& \\
HM_2)\ y, -z, -x\ ; & H^2M_2)\ x-1, 1-z, y-1\ ; \\
HM_2H)\ y+1, 1-x, z-1\ ; & H^2M_2H)\ -z, -x, y\ ; \\
HM_2H^2)\ y, z, x\ ; & H^2M_2H^2)\ 1-x, 1+z, y-1\ ; \\
HM_2H^3)\ y+1, x-1, 1-z\ ; & H^2M_2H^3)\ z, x, y\ ; \\
& \\
H^3M_2)\ -y, -z, x\ ; & M_2H^2M_2)\ -x, -y, z\ ; \\
H^3M_2H)\ 1-y, 1-x, 1-z\ ; & M_2H^2M_2H)\ z-1, 1-y, x+1\ ; \\
H^3M_2H^2)\ -y, z, -x\ ; & M_2H^2M_2H^2)\ x, -y, -z\ ; \\
H^3M_2H^3)\ 1-y, x-1, 1+z\ ; & M_2H^2M_2H^3)\ 1-z, 1-y, 1-x\ ;
\end{array}\right.$$

In tal modo è esaurito il gruppo dei movimenti di $\overline{G}$: infatti

$$S_{12} \equiv HM_2H^2\ ;\ S_{13} \equiv HM_2\ ;\ S_{14} \equiv M_2H^2M_2\ ;\ S_{23} \equiv H^2\ ;\ S_{24} \equiv M_2H\ ;$$
$$S_{34} \equiv H^2M_2H\ ;\ M_1 \equiv M_2H^2M_2H^2\ ;\ M_3 \equiv H^2M_2H^2.$$

Le operazioni di seconda specie si ottengono dalle antecedenti moltiplicandole a sinistra per Σ_1, scambiando cioè la prima colla seconda coordinata. Poichè il Vierergruppe $1, M_1, M_2, M_3$, lascia fermo il contorno elementare, nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano soltanto 12 ripetizioni della porzione elementare di superficie. Ritroviamo così, come era naturale, tutte le proprietà già ottenute per la superficie di Schwarz.

34. L'ultimo tetraedro (d) è limitato dai piani:

$$1)\ y=0\quad;\quad 2)\ x=z\quad;\quad 3)\ y=z\quad;\quad 4)\ x+y=1.$$

Gli angoli diedri delle sue faccie sono:

$$\alpha_{12}=\frac{\pi}{2}\ ,\ \alpha_{13}=\frac{\pi}{4}\ ,\ \alpha_{14}=\frac{\pi}{4}\ ,\ \alpha_{23}=\frac{\pi}{3}\ ,\ \alpha_{24}=\frac{\pi}{3}\ ,\ \alpha_{34}=\frac{\pi}{3}.$$

Esso dà luogo ad una sola superficie minima, che ne incontra le faccie nell'ordine scritto.

Le simmetrie corrispondenti alle faccie del tetraedro sono:

$$\Sigma_1)\ x\ ,\ -y\ ,\ z\ ;\ \Sigma_2)\ z\ ,\ y\ ,\ x\ ;\ \Sigma_3)\ x\ z\ y\ ;\ \Sigma_4)\ 1-y\ ,\ 1-x\ ,\ z\ .$$

Poniamo:

$$S_{12}=\Sigma_1\Sigma_2)z, -y, x\ ;\ S_{13}=\Sigma_1\Sigma_3)x, -z, y\ ;\ S_{14}=\Sigma_1\Sigma_4)1-y, x-1, z\ ;$$
$$S_{23}=\Sigma_2\Sigma_3)y, z, x\ ;\ S_{24}=\Sigma_2\Sigma_4)z, 1-x, 1-y\ ;\ S_{34}=\Sigma_3\Sigma_4)1-y, z, 1-x.$$

Avremo le traslazioni:

$$T_1=(S_{34}S_{12})^2)\,x+1, y+1, z\quad;\quad T_2=\Sigma_2T_1\Sigma_2)\,x, y+1, z+1\ ;$$
$$T_3=\Sigma_3T_1\Sigma_3)\,x+1\ ,\ y, z+1\ ;$$

e quindi la traslazione generale:

$$T)\ x+m\quad,\quad y+n\quad,\quad z+p\quad;\quad m+n+p\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Il gruppo Γ delle traslazioni T è eccezionale in $\overline{G}$: il suo parallelepipedo fondamentale ha per ispigoli le diagonali di tre faccie del cubo di lato 1 concorrenti in uno stesso vertice.

Poichè $S_{13}^4=1$, $S_{12}^2=1$, $(S_{13}S_{12})^3=1$, il gruppo $\overline{G}$ è isomorfo al gruppo ampliato dell'ottaedro. I movimenti di $\overline{G}$ si distribuiscono nelle 24 classi:

$$\left\{\begin{array}{ll}
1)\ x, y, z\ ; & S_{12})\ z, -y, x\ ; \\
S_{13})\ x, -z, y\ ; & S_{12}S_{13})\ y, z, x\ ; \\
S_{13}^2)\ x, -y, -z\ ; & S_{12}S_{13}^2)\ -z, y, x\ ; \\
S_{13}^3)\ x, z, -y\ ; & S_{12}S_{13}^3)\ -y, -z, x\ ; \\
& \\
S_{13}S_{12})\ z, -x, -y\ ; & S_{13}^2S_{12})\ z, y, -x\ ; \\
S_{13}S_{12}S_{13})\ y, -x, z\ ; & S_{13}^2S_{12}S_{13})\ y, -z, -x\ ; \\
S_{13}S_{12}S_{13}^2)\ -z, -x, y\ ; & S_{13}^2S_{12}S_{13}^2)\ -z, -y, -x\ ; \\
S_{13}S_{12}S_{13}^3)\ -y, -x, -z\ ; & S_{13}^2S_{12}S_{13}^3)\ -y, z, -x\ ; \\
& \\
S_{13}^3S_{12})\ z, x, y\ ; & S_{12}S_{13}^2S_{12})\ -x, -y, z\ ; \\
S_{13}^3S_{12}S_{13})\ y, x, -z\ ; & S_{12}S_{13}^2S_{12}S_{13})\ -x, z, y\ ; \\
S_{13}^3S_{12}S_{13}^2)\ -z, x, -y\ ; & S_{12}S_{13}^2S_{12}S_{13}^2)\ -x, y, -z\ ; \\
S_{13}^3S_{12}S_{13}^3)\ -y, x, z\ ; & S_{12}S_{13}^2S_{12}S_{13}^3)\ -x, -z, -y\ .
\end{array}\right.$$

In tal modo è esaurito il gruppo dei movimenti di $\overline{G}$. Infatti

$$S_{14} \equiv S_{13}^3 S_{12} S_{13}^3 \; ; \; S_{23} \equiv S_{12} S_{13} \; ; \; S_{24} \equiv S_{13} S_{12} \; ; \; S_{34} \equiv S_{13}^2 S_{12} S_{13}^3 \, .$$

Le operazioni di seconda specie si ottengono dalle antecedenti moltiplicando a sinistra per Σ_1, cambiando cioè segno alla seconda coordinata. Poichè nessuna delle operazioni o di prima o di seconda specie lascia fermo il contorno elementare, nel parallelepipedo fondamentale di Γ entrano 48 ripetizioni della porzione elementare di superficie.

CONCLUSIONE

35. Riassumendo, dunque abbiamo:

1.° Esistono infiniti contorni di Schwarz di quattro elementi, che danno luogo ad un gruppo discontinuo di operazioni e quindi ad una superficie minima periodica della simmetria dell'ottaedro. Questi infiniti contorni si distribuiscono in un numero finito di tipi, i quali si corrispondono a due a due nella relazione notata al n.° 16.

2.° Esistono 6 superficie minime periodiche limitate da un quadrilatero gobbo: esse appartengono alla simmetria dell'ottaedro.

3.° Esistono 6 superficie minime periodiche che incontrano ortogonalmente le faccie di un tetraedro: esse appartengono alla simmetria dell'ottaedro e sono le coniugate delle antecedenti.

4.° Qualunque superficie minima periodica, limitata da un contorno di Schwarz, e la cui porzione elementare non ha settori infiniti, ha una tripla periodicità.

NOTA AL N. 16

Volendo trovare degli esempî di superficie minime periodiche, le cui coniugate nell'applicabilità non lo siano, ci si offre subito il caso, in cui il contorno della superficie sia formato da rette, ed il gruppo corrispondente sia quel gruppo speciale osservato dallo Schönflies, che si distingue in modo assoluto da tutti gli altri gruppi discontinui di movimenti.

Si può ottenere un tal gruppo, partendo da due diversi contorni elementari:

1.° il contorno è formato di due rette sghembe; il cui angolo è in rapporto irrazionale con π.

2.° il contorno è formato da due tali rette e dalla loro minima distanza.

Due tali contorni possono effettivamente dar luogo al caso di eccezione accennato: infatti il contorno elementare delle superficie coniugate nell'applicabilità è formato o di due piani facenti un angolo irrazionale con π, o di due tali piani insieme con un terzo ortogonale; il gruppo generato è quindi un gruppo impropriamente discontinuo.

Ho discusso analiticamente questi due casi: il primo non porta nulla di singolare; il secondo dà veramente un caso di eccezione.

Cominciando dal primo caso, sia $\alpha\pi$ l'angolo delle due rette (dove α è un numero irrazionale), τ la variabile complessa della sfera (o del piano equatoriale), σ quella delle linee di curvatura, t quella di un semipiano ausiliario (1).

---

(1) Cf. BIANCHI. *Lezioni di Geometria differenziale.* Cap. XIV, XV.

L'immagine sferica del contorno elementare è un fuso sferico di ampiezza $\alpha\pi$, che viene rappresentato conformemente sul semipiano t colla formula:

$$\tau = c t^{\alpha} \tag{1}$$

dove c è una costante che si può supporre reale e positiva.

L'immagine nel piano σ può avere due forme diverse:

1.° se le due rette appartengono allo stesso sistema di asintotiche, l'immagine del contorno elementare sul piano σ è formata da due rette parallele ad una delle bisettrici degli assi coordinati: la rappresentazione sul semipiano positivo t è data da:

$$\sigma = k\sqrt{i}\,\log t \quad ; \quad \left(\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \tag{2}$$

dove k è una costante reale.

Dalle (1) e (2) si deduce per la forma della funzione di Weierstrass:

$$F(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = i\,\frac{C}{\tau^2} \tag{3}$$

dove C è una costante reale. La superficie corrispondente è l'elicoide.

2.° se le due rette non appartengono allo stesso sistema di asintotiche, l'immagine nel piano σ è data da un angolo retto coi lati paralleli alle bisettrici degli assi coordinati; la rappresentazione sul semipiano t è data da:

$$\sigma = k\sqrt{i}\,t^{\frac{1}{2}} \tag{2*}$$

essendo k reale: la funzione di Weierstrass corrispondente è:

$$F(\tau) = i\,C\,\tau^{\frac{1}{\alpha}-2} \tag{4}$$

essendo C reale. Prendendo C=1, si ha la superficie data dalle formule (¹):

$$
(5) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{R}\, i \displaystyle\int (1-\tau^2)\, \tau^{\frac{1}{\alpha}-2}\, d\tau \\[2ex] y = -\mathrm{R} \displaystyle\int (1+\tau^2)\, \tau^{\frac{1}{\alpha}-2}\, d\tau \\[2ex] z = \mathrm{R}\, 2i \displaystyle\int \tau^{\frac{1}{\alpha}-1}\, d\tau \end{cases}
$$

ossia, ponendo $\tau = \rho\, e^{i\varphi}$:

$$
(5^*) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \operatorname{sen} \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\varphi + \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\, \rho^{\frac{1}{\alpha}+1} \operatorname{sen} \dfrac{1+\alpha}{\alpha}\varphi \\[2ex] y = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} \cos \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\varphi - \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\, \rho^{\frac{1}{\alpha}+1} \cos \dfrac{1+\alpha}{\alpha}\varphi \\[2ex] z = -2\alpha\, \rho^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sen} \dfrac{\varphi}{\alpha} \end{cases}
$$

e quindi

per $\varphi = 0$, $x = 0$, $z = 0$;

per $\varphi = \alpha\pi$, $x \cos \alpha\pi + y \operatorname{sen} \alpha\pi = 0$, $z = 0$;

la superficie contiene cioè due rette, che fanno un angolo $\alpha\pi$, ma che s'incontrano nell'origine: questo caso va dunque escluso, poichè non corrisponde alla nostra ipotesi.

Il 1.° contorno porta dunque soltanto all'elicoide, che, come la sua coniugata, il catenoide, è a gruppo continuo, contrariamente a quel che si voleva.

(¹) Col simbolo $\mathrm{R}\Theta$ indichiamo la parte reale della quantità complessa Θ.

Osserviamo incidentalmente che la superficie definita dalle formule (5*) non ci dà neppure essa un esempio di quelli cercati: infatti dalla forma della funzione di Weierstrass ad essa relativa, si deduce che è identica colla sua associata: le due superficie hanno dunque in particolare lo stesso gruppo.

Veniamo alla discussione del secondo caso.

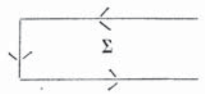
L'immagine sferica della porzione elementare è formata da un triangolo sferico con angoli $\alpha\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, o sul piano equatoriale da un triangolo con due lati rettilinei racchiudenti un angolo $\alpha\pi$ ed un terzo circolare (equatore) ortogonale ad essi. Facendo corrispondere ai suoi vertici $\tau=0$, $\tau=1$, $\tau=e^{i\alpha\pi}$, i punti $t=\infty$, $t=0$, $t=1$ dell'asse reale del semipiano t, la formula che dà la rappresentazione del triangolo sferico sul semipiano t è:

$$
(6) \qquad t = -\frac{1}{4} \frac{\left(1-\tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)^2}{\tau^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (^1)
$$

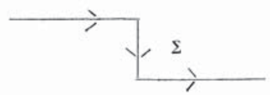
prendendo come determinazione della potenza $\tau^{\frac{1}{\alpha}}$ quella che per $\tau=1$ si riduce ad 1.

L'immagine Σ sul piano σ delle linee di curvatura può avere le due forme diverse:

1.ª



2.ª



essendo le rette parallele alle bisettrici degli assi coordinati.

(¹) Alla formula (6) si arriva coi passaggi seguenti: $z_1 = \tau^{\frac{1}{\alpha}}$; $z_2 = \dfrac{1-z_1}{1+z_1}$; $z_3 = z_2^2$; $t = \dfrac{z_3}{z_3 - 1}$.

La formula di Schwarz e Christoffel, che ci dà la rappresentazione dell'area Σ sul semipiano t è:

nel 1° caso:

$$\sigma = \mathrm{H}\sqrt{i}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} \tag{7}$$

nel 2° caso:

$$\sigma = \mathrm{H}\sqrt{i}\int_0^t \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}}\,dt \tag{7*}$$

H reale

quindi la funzione di Weierstrass corrispondente al 1° caso è:

$$\mathrm{F}(\tau) = i\,\frac{\mathrm{C}}{\tau^2} \tag{8}$$

nel 2° caso:

$$\mathrm{F}(\tau) = i\,\mathrm{C}\,\frac{\left(1-\tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)^4}{\tau^{2+\frac{2}{\alpha}}} \tag{8*}$$

C reale

La (8) conduce all'elicoide; la (8*) alla superficie definita dalle formule (facendo $\mathrm{C}=1$):

$$\left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\,i\int (1-\tau^2)\,\frac{\left(1-\tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)^4}{\tau^{2+\frac{2}{\alpha}}}\,d\tau \\ y &= -\mathrm{R}\int (1+\tau^2)\,\frac{\left(1-\tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)^4}{\tau^{2+\frac{2}{\alpha}}}\,d\tau \\ z &= \mathrm{R}\,2i\int \frac{\left(1-\tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{\tau^{1+\frac{2}{\alpha}}}\,d\tau \end{aligned}\right. \tag{9}$$

cioè, eseguendo le integrazioni e ponendo $\tau = \rho\, e^{i\varphi}$:

$$\left\{\begin{aligned} x =& +\frac{1}{1+\frac{2}{\alpha}}\,\mathrm{sen}\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1+\frac{2}{\alpha}}-\rho^{-\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}\right\} - \\ &-\frac{4}{1+\frac{1}{\alpha}}\,\mathrm{sen}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1+\frac{1}{\alpha}}-\rho^{-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}+6\,\mathrm{sen}\,\varphi\left\{\rho-\rho^{-1}\right\} - \\ &-\frac{4}{1-\frac{1}{\alpha}}\,\mathrm{sen}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1-\frac{1}{\alpha}}-\rho^{-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\right\} + \\ &+\frac{1}{1-\frac{2}{\alpha}}\,\mathrm{sen}\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1-\frac{2}{\alpha}}-\rho^{-\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}\right\}. \\ y =& -\frac{1}{1+\frac{2}{\alpha}}\cos\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1+\frac{2}{\alpha}}-\rho^{-\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}\right\} + \\ &+\frac{4}{1+\frac{1}{\alpha}}\cos\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1+\frac{1}{\alpha}}-\rho^{-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}-6\cos\varphi\left\{\rho-\rho^{-1}\right\} + \\ &+\frac{4}{1-\frac{1}{\alpha}}\cos\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1-\frac{1}{\alpha}}-\rho^{-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\right\} + \\ &-\frac{1}{1-\frac{2}{\alpha}}\cos\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1-\frac{2}{\alpha}}-\rho^{-\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}\right\}. \\ z =& -\alpha\,\mathrm{sen}\,\frac{2\varphi}{\alpha}\left\{\rho^{\frac{2}{\alpha}}+\rho^{-\frac{2}{\alpha}}\right\} + \\ &+8\alpha\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{\alpha}\left\{\rho^{\frac{1}{\alpha}}+\rho^{-\frac{1}{\alpha}}\right\}-12\varphi. \end{aligned}\right. \tag{9*}$$

Le formule per la coniugata nell'applicabilità sono invece:

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
\xi &= -\frac{1}{1+\frac{2}{\alpha}}\cos\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1+\frac{2}{\alpha}}+\rho^{-\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}\right\}+\\
&+\frac{4}{1+\frac{1}{\alpha}}\cos\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1+\frac{1}{\alpha}}+\rho^{-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}-6\cos\varphi\left\{\rho+\rho^{-1}\right\}+\\
&+\frac{4}{1-\frac{1}{\alpha}}\cos\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1-\frac{1}{\alpha}}+\rho^{-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}-\\
&-\frac{1}{1-\frac{2}{\alpha}}\cos\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1-\frac{2}{\alpha}}+\rho^{-\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}\right\}.\\
\eta &= -\frac{1}{1+\frac{2}{\alpha}}\operatorname{sen}\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1+\frac{2}{\alpha}}+\rho^{-\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}\right\}+\\
&+\frac{4}{1+\frac{1}{\alpha}}\operatorname{sen}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1+\frac{1}{\alpha}}+\rho^{-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}-6\operatorname{sen}\varphi\left\{\rho+\rho^{-1}\right\}+\\
&+\frac{4}{1-\frac{1}{\alpha}}\operatorname{sen}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1-\frac{1}{\alpha}}+\rho^{-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}-\\
&-\frac{1}{1-\frac{2}{\alpha}}\operatorname{sen}\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\varphi\left\{\rho^{1-\frac{2}{\alpha}}+\rho^{-\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}\right\}.\\
\zeta &= \alpha\cos\frac{2\varphi}{\alpha}\left\{\rho^{\frac{2}{\alpha}}-\rho^{-\frac{2}{\alpha}}\right\}-\\
&-8\alpha\cos\frac{\varphi}{\alpha}\left\{\rho^{\frac{1}{\alpha}}-\rho^{-\frac{1}{\alpha}}\right\}+12\log\rho.
\end{aligned}
$$

Ponendo poi:

$$
11)\qquad X=\frac{\tau+\tau_0}{1+\tau\tau_0},\ Y=\frac{1}{i}\,\frac{\tau-\tau_0}{1+\tau\tau_0},\ Z=\frac{\tau\tau_0-1}{\tau\tau_0+1},
$$

dalle (9), (10), (11) risulta:

per $\varphi=0$, $\quad x=0$, $z=0$; $\eta=0$, $Y=0$;

per $\varphi=\alpha\pi$, $\quad x\cos\alpha\pi+y\operatorname{sen}\alpha\pi=0$, $z=-12\,\alpha\pi$;

$\xi\operatorname{sen}\alpha\pi+\eta\cos\alpha\pi=0$, $X\operatorname{sen}\alpha\pi+Y\cos\alpha\pi=0$;

per $\rho=1$, $\quad x=0$, $y=0$; $\zeta=0$, $Z=0$.

La superficie (9*) contiene dunque le tre rette volute: la (10) ha i 3 piani di simmetria:

$$\eta=0,\ \xi\operatorname{sen}\alpha\pi+\eta\cos\alpha\pi=0,\ \zeta=0;$$

i primi due dei quali formano un angolo $\alpha\pi$, il terzo è ortogonale ad essi.

Ne segue che, mentre il gruppo della (9*) è propriamente discontinuo, quello della (10) è invece impropriamente discontinuo; la superficie (9*) ci dà dunque effettivamente un esempio di una superficie minima periodica, la cui coniugata nell'applicabilità non lo è: valgono però sempre *in generale* le considerazioni del n.° 16: basta infatti osservare che il gruppo della (9*) gode di proprietà affatto particolari tra i gruppi di movimenti propriamente discontinui.

Non mi è riuscito trovare altri esempi di superficie minime che soddisfino alla stessa condizione.

FINE.