SAGGIO DI UNA INTRODUZIONE

ALLA

TEORIA DELLE FUNZIONI ANALITICHE

SECONDO I PRINCIPII

DEL

Prof. C. WEIERSTRASS

COMPILATO

dal Dott. S. PINCHERLE

NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
Strada di Chiaia, 60.
1880

Tip. A. Trani. Via Medina, 25.

AL CHIARISSIMO ANALISTA

PROFESSORE

FELICE CASORATI

DEDICA L'AUTORE QUESTA MODESTA COMPILAZIONE.

Il conseguimento di un posto di studii all'estero avendomi permesso di frequentare nell'anno 1877-78 i corsi d'Analisi dell'Università di Berlino, mi credeva quasi in obbligo di far conoscere almeno in parte, ai miei compagni di studio, le nuove vedute ed i concetti nuovi che il prof. Weierstrass va introducendo nella scienza e che, mentre vanno diffondendosi in Germania per l'opera dei numerosi suoi discepoli, rimangono ancora quasi sconosciuti agli studenti italiani per la nota avversione di quel maestro per la stampa. Solo mi tratteneva da un tentativo di pubblicazione la difficoltà di una conveniente esposizione di argomenti delicati e per la loro novità soggetti a controversia, e in cui una parola impropriamente adoperata basta a svisare il concetto.

Però, il chiar.mo prof. Battaglini avendomi con cortese invito aperto le colonne di questo Giornale, mi provo a dare un saggio della prima parte di un corso d'Analisi secondo quei principii: presento cioè una *Introduzione alla teorica delle Funzioni Analitiche*, avvertendo che il presente lavoro non è la riproduzione integrale di un corso del prof. Weierstrass, bensì un sunto ricavato da lezioni udite e da fascicoli di corsi antecedenti messi alla mia disposizione dalla gentilezza di alcuni suoi scolari.

A scusare la pochezza del compilatore valgano l'importanza delle nuove considerazioni ed il chiaro nome del loro Autore.

SEZIONE PRIMA

I PRINCIPII FONDAMENTALI DELL'ARITMETICA.

CAPITOLO PRIMO

I numeri formati con una sola unità principale.

§. I. *Definizioni preliminari; le operazioni fondamentali sui numeri interi.*

1. L'Analisi fondandosi senza alcun postulato sul solo concetto di numero, conviene stabilire anzitutto la definizione delle varie specie di numeri e delle operazioni che su di essi si possono eseguire, ed intraprendere perciò, quale introduzione, una rassegna critica dei principii dell'aritmetica.

2. Avendosi sott'occhio varii oggetti, si distingueranno tutti quelli cui appartiene una certa proprietà dicendo che essi costituiscono nel loro insieme una *specie*, e quella proprietà sarà la *caratteristica* della specie.

Uno degli oggetti così distinti sarà, avuto riguardo a quella proprietà, un'*unità* della specie.

Riconoscendo la proprietà caratteristica in successive unità, si avrà il *concetto semplice* di *numero intero*.

Due unità della stessa specie sono *eguali*, cioè equivalenti rispetto alla proprietà specifica.

3. L'insieme di più unità di varie specie costituisce un *numero complesso*.

Le varie specie di unità sono gli *elementi* del numero complesso.

Il passaggio di una scrittura ad un'altra che rappresenti il medesimo numero complesso si dice *trasformazione*. Le trasformazioni si possono operare in virtù delle relazioni che possono esistere fra gli elementi.

(Per esempio una stessa somma di denaro si può esprimere in più modi in scudi, lire e soldi, quando siano note le relazioni che legano fra di loro gli scudi, le lire, i soldi).

Due numeri complessi sono *eguali* se contengono gli stessi elementi lo stesso numero di volte, o se possono rendersi tali per mezzo di trasformazioni.

4. Ammettendo senza discussione il conteggio con numeri interi, ricorderemo le leggi fondamentali delle relative operazioni.

a) Eguaglianza di due numeri interi.

Da $a = b$, risulta $b = a$.

Da $a = b$, e $b = c$, risulta $a = c$.

Queste due leggi si diranno caratteristiche dell'eguaglianza.

b) Addizione dei numeri interi:

$$a + b = b + a$$

$$(a + b) + c = (a + c) + b.$$

Queste saranno le leggi caratteristiche della addizione.

c) Moltiplicazione dei numeri interi.

La moltiplicazione dei numeri interi $a \cdot b$ va definita come addizione di b volte a.

Il significato del moltiplicando essendo diverso da quello del moltiplicatore, non è ozioso il dimostrare la legge d'inversione.

Nella moltiplicazione dei numeri interi si dimostrano elementarmente le seguenti leggi, che riterremo come caratteristiche:

$$ab = ba$$

$$ab \cdot c = ac \cdot b$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

e da queste (fra loro indipendenti) risulta come conseguenza la quarta legge

$$(a + b + c + \ldots)(d + e + f + \ldots) = ad + ae + \ldots + bd + \ldots \qquad (*)$$

5. All'addizione si collega come operazione inversa la sottrazione. Sottrarre b da a significa trovare quel numero, che verrà indicato con

$$a - b,$$

(*) Si noti che quest'ultima legge permette di trovare il risultato di qualunque moltiplicazione di numeri interi, cioè insegna di quante unità si compone il prodotto, quando siano scomposti i fattori nelle loro unità e si sappia che

$$1 \times 1 = 1.$$

che aggiunto a b riproduca a, talchè per definizione

$$(a - b) + b = a.$$

Così alla moltiplicazione si collega la divisione: dividere a per b significa trovare quel numero, che verrà indicato con

$$\frac{a}{b},$$

che moltiplicato per b riproduca a, talchè per definizione

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Ma se a e b sono interi qualunque, non si trova sempre un numero intero che risponda alla definizione di $a - b$ o di $\frac{a}{b}$; ossia la divisione e la sottrazione non sono in certi casi possibili *nel campo* dei numeri interi, per cui tali operazioni vanno in tali casi o dichiarate impossibili, o rese possibili mediante l'estensione del campo dei numeri e l'introduzione di convenienti classi di numeri *complessi* (n. 3).

6. Le considerazioni precedenti sui numeri interi valgono qualunque sia il nome della specie (n. 2) relativa, ed anche se si lascia innominata la specie, (unità e numeri *astratti*).

§. II. *I numeri frazionarii.*

7. Si dirà *unità principale* l'unità, di specie innominata, cui si riferiscono i numeri interi.

Si dirà *parte aliquota* n^sima dell'unità principale una nuova *unità* (o *elemento* § I, 3) che si indicherà con ε_n e verrà definita da

$$\varepsilon_n + \varepsilon_n + \varepsilon_n + \overset{n \text{ volte}}{\ldots\ldots} = 1,$$

ossia:

$$(a) \qquad n\varepsilon_n = 1.$$

Si dirà *numero frazionario* un numero complesso che contenga come elementi l'unità principale ed un numero finito di sue parti aliquote, ciascun elemento entrando un numero finito di volte.

La forma generale di un numero frazionario sarà

$$a = m + m_1 \varepsilon_{n_1} + m_3 \varepsilon_{n_2} + \ldots + m_r \varepsilon_{n_r}$$

8. L'elemento indicato con ε_{mn} è tale per definizione, che

$$mn \cdot \varepsilon_{mn} = 1 ,$$

ma questa eguaglianza potendosi scrivere

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{mn} + \varepsilon_{mn} + \ldots + \varepsilon_{mn} \ (m \text{ volte}) \\ + \varepsilon_{mn} + \varepsilon_{mn} + \ldots + \varepsilon_{mn} \ (m \text{ volte}) \\ + \ldots \ (n \text{ volte}) \ldots \end{array}\right\} = 1$$

e indicando con x l'insieme $n \cdot \varepsilon_{mn}$ degli elementi di una colonna, essendo

$$m \cdot x = 1 ,$$

ne viene per definizione,

$$x = \varepsilon_m$$

e quindi

$$(b) \qquad n \cdot \varepsilon_{mn} = \varepsilon_m .$$

9. Dato un numero frazionario, si possono operare su di esso le trasformazioni indicate dalle due formole (a) e (b), e ridurre ogni numero frazionario a contenere una sola specie di elementi.

Avendosi infatti il numero frazionario

$$a = m_0 + m_1 \varepsilon_{n_1} + m_2 \varepsilon_{n_2} + \ldots + m_r \varepsilon_{n_r}$$

si indichi con n un multiplo comune dei numeri interi

$$n_1 , n_2 , \ldots\ldots , n_r$$

tale che

$$n = n_1 \nu_1 = n_2 \nu_2 = n_3 \nu_3 = \ldots = n_r \nu_r$$

sarà per la (b)

$$\varepsilon_{n_1} = \nu_1 \varepsilon_{n_1 \nu_1} = \nu_1 \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_{n_2} = \nu_2 \varepsilon_{n_2 \nu_2} = \nu_2 \varepsilon_n$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_{n_r} = \nu_r \varepsilon_{n_r \nu_r} = \nu_r \varepsilon_n$$

e per la (a)

$$1 = n \varepsilon_n$$

da cui

$$a = (m_0 n + m_1 \nu_1 + m_2 \nu_2 + \ldots + m_r \nu_r) \cdot \varepsilon_n .$$

La medesima trasformazione serve a ridurre più numeri frazionari ad un solo elemento che sarà il medesimo per tutti i numeri.

L'addizione ed il confronto di più numeri frazionari (in numero finito) si riduce all'addizione e al confronto di numeri interi riferito ad una stessa unità ε_n, in seguito all'accennata trasformazione.

10. La moltiplicazione di due numeri ab dovrà dare un risultato avente le tre proprietà

$$\text{(I)} \qquad ab = ba$$

$$\text{(II)} \qquad ab \cdot c = ac \cdot b$$

$$\text{(III)} \qquad (a + b) \cdot c = ac + bc ,$$

che si prenderanno come *definizione* della moltiplicazione stessa. L'ipotesi che valgano queste tre leggi basta, in virtù della legge

$$\text{(IV)} \qquad (a + b + \ldots)(c + d + \ldots) = ac + ad + bc + bd + \ldots$$

conseguenza delle prime tre, a calcolare un prodotto tosto che sia conosciuto il significato del prodotto $(\varepsilon_m \varepsilon_n)$ di due elementi. Ora questo significato si trova notando che per la regola (IV)

$$(\overset{m \text{ volte}}{\varepsilon_m + \varepsilon_m + \ldots\ldots})(\overset{n \text{ volte}}{\varepsilon_n + \varepsilon_n + \ldots\ldots}) = mn \cdot (\varepsilon_m \varepsilon_n) ,$$

ma per definizione

$$m\varepsilon_m = 1 \quad , \quad n\varepsilon_n = 1$$

onde

$$mn \cdot (\varepsilon_m \varepsilon_n) = 1$$

e quindi

$$(\varepsilon_m \varepsilon_n) = \varepsilon_{mn}$$

Da questa, e dalla regola (IV), si deduce

$$p\varepsilon_m \cdot q\varepsilon_n = pq \cdot \varepsilon_{mn} ,$$

regola della moltiplicazione per due frazioni qualunque.

11. Il quoziente $\frac{a}{b}$ (5) di due numeri interi a e b non è sempre esprimibile con numeri interi, ma lo è sempre con numeri frazionari.

Anzitutto, essendo per la definizione di quoziente

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

ne viene

$$\frac{1}{n} = \varepsilon_n .$$

Di più, essendo per la stessa definizione

$$n \cdot \frac{m}{n} = m$$

e d'altra parte, (n. 10):

$$n \cdot m\, \varepsilon_n = m ,$$

sarà:

$$m\varepsilon_n = \frac{m}{n} .$$

Il quoziente di due numeri frazionari è sempre esprimibile con un numero frazionario; infatti

$$\frac{p\varepsilon_m}{q\varepsilon_n} = pn \cdot \varepsilon_{mq} .$$

come si riprova moltiplicando questo risultato per $q\varepsilon_n$, ottenendosi per prodotto $p\varepsilon_m$.

Essendosi trovato che l'elemento ε_n equivale al quoziente $\frac{1}{n}$, si potrà abbandonare la notazione ε_n, $m\varepsilon_n$ e scrivere $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ come si usa generalmente.

§. III. *I numeri formati dall'unità principale e da un numero infinito di sue parti aliquote.*

12. *a*) Un numero si dice *determinato* quando si sa di quali *elementi* è composto e quante volte in esso compare ciascun elemento.

Con *elemento* s'intende l'unità principale e le sue parti aliquote.

Es. Il numero 0,363636... è determinato perchè si sa che in esso entrano gli elementi $\frac{1}{10^{2n+1}}$, ciascuno di essi 3 volte, e gli elementi della forma $\frac{1}{10^{3n}}$, ciascuno 6 volte. Così è determinato il numero $\Sigma \frac{1}{n(n+1)}$ perchè si sa che consta degli elementi

$$1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{6} , \frac{1}{12} , \frac{1}{20} , \ldots$$

ciascuno dei quali compare una volta; così è determinato il numero $\Sigma \frac{1}{n}$, ecc. E evidente che l'ordine in cui si presentano questi elementi è affatto indifferente.

b) Un numero si dice *definito* quando non si possono indicare *a priori* gli elementi che lo compongono, ma si possono determinare di mano in mano questi elementi mediante un determinato algoritmo.

In questo senso il numero $\sqrt{2}$ si dirà definito quando lo si voglia esprimere per mezzo degli *elementi* decimali che lo compongono: il noto algoritmo dell'estrazione di radice quadrata permette di determinare di mano in mano questi elementi, ma non di assegnare *a priori* il numero di volte che comparirà l'elemento $\frac{1}{10^n}$.

c) Se da un numero, determinato in qualunque modo, estragghiamo un numero finito di elementi, avremo un numero, che si dirà *parte integrante* del primitivo. Un numero che è parte integrante di un numero dato, o che si può rendere parte integrante per mezzo di una trasformazione (n. 3), si dice *contenuto* nel numero dato.

d) Se a è un numero composto degli elementi

$$\frac{1}{m_1} , \frac{1}{m_2} , \frac{1}{m_3} , \ldots\ldots , \frac{1}{m_n} , \ldots$$

dove $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ sono numeri interi tutti disuguali o eguali al più in numero finito, i numeri

$$a_1 = \frac{1}{m_1}$$

$$a_2 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$a_3 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

saranno parti integranti di a. E qualunque sia il numero c parte integrante di a o contenuto in a, si potrà sempre determinare un valore n tale che sia

$$c \leq a_n. \qquad (*)$$

13. Due numeri composti di infiniti elementi si dicono *uguali* se ogni numero intero o frazionario contenuto nel primo è anche contenuto nel secondo, e viceversa. Da questa definizione segue che:

$$\text{se} \quad a = b, \quad \text{anche} \quad b = a,$$

$$\text{e se} \quad a = b, \quad \text{e} \quad b = c, \quad \text{anche} \quad a = c,$$

che sono le leggi date al n° 5 come caratteristiche dell'eguaglianza.

14. Il numero a si dirà *maggiore* di b se esisterà un numero c contenuto in a, e non in b.

Per giustificare questa definizione si può mostrare che in allora non può esistere un numero *contenuto* in b che non sia anche contenuto in a. Sia infatti un numero c' contenuto in b. Se fosse $c' > c$ anche c sarebbe contenuto in b, contro l'ipotesi, e se è $c' < c$ essendo c contenuto in a, a fortiori vi sarà contenuto c'.

Questa definizione dà una via per dimostrare la disuguaglianza, come la definizione del numero precedente somministra una via per dimostrare l'eguaglianza di due numeri.

(*) La disuguaglianza di numeri frazionari si è ricondotta a quella di numeri interi al n. 9.

15. Un numero si dirà *finito* quando si potrà trovare un numero (intero o frazionario) maggiore di qualunque sua parte integrante. Se non sarà possibile trovare un tal numero, il numero proposto si dirà *infinito*.

Un numero sarà certamente infinito se uno stesso elemento, sia pur piccolo quanto si vuole, compare in esso un numero infinito di volte. E per questo il numero *determinato* composto degli elementi

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \ldots$$

è infinito, perchè si ha qualunque sia k

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} < k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$$

cioè l'elemento $\frac{1}{2}$ entra in $\Sigma \frac{1}{n}$ un numero infinito di volte.

Se un numero a è finito, esiste sempre un numero maggiore secondo la definizione a n° 14; infatti esiste per definizione un numero c maggiore di qualunque parte integrante di a, ora sia $A > c$: c è contenuto in A, e non in a, dunque A è maggiore di a.

Viceversa, se a è un numero tale che se ne possa assegnare uno A maggiore e finito, a è necessariamente finito. Infatti se c è contenuto in A e non in a, sarà c per ciò stesso maggiore di qualunque parte integrante di a.

16. La definizione di eguaglianza data a n° 13 può servire a dimostrare l'effettiva eguaglianza di due numeri, come nel seguente esempio:

Dall'identità

$$\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k}$$

facendovi $k = 1, 2, 3, \ldots n$, si deduce

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = 1.$$

Ora si consideri il numero determinato

$$a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots;$$

dico che questo numero è uguale all'unità.

Sia infatti c un numero qualunque contenuto in a, si potrà sempre determinare un numero n tanto grande che sia (12)

$$c \leq \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

ma questo secondo membro è minore dell'unità, per l'identità stabilita; onde c è contenuto in 1.

Viceversa sia c contenuto in 1; si può porre

$$c + c' = 1$$

e si può sempre prendere n tanto grande che sia

$$\frac{1}{n+1} < c'$$

e quindi, per la precedente identità,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} > c$$

ossia c sarà contenuto in a, e per la definizione stabilita, sarà

$$a = 1,$$

c. d. d.

17. *Somma* di due numeri a e b sarà un terzo numero che contenga tutti gli elementi di a e b, ciascuno tante volte quante entrano in a e b insieme.

La somma di un numero qualunque (finito) di numeri si definisce nello stesso modo.

La somma di due numeri finiti e determinati è pur essa determinata e finita. Che essa sia determinata risulta dalla definizione; se poi a e b sono finiti, esistono numeri A e B rispettivamente maggiori, e allora A+B sarà maggiore di qualunque parte integrante di $a+b$, e quindi per definizione $a+b$ sarà un numero finito.

18. *Prodotto* di due numeri determinati a e b è un terzo numero composto dei prodotti di tutti gli elementi di a per ciascuno elemento di b.

Questo numero è determinato, perchè se

$$a = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_r} + \ldots$$

$$b = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_s} + \ldots,$$

esso conterrà tutti gli elementi $\frac{1}{\nu}$ dove ν è un prodotto della forma $m_r n_s$, e conterrà l'elemento $\frac{1}{\nu}$ tante volte quante sono le coppie m_r, n_s che danno un egual prodotto. Di più esso è finito; infatti qualunque parte integrante di ab si può porre sotto la forma

$$c \leq \sum_1^r \frac{1}{m_\mu} \cdot \sum_1^s \frac{1}{n_\nu};$$

ora, essendo per ipotesi a e b finiti, esistono numeri A e B rispettivamente maggiori di qualunque parte integrante di a e b; quindi vi sarà un numero AB maggiore di qualunque prodotto

$$\sum_1^r \frac{1}{m_\mu} \cdot \sum_1^s \frac{1}{n_\nu},$$

e ciò basta a provare che ab è finito.

La definizione precedente conserva valide per il prodotto ab le leggi date a n° 5 come caratteristiche della moltiplicazione.

§. IV. *Rappresentazione concreta dei numeri precedentemente definiti.*

19. Per mostrare che i numeri definiti fin qui in modo astratto possono servire di misura a grandezze concrete, sceglieremo come esempio i segmenti di rette considerati nella sola lunghezza e che perciò potremo riguardare come presi tutti nella stessa direzione.

Somma di due segmenti AB, CD sarà un terzo segmento composto di AB e CD presi per diritto al seguito l'uno dell'altro, e per l'addizione così definita valgono le leggi dette al n° 5 caratteristiche dell'addizione. Posto il significato di somma di due segmenti, si ha subito il significato di *multiplo* e *parte aliquota* di un segmento, che la geometria dà il modo di costruire.

Ciò posto, dati due segmenti A e B e presa la serie dei numeri naturali

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots m, \ldots$$

si troveranno sempre in questa serie due numeri consecutivi tali che sia

$$m\cdot A < B < (m+1)\cdot A$$

ossia

$$B = m\cdot A + R$$

dove R indica un segmento minore di A. Preso un intero qualunque a maggiore dell'unità, si consideri la serie

$$0\ ,\ \frac{1}{a}\ ,\ \frac{2}{a}\ ,\ \frac{3}{a}\ ,\ \ldots\ldots\ \frac{m}{a}\ \ldots\ ;$$

in questa si troveranno due termini consecutivi tali che sia

$$\frac{m_1}{a}\,\mathrm{A} < \mathrm{R} < \frac{m_1+1}{a}\cdot\mathrm{A}$$

e si può porre

$$\mathrm{B} = \left(m + \frac{m_1}{a}\right)\mathrm{A} + \mathrm{R}_1$$

dove R_1 è un segmento minore di $\frac{1}{a}\cdot\mathrm{A}$. Si considera poi la serie

$$0\ ,\ \frac{1}{a^2}\ ,\ \frac{2}{a^2}\ ,\ \frac{3}{a^2}\ ,\ \ldots\ldots\ \frac{m}{a^2}\ ,\ \ldots$$

e si giunge nello stesso modo a porre

$$\mathrm{B} = \left(m + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2}\right)\mathrm{A} + \mathrm{R}_2.$$

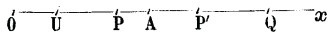
Proseguendo a questo modo, o si giungerà ad un resto R_ν nullo, cioè ad avere

$$\mathrm{B} = \left(m + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \ldots\ldots\ \frac{m_\nu}{a^\nu}\right)\mathrm{A},$$

ed allora B si dirà *misurato* da un numero frazionario rispetto all'unità A; oppure l'operazione non si terminerà, e B avrà per misura un numero composto di infiniti elementi, e *definito* (v. n° 12, *b*) dall'operazione che abbiamo indicata.

I numeri composti dell'unità e di infinite sue parti aliquote non sono dunque di pura astrazione, ma possono servire di misura a grandezze.

20. Di più, ad ogni numero finito e determinato corrisponde una grandezza da esso misurata, fissata che sia *a priori* una unità omogenea arbitraria.



Attenendoci alla rappresentazione delle grandezze per mezzo di segmenti di egual direzione, sia OU un segmento che si prende come unità: esisterà certamente se

$$a = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{m_\nu} + \ldots$$

è un numero finito, un numero intero $n > a$, e si prenda $\mathrm{OQ} = n$. Ciò posto, esisteranno sulla retta indefinita Ox, e precisamente fra O e Q, punti P caratterizzati dalla proprietà di essere i segmenti OP minori di alcune fra le parti integranti di a:

$$a_1 = \frac{1}{m_1}\quad,\quad a_2 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\ ,\ \text{ecc.}$$

Esisteranno altresì punti P' caratterizzati dalla proprietà che i segmenti OP' siano maggiori di tutte le parti integranti a_n di a. Ora tutti i punti del tratto OQ appartengono necessariamente o alla specie P o alla specie P', e nessuno può appartenere alle due specie: di più, ogni segmento OP' è maggiore di tutti i segmenti OP; dovrà quindi esistere un punto A di separazione fra i punti chiamati P e quelli chiamati P', ed il segmento OA sarà misurato dal numero a.

§. V. *Numeri negativi.*

21. Il numero che aggiunto ad un dato numero b produce un numero pure dato a, verrà indicato col simbolo

$$a - b$$

definito dall'eguaglianza

$$b + (a - b) = a$$

Un tal numero non si trova sempre fra quelli fin qui definiti, e quindi siamo condotti, o a dichiarare impossibile in certi casi la sottrazione, e quindi *immaginario* il risultato, o a tentare una ulteriore estensione del campo dei numeri introducendo una nuova classe di numeri *complessi* che diano in tutti i casi il risultato di una sottrazione. Conformemente a ciò che si è già fatto nel caso della divisione, ci atterremo al secondo partito e daremo le seguenti definizioni:

a) Se e è un'unità definita in qualunque modo, chiameremo *unità contraria* ad e ed indicheremo con e' quella definita da

$$(1)\qquad a + e + e' = a$$

esprimente la proprietà che e ed e' aggiunte simultaneamente ad uno stesso numero qualunque, lasciano questo numero invariato. Equivalente alla (1) è l'altra scrittura

$$(2)\qquad e + e' = 0.$$

b) L'unità principale innominata dei numeri interi si dirà unità *positiva*, e la sua contraria si dirà per opposizione *negativa*.

c) L'elemento contrario alla n^{esima} parte dell'unità positiva è la n^{esima} parte dell'unità negativa, diciamo infatti ε'_n la contraria di $\frac{1}{n}$, sarà

$$a+\frac{1}{n}+\varepsilon'_n+\frac{1}{n}+\varepsilon'_n+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\varepsilon'_n=a$$

ossia

$$a+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ldots n \text{ volte } +\varepsilon'_n+\varepsilon'_n+\ldots n \text{ volte}=a$$

ma

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots\ldots n \text{ volte } = 1,$$

onde

$$a+1+(\varepsilon'_n+\varepsilon'_n+\ldots n \text{ volte})=a$$

ossia

$$n \text{ volte } \varepsilon'_n=1'$$

cioè ε'_n è la parte aliquota n^{sima} di $1'$, c. d. d.

d) L'unità positiva e le sue parti aliquote si diranno *elementi positivi*; l'unità negativa e le sue parti aliquote *elementi negativi*; e passiamo a studiare numeri composti di elementi positivi e negativi in numero finito.

22. In tali numeri sono possibili le trasformazioni indicate da

(1) $$a+\varepsilon_n+\varepsilon'_n=a$$

(2) $$n\varepsilon_n=1 \quad , \quad n\varepsilon'_n=1'$$

(3) $$n\varepsilon_{mn}=\varepsilon_m \quad , \quad n\varepsilon'_{mn}=\varepsilon'_m.$$

Con tali trasformazioni, qualunque numero contenente elementi positivi e negativi in numero finito si può ridurre a contenere una sola specie di tali elementi. Sia infatti il numero a. dove $m_1, m_2, \ldots n_1, n_2, \ldots$ sono numeri interi fra loro eguali o diversi

$$a=\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\ldots\frac{1}{m_r}\right)\cdot 1+\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+,\ldots\frac{1}{n_s}\right)\cdot 1'.$$

Per mezzo della trasformazione (3), posso ridurre tutto il coefficiente di 1 ad

una sola specie di elementi, e così tutto il coefficiente di $1'$, cioè

$$a=\frac{k}{m}\cdot 1+\frac{k}{m}\cdot 1'.$$

Ora dei due numeri interi h e k, sia $h>k$ e precisamente

$$h=k+l,$$

sarà

$$u=\frac{k}{m}\cdot 1+\frac{k}{m}\cdot 1'+\frac{l}{m}\cdot 1$$

e per la (1)

$$a=\frac{l}{m}\cdot 1,$$

cioè si riduce a soli elementi positivi. Se $h=k$, a si riduce a zero, se $h<k$ e $k=h+l_1$, a si riduce ai soli elementi negativi.

$$a=\frac{l_1}{m}\cdot 1'.$$

23. Potendosi ridurre ad una sola specie di elementi i numeri composti di elementi positivi e negativi in numero finito, resta definita essenzialmente l'eguaglianza di tali numeri. Però l'eguaglianza si può anche stabilire in altra guisa, e dire che i numeri

$$a=a_1\cdot 1+a_2\cdot 1' \quad , \quad b=b_1\cdot 1+b_2\cdot 1'$$

sono eguali se

(4) $$a_1+b_2=a_2+b_1$$

da cui si deducono facilmente tutte le leggi dell'eguaglianza.

24. Ridotto che sia un numero ad una sola specie di elementi (positivi o negativi) colla trasformazione indicata al n° 22, diremo *valore assoluto* di questo numero il numero che si ottiene lasciando innominata l'unità. Così il valore assoluto di $\frac{k}{m}\cdot 1'$ è $\frac{k}{m}$.

25. L'addizione di due o più numeri contenenti elementi positivi e negativi in numero finito avrà per oggetto la formazione di un nuovo numero contenente tutti

gli elementi che entrano nei sommandi, posto che questi sieno in numero finito. Per questa operazione valgono evidentemente tutte le leggi poste al n° 5 come caratteristiche dell'addizione.

La sottrazione di b da a avendo per oggetto di trovare il numero $a-b$ tale che

$$b+(a-b)=a\,,$$

si riduce all'addizione di a col contrario $b\cdot 1'$ di b; intendendosi con $b\cdot 1'$ il numero che si ottiene sostituendo ad ogni elemento di b il suo contrario; ed infatti, per la definizione di contrario,

$$b+a+b\cdot 1'=a$$

onde

$$a-b=a+b\cdot 1'.$$

Risulta da questa osservazione che ogni numero negativo, come $\frac{m}{n}\cdot 1'$, si può scrivere

$$0-\frac{m}{n} \quad \text{o semplicemente} \quad -\frac{m}{n}$$

cioè il numero che aggiunto ad $\frac{m}{n}$ dà zero. Con ciò torniamo all'ordinaria notazione dei numeri negativi, che riterremo in seguito.

26. Anche qui, come a n° 10, definiremo la moltiplicazione un'operazione caratterizzata dalle leggi

(I) $$ab=ba$$

(II) $$ab\cdot c=ac\cdot b$$

(III) $$(a+b)\cdot c=ac+bc$$

dalle quali risulta

(IV) $$(a+b+\ldots)(c+d+\ldots)=ac+ad+bc+bd+\ldots$$

e quest'ultima legge rende possibile l'esecuzione di qualunque moltiplicazione, tosto che si conosca il significato del prodotto di due elementi.

Aggiungeremo alle leggi della moltiplicazione quest'altra nota caratteristica:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un prodotto sia zero è che sia zero uno dei fattori.

Si eseguisca, secondo la legge (III), la moltiplicazione

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$$

il cui risultato è nullo, essendo $\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)$ nullo per la definizione di elementi contrari. Si avrà

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)=0\,,$$

da cui il secondo termine sarà *contrario* del primo, ovvero:

(V) $$\frac{1}{m}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)=-\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\right).$$

Da questa formola, e dall'applicazione della legge (I), si deduce:

(VI) $$\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{n}=-\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\right).$$

Si eseguisca secondo la legge (III), la moltiplicazione

$$\left(-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$$

il cui risultato è nullo: si trova

$$\left(-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n}\right)+\left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)=0$$

ossia il prodotto $\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)$ sarà contrario a $\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{n}$ che sappiamo essere $-\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}\right)$. Dunque

(VII) $$\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}.$$

Le formole V, VI, VII danno le regole della moltiplicazione degli elementi, da cui, per mezzo della legge (IV) si deducono i prodotti di numeri qualunque. In ciò che precede si è dimostrata la cosidetta regola dei segni.

Per la divisione si terrà la solita definizione, è le regole dei segni si deducono facilmente da quelle della moltiplicazione.

§. VI. *Numeri composti d'infiniti elementi positivi e negativi.*

27. *a*) Un numero che contiene elementi positivi e negativi, anche in numero infinito, si dirà *determinato* quando si sa *quali* elementi in esso entrano e *quante volte* vi entra ciascun elemento.

Si esclude che uno stesso elemento possa comparirvi un numero infinito di volte.

b) Un numero si dirà *finito* quando esiste un numero assegnabile intero e positivo, maggiore del valore assoluto di *qualunque* sua parte integrante.

Segue da ciò che se un numero è finito, sarà altresì finito il numero composto dei soli suoi elementi positivi, e quello composto dei soli suoi elementi negativi.

Segue pure dalle definizioni precedenti che l'ordine in cui si presentano gli elementi che compariscono in un numero finito e determinato è affatto indifferente (*).

(*) Pare conveniente di insistere sul concetto che, secondo il prof. Weierstrass, dobbiamo formarci di un numero composto di infiniti elementi e così, in seguito, di una somma con infiniti sommandi.

Quando un numero è *determinato* nel senso stabilito, noi conosciamo *tutti* i suoi elementi benchè in numero infinito, e noi riguardiamo il numero come l'insieme dei suoi elementi, che comprendiamo tutti colla mente. Non vi ha alcuna difficoltà a concepire in questo senso il numero formato di un'unità, della sua metà, della metà di questa, e così via.

Così se gli elementi sono in numero infinito e positivi e negativi, immaginiamo p. e. senza difficoltà il numero che contiene le parti aliquote $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1} \ldots$ dell'unità positiva e le parti aliquote $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n} \ldots$ dell'unità negativa. Ed è chiaro che in questo modo di concepire tali numeri, resta affatto indifferente l'ordine in cui si scrivono gli elementi.

Non è così che negli ordinari trattati si considerano i complessi di infiniti elementi. La *serie*

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots\ldots$$

28. La teoria dei numeri composti di infiniti elementi positivi e negativi si fonda essenzialmente sulle seguenti proposizioni.

LEMMA. *Se* a *e* b *sono due numeri composti d'infiniti elementi positivi, ed è* $b < a$, *si potrà sempre determinare un numero* ε *tanto piccolo che sia ancora*

$$b + \varepsilon < a.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia infatti

$$a = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{m_r} + \ldots$$

Dire che è $b < a$ vuol dire, per definizione, che esiste un numero contenuto

---

si considera come un limite, definito da ciò che diventa la somma

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

quando n cresce oltre ogni limite. Questo limite S dipende evidentemente dalla forma della funzione S_n di n, e quindi può variare al variare del modo d'aggruppamento dei termini: infatti la serie (1) equivale a

$$(2) \qquad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} + \ldots$$

e se invece scriviamo i termini aggruppandoli diversamente

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots$$

abbiamo la serie del tutto diversa della (2)

$$\frac{5}{1\cdot 3\cdot 2} + \frac{13}{5\cdot 7\cdot 4} + \frac{21}{9\cdot 11\cdot 6} + \ldots + \frac{8n-3}{(4n-3)(4n-1)2n} + \ldots$$

S'intende da ciò come un numero non finito nel senso da noi stabilito, possa dare una serie convergente (nel senso ordinariamente ammesso) quando i termini siano scritti in un determinato ordine.

I numeri che noi diciamo finiti sono quelli soli rappresentati da serie convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini.

in a e non in b; sia c questo numero, si può trovare un indice r tanto grande che sia

$$c \leq \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{m_r}.$$

Aggiungendo ad ambo i membri $\frac{1}{m_{r+1}}$, sarà

$$c + \frac{1}{m_{r+1}} \leq \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{m_r} + \frac{1}{m_{r+1}}$$

cioè $c + \frac{1}{m_{r+1}}$ sarà ancora contenuto in a. Ma se prendo $\varepsilon < \frac{1}{m_{r+1}}$, e non essendo contenuto in b per ipotesi, $c + \frac{1}{m_{r+1}}$ non sarà contenuto in $b + \varepsilon$, e quindi per definizione sarà

$$b + \varepsilon < a,$$

c. d. d.

Teorema I. *Se* a *e* b *sono due numeri composti di infiniti elementi ed è* a > b, *si può sempre definire un numero finito* c *tale che sia*

$$b + c = a. \quad (*)$$

Dimostrazione. Prendasi la serie degli elementi

$$(1) \qquad 1, \ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

(*) Questa dimostrazione non sembrerà oziosa, ove si rifletta che considerando $\sqrt{2}$ e $\sqrt[5]{3}$ per esempio come definiti in modo puramente aritmetico, non si ha dai trattati ordinari alcun modo di ottenere gli *elementi* che compongono $\sqrt{2} - \sqrt{3}$. Così il Bertrand (pag. 286, §. 293 del Trattato d'Aritmetica trad. Novi) schiva la difficoltà ricorrendo per definire le operazioni su tali numeri, alla considerazione delle grandezze che essi misurano. Egli dice infatti: « La somma o differenza di due numeri » incommensurabili è un numero che esprime la somma o la differenza delle gran- » dezze rappresentate coi numeri proposti », definizione che non può convenire ad un'Aritmetica pura, cioè a una genesi dei numeri indipendente dalle grandezze concrete e fondata sul solo concetto semplice di numero intero.

in questa serie, per il lemma precedente, si troveranno certamente due elementi consecutivi $\frac{1}{n_1 - 1}$ ed $\frac{1}{n_1}$ tali che

$$(2) \qquad b + \frac{1}{n_1 - 1} > a \geq b + \frac{1}{n_1}.$$

Se è $a = b + \frac{1}{n_1}$, il teorema è dimostrato e $c = \frac{1}{n_1}$, se invece è

$$b + \frac{1}{n_1} < a$$

si troverà nella stessa serie un elemento $\frac{1}{n_2}$ tale che

$$(3) \qquad b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2 - 1} > a \geq b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2};$$

e potrà essere $\frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2}$, ma non potrà essere $\frac{1}{n_1} < \frac{1}{n_2}$ perchè altrimenti non sarebbe verificata la (2). Se nella (3) vale il segno d'eguaglianza il teorema è dimostrato, nel caso contrario si trova un elemento $\frac{1}{n_3}$ tale che

$$(4) \qquad b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3 - 1} > a \geq b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

e così via. Abbia o no termine l'operazione, essa dà un numero c *definito* (12, *b*); ora dico che questo numero, di cui si possono determinare di mano in mano gli elementi, è finito, e tale che sia

$$b + c = a.$$

a) Il numero c è finito: se infatti fosse infinito, si potrebbero estrarre da c parti integranti maggiori di qualunque numero arbitrario A, ma

$$b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n_r} < a$$

qualunque sia l'indice r: ora se preso A arbitrariamente grande esistesse un in-

tero r tale che sia

$$A < b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n_r}$$

ne verrebbe

$$a > A$$

cioè a sarebbe infinito contro l'ipotesi.

b) Il numero $b + c$ è effettivamente uguale ad a; per ciò dimostreremo che ogni numero contenuto in a è anche contenuto in $b + c$ e viceversa.

Sia infatti N contenuto in $b + c$, vi sarà un valore dell'indice r abbastanza grande perchè sia

$$N < b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n_r}$$

ma per il processo seguìto nella determinazione degli elementi di c, si ha

$$b + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n_r} < a$$

onde N è contenuto in a.

Sia invece N contenuto in a: si può porre

$$a = N + a'$$

dove a' è un numero perfettamente *determinato* perchè N si può senza restrizione supporre composto di un numero finito di elementi.

Se indichiamo con $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r, \ldots$ numeri interi *diversi* fra loro, c si può scrivere

$$c = \frac{m_1}{\nu_1} + \frac{m_2}{\nu_2} + \ldots\ldots + \frac{m_r}{\nu_r} + \ldots$$

e per qualunque valore di r si ha per il processo seguìto

$$b + \frac{m_1}{\nu_1} + \frac{m_2}{\nu_2} + \ldots + \frac{m_r + 1}{\nu_r} > a > b + \frac{m_1}{\nu_1} + \frac{m_2}{\nu_2} + \ldots + \frac{m_r}{\nu_r};$$

pertanto si può prendere r tanto grande che sia

$$\frac{1}{\nu_r} < a'$$

ed allora sarà necessariamente

$$b + \frac{m_1}{\nu_1} + \frac{m_2}{\nu_2} + \ldots\ldots + \frac{m_r}{\nu_r} > N;$$

cioè ogni numero contenuto in a è anche contenuto in $b + c$, c. d. d.

Osservazione. Dimostrata l'esistenza del numero c, se ne possono ottenere gli elementi successivi nella forma che sembrerà più conveniente: per esempio si esprimerà il numero in forma di frazione decimale. Basta prendere le serie

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots \text{ in inf.} \ldots$$

$$0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, 1$$

$$0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \ldots, \frac{9}{100}, \frac{1}{10},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nella prima serie si troveranno due termini consecutivi tali che sia

$$b + m \leq a < b + m + 1;$$

nella seconda, due termini tali che sia

$$b + m + \frac{m_1}{10} \leq a < b + m + \frac{m_1 + 1}{10},$$

nella terza, due termini tali che sia

$$b + m + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{100} \leq a < b + m + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2 + 1}{100};$$

e così si definisce un numero

$$m + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{100} + \ldots\ldots$$

espresso in frazione decimale e di cui è facile dimostrare l'eguaglianza (n. 13) col numero c precedente.

TEOREMA II. *In un numero composto di infiniti elementi positivi e negativi è sempre possibile, con un numero finito di trasformazioni, di ridurre l'insieme degli elementi negativi (o dei positivi) ad essere minore in valore assoluto di qualunque numero dato.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiasi il numero

$$a = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_r} + \ldots - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \ldots - \frac{1}{n_s} - \ldots$$

e pongasi

$$b = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_r} + \ldots \quad , \quad c = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_s} + \ldots$$

e sia per esempio $b > c$. Nella serie indefinita

$$0 , \frac{1}{h} , \frac{2}{h} , \frac{3}{h} , \ldots\ldots$$

dove h è un intero qualunque maggiore dell'unità, esisteranno sempre due termini consecutivi tali che sia

$$\frac{k}{h} < c < \frac{k+1}{h} ;$$

pongo allora

$$c = \frac{k}{h} + c'$$

dove è $c' < \frac{1}{h}$. Si ha così

$$a = b - c = \left(b - \frac{k}{h}\right) - c' :$$

qui $\frac{k}{h}$ è un numero contenente elementi in numero finito, e minore di b, percui è sempre possibile ridurre $b - \frac{k}{h}$ a soli elementi positivi con un numero finito di operazioni; ed il complesso degli elementi negativi si può rendere in valore assoluto minore di qualunque quantità data col prendere h abbastanza grande.

Se fosse $c > b$, si potrebbe ridurre nello stesso modo il complesso degli elementi negativi piccolo quanto si vuole.

29. I teoremi precedenti bastano alla teoria delle tre prime operazioni sui numeri contenenti infiniti elementi positivi e negativi: per la moltiplicazione si ri-

corre alla legge (IV) del n° 26. In quanto alla divisione, se ne terrà parola in seguito.

30. Anche ai numeri contenenti elementi negativi si può dare un significato concreto, come si può mettere in evidenza ricorrendo ancora alla considerazione di segmenti. Solo tali segmenti non vanno più considerati nella sola lunghezza, ma anche nella direzione; contato da destra a sinistra un segmento si riguarderà come *contrario* al segmento medesimo contato da sinistra a destra; cioè

$$AB + BA = 0.$$

A B

Definita così l'unità contraria di una data unità, si definiscono subito i multipli e le parti aliquote di questa unità contraria, e quindi ad ogni numero determinato composto di un numero finito o infinito di elementi positivi e negativi si può far corrispondere un determinato segmento.

CAPITOLO II.

I numeri formati con due unità principali.

§. 1. *Introduzione allo studio dei numeri complessi; prime operazioni.*

31. I numeri contenenti come elementi un'unità principale, la sua contraria e le loro parti aliquote si diranno d'ora in poi *numeri reali* e si indicheranno in questo capitolo colle lettere greche: così sarà in generale

$$\xi = \sum_r \frac{1}{m_r}$$

dove $\frac{1}{m_r}$ indica una parte aliquota dell'unità o della sua contraria, cioè m_r è un numero intero positivo o negativo. Sotto il segno Σ si possono intendere elementi in numero finito od infinito. Se l'unità, invece di essere innominata, si rappresenta con un simbolo e, i numeri reali relativi a quest'unità si rappresenteranno con

$$\xi e = \Sigma \frac{e}{m_r}$$

cioè saranno composti di parti aliquote dell'unità e e della sua contraria.

I numeri reali non bastano a dare la soluzione di tutti i problemi dell'analisi: ed in particolare essi non risolvono il problema espresso dall'equazione

$$x^2 + 1 = 0.$$

Occorre dunque dichiarare tali problemi impossibili o invece conformemente al metodo tenuto fin qui muovere un altro passo allargando ancora il concetto di numero. Ora l'introduzione di una nuova classe di numeri *complessi* si può fare in due modi: sia in via *sintetica*, definendo una nuova unità i dalla proprietà

$$i \times i = -1,$$

sia, come noi faremo, in via *analitica*, proponendoci di rispondere alla seguente dimanda:

Immaginando numeri formati con due unità affatto qualunque e *ed* i, *come*

$$a = \xi e + \xi' i,$$

da quali relazioni dovranno essere legate le due unità principali e *ed* i *perchè per i numeri complessi con esse formati si possa istituire un'aritmetica analoga all'aritmetica ordinaria, cioè in cui le operazioni conservino le loro leggi caratteristiche?*

In seguito dimostreremo come l'introduzione di numeri formati con due unità principali nulla abbia d'*immaginario* o di puramente speculativo, facendo vedere che tali numeri possono servire di misura a grandezze concrete.

32. Due numeri complessi

$$a = \xi e + \xi' i \quad , \quad b = \eta e + \eta' i$$

si diranno eguali se

$$\xi = \eta \quad , \quad \xi' = \eta'.$$

Questa *definizione* dell'eguaglianza lascia sussistere le leggi già dette caratteristiche di eguaglianza, e riconduce le ricerche sull'eguaglianza dei numeri complessi a operazioni su numeri reali.

La *somma* di due numeri complessi a e b si definirà come il numero che si ottiene aggiungendo gli elementi di b con quelli omogenei di a cioè

$$a + b = (\xi + \eta) e + (\xi' + \eta') i.$$

Valgono evidentemente, in virtù di questa definizione, le leggi caratteristiche

dell'addizione. La sottrazione si riconduce ad una addizione, cangiando tutti gli elementi del sottraendo nei loro contrari.

L'eguaglianza e l'addizione dei numeri complessi si sono dunque potute definire senza stabilire alcun legame fra le unità e ed i: questo legame invece si dovrà introdurre quando si voglia definire la moltiplicazione pei numeri complessi colle leggi stesse della moltiplicazione dei numeri reali.

§. II. *Teoria della moltiplicazione dei numeri complessi.*

33. Il prodotto di due numeri complessi è un terzo numero formato dai primi due in guisa che siano soddisfatte le tre leggi

(I) $$ab = ba$$

(II) $$ab \cdot c = ac \cdot b$$

(III) $$a(b + c) = ab + ac$$

dalle quali si deduce

(IV) $$(a + b + \ldots)(c + d + \ldots) = ac + ad + bc + bd + \ldots$$

aggiungendo che: condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto sia nullo è che sia nullo uno dei fattori.

Il problema che intraprendiamo ha per oggetto di cercare quali relazioni si devono far passare fra le due unità principali e ed i perchè da due numeri complessi a e b formati con esse si possa dedurre un prodotto ab pure formato con esse e pel quale valgano le leggi precedenti.

34. Consideriamo prima i vari casi in cui uno dei fattori è complesso.

I. Sia a un numero complesso qualunque

$$a = \xi e + \xi' i$$

con ma intenderemo il numero a ripetuto m volte, da cui (n. 32) risulta

(1) $$ma = m\xi e + m\xi' i$$

II. Dalla I. risulta subito che intendendo con $\frac{1}{m} a$ il numero che ripetuto m volte produce a, si ha

(2) $$\frac{1}{m} a = \frac{1}{m} \xi e + \frac{1}{m} \xi' i.$$

III. Col simbolo di moltiplicazione

$$\xi a$$

dove sia

$$\xi = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \cdots\cdots$$

intenderemo

$$\frac{1}{m_1} a + \frac{1}{m_2} a + \cdots\cdots ;$$

Da questa definizione risultano verificate le tre leggi fondamentali della moltiplicazione: intanto è evidente che

$$\xi(a+b) = \xi a + \xi b ,$$

inoltre essendo

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} a\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m} a\right),$$

come è facile a dimostrarsi, ne risultano le leggi

$$\xi(\eta a) = \eta(\xi a)$$

e

$$(\xi a)(\eta b) = \xi\eta \cdot ab.$$

35. Con ciò non è ancora definito il simbolo ab; solo sappiamo che debbono essere soddisfatte le leggi I, II, e III del n. 33, e che ab si deve esprimere nella forma

$$ab = \omega \cdot e + \omega' \cdot i ;$$

si tratta ora di determinare per mezzo di a e b i numeri reali ω ed ω'.

36. Sia a un numero complesso determinato, e g, h due numeri complessi qualunque, ma tali che uno di essi non si possa dedurre dall'altro nella moltiplicazione per un numero reale ρ. Dico che alle unità e ed i si può sempre sostituire i due numeri g ed h, cioè porre a nella forma

$$a = \xi g + \xi' h. \tag{2}$$

Sia infatti

$$a = \alpha e + \alpha' i \quad , \quad g = \gamma e + \gamma' i \quad , \quad h = \delta e + \delta' i ,$$

si ha, posta possibile la forma (2),

$$a = \xi(\gamma e + \gamma' i) + \xi'(\delta e + \delta' i)$$

da cui

$$\alpha = \xi\gamma + \xi'\delta ,$$

$$\alpha' = \xi\gamma' + \xi'\delta' ,$$

equazioni lineari fra quantità reali, le quali ammettono sempre un sistema di soluzioni ed uno solo per ξ e ξ' purchè non sia

$$\gamma\delta' - \delta\gamma' = 0$$

condizione che equivale ad escludere il caso in cui g non differisce da h che per un moltiplicatore reale ρ.

37. Avendosi due numeri complessi a e b essi si potranno sempre porre sotto la forma

$$a = \xi g + \xi' h \quad , \quad b = \eta g + \eta' h$$

ed eseguendo la moltiplicazione colla regola IV che deve valere per ipotesi e tenendo conto delle leggi del n° 34, viene

$$ab = \xi\eta \cdot gg + (\xi'\eta + \xi\eta')\, gh + \xi'\eta' \cdot hh ;$$

e con ciò il nostro problema viene ridotto ai seguenti termini:

« A conoscere il prodotto di due numeri *qualunque* ab, basta conoscere il si-
» gnificato dei tre prodotti

$$gg \quad , \quad gh \quad , \quad hh$$

» per due numeri *speciali* g ed h, la scelta dei quali è arbitraria, purchè non sia
« $g = \rho h$ ».

Ora, posto

$$\left.\begin{aligned} gg &= \lambda g + \lambda' h \\ hg = gh &= \mu g + \mu' h \\ hh &= \nu g + \nu' h , \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

tutto si riduce a determinare i sei numeri reali

$$\lambda , \lambda' \quad , \quad \mu , \mu' \quad , \quad \nu , \nu'.$$

38. Per vedere se fra questi sei numeri reali passa qualche relazione ricordiamo che deve essere per la IIª legge,

$$ggh = ghg\,, \qquad \text{e} \qquad hgh = hhg\,;$$

sviluppando per mezzo della (3) ed eguagliando i coefficienti di g ed h, che ora fungono da unità, si ottiene;

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda'\nu = \mu\mu' \\ \lambda\mu' + \lambda'\nu' - \mu\lambda' - \mu'^2 = 0 \\ \mu^2 + \mu'\nu - \nu\lambda - \nu\mu = 0 \end{cases}$$

Notisi che non può essere inoltre

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = \nu\mu' - \mu\nu' = \nu\lambda' - \lambda\nu' = 0\,;$$

infatti se ciò fosse, ne risulterebbe

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\nu}{\nu'} = \theta$$

da cui

$$gg = \lambda'(\theta g + h) \quad , \quad gh = \mu'(\theta g + h)$$

ossia

$$g = \frac{\lambda'}{\mu'} h\,,$$

contro l'ipotesi.

39. Se esistono numeri λ, λ', μ, μ', ν, ν' soddisfacenti alle relazioni (4), esisterà eziandio un numero determinato e godente della proprietà

$$(5) \qquad ea = a$$

dove a è un numero qualunque.

Posto infatti

$$e = \eta g + \eta' h \quad , \quad a = \xi g + \xi' h$$

sarà

$$ea = \eta\xi \cdot gg + (\eta\xi' + \eta'\xi)\, gh + \eta'\xi' \cdot hh$$

e ponendo per gg, gh, hh i valori (3)

$$ea = [\eta\xi\lambda + (\eta\xi' + \eta'\xi)\,\mu + \eta'\xi'\nu]\, g + [\eta\xi\lambda' + (\eta\xi' + \eta'\xi)\,\mu' + \eta'\xi'\nu']\, h$$

e dovendo essere soddisfatta la (5), si avrà

$$\begin{cases} \eta\xi\lambda + (\eta\xi' + \eta'\xi)\,\mu + \eta'\xi'\nu = \xi \\ \eta\xi\lambda' + (\eta\xi' + \eta'\xi)\,\mu' + \eta'\xi'\nu' = \xi' \end{cases}$$

e queste dovendo valere qualunque siano i numeri ξ e ξ', si avranno per determinare η ed η' le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \eta\lambda + \eta'\mu = 1 & \eta\mu + \eta'\nu = 0 \\ \eta\lambda' + \eta'\mu' = 0 & \eta\mu' + \eta'\nu' = 1\,, \end{cases}$$

ed i valori di η, η' che si cavano dalle prime due coincidono con quelli che si cavano dalle due ultime in virtù delle relazioni (4).

Se in luogo di g, che si poteva scegliere arbitrariamente, prendiamo il numero e di cui si è dimostrata l'esistenza, si ha per la definizione di e,

$$ee = e \quad , \quad eh = h \quad , \quad hh = \nu e + \nu' h$$

e così

$$\lambda = 1 \quad , \quad \lambda' = 0 \quad , \quad \mu = 0 \quad , \quad \mu' = 1$$

e il problema della moltiplicazione complessa si riduce ora a determinare ν e ν'.

40. Il numero h essendo arbitrario, lo si può determinare colle seguenti posizioni. Facciasi

$$h_1 = -\frac{\nu'}{2} e + h\,,$$

sarà

$$h_1 h_1 = \left(\frac{\nu'^2}{4} + \nu\right) e$$

ossia, indicando con $\mathfrak{S}$ il valore assoluto del numero reale $\frac{\nu'^2}{4} + \nu$,

$$h_1 h_1 = \mathfrak{S} e\,, \qquad \text{o} \qquad h_1 h_1 = -\mathfrak{S} e\,,$$

secondo che $\frac{\nu'^2}{4} + \nu$ è positivo o negativo. Ora, si può sempre definire un numero reale $\mathfrak{S}_1$ in guisa che sia

$$\mathfrak{S}_1^2 = \mathfrak{S}$$

e si ponga

$$i = \frac{1}{\mathfrak{S}_1} h_1\,,$$

verrà

$$ii = e\,, \qquad \text{o} \qquad ii = -e.$$

Conviene ora esaminare quale di queste due ipotesi sia da adottarsi. Assumendo l'ipotesi

$$ii = e$$

si ponga

$$c = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}i \quad , \quad c_1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}i$$

e si formi il prodotto cc_1 colle regole note; verrà

$$cc_1 = \frac{1}{4}ee + \frac{1}{4}ei - \frac{1}{4}ei - \frac{1}{4}ii = \frac{1}{4}(ee - ii) = 0:$$

ossia il prodotto cc_1 sarebbe nullo mentre non sono nulli i fattori, (essendo e diverso da i e non potendo e avere con i un rapporto reale (n. 36).

41. Siamo giunti così alla conclusione che:

« Se pei numeri complessi formati con due unità principali si vuole conservare » la moltiplicazione colle sue leggi caratteristiche, si troveranno nel campo di questi » numeri complessi due numeri e ed i non aventi rapporto reale, e tali che per essi

$$ee = e \quad , \quad ei = i \quad , \quad ii = -e. \text{ »}$$

Questi numeri particolari e ed i si possono prendere come unità, ed e si potrà pure prendere come unità innominata dei numeri reali: talchè i numeri complessi saranno formati colle due unità 1 ed i, tali che

$$i^2 = -1\,,$$

ed il prodotto di due numeri complessi

$$a = \alpha + \alpha' i \quad , \quad b = \beta + \beta' i$$

darà

$$ab = \alpha\beta - \alpha'\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')\,i.$$

§. III. *Teoremi sui numeri complessi.*

42. Ritenendo le denominazioni usuali diremo α *parte reale* ed $\alpha' i$ *parte immaginaria* del numero complesso

$$a = \alpha + \alpha' i.$$

Diremo *valore assoluto* del numero complesso il valore positivo del radicale

$$\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2}\,,$$

ed il valore assoluto del numero a si rappresenterà per brevità con $|a|$. Il valore assoluto di un numero complesso si dice anche *modulo*, ma quest'ultimo vocabolo usandosi in matematica con molti e svariati significati, non è forse inopportuna la espressione di *valore assoluto* proposta dal prof. Weierstrass.

In ciò che segue le due espressioni verranno usate indistintamente.

43. Teorema I. *Il modulo di una somma non è mai superiore alla somma dei moduli dei sommandi.*

Dimostrazione. Abbiansi da sommare i numeri

$$a = \alpha + \alpha' i \quad , \quad b = \beta + \beta' i\,,$$

sarà

$$a + b = \alpha + \beta + (\alpha' + \beta')\,i.$$

Ora

$$|a + b|^2 = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha' + \beta')^2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha'\beta'$$

$$(|a| + |b|)^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 + 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2}\,\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}.$$

Ora dico che anche nel caso più sfavorevole in cui $\alpha\,,\beta\,,\alpha'\,,\beta'$ sono positivi, si ha

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' \leq \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2}\,\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}\,;$$

infatti si ha sempre

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 \geq 0$$

onde

$$2\alpha\beta\,\alpha'\beta' \leq \alpha^2\beta'^2 + \beta^2\alpha'^2$$

ed aggiungendo $\alpha^2\beta^2 + \alpha'^2\beta'^2$ ai due membri

$$(\alpha\beta + \alpha'\beta')^2 \leq (\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)$$

c. d d.

TEOREMA II. *Il modulo di un prodotto è uguale al prodotto dei moduli dei fattori.*

DIMOSTRAZIONE. Sia ancora

$$a = \alpha + \alpha' i \quad , \quad b = \beta + \beta' i \; ;$$

dico che

$$|ab| = |a|\,|b|.$$

Infatti

$$ab = \alpha\beta - \alpha'\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')\, i$$

$$|ab| = \sqrt{(\alpha\beta - \alpha'\beta')^2 + (\alpha\beta' + \beta\alpha')^2}$$

mentre

$$|a|\,|b| = \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)}\,;$$

e quadrando si rende manifesta l'eguaglianza di queste due espressioni.

TEOREMA III. *Se*

$$F(a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ \ldots)$$

indica un sistema di operazioni razionali intere (addizioni, moltiplicazioni, o innalzamenti a potenze intere) in numero finito, eseguito sui numeri complessi qualunque a , b , c , ... *pure in numero finito, il valore assoluto del risultato dell'operazione precedente non sarà mai superiore al risultato dello stesso sistema di operazioni eseguito sui valori assoluti dei numeri* a , b , c, ... ; *cioè*

$$|F(a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ \ldots)| \leq F(|a|\ ,\ |b|\ ,\ |c|\ ,\ \ldots).$$

Questo teorema, che ci servirà di frequente in seguito, risulta immediatamente dalle due proposizioni che precedono.

§. IV. *Rappresentazione dei numeri complessi.*

44. In ciò che segue si mostrerà che anche ai numeri riferiti a due unità principali si può dare un significato concreto, giustificando così quanto si è detto a n. 31.

In segmenti di rette posti in un medesimo piano, consideriamo come note caratteristiche la lunghezza e la direzione, e diciamo quindi *eguali* due segmenti di eguale lunghezza, paralleli e contati nel medesimo senso. Se a e b sono due segmenti paralleli, di lunghezza qualunque, si potrà sempre porre

$$a = \xi b\ ,$$

dove ξ è un numero reale positivo o negativo secondo che a e b sono contati nel medesimo senso o in senso contrario. L'uguaglianza definita in questo modo soddisfa alle leggi caratteristiche del n. 5.

Se a e b sono due segmenti in direzione diversa, si chiamerà somma di questi il terzo segmento che si ottiene portando un segmento b' uguale a b e nella direzione di b al seguito di a, ed unendo il primo estremo di a coll'ultimo di b. Dalla costruzione indicata segue che l'addizione definita in questo modo soddisfa alle leggi caratteristiche, come si può dimostrare con costruzione geometrica semplicissima.

45. Le grandezze così definite si ponno rappresentare con numeri complessi riferiti a due unità principali.

Se infatti si prendono due segmenti qualunque OA ed OB come unità, colla sola condizione che siano di direzione diversa, si potrà sempre dagli estremi di un terzo segmento qualunque MN tirare le parallele ad OA ed OB rispettivamente, e porre così

$$MN = \xi \cdot OA + \eta \cdot OB$$

dove ξ ed η sono numeri reali. L'addizione e l'eguaglianza si possono definire per tali numeri senza stabilire alcun legame fra le unità OA ed OB; per poter definire la moltiplicazione occorre invece fare su queste unità quelle restrizioni che si conoscono dalle ordinarie rappresentazioni geometriche (di Gauss e Cauchy) dei numeri complessi (*).

(*) Un ulteriore studio sui numeri dovrebbe proporsi la questione: se si debbano introdurre nell'Aritmetica numeri formati con più di due unità principali. Una tale introduzione sembra per ora inutile per due ragioni: primo, perchè nello stato attuale dell'analisi non si possono enunciar problemi esprimibili con operazioni aritmetiche e che non abbiano per soluzione numeri complessi quali li abbiamo definiti; secondo, perchè volendo introdurre numeri formati con tre o più unità distinte non si può per tali numeri definire una operazione analoga alla moltiplicazione senza abbandonare almeno in parte le leggi caratteristiche di questa operazione. Un'aritmetica di questi numeri è stata però ideata e costituisce la cosidetta Teoria dei Quaternioni.

CAPITOLO III.

Delle somme di infiniti sommandi, e dei prodotti di infiniti fattori.

.....

§. I. *Somme di infiniti sommandi positivi.*

46. Una operazione si dirà *virtualmente* eseguibile quando il risultato dell'operazione sarà un numero *determinato*, non curando se sarà nel tempo stesso finito.

Una operazione si dirà *effettivamente* eseguibile quando il risultato sarà *finito* e determinato.

Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri finiti e determinati in numero finito, d'altronde reali o complessi, il risultato delle operazioni

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad \text{ed} \qquad a_1 a_2 \ldots a_n$$

è finito e determinato, cioè tali operazioni sono sempre effettivamente eseguibili: vogliamo ora studiare cosa avviene di tali operazioni se il numero dei sommandi o dei fattori diventa infinito.

47. Siano

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots$$

numeri contenenti *soli elementi positivi*: e siano questi numeri in numero finito o infinito, ma tutti determinati *e tali che uno stesso elemento non comparisca nel loro insieme un numero infinito di volte*. Chiameremo *somma* di questi numeri un nuovo numero contenente tutti gli elementi delle a_i, e ciascun elemento tante volte quante entra nell'insieme delle a_i: una tal somma è sempre *virtualmente* eseguibile, e lo studio che intraprendiamo ha per oggetto di cercare sotto quali condizioni essa sarà pure effettivamente eseguibile. Saranno indifferentemente considerate le somme in cui il numero dei sommandi è semplicemente o molteplicemente infinito.

48. Teorema I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una somma di infiniti sommandi sia finita, è che estraendo sommandi in numero qualunque ma finito, la somma dei numeri estratti si mantenga costantemente minore di un numero assegnabile.*

Dimostrazione. Siano $a_1, a_2, a_3, \ldots$ i sommandi e A_s la somma di un numero qualunque ma finito di essi; qualunque sia la somma A_s si può sempre determinare l'indice n in modo che sia

$$A_s \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Sia ora

$$A_s > M$$

dove M è un numero qualunque assegnabile; esisterà una *parte integrante* (n. 12) di A_s contenuta in A_s e non in M, e sia

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_\nu} > M;$$

ma questa parte integrante di A_s è *a fortiori* parte integrante della somma S di *tutte* le a_n; onde se M si può prendere grande quanto si vuole, S sarà infinita, e la condizione enunciata è necessaria.

Esiste un numero N maggiore di qualunque somma A_s; cioè sia

$$N > a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$

qualunque sia l'indice n: ciò significa che esiste un numero contenuto in N e non in

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n:$$

e quindi estratta da essa somma una parte integrante qualsivoglia

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_\nu}$$

sarà *a fortiori*

$$N > \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{m_\nu};$$

ma l'indice n essendo arbitrariamente grande, qualunque parte integrante di S si potrà considerare come parte integrante di una A_s, cioè S sarà finita (per definizione) e la condizione enunciata è anche sufficiente.

Teorema II. *Una somma di infiniti sommandi non cambia di valore se si fanno trasformazioni lecite sugli elementi dei sommandi stessi.*

Questa proposizione si dimostra immediatamente fondandosi sulla definizione di eguaglianza data a n. 13. Conviene ricordare che le trasformazioni lecite sono quelle indicate a n. 8.

Teorema III. *In una somma finita di infiniti sommandi si possono aggruppare i termini come si vuole ed anche in gruppi, ciascuno dei quali contenga infiniti sommandi: e la somma dei gruppi così formati è uguale alla somma primitiva.*

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$a_1 , a_2 , a_3 , , \ldots\ldots , a_n , \ldots$$

i sommandi, la cui somma sia S, e siano i gruppi

$$b_1 = a_1' + a_2' + a_3' + \ldots\ldots$$

$$b_2 = a_1'' + a_2'' + a_3'' + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

che nel loro insieme contengono tutti i termini della somma S. Sia un elemento $\frac{1}{n}$ qualunque: se si giunge a dimostrare che $\frac{1}{n}$ entra tante volte nella somma S delle a quanto nella somma S' delle b, sarà dimostrata l'eguaglianza dei due numeri S ed S'. Ora, preso a considerare l'elemento $\frac{1}{n}$, sappiamo che esso entra in un numero finito di termini che denoteremo con

$$\overline{a_1} , \overline{a_2} , \ldots\ldots \overline{a_m} ,$$

e non in altri: siccome poi le b si possono supporre formate senza trasformazione degli elementi delle a, $\frac{1}{n}$ non potrà comparire che in quelle b in cui entra uno dei termini $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, . . . , $\overline{a_m}$: e quindi comparirà in S' tante volte quante in S. Lo stesso potendosi ripetere per tutti gli elementi delle a, ne viene che i due numeri S ed S' conterranno gli stessi elementi ciascuno lo stesso numero di volte, e quindi saranno eguali, essendo evidente che non potrà comparire nella S' un elemento che non sia contenuto nelle a, perchè supponiamo di formare le somme b senza fare trasformazioni sugli elementi delle a.

TEOREMA IV. *Se in una somma di infiniti sommandi*

$$a_1 , a_2 , \ldots\ldots , a_n , \ldots$$

i termini si scompongono in somme di altri termini anche in numero infinito

$$a_1 = b_1 + b_1' + b_1'' + \ldots$$

$$a_2 = b_2 + b_2' + b_2'' + \ldots$$

e se la somma dei sommandi a *ha un valor finito, avrà pure un valor finito la somma dei sommandi* b.

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare questo teorema basterà far vedere che la somma dei termini b è finita, in quanto che la prima serie si potrà riguardare come risultante da un aggruppamento dei termini della seconda, e la loro eguaglianza sarà quindi conseguenza del teorema precedente.

Osservasi ora che essendo finita per ipotesi la Σa, esisterà (teor. I) un numero M finito maggiore della somma di un numero qualunque ma finito di termini a; cioè per qualunque valore finito di n si avrà

$$M > a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n .$$

Si prenda ora una somma di termini b in numero qualunque ma finito

$$b_h + b_k + \ldots\ldots + b_r ;$$

la b_h entrerà in una delle a, la b_k nella stessa a o in un'altra, ma indicando con

$$\overline{a_1} , \overline{a_2} , \ldots\ldots , \overline{a_s}$$

le a in cui entrano le b precedenti, sarà sempre

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_s} \geq b_h + b_k + \ldots + b_r ,$$

e quindi *a fortiori*

$$M > b_h + b_k + \ldots\ldots + b_r$$

e questo basta, in virtù del teor. I, a dimostrare che la somma delle b è finita, e quindi eguale alla somma delle a, c. d. d.

49. Se a e b sono due numeri i cui elementi siano rispettivamente

$$\frac{1}{m_r} , (r = 1 , 2 , 3 , \ldots \mu , \ldots) \quad \text{ed} \quad \frac{1}{n_s} (s = 1 , 2 , 3 , \ldots \nu , \ldots)$$

il prodotto ab di questi numeri è un terzo numero che contiene come elementi $\frac{1}{m_r n_s}$ per tutte le combinazioni possibili degli indici r ed s.

Da questa definizione di *prodotto* segue che la formola,

$$(a) \qquad a(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) = ab_1 + ab_2 + ab_3 + \ldots$$

vera se la somma tra parentesi contiene un numero finito di termini, si conserva

ancora vera se questi termini sono in numero infinito, purchè ne sia finita la somma: infatti i due membri dell'eguaglianza precedente sono formati degli stessi elementi, che compariscono ciascuno lo stesso numero di volte.

Abbiansi ora le due somme di infiniti sommandi ed aventi valor finito

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_\lambda + \ldots \quad , \quad S' = b_1 + b_2 + \ldots + b_\mu + \ldots ,$$

e si consideri la somma

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + \ldots + a_\lambda b_\mu + \ldots$$

che contiene per sommandi i prodotti binari $a_\lambda b_\mu$ formati in tutti i modi possibili.

La somma dei termini $a_\lambda b_\mu$ sarà finita. Si prenda infatti la somma di quanti si vogliono tali prodotti binari, purchè in numero finito, e la si indichi con G; si potranno sempre assegnare agli indici l ed m valori finiti tanto grandi che sia

$$G < \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{m} a_\lambda b_\mu :$$

ora il secondo membro di questa diseguaglianza non è altro che

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda\right)\left(\sum_{\mu=1}^{m} b_\mu\right);$$

inoltre se le somme S ed S' sono finite si potranno sempre assegnare due numeri finiti L ed M tali che per grandi che siano gl'indici l ed m, sia (48)

$$\sum_{\lambda=1}^{l} a_\lambda < L \quad , \quad \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu < M$$

e quindi qualunque sia G,

$$G < LM$$

il che dimostra in virtù del teorema I del n. 48 essere finita la somma degl'infiniti prodotti $a_\lambda b_\mu$.

Questa somma essendo finita, i suoi termini si potranno aggruppare come si vuole in virtù del teorema III del n. 48, e si potranno scrivere

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \ldots\ldots +$$
$$a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \ldots\ldots +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

o anche, per l'osservazione fatta in principio del presente n. sulla formola (α)

$$a_1 (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) +$$
$$a_2 (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) +$$
$$\ldots\ldots\ldots =$$
$$= a_1 S' + a_2 S' + a_3 S' + \ldots$$

ed applicando da capo la stessa formola (α),

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) S' = SS'.$$

Resta così dimostrato che la somma degl'infiniti prodotti $a_\lambda b_\mu$ non è altro che il prodotto delle due somme S ed S'.

50. Avendosi ancora infiniti numeri soddisfacenti alle condizioni enunciate a n. 47,

$$(1) \qquad a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 , \ldots$$

si dirà che le somme

$$(2) \qquad \begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \end{cases}$$

convergono verso un numero S, se preso ε arbitrariamente piccolo si potrà assegnare un numero N tale che per tutti i valori dell'indice n superiori ad N sia

$$(3) \qquad S - S_n < \varepsilon.$$

Dico ora che se i numeri (1) hanno una somma finita S nel senso stabilito a n. 46, le somme (2) *convergeranno* verso questa somma S.

Infatti, essendo la somma di tutte le a finite, un elemento $\frac{1}{m}$ piccolo pur quanto

si vuole comparirà in questa somma solo un numero finito di volte; si potrà pertanto formare una somma S_N che contenga l'elemento $\frac{1}{m}$ tante volte quante entra in S stessa, ed allora tutti i termini a che non entrano in S_N non potranno nel loro insieme dare un elemento $\frac{1}{m}$, talchè sarà per tutti i valori di $n \geq N$

$$S - S_n < \frac{1}{m}$$

che equivale alla disuguaglianza (3), potendosi $\frac{1}{m}$ prendere minore di qualunque quantità data ε.

Reciprocamente, se una serie di numeri come (1) è tale che le somme (2) convergono ad un numero finito A questo numero sarà la somma di tutte le (1); infatti dall'essere per qualunque ε soddisfatta la

$$A - S_n < \varepsilon$$

ne viene soddisfatta la condizione del teor. I del n. 48 e quindi la somma delle a è finita: essendo finita essa non può differire da A per la prima parte di questo n.

Nota. – La presente osservazione stabilisce il legame fra le somme di infiniti sommandi quali le abbiamo considerate e le *serie* di infiniti termini positivi quali si studiano negli ordinari trattati: solo la convergenza, che si prende solitamente a *definizione*, è quì una *proprietà* delle somme finite di infiniti addendi. Per le serie di termini positivi, il concetto di convergenza coincide con quello di *sommabilità* quale è stato qui introdotto, lo stesso non avviene però per le classi più generali di serie.

§. II. *Somme di infiniti sommandi positivi e negativi.*

51. Prima d'intraprendere la teoria delle somme di infiniti sommandi i cui elementi non sono tutti positivi come nel § precedente, sembra opportuno richiamare le seguenti osservazioni e definizioni.

a) Un numero che contiene infiniti elementi positivi e negativi si è detto finito (n. 27, *b*) se esiste un numero A (che si può sempre supporre intero e positivo) maggiore del valore assoluto di *qualunque* parte integrante del numero dato. Risulta da ciò che se un numero composto di infiniti elementi positivi e negativi è finito, saranno finiti separatamente il numero formato con tutti gli elementi positivi, e quello formato con tutti gli elementi negativi presi in valore assoluto.

b) Se a è un numero finito composto di infiniti elementi positivi e negativi, e b è l'insieme degli elementi positivi e c l'insieme degli elementi negativi presi in

valore assoluto, sarà

$$a = b - c\,,$$

ossia si può sempre definire (n. 28 teor. I) un numero eguale ad a e composto di soli elementi positivi se è $b > c$, e di soli elementi negativi se è $b < c$.

c) Si ricordi infine che s'intende per *somma* di infiniti numeri

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\,,\ \ldots\ldots\,,\ a_n\,,\ \ldots$$

un numero che contiene tutti gli elementi che entrano in quei numeri ciascuno tante volte quante comparisce nell'insieme dei detti numeri, e prima condizione necessaria perchè un numero sia finito è che uno stesso elemento non comparisca infinite volte nei sommandi.

52. Una somma di infiniti numeri contenenti elementi positivi e negativi potrà sempre, in virtù dell'osservazione *b*) del n. precedente, ridursi a contenere termini i cui elementi sono tutti positivi in alcuni, tutti negativi negli altri, tali termini si indicheranno con

$$(\alpha) \qquad a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots\ldots\,,\ -b_1\,,\ -b_2\,,\ -b_3\,,\ \ldots$$

dove $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ sono numeri contenenti soli elementi positivi.

La somma di tali numeri sarà finita (n. 51, *a*) se sarà finita la somma di tutti gli elementi (tutti positivi) dei sommandi a, e separatamente finita la somma degli elementi dei sommandi $-b$ (tutti negativi). Da ciò risulta, con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto a n. 48 per la dimostrazione del teor. I, che:

Teorema I. *La condizione necessaria e sufficiente perchè una somma di infiniti termini positivi e negativi sia finita, è che siano finite separatamente la somma degli addendi positivi e quella degli addendi negativi.*

La stessa dimostrazione del teorema III del citato n. 48 permette di dimostrare che:

Teorema II. *Se la somma di infiniti sommandi* (α) *è finita, si possono aggruppare questi sommandi nell'ordine che si vuole senza alterare il valore della somma.*

Non sarà lecito invece, nel caso di sommandi come quelli della serie (α), di enunciare il teorema analogo alla prop. IV del citato n. 48, a meno che non si vengano a scomporre le a e le $-b$ in tante somme di termini che dirò c, tali che si sappia che la somma di tutte le c è finita.

Oltre alla condizione necessaria e sufficiente data dal teor. I perchè la somma di infiniti numeri (α) sia finita, si possono enunciare altri criteri che verranno adoperati in seguito, cioè:

Teorema III. *La condizione necessaria e sufficiente perchè una somma di in-*

finiti termini positivi e negativi sia finita, è che sia finita la serie dei valori assoluti dei termini.

Questa condizione non è evidentemente che un altro enunciato del teorema I.

TEOREMA IV. *La condizione necessaria e sufficiente perchè una somma di infiniti termini positivi e negativi sia finita, è che esista un numero A positivo e maggiore del valore assoluto della somma di un numero qualunque ma finito di termini presi in modo qualunque fra i sommandi.*

DIMOSTRAZIONE. La condizione è necessaria. Se infatti è finita la somma dei numeri

$$(\alpha) \qquad a_1 , a_2 , a_3 , \ldots\ldots , -b_1 , -b_2 , -b_3 , \ldots$$

saranno finite le somme dei numeri a e dei numeri b separatamente, (teor. I) e quindi esisterà un numero A_1 maggiore della somma di termini a in numero qualunque ma finito, ed un numero A_2 maggiore della somma di termini b in numero qualunque ma finito. Il maggiore dei due numeri A_1 ed A_2 sarà evidentemente maggiore del valore assoluto di qualunque somma di termini estratti fra i numeri (α).

La condizione è sufficiente. Esista infatti un numero A maggiore del valore assoluto della somma di un numero qualunque di termini estratti fra i numeri (α); sarà A maggiore, in particolare, della somma di un numero qualunque di termini estratti fra i numeri a, e del valore assoluto della somma di un numero qualunque di termini estratti fra i numeri b: e questo è quanto dire che sono finite le somme dei sommandi a e dei sommandi b separatamente, e quindi per il teor. I che è finita la somma di tutte le quantità (α), c. d. d.

53. Dati infiniti numeri, positivi e negativi, scritti in un ordine determinato,

$$a_1 \quad , \quad a_2 \quad , \quad a_3 , \ldots\ldots$$

e formate le somme

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \quad , \quad (n = 1 , 2 , 3 , \ldots)$$

si dirà che queste somme *convergono* ad una quantità A se preso ε positivo e piccolo ad arbitrio si può determinare un indice N tale che per tutti i valori di $n \geq N$ sia

$$|A - S_n| < \varepsilon.$$

Per queste somme S_n convergenti ad un limite A non vale il teorema dimostrato al n. 50, che la A sia la *somma* nel senso da noi stabilito delle quantità $a_1, a_2, \ldots$ e non risulta neppure dall'esistenza di quel numero A, che le $a_1, a_2, \ldots$

abbiano una somma finita. Ed infatti la convergenza delle somme S_n dipende essenzialmente dall'ordine in cui si prendono i termini $a_1 , a_2 , \ldots$ ossia dal modo con cui varia S_n al crescere di n; ora s'intende che per una certa disposizione dei sommandi la S_n potrà avere una dipendenza coll'indice n tutta diversa della dipendenza che potrà assumere per un'altra disposizione. Non vale più nel caso dei termini positivi e negativi il fatto che si verifica nel caso di soli termini positivi che: « detta « G la somma di un numero qualunque finito di termini presi fra le a_r in ordine « qualsiasi, si potrà sempre determinare un valore dell'indice n tanto grande che « sia $S_n > G$; » fatto su cui si fonda la dimostrazione data a n. 50. E però vero che, se la *somma* delle a_r nel senso da noi stabilito è finita e uguale ad S, le somme S_n convergeranno verso S.

Si vede da ciò che le somme di infiniti sommandi da noi dette *finite* coincidono colle somme delle serie dette *convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini* negli ordinari trattati.

§. III. *Somme di infiniti sommandi complessi.*

54. Un numero complesso $\alpha + \alpha' i$ è determinato se sono determinati i due numeri reali α ed α'.

La somma di più numeri complessi

$$\alpha_1 + \alpha'_1 i \quad , \quad \alpha_2 + \alpha'_2 i \quad , \quad \alpha_3 + \alpha'_3 i , \ldots\ldots$$

si definisce col nuovo numero complesso

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) + (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots) i ,$$

e se sono finiti e determinati i sommandi ed in numero finito sarà finita e determinata la somma.

Se il numero dei sommandi è infinito, l'operazione è *virtualmente* eseguibile nello stesso modo (v. n. 46), ma sarà effettivamente eseguibile solo se saranno finite le somme $\Sigma\alpha_i$ e $\Sigma\alpha'_i$. Abbiamo così il

TEOREMA I. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una somma di numeri complessi in numero infinito sia finita, è che siano finite separatamente le somme delle parti reali e dei coefficienti dell'unità* i.

Oltre a questo si possono enunciare altri due criteri importanti per riconoscere sotto quali condizioni sia finita una somma di infiniti numeri complessi.

TEOREMA II. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una somma di numeri complessi in numero infinito sia finita, è che sia finita la somma dei moduli dei suoi termini.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiasi la somma degl'infiniti numeri

$$\alpha_r + \alpha'_r i \quad , \quad (r = 1 , 2 , 3 , \ldots \text{ in inf.} \ldots).$$

La condizione enunciata è necessaria. La somma dei suddetti numeri abbia un valore finito S; avranno pure un valore finito, per il teorema I, le somme delle quantità α_r ed α'_r, e quindi se con $|\alpha_r|$, $|\alpha'_r|$ indichiamo i valori assoluti dei numeri α_r, α'_r, saranno pure finite le somme di questi valori assoluti per il teor. III del n. 52; percui sarà finita anche la somma delle infinite quantità $|\alpha_r| + |\alpha'_r|$. Ma si ha, prendendo il valore assoluto del radicale:

$$\sqrt{\alpha_r^2 + \alpha'^2_r} \leq |\alpha_r| + |\alpha'_r|$$

ed essendo finita la somma dei secondi membri, sarà *a fortiori* finita la somma dei primi membri di queste diseguaglianze.

La condizione è anche sufficiente. Sia finita la somma degl'infiniti numeri positivi $\sqrt{\alpha_r^2 + \alpha'^2_r}$. Si ha

$$\sqrt{\alpha_r^2 + \alpha'^2_r} \geq |\alpha_r|$$

$$\sqrt{\alpha_r^2 + \alpha'^2_r} \geq |\alpha'_r| ,$$

ossia dall'essere finita la somma delle $\sqrt{\alpha_r^2 + \alpha'^2_r}$ saranno finite le somme delle α_r, α'_r, e quindi per il teorema I, la somma delle $\alpha_r + \alpha'_r i$, c. d. d.

TEOREMA III. *La condizione necessaria e sufficiente perchè la somma di infiniti numeri complessi sia finita, è che la somma di un numero qualunque ma finito di termini presi ad arbitrio fra questi abbia il suo modulo costantemente minore di un numero positivo e finito* A.

DIMOSTRAZIONE. La condizione enunciata è necessaria. Sia finita la somma degl'infiniti numeri $\alpha_r + \alpha'_r i$. Per il teorema II è finita la somma degl'infiniti numeri $\sqrt{\alpha_r^2 + \alpha'^2_r}$: esiste pertanto un numero finito A maggiore della somma di un numero qualunque di termini presi ad arbitrio fra i termini $\sqrt{\alpha_r^2 + \alpha'^2_r}$: ovvero sarà per qualunque valore dell'indice n,

$$A > \sum_{r=1}^{n} \sqrt{\alpha_r^2 + \alpha'^2_r}$$

e quindi *a fortiori* per il teorema I del n. 43,

$$A > \left| \sum_{r=1}^{n} (\alpha_r + \alpha'_r i) \right| .$$

La condizione è sufficiente. Esista un numero A che sia maggiore del modulo di qualunque somma formata con un numero finito di termini $\alpha_r + \alpha'_r i$. Estraggo fra le $\alpha_r + \alpha'_r i$ quelle in cui α_r è positivo, e le indico con $\eta_r + \eta'_r i$: si ha per ipotesi, qualunque sia n,

$$A > \left| \sum_{r=1}^{n} (\eta_r + \eta'_r i) \right|$$

ossia

$$A > \left| \sum_{r=1}^{n} \eta_r + i \sum_{r=1}^{n} \eta'_r \right| ;$$

ma il secondo membro è

$$\sqrt{\left(\sum_{r=1}^{n} \eta_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^{n} \eta'_r\right)^2} \geq \sum_{r=1}^{n} \eta_r ;$$

onde si deduce che il numero A è maggiore della somma di un numero qualunque di η_r.

Si prendano ora quelle $\alpha_r + i\alpha'_r$ in cui la α_r è negativa, e si indichino con $-\theta_r + i\theta'_r$, si trova similmente che A è maggiore della somma di un numero qualunque di θ_r e quindi per il teorema I del n. 48 la somma delle α_r sarà finita. Analogamente si dimostra che è finita la somma delle α'_r, quindi è finita la somma delle $\alpha_r + \alpha'_r i$, c. d. d.

55. TEOREMA. *Se*

$$\alpha_r + \alpha'_r i \quad , \quad (r = 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots)$$

sono numeri complessi in numero infinito, e la somma di questi numeri ha un valor finito S, *le somme*

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} (\alpha_r + \alpha'_r i)$$

verranno a differire da S, *col crescere di* n, *di tanto poco quanto si vuole, ossia convergeranno al valore* S.

DIMOSTRAZIONE. Indico con η_r le α positive, con $-\theta_r$ le negative, con η'_r le α' positive, con $-\theta'_r$ le negative; e pongo

$$S_1 = \sum_1^{\infty} \eta_r \quad , \quad S_2 = \sum_1^{\infty} \theta_r \quad , \quad S_1^n = \sum_1^{n} \eta_r \quad , \quad S_2^n = \sum_1^{n} \theta_r ,$$

$$S'_1 = \sum_1^{\infty} \eta'_r \quad , \quad S'_2 = \sum_1^{\infty} \theta'_r \quad , \quad S'^n_1 = \sum_1^{n} \eta'_r \quad , \quad S'^n_2 = \sum_1^{n} \theta'_r .$$

In virtù del teorema dimostrato a n. 50, preso un numero ε arbitrariamente piccolo sarà possibile trovare valori di n tanto grandi che sia

$$S_1 - S_1^n < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad S_2 - S_2^n < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$S'_1 - S'^n_1 < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad S'_2 - S'^n_2 < \frac{\varepsilon}{4},$$

da cui, essendo

$$|S_1 - S_1^n - (S_2 - S_2^n) + i(S_1' - S'^n_1) - i(S_2 - S'^n_2)|$$

$$< |S_1 - S_1^n| + |S_2 - S_2^n| + |S_1 - S'^n_1| + |S_2 - S'^n_2| < \varepsilon ,$$

sarà per n abbastanza grande corrispondentemente ad ε

$$|S - S_n| < \varepsilon$$

ossia le somme S_n convergeranno ad S, c. d. d.

La convergenza delle somme S_n è indipendente dall'ordine con cui si aggruppano i termini $\alpha_r + \alpha'_r i$, perchè il valore S è indipendente dall'ordine di questi termini.

§. IV. *Prodotti di infiniti fattori.*

56. Se a_1, a_2 sono due numeri complessi determinati,

$$a_1 = \alpha_1 + \alpha'_1 i \quad , \quad a_2 = \alpha_2 + \alpha'_2 i ,$$

il prodotto $a_1 a_2$ sarà pure un numero determinato

$$a_1 a_2 = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha'_1 \alpha'_2 + i(\alpha_1 \alpha'_2 + \alpha_2 \alpha'_1).$$

Analogamente sarà determinato il prodotto di n numeri determinati $a_1, a_2, a_3, .. a_n$: e si tratta in ciò che segue di studiare in qual modo e sotto quali condizioni si potrà definire il prodotto se i fattori sono in numero infinito. La definizione che si darà di *prodotto di infiniti fattori* deve soddisfare alle seguenti condizioni:

a) di coincidere colla definizione ordinaria di prodotto se il numero dei fattori si riduce ad essere finito;

b) debbono valere le leggi caratteristiche della moltiplicazione, cioè essere il valore del prodotto indipendente dalla legge; con cui si aggruppano i fattori;

c) sarà conseguenza della definizione la *convergenza* dei prodotti $P_n = a_1 a_2 \ldots a_n$ col crescere di n ad un valore determinato, che sarà il valore definito come prodotto: cioè preso ε piccolo ad arbitrio si potrà sempre trovare un valore N tanto grande che per $n > N$ sia costantemente

$$|P - P_n| < \varepsilon.$$

Da questa osservazione risulta che col crescere di n, le differenze fra le a_n ed 1 devono tendere allo zero e si è così condotti a porre

$$a_n = 1 + b_n ,$$

dove fra le b_n ve n'è un numero infinito il cui modulo è inferiore a qualunque quantità data.

57. Si ponga

$$(1) \quad \begin{cases} P_1 = 1 + b_1 , \\ P_2 = (1 + b_1)(1 + b_2) = 1 + b_1 + b_2 + b_1 b_2 , \\ P_3 = (1+b_1)(1+b_2)(1+b_3) = 1+b_1+b_2+b_1b_2+b_3+b_1b_3+b_2b_3+b_1b_2b_3 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n = (1+b_1)(1+b_2)\ldots(1+b_n) = 1+b_1+b_2+b_1b_2+\ldots+b_n+b_1b_n+\ldots+b_1b_2b_3\ldots b_n ; \end{cases}$$

si ottiene così P_n espresso in forma di una somma, e precisamente somma delle seguenti quantità g_n:

$$(2) \quad \begin{cases} g_0 = 1 \\ g_1 = b_1 \\ g_2 = b_2 + b_1 b_2 \\ g_3 = b_3 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + b_1 b_2 b_3 \\ g_4 = b_4 + b_1 b_4 + b_2 b_4 + b_1 b_2 b_4 + b_3 b_4 + b_1 b_3 b_4 + b_2 b_3 b_4 + b_1 b_2 b_3 b_4 . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La legge di formazione di queste quantità g è evidente: la g_n si forma moltiplicando per b_n tutti i gruppi che precedono e sommandoli; e si ha

$$(3) \qquad P_n = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots + g_n .$$

Ciò posto, il prodotto degl'infiniti fattori $1 + b_n$ verrà definito nel seguente modo:

« Si chiamerà *prodotto* degl'infiniti fattori $1 + b_n$ e si indicherà con

$$\Pi(1 + b_n)$$

« la *somma* delle g_n definite dalla precedente tabella (2) ogni qualvolta questa « somma riescirà finita ».

Ma sappiamo che la condizione necessaria e sufficiente affinchè una somma di infiniti sommandi sia finita, è che sia finita la somma dei moduli dei termini; noi indicheremo con β_r il modulo b_r, e considereremo la seguente tabella, in cui le σ_n sono maggiori o almeno eguali ai moduli delle g_n, e sono formate coi moduli dei termini della tabella (2):

$$(4)\qquad \begin{cases} \sigma_0 = 1 \\ \sigma_1 = \beta_1 \\ \sigma_2 = \beta_2 + \beta_1\beta_2 \\ \sigma_3 = \beta_3 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots ; \end{cases}$$

ora ci basterà studiare la somma delle quantità positive σ_n per trovare sotto quali condizioni sarà finito il prodotto delle $1 + b_n$.

58. Teorema. « La condizione necessaria e sufficiente affinchè il prodotto de- « gl'infiniti fattori $1 + b_n$ definito come sopra abbia un valore finito, è che sia fi- « nita la somma della quantità β_n, moduli delle b_n ».

Dimostrazione. Che la condizione enunciata sia necessaria risulta evidente dall'essere la $\Sigma\beta_r$ contenuta nella $\Sigma\sigma_r$.

La condizione è anche sufficiente. Si indicherà con S il valore della somma delle β supposta finita, e si distingueranno due casi:

a) $S < 1$. Si parte dall'identità

$$1 + \beta_r = \frac{1}{1 - \frac{\beta_r}{1 + \beta_r}};$$

da questa risulta:

$$(1 + \beta_1)(1 + \beta_2) = \frac{1}{1 - \frac{\beta_1}{1 + \beta_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta_2}{1 + \beta_2}}$$

ma

$$\left(1 - \frac{\beta_1}{1 + \beta_1}\right)\left(1 - \frac{\beta_2}{1 + \beta_2}\right) > 1 - \frac{\beta_1}{1 + \beta_2} - \frac{\beta_2}{1 + \beta_2} > 1 - (\beta_1 + \beta_2)$$

onde

$$(1 + \beta_1)(1 + \beta_2) < \frac{1}{1 - (\beta_1 + \beta_2)}.$$

Moltiplicando il primo membro di questa diseguaglianza per $1 + \beta_3$, il secondo per la quantità maggiore $\frac{1}{1 - \beta_3}$ viene

$$(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)(1 + \beta_3) < \frac{1}{1 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}$$

e così in generale

$$(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)\dots(1 + \beta_n) < \frac{1}{1 - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)}.$$

Se in questa formola alla somma

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots\dots + \beta_n$$

sostituisco S, somma di tutte le β, aumento il 2° membro e quindi *a fortiori*

$$(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)\dots(1 + \beta_n) < \frac{1}{1 - S}.$$

Questa formola serve a dimostrare che il prodotto degl'infiniti fattori $1 + \beta_n$ ha un valor finito. Infatti si è definito come valore di esso prodotto il valore della somma

$$1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots\dots$$

ora

$$1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = (1 + \beta_1)(1 + \beta_2)(1 + \beta_3)\dots(1 + \beta_n) < \frac{1}{1 - S};$$

dunque la somma di un numero qualunque finito di sommandi σ_n si mantiene costantemente inferiore ad un numero finito $\frac{1}{1 - S}$, ed è quindi finita *a fortiori* in valore assoluto la Σg_n.

b) $S \geq 1$. Poichè la S è finita, sarà anche convergente per il n° 50, onde sarà

sempre possibile trovare una tale S_{n+1} che la somma delle rimanenti

$$\beta_{n+2} + \beta_{n+3} + \ldots\ldots$$

abbia un valore minore dell'unità; allora per il prodotto degl'infiniti fattori

$$1 + \beta_{n+2} \quad , \quad 1 + \beta_{n+3} , \ldots\ldots$$

varranno le conclusioni del caso precedente, ed il prodotto restando finito quando lo si moltiplichi per i fattori

$$1 + \beta_1 \quad , \quad 1 + \beta_2 , \ldots , 1 + \beta_{n+1}$$

in numero finito, sarà finita la somma delle σ_n e quindi il modulo della Σg_n, c. d. d.

59. Dimostrato che un prodotto di infiniti fattori $1 + b_n$ è finito se è finita la serie dei moduli delle quantità b_n, si può dimostrare ancora:

a) Che i prodotti

$$P_n = (1 + b_1)(1 + b_2) \ldots (1 + b_n)$$

convergono col crescere di n al prodotto degl'infiniti fattori che diremo P.

Si ha infatti

$$|P_n| = |(1 + b_1)(1 + b_2) \ldots (1 + b_n)| \leq 1 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n ;$$

così, se sia posto

$$(1 + b_{n+1})(1 + b_{n+2}) + \ldots = 1 + \varepsilon_n$$

sarà

$$|\varepsilon_n| < \beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \ldots + \beta_{n+1} \beta_{n+2} \ldots + \ldots\ldots$$

onde

$$1 + |\varepsilon_n| < (1 + \beta_{n+1})(1 + \beta_{n+2}) \ldots$$

Ma posto

$$S = \beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \ldots\ldots$$

si ha, come si è visto, e prendendo n abbastanza grande perchè sia $S < 1$,

$$(1 + \beta_{n+1})(1 + \beta_{n+2}) + \ldots \leq \frac{1}{1 - S}$$

e quindi

$$1 + |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{1 - S}.$$

Si formi ora

$$\frac{P}{P_n};$$

il valore assoluto o modulo di questo quoziente sarà per l'appunto

$$|(1 + b_{n+1})(1 + b_{n+2}) \ldots| \leq 1 + |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{1 - S},$$

e qui si potrà prendere n tanto grande che nella somma delle β, S sia arbitrariamente piccolo, il che è possibile per la teoria delle somme di infiniti termini: e quindi $\frac{P}{P_n}$ si renderà in valore assoluto, per n sufficientemente grande, minore di qualunque quantità data.

b) Che ad un prodotto P di infiniti fattori si possono estendere le leggi della moltiplicazione di fattori in numero finito: ossia, se il prodotto degl'infiniti fattori $1 + b_n$ ha un valor finito, dimostreremo che avrà pure un valor finito il prodotto dei fattori

$$1 + c_m$$

dove con $1 + c_m$ si indichi un aggruppamento arbitrario dei fattori di P, e che il prodotto dei gruppi $1 + c_m$ sarà eguale al prodotto dei primitivi fattori $1 + b_n$.

Sia infatti:

$$\begin{cases} 1 + c_1 = (1 + b_1)(1 + b'_1)(1 + b''_1) \ldots\ldots \\ 1 + c_2 = (1 + b_2)(1 + b'_2)(1 + b''_2) \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

il prodotto $\Pi(1 + b_n)$ equivale a

$$(1) \qquad 1 + b_1 + b_2 + b_1 b_2 + b_3 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + b_1 b_2 b_3 + \ldots$$

per definizione, mentre il prodotto $\Pi(1 + c_m)$ equivale a

$$(2) \qquad 1 + c_1 + c_2 + c_1 c_2 + c_3 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + c_1 c_2 c_3 + \ldots$$

Ma si osservi che

$$c_1 = b_1 + b'_1 + b_1 b'_1 + \ldots ,$$

$$c_2 = b_2 + b'_2 + b_2 b'_2 + \ldots ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

perciò i termini della somma (2) non sono altro che i termini della somma (1) aggruppati in ordine differente: ora si è dimostrato che se la somma (1) è finita, la somma (2) sarà pure finita ed avrà lo stesso valore della (1); lo stesso varrà dunque anche per i rispettivi prodotti.

60. *a*) Siano i due prodotti di infiniti fattori:

$$\Pi(1+b_n) \quad , \quad \Pi(1+c_n),$$

finiti e di cui indicheremo i valori rispettivi con P e Q. Dico che il prodotto

$$\Pi(1+b_n)(1+c_n) = \Pi(1+b_n+c_n+b_nc_n)$$

sarà pure finito ed avrà per valore PQ.

Infatti il prodotto $\Pi(1+b_n)(1+c_n)$ sarà finito, per il teorema del §. 58, se sarà finita la somma

$$\Sigma\{|b_n|+|c_n|\};$$

ora questa somma è finita perchè, in virtù dello stesso teorema, essendo finiti i prodotti P e Q, saranno pure finite le somme

$$\Sigma|b_n| \quad \text{e} \quad \Sigma|c_n|.$$

Oltre a ciò il suddetto prodotto ha per valore PQ, perchè il valore del prodotto i cui fattori sono

$$1+b_n+c_n+b_nc_n$$

si definisce con una somma di infinite quantità, e questa si trova essere identica (secondo il n° 57) colla somma che esprime il prodotto delle due somme Σb_n e Σc_n.

b) Se il prodotto

$$\Pi(1+b_n)$$

ha un valore finito P e tutti i suoi fattori sono differenti da zero, avrà un valore finito che sarà precisamente $\frac{1}{P}$ anche il prodotto $\Pi\left(\frac{1}{1+b_n}\right)$.

Si ha infatti

$$\frac{1}{1+b_n} = 1 - \frac{b_n}{1+b_n};$$

se la somma

$$\Sigma|b_n|$$

è finita, sarà tale anche la somma

$$\sum \frac{|b_n|}{|1+b_n|}$$

perchè indicando con γ un valore minore del minimo modulo $|1+b_n|$ che per ipotesi non è mai nullo, si ha

$$\sum \frac{|b_n|}{|1+b_n|} < \frac{1}{\gamma}\Sigma|b_n|,$$

dunque per il teorema del n. 58 il prodotto

$$\Pi\left(1-\frac{b_n}{1+b_n}\right) = \Pi\left(\frac{1}{1+b_n}\right)$$

ha un valor finito. Inoltre essendo per la 1ª parte di questo numero

$$\Pi(1+b_n)\cdot\Pi\left(\frac{1}{1+b_n}\right) = \Pi\left\{(1+b_n)\frac{1}{1+b_n}\right\} = 1,$$

ne viene

$$\Pi\left(\frac{1}{1+b_n}\right) = \frac{1}{P}.$$

c) Da quanto si è detto risulta che se

$$\Pi(1+b_n) \quad , \quad \Pi(1+c_n)$$

sono due prodotti aventi valori finiti P e Q rispettivamente, il prodotto

$$\Pi\left(\frac{1+b_n}{1+c_n}\right)$$

sarà pure finito ed avrà per valore $\frac{P}{Q}$, sotto la condizione che tutti i binomii $1+c_n$ siano diversi da zero. Infatti per la parte *b*) di questo numero

$$\Pi\left(\frac{1}{1+c_n}\right) = \frac{1}{Q},$$

e per la parte *a*)

$$\Pi\left(\frac{1+b_n}{1+c_n}\right) = \Pi(1+b_n)\,\Pi\frac{1}{1+c_n} = P\cdot\frac{1}{Q} = \frac{P}{Q}$$

c. d. d.

SEZIONE SECONDA

ALCUNI TEOREMI SULLE GRANDEZZE IN GENERALE.

§. II. *Definizioni.*

1. Sia x una lettera cui si può assegnare qualunque valore reale: l'insieme dei valori che può prendere x si dice costituire una *varietà semplicemente infinita* o *ad una dimensione*, ed alla lettera daremo il nome di variabile.

Siano $x_1, x_2 \ldots, x_n$, n lettere scritte in un determinato ordine, e ciascuna possa assumere qualunque valore reale da $-\infty$ a $+\infty$ indipendentemente dalle altre. L'insieme dei sistemi di valori che si possono dare successivamente alle n lettere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si dice costituire una *varietà* n *volte infinita*, o *ad* n *dimensioni*.

Nel primo caso, un valore speciale attribuito ad x si dice *posto* o *punto* nella varietà semplicemente infinita.

Nel secondo caso, un sistema speciale di valori attribuiti alle n lettere si dice *posto* o *punto* nella varietà n volte infinita. Il posto speciale che si ottiene per il sistema di valori

$$x_1 = a_1 \quad , \quad x_2 = a_2 , \ldots , x_n = a_n$$

verrà indicato per brevità con

$$(a_1 , a_2 , \ldots\ldots , a_n)$$

e anche semplicemente con (a) nei casi in cui non vi può essere ambiguità.

Per esempio se con x rappresentiamo la distanza di un punto mobile di una retta indefinita da un punto fisso della stessa retta, l'insieme dei valori di x costituirà una varietà semplicemente infinita, e ad un valore di x speciale o ad un *posto* speciale della varietà corrisponderà un punto speciale sulla retta.

Così, se con x_1, x_2, x_3 rappresentiamo le coordinate di un punto mobile liberamente nello spazio ordinario, riferito a tre assi coordinati ortogonali, l'insieme dei sistemi di valori di x_1, x_2, x_3 costituirà una varietà triplamente infinita, e ad un sistema speciale di valori per x_1, x_2, x_3 corrisponderà un *posto* nella varietà e un punto speciale nello spazio.

Si deve però intendere che si può parlare di varietà ad una, due, ... n *dimensioni* senza alludere per questo ad alcuna rappresentazione concreta.

2. Sia un posto (a) in una varietà ad n dimensioni, cioè si consideri il sistema di valori

$$x_1 = a_1 \quad , \quad x_2 = a_2 , \ldots\ldots , x_n = a_n :$$

l'insieme dei posti che si ottengono dando ad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tutti i valori rispettivamente compresi fra

$$\begin{array}{lcl} a_1 - \delta_1 & \text{ed} & a + \delta'_1 \\ a_2 - \delta_2 & \text{»} & a + \delta'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n - \delta_n & \text{»} & a_n + \delta'_n \end{array}$$

si dirà costituire *un intorno* del posto (a). I valori delle quantità positive $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ saranno determinati in ogni caso particolare dalla natura del problema che si ha in vista.

Se i numeri positivi $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ possono in una determinata questione, prendersi piccoli quanto si vuole, si dirà che *l'intorno* del posto (a) si può prendere arbitrariamente piccolo.

Si dicono posti *all'infinito* in una varietà ad n dimensioni i sistemi di valori nei quali uno o più degli n valori attribuiti alle lettere è infinito.

S'intende con *intorno* dell'infinito l'insieme dei posti tali che sia, (indicato con $|x_i|$ il valore assoluto di x_i)

$$|x_1| > N_1 \quad , \quad |x_2| > N_2 , \ldots\ldots , |x_n| > N_n$$

dove $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sono numeri positivi, determinati in ogni caso dalla natura della questione che si ha in vista.

3. In una varietà ad n dimensioni si prenda a considerare l'insieme dei posti dati da una stessa regola, o in altre parole, *determinati da una definizione comune*; e si rappresentino con (x') questi posti speciali mentre (x) denoterà un posto qualunque della varietà. Si possono allora presentare due casi:

I. Essendo (x'_0) uno qualunque dei posti considerati si possono determinare numeri positivi $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ tanto piccoli che nell'intorno di (x'_0)

$$\begin{array}{l} x'_{0,1} - \delta_1 \ldots\ldots x'_{0,1} + \delta_1 \\ x'_{0,2} - \delta_2 \ldots\ldots x'_{0,2} + \delta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_{0,n} - \delta_n \ldots\ldots x'_{0,n} + \delta_n \end{array}$$

non cada alcun posto fra quelli specialmente considerati, all'infuori di (x'_0). In tal caso i posti (x') si dicono formare una *serie discreta*.

II. Essendo (x'_0) uno qualunque fra i posti considerati e presi i numeri positivi $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ piccoli quanto si vuole, nell'intorno $(x'_0 - \delta \ldots x'_0 + \delta)$ arbitrariamente piccolo cadono sempre altri posti fra quelli specialmente considerati, oltre ad (x'_0). In tal caso i posti definiti (x') si dicono formare *un continuo*.

Per esempio, se C, C', C'' sono tre costanti ed m, m', m'' sono numeri interi qualunque, i posti definiti da

$$x_1 = mC \quad , \quad x_2 = m'C' \quad , \quad x_3 = m''C''$$

formano una serie discreta di posti in una varietà a tre dimensioni, mentre i posti definiti da

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 \leq 1.$$

formano un continuo in una varietà pure a tre dimensioni.

4. Abbiansi infiniti posti (x') soddisfacenti ad una definizione comune e formanti un *continuo*, e siano (x'_a) ed (x'_b) due di questi posti. Si dirà che i posti speciali fra i posti (x')

$$(x'_1) \ , \ (x'_2) \ , \ldots\ldots , (x'_n)$$

stabiliscono un *passaggio continuo* fra (x'_a) ed (x'_b) quando (x'_1) è preso in un intorno di (x'_a), (x'_2) in un intorno di (x'_1), (x'_3) in un intorno di (x'_2) e così via, infine (x'_b) in un intorno di (x'_n), l'ampiezza di questi intorni essendo determinata d'altronde dalla natura del problema che si tratta. Ciò posto, un *continuo* si dice *connesso* quando fra due posti qualunque di esso si può sempre stabilire un passaggio continuo, il contorno non è connesso e si dice anche *composto di più pezzi separati* nel caso contrario, un continuo può anche essere composto di infiniti pezzi; così il continuo definito da

$$m \leq x' \leq m + \frac{1}{2}$$

in una varietà ad una dimensione, esprimendosi con m un intero qualunque. Ricordisi che con queste definizioni non s'intende però di alludere ad alcuna rappresentazione geometrica.

Siano ancora (x') posti soddisfacenti ad una definizione comune e costituenti un *continuo*. Un posto (x'_a) preso fra questi si dirà appartenere all'*intorno* del continuo se tutti i posti di un intorno sufficientemente piccolo di (x'_a) appartengono pure ai posti (x'); invece un posto (x'_b) si dirà appartenere al *contorno* del continuo se in un intorno di (x'_b) piccolo quanto si vuole si troveranno costantemente posti appartenenti alle (x') insieme con altri non appartenentivi. Un continuo può constare di un *contorno*, e non avere *interno*, come il continuo definito da

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = 1.$$

Un continuo si dirà estendersi all'infinito se si può soddisfare alla definizione comune dei posti (x') del continuo dando valori grandi quanto si vuole ad alcune delle lettere $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

§. II. *Proposizione fondamentale.*

5. Teorema. « Se in una varietà ad una dimensione si hanno infiniti posti « soddisfacenti ad una definizione comune si troverà in quella varietà per lo meno « un posto avente la proprietà che in qualunque suo intorno, per piccolo che si « voglia prendere, esisteranno sempre infiniti posti soddisfacenti a quella defini- « zione ».

Dimostrazione. 1° *Caso*. Indichiamo con x' i posti soddisfacenti ad una definizione comune; siano le x' in numero infinito, e si suppongano inoltre tutte finite e positive.

Esisteranno certamente due numeri finiti e positivi g_1 e g_2 tali che tutte le x' siano minori di g_2 e maggiori di g_1: quest'ultimo numero può anche essere nullo. Si prenda un numero a qualunque intero, positivo e maggiore dell'unità, e si consideri la serie

$$0, \ \frac{1}{a} \ , \ \frac{2}{a} \ , \ \frac{3}{a}, \ldots\ldots$$

In questa serie si troveranno sempre due termini, uno $\frac{m_1}{a}$ che sarà l'ultimo inferiore a g_1 ed un altro $\frac{m_1 + n_1}{a}$ che sarà il primo superiore a g_2; talchè sarà

$$\frac{m_1}{a} \leq g_1 < g_2 \leq \frac{m_1 + n_1}{a}$$

e tutte le x' saranno così comprese fra $\frac{m_1}{a}$ ed $\frac{m_1 + n_1}{a}$. Si considerino ora gl'intervalli

$$\frac{m_1}{a} \ldots \frac{m_1 + 1}{a} \ , \ \frac{m_1 + 1}{a} \ldots \frac{m_1 + 2}{a}, \ldots\ldots, \frac{m_1 + n_1 - 1}{a} \ldots \frac{m_1 + n_1}{a},$$

questi sono in numero finito, le x' sono invece in numero infinito, e quindi almeno in uno di questi intervalli cadranno infinite x'. Indichiamo con $[\mu_1]$ il *primo* di questi intervalli entro cui cadono infinite x', sia cioè $[\mu_1]$ l'intervallo

$$\frac{\mu_1}{a} \cdots \frac{\mu_1 + 1}{a}.$$

Si consideri poi la serie

$$0 \ , \ \frac{1}{a^2} \ , \ \frac{2}{a^2} \ , \ \frac{3}{a^2} \ , \ \ldots\ldots$$

in questa si troveranno, come nella serie precedente, due termini $\frac{m_2}{a^2}$ ed $\frac{m_2 + n_2}{a^2}$

tali che sia

$$\frac{m_2}{a^2} \leq g_1 < g_2 \leq \frac{m_2 + n_2}{a^2}$$

e fra gl'intervalli

$$\frac{m_2}{a^2} \cdots \frac{m_2 + 1}{a^2} \ , \ \frac{m_2 + 1}{a^2} \cdots \frac{m_2 + 2}{a^2} \ , \ \ldots\ldots \ , \ \frac{m_2 + n_2 - 1}{a^2} \cdots \frac{m_2 + n_2}{a^2}$$

vi sarà un intervallo

$$[\mu_2] \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\mu_2}{a^2} \cdots \frac{\mu_2 + 1}{a^2}$$

che sarà il primo fra gl'intervalli precedenti entro il quale cadranno infiniti posti x'.

Dico ora che l'intervallo $[\mu_2]$ è tutto entro $[\mu_1]$.

Infatti le x' inferiori a $\frac{\mu_1}{a}$ sono in numero finito, ma quelle inferiori a $\frac{\mu_1 + 1}{a}$ sono in numero infinito: così pure le x' inferiori a $\frac{\mu_2}{a^2}$ sono in numero finito, ed in numero infinito quelle inferiori a $\frac{\mu_2 + 1}{a^2}$, percui sarà

$$\frac{\mu_1}{a} < \frac{\mu_2 + 1}{a^2} \qquad , \qquad \frac{\mu_2}{a^2} < \frac{\mu_1 + 1}{a}$$

da cui

$$(1) \qquad a\mu_1 < \mu_2 + 1 \qquad , \qquad \mu_2 < a\mu_1 + a$$

e quindi, essendo queste diseguaglianze fra numeri interi, sarà anche

$$(2) \qquad a\mu_1 < \mu_2 \qquad , \qquad \mu_2 + 1 \leq a\mu_1 + a$$

e quindi

$$(2') \qquad \frac{\mu_1}{a} \leq \frac{\mu_2}{a^2} \qquad , \qquad \frac{\mu_2 + 1}{a^2} \leq \frac{\mu_1 + 1}{a}$$

ossia $[\mu_2]$ è tutto entro $[\mu_1]$.

Definiti analogamente gl'intervalli

$$[\mu_3] \ , \ [\mu_4] \ , \ \ldots\ldots \ , \ [\mu_n] \ ,$$

si troverà similmente che l'intervallo $[\mu_n]$ sarà tutto entro $[\mu_{n-1}]$.

Ciò posto, si consideri la somma

$$(3) \qquad A = \frac{\mu_1}{a} + \left(\frac{\mu_2}{a^2} - \frac{\mu_1}{a}\right) + \left(\frac{\mu_3}{a^3} - \frac{\mu_2}{a^2}\right) + \ldots\ldots$$

ossia

$$A = \frac{\mu_n}{a^n} + \left(\frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}} - \frac{\mu_n}{a^n}\right) + \left(\frac{\mu_{n+2}}{a^{n+2}} - \frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}}\right) + \ldots\ldots$$

Dico che questa somma è finita: infatti essa è composta di soli termini positivi per le diseguaglianze (2') ora dimostrate, ed essendo per le diseguaglianze (1)

$$\mu_2 - a\mu_1 < a \qquad , \qquad \mu_3 - a\mu_2 < a \ , \ \ldots$$

sarà

$$A < \frac{\mu_1}{a} + a\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots\ldots\right);$$

ossia, indicando con h una quantità positiva minore dell'unità,

$$(4) \qquad A = \frac{\mu_n}{a^n} + \frac{h}{a^n} \cdot \frac{a}{a-1}.$$

Dico ora che questo numero finito A è precisamente il posto della varietà x indicato nell'enunciato.

Essendo infatti dalle diseguaglianze (?) generalizzate:

$$\mu_{n+1} - a\mu_n \leq a - 1 ,$$

sarà

$$A \leq \frac{\mu_n}{a^n} + \frac{a-1}{a^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{a} + \ldots\right)$$

ossia, posto con k un numero positivo e non maggiore dell'unità,

$$A = \frac{\mu_n}{a^n} + \frac{k(a-1)}{a^{n+1}} \cdot \frac{a}{a-1}$$

$$= \frac{\mu_n + k}{a^n} < \frac{\mu_n + 1}{a^n} ,$$

per cui

$$(5) \qquad \frac{\mu_n}{a^n} < A \leq \frac{\mu_n + 1}{a^n}.$$

Queste ultime diseguaglianze dimostrano che il posto A cade entro ogni intervallo $[\mu_n]$: ora preso un numero δ piccolo ad arbitrio si potrà sempre prendere n tanto grande che sia

$$\frac{1}{a^n} < \delta ,$$

ossia fra $A - \delta$ ed $A + \delta$ cadrà tutto l'intervallo $[\mu_n]$ e quindi « in un intorno di » A piccolo quanto si vuole cadono infiniti posti x', di quelli definiti dalla data » legge comune », c. d. d.

Risulta evidente dalla dimostrazione stessa che fra i posti della varietà x possono esistere non uno solo, ma più posti A aventi la proprietà indicata. Non è necessario che questi posti A siano fra i posti definiti x', benchè si trovino posti x' vicini ad A quanto si vuole.

II. *Caso*. Le x' siano ancora tutte finite, ma alcune di esse siano negative. Questo caso si riconduce al precedente ponendo

$$x = z - k$$

dove k è un numero positivo maggiore del valore assoluto della minima x'; allora ai posti detti x' nella varietà x corrispondono posti z' tutti positivi nella varietà z.

III. *Caso*. Le x' definite siano suscettibili di diventare superiori a qualunque quantità data. Allora, o tutti i posti della varietà x appartengono alle x', e in questo caso il teorema è dimostrato da sè; o si può determinare un posto ξ il quale non soddisfi alla definizione delle x'. Si ponga allora

$$z = \frac{x}{x - \xi}.$$

La lettera z ci rappresenta una varietà semplicemente infinita, in cui alle x' della varietà x corrispondono determinati posti z',

$$z' = \frac{x'}{x' - \xi} = \frac{1}{1 - \frac{\xi}{x'}}$$

e le z' non possono diventare infinite. Esiste allora, per il I° caso, un posto Z della varietà z avente la proprietà che in qualunque intorno di Z cadono infinite z'. A questo posto Z corrisponderà nella varietà x un posto X avente la stessa proprietà, e che sarà

$$X = \frac{Z\xi}{Z - 1};$$

se $Z = 1$, si potranno trovare x' il cui valore sarà grande quanto si vuole, ossia X sarà infinito, ma avrà la proprietà indicata dall'enunciato; se Z è diverso da 1, X avrà pure la proprietà indicata perchè è facile dimostrare che si può sempre prendere nella varietà z un intervallo $z_0 - z_1$ tanto piccolo che l'intervallo corrispondente $x_0 - x_1$ nella varietà x sia minore di qualunque quantità data.

6. Il teorema del n° precedente si può generalizzare estendendolo ad una varietà di n dimensioni: si può dire cioè che:

« Se in una varietà ad n dimensioni si hanno infiniti posti soddisfacenti ad « una definizione comune, e che indicheremo con (x'), si troverà sempre in quella « varietà per lo meno un posto (X) avente la proprietà che in qualunque intorno « di (X), per piccolo che si prenda, esisteranno sempre infiniti posti (x') ».

La dimostrazione del teorema nel caso generale è informata agli stessi principii della dimostrazione del caso particolare esposto: conviene solo osservare che non si può dire che due posti (a) e (b) di una varietà ad n dimensioni *si seguono* a meno di una convenzione speciale. Stabiliremo pertanto che il posto (b) si dirà *seguire* il posto (a) nel caso in cui sarà

$$a_1 < b_1$$

(essendo il posto (a) il sistema di valori

$$x_1 = a_1 \quad , \quad x_2 = a_2 \, , \ldots\ldots , x_n = a_n$$

ed il posto (b) il sistema

$$x_1 = b_1 \quad , \quad x_2 = b_2 \, , \ldots\ldots , x_n = b_n)$$

e se

$$a_1 = b_1 \quad , \quad a_2 = b_2 \, , \ldots , a_{i-1} = b_{i-1}$$

il posto (b) *seguirà* il posto (a) se sarà

$$a_i < b_i .$$

7. Se z è una lettera cui si possono dare tutti i possibili valori complessi, l'insieme dei valori di z costituirà una varietà a due dimensioni. Infatti posto

$$z = x + iy \, ,$$

le due lettere x ed y possono assumere, indipendentemente l'una dall'altra, tutti i possibili valori reali e quindi i sistemi di valori di x ed y formano nel loro insieme una varietà a due dimensioni.

Similmente, se $z_1 , z_2 , \ldots , z_n$ sono n lettere cui si possono dare tutti i possibili valori complessi, ed indipendenti le une dalle altre, l'insieme dei sistemi di valori che si possono dare alle n variabili costituisce una varietà a $2n$ dimensioni, perchè ciascuna variabile complessa corrisponde a due variabili reali indipendenti.

§. III. *Limiti superiore ed inferiore.*

8. Denotiamo con x' infiniti numeri reali definiti da una legge qualunque, esisterà sempre per questi numeri un *limite superiore* ed un *limite inferiore*; chiamando *limite superiore* un numero L tale che non vi siano x' maggiori di L e che fra L ed $L - \varepsilon$ dove ε è un numero positivo arbitrariamente piccolo cadano sempre alcune x', e chiamando *limite inferiore* un numero λ tale che non vi siano x' minori di λ e che fra λ e $\lambda + \varepsilon$, dove ε è positiva ed arbitrariamente piccola, cadano sempre alcune x'.

Dimostrazione. I° *Caso*. I numeri x' siano tutti finiti e positivi. Si prenda a

considerare la serie

$$0 \, , \frac{1}{a} \, , \frac{2}{a} \, , \frac{3}{a} \, , \ldots\ldots$$

dove a è un numero positivo, intero e maggiore dell'unità.

In questa serie s'incontrerà necessariamente un termine $\frac{\mu_1}{a}$ che sarà il *primo* ad essere maggiore di tutte le x'; in altri termini vi saranno delle x' superiori a $\frac{\mu_1 - 1}{a}$, ma tutte saranno inferiori a $\frac{\mu_1}{a}$. Si prenda poi a considerare la serie

$$0 \, , \frac{1}{a^2} \, , \frac{2}{a^2} \, , \frac{3}{a^2} \, , \ldots\ldots ;$$

anche in questa si troverà un termine $\frac{\mu_2}{a^2}$ che sarà il primo ad essere maggiore di tutte le x'. Segue dalla definizione di questi numeri $\frac{\mu_1}{a}$, $\frac{\mu_2}{a^2}$ che sarà

$$\frac{\mu_2}{a^2} > \frac{\mu_1 - 1}{a} \quad , \quad \frac{\mu_1}{a} > \frac{\mu_2 - 1}{a^2}$$

ossia

$$\mu_2 > a\mu_1 - a \quad , \quad a\mu_1 > \mu_2 - 1$$

e trattandosi di numeri interi

$$a\mu_1 \geq \mu_2 \, ,$$

da cui

$$\frac{\mu_1 - 1}{a} < \frac{\mu_2}{a^2} \leq \frac{\mu_1}{a} .$$

Si formi ora la serie

$$(1) \qquad L = \frac{\mu_1}{a} + \left(\frac{\mu_2}{a^2} - \frac{\mu_1}{a}\right) + \left(\frac{\mu_3}{a^3} - \frac{\mu_2}{a^2}\right) + \ldots + \left(\frac{\mu_n}{a^n} - \frac{\mu_{n-1}}{a^{n-1}}\right) + \ldots$$

dove le frazioni

$$\frac{\mu_3}{a^3} \quad , \quad \frac{\mu_4}{a^4} \, , \ldots\ldots , \frac{\mu_n}{a^n}$$

sono definite nello stesso modo delle $\frac{\mu_1}{a}$ e $\frac{\mu_2}{a^2}$, e dove è in generale:

$$\frac{\mu_{n-1}-1}{a^{n-1}} < \frac{\mu_n}{a^n} \leq \frac{\mu_{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Si potrà scrivere:

$$L = \frac{\mu_1}{a} - \left(\frac{a\mu_1 - \mu_2}{a^2} + \frac{a\mu_2 - \mu_3}{a^3} + \ldots\ldots\right)$$

e anche

$$L = \frac{\mu_n}{a^n} - \left(\frac{a\mu_n - \mu_{n+1}}{a^{n+1}} + \frac{a\mu_{n+1} - \mu_{n+2}}{a^{n+2}} + \ldots\ldots\right);$$

ed essendo per le diseguaglianze dimostrate

$$a\mu_n - \mu_{n+1} < a$$

sarà, indicando con h un numero positivo minore dell' unità

$$L = \frac{\mu_n}{a^n} - \frac{h}{a^n} \cdot \frac{a}{a-1}, \tag{2}$$

ossia L avrà un valore finito.

Dico ora che questo numero finito L è il limite superiore indicato dall'enunciato: cioè dico che non vi sono x' maggiori di L e che cadono sempre alcune x' fra L ed $L - \varepsilon$, per piccolo che si voglia ε.

Se vi fosse infatti una x' maggiore di L si potrebbe sempre determinare una quantità ε inferiore alla differenza $x' - L$; allora sarebbe

$$x' > L + \varepsilon$$

ossia al di là di $L + \varepsilon$ vi sarebbe una x' almeno. Ma si può sempre, nella formola (2), determinare n tanto grande che sia

$$\frac{\mu_n}{a^n} - L = \frac{h}{a^n} \cdot \frac{a}{a-1} < \varepsilon$$

e quindi

$$L + \varepsilon > \frac{\mu_n}{a^n}.$$

Ma per definizione al di là di $\frac{\mu_n}{a^n}$ non vi sono x', e quindi *a fortiori* non ve ne saranno al di là di $L + \varepsilon$, il che contradice al risultato precedente. Si deve dunque ammettere che tutte le x' sono inferiori ad L.

Ed essendo per tutti i valori di n

$$L < \frac{\mu_n}{a^n}$$

sarà possibile di prendere n tanto grande che sia

$$L - \varepsilon < \frac{\mu_n - 1}{a^n}.$$

Ma non vi sono x' inferiori ad L, e ve ne sono certamente al di là di $\frac{\mu_n - 1}{a^n}$ ossia al di là di $L - \varepsilon$: quindi fra $L - \varepsilon$ ed L cadono sempre alcune x' per piccolo che sia ε, c. d. d.

In modo del tutto analogo si dimostra l'esistenza del *limite inferiore* λ, inferiore a tutte le x' ma tale che cadono sempre alcune x' fra λ e $\lambda + \varepsilon$.

II. *Caso.* Si suppongano le x' tutte finite, ma in parte positive e in parte negative: basta allora considerare le sole x' positive e dimostrare per queste l'esistenza del limite superiore, quindi prendere le x' negative in valore assoluto, e dimostrare per questi valori assoluti l'esistenza del limite superiore, il quale cangiato di segno, sarà il limite inferiore delle x'.

III. *Caso.* Se le x' sono tali da potersi dimostrare maggiori di qualunque quantità data, il loro limite superiore sarà il valore $x = \infty$, in tal caso s'intenderà che l'intorno dell'infinito è costituito da tutti i valori superiori ad un certo numero N, e che vi sono sempre alcune x' in qualunque intorno dell'infinito.

SEZIONE TERZA

SUL CONCETTO DI FUNZIONE; OSSERVAZIONI E PROPOSIZIONI GENERALI.

§. I. *Definizioni.*

1. Se una quantità variabile, reale o complessa, che diremo y, è legata ad un'altra quantità variabile reale o complessa x in guisa che ad un valore di x corrispondano entro certi limiti uno o più valori determinati per y, si dirà che y è *funzione di* x *nel senso più generale del vocabolo* funzione; e si scriverà

$$y = f(x).$$

Se una quantità variabile y reale o complessa è legata ad altre n quantità variabili reali o complesse

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ldots\ldots \ , x_n$$

per modo che a tutti i sistemi di valori di queste n variabili corrispondano entro certi limiti uno o più valori determinati per y, si dirà che y è *funzione* delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *nel senso più generale del vocabolo* funzione.

2. Una funzione di una variabile x si dirà continua entro certi limiti di valori di x se preso un valore qualunque x_0 entro quei limiti e un numero ε piccolo ad arbitrio, sarà possibile trovare un tale intorno di x_0 che per tutti i valori x' presi in questo intorno, sia in valore assoluto

$$f(x') - f(x_0) < \varepsilon.$$

Una funzione di n variabili

$$y = f(x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3, \ldots, x_n)$$

si dirà continua entro un certo campo nella varietà rappresentata da $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se preso un posto

$$(x_1^0 \ , \ x_2^0 \ , \ x_3^0, \ldots, x_n^0)$$

entro questo campo e preso pure un numero ε piccolo ad arbitrio, sarà possibile trovare un tale intorno del posto

$$(x_1^0 \ , \ x_2^0 \ , \ x_3^0, \ldots, x_n^0)$$

che per tutti i posti

$$(x_1' \ , \ x_2' \ , \ x_3', \ldots, x_n')$$

presi in questo intorno, sia in valore assoluto

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_n') - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) < \varepsilon.$$

3. Se y è una funzione di x nel senso generale della parola funzione, e se per un valore x_0 di x e per tutti i valori di h inferiori in valore assoluto ad un dato valore H è possibile porre

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\varphi(x_0, h)$$

dove

$$\varphi(x_0, h)$$

rappresenta una funzione continua di h, cioè si può porre sotto la forma

$$f'(x_0) + \psi(x_0, h)$$

dove ora $\bar{\varphi}(x_0, h)$ va a zero con h, talchè

$$(1) \qquad f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + h\,\bar{\varphi}(x_0, h)$$

si dirà che $f'(x_0)$ è la *derivata* di $f(x)$ per $x = x_0$, e se la formola (1) vale per tutti i valori di x compresi entro certi limiti, si dirà che la funzione $f(x)$ *ammette una derivata* entro quei limiti.

Si è creduto fino a questi ultimi tempi che l'esser continua bastasse ad una funzione per ammettere una derivata; anzi in molti trattati di Calcolo differenziale si danno dimostrazioni del teorema: « Ogni funzione continua ammette una derivata ». Ma queste dimostrazioni ammettono tutte implicitamente qualche proprietà che non è contenuta nel concetto generale di funzione; e d'altronde bastano a rendere vana qualunque dimostrazione gli esempi molteplici di funzioni (quali si sono effettivamente costruite in questi ultimi tempi) che sono continue in tutto un intervallo, ma in questo intervallo non ammettono una derivata in alcun punto. Fra le altre

si può citare la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots nx}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

che è continua e finita per tutti i valori reali di x da $-\infty$ a $+\infty$, e non ha mai derivata.

Se y è una funzione delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e se per un posto (x^0) della varietà $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e per tutti i valori delle quantità $h_1, h_2, \ldots, h_n$ minori in valore assoluto dei numeri positivi $H_1, H_2, \ldots, H_n$, è possibile porre

$$f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) =$$

$$= f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\, h_1 + f_2(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\, h_2 + \ldots$$

$$\ldots + f_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\, h_n + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 ; h_1 h_2 \ldots h_n)\, h_i,$$

dove le φ_i sono funzioni che vanno a zero con tutte le h, la funzione f si dirà *differenziabile* per il posto $(x) = (x_0)$, e le

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$$

che si dinoteranno rispettivamente con

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

si diranno le *derivate parziali* della funzione f rispetto alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dall'essere una funzione di n variabili continua in un campo entro la varietà $x_1, x_2, \ldots, x_n$, non risulta menomamente che essa sia differenziabile, e si hanno infatti esempi del contrario.

§. II. *Limite superiore ed inferiore dei valori di una funzione* (*).

4. Sia $y = f(x)$ una funzione della variabile reale x, ed abbia y un valore determinato per ogni valore di x compreso fra due limiti p e q; si supponga inoltre y sempre finita in quell'intervallo. I valori di y corrispondenti ai valori di x com-

(*) Di questo e d'altri argomenti di eguale importanza e fin qui trascurati, tratta diffusamente la recente opera del chiar. prof. Dini *Sulle funzioni di variabile reale.*

presi fra p e q avranno un *limite superiore* L ed un *limite inferiore* λ; e se questi valori L e λ faranno parte dei valori di y (il chè non avverrà sempre) L si dirà un *massimo* e λ un *minimo* della funzione.

5. Teorema. « Se L è il limite superiore dei valori della funzione $y = f(x)$ « corrispondenti ai valori di x compresi fra i due limiti p e q, vi sarà nell'inter- « vallo $q - p$ per lo meno un punto X avente la proprietà che il limite superiore « dei valori di y corrispondenti ai valori di x presi in qualunque intorno piccolo « quanto si vuole di X, sarà ancora L ».

Dimostrazione. Sia a un numero intero, positivo e maggiore dell'unità, arbitrariamente scelto e si formi la serie

$$0, \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots\ldots$$

e l'intervallo $q - p$ sia compreso fra i due termini

$$\frac{m}{a} \quad \text{ed} \quad \frac{m+n}{a}$$

di questa serie. Allora i valori di y che consideriamo corrisponderanno a valori di x cadenti negl'intervalli

$$\frac{m}{a} \ldots \frac{m+1}{a}, \frac{m+1}{a} \ldots \frac{m+2}{a}, \ldots\ldots, \frac{m+n-1}{a} \ldots \frac{m+n}{a}.$$

In ciascuno di questi intervalli i valori di y avranno limiti superiori i quali non oltrepasseranno mai L, ed almeno in uno di questi intervalli il limite superiore dei valori di y sarà lo stesso numero L. Si indichi con

$$\frac{\mu_1}{a} \ldots \frac{\mu_1 + 1}{a} \quad \text{o} \quad [\mu_1]$$

il primo degl'intervalli in cui il limite superiore dei valori di y è L.

Si prenda poscia a considerare la serie

$$0, \frac{1}{a^2}, \frac{2}{a^2}, \frac{3}{a^2}, \ldots\ldots;$$

anche in questa vi sarà almeno un intervallo in cui il limite superiore dei valori

corrispondenti di x sarà lo stesso numero L, e sia

$$\frac{\mu_2}{a^2} \ldots \frac{\mu_2+1}{a^2} \quad \text{o} \quad [\mu_2]$$

il primo di tali intervalli. Ora in tutto il tratto che precede $\frac{\mu_1}{a}$, e $\frac{\mu_2}{a^2}$, il limite superiore dei valori di y non giunge mai ad L, invece prima di $\frac{\mu_1+1}{a}$ e di $\frac{\mu_2+1}{a^2}$ il limite superiore dei valori di y, è certamente L, quindi sarà

$$(1) \qquad \frac{\mu_1}{a} < \frac{\mu_2+1}{a^2} \quad , \quad \frac{\mu_2}{a^2} < \frac{\mu_1+1}{a}$$

da cui

$$(2) \qquad a\mu_1 < \mu_2 + 1 \quad . \quad \mu_2 < a\mu_1 + a$$

onde, poichè queste diseguaglianze sono fra numeri interi,

$$(3) \qquad a\mu_1 \leq \mu_2 \quad , \quad \mu_2 + 1 \leq a\mu_1 + a$$

onde

$$(4) \qquad \frac{\mu_1}{a} \leq \frac{\mu_2}{a^2} \quad , \quad \frac{\mu_2+1}{a^2} \leq \frac{\mu_1+1}{a} ;$$

il che significa che l'intervallo $[\mu_2]$ è tutto entro $[\mu_1]$. In simil modo si definirebbe un intervallo $[\mu_3]$ che si dimostrerebbe tutto entro $[\mu_2]$, ecc., e le formole da (1) a (4) si generalizzano senza difficoltà.

Si consideri ora il valore X definito da

$$(5) \qquad \begin{cases} X = \frac{\mu_1}{a} + \left(\frac{\mu_2}{a^2} - \frac{\mu_1}{a}\right) + \left(\frac{\mu_3}{a^3} - \frac{\mu_2}{a^2}\right) + \ldots\ldots \\ \quad = \frac{\mu_1}{a} + \frac{\mu_2 - a\mu_1}{a^2} + \frac{\mu_3 - a\mu_2}{a^3} + \ldots\ldots \end{cases}$$

Anzitutto questo numero X è finito perchè essendo per le (3) e le (2)

$$0 < \mu_n - a\mu_{n-1} < a$$

tutti i termini della serie X saranno positivi e sarà

$$X < \frac{\mu_1}{a} + \frac{1}{a-1} ,$$

ossia

$$(6) \qquad \frac{\mu_1}{a} \leq X < \frac{\mu_1}{a} + \frac{1}{a-1} .$$

Ma X è definito anche da

$$X = \frac{\mu_n}{a^n} + \left(\frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}} - \frac{\mu_n}{a^n}\right) + \left(\frac{\mu_{n+2}}{a^{n+2}} - \frac{\mu_{n+1}}{a^{n+1}}\right) + \ldots\ldots$$

onde si troverà analogamente

$$(7) \qquad \frac{\mu_n}{a^n} \leq X < \frac{\mu_n}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} \cdot \frac{1}{a-1}$$

e per essere per le (3),

$$\mu_n - a\mu_{n-1} \leq a - 1 ,$$

$$(8) \qquad \frac{\mu_n}{a^n} \leq X < \frac{\mu_n + 1}{a^n} .$$

Si prenda ora un numero ε piccolo ad arbitrio; si potrà sempre assumere n tanto grande che sia

$$\frac{1}{a^n} < \varepsilon$$

e quindi l'intervallo $[\mu_n]$ cadrà tutto fra $X - \varepsilon$ ed $X + \varepsilon$: ossia in qualunque intorno di X, piccolo quanto si vuole, il limite superiore dei valori di y sarà ancora L, c. d. d.

La stessa proposizione vale anche per il limite inferiore.

Se per $x = X$ il valore di y è precisamente L, L si dirà un massimo della funzione: ma ciò non avviene necessariamente, ed il valore $y = f(X)$ può essere diverso da L.

6. Si osservi che quando si sa che una quantità variabile ammette infiniti valori p. e. positivi e tutti inferiori ad un numero determinato M, non è lecito conchiu-

dere che questa quantità abbia un valore massimo; si può solo conchiudere che essa ha un limite superiore, eguale od inferiore ad M; similmente se una quantità variabile ha infiniti valori tutti superiori ad un numero determinato N, non si può asserire che essa avrà un minimo, ma solo un limite inferiore eguale o superiore ad N.

§. III. *Osservazioni sulla definizione del vocabolo funzione.*

7. Gli analisti usarono il vocabolo *funzione* in sensi diversi, nè ad esso vocabolo fecero sempre corrispondere un concetto ben definito.

S'intese dapprima con *funzione* di x una potenza intera della lettera x; più tardi (Leibnitz) s'intese con funzione di x un polinomio razionale intero in x; poscia estendendo sempre più il significato del vocabolo funzione, si disse funzione delle quantità variabili $x, y, z, \ldots$ *qualunque espressione di calcolo fabbricata coi segni delle operazioni aritmetiche in numero finito o infinito portanti sulle variabili* x, y, z... *e su altre quantità costanti (numeriche o letterali).*

Tale definizione di funzione (Euler, Lagrange) fa dunque dipendere il concetto di *variabilità* da quello di *dipendenza con legge aritmetica.*

Ma più tardi s'introdusse nella scienza un'altra definizione non appartenente esclusivamente alla dottrina dei numeri, e si disse *funzione delle quantità* x, y, z,... *una quantità* W *che ammette uno o più valori determinati per tutti i sistemi di valori di* x, y, z *compresi entro certi limiti.* (Bernoulli, Cauchy, Dirichlet). La prima definizione condusse a questa in seguito all'applicazione dell'Analisi alla Geometria, alla Fisica, alla Meccanica: si trovarono infatti di frequente in Geometria, in Meccanica, ecc. due grandezze così legate fra loro che dato un valore dell'una, il valore corrispondente dell'altra se ne poteva dedurre con operazioni di Calcolo, cioè *funzioni* l'una dell'altra nel senso primitivo; e si fu quindi condotti naturalmente a dire funzioni una dell'altra due grandezze geometriche, meccaniche, ecc. tali che il valore dell'una fosse determinata dal valore dell'altra anche se questa determinazione non si poteva fare per mezzo di operazioni aritmetiche.

L'una o l'altra di queste due definizioni, ma più di frequente la seconda, si trovano riportate in quasi tutti i trattati; ora nè su l'una nè sull'altra si può fondare una Teorica delle Funzioni.

Attenendosi alla prima definizione, si andrebbe incontro al seguente inconveniente. Le prime operazioni aritmetiche con cui si potrebbero costruire le funzioni, porterebbero naturalmente alla definizione di altre, così dall'addizione e dalla moltiplicazione si è condotto naturalmente a definire l'esponente, e da questo la radice ed il logaritmo. Ma non vi è ragione di arrestarsi a questi primi segni di operazioni; e quindi si dovrebbe introdurre un nuovo simbolo ogni qualvolta essendo

espresso y in funzione di x

$$y = f(x)$$

per mezzo dei segni precedenti, non riuscisse di esprimere x per y con gli stessi segni. Si sarebbe quindi obbligati, fin dal principio di uno studio delle funzioni, e per non introdurre arbitrariamente nuovi segni di operazioni in numero indefinito. di rispondere subito alla seguente domanda oltremodo complessa: « Sarà possibile esprimere tutti gli enti analitici che s'introdurranno di mano in mano, e « necessariamente, nell'analisi, con segni di operazioni in numero finito o infinito, « ma appartenenti ad un limitato numero di specie? »

Attenendosi invece all'altra definizione, se si immagina fra x ed y una relazione di dipendenza soggetta alla sola condizione che dato un valore ad x ne consegua un corrispondente valore per y, si trova che il legame così stabilito fra x ed y è tanto vago ed indeterminato che è impossibile trovare qualche proprietà comune a tutte le *funzioni.*

Ed infatti si vede che nè adottando la prima definizione, nè attenendosi alla seconda, si potranno enunciare come generali ed applicabili a tutte le funzioni i teoremi del Calcolo differenziale: e le dimostrazioni date dell'esistenza della derivata per ogni funzione continua (e riprodotte anche in trattati recentissimi) ammettono nel concetto di funzione qualche cosa di più che non sia contenuto nella pura definizione.

Si osservi infine che in uno studio *puramente analitico* delle funzioni non è per nulla naturale l'escludere i valori complessi delle variabili, in quanto che si è visto dall'introduzione aritmetica di questo sunto che i numeri complessi s'introducono necessariamente nella scienza, al pari dei numeri frazionari o negativi e con un processo del tutto analogo. Di più, molte proprietà caratteristiche delle funzioni non si possono mettere in chiaro se si escludono i valori complessi delle variabili (così la proprietà dell'equazione

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

di dare n valori di x per ogni valore di y; la relazione

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

che lega le funzioni circolari all'esponenziale e dimostra non essere tali funzioni diverse, come si potrebbe credere dalle definizioni che se ne danno negli elementi; la doppia periodicità delle funzioni ellittiche, ecc.).

Per queste ragioni, le varie classi di funzioni che si sono prese ad esaminare più specialmente in questi ultimi anni, e che perdono ogni significato per valori

complessi della variabile, come p. e.

$$\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen} n!x}{n!} \quad , \quad \sum_1^\infty b^n \cos(a^n x), \text{ ecc.}$$

non saranno da noi considerate come vere *funzioni analitiche*, ma solo come casi limiti di quelle.

Una Teorica delle Funzioni non si potrà quindi fondare se non si limita in qualche modo le classi di funzioni per le quali si vogliono dare proprietà comuni. Noi diremo *Funzioni Analitiche* quelle che formeranno l'oggetto di questa teorica, e che dovranno ammettere le due proprietà essenziali: di avere valori determinati non solo per valori reali, ma anche per valori complessi delle variabili, e di godere di tutte le proprietà che nei Trattati di Calcolo si davano come comuni a tutte le funzioni. Ma la definizione rigorosa di queste *Funzioni Analitiche* non si può stabilire *a priori*, e converrà invece attenersi al seguente procedimento:

S'incomincerà collo studiare le proprietà delle funzioni formate colle operazioni dirette più semplici dell'aritmetica (addizioni e moltiplicazioni) in numero finito: poscia si passerà a funzioni che si presenteranno come una prima generalizzazione di quelle, e saranno formate colle stesse operazioni in numero infinito: indi combineremo alla lor volta un numero finito o infinito di volte le funzioni formate con simili espressioni, e giungeremo a trovare quale proprietà fondamentale e caratteristica delle funzioni analitiche lo sviluppo in serie di potenze o sviluppo del Taylor.

.....

SEZIONE QUARTA

LE FUNZIONI RAZIONALI E LE SERIE DI POTENZE.

.....

CAPITOLO PRIMO

Le funzioni razionali e le somme di infinite funzioni razionali.

---

§ I. *Riassunto di alcune proposizioni fondamentali sulle funzioni razionali.*

1. Alla fine della Sezione precedente abbiamo esposto le ragioni per le quali non sembrava opportuno lo stabilire a priori, per quelle funzioni che devono costituire il materiale dell'Analisi, una definizione generale dalla quale scaturissero poi le proprietà fondamentali delle funzioni stesse; e invece si è convenuto di studiare per prime le funzioni più semplici ossia formate colle operazioni aritmetiche elementari in numero finito: e da queste prime funzioni innalzandosi gradatamente alle più complesse, si giungerà al concetto generale di *Funzione Analitica* (*).

(*) Le funzioni che da noi si diranno *analitiche* sono quelle definite da Cauchy e Riemann dalla seguente proprietà: se $w = u + iv$ è funzione di $z = x + iy$, si deve avere:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. Siano $x_1, x_2, \ldots x_n$, n lettere cui si possono attribuire valori arbitrarii, reali o complessi, e su queste lettere e su numeri determinati si indichino, per mezzo dei rispettivi segni delle addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni in numero finito. Tale complesso di operazioni verrà indicato con:

$$R(x_1, x_2, \ldots x_n);$$

e per ogni sistema di valori attribuiti alle lettere $x_1, x_2, \ldots x_n$, l'espressione R assumerà in generale, (cioè esclusi sistemi particolari di valori per le n lettere) un valore determinato calcolabile colle regole elementari dell'aritmetica. Il valore di R varierà col sistema di valori attribuiti alle $x_1, x_2, \ldots x_n$, e l'espressione R rappresenterà una *funzione razionale* di quelle n variabili.

Si dimostrano negli elementi della matematica moltissime proposizioni relative alle funzioni razionali; e qui conviene richiamarne alcune, sia perchè occorreranno in seguito, sia per porre in evidenza la loro analogia con altre proposizioni più generali sulle Funzioni che verranno enunciate più innanzi, ed ove non sia dichiarato espressamente il contrario, si dovrà sempre intendere che le variabili possono assumere indistintamente valori reali o complessi e possono essere indifferentemente reali o complessi i coefficienti o parametri con cui sono costruite le funzioni.

3. I. Se con

$$J(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

si indica un sistema di addizioni, sottrazioni o moltiplicazioni in numero finito da eseguirsi sulle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, J si dirà funzione razionale *intera* di queste variablli, ed ogni funzione razionale delle variabili stesse si potrà sempre ricondurre alla forma

$$R(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{J(x_1, x_2, \ldots x_n)}{J_1(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

II. Se $J(x)$ è una funzione razionale intera del grado n di una variabile x, nulla per $n+1$ valori di x distinti o coincidenti, la funzione sarà nulla identicamente, ossia saranno nulli tutti i suoi coefficienti.

Questa definizione generale di funzione può sembrare fondata sopra una proprietà di carattere arbitrario, e la cui generalità non si può dimostrare *a priori*, ed inoltre essa richiede che le funzioni u e v siano scelte fra quelle funzioni di due variabili reali che ammettono le derivate parziali, mentre nello stato attuale della Scienza la funzioni di variabili reali atte alla derivazione non costituiscono una Classe che si possa esattamente delimitare: per queste ragioni tale definizione di Funzione Analitica non verrà adottata in ciò che segue.

III. Se $J(x)$, $J_1(x)$ sono due funzioni razionali intere di grado non superiore ad n che assumono lo stesso valore per $n+1$ valori della variabile, le due funzioni saranno identiche, cioè coincideranno nei loro coefficienti.

IV. Se sono dati i valori che una funzione razionale intera del grado n deve assumere per $n+1$ valori dati della variabile, la funzione è pienamente determinata e se ne possono determinare i coefficienti con un numero finito di operazioni elementari.

La determinazione dei coefficienti si può fare per mezzo dei determinanti, risolvendo un sistema di $n+1$ equazioni lineari ad $n+1$ incognite, o anche per mezzo della formola d'interpolazione di Lagrange: se con

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$$

si indicano i valori di x, in cui la funzione deve assumere respettivamente i valori

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$$

e si indica con

$$X_h(x)$$

il prodotto dei binomii $x - a_i$, escluso il binomio $x - a_h$, la funzione $J(x)$ è data dalla formola di Lagrange nella forma

$$f(x) = \beta_0 \frac{X_0(x)}{X_0(\alpha_0)} + \beta_1 \frac{X_1(x)}{X_1(\alpha_1)} + \ldots\ldots + \beta_n \frac{X_n(x)}{X_n(\alpha_0)};$$

è facile verificare che questa funzione assume i valori dati β_k rispetto per $x = \alpha_k$, e che essa è del grado n; essa non può dunque differire dalla funzione richiesta.

V. Se una funzione razionale intera di n variabili

$$J(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

rispettivamente dei gradi p_1 in x_1, p_2 in x_2, ... p_n in x_n si annulla nei posti della varietà a $2n$ dimensioni $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dati dalla combinazione di uno dei valori

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}, \ldots a_1^{(p_1)}$$

per x_1, con uno dei valori

$$a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, a_2^{(3)}, \ldots a_2^{(p_2)}$$

per x_2, con uno dei valori

$$a_3^{(1)}, a_3^{(2)}, a_3^{(3)}, \ldots a_3^{(p_3)}$$

per x_3, ecc..... e con uno dei valori

$$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, a_n^{(3)}, \ldots a_n^{(p_n)}$$

per x_n, la funzione J sarà identicamente nulla, e se due funzioni razionali intere di n variabili

$$J(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad , \quad J_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

di grado non superiore a p_1 in x_1, a p_2 in $x_2, \ldots$ a p_n in x_n, sono eguali nei $p_1, p_2 \ldots p_n$ posti citati, le due funzioni J e J_1 sono identiche, ossia coincidono nei loro coefficienti.

VI. Come si è già osservato, ogni funzione razionale si può porre sotto la forma

$$R(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{J(x_1, x_2, \ldots x_n)}{J_1(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

dove J e J_1 sono due funzioni intere: e la funzione R ha un valore unico o determinato per ogni sistema di valori di $x_1, x_2, \ldots x_n$ che non annulla il denominatore J_1. Per i posti che annullano il denominatore J_1, la funzione prende la forma $\frac{M}{0}$ o $\frac{0}{0}$ secondo che J è diverso da zero o zero negli stessi posti; nel primo caso la funzione è infinita: nel secondo caso la forma $\frac{0}{0}$ può dipender da un fattor comune ai due termini J e J_1 che si annulla nei posti considerati e si può sopprimere: oppure la forma $\frac{0}{0}$ non dipende da un tale fattore, e allora i posti suddetti sono posti d'inteterminazione per la funzione.

4. Dal semplice teorema sullo sviluppo della potenza intera e positiva di un binomio si deduce facilmente la formola

$$(1) \qquad J(x+y) = J(x) + y\,J_1(x) + y^2\,J_2(x) + \ldots y^n \cdot J_n(x)$$

posto che $J(x)$ sia una funzione razionale intera di grado n in x, e indicata con J_i una funzione di grado $n-i$ pure razionale intera in x.

Segue da una definizione data nella sezione III che J_1 si potrà dire la *derivata* di $J(x)$, e scrivendo

$$J_1(x) = J'(x)$$

e indicando con

$J''(x)$	la derivata di	$J'(x)$, con	
$J''(x)$	quella di	$J''(x), \ldots$ con	
$J^{(n)}(x)$	quella di	$J^{(n-1)}(x)$,	

si ha dalla (1), con una deduzione semplicissima,

$$(2) \qquad J(x+y) = J(x) + yJ'(x) + y\,\frac{y^2}{1\cdot 2}\,J''(x) + \ldots + \frac{y^n}{1\cdot 2\ldots n}\,J^{(n)}(x).$$

Analogamente, se $J(x_1, x_2, \ldots x_n)$ è una funzione razionale intera delle n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ si può scrivere

$$(3) \qquad J(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) = J(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$+ y_1 J_{11}(x_1, x_2, \ldots x_n) + y_2 J_{21}(x_1, x_2, \ldots x_n) + \ldots y_n J_{n1}(x_1, x_2, \ldots x_n) + \ldots\ldots$$

dove il secondo membro consta di polinomi omogenei di gradi $0, 1, 2 \ldots$ in $y_1, y_2, \ldots y_n$. i cui coefficienti sono polinomi in x che si potranno dire (per una definizione data nella sezione III e all'infuori di coefficienti numerici) le *derivate parziali* del polinomio J.

5. Sia $J(x)$ una funzione razionale intera di grado n senza termine noto:

$$J(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

se g indica un numero positivo maggiore del massimo valore assoluto o modulo delle $a_1, a_2, \ldots, a_n$, si avrà, (posto al solito $|a| = \text{mod. } a$)

$$|J(x)| < g\,|x|\,\frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}:$$

ora preso un numero positivo arbitrariamente piccolo ε, si potrà sempre determinare un valore di $|x| = \delta$ tale che per $|x| < \delta$ sia

$$g\,|x|\,\frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|} < \varepsilon,$$

e con ciò si dimostra la *continuità* della funzione $J(x)$ nell'intorno di $x = 0$.

Sia ora una funzione razionale intera di una variabile $J(x)$, ed x_0 un valore qualunque di x. Si può porre

$$x = x_0 + y,$$

e per il n. precedente

$$J(x) - J(x_0) = y\,J'(x_0) + \frac{y^2}{1\cdot 2}\,J''(x_0) + \ldots$$

ossia riguardando y come variabile, si torna al caso precedente e si può, preso ε arbitrariamente piccolo, determinare un valore δ tale che per $|y| < \delta$ sia $|J(x) - J(x_0)| < \varepsilon$,

il che dimostra la continuità delle funzioni razionali intere di una variabile per tutti i valori della variabile.

Sia $J(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una funzione razionale intera di n variabili senza termine noto è indichiamo con f_r un polinomio omogeneo di grado r in $x_1, x_2, \ldots, x_n$: si potrà scrivere

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1 + f_2 + \ldots + f_m.$$

Si indichi con $|a|$, come si è già fatto, il valore assoluto o modulo del numero a; e si scriva f_r ponendo in evidenza in ciascun termine il coefficiente numerico del termine corrispondente nella potenza $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^r$; indicando con g_r un numero positivo maggiore del modulo del massimo coefficiente di f_r diviso per il relativo coefficiente polinomiale, si avrà

$$f_r < g_r(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^r,$$

ed essendo g un numero maggiore di tutte le g_r e ξ la somma $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$, che è lecito supporre inferiore all'unità, si avrà:

$$|J(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < g(\xi + \xi^2 + \ldots + \xi^m) < g\xi \cdot \frac{1}{1-\xi}.$$

Preso un numero ε positivo piccolo ad arbitrio, si potranno sempre prendere $|x_1|, |x_2|, |x_n|$ tanto piccoli che sia

$$\frac{g\xi}{1-\xi} < \varepsilon,$$

e con ciò è dimostrata la continuità della funzione J nell'intorno del posto

$$(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0).$$

Sia ora un posto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ qualunque; si potrà sempre porre

$$x_1 = a_1 + y_1 \quad , \quad x_2 = a_2 + y_2 \ldots, x_n = a_n + y_n$$

e scrivere per la (3) del n° precedente

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J(a_1, a_2, \ldots, a_n) = y_1 J_{11} + y_2 J_{12} + \ldots + y_n J_{1n} + \ldots;$$

ossia il secondo membro essendo una funzione razionale delle y senza termine noto, si potrà prendere le $(x_1 - a_1), (x_2 - a_2), \ldots, (x_n - a_n)$ tanto piccole che sia

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_n) - J(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

minore di qualunque quantità data.

Sia $R = \frac{P}{Q}$ una funzione razionale fratta; se $\Delta P, \Delta Q$ sono gl'incrementi di P e Q quando le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ divengono $x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n$, si ha

$$R(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) - R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{P+\Delta P}{Q+\Delta Q} - \frac{P}{Q} = \frac{Q \cdot \Delta P - P \cdot \Delta Q}{Q^2 + Q \cdot \Delta Q};$$

ora se per il sistema di valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ il denominatore Q assume un valore diverso da zero, si potranno rendere ΔP e ΔQ tanto piccoli che ΔR sia piccola quanto si vuole; il che dimostra la continuità delle funzioni razionali fratte.

§. II. *Le somme di infinite funzioni razionali.*

6. Riassunte così le proprietà generali più semplici delle funzioni razionali, dobbiamo intraprendere uno studio delle funzioni formate nel modo più semplice colle razionali.

Sommando o moltiplicando più funzioni razionali, si ritrovano funzioni razionali finchè il numero dei sommandi o dei moltiplicandi è finito: e si tratta di studiare quali funzioni si ottengono sommando o moltiplicando infinite funzioni razionali. Ci limiteremo per ora al caso della somma di infinite funzioni razionali di una variabile.

La teoria delle somme di infinite funzioni razionali costituisce, anche in casi particolari, un argomento assai difficile di cui daremo quei teoremi generali che ci serviranno in seguito.

7. Sappiamo dalla sezione I^a, (n° 54) che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la somma di infiniti numeri a_n abbia un valor finito è che abbia un valor finito la somma dei moduli $|a_n|$ di questi numeri.

Se con $\varphi_n(x)$ si indicano infinite funzioni razionali, si potrà definire una funzione $f(x)$ dalla condizione che il valore di $f(x)$ sia per ogni valore x_0 di x, dato dalla somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_0);$$

e la condizione necessaria e sufficiente perchè questa somma abbia un significato nel senso stabilito nella sezione I^a è che sia finita e determinata la somma

$$\sum_{1}^{\infty} |\varphi_n(x_0)|,$$

indicato al solito con $|\varphi_n(x_0)|$ il modulo di $\varphi_n(x_0)$.

L'insieme dei valori x_0 di x sui quali è verificata la condizione precedente si dice costituire il *campo di convergenza* della *somma* o *serie* f(x).

8. Si è già detto (Sez, I^a, n° 50) che una somma di infinite quantità (o serie) si dice convergente quando posto

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r \quad , \quad S = \sum_{r=1}^{\infty} u_r$$

è possibile, preso un numero ε piccolo ad arbitrio determinare un numero N corrispondente ad ε e tanto grande che per $n > N$ sia sempre

$$|S - S_n| < \varepsilon.$$

Così in particolare la serie $\Sigma \varphi_n(x_0)$ è convergente per $x = x_0$ se preso un numero ε piccolo ad arbitrio sarà possibile trovare un numero N tanto grande che per tutti i valori di $n > N$ sia

$$\left| \sum_{1}^{\infty} \varphi_n(x_0) - \sum_{1}^{n} \varphi_n(x_0) \right| < \varepsilon,$$

ossia

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \varphi_n(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Se la convergenza si verifica per vari valori di $x : x_0 , x_1 , \ldots$, si avrà corrispondentemente ad un numero determinato ε un valore N_0 tale che sia, per $n > N_0$

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \varphi_n(x_0) \right| < \varepsilon;$$

un valore N_1 tale che sia, per $n > N_1$,

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \varphi_n(x_1) \right| < \varepsilon, \text{ ecc.}$$

Se questi numeri $N_0 , N_1 , \ldots$ così definiti per un valore fisso ε e per i valori $x_0 , x_1 , \ldots$ di x hanno un limite superiore finito N, allora per tutti i valori $n > N$ e per tutti i valori $x_0 , x_1 , \ldots$ del campo di convergenza sarà

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \varphi_r(x) \right| < \varepsilon,$$

ed entro quel campo la serie si dirà *convergente in egual grado*. Nel caso che non esista un tal limite superiore finito N, la serie potrà essere convergente nei punti di quel campo, ma non si potrà dire *convergente in egual grado*.

Si dirà dunque che una somma di infinite funzioni razionali

$$\Sigma \varphi_r(x)$$

è *convergente in egual grado* entro un certo campo se preso un numero ε piccolo ad arbitrio esisterà un numero N corrispondente ad ε e tale che per tutti i valori di x compresi entro quel campo e per tutti i valori $n > N$ sia

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(x) - \sum_{r=1}^{n} \varphi_r(x) \right| < \varepsilon.$$

Il campo entro cui vale la proprietà della convergenza in egual grado può essere una varietà a 2 dimensioni (area piana), o ad una dimensione sola (porzione di linea) nel campo che rappresenta la variabile complessa x; il concetto di convergenza in egual grado si può quindi applicare anche a funzioni di una variabile reale (*).

9. Una somma di infinite funzioni razionali convergente in egual grado entro un certo campo rappresenta entro quel campo una funzione continua.

DIMOSTRAZIONE. Abbiasi la serie

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

convergente in egual grado entro un campo C entro il quale tutte le $\varphi_n(x)$ si man-

---

(*) Limitandosi a soli valori reali della variabile si può dimostrare la seguente proposizione, che non appartiene alla presente teoria, ma che dà una importante applicazione della convergenza in egual grado: Se $\Sigma \varphi_n(x)$ è una serie di funzioni convergenti in egual grado pei valori reali di x compresi fra $x = a$ ed $x = b$ si potrà integrare la serie termine a termine fra due limiti a e b o compresi fra a e b; cioè, posto

$$f(x) = \Sigma \varphi_n(x)$$

e posto che $f(x)$ sia una funzione integrabile, si potrà scrivere

$$\int_{a'}^{b'} f(x)\, dx = \sum \int_{a'}^{b'} \varphi_n(x)\, dx \,, \quad \text{per} \quad a \leq a' < b' \leq b.$$

(Cfr. Dini, *Funz. di variab. reale*).

tengono finite; dico che nell'intorno di qualunque posto x_0 del campo C la funzione $f(x)$ è continua.

Per ipotesi, essendo σ un numero piccolo ad arbitrio, si potrà sempre trovare un numero N tanto grande che per $n > N$ e per tutti i valori di x presi entro il campo C, sia

$$\left| \sum_1^\infty \varphi_r(x) - \sum_1^n \varphi_r(x) \right| < \sigma$$

e posto

$$\sum_1^\infty \varphi_r(x) - \sum_1^n \varphi_r(x) = R_n(x)$$

e indicando con x_0 ed x due posti dell'interno del campo C, si avrà

$$|R_n(x)| < \sigma \quad , \quad |R_n(x_0)| < \sigma$$

e quindi

$$|R_n(x) - R_n(x_0)| < 2\sigma.$$

Ma le funzioni $\varphi_r(x)$ essendo razionali sono continue, per cui si può sempre prendere $|x - x_0|$ tanto piccolo che sia per tutti i valori di r da 1 ad n

$$|\varphi_r(x) - \varphi_r(x_0)| < \sigma'$$

dove σ' è una quantità presa piccola ad arbitrio Si avrà così

$$\left| \sum_1^n (\varphi_r(x) - \varphi_r(x_0)) \right| \leq \sum_1^n |\varphi_r(x) - \varphi_r(x_0)| < n\sigma'$$

e

$$|f(x) - f(x_0)| < \sum_1^n |\varphi_r(x) - \varphi_r(x_0)| + |R_n(x) - R_n(x_0)|$$

ossia

$$|f(x) - f(x_0)| < n\sigma' + 2\sigma.$$

Si prenda ora un numero ε piccolo ad arbitrio, si potrà prendere σ inferiore ad $\frac{\varepsilon}{4}$ e determinato σ, determinare indipendentemente il valore N tale che per $n > N$ e per tutti i valori di x presi nel campo C, sia

$$|R_n(x)| < \sigma;$$

determinato n, si determina σ' in modo che

$$n\sigma' < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ossia} \quad \sigma' < \frac{\varepsilon}{2n},$$

talchè risulta per $|x - x_0|$ abbastanza piccola

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad .$$

dove ε è un numero piccolo ad arbitrio. La funzione $f(x)$ è dunque continua entro il campo C, c. d. d.

10. Le serie convergenti in egual grado possono essere utili anche nelle applicazioni numeriche dell'analisi; si osservi, infatti che in una tal serie si può fissare *a priori* il numero n di termini da sommarsi per avere la somma della serie con un determinato grado di approssimazione; mentre per le serie non convergenti in egual grado se si vuol la somma della serie coll'approssimazione determinata di $\frac{1}{10^k}$, per certi valori di x possono bastare pochi termini a raggiungere tale approssimazione mentre per altri valori potrà essere necessario un numero di termini molto maggiore.

Una definizione analoga della convergenza in egual grado si può dare anche per le serie di più variabili; una serie

$$S(x, y, z) = \sum_{r=1}^\infty \varphi_r(x, y, z)$$

si dirà convergente in egual grado entro un certo campo C di valori di x, y, z se preso un numero ε piccolo ad arbitrio si potrà trovare un valore N valido per tutti i sistemi di valori (x, y, z) del campo C e tale che per $m > N$ sia

$$\left| \sum_1^\infty \varphi_r(x, y, z) - \sum_1^m \varphi_r(x, y, z) \right| < \varepsilon.$$

CAPITOLO II.

Le serie di potenze.

§. I. *Primi teoremi sulle serie di potenze.*

11. Fra le serie i cui termini sono funzioni razionali di una o più variabili, meritano speciali considerazioni quelle i cui termini sono della forma

$$c_\nu x^\nu \quad \text{ovvero} \quad c_{\lambda\mu\nu} x^\lambda y^\mu z^\nu$$

dove λ , μ , ν sono numeri interi e positivi : queste somme verranno dette *serie di potenze* ed indicate con

$$P(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu \quad , \quad P(x, y, z) = \sum_0^\infty c_{\lambda\mu\nu} x^\lambda y^\mu z^\nu ;$$

esse offrono la generalizzazione più naturale delle funzioni razionali intere.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una somma di infiniti sommandi abbia un valor finito (nel senso stabilito nella Sezione I^a) è che la somma dei moduli dei suoi termini abbia un valor finito. Ciò posto, se per un valore $x = a$ la somma

$$\sum_0^\infty c_\nu x^\nu$$

non ha un valor finito, la somma stessa non potrà certamente essere finita per tutti i valori di x il cui modulo $|x|$ sia $\geq |a|$: se dunque nel piano della variabile x si descrive un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $|a|$, per tutti i punti del piano esterni alla circonferenza del cerchio la serie $\Sigma c_\nu x^\nu$ non potrà avere un valor finito.

Questa considerazione è svolta nei teoremi che seguono.

12. Teorema I. *Se* $\sum_1^\infty c_\nu x^\nu$ *è una serie di potenze, e si può trovare un numero positivo* α *tale che per tutti i valori di* ν *a partire da un certo indice (che si può senza restrizione supporre anche eguale ad* 1) *l'espressione*

$$|c_\nu| \alpha^\nu$$

si mantenga inferiore ad un numero assegnabile positivo ε_0 *la serie precedente avrà un valor finito per tutti i valori di* x *il cui modulo sarà inferiore ad* α.

Dimostrazione. Si indichi con ξ il valore assoluto o modulo di x, e sia $\xi < \alpha$. Si ha per ipotesi

$$|c_\nu| \alpha^\nu < g \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

da cui

$$|c_\nu| \xi^\nu < g \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^\nu$$

e sommando a tutti i valori di ν,

$$\sum_1^\infty |c_\nu| \xi^\nu < g \sum_1^\infty \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^\nu = g \frac{\xi}{\alpha - \xi} ,$$

ma essendo $\xi < \alpha$, l'ultimo membro ha un valor finito, e quindi è lo stesso di $\Sigma c_\nu x^\nu$ per $|x| < \alpha$, c. d. d.

Lo stesso teorema vale anche per le serie di potenze di più variabili : nel caso di tre variabili, si può dire :

« Se

$$\sum c_{\lambda\mu\nu} x^\lambda y^\mu z^\nu$$

» è una serie di potenze di tre variabili, e si può trovare una terna di numeri po-
» sitivi α , β , γ tale che per tutti i valori di λ , μ , ν a partire da $\lambda = \mu = \nu = 1$
« sia

$$|c_{\lambda\mu\nu}| \alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu < g$$

» dove g è un numero finito positivo, la serie sarà sommabile per tutti i posti
» (x, y, z) tali che sia contemporaneamente

$$|x| < \alpha \quad , \quad |y| < \beta \quad , \quad |z| < \gamma . \text{ »}$$

Dimostrazione. Si ha per ipotesi

$$c_{\lambda\mu\nu}| < g \cdot \frac{1}{\alpha^\lambda} \cdot \frac{1}{\beta^\mu} \cdot \frac{1}{\gamma^\nu} ;$$

se (x, y, z) è un posto tale che chiamando

$$x| = \xi \quad , \quad y| = \eta \quad , \quad |z| = \zeta$$

sia

$$\xi < \alpha \quad , \quad \eta < \beta \quad , \quad \zeta < \gamma ,$$

sarà

$$|c_{\lambda\mu\nu}| \xi^\lambda \eta^\mu \zeta^\nu < g \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^\lambda \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^\mu \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^\nu ;$$

e sommando a tutti i valori di λ , μ , ν ,

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu} |c_{\lambda\mu\nu}| \xi^\lambda \eta^\mu \zeta^\nu < g \sum_{\lambda,\mu,\nu} \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^\lambda \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^\mu \left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)^\nu = \frac{g \xi \eta \zeta}{(\alpha - \xi)(\beta - \eta)(\gamma - \zeta)} .$$

L'ultimo membro essendo finito per ipotesi, sarà finita anche la serie dei moduli

$$\sum |c_{\lambda\mu\nu}| \xi^\lambda \eta^\mu \zeta^\nu$$

e quindi la serie

$$\sum c_{\lambda\mu\nu}\, x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu}$$

per tutti i valori (x, y, z) tali che

$$|x| < \alpha \quad , \quad |y| < \beta \quad , \quad |z| < \gamma .$$

Nel caso di una variabile sola, si può dire che la serie $\Sigma c_\nu x^\nu$ è convergente e sommabile per tutti i punti x dell'interno di un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio α. Questo cerchio si dice *cerchio di convergenza*, e si dirà *cerchio vero di convergenza*, se inoltre per tutti i punti x esterni al cerchio la serie non ha un valor finito. Per le serie di più variabili si può dire che la serie è finita per i valori di x, y, z che si trovano contemporaneamente entro i cerchi descritti nei piani delle tre variabili dai centri o con raggi α, β, γ.

Teorema II. *Se in una serie* $\Sigma c_\nu x^\nu$ *il rapporto* $\frac{|c_\nu|}{|c_{\nu-1}|}$ *si mantiene a partire da un certo valore di* ν *(che si può senza restrizione supporre eguale ad* 1*) inferiore ad un certo numero positivo* k, *la serie sarà certamente convergente entro tutto il cerchio di raggio* $\frac{1}{k}$.

Dimostrazione. Si ha per ipotesi

$$|c_\nu| < k \cdot |c_{\nu-1}|$$

da cui, facendo $\nu = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ e moltiplicando, viene

$$|c_\nu| < k^\nu |c_0|$$

e quindi

$$|c_\nu| \frac{1}{k^\nu} < |c_0|.$$

Esiste dunque un valore $\frac{1}{k}$ positivo tale che per tutti i valori di ν il prodotto

$$c_\nu | \frac{1}{k^\nu}$$

si mantiene inferiore ad un numero finito positivo $|c_0|$, e quindi (teor. I), la serie è finita per tutti i valori di x tali che sia

$$|x| < \frac{1}{k}.$$

Corollario. Se il rapporto $\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}$ si mantiene a partire da un certo valore di ν inferiore ad un numero ε arbitrariamente piccolo, la serie sarà convergente in un cerchio di raggio arbitrariamente grande, ossia per tutti i valori finiti di x.

13. Data una serie $\Sigma c_\nu x^\nu$, se dal punto $x = 0$ con raggio qualunque descriviamo una circonferenza, si potranno dare tre casi.

a) O per i valori di x interni al cerchio la serie è finita, e non lo è per i punti x esterni al cerchio: allora il cerchio descritto è il *vero* cerchio di convergenza.

b) O per i valori x interni al cerchio la serie ha valori finiti, ma ha valori finiti anche per punti x esterni al cerchio stesso: allora il cerchio è un cerchio di convergenza ma è inferiore al *vero* cerchio di convergenza.

c) O per tutti od alcuni valori x interni al cerchio la serie non ha un valore finito; allora il cerchio è maggiore del vero cerchio di convergenza, il quale si può in questo caso ridurre anche ad un sol punto.

L'esistenza del *vero* cerchio di convergenza e la possibilità di determinarne il raggio sono dimostrate dalla seguente proposizione:

Teorema III. *Se una serie* $\Sigma c_\nu x^\nu$ *si sa essere finita per valori di* x *abbastanza piccoli, e non finita per valori di* x *maggiori in valore assoluto, esisterà necessariamente un vero cerchio di convergenza per la serie.*

Dimostrazione. Pongasi

$$S(x) = \Sigma c_\nu x^\nu ,$$

e si formino i valori

$$(1) \qquad S(0) \quad , \quad S(1) \quad , \quad S(2) \quad , \quad S(3).$$

Essendo la serie finita per valori di x abbastanza piccoli e non finita per valori maggiori, si troverà fra i valori (1) un primo valore non finito; e sia $S(m+1)$, mentre $S(m)$ ha un valore finito. Si formino allora i valori

$$(2) \qquad S(m) \quad , \quad S\left(m + \frac{1}{a}\right) \quad , \quad S\left(m + \frac{2}{a}\right), \ldots, S\left(m + \frac{a-1}{a}\right) \quad , \quad S(m+1)$$

dove a è un intero qualunque maggiore d'uno: si troveranno fra questi valori due termini consecutivi

$$S\left(m + \frac{m_1}{a}\right) \quad , \quad S\left(m + \frac{m_1 + 1}{a}\right),$$

il primo dei quali sarà finito e l'altro non finito; si considererà poi la serie di valori

$$S\left(m + \frac{m_1}{a}\right) \quad , \quad S\left(m + \frac{m_1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) \quad , \quad S\left(m + \frac{m_1}{a} + \frac{2}{a^2}\right), \ldots ,$$

fra questi se ne troveranno due consecutivi l'uno finito e l'altro non finito

$$S\left(m+\frac{m_1}{a}+\frac{m_2}{a^2}\right) \quad \text{ed} \quad S\left(m+\frac{m_1}{a}+\frac{m_2+1}{a^2}\right),$$

e così via.

Da questo procedimento risulta *definito* un numero di cui si possono determinare di mano in mano gli elementi (anche decimali se si vuole, prendendo $a=10$). Questo numero

$$A = m + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^3} + \ldots$$

sarà finito se è finito m, infatti si ha

$$\frac{m_1}{a} < 1 \quad , \quad \frac{m_2}{a^2} < \frac{1}{a} \quad , \quad \frac{m_3}{a^3} < \frac{1}{a^2},$$

da cui

$$A < m + a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots\right) = m + \frac{a}{a-1}.$$

Inoltre A sarà il raggio del vero cerchio di convergenza. Infatti preso un numero ε piccolo ad arbitrio, si potrà sempre prendere n tanto grande, che sia

$$A - A_n < \varepsilon$$

posto

$$A_n = m + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \ldots \frac{m_n}{a^n};$$

ma per A_n la $S(A_n)$ ha un valor finito per la costruzione del numero A_n stesso; e se B è un numero positivo qualunque $> A$, si potrà sempre prendere n tanto grande che sia

$$A + \frac{1}{a^n} < B,$$

ma per $A + \frac{1}{a^n}$ la serie non ha un valor finito, dunque essa non ha un valor finito neppure per $x = B$.

Il cerchio di centro $x=0$ e di raggio A sarà dunque tale che per tutti i valori di x interni ad esso la serie sarà finita, e non finita per i valori x esterni al detto cerchio.

Le serie di potenze sono di tre specie: o per tutti i valori finiti di x la serie ha un valore finito, ossia la serie è *sempre* convergente e il raggio del vero cerchio di convergenza è infinito: tale è la serie

$$1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;$$

o la serie non ha un valor finito per alcun valore di x, ad eccezione di $x=0$, ossia il vero cerchio di convergenza ha per raggio 0; tale è la serie

$$1 + x + 1\cdot 2x^2 + 1\cdot 2\cdot 3x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots;$$

o infine la serie ha un vero cerchio di convergenza finito e diverso da zero, come la serie

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + n_k x^k + \ldots$$

che ha per raggio di convergenza l'unità.

14. Teorema IV. *Se* R *è il raggio di convergenza di una serie di potenze* $\Sigma c_\nu x^\nu$ *ed* r *è un numero positivo inferiore ad* R *di tanto poco quanto si vuole, la serie sarà convergente in ugual grado in tutto l'interno del cerchio* r.

Dimostrazione. Si prenda ε piccola ad arbitrio; si potrà sempre prendere n tanto grande che sia

$$\sum_n^\infty |c_\nu| r^\nu < \varepsilon$$

perchè $r < R$ per ipotesi. Ma per $\xi \leq r$ si ha

$$\sum_n^\infty |c_\nu| \xi^\nu < \varepsilon$$

e quindi *a fortiori*, se $\xi = |x|$,

$$\left|\sum_n^\infty c_\nu x^\nu\right| < \varepsilon,$$

il che dimostra la convergenza in egual grado della serie $\Sigma c_\nu x^\nu$ per tutti i valori di x il cui modulo è

$$|x| \leq r,$$

ossia entro tutto il cerchio r.

15. Lemma. « Se $m_1, m_2, \ldots, m_r$ sono numeri interi positivi o negativi, e

« si ha la funzione razionale

$$F(x) = A_0 + A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \ldots + A_r x^{m_r},$$

» e si indica con L il limite superiore dei valori della funzione per i valori x aventi
» uno stesso modulo ξ, si avrà sempre

$$|A_0| \leq L \text{ ».}$$

Dimostrazione. Pongasi

$$x = \xi\theta, \qquad \text{con} \qquad \theta = 1;$$

e si considerino le equazioni

$$z^{m_1} = 1 \quad , \quad z^{m_2} = 1, \ldots, z^{m_r} = 1;$$

queste essendo in numero finito, avranno un numero finito di radici, percui si potrà sempre assegnare a θ un valore θ_0 che non soddisfi ad alcuna delle r equazioni precedenti.

Si formi allora

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= A_0 + A_1 \xi^{m_1} + A_2 \xi^{m_2} + \ldots + A_r \xi^{m_r} \\
F(\xi\theta_0) &= A_0 + A_1 \xi^{m_1} \theta_0^{m_1} + A_2 \xi^{m_2} \theta_0^{m_2} + \ldots + A_r \xi^{m_r} \theta_0^{m_r} \\
F(\xi\theta_0^2) &= A_0 + A_1 \xi^{m_1} \theta_0^{2m_1} + A_2 \xi^{m_2} \theta_0^{2m_2} + \ldots + A_r \xi^{m_r} \theta_0^{2m_r} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F(\xi\theta_0^{n-1}) &= A_0 + A_1 \xi^{m_1} \theta_0^{(n-1)m_1} + A_0 \xi_2^{m_2} \theta_0^{(n-1)m_2} + \ldots + A_r \xi^{m_r} \theta_0^{(n-1)m_r}
\end{aligned}$$

da cui, sommando e dividendo per n

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} F(\xi\theta_0^{\nu-1}) = A_0 + \frac{1}{n} A_1 \xi^{m_1} \frac{1-\theta_0^{nm_1}}{1-\theta_0^{m_1}} + \frac{1}{n} A_2 \xi^{m_2} \frac{1-\theta_0^{nm_2}}{1-\theta_0^{m_2}} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n} A_r \xi^{m_r} \frac{1-\theta_0^{nm_r}}{1-\theta_0^{m_r}}.$$

Il modulo del primo membro è inferiore ad $\frac{1}{n} \cdot nL$, ossia ad L, dunque sarà

tale in valore assoluto anche il secondo membro, e si avrà

$$\left| A_0 + \frac{1}{n} A_1 \xi^{m_1} \frac{1-\theta_0^{nm_1}}{1-\theta_0^{m_1}} + \ldots + \frac{1}{n} A_r \xi^{m_r} \frac{1-\theta_0^{nm_r}}{1-\theta_0^{m_r}} \right| < L,$$

o indicando con C una quantità che non può crescere indefinitamente in valore assoluto

$$\left| A_0 + \frac{1}{n} C \right| < L.$$

Ma si ha evidentemente

$$\left| A_0 + \frac{1}{n} C \right| \geq |A_0| - \frac{1}{n} |C|;$$

ora se fosse

$$|A_0| > L,$$

si potrebbe sempre prendere n tanto grande che sia anche

$$|A_0| - \frac{1}{n} |C| > L$$

e quindi *a fortiori*

$$\left| A_0 + \frac{1}{n} C \right| > L,$$

contro ciò che si è dimostrato; sarà dunque

$$|A_0| \leq L,$$

c. d. d.

Teorema V. *Se ξ è un modulo di x inferiore al raggio R di convergenza di una serie $\Sigma c_\nu x^\nu$ ed L è il limite superiore dei valori assoluti di questa serie sulla circonferenza di raggio ξ, si avrà per tutti i valori di ν*

$$|c_\nu| \xi^\nu \leq L.$$

Dimostrazione. Si abbia la serie

$$S = \Sigma c_\nu x^\nu$$

e si moltiplichi da ambo le parti per $x^{-\nu}$, viene:

$$Sx^{-\nu} = c_0 x^{-\nu} + c_1 x^{-\nu+1} + \ldots + c_\nu + c_{\nu+1} x + c_{\nu+2} x^2.$$

Preso un numero ε positivo arbitrariamente piccolo, si potrà sempre prendere tanti termini nel secondo membro che i rimanenti diano una somma inferiore ad ε in valore assoluto; e ciò (teor IV) per tutti i valori di x il cui valore assoluto è $\leq \xi$. Sarà quindi

$$Sx^{-\nu} = c_0 x^{-\nu} + c_1 x^{-\nu+1} + \ldots + c_\nu + c_{\nu+1} x + \ldots + c_{\nu+m} x^m + \varepsilon'$$

dove ε' è una quantità inferiore ad ε in valore assoluto.

Sia ora L il massimo valore assoluto di S per $|x| = \xi$, il massimo valore assoluto di $Sx^{-\nu}$ sarà $L\xi^{-\nu}$, e si avrà per $|x| = \xi$,

$$|c_0 x^{-\nu} + c_1 x^{-\nu+1} + \ldots + c_\nu + c_{\nu+1} x + \ldots + c_{\nu+m} x^m + \varepsilon'| < L\xi^{-\nu}$$

onde *a fortiori*

$$|c_0 x^{-\nu} + c_1 x^{-\nu+1} + \ldots + c_\nu + c_{\nu+1} x + \ldots + c_{\nu+m}| < L\xi^{-\nu} + \varepsilon.$$

Risulta da ciò e dal Lemma precedente che sarà

$$|c_\nu| \leq L\xi^{-\nu} + \varepsilon;$$

ma in questa diseguaglianza $|c_\nu|$ ed $L\xi^{-\nu}$ hanno valori fissi, ε è arbitrariamente piccolo, onde sarà

$$|c_\nu| < L\xi^{-\nu}$$

ossia

$$|c_\nu| \xi^\nu < L,$$

c. d. d.

Osservazione. Proposizioni analoghe al teor. IV e al teor. V valgono per le serie di potenze di più variabili. Così se L è il massimo valore di $\sum_{\lambda,\mu,\nu} c_{\lambda\mu\nu} x^\lambda y^\mu z^\nu$ per i sistemi di valori di x, y, z pei quali $|x| = \alpha$, $|y| = \beta$, $|z| = \gamma$, sarà

$$|c_{\lambda\mu\nu}| \alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu \leq L.$$

§. II. *Delle serie doppie, e delle trasformazioni nelle serie di potenze.*

16. Abbiansi infinite serie di potenze, che dinoteremo con

$$\varphi_n(x) = c_{n,0} + c_{n,1} x + c_{n,2} x^2 + \ldots\ldots$$

dove si può fare $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$: e alcune di queste serie siano anche riducibili a polinomii. Si può domandare sotto quali condizioni la somma di queste

infinite serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

si potrà trasformare in un'unica serie di potenze

$$\sum_{0}^{\infty} A_\nu x^\nu$$

convergente entro un determinato cerchio, posto che sia

$$A_\nu = c_{1,\nu} + c_{2,\nu} + c_{3,\nu} + \ldots + c_{n,\nu} + \ldots.$$

A questo oggetto si può dare la condizione sufficiente enunciata nella seguente proposizione.

Teorema VI. *Se*

$$(1) \qquad \sum_n \varphi_n(x)$$

è una somma di infinite serie di potenze, ed indichiamo con $\overline{\varphi}_n(x)$ *ciò che diventa la serie* $\varphi_n(x)$ *sostituendo ai coefficienti* $c_{n,\nu}$ *i loro valori assoluti* $|c_{n,\nu}|$, *la somma* (1) *si potrà trasformare in un'unica serie di potenze*

$$(2) \qquad \sum_\nu A_\nu x^\nu, \qquad \text{con} \qquad A_\nu = \sum_n c_{n,\nu}$$

quando si sappia che esiste un valore positivo α *pel quale è convergente la* $\sum_n \overline{\varphi}_n(\alpha)$; *e la* $\sum_0^\infty A_\nu x^\nu$ *sarà convergente entro un cerchio di raggio* α.

Dimostrazione. Ricordiamo anzitutto che nella prima Sezione si è dimostrata la seguente proposizione, che vale tanto per le somme di infiniti termini positivi, quanto per le somme di infiniti termini complessi: « Condizione necessaria e suffi-« ciente affinchè una somma di infiniti termini riesca sommabile, è che estratto « un numero finito qualunque di questi termini, esista un numero finito positivo M « costantemente maggiore in valore assoluto della somma dei termini estratti ».

Ciò posto, sia α un valore positivo percui la

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi}_n(\alpha)$$

riesca finita. Questa serie è la somma dei numeri positivi

$$|c_{n,\nu}|\,\alpha^\nu$$

per tutti i valori dei due indici n, e ν: cioè S è un numero composto di tutti gli *elementi* che entrano in essi numeri $|c_{n,\nu}|\,\alpha^\nu$. Si potrà quindi, per il teorema ricordato, trovare un numero M tale che sia

$$\text{(3)} \qquad M > \sum_{n,\nu} |c_{n,\nu}|\,\alpha^\nu$$

dove con $\Sigma_{n,\nu}$ indichiamo la somma di un numero qualunque ma finito di termini estratti fra i $|c_{n,\nu}|\,\alpha^\nu$.

Si ponga ora un valore x il cui modulo ξ sia inferiore ad α, e si consideri la somma

$$\sum_{n,\nu} c_{n,\nu}\, x^\nu$$

di un numero qualunque ma finito di termini estratti fra i $c_{n,\nu}\, x^\nu$. Si avrà per il teorema sul modulo di una somma:

$$\left| \sum_{n,\nu} c_{n,\nu}\, x^\nu \right| \leq \sum_{n,\nu} |c_{n,\nu}|\,\xi^\nu < \sum_{n,\nu} |c_{n,\nu}|\,\alpha^\nu$$

e quindi *a fortiori* per la (3)

$$M > \left| \sum_{n,\nu} c_{n,\nu}\, x^\nu \right| :$$

e questo, per il teorema ricordato, basta a dimostrare che la somma degl' infiniti numeri $c_{n,\nu}\, x^\nu$ ha un valor finito: pertanto in virtù dei teoremi della Sezione I^a i termini di questa serie si potranno aggruppare come si vuole, e si potrà scrivere indifferentemente

$$\sum_n (c_{n,0} + c_{n,1}\, x + c_{n,2}\, x^2 + c_{n,3}\, x^3 + \ldots) \qquad \text{ossia} \qquad \sum_n \varphi_n(x)\,;$$

oppure

$$\sum_\nu (c_{1,\nu} + c_{2,\nu} + c_{3,\nu} + \ldots)\, x^\nu \qquad \text{ossia} \qquad \sum_\nu A_\nu\, x^\nu\,;$$

adunque sotto la posta condizione la serie doppia o somma di infinite serie di potenze si può trasformare in un' unica serie di potenze, c. d. d.

17. In modo del tutto simile si dimostra lo stesso teorema per serie di più variabili. Il teorema si enuncia in questo caso:

Se si ha una somma di infinite serie di potenze

$$\sum_n \varphi_n(x\,,\,y\,,\,z)$$

e per un sistema di numeri positivi $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma$ *la serie*

$$\sum_n \bar{\varphi}_n(\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma)$$

risulta convergente, indicandosi con $\bar{\varphi}_n$ *ciò che diventa la serie* φ_n *sostituendo in questa ad ogni coefficiente il relativo valore assoluto, la serie proposta sarà trasformabile in una serie di potenze di* x , y , z,

$$\sum A_{\lambda\mu\nu}\, x^\lambda\, y^\mu\, z^\nu$$

convergente per tutti i sistemi di valori di x , y , z *tali che sia*

$$|x| < \alpha \quad , \quad |y| < \beta \quad , \quad |z| < \gamma.$$

18. Se in una funzione razionale

$$F(x\,,\,y\,,\,z)$$

si fa la trasformazione

$$x = \varphi(n\,,\,v\,,\,w) \quad , \quad y = \psi(u\,,\,v\,,\,w) \quad , \quad z = \chi(u\,,\,v\,,\,w)$$

dove φ, ψ, χ siano pure simboli di funzioni razionali, si ottiene una nuova funzione razionale

$$F(u\,,\,v\,,\,w).$$

Proponendosi di cercare una generalizzazione di questo teorema nel caso che tutti o alcuni dei simboli F, φ, ψ, χ rappresentino non più funzioni razionali, ma serie di potenze, si giunge alla seguente proposizione fondamentale.

Teorema VII. *a*) Caso di una sola variabile.

Se in una serie di potenze

$$\text{(1)} \qquad F(x) = \Sigma\, A_\nu\, x^\nu$$

si pone

$$\text{(2)} \qquad x = \varphi(u)$$

dove φ *è una serie di potenze della variabile* u *e* $\bar{\varphi}(u)$ *è ciò che diventa* $\varphi(u)$ *cambiando ogni coefficiente nel rispettivo valore assoluto: e se esiste un numero* α *tale che* $\xi = \bar{\varphi}(\alpha)$ *si trovi entro il campo di convergenza di* F(x), *la serie* F(x) *si potrà, per mezzo della* (2), *trasformare in una serie di potenze di* u *convergente per tutti i valori di* u *inferiori ad* α *in valore assoluto.*

Dimostrazione. Se in $F(x)$ si pone

$$x = \varphi(u)$$

la serie $F(x)$ si cambia in

$$\Sigma A_\nu \varphi^\nu(u) \tag{3}$$

cioè in una somma infinita di serie di potenze di u. Se si può trovare un valore positivo α tale che la somma

$$\Sigma |A_\nu| \bar{\varphi}^\nu(\alpha)$$

riesca finita, la serie doppia (3) sarà trasformabile in una serie di potenze di u convergente per tutti i valori $|u| < \alpha$. (teor. VI). Ma per ipotesi posto $\bar{\varphi}(\alpha) = \xi$, ξ è nel campo di convergenza di $F(x)$ e quindi

$$\Sigma |A_\nu| \bar{\varphi}^\nu(\alpha)$$

ha un valor finito; pertanto essendo soddisfatta la condizione del teorema VI, per $|u| < \alpha$ si avrà

$$\Sigma A_\nu x^\nu = \Sigma c_n u^n ,$$

c. d. d.

Corollario. Se $F(x)$ fosse un polinomio o una serie di potenze convergente per tutti i valori di x, qualunque valore α che rende $\bar{\varphi}(\alpha)$ sommabile soddisfa alla condizione, e quindi $F(x)$ è trasformabile in una serie di potenze di u per tutti i valori del cerchio di convergenza della serie $\varphi(u)$. Se $F(x)$ e $\varphi(u)$ sono due serie di potenze sempre convergenti, la trasformazione è lecita per qualunque valore di u.

b) Caso di più variabili.

Se

$$F(x, y, z) = \Sigma A_{\lambda,\mu,\nu} x^\lambda y^\mu z^\nu \tag{1}$$

è una serie di potenze di più variabili, e si pone

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases} \tag{2}$$

dove φ, ψ, χ *sono serie di potenze delle variabili* u, v, w *aventi un campo comune di convergenza, e* $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\chi}$, *sono le serie che si ottengono sostituendo ai coefficienti di* φ, ψ, χ *i rispettivi valori assoluti, se esiste un sistema di valori positivi* α, β, γ *per* u, v, w *tali che*

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \quad , \quad \psi(\alpha, \beta, \gamma) \quad , \quad \chi(\alpha, \beta, \gamma)$$

risultino finite, e di più i valori

$$\xi = \bar{\varphi}(\alpha, \beta, \gamma) \quad , \quad \eta = \bar{\psi}(\alpha, \beta, \gamma) \quad , \quad \zeta = \bar{\chi}(\alpha, \beta, \gamma) \tag{3}$$

siano compresi nel campo di convergenza di F: *allora per tutti i valori di* u, v, w *rispettivamente inferiori ad* α, β, γ *in valore assoluto, la serie* F *si potrà trasformare in una serie di potenze convergente di* u, v, w.

Dimostrazione. Si eseguisca la moltiplicazione

$$\varphi^\lambda(u, v, w)\, \psi^\mu(u, v, w)\, \chi^\nu(u, v, w)$$

e si indichi il risultato con

$$f_{\lambda\mu\nu}(u, v, w):$$

affinchè la serie di funzioni

$$\Sigma A_{\lambda\mu\nu} f_{\lambda\mu\nu}(u, v, w) \tag{4}$$

sia trasformabile in una serie di potenze di u, v, w, occorre che esista un sistema di valori α, β, γ tale che la serie

$$\Sigma |A_{\lambda\mu\nu}| \bar{f}_{\lambda\mu\nu}(\alpha, \beta, \gamma) \tag{4'}$$

riesca finita. (Teor. VI esteso a più variabili). Ora per ipotesi

$$\Sigma A_{\lambda\mu\nu} \bar{\varphi}^\lambda(\alpha, \beta, \gamma)\, \bar{\psi}^\mu(\alpha, \beta, \gamma)\, \bar{\chi}^\nu(\alpha, \beta, \gamma) \tag{5}$$

è convergente, e quindi è tale anche

$$\Sigma |A_{\lambda\mu\nu}| \bar{\varphi}^\lambda(\alpha, \beta, \gamma)\, \bar{\psi}^\mu(\alpha, \beta, \gamma)\, \bar{\chi}^\nu(\alpha, \beta, \gamma). \tag{6}$$

Ora dico che si ha

$$\bar{f}_{\lambda\mu\nu}(\alpha, \beta, \gamma) \leq \bar{\varphi}^\lambda(\alpha, \beta, \gamma)\, \bar{\psi}^\mu(\alpha, \beta, \gamma)\, \bar{\chi}^\nu(\alpha, \beta, \gamma). \tag{7}$$

Infatti $f_{\lambda\mu\nu}$ è un aggregato di termini della forma $c_{\lambda\mu\nu}\, u^\lambda v^\mu w^\nu$, i quali termini provengono dalla moltiplicazione

$$\varphi^\lambda \psi^\mu \chi^\nu ,$$

ed $\bar{f}_{\lambda\mu\nu}$ è composto dei termini corrispondenti $|c_{\lambda\mu\nu}| \alpha^\lambda \beta^\mu \gamma^\nu$: ossia $|c_{\lambda\mu\nu}|$ proviene dalla composizione per addizione e moltiplicazione dei coefficienti di $\varphi^\lambda, \psi^\mu, \chi^\nu$, e del risultato s'intende preso il modulo: mentre nel termine generale della (6) abbiamo *le stesse operazioni* eseguite sui moduli dei coefficienti di φ^λ, ψ^μ, χ^ν; e quindi il risultato sarà non minore di $|c_{\lambda\mu\nu}|$, talchè sarà soddisfatta la (7).

Ma la serie (6) è finita come si è detto: lo sarà dunque *a fortiori* la (4'), e per il teorema VI, la serie F si potrà trasformare in una unica serie di potenze di u, v, w convergente per i valori

$$|u| < \alpha \quad , \quad |v| < \beta \quad , \quad |w| < \gamma .$$

c. d. d.

Corollario I. Se $F(x, y, z)$ è una serie convergente per tutti i valori finiti di x, y, z, o un polinomio in x, y, z, i valori ξ, η, ζ purchè finiti, soddisferanno certamente alla condizione di rendere finita la F; e quindi la F si potrà trasformare in una serie di potenze di u, v, w sempre convergente per tutti i valori di u, v, w che appartengono al campo di convergenza comune alle tre serie φ, χ, ψ.

II. Se anche le serie φ, χ, ψ fossero sempre convergenti, la trasformazione si potrebbe operare per tutti i sistemi di valori di u, v, w.

III. Nel teorema precedente non è necessario che il numero delle nuove variabili u, v, w sia eguale a quello delle primitive x, y, z. Per esempio nella serie $f(x)$ si ponga

$$x = u + v ,$$

si può riguardare questa trasformazione come un caso particolare del Teorema precedente: e si vede che se α, β sono due valori tali che $f(\alpha + \beta)$ riesca finita, $f(x)$ si potrà trasformare in serie finita di potenze di u, v per tutti i valori

$$|u| < \alpha \quad , \quad |v| < \beta :$$

in questa serie di potenze di u, v si potranno aggruppare i termini ad arbitrio, e porre p. e.

$$f(u+v) = c_0(u) + c_1(u)\, v + c_2(u) v^2 + \ldots$$

Una tale formola è valida se ρ è il raggio di convergenza di $f(x)$, sotto la condizione

$$|u| + |v| < \rho .$$

Una trasformazione analoga si può fare per più variabili.

§. III. *Condizione d'identità di due serie.*

19. Nella teoria delle funzioni razionali intere si dimostra che una funzione di grado n di una variabile complessa non può in tutto il piano della variabile annullarsi in più di n punti senza ridursi identicamente a zero: e ne abbiamo conchiuso l'identità di due funzioni di grado non superiore ad n che assumono valori eguali per $n+1$ punti del piano.

Le seguenti proposizioni, analoghe a quelle citate, si riferiscono alla teoria delle serie di potenze.

Teorema VIII. « *Se* f(x) *è una serie di potenze il cui termine costante è di-* » *verso da zero, si potrà sempre descrivere con centro* $x = 0$ *un cerchio di rag-* » *gio finito, entro il quale la serie non si annulla mai* ».

Dimostrazione. Abbiasi la serie

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

dove a_0 è diverso da zero, e sia ρ un valore positivo qualunque minore del cerchio di convergenza della serie $f(x)$. Se G è il massimo valore di $f(x)$ sulla circonferenza di raggio ρ, sarà (teor. V)

$$|a_\nu|\, \rho^\nu \leq G$$

e quindi se ξ è un valore positivo inferiore a ρ, si avrà

$$|a_\nu|\, \xi^\nu < G \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^\nu$$

e per $|x| = \xi$,

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \ldots| \leq |a_1|\, \xi + |a_2|\, \xi^2 + \ldots$$

$$< G \left(\frac{\xi}{\rho} + \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^2 + \ldots\right) = G \cdot \frac{\xi}{\rho - \xi} .$$

Si indichi con e un numero arbitrariamente piccolo e positivo, si potrà sempre fare ξ tanto piccolo che sia

$$G \frac{\xi}{\rho - \xi} < e ;$$

e in particolare, si potrà prendere ξ_0 tale che sia

$$G \frac{\xi_0}{\rho - \xi_0} < |a_0|$$

e *a fortiori* per $|x| \leq \xi_0$

$$|a_1 x + a_2 x^2 + \ldots| < |a_0|.$$

Risulta da ciò che l'insieme di tutti i termini della serie a partire dal secondo non potrà mai annullare il primo termine, ossia la serie non si annullerà mai per i punti dell'interno di un cerchio di raggio ξ_0.

Osservazione. Se la serie $f(x)$ non avesse il primo termine nullo, essa si potrebbe scrivere

$$x^n(a_n + a_{n+1}x + a_{n+2}x^2 + \ldots\ldots)$$

e la serie si annullerebbe per $x=0$; ma si potrebbe sempre descrivere un cerchio di centro zero e con raggio tale che nell'interno di questo cerchio la serie non si annulli mai, se non nel punto $x=0$ stesso.

Similmente si dimostra che per una serie di potenze di più variabili si può sempre determinare un campo di valori nell'intorno del posto ($x=0$, $y=0$, $z=0$), entro il quale campo la serie non si annulla mai o si annulla tutto al più nel posto ($x=0$, $y=0$, $z=0$).

20. Segue dall'importante teorema ora dimostrato che se una serie di potenze si annulla per tutti i punti di un cerchio sia pur piccolo quanto si vuole intorno al punto 0, la serie si annulla identicamente.

E se una serie di potenze deve annullarsi per tutti i punti di una linea che parte dal punto $x=0$ o converge asintoticamente al punto stesso, la serie si annulla identicamente.

E se una serie di potenze deve annullarsi in punti separati ma che si condensano indefinitamente verso il punto 0 (*), la serie si annulla identicamente.

21. Teorema IX. *Se due serie di potenze assumono valori eguali nei punti di un intorno piccolo quanto si vuole del punto* $x=0$, *o nei punti di una linea che converge al punto stesso, o in una serie di punti separati che si condensano in numero infinito verso il punto* $x=0$, *le due serie coincideranno identicamente nei loro coefficienti.*

Dimostrazione. Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono le due serie, la serie (teor. VII)

$$f(x) - \varphi(x)$$

avrà per coefficienti le differenze dei coefficienti omologhi di $f(x)$ e $\varphi(x)$, e valendo per questa serie le condizioni del n. 20 essa sarà identicamente nulla.

Una proposizione analoga vale per le serie di più variabili.

(*) Tali sarebbero i punti

$$x = 1 \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

§. IV. *Derivazione delle serie di potenze.*

22. Nel corollario III del teor. VII si è visto che se

$$(1) \qquad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

è una serie di potenze ed R il suo raggio di convergenza, si può porre

$$x = u + v$$

e sviluppare $f(x)$ in serie convergente di potenze di u e v, per tutti i sistemi di valori di u e v tali che

$$|u| + |v| < R:$$

in questa nuova serie i termini si possono aggruppare nell'ordine che si vuole e si può scrivere per esempio

$$f(x) = f_0(u) + f_1(u)v + f_2(u)v^2 + \ldots.$$

Si dia ora ad u un valore fisso a, a v un valore variabile h, e si avrà

$$f(a+h) = f_0(a) + f_1(a)h + f_2(a)h^2 + \ldots$$

questo sviluppo sarà valido per tutti i valori di h tali che

$$|a| + |h| < R$$

ossia per un cerchio di centro a e tangente internamente al cerchio R.

Ma posto $h=0$, si avrà

$$f(a) = f_0(a),$$

e quest'eguaglianza vale per tutti i punti a del cerchio R; pertanto sarà identicamente (teor. IX),

$$f_0(x) = f(x),$$

ossia queste due serie di potenze coincideranno nei loro coefficienti e si avrà

$$(2) \qquad f(a+h) = f(a) + h f_1(a) + h^2 f_2(a) + \ldots$$

e anche

$$(3) \qquad f(a+h) = f(a) + h f_1(a) + h[h f_2(a) + \ldots].$$

Ma nella Sezione III. si è detto che « se una funzione $F(x)$ definita in qua-
» lunque modo si può scrivere per valori di h abbastanza piccoli e per determinati
» valori di x

$$F(x+h) = F(x) + h\,F_1(x) + h\,\varphi(x\,,\,h)$$

» dove $\varphi(x\,,\,h)$ è una funzione che va a zero con h, la funzione $F_1(x)$ si dirà *de-*
» *rivata* di $F(x)$, e la funzione $F(x)$ sarà *derivabile* per tutti i valori di x pei quali
» è possibile un simile sviluppo »; e perciò la (3) ci dimostra che la $f(x)$ è *de-*
rivabile per tutti i valori $x = a$ dell'interno del cerchio R, e la derivata di $f(x)$
sarà una serie di potenze $f_1(x)$ convergente entro lo stesso cerchio R. La stessa
formola (3) dimostra anche la continuità di $f(a+h)$ al variare di h.

Se indichiamo con $f'(x)$ la derivata di $f(x)$, con $f''(x)$ quella di $f'(x)$, ... con $f^{(n)}(x)$ quella di $f^{(n-1)}(x)$ e così via, è facile trovare sostituendo $2h$ ad h che

$$f_2(x) = \frac{1}{1\cdot 2} f''(x),$$

sostituendo $3h$ ad h, che

$$f_3(x) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x)\,,$$

ecc.: talchè la formola (3) si trasforma in

$$(4) \qquad f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1\cdot 2\ldots n} f^{(n)}(a) + \ldots$$

sviluppo valido per tutti i posti a dell'interno del cerchio R e per valori di h determinati da

$$|a| + |h| < R.$$

Alla formola (4) si può anche dare la forma seguente, che useremo più di frequente: posto $a + h = x$, viene

$$(5) \qquad f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \ldots;$$

ossia dalla serie

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

convergente nell'intorno di $x = 0$, si deduce una serie

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots$$

convergente nell'intorno di $x = a$, ed i coefficienti della nuova serie sono deducibili con processo perfettamente pratico da quelli della serie primitiva.

Sviluppando effettivamente il calcolo di $f(a+h)$, si trova senza difficoltà che

$$f^{(k)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots k\,c_k + 2\cdot 3 \ldots (k+1)\,c_{k+1}x + \ldots + r(1+r)(2+r)\ldots(k+r)c_{k+r}\,x^r + \ldots$$

Si giunge così allo sviluppo effettivo della serie (5) per qualunque punto a, conoscendo i coefficienti della serie $f(x)$.

23. Riassumendo le cose fin qui dette si può enunciare il seguente

Teorema X. *Una serie di potenze convergente entro un cerchio di raggio* R *rappresenta una funzione continua avente un unico valore finito e determinato per ogni punto* x *dell'interno di esso cerchio. Tale funzione ammette entro quel cerchio le derivate successive di tutti gli ordini, che sono altrettante serie di potenze convergenti entro il medesimo cerchio* R; *e dalla serie data si può dedurre per ogni punto dell'interno del cerchio una serie della forma* (5).

Una proposizione analoga vale per le serie di potenze di più variabili e si dimostra cogli stessi principii.

§. V. *Serie dedotte da una serie di potenze. Vero raggio di convergenza.*

24. Una serie di potenze della quantità $x - a$ sia convergente entro un cerchio di centro a e di raggio R: e si indichi con

$$(1) \qquad c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots\ldots$$

Per il teorema X, la funzione determinata da questa serie nell'interno del cerchio R ha proprietà del tutto analoghe a quelle delle funzioni razionali intere e si dice perciò avere *carattere razionale intero nell'intorno del posto* a.

Per porre in evidenza il punto per l'intorno del quale vale lo sviluppo (1), si scriverà questo sviluppo in modo abbreviato con $p(x\,|\,a)$, e si indicherà con $(a\,,\,R)$ il cerchio di centro a e di raggio R.

Sia b un punto qualunque dell'interno del cerchio $(a\,,\,R)$: per tutti i valori di x tali che sia

$$|\,b - a\,| + |\,x - b\,| < R$$

si potrà ricavare dalla serie (1) uno sviluppo per le potenze di $x - b$ (n. 23, formola (5)) e questo sarà convergente entro un cerchio di centro b e di raggio $R - |b - a|$, cioè tangente internamente al cerchio $(a\,,\,R)$. Questo sviluppo si indicherà con

$$(2) \qquad p(x\,|\,b) = c_0' + c_1'(x-b) + c_2'(x-b)^2 + \ldots\ldots$$

e si dirà *serie dedotta dalla* (1) *rispetto al punto* b; essa è convergente entro il cerchio $(b, R - |b - a|)$ ma potrà anche convergere entro un cerchio di raggio maggiore: e nei punti comuni ai due cerchi di convergenza le due serie

$$p(x \mid a) \quad \text{e} \quad p(x \mid a \mid b)$$

danno un medesimo valore.

Sia c un punto qualunque dell'interno del cerchio $(b, R - |b - a|)$: si potrà dedurre dalla serie (2) rispetto al punto c una serie

$$p(x \mid a \mid b \mid c),$$

ma si potrà dedurre nel tempo stesso dalla serie (1) uno sviluppo rispetto allo stesso punto c

$$p(x \mid a \mid c),$$

ora i due sviluppi

$$p(x \mid a \mid b \mid c) \quad \text{e} \quad p(x \mid a \mid c)$$

il primo dedotto *immediatamente* dalla (1), il secondo dedotto *mediatamente*, coincidono identicamente, infatti nell'intorno del punto c i due sviluppi danno in ogni punto x il valore dato da $p(x \mid a)$ e da $p(x \mid a \mid b)$, i quali sono eguali; e quindi (teor. IX) queste due serie coincidono nei loro coefficienti perchè sviluppate per le potenze della stessa quantità $x - c$.

25. Teorema XI. *Se da una serie*

$$p(x \mid a)$$

si deduce una serie

$$p(x \mid a \mid b),$$

viceversa la serie primitiva si può riguardare come dedotta immediatamente o mediatamente dalla seconda.

Dimostrazione. La serie dedotta $p(x \mid a \mid b)$ può avere un cerchio di convergenza che contenga il punto a; allora da $p(x \mid a \mid b)$ si può dedurre immediatamente una serie $p(x \mid a \mid b \mid a)$ che per un intorno di a ha in ogni punto x lo stesso valore di $p(x \mid a \mid b)$ e quindi di $p(x \mid a)$; le due serie

$$p(x \mid a \mid b \mid a) \quad \text{e} \quad p(x \mid a)$$

prendono lo stesso valore nell'intorno del punto a e procedono per le potenze della stessa variabile $x - a$; dunque (teor. IX) esse coincideranno nei loro coefficienti.

Ma il cerchio di convergenza di $p(x \mid a \mid b)$ può non contenere il punto a: in tal caso si può sempre prendere una serie di punti $c_1, c_2, \ldots$ tali che c_1 si trovi nel cerchio di convergenza di $p(x \mid a \mid b)$: dedotta rispetto a c_1 la serie

$$p(x \mid a \mid b \mid c_1),$$

c_2 si trovi nel cerchio di convergenza di questa, ... e così via, fino ad un punto c_n tale che a si trovi nel cerchio di convergenza di

$$p(x \mid a \mid b \mid c_1 \ldots \mid c_n).$$

Da quest'ultima serie si può dedurre uno sviluppo

$$p(x \mid a \mid b \mid \ldots\ldots \mid c_n \mid a)$$

e questo, coincidendo con $p(x \mid a)$ in valore nell'intorno di a, coinciderà con $p(x \mid a)$ nei suoi coefficienti, c. d. d.

Teorema XII. *Si abbiano due sviluppi in serie di potenze delle quantità* $x - a$ *ed* $x - b$; *ed i cerchi di convergenza di questi sviluppi abbiano una parte comune. Si riscontri inoltre che per un punto* c *della parte comune ai due cerchi, le serie dedotte dagli sviluppi primitivi rispetto al punto* c *coincidono. Allora: 1° Le serie date si potranno riguardare come dedotte mediatamente l'una dall'altra. 2° Le serie dedotte dagli sviluppi primitivi per qualunque punto della parte comune ai due cerchi di convergenza riesciranno identiche.*

Dimostrazione. Si abbiano le serie

$$(1) \qquad p(x \mid a) \quad \text{e} \quad q(x \mid b),$$

ed i cerchi di convergenza di queste serie abbiano una parte comune: per un punto c di questa parte comune si deducano le serie

$$(2) \qquad p(x \mid a \mid c), \quad q(x \mid b \mid c)$$

e queste serie dedotte si suppongano coincidenti. Allora per il teor. X la serie $p(x \mid a)$ si può riguardare come dedotta da $p(x \mid a \mid c)$, $q(x \mid b)$ come dedotta da $q(x \mid b \mid c)$: ma $p(x \mid a \mid c)$ coincide con $q(x \mid b \mid c)$, dunque $p(x \mid a)$ è dedotta da $q(x \mid b)$ mediante la serie $q(x \mid b \mid c) = p(x \mid a \mid c)$.

Si prenda ora un punto c' nel cerchio massimo che si può descrivere dal centro c senza uscire dalla parte comune ai cerchi di convergenza di $p(x \mid a)$ e $q(x \mid b)$; (*) rispetto a questo punto c' si potranno dedurre le serie

$$(3) \qquad p(x \mid a \mid c \mid c') \quad \text{e} \quad q(x \mid b \mid c \mid c'),$$

(*) Il lettore è pregato di fare la figura.

ma questi sviluppi coincidono in valore con

$$p(x \mid a \mid c) \quad \text{e} \quad q(x \mid b \mid c),$$

dunque essi coincideranno fra loro per il teor. IX; lo stesso avverrà per le serie dedotte immediatamente

$$(4) \qquad p(x \mid a \mid c') \quad , \quad q(x \mid b \mid c')$$

le quali non differiscono dalle (3); e lo stesso si potrà ripetere per un punto c'' del campo di convergenza della (4), e procedendo così di mano in mano, per qualunque punto comune ai cerchi di convergenza di $p(x \mid a)$ e $q(x \mid b)$.

26. Si è dimostrato (n. 13) che ogni serie di potenze ammette un cerchio determinato di convergenza; però non conosciamo ancora e ci proponiamo di investigare da quali proprietà sia caratterizzata la vera circonferenza di convergenza. A questo effetto osserviamo che cambiando x in $x+h$ nella serie

$$(1) \qquad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

si ottiene lo sviluppo

$$(2) \qquad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots\ldots$$

valido sotto la condizione

$$|x| + |h| < \mathrm{R}$$

(dove R indica il raggio di convergenza di $f(x)$, nel senso che per

$$|x| < \mathrm{R}$$

la $f(x)$ è convergente, ma non si sa se la convergenza si mantenga per

$$|x| < \mathrm{R}).$$

Per un valore speciale di x dell'interno del cerchio R la serie (2) ammette un cerchio di convergenza che è per lo meno il cerchio di centro x tangente internamente al cerchio R, ma può anche essere maggiore. Al variare del punto x varierà il raggio r di questo cerchio, e per gl'infiniti valori di r esisterà un limite inferiore, il quale potrà essere nullo o maggiore di zero, (sez. 2ª); ora noi dimostreremo che se questo limite ha un valore H diverso da zero, il vero raggio di convergenza non sarà R, ma R + H.

Teorema XIII. *Se il limite inferiore dei veri raggi di convergenza delle serie*

$$(3) \qquad \mathrm{f(a)} + \mathrm{f'(a)}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{a}) + \mathrm{f''(a)}\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

(dedotte dalla (1) per i vari punti a del cerchio R) non è nullo, si potrà asserire che il vero raggio di convergenza della serie (1) non sarà R, ma R + H.

Dimostrazione. Sia ρ un numero positivo inferiore ad H e si descriva un cerchio di centro $x=0$ e di raggio $\mathrm{R}+\rho$. Si prenda un punto x' qualunque nella corona circolare compresa fra i cerchi R ed $\mathrm{R}+\rho$, e si descriva il cerchio di centro x' e di raggio H, il quale avrà certamente una parte comune col cerchio R. In questa parte comune si prenda un punto qualunque a e si deduca dalla (1) la serie relativa al punto a,

$$f(x \mid a) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \ldots\ldots$$

questa avrà un cerchio di convergenza il cui raggio è per ipotesi non inferiore ad H; descrivo dunque il cerchio di centro a e di raggio H, questo comprenderà il punto x', e per conseguenza

$$f(x' \mid a)$$

avrà un valore determinato.

Dico ora che il valore di $f(x' \mid a)$ non dipende dal punto a: preso infatti un altro punto a' nello spazio comune ai due cerchi, per la stessa ragione addotta dianzi la serie

$$f(x' \mid a')$$

avrà un significato. Ma nel punto di mezzo c della retta aa' le

$$f(x \mid a \mid c) \quad \text{ed} \quad f(x \mid a' \mid c)$$

coincidono, perchè coincidono colla $f(x)$; onde (teor. XII) le serie dedotte da $f(x \mid a)$ ed $f(x \mid a')$ coincideranno in tutto lo spazio comune ai cerchi a ed a', e quindi anche nel punto x'.

Ciò posto, dico che la serie primitiva

$$(1) \qquad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_\nu x^\nu + \ldots$$

è convergente anche per $x = x'$. La serie $f(x \mid a)$ è infatti

$$(2) \qquad f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \ldots + f^{(\nu)}(a)\frac{(x-a)^\nu}{\nu!} + \ldots$$

ed è convergente sotto le condizioni

$$|a| < \mathrm{R} \quad , \quad |x-a| < \mathrm{H};$$

si ponga

$$|a| = \alpha < \mathrm{R} \quad , \quad |x-a| = \rho < \mathrm{H}.$$

Sia G il massimo valore assoluto della serie (2) sulla circonferenza (a, ρ): si avrà (teor. V)

$$\frac{1}{\nu!} \mid f^{(\nu)}(a) \mid \rho^{\nu} \leq G \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots \infty);$$

ma il primo membro di questa diseguaglianza è alla sua volta una serie di potenze, percui applicando lo stesso teorema al termine generale di questa si avrà

$$\frac{1}{\nu!} \mid c_k \mid k(k-1)(k-2) \ldots (k-\nu+1)\, \alpha^{k-\nu} \rho^{\nu} \leq G$$

e dividendo per R^{ν}

$$c_k \mid \frac{k(k-1)(k-2) \ldots (k-\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots \nu} \alpha^k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu} \leq G \left(\frac{\alpha}{R}\right)^{\nu}$$

e sommando a tutti i valori di ν da 0 a k, ed applicando la formola binomiale,

$$\mid c_k \mid \alpha^k \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)^k < G \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{R}\right)^k}{1 - \frac{\alpha}{R}} < \frac{GR}{R - \alpha}.$$

Questa diseguaglianza ci dimostra che $|c_k|$ moltiplicato per $\left(\alpha + \frac{\alpha\rho}{R}\right)^k$ rimane per tutti i valori di k inferiore ad un numero finito finchè α è inferiore ad R; ne viene dunque per il teor. I, che la serie

$$\Sigma\, c_k x^k$$

è convergente per

$$\mid x \mid < \alpha + \frac{\alpha\rho}{R}$$

dove α è un numero vicino ad R quanto si vuole ma inferiore ad R. Talchè il raggio di convergenza della serie

$$\Sigma\, c_k x^k$$

ossia $f(x)$ differirà da $R + \rho$ ossia da $R + H$ di tanto poco quanto si vuole: ma questa serie ha un raggio di convergenza ben determinato, e quindi non potrà differire da

$$R + H,$$

c. d. d.

27. Dal teorema precedente risulta che se R è il vero raggio di convergenza della serie $f(x)$, le serie dedotte $f(x\,a)$ avranno raggi di convergenza $r(a)$ variabili con a, ma il cui limite inferiore sarà nullo. Ma per un teorema generale dimostrato nella sezione 2ª esisterà nel piano della variabile x per lo meno un punto X avente la proprietà che in *qualunque intorno* di X il limite inferiore dei valori di $r(a)$ (per i punti a di questo intorno di X) sarà ancora nullo. Ma un tal punto non può cadere nè fuori del cerchio R, nè nell'interno; esso cade quindi sulla circonferenza.

Per un tale punto X non si può evidentemente dedurre uno sviluppo in serie di potenze della $f(x)$, perchè se ciò fosse possibile, chiamato R(X) il raggio di convergenza di un tale sviluppo, per tutti i punti a comuni al cerchio R e al cerchio R(X) il limite inferiore dei raggi $r(a)$ non sarebbe nullo: contro il dimostrato. Un tal punto X si dice *punto singolare* per la serie $f(x)$; si può dunque enunciare cLe:

« La vera circonferenza di convergenza di una serie di potenze è caratterizzata » dal fatto che su di essa si trova per lo meno un punto singolare, rispetto al » quale non si può dedurre alcuna serie dalla serie primitiva ».

Sulla circonferenza di convergenza i punti singolari possono essere in numero finito, in numero infinito ma in modo che sopra archi finiti della circonferenza non cada alcun punto singolare, infine in numero infinito per modo che in qualunque arco finito si trovi sempre per lo meno un tal punto.

Dalla definizione dei punti singolari risulta chiaro che essi punti non appartengono all'interno del cerchio di convergenza di alcuna delle serie dedotte dalla primitiva $f(x)$.

CAPITOLO III.

Le funzioni analitiche.

---

28. Una serie di potenze $f(x \mid a)$ convergente entro un cerchio di centro a e di raggio r determina per tutti i valori x presi nell'interno del cerchio una funzione avente carattere razionale intero e colle proprietà riassunte nel teor. X al n. 23.

Preso un punto b nell'interno di questo cerchio si può dedurre dalla serie primitiva una serie $f(x \mid a \mid b)$ rispetto al punto b; questa avrà un cerchio di convergenza r' che si può estendere anche fuori del cerchio (a, r): si dirà che questa serie dà la *continuazione* della funzione definita da $f(x \mid a)$ per i punti del cerchio (b, r') esterni al cerchio (a, r).

Dalla serie $f(x \mid a)$ si possono dedurre infinite serie come $f(x \mid a \mid b)$; da ciascuna di queste infinite nuove serie $f(x \mid a \mid b \mid c)$, e così via.

29. Tutte le infinite serie $f(x \mid a \mid b \ldots)$ deducibili da una data serie sia immediatamente sia mediatamente si diranno costituire gli *elementi di una funzione*

analitica; e la serie $f(x \mid a)$ si dirà *elemento primitivo* od *originario*. Per il teor. XI al n. 25 uno qualunque degli elementi si può prendere come primitivo e serve alla deduzione di tutti gli altri.

L'insieme degli elementi ci dà la *funzione analitica* in tutta la sua estensione. Il valore (o i valori) della funzione analitica per $x = x_0$ sarà il termine iniziale dello sviluppo (o degli sviluppi)

$$f(x \mid a \mid b \mid \ldots x_0).$$

L'insieme dei valori di x pei quali dall'elemento originario $f(x \mid a)$ si può ottenere una serie dedotta si dirà *campo di validità* della funzione analitica.

I valori di x non appartenenti al *campo di validità* si diranno *punti singolari*. I punti singolari possono essere isolati, o costituire linee, od anche aree.

30. Una funzione si dirà *monodroma* quando partendo da un elemento originario $f(x \mid a)$ e seguendo qualsiasi via tracciata dai punti che servono agli sviluppi intermedi, si giungerà rispetto ad ogni punto x_0 del campo di validità costantemente ad un unico sviluppo

$$f(x \mid a \mid \ldots x_0)$$

La funzione si dirà invece *polidroma* quando partendo da un elemento originario $f(x \mid a)$ e seguendo varie vie tracciate da punti intermedi, si giungerà rispetto ad uno stesso punto x_0 del campo di validità a diversi sviluppi

$$f(x \mid a \mid \ldots \mid x_0) \quad , \quad f_1(x \mid a \mid \ldots x_0), \ldots .$$

31. Un sistema di p serie di potenze

$$f_1(x \mid a) \quad , \quad f_2(x \mid a), \ldots f_p(x \mid a)$$

aventi un cerchio comune di convergenza nell'intorno del posto a, servono di elementi originari per p funzioni analitiche. Le serie dedotte da quelle rispetto ad un punto x_0

$$f_1(x \mid a \mid \ldots \mid x_0) \quad , \quad f_2(x \mid a \mid \ldots \mid x_0), \ldots f_p(x \mid a \mid \ldots \mid x_0)$$

si diranno *elementi simultanei* se la deduzione sarà fatta per ciascuna delle p funzioni seguendo la stessa via. Questa definizione ha una grande importanza tutte le volte che si trattano funzioni polidrome.

In particolare alcune delle funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_p$ potrebbero essere derivate delle altre, e si dimostra senza difficoltà che

« Se $f(x|a)$ ed $f'(x|a)$ sono due elementi di funzioni ed $f'(x|a)$ rappresenta » la serie derivata di $f(x \mid a)$. e da questi elementi si deducono gli elementi *si-*

» *multanei* $f(x \mid a \mid \ldots \mid x_0)$, $f'(x \mid a \mid \ldots \mid x_0)$, l'elemento $f'(x \mid a \mid \ldots \mid x_0)$ sarà la » serie derivata di $f(x \mid a \mid \ldots \mid x_0)$ ».

La dimostrazione è affatto ovvia se x_0 è nell'intorno di a, e da quel caso si estende subito la proposizione al caso generale.

32. Teorema. *Se una funzione analitica è tale che un suo elemento soddisfi ad una relazione*

$$F = 0$$

(dove F è simbolo di funzione razionale o di serie di potenze sempre convergente delle quantità che in esso entrano) tutti gli altri elementi della funzione soddisfaranno alla medesima relazione.

Dimostrazione. Sia

$$(1) \qquad F(u_1, u_2, \ldots \ldots u_n)$$

un polinomio razionale intero in $u_1, u_2, \ldots u_n$, o una serie di potenze intere e positive sempre convergente delle stesse quantità, e si ponga

$$(2) \qquad u_1 = f_1(x \mid a) \quad , \quad u_2 = f_2(x \mid a), \ldots u_n = f_n(x \mid a)$$

dove $f_1, f_2, \ldots f_n$ sono serie di potenze aventi un cerchio comune di convergenza nell'intorno di $x = a$. Per tutti i valori x dell'interno di questo cerchio comune di convergenza la serie F è trasformabile in una serie convergente di potenze di $x - a$. (Teor. VII, n. 18, coroll. I); sia questa

$$P(x \mid a);$$

se R indica il raggio del cerchio comune di convergenza delle (2), $P(x \mid a)$ sarà convergente per lo meno entro il cerchio (a, R).

Si prenda ora un punto b nell'interno di questo cerchio, e si deducano dalle (2) le serie

$$(3) \qquad f_1(x \mid a \mid b) \quad , \quad f_2(x \mid a \mid b), \ldots f_n(x \mid a \mid b);$$

e dalla serie $P(x \mid a)$ la

$$(4) \qquad P(x \mid a \mid b).$$

Queste $n + 1$ serie convergeranno tutte entro un cerchio di centro b e di raggio per lo meno eguale a $|b - a|$; indicheremo questo raggio con R'.

Nella (1) si faccia la sostituzione

$$(5) \qquad u_1 = f_1(x \mid a \mid b) \quad , \quad u_2 = f_2(x \mid a \mid b), \ldots u_n = f_n(x \mid a \mid b),$$

la F si trasformerà in una serie di potenze di $x-b$ convergente entro tutto il cerchio (b, R'), per il corollario citato del teor. VII a n. 18. Questa serie trasformata si indichi con

$$P_1(x \mid b). \tag{6}$$

Ora in un punto x' del cerchio (b, R'), le (3) e le (2) assumono gli stessi valori, e la (4) assume lo stesso valore di $P(x' \mid a)$; lo stesso valore è assunto pure dalla (6), quindi

$$P_1(x' \mid b) = P(x' \mid a \mid b).$$

Quest'eguaglianza verificandosi per tutto un intorno di b, e le serie (4) e (6) procedendo per le potenze della stessa variabile $x-b$, esse coincideranno identicamente.

Se dunque dagli elementi (1) è soddisfatta la relazione

$$F\big(f_1(x \mid a), \; f_2(x \mid a) \ldots f_n(x \mid a)\big) = 0,$$

il primo membro sviluppato in serie di potenze $P(x \mid a)$ di $x-a$ avrà tutti i suoi coefficienti nulli; lo stesso avverrà della sua dedotta

$$P(x \mid a \mid b)$$

e quindi di

$$P_1(x \mid b)$$

che non è altro che

$$F\big(f_1(x \mid a \mid b), \; f_2(x \mid a \mid b); \ldots f_n(x \mid a \mid b)\big);$$

quest'ultima espressione sarà dunque zero.

Adunque se l'equazione

$$F = 0$$

è soddisfatta dagli elementi (1), essa sarà soddisfatta dagli elementi (3) e procedendo oltre, da tutti gli elementi deducibili dalle (1) purchè simultaneamente; c. d. d.

33. Il teorema precedente tende a dimostrare che » tutte le proprietà che val- » gono per un elemento di funzione analitica si conservano inalterate negli altri » elementi ».

A dir vero, la dimostrazione è limitata al caso che il primo membro dell'equazione

$$F = 0$$

sia simbolo di funzione razionale o di serie di potenze sempre convergente: ma

questo caso contiene in se tutti quelli particolari che comunemente occorrono: equazioni in termini finiti, ed equazioni differenziali, alcuni degli elementi $f_1, f_2, \ldots f_n$ potendo essere derivate d'ordine qualunque degli altri.

34. Per le serie di potenze di più variabili valgono proposizioni analoghe a quelle dimostrate nei n. 24 e seg., e la definizione di *funzione analitica* di più variabili si stabilisce come abbiamo stabilito ai n.i 28 e seg. la definizione di funzione di una sola variabile.

A legittimare pienamente la definizione data occorrerebbe dimostrare ancora:

1° che le *funzioni analitiche* quali le abbiamo definite possono dare la soluzione dei problemi esprimibili coi segni dell'analisi stessa, almeno in un numero estesissimo di casi, ed in tutti quelli che comunemente occorrono.

2.° che l'inversa di una funzione analitica è pure una funzione analitica (questione contenuta implicitamente nella precedente), e su questo argomento ci proponiamo di tornare in altro lavoro pure ispirato ai medesimi principii.

Ci basti aggiungere che le cose fin qui dette ci sembrano sufficiente preparazione alla lettura dell'importantissima memoria del prof. Weierstrass. « *Ueber* » *eindeutige Functionen* » nelle « Abhandlungen der K. Akad. der Wissenschaft, » Berlin, 1877 ».

Pavia, Settembre 1879 – Febbraio 1880.

Estratto dal volume XVIII del GIORNALE DI MATEMATICHE diretto dal Prof. G. BATTAGLINI
edito da B. PELLERANO, Strada di Chiaja, n.° 60 Napoli.