R. Conti
28.6.45

W. W. ROUSE BALL

SOCIO E RETTORE DEL COLLEGIO DELLA TRINITÀ A CAMBRIDGE

LE
MATEMATICHE MODERNE
SINO AD OGGI

VERSIONE

DEL

DOTT. DIONISIO GAMBIOLI

PROFESSORE NEL R. ISTITUTO TECNICO DI ROMA

CON UN'APPENDICE « SU ALCUNI MATEMATICI ITALIANI DEI TEMPI RECENTI »

RIVEDUTA E CORRETTA

DAL PROF. GINO LORIA

DELL'UNIVERSITÀ DI GENOVA

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI

ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Tip. Ariani, Firenze - II-1937

TERZO PERIODO

Matematiche moderne.

La storia delle matematiche moderne comincia coll' invenzione della geometria analitica e del calcolo infinitesimale. La matematica di questo periodo è assai più difficile di quella dei precedenti; essa è generalmente caratterizzata dallo sviluppo dell'analisi e dall'applicazione di questa ai fenomeni naturali.

Continuiamo in ordine cronologico. Il cap. XV contiene la storia dei quaranta anni che corrono dal 1635 al 1675, cioè una breve esposizione delle scoperte matematiche di Descartes, Cavalieri, Pascal, Wallis, Fermat e Huygens. Il cap. XVI è dedicato allo studio delle scoperte di Newton. Il cap. XVII contiene un sommario delle opere di Leibniz e dei suoi seguaci durante la prima metà del secolo XVIII (incluso d'Alembert), ed anche della scuola inglese di quel tempo, sino alla morte di Maclaurin. Le opere di Eulero, Lagrange, Laplace e dei loro contemporanei costituiscono l'argomento del cap. XVIII. Finalmente, nel cap. XIX ho raccolte alcune notizie su parecchi matematici contemporanei; ma ho escluso ogni considerazione particolareggiata sugli autori viventi; in parte per questa ed in parte per altre ragioni, che verranno esposte a suo tempo, la storia della matematica contemporanea non risulterà trattata esaurientemente.

TERZO PERIODO

Matematiche moderne.

La storia delle matematiche moderne comincia coll' invenzione della geometria analitica e del calcolo infinitesimale. La matematica di questo periodo è assai più difficile di quella dei precedenti; essa è generalmente caratterizzata dallo sviluppo dell'analisi e dall'applicazione di questa ai fenomeni naturali.

Continuiamo in ordine cronologico. Il cap. XV contiene la storia dei quaranta anni che corrono dal 1635 al 1675, cioè una breve esposizione delle scoperte matematiche di Descartes, Cavalieri, Pascal, Wallis, Fermat e Huygens. Il cap. XVI è dedicato allo studio delle scoperte di Newton. Il cap. XVII contiene un sommario delle opere di Leibniz e dei suoi seguaci durante la prima metà del secolo XVIII (incluso d'Alembert), ed anche della scuola inglese di quel tempo, sino alla morte di Maclaurin. Le opere di Eulero, Lagrange, Laplace e dei loro contemporanei costituiscono l'argomento del cap. XVIII. Finalmente, nel cap. XIX ho raccolte alcune notizie su parecchi matematici contemporanei; ma ho escluso ogni considerazione particolareggiata sugli autori viventi; in parte per questa ed in parte per altre ragioni, che verranno esposte a suo tempo, la storia della matematica contemporanea non risulterà trattata esaurientemente.

ROUSE BALL. — II. 1

CAPITOLO XIV.

Fisionomia della matematica moderna.

La linea di separazione fra questo periodo e quello trattato negli ultimi sei capitoli non è in alcun modo definita così bene come quella che divide la matematica greca dalla matematica del medio evo. I metodi di analisi impiegati nel XVII secolo e la natura dei problemi trattati subirono un mutamento graduale; ma i matematici dell'inizio di questo periodo sono in relazione diretta con quelli della fine del periodo precedente. Per questa ragione alcuni autori hanno diviso la storia della matematica solo in due parti, considerando gli scolastici come i successori diretti dei matematici greci e facendo incominciare la creazione della matematica moderna dalla introduzione in Europa delle opere arabe. La divisione che ho adottata è, secondo me, più conveniente; poichè l'introduzione della geometria analitica e del calcolo infinitesimale hanno completamente cambiato l'indirizzo della matematica; e quindi sembra preferibile considerare la loro invenzione come indicante il principio della matematica moderna.

Gli anni che seguono l'introduzione di questi metodi costituiscono un periodo di intensa e continua attività intellettuale in ogni ramo di scienza ed il progresso fatto allora dalla matematica è stato immenso. La maggiore estensione del campo delle cognizioni ed il rapido scambio delle idee mediante la stampa aumentano le difficoltà dello storico; mentre il cumulo del materiale, di cui egli deve impadronirsi ed anche l'eco delle vecchie controversie, contribuiscono a rendere difficilissimo il dare una notizia chiara ed esatta dello svilupparsi della materia. Ma, siccome i fatti principali sono generalmente noti e le opere pubbli-

cate durante questo tempo sono accessibili a qualunque studioso, così posso trattare della vita e delle opere dei matematici moderni più concisamente che non di quella dei loro predecessori e quindi limitarmi esclusivamente a coloro, ai quali si devono notevoli progressi della scienza nostra.

Per dare un carattere di unità ad una storia delle matematiche è indispensabile trattarla cronologicamente; ma ciò si può fare seguendo due vie. Si può seguire separatamente il progresso dei diversi rami della matematica durante un certo periodo (non troppo lungo) e trattare delle opere di ciascun matematico a mano a mano che si presentano. Ovvero possiamo parlare successivamente della vita e degli scritti dei matematici di un certo periodo e discorrere dello svolgimento dei diversi argomenti, che essi hanno trattato. Personalmente io preferisco questo secondo sistema, di cui non è piccolo vantaggio, dal mio punto di vista, l'interesse naturale che esso aggiunge alla narrazione. Senza dubbio quando l'argomento assume forme più complesse, questa via diviene più difficile e può darsi che quando si tratterà di scrivere la storia della matematica del secolo XIX, sarà necessario trattare separatamente i diversi rami di essa; ma, per quanto è possibile, io continuo la presente storia esponendola sotto forma biografica.

Generalmente parlando possiamo distinguere cinque stadi nella storia di questo periodo.

Anzitutto havvi l'invenzione della geometria analitica fatta da Descartes nel 1637 e, quasi contemporaneamente, l'introduzione del metodo degli indivisibili, mediante il quale le aree, i volumi ed i baricentri possono essere determinati con sommatorie, in modo analogo a quello adoperato oggidì dal calcolo integrale, che ben presto sostituì il metodo degli indivisibili. Tuttavia la geometria analitica mantenne la sua posizione, come elemento necessario della coltura di ogni matematico, poichè è incomparabilmente più potente della geometria degli antichi in ogni ricerca. Questa è sempre senza dubbio un'ammiranda disciplina ed offre eleganti dimostrazioni di alcune proposizioni, la cui verità è già nota; ma richiede un procedimento speciale per ogni particolare problema proposto. La geometria analitica invece si fonda su poche regole, mediante le quali si può dimostrare se una proposizione qualunque è vera o falsa.

In secondo luogo noi abbiamo l'invenzione delle flussioni o calcolo differenziale (circa il 1666 e probabilmente una seconda invenzione indipendente da quella nel 1674). Ogni qualvolta una quantità varia secondo qualche legge di continuità (ed appunto secondo una siffatta legge il più delle cose variano in natura), il calcolo differenziale ci mette in grado di misurare il rapporto del suo aumento o della sua diminuzione; viceversa dal rapporto di incremento o decremento, il calcolo integrale ci pone in grado di risalire alla quantità primitiva. Prima di tale invenzione ogni singola funzione di x, come

$$(1 + x)^n, \ \log\ (1 + x), \ \mathrm{sen}\ x, \ \mathrm{arc\ tg}\ x, \ \mathrm{ecc.},$$

poteva essere sviluppata in serie di potenze crescenti di x solo mediante appositi procedimenti suggeriti dalla natura dei singoli problemi; invece, coll'aiuto del calcolo, lo sviluppo di una funzione di x in serie di potenze crescenti di questa variabile si fa in generale mediante una regola, che comprende tutti i casi simili. Così la teoria dei massimi e minimi, il calcolo delle lunghezze delle curve e le aree tra esse comprese, la determinazione delle superficie, dei volumi e dei baricentri e molti altri problemi sono riducibili ognuno ad una regola unica. La teoria delle equazioni differenziali, del calcolo delle variazioni, delle differenze finite ecc. sono pure svolgimenti di questo calcolo.

Questi due rami — la geometria analitica ed il calcolo infinitesimale — divennero i principali fattori d'ogni ulteriore progresso della matematica. L'uno e l'altra sono una speciale macchina e per risolvere un problema è solo necessario applicarla alla particolare funzione, o all'equazione della particolar curva o superficie considerata; eseguendo poi certe operazioni semplici si arriva alla soluzione. La validità del procedimento viene stabilito una volta per tutte, onde non occorrono più metodi speciali ad ogni singola funzione, curva o superficie.

In terzo luogo l'Huygens gettò, seguendo le orme di Galileo, le fondamenta di un metodo soddisfacente per trattare la dinamica; Newton poi ridusse questa a scienza esatta. Quest'ultimo matematico applicò i nuovi metodi analitici, non solo a numerosi problemi della meccanica de' solidi e dei fluidi sulla terra, ma anche al sistema solare; e così la meccanica celeste e terrestre entrarono nel dominio della matematica. Non havvi alcun dubbio che Newton abbia adoperato il calcolo per ottenere molti de' suoi risultati; ma sembra che egli abbia pensato che, se le sue dimostrazioni fossero state fatte coll'aiuto di una scienza nuova, fino allora sconosciuta, i suoi critici (non comprendendo il calcolo delle flussioni) avrebbero errato nel giudicare la verità e l'importanza delle sue scoperte. Quindi egli decise di dare dimostrazioni geometriche dei suoi resultati e conseguentemente diede alla luce i suoi «Principia» in una forma geometrica, rendendoli così accessibili a tutti. La meccanica teorica fu ampliata e posta sotto la forma moderna da Lagrange e Laplace verso la fine del XVIII secolo.

In quarto luogo possiamo dire che durante questo periodo i principali rami della fisica furono inclusi fra gli oggetti della matematica. Tale estensione del dominio di questa scienza fu iniziata da Huygens e Newton, quando pubblicarono le loro teorie; ma solo al principio del secolo XIX in parecchi rami della fisica furono fatte accurate osservazioni e tali da rendere possibile ad essi l'applicazione del ragionamento matematico.

Numerose ed importanti sono le conclusioni che in fisica si ottennero coll'applicazione delle matematiche ai risultati di osservazioni ed esperienze; ma ciò che tuttora manca è qualche ipotesi semplice, da cui si possano ricavare le leggi che sono oggi il nostro punto di partenza. Se ad esempio noi sapessimo dire in che cosa consiste l'elettricità, noi potremmo giungere a leggi od ipotesi dalle quali, coll'aiuto della matematica, dedurre tutti i fenomeni osservati, nella stessa guisa che Newton dedusse dalla legge della gravitazione tutti i risultati dell'astronomia fisica. Di più da tutte queste varie direzioni di ricerca risulta che vi è un' intima connessione fra i varî rami della fisica, per esempio fra luce, calore, elettricità e magnetismo. La spiegazione definitiva di ciò e dei principali fenomeni fisici richiede uno studio della fisica molecolare; una conoscenza della fisica molecolare alla sua volta pare richiedere una teoria sulla costituzione della materia; in fine apparirebbe che la chiave della costituzione della materia è da ricercarsi nella chimica o nella fisico-chimica. Attualmente gli studî su questo argomento si trovano a questo punto; ma la connessione fra i diversi fenomeni della fisica e le leggi fondamentali di essa (ammesso ne esistano di semplici) sono enigmi ancora insoluti. La storia non può pretendere di trattare i problemi, che formano attualmente oggetto di ricerche; d'altronde il fatto che la fisica matematica è creazione del secolo XIX basterebbe ad escluderne una particolareggiata discussione da parte mia.

Quinto, il detto periodo ha assistito ad un grande sviluppo della matematica pura. Questa è costituita dai risultati degli studî fatti in tempi relativamente recenti; perciò ne considero i particolari come uscenti dai limiti che io mi son fissati, quantunque nel cap. XIX mi sia permesso di menzionare alcuni degli argomenti studiati. I più spiccati caratteri di questo periodo sono lo svolgersi della geometria superiore, dell'aritmetica superiore o teoria dei numeri, dell'algebra superiore (inclusa la teoria delle forme) e la teoria delle equazioni; inoltre lo studio delle funzioni periodiche e la creazione della teoria generale delle funzioni.

Questo rapido sommario indica gli argomenti trattati ed i limiti che mi sono imposto; entro i quali cadono la storia dell'origine e dello sviluppo dell'analisi e della sua applicazione alle leggi generali dell' universo; mentre l'ampliarsi, nella seconda metà del XIX secolo, della matematica pura e dell'applicazione di essa ai problemi di fisica, apre un nuovo periodo, che esce dai limiti di questo libro. Accennerò, quindi, a tali argomenti solo in quanto possono dare un' idea della via, nella quale sembra stiano per mettersi le matematiche.

CAPITOLO XV.

Storia della matematica da Descartes ad Huygens [1].

(Circa 1635-1675).

Mi propongo in questo Capitolo di considerare la storia della matematica durante i quarant'anni che cadono nel mezzo del XVII secolo. Considero Descartes, Cavalieri, Pascal, Wallis, Fermat ed Huygens come i principali matematici di quest'epoca e li tratterò in quest'ordine, terminando con un breve elenco degli altri matematici più ragguardevoli della stessa epoca. Ho già detto che i matematici di questo periodo (e l'osservazione vale più particolarmente per Descartes, Pascal e Fermat) risentirono molto dell' influenza dell' insegnamento di Keplero e di Desargues e ripeto che considero questi ultimi e Galileo come costituenti l'anello di congiunzione fra gli scrittori del Rinascimento e quelli dei tempi moderni. Aggiungo inoltre che i matematici considerati in questo Capitolo furono coetanei; e, sebbene io li abbia disposti materialmente in un ordine tale che i loro capolavori si succederanno cronologicamente, è essenziale rammentare che essi furono fra di loro in relazione ed in generale s' informavano scambievolmente delle ricerche che facevano, non appena pubblicate.

Descartes [2]) (Cartesio). — Conformemente alle precedenti osservazioni, noi consideriamo Descartes come il primo dei com-

1) Vedi CANTOR, parte XV, vol. II, pp. 599-844; altre fonti per i matematici di questo periodo sono menzionate nelle note in calce.

2) Vedi *La vie de Descartes*, di A. BAILLET, 2 volumi, Parigi, 1691, che è riassunta nel vol. I della *Geschichte der neuern Philosophie* del FISCHER, Munich, 1878. Un compendio completo e abbastanza ben fatto delle sue ricerche di matematica e di fisica si trova nella *Encyclopädie* di ERSCH e GRUBER. Un' edizione completa delle

ponenti la scuola moderna di matematica. *Renato Descartes* nacque a La Haye vicino a Tours il 31 marzo 1596 e morì a Stockolma l'11 febbraio 1650; quindi fu contemporaneo di Galileo e di Desargues. Suo padre, il quale, come si comprende dal nome, apparteneva a buona famiglia, era abituato a passare metà dell'anno a Rennes, mentre era aperta la sessione del parlamento di Brettagna, di cui egli era consigliere, l'altra metà nei suoi possedimenti di famiglia di *Les Cartes* a La Haye. Renato, il secondo di una famiglia composta di due maschi ed una femmina, fu messo all'età di otto anni nel Collegio della Flèche, diretto dai Gesuiti e dell'ammirabile disciplina, ivi mantenuta, e degli studî, che vi erano impartiti, egli parla più volte. A causa della sua salute delicata gli era permesso di stare in letto sino a mattina avanzata; fu questa un'abitudine che conservò sempre; e quando visitò Pascal nel 1647 gli disse che per lui il solo mezzo, la sola via per fare buoni lavori di matematica e di conservare la propria salute era di non permettere ad alcuno di svegliarlo il mattino, prima che si destasse da sè, opinione che io registro a vantaggio degli scolari, nelle cui mani andrà la presente opera.

Lasciando la scuola nel 1612 Descartes venne a Parigi per lanciarsi nella gran vita. Quivi, pel tramite dei Gesuiti egli fece la conoscenza di Mydorge e rinnovò l'amicizia fatta a scuola col padre Mersenne; insieme ad essi egli dedicò i due anni, dal 1615 al 1616, allo studio della matematica. In quell'epoca un uomo di nobil famiglia d'ordinario prendeva o la carriera delle armi o quella ecclesiastica; Descartes scelse la prima e, nel 1617, entrò nell'esercito del principe Maurizio di Orange, allora a Breda. Un giorno, camminando per la strada, egli vide un avviso in olandese, che eccitò la sua curiosità e, fermando il primo passante, gli domandò di tradurglielo o in francese o in inglese. L'incognito — che si seppe poi essere Isacco Beeckman, capo del collegio olandese di Dort — aderì alla sua domanda, a patto che Descartes s'impegnasse a rispondere, poichè l'avviso era una

sue opere è quella di VICTOR COUSIN, in 11 volumi, Parigi, 1824-26. Altri scritti minori, scoperti più tardi, furono pubblicati da FOUCHER DE CAREIL, Parigi, 1859. Una nuova edizione fu fatta per cura di C. ADAM e P. TANNERY in 12 volumi, Parigi, 1897-1910, l'ultimo dei quali contiene un ottimo studio bio-bibliografico scritto dall'ADAM.

sfida a tutti di risolvere un problema di geometria che veniva proposto. Descartes lo risolse in poche ore; ciò ebbe per conseguenza una viva amicizia fra lui e Beeckman. Questo saggio inatteso del suo ingegno matematico lo distolse della vita antipatica del soldato: ma, per l'influenza de' suoi e la tradizione della sua famiglia, ritornò sotto le armi e s'indusse, al principio della guerra dei trent'anni, ad arruolarsi come volontario nell'armata di Baviera, sotto il conte di Bucquoy. Egli continuò in tutto questo tempo a dedicare i suoi momenti d'ozio agli studî matematici e soleva far datare la prima idea della sua nuova filosofia e della sua geometria analitica da tre sogni, che egli fece nella notte del 10 novembre 1619 a Neuberg, quando era accampato sul Danubio. Egli, quindi, considerava questo giorno come il più importante della sua vita e quello che determinò tutto il suo avvenire.

Rassegnò le sue dimissioni al principio del 1621 e dedicò i cinque anni successivi ai viaggi: durante questo tempo egli continuò a studiare la matematica pura. Nel 1626 noi lo troviamo stabilito a Parigi; «la sua piccola e snella persona era modestamente vestita in seta verde; e soltanto la spada al fianco e la piuma sul cappello lo rivelavano per un gentiluomo». Durante i primi due anni entrò a far parte di varie società e si dedicò a suo bell'agio alla costruzione degli strumenti di ottica; ma questi tentativi non erano che i riposi di uno, il quale non riusciva a trovare in filosofia quella teoria dell'universo che intravedeva.

Nel 1628 il Cardinale de Berulle, fondatore degli Oratoriani, conobbe Descartes e fu così grandemente impressionato dalla sua conversazione, che lo persuase a dedicarsi completamente agli studî filosofici. Descartes convenne con lui e, per meglio sottrarsi ad ogni distrazione, andò in Olanda, allora all'apogeo della sua potenza. Quivi egli visse per venti anni, dedicando tutto il suo tempo alla filosofia ed alla matematica. La scienza, egli diceva, può essere paragonata ad un albero: ne è metafisica la radice, fisica il tronco, ed i suoi tre principali rami sono la meccanica, la medicina e la morale, mentre le tre applicazioni di essa si riferiscono al mondo esteriore, al corpo umano ed al modo di vivere.

Egli spese i primi quattro anni (1629-1633) della sua dimora in Olanda a scrivere *Le Monde*, saggio di una teoria fisica dell'universo; ma, temendo che la sua pubblicazione potesse attirare su di lui l'ostilità della Chiesa e non avendo nessuna velleità di passare per martire, abbandonò l'idea di pubblicarlo; il manoscritto incompleto vide la luce nel 1664. Egli allora si pose a scrivere un trattato sulla scienza universale, che fu pubblicato a Leida nel 1637 [1]) col titolo *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences*; è accompagnato da tre appendici intitolate: *La dioptrique*, *Les météores* e *La géométrie*. Dall'ultima di queste data l'invenzione della geometria analitica. Nel 1641 egli pubblicò un'altra opera intitolata *Méditationes*, in cui espose diffusamente le sue teorie filosofiche, che erano state abbozzate nel *Discours*; nel 1644 i *Principia Philosophiae*, la maggior parte dei quali son dedicati alla fisica e specialmente alla legge del moto ed alla teoria dei *vortici* [2]). Nel 1647 gli fu conferita una pensione dalla Corte di Francia in considerazione delle sue scoperte e, nel 1649, dietro invito della regina Cristina andò in Isvezia; ivi morì alcuni mesi dopo di polmonite.

D'aspetto Descartes era piccolo di statura, con una testa sproporzionata, naso prominente e capelli neri, che gli scendevano sugli occhi; la sua voce era debole ed era assai freddo nella conversazione. Per quanto concerne il livello de' suoi studî, egli non era molto colto e spregiava l'erudizione e l'arte, a meno che non se ne potesse cavare qualche cosa di utile. Non prese mai moglie e non lasciò discendenti; ebbe però una figlia illegittima, che morì giovane.

Riguardo alle sue teorie filosofiche sarà sufficiente dire che egli studiò tutte le questioni dibattutesi negli ultimi due mila anni e che saranno probabilmente discusse con eguale ardore nei due mila anni venturi. È quasi superfluo il rilevare l'importanza che hanno e l'interesse che destano questi problemi, ma per la natura del soggetto nessuna delle soluzioni proposte può venire

1) La stampa fu finita l'8 giugno 1637.

2) In altri scritti di DESCARTES pubblicati dal DE CAREIL si trova la proposizione sui poliedri, che ordinariamente si attribuisce ad EULERO ($F + V = S + 2$).

rigorosamente dimostrata vera o falsa: in questa materia altro non è possibile se non dare una spiegazione più o meno probabile; e infatti, anche dopo che un filosofo come Descartes credette di avere risolta una questione, fu possibile ai posteri di additare la fallacia del suo punto di partenza. Io ho letto in qualche luogo che la filosofia si è sempre principalmente occupata delle relazioni che legano fra loro Dio, la Natura e l'Uomo. I primi filosofi furono Greci, i quali si occuparono soprattutto delle relazioni fra Dio e la Natura e trattarono separatamente dell'Uomo. La Chiesa cristiana fu così assorta dalle relazioni fra Dio e l'Uomo da trascurare intieramente la Natura. Finalmente i filosofi moderni s'interessarono principalmente delle relazioni fra l'Uomo e la Natura, trascurando Dio. Se questa sia un'esatta generalizzazione storica delle vedute, che hanno successivamente prevalso, non è il caso di discutere qui; ma la determinazione dello scopo della filosofia moderna segna i limiti raggiunti dagli scritti di Descartes.

I principali contributi dati da Descartes alla matematica furono la sua geometria analitica e la teoria dei vortici; ma egli deve la sua reputazione alla prima.

La geometria analitica non consiste semplicemente (come talvolta impropriamente dicesi) nell'applicazione dell'algebra alla geometria: questa era stata fatta da Archimede, da Apollonio e da molti altri ed era divenuta il procedimento usuale dei matematici del XVI secolo. Il gran progresso fatto da Descartes fu che egli vide: 1) che un punto può essere determinato in un piano, se si dànno le sue distanze x ed y, da due assi ortogonali, fatta la consueta convenzione riguardo all'interpretazione dei valori positivi e negativi; 2) che quantunque un'equazione $f(x, y) = 0$ sia indeterminata e possa essere soddisfatta da un numero infinito di valori di x ed y, tuttavia questi valori di x ed y determinano le coordinate di un numero infinito di punti, che formano una curva, la cui equazione $f(x, y) = 0$ rappresenta una certa proprietà geometrica, cioè una proprietà della curva che sussiste in ogni punto di essa. Descartes asserì pure che un punto nello spazio può essere determinato analogamente da tre coordinate; ma egli limitò le sue ricerche alle curve piane.

Descartes ed i suoi successori videro subito che al fine di investigare le proprietà di una curva, era sufficiente di scegliere come definizione una qualunque proprietà geometrica caratteristica ed esprimerla mediante un'equazione fra le coordinate (correnti) di qualunque punto della curva, cioè tradurre la definizione nel linguaggio della geometria analitica. L'equazione così ottenuta contiene implicitamente tutte le proprietà della curva ed ogni altra proprietà può essere ricavata da essa coll'algebra ordinaria, senza affaticarsi sulla figura. Ciò può essere stato confusamente riconosciuto o preannunziato precedentemente da altri scrittori; ma Descartes di più vide e notò i fatti importantissimi che due o più curve possono riferirsi ad uno stesso sistema di coordinate e che i punti, in cui s' intersecano due curve, possono essere determinati trovando le radici comuni alle loro due equazioni. Non è necessario che io entri in più minuti particolari, perchè chiunque è in grado d' intendere quanto precede se conosce già la geometria analitica e sarà in grado di apprezzare il valore dell' invenzione di essa.

La *Géométrie* di Descartes è divisa in tre libri: i primi due trattano della geometria analitica, ed il terzo contiene un compendio dell'algebra di quel tempo. È un po' difficile tener dietro al modo di ragionare di Descartes: ma l'oscurità era intenzionale. «Je n'ai rien omis», dice egli, «qu'à dessein.... j'avois prévu que certaines gens qui se vantent de sçavoir tout n'auroient pas manqué de dire que je n'avois rien écrit qu'ils n'eussent sçu auparavant, si je me fusse rendu assez intelligible pour eux».

Il primo libro comincia con un'esposizione dei principî della geometria analitica e contiene la discussione di un problema, proposto da Pappo nel VII libro del suo *Συναγωγή*, alcuni casi particolari del quale erano stati considerati da Euclide ed Apollonio. Il problema generale era stato studiato invano dai geometri precedenti e fu appunto tentando di risolverlo che Descartes fu condotto all' invenzione della geometria analitica. Il completo enunciato del problema è alquanto involuto; ma il caso più importante è di trovare il luogo di un punto tale, che il prodotto delle perpendicolari su m rette date sia in un rapporto

costante al prodotto delle perpendicolari ad altre n rette date. Gli antichi hanno risolto questo problema geometricamente per i casi $m = 1$, $n = 1$ e $m = 1$, $n = 2$. Pappo aveva detto inoltre che se $m = n = 2$ il luogo era una conica, ma non lo dimostrò; neppure Descartes riuscì a dimostrarlo colla geometria pura, ma fece vedere che la curva era rappresentata da un'equazione di secondo grado, cioè era una conica; più tardi Newton diede una elegante soluzione del problema colla geometria pura.

Nel secondo libro Descartes divide le curve in due classi, cioè in *geometriche* e *meccaniche*. Egli definisce le curve geometriche come quelle che possono essere generate dalla intersezione di due rette, movendosi ciascuna parallelamente ad uno degli assi coordinati con velocità commensurabili, da cui egli deduce che $\frac{dy}{dx}$ è una funzione algebrica, come ad esempio nel caso della ellissi e della cissoide. Egli dice meccanica una curva, quando il rapporto della velocità di queste linee è incommensurabile; da ciò deduce che $\frac{dy}{dx}$ è una funzione trascendente di x, come per esempio nel caso della cicloide e della quadratrice. Descartes limita il suo studio alle curve algebriche e non tratta della teoria delle curve meccaniche. La distinzione, ora in uso, delle curve in algebriche e trascendenti è, come vedremo, dovuta a Newton.

Descartes si occupò anche con particolare attenzione alla teoria delle tangenti alle curve, come risulta dal suo sistema di classificazione testè riferito. Comunemente si definiva la tangente ad una curva, in un punto come la retta passante per questo e tale, che fra essa e la curva non può essere condotta nessuna altra retta; vale a dire la retta di più intimo contatto. Descartes propose di sostituire ad essa la seguente: «la tangente è la posizione limite della secante». Fermat e più recentemente Maclaurin e Lagrange adottarono questa definizione. Barrow, seguito in ciò da Newton e Leibniz, considerò una curva come il limite di un poligono inscritto, allorchè i lati divengono infinitamente piccoli e stabilì che un lato del poligono diviene, al limite, una tangente alla curva. Roberval, dal canto suo, definì la tangente in un punto di una curva come la direzione del moto in quell' istante di un punto che descriva la curva stessa. I risultati a cui si giunge sono gli stessi, qualunque sia la definizione scelta; ma la controversia su quale fra esse dovesse preferirsi fu assai vivace. Descartes illustrò la sua teoria dando la regola generale pel tracciamento delle tangenti e delle normali ad una *roulette* [1]).

Il metodo usato da Descartes per trovare la tangente e la normale in un punto di una data curva è sostanzialmente il seguente: Egli determina il centro ed il raggio di un cerchio, che taglia ivi la curva ed in due punti consecutivi, la tangente al cerchio in quel punto sarà la tangente richiesta della curva. Nei libri moderni si usa stabilire la condizione affinchè due dei punti, in cui una linea retta (come $y = mx + c$) taglia la curva, coincidano col punto dato; ciò ne pone in grado di determinare m e c e così l'equazione della tangente è determinata. Descartes quantunque non si spingesse fin qui, tuttavia scegliendo un cerchio, come la curva più semplice ed una di quelle, a cui egli sapeva condurre la tangente, determinò il cerchio in modo da toccare la curva nel punto voluto, e così ridusse il problema a condurre una tangente ad un cerchio. Osserverò incidentalmente che egli applicò questo metodo solo alle curve, che erano simmetriche rispetto ad un asse, e prese il centro del cerchio sull'asse.

Lo stile scelto ad arte da Descartes diminuì la diffusione e l'estimazione immediata dei due primi libri della *Géométrie*; alcune note esplicative di F. de Beaune furono utilizzate da F. van Schooten (1649) (vedi più avanti).

Il terzo libro della *Géométrie* contiene un riassunto dell' algebra del tempo; in esso è introdotto l'uso di adoperare le prime lettere dell'alfabeto per indicare le quantità note, le ultime per significare le quantità incognite [2]). Descartes inoltre introdusse

1) La costruzione della tangente alla *roulette* si trova nella lettera di DESCARTES a MERSENNE del 23 agosto 1638.

2) Sull'origine dell' uso di adoperare x per rappresentare una quantità incognita, vedi una nota di G. ENESTRÖM nella *Bibliotheca Mathematica*, 1885, p. 43.

l' uso degli indici come ora si adoperano; però io rammento al lettore che quest' uso degli indici era stato suggerito da precedenti scrittori, quantunque non fosse stato generalmente adottato; ma ad ogni modo una parte del merito spetta a Descartes. È dubbio se Descartes fosse o no il primo a riconoscere che le lettere erano capaci di rappresentare quantità qualunque, positive o negative, e che erano sufficienti a dimostrare una proposizione in generale. Egli fu il primo matematico che abbia sfruttato il vantaggio che si ottiene portando tutti i termini di una equazione in un sol membro, quantunque Stifel ed Harriot abbiano qualche volta impiegato tale forma. Egli stabilì il significato delle quantità negative e ne usò frequentemente. Nello stesso libro egli applicò la regola per determinare un limite del numero delle radici positive e negative di un'equazione algebrica, che tuttora porta il suo nome; ed introdusse il metodo dei coefficienti indeterminati per la risoluzione di problemi. Egli credette anche di aver dato un metodo col quale poteva risolvere un'equazione algebrica di qualunque grado, ma in ciò cadde in errore.

Delle altre due appendici al *Discours* una concerne l' ottica. La parte più interessante di essa consiste nella legge di rifrazione. Sembra che essa sia stata tolta da un'opera di Snell; ma sgraziatamente è enunciata in un modo tale da indurre il lettore a supporre, che essa sia dovuta a Descartes. A quanto pare Descartes ha ripetuto gli esperimenti di Snell in Parigi nel 1626 o 1627 e forse egli dimenticò poi di quanto fosse debitore alle ricerche antecedenti. Una buona parte dell'ottica è dedicata alla determinazione della migliore forma delle lenti di un canocchiale, ma le difficoltà meccaniche per ridurre la superficie di una lente alla voluta forma sono così grandi da rendere queste ricerche di uso pratico assai piccolo. Sembra che Descartes sia stato incerto se dovesse considerare i raggi come uscenti dall'occhio e per così dire toccanti l'oggetto, come hanno fatto i Greci, oppure se uscenti dall'oggetto e colpenti l'occhio; ma, poichè egli riteneva infinita la velocità della luce, si lasciò sfuggire il punto essenziale della questione.

L'altra appendice, sulle *meteore*, contiene la spiegazione di numerosi fenomeni atmosferici, compreso l'arco-baleno; Descartes non conosceva la disuguale rifrangibilità dei raggi di luce di differenti colori, onde la spiegazione di quel fenomeno è necessariamente incompleta.

La teoria fisica dell'universo di Descartes, compendiante la maggior parte dei risultati contenuti nella sua prima ed inedita opera *Le Monde*, fu data nei suoi *Principia*, 1644; essa poggia su di una base metafisica. Egli incomincia con uno studio sul moto; e quindi dà dieci leggi naturali, di cui le prime due sono quasi identiche alle prime due leggi del moto date da Newton; le rimanenti otto leggi non sono esatte. Indi prosegue a studiare la natura della materia, che considera come uniforme in sostanza, quantunque si presenti sotto tre diverse forme. Egli ammette poi che la materia formante l'universo sia in moto e che il movimento risulti di un certo numero di vortici. Stabilisce che il sole sia il centro di un immenso vortice di una massa materiale, in cui i pianeti galleggiano e girano rapidamente come fuscellini in un vortice di acqua. Ciascun pianeta si suppone essere il centro di un vortice secondario, dal quale sono mossi i suoi satelliti; questi vortici secondari si suppone che producano variazioni di densità nel circostante mezzo, che costituisce il primo vortice, e così costringano i pianeti a muoversi in ellissi e non in cerchi. Tutte queste asserzioni sono arbitrarie e non sorrette da nessuna osservazione. E non sarebbe difficile provare, mediante le ipotesi di Descartes, che il sole sta nel centro di queste ellissi e non in un fuoco (come Keplero ha dimostrato) e che il peso di un corpo in ogni luogo sulla superficie della terra, non situato sull'equatore, agisce in una direzione, che non è la verticale; ma basti dire che Newton, nel secondo libro dei suoi *Principia* (1687), considerò minutamente questa teoria e dimostrò che le sue conseguenze non sono solamente incompatibili colle leggi di Keplero e colle leggi fondamentali della meccanica, ma sono anche in disaccordo colle dieci leggi naturali assunte da Descartes. Nullameno, benchè immatura e piena di difetti, la teoria dei vortici rappresenta in astronomia un'epoca nuova, poichè rappresenta un tentativo per ispiegare i fenomeni di tutto l'universo con quelle stesse leggi meccaniche che l'esperienza mostrò essere vere sulla terra [1]).

Cavalieri [2]). — Quasi contemporaneamente alla pubblicazione della geometria di Descartes (1637) i principî del calcolo integrale, riguardanti particolarmente le sommatorie, stavano per maturare in Italia. Ciò fu fatto col metodo detto *principio degli indivisibili*, che fu opera precipua di Cavalieri. Esso fu applicato a numerosi problemi risguardanti la quadratura delle curve e delle superficie, la determinazione dei volumi e le posizioni dei baricentri. Il suo intento è lo stesso del tedioso *metodo d'esaustione* adoperato dai Greci, anzi, nel fondo, i due metodi coincidono; ma la notazione degli indivisibili è più concisa e conveniente. Alla sua volta fu sostituito dal calcolo integrale, al principio del XVIII secolo.

Bonaventura Cavalieri nacque a Milano nel 1598 e morì a Bologna il 27 novembre del 1647. Entrò nell'ordine dei Gesuati in giovane età e, dietro le raccomandazioni de' suoi superiori, nel 1629 fu eletto professore di matematica a Bologna ed occupò tale cattedra sino alla sua morte. Ho già menzionato il nome di Cavalieri per la parte da lui presa nell'introduzione in Italia dell'uso dei logaritmi ed ho accennato alla sua scoperta dell'espressione per l'area di un triangolo sferico in funzione dell'eccesso sferico. Egli fu uno de' più influenti matematici del suo

1) Dopo il 1621 Descartes fu tormentato da una specie di febbre di locomozione e lo vediamo viaggiare in Germania, in Olanda, ritornare in Francia, in Isvizzera, nel Tirolo, in Italia, poi di bel nuovo in Francia; e tutto ciò più per potere scambiare le idee cogli uomini di scienza e imparare cose nuove, che per vedere nuovi paesi. È degno di essere notato che egli non cercò mai di far la conoscenza di Galileo, quantunque gli si fosse presentata l'occasione propizia nel 1625, quando passò da Firenze. Forse il grande affetto alla Santa Madre Chiesa cattolica e alla Santa Sede ed il timore di spiacere a quest'ultima col fare la conoscenza dell'amico di fra Paolo Sarpi e dei capi della Repubblica veneta, lo tennero lontano dal nostro grande scienziato. Ma noi però aggiungiamo che forse il Descartes evitò Galileo, perchè non poteva gareggiare con lui nelle discussioni filosofiche, basate sui nuovi metodi della filosofia sperimentale, da lui creata e forse perchè n'aveva invidia e si sentiva quasi umiliato davanti ad uno, che di certo non gli era inferiore. Si dice che anche Galileo sofferse il disprezzo di Cartesio, come le persecuzioni di un papa vanitoso e leggero.

2) La *Vita di Cavalieri* è stata scritta da P. Frisi, Milano, 1779; da F. Predari, Milano, 1843; da Gabro Piola, Milano, 1844; e da A. Favaro, Bologna, 1888. Un'analisi delle sue opere è data nella *Histoire des sciences mathématique et physique* del Marie, vol. IV, pp. 69-90.

tempo; però la sua fama riposa principalmente sull' invenzione del principio degli indivisibili.

Questo era stato usato da Keplero, nel 1604 e nel 1615, in una forma un po' imperfetta. Esso era stato stabilito per la prima volta dal Cavalieri nel 1629, ma questi non pubblicò i propri risultati che nel 1635. Nella prima enunciazione di tale principio, fatta nel 1635, il Cavalieri asserì essere una linea formata di un numero infinito di punti (ciascuno senza grandezza), una superficie di un numero infinito di linee (ciascuna senza larghezza) ed un volume di un numero infinito di superficie (ciascuna senza grossezza). In seguito ad obiezioni di Guldino e di altri la esposizione fu rifatta *ex novo* nella forma definitiva quale venne poi usata dai matematici del XVIII secolo, apparve nel 1643 nelle *Exercitationes Geometricae* di Cavalieri, la terza delle quali è in difesa della teoria. Questi esercizi contengono la prima rigorosa dimostrazione di alcune proprietà che trovansi in Pappo. L'opera di Cavalieri su gl' indivisibili fu ristampata nel 1653 colle sue posteriori correzioni.

Il metodo degli indivisibili poggia in ultima analisi sull' ipotesi che una grandezza può essere divisa in un infinito numero di particelle, suscettibili di avere fra loro qualunque rapporto assegnato (per es. di eguaglianza). L'analisi data da Cavalieri ha poco valore, a meno che non si consideri come uno de' primi passi fatti verso la costituzione del calcolo infinitesimale. Basterà a provar ciò un esempio: suppongasi che si domandi di trovare l'area di un triangolo rettangolo. Supponiamo che la base contenga n punti (o indivisibili) e l'altro lato na; quindi le ordinate dei punti successivi della base conterranno a, $2a$..., na punti. Perciò il numero dei punti nella figura è:

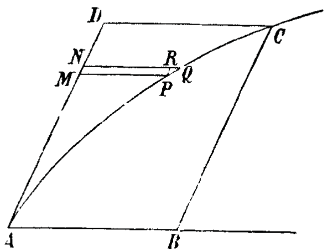
$$a + 2a + \dots + na;$$

la somma de' quali è $\frac{1}{2} n^2 a + \frac{1}{2} na$. Se n è grandissimo, possiamo trascurare $\frac{1}{2} na$ come piccolissime rispetto ad $\frac{1}{2} n^2 a$; per ciò l'area è

$$\frac{1}{2} (n\,a) \,.\, n, \quad \text{cioè}: \quad \frac{1}{2} \text{ altezza} \times \text{base}.$$

Non è difficile criticare questa dimostrazione; ma, benchè la forma sotto cui è presentata sia imprecisa, la sostanza ne è esatta.

Non sarebbe equo presentare solo questo esempio come modello del metodo degli indivisibili; quindi io ne do un altro, preso da un autore più recente, che illustrerà l' uso di questo metodo, modificato e corretto col principio dei limiti.



Si domanda di trovare l'area limitata dalla parabola APC, dalla tangente in A e da un diametro DC. Si completi il parallelogramma $ABCD$; si divida AD in n parti eguali, AM ne contenga r ed MN sia la $(r+1)^{ma}$ parte. Conducansi MP ed NQ parallele ad AB e PR parallela ad AD. In conseguenza, quando n diviene infinito, l'area curvilinea $APCD$ sarà il limite della somma di tutti i parallelogrammi analoghi a PN. Ora:

$$\text{area } PN : \text{area } BD = MP \,.\, MN : DC \,.\, AD.$$

Ma dalle proprietà della parabola si trae

$$MP : DC = AM^2 : AD^2 = r^2 : n^2,$$

e

$$MN : AD = 1 : n;$$

quindi:

$$MP : MN : DC \,.\, AD = r^2 : n^3;$$

perciò:

$$\text{area } PN : \text{area } BD = r^2 : n^3.$$

Finalmente:

$$\text{area } APCD : \text{area } BD =$$
$$= (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) : n^3 =$$
$$= \left[\frac{1}{6} n (n-1)(2n-1)\right] : n^3 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right),$$

che, per $n = \infty$, tende al limite $1:3$.

Non è fuori di luogo di fare osservare che Cavalieri ed i suoi successori impiegavano sempre questo metodo per trovare il rapporto di due aree, volumi o grandezze della medesima specie e dimensioni: vale a dire essi non considerarono mai un'area come contenente un certo numero di unità superficiali. L'idea di paragonare una grandezza con una unità della stessa specie pare sia dovuta a Wallis.

È evidente che nella sua forma immediata questo metodo è applicabile solamente a poche curve. Cavalieri dimostrò che se m è un intiero positivo, il limite, quando n è infinito, di $\frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}}$ è $\frac{1}{m+1}$; ciò equivale a dire che egli trovò l'integrale di $x^m\,dx$ da $x = 0$ ad $x = 1$; egli studiò pure la quadratura della iperbole [1].

Mengoli [2]. — Fra gli scolari di Cavalieri emerge *Pietro Mengoli*: nato a Bologna nel 1625, morì ivi il 7 giugno 1686; per dichiarazione sua fu priore di Santa Maddalena, professore di meccanica nel Collegio dei nobili, filosofo collegiato e dottore in legge. Le sue opere di matematica pura sono: *Novae quadraturae aritmeticae* (Bononiae, 1650); *Via regia ad mathematicas* (id., 1655); *Geometria speciosa* (id., 1659); *Circolo del Mengoli* (id., 1672); *De Arithmeticae rationalis elementis quatuor* (id., 1674).

Nella prima sono trattate le serie in generale, con distinzione di quelle che sono divergenti (fra cui la serie armonica) da quelle di cui si può trovare la somma (per es. quella degli inversi dei numeri triangolari). A torto il Montucla ascrisse il Mengoli fra i pretesi quadratori del cerchio: chè nella quarta delle opere citate egli espone la nota espressione di π in prodotto infinito scoperto dal Wallis (autore che egli non cita, ma che indubbia-

1) Oltre l'opera dianzi citata, CAVALIERI scrisse: *Specchio ustorio, ovvero trattato delle settioni coniche*, Bologna, 1632; *Trigonometria plana et sphaerica* (Bologna, 1643); *Compendio delle regole dei triangoli colle loro dimostrazioni*, Bologna, 1638; *Centuria di vari problemi per dimostrare l'uso e la facilità dei logaritmi*, Bologna, 1635.

2) Per maggiori particolari si ricorra alle note di G. VACCA, *Sulle scoperte di Pietro Mengoli*, in *Rend. della R. Accademia dei Lincei*, Ser. V, tomo XXIV, 2° semestre 1915, ed agli articoli di A. AGOSTINI, *La teoria dei limiti in Pietro Mengoli* e *Il concetto d'integrale definito in Pietro Mengoli*, nel vol. V, Ser. IV, 1925, del *Periodico di Matematiche*. (G. L.).

mente conobbe). Nella *Geometria speciosa* egli introdusse una simbolica particolare in uso del calcolo integrale e se ne servì nel calcolo degli integrali di differenziali binomi ad esponenti interi e positivi. A lui finalmente si è debitori di una originale teoria dei logaritmi, la quale, fra l'altro, lo condusse alla seguente notevole formola:

$$\log\frac{m}{n} = \sum_{r=o}^{r=\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{s=m} \frac{1}{rm+s} - \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{rn+s} \right\}$$

Pascal [1]. — Fra i contemporanei di Descartes nessuno rivelò un genio naturale più grande di quello di Pascal; ma la sua fama rimane più per quello che egli poteva fare, che per ciò che realmente fece, poichè, durante buona parte della sua vita, stimò suo dovere di dedicare tutto il suo tempo agli esercizi religiosi.

Biagio Pascal nacque a Clermont il 19 giugno 1623 e morì a Parigi il 19 agosto 1662. Suo padre, giudice locale a Clermont ed egli stesso in qualche fama di scienziato, andò a Parigi nel 1631, specialmente per proseguire i propri studî scientifici e per completare l'educazione del suo unico figlio, che aveva sempre mostrato un ingegno eccezionale. Pascal fu tenuto in casa a scopo di assicurarsi che non lavorasse di troppo; ed allo stesso scopo fu disposto che la sua educazione fosse dapprima limitata allo studio delle lingue, escludendo quello della matematica. Ciò naturalmente eccitò la curiosità del giovinetto, ed un giorno, all'età di dodici anni, domandò in che cosa consistesse la geometria. Il suo maestro rispose che era la scienza che insegnava a costruire le figure esattamente e a determinare le proporzioni fra le loro diverse parti. Pascal, stimolato senza dubbio dalla proibizione di occuparsene, rinunziò alle sue ore di ricreazione, per darsi a questo nuovo studio, ed in poche settimane scoprì

1) Vedi *Pascal*, di J. BERTRAND, Paris, 1891, e *Pascal, sein Leben und seine Kämpfe*, di J. G. DREYDORFF, 1870. La *Vita di Pascal* scritta da sua sorella, la signora PÈRIER, fu edita da A. P. FAUGÈRE, Paris, 1845, ed ha servito di base a parecchie opere. Una edizione de' suoi scritti fu pubblicata in 5 volumi all'Aja nel 1779; un'altra a Parigi nel 1819; la più recente è quella fatta da BOUTRONN e BRUNSCHVIG; alcuni opuscoli e lettere furon pubblicati in 3 volumi a Parigi nel 1858.

da sè molte proprietà delle figure, ed in particolare la proposizione seguente: «la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti». Ho letto in qualche luogo, ma non ho sotto mano la fonte, che la sua dimostrazione consistesse semplicemente nel trasportare gli angoli di un pezzo triangolare di carta in modo da disporli attorno al centro del cerchio inscritto; una dimostrazione analoga può farsi trasportando gli angoli in modo da adattarli al piede della perpendicolare condotta dal vertice dell'angolo maggiore sul lato opposto.

Il padre di Pascal, colpito da queste luminose prove di ingegno, gli diede una copia degli *Elementi* di Euclide, libro che Pascal lesse con avidità e tosto ne fece tesoro.

All'età di quattordici anni egli fu ammesso alle riunioni settimanali che tenevano Roberval, Mersenne, Mydorge e altri geometri francesi, dalle quali poi nacque l'Accademia francese creata da Luigi XIV con ordinanza del 22 dicembre 1666. A sedici anni Pascal scrisse un trattato sulle sezioni coniche; e nel 1641, all'età di diciott'anni, costruì la prima macchina aritmetica, istrumento che otto anni dopo migliorò ulteriormente e fece brevettare. La sua corrispondenza con Fermat intorno a questo tempo mostra che egli aveva allora rivolto la sua attenzione alla geometria analitica ed alla fisica. Egli ripetè l'esperienza di Torricelli, con cui la pressione atmosferica viene misurata come un peso e corroborò la sua teoria della causa delle variazioni barometriche facendo allo stesso istante delle letture a differenti altitudini sul colle di Puy-de-Dôme.

Nel 1650, mentre era assorto in queste ricerche, improvvisamente abbandonò i suoi favoriti lavori per occuparsi di religione, o, come egli dice nei suoi *Pensées*, per contemplare la grandezza e l'infelicità umana; circa lo stesso tempo persuase la più giovane delle sue sorelle ad entrare nel monastero di Port Royal.

Nel 1653 dovette occuparsi di amministrare i beni di suo padre. In questo periodo di tempo egli riprese la sua antica vita, fece parecchie esperienze sulla pressione esercitata dai gas e dai liquidi, inventò anche il triangolo artimetico ed insieme a Fermat creò il calcolo delle probabilità. Stava pensando ad ammogliarsi, quando un accidente rivolse ancora la corrente dei suoi

pensieri alla vita religiosa. Il 23 novembre 1654 Pascal guidava un cocchio a quattro cavalli, allorchè i cavalli si diedero a precipitosa fuga, andando ad urtare contro il parapetto del ponte di Neuilly; Pascal cadde nel fiume e solo si potè salvare aggrappandosi ai rottami della carrozza. Sempre alquanto mistico, considerò questo accidente come un ordine di abbandonare il mondo. Egli scrisse una relazione di questo fatto su di un pezzetto di pergamena, che per il resto della sua vita portò sempre indosso, vicino al cuore, perchè gli ricordasse perpetuamente il suo voto, e tosto si ritirò a Port Royal, dove dimorò fino alla sua morte, cioè fino al 1662. Di natura delicata, si danneggiò la salute col troppo studio; dall'età di 18 o 20 anni era già afflitto d'insonnia e da acuta dispepsia, onde all'epoca della sua morte era fisicamente logorato.

Le sue *Lettere provinciali* dirette contro i gesuiti, ed i suoi *Pensées*, furono scritti verso la fine della sua vita e costituiscono il primo esempio di quella perfezione di forma che caratterizza il periodo aureo della letteratura francese. La sola opera matematica da lui scritta dopo che si era ritirato a Port Royal, fu il trattato sulla cicloide (1658). Benchè soffrisse d'insonnia e di mal di denti, quando gli balenò l'idea di questo lavoro, con grande suo stupore, il suo dente immediatamente cessò di dolergli. Considerando questo fatto come una intimazione divina di dedicarsi allo studio di quel problema, vi lavorò incessantemente per otto giorni, e condusse a termine una monografia pressochè completa sulla geometria della cicloide.

Ora analizzerò i suoi lavori di matematica un po' più particolareggiatamente.

Il suo trattato giovanile sulla geometria delle coniche, scritto nel 1639, ma non pubblicato fino al 1779, pare sia stato composto sulle tracce di Desargues. Due dei risultati ivi esposti sono tanto importanti, quanto interessanti. Il primo di questi è il teorema conosciuto ora come *teorema di Pascal*, vale a dire il seguente: «se un esagono semplice è inscritto in una conica, i punti d'intersezione delle tre coppie di lati opposti sono in linea retta». Il secondo, che realmente è dovuto a Desargues, dice: «se un quadrilatero è inscritto in una conica e si conduce una retta a segare i lati rispettivamente nei punti A, B, C e D, e la conica in P e Q, si ha:

$$PA \,.\, PC : PB \,.\, PD = QA \,.\, QC : QB \,.\, QD \text{ »}.$$

Il *triangolo aritmetico* di Pascal fu scritto nel 1653, ma non fu pubblicato che nel 1665. La struttura di tale triangolo risulta dalla seguente figura:

1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
1	3	6	10	15	...
1	4	10	20	35	...
1	5	15	35	70	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

ciascun suo elemento è eguale alla somma di quello che gli sta sopra e di quelli che lo precedono a sinistra nella corrispondente orizzontale; per esempio nella 4ª linea:

$$20 = 1 + 3 + 6 + 10.$$

I numeri di ogni linea sono quelli che attualmente si chiamano *numeri figurati*. Quelli della 1ª linea son chiamati numeri di 1° ordine, quelli della 2ª di 2° ordine, quelli della 3ª linea di 3° ordine e così via. È facile dimostrare che l' $m.^{mo}$ numero dell' $n.^{ma}$ linea è $(m + n - 2)! : (m - 1)!\ (n - 1)!$

Il triangolo aritmetico di Pascal (di qualunque ordine) si ottiene conducendo la diagonale inclinata a sinistra di un angolo retto come indica la figura. I numeri di qualsiasi diagonale dànno i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio; per esempio, i numeri a sinistra della diagonale tracciata 1, 4, 6, 4, 1 sono i coefficienti dei termini dello sviluppo di $(a + b)^4$. Pascal adoperò il triangolo in parte per tale scopo ed in parte per trovare

il numero delle combinazioni di m oggetti presi n ad n, che egli trovò (esattamente) essere $(n + 1)\ (n + 2)\ (n + 3) \ldots . \ m : (m - n)!$

Come matematico Pascal è forse meglio conosciuto per la sua corrispondenza che tenne con Fermat nel 1654, nel corso della quale egli espose i principi della *teoria delle probabilità*. Questa corrispondenza nacque da un problema posto da un giocatore, il Cavalier de Méré, a Pascal, il quale lo comunicò a Fermat. Il problema era questo: «due giocatori di eguale abilità desiderano interrompere il giuoco prima di avere finito la partita. I punti fatti da ciascuno ed il numero de' punti, che costituivano la partita, essendo dati, si desidera di trovare in quale proporzione essi devono dividere le poste». Pascal e Fermat convennero nella risposta, ma ne diedero dimostrazioni diverse. Ecco la traduzione della soluzione di Pascal; quella di Fermat verrà riferita più innanzi.

Ecco il mio metodo per determinare la parte di ciascun giocatore, allorchè, per esempio, due giocatori giocano una partita di tre punti e ciascun giocatore ha la posta di 32 pistole [1]).

Suppongasi anzitutto che il primo giocatore abbia guadagnato due punti, ed il secondo uno; essi ora hanno da giocare il 3° punto a questa condizione, che, se il primo giocatore vince, egli prende tutto il danaro che costituisce la posta, cioè 64 pistole; se invece il secondo giocatore vince, ciascun giocatore ha due punti; cosicchè essi sono a pari condizione; se finalmente essi cessano di giocare, ciascuno deve prendere 32 pistole. Adunque se il primo giocatore vince, le 64 pistole spettano a lui; e se egli perde, gliene toccano solo 32. Se quindi i giocatori non desiderano continuare la partita, ma separarsi senza giocarla, il primo giocatore direbbe al secondo: «Io sono sicuro di 32 pistole anche se perdo questa posta, e in quanto alle altre 32 pistole, posso o no vincerle; la probabilità è eguale. Dividiamoci queste 32 pistole in parti eguali, e datemi anche le 32 pistole, di cui io son sicuro». Così il primo giocatore avrà 48 pistole ed il secondo 16.

In secondo luogo supponiamo che il primo giocatore abbia due punti ed il secondo nessuno e che essi siano per giocare il 3° punto; in questo caso dunque se il primo giocatore guadagna questo punto, egli assicura la vincita e prende le 64 pistole; se invece lo guadagna il secondo, la partita rientra nella condizione già esaminata, in cui, il primo giocatore ha diritto a 48 pistole ed il secondo a 16 pistole. Così

1) La pistola era una moneta di quell'epoca, equivalente a L. 10 circa.

se essi non volessero più giocare, il primo giocatore direbbe al secondo: « Se io guadagno il punto, guadagno 64 pistole: se io perdo, ho diritto a 48 pistole. Datemi dunque le 48 pistole, di cui io son sicuro, e dividiamo le altre 16 in parti eguali, giacchè le nostre probabilità di vincere il punto sono eguali. Così il primo giocatore avrà 56 pistole ed il secondo 8.

Finalmente suppongasi che il primo giocatore abbia un punto ed il secondo nessuno. Se essi continuano la partita per un punto, la condizione è che se il primo giocatore lo guadagna, i giocatori saranno nella condizione esaminata per la prima, in cui il primo giocatore ha diritto a 56 pistole; se il primo giocatore perde il punto, ciascun giocatore ha dunque un punto e ciascuno ha diritto a 32 pistole. Così se essi non volessero più giocare, il primo giocatore direbbe al secondo: « Datemi le 32 pistole, di cui io sono sicuro, e dividiamo il resto delle 56 pistole in parti eguali, cioè dividiamo 24 pistole in due parti eguali ». Così il primo giocatore avrà la somma di 32 più 12 pistole, cioè 44 pistole; e conseguentemente il secondo avrà 20 pistole.

Pascal indi prosegue a considerare lo stesso problema, allorchè la partita sia vinta da quello dei due che fa $m + n$ punti pel primo, mentre l'altro ne abbia n. La risposta si ottiene applicando il triangolo aritmetico. La soluzione generale (in cui le abilità dei giocatori sono disuguali) si trova in molti trattati moderni di algebra e concorda coi risultati di Pascal, quantunque, naturalmente, la notazione usata da quest' ultimo sia differente e meno conveniente.

Pascal fece un uso illegittimo della nuova teoria da lui esposta nel settimo capitolo dei suoi *Pensées* [1]). Infatti egli ragiona così: « essendo il valore della felicità eterna infinito, per quanto sia piccola la probabilità che una vita religiosa assicuri l'eterna felicità, tuttavia l'aspettazione (che è misurata dal prodotto di questi due fattori) è bastevole per rendere uno religioso ». Quest'argomentazione, ammesso possegga qualche valore, si applicherebbe egualmente ad ogni religione, che promettesse felicità eterna a chi abbracciasse le sue dottrine. Se alcuna conclusione si può trarre da tutto ciò è l' impossibilità di applicare la matematica a questioni di morale, in cui alcuni dati escono dal campo di una

1) In questo cap. dei *Pensées* non si trova il passo a cui allude l'autore; forse per un *lapsus calami* egli scrisse VII invece di XI, chè il capitolo recante questo numero tratta del finito e dell' infinito nelle loro attinenze teologiche. (G. L.).

scienza esatta. È bene aggiungere che nessuno ebbe maggior disprezzo di Pascal per quelli che cambiavano le loro opinioni a seconda della speranza che avevano di un vantaggio materiale e che questo passo è in disaccordo collo spirito de' suoi scritti.

L' ultima opera matematica di Pascal fu quella sulla *cicloide* (1658). La cicloide è una curva descritta da un punto di una circonferenza che ruzzola su di una retta. Galileo nel 1590 [1]) fu il primo a richiamare l'attenzione su questa curva di forma assai elegante, ed osservò che gli archi dei ponti dovrebbero avere questa forma [2]). Nel 1634, Roberval ne trovò l'area; Descartes tenne in poco conto questo risultato e sfidò Roberval a trovare le tangenti della cicloide; la stessa sfida era pure stata inviata a Fermat, che risolse subito il problema. Parecchie questioni collegate a questa curva ed alla superficie ed al volume generato dalla sua rotazione intorno al suo asse, attorno alla sua base o attorno alla tangente al suo vertice furono poi proposte da vari matematici. Tali questioni ed altre analoghe, come pure alcune concernenti le posizioni dei centri di gravità dei solidi generati, furon risolte da Pascal nel 1658 ed i risultati furon pubblicati sotto forma di una sfida ai matematici di tutto il mondo [3]). Wal-

1) Vedi una lettera di Galileo al Cavalieri scritta il 24 febbraio 1640 e pubblicata dall'ALBÈRI nel *Supplemento*, Firenze, 1856, p. 366 della sua edizione delle opere del sommo pisano.

2) Il ponte costruito dall' Essex sul Cam, nel terreno del Collegio della Trinità di Cambridge, ha archi cicloidali.

3) Roberval aveva determinato l' area dell' intera curva ed il volume che essa genera, ruotando intorno al suo asse ed intorno alla sua base; Pascal calcolò il segmento dell' arco, determinato da una parallela qualunque alla base, i volumi che essa genera ruotando sia intorno alla sua base, sia intorno all'asse, ed infine i baricentri delle metà di questi solidi, tagliati dai piani di simmetria. Sotto il nome di Dettonville, Pascal inviò a tutti i geometri una circolare invitandoli a concorrere per la risoluzione de' problemi che egli allora trattava e si obbligava di dare 40 pistole al primo che li risolvesse e 20 al secondo. Wallis mandò da Oxford le soluzioni di tutte le questioni proposte, ma con errori di calcolo ed in ritardo; quindi la Commissione non potè assegnargli il premio. In quanto poi al P. Lalobère, egli pretese di avere trovato tutte le soluzioni richieste, ma si rifiutò di comunicarle all' infuori di una, forse la sola che egli avesse realmente trovata. Nessun concorrente avendo nel termine fissato risposto alle questioni presentate, Pascal volle prolungare questo termine di tre mesi, aggiungendo però le ricerche: 1° della lunghezza d' un arco qualunque di cicloide, a partire dal vertice; 2° del baricentro di un arco; 3° dell' area generata da quest'arco, ruotando intorno all'asse od alla base della cicloide; 4° dei baricentri di quest'area, delle loro metà o dei loro quarti. Questa dilazione non avendo dato risultato alcuno, Pascal si decise al principio del 1659 di pubblicare le proprie soluzioni, che produssero una grande impressione. (D. G.).

lis riuscì a risolvere tutte le questioni, eccettuate quelle riguardanti i baricentri. Le soluzioni di Pascal furono ottenute col metodo degli indivisibili e sono simili a quelle che un moderno matematico darebbe mediante il calcolo integrale. Egli determinò mediante sommazioni a che cosa erano equivalenti i segmenti integrali:

$$\int \operatorname{sen}\psi . d\psi \quad , \quad \int \operatorname{sen}^2 \psi . d\psi \quad , \quad \int \psi \operatorname{sen}\psi . d\psi \, ,$$

un limite essendo 0 o $\frac{1}{2}\pi$. Pascal si occupò pure della spirale di Archimede. Queste ricerche, secondo D'Alembert, formano il *trait d'union* fra la geometria di Archimede ed il calcolo infinitesimale di Newton.

Wallis [1]. — *Giovanni Wallis* nacque a Ashford il 22 novembre 1616 e morì ad Oxford il 28 ottobre 1703. Studiò nella scuola di Falstead ed un dì durante le vacanze, quando non aveva che quindici anni, avendo veduto un libro di aritmetica nelle mani di suo fratello, preso dalla curiosità di osservare quei segni e simboli strani, se lo fece imprestare; in due settimane, coll'aiuto del fratello, s'impadronì della materia. Era stabilito che egli si sarebbe addottorato; per ciò fu collocato nel Collegio Emmanuel a Cambridge. In questo tempo qui egli tenne una conferenza sulla teoria della circolazione del sangue e dicesi che questa sia stata la prima volta che in Europa si sostenesse pubblicamente questa teoria. Però il suo interesse era rivolto soprattutto alla matematica.

Egli fu eletto *fellow* nel Collegio della Regina a Cambridge e più tardi entrò negli ordini religiosi; in fondo però aderì al partito puritano, al quale prestò un grande aiuto nel decifrare i dispacci realisti. Tuttavia si unì ai moderati presbiteriani nel firmare la protesta contro l'esecuzione di Carlo I, onde incorse nella pertinace ostilità degli Indipendenti. A dispetto della loro

1) Vedi la mia *History of the study of mathematics at Cambridge*, pp. 41-46. Le opere matematiche di WALLIS furon pubblicate in 3 volumi a Oxford, 1693-98.

opposizione, fu nominato nel 1649 alla cattedra Saviliana di geometria ad Oxford, che egli tenne fino alla sua morte. Oltre alle opere matematiche, scrisse di teologia, di logica e di filosofia, e fu il primo ad inventare un sistema per istruire i sordo-muti. Io mi limiterò a dire qualche cosa intorno ai suoi più importanti scritti di matematica. Essi sono notevoli in parte per l'uso delle serie infinite come elementi consueti dell'analisi, e in parte perchè rivelano e spiegano a tutti gli studiosi i principî dei nuovi metodi di analisi introdotti dai contemporanei e dai predecessori immediati del Wallis.

La più importante delle sue opere è l'*Arithmetica Infinitorum*, che fu pubblicata nel 1656. In questo trattato i metodi di analisi di Descartes e di Cavalieri furono ridotti a sistema e grandemente estesi, ma il loro fondamento logico è suscettibile di critica. Quest'opera divenne subito il libro classico in questo ramo ed è sempre citato dagli scrittori posteriori. La sua prefazione consiste in un breve trattato sulle sezioni coniche. Egli incomincia col provare la «legge degli indici»: dimostra, cioè, che x^0, x^{-1}, x^{-2}.... rappresentano 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$...., che $x^{\frac{1}{2}}$ rappresenta la radice quadrata di x, che $x^{\frac{2}{3}}$ rappresenta la radice cubica di x^2, e generalmente che x^{-n} rappresenta il reciproco di x^n, mentre $x^{\frac{p}{q}}$ rappresenta la radice q^{ma} di x^p.

Sorvolando sulle numerose applicazioni algebriche di questa scoperta, Wallis trovò col metodo degli indivisibili l'area compresa fra la curva $y = x^m$, l'asse delle x ed un'ordinata qualunque $y = h$ e dimostrò che il rapporto di quest'area a quella del parallelogramma della stessa base e della medesima altezza è uguale al rapporto $1 : (m + 1)$. Sembra che egli ritenesse che il medesimo resultato si avesse anche per la curva $y = ax^m$, ove a è una costante ed m un numero positivo o negativo qualunque, ma studiò solamente i casi della parabola, in cui $m = 2$, e dell'iperbole, in cui $m = -1$; però in quest'ultimo caso la sua interpretazione del resultato ottenuto è errata. Egli dimostra quindi che simili risultati possono ottenersi per una curva avente una equazione della forma $y = \Sigma a x^m$, e poi che se l'ordinata y di una curva può essere espressa mediante una serie di potenze dell'ascissa x, allora si può giungere alla sua quadratura; così egli dice che, se l'equazione di una curva fosse: $y = x^0 + x^1 + + x^2 + ...$, la sua area sarebbe $x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + ...$ In seguito applica tutto ciò alla quadratura delle curve $y = (x - x^2)^0$ $y = (x - x^2)^1$, $y = (x - x^2)^2$, $y = (x - x^2)^3$ ecc., prese fra i limiti $x = 0$ e $x = 1$; e dimostra che le loro aree sono rispettivamente: $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}$ ecc. Poi considera curve della forma $y = x^{\frac{1}{m}}$ e stabilisce il teorema che l'area limitata dalla curva, dall'asse delle x e dalla ordinata $y = 1$, sta all'area del rettangolo della stessa base e della stessa altezza come $m : (m + 1)$. Ciò equivale a trovare il valore di $\int_0^1 x^{\frac{1}{m}}\, dx$. Egli illustra questo risultato coll'esempio della parabola, in cui $m = 2$. Enuncia, ma non dimostra, il risultato corrispondente per una curva della forma $y = x^{\frac{p}{q}}$.

Wallis mostrò una grande abilità nel ridurre le equazioni delle curve alle forme date sopra; ma siccome non conosceva il teorema del binomio, così non potè effettuare la quadratura del cerchio, la cui equazione è $y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$; non sapendo sviluppare questa espressione in serie di potenze di x, stabilì il principio dell'interpolazione. In virtù di questo, siccome l'ordinata del cerchio $y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ è media geometrica fra le ordinate delle linee $y = (x - x)^0$ e $y = (x - x^2)^1$, può supporsi come approssimazione, l'area del semi-cerchio $= \int_0^1 (x - x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$ che è $= \frac{1}{8}\pi$, possa prendersi come la media geometrica dei valori di:

$$\int_0^1 (x - x^2)^0 dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 (x - x^2)\, dx,$$

cioè 1 e $\frac{1}{6}$; ciò equivale a prendere $4\sqrt{\frac{2}{3}}$ o 3,26.... come valore di π. Ma Wallis così ragionava: noi abbiamo in realtà una

serie $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140} ...$, e perciò i termini inseriti fra 1 e $\frac{1}{6}$ possono essere scelti in modo da ottenere la legge della serie. Questa, con un metodo laborioso, che io non starò a descrivere particolareggiatamente, conduce ad un valore per il termine inserito che guida a prendere

$$\pi = 2 . \frac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7.9...}.$$

I matematici posteriori del XVII secolo costantemente usarono l'interpolazione per ottenere i risultati a cui ora si arriverebbe mediante l'analisi diretta.

Nella stessa opera son pure studiate la formazione e le proprietà delle frazioni continue, l'attenzione dei matematici essendo stata richiamata su di essa dall'uso che ne fece il Brounker.

Pochi anni dopo, nel 1659, il Wallis pubblicò un trattato contenente la soluzione dei problemi sulla cicloide, che erano stati proposti da Pascal [1]). In esso egli incidentalmente spiegò in qual modo i principî esposti nella sua *Arithmetica Infinitorum* potessero adoperarsi per la rettificazione delle curve algebriche, e diede una soluzione del problema di rettificare la parabola semi-cubica $x^3 = ay^2$ [2]), che era stato già sciolto nel 1657 dal suo allievo Guglielmo Neil. È questo il primo caso, in cui la lunghezza di una curva (algebrica) sia stata determinata dai matematici; e dacchè tutti i tentativi per rettificare l'ellisse e l'iperbole erano stati (necessariamente) infruttuosi, si supponeva prima che nessuna curva potesse rettificarsi [3]). La cicloide venne poco dopo (1658) rettificata da Wren.

Al principio del 1658 la rettificabilità della parabola semicubica era stata scoperta, indipendentemente dal Neil, da Van Heuraët [4]), e fu pubblicata nel 1659 da Van Schooten nella sua

---

1) Abbiamo fatto osservare, parlando di Pascal, che alcune delle soluzioni di Wallis erano inesatte.

2) La parabola $x^3 = ay^2$ è la prima curva algebrica che sia stata rettificata; ma la spirale logaritmica era stata rettificata prima da Torricelli. (G. L.).

3) Cfr. una lettera di Pascal a Huygens, ove quell'opinione è attribuita a R. de Sluze (*Oeuvres de Pascal*, tomo V, 1779, p. 413).

4) Sopra Van Heuraët, vedi la *Bibliotheca Mathematica*, 1887, vol. I, pp 76-80.

edizione della *Geometria* di Descartes. Il metodo di Van Heuraët è il seguente. Egli suppone di riferire la curva ad assi rettangolari; ciò posto, se (x, y) sono le coordinate di un punto di essa ed n la lunghezza della corrispondente normale, se si prenda un altro punto di coordinate (x, η) tale che sia $\eta : h = n : y$, ove h è una costante e se ds è l'elemento lineare della curva richiesta, si ha dai triangoli simili: $ds : dx = n : y$; perciò $hds = \eta dx$. Dunque, se l'area del luogo del punto (x, η) può determinarsi, la curva primitiva potrà essere rettificata. In questo modo Van Heuraët ottenne la rettificazione della curva $y^3 = ax^2$; ed aggiunse che la rettificazione della parabola $y^2 = ax$ è impossibile, poichè esige la conoscenza della quadratura dell'iperbole. Le soluzioni date da Neil e Wallis sono simili a quelle date da Heuraët; ma nessuna regola generale è enunciata e la analisi usata è pesante. Un terzo metodo fu suggerito da Fermat nel 1660; ma è ad un tempo inelegante e laborioso.

La teoria dell'urto dei solidi fu proposta ai matematici dalla Società Reale nel 1668. Wallis, Wren ed Huygens inviarono soluzioni esatte e fra loro simili, tutte dipendenti da ciò, che ora chiamasi conservazione della quantità di moto; ma, mentre Wren e Huygens limitavano la loro teoria ai solidi perfettamente elastici, Wallis considerò anche quelli che non lo sono. Questo lavoro fu seguìto nel 1669 da un altro sulla statica (centri di gravità) e nel 1670 da un terzo sulla dinamica: essi costituiscono un quadro generale di ciò che era allora noto su questa materia.

Nel 1685 Wallis pubblicò un'*Algebra*, preceduta da una storia dello sviluppo di essa, che contiene molte ed importanti notizie. La 2ª edizione, pubblicata nel 1693 e formante il 2º volume delle sue *Opere*, fu considerevolmente ampliata. Questa *Algebra* è importante, perchè contiene il primo uso sistematico delle formule. Una data grandezza vi è rappresentata mediante il rapporto numerico che essa ha all'unità di misura delle grandezze della stessa specie; così, quando Wallis vuole confrontare due lunghezze, egli considera ciascuna di esse come contenente un certo numero di unità di lunghezza. Ciò forse riuscirà più chiaro dicendo che la relazione fra lo spazio percorso in un tempo qualunque da un punto, che si muove con velocità uniforme, è data da Wallis mediante la formula $s = vt$, ove s è il numero rappresentante il rapporto dello spazio percorso all'unità di lunghezza; mentre i precedenti scrittori [1]) avrebbero indicata la stessa relazione collo stabilire che cosa valgono i due rapporti eguali $s_1 : s_2$, $v_1 t_1 : v_2 t_2$. È curioso notare che Wallis respinse come assurdo il concetto di numero negativo, considerato come minore di zero; ma accettò l'idea che esso sia maggiore dell'infinito. Quest'ultima opinione è sostenibile e non contraddice alla prima, ma non è certo più semplice dell'altra.

Fermat [2]). — Mentre Descartes gettava le fondamenta della geometria analitica, la stessa materia richiamava l'attenzione di un altro francese, certamente non inferiore a lui; questi era Fermat. *Pietro de Fermat*, che nacque vicino a Montauban nel 1601 e morì a Castres nei pressi di Tolosa il 12 gennaio 1665, era figlio di un mercante di corami e fu educato in famiglia; nel 1631 ottenne il posto di consigliere del parlamento locale di Tolosa e disimpegnò i doveri dell'ufficio con esattezza e fedeltà. Quivi, dedicando tutti i suoi momenti d'ozio alla matematica, passò il rimanente della sua vita, una vita che, eccetto qualche acrimoniosa disputa con Descartes sulla validità dell'analisi adoperata da quest'ultimo, fu allietata da ogni felice evento. La disputa avvenne principalmente per l'oscurità degli scritti di Descartes; ma il tatto e la cortesia di Fermat la condussero ad una benevola conclusione. Fermat fu anche un erudito di valore, e si divertì a ricostruire per via di congetture l'opera «sui luoghi piani» di Apollonio.

All'infuori di pochi scritti isolati Fermat non pubblicò nulla

---

1) Vedi per esempio i *Principia* di NEWTON, libro I, sez. I, comma 10 o 11.

2) La migliore edizione delle opere di FERMAT è quella fatta per cura di P. TANNERY e C. HENRY, e pubblicata dal Governo francese, vol. I, 1891; II, 1894; III, 1896; IV, 1912; V, 1922. Delle edizioni anteriori ricorderò quelle delle sue note e della sua corrispondenza, stampata da suo figlio SAMUELE a Tolosa, in due volumi, 1670 e 1679, di cui un sommario, con note, fu pubblicato da E. BRASSINE a Parigi nel 1853, ed una ristampa fu fatta a Berlino nel 1861.

durante la sua vita, nè diede alcuna esposizione sistematica dei propri metodi. Alcuni dei più importanti de' suoi risultati furono trovati dopo la sua morte, registrati su foglietti staccati o nei margini di opere, che egli aveva lette ed annotate, e sono spesso senza alcuna dimostrazione. Perciò è anche difficile di stabilire le date [1]) e le origini delle sue opere. Fermat per temperamento fu modesto e riservato e sembra che non avesse nemmeno intenzione di pubblicare i suoi scritti. È probabile che rivedesse le sue note quando se ne presentava l'occasione e che le sue opere pubblicate rappresentino la forma definitiva delle sue ricerche; quindi non possono risalire a molto prima del 1660. Considererò separatamente: 1) le sue ricerche sulla teoria dei numeri; 2) l' uso che egli fece in geometria dell'analisi e degli infinitesimi; 3) il suo metodo per trattare i problemi sulle probabilità.

1) *La teoria dei numeri* [2]) sembra che sia stato lo studio prediletto di Fermat. Egli preparò un'edizione di Diofanto e le note ed i commenti relativi contengono numerosi teoremi elegantissimi. Una gran parte delle dimostrazioni di Fermat sono perdute; ed è possibile che alcune di esse non fossero rigorose, poichè l' induzione per analogia e la intuizione di cui era dotato erano sufficienti a condurlo a risultati esatti. I seguenti esempi bastano a dare un' idea di tali investigazioni.

a) Se p è un numero primo ed a è primo con p, allora $a^{p-1} - 1$ è divisibile per p, cioè $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p). Una dimostrazione di questo teorema fu data per la prima volta da Eulero ed è ben nota. Un teorema più generale dice che $a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0$ (mod. n), supposto a primo con n e $\varphi(n)$ è il numero di interi minori di n e primi con esso.

b) Un numero primo (maggiore di 2) può essere rappresentato come differenza di due quadrati interi in un modo unico. Ecco la dimostrazione di Fermat: Sia n primo e supponiamolo

1) Cfr. P. TANNERY, *Sur la date des principales découvertes de Fermat*, in *Bull. des sciences mathém. et astron.*, ser. II, tomo VII, 1883 pp. 116-128.

2) A questa materia si riferisce la polemica le cui fasi sono narrate nell'articolo di G. WERTHEIM, *Pierre Fermat's Streit mit John Wallis*, in *Abh. zur Gesch. de Math.*, tomo IX, 1899.

eguale ad $x^2 - y^2$, cioè a $(x + y)(x - y)$. Ora per la fatta ipotesi i soli fattori interi di n sono n e l' unità; dunque è $x + y = n$ e $x - y = 1$; risolvendo queste equazioni si ha:

$$x = \frac{1}{2}(n + 1), y = \frac{1}{2}(n - 1).$$

c) Fermat diede una dimostrazione del seguente teorema di Diofanto: «la somma dei quadrati di due interi non può essere della forma $4n - 1$»; ed aggiunse un corollario, che io credo debba intendersi essere impossibile che il prodotto di un quadrato per un numero primo della forma $4n - 1$ (anche se moltiplicato per un numero primo coll' ultimo) possa essere un altro quadrato o la somma di due quadrati. Per esempio 44 è un multiplo di 11 (che è della forma $4 \times 3 - 1$) per 4, onde non può essere espresso come la somma di due quadrati. Egli anche stabilisce che un numero della forma $a^2 + b^2$, ove a è primo con b, non può essere divisibile per un numero primo della forma $4n - 1$.

d) Ogni numero primo della forma $4n + 1$ è esprimibile sempre ed in un sol modo come somma di due quadrati. Questo teorema fu stabilito per la prima volta da Eulero, che dimostrò che un numero della forma $2^m(4n + 1)$ può essere sempre espresso come somma di due quadrati.

e) Se a, b, c sono interi tali che $a^2 + b^2 = c^2$, allora ab non può essere un quadrato. Di questo teorema diede una dimostrazione Lagrange.

f) Determinazione di un numero x tale che $x^2 n + 1$ sia un quadrato, ove n è un numero intiero dato, non quadrato. Lagrange diede una soluzione di questo problema.

g) L'equazione $x^2 + 2 = y^3$ ammette una sola soluzione intera, mentre la $x^2 + 4 = y^3$ ne ammette solo due. Le soluzioni citate sono evidentemente per la 1ª: $x = 5$ e per la 2ª equazione: $x = 2$ e $x = 11$. Questa questione fu pubblicata come una sfida ai matematici inglesi Wallis e Digby.

h) Non esistono valori interi di x, y, z, che soddisfanno l'equazione $x^n + y^n = z^n$, se n è un numero intero maggiore di 2.

Questa proposizione [1]) ha acquistato una celebrità straordinaria, pel fatto che nessuna dimostrazione generale ne è stata data fin qui, e non vi è ragione alcuna per ritenere che essa non sia vera [2]). Probabilmente Fermat scoprì la verità di essa prima per il caso di $n = 3$ e poi pel caso di $n = 4$. La dimostrazione del primo di questi casi è perduta, ma quella del secondo caso esiste; ed una consimile dimostrazione pel caso di $n = 3$ fu data da Eulero. Queste dimostrazioni consistono nel provare che, se si possono trovare tre valori interi di x, y, z soddisfacenti l'equazione data, allora sarà possibile di trovare tre altri numeri interi più piccoli, che pure la soddisfacciano; in tal modo si giunge a dimostrare che l'equazione può essere soddisfatta da tre valori, che evidentemente non la verificano. Per ciò una soluzione intera è impossibile. Parrebbe però che questo metodo di dimostrazione non possa applicarsi che solo ai casi di $n = 3$, $n = 4$.

La scoperta del teorema generale di Fermat fu fatta più tardi. Una facile dimostrazione può fondarsi sull'ipotesi che un numero possa essere sempre scomposto in fattori primi complessi in uno ed in un solo modo. Questa ipotesi è stata fatta da parecchi autori, ma non è vera in generale. È possibile che Fermat sia partito da qualche ipotesi falsa, ma è improbabile che abbia adoperato i numeri complessi e al postutto sembra più verosimile che egli scoprisse una dimostrazione rigorosa.

Nel 1823 Legendre diede una dimostrazione pel caso di $n = 5$, nel 1823 Lejeune-Dirichlet una per $n = 14$ e nel 1840 Lamé e Lebesgue lo dimostrarono per $n = 7$. La proposizione sembra essere vera in generale; e nel 1849 Kummer per mezzo dei numeri primi ideali dimostrò che l'equazione $x^n + y^n = z^n$ può essere soddisfatta per tutti i valori di n all'infuori per quelli (se ve ne sono) che soddisfanno tre certe condizioni. Non è certo se esista qualche numero soddisfacente queste condizioni, ma non

1) Su questa curiosa proposizione, vedi i miei *Mathematical Recreations and Problems*, 10ª edizione, pp. 40-44.

2) Vedi la *Memoria bibliografica sull'ultimo teorema di Fermat*, del dott. GAMBIOLI, pubblicata nel *Periodico di Matematica* di Livorno, 1901. Inoltre: B. LIND, *Ueber das latzte Fermat'sche Theorem* in *Abh. zur Gesch. des Math.*, tomo XXVI, 1910; P. BACHMANN, *Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwickelung* (Berlin, 1919). (G. L.).

ve n'è alcuno minore di 100. La dimostrazione di Kummer è complicata e difficile, e non vi può essere dubbio che essa sia basata su considerazioni ignote a Fermat. Aggiungerò che per dimostrare la verità della proposizione, quando n è maggiore di 4, evidentemente è sufficiente limitarci ai casi in cui n è un numero primo: ora il primo passo della dimostrazione di Kummer consiste nel far vedere che in tali casi uno dei numeri x, y, z è divisibile per n [1]).

I seguenti estratti, da una lettera [2]) conservata ora nella Biblioteca universitaria di Leida, darà un'idea del metodo di Fermat (da lui detto *descente infinie ou indéfinie*); la lettera è senza data, ma sembrerebbe che nel tempo che Fermat la scrisse, avesse dimostrato la suddetta proposizione *h*) solo pel caso di $n = 3$.

Je ne m'en servis au commencement que pour demontrer les propositions negatives, comme par exemple: Qu'il n'y a aucun nombre, moindre de l'unité qu'un multiple da 3, qui soit composé d'un quarré et du triple d'un autre quarré. Qu'il n'y a aucun triangle rectangle de nombres dont l'aire soit un nombre quarré. La preuve se fait par **ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον** en cette manière. S'il y auroit aucun triangle rectangle en nombres entiers, qui eust son aire esgale à un quarré, il y auroit un autre triangle moindre que celuy la qui auroit la mesme proprieté. S'il y en auroit un second moindre que le premier qui eust la mesme proprieté il y en auroit par un pareil raisonnement un troisième moindre que ce second qui auroit la mesme proprieté et enfin un quatrième, un cinquième etc. a l'infini en descendant. Or est — il qu'estant donné un nombre il n'y en a point infinis en descendant moindres que celuy-la (j'entens parler tousjours des nombres entiers). D'où on conclud qu'il est donc impossible qu'il y ait aucun triangle rectangle dont l'aire soit quarré....

Je fus longtemps sans pouvoir appliquer ma methode aux question affirmatiues, parce que le tour et la biais pour y venir est beaucoup plus

1) Se il teorema di Fermat *non* è vero, è possibile che ciò rimanga per sempre ignoto; infatti in tale ipotesi la relativa dimostrazione non si troverà mai e sarà estremamente difficile scoprire tre numeri x, y, z soddisfacenti l'equazione $x^n + y^n = z^n$, dal momento che, essendo $n > 100$, ciascuno dei numeri x^n y^n, z^n dovrebbe avere non meno di 30 cifre. (G. L.).

2) La lettera è stata pubblicata per esteso nel *Bullettino di bibliografia* del 1879, pp. 737-740, del principe BONCOMPAGNI e poi in *Oeuvres de Fermat* (ed. Henny e Tannery, tomo II, Paris, 1891, p. 431); è diretta a Carcavy e datata agosto 1659.

malaisé que celuy dont je me sers aux negatives. De sorte que lors qu'il me falut demonstrer que tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrez, je me trouuay en belle peine. Mais enfin une meditation diverses fois reiterée me donna les lumières qui me manquoient. Et les questions affirmatiues passèrent par ma methode à l'ayde de quelques nouveaux principes qu'il y fallust joindre par necessité. Ce progrès de mon raisonnement en ces questions affirmatives estoit tel. Si un nombre premier pris à discretion qui surpasse de l'unité un multiple de 4 n'est point composé de deux quarrez, il y aura un nombre premier de mesme nature moindre que le donné; et ensuite un troisième encore moindre, etc. en descendant a l'infini jusques a ce que vous arriviez au nombre 5, qui est le moindre de tous ceux de cette nature, lequel il s'en suivroit n'etre pas composé de deux quarrez, ce qu'il est pourtant d'ou on doit inférer, par la déduction à l'impossible, que tous ceux de cette nature sont par consequent composez de deux quarrez.

Il y a infinies questions de cette espece. Mais il y en a quelques autres qui demandent de nouveaux principes pour y appliquer la descente, et la recherche en est quelques fois si mal aisée, qu'on n'y peut venir qu'auec une peine extreme. Telle est la question suiuante que Bachet sur Diophante avoüe n'avoir jamais pu demonstrer, sur le suject de laquelle Mr. Descartes fait dans une de ses lettres la mesme declaration, jusques la qu'il confesse qu'il la juge si difficile, qu'il ne voit point de voye pour la resoudre. Tout nombre est quarré, ou composé de deux, de trois, ou de quatre quarréz. Je l'ay enfin rangée sous ma methode et je demonstre que si un nombre donné n'estoit point de cette nature il y en auroit un moindre qui ne le seroit pas non plus, puis un troisième moindre que le second &c. à l'infini, d'ou l'on infere que tous les nombres sont de cette nature....

J'ay ensuite consideré certaines questions qui bien que negatives ne restent pas de receuoir tres grande difficulté la methode pour y pratiquer la descente estant tout a fait diuerse des precedentes comme il sera aisé d'esprouuer. Telles sont les suiuantes. Il n'y a aucun cube diuisible en deux cubes. Il n'y a qu'un seul quarré en entiers qui augmenté du binaire fasse un cube, ledit quarré est 25. Il n'y a que deux quarrez en entiers lesquels augmentés de 4 fassent cube, lesdits quarrez sont 4 et 121....

Après auoir couru toutes ces questions la plupart de diuerses nature et de differente façon de demonstrer, j'ay passé a l'inuention des regles generales pour resoudre les equations simples et doubles de Diophante. On propose par exemple 2 quarrés $+7967$ esgaux a un quarré (*hoc est* 2 $xx+7967 \infty$ *quadr.*). J'ay une regle générale pour resoudre cette equation si elle est possible, ou decouvrir son impossibilité. Et ainsi en tous les cas et en tous nombres tant des quarréz que des unités. On propose cette equation double $2x+3$ et $3x+5$ esgaux chacun à un quarré. Bachet se glorifie en ses commentaires sur Diophante d'auoir trouvé une regle en deux cas particuliers. Je la donne genèrale en toute sorte de cas. Et determine par regle si elle est possible ou non....

Voila sommairement le compte de mes recherches sur le sujet des nombres. Je ne l'ay escrit que parce que j'apprehende que le loisir d'estendre et de mettre au long toutes ces demonstrations et ces methodes me manquera. En tout cas cette indication seruira aux sçauants pour trouver d'eux mesmes ce que je n'éstens point, principalement si MM. de Carcavi et Frénicle leur font part de quelques demostrations par la descente que je leur ay enuoyees sur le sujet de quelques propositions negatives. Et peut estre la posterité me scaura gré de luy avoir fait connoistre que les anciens n'ont pas tout sceu, et cette relation pourra passer dans l'esprit de ceux qui viendront après moi pour *traditio lampadis ad filios*, comme parle le grand Chancelier d'Angleterre, suiuant le sentiment et la deuise duquel j'adjousteray, *Multi pertransibunt et augebitur scientia*.

2) Passo ora a parlare dell' uso che fece Fermat in geometria dell'analisi e degl' infinitesimi. Dalla sua corrispondenza emerge che egli scoprì i principî della geometria analitica da sè, prima di leggere la *Géométrie* di Descartes, ed osservo che dall'equazione (o com'egli la chiama «proprietà specifica») di una curva possano dedursi tutte le proprietà di essa. I suoi scritti geometrici esistenti trattano per altro principalmente dell'applicazione degli infinitesimi alla determinazione delle tangenti alle curve, alla quadratura delle stesse ed alle questioni di massimi e minimi [1]; probabilmente questi lavori sono una revisione dei suoi manoscritti originali (che egli distrusse) e furono redatti intorno al 1663; ma non avvi alcun dubbio che egli fosse in possesso dell' idea generale del suo metodo per trovare i massimi ed i minimi al principio del 1628 o del 1629.

Egli ottenne le sottotangenti a l'ellisse, la cicloide, la cissoide, la concoide e la quadratrice, considerando le ordinate della curva ed una retta passante per due punti della stessa le cui ascisse erano x ed $x-e$; ma nulla indica che egli si fosse accorto che il procedimento fosse generale; e, quantunque nel corso della

1) Fa eccezione l'opuscolo *Ad locos planos et solidos Isagoge*, il quale è un vero e proprio compendio di geometria analitica, nel senso odierno di tale parola. (G. L.).

sua opera applicasse tale principio, è probabile che mai lo disgiungesse dai simboli del problema particolare, che egli stava considerando. La prima e definitiva esposizione del metodo fu data da Barrow (vedi più avanti) e fu pubblicata nel 1669.

Fermat ottenne pure le aree delle parabole e delle iperboli di ordine qualunque, e determinò i baricentri di alcune curve semplici e di un paraboloide di rivoluzione. Come esempio del suo metodo di risoluzione di queste questioni citerò la soluzione del problema di trovare l'area compresa fra la parabola $y^3 = px^2$, l'asse x e la retta $x = a$. Egli dice che se si conducono parecchie ordinate ai punti, per i quali x è uguale ad:

$$a, \; a(1-e), \; a\,(1-e)^2 \ldots,$$

allora l'area in questione sarà divisa in un numero di piccoli rettangoli, le cui aree sono rispettivamente:

$$ae(pa^2)^{\frac{1}{3}}, \quad ae(1-e)\left\{ pa^2(1-e)^2 \right\}^{\frac{1}{3}}, \ldots$$

La loro somma è:

$$\frac{p^{\frac{1}{3}} a^{\frac{5}{3}} e}{(1-e)\left\{ pa^2(1-e)^2 \right\}^{\frac{1}{3}}},$$

e da una proposizione sussidiaria (come si è detto Fermat non conosceva il teorema del binomio), egli trova che il limite di essa, allorchè e diviene piccolissimo, è $\frac{3}{5} p^{\frac{1}{3}} a^{\frac{3}{5}}$. I teoremi da ultimo citati furono pubblicati solamente dopo la morte di Fermat; e probabilmente essi furono da lui scritti dopo avere lette le opere di Cavalieri e di Wallis.

Keplero osservò che i valori che una funzione prende nell'intorno di un punto di massimo (o minimo) sono eguali. Fermat applicò questo principio ad alcuni esempi. Così, per trovar il

valore massimo di $x(a-x)$, il suo metodo equivale essenzialmente a prendere un valore assai prossimo ad x, cioè $x-e$, ove e è piccolissimo e porre:

$$x(x-a) = (x-e)\;(a-x+e).$$

Semplificando e poi facendo $e = 0$, ottiene $x = \frac{1}{2}a$, valore di x che fa prendere alla funzione il suo valor massimo.

3) Fermat ha con Pascal l'onore di aver fondato *la teoria delle probabilità*. Ho già menzionato il problema proposto a Pascal e comunicato a Fermat ed ho riportato la soluzione di Pascal. La soluzione di Fermat dipende dalla teoria delle combinazioni e sarà sufficientemente illustrata dal seguente esempio, contenuto in una sua lettera del 24 agosto 1654, che fa parte della sua corrispondenza con Pascal. Fermat considera il caso di due giocatori A e B, e suppone che al primo manchino 2 punti per vincere ed al secondo 3. La partita sarà dunque certamente decisa nel corso di quattro prove. Prendansi le lettere a e b e si scrivano tutte le combinazioni che si possono formare con quattro lettere. Queste 16 combinazioni sono le seguenti:

a a a a	*a b a a*	*b a a a*	*b b a a*
a a a b	*a b a b*	*b a a b*	*b b a b*
a a b a	*a b b a*	*b a b a*	*b b b a*
a a b b	*a b b b*	*b a b b*	*b b b b*

È chiaro che ciascuna di queste 16 combinazioni, in cui a comparisce due o più volte, rappresenta un caso favorevole ad A; ed ogni combinazione, in cui b comparisce tre o più volte, rappresenta un caso favorevole a B. Dunque, fatto il conto, si troverà che vi sono 11 casi favorevoli ad A e 5 casi favorevoli a B; e giacchè questi casi sono tutti egualmente possibili, la probabilità di A di vincere la partita sta a quella di B come 11 sta a 5.

Il solo altro problema su questo argomento, per quanto io sappia, che abbia richiamato l'attenzione di Fermat, gli fu pure proposto da Pascal ed è il seguente: Una persona si propone di far 6 con un dado in otto colpi; suppongasi che abbia fatto tre colpi senza far punti; a qual parte della posta avrebbe diritto, alla condizione di rinunciare a trarre il quarto colpo? Il ragionamento di Fermat è il seguente. La probabilità di vincere è $\frac{1}{6}$; sicchè egli dovrebbe prendere $\frac{1}{6}$ della posta, a condizione di rinunciare al suo colpo. Ma, se noi vogliamo stabilire il valore del quarto colpo, prima che ne sia fatto qualunque altro, allora il primo colpo vale $\frac{1}{6}$ della posta; il secondo $\frac{1}{6}$ di ciò che rimane, cioè $\frac{5}{36}$ della posta, il terzo colpo $\frac{1}{6}$ di ciò che rimane ancora, cioè $\frac{25}{216}$ della posta; il quarto colpo $\frac{1}{6}$ del rimanente, cioè $\frac{125}{1291}$ della posta.

Non pare che Fermat abbia spinto oltre queste ricerche; ma la sua corrispondenza con Pascal dimostra che le sue vedute sui principî fondamentali di questa teoria erano giuste, mentre tali non furono interamente quelle di Pascal.

La fama di Fermat è unica nella storia della scienza. I problemi sui numeri, che egli propose, sfidarono lungamente tutti gli sforzi per risolverli e molti di essi si arresero solo alla abilità di Eulero; tuttavia uno ne rimane insoluto (vedi p. 37). Questo risultato straordinario ha gettato un'ombra sul resto dell'opera sua; ma in realtà questa è del più alto grado di eccellenza; e noi possiamo solo dolerci, che egli ritenesse conveniente di scrivere così poco.

Huygens [1]). — Cristiano Huygens nacque all'Aja (Olanda) il 14 aprile 1629 e morì nella stessa città l' 8 giugno 1695 [2]).

1) Una edizione completa delle opere e della corrispondenza di HUYGENS è stata intrapresa nel 1888 per cura della Società olandese delle Scienze (La Haye, vol. I, 1888; ....; XIV, 1920). La prima edizione delle sue opere era stata pubblicata in 6 volumi, 4 a Leida nel 1724, e 2 ad Amsterdam nel 1728 (una biografia è premessa al vol. I da Gravesande); la sua corrispondenza scientifica fu in parte pubblicata all'Aja nel 1833.

2) Studiò sotto il prof. Schooten nella Università di Breda.

Egli scrisse generalmente il suo nome così: Hugens; ma io ho adottata la grafia consueta; tale nome è pure qualche volta scritto così: Huyghens. La sua vita fu abbastanza tranquilla.

Nel 1651 pubblicò un trattato, in cui dimostrò la falsità di una quadratura del cerchio proposta da Gregorio di San-Vincenzo (vedi più avanti), nella quale questi fece vedere di essere assai versato nella geometria dei Greci; all'opposto non afferrò mai i punti essenziali dei metodi più moderni. Seguì a quello un importante lavoro sulla quadratura delle coniche e la rettificazione approssimata del cerchio.

Nel 1654 Huygens rivolse la sua attenzione al perfezionamento del telescopio. Insieme a suo fratello escogitò un nuovo e miglior metodo per arrotare e pulire le lenti. Servendosi di tali perfezionamenti fu in grado, durante gli anni seguenti 1655 e 1656, di risolvere numerose questioni astronomiche, ad esempio di determinare la natura dell'anello di Saturno. Durante le sue osservazioni astronomiche, avendo bisogno di mezzi esatti per misurare il tempo, egli fu condotto nel 1656 ad inventare l'orologio a pendolo, come è descritto nel suo trattato *Horologium oscillatorium* (1658). Il cronometro antecedentemente in uso era l'orologio a bilancia.

Nel 1657 Huygens scrisse un'operetta sul calcolo delle probabilità fondata sopra la corrispondenza tra Pascal e Fermat. In quell'epoca passò un paio di anni in Inghilterra. La sua fama a quel tempo era sì grande, che nel 1665 Luigi XIV gli offrì una pensione, purchè egli acconsentisse a stabilirsi a Parigi; avendo acconsentito, questa città divenne allora la sua residenza.

Nel 1668 inviò alla Società Reale di Londra, in risposta ad un problema proposto, una memoria in cui (simultaneamente a Wallis e Wren), dimostrò sperimentalmente che la quantità di moto in una certa direzione prima dell' urto di due corpi è uguale alla quantità di moto in quella direzione dopo l' urto. Era questo uno de' punti della meccanica, in cui Descartes s'era ingannato.

La più importante opera di Huygens è il suo *Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato*, pubblicato a Parigi e dedicato a Luigi XIV in data 25 marzo 1673.

Il I capitolo è dedicato agli orologi a pendolo. Il II contiene uno studio completo [1]) della caduta nel vuoto dei gravi sotto l' impulso del proprio peso secondo la verticale o secondo archi di curve; fra l'altro egli mostrò che la cicloide è una curva *tautocrona*. Nel III capitolo [2]) definisce le evolute e le evolventi (sviluppate), dimostra le loro più elementari proprietà e illustra i suoi metodi trovando le evolute della cicloide e della parabola. Sono questi i primi esempi di determinazione dell' inviluppo di una retta mobile. Nel IV capitolo [3]) risolve il problema del pendolo composto, e dimostra che i centri di oscillazione e di sospensione sono permutabili. Nel V ed ultimo capitolo riprende la teoria degli orologi, dimostra che se il pendolo fosse costruito mediante sospensioni cicloidali, tali da potere oscillare in una cicloide, le oscillazioni sarebbero isocrone, e termina dimostrando che la forza centrifuga di un grave, che si muove in un cerchio di raggio r con una velocità uniforme v, varia direttamente come v^2 ed inversamente come r. Quest'opera contiene il primo tentativo di applicazione della dinamica ai gravi di grandezza finita e non semplicemente a punti.

Nel 1675 Huygens propose di regolare il moto degli orologi coll' uso del bilanciere a molla, sulla teoria del quale egli forse era stato preceduto da un lavoro ambiguo ed incompleto fatto da Hooke nel 1658. Gli orologi da tasca furono inventati al principio del XVI secolo, ed alla fine di quel secolo non erano più rari; ma essi erano pesanti e poco esatti, essendo mossi da una grossa molla e regolati da una puleggia conica e da una verga a scappamento; inoltre fino al 1687 essi ebbero un solo indice. Il primo orologio, il cui moto fosse regolato da un bilanciere a molla, fu fabbricato a Parigi sotto la direzione di Huygens e da lui presentato a Luigi XIV.

La crescente intolleranza dei cattolici lo costrinse a ritornare in Olanda nel 1681 e, dopo la revoca dell'editto di Nantes, si rifiutò di mantenere qualunque ulteriore relazione in Francia.

1) *De descensu gravium et motu eorum in cicloide.*
2) *De evolutione et dimensione linearum curvarum.*
3) *De centro oscillationis.*

Allora si dedicò alla costruzione di lenti di enorme lunghezza focale; di queste lenti, tre di lunghezze focali 123 piedi, 180 p. e 210 p., furono poi da lui offerte alla Società Reale di Londra, che ancora le possiede. Fu intorno a quest'epoca che egli scoprì l'oculare acromatico (per un telescopio), che porta il suo nome. Nel 1689 venne dall'Olanda in Inghilterra per fare la conoscenza di Newton, i cui *Principia* erano stati pubblicati nel 1687; Huygens riconobbe pienamente il valore dottrinale dell'opera, ma sembra che egli ritenesse incompleta ogni teoria, che non spiegasse la gravitazione mediante cause meccaniche.

Nel 1690, al suo ritorno in patria, Huygens pubblicò il *Trattato sulla luce*, in cui trovasi esposta e spiegata la teoria delle onde. La maggior parte di essa era stata scritta fino dal principio del 1678. L' idea di tale teoria era stata suggerita da Roberto Hooke nel 1664; ma questi non ne aveva studiato le conseguenze particolareggiatamente. Il *Trattato sulla luce* non fu pubblicato durante il periodo considerato nel presente capitolo: tuttavia diremo brevemente che, secondo la teoria ondulatoria, lo spazio è pieno di un etere estremamente rarefatto e la luce è prodotta da una serie di onde o vibrazioni di questo etere, provocate dalle vibrazioni dei corpi luminosi. Da questa ipotesi Huygens dedusse le leggi di riflessione e rifrazione, spiegò i fenomeni della doppia rifrazione e diede una costruzione per il raggio singolare dei cristalli biassali; in pari tempo scoprì sperimentalmente il fondamentale fenomeno della polarizzazione.

La grande fama e gl' impareggiabili meriti di Newton condussero a dubitare di una teoria che egli non aveva accettato ed a credere invece alla sua teoria dell'emissione; ma è bene osservare che la spiegazione di Huygens per certi fenomeni, come i colori delle lamine sottili, era inconciliabile coi risultati degli esperimenti; essa non trionfò finchè Young e Wollaston, all' inizio del secolo XIX, non la fecero rivivere, modificandone però alcuni particolari, e Fresnel non ne ebbe ritoccate le ipotesi in modo da renderne l'accettazione pienamente giustificata.

Oltre a queste opere, Huygens prese parte a parecchie delle controversie e delle disfide, allora in grande uso nel mondo matematico; e scrisse parecchie opere minori. In una di queste studiò la forma e le proprietà della catenaria; in un'altra stabilì in termini generali la regola per trovare i massimi ed i minimi, di cui Fermat aveva fatto uso; e dimostrò che la sotto-tangente di una curva algebrica $f(x, y) = 0$ è eguale a $\frac{yf'_y}{f'_x}$, ove f'_x e f'_y sono le derivate di $f(x, y)$ rispetto ad x e y. In alcuni scritti postumi, pubblicati a Leida nel 1703, egli dimostrò come dalle lunghezze focali delle lenti componenti si potesse determinare la potenza d'ingrandimento di un telescopio e spiegò alcuni de' fenomeni, che hanno attinenza coll'afelio ed il perielio.

Quasi tutte le dimostrazioni di Huygens, al pari di quelle di Newton, sono rigidamente geometriche e parrebbe che egli non abbia fatto nessun uso del calcolo differenziale o delle flussioni, quantunque egli ammettesse l'esattezza di questi metodi. Inoltre le sue opere, specialmente le prime, sono scritte in una lingua antiquata, e forse per questo richiamarono l'attenzione meno di quanto realmente meritassero.

Ho così tracciato lo svolgimento della matematica per un periodo che noi possiamo considerare all'incirca dal 1635 al 1675, sotto l'influenza di Descartes, Cavalieri, Pascal, Wallis, Fermat ed Huygens. La vita di Newton in parte oltrepassa questo periodo; le sue opere e l'influenza da esse esercitata sono considerate nel capitolo successivo.

Dirò qualche cosa intorno agli *altri matematici di quest' epoca* [1]), dedicando ad essi brevi notizie. I più eminenti sono: Bachet, Barrow, Brounker, Collins, De la Hire, de Laloubère, Frénicle, Giacomo Gregory, Hooke, Hudde, Nicola Mercator, Mersenne, Pell, Roberval, Saint-Vincent, Sluze, Torricelli, Tschirnhausen, van Schooten, Viviani e Wren. Nelle seguenti note li ho disposti in modo che, per quanto possibile, le loro principali scoperte si succedano in ordine cronologico.

Bachet. — Claudio Gaspare Bachet di Méziriac nacque a Bourg nel 1581 e morì nel 1638. Egli scrisse i *Problèmes plaisants*

1) Notizie intorno a parecchi di questi matematici si trovano. nel *Mathematical Dictionary and Tracts*, in 5 volumi, dell' HUTTON, Londra, 1812-1815.

et delectables qui se font par les nombres, dei quali fu pubblicata una prima edizione a Lione nel 1612 e una seconda ampliata nel 1624, che contiene una interessante collezione di giuochi aritmetici e questioni, molte delle quali sono citate nelle mie *Mathematical Recreations and Problems*; scrisse pure *Elementorum arithmeticorum libri 13*, che esistono manoscritti nella biblioteca dell' Istituto di Francia; si deve a lui una pregiata edizione, accompagnata di traduzione in latino, dell'*Arithmetica* di Diofanto. Bachet fu il primo che abbia risolte le equazioni indeterminate mediante le frazioni continue.

Mersenne. — Marino Mersenne nacque nel 1588 e morì a Parigi nel 1648; fu frate francescano ed amava di conoscere e mantenere corrispondenza coi matematici francesi di quell'epoca e con molti degli stranieri a lui contemporanei. Nel 1634 pubblicò una traduzione della meccanica di Galileo; nel 1644 pubblicò la sua *Cogitata Physico-Mathematica*, per la quale soprattutto egli è conosciuto, e che contiene le descrizioni di alcune esperienze di fisica; scrisse pure una sinossi della matematica, che fu pubblicata nel 1664.

La prefazione ai *Cogitata* contiene una nota (probabilmente dovuta a Fermat) secondo cui, affinchè $2^p - 1$ risulti un numero primo, supposto p non superiore a 257, i soli che esso può assumere sono, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 e 257; il 67 è stato messo, forse per errore di stampa, invece di 61. Con questa limitazione la proposizione enunciata è vera ed è stata verificata per tutti i valori di p, all'infuori che pei ventitrè seguenti: 67, 71, 87, 101, 103, 107, 109, 128, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 197, 199, 227, 229, 241 e 257. Rispetto a questi valori Mersenne asserì che, per $p = 257$, il numero $2^p - 1$ è primo, e che per quegli altri valori di p il numero $2^p - 1$ è composto. Le verificazioni pei casi di $p = 67$, 87, 127 sono state fatte mediante lunghi calcoli eseguiti da abili calcolatori e non ancora pubblicati; ma, finchè essi non sieno confermati, noi possiamo dire che ancora ventidue casi richieggono di essere verificati e ulteriormente studiati. Non si conoscono i fattori di $2^p - 1$, quando sia $p = 67$ e $p = 89$; i calcoli fatti mostrano semplicemente che i numeri risultanti non possono essere primi. È molto probabile che questi risultati siano casi particolari di qualche teorema generale che rimane ancora da scoprirsi.

La teoria dei numeri perfetti dipende direttamente da quella dei numeri di Mersenne. È probabile che tutti i numeri perfetti siano compresi nella formula $2^{p-1}(2^p - 1)$, ove $2^p - 1$ è un numero primo. Euclide dimostrò che ogni numero di questa forma è perfetto; Eulero aggiunse che la formula contiene tutti i numeri perfetti pari e vi è ragione per credere — quantunque non ne esista ancora una dimostrazione rigorosa — che un numero dispari non possa essere perfetto; ammesso ciò, ogni numero perfetto sarebbe della forma suddetta. Così se $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 16, 31, 61$, allora, per la regola di Mersenne, i corrispondenti valori di $2^p - 1$ sono numeri primi: essi sono: 3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, 2305843009213693951, ed i corrispondenti numeri perfetti sono: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128 e 26584559915-6983174465469261595384217 6.

Roberval [1]. — Gilles Personnier (de) Roberval, nacque a Roberval nel 1602 e morì a Parigi nel 1675; di suo arbitrio prese il nome del luogo di nascita, de Roberval, titolo nobiliare, a cui non aveva diritto. Egli studiò la natura delle tangenti alle curve; risolvette alcune delle questioni più facili riguardanti la cicloide; generalizzò i teoremi di Archimede sulla spirale; scrisse sulla meccanica e sul metodo degli indivisibili, che rese più preciso e più logico. Fu professore nell' Università di Parigi e in corrispondenza con quasi tutti i principali matematici del suo tempo.

Van Schooten. — Frans van Schooten, a cui noi dobbiamo un'edizione delle opere di Vieta (1646), successe al padre (che insegnò matematiche a Huygens, Hudde e Sluze) come professore a Leida, pubblicò nel 1649 una traduzione in latino della *Géométrie* di Descartes e nel 1657 una raccolta di esercizî di

1) Una edizione completa delle sue opere nel 1693 fu inserita nelle vecchie *Mémoires* dell'Accademia delle Scienze.

matematica, in cui egli raccomandò l' uso delle coordinate dello spazio a tre dimensioni; morì nel 1661.

Saint-Vincent [1]. — *Gregorio de Saint-Vincent*, gesuita, nacque a Bruges l' 8 settembre 1584 e morì a Gand il 27 gennaio 1667; per primo avvertì l'intervento dei logaritmi nella quadratura dell'iperbola. Oltre che per lo studio sulla quadratura del cerchio, egli è meritevole di essere ricordato per i numerosi ed importanti teoremi che scoprì nel corso di questa ricerca, e Montucla acutamente osserva che « nessuno tentò mai di quadrare il circolo con tanta abilità e (all' infuori che pel suo scopo principale) con tanto successo ». Egli scrisse due libri su questo argomento; l' uno fu pubblicato nel 1647 e l'altro nel 1668; essi comprendono circa due o tre mila pagine di fittissima stampa; la falsità del ragionamento adoperato nella quadratura del cerchio fu notata da Huygens. Nel primo egli usò gl' indivisibili; mentre in un lavoro di più antica data, intitolato *Theoremata Mathematica* (1624), si legge una chiara esposizione del metodo di esaustione, che viene applicato a parecchie quadrature, specialmente a quella dell' iperbole.

Torricelli [2]. — *Evangelista Torricelli* nacque a Faenza il 15 ottobre 1608 e morì a Firenze il 24 ottobre 1647; scrisse sulla quadratura della cicloide e delle coniche, sulla rettificazione della logaritmica e sulla teoria del barometro; trovò il valore della gravità, osservando il moto di due gravi, legati ad una funicella, passante sopra una puleggia fissa; e si occupò della teoria dei proiettili e del moto dei fluidi.

Hudde. — *Giovanni Hudde*, borgomastro di Amsterdam, nacque quivi nel 1633 e morì nella stessa città nel 1704. Scrisse due opere nel 1659; nell' una tratta della riduzione delle equa-

1) Vedi *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* di A. QUETELET, Bruxelles, 1864, e l'articolo di H. BOSMANS nel tomo XXI della *Biographie nationale publié par l'Académie de belgique.*

2) Alcuni suoi scritti di matematica furono pubblicati in Firenze nel 1644 col titolo *Opera geometrica* ed alcune *Lezioni accademiche* nel 1715. Tutti i suoi lavori e le sue lettere sono raccolti nei 4 volumi dal titolo: *Opere di Evangelista Torricelli*, pubblicati per cura di G. LORIA e G. VASSURA. Faenza, 1917.

zioni, che hanno eguali radici; nell'altra stabilì un teorema che equivale alla proposizione: «se $f(x, y) = 0$ è l'equazione di una curva algebrica, la suttangente ne è $-\dfrac{y\dfrac{df}{dy}}{\dfrac{df}{dx}}$»; non possedendo alcuna nozione di calcolo infinitesimale, l'enunciato di essa è intricato.

Frénicle [1]. — *Bernardo Frénicle de Bessy*, nato a Parigi circa nel 1605 e morto nel 1670, scrisse molte memorie riguardanti le combinazioni, la teoria dei numeri ed i quadrati magici. È interessante aggiungere che egli sfidò Huygens a risolvere in numeri interi il seguente sistema di equazioni:

$$x^2 + y^2 = z,^2 \; x^2 = u^2 + v,^2 \; x - y = u - v;$$

una soluzione di questo problema fu data dal P. Pépin nel 1880.

De-Laloubère. — *Antonio De-Laloubère*, gesuita, nacque in Linguadoca nel 1600 e morì a Tolosa nel 1664; è celebre particolarmente per una soluzione inesatta dei problemi di Pascal sulla cicloide, che egli diede nel 1660; ma deve la sua fama principalmente al fatto che è stato il primo matematico a studiare le proprietà dell'elica [2].

Kinckhuysen. — *Gerardo Kinckhuysen* nacque in Olanda nel 1630 e morì nel 1679; scrisse nel 1660 un'opera sulla geometria analitica delle coniche, nel 1661 un'algebra, e nel 1669 una raccolta di problemi di geometria analitica colle loro soluzioni.

N. Mercator. — *Nicola Mercator* (talvolta designato col nome Kauffmann) nacque nell'Holstein verso il 1620, ma passò

1) Le opere varie di FRÉNICLE furono pubblicate da DE LAHIRE nelle *Mémoires de l'Académie*, vol. V, Paris, 1691.

2) Questa curva era però nota agli antichi; Apollonio deve aver scritto su di essa un lavoro, che più non esiste. (G. L.).

gran parte della sua vita in Inghilterra; andò in Francia nel 1683, ove disegnò e costrusse le fontane di Versailles; ma allorchè esse furono compiute, Luigi XIV rifiutò di fargli il pagamento convenuto, finchè non ritornasse al cattolicismo; egli morì perseguitato e povero a Parigi nel 1687. Scrisse nel 1668 un trattato sui logaritmi intitolato *Logarithmo-technica* e scoprì la serie:

$$\log.\ (1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots;$$

egli la dimostrò scrivendo l'equazione dell'iperbole sotto la forma:

$$y = \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

a cui è applicabile il metodo di quadratura di Wallis.

Barrow [1]. — *Isacco Barrow* nacque a Londra nel 1630 e morì a Cambridge nel 1677. Egli andò a scuola prima a Charterhouse (ove si comportava così male, che il padre pregò Dio, che qualora avesse voluto riprendere uno dei suoi figliuoli, l'avesse liberato da Isacco) e poi a Felstead. Compì i suoi studi nel Collegio della Trinità a Cambridge; dopo essersi addottorato nel 1648, fu eletto a farne parte come *fellow* nel 1649; quindi risiedette per un po' d'anni in Collegio; ma nel 1655 ne uscì, causa la persecuzione degli Indipendenti. Egli passò i successivi quattro anni nell'Europa orientale e, dopo molte avventure, ritornò in Inghilterra nel 1659. Nell'anno successivo ricevette gli ordini ecclesiastici e fu nominato alla cattedra di greco a Cambridge. Nel 1662 fu fatto Professore di Geometria nel Collegio di Gresham e nel 1663 fu eletto ad occupare per primo la cattedra Lucasiana dell'Università di Cambridge. Nel 1669 cedette quest'ultima cattedra al suo allievo Newton, di cui apprezzava e francamente

1) Le sue opere matematiche, edite da W. WHEWELL, furono pubblicate a Cambridge nel 1860. Vedi anche J. M. CHILD, *The geometrical Lectures of Isaac Barrow*, Chicago and London, 1916.

riconosceva l'alto ingegno. Il rimanente della sua vita dedicò allo studio della teologia. Fu nominato Direttore del Collegio della Trinità nel 1672 e tenne questo posto fino alla morte.

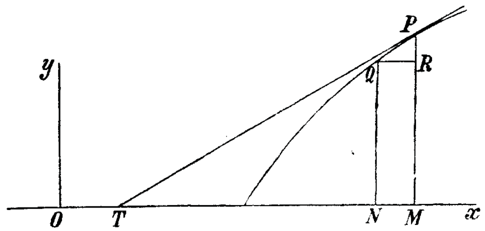
È descritto così: «di bassa statura, sparuto, e di una complessione gracile» negletto nel vestire e fumatore impenitente. Era noto per la sua forza ed il suo coraggio, ed una volta, quando viaggiava in Oriente, col proprio valore salvò la nave in cui si trovava dalla cattura dei pirati. Lo spirito pronto e caustico lo fecero il favorito di Carlo II, che ordinò ai cortigiani di rispettarlo, anche se non fossero in grado di stimarlo. Il suo stile è alquanto pomposo e tronfio; la sua vita pura e la sua scrupolosa coscienza fecero di lui un personaggio, che lasciò orma profonda nell'epoca sua.

La sua prima opera consiste in una edizione completa degli *Elementi* di Euclide, che pubblicò nel 1656; nel 1660 ne fece una traduzione inglese e nel 1657 curò una edizione dei *Data*. Le sue lezioni, fatte negli anni 1664, 1665 e 1666, furono pubblicate nel 1683 col titolo *Lectiones Mathematicae*; esse riguardano in gran parte la parte metafisica delle matematiche. Le sue lezioni del 1667 furono pubblicate nello stesso anno; esse spiegavano l'analisi, colla quale Archimede fu condotto ai suoi principali risultati. Nel 1679 pubblicò le sue *Lectiones Opticae et Geometricae*; nella relativa prefazione è detto che Newton rivide e corresse queste lezioni, aggiungendovi molto del proprio: ma dalle osservazioni fatte da Newton nel corso della controversia riguardo alle flussioni, sembra emergere che le aggiunte si siano limitate alle parti che trattano l'ottica; questa, che è l'opera più importante in matematica del Barrow, fu ristampata nel 1674 con pochi e lievi cambiamenti. Nel 1675 pubblicò un'edizione con molti commenti dei primi quattro libri delle *Coniche* di Apollonio e delle opere superstiti di Archimede e Teodosio.

Nelle lezioni di ottica molti problemi, attinenti alla riflessione e rifrazione della luce, sono trattati con gran semplicità. Vi è definito il fuoco geometrico di un punto veduto mediante riflessione o rifrazione; e vi si mostra che l'immagine di un oggetto è il luogo dei fuochi geometrici di ogni punto di esso. Barrow espose pure alcune delle prime proprietà delle lenti

sottili e semplificò considerevolmente la teoria cartesiana dell'arco baleno.

Le sue lezioni geometriche contengono alcuni nuovi metodi per determinare le aree e le tangenti delle curve. Il più importante è quello dato per la determinazione delle tangenti alle curve; esso è abbastanza importante per meritare un cenno particolareggiato; si vedrà così come Barrow, Hudde e Sluze abbiano seguita la via tracciata da Fermat per giungere ai metodi del calcolo differenziale. Fermat aveva osservato che la tangente



in un punto P di una curva è determinata, quando se ne conosca un altro punto, oltre P; quindi, se si fosse potuta trovare la lunghezza della suttangente MT (e così determinare il punto T), allora la retta TP sarebbe stata la tangente richiesta. Ora Barrow osservò che, tracciando l'ascissa e l'ordinata di un punto Q vicino a P, si ottiene un piccolo triangolo PQR (che egli chiamò triangolo differenziale, perchè i suoi lati PR e PQ sono le differenze delle ascisse e delle ordinate di P e Q), d'onde si trae:

$$TM : MP = QR : RP.$$

Per trovare $QR : RP$ egli suppose che x, y fossero le coordinate di P e $x - e$, $y - a$ quelle di Q (Barrow veramente usava p per x ed m per y, ma io cambio le lettere per uniformarmi all'uso moderno). Sostituendo le coordinate di Q nella equazione della curva e trascurando i quadrati e le potenze superiori di e ed a, che sono piccolissime confrontate colle prime potenze, egli ottenne $e : a$. Il rapporto $a : e$ fu poi (secondo un suggerimento di Sluze) chiamato il coefficiente angolare della tangente nel punto considerato.

Barrow applicò questo metodo alle curve:

$$(1) \quad x^2 (x^2 + y^2) = r^2 y^2;$$
$$(2) \quad x^3 + y^3 = r^3;$$
$$(3) \quad x^3 + y^3 = rxy \text{ (la } galande \text{ o foglia di Cartesio);}$$
$$(4) \quad y = (r - x) \tan \frac{\pi x}{2r} \text{ (la } quadratrice\text{);}$$
$$(5) \quad y = r \tan \frac{\pi x}{2r}.$$

Basterà che io tratti come semplice esempio il caso della parabola $y^2 = px$. Usando le notazioni precedenti ho, pel punto P, $y^2 = px$ e, pel punto Q, $(y - a)^2 = p\ (x - e)$. Sottraendo si ha: $2\ ay - a^2 = pe$. Ma, se a è una quantità infinitesima, a^2 sarà infinitamente più piccola e quindi può essere trascurata; perciò $e : a = 2\ y : p$. Quindi $TM : x = e : a = 2\ y : p$, epperò $TM = \frac{2y^2}{p} = 2\ x$. Questo è precisamente il procedimento del calcolo differenziale, salvo che, in questo, abbiamo una regola, con cui possiamo ottenere il rapporto $\frac{a}{e}$ o $\frac{dy}{dx}$ direttamente senza ricorrere per ogni caso particolare ad un simile laborioso calcolo.

Brounker. — *Guglielmo*, Visconte di *Brounker* uno dei fondatori della Società Reale di Londra, nacque nel 1620 e morì il 5 aprile 1684; fu tra i più geniali matematici di quest'epoca ed in intima relazione con Wallis, Fermat e con altri scienziati di primo ordine. Ho già parlato più innanzi della curiosa riproduzione che egli diede della soluzione di Brahmagupta di una certa equazione indeterminata. Brouncker dimostrò poi che l'area compresa fra l'iperbola equilatera $xy = 1$, l'asse delle x e le ordinate $y = 1$ ed $y = 2$, è eguale a

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots.$$

ovvero a

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

Diede anche altre espressioni simili per le differenti aree comprese fra l'iperbole ed altre rette. Scrisse sulla rettificazione della parabola e della cicloide [1]. Va notato che impiegò le serie infinite per esprimere le quantità i cui valori non possono determinarsi altrimenti. Accogliendo l'invito di Wallis di tentare la quadratura del circolo, dimostrò che il rapporto dell'area di un circolo all'area del quadrato circoscritto, cioè $\pi : 4$, è uguale al rapporto della frazione continua

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1^2}{1} + \frac{3^2}{1} + \frac{5^2}{2} + \frac{7^2}{2} \cdots\right)$$

all'unità.

Le frazioni continue [2] sono state scoperte dal Cataldi nel suo trattato per trovare le radici quadrate dei numeri, pubblicato a Bologna nel 1613; ma Brouncker sembra sia stato il primo a studiarne le proprietà.

G. Gregory. — *Giacomo Gregory* nacque a Drumoak presso Aberdeen nel 1638 [3] e morì ad Edimburgo nell'ottobre del 1675: fu successivamente Professore a St. Andrews e ad Edimburgo. Nel 1660 pubblicò la sua *Optica Promota*, in cui si descrivono i telescopi a riflessione, conosciuti sotto il suo nome. Nel 1667 pubblicò la sua *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* [4], in cui dimostrò come si possono ottenere le aree del cerchio e dell'iperbole sotto forma di serie infinite; ivi (credo per la prima volta) troviamo una distinzione tra serie convergente e serie divergente. Quest'opera contiene una importante proposizione geometrica, cioè che il rapporto dell'area di qualunque settore circolare a quello dei poligoni regolari inscritti o circoscritti non è esprimibile con un numero finito di termini algebrici. Da

1) Per queste ricerche vedi le memorie inserite nelle *Philosophical Transactions*, Londra, 1668, 1672, 1673 e 1678.

2) Sulla storia delle frazioni continue vedi gli scritti di S. GÜNTHER e A. FAVARO, nel *Bullettino di bibliografia* di BONCOMPAGNI, Roma, 1874, vol. VII, pp. 213, 451, 533.

3) Questa data, accettata generalmente, sembra in contrasto con la notizia, data dal GREGORY stesso, *Exercitationes geometricae*, Londra, 1668, di avere scoperta la quadratura dell'iperbole sino dal 1648, cioè a dieci anni.

4) Cfr. un articolo di G. HEINRICH, in *Bibl. mathém.*, ser. III, tomo II.

ciò egli inferì che la quadratura del cerchio è impossibile; questa conclusione fu accettata da Montucla, ma essa non ha valore alcuno, poichè si può supporre che qualche settore speciale possa essere quadrato e questo particolar settore essere appunto l'intero cerchio. La stessa opera contiene pure il primo enunciato dello sviluppo in serie di sen x, cos x, arc sen x e arc cos x. Essa fu ristampata nel 1668 con una appendice, *Geometriae Pars*, in cui Gregory spiegò in qual modo possono determinarsi i volumi dei solidi di rivoluzione. Nel 1671, o forse anche prima, stabilì il teorema espresso dalla formola:

$$\theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta = \ldots,$$

risultato vero solo se il valore di θ cade fra $-\frac{1}{4}\pi$ e $+\frac{1}{4}\pi$. È questo il teorema su cui sono stati fondati gran parte dei successivi calcoli approssimati di π.

Wren. — *Cristoforo Wren* nacque a Knoyle, nel Wiltshire, il 20 ottobre 1632 e morì a Londra il 15 febbraio 1723. La fama di Wren come matematico è stata superata dalla sua fama di architetto (è noto che a lui devesi la cattedrale di S. Paolo di Londra); ma egli fu Professore Saviliano di astronomia ad Oxford dal 1661 al 1673 e per alcun tempo presidente della Società Reale. Insieme a Wallis ed Huygens studiò le leggi dell' urto dei gravi; scoprì i due sistemi di generatrici dell' iperboloide ad una falda, quantunque sia probabile che egli limitasse la sua attenzione all' iperboloide di rivoluzione [1]). Oltre a ciò pubblicò delle memorie sulla resistenza dei fluidi e sul moto del pendolo. Fu amico di Newton e (come Huygens, Hooke, Halley ed altri) tentò di dimostrare che la forza onde i pianeti si muovono, varia inversamente al quadrato della distanza dal sole.

Wallis, Brounker, Wren e Boyle (l' ultimo si può considerare piuttosto come fisico e chimico che come matematico) furono i principali filosofi, che fondarono la Società Reale di Londra.

1) Vedi le *Philosophical Transactions*, 1669.

Questa nacque dal così detto «collegio indivisibile» di Londra nel 1645; la maggior parte dei suoi membri venne, durante la guerra civile, ad Oxford, ove Hooke, che era allora assistente nel laboratorio di Boyle, si unì alle loro adunanze; la Società fu nominalmente costituita a Londra nel 1660; ma fu eretta in corpo morale il 15 luglio 1662. Si può notare che l'Accademia dei Lincei fu fondata nel 1603, la Francese nel 1666 e quella di Berlino nel 1700.

Hooke. — *Roberto Hooke* nacque a Freshwater il 18 luglio 1638 e morì a Londra il 3 marzo 1703; fu educato a Westminster e nel collegio Christ Church di Oxford; nel 1665 fu nominato Professore di Geometria al Collegio Gresham, posto che occupò sino alla sua morte. Egli è favorevolmente noto per la legge che scoprì sulla tensione esercitata da una funicella tesa, la qual tensione è (entro certi limiti) proporzionale alla sua lunghezza, o in altre parole la tensione è proporzionale allo sforzo. Inventò e studiò il pendolo conico e fu il primo a stabilire esplicitamente che lo studio dei moti dei corpi celesti equivale semplicemente a un problema di dinamica. Egli era geloso, quanto vanitoso ed irritabile, ed accusò Newton ed Huygens di appropriarsi slealmente le sue scoperte. Al pari di Huygens, Wren e Halley, egli tentò di trovare la legge della forza, in virtù della quale i pianeti si muovono intorno al sole e credette essa fosse quella della ragione inversa del quadrato della distanza. Egli, come Huygens, scoprì che le piccole oscillazioni di una molla a spirale sono praticamente isocrone e fu così condotto a raccomandare (probabilmente nel 1658) l' uso delle molle degli orologi pel bilancere; egli aveva un orologio di questo genere, fabbricato in Londra nel 1675, e terminato precisamente tre mesi dopo di quello fabbricato in Parigi sotto la direzione di Huygens.

Collins. — *Giovanni Collins* nacque presso Oxford il 5 marzo 1625 e morì in Londra il 1° novembre 1683; fu uomo di grande ingegno naturale, ma di poco studio. Essendosi dedicato alla matematica, vi dedicò il tempo che aveva disponibile, tenendosi in corrispondenza coi principali matematici della sua epoca, a favore dei quali era sempre pronto a fare qualunque cosa che fosse in suo potere; è stato chiamato — non ingiustamente — il Mersenne inglese. Dobbiamo a lui molte informazioni particolari sulle scoperte del periodo che stiamo studiando [1]).

Pell. — Un altro matematico che dedicò una gran parte del suo tempo a far conoscere le scoperte altrui ed alla corrispondenza coi principali matematici fu *Giovanni Pell.* Egli nacque in Sussex il 1° marzo 1610 e morì a Londra il 1° dicembre 1685. Fece i propri studî nel Collegio della Trinità a Cambridge; in seguito occupò le cattedre di matematica ad Amsterdam e a Breda; poi entrò al servizio della diplomazia inglese; finalmente, nel 1661, si stabilì a Londra ove passò gli ultimi venti anni della sua vita. Le sue opere principali sono un'edizione, con molte aggiunte originali, dell'*Algebra* di Branker e Rhonius, Londra 1668, ed una tavola dei quadrati dei numeri, Londra 1672 [2]).

Sluse. — *Renato Francesco Walther de Sluse* (*Slusius*), canonico di Liegi, nacque il 7 luglio 1622 e morì il 19 marzo 1685 [3]); trovò per la suttangente di una curva $f(x, y) = o$ un'espressione, che è equivalente a $-\dfrac{y\,\dfrac{df}{dy}}{\dfrac{df}{dx}}$; scrisse molti opuscoli, in particolare discusse diffusamente le spirali ed i punti d'inflessione delle curve.

Viviani. — *Vincenzo Viviani*, allievo di Galileo, nacque a Firenze il 5 aprile 1622 e vi morì il 25 settembre 1703; nel 1659

1) Vedi il *Commercium Epistolicum* e S. P. RIGAND, *Correspondence of scientific Men of the Seventeenth Century*, Oxford, 1841.

2) L'equazione indeterminata $t^2 - Du^2 = 1$ porta, senza ragione (ed a quanto sembra per colpa di Eulero), il nome di PELL V. KONEN, *Gesch. der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$, Leipzig, 1891; e due articoli di G. WERTHEIM e G. ENESTRÖM, nella *Bibliotheca mathematica*, serie III, tomo III, pp. 113 e 204. (G. L).

3) Vedi la memoria di C. LE PAIGE nel vol. XVII del *Bollettino di bibliografia* del BONCOMPAGNI, Roma, 1884.

scrisse una divinazione del V libro di Apollonio sulle sezioni coniche [1]) e nel 1701 una dell'opera di Aristeo [2]). Egli espose nel 1701 come un angolo possa trisecarsi mediante un'iperbole equilatera o una concoide. Nel 1692 propose il problema di costruire quattro finestre in una volta emisferica in modo, che la superficie rimanente potesse essere esattamente determinata; problema celebre, le cui soluzioni analitiche furono date da Wallis, Leibniz, David Gregory e Giacomo Bernoulli.

Tschirnhausen. — *Ehrenfreid Walther von Tschirnhausen*, nacque a Kislingswalde il 10 aprile 1631 e morì a Dresda l'11 ottobre 1708. Nel 1682 studiò la teoria delle caustiche per riflessione, o come erano ordinariamente chiamate, catacaustiche, e dimostrò la loro rettificabilità. Questo era il secondo caso, in cui fu determinato l'inviluppo di una retta mobile. Egli costrusse degli specchi ustori di grande potenza. È poi celebre la trasformazione colla quale egli faceva scomparire quanti si vogliano termini intermedi di una data equazione algebrica; essa fu pubblicata negli *Acta Eruditorum* nel 1683.

De la Hire. — *Filippo De la Hire* (o *Lahire*), nacque a Parigi il 18 marzo 1640 e vi morì il 21 aprile 1718; scrisse nel 1673 sui metodi grafici; sulle sezioni coniche nel 1685; una memoria sulle epicicloidi, nel 1694; una sulle *roulettes* nel 1702; e da ultimo un'altra sulle concoidi, nel 1708. I suoi lavori sulle sezioni coniche e sulle epicicloidi sono basati sull'insegnamento di Desargues, del quale era l'allievo favorito. Tradusse pure il trattato di Moscopulo sui quadrati magici e vi aggiunse molti de' teoremi relativi precedentemente noti; questo lavoro fu pubblicato nel 1705 [3]).

1) *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergaei nunc desideratum*, Firenze, 1659.

2) *De locis solidis secunda divinatio, geometrica in quinque libros, injuria temporum amissos, Aristoei senioris geometrae*, che è la più importante delle sue opere, intorno alla quale lavorò quasi quarant'anni.

3) Nel 1698 pubblicò a Parigi *La gnomonique ou méthodes universelles pour tracer des horloges ou cadrans sur toutes les teories astronomiques.*

Roemer. — *Olaf Roemer* nacque ad Aarhuus il 25 settembre 1644 e morì a Copenhagen il 10 settembre 1710; fu il primo a misurare la velocità della luce (1675) per mezzo delle ecclissi dei satelliti di Giove. Egli fece adottare generalmente il cerchio dei passaggi ed il cerchio murale; e fu dietro sua raccomandazione che le osservazioni astronomiche delle stelle furono fatte di poi ordinariamente al meridiano. Fu pure il primo ad introdurre negli osservatori i microscopi micrometrici ed a lettura. Alcuni gli attribuiscono la deduzione, dalle proprietà delle epicicloidi, della forma del dente nelle ruote dentate, più adatta ad assicurare un moto uniforme.

Rolle. — *Michele Rolle* nacque a Ambert l'11 aprile 1652 e morì a Parigi l'8 novembre 1719; scrisse il *Traité d'algèbre*, Paris 1690, che contiene il teorema che porta il suo nome, sulla posizione delle radici di un'equazione. Nel 1691 pubblicò un trattato sulla risoluzione delle equazioni di tutti i gradi tanto determinate che indeterminate [1]), nel 1699 un metodo per risolvere le equazioni indeterminate, poi parecchi altri lavori di minore importanza [2]). Egli sosteneva che il calcolo differenziale, il quale, come vedremo in seguito, era usato verso la fine del XVII secolo, non era altro che una raccolta di sofismi ingegnosi.

1) Vedi l'articolo di F. CAJORI, *On Michel Rolle's book « Methode pour resoudre les égalités » and the history of « Rolles theorem »*, in *Bibl. math.*, ser. III, tomo XI, 1911.

2) Vedi *Mémoires de l'Académie*, 1702, 1703, 1705, 1707, 1713, 1714.

CAPITOLO XVI.

Vita e opere di Newton [1]).

I matematici considerati nel precedente capitolo iniziarono la creazione di quei metodi, che caratterizzano la matematica moderna. Il genio straordinario di Newton gli concesse di perfezionare in pochi anni i più elementari di que' procedimenti: così fece progredire grandemente tutti i rami della matematica del tempo e ne creò anche di nuovi. Newton era contemporaneo ed amico di Wallis, Huygens e di altri matematici menzionati nell'ultimo capitolo; ma, quantunque buona parte del suo lavoro matematico fosse stato fatto tra il 1665 ed il 1686, la parte principale di esso non fu pubblicata, almeno sotto forma di libro, se non alcuni anni dopo.

Mi propongo di analizzare le opere di Newton un po' più a fondo di quelle degli altri matematici, in parte per l'intrinseca straordinaria importanza delle sue scoperte, in parte perchè lo svolgimento della matematica in Inghilterra fu per un secolo interamente nelle mani della scuola Newtoniana.

Isacco Newton nacque nella contea di Lincoln, presso Grantham, il 25 dicembre 1642 e morì a Kensington, sobborgo di Londra, il 20 marzo 1727. Egli studiò nel collegio della Trinità in Cambridge; ivi abitò poi dal 1661 fino al 1696 ed in questo

1) La vita di Newton è narrata, e le sue opere sono analizzate, in *The Memoirs of Newton*, di D. BREWSTER, 2 volumi, Edimburgo, 2ª edizione, 1860. Un'edizione delle più importanti opere di NEWTON fu fatta da S. HORSLEY in 5 volumi, Londra, 1779-85; ed una bibliografia di esse fu pubblicata da G. J. GRAY, Cambridge, 1888; vedi anche il catalogo della raccolta di Portsmouth delle memorie di NEWTON, Cambridge, 1888. Si consulti anche il mio *Essay on the genesis, contents, and history of Newton's Principia*, London, 1893; e G. LORIA, *Newton*, Roma, 1920.

tempo scrisse la massima parte dei suoi lavori di matematica; nel 1696 fu nominato ad un ufficio governativo importante; perciò si recò a Londra, ove risiedette fino alla sua morte. Suo padre, che morì poco prima che nascesse Newton, era un piccolo proprietario affittaiuolo ed era stato stabilito che il figlio avrebbe mandato innanzi la fattoria paterna. Egli andò a scuola a Grantham, ove la sua dottrina ed i suoi progressi in meccanica richiamarono l'attenzione su di lui; come esempio della sua ingegnosità ricorderò che costruì un orologio ad acqua, che misurava esattissimamente il tempo. Nel 1656 ritornò a casa sua ad imparare l'agricoltura sotto la direzione d'un vecchio servo. Ma, invece, Newton occupava la maggior parte del suo tempo a risolvere problemi, facendo esperimenti o inventando modelli di macchine; sua madre osservò queste tendenze e si decise di trovare a suo figlio un'occupazione più adatta a lui; ed uno zio, che era stato pure educato nel collegio della Trinità in Cambridge, consigliò di mandarvi anche il nipote.

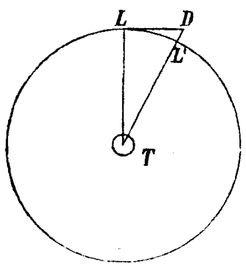
Nel 1661 Newton entrò, come studente sussidiato, nel Collegio della Trinità, dove, per la prima volta in sua vita, si trovò circondato da persone capaci di contribuire allo sviluppo delle sue facoltà intellettuali. Però sembra che abbia sentito poco interesse per la società che lo circondava e per qualsiasi altra occupazione, eccetto che per le scienze e le matematiche. Fortunatamente egli compilò un diario e così noi ci possiamo formare un'idea chiara del corso di istruzione degli studenti più avanzati in una Università inglese di quell'epoca. Egli non aveva studiato niente di matematica prima di entrare in collegio; ma conosceva la *Logica* di Sanderson, che allora veniva letta di frequente come preparazione allo studio della matematica. Al principio del suo primo semestre invernale gli accadde, vagando per la fiera di Stourbridge, di sfogliare un libro d'astrologia, ma non potè intenderlo a cagione della geometria e della trigonometria ivi applicate. Allora comprò un Euclide e fu sorpreso di vedere quanto facili fossero le proposizioni ivi esposte. In seguito lesse la *Clavis* di Oughtred e la *Géometrie* di Cartesio, che egli apprese benissimo da sè, sebbene con qualche difficoltà. L'interessamento ch'egli sentiva per le matematiche lo indusse a scegliere

queste, anzichè la chimica, come oggetto di studio serio. Le altre letture matematiche che fece da studente furono l'*Ottica* di Keplero, le opere del Vieta, le *Miscellanee* del Van Schooten e l'*Arithmetica Infinitorum* del Wallis. Inoltre seguì le lezioni del Barrow. Più tardi, leggendo Euclide più accuratamente, si formò di esso un altro concetto come instrumento di istruzione e soleva esprimere il suo rammarico di non essersi applicato alla geometria prima di volgersi all'analisi algebrica.

Vi è un suo manoscritto datato del 28 maggio 1655, l'anno stesso in cui prese la laurea, che è la prima prova documentata intorno alla sua scoperta delle flussioni. Fu circa nello stesso tempo che egli scoperse il teorema del binomio.

A cagione della peste il Collegio della Trinità si spopolò durante parte degli anni 1655 e 1666, e, in quel tempo, per diversi mesi, Newton stette a casa sua. In questo periodo fece molte brillanti scoperte. Escogitò i principî fondamentali della sua teoria della gravitazione, cioè che ogni molecola di materia attira tutte le altre e congetturò che l'attrazione variasse come il prodotto delle loro masse e inversamente al quadrato della distanza che le separa. Elaborò quasi completamente anche il calcolo delle flussioni; così in un manoscritto datato del 13 novembre 1655 ne fece uso per trovare la tangente e il raggio di curvatura in qualsiasi punto di una curva; e nell'ottobre del 1666 le applicò a diversi problemi relativi alla teoria delle equazioni. Newton comunicò questi risultati ai suoi amici e discepoli a partire dal 1669; ma essi non furono pubblicati per la stampa se non molti anni più tardi. Fu pure, mentre se ne stava a casa sua in questo tempo, ch'egli immaginò alcuni istrumenti per fabbricare lenti di forme speciali, diverse dalla sferica, e forse decompose ne' suoi elementi la luce solare.

Lasciando i particolari minuti e limitandoci alle generalità, sembra che il ragionamento di Newton sulla teoria della gravitazione fosse allora il seguente. Egli sospettò che la forza che trattiene la luna nella sua orbita intorno alla terra fosse la medesima della gravità terrestre; e, per verificare quest'ipotesi, procedette così: egli sapeva che una pietra lasciata cadere vicino alla superficie terrestre, in virtù dell'attrazione della terra (cioè dal proprio peso), era costretta a muoversi colla velocità di 16 piedi al secondo. Ora l'orbita della luna relativamente alla terra è approssimativamente circolare; e ammettendo all'ingrosso che sia tale, egli, conoscendo la distanza della luna, sapeva pure qual fosse la lunghezza del suo percorso; d'altronde conosceva anche il tempo occorrente alla luna per percorrere quello spazio, cioè un mese; poteva quindi facilmente determinare la sua velocità in qualsiasi punto L; e poteva trovare la distanza LD, che avrebbe percorso nel successivo secondo se non fosse stata soggetta all'attrazione terrestre; ma alla fine di quel secondo la luna si trovava in L' e quindi la terra doveva averla spinta, in un secondo lungo lo spazio DL' (ammettendo costante la direzione dell'attrazione terrestre). Ora egli e diversi fisici del tempo avevano dedotto dalla terza legge di Keplero, che l'attrazione della terra sopra un corpo dovesse decrescere, quando il corpo si allontanava dalla terra, in ragione inversa del quadrato della sua distanza dal centro terrestre [1]; se questa era la legge effettiva e se la gravità era la sola forza che trattenesse la luna nella sua orbita, allora DL' doveva stare a 16 piedi in un rapporto inversamente proporzionale a quello del quadrato della distanza della luna dal centro della terra al quadrato del raggio terrestre. Nel 1679, quando Newton ripetè la ricerca, trovò che DL' aveva il valore corrispondente alla fatta ipotesi e la verificazione fu completa; ma nel 1666 la sua estimazione della distanza della luna non era esatta e quando fece il calcolo trovò che DL' era circa di un ottavo minore di ciò che avrebbe dovuto essere secondo la sua ipotesi.



Questa discrepanza non sembra avere scosso la sua fede nella credenza che la gravità si estendesse fino alla luna e variasse inversamente al quadrato della distanza; però, da alcune note di Whiston sopra una conversazione con Newton, sembrerebbe che

1) Un'argomentazione che conduce a questo risultato trovasi esposta più avanti.

questi ne inducesse che qualche altra forza — probabilmente i vortici di Cartesio — agisse tanto sulla luna, quanto sulla gravità. Questa asserzione è confermata dal racconto di tale ricerca fatto dal Pemberton. Sembra inoltre che Newton credesse già fermamente nel principio della gravitazione universale, ossia che ogni molecola attrae ogni altra molecola, e sospettasse che l'attrazione variasse come il prodotto delle loro masse e inversamente al quadrato delle loro distanze; ma è certo che allora egli non sapeva quale sarebbe stata l'attrazione di una massa sferica su ogni punto esterno e non pensava che una molecola fosse attratta dalla terra, come se quest'ultima fosse concentrata in un solo punto materiale situato nel proprio centro.

Al suo ritorno a Cambridge nel 1667 Newton venne eletto *fellow* di quel Collegio e vi prese residenza permanente. In principio del 1669, o forse già nel 1668, fece una revisione delle lezioni del Barrow per incarico di questo. La fine della quattordicesima lezione è indubbiamente scritta dal Newton; ma non si potrebbe ora determinare quanta parte del rimanente sia dovuta ai suoi suggerimenti. Appena finito questo lavoro il Barrow e il Collins gli proposero di pubblicare e corredare di note una traduzione dell'*Algebra* del Kinckhuysen; egli acconsentì, ma a condizione che non vi comparisse il suo nome. Nel 1670 cominciò anche un'esposizione sistematica della sua analisi mediante le serie infinite, il cui scopo era di esprimere l'ordinata di una curva in una serie infinita a termini algebrici, di cui si potesse integrare ogni termine colla regola del Wallis; i relativi risultati erano già stati comunicati al Barrow, al Collins e ad altri nel 1669. Quest'opera non fu mai finita; ma un frammento ne fu pubblicato nel 1711, mentre la sostanza ne era stata stampata come appendice all'*Ottica* nel 1704. Tali lavori furono esclusivamente frutto dei momenti di riposo di Newton, la massima parte del suo tempo in quei due anni essendo stato dedicato alle ricerche ottiche.

Nell'ottobre 1669 il Barrow rinunziò in favore di Newton alla cattedra Lucasiana. Durante questo suo professorato Newton era uso di far lezione pubblicamente una volta per settimana per una mezz'ora o tutt'al più un'ora per volta, nello spazio di ogni semestre, probabilmente dettando le lezioni il più rapidamente possibile; ed in ogni settimana, che seguiva una lezione, dedicava nella sua stanza quattro ore a colloqui con gli studenti che desideravano discutere la materia delle lezioni precedenti. Egli non ripeteva mai un corso, che in generale constava di nove o dieci lezioni, e generalmente le lezioni di uno di essi cominciavano dove il precedente era terminato. Esistono i manoscritti delle sue lezioni durante diciassette dei primi diciotto anni del suo insegnamento.

Quando venne per la prima volta nominato, Newton scelse l'ottica per argomento delle sue lezioni e delle sue ricerche, e, prima che finisse il 1669, aveva elaborati i particolari della sua scoperta della decomposizione mediante un prisma di un raggio di luce bianca in raggi di differenti colori.

La completa spiegazione della teoria dell'arcobaleno derivò da questo ritrovato. Tali scoperte formano l'argomento principale delle lezioni che egli tenne in qualità di professore Lucasiano negli anni 1669, 1670 e 1671. I principali nuovi risultati furono raccolti in una memoria comunicata alla Società Reale nel febbraio 1672 e poi pubblicati nelle *Philosophical Transactions*. Il manoscritto delle sue lezioni originali fu stampato nel 1729 col titolo *Lectiones Opticae*. Quest'opera è divisa in due libri, il primo dei quali consta di quattro parti e il secondo di cinque. La prima parte del primo libro tratta della decomposizione della luce solare, mediante un prisma per effetto della diversa rifrangibilità dei raggi che la compongono, con l'aggiunta di una descrizione degli esperimenti fatti da Newton. La seconda parte contiene l'esposizione del metodo inventato dal Newton per determinare l'indice di rifrazione dei vari corpi; esso consiste nel far passare un raggio a traverso un prisma della sostanza data, in modo che la deviazione sia minima; e Newton dimostra che se l'angolo del prisma è i e la deviazione del raggio δ, l'indice di rifrazione sarà $sen\,\frac{1}{2}\left(i+\delta\right) cosec\,\frac{1}{2}\,i$. La terza parte concerne le rifrazioni prodotte da superficie piane; Newton qui dimostra che se un raggio passa attraverso un prisma colla deviazione minima, l'angolo d'incidenza è uguale all'angolo d'emergenza; questa

parte è in massima consacrata alle soluzioni geometriche di diversi problemi. La quarta parte si riferisce alle rifrazioni prodotte da superficie curve. Il secondo libro tratta della teoria newtoniana dei colori e dell'arco-baleno.

Per una curiosa sequela di casi, Newton non riuscì a correggere l'aberrazione cromatica di due colori mediante una coppia di prismi. Per conseguenza abbandonò la speranza di costruire un telescopio rifrangente che fosse acromatico e invece fece il piano di un telescopio riflettente, probabilmente sul modello di uno piccolo, che aveva costrutto nel 1668. La forma di cui fece uso è quella ancora nota sotto il suo nome; l'idea gliene fu naturalmente suggerita dal telescopio di Gregory. Nel 1672 inventò un microscopio riflettente e alcuni anni dopo il sestante, che fu poi riscoperto da J. Hadley nel 1731.

Le lezioni tenute da Newton dal 1673 al 1683 furono sull'algebra e sulla teoria delle equazioni e saranno analizzate più avanti; ma egli occupò molto del suo tempo in quegli anni in altre ricerche; debbo osservare che per tutta la sua vita Newton deve aver dedicata almeno altrettanta attenzione alla chimica e alla teologia, che alle matematiche, ma i risultati ottenuti non sono d'importanza sufficiente ad aver diritto di esser qui menzionate. La sua teoria dei colori e le conclusioni che trasse dai suoi esperimenti ottici vennero attaccati con grande violenza da Pardies in Francia, dal Linus e dal Lucas a Liegi, da Hooke in Inghilterra e da Huygens a Parigi; ma i suoi oppositori vennero alla fine sconfitti. La corrispondenza che ciò impose a Newton occupò tutto il suo tempo libero dal 1672 al 1675 e gli riuscì estremamente disgustosa. Scrivendo il 9 dicembre 1675 egli dice: «Sono stato tanto perseguitato dalle polemiche sorte dalla mia teoria della luce, che ho biasimato la mia imprudenza per avere abbandonato un bene così sostanziale come la mia tranquillità per correre dietro ad un'ombra». E il 18 novembre 1676 osserva ancora: «Vedo che mi son fatto schiavo della filosofia, ma se mi libero dalla faccenda del signor Linus, darò ad essa risolutamente un eterno addio, eccezion fatta per ciò che faccio per mia particolare soddisfazione o che farò pubblicare dopo la mia morte; imperocchè mi accorgo che un uomo deve o risolversi a non metter fuori niente di nuovo, o divenire uno schiavo per difenderlo ». Lo sragionevole dispiacere di vedere poste in dubbio le sue conclusioni o nel trovarsi trascinato a scrivere le lettere a proposito di esse costituisce un tratto saliente dell' indole del Newton.

Newton studiò profondamente il problema del come in realtà fossero prodotti i fenomeni luminosi e verso la fine del 1675 aveva elaborata la teoria corpuscolare o dell'emissione e dimostrato come essa spiegasse tutti i fenomeni dell'ottica geometrica, quali la riflessione, la rifrazione, i colori, la diffrazione, ecc. Per giungere a tale risultato egli fu però obbligato di aggiungere una condizione alquanto artificiosa, cioè che le molecole sono alternativamente atte alla facile riflessione ed alla facile rifrazione, per effetto dell'etere che riempie lo spazio. È noto che tale teoria è oggi insostenibile, ma bisogna notare che Newton l'enunciò sotto forma di ipotesi da cui si possono dedurre certi risultati; sembra anzi che egli ritenesse la teoria ondulatoria intrinsecamente più probabile; ma fu la difficoltà di spiegare la diffrazione in base a tale teoria che lo spinse a formulare un'altra ipotesi.

La teoria corpuscolare di Newton fu esposta in una memoria comunicata alla Società Reale nel dicembre 1675, e sostanzialmente riprodotta nella sua *Ottica* pubblicata nel 1704. In quest' ultima opera egli espose particolareggiatamente la sua teoria degli accessi di facile riflessione e di facile trasmissione e dei colori delle lamine (libro II, parte IV) e le sue osservazioni sull' inflessione della luce (libro III).

Due lettere scritte da Newton nel 1676 sono abbastanza interessanti per venire qui citate. Il Leibniz, ch'era stato a Londra nel 1673, aveva comunicato alla Società Reale alcuni risultati che credeva nuovi, ma che, come gli fu fatto notare, erano stati precedentemente dimostrati dal Mouton. Ciò portò ad una corrispondenza coll'Oldenburg, segretario di quella Società. Nel 1674 il Leibniz scrisse dicendo che possedeva « metodi generali analitici derivanti dalle serie infinite ». L'Oldenburg, replicando, gli disse che tali serie erano state adoperate da Newton e Gregory nelle loro opere. In risposta ad una domanda di schiarimenti, il Newton scrisse il 13 giugno 1676, dando un breve resoconto del suo metodo ed aggiungendo lo sviluppo in serie della potenza

di un binomio (cioè il « teorema del binomio ») e di arc sen x, donde deduceva quello di sen x; sembra questo essere il primo esempio conosciuto di una inversione di serie. Vi inserì anche un'espressione per la rettificazione di un arco elittico mediante una serie infinita.

Il Leibniz scrisse il 27 agosto chiedendo maggiori particolari; e il Newton in una lunga ed interessante replica, in data 24 ottobre 1676, mandata per il tramite dell'Oldenburg, diede conto della via, per la quale era giunto ad alcuni dei suoi risultati.

In questa lettera il Newton comincia dicendo che aveva in generale adoperati tre metodi per lo sviluppo in serie. Al primo era giunto studiando il metodo d' interpolazione, col quale il Wallis aveva trovato l'espressione per le aree del cerchio e dell'iperbole. Così, considerando le serie di espressioni $(1 - x^2)^{\frac{0}{2}}$, $(1 - x^2)^{\frac{2}{2}}$, $(1 - x^2)^{\frac{4}{2}}$..., egli dedusse, mediante interpolazioni, la legge che collega i successivi coefficienti negli sviluppi di $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$.... e quindi, per analogia, ottenne l'espressione del termine generale nello sviluppo della potenza di un binomio, ossia il « teorema del binomio ». Egli dice che per giungere a ciò prese le mosse dalla formazione del quadrato dello sviluppo di $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, che doveva ridursi a $1 - x^2$; e procedette similmente negli altri casi. Poi provò il teorema nel caso di $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, estraendo la radice quadrata di $1 - x^2$, *more arithmetico*. Adoperò pure le serie per esprimere le aree del cerchio e dell' iperbole in serie infinite e trovò che i risultati erano identici a quelli a cui era giunto con altri mezzi.

Stabilito questo risultato, egli abbandonò il metodo d' interpolazione delle serie e impiegò il suo teorema del binomio per esprimere (quando era possibile) l'ordinata di una curva in una serie infinita di potenze ascendenti dell'ascissa, e così, col metodo del Wallis, ottenne l'espressione in serie infinita delle aree e degli archi di curve nel modo descritto nell'appendice alla sua *Ottica* e nel suo scritto *De Analysi per Equationes Numero*

Terminorum Infinitas. Egli afferma di avere impiegato questo secondo metodo prima della peste del 1665-66 e continua dicendo, che fu allora obbligato a lasciare Cambridge e poscia (presumibilmente al suo ritorno in quella città) cessò di seguire queste idee, perchè trovò che Niccolò Mercator ne aveva adoperate alcune nella sua *Logarithmotechnia* pubblicata nel 1668; suppose quindi che il rimanente fosse già stato o sarebbe stato trovato prima che egli stesso fosse in grado di pubblicare le proprie scoperte.

Newton spiega poi che possedeva anche un terzo metodo, del quale, dice, aveva mandato un cenno al Barrow e al Collins verso il 1669, illustrandolo con applicazioni alle aree, alla rettificazione, alla cubatura, ecc. Era questo il metodo delle flussioni; ma Newton non ne dà qui veruna descrizione, sebbene aggiunga qualche illustrazione del suo uso. La prima concerne la quadratura della curva rappresentata dall'equazione

$$y = ax^m (b + cx^n)^p;$$

che egli dice potersi effettuare mediante la somma di $\frac{m+1}{n}$ termini, quando $\frac{m+1}{n}$ sia positivo ed intero, e che egli negli altri casi ritiene non potersi effettuare che con una serie infinita [1]). Egli dà anche un elenco d'altre forme, immediatamente integrabili, di cui le principali sono:

$$\frac{x^{mn-1}}{a + bx^n + cx^{2n}}, \quad \frac{x^{\left(m+\frac{1}{2}\right)n-1}}{a + bx^n + cx^{2n}},$$

$$x^{mn-1}(a + bx^n + cx^{2n})^{\pm\frac{1}{2}},$$

$$x^{mn-1}(a + bx^n)^{\pm\frac{1}{2}}(c + dx^n)^{-1},$$

$$x^{mn-1}(a \div bx)^n (c + dx^n)^{-\frac{1}{2}};$$

1) È noto che invece l'integrazione è possibile anche quando $p + (m + 1) : n$ sia intero.

dove m è positivo e intero ed n è un numero qualunque. Finalmente nota che l'area di qualsiasi curva può facilmente determinarsi in modo approssimativo col metodo dell' interpolazione descritto più oltre, nel suo *Methodus differentialis.*

Alla fine della sua lettera Newton fa allusione alla soluzione del «problema inverso delle tangenti», argomento sul quale Leibniz aveva chiesto schiarimenti. Dà le formole per invertire qualsiasi serie, ma dice che, oltre queste formule, egli possiede due metodi per risolvere le questioni consimili, che pel momento non indica che con un anagramma, che può leggersi come segue: «Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua caetera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis, ad eruendos terminos assumptae seriei».

Anche in questa lettera egli fa comprendere che è seccato dalle domande che gli si fanno e dalle controversie che sorgono a proposito di ogni nuovo argomento da lui trattato, ciò che dimostra la sua inconsideratezza nel pubblicare «quod umbram captando eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem».

Leibniz, nella sua risposta in data 21 giugno 1676, spiega il suo metodo per tracciare le tangenti alle curve, procedendo, egli dice, «non mediante flussioni di linee ma per differenze di numeri»; e introduce la sua notazione dx e dy per le differenze infinitesimali fra le coordinate di due punti consecutivi di una curva. Egli dà pure una soluzione del problema di trovare una curva, la cui suttangente sia costante, il che mostra che sin d'allora sapeva integrare.

Nel 1679 l' Hooke, dietro richiesta della Società Reale, scrisse a Newton, esprimendo la speranza che avrebbe fatto ulteriori comunicazioni alla Società e informandolo di varî fatti allora di recente scoperti. Newton rispose dicendo che aveva abbandonato lo studio della filosofia, ma aggiunse che il moto quotidiano della terra poteva dimostrarsi sperimentalmente, osservando la deviazione dalla perpendicolare di una pietra, lasciata cadere a terra da un'altezza, esperimento che fu poi fatto dalla Società e riuscì. L' Hooke nella sua lettera menzionava le ricerche geodetiche del Picard, nelle quali era adoperato un valore sostanzialmente esatto per il raggio della terra. Ciò condusse Newton a ripetere coi dati del Picard i suoi calcoli del 1666 sull' orbita lunare, e così verificò la propria ipotesi che la gravità si estendesse fino alla luna e variasse inversamente al quadrato della distanza. Egli passò poi a considerare la teorica generale del moto di un punto per effetto di una forza centripeta, cioè diretta ad un punto fisso e dimostrò che il raggio vettore descrive aree eguali in tempi eguali. Dimostrò poi che se un'ellisse viene descritta intorno ad un fuoco sotto l'azione d' una forza centripeta, la legge è quella dell' inverso del quadrato della distanza, e che reciprocamente l'orbita di una molecola sotto l' influenza di una simile forza è una conica (può darsi la ritenesse sempre un'ellisse). Seguendo la norma di non pubblicare niente di quanto potesse condurlo a una controversia scientifica, egli si limitò a registrare questi resultati nel suo libro di appunti e soltanto una domanda specifica indirizzatagli cinque anni dopo lo portò a pubblicarli.

L'*Aritmetica universale*, che tratta dell'algebra, della teoria delle equazioni e di svariati problemi, contiene l'essenza delle lezioni fatte da Newton durante gli anni 1673-1683. Ne esiste ancora di essa il manoscritto originale; Whiston [1]) ottenne con qualche riluttanza da Newton il permesso di stamparla, e fu pubblicata nel 1707. Fra diversi nuovi teoremi su vari punti dell'algebra e della teoria delle equazioni, Newton enuncia in quest'opera i seguenti importanti risultati. Spiega che l'equazione, le cui radici rappresentino la soluzione di un dato problema, avrà tante radici quanti sono i diversi casi possibili; ed esamina come accada che l'equazione alla quale un problema conduce, possa contenere radici, che non soddisfacciano il quesito originale.

---

1) Guglielmo Whiston, nato nella Contea di Leicester, il 9 dicembre 1667, educato nel Collegio Clare a Cambridge, del quale fu poi *fellow*, e morto in Londra il 22 agosto 1752, scrisse diverse opere astronomiche. Ebbe, come sostituto di Newton, la Cattedra Lucasiana dal 1699 al 1703, nel quale anno gli successe come professore, ma venne espulso nel 1711, in massima parte per ragioni teologiche. Gli successe Niccolò Saunderson, matematico cieco, nato nella Contea di York nel 1682 e morto al Collegio di Cristo, a Cambridge, il 19 aprile 1739.

Estende a radici immaginarie la regola dei segni del Cartesio. Adopera il principio di continuità a spiegare come due radici reali e disuguali possano divenire immaginarie, passando per l'eguaglianza, e dimostra che le radici immaginarie debbono sempre trovarsi a coppie. Newton dà qui anche le regole per trovare un limite superiore delle radici positive di un'equazione numerica e determinare valori approssimati per le radici di essa. Enuncia inoltre il teorema noto col suo nome (benchè scoperto prima da A. Girard) per trovar la somma delle n^{me} potenze delle radici di un'equazione, e pone così il fondamento della teoria delle funzioni simmetriche di queste radici.

Il teorema più interessante contenuto in quest'opera è il tentativo da lui fatto di trovare una regola (analoga a quella del Cartesio per le radici reali) per determinare il numero delle radici immaginarie di un'equazione. Egli sapeva che il resultato da lui ottenuto non era vero in generale, ma non dette alcuna dimostrazione e non spiegò quali fossero le eccezioni alla regola. Il suo teorema suona così: Si supponga di avere un'equazione dell'n^{mo} grado, ordinata secondo le potenze discendenti di x (essendo positivo il coefficiente di x^n) e si suppongano formate le $n+1$ frazioni

$$1,\ \frac{n}{n-1}\,\frac{2}{1},\ \frac{n-1}{n-2}\,\frac{3}{2},\ \ldots,\ \frac{n-p+1}{n-p}\,\frac{p+1}{p},\ \ldots,\ \frac{2}{1}\,\frac{n}{n-1},\ 1$$

e scritte sotto i termini corrispondenti dell'equazione; allora, se il quadrato di qualsiasi termine moltiplicato per la frazione corrispondente è maggiore del prodotto dei due termini contigui, si metta un segno $+$ al di sopra, altrimenti si metta un segno $-$; inoltre si metta un segno $+$ tanto sopra il primo quanto sopra l' ultimo termine. Si considerino ora due termini consecutivi qualunque dell' equazione originale e i due simboli scritti al di sopra di essi. Allora possono accadere i quattro casi seguenti:

(α) termini dello stesso segno e simboli dello stesso segno;
(β) termini dello stesso segno e simboli di segno opposto;
(γ) termini di segni opposti e simboli dello stesso segno;
(δ) termini di segni opposti e simboli di segni opposti.

Si dimostra allora che il numero delle radici negative non eccederà il numero dei casi (α) e il numero delle radici positive non eccederà il numero dei casi (γ); e perciò che il numero delle radici immaginarie non è minore di quello dei casi (β) e (δ). In altre parole il numero dei cambiamenti di segni nella serie dei simboli scritti al di sopra dell'equazione è il limite inferiore del numero delle radici immaginarie. Newton però asseriva che « in generale voi potete sapere quante sono le radici impossibili » contando i cambiamenti di segno nella serie di simboli formata come sopra; cioè egli pensava che in generale il numero effettivo di radici positive, negative e immaginarie potesse ottenersi con questa regola e non soltanto il limite superiore o inferiore di tali numeri. Ma, sebbene sapesse che la regola non era generale, non potè trovare (o almeno non istabilì) quali ne fossero le eccezioni: questo teorema fu in seguito studiato dal Campbell, dal Maclaurin, da Eulero e da altri; finalmente nel 1865 il Sylvester riuscì a dimostrarlo in generale [1]).

Nell'agosto 1684, Halley andò a Cambridge per consultare Newton sulla legge di gravitazione. Hooke, Huygens, Halley e Wren avevano tutti congetturato che la forza d'attrazione del sole o della terra sopra una molecola esterna variasse in ragione inversa del quadrato della distanza. Sembra che essi avessero dimostrato, indipendentemente l' uno dall'altro, che se le conclusioni di Keplero erano rigorosamente vere, del che non erano perfettamente sicuri, la legge dell' attrazione dovesse esser quella del quadrato delle distanze. Probabilmente il loro ragionamento era il seguente: Sia v la velocità d' un pianeta, r il raggio della sua orbita supposta circolare e T il suo tempo periodico, allora $v = 2\pi r : T$. Ma, se f è l'accelerazione verso il centro del cerchio, abbiamo $f = v^2 : r$. Quindi, sostituendo per v il valore scritto sopra, $f = 4\pi^2 r : T^2$. Ora, per la terza legge di Keplero, T^2 varia proporzionalmente ad r^3; quindi f è inversamente proporzionale a r^3. Essi però non erano capaci di dedurre da quella legge quali fossero le orbite dei pianeti. Halley dichiarò che le loro investigazioni erano arrestate dalla loro incapacità a risolvere questo problema e chiese a Newton se potesse trovare quale sarebbe stata l'orbita d' un pianeta, supposto che la legge dell'attrazione fosse quella dell' inverso del quadrato. Newton subito rispose che era un' ellisse e promise di riscrivere e di mandare la dimostrazione da lui trovata nel 1679. La inviò infatti nel novembre del 1684.

1) Vedi i *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1865, vol. I, n. 2.

Istigato da Halley, Newton ritornò allora sopra il problema della gravitazione e, prima dell'autunno 1684, aveva elaborata la materia delle proposizioni 1-19, 21, 30, 32-35 del I libro dei *Principia*. Queste, colle note sulle leggi del moto e vari lemmi, erano pronti per le sue lezioni del semestre autunnale del 1684.

Nel novembre Halley ricevette la promessagli comunicazione di Newton la quale probabilmente consisteva nella sostanza delle proposizioni 1 e 11 dei *Principia*, nonchè della proposiz. 17, oppure del corollario della proposizione 13; allora Halley ritornò a Cambridge, dove vide « un curioso trattato, *De Motu*, preparato fin dall'agosto ». Molto probabilmente questo conteneva gli appunti manoscritti di Newton delle lezioni citate sopra: tali appunti trovansi ora nella biblioteca universitaria di Cambridge col titolo *De Motu corporum*. Halley implorò che si pubblicassero i resultati ottenuti e finalmente ricevette la promessa che sarebbero stati mandati alla Società Reale; infatti le vennero comunicati non più tardi del febbraio 1685, come costituenti la memoria *De Motu*, che abbraccia la sostanza delle seguenti proposizioni dei *Principia*, libro I: 1, 4, 6, 7, 10, 11, 15, 17, 32; libro II: 2, 3, 4.

Sembra esser anche dovuto all' influenza e al tatto spiegato da Halley in questa visita del novembre 1684, se Newton prese a risolvere il problema generale della gravitazione e s' impegnò a pubblicare i propri resultati, i quali sono quelli contenuti nei *Principia*. Fin allora Newton non aveva determinata l'attrazione di un corpo sferico sopra un punto esterno, nè aveva calcolato i particolari dei moti dei pianeti riguardando le parti del sistema solare come punti. Il primo problema fu da lui risoluto nel 1685, probabilmenete in gennaio o in febbraio. « Non appena » (cito il discorso tenuto dal dott. Glaisher pel bicentenario della pubblicazione dei *Principia*), « Newton ebbe dimostrato questo superbo teorema — e sappiamo dalle sue proprie parole che egli non s'aspettava affatto un così bel resultato, prima che emergesse dal suo studio matematico — che tutto il meccanismo dell' universo subito gli si stese dinanzi. Quando egli scoperse i teoremi che formano le prime tre parti del libro I, quando le espose nelle sue lezioni del 1684 egli non sapeva che il sole e la terra esercitassero le loro attrazioni come se fossero dei semplici punti. Quanto diverse debbono esser sembrate queste proposizioni agli occhi di Newton, quando egli constatò che i risultati ottenuti, che aveva creduti veri soltanto approssimativamente, se applicati al sistema solare, erano realmente esatti! Fino allora essi erano stati ritenuti veri solo riguardando il sole come un punto paragonato alla sua distanza dalla luna — distanza che equivale all' incirca a sessanta volte il raggio terrestre —; ma ora erano dimostrate matematicamente vere, prescindendo soltanto dalla lieve deviazione dalla forma perfettamente sferica del sole, della terra e dei pianeti. Noi possiamo immaginarci l'effetto di questo subitaneo passaggio dall' approssimazione all' esattezza come uno stimolo alla mente di Newton per sempre maggiori conati. Era adesso in sua facoltà di applicare l'analisi matematica con precisione assoluta ai problemi reali dell'astronomia ».

Dei tre principî fondamentali applicati nei *Principia* possiamo dire che il concetto, che ogni particella attrae ogni altra particella nell' universo, si formò almeno fino dal 1666; la legge di un'equabile descrizione di aree, le sue conseguenze e il fatto che se la legge dell'attrazione era quella del quadrato inverso, l'orbita di una particella intorno ad un centro di forza doveva essere una conica, furono dimostrate nel 1679; e finalmente la scoperta che una sfera, la cui densità in qualsiasi punto dipende solo dalla distanza dal centro, attrae un punto esterno come se tutta la massa fosse riunita al suo centro, fu fatta nel 1685. E appunto quest' ultima scoperta gli diè la possibilità di applicare i primi due principí ai fenomeni dei corpi di dimensione finita.

L'abbozzo del primo libro dei *Principia* fu terminato prima dell'estate del 1685, ma le correzioni e le aggiunte richiesero qualche tempo e il libro non fu presentato alla Società Reale che il 28 aprile 1686. Questo libro è dedicato alla considerazione del moto di atomi o di corpi nello spazio libero o in orbite note, o sotto l'azione di forze note, o sotto la loro mutua attrazione; ed in particolare Newton indica come possano essere calcolati gli effetti di forze perturbatrici. In esso Newton generalizza pure la legge dell'attrazione affermando che ogni particella di materia nell' universo attrae ogni altra particella con una forza, la quale varia direttamente come il prodotto delle lor masse e inversamente al quadrato delle loro distanze; e di qui deduce la legge dell' attrazione per i nuclei sferici di densità costante. Forma la prefazione del libro un' introduzione alla scienza della dinamica, che definisce i limiti dell' investigazione matematica. L'obbietto di essa, egli dice, è di applicare le matematiche ai fenomeni della natura; fra questi il moto è uno dei più importanti; ora il moto è l'effetto della forza, e sebbene si ignori quale sia la natura o l'origine della forza, pure molti dei suoi effetti possono misurarsi; e questi formano appunto l'argomento dell'opera.

Il II libro dei *Principia* fu terminato verso l'estate del 1686. Esso tratta del moto in un mezzo resistente e dell' idrostatica e dell' idrodinamica con applicazioni speciali alle onde, alle maree e all'acustica. Newton lo termina dimostrando, che la teoria cartesiana dei vortici era incompatibile tanto coi fatti noti, quanto con le leggi del moto.

I nove o dieci mesi successivi furon dedicati alla redazione del III libro. Probabilmente per questo Newton non aveva in origine alcun materiale pronto. Comincia col discutere se e quanto sia giustificabile il fabbricare ipotesi o teorie per spiegare i fenomeni noti. Seguita applicando i teoremi del I libro ai fenomeni capitali del sistema solare e determinando le masse e le distanze dei pianeti nonchè (tutte le volte che esistevano dati sufficienti) dei loro satelliti. In particolar modo sono minutamente elaborati il moto della luna, le varie ineguaglianze di esso e la teoria delle maree. Newton studia anche la teoria delle comete, mostra che appartengono al sistema solare, spiega come da tre osservazioni possa esserne determinata l'orbita e illustra i suoi risultati riferendosi a certe speciali comete. Il III libro, come lo abbiamo, è poco più che uno schizzo di ciò che Newton si era proposto finalmente di compiere; lo schema originale è fra le «memorie di Portsmouth », ma i suoi appunti mostrano che continuò a lavorarvi per vari anni dopo la pubblicazione della prima edizione dei *Principia*: le più interessanti fra le sue note son quelle nelle quali, applicando le flussioni, egli ha portato i suoi risultati al di là del punto, sino al quale poteva giungersi geometricamente [1]).

Le dimostrazioni in tutta l'opera sono geometriche, ma ai lettori ordinari son rese più difficili del necessario dalla mancanza di illustrazioni o di spiegazioni, nonchè dal fatto che non vien data alcuna indicazione del metodo, col quale Newton era giunto ai suoi risultati. La ragione della forma geometrica scelta, sembra essere stata, che il calcolo infinitesimale era allora sconosciuto; e se Newton lo avesse adoperato nella dimostrazione di resultati essenzialmente opposti alla filosofia prevalente d'allora, la controversia circa la verità di questi risultati sarebbe stata inceppata da una disputa riguardo alla validità dei metodi usati per stabilirli. Egli perciò presentò tutti i ragionamenti in una forma geometrica, la quale, se fosse meno concisa, riuscirebbe intelligibile a tutti gli studiosi di matematiche. Egli seguì così strettamente le linee della geometria greca, che usò costantemente metodi grafici e rappresentò le forze, le velocità e le altre grandezze, seguendo il metodo euclideo, mediante rette (p. es. lib. I, lemma 10) e non in base ad un certo numero di unità. Quest' ultimo metodo moderno era stato introdotto dal Wallis e deve essere stato familiare a Newton. Effetto dell'essersi Newton rigorosamente confinato entro la geometria classica è che i *Principia* sono scritti in una lingua arcaica, sebbene non caduta totalmente in disuso.

L'adozione dei metodi geometrici nei *Principia* a scopo di dimostrazione non indica da parte di Newton una preferenza per la geometria di fronte all'analisi come istrumento di ricerca; imperocchè è noto che Newton impiegò il calcolo flussionale per primo nella ricerca di alcuni dei teoremi e specialmente di quelli verso la fine del libro I e nel II; ed infatti una delle più importanti applicazioni di questo calcolo trovasi nel secondo lemma del libro II. Ma è pur giusto osservare che quando fu pubblicato e per circa un secolo dopo nè il calcolo differenziale, nè il flussionale erano pienamente maturi, nè possedevano quella superiorità che hanno ora sopra il metodo da lui adottato; anzi è da meravigliarsi che quando Newton impiegò il calcolo, potesse farlo con tanto buon esito. L'abilità mostrata da Newton nel tradurre in pochi mesi teoremi così numerosi e tanto complessi nel linguaggio della geometria di Archimede e di Apollonio, non trova riscontro, a mio avviso, nella storia delle matematiche.

1) Per un sommario più completo dei *Principia* vedi il mio *Essay on the genesis, contents, and history of Newton's Principia*, Londra, 1893.

La stampa dei *Principia* procedè lentamente e l'opera non fu pubblicata prima dell'estate del 1687. Tutta la spesa fu sopportata dall' Halley, il quale ne corresse anche le bozze e mise in disparte i propri studî per curarne la stampa. La concisione, la mancanza di illustrazioni e l' indole sintetica del libro restrinsero il numero di coloro che potevano apprezzarne il valore; e sebbene quasi tutti i critici competenti ammettessero la validità delle conclusioni, passò qualche tempo prima che l'opera influisse sulle opinioni comuni dei dotti. Inclinerei a dire (ma le opinioni su questo punto non sono concordi) che nei dieci anni che seguirono la sua pubblicazione, essa fu generalmente accolta nella Gran Bretagna come recante un'esatta esposizione delle leggi dell' universo; e similmente venne accolta circa nei primi venti anni sul continente, eccettuata la Francia, dove l' ipotesi cartesiana mantenne il proprio terreno, finchè Voltaire nel 1738 non assunse il patrocinio della teoria Newtoniana.

Il manoscritto dei *Principia* fu terminato verso il 1686. Newton dedicò il resto di quell'anno al suo scritto sull'ottica fisica, di cui la maggior parte concerne la diffrazione.

Nel 1687 Giacomo II, avendo tentato di costringere l'Università di Cambridge ad ammettere come « maestro d'arti (M.A.) » un prete cattolico romano, che rifiutava di prestare i giuramenti di supremazia e di sudditanza, Newton prese una parte eminente nella resistenza contro la illegale intromissione del re e fu membro della deputazione mandata a Londra a difendere i diritti di quell' Università. La parte attiva presa da lui in questa faccenda lo fece eleggere nel 1689 a rappresentante dell' Università stessa in

Parlamento. Questo durò tredici mesi soltanto e, quando venne sciolto, Newton rinunziò al suo seggio. Fu poscia rieletto nel 1701, ma non prese mai parte preponderante nella politica.

Ritornando a Cambridge nel 1690 riprese i suoi studî matematici e la sua corrispondenza, ma probabilmente non fece lezione. Le due lettere al Wallis, nelle quali spiega il suo metodo delle flussioni e delle fluenti, vennero scritte nel 1692 e pubblicate nel 1693. Verso la fine del 1692 e per i due anni successivi, Newton ebbe una lunga malattia, soffrendo d' insonnia e d' irritabilità nervosa generale [1]). Forse egli non riacquistò mai del tutto la sua elasticità di mente; sebbene dopo ristabilito mostrasse la medesima potenza nel risolvere qualsiasi questione propostagli, cessò da quel momento di fare ricerche originali di propria iniziativa e fu un po' difficile indurlo a dedicare la propria attività ad argomenti nuovi.

Nel 1694 il Newton cominciò a raccoglier dati connessi colle irregolarità del moto della luna allo scopo di rivedere la parte dei *Principia*, che trattavano di quell'argomento. Per rendere le osservazioni più accurate egli spedì una tavola di correzioni per la rifrazione, da lui in precedenza calcolata, al Flamsteed [2]). Questa non fu pubblicata fino al 1721, quando l' Halley la comunicò alla Società Reale. I calcoli originali di Newton e gli scritti connessi con essa sono nella collezione di Portsmouth e mostrano che Newton la ottenne trovando, per mezzo di quadrature, la traiettoria di un raggio, in un modo che equivale alla integrazione d' un'equazione differenziale. Come riprova del genio di Newton, posso citare che nel 1754 Eulero non riuscì a risolvere lo stesso problema; nel 1782 il Laplace diede una regola per costrurre

---

1) Riguardo a questo ed altri punti importanti della *Vita di Newton* si veggano i vari articoli di J. B. Biot, raccolti nel tomo I dei *Mélanges scientifiques et littéraires*, Paris, 1858.

2) Giovanni Flamsteed, nato a Derby nel 1646 e morto a Greenwich nel 1719, fu uno degli astronomi più distinti di quell'epoca e il primo astronomo reale. Oltre i lavori molto pregevoli sull'astronomia, inventò il sistema (pubblicato nel 1680) di disegnare carte, proiettando la superficie della sfera sopra un cono ad essa tangente, che deve poi essere sviluppato. La sua vita, scritta da R. F. Baily, fu pubblicata a Londra nel 1835, ma varie affermazioni in essa contenute debbono essere lette parallelamente a quelle che si trovano nella *Vita di Newton* del Brewster. Al Flamsteed successe come astronomo reale Edmondo Halley.

una tavola simile e i suoi resultati concordano sostanzialmente con quelli del Newton.

Io non credo che Newton avrebbe prodotto ancora molto lavoro originale dopo la sua malattia; ma la sua nomina nel 1696 ad ispettore e la sua promozione nel 1699 a direttore della zecca con uno stipendio di 1500 sterline all' anno, pose fine alle sue investigazioni scientifiche, sebbene, soltanto dopo, molti dei suoi studî precedenti venissero pubblicati in forma di libri. Nel 1696 andò a Londra; nel 1701 si dimise dalla cattedra Lucasiana; e nel 1703 fu eletto presidente della Società Reale.

Nel 1704 il Newton pubblicò la sua *Ottica*, che contiene i risultati degli scritti già citati. Alla prima edizione di questo libro furono unite due opere minori, che non hanno nesso speciale con la teoria della luce, poichè uno è sulle cubiche piane e l'altro sulla quadratura di curve e sulle flussioni. Entrambe erano contenute in vecchi manoscritti, molto familiari ai suoi amici e ai suoi discepoli; ma ivi vennero pubblicati *urbi et orbi* per la prima volta.

La prima di queste appendici è intitolata *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* [1]); l'oggetto sembra essere d' illustrare l' uso della geometria analitica; e poichè l'applicazione di questa alle coniche era ben nota, Newton scelse la teoria delle cubiche.

Egli comincia con alcuni teoremi generali e classifica le curve secondo che le loro equazioni sono algebriche o trascendenti: le prime essendo tagliate da una linea retta in un numero di punti (reali o immaginari) eguale al grado della curva, le altre, essendo tagliate da una retta, in un numero infinito di punti. Newton mostra poi che molte delle più importanti proprietà delle coniche hanno le loro analoghe nella teoria delle cubiche e studia la teoria degli asintoti e i diametri curvilinei.

Premessi questi teoremi generali, comincia l'esame particolareggiato delle cubiche col notare che una cubica deve avere almeno un punto reale all' infinito. Se l'asintoto, o tangente in questo punto, sta a distanza finita, lo si può prendere come asse

---

1) Su questa opera e sulla relativa bibliografia, vedi una mia memoria nel *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1891, vol. XXII, pp. 140-143.

delle y. Questo asintoto taglia la curva in tre punti in tutto, dei quali due almeno sono all' infinito. Se il terzo punto è a distanza finita, allora (per uno dei nuovi teoremi generali sugli asintoti) l'equazione della curva può scriversi nella forma

$$xy^2 + hy = ax^3 + bx^2 + cx + d\,;$$

allora gli assi delle x e y son gli asintoti dell' iperbole, che è il luogo di tutti i punti di mezzo delle corde della cubica parallele all'asse della y; se invece il terzo punto nel quale l'asintoto taglia la curva è anch'esso all' infinito, l'equazione può essere scritta nella forma

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Newton considera poi il caso in cui la tangente nel punto reale all' infinito non è a distanza finita. Una parallela alla direzione nella quale la curva va all' infinito può esser presa come asse delle y. Ciascuna di queste parallele taglierà la curva in tre punti, uno dei quali è per ipotesi all' infinito, ed uno, necessariamente, a distanza finita. Egli mostra allora che, se l'altro punto nel quale questa linea taglia la curva sta a distanza finita, l'equazione può essere scritta nella forma

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

mentre se è all' infinito deve scriversi

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

L'equazione di ogni cubica è dunque riducibile ad una di queste quattro forme canoniche. Ognuna di queste è poi trattata in particolare, ed è completamente studiata la possibilità dell'esistenza di punti doppi, di ovali isolate ecc. Il risultato finale è che esistono, per le cubiche, in tutto settantotto forme possibili. Veramente Newton ne enumerò sole settantadue; quattro delle rimanenti furon avvertite dallo Stirling nel 1717, una da

Nicole nel 1731 ed una da Nicolò Bernoulli, circa nello stesso tempo.

Nel corso dell'opera Newton stabilisce il notevole teorema che come la proiezione di un cerchio (da un punto luminoso, sopra un piano), dà origine a tutte le coniche, così le proiezioni delle curve rappresentate dall'equazione $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dànno tutte le cubiche. Questo enunciato rimase come un enigma insoluto fino al 1731, quando Nicole e Clairaut ne diedero dimostrazioni; migliore dimostrazione è quella data dal Murdoch nel 1740, la quale si basa sulla classificazione di queste curve in cinque specie, secondo che i loro punti d' intersezione con l'asse delle x sono reali e distinti, o reali e due di essi coincidenti (due casi), o reali e tutti coincidenti, o due immaginari ed uno reale.

Nel medesimo opuscolo Newton tratta dei punti doppi a distanza finita ed all' infinito, della descrizione di curve soddisfacenti le condizioni date e della soluzione grafica di problemi mediante l' uso delle curve.

La seconda appendice all'*Ottica* è intitolata *De Quadratura Curvarum*. La maggior parte di essa era stata comunicata al Barrow nel 1668 o nel 1669 e probabilmente era familiare, da allora in poi, ai discepoli ed agli amici di Newton; essa consta di due parti.

Il nocciolo della prima parte consiste nel metodo di Newton per effettuare la quadratura e la rettificazione delle curve per mezzo di serie infinite; è degna di nota perchè contiene il primo uso nella stampa di indici alle lettere ed anche la prima dimostrazione stampata del teorema del binomio; ma queste novità non sono introdotte che incidentalmente. L'oggetto principale è di dare le regole per sviluppare una funzione di x in una serie di potenze ascendenti di questa variabile, per modo da rendere possibile ai matematici d'effettuare la quadratura di qualsiasi curva, nella quale l'ordinata y possa essere espressa come funzione algebrica esplicita dell'ascissa x. Il Wallis aveva dimostrato come questa quadratura potesse effettuarsi quando y era somma di un numero di multipli di potenze di x e le regole dello sviluppo di Newton qui stabilite rendevan possibile la consimile quadratura di ogni curva, la cui ordinata fosse esprimibile come somma di un numero infinito di tali termini. In tal modo egli effettuò la quadratura delle curve seguenti:

$$y = \frac{a^2}{b+x}\,, \quad y = (a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}\,, \quad y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}\,, \quad y = \left(\frac{1+a x^2}{1-b x^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

ma, naturalmente, i resultati sono espressi in serie infinite. Newton passa poi alle curve, la cui ordinata è funzione implicita dell'ascissa, e dà un metodo col quale y può essere espressa come una serie infinita di potenze ascendenti di x; però l'applicazione di questa regola a qualsiasi curva richiede in generale calcoli numerici così complicati da renderla di esiguo valore. Egli termina questa parte dimostrando che la rettificazione di una curva può effettuarsi in modo pressochè simile. Il suo metodo equivale a esprimere l'integrale rispetto a x di $(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$ sotto forma di serie infinita. Dovrei aggiungere che Newton indica l'importanza di riconoscere se le serie sono convergenti — osservazione molto ardita pel suo tempo —; però egli non conosceva criteri generali per questo scopo; ed infatti solo dopo che Gauss, Cauchy ed Abel ripresero la questione, fu riconosciuta comunemente la necessità di quelle limitazioni.

La parte dell'appendice che ora ho descritta coincide in sostanza col contenuto del manoscritto di Newton, *De analysi per equationes numero terminorum infinitas* che fu poi stampato nel 1711. Si dice che questo in origine era destinato a formare un'appendice all'*Algebra* del Kinckhuysen, che, come già ho detto, egli un tempo voleva pubblicare. La sostanza di esso fu comunicata al Barrow e da questi al Collins, con lettere del 31 luglio e 12 agosto 1669; e il sommario di una parte venne incluso nella lettera spedita al Leibniz il 24 ottobre 1676.

Quella parte deve essere letta insieme al *Methodus differentialis* del Newton, pubblicato pure nel 1711. Ivi sono dati altri teoremi ed è studiato il metodo di interpolazione, che era stato già brevemente descritto nella lettera del 24 ottobre 1676; eccone il principio: Se $y = \varphi(x)$ è una funzione di x e se, quando y si fa successivamente eguale ad $a_1, a_2 \ldots.$, i valori di y sono noti

e precisamente sono $b_1, b_2 \ldots.$; allora si può tracciare una parabola la cui equazione è $y = p + qx + rx^2 + \ldots.$ passante per i punti (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... e l'ordinata di questa parabola può esser presa come approssimazione dell'ordinata della curva. Il grado della parabola sarà evidentemente superiore di uno al numero dei punti dati. Newton fa notare che in tal modo possono essere determinate approssimativamente le aree di tutte le curve.

La seconda parte di quell'appendice all'*Ottica* contiene una descrizione del metodo Newtoniano delle flussioni, metodo che è meglio studiare in connessione col manoscritto di Newton sullo stesso tema, pubblicato da Giovanni Colson nel 1736 e del quale esso è un sommario.

Il calcolo flussionale è una forma del calcolo infinitesimale, espressa con una certa notazione, così come il calcolo differenziale è un altro aspetto dello stesso calcolo, ottenuto mediante una notazione differente. Newton ammetteva che tutte le grandezze geometriche potessero esser concepite come generate da moto continuo; così una linea può esser considerata come generata dal moto d'un punto, una superficie da quello d'una linea, un solido da quello d'una superficie, un angolo piano dalla rotazione d'una retta e così via. La quantità così generata era chiamata da lui fluente. La velocità della grandezza mobile era definita come la flussione della quantità fluente. Sembra esser questo il primo chiaro riconoscimento del concetto di funzione continua, sebbene fosse stato prima accennato in taluno degli scritti del Napier.

Ecco come Newton tratta la teoria delle flussioni. Vi sono due specie di problemi. Oggetto della prima è di trovare la flussione di una quantità data, o più generalmente «data la relazione delle quantità fluenti, trovare quella delle loro flussioni»; ciò equivale alla differenziazione. Oggetto del secondo, o metodo inverso delle flussioni, è di determinare la fluente dalla flussione o da alcune relazioni che la racchiudano, o più generalmente «essendo proposta un'equazione esprimente la relazione delle flussioni di alcune quantità, trovare le relazioni scambievoli di queste quantità o fluenti»[1]; ciò equivale o all'integrazione,

---

1) Ediz. del COLSON del ms. di NEWTON, pp. XXI-XXII.

che Newton chiamava il metodo della quadratura, o alla soluzione di un'equazione differenziale, che da Newton era chiamata il metodo inverso delle tangenti. I metodi per risolvere questi problemi sono da lui esposti molto estesamente.

Newton passa poi ad applicare questi risultati a questioni riguardanti i massimi e minimi di certe quantità, il metodo di tracciar tangenti alle curve e la curvatura delle curve (cioè la determinazione del centro di curvatura, del raggio di curvatura e il rapporto col quale cresce il raggio di curvatura). Egli considerò quindi la quadratura e la rettificazione delle curve [1]). Per trovare il massimo od il minimo delle funzioni di una variabile, noi riteniamo che il cambiamento di segno della differenza fra due valori consecutivi della funzione porga il vero relativo criterio; invece il ragionamento newtoniano è che, quando una quantità, crescendo, ha raggiunto il suo massimo, non può avere incremento ulteriore, o quando, decrescendo, ha raggiunto il suo minimo non può ulteriormente decrescere; conseguentemente la flussione deve essere uguale a zero.

È stato osservato che nè Newton, nè Leibniz crearono un calcolo, ossia una collezione ben ordinata di regole e che i problemi da loro considerati erano trattati partendo dai primi principî. Questo, senza dubbio, è l'ordine naturale nella storia di tali scoperte, sebbene il fatto sia frequentemente dimenticato dagli scrittori posteriori. Ma in questo caso io credo che quell'affermazione, in quanto concerne il modo col quale Newton trattava la parte differenziale o flussionale del calcolo, sia inesatta, come sufficientemente dimostra quanto precede.

Se una quantità fluente si rappresenta con x, Newton denotava la sua flussione con $\dot{x}$, la flussione di $\dot{x}$, o seconda flussione di x, con $\ddot{x}$, e così via. Similmente il fluente di x era designato con $[\bar{x}]$ o talora con x' o $[x]$. La parte infinitesima della quale una fluente x cresce in un piccolo intervallo di tempo misurato da o, era chiamato momento della fluente e Newton dimostrava [2]) che il suo valore era $\dot{x}o$. Egli aggiunse l' importante

1) Ediz. del COLSON del ms. di NEWTON, pp. XXII-XXIII.
2) Ediz. del COLSON del ms. di NEWTON, p. 24.

osservazione, che così noi possiamo trascurare i termini moltiplicati per la seconda potenza di o e per le superiori, e che possiamo sempre trovare un'equazione fra le coordinate x, y di un punto di una curva e le loro flussioni $\dot{x}$, $\dot{y}$. È un'applicazione di questo principio ciò che costituisce uno de' pregi principali del calcolo; imperocchè, se desideriamo trovare l'effetto prodotto da diverse cause sopra un sistema, allora, se possiamo trovare l'effetto prodotto da ciascuna causa quando agisce da sola per un tempo piccolissimo, l'effetto totale prodotto in quel tempo sarà uguale alla somma degli effetti separati. Giova qui notare che S. Vince [1]) ed altri scrittori inglesi del secolo XVIII adoperavano $\dot{x}$ per denotare l' incremento di x e non la velocità con cui essa aumentava, cioè $\dot{x}$ nei loro scritti sta per quello che Newton avrebbe espresso con $\dot{x}o$ e che Leibniz avrebbe scritto come dx.

Non occorre che io esponga ulteriori particolari sopra il modo col quale Newton trattò i problemi sopra ricordati. Aggiungerò solo che, ad onta della forma della sua definizione, l'introduzione nella geometria dell' idea del tempo fu evitata supponendo che qualche quantità (per es. l'ascissa di un punto sopra una curva) aumentasse equabilmente; i resultati cercati dipendono allora dalla misura in cui altre quantità (per es. l'ordinata o il raggio di curvatura) aumentano relativamente a quella scelta [2]). La fluente scelta è quella che ora chiamiamo variabile indipendente; la sua flussione era chiamata la « flussione principale »; indicandola con x, allora $\dot{x}$ è costante e conseguentemente $\ddot{x} = 0$.

Non vi è dubbio che Newton usò il metodo delle flussioni sino dal 1666 ed è certo che notizie relative furono comunicate in manoscritto ad amici e discepoli dal 1669 in poi. Il manoscritto, dal quale è tolto gran parte del sommario surriferito, si ritiene essere stato vergato tra il 1671 e il 1677 ed essere stato in circolazione a Cambridge da quel tempo in poi, sebbene sia possibile che alcune parti siano state rifatte. Fu sventura che non venisse pubblicato subito. Gli stranieri lontani giudicarono naturalmente il metodo secondo la lettera al Wallis nel 1682 o

1) Professore di astronomia a Cambridge, m. nel 1821 (G. L.).
2) Ediz. del COLSON del ms. di NEWTON, p. 20.

mediante il *Tractatus de Quadratura Curvarum*, e non seppero che fosse stato tanto completamente svolto anteriormente: ciò fu cagione di numerosi malintesi.

Al tempo stesso si deve osservare che tutta l'analisi matematica s' incamminava verso i concetti ed i metodi del calcolo infinitesimale. Qualche accenno ai principî ed anche al linguaggio di quel calcolo si posson trovare negli scritti di Napier, Keplero, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Fermat, Wallis e Barrow. Fu buona ventura per Newton il giungere in un tempo in cui tutto era maturo per la scoperta ed il suo genio gli rese possibile di fabbricare d'un tratto un calcolo completo.

La notazione del calcolo flussionale è per molti scopi meno conveniente di quella del calcolo differenziale. Quest' ultimo fu inventato dal Leibniz probabilmente nel 1675, certamente verso il 1677, e venne pubblicato nel 1684, circa nove anni prima del primo resoconto stampato del metodo delle flussioni di Newton. Ma la questione se Leibniz prendesse l' idea generale del calcolo espressa in quella notazione dal Newton, o se la inventasse indipendentemente, dette luogo ad una lunga ed acre controversia, le cui fasi principali saranno esposte nel prossimo Capitolo. La questione è di notevole difficoltà; io dirò qui soltanto che, dopo di avere letta la voluminosa letteratura su tale argomento, penso che, in massima, ne emerga che in Leibniz l' idea del calcolo differenziale sorse studiando un manoscritto di Newton, che egli vide nel 1675 o forse nel 1676; ritengo però che l'opinione più diffusa sia che le invenzioni fossero indipendenti l' una dall'altra.

Gli altri avvenimenti della vita di Newton non hanno quasi bisogno di commento. Nel 1705 fu fatto cavaliere. D'allora in poi dedicò molto del tempo che aveva libero alla teologia e scrisse molto diffusamente sulle profezie e sulle predizioni, argomenti che sempre lo avevano interessato. La sua *Aritmetica universale* fu pubblicata dal Whiston nel 1707 e la sua *Analisi per serie infinite* nel 1711; ma Newton non si occupò affatto della preparazione dell' una e dell'altra per la stampa. Il discorso da lui tenuto nel 1714 alla Camera dei Comuni, sulla determinazione della longitudine in mare, segna un periodo importante nella storia della navigazione.

La disputa col Leibniz, sull'avere questi prese le idee del calcolo differenziale da Newton o averlo inventato indipendentemente, sorse nel 1708 ed occupò molto del tempo di Newton, specie tra il 1709 e il 1716.

Nel 1709 Newton si persuase di permettere al Côtes di preparare la seconda edizione dei *Principia*, della quale s' è già a lungo parlato; essa uscì nel marzo 1713. Una terza edizione venne pubblicata nel 1726 sotto la direzione di Enrico Pemberton. Nel 1725 la salute di Newton cominciò a declinare. Egli morì il 29 marzo 1727 e otto giorni dopo venne sepolto con grande pompa nell'abbazia di Westminster.

Le sue opere principali, prendendole nell'ordine di pubblicazione, sono: i *Principia* pubblicati nel 1687; l' *Ottica* (con appendice sulle *curve cubiche*, *sulla quadratura e rettificazione delle curve mediante le serie infinite* e sul *metodo delle flussioni*) pubblicata nel 1704; l'*Aritmetica universale* pubblicata nel 1707; l'*Analysis per Series*, *Fluctiones*, ecc. e il *Methodus differentialis*, pubblicati nel 1711; le *Lectiones Octicae*, pubblicate nel 1728; il *Metodo delle flussioni* ecc. (sopra il manoscritto di Newton *sulle flussioni*) tradotto da J. Colson e pubblicato nel 1736; e la *Geometria analytica*, stampata nel 1779 nel primo volume dell'edizione del Horsley delle opere di Newton.

Di figura Newton era piccolo e verso la fine della sua vita divenne piuttosto grasso; era ben piantato, colla mascella inferiore quadra, occhi scuri, fronte larga e lineamenti piuttosto affilati. I capelli gli divennero grigi prima della trentina e rimasero folti e bianchi come argento fino alla sua morte.

Quanto ai suoi modi, egli vestiva trascuratamente, era piuttosto fiacco e spesso così assorto nei propri pensieri da essere tutt'altro che un compagno vivace. Sono stati conservati varî aneddoti della sua estrema distrazione, quando era assorto in qualche ricerca. Così una volta, mentre cavalcava verso casa da Grantham, egli smontò per condurre a mano il cavallo sopra una collina ripida; quando, giunto alla cima, si voltò per risalire a cavallo, si accorse che aveva in mano la briglia, mentre il cavallo se l'era svignata ed era andato per conto suo. Inoltre, nelle poche occasioni nelle quali sacrificava il suo tempo per intrattenere gli amici, se li lasciava per andare a prendere dell'altro vino o per qualche altro scopo, il più delle volte lo si ritrovava dopo parecchio tempo immerso nello studio d'un problema e perfettamente dimentico, tanto degli ospiti che aspettavano, quanto della sua commissione. Egli non faceva moto, non si permetteva alcun divertimento e lavorava incessantemente passando spesso a scrivere diciotto o diciannove ore su ventiquattro.

Di carattere era religioso e coscienzioso, di una moralità eccezionalmente alta, avendo, come disse il Vescovo Burnet « l'anima più candida » che egli conoscesse mai. Newton fu sempre perfettamente retto ed onesto, ma nelle sue polemiche con Leibniz, Hooke ed altri, benchè scrupolosamente giusto, non fu generoso e sembra che frequentemente si offendesse per un'espressione casuale, quando nessuno aveva intenzione di recargli offesa. Egli attribuiva modestamente le sue scoperte in gran parte alla opera mirabile de' suoi predecessori; ed una volta disse che se egli aveva veduto più lontano degli altri uomini, ciò era avvenuto unicamente perchè era salito sulle spalle di giganti. Riassumeva la propria stima dell'opera sua nella frase « io non so ciò che posso parere al mondo; ma a me stesso io sembro essere stato soltanto simile ad un fanciullo, che giuoca sulla riva del mare e si diverte a raccogliere qua e là un ciottolo più liscio o una conchiglia più appariscente delle solite, mentre il grande oceano della verità si stende completamente celato a me dinanzi ». Egli era di una sensibilità morbosa, quando si trovava implicato in qualche discussione. Credo che, eccettuati i suoi scritti sull'ottica, ogni sua opera venisse pubblicata solo dietro pressione dei suoi amici e contro i suoi propri desiderî. Vi sono parecchi esempi dell'aver egli comunicato i suoi scritti e i suoi risultati a patto che il suo nome non venisse fatto conoscere; così quando, nel 1669, egli ebbe risoluto, dietro richiesta del Collins, alcuni problemi sulla serie e sulle annualità, che precedentemente eran state indarno studiati, egli permise che, se i suoi risultati dovessero pubblicarsi, « ciò fosse » come egli dice « senza il mio nome, perchè io non vedo ciò che vi sia di desiderabile nella pubblica estimazione, ammesso che io sapessi conquistarla e mantenerla; forse ciò aumenterebbe la mia notorietà, cosa che io principalmente mi studio di evitare ».

Mai egli fu sorpassato in potenza matematica; di ciò sono prove evidenti le di lui opere; ma forse la più meravigliosa prova di questa sua potenza sta nell'avere scritto in sette mesi il libro I dei *Principia*.

Come esempi specifici della sua abilità posso citare anzitutto la sua soluzione del problema di Pappo, la risposta sua alla sfida di Giovanni Bernoulli e la sua trattazione della questione delle traiettorie ortogonali. Il problema di Pappo, al quale qui si allude, ha per iscopo di trovare il luogo di un punto tale che il rettangolo delle sue distanze da due rette date, stia in un dato rapporto al rettangolo delle sue distanze da due altre rette. Molti geometri dal tempo di Apollonio ne avevan cercato una soluzione geometrica e non vi erano riusciti; ma, ciò che era apparso insuperabile per i suoi predecessori, sembra non aver presentato che lieve difficoltà al Newton, il quale dimostrò elegantemente, con metodo geometrico, che quel luogo era una conica. La geometria, disse il Lagrange, quando raccomandava ai suoi discepoli lo studio dell'analisi, è un arco potente, ma tale che soltanto un Newton poteva pienamente adoperarlo.

Come altro esempio posso citare che nel 1696 Giovanni Bernoulli sfidò i matematici: 1° a determinare la brachistocrona e 2° a trovare una curva tale che, se una linea qualsiasi tirata da un punto fisso O, la tagli in P e Q, la somma $\overline{OP}^n + \overline{OQ}^n$ risulti costante. Il Leibniz risolse la prima di queste questioni dopo un lasso di tempo di oltre sei mesi e poi suggerì che ambedue dovessero esser mandate come sfida a Newton ed altri. Newton ricevette i problemi il 29 gennaio 1697 e il giorno dopo dette le complete soluzioni di entrambi, generalizzando al tempo stesso la seconda questione. Un caso quasi simile accadde nel 1716, quando chiesero a Newton di trovare la traiettoria ortogonale di una famiglia di curve; in cinque ore Newton risolse il problema nella forma sotto cui gli venne proposto e di più stabilì i principî generali per trovare le traiettorie.

È quasi impossibile descrivere l'effetto che producevano gli scritti di Newton, senza andare a rischio di passare per esagerato. Ma se le cognizioni della matematica nel 1669, ossia alla morte di Pascal o di Fermat, si paragonino con ciò che si sapeva nel 1687, si vedrà quanto immenso fosse il progresso da esse compiuto; infatti si può dire che pei matematici fu necessario un mezzo secolo o più, prima che potessero assimilare il lavoro che Newton avea prodotto in quei vent'anni.

Nella geometria pura Newton non stabilì alcun metodo nuovo, ma nessun matematico moderno ha mostrato un eguale potenza nell'adoperare quelli della geometria classica. Nell'algebra e nella teoria delle equazioni introdusse il sistema degli indici, stabilì il teorema del binomio per un esponente qualsiasi e creò una parte non trascurabile della teoria delle equazioni; una regola da lui enunciata su questo argomento rimase fino a pochi anni or sono come un enigma insoluto, che aveva sfidato le risorse dei matematici venuti di poi. Nella geometria analitica delle curve stabilì molte proprietà fondamentali degli asintoti, dei punti multipli e dei circuiti isolati, illustrandole con una discussione delle cubiche piane. Il calcolo flussionale o infinitesimale fu inventato da Newton nel 1666 o prima e circolò manoscritto fra i suoi amici nel 1669 e dopo, sebbene nessun riassunto di questo metodo venisse stampato fino al 1693. Il fatto che i risultati sono attualmente espressi con una notazione differente ha costituito la causa per cui le investigazioni di Newton su questo argomento venissero un po' trascurate.

Newton fu inoltre il primo a porre la dinamica sopra un fondamento soddisfacente e dalla dinamica dedusse la statica teorica; ciò avvenne nell'introduzione ai *Principia* pubblicati nel 1687. La teoria dell'attrazione, l'applicazione dei principî di meccanica al sistema solare, la creazione dell'astronomia fisica e lo stabilimento della legge della gravitazione universale sono completamente dovuti a lui e furono per la prima volta pubblicati nella stessa opera. Le questioni particolari connesse col moto della terra e della luna furono elaborate tanto completamente quanto allora era possibile. L'idrodinamica teorica fu creata nel libro II dei *Principia* ed egli aggiunse molto alla idrostatica teorica, che si può dire essere stata trattata per primo nei tempi moderni da Pascal. La teoria della propagazione delle onde, ed in particolare la sua applicazione a determinare la velocità del suono, è dovuta a Newton e fu pubblicata nel 1687.

Nell'ottica egli spiegò, tra altre cose, la decomposizione della luce e stabilì la teoria dell'arcobaleno; inventò il telescopio a riflessione, conosciuto col suo nome, e il sestante. Nell'ottica fisica propose ed elaborò la teoria dell'emissione della luce.

Questo elenco non comprende tutti gli argomenti da lui studiati, ma basterà ad illustrare quanto profondo fosse il suo influsso sullo sviluppo delle matematiche. Riguardo ai suoi scritti e ai loro effetti basterà citare le osservazioni di due o tre fra coloro, che successivamente s'occuparono delle materie contenute nei *Principia*. Il Lagrange chiamò questi la più eminente produzione della mente umana e disse che si sentiva abbagliato dinanzi a un tale esempio di ciò, a cui l'intelletto umano può giungere. Descrivendo l'influenza esercitata dagli scritti propri e di Laplace, era una sua osservazione favorita, che Newton era stato, non solo il più gran genio che mai fosse esistito, ma anche il più fortunato, perchè, essendovi un solo universo, non può accadere se non ad un uomo solo nella storia del mondo di essere interprete delle sue leggi. Laplace, in generale molto avaro di lodi, fa un'eccezione per Newton e vengono spesso citate le parole con le quali egli enumera le cause che «assicureranno ai *Principia* una preminenza su tutte le altre produzioni dell'ingegno umano». Non meno notevole è l'omaggio reso dal Gauss; per altri grandi matematici o filosofi egli usa gli epiteti *magnus*, o *clarus*, o *clarissimus*; per Newton solo egli adotta *summus*. Finalmente il Biot, che fece uno studio speciale delle opere di Newton, riassume le sue osservazioni dicendo: «comme géometre et comme experimentateur Newton est sans égal; par la réunion de ces deux genres de génies à leur plus haut degré, il est sans exemple».

CAPITOLO XVII.

Leibniz e i matematici della prima metà del secolo XVIII [1]).

Ho brevemente tracciato nell' ultimo Capitolo l' indole e la estensione dei contributi dati alla scienza da Newton. Ma l'analisi moderna è derivata direttamente dalle opere di Leibniz e del maggiore dei Bernoulli, e a noi non importa se le idee fondamentali di essa furono attinte da Newton, o scoperte indipendentemente. I matematici inglesi degli anni considerati nel presente Capitolo, continuarono ad usare il linguaggio e la notazione di Newton [2]), onde si distinguono dai loro contemporanei continentali: perciò li ho aggruppati insieme, a parte.

Leibniz e i Bernoulli.

Leibniz [3]). — *Goffredo Guglielmo Leibniz* (o *Leibnitz*) nacque a Lipsia il 21 giugno 1646 e morì ad Hannover il 14 settembre 1716. Perdette il padre prima del sesto anno di sua età; l'insegnamento alla scuola dove allora fu mandato era inefficace, ma il suo ingegno trionfò di tutte le difficoltà e verso i dodici anni aveva imparato da sè a leggere il latino e cominciato il greco; prima dei vent'anni era già padrone dei testi ordinari di matematica, di filosofia, di teologia e di giurisprudenza. Essendogli

1) Vedi CANTOR, vol. III; altre fonti per i matematici di questo periodo saranno volta per volta citate nelle note a pie' di pagina.

2) Cfr. F. CAJORI, *A History of the Conceptions of Limits and Flunions in Great-Britain from Newton to Woodhouse*, Chicago and London, 1919. (G. L.).

3) Vedi la *Vita di Leibniz* di G. E. GUHRAUER, due volumi e un supplemento, Breslavia, 1842 e 1846. Gli scritti matematici di LEIBNIZ sono stati raccolti e pubblicati da C. J. GERHARDT in 7 volumi ed un supplemento, Berlino e Halle, 1849-63.

stata rifiutata la laurea dottorale in giurisprudenza a Lipsia, da coloro che eran gelosi della sua gioventù e della sua dottrina, egli andò a Norimberga. Un saggio, che scrisse colà sullo studio della legge e dedicò all' Elettore di Magonza, lo fece nominare dall' Elettore stesso, commissario per la revisione di alcuni statuti; poi venne promosso al servizio diplomatico. In quest' ultima carica sostenne (con esito infelice) i diritti del candidato tedesco alla corona di Polonia. La violenta cattura di varie piccole città nell'Alsazia (1670) eccitò allarme universale in Germania intorno ai disegni di Luigi XIV; il Leibniz tracciò uno schema, col quale si proponeva di offrire la cooperazione tedesca, se alla Francia piacesse d' impadronirsi dell'Egitto e di servirsi di quel possesso come base di attacco contro l'Olanda in Asia, purchè la Francia promettesse di lasciar quieta la Germania. Questo piano somiglia curiosamente a quello col quale Napoleone I proponeva più tardi di attaccar l' Inghilterra. Nel 1672 Leibniz andò a Parigi, invitato dal Governo francese a spiegare i particolari di questo schema; ma non si venne ad alcun risultato.

A Parigi egli incontrò l' Huygens, che allora vi risiedeva, e la loro conversazione portò Leibniz a studiare la geometria, che egli dice avergli svelato un nuovo mondo; ma effettivamente egli aveva antecedentemente scritto alcuni opuscoli su varî argomenti elementari di matematica, i più importanti dei quali sono una memoria sulle combinazioni, scritta nel 1668, e la descrizione di una nuova macchina per calcolare. Nel gennaio 1673 fu mandato con una missione politica a Londra, dove si fermò alcuni mesi e conobbe Oldemburg, Collins e altri: fu in quel tempo che egli comunicò alla Società Reale di quella città la memoria, nella quale si trovò poi che era stato preceduto dal Mouton.

Nel 1673 morì l' Elettore di Magonza e nell'anno susseguente Leibniz entrò al servizio della famiglia di Brunswick; nel 1676 visitò di nuovo Londra e si recò poi ad Hannover, dove fino alla sua morte occupò il posto ben retribuito di direttore della Biblioteca ducale. La sua penna fu da allora impiegata in tutte le questioni politiche riguardanti la famiglia di Hannover e i suoi servizi furono ricompensati con onori e distinzioni di varie specie: i suoi memoriali sulle varie questioni politiche, storiche e teologiche concernenti quella dinastia, durante i quarant'anni 1673-1713, formano un prezioso contributo alla storia di quel tempo.

La nomina di Leibniz al servizio degli Hannover gli concesse maggior tempo per i suoi studî favoriti. Egli era solito dire che, come primo frutto delle aumentate sue ore di svago, inventò il calcolo differenziale e integrale nel 1674 ; però le tracce più antiche dell' uso di esso, negli appunti che ci restano di lui, non appariscono fino al 1675 e solo nel 1677 lo troviamo svolto come un sistema compiuto ; non fu pubblicato che nel 1684. Quasi tutti i suoi lavori matematici apparvero in un giornale intitolato *Acta Eruditorum*, che Leibniz ed Ottone Mencke avevan fondato nel 1682 e che ebbe larga diffusione sul continente.

Leibniz occupa nella storia della filosofia certo un posto non inferiore a quello che occupa in quella delle matematiche. La maggior parte dei suoi scritti filosofici furon composti negli ultimi venti o venticinque anni della sua vita ; ed è ancora oggetto di disputa fra i filosofi la questione se i suoi concetti fossero originali o se li avesse presi dallo Spinoza, che visitò nel 1676, sebbene sembri più probabile l'originalità di Leibniz. Quanto al suo sistema filosofico basti dire, che egli considerava gli elementi ultimi dell' universo. come esseri individuali percipienti, che chiamava monadi. Secondo lui le monadi sono centri di forza e la sostanza è forza, mentre lo spazio, la materia e il moto sono puramente fenomeni ; finalmente l'esistenza di Dio è dedotta dall'armonia esistente fra le monadi. I servigi da lui resi alla letteratura son quasi altrettanto considerevoli di quelli resi alla filosofia ; in particolare voglio segnalare che si deve a lui la distruzione della credenza, allora prevalente, che l'ebraico fosse la lingua primitiva della razza umana.

Nel 1700 fu creata per suo consiglio l'Accademia di Berlino ed egli ne compose il primo schema di statuto. Dopo l' assunzione del suo sovrano Giorgio I al trono d' Inghilterra (1714), Leibniz fu messo in disparte come un arnese inutile ; gli venne proibito di recarsi in Inghilterra ed egli passò gli ultimi due anni della sua vita trascurato e in disgrazia. Fu avido di denaro e di onori ; fu senza scrupoli come si poteva aspettarsi da un diplomatico di professione di quel tempo ; ma aveva modi singo-

larmente attraenti e quanti capitavano una volta sotto il fascino della sua presenza personale, gli rimanevano sinceramente affezionati. La sua riputazione matematica fu grandemente accresciuta dalla posizione eminente che egli occupava nella diplomazia, nella filosofia e nella letteratura, e il potere che da ciò gli derivava era considerevolmente aumentato dalla sua influenza nella direzione degli *Acta Eruditorum*.

Gli ultimi anni della sua vita — dal 1709 al 1716 — furono amareggiati dalla lunga controversia con Giovanni Keill, Newton ed altri, riguardo all'avere egli scoperto il calcolo differenziale, indipendentemente da Newton, o averne derivato il concetto fondamentale da questo grande ed inventato soltanto una notazione diversa per esso. La controversia [1]) occupa un posto affatto sproporzionato alla sua vera importanza nella storia scientifica dei primi anni del secolo XVIII ; ma essa ebbe materialmente tanta influenza sulla storia delle matematiche nella Europa Occidentale, che io mi sento obbligato di narrarne gli episodî principali, sebbene sia riluttante ad occupar molto spazio per questioni d' indole personale.

I concetti del calcolo infinitesimale possono essere espressi o colla notazione delle flussioni o con quella dei differenziali. La prima fu usata da Newton nel 1666 e comunicata in manoscritto ai suoi amici e scolari a partire dal 1669, ma nessuna esposizione speciale ne fu stampata fino al 1693. Il primo uso della seconda nei taccuini di Leibniz può probabilmente riportarsi al 1675 ; essa fu impiegata nella lettera mandata al Newton nel 1677 e un riassunto se ne legge nella memoria del 1684, di cui parleremo in seguito. Non vi è dubbio che la notazione differenziale sia do-

---

1) L'opinione favorevole all' invenzione indipendente del Leibniz è sostenuta nelle *Leibnizens mathematische Schriften* del GERHARDT, e nel vol. III della *Geschichte der Mathematik* del CANTOR. Gli argomenti avversi son dati nel *Leibnizens Anspruch auf die Erfindung der Differenzialrechnung*, di H. SLOMAN, Lipsia, 1857, di cui una traduzione inglese, con aggiunte dell'autore, fu pubblicata a Cambridge nel 1860. Un sommario della discussione si troverà nella memoria di G. A. GIBSON, in *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. XIV, 1876, pp. 188-174. La storia dell' invenzione del calcolo si trova in un articolo relativo, inserito nella IX edizione dell'*Enciclopaedia Britannica* ; vedi anche l'*Esquisse de l' histoire du calcul infinitésimal* di P. MANSION, Gand, 1887 ; ecc.

vuta al Leibniz e la sola questione è di sapere, se l' idea generale del calcolo fosse presa da Newton o scoperta indipendentemente.

I motivi in favore dell' invenzione indipendente da parte del Leibniz riposano sul fatto, che egli pubblicò una descrizione del suo metodo alcuni anni prima che Newton stampasse qualsiasi cosa sulle flussioni, che egli parlò sempre della scoperta come di una sua propria invenzione e che tale asserto non fu per alcuni anni impugnato; indubbiamente vi è una forte presunzione che egli agisse in buona fede. Per contraddire questa opinione è necessario dimostrare: 1º che egli vide qualcuno degli scritti del Newton sull'argomento nel 1675, o prima, o almeno nel 1677; e 2º che da quelli egli derivò i concetti fondamentali del calcolo. Il fatto che la sua pretesa rimase per alcuni anni inoppugnata non è decisivo, date le circostanze speciali del caso.

Che Leibniz avesse visto alcuni dei manoscritti di Newton fu sempre ritenuto intrinsecamente probabile; ma, nel 1849, C. J. Gerhardt [1]), esaminando le carte di Leibniz, trovò tra essi uno scritto, la cui esistenza non era stata sospettata prima, di mano di Leibniz e contenente estratti dalla memoria *De Analysi per Equationes Numero Terminorum Infinitas* di Newton (che, come vedemmo, fu nel 1704 stampata come parte della memoria *De quadratura Curvarum*), insieme a note sulla traduzione di essi in notazione differenziale. La questione della data, in cui furono fatti questi estratti, è quindi della massima importanza. È noto che una copia del manoscritto di Newton era stata mandata al Tschirnhausen nel maggio 1675, e poichè in quell'anno egli e Leibniz erano occupati insieme in un lavoro, non è impossibile che questi estratti venissero fatti allora [2]). È pure possibile che possano anche essere stati fatti nel 1676, perchè Leibniz studiò in quell'anno la questione dell'analisi per serie infinite col Collins e coll'Oldenburg ed è probabile *a priori* che essi gli abbiano mostrato il manoscritto di Newton su quell'argomento, poichè uno di essi, o entrambi, ne possedevano copia. D' altra parte si può ammettere che Leibniz facesse quegli estratti dalla copia stampata nel 1704,

1) Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften*, vol. I, p. 7.
2) Sloman, traduzione inglese del lavoro citato, p. 34.

o più tardi. Il Leibniz, poco prima di morire, ammise in una lettera al Conti, che nel 1676 il Collins gli aveva mostrato alcuni scritti di Newton, ma aggiunse che essi non avevano che poca o punta importanza — presumibilmente egli si riferiva alle lettere di Newton del 13 giugno e del 24 ottobre 1676 ed alla lettera del 10 dicembre 1672 sul metodo delle tangenti, alcuni estratti dalla quale accompagnavano [1]) la lettera del 13 giugno —; ma è curioso che ricevendo queste lettere Leibniz non avesse fatto ulteriori inchieste, a meno che non avesse avuta conoscenza, da altra fonte, del metodo seguìto da Newton.

Se Leibniz non facesse uso alcuno di quel manoscritto, dal quale egli avea copiato gli estratti, o se avesse in precedenza inventato il calcolo, sono questioni, per chi vive, per le quali, a tanta distanza di tempo, non può citarsi alcuna testimonianza diretta. Nondimeno è degno di nota il fatto che i manoscritti inediti di Portsmouth mostrano, che quando nel 1711 Newton entrò decisamente nella disputa, egli accennò a tale originale del lavoro citato, come quello che probabilmente, in qualche modo, era caduto in mano al Leibniz [2]). In quel tempo non vi era prova diretta, che Leibniz avesse veduto questo manoscritto prima che venisse stampato nel 1704, e perciò la congettura di Newton non venne pubblicata; ma la scoperta del Gerhardt della copia fatta dal Leibniz tende a confermare l'esattezza del giudizio di Newton in questa faccenda. Si dice, da coloro che dubitano della buona fede di Leibniz, che ad un uomo del suo ingegno quel manoscritto, specialmente se completato colla lettera del 10 dicembre 1672, avrebbe fornito sufficienti indizi per dargli il filo dei metodi del calcolo infinitesimale; e poichè in esso non era impiegata la notazione flussionale, chiunque avesse voluto servirsi di quel manoscritto avrebbe dovuto inventare una opportuna notazione; tutto ciò è però negato da altri.

Non vi era a prima vista ragione per sospettare della buona fede di Leibniz; fu soltanto dopo la comparsa nel 1704 di una recensione anonima dell'opuscolo di Newton sulla quadratura,

1) Gerhardt, vol. I, p. 91.
2) *Catalogue of Portsmouth Papers*, pp. XVI-XVII, 7-8.

nella quale era implicitamente detto che Newton aveva preso dal Leibniz l'idea del calcolo flussionale, che qualche matematico degno di fede [1]) mise in dubbio l'affermazione che Leibniz avesse inventato il calcolo indipendentemente da Newton. È ammesso generalmente che non avevano giustificazione nè autorità le affermazioni fatte in quella recensione, la quale venne con ragione attribuita al Leibniz. Ma la conseguente discussione condusse ad un esame critico dell'intera questione ed allora fu espresso il dubbio se Leibniz non avesse ricavato da Newton i suoi concetti fondamentali. L'accusa contro Leibniz, quale si affacciò agli amici di Newton, fu manifestata nel *Commercium Epistolicum*, pubblicato nel 1712, ove trovansi particolareggiate notizie circa tutti i fatti in questione.

Nessun sommario simile (con fatti, dati e citazioni) fu pubblicato in favore di Leibniz dai suoi amici; ma Giovanni Bernoulli cercò di indebolire indirettamente le prove del plagio, attaccando il carattere personale di Newton: ciò avvenne in una lettera del 7 giugno 1713. Le accuse erano false e, quando fu sollecitato a spiegarsi, il Bernoulli negò nel modo più solenne di avere scritto quella lettera. Accettando tale smentita Newton aggiunse, in una lettera particolare indirizzata al Bernoulli, le seguenti osservazioni che sono interessanti, perchè fanno conoscere la spiegazione data da Newton sul motivo che finalmente lo indusse a prendere parte alla disputa. « Io non ho » egli dice, « mai cercato fama fra le nazioni straniere, ma fortemente desidero di difendere l'onestà del mio carattere, che l'autore di quell'epistola cercò di offuscare come se avesse l'autorità di un giudice supremo. Ora che son vecchio, gli studî matematici poco mi dilettano; non ho mai cercato di diffondere le mie opinioni nel mondo, ma ho piuttosto cercato di non lasciarmi trascinare in dispute originate da esse ».

La difesa di Leibniz, o, se si vuole, la spiegazione del suo silenzio è data nella seguente lettera da lui scritta al Conti il 9 aprile 1716:

1) Nel 1699 Fatio de Duillier aveva accusato Leibniz di plagio da Newton, ma il Duillier non era persona di molta importanza.

« Pour répondre de point en point à l'ouvrage publié contre moi, il falloit un autre ouvrage aussi grand pour le moins que celui-là: il falloit entrer dans un grand détail de quantité de minutiés passées il y a trente à quarante ans, dont je ne me souvenois guère: il me falloit chercher mes vieilles lettres, dont plusieurs se sont perdues, outre que le plus souvent je n'ai point gardé les minutes des miennes: et les autres sont ensevelies dans un grand tas de papiers, que je ne pouvois débrouiller qu'avec du temps et de la patience; mais je n'en avois guère le loisir, étant chargé présentement d'occupations d'une toute autre nature ».

La morte di Leibniz avvenuta nel 1716 pose termine solo temporaneamente alla polemica, che per vari anni ancora si dibattè acremente. La questione è difficile; le prove sono contrarie e circostanziate, onde ciascuno deve giudicare da sè quale opinione gli sembri più ragionevole. In sostanza il conflitto è tra la parola di Leibniz e molti particolari sospetti che stanno contro di lui. Può essere spiegabile ch'egli non confessasse il possesso di una copia di parte d'un manoscritto di Newton; ma il fatto che in più d'un'occasione egli deliberatamente alterò importanti documenti o vi fece aggiunte, prima di pubblicarli (vedi per es. la lettera del 7 giugno 1713 nella *Charta Volans* e quella dell'8 aprile 1716 negli *Acta Eruditorum*), e, ciò che è peggio, che è stata falsificata la data in uno dei suoi manoscritti [1]) (1675 cambiato in 1673), rende di poco valore la sua propria testimonianza su questo argomento. Ad onta di ciò credo che la maggioranza degli scrittori moderni sia propensa ad accettare l'idea, che l'invenzione del calcolo fatta dal Leibniz fu indipendente da quella di Newton; io però ritengo in massima probabile che Leibniz leggesse parzialmente o totalmente il manoscritto di Newton *De Analysi* prima del 1677; quanto aiuto ne ritraesse è cosa difficile a dirsi. Si deve ricordare, che ciò che ammette avere egli ricevuto, era piuttosto una quantità di suggerimenti, che una esposizione del calcolo; ed è possibile che, non

1) Il CANTOR, pur difendendo le pretese di Leibniz, ritiene che la falsificazione debba attribuirsi a lui. Vedi la sua *Geschichte*, vol. III, p. 176.

avendo egli pubblicato i suoi risultati del 1677, fino al 1684, e poichè la notazione e il suo successivo sviluppo erano completamente di sua invenzione, egli possa essere stato condotto trenta anni dopo a rimpicciolire l'aiuto avuto in origine e finalmente a considerarlo come insignificante.

Se dobbiamo limitarci a considerare il sistema di notazione, allora non vi può esser dubbio che quello inventato dal Leibniz sia molto più adatto per la maggior parte degli scopi ai quali il calcolo infinitesimale vien applicato, che non quello delle flussioni, che, anzi, in taluni casi (come pel calcolo delle variazioni) esso sia quasi indispensabile. Si deve anche ricordare però che al principio del secolo XVIII i metodi del calcolo infinitesimale non erano stati ancora sistematizzati, onde ciascuna notazione era egualmente buona. Lo sviluppo di quel calcolo fu l'opera principale dei matematici della prima metà del secolo XVIII. La forma differenziale fu adottata dai matematici continentali. L'applicazione fattane da Eulero, Lagrange e Laplace ai principî della meccanica, stabiliti nei *Principia*, fu la grande impresa della seconda metà di quel secolo e dimostrò finalmente la superiorità del calcolo differenziale sul flussionale. La traduzione dei *Principia* nel linguaggio dell' analisi moderna e il compimento dei particolari della teoria newtoniana coll'aiuto di quella analisi, furono effettuati dal Laplace.

La controversia col Leibniz fu riguardata in Inghilterra come un tentativo degli stranieri per togliere a Newton il merito della sua invenzione e la questione si complicò da ambo le parti per effetto di gelosie nazionali. Fu, quindi, naturale, sebbene sia stata una disgrazia, che in Inghilterra venissero studiati ed impiegati soltanto i metodi geometrico e flussionale, come Newton li aveva usati. Per più di un secolo la scuola inglese non ebbe contatto coi matematici continentali [1]). La conseguenza fu che ad onta della brillante falange di discepoli formata dal Newton, i progressi nei metodi analitici gradualmente effettuati sul continente, rimasero quasi ignoti in Inghilterra. Solo nel 1820 il valore dei

1) V. F. CAJORI, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse* (Chicago, 1919). (G. L.).

metodi analitici fu quivi pienamente riconosciuto e da allora i compatriotti di Newton ebbero di nuovo grande parte nello sviluppo delle matematiche.

Abbandonando ora questa lunga controversia, vengo a trattare degli scritti matematici di Leibniz, i più importanti dei quali furon pubblicati negli *Acta Eruditorum.* Essi trattano principalmente delle applicazioni del calcolo infinitesimale e di varie questioni di meccanica.

I soli scritti di Leibniz dotati di importanza di primo ordine son quelli sul calcolo differenziale. Il primo di essi fu pubblicato negli *Acta Eruditorum* dell'ottobre 1684; è ivi enunciato un metodo generale per trovare i massimi e i minimi e per condurre tangenti alle curve. Di più vi è trattato un problema inverso, quello, cioè, di trovare la curva, la cui suttangente è costante. La notazione è identica a quella che ci è familiare e sono determinate le derivate di x^n, dei prodotti e dei quozienti. Nel 1686 Leibniz compose uno scritto sui principî del nuovo calcolo. In ambedue questi lavori è esplicitamente ammesso il principio di continuità, mentre il modo di Leibniz di trattar l'argomento è basato sull' uso degli infinitesimi e non su quello del valore limite dei rapporti. In risposta ad alcune obiezioni, che furono sollevate nel 1694 da Bernardo Nieuwentyt, il quale asseriva che $\frac{dy}{dx}$ rappresentava una quantità insignificante come $\frac{0}{0}$, Leibniz spiegò, nello stesso modo usato prima dal Barrow, che il valore di $\frac{dy}{dx}$ in geometria poteva venire espresso come il rapporto di due quantità finite. Io ritengo che l'esposizione fatta da Leibniz degli scopi e dei metodi del calcolo infinitesimale quale è contenuta in questi scritti, che sono le tre più importanti memorie che egli scrisse sull'argomento, sia un po' oscura e che il suo tentativo di porre questo tema sopra una base metafisica, non fosse favorevole alla chiarezza; ma il fatto che tutti i risultati delle matematiche moderne sono espressi nel linguaggio inventato dal Leibniz, costituisce il miglior monumento dell'opera sua. Al pari di Newton trattò l'integrazione, non solo come metodo sommatorio, ma anche come operazione inversa della differenziazione.

Nel 1686 e nel 1692 scrisse sulle curve osculatrici. Ma questi scritti contengono alcuni grossi errori, come per es. l'asserto che il cerchio osculatore taglia necessariamente la curva in quattro punti consecutivi: tale errore fu rilevato da Giovanni Bernoulli; tuttavia, nel suo articolo del 1692, Leibniz difese la sua affermazione originale, insistendo nel sostenere che un cerchio non poteva mai attraversare una curva, dove la toccava.

Nel 1692 il Leibniz scrisse una memoria nella quale pose i fondamenti della teoria degli inviluppi. Questa fu ulteriormente svolta in un altro scritto del 1694, nel quale introdusse per la prima volta i termini «coordinate» e «assi delle coordinate».

Leibniz pubblicò anche parecchi scritti su argomenti di meccanica; ma alcuni di essi contengono errori, che dimostrano che egli non ne intendeva i princìpi. Così nel 1685 scrisse una memoria per trovare la pressione esercitata da una sfera di peso W, posta fra due piani inclinati sull'orizzonte di angoli complementari. Egli affermò che la pressione su ciascun piano deve constare di due componenti, «unum quo decliviter descendere tendit, alterum quo planum declive premit». Disse inoltre che, per ragioni metafisiche, la somma delle due pressioni doveva essere uguale a W. Quindi se R e R' sono le pressioni cercate e α e $\pi - \alpha$ le inclinazioni dei piani, egli trovò che:

$$R = \frac{1}{2} W (1 - \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha),$$

$$R' = \frac{1}{2} W (1 - \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha),$$

Invece i valori veri sono $R = W \cos \alpha$ e $R' = W \operatorname{sen} \alpha$. Ciò nonostante alcuni scritti di Leibniz sulla meccanica sono pregevoli. I più importanti furono: due, del 1680 e 1694, nei quali egli risolve il problema di trovare una curva isocrona; uno, del 1697, sulla curva di più rapida discesa (fu questo il problema mandato come sfida a Newton); e due, del 1691 e del 1692, nei quali stabilì l'equazione caratteristica della curva formata da una corda

flessibile sospesa a due punti, ossia della catenaria, ma non ne dette alcuna dimostrazione. Quest' ultimo problema era stato proposto in origine da Galileo.

Nel 1689, ossia due anni dopo che erano stati pubblicati i *Principia*, Leibniz scrisse sui movimenti dei pianeti, che stabilì esser prodotti da un moto dell'etere. Non solo le equazioni del moto da lui ottenute sono errate, ma le deduzioni che ne trasse non erano nemmeno in accordo con gli assiomi da lui scelti. In un'altra memoria del 1706, ossia circa vent'anni dopo che erano stati scritti i *Principia*, egli ammise di aver commesso alcuni errori nel suo primo scritto, ma mantenne le sue antecedenti conclusioni e terminò dicendo: «è certo che la gravitazione genera una nuova forza diretta in ogni istante verso il centro, ma anche la forza centrifuga ne genera un'altra opposta al centro.... La forza centrifuga può esser considerata sotto due aspetti, secondo che il movimento si tratta come se avvenisse lungo la tangente alla curva o lungo l'arco del cerchio stesso». Appare chiaro da questo scritto che egli realmente non intendeva i princìpi della dinamica, onde non è necessario considerare più particolarmente l'opera sua su tale argomento. Gran parte di essa è viziata da una costante confusione fra momento ed energia cinetica: quando la forza è «passiva» egli usa il primo, che chiama la *vis mortua*, come misura d'una forza; invece quando la forza è «attiva» egli usa l'altra, il doppio della quale chiama *vis viva*.

Le serie considerate da Leibniz son quelle che dànno

$$e^x, \log (1 + x), \operatorname{sen} x, \operatorname{sen\,ver} x, \operatorname{arc\,tg} x;$$

tutte erano state antecedentemente pubblicate ed egli raramente, se pur lo fece, vi aggiunse alcune dimostrazioni. Leibniz (come Newton) riconobbe l' importanza delle osservazioni di Giacomo Gregory sulla necessità di esaminare se le serie infinite siano convergenti o divergenti, e propose un criterio per distinguere quelle convergenti, i cui termini sono alternativamente positivi e negativi. Nel 1693 spiegò il metodo dello sviluppo mediante coefficienti indeterminati, ma le applicazioni che ne fece non sono scevre di errori.

Riassumendo, a me sembra che l'opera di Leibniz mostri una grande abilità nell'analisi, ma gran parte di essa non è finita, e quando egli lascia i suoi simboli e cerca di interpretare i suoi risultati commette frequentemente degli errori. Indubbiamente il tempo, che egli doveva impiegare nella politica, nella filosofia e nella letteratura, debbono avergli impedito di elaborare completamente qualsiasi problema o di scrivere un'esposizione sistematica delle sue vedute; ma gli errori di principio, che ricorrono nei suoi scritti, non trovano scusa. Talune delle sue memorie contengono cenni di procedimenti che sono poi divenuti pregevoli metodi analitici, come l'uso dei determinanti e dei coefficienti indeterminati; ma, quando uno scrittore versatile come il Leibniz, lancia innumerevoli suggerimenti, è probabile che alcuni di essi risultino pregevoli; e il solo enumerare questi (che egli non elaborò), senza segnalare gli altri (che sono errati) dà una falsa impressione del valore dell'opera sua. Però ad onta di ciò i suoi titoli alla gloria riposano sopra una base sicura, poichè grazie ai suoi contributi al calcolo differenziale, il suo nome è inseparabilmente collegato con uno dei principali strumenti dell'analisi, proprio come quello di Cartesio — altro filosofo — lo è con la geometria analitica [1]).

Leibniz non fu che uno dei vari scrittori continentali, i cui lavori negli *Acta Eruditorum* resero familiare ai matematici l'uso del calcolo differenziale. I più importanti degli altri furono Giacomo e Giovanni Bernoulli, entrambi caldi amici ed ammiratori di Leibniz, il quale deve in gran parte la sua fama al loro devoto sostegno. Non solo essi presero una parte eminente in quasi tutte le questioni matematiche allora studiate, ma quasi tutti i principali matematici del continente, durante la prima metà del secolo XVIII, subirono direttamente o indirettamente l'influenza di uno di essi o di entrambi.

1) Non pare inopportuno ricordare anche che il Leibniz deve considerarsi come il vero fondatore della logica matematica. (G. L.).

I Bernoulli [1]) (o come talora, forse più correttamente, vengono chiamati i Bernouilli) appartennero ad una famiglia di origine olandese, cacciata dai Paesi Bassi per le persecuzioni spagnole e finalmente stabilitasi in Svizzera, a Basilea. Il primo membro che si distinse nelle matematiche fu Giacomo.

Giacomo Bernoulli [2]). — *Jacopo* o *Giacomo Bernoulli* nacque a Basilea il 27 dicembre 1654. Nel 1687 conseguì una cattedra di matematiche in quella Università e la occupò fino alla sua morte, avvenuta il 16 agosto 1705.

Fu uno dei primi a porre in evidenza quale potente istrumento di analisi fosse il calcolo infinitesimale e lo applicò a diversi problemi, senza però inventare egli stesso alcun nuovo procedimento. La sua grande influenza venne costantemente e con buon esito esercitata in favore dell'uso del calcolo differenziale, e le sue lezioni su di esso, — che vennero scritte in forma di due saggi nel 1691 e sono pubblicate nel secondo volume delle sue opere — mostrano quanto completamente egli si fosse assimilati i principî della nuova analisi. Queste lezioni, che contengono il primo uso del nome integrale, rappresentano il più antico pubblico tentativo per fondare un calcolo integrale; imperocchè Leibniz aveva trattato ogni problema separatamente, ma non aveva stabilito alcuna regola generale sull'argomento.

Le più importanti scoperte di Giacomo Bernoulli furono: la soluzione del problema di trovare una curva isocrona; la dimostrazione dell'essere esatta la costruzione della catenaria data dal Leibniz e l'estensione di questa a funi di densità variabile e sottoposte ad una forza centrale; la determinazione della forma (*curva elastica*) assunta da una verga elastica fissata ad una

1) Vedi l'articolo relativo nella *Allgemeine Deutsche Biographie*, vol. II, Leipzig, 1875, pp. 470-483.

2) Vedi l'*Éloge* scrittone da B. DE FONTENELLE, Parigi, 1766; e anche il vol. II della *Histoire* del MONTUCLA. Una edizione completa delle opere di GIACOMO BERNOULLI fu pubblicata in 2 volumi a Ginevra nel 1744; un sunto sulla sua vita sta come prefazione al vol. I.

Un'aggiunta a questa edizione è rappresentata dall'opuscolo di P. SCHAFHEITLIN, *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691-92* (Ostwald's Klassiker, Nr. 211, Leipzig, 1924). (G. L.).

estremità, mentre sull'altra agisce una forza data; la determinazione della forma assunta da un lenzuolo flessibile rettangolare con due lati fissati orizzontalmente e piena di un liquido pesante, (*lintearia*); e finalmente quella della forma di una vela gonfiata dal vento (*velaria*). Nel 1696 egli offerse un premio per la soluzione generale del problema degli isoperimetri, ossia per la ricerca delle figure di data specie e di dato perimetro racchiudenti un'area massima: la soluzione data da lui e pubblicata nel 1701 è esatta fin dove arriva. Nel 1698 pubblicò un saggio sul calcolo differenziale e sulle sue applicazioni alla geometria; ivi egli studiò le principali proprietà della spirale equiangola (o logaritmica) e specialmente notò che varie curve, che se ne possono dedurre, sono identiche alla curva originale: colpito da questo fatto, chiese, ad imitazione di Archimede, che si incidesse sulla sua tomba una spirale equiangolare coll' iscrizione «*eadem numero mutata resurget*». Egli pubblicò nel 1695 anche una edizione della *Geometria* di Cartesio. Nella sua *Ars Conjectandi*, pubblicata nel 1713, stabilì i principî fondamentali del calcolo delle probabilità; nel corso dell'opera egli definì i numeri noti sotto il suo nome [1]) e ne spiegò l' uso; dette pure alcuni teoremi sulle differenze finite. Le sue lezioni più importanti vertono per la massima parte sulla teoria delle serie e vennero pubblicate da Nicolò Bernoulli nel 1713.

Giovanni Bernoulli [2]). — *Giovanni Bernoulli*, fratello di Giacomo, nacque a Basilea il 7 agosto 1667 e vi morì il 1º gennaio 1748. Occupò la cattedra di matematiche di Groninga dal 1695 al 1705 e quella di Basilea, dove successe a suo fratello, dal 1705 al 1748. Si condusse nel modo più iniquo contro quanti non riconoscevano i suoi meriti nella misura che a lui sembrava giusta: come un esempio della sua indole, si può citare, che cercò di

1) Una bibliografia dei numeri del BERNOULLI è stata data da G. S. ELY, nell'*American Journal of Mathematics*, 1882, vol. V, pp. 228-235.

2) Il D'ALEMBERT scrisse un *Éloge* laudativo sull'opera e l' influenza di Giovanni Bernoulli, ma rifiutò esplicitamente d'occuparsi della sua vita privata e delle sue dispute; vedi anche MONTUCLA, vol. II. Un'edizione completa delle opere di GIOVANNI BERNOULLI fu pubblicata a Ginevra in 4 volumi nel 174?, e la sua corrispondenza col Leibniz in 2 volumi, nella stessa città, nel 1745.

mettere al posto di una sua soluzione inesatta del problema delle curve isoperimetriche un'altra soluzione rubata a suo fratello Giacomo; mentre espulse da casa sua il figliuolo Daniele, perchè ottenne dall'Accademia francese un premio, che sperava di ricevere egli stesso. Fu nondimeno il miglior maestro dell'età sua, e godè la prerogativa di ispirare ai suoi scolari uno zelo per le matematiche tanto appassionato quanto quello che sentiva egli stesso. La generale adozione sul continente della notazione differenziale, in sostituzione della flussionale, fu in gran parte dovuta alla sua influenza.

Prescindendo dalle sue innumerevoli controversie, le principali scoperte di Giovanni Bernoulli furono il calcolo esponenziale, il trattamento della trigonometria come un ramo di analisi, la determinazione delle condizioni affinchè una linea sia geodetica, la determinazione delle traiettorie ortogonali, la soluzione del problema della brachistocrona, l'affermazione che un raggio di luce percorre una via tale che $\Sigma \mu ds$ risulti minimo, e l'enunciato del principio del lavoro virtuale. Io credo che fosse il primo a indicare l'accelerazione dovuta alla gravità col simbolo algebrico g; giunse così alla formula $v^2 = 2\,gh$; lo stesso risultato era stato espresso prima mediante la proporzione $v_1^2 : v_2^2 = h_1 : h_2$. La notazione φx per indicare una funzione [1]) di x fu introdotta da lui nel 1718; essa sostituì la notazione X o ξ da lui proposta nel 1698; però l'adozione generale dei simboli come f, F, φ, ψ.... per rappresentare le funzioni sembra esser dovuta in massima parte ad Eulero e Lagrange.

Parecchi componenti la stessa famiglia, ma appartenenti alla generazione posteriore, arricchirono le matematiche col loro insegnamento e i loro scritti. I più importanti di questi furono i tre figli di Giovanni, cioè Nicolò, Daniele e Giovanni *junior*; e i due figli di questo, che portarono i nomi di Giovanni e Giacomo. Per completare questo cenno aggiungo le date relative: *Nicolò Bernoulli*, il maggiore dei tre figli di Giovanni, nacque il 27 gennaio 1695 e si annegò a Pietroburgo, dove era professore, il 26 lu-

1) Sul significato dato dapprima alla parola *funzione*, vedi una nota di M. CANTOR, in l'*Intermédiaire des mathématiciens*, gennaio 1896, vol. III, pp. 22-23.

glio 1726. *Daniele Bernoulli*, secondo figlio di Giovanni, nacque il 9 febbraio 1700 e morì il 17 marzo 1782; fu professore prima a Pietroburgo e quindi a Basilea e divide con Eulero la somma distinzione di aver guadagnato non meno di dieci volte il premio annuale dell'Accademia francese: avrò occasione di riparlarne un po' più avanti. *Giovanni Bernoulli*, fratello minore di Nicolò e di Daniele, nacque il 18 maggio 1710 e morì nel 1790; fu anch'egli professore a Basilea. Lasciò due figli, *Giovanni* e *Giacomo*, dei quali il primo, nato il 4 dicembre 1744 e morto il 10 luglio 1807, fu astronomo reale e direttore degli studî matematici a Berlino; mentre l'altro, nato il 17 ottobre 1759 e morto nel luglio del 1789, fu successivamente professore a Basilea, Verona e Pietroburgo.

Sviluppo dell'analisi sul Continente.

Mettendo pel momento da banda i matematici inglesi della prima metà del secolo XVIII, parliamo ora di un certo numero di scrittori continentali, poco al di sopra della mediocrità [1]), ai quali basterà quindi dedicare soltanto poche parole. I loro scritti segnano i passi, coi quali la geometria analitica ed il calcolo differenziale e integrale vennero perfezionati e resi familiari ai matematici. Essi furono quasi tutti discepoli dell' uno o dell'altro dei vecchi Bernoulli e vissero contemporaneamente, cosicchè è difficile disporli in ordine cronologico. I più eminenti di essi sono *Cramer*, *de Gua*, *de Montmort*, *Fagnano*, *L'Hospital*, *Nicole*, *Parent*, *Riccati*, *Saurin* e *Varignon*.

L'Hospital. — *Guglielmo Francesco Antonio L'Hospital*, marchese di St. Mesme, nato a Parigi nel 1661 e quivi morto il 2 febbraio 1704, fu tra i primi scolari di Giovanni Bernoulli, il quale nel 1691 passò alcuni mesi in casa di L' Hospital a Parigi per insegnargli il nuovo calcolo. Sembra strano, ma è sostanzialmente

1) I traduttori lasciano all'autore la responsabilità di questo severo giudizio. (G. L.).

vero, che la cognizione del calcolo infinitesimale e la facoltà di usarlo erano allora limitate a Newton, a Leibniz ed ai due vecchi Bernoulli; e giova notare che essi furono i soli matematici che risolsero i più difficili problemi allora proposti come sfide. Non esisteva allora alcun libro di testo sull'argomento; e il merito di aver scritto il primo trattato che spiegasse i principî e l'uso di quel metodo, è dovuto a L' Hospital: venne pubblicato nel 1696 col titolo *Analyse des infiniments petits*. Esso contiene una prima espressione del valore limite di una funzione, che per un certo valore della variabile assume la forma indeterminata 0 : 0, problema risoluto poi completamente da Giovanni Bernoulli nel 1704. Quest'opera ebbe larga diffusione; essa divulgò in Francia l' uso generale della notazione differenziale e aiutò a renderla nota in Europa [1]). Un supplemento, contenente un consimile trattamento del calcolo integrale, insieme ad aggiunte al calcolo differenziale che erano state fatte nel mezzo secolo seguente, fu pubblicato a Parigi negli anni 1754-56, da L. A. de Bougainville.

L' Hospital raccolse moltissime delle sfide lanciate dal Leibniz, dai Bernoulli, e da altri matematici continentali di quel tempo; diede in particolare una soluzione del problema della brachistocrona e cercò la forma del solido di minima resistenza, problema di cui Newton aveva nei *Principia* enunciato il risultato. Scrisse anche un trattato analitico sulle sezioni coniche, che fu pubblicato nel 1707 e fu stimato per circa un secolo come l'opera classica su tale argomento [2]).

1) Il successo di quest'opera è attestato dalle ristampe che ebbe (1716, 1768, 1781) e dalle traduzioni in inglese (1730) e latino (Vienna, 1764, 1790).

2) Osserviamo che nel postumo *Traité des sections coniques*, Paris, 1720, del marchese DE L' HOSPITAL è contenuto il germe, ed anche qualche cosa di più, della teoria delle polari reciproche, e credo che essa non si trovi in opere più antiche; infatti vi si trovano le dimostrazioni dei teoremi seguenti:

a) Il luogo dei poli delle tangenti d' un cerchio di centro C e raggio r, rispetto ad un altro cerchio di centro A, è un'ellisse, una parabola od un' iperbole secondo che $r \gtreqless CA$;

b) L' inviluppo delle polari dei punti di una conica a centro rispetto ad un cerchio avente per centro un fuoco è un cerchio (Vedi op. cit., pp. 273-276).

Beninteso che L' HOSPITAL non parla di poli, nè di polari, ma i suoi termini tradotti in linguaggio moderno suonano come sopra si è detto.

Varignon [1]). — *Pietro Varignon*, nato a Caen nel 1654 e morto a Parigi il 22 dicembre 1722, fu intimo amico di Newton, di Leibniz e di Bernoulli e fu, dopo L'Hospital, il più antico e più potente patrocinatore in Francia dell'uso del calcolo differenziale. Sentì la necessità di avere un modo di determinare la convergenza delle serie, ma tali difficoltà analitiche oltrepassarono le sue facoltà. Semplificò le dimostrazioni di molte delle proposizioni principali della meccanica e nel 1687 rifece la trattazione di quella scienza, basandola sulla composizione delle forze. Le sue opere vennero pubblicate a Parigi nel 1725.

De Montmort; Nicole. — *Pietro Raimondo de Montmort*, nato a Parigi il 27 ottobre 1678 e morto ivi il 7 ottobre 1719, s'occupò delle differenze finite. Determinò nel 1713 la somma di n termini di una serie finita della forma

$$na + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta a + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^2 a + \ldots ;$$

teorema che sembra essere stato indipendentemente riscoperto da Cristiano Goldbach (nato il 18 marzo 1690, morto il 20 novembre 1674) nel 1718. — *Francesco Nicole*, nato a Parigi il 23 dicembre 1683 e morto quivi il 18 gennaio 1758, pubblicò il suo *Traité du calcul des différences finies* nel 1717, che contiene ad un tempo le regole per formare le differenze e per effettuare la somma di serie date. Oltre a ciò nel 1706 scrisse un'opera sulle *roulettes* in generale ed in particolare sulle epicicloidi sferiche e nel 1729 e nel 1731 pubblicò due memorie illustrative del saggio di Newton intorno alle cubiche.

Parent; Saurin; De Gua. — *Antonio Parent*, nato a Parigi il 16 settembre 1666 e morto quivi il 26 settembre 1716, scrisse nel 1700 sulla geometria analitica a tre dimensioni [2]). Le sue

1) Vedi l'*Éloge* di B. DE FONTENELLE, Parigi, 1766.

2) Parent ebbe per primo l'idea di rappresentare una superficie con un'equazione fra le tre coordinate di un suo punto; onde egli preparò la geometria analitica dello spazio.

opere vennero raccolte e pubblicate in tre volumi a Parigi nel 1713. — *Giuseppe Saurin*, nato a Courtaison nel 1659 e morto a Parigi il 29 dicembre 1737, fu il primo a mostrare come le tangenti nei punti multipli delle curve potevano determinarsi coll'aiuto dell'analisi. — *Giampaolo De Gua de Malves*, nato a Carcassonne nel 1713 e morto a Parigi il 2 giugno 1785, pubblicò nel 1740 un'opera sulla geometria analitica, ove applicò tale scienza a trovare le tangenti, gli assintoti e vari punti singolari di una curva algebrica senza l'aiuto del calcolo differenziale; ed inoltre mostrò come i punti singolari e i circuiti isolati venissero modificati per effetto di una proiezione centrale. Diede poi la dimostrazione della regola dei segni di Cartesio, che si trova nella maggior parte delle opere moderne; non è sicuro se Cartesio la dimostrasse mai rigorosamente e sembra che Newton la riguardasse come evidente.

Cramer. — *Gabriele Cramer*, nato a Ginevra il 31 luglio 1704 e morto a Bagnols, nei pressi di Nîmes, il 4 gennaio 1752, fu professore a Ginevra. L'opera che lo rese più noto è un trattato sulle curve algebriche [1]), pubblicato nel 1750, il quale è abbastanza completo fino al punto a cui giunge; esso contiene la prima dimostrazione del fatto che una curva dell'ordine n è in generale determinata da $\frac{1}{2} n\ (n+3)$ punti di essa: quest'opera merita ancora di esser letta. Oltre questa pubblicò le opere dei due vecchi Bernoulli e scrisse (1730) sulla causa fisica della forma sferoidale dei pianeti e del moto dei loro assi e (1746) sul metodo newtoniano di trattare le curve cubiche.

Riccati. — *Jacopo Francesco conte Riccati*, nato a Venezia il 28 maggio 1676 e morto a Treviso il 15 aprile 1754, si adoprò molto per diffondere la conoscenza della filosofia newtoniana in Italia. Oltre l'equazione differenziale nota col suo nome, che riuscì ad integrare in alcuni casi, trattò la questione della possibilità di abbassare l'ordine di una data equazione differenziale. Le sue

1) Vedi CANTOR, cap. CXVI.

opere vennero pubblicate in quattro volumi (Lucca, 1761-1765). Ebbe due figli che scrissero su alcuni punti secondari del calcolo integrale e delle equazioni differenziali, e applicarono il calcolo a parecchie questioni meccaniche; furono: *Vincenzo*, nato l'11 gennaio 1707 e morto il 17 gennaio 1775, e *Giordano*, nato il 25 febbraio 1709 e morto il 20 luglio 1790.

Fagnano. — *Giulio Carlo* conte *Fagnano* e marchese *de' Toschi*, nato a Sinigaglia il 6 dicembre 1682 e morto il 26 settembre 1766, può dirsi il primo scrittore che abbia richiamata l'attenzione dei matematici sulla teoria delle funzioni ellittiche. Non riuscendo a rettificare l'ellisse o l'iperbole, il Fagnano cercò di determinare archi, la cui differenza potesse essere rettificabile. Fece anche rilevare la notevole analogia esistente fra gli integrali rappresentanti un arco di cerchio ed un arco di lemniscata. Finalmente dimostrò la formula:

$$\pi = 2\, i \log \{ (1 - i) \,/\, (1 + i) \},$$

nella quale i sta per $\sqrt{-1}$ [1]). Le sue opere furon raccolte e pubblicate in due volumi a Pesaro nel 1750 sotto il titolo di *Produzioni matematiche* [2]).

Era inevitabile che alcuni matematici movessero obiezioni all'analisi basata sul calcolo infinitesimale. I più eminenti tra questi furono il *Viviani*, il *De La Hire*, il *Rolle*, nomi che già furono citati alla fine del capitolo XV.

Fino a questo momento nessuno della scuola di Leibniz e dei due vecchi Bernoulli aveva mostrata abilità eccezionale; ma, per merito di molti scrittori di second'ordine, i metodi e il linguaggio della geometria analitica e del calcolo differenziale verso il 1740

1) Nel tomo IX del *Giornale* di CRELLE, Berlino, 1832, p. 404, SCHELLBACH dimostrò che $\pi = \frac{2}{i} \log i$ (si noti che $\frac{1+i}{1-i} = i$) senza menzionare il Fagnano; e così trovò $\pi = 4\,(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots)$.

2) Altra edizione: *Opere matematiche del Marchese G. C. de' Toschi di Fagnano*, pubbl. per cura di V. VOLTERRA, G. LORIA, D. GAMBIOLI, 3 vol. (Roma, 1911-12). (G. L.).

eran divenuti molto noti. La fine di quella scuola è segnata dall'apparire di Clairaut, d'Alembert e Daniele Bernoulli, le loro vite entrano nel periodo considerato nel prossimo Capitolo; ma, sebbene sia difficile tracciare una linea netta di separazione, la quale separi mediante una data definita i matematici considerati in esso da quelli dei cui scritti si parla nel presente Capitolo, tutto sommato reputo meglio considerare qui le opere di questi tre matematici.

Clairaut. — *Alessio Claudio Clairaut* nacque a Parigi il 13 maggio 1713 e ivi morì il 17 maggio 1765. Egli appartiene al piccolo gruppo di fanciulli i quali, dotati di precocità eccezionale, sopravvivono e mantengono le loro eminenti facoltà anche da grandi. Fino dall'età di dodici anni egli scrisse una memoria su quattro curve geometriche; ma la sua prima opera importante fu un trattato sulle curve gobbe pubblicato a diciott'anni, opera che gli procurò l'ammissione all'Accademia francese. Nel 1731 diede una dimostrazione del fatto, notato da Newton, che tutte le curve di terz'ordine sono proiezioni di una delle cinque parabole divergenti.

Nel 1741 il Clairaut fece parte di una spedizione scientifica per misurare la lunghezza di un grado di meridiano sulla superficie della terra e al suo ritorno (1743) pubblicò la *Théorie de la figure de la terre*. È questa fondata sopra uno scritto del Maclaurin, in cui è dimostrato che una massa di fluido omogeneo in rotazione intorno ad una retta passante per il suo baricentro assume, per effetto della mutua attrazione delle sue molecole, la forma di uno sferoide. L'opera del Clairaut tratta degli sferoidi eterogenei e contiene la dimostrazione della formola, che porta il suo nome, per l'accelerazione dovuta alla gravità in un luogo di latitudine l, ossia

$$g = G \{ 1 + (\frac{5}{2}\, m - \varepsilon) \operatorname{sen}^2 l \},$$

in cui G è il valore della gravità all'equatore, m il rapporto della forza centrifuga alla gravità, pure all'equatore e ε l'eccentricità di una sezione del meridiano terrestre. Nel 1849 lo Stokes [1]) mostrò che lo stesso risultato era vero qualunque fosse l' interna costituzione o densità della terra, purchè la superficie fosse uno sferoide di equilibrio di piccola eccentricità.

Impressionato dal potere della geometria, quale è dimostrato negli scritti di Newton e del Maclaurin, il Clairaut abbandonò l'analisi e il suo successivo lavoro, la *Théorie de la lune* pubblicata nel 1752, è d' indole rigorosamente newtoniana. Esso contiene la spiegazione del moto dell'apside, che avea antecedentemente occupato gli astronomi; il Clairaut lo aveva dapprima reputato tanto inesplicabile, che era sul punto di pubblicare una nuova ipotesi circa la legge dell'attrazione, quando gli occorse di spingere l'approssimazione fino al terzo ordine e trovò che il risultato concordava con le osservazioni; quest'opera fu seguìta nel 1754 da alcune tavole lunari. Successivamente il Clairaut compose vari scritti sull'orbita della luna e sul movimento delle comete affetto dalla perturbazione dei pianeti, e in particolare sulla traiettoria della cometa di Halley.

La sua crescente popolarità in società ostacolò il suo lavoro scientifico: «engagé» dice Bossut, «à des soupers, à des veilles, entraîné par un goût vif pour les femmes, voulant allier le plaisir à ses travaux ordinaires, il perdit le repos, la santé, enfin la vie a l'âge de cinquante-deux ans».

D'Alembert [2]). — *Jean-le-Rond d'Alembert*, nato a Parigi il 16 novembre 1717 e quivi morto il 19 ottobre 1783, era figlio illegittimo del cavàliere Destouches. Abbandonato da sua madre sui gradini della chiesetta di St. Jean-le-Rond, allora situata sotto il grande portico di Nôtre Dame, egli fu condotto dal commissario della parrocchia, il quale, seguendo l'uso comune in simili casi, gli pose il nome di Jean-le-Rond; ignoro per qual titolo

1) Vedi *Cambridge Philosophical Transactions*, vol. VIII, pp. 672-695.

2) CONDORCET e J. BASTIEN hanno lasciato cenni della vita di D'ALEMBERT: le sue opere letterarie sono state pubblicate, ma non esiste un'edizione completa dei suoi scritti scientifici. Alcuni articoli e lettere scoperte in tempi relativamente recenti, vennero pubblicati da C. HENRY a Parigi nel 1887. Su D'Alembert àvvi un prezioso libriccino del BERTRAND nella collezione di *Les grands écrivains de la France*, Paris, 1895.

egli ottenesse poi il diritto di prefiggere il De al suo nome. Fu messo a dozzina dalla parrocchia presso la moglie di un povero vetraio abitante vicino alla cattedrale, e sembra che egli vi trovasse una vera famiglia, sebbene umile. Pare che suo padre non l'avesse abbandonato e lo mantenesse alla scuola, dove ottenne una buona istruzione matematica.

Un saggio nel calcolo integrale da lui scritto nel 1738 ed un altro nel 1740 sui *ricochets* [1]) richiamò l'attenzione su di lui e nell'anno stesso egli venne eletto membro dell' Accademia francese; il che fu probabilmente dovuto all' influenza paterna. D'Alembert è degno di elogio perchè rifiutò assolutamente di abbandonare la madre adottiva, con la quale continuò a vivere fino alla morte di lei, avvenuta nel 1757. Non può dirsi che ella vedesse di buon occhio i trionfi di lui, imperocchè quando già egli era giunto all' apice della sua fama, essa gli faceva delle rimostranze, perchè sciupava il suo ingegno in tali lavori: «vous ne serez jamais qu'un philosophe», essa diceva, «et qu'est-ce qu'un philosophe? c'est un fou qui se tourmente pendant sa vie, pour qu'on parle de lui lorsqu'il n'y sera plus».

Quasi tutte le sue opere matematiche vennero scritte durante gli anni dal 1743 al 1754. La prima di queste fu il suo *Traité de dynamique*, pubblicato nel 1743, nel quale è enunciato il principio noto col suo nome, cioè che le «forze interne d'inerzia» (cioè le forze che resistono all'accelerazione) sono uguali ed opposte a quelle che producono l'accelerazione. Esso può dedursi dal secondo discorso di Newton sulla sua terza legge del moto; però le conseguenze non ne erano state segnalate prima. L'applicazione del principio di D'Alembert permette di ottenere le equazioni differenziali del moto di qualsiasi sistema rigido.

Nel 1744 il D'Alembert pubblicò il suo *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, in cui applicò quel principio ai fluidi: ciò lo condusse ad equazioni a derivate parziali, che allora non era in grado di risolvere. Nel 1745 svolse quella parte dell'argo-

1) La parola *ricochets* che esprime quel salto che fa una pietra piatta od altra lamina pesante lanciata con forza sopra una superficie d'acqua, non ha l'equivalente in italiano.

mento, che concerne il moto dell'aria nella sua *Théorie générale des vents*, e ciò lo condusse ancora ad equazioni differenziali parziali; una seconda edizione di quest'opera (1746) venne dedicata a Federigo il Grande di Prussia e gli procurò un invito a Berlino e l'offerta d'una pensione; egli declinò il primo, ma successivamente, dopo qualche pressione, mise in tasca e il suo orgoglio e la seconda. Nel 1747 applicò il calcolo differenziale al problema di una corda vibrante e giunse di nuovo ad una equazione differenziale parziale.

La sua analisi lo aveva condotto tre volte ad un'equazione della forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ed egli riuscì a dimostrare essere soddisfatta da

$$u = \varphi (x + t) + \psi (x - t),$$

dove φ e ψ sono funzioni arbitrarie. È interessante di esporre la sua soluzione, quale fu pubblicata nelle *Memorie dell'Accademia di Berlino* del 1747. Egli comincia col dire che se si indica $\frac{\partial u}{\partial x}$ con p e $\frac{\partial u}{\partial t}$ con q, allora è

$$du = pdx + qdt;$$

ma in forza dell'equazione data $\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}$, quindi $pdt + qdx$ è pure un differenziale esatto: indichiamolo con dv.

Perciò

$$dv = pdt + qdx.$$

Quindi

$$du + dv = (pdx + qdt) + (pdt + qdx) = = (p+q)\ (dx+dt);$$

e

$$du - dv = (pdx + qdt) - (pdt + qdx) = = (p - q)\ (dx - dt).$$

Così $u + v$ deve essere una funzione di $x + t$; ed $u - v$ di $x - t$. Possiamo quindi porre:

$$u + v = 2\varphi\ (x + t)$$
$$u - v = 2\psi\ (x - t)$$

da cui

$$u = \varphi\ (x + t) + \psi\ (y - t).$$

D'Alembert aggiunse che le condizioni del problema fisico di una corda vibrante richiedono che, quando $x = 0$, u svanisca per tutti i valori di t; quindi dev'essere identicamente

$$\varphi\ (t) + \psi\ (- t) = 0.$$

Eulero riprese a questo punto in esame la questione e dimostrò che l'equazione determinatrice della forma della corda è $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial u^2}$, e che il suo integrale generale è $u = \varphi\ (x - at) + \psi\ (x + at)$, ove φ e ψ sono funzioni arbitrarie.

I rimanenti precipui contributi dati dal D'Alembert alle matematiche riguardano l'astronomia fisica; in particolare si riferiscono alla precessione degli equinozi e alle variazioni dell'obliquità dell'eclittica. Essi vennero raccolti nel suo *Système du monde* pubblicato in 3 volumi nel 1754.

Durante l'ultima parte della sua vita egli si occupò quasi esclusivamente della grande *Enciclopedia* francese; scrisse per essa l'introduzione e numerosi articoli filosofici e matematici; i migliori sono quelli sulla geometria e sulle probabilità. Il suo stile è brillante, ma non limato, e riflette fedelmente l'indole sua, che era ardita, onesta e franca. Difendeva la critica severa da lui fatta di talune mediocri opere coll'osservazione, «j'aime mieux être incivil qu'ennuyé»; mostrava un gran disprezzo pei parassiti e gli adulatori; onde non è da meravigliarsi se durante la sua vita egli avesse più nemici che amici.

Daniele Bernoulli[1]. — *Daniele Bernoulli*, il cui nome fu già menzionato e che fu di gran lunga il più grande dei giovani Bernoulli, fu contemporaneo ed intimo amico di Eulero. Nato il 9 febbraio 1700, morì a Basilea, dove era professore di filosofia naturale, il 17 marzo 1782. Nel 1714 andò a Pietroburgo come professore di matematiche; ma la rozzezza della vita sociale che vi si conduceva gli era disgustosa e non si dolse quando nel 1733 una malattia temporanea gli permise di prendere per scusa la sua salute e lasciare quel posto. Ritornò allora a Basilea e vi tenne successivamente le cattedre di medicina, metafisica e filosofia naturale.

La sua prima opera matematica fu quella intitolata *Exercitationes*, pubblicata nel 1724, la quale contiene una soluzione dell'equazione differenziale proposta dal Riccati. Due anni dopo egli rilevò per la prima volta quanto fosse utile frequentemente il risolvere un moto composto in moti di traslazione e moti di rotazione. L'opera sua principale è l'*Hydrodinamyque*, pubblicata nel 1738: essa somiglia alla *Mécanique analytique* del Lagrange, perchè è disposta in modo che tutti i risultati sono conseguenze di un unico principio, quello, in questo caso, della conservazione dell'energia. Fu seguìta da una memoria sulla teoria delle maree, alla quale, insieme alle memorie di Eulero e di Maclaurin, fu accordato un premio dall'Accademia francese: queste tre memorie rappresentano tutto quanto fu fatto su tale argomento fra la pubblicazione dei *Principia* di Newton e gli studî del Laplace. Daniele Bernoulli scrisse pure un gran numero di memorie su varie questioni meccaniche, specialmente sui problemi riguardanti le corde vibranti e le soluzioni datene dal Taylor e dal D'Alembert. Egli è il primo matematico che abbia

---

1) La sola storia che io conosca della vita di Daniele Bernoulli è l'*Éloge* scritto dall'amico suo CONDORCET. Maria Giovanni Antonio Nicolò Caritat, marchese di Condorcet, nacque in Piccardia il 17 settembre 1743 e fu vittima dei terroristi repubblicani il 28 maggio 1784. Fu segretario dell'Accademia e autore di numerosi *Éloges*. È forse più celebre per i suoi studi filosofici, letterari e politici che per quelli matematici; ma la sua trattazione matematica delle probabilità e il suo studio delle equazioni differenziali e alle differenze finite mostrano un'abilità che poteva portarlo al più alto grado, se avesse concentrata la sua attenzione nelle matematiche. Egli si sacrificò nel vano conato di ridurre il torrente rivoluzionario in un canale costituzionale.

tentato di formulare una teoria cinetica dei gas; per ciò applicò l'idea di spiegare la legge che porta i nomi di Boyle e di Mariotte.

I matematici inglesi del secolo XVIII.

Ho riunito le notizie sui matematici inglesi successori di Newton, per trattare insieme i componenti la scuola inglese. Era cosa quasi naturale che gli Inglesi adottassero nel calcolo infinitesimale la notazione di Newton di preferenza a quella di Leibniz e che, conseguentemente, la scuola inglese, dovesse in ogni caso svolgersi su linee un po' differenti da quelle continentali, dove la cognizione del calcolo infinitesimale era unicamente derivata dal Leibniz e dai Bernoulli. Ma questa separazione in due scuole distinte divenne marcatissima per opera di Leibniz e di Giovanni Bernoulli, i quali naturalmente eccitarono il risentimento degli amici di Newton; così, per quaranta o cinquant'anni, il litigio infuriò con reciproco svantaggio delle due parti. I membri più importanti della scuola inglese furono *Côtes*, *Demoivre*, *Ditton*, *David Gregory*, *Halley*, *Maclaurin*, *Simpson* e *Taylor*. Debbo nondimeno ricordare ai miei lettori, che avvicinandosi ai rempi moderni, il numero dei matematici di valore nella Gran Bretagna, in Francia, in Germania e in Italia diviene considerevolissimo, ma che, in un saggio popolare come questo libro, non posso citare se non gli uomini più eminenti.

Intorno a David Gregory, a Halley e al Ditton, non occorre spendere se non poche parole.

David Gregory. — *Davide Gregory*, nipote di Giacomo Gregory, menzionato prima, nacque ad Aberdeen il 24 giugno 1661 e morì a Maidenhead il 10 ottobre 1708; nel 1684 fu nominato professore a Edimburgo e nel 1691, per raccomandazione di Newton, professore Saviliano ad Oxford. Le sue opere principali vertono sulla geometria, e furono pubblicate nel 1684; una sull'ottica, pubblicata nel 1695, contiene il primo cenno della possibilità di fare una combinazione di lenti acromatiche ed una sulla geometria, la fisica e l'astronomia newtoniana, fu pubblicata nel 1701.

Halley. — *Edmondo Halley*, nato a Londra nel 1656 e morto a Greenwich nel 1742, fu educato nella Scuola di S. Paolo a Londra e nel Collegio della Regina in Oxford; nel 1703 successe al Wallis come professore Saviliano e nel 1720 fu nominato astronomo reale, succedendo al Flamsteed, del quale nel 1712 pubblicò la prima ed imperfetta edizione della *Historia Coelestis Britanica*. Il nome dell' Halley va ricordato per il modo generoso col quale assicurò l' immediata pubblicazione dei *Principia* di Newton nel 1687. La maggior parte del suo lavoro originale riguarda l'astronomia ed argomenti affini e non entra nei limiti di questo libro; basti dire che l'opera sua è di qualità eccellente e che il Lalande ed il Mairan ne parlano col più alto elogio. Halley ricostruì congetturalmente l' VIII libro perduto delle *Coniche* di Apollonio, e nel 1710 diede in luce una magnifica edizione completa di quest'opera: pubblicò pure le opere di Sereno, quelle di Menelao e alcune delle minori di Apollonio. Ebbe a sua volta per successore a Greenwich, come astronomo reale, il Bradley [1]).

Ditton. — *Onofrio Ditton* nacque a Salisbury il 29 maggio 1675 e morì a Londra nel 1715 all'ospedale di Cristo, dove insegnava matematiche. Non sembra che si occupasse molto di matematiche fino alla sua venuta in Londra verso il 1705 e la sua morte immatura fu per la scienza inglese una grave perdita. Pubblicò nel 1506 un trattato sulle flussioni; questo ed un'altra opera simile di Guglielmo Jones, stampata nel 1711, tennero in Inghilterra su per giù lo stesso posto che il trattato di L' Hospital occupò in Francia; nel 1709 Ditton pubblicò un'algebra e nel 1762 un trattato sulla prospettiva. Scrisse anche molte memorie sulle *Philosophical Transactions*; fu il primo

1) Giacomo Bradley, nato nella Contea di Gloucester nel 1692 e morto nel 1762, fu l'astronomo più distinto della prima metà del secolo XVIII. Le sue scoperte più importanti furono la spiegazione dell' aberrazione astronomica (1729), la causa della nutazione (1748) e una formola empirica per le correzioni rese necessarie dalla rifrazione. Non è forse troppo il dire che egli fu il primo astronomo che trasformò l'arte dell'osservare in una scienza metodica.

scrittore, che tentasse di spiegare con principî matematici il fenomeno della capillarità; finalmente inventò un metodo per trovare la longitudine, che fu di poi usato in varie occasioni.

Taylor [1]). — *Brook Taylor*, nato ad Edmonton il 18 agosto 1685 e morto a Londra il 29 decembre 1731, fu istruito nel Collegio di S. Giovanni a Cambridge e fu tra i più entusiastici ammiratori di Newton. A partire dall'anno 1712 scrisse numerose memorie per le *Philosophical Transactions*, nelle quali, tra le altre cose, trattò del moto dei proiettili, del centro d'oscillazione e delle forme assunte dai liquidi innalzantisi per capillarità. Nel 1719 declinò il segretariato della Società Reale e abbandonò lo studio delle matematiche. Il suo primo lavoro, e quello che lo rese universalmente noto, è il *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, pubblicato a Londra nel 1715. Esso contiene (prop. 7) una dimostrazione del ben noto teorema:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(x) + \dots,$$

mediante il quale una funzione ad una sola variabile può essere sviluppata secondo le potenze intere e positive di essa. Egli non si occupò della convergenza di quella serie e la sua dimostrazione, che implica numerose ipotesi, non merita d'esser qui riportata. L'opera citata racchiude anche parecchi teoremi sulla interpolazione. Taylor fu il primo scrittore che trattasse del cambiamento della variabile indipendente; fu forse il primo a mostrare la possibilità del calcolo con operazioni e, come indica con y_n l'n^{mo} derivata di y_n, così usa y_{-1} per rappresentare l' integrale di y; egli è finalmente di consueto riconosciuto come creatore della teoria delle differenze finite.

Alle applicazioni del calcolo a varie questioni che leggonsi nel *Methodus*, non è stata prestata tutta l'attenzione che meritano.

1) Un cenno biografico di lui scritto da Sir Guglielmo Young è preposto alla *Contemplatio philosophica*; questa fu stampata a Londra nel 1793 per essere messa privatamente in circolazione, ed è ora rarissima. Alcune sue lettere furono pubblicate da H. Bateman, *Bibl. math.*, ser. III, tomo VII, 1907.

La più importante di esse è la teoria delle vibrazioni traversali delle corde, problema che aveva occupato i primi matematici. In questa ricerca il Taylor dimostra che il numero di semi-oscillazioni eseguite in un secondo è espresso da

$$\pi \sqrt{(DP \,/\, LN)}\,,$$

dove L è la lunghezza della corda, N il suo peso, P il peso che la tende e D la lunghezza del pendolo a secondi. Questo risultato è esatto; ma per giungervi egli ammette che ogni punto della corda passerà per la propria posizione d'equilibrio nel medesimo istante, restrizione che il D'Alembert dimostrò in seguito non necessaria. Taylor trovò pure la forma che la corda assume in ciascun momento.

Il *Methodus* contiene pure la più antica determinazione dell'equazione differenziale della traiettoria di un raggio di luce che attraversi un mezzo eterogeneo; e, ammettendo che la densità dell'aria dipenda solo dalla sua distanza dalla superficie terrestre, Taylor ottenne, mediante quadrature, la forma approssimativa della curva. Sono pure da lui studiate la forma della catenaria e la determinazione dei centri di oscillazione e di percussione.

Un trattato di prospettiva del Taylor, pubblicato nel 1719, contiene la prima trattazione metodica del metodo della proiezione centrale; è ivi applicato il principio dei punti di fuga, già enunciato da Guido Ubaldo del Monte (1545-1607) nei suoi *Perspectivae Libri*, Pisa, 1600, e poi dallo Stevino nella sua *Sciagraphia*, Leida, 1608.

Côtes. — *Ruggero Côtes*, nacque presso Leicester il 10 luglio 1682 e morì a Cambridge il 5 giugno 1716. Fu istruito nel Collegio della Trinità a Cambridge, di cui poi fu *fellow* e nel 1706 fu eletto alla cattedra Plumiana di astronomia, di nuova fondazione nell' Università di Cambridge. Dal 1709 al 1713 il suo tempo fu principalmente occupato nella pubblicazione di una seconda edizione dei *Principia*. L'osservazione di Newton, che «se Côtes avesse continuato a vivere noi avremmo saputo qualche cosa»

indica quale opinione delle sue facoltà intellettuali avessero la generalità dei suoi contemporanei.

Gli scritti di Côtes furon riuniti e pubblicati nel 1712 coi titoli di *Harmonia mensurarum* e di *Opera miscellanea*. Le sue lezioni sull' idrostatica videro la luce nel 1738. Una gran parte della *Harmonia mensurarum* è dedicata alla decomposizione ed all' integrazione delle espressioni algebriche razionali; la parte che tratta della teoria delle frazioni semplici è però incompiuta e venne completata dal Demoivre. È noto il teorema di Côtes sulla trigonometria, basato sulle ricerche dei fattori quadrati di $x^n - 1$. La proposizione «se da un punto fisso O si conduca una linea che tagli una curva in Q_1, Q_2..., Q_n e sulla linea si prende un punto P tale che la reciproca di OP sia la media aritmetica delle reciproche di OQ_1, OQ_2, ..., OQ_n, allora il luogo di P sarà una linea retta» è pure dovuta a Côtes. Il titolo dell'*Harmonia mensurarum* fu derivato appunto da questo teorema. Nell'*Opera miscellanea* si trova uno scritto sul metodo di dedurre il resultato più probabile da un certo numero di osservazioni: fu questo il primo tentativo fatto per fondare una teoria degli errori di osservazione. Ivi si trovano pure saggi sul *Methodus differentialis* di Newton, sulla costruzione di tavole mediante il metodo delle differenze, sulla discesa di un corpo sottoposto all' azione della gravità, sul pendolo cicloidale e sui proiettili.

Demoivre. — *Adriano Demoivre* (più correttamente scritto *de Moivre*) nacque a Vitry (Francia) il 26 maggio 1667 e morì a Londra il 27 novembre 1754. I suoi genitori andarono in Inghilterra quando egli era bambino; ed egli ebbe inglesi e l'educazione e gli amici. Vuolsi che il suo interessamento alle matematiche superiori avesse origine dall'essersi egli trovato per caso tra mano un esemplare dei *Principia* di Newton. Dall'*Eloge* di lui, letto nel 1754 dinanzi all'Accademia francese, apparirebbe che il suo ufficio di insegnante di matematiche lo avesse condotto in casa del Conte di Devonshire nel momento in cui ne usciva Newton, che aveva chiesto licenza di presentare al Conte una copia del suo lavoro. Prendendo in mano il libro e affascinato dalle conclusioni comprensive e dall' apparente semplicità del ragionamento, il Demoivre pensò che niente potesse essere più facile che d'impossessarsi del soggetto; ma con sua sorpresa trovò che il seguire le argomentazioni esposte superava le sue facoltà. Nondimeno ne comperò una copia e poichè non aveva che poche ore libere, ne tagliò le pagine con lo scopo di portarne una o due sciolte in tasca, in modo da poterle studiare durante gl'intervalli lasciatigli liberi dalle sue occupazioni di maestro. Più tardi venne ammesso nella Società Reale e diventò intimo di Newton, di Halley e degli altri matematici della scuola inglese. Le circostanze della sua morte presentano un certo interesse per gli psicologi; giacchè, poco prima di morire, dichiarò che gli era necessario di dormire ogni giorno dieci minuti o un quarto d'ora di più che il giorno precedente: il giorno seguente quello in cui egli aveva così raggiunto un limite superiore alle ventitrè ore, s'addormentò per ventiquatt'ore e morì durante il sonno.

Egli è favorevolmente conosciuto per avere, insieme col Lambert, creato quella parte della trigonometria che tratta delle quantità immaginarie. Due teoremi su questo argomento vanno sempre uniti al suo nome, cioè quello che afferma che $\operatorname{sen} nx + i \cos nx$ è uno dei valori di $(\operatorname{sen} x + i \cos x)^n$, e quello che dà i diversi fattori quadratici di $x^{2n} - 2px^n + 1$. Le sue opere principali, oltre numerose memorie inserite nelle *Philosophical Transactions*, furono *The Doctrine of Chances*, pubblicata nel 1718, e la *Miscellanea Analytica*, pubblicata nel 1730. In quest'ultima fu data per la prima volta la teoria delle serie ricorrenti, venne completata quella delle frazioni semplici, che la morte prematura del Côtes aveva lasciata incompiuta, e venne enunciata la regola per trovare la probabilità di un evento composto. Quest'ultimo libro, oltre le proposizioni trigonometriche citate sopra, contiene alcuni teoremi di astronomia, trattati analiticamente.

Maclaurin [1]). — *Colin Maclaurin*, nato a Kilmodan nella contea di Argyll nel febbraio del 1698 e morto a York il 14 giugno 1746, studiò all'Università di Glasgow; nel 1717 fu eletto, appena diciannovenne, professore di matematiche ad Aberdeen;

1) Uno schizzo della *Vita di Maclaurin* è preposto alla sua (postuma) esposizione delle scoperte di Newton, Londra, 1748.

e nel 1725 fu scelto per sostituto del professore di matematiche di Edimburgo, al quale infine successe; essendosi incontrata qualche difficoltà nello stabilire lo stipendio per un sostituto, Newton scrisse privatamente offrendosi a sopportare la relativa spesa, in modo da render possibile all'Università di assicurarsi i servigi del Maclaurin. Questi nel 1745 prese parte attiva nell'opposizione all'avanzarsi del giovane Pretendente e all'avvicinarsi degli *Highlanders*, fuggì a York; le intemperie a cui si espose dinanzi alle trincee di Edimburgo e le privazioni sofferte durante la fuga gli riuscirono fatali.

I suoi principali lavori sono la *Geometria Organica*, Londra, 1720 [1]); *De Linearum Geometricarum Proprietatibus*, Londra, 1720; il *Treatise on Fluxions*, Edimburgo, 1742; l'*Algebra*, Londra, 1748; e l'*Account of Newton's Discoveries*, Londra, 1748.

La prima sezione della prima parte della *Geometria Organica* riguarda le coniche; la seconda le cubiche nodate; la terza le altre cubiche e le quartiche: e la quarta le proprietà generali delle curve. Newton aveva dimostrato che se due angoli di grandezze costanti girano intorno ai loro vertici rispettivi in modo che il punto d'intersezione di due loro lati si muova lungo una linea retta, l'altro punto d'intersezione descriverà una conica. Maclaurin dimostrò analiticamente l'analogo teorema generale e mostrò come con questo mezzo potessero praticamente tracciarsi varie curve. La stessa opera contiene uno studio delle curve e delle loro pedali, capitolo quest'ultimo della geometria creato da Maclaurin in due scritti pubblicati nelle *Philosophical Transactions* del 1718 e 1719.

La seconda parte della *Geometria Organica* è divisa in tre capitoli ed un'appendice. Il capitolo I contiene una dimostrazione del teorema di Côtes citato sopra, nonchè il teorema analogo (scoperto da lui medesimo) che «se una linea retta OP_1, P_2, ..., condotta per un punto fisso O, taglia una curva dell'n^{mo} grado in n punti P_1, P_2 ..., e se le tangenti in P_1, P_2 ..., tagliano una linea fissa Ox nei punti A_1, A_2 ..., allora la somma delle reciproche delle distanze OA_1, OA_2 ..., è costante per tutte le posizioni della linea

1) Cfr. C. Tweedie, *The «Geometria organica» of Colin Maclaurin: A Historical and Critical Survey*, in *Proc. of the R. Society of Edinburgh*, vol. XXXVI, part I, 1915. (G. L.).

OP_1, P_2, ... ». Questi due teoremi sono generalizzazioni di quelli dati da Newton sopra i diametri e gli assintoti. Ciascuno di essi è deducibile dall'altro. Nei capitoli II e III essi sono applicati alle coniche e alle cubiche; sono poi stabilite la maggior parte delle proprietà armoniche d'un quadrilatero iscritto in una conica ed in particolare è dimostrato il teorema sopra l'esagono inscritto, noto col nome del Pascal. Il saggio del Pascal non fu pubblicato che nel 1779, onde il primo enunciato stampato di quel teorema fu quello dato dal Maclaurin. Fra le altre proposizioni egli dimostra che « se un quadrilatero è inscritto in una cubica e se anche i punti d'intersezione dei lati opposti sono situati sulla curva, allora le tangenti alla cubica in due vertici opposti qualunque del quadrilatero s'incontreranno sulla curva ». Nel capitolo IV egli espone alcuni teoremi sulla forza centripeta. Il capitolo V contiene alcuni teoremi sulla descrizione di curve passanti per punti dati. Uno di questi (che racchiude quello di Pascal come caso particolare) dice: « se un poligono si deforma in modo, che mentre ciascuno dei suoi lati passa per un punto, tutti i suoi vertici meno uno, descrivano rispettivamente curve degli ordini m, n, p .... ; allora il vertice residuo descriverà una curva dell'ordine $2mnp$ .... ; se però i punti dati sono collineari, la curva risultante sarà solamente dell'ordine mnp .... ». Questo teorema venne ristampato con aggiunte nelle *Philosophical Transaction* del 1735.

Il *Trattato delle Flussioni*, pubblicato nel 1742, fu la prima esposizione logica e sistematica del metodo delle flussioni; movente alla sua pubblicazione fu un attacco fatto dal Berkeley contro i principî del calcolo infinitesimale. In esso (art. 751, p. 610). Maclaurin dimostrò il teorema espresso dalla formula:

$$f(x) = f(o) + x f'(o) + \frac{x^2}{\underline{|2}} f''(o) o + \ldots;$$

esso è ottenuto nel modo indicato in molti libri di testo moderno, ammettendo, cioè, che $f(x)$ possa venire sviluppata sotto la forma

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots;$$

differenziando più volte e poi facendo $x = O$ nei successivi resultati si ottengono i valori di A_0, A_1 .... Va notato che Maclaurin non si preoccupa della convergenza delle serie. Quel risultato era stato antecedentemente esposto nel 1730 da Giacomo Stirling nel suo *Methodus differentialis* (p. 102) ed è chiaro che si può dedurre subito dal teorema di Taylor. Il Maclaurin enunciò pure in quest'opera l'importante teorema che, se $\varphi(x)$ è positiva e decresce, quando x cresce, allorchè la variabile va nell'intervallo da $x = a$ *ad* $x = \infty$, la serie

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \ldots.$$

è convergente o divergente secondo che $\int_a^\infty \varphi(x)\, dx$ è finita o infinita. Egli diede ancora una teoria esatta dei massimi e minimi e le regole per trovare e distinguere i punti multipli delle curve.

Ma questo trattato è specialmente pregevole per le soluzioni che contiene di numerosi problemi di geometria, di statica, della teoria delle attrazioni e di astronomia. Per risolverli Maclaurin ritornò ai metodi classici, i quali si dimostrarono così potenti nelle sue mani che il Clairaut, dopo letta quell'opera, abbandonò l'analisi e si rimise a studiare il problema della figura della terra servendosi della geometria pura. Più tardi questa parte del libro venne definita dal Lagrange come un « chef-d'oeuvre de géometrie qu'on peut comparer à tout ce qu'Archimède nous a laissé de plus beau et de plus ingènieux ».

Maclaurin determinò anche l'attrazione di un ellissoide omogeneo sopra un punto interno e diede alcuni teoremi sulla attrazione da esso esercitata su di un punto esterno; nel far ciò egli introdusse il concetto delle superficie di livello, come superficie in ciascun punto della quale l'attrazione risultante è normale alla superficie. La teoria dell'attrazione non fece poi alcun progresso fino a quando il Lagrange nel 1773 introdusse il concetto di potenziale. Maclaurin dimostrò pure che uno sferoide era una forma possibile d'equilibrio di una massa omogenea di liquido rotante intorno ad un asse passante per il suo baricentro. Finalmente trattò dei flussi e riflussi: questa parte era stata pubblicata antecedentemente (1740) ed aveva ricevuto un premio dall'Accademia francese.

Fra le opere minori del Maclaurin si trova l'*Algebra*, pubblicata nel 1748 e basata sull' *Aritmetica universale* di Newton. Essa compendia i risultati di molte memorie anteriori del Maclaurin, specialmente di due, scritte nel 1726 e 1729, una sul numero delle radici immaginarie di un'equazione, suggerita dal teorema di Newton, e l'altra contenente la ben nota regola per trovare le radici uguali mediante l'equazione derivata; nella stessa opera le quantità negative sono trattate come se fossero reali quanto le positive. A quest'opera fu unito come appendice un trattato intitolato *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus*, che al pari della memoria del 1720, citata sopra, contiene alcuni altri eleganti teoremi. Il Maclaurin scrisse anche nel 1728 una esposizione della filosofia newtoniana, la quale fu stampata nel 1748, dopo la morte dell'autore. L'ultima memoria di Maclaurin è quella stampata nelle *Philosophical Transactions* del 1743, nella quale è studiata, da un punto di vista matematico, la forma della cella di un'ape.

Il Maclaurin fu uno dei più eminenti geometri del secolo XVIII, ma la sua influenza sul progresso delle matematiche inglesi fu deplorevole. Abbandonando per suo conto l' uso dell'analisi e del calcolo infinitesimale, egli indusse i compatriotti di Newton a limitarsi ai metodi newtoniani; fu solo verso il 1820, quando il calcolo differenziale venne introdotto nel programma di studi di Cambridge, che i matematici inglesi usarono generalmente i metodi più potenti dell'analisi moderna.

Stewart. — Al Maclaurin successe nella cattedra di Edimburgo il suo discepolo *Matteo Stewart*, nato a Rothesay nel 1717 e morto a Edimburgo il 23 gennaio 1785, matematico di considerevole valore, al quale alludo di passaggio, grazie ai suoi teoremi sul problema di tre corpi e per la sua discussione, trattata mediante le trasversali e l' involuzione, delle proprietà del cerchio e della linea retta [1]).

[1]) Le sue opere principali sono: 1) *General theorems of considerable use in the higher parts of mathematics*, Edimburgo, 1746; 2) *Tracts, physical and mathematical*, Edimburgo, 1761; 3) *Distance of the sun from the earth*, Edimburgo, 1763; 4) *Propositiones geometricae more veterum demonstratae*, Edimburgo, 1763. Era profondo nella geometria antica.

Simpson [1]). — L' ultimo membro della scuola inglese, che è d' uopo qui ricordare, è Tommaso Simpson; egli nacque nel Leicestershire il 20 agosto 1710 e morì il 14 maggio 1761. Il padre suo faceva il tessitore; il Simpson deve la sua educazione interamente ai propri sforzi. L' interesse per la matematica nacque in lui in occasione dell'ecclisse solare del 1724; coll'aiuto di un merciaiuolo ambulante, che prediceva l'avvenire, egli conobbe l'*Arithmetic* di Cocker e gli elementi dell'algebra. Abbandonò il mestiere del padre, essendo stato nominato assistente in una scuola e, con costanti e faticosi sforzi, potè compiere i suoi studî di matematica, tanto che nel 1735 fu capace di risolvere parecchie questioni, proposte allora, riguardanti il calcolo infinitesimale. Egli poi si recò a Londra e nel 1743 fu nominato professore di matematica a Woolwich, posto che occupò sino alla morte.

I lavori di Simpson dimostrano che egli era un uomo di un non comune ingegno naturale e di una straordinaria abilità; i più importanti fra essi sono: le *Flussioni* (1737 e 1750), con numerose applicazioni alla fisica ed alla astronomia; le *Laws of Chance* e gli *Essays* (1740); la teoria sulle *Annuities and reversions* (ramo della matematica dovuta a James Dosdon, morto nel 1757, Direttore della scuola annessa all'Ospedale cristiano di Londra) con tavole di mortalità (1742); le *Dissertations* (1743), in cui si studiano la forma della terra, la forza di attrazione alla superficie di un corpo, avente la forma quasi sferica e la legge della rifrazione astronomica; l'*Algebra* (1745), la *Geometria* (1747), la *Trigonometria* (1748), in cui introduce per le funzioni trigonometriche le abbreviazioni oggi in uso; gli *Esercizi scelti* (1752), che contengono le soluzioni di numerosi problemi ed una teoria sulla balistica; ed infine i *Miscellaneous Tracts* (1754).

Quest' ultima pubblicazione consiste di otto memorie, le quali contengono le sue più note ricerche. Le prime tre memorie riguardano diversi problemi di astronomia; la quarta studia la

[1]) Un sunto della vita di Simpson, con una bibliografia dei suoi scritti, fu pubblicato in Londra nel 1764 da J. Bavis e C. Hutton; nelle ultime edizioni havvi in principio una breve memoria del suo lavoro sulle flussioni.

teoria della media delle osservazioni; la quinta e la sesta contengono alcuni problemi sulle flussioni e sull'algebra; la settima una soluzione generale del problema degli isoperimetri; l'ottava uno studio sulla terza e la nona sezione dei *Principia* e la loro applicazione all'orbita lunare. In quest' ultima Simpson ottenne un'equazione differenziale pel moto dell'abside dell'orbita lunare, analoga a quella ottenuta da Clairaut; ma, invece di risolverla mediante approssimazioni successive, ne ricavò una soluzione generale col metodo dei coefficienti indeterminati. Il risultato concorda con quello ottenuto da Clairaut. Simpson risolvè questo problema nel 1747, due anni dopo la pubblicazione delle memorie di Clairaut; ma la sua soluzione fu scoperta indipendentemente dalle ricerche di questo, che Simpson conobbe solo per la prima volta nel 1748.

Manfredi [1]. — *Gabriele Manfredi* nacque in Bologna il 25 marzo 1681 e vi morì il 13 ottobre 1761. Fu professore di matematica nella Università di Bologna fino al 1720 e membro dell' Istituto delle scienze di detta città. Si deve a lui l' integrazione delle equazioni differenziali omogenee con due variabili [2]. I suoi lavori sono:

1) *De constructione aequationum differentialium primi gradus* (1707); 2) *De formulis quibusdam integrandis* (1731); 3) *De eliminandis ab aequatione arcubus circularibus et alia* (1748); 4) *De inveniendis datarum formularum irrationalium reciprocis* (1755); 5) *Breve schediasma geometrico per la costruzione di una gran parte delle equazioni differenziali del 1° grado*; 6) *Soluzione di un problema appartenente al calcolo integrale.*

Simson. — *Roberto Simson* nacque a Kirton-Hall (Scozia) il 14 ottobre 1687 e morì a Glascow il 1° ottobre 1768; fu professore a Glascow; ecco l'elenco delle sue opere:

1) *Treatise on conic Sections* (1735); 2) *The loci plani of Apollonius restored* (1749); 3) *Euclid's Elements* (1750; molte edizioni successive); 4) *Two general propositions of Pappus, in which many of Euclid's porisms are included* («Philos. Trans.», 1723); 5) *On the extraction of the approximate rots of numbers by infinite series* («Philos. Trans.», 1753). — Per cura ed a spese di Lord Stanhope fu pubblicato lo splendido volume R. Simson, *Opera quaedam reliqua* (Glasguae, 1776).

1) Manfredi, Simpson, Grandi, Mayer e Stirling furono aggiunti dai traduttori.
2) G. Loria, *Abhandl. zur Geschichte der Mathem.*, tomo IX, 1899, p. 250.

Grandi. — *Francesco Luigi Guido Grandi* nacque a Cremona il 1° ottobre 1671 e morì il 4 luglio 1742. Egli era frate camaldolese; insegnò filosofia a Firenze ed a Pisa e divenne ispettore delle acque in Toscana. Le sue principali opere sono: *Geometrica demonstratio vivianeorum problematum* (Firenze, 1699); *Geometrica demonstratio theorematum hugenianorum* (Firenze, 1701); *Quadratura circuli et hiperbolae* (Pisa, 1703); *De infinitis infinitorum infinitisque parvorum ordinibus* (Pisa, 1720); *Floris geometrici ex rhodonearum et claeliarum curvarum descriptione risultantes* (Venezia, 1728).

I teoremi, che formano il soggetto della seconda sua opera, erano stati enunciati da Huyghens nel corso dei suoi studi sulla causa della gravità; le dimostrazioni appartengono a Guido Grandi. In essa si tratta della rettificazione della cissoide, delle ricerche sulla logaritmica ed i solidi da essa generati ecc. Nella sua *Quadratura circuli et hyperbolae*, Grandi osserva le analogie che presentano il cerchio e l' iperbole equilatera. Le sue *rodonee* sono curve piane [1]), mentre le sue *clelie* sono delle curve a doppia curvatura tracciate sulla superficie della sfera [2]). Guido Grandi dà la quadratura delle parti della superficie sferica, determinata dalle clelie; Pappo in parte aveva trattato la stessa questione.

Mayer. — *Tobia Mayer* nacque a Marbach nel Wurtemberg il 17 febbraio 1723 e morì il 26 febbraio 1762; Delambre dice

1) Cfr. G. Loria, *Spezielle ebeue Kurven*, T. II, Leipzig, 1910, pp. 358-369.
2) G. Loria, *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti*, Vol. II (Bologna, 1925), pp. 57-64.

che egli è uno de' più grandi astronomi che siansi mai conosciuti. Il padre, che era ispettore delle acque a Essling, gl' insegnò la matematica ed il disegno; rimase ben presto orfano; ed allora per vivere si mise ad insegnare matematiche.

Nel 1741 pubblicò una collezione di problemi di geometria e nel 1745 un *Atlante matematico*, specie di riassunto della scienza, in 60 tavole. Nel 1746 cominciò ad occuparsi di geografia, e fece l'amicizia degli astronomi Franz e Löwitz. Egli iniziò la sua carriera astronomica colla selenografia, dando il primo esempio dell' uso delle equazioni di condizione, che servono per determinare simultaneamente le correzioni da farsi su tutte le quantità, da cui dipendono le coordinate astronomiche di un pianeta qualunque. Nel 1751 venne a stabilirsi a Gottinga, ove prese moglie e fu nominato Direttore di quell'Osservatorio astronomico. Egli era accuratissimo nelle sue osservazioni astronomiche; la sua principale opera ha per titolo *Tabulae motuum solis et lunae, novae et correctae, quibus accedit methodus longitudinum* (Londra, 1770); queste tavole sono sì esatte, che inviate a Londra pel concorso del gran premio, Bradley che ebbe ad esaminarle, disse che, verificate su 230 osservazioni, mai ebbe a trovarvi un errore superiore a 1',30''. L'Ufficio delle longitudini assegnò alla vedova di Mayer per quest'opera una prima ricompensa di 3000 sterline, una seconda di 2000; essa poi fece pubblicare la *Theoria lunae iuxta sistema newtonianum* del marito. La *ripetizione degli angoli* appartiene a lui e non al Borda. A 39 anni morì pel troppo studio; una parte de' suoi manoscritti fu pubblicata nel 1775 col titolo *Opera inedita*; il resto non vide mai la luce. Essi contengono questioni attinenti alla fisica, all'astronomia, ecc.

Stirling [1]). — *Giacomo Stirling* è nato nel 1692 e morto il 5 dicembre 1770: nel 1717 pubblicò un buon commento sulle ricerche di Newton, sotto il titolo: *Lineae tertii ordinis newtonianae, sive illustratio tractatus D. Neutoni de enumeratione li-*

1) C. Tweedie, *James Stirling. A Sketch of his Life and Works*, Oxford, 1922.

nearum tertii ordinis. L'opera principale di Stirling è il suo *Methodus differentialis seu de summatione et interpolatione seriarum*, che pubblicò a Londra nel 1730 e di cui diede nuove edizioni nel 1753 e nel 1764. La prima parte di essa ha per oggetto la somma delle serie, in cui ciascun termine è formato dal precedente, moltiplicato per una funzione razionale del suo posto; la seconda parte ha per oggetto l' interpolazione delle serie.

CAPITOLO XVIII.

Lagrange, Laplace ed i loro contemporanei [1].

(1740-1830 circa).

Il precedente Capitolo contiene la storia di due scuole ben distinte: la continentale e la britannica. Nel primi anni del XVIII secolo la scuola inglese era vigorosa e feconda, ma poi decadde rapidamente e, dopo la morte di Maclaurin e Simpson, nessun matematico inglese ci sembra che possa paragonarsi ai matematici del continente della seconda metà del XVIII secolo. Questo fatto si spiega in parte coll' isolamento di quella scuola ed in parte colla sua tendenza a fondarsi troppo esclusivamente sui metodi geometrici e sulle flussioni. Però qualche attenzione fu dedicata alla scienza applicata; ma, tolte poche osservazioni che esporrò alla fine di questo Capitolo, credo non sia necessario discutere particolareggiatamente la matematica inglese sino circa il 1820, anno in cui vennero in voga i metodi analitici.

Nel continente, sotto l'influenza di Giovanni Bernoulli, il calcolo infinitesimale divenne un istrumento di grande potenza analitica, espresso in una notazione ammirabile; e, per le applicazioni pratiche, non è mai troppo apprezzato il valore di una buona notazione. Tuttavia gran parte della meccanica restò nella condizione, in cui l'aveva lasciata Newton, fino a che D'Alembert, rivestendo i risultati di Newton col linguaggio del calcolo differenziale, fece fare ad essa un passo innanzi. La gra-

1) Nel 1907 fu pubblicato un volume IV delle *Vorlesungen* di M. CANTOR, il quale abbraccia gli anni 1759-99. Esso contiene articoli di S. GÜNTHER sulle storie pubblicate in quel periodo, di F. CAJORI sull'aritmetica, l'algebra e la storia dei numeri; di G. NETTO sulle serie, gli immaginari, ecc.; da A. VON BRANNMUHL sulla trigonometria; da V. KOMMERELL e G. LORIA sulla geometria; da G. VIVANTI e R. WALLNER sul calcolo infinitesimale.

vitazione universale, quale era stata enunciata nei *Principia*, fu accettata come un fatto stabilito; ma i metodi geometrici adottati per dimostrarla, erano difficili a seguirsi o ad usarsi in problemi consimili; Maclaurin, Simpson e Clairaut possono considerarsi come gli ultimi grandi matematici che li adoprarono. Finalmente fu accolta da tutti come conforme al vero la teoria newtoniana della luce.

I principali matematici dell'epoca, in cui ora entriamo, sono: Eulero, Lagrange, Laplace e Legendre. Si può dire brevemente che Eulero generalizzò, aumentò e completò l'opera dei suoi predecessori; mentre Lagrange, con un'abilità quasi insuperabile, svolse l'analisi infinitesimale e la meccanica razionale, presentandole sotto la forma, che ora conosciamo. Nello stesso tempo Laplace fece molte aggiunte al calcolo infinitesimale, applicandolo alla gravitazione universale e creò anche il calcolo delle probabilità. Legendre fondò la teoria degl' integrali ellittici ed arricchì la teoria dei numeri. Le opere di questi scienziati sono tuttora modelli classici. Io mi accontenterò di fare un breve cenno delle loro principali scoperte, rimandando chi desiderasse di conoscerle meglio, alle opere originali. Lagrange, Laplace e Legendre crearono una scuola francese di matematica; i membri successivi di essa si dividono in due gruppi: l' uno (che comprende Poisson e Fourier) incominciò ad applicare l'analisi matematica alla fisica; e l'altro (avente per capi Monge, Carnot e Poncelet) creò la geometria moderna. Rigorosamente parlando qualcuno dei grandi matematici dei tempi recenti, come Gauss ed Abel, furono contemporanei dei matematici ora nominati; ma salvo questa osservazione, credo conveniente rimandare al prossimo Capitolo qualunque considerazione su di essi.

Sviluppo dell'analisi e della meccanica.

Eulero [1]. — *Leonardo Eulero* nacque a Basilea il 15 aprile 1707 e morì a Pietroburgo il 7 settembre 1783. Era figlio di un mi-

1) I fatti principali della sua vita furono esposti da N. FUSS, ed un elenco dei suoi scritti si trova nella sua *Corrispondence mathématique et physique de quelque celèbre geom. du XVIII siècle*, 2 volumi, Pietroburgo, 1843; vedi inoltre HAGEN, *Index Ope-*

nistro protestante che erasi stabilito a Basilea e fu istruito nella sua città nativa da Giovanni Bernoulli; potè così stringere una intima e durevole amicizia coi figli Daniele e Nicola. Allorchè nel 1725 il più giovane dei Bernoulli andò in Russia dietro l'invito dell'Imperatrice, i Bernoulli procurarono colà un posto ad Eulero, posto che Eulero nel 1733 scambiò colla cattedra di matematica, quando fu lasciata vacante da Daniele Bernoulli. Il rigore del clima lo danneggiò talmente nella vista, che nel 1735 perdè completamente un occhio [1]. Nel 1741 si recò a Berlino a richiesta ed anzi dietro il comando di Federico il Grande [2], ove stette fino al 1766; quando tornò in Russia, a Berlino, per suo suggerimento, fu sostituito da Lagrange. Due o tre anni dopo il suo ritorno a Pietroburgo divenne cieco; ma, ad onta di ciò, e quantunque la sua casa fosse bruciata nel 1771 insieme a molte sue memorie, rifece queste e le migliorò; morì di apoplessia. Si ammogliò due volte.

Io credo che possiamo riassumere l'opera di Eulero dicendo che creò buona parte dell'analisi e sottopose a revisione quasi tutti i rami della matematica pura, allora noti, arricchendoli di particolari, aggiungendo dimostrazioni e ordinando il tutto in una forma razionale. Tale opera è assai importante ed è una vera fortuna per la scienza quando cada nelle mani di un uomo così grande come Eulero. Egli scrisse un immenso numero di memorie su tutti i rami della matematica. Le sue principali opere, nelle quali sono contenuti molti dei risultati delle sue memorie, sono le seguenti.

Anzitutto l'*Introductio in analysin infinitorum* (1748), come

---

rum Leonardi Euleri, Berlin, 1896, e G. ENESTRÖM, *Verzeichniss des Schriften Leonhard Eulers*, Berlin, 1910-13. Le opere principali di EULERO sono analizzate da CANTOR, cap. CXI, CXIII, CXV e CXVII. Nicola Fuss nacque a Basilea nel 1755 e morì a Pietroburgo nel 1826; fu discepolo di D. Bernoulli, e successivamente fu nominato assistente di Eulero: FUSS scrisse sulle coniche sferiche e sulle linee di curvatura, Una edizione completa degli scritti di EULERO è in corso di pubblicazione sotto la direzione della Società Svizzera di Scienze naturali.

1) Per una congestione cerebrale causata dall'eccessivo lavoro mentale, a chi lo compiangeva, rispondeva: «Avrò meno distrazioni, e ciò sarà utile pe' miei studi».

2) Quando si recò a visitare la Regina di Prussia si mostrò sì timido ed impacciato presso di lei, parlando a monosillabi, che la sovrana glielo fece osservare; Eulero rispose: «Signora, egli è perchè vengo da un paese in cui, quando si parla, si è perduti». Tanto era il dispotismo di Anna Ivanowna!

introduzione alla pura analisi matematica. Essa è divisa in due parti.

La prima parte contiene quasi tutto ciò che si trova nei libri moderni di analisi algebrica, cioè la teoria delle equazioni e la trigonometria. Nell'algebra Eulero si occupa particolarmente dello sviluppo in serie di varie funzioni e della somma di date serie: ivi è osservato esplicitamente, che una serie infinita non può essere impiegata con sicurezza se non si sa se sia o no convergente. Nella trigonometria, in gran parte fondata sulla memoria *Trigonometrica* (Comm. Petrop., II, 1777), di F. C. Mayer, Eulero svolge l'idea di Giovanni Bernoulli, cioè che essa era un ramo dell'analisi e non un semplice accessorio dell'astronomia e della geometria: egli pure v'introdusse (contemporaneamente a Simpson) le odierne abbreviazioni per le funzioni trigonometriche e dimostrò che le funzioni trigonometriche ed esponenziali sono legate fra loro dalla relazione:

$$\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}.$$

Qui incontriamo pure il simbolo e per denotare la base dei logaritmi neperiani, cioè il numero trascendente 2,71828..., ed il simbolo π per denotare il numero trascendente 3,14159.... L'uso d'un simbolo per significare 2,71828.... pare sia dovuto a Côtes, che lo denotò con M; Eulero nel 1731 lo indicò invece con e. Per quanto so, Newton fu il primo ad impiegare la notazione letterale dell'esponenziale; ed Eulero, usando la forma a^z, prese a come base di qualunque sistema di logaritmi. È probabile che la scelta di e per designare una base particolare sia stata suggerita dal fatto che essa è la vocale consecutiva ad a. L'uso di un unico simbolo per denotare il numero 3,14159.... sembra essere stato introdotto, verso il principio del XVIII secolo. W. Jones nel 1706 lo rappresentò con π, simbolo usato da Oughtred nel 1647 e da Barrow alcuni anni dopo per denotare la circonferenza di un cerchio. Giovanni Bernoulli rappresentò quel numero con C; Eulero, nel 1734, con p ed in una lettera del 1736 (in cui enunciò il teorema che la somma dei quadrati degli inversi dei numeri naturali è $\frac{1}{6}\pi^2$) usò la lettera c; Chr. Goldbach nel 1742 preferì π;

dopo la pubblicazione dell'*Introductio* di Eulero il simbolo π fu impiegato generalmente.

Ai numeri e e π si giunge analiticamente per molte strade. Il secondo numero rappresenta il rapporto della circonferenza di un cerchio al suo diametro, ma è un vero caso se abbia questa definizione. De-Morgan, nel *Budget of Paradoxes*, racconta un aneddoto, che illustra come la definizione comune abbia ben poco rapporto col suo uso reale. Egli spiegava ad un attuario che cosa dovrebbe accadere, affinchè dopo un dato periodo di tempo una popolazione potesse sopravvivere secondo una data proporzione; e citò la formula attuariale che conteneva π; ed in risposta ad una questione, egli spiegò che π era il valore del rapporto della circonferenza di un cerchio al suo diametro. Il suo amico, che aveva fino allora ascoltato attentamente la spiegazione, lo interruppe dicendo: «Mio caro amico, ciò può essere una illusione; che cosa può avere che fare il cerchio colla quantità della popolazione vivente alla fine di un dato tempo?».

La seconda parte dell' *Analysis infinitorum* consiste in una geometria analitica. Eulero incomincia questa parte col dividere le curve in *algebriche* e *trascendenti* e stabilisce diverse proposizioni che sussistono per tutte le curve algebriche. Egli poi applica queste proposizioni all'equazione generale di 2° grado a due incognite, mostrando che detta equazione rappresenta le varie sezioni coniche, e ricava da essa gran parte delle loro proprietà. Poi considera la classificazione delle cubiche, delle quartiche e di altre curve algebriche. Da ultimo studia la questione: quali superficie siano rappresentate da un'equazione generale di 2° grado a tre incognite ed in qual modo esse possano distinguersi l' una dall'altra; alcune di esse non erano fino allora state studiate. Nel corso di questa analisi dà le regole per la trasformazione delle coordinate nello spazio. Qui troviamo pure il primo tentativo per determinare la curvatura delle superficie che cadono nel dominio della matematica ed uno studio abbastanza completo delle curve nello spazio.

Dopo l'*Analysis infinitorum* nel 1755 furono pubblicate da Eulero le *Institutiones calculi differentialis*, a cui fu premessa una specie d' introduzione. Questo è il primo libro di calcolo differenziale che può essere riguardato come completo; e si può dire che i migliori trattati moderni di questa materia sian fondati su esso. Dobbiamo però aggiungere che l'esposizione dei principî fondamentali è sovente oscura e prolissa e talvolta non del tutto esatta.

Questa serie di lavori fu completata dalla pubblicazione in tre volumi (1768–1770), delle *Institutiones calculi integralis*, che comprendono i risultati di parecchie memorie anteriori di Eulero, riguardanti la stessa materia e le equazioni differenziali. Questo libro, come il trattato del calcolo differenziale, riassume ciò che allora si conosceva in proposito; ma molti dei teoremi ivi esposti furono poi riveduti e le dimostrazioni perfezionate. Le funzioni Beta e Gamma [1]) furono inventate da Eulero, ma sono studiate in quest'opera soltanto come applicazioni dei metodi di riduzione ed integrazione. La trattazione degli integrali ellittici è elementare; essa ebbe origine da un teorema dato nel 1755 da Giovanni Landen (1719-1790) nelle *Philosophical Transactions*, riguardante gli archi di un' iperbole e di un'ellisse.

Queste tre opere di Eulero formano una trilogia e ne sono state fatte molte edizioni.

I classici problemi sulle curve isoperimetre, sulla brachistocrona in un mezzo resistente e sulla teoria delle geodetiche (i quali gli furon tutti proposti dal suo maestro Giovanni Bernoulli, richiamarono per la prima volta l'attenzione di Eulero, il quale, nel risolverli, fu condotto al calcolo delle variazioni. L' idea generale di questo fu esposta nel suo opuscolo *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, pubblicato nel 1744; ma il completo svolgimento del nuovo calcolo fu per la prima volta fatto da Lagrange nel 1759. Il metodo usato da quest' ultimo è esposto nel *Calcolo integrale* di Eulero ed è identico a quello che s' insegna nei moderni trattati che si occupano di questo ramo.

Nel 1770 Eulero pubblicò l'*Anleitung zur Algebra* in due volumi, che nel 1794 fu tradotta in francese, corredata di molte

---

1) La storia della funzione Gamma è data in una monografia del BRUNEL, inserita nelle *Mémoires de la Societé des Sciences de Bordeaux*, 1886.

ed importanti aggiunte dovute a Lagrange e d' un trattato di aritmetica, scritto da Eulero. Il 1° volume tratta dell'algebra determinata e contiene uno dei primi tentativi fatti per porne i procedimenti fondamentali su basi scientifiche; la stesso argomento aveva già richiamata l'attenzione di D'Alembert. Questa opera contiene anche la dimostrazione del teorema del binomio per un esponente qualunque, la quale è pur nota col nome di Eulero; la dimostrazione è fondata sul principio della permanenza delle forme equivalenti; ma Eulero non fece nessun tentativo per stabilire la convergenza delle serie: che egli abbia omesso questo studio importantissimo è assai curioso, avendo egli stesso riconosciuto la necessità di considerare la convergenza delle serie infinite: la dimostrazione data da Vandermonde nel 1764 ha lo stesso difetto.

Il 2° volume tratta dell'analisi indeterminata o diofantea; esso contiene le soluzioni di alcuni de' problemi proposti da Fermat e rimasti fino allora insoluti [1]).

Come esempio della semplicità e della speditezza dei metodi di Eulero esporrò la parte essenziale della sua dimostrazione [2]) del teorema: « tutti i numeri pari perfetti sono compresi nella formula di Euclide (IX, 31) $2^{n-1}p$, ove p rappresenta $2^n - 1$ ed è un numero primo » [3]). Sia N un numero perfetto pari; se N è pari, allora può scriversi sotto la forma $2^{n-1}a$, ove a non è divisibile per 2. N è perfetto, cioè è uguale alla somma di tutti i suoi sottomultipli interi; perciò (se il numero stesso è considerato come uno dei suoi divisori) esso è uguale alla metà della somma di tutti i divisori interi, la quale può denotarsi con ΣN. Poichè è $2N = \Sigma N$, avremo:

$$2 \times 2^{n-1} a = \Sigma 2^{n-1} a = \Sigma 2^{n-1} \times \Sigma a,$$

da cui:

$$2^n a = (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) \Sigma a = (2^n - 1) \Sigma a;$$

1) Eulero ha dimostrato l' ultimo teorema di Fermat cioè « che $x^n + y^n = z^n$ per $n > 2$ è irrisolvibile in numeri interi » per $n = 3$ ed $n = 4$.

2) *Commentationes Aritmeticae collectae*, Pietroburgo, 1849, vol. II, p. 515, art. 105; SYLVESTER pubblicò un'analisi del ragionamento euleriano in *Nature*, del 15 dicembre 1887, vol. XXXVII, p. 152.

3) EUC., IX, 36.

quindi:

$$\frac{a}{\Sigma a} = \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{p}{p+1};$$

d'onde

$$a = \lambda p, \text{ e } \Sigma a = \lambda (p + 1);$$

e poichè il rapporto $\frac{p}{p+1}$ è irriducibile, λ deve essere un intero positivo. Ora, eccettuato il caso $\lambda = 1$, noi abbiamo 1, λ, p e λp come fattori di λp; inoltre, se p non è un numero primo, allora vi saranno pure altri fattori. Quindi, eccettuato $\lambda = 1$ e p non sia un numero primo, abbiamo:

$$\Sigma \lambda p = 1 + \lambda + p + \lambda p + \ldots = (\lambda + 1)(p + 1) + \ldots.$$

Ma ciò è incompatibile col risultato $\Sigma \lambda p = \Sigma a = \lambda (p + 1)$. Dunque λ deve essere eguale ad 1, e p deve essere un numero primo. Perciò $a = p$; quindi $N = 2^{n-1} a = 2^{n-1} a \ (2^n - 1)$. Aggiungerò come corollario, che, poichè p è un numero primo, ne consegue che n lo è pure; e quei valori di n (minori di 257) che rendono p un primo, son dati dalla regola di Mersenne.

Le quattro opere sopra ricordate comprendono gran parte di quello che Eulero compose intorno alla matematica pura. Ma egli scrisse anche molte memorie su quasi tutti i rami della matematica applicata e sulla fisica matematica sino allora studiati; le principali sono le seguenti.

Nella meccanica di un sistema rigido determinò le equazioni generali del moto di un corpo attorno ad un punto fisso, che sono ordinariamente date sotto questa forma:

$$A \frac{d\omega_1}{dt} - (B - C) \omega_2 \omega_3 = L:$$

e diede le equazioni generali del moto di un corpo libero, che sono oggi date sotto la forma:

$$\frac{d}{dt}(mu) - mv\theta_3 + mv\theta_2 = X,$$

$$\frac{dh_1}{dt} - h'_2\theta_3 + h'_3\theta_2 = L.$$

Egli sostenne pure e ritoccò il principio della *minima azione*, che era stato proposto da Maupertuis nel 1751 nel suo *Essai de cosmologie* (p. 70).

Nella idrodinamica Eulero diede le equazioni generali del moto, che comunemente sono espresse nella forma:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} + X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\,.$$

Mentre Eulero era intento a scrivere un trattato sulla idromeccanica, in cui avrebbe svolto la materia rifacendola dalle fondamenta, fu colpito dalla morte.

Le sue opere più importanti di astronomia sono la sua *Theoria motuum planetarum et cometarum*, pubblicata nel 1744; la sua *Theoria motus lunaris*, pubblicata nel 1772. Egli in esse, tratta il problema dei tre corpi; suppone che il corpo considerato, per esempio la luna, trasporti seco nel suo moto tre assi ortogonali, i quali si muovano parallelamente a sè stessi, e che i moti considerati si riferiscano tutti a questi assi. Questo metodo non è comodo; però per mezzo dei risultati di Eulero, G. T. Mayer costruì le tavole lunari, in premio delle quali nel 1750 la vedova di lui ricevè dal Parlamento inglese 5000 lire sterline, mentre, in riconoscimento dei servizi resi da Eulero, fu votata una somma di 300 lire sterline, come suo onorario.

Eulero si occupò ancora molto dell'ottica. Nel 1746 paragonò la teoria della emissione con quella ondulatoria, dichiarandosi in complesso favorevole a quest' ultima. Nel 1770-71 pubblicò le sue ricerche di ottica in tre volumi, col titolo di *Dioptrica*.

Scrisse pure un'opera che tratta di fisica elementare e dei principî fondamentali della filosofia matematica. Tale opera ebbe origine da un invito, che egli ricevette quando per la prima volta si recò a Berlino, di dare lezioni di fisica alla Principessa di Anhalt-Dessau. Queste lezioni furon pubblicate negli anni 1768-1772 in tre volumi col titolo di *Lettres.... sur quelques sujets de physique...*, e per mezzo secolo furono considerate un trattato classico sull'argomento.

Naturalmente le splendide opere di Eulero non furono gli

unici libri di testo, che insegnassero le ricerche originali fatte in quest'epoca. Fra i molti scrittori del tempo mi piace ricordare specialmente *Daniele Bernoulli*, *Simpson*, *M. G. Agnesi* [1]), *Lambert*, *Bézout*, *Trembley* e *Arbogast*, come quelli che cooperarono allo svolgimento della matematica. Nel Capitolo precedente ebbi già occasione di citare i due primi.

Maria Gaetana Agnesi, nacque a Milano il 16 marzo 1718 e morì ivi il 9 gennaio 1799; si segnalò nelle lettere, nella filosofia e nelle matematiche; in conseguenza ebbe il titolo onorario di lettore di matematica nell' Università di Bologna [2]).

Nel 1747 pubblicò a Milano le sue *Instituzioni analitiche*, che furono nel 1801 tradotte in inglese; in esse l'Agnesi fra l'altro studia la curva del terzo ordine immaginata da G. Grandi [3]) e detta *versiera*; essa è una curva piana con un punto doppio all' infinito, rappresentabile mediante l'equazione

$$xy^2 + r^2\,(x - 2\,r) = 0,$$

ove r è il raggio del cerchio che serve per costruirla.

Lambert [4]). — *Giovanni Enrico Lambert* nacque a Mülhausen il 28 agosto 1728 e morì il 25 settembre 1777. Era figlio di un povero sarto e, per istruirsi, dovette fare assegnamento sulle proprie forze. Coll'aiuto di un impiegato di una miniera ottenne un posto nell' ufficio di un giornale; e successivamente, dietro la raccomandazione dell'editore, fu nominato precettore in una famiglia privata, la quale mise a sua disposizione una buona biblioteca, che egli poteva usare nelle ore libere. Nel 1759 si stabilì ad Augsburg e nel 1763 si trasferì a Berlino, ove ottenne una

---

1) Aggiunta dei Traduttori.

2) Vedi LUISA ANZOLETTI, *Maria Gaetana Agnesi*, Milano, 1900, p. 273.

3) Cfr. G. VACCA, *Boll. di bibliogr. e storia della sc. mat.*, tomo IV, 1901, p. 33.

4) Vedi *Lambert nach seinem Leben und Wirken*, del dott. HUBAR, Basilea, 1828. La maggior parte delle memorie di LAMBERT sono raccolte nei suoi *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*, pubblicati in 4 volumi, Berlino, 1765-1772.

piccola pensione; ed in fine fu Direttore dell'*Almanacco astronomico* di Prussia.

Le più importanti opere di Lambert furono: una sull'ottica, pubblicata nel 1756, che suggerì ad Arago l'indirizzo delle sue ricerche, che poi seguì; un trattato sulla prospettiva, pubblicato nel 1750 (a cui fu aggiunta nel 1768 un'appendice sulle *applicazioni pratiche*); ed un trattato sulle comete, pubblicato nel 1761, contenente la ben nota espressione dell'area di un settore focale di una conica in funzione della corda e dei raggi che lo limitano. Inoltre presentò molte memorie all'Accademia di Berlino. Le più importanti di esse sono: quella del 1768 sulle quantità trascendenti, in cui dimostrò che π è irrazionale (tale dimostrazione si ritrova nella *Geometria* di Legendre, ove è estesa a π^2); un lavoro sulla trigonometria, scritto nel 1768, in cui sono dimostrati i teoremi di Demoivre sulla trigonometria delle variabili complesse e sono introdotti il seno ed il coseno iperbolici [1]), denotati coi simboli $\sinh x$, $\cosh x$; il saggio, intitolato *Osservazioni analitiche*, pubblicato nel 1771, che è il primo tentativo per formare le equazioni funzionali, esprimendo le proprietà date col linguaggio del calcolo differenziale e poi integrando; finalmente una nota sulla forza viva, pubblicata nel 1783, in cui per la prima volta la seconda legge di Newton sul moto venne espressa colla notazione del calcolo differenziale [2]).

Bézout; Trembley; Arbogast. — Sugli altri matematici sopra ricordati dirò poche parole.

Stefano Bézout nacque a Nemours il 31 marzo 1730 e morì il 27 settembre 1783; oltre a molti lavori minori, scrisse una *Théorie générale des équations algébriques*, pubblicata a Parigi nel 1779, che contiene particolarmente molte cose nuove ed im-

1) È stato però osservato che queste funzioni furono per la prima volta segnalate da F. C. MAYER; vedi *Die Lehre von den Hyperbelfunktionem* di S. GUNTHER, Halle, 1881, e *Beiträge zur Geschichte der neueren Matematik*, dello stesso, Ansbach, 1881.

2) Il Lambert fece anche importanti ricerche sulla geometria non-euclidea; vedi per ciò l'opera di ENGEL e STÄCKEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euclid his auf Gauss*, Lipsia, 1795.

portanti sulla teoria della eliminazione e sulle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione; adoperò i determinanti in una memoria inserita nell'*Histoire de l'Académie Royale*, 1764; ma non ne trattò la teoria generale.

Giovanni Trembley nacque a Ginevra il 1747 e morì il 18 settembre 1811; contribuì allo studio delle equazioni differenziali, e delle differenze finite e del calcolo delle probabilità.

Luigi Francesco Antonio Arbogast nacque in Alsazia il 4 ottobre 1759, morì a Strasburgo ove era professore, l'8 aprile 1803; scrisse sulle serie e le derivate, conosciute sotto il suo nome; egli, per primo, considerò i simboli di operazione separatamente da quelli di quantità.

Io non mi dilungherò in questa storia sopra coloro che non hanno fatto notevolmente progredire la scienza; ma ho ricordato i sopradetti matematici, perchè i loro nomi sono tuttavia ben noti. Le scoperte di Eulero e Lagrange nei vari rami della scienza da essi trattati, furono così complete e così estese che i lavori dei loro contemporanei minori non sono di tale importanza da potere essere ricordati in un libro della natura del presente.

Lagrange [1]). — *Giuseppe Luigi Lagrange*, il più grande matematico del secolo XVIII, nacque a Torino il 25 gennaio 1736 e morì a Parigi il 10 aprile 1813. Suo padre, depositario della cassa militare sarda, occupava una buona posizione sociale ed era assai ricco; ma, durante la giovinezza del figlio, perdette gran parte delle proprie sostanze in ispeculazioni sbagliate; perciò il giovane Lagrange dovette provvedere al suo avvenire col proprio ingegno. Fu educato nel collegio di Torino; ma soltanto all'età di 17 anni mostrò avere qualche inclinazione per la mate-

1) Riassunti della vita e delle opere di LAGRANGE sono dati nell'*English Cyclopaedia* e nell'*Encyclopaedia Britannica* (9ª edizione); di essi ho fatto uso. Il primo contiene una bibliografia dei suoi scritti. Le opere di LAGRANGE, edite da SERRET e DARBOUX, vennero pubblicate dal Governo francese. Una breve biografia scritta da DELAMBRE è stampata nel primo volume; maggiori particolari si trovano nell'articolo di G. LORIA, *Lagrange nella vita e nelle opere*, in *Annali di Matematica*, ser. III, tomo XX, 1913.

matica; l' interessamento per questa scienza nacque in lui dalla lettura di una memoria di Halley [1]), che gli cadde in mano per caso. Da solo e senza aiuto alcuno egli si diede agli studi matematici, e dopo un lavoro incessante di un anno, divenne un matematico compiuto e fu nominato professore nella Scuola di Artiglieria.

Il primo frutto importante delle sue fatiche si trova in una lettera ad Eulero, scritta quando aveva solo diciannove anni, nella quale risolvette il problema degli isoperimetri, che per più di mezzo secolo era stato oggetto di studio. Nella soluzione del problema (in cui egli si propose di determinare la forma di una funzione tale, che l'espressione, in cui essa entrava, soddisfacesse ad una certa condizione) enunciò i principî del calcolo delle variazioni. Eulero riconobbe la generalità del metodo adoperato e la superiorità di esso su quello impiegato da lui; e con cortesia rara trattenne presso di sè una memoria, che aveva già scritta, la quale conteneva gran parte delle stesse cose, affinchè il giovane italiano potesse aver tempo di completare il suo lavoro e reclamare per sè la incontestabile invenzione del nuovo calcolo. Il nome di questo ramo dell'analisi fu suggerito da Eulero. L'anzidetto lavoro collocò subito Lagrange fra i primi matematici di quell'epoca.

Nel 1758 Lagrange fondò, col concorso di suoi amici, una società, che poi si trasformò nell'Accademia di Torino, e nei cinque volumi delle sue memorie, note comunemente sotto il nome di *Miscellanea Taurinensia*, si trovano parecchi dei suoi scritti giovanili. Molti di essi sono memorie elaboratissime. Il primo volume contiene una memoria sulla teoria della propagazione del suono; ivi egli segnala un errore di Newton, ottiene l'equazione differenziale generale del moto e gl' integrali pel moto rettilineo. Questo volume contiene pure la soluzione completa del problema di una corda vibrante trasversalmente; in questa nota Lagrange fa osservare la mancanza di generalità nelle soluzioni date precedentemente da Taylor, D'Alembert ed

1) *Sull'eccellenza dell'algebra moderna in certi problemi di ottica*, in *Philosophical Transactions*, 1693, vol. XVIII, p. 960.

Eulero e giunge alla conclusione, che la forma della curva in un tempo t qualunque è data dall'equazione:

$$y = a \text{ sen } mx \,.\, \text{sen } nt.$$

La memoria termina con un magistrale studio sugli echi, sulle battute e sui suoni combinati. Nello stesso volume trovansi altre memorie di Lagrange riguardanti le serie ricorrenti, le probabilità ed il calcolo delle variazioni.

Il secondo volume contiene una lunga memoria di Lagrange, che compendia i risultati di parecchie del primo volume, sulla teoria e sulla notazione del calcolo delle variazioni, di cui s' illustra l'uso, ricavando il principio della minima azione e risolvendo vari problemi di dinamica.

Il terzo volume contiene la soluzione di parecchi problemi di dinamica mediante il calcolo delle variazioni; alcune note sul calcolo integrale; una soluzione del problema di Fermat, di cui si è già discorso, che consiste nel trovare un numero x che renda nx^2+1 un quadrato, ove n è un dato numero intero che non sia un quadrato; finalmente le equazioni differenziali generali del moto di tre corpi, che si muovono in forza della loro mutua attrazione.

Nel 1761 Lagrange rivaleggiava co' primi matematici di quell'epoca; ma l'assiduo lavoro dei precedenti nove anni danneggiò seriamente la sua salute; ed i medici non si rendevano garanti della sua mente e della sua vita, qualora egli non si fosse arrestato in quel lavoro incessante e non avesse cercato qualche distrazione. Quantunque la sua salute si fosse temporaneamente ristabilita, tuttavia il suo sistema nervoso, continuamente scosso, non riacquistò più la primitiva elasticità e d'allora in poi fu costantemente assalito da profonda ipocondria.

La prima opera che pubblicò poi, in cui tratta della librazione della luna, reca la data 1764 e spiega la ragione per cui la faccia della luna sia sempre rivolta verso la terra; Lagrange applicò in tale ricerca il principio dei lavori virtuali. La sua soluzione è interessante particolarmente perchè contiene in germe l' idea delle equazioni generali del moto, le quali egli per primo stabilì nel 1780.

In quell'epoca partì per visitare Londra; ma strada facendo si fermò a Parigi. Qui fu ricevuto coi maggiori onori e con gran dispiacere lasciò la brillante società parigina per ritornare alla sua vita provinciale di Torino. La sua ulteriore dimora in Piemonte fu tuttavia breve. Nel 1766 Eulero lasciò Berlino; e Federico il Grande immediatamente scrisse, significando «al più grande matematico» il desiderio del «più grande Re di Europa», di averlo alla sua Corte. Lagrange accettò l'offerta e passò i successivi venti anni in Prussia, ove scrisse non soltanto la lunga serie di memorie pubblicate negli *Atti* delle Accademie di Berlino e Torino, ma la sua opera monumentale, cioè la *Mécanique analytique*. La sua residenza a Berlino incominciò con un caso sfortunato. Trovandosi spesso coi suoi colleghi ammogliati ed essendo assicurato dalle loro mogli che quella era la sola via per essere felici, egli si accasò; però l' unione non fu felice per nessuno dei due [1]) e la moglie gli morì ben presto.

Lagrange fu uno de' favoriti del Re, che spesso conversava con lui sui vantaggi e sulla perfetta regolarità della vita. Egli faceva lezione nella sua propria casa; investigò la sua mente ed il suo corpo come fossero state due macchine e determinò sperimentalmente l'esatta somma di lavoro che il suo organismo era capace di fare senza spezzarsi. Ogni sera si fissava il lavoro pel dì successivo e su ogni punto di esso scriveva una breve analisi per vedere quali parti delle dimostrazioni o della questione fossero suscettibili di essere migliorate. Egli elaborava sempre completamente il soggetto delle sue memorie prima d' incominciare a redigerle e poi le scriveva quasi sempre speditamente senza cancellature o correzioni.

---

[1]) Giova a questo proposito riferire un curioso aneddoto, riguardante Lagrange e D'Alembert. Quest' ultimo aveva appreso indirettamente il fidanzamento del suo amico Lagrange, e tosto gli scrive: «On m'écrit que vous avez fait ce qu'entre nous autres philosophes, nous appellons le saut périlleux. Je pense qu'un grand mathématicien doit savoir calculer son bonheur et qu'après avoir fait ce calcul, vous avez trouvé le mariage pour solution». Lagrange, che allora aveva 31 anni, gli rispose: «J'ai reçu vos lettres et vos compliments; je vous en remercie de tout mon cœur. Je ne sais si j'ai bien ou mal calculé; ou plutot je crois n'avoir pas calculé du tout, car j'aurais peut-être fait comme Leibniz, qui, à force de réfléchir, ne put jamais se déterminer. Il m'à paru que la chose était si indifférente d'elle même qu'elle ne valait point la peine de vous en entretenir». (Agg. dei T.).

La sua attività mentale durante questi venti anni fu sorprendente. Non solo scrisse la sua grande opera, la *Mécanique analytique*, ma presentò da cento a duecento memorie alle Accademie di Berlino, Torino e Parigi. Alcune di queste sono dei veri trattati e tutte senza eccezione eccellenti. All' infuori di quando fu per breve tempo ammalato, scrisse in media una memoria al mese. Tra queste noto le seguenti, che sono le più importanti.

Anzitutto, i suoi contributi ai volumi IV e V (1766-1773) dei *Miscellanea Taurinensia*, di cui il più notevole è la memoria del 1771, nella quale discusse in qual modo dovessero combinarsi fra loro numerose osservazioni astronomiche, per ottenere i risultati più attendibili. Poi i suoi contributi ai due primi volumi (1784-1785) delle *Memorie dell' Accademia di Torino*; nel primo inserì una memoria sulla pressione esercitata dai fluidi in moto e nel secondo una memoria sulla integrazione per serie infinite e sul genere de' problemi, a cui essa può applicarsi.

Gran parte delle memorie inviate a Parigi trattano di questioni astronomiche e fra esse voglio specialmente ricordare la memoria sul sistema di Giove (1766); il saggio sul problema dei tre corpi (1772); il lavoro sull'equazione secolare della luna (1773); ed il trattato sulle perturbazioni cometarie (1778). Queste furono tutte scritte su temi proposti dall'Accademia di Francia, la quale ogni volta assegnò il premio proposto a Lagrange.

Ma la maggior parte dei lavori scritti di Lagrange in quest'epoca furono pubblicati nelle *Memorie dell'Accademia di Berlino*. Parecchie di esse trattano questioni di *algebra*. In particolare ricorderò: 1) Uno studio *Sulla risoluzione delle equazioni indeterminate di 2° grado in numeri interi* (1769) con *osservazioni sulle equazioni indeterminate in generale* (1770); 2) *Il saggio sulla teoria dell'eliminazione* (1770); 3) Nelle magnifiche *Riflessioni sulla risoluzione delle equazioni algebriche* Lagrange (1770 e 1771) ha presentato una profonda analisi dei metodi sino allora proposti per risolvere le equazioni dei primi quattro gradi, ponendone in luce le analogie e mostrando perchè essi non possono servire per equazioni generali di grado più elevato. Questa memoria fa apparire Lagrange come precursore di coloro che crearono la Teoria delle sostituzioni; 4) *La soluzione completa di una equazione binomia di grado qualunque*; essa è contenuta nelle memorie ora ricordate; 5) Finalmente, nel 1773, egli trattò dei determinanti di 2° e 3° ordine e degl' invarianti.

Parecchie delle sue prime memorie trattano questioni riguardanti la negletta, quanto attraente, *teoria dei numeri*. Fra esse vi sono: 1) La dimostrazione del teorema che ogni intero, che non sia un quadrato, può esprimersi mediante la somma di altri due, tre o quattro quadrati di numeri interi (1770); 2) La dimostrazione del teorema di John Wilson (1741-1793)[1] che se n è un numero primo, allora $|\underline{n-1}+1$ è sempre multiplo di n (1771); 3) Le memorie degli anni 1773, 1775 e 1777, che dànno le dimostrazioni di parecchi teoremi enunciati da Fermat e da nessuno prima dimostrati; 4) E da ultimo il metodo per determinare i fattori dei numeri della forma $x^2 + ay^2$.

Scrisse anche alcune note su varî punti della *geometria analitica*; in due di esse (1792 e 1793) ridusse le equazioni delle superficie di 2° ordine alle loro forme canoniche.

Durante gli anni, che vanno dal 1772 al 1785, scrisse una lunga serie di memorie, che crearono la dottrina delle equazioni differenziali, specialmente quella delle equazioni a derivate parziali; io credo che prima di allora nessun matematico avesse spinto le sue ricerche in proposito più in là del considerare equazioni differenziali di certe forme speciali. La maggior parte di questi risultati furono raccolti nella seconda edizione del calcolo integrale di Eulero, pubblicata nel 1794.

Le memorie di Lagrange sulla *meccanica* non richiedono una trattazione a parte, poichè i risultati ivi ottenuti sono contenuti nella *Mécanique analytique*, di cui parleremo più avanti.

Da ultimo scrisse molte memorie su problemi *astronomici*. Le più importanti di esse sono le seguenti: 1) *Sull'attrazione degli elissoidi* (1773): essa è stata fondata sull'opera di Maclaurin; 2) *Sull'equazione secolare della luna* (1773), che è notevole anche per essere stata per la prima volta introdotta in essa l' idea del

1) Vedi due note di M. CANTOR e B. LEFÈBVRE, in *Bibl. Mathem.*, ser. III, tomo III, p. 142 e IV, p. 91.

potenziale. Il potenziale di un corpo in ogni punto è la somma della massa di ciascun elemento del corpo, diviso per la rispettiva distanza dal punto. Lagrange dimostrò che se fosse conosciuto il potenziale di un solido in un punto esterno, sarebbe subito trovata l'attrazione in qualunque direzione. La teoria del potenziale fu studiata ampiamente in una memoria inviata a Berlino nel 1777; 3) *Sul moto dei nodi di un'orbita planetaria* (1771); 4) *Sulla stabilità delle orbite planetarie* (1776); 5) Due memorie, in cui è dato il metodo completo per determinare l'orbita di una cometa mediante tre osservazioni (1778 e 1783); però non ne è dimostrata effettivamente la utilità pratica; ma il sistema di Lagrange di calcolare le perturbazioni mediante le quadrature meccaniche servì di base a gran parte delle successive ricerche su questo argomento; 6) *Determinazione delle variazioni periodiche secolari degli elementi dei pianeti* (1781-1784): i limiti superiori assegnati da queste si accordano esattamente con quelli ottenuti poi da Leverrier; Lagrange si spinse sin dove glielo permettevano le conoscenze che allora si avevano sulle masse planetarie; 7) Tre memorie sul metodo d' interpolazione (1783, 1792 e 1793), ove la teoria delle differenze finite è trattata col metodo che ora si usa, tale e quale fu lasciato da Lagrange.

Oltre a queste diverse memorie Lagrange compose un grande trattato, la *Mécanique analytique*. In esso egli espone la legge delle velocità virtuali e da tale principio fondamentale, applicando il calcolo delle variazioni, egli dedusse l' intera meccanica de' solidi e de' fluidi. Lo scopo di quest'opera sta nel mostrare che la meccanica è implicitamente contenuta in un principio unico e di dare formule generali, da cui si potesse ottenere qualunque risultato speciale. Il metodo delle coordinate generali, da cui egli ottiene tutto ciò, è forse il più brillante risultato della sua analisi. Invece di seguire il moto di ciascuna parte del sistema materiale, come fecero D'Alembert ed Eulero, egli dimostrò che, se noi determiniamo la configurazione del sistema con un numero di variabili che sia uguale al grado di libertà del sistema, allora l'energia potenziale e cinetica del sistema possono essere espresse in funzione di tali variabili e le equazioni differenziali del moto possono, quindi, dedursene con semplice differenziazione. Per esempio, nella dinamica di un sistema rigido, Lagrange sostituisce alla considerazione del problema particolare, l'equazione generale, la quale oggi si suole scrivere così:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

Fra gli altri teoremi minori, esposti da Lagrange, ricorderò la proposizione che la energia cinetica comunicata da dati impulsi ad un sistema materiale sotto dati vincoli è un massimo, ed il principio della minima azione. L'intera analisi è così elegante, che sir William Rowan Hamilton disse che quest'opera è un vero poema scientifico. È interessante notare che Lagrange osservò che la meccanica è realmente un ramo di matematica pura, analogo ad una geometria a quattro dimensioni, che sono il tempo e le tre coordinate di un punto nello spazio; poi rilevò esplicitamente egli che la sua opera non conteneva dal principio alla fine nemmeno una figura. Sulle prime non trovò chi assumesse la pubblicazione di questo libro, ma Legendre alla fine persuase una Casa di Parigi a pubblicarlo; esso venne alla luce nel 1788 sotto la sorveglianza di Legendre stesso.

Nel 1787 Federico il Grande morì; e Lagrange, il quale aveva riconosciuto che il clima di Berlino non era a lui confacente, di buon grado accettò l'offerta di Luigi XVI di recarsi a Parigi. Egli aveva ricevuto lo stesso invito dalla Spagna e da Napoli. In Francia fu ricevuto con ogni segno di distinzione e nel Louvre furono preparati appartamenti speciali per ospitarlo. Nei primi due anni della sua residenza a Parigi fu assalito da ipocondria; onde la copia stampata della sua *Mécanique*, intorno alla quale aveva lavorato per un quarto di secolo, giacque per più di due anni intonsa sul suo tavolo. La curiosità pei primi successi della rivoluzione francese lo scossero dal suo letargo; ma tale curiosità si mutò in spavento allo svolgersi degli avvenimenti. Fu circa alla stessa epoca (1792) che la bizzarra tristezza della sua vita e la sua timidezza mossero a compassione una ragazza, che insistè per isposarlo; essa riuscì una moglie devota, a cui egli divenne vivamente affezionato. Benchè il decreto di ottobre 1793, che ordinava a tutti gli stranieri di lasciare la Francia, lo avesse rispettato per la sua gran fama, tuttavia egli era pronto ad andarsene, quando gli fu offerta la presidenza della Commissione per la riforma dei pesi e delle misure. La scelta delle unità finalmente fu fatta e la si deve in gran parte a lui; e fu soprattutto dovuta alla sua influenza, se la suddivisione decimale fu accettata dalla Commissione del 1799.

Quantunque Lagrange avesse deciso di partire dalla Francia, mentre vi era ancor tempo, non corse mai alcun pericolo; ed i diversi Governi rivoluzionari (e nell' ultimo tempo Napoleone) lo colmarono di onori e di distinzioni. Una singolare testimonianza del rispetto in cui era tenuto, la si ebbe nel 1796, allorchè al Commissario francese in Italia fu ordinato di ricevere con solenni onori il padre di Lagrange e presentargli le congratulazioni della Repubblica per i profondi studi del figlio, il quale, col suo genio, «faceva onore a tutto il genere umano ed era special gloria del Piemonte avergli dati i natali». Si può aggiungere che Napoleone, allorchè andò al potere, in Francia incoraggiò grandemente gli studi scientifici e fu un benefattore liberale di essi.

Nel 1795 Lagrange fu nominato professore di matematica nella Scuola Normale da poco fondata, la quale ebbe la breve durata di soli quattro mesi. Le sue lezioni furono elementarissime e non contengono nulla di sostanziale importanza; ma furono pubblicate, perchè i professori avessero «ad impegnarsi di fronte ai rappresentanti del popolo ed ad ogni altro, a non leggerle o recitarle a memoria»; e si ordinò che fossero stenografate nell' intento di mettere in grado i deputati di vedere come i professori adempissero al loro mandato.

Quando si fondò la Scuola Politecnica nel 1797 Lagrange vi fu nominato professore; e le sue lezioni furono giudicate dai matematici, che ebbero la buona fortuna di assistere ad esse, perfette tanto sotto il punto di vista della forma, quanto sotto quello della sostanza. Incominciava coi più semplici elementi, e conduceva i suoi allievi, quasi a loro insaputa, sino a renderli capaci di potere da sè stessi allargare il campo della scienza; e soprattutto fece comprendere ai suoi alunni il vantaggio di impiegare sempre i metodi generali espressi con una notazione simmetrica [1]).

Le sue lezioni sul calcolo differenziale formano la base della sua *Théorie des fonctions analytiques*, pubblicata nel 1797. Quest'opera non è altro che lo svolgimento d'un' idea contenuta in un lavoro, che egli pubblicò fra le memorie di Berlino nel 1772; scopo di essa è di sostituire al calcolo differenziale un insieme di teoremi, fondati sullo sviluppo in serie delle funzioni algebriche. Qualche cosa di simile a questo metodo era stato già fatto da Giovanni Landen nella sua *Residual Analysis* pubblicata in Londra nel 1758 [2]). Lagrange credette di potersi così liberare dalle difficoltà attinenti all' uso delle quantità infinite ed infinitesime e che i filosofi dichiaravano di vedere nell'ordinaria trattazione del calcolo differenziale. La *Théorie* è divisa in tre parti; la prima tratta della teoria generale delle funzioni e dà una dimostrazione algebrica del teorema di Taylor, la cui validità è però discutibile; la seconda tratta delle applicazioni alla geometria; e la terza delle applicazioni alla meccanica. Un altro trattato dello stesso genere porta il titolo *Leçons sur le calcul des fonctions* e fu pubblicato nel 1804. Questi lavori possono considerarsi come il punto di partenza delle ricerche di Cauchy, Jacobi e Weierstrass.

Nell' ultimo periodo della sua vita Lagrange ritornò all' uso degli infinitesimi, invece di fondare il calcolo differenziale sullo studio delle funzioni algebriche; e nella prefazione alla seconda edizione della *Mécanique analytique*, pubblicata nel 1811, egli ne giustificò l' uso dicendo che: « allorchè noi abbiamo afferrato

1) Lagrange, come si vede, non solo era un grande scienziato, ma era anche un valentissimo insegnante. Egli trattava sempre le questioni da un punto di vista generale, da cui poi discendeva a' casi particolari, e così il teorema che si era proposto di dimostrare. Le lezioni che egli dettò alle Scuole Normale e Politecnica di Parigi sono memorabili, poichè egli non impartiva, come usasi generalmente, l' insegnamento *magistrale*, ma esponeva i vari metodi, li discuteva, li confrontava fra loro, insomma di essi faceva l'oggetto principale del suo insegnamento, che costituiva così una vera scuola di filosofia didattica (Agg. dei T.).

2) Il metodo stesso venne reso del tutto generale e perfetto nel secolo scorso da WEIERSTRASS (G. L.).

lo spirito del metodo infinitesimale e verificato l'esattezza dei suoi risultati o col metodo geometrico delle prime ed ultime ragioni o col metodo analitico delle funzioni derivate, noi possiamo impiegare le quantità infinitesime come un sicuro e valido mezzo per abbreviare e semplificare le nostre dimostrazioni ».

La sua *Résolution des équations numériques* pubblicata nel 1798, fu pure frutto delle sue lezioni alla Scuola politecnica. In essa Lagrange espone il metodo di approssimazione delle radici reali di un'equazione mediante le frazioni continue ed enuncia parecchi altri teoremi. In una nota finale dimostra come il teorema di Fermat, cioè che $a^{p-1} 1 \equiv 0 \pmod p$, ove p è un numero primo ed a è primo con p, si possa applicare per ottenere la soluzione algebrica completa di qualunque equazione binomia. Egli fa vedere anche come l'equazione, le cui radici sono i quadrati delle differenze delle radici di una equazione data, si possa impiegare per giungere ad una conoscenza sufficiente della posizione e della natura di quelle radici.

La teoria dei moti planetari aveva formato l'argomento di alcune delle più importanti memorie del Lagrange, pubblicate a Berlino. Nel 1806 l'argomento fu ripreso da Poisson, che in una memoria letta all'Accademia francese, mostrò che le formule di Lagrange conducono a limiti sicuri sulla stabilità delle orbite. Lagrange, che era presente, studiò di nuovo allora *ex novo* la questione ed in una memoria comunicata all'Accademia nel 1808 spiegò come dalla variazione delle costanti arbitrarie si potessero determinare le disuguaglianze periodiche e secolari di qualunque sistema di corpi agenti gli uni su gli altri.

Nel 1810 Lagrange cominciò una completa revisione della *Mécanique analytique*; ma prima della sua morte non potè condurne a termine che due terzi.

Di aspetto egli fu di media statura e gracile; con occhi chiari e cilestri, di colorito pallido; di carattere nervoso e timido, detestava le questioni e per evitarle rinunciava piuttosto in pro degli altri il merito che gli spettava per i suoi lavori.

Lagrange fu soprattutto un cultore delle matematiche pure; ricercò ed ottenne risultati astratti ed assai estesi lasciando agli altri di farne le applicazioni. Ed infatti non piccola parte delle scoperte del suo grande contemporaneo Laplace è una applicazione delle formule di Lagrange a fatti naturali; per esempio, i risultati di Laplace sulla velocità del suono e sull'accelerazione secolare della luna sono implicitamente contenuti in quelli di Lagrange. La sola difficoltà di comprendere Lagrange sta negli argomenti trattati e nella grande generalità dei suoi metodi; ma la sua analisi è « tanto lucida e luminosa, quanto simmetrica ed ingegnosa ».

Un matematico moderno, parlando di Lagrange, dice con ragione che egli rappresentò una parte cospicua nel progresso di ogni ramo delle matematiche pure. Come Diofanto e Fermat, egli possedeva uno special genio per la storia dei numeri, in cui diede le soluzioni di gran parte dei problemi, che erano stati proposti da Fermat; del proprio aggiunse parecchi teoremi. Egli inoltre creò il calcolo delle variazioni. Spetta a lui pure il merito di avere elevato a scienza la teoria delle equazioni differenziali, mentre essa per lo addietro non era che un insieme di artifizi ingegnosi per la risoluzione di problemi particolari. Contribuì al calcolo delle differenze finite colla formula d'interpolazione, che porta il suo nome. Ma sopra tutto egli diede alla meccanica, che, come dicemmo, fu da lui considerata come una parte della matematica pura, quella generalità e perfezione, a cui fu costantemente diretta l'opera sua.

Laplace [1]. — *Pietro Simone Laplace* nacque a Beaumont-en-Auge (Normandia) il 23 marzo 1749 e morì a Parigi il 5 marzo 1827. Era figlio di un povero fittavolo o forse di un contadino, e deve la sua educazione all'interessamento che destarono in alcuni ricchissimi suoi vicini il suo ingegno ed il suo aspetto seducente. Ben poco si conosce della sua giovinezza; poichè quando incominciò a segnalarsi, si allontanò dai suoi parenti e da quelli che l'avevano soccorso. A quanto pare, finiti gli studi, fu nominato assistente nella scuola di Beaumont; ma, essendosi pro-

[1] Il seguente riassunto della vita e delle opere di Laplace è in gran parte fondato sugli articoli nell'*English Cyclopaedia* e nell'*Encyclopaedia* britannica. Le opere di LAPLACE furono pubblicate in sette volumi dal Governo francese nel 1843-47; ed una nuova edizione con considerevoli aggiunte fu fatta a Parigi in sei volumi, nel 1878-84.

curato una lettera di presentazione per D'Alembert, si recò a Parigi per cercarvi fortuna. Una sua memoria sui principî della meccanica interessò talmente D'Alembert, che dietro la sua raccomandazione, gli fu conferita una cattedra nella Scuola militare.

Sicuro della sua capacità, Laplace si diede allora a lavori originali e nei seguenti diciassette anni (1771-1787) produsse la maggior parte del suo lavoro originale in astronomia. Questo fu iniziato con una memoria, letta davanti all'Accademia francese nel 1773, in cui dimostra che i moti planetari sono stabili, spingendo la dimostrazione fino alle terze potenze delle eccentricità e delle inclinazioni. Dopo questa memoria ne pubblicò parecchie altre riguardanti diverse parti del calcolo integrale, le differenze finite, le equazioni differenziali e l'astronomia. Durante gli anni 1784-1787 pubblicò alcune memorie di grandissima importanza. Fra queste ve n'è una, scritta nel 1784 e riprodotta nel terzo volume della *Mécanique céleste*, in cui determina completamente l'attrazione di uno sferoide su una molecola esterna ad esso. Questa memoria è celebre per l'introduzione nella analisi delle funzioni sferiche, o coefficienti di Laplace, ed anche per la generalizzazione che vi fece dell'uso del *potenziale* (nome dato per la prima volta nel 1828 da Green). Se le coordinate polari di due punti sono (r, μ, ω) e (r', μ', ω') e se $r' \geqq r$, allora l'inversa della loro distanza fra essi può esprimersi in potenze di $\frac{r}{r'}$ ed i *rispettivi coefficienti* sono i coefficienti di Laplace. La loro utilità scaturisce dal fatto, che ogni funzione delle coordinate di un punto di una sfera può essere sviluppata in serie di esse. Si deve notare che coefficienti analoghi per lo spazio a due dimensioni, erano stati adoperati precedentemente da Legendre, il quale in una memoria presentata all'Accademia di Francia nel 1783 ne stabilì alcune proprietà; perciò a buon dritto ebbe a lagnarsi del modo, col quale fu trattato da Laplace in questa occasione.

Questa memoria è pure notevole ancora per lo svolgimento dell'idea del potenziale, tolta da Lagrange [1], che avevala usata

[1] Vedi il *Bulletin* della *New-York mathematical Society*, 1892, vol. I, pp. 66-74.

nelle memorie degli anni 1773, 1777 e 1780. Laplace dimostrò che il potenziale soddisfa sempre l'equazione differenziale:

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\ ;$$

su questo risultato basò le sue posteriori ricerche sull'attrazione. La quantità $\Delta^2 V$ è stata chiamata la concentrazione di V ed il suo valore in ogni punto indica l'eccesso del valore di V in quel punto sopra il suo valore medio nell'intorno di esso. L'equazione di Laplace o la più generale $\Delta^2 V = -4\pi\varrho$ comparisce in tutti i rami della fisica matematica. Secondo alcuni scrittori, ciò è conseguenza immediata dell'essere Δ^2 un'operazione scalare, oppure dal fatto che l'equazione rappresenta analiticamente qualche legge generale della natura non ancora enunciata a parole; e probabilmente verrà considerata da un Kantiano come un segno esteriore di una delle forme necessarie, sotto cui si percepiscono tutti i fenomeni.

A questa memoria fece seguito un'altra *Sur les inégalités seculaires*, che fu presentata in tre parti negli anni 1784, 1785 e 1786, ove Laplace soprattutto tenta di spiegare la «*grande diseguaglianza*» di Giove e Saturno. Laplace dimostra, mediante considerazioni generali, che la mutua azione di due pianeti non può mai di molto modificare le eccentricità e le inclinazioni delle loro orbite, e che le singolarità del sistema di Giove si dovevano attribuire all'avvicinarsi maggiormente alla commensurabilità dei moti medi di Giove e Saturno. Ulteriori sviluppi su questi teoremi relativi ai moti planetari furono dati da lui in due memorie negli anni 1788 e 1789; fu appunto in base a tali risultati che il Delambre calcolò le sue tavole astronomiche.

L'anno 1787 fu memorabile per l'esposizione e l'analisi fatta da Laplace della relazione fra l'accelerazione lunare ed i cambiamenti secolari nelle eccentricità dell'orbita terrestre; questa ricerca completò la dimostrazione della stabilità di tutto il sistema solare, nella ipotesi che sia formato da un insieme di corpi rigidi. Tutte queste memorie furono presentate all'Accademia di Francia e sono pubblicate nei *Mémoires présentées par divers savants*.

Circa in quest'epoca Laplace si accinse a scrivere un lavoro, che avrebbe «dato una soluzione compiuta del grande problema di meccanica riguardante il sistema solare ed avrebbe posto in così esatto accordo la teoria colla osservazione che le equazioni empiriche non avrebbero potuto trovar più posto nelle tavole astronomiche». Il risultato da lui ottenuto è rappresentato da l'*Exposition du système du monde* e dalla *Mécanique céleste*.

Quella fu pubblicata nel 1796 e dà una spiegazione generale del fenomeno, ma ne omette i particolari. Essa contiene un sommario della storia dell'Astronomia, il quale fruttò al suo autore l'onore di essere ammesso fra i quaranta dell'Accademia di Francia; è generalmente considerata una delle opere classiche della letteratura francese, quantunque non possa dare alcun affidamento di esattezza storica per gli ultimi periodi di cui tratta.

L'ipotesi della nebulosa fu enunziata in quest'opera [1]). Secondo essa il sistema solare sarebbe stato formato da una massa globulare di gas incandescente ruotante intorno ad un asse passante pel suo baricentro. Siccome questa massa si raffreddava, così essa si contraeva e dall'orbita esterna si staccavano successivamente degli anelli, i quali si raffreddavano alla lor volta e finalmente si condensavano in pianeti, mentre il sole rappresentava il nucleo centrale, in cui si trova tuttora. Conformemente a tale modo di vedere, si dovrebbe ritenere che i pianeti più lontani dal sole fossero più antichi di quelli più vicini. La questione è estremamente ardua e benchè sembri certo che tutto il sistema solare abbia un'unica origine, vi sono varie circostanze che sembrano quasi inesplicabili in base all'ipotesi enunciata da Laplace.

Recentemente incontrò favore un'altra teoria che evita alcune delle difficoltà fatte sorgere dall'ipotesi di Laplace. In base ad essa, l'origine del sistema solare sta nella graduale aggregazione di meteorite che brulicavano per il nostro sistema e forse nello spazio. Queste meteorite, che normalmente sono

---

[1]) Sulla storia delle ipotesi della nebulosa e le modificazioni susseguenti vedi: A. M. CLERKE, *Modern Cosmogonies*, London, 1905 e H. POINCARÉ, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, Paris, 1913.

fredde, per effetto di ripetute collisioni, possono venire riscaldate, fuse e persino vaporizzate, e la massa risultante, per effetto della gravità, può essere condensata in corpi planetiformi gli aggregati maggiori risultanti divenendo i corpi principali del sistema solare. Per rendersi conto di siffatte collisioni e condensazioni si suppone che un grande numero di meteoriti fossero in epoca assai lontana situati in una nebulosa spiraliforme e che le condensazioni e le collisioni accadessero in certi nodi od intersezioni di orbite. Quando le risultanti masse planetarie venivano poi a raffreddarsi, le lune o gli anelli si sarebbero formati o per urti delle parti esterne o nel modo indicato dalla ipotesi di Laplace. Questa teoria sembra essere stata escogitata per la prima volta da Norman Lockyer. Essa non urta con alcun fenomeno noto della cosmologia; tuttavia, essendo oggi la nostra conoscenza dei fatti assai limitata, così sarebbe pazzia sostenere qualche dogma sull'argomento. Investigazioni recenti hanno mostrato che la nostra luna venne emessa dalla terra quando questa era in uno stato semi-fluido a cagione della frizione cagionata dalle maree. Perciò essa non è di origine nebulare, nè tampoco meteorica.

Probabilmente l'opinione moderna migliore inclina ad ammettere che condensazione nebulare, condensazione meteorica, frizione prodotta dal mare e possibilmente altre cause che non furono sinora scoperte, ebbero tutte la loro parte nell'evoluzione del nostro sistema planetario.

La questione è una delle più difficili; ma forse l'opinione moderna è proclive ad accettare l'ipotesi delle nebulose come *causa prima*, quantunque si riconosca che le altre cause (e notevolmente le aggregazioni meteoriche e l'attrito delle maree) abbiano pur esse contribuito alla formazione del sistema planetario.

L'idea della nebulosa fu emessa nel 1755 da Kant [1]), il quale suggerì ancora le aggregazioni meteoriche e l'attrito delle maree, come cause modificanti la formazione del sistema solare, ma è probabile che Laplace non lo sapesse.

1) Vedi la *Cosmogonia* di KANT, edita da W. HASTIE, Glascow, 1900.

Secondo la regola pubblicata da Titius di Wittemberg — ma conosciuta sotto il nome di legge di Bode, perchè Giovanni Hert Bode richiamò l'attenzione su di essa nel 1789 — le distanze dei pianeti dal sole sono approssimativamente nel rapporto dei numeri $0 + 4$, $3 + 4$, $6 + 4$, $12 + 4$ ecc., essendo $(n + 1)^{mo}$ termine $2^n. 3 + 4$. Sarebbe assai interessante se essa potesse dedursi dall'ipotesi della nebulosa o da qualche altra; ma, per quanto so, solo uno scienziato ha fatto qualche serio tentativo in proposito e la sua conclusione fu che la legge non è sufficientemente esatta e quindi non può servire se non a dare un mezzo per ricordare il risultato generale.

La discussione analitica completa del sistema solare leggesi nella *Mécanique céleste*, pubblicata in cinque volumi. Un'analisi di quanto contiene trovasi nella *English Cyclopaedia.* I primi due volumi pubblicati nel 1789 contengono i metodi per calcolare i moti dei pianeti, per determinare la loro forma e per risolvere i problemi delle maree. Il III ed il IV volume, pubblicati rispettivamente nel 1802 e nel 1805, contengono l'applicazione di questi metodi e parecchie tavole astronomiche. Il vol. V, pubblicato nel 1825, è soprattutto storico, ma come appendice contiene i risultati delle ultime ricerche di Laplace. Le ricerche originali di Laplace, che contiene la *Mécanique céleste*, sono così numerose ed importanti, che è davvero cosa assai spiacevole dovere osservare che molti dei risultati esposti sono stati ricavati da altri matematici, senza quasi mai citarne la fonte; ed i risultati — che sono in realtà frutto del lavoro paziente di un secolo — sono generalmente ricordati come se fossero dovuti a Laplace.

La sostanza della *Mécanique céleste* è eccellente: ma la lettura ne è oltremodo difficile. Biot, che assistette Laplace nella revisione delle prove di stampa, dice che Laplace stesso era spesso incapace di ristabilire i particolari dei ragionamenti e, soddisfatto che fossero esatte le conclusioni, si contentava di inserire la formula usuale: «Il est aisé à voir». La *Mécanique céleste* è non solo la traduzione dei *Principia* nel linguaggio del calcolo differenziale, ma completa le parti, di cui Newton non era stato capace di dare i particolari. L'opera congenere recente di F. Tisserard può considerarsi come un'esposizione moderna della astronomia dinamica classica; ma il trattato di Laplace rimarrà sempre un grande modello.

Laplace andò in persona a pregare umilmente Napoleone di accettare una copia della sua opera; il seguente racconto della visita è così ben documentato e caratteristico in tutti i suoi particolari, che giova riportarlo qui per intiero. Era stato detto a Napoleone che nel libro di Laplace non si nominava mai Dio; Napoleone, che era desideroso di proporre questioni imbarazzanti, lo ricevè coll'osservazione: « Signor Laplace, mi si dice che voi abbiate scritto questo libro sul sistema dell' universo e non abbiate mai menzionato il suo Creatore ». Laplace, benchè fosse il più umile dei sudditi, era inflessibile quanto un martire su ogni punto della sua filosofia, e rispose recisamente: « Je n'avais pas besoin de cette hypothèse-là ». Napoleone, divertitosi grandemente, riportò questa risposta a Lagrange, il quale esclamò: « Ah! c'est une belle hypothèse; ça explique beaucoup de choses ».

Nel 1812 Laplace pubblicò la *Théorie analytique des probabilités* [1]. Tale teoria si dice essere il senso comune espresso in linguaggio matematico. Il metodo di calcolare il rapporto del numero dei casi favorevoli al numero totale dei casi possibili è stato esposto da Laplace in una memoria scritta nel 1779; esso consiste nel considerare i successivi valori di qualunque funzione come i coefficienti dello sviluppo di un'altra funzione di una diversa variabile; questa è perciò chiamata « funzione generatrice » della prima. Laplace ha dimostrato in qual modo mediante l' interpolazione questi coefficienti possono essere ricavati dalla funzione generatrice. Egli studia poi il problema inverso e dai coefficienti ricava la funzione generatrice; ottiene ciò mediante la risoluzione di un'equazione alle differenze finite. Il metodo è incomodo e, a causa della accresciuta potenza dell'analisi, ora è raramente usato.

Questo trattato contiene una esposizione del metodo dei minimi quadrati ed è un' importante prova che Laplace possedeva molto bene i metodi analitici. Il metodo dei minimi quadrati per

1) Un sommario dei ragionamenti di Laplace leggesi nell'articolo sulle probabilità nella *Encyclopaedia Metropolitana*.

la combinazione di numerose osservazioni, era stato scoperto empiricamente da Gauss e Legendre; ma il capitolo IV dell'opera di Laplace contiene una dimostrazione formale di esso, su cui poi è stata fondata l' intera teoria degli errori. Questa è ivi trattata con un'analisi assai intricata, inventata a tal uopo; ma la forma, sotto la quale è presentata, è così misera e poco soddisfacente, che, ad onta della costante esattezza dei risultati a cui guida, si giunse a chiedersi se Laplace avesse realmente seguito il difficile procedimento da lui esposto così brevemente e così scorrettamente.

Nel 1819 Laplace pubblicò un sommario popolare della sua opera sulle probabilità. Questo libro — dal titolo *Essai philosophique sur les probabilités* — sta alla *Théorie des probabilités* come il *Système du monde* alla *Mécanique céleste.*

Fra le scoperte minori di Laplace nella matematica pura ricorderò il suo studio (contemporaneo a quello di Vandermonde) sulla teoria dei determinanti (1772); la dimostrazione del teorema che ogni equazione di grado pari ha almeno un fattore reale quadratico; la soluzione delle equazioni lineari differenziali mediante integrali definiti; e la soluzione dell'equazione lineare a derivate parziali di secondo ordine. Laplace fu pure il primo a considerare quei difficili problemi, che conducono ad equazioni a differenze miste, ed a dimostrare che la risoluzione di un'equazione alle differenze finite di 1° grado e di 2° ordine si può sempre ottenere sotto forma di frazione continua. Oltre a queste scoperte originali, determinò, nella sua teoria delle probabilità, i valori di un buon numero degli integrali definiti più comuni e diede la dimostrazione generale del teorema enunciato da Lagrange per lo sviluppo in serie di derivate di qualunque funzione implicita.

La teoria della attrazione capillare nella fisica teorica è dovuta a Laplace, che accettò l' idea proposta da Hauksbee nelle *Philosophical Transactions* del 1709, cioè che il fenomeno era dovuto ad una forza di attrazione piccolissima a distanze sensibili. La parte che tratta dell'azione di un solido su di un liquido e della mutua azione di due liquidi non fu completamente esaurita da Laplace, ma fu poi completata da Gauss; più tardi Neumann vi aggiunse qualche particolare e nel 1862 Lord Kelvin

(Sir William Thomson) dimostrò che, ammessa la costituzione molecolare della materia, le leggi dell'attrazione capillare si possono dedurre dalla legge di gravitazione di Newton.

Laplace fu il primo (1816) a far notare esplicitamente perchè la teoria di Newton intorno al moto vibratorio desse per la velocità del suono un valore inesatto. L'odierna velocità è maggiore di quella calcolata da Newton a causa del calore svolto dalla subitanea compressione dell'aria, che cresce di elasticità, e perciò fa aumentare la velocità del suono. Le ricerche di Laplace nella fisica sperimentale si restringono a quelle che fece insieme a Lavoisier negli anni 1782 e 1784 sul calorico specifico di diversi corpi.

Sembra che Laplace considerasse l'analisi semplicemente come un mezzo per trattare i problemi di fisica, quantunque l'abilità colla quale inventò i procedimenti a ciò necessari, sia, direi quasi, fenomenale. Purchè i suoi risultati fossero trovati giusti, egli spendeva poca fatica, a spiegare i passi, mediante i quali li aveva raggiunti; Laplace non si propose mai di conferire eleganza e simmetria ai suoi procedimenti; gli bastava che, in qualche maniera, si potesse risolvere la questione particolare che stava trattando.

La fama di Laplace avrebbe di molto guadagnato se si fosse accontentato del suo lavoro scientifico; egli invece agognava soprattutto alla gloria politica. L'abilità e la rapidità con cui cambiava i suoi principî, secondo l'opportunità, avrebbero divertito, se non fossero stati così servili. Col crescere della potenza di Napoleone, Laplace abbandonò i principî repubblicani (che, dopo essere stati specchio fedele delle idee del partito al potere, avevano subìto molti cambiamenti) e pregò il primo Console di dargli il posto di Ministro degli Interni. Napoleone, che desiderava l'appoggio degli scienziati, accettò l'offerta; ma in meno di sei settimane fu chiusa la carriera politica di Laplace. Ecco la nota di Napoleone a tal riguardo: «Géomètre de premier rang, Laplace ne tarda pas à se montrer administrateur plus que médiocre; dès son premier travail nous reconnûmes que nous nous étions trompé. Laplace ne saisissait aucune question sous son véritable point de vue; il cherchait des subtilités partout, n'avait que des idées problématiques et portait enfin l'esprit des *infiniment petits*, jusque dans l'administration».

Quantunque Laplace fosse esonerato dalla sua carica, tuttavia Napoleone desiderava conservarne il sostegno. Perciò lo nominò senatore, e nel vol. I della *Mécanique céleste*, Laplace pose una nota «che di tutte le verità terrene contenutevi, la più preziosa per l'autore era la dichiarazione, che così egli faceva, della sua devozione verso il paciere d'Europa». Nelle copie vendute dopo la Restaurazione questa nota venne cancellata. Nel 1814 era evidente che l'Impero sarebbe caduto; Laplace si affrettò subito ad offrire i suoi servigî ai Borboni; e alla Restaurazione fu insignito del titolo di marchese; il disprezzo che i suoi più onesti colleghi ebbero per questa sua condotta si può rilevare da alcune pagine di Paul Louis Courier. La sua dottrina fu utile nelle numerose commissioni scientifiche di cui fece parte e probabilmente grazie ad essa non si tenne nessun conto della sua subdola condotta politica; ma però la leggerezza del suo carattere non ci faccia dimenticare quanto grandi furono i servigi che egli rese alla scienza.

Che Laplace fosse vanitoso e interessato non è contestato nemmeno dai suoi più caldi ammiratori; la sua condotta verso i benefattori della sua giovinezza e verso i suoi amici politici fu da ingrato e spregevole; mentre l'appropriazione che egli fece dei risultati di quelli, che erano, in confronto a lui, sconosciuti, sembra essere bene accertata, e non si potrebbe in alcuna maniera scagionarnelo; e fra coloro, che egli trattò a questo modo, tre si segnalarono di poi, Lagrange e Fourier in Francia, e Young in Inghilterra, i quali mai dimenticarono le ingiustizie, di cui erano stati vittima. D'altra parte si deve riconoscere che, in alcune questioni, egli mostrò indipendenza di carattere e che mai occultò le proprie idee in religione, in filosofia e in scienza, benchè esse potessero essere vedute di mal occhio dalla autorità allora al potere; si potrebbe anche aggiungere che, verso la fine della sua vita e principalmente rispetto ai lavori dei suoi allievi, Laplace si mostrò ad un tempo generoso e leale; anzi una volta distrusse una sua memoria per lasciare ad un suo allievo (il Biot) il merito della scoperta ivi contenuta.

Legendre. — *Adriano Maria Legendre* nacque a Tolosa il 18 settembre 1752 e morì a Parigi il 10 gennaio 1833; gli eventi della sua vita sono semplicissimi e si possono riassumere in poche parole. Fu educato nel Collegio Mazzarino di Parigi; fu nominato professore nella scuola militare di questa città nel 1777; fu membro della Commissione anglo-francese del 1787 per collegare geodeticamente Greenwich a Parigi; servì in parecchie Commissioni dal 1792 al 1810; fu nominato professore alla Scuola Normale nel 1795; e successivamente ebbe dal governo altri minori incarichi. Laplace esercitò, per l'alta posizione che occupava, un'influenza sempre ostile a Legendre nella scienza e nei pubblici uffici; questi, essendo timido, sopportò l'oscurità a cui l'aveva condannato l'ostilità del suo collega.

L'opera analitica di Legendre è di gran valore, essendo seconda solo a quella di Lagrange e di Laplace, benchè non sia così originale. Le sue principali opere sono la *Géométrie*, la *Théorie des nombres*, gli *Exercices du calcul intégral* e le *Fonctions elliptiques*. Quest'ultima abbraccia i risultati delle sue varie memorie su questa materia. Inoltre ha scritto un trattato ove trovasi il metodo dei minimi quadrati e due serie di memorie, una sulla teoria delle attrazioni e l'altra sulle operazioni geodetiche.

Le memorie sull'attrazione sono analizzate e discusse nella *History of the theories of attraction* di Todhunter. La prima di esse, presentata all'Accademia nel 1783, fu sull'attrazione degli sferoidi. Essa contiene la introduzione dei coefficienti di Legendre, che qualche volta si chiamano circolari (o zonali) armonici, e che sono casi particolari dei coefficienti di Laplace; essa contiene pure la soluzione di un problema, in cui viene impiegato il potenziale. La seconda memoria fu pubblicata nel 1784; in essa si studia la forma di equilibrio di una massa liquida ruotante, supposta quasi sferica. La terza, scritta nel 1786, si occupa dell'attrazione degli ellissoidi omofocali. La quarta tratta della forma, che può assumere un pianeta fluido e della legge di densità di esso.

Le sue memorie sulla geodesia sono tre in tutto e furono presentate all'Accademia negli anni 1787 e 1788. Il più importante risultato in esse contenuto è il seguente: «un triangolo sferico si può trasformare in uno piano mediante alcune correzioni fatte agli angoli». Con questi lavori egli documentò gli studi da lui fatti sulla geodesia.

Il metodo de' minimi quadrati fu enunciato nelle *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* pubblicate nel 1806, a cui furono aggiunti diversi supplementi negli anni 1810 e 1820. Gauss era, indipendentemente, giunto allo stesso risultato, l'aveva usato nel 1795, ma lo pubblicò soltanto nel 1809. Laplace fu, come dicemmo, il primo matematico a dimostrarlo nel 1812.

Fra i libri pubblicati da Legendre, i suoi *Eléments de géométrie* è uno dei più noti; fu dato alla stampa nel 1794, e fu generalmente adottato nel continente invece degli *Elementi* di Euclide [1]). Le più recenti edizioni di questo trattato contengono gli elementi di trigonometria e dimostrazioni della irrazionalità di π e π^2. Nel 1803 Legendre pubblicò un'appendice sulla dibattuta questione della teoria delle rette parallele, la quale fu poi annessa alle seguenti edizioni degli *Eléments*.

La *Théorie des nombres* uscì nel 1778; nel 1810 e 1812 furono aggiunte ad essa delle appendici. La terza edizione, pubblicata in due volumi nel 1830, comprende i risultati delle diverse memorie che l'autore aveva ultimamente pubblicate; essa tuttora è una opera classica del genere. Si può asserire che egli trattò in quest'opera la materia, per quanto era possibile, come applicazione dell'algebra ordinaria; ma non riuscì in tal modo ad elevarla al grado di aritmetica superiore, sì da farne un ramo distinto delle matematiche.

La legge di reciprocità delle forme quadratiche, che riguarda i numeri primi dispari, trovasi per la prima volta dimostrata in questo libro; però il risultato era stato enunciato in una memoria del 1785. Gauss chiamò questa proposizione «la gemma dell'arit-

---

[1]) Vi fu un tempo che anche in Italia fecero non poca fortuna gli *Elementi di geometria* di LEGENDRE o testi consimili, forse più per la smania della novità che per il valore intrinseco di essi; e fu un male per le nostre scuole l'aver allora messo da banda i classici *Elementi* di EUCLIDE, poichè ad una geometria genuina si era voluto sostituire una geometria aritmetica, cioè impura: ma non tardò molto che per opera di valenti matematici, come il Betti e il Brioschi, il D'Ovidio ecc., ritornassero in onore gli *Elementi* di EUCLIDE o libri di testo ad essi informati (Agg. dei T.).

metica », e nelle sue opere se ne trovano non meno di sei dimostrazioni diverse. Esso può enunciarsi nel modo seguente:

Se p è un numero primo ed n è primo con p, allora è noto che il resto della divisione di $a^{\frac{1}{2}(p-1)}$ per p è o $+1$ o -1. Legendre rappresenta questo residuo con $\left(\frac{n}{p}\right)$. Quando il resto è $+1$, è possibile di trovare un numero quadrato che, diviso per p, dia per residuo n; allora n dicesi residuo quadratico di p; quando invece il resto è -1, allora non esiste un tale quadrato, ed n dicesi non-residuo di p. Ciò posto, la legge di reciprocità quadratica è espressa da questo teorema: se a e b sono numeri primi, allora:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(a-1)(b-1)}.$$

Così, se b è residuo di a, a sarà residuo di b, a meno che entrambi i numeri a e b non siano della forma $4m+3$; in altre parole, se a e b sono numeri primi dispari, si sa essere:

$$a^{\frac{1}{2}(b-1)} \equiv \pm 1 \text{ (mod. } b),$$

$$b^{\frac{1}{2}(a-1)} \equiv \pm 1 \text{ (mod. } a);$$

ma in forza della legge di Legendre le due ambiguità di segno saranno o entrambe positive o entrambe negative, a meno che a e b non siano della forma $4m+3$. Così se uno dei numeri primi dispari è non-residuo dell'altro, allora l' ultimo sarà un non-residuo del primo. Gauss e Kummer hanno più tardi dimostrato leggi analoghe per la reciprocità cubica e biquadratica; su queste ricerche è stato fondato un' importante ramo della teoria dei numeri.

La *Théorie des nombres* contiene anche l' utile teorema, mediante il quale, quando è possibile, un'equazione indeterminata di secondo grado si riduce alla forma $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. Legendre a tale proposito studiò anche le forme de' numeri che

possono essere espressi come somme di tre quadrati; e dimostrò che il numero dei numeri primi minori di n, è, con grande approssimazione, eguale a:

$$\frac{n}{\log_e n - 1{,}08316}$$

Gli *Exercices de calcul intégral* furono pubblicati in tre volumi negli anni 1811, 1817, 1826. Il terzo e buona parte del primo sono dedicati alle funzioni ellittiche; gran parte di quanto contengono è stata poi incorporata nel *Traité des fonctions elliptiques*. Il rimanente degli *Exercices* consta di vari argomenti: integrazione per serie, integrali definiti, e particolarmente un esteso studio delle frazioni *Beta e Gamma*.

Il *Traité des fonctions elliptiques* fu pubblicato in due volumi nel 1815 e 1826, ed è la più importante delle opere di Legendre. Poche settimane prima della sua morte egli vi aggiunse un terzo volume, il quale contiene tre capitoli sulle ricerche di Abel e di Jacobi. Quelle di Legendre incominciarono con una memoria sugli archi d'ellisse, scritta nel 1776; ma in questa ed in altre memorie egli trattò l'argomento semplicemente come un ramo del calcolo integrale e non vide che poteva considerarsi come una trigonometria superiore e così formarne un ramo separato di analisi. Furono pure da lui compilate tavole di valori degli integrali ellittici. I trattati analoghi odierni sono fondati sui metodi di Abel e di Jacobi. La superiorità di questi metodi fu subito avvertita da Legendre e quasi l'ultimo atto della sua vita fu quello di raccomandare quelle scoperte, che egli riconobbe destinate a far cadere i suoi propri lavori in un relativo oblio.

Ciò può servire a ricordarci un fatto, che importa segnalare in modo speciale, cioè che Gauss, Abel, Jacobi ed alcuni altri matematici, che saranno ricordati nel Capitolo seguente, furono contemporanei dei componenti la scuola francese.

Pfaff. — Rammenterò qui un altro matematico, che fece pure studi speciali sul calcolo integrale. È *Giovanni Federico Pfaff*; nacque a Stuttgart il 22 settembre 1765 e morì ad Halle il 21 aprile 1825; fu ritenuto da Laplace come il più eminente matematico di Germania del principio del secolo XIX; e tale sarebbe stato realmente, se Gauss non fosse esistito quasi contemporaneamente. Pfaff fu il precursore della scuola tedesca, che, sotto la direzione di Gauss e dei suoi successori, ha tracciato le linee sulle quali la matematica si volse durante il secolo XIX. Fu amico intimo di Gauss; infatti questi due matematici vissero insieme ad Helmstadt durante l'anno 1798, dopo che Gauss ebbe terminato il suo corso universitario. L'opera principale di Pfaff consiste nelle sue (incomplete) *Disquisitiones analyticae* sul calcolo integrale, pubblicate nel 1797; la sua memoria sulle equazioni differenziali, letta davanti all'Accademia di Berlino nel 1814, è importantissima.

Creazione della geometria moderna.

Mentre Eulero, Lagrange, Laplace e Legendre perfezionavano l'analisi, un altro gruppo di matematici francesi estendeva il campo della geometria con metodi analoghi a quelli precedentemente adoperati da Desargues e da Pascal. Il risveglio nello studio della geometria sintetica moderna è in gran parte dovuto a Poncelet; ma a questa scienza son legati anche i nomi di Monge e L. Carnot; il suo svolgimento nei tempi a noi più vicini è largamente dovuto a Chasles, Steiner, Staudt e Cremona.

Monge [1]. — *Gaspare Monge* nacque a Beaune il 10 maggio 1746 e morì a Parigi il 28 luglio 1818. Era figlio di un povero merciaiolo ambulante; studiò nelle scuole degli Oratoriani, in una delle quali divenne poi assistente. Un piano topografico di Beaune, che egli fece pervenire nelle mani di un uffiziale, lo fece raccomandare alle autorità militari, perchè lo ammettessero nel Collegio militare di Mézières. Benchè i suoi natali gli precludessero la carriera delle armi, tuttavia gli fu permesso di prestare servizio in una classe aggiunta in cui s'insegnava l'agrimensura ed il

[1]) Vedi *Essai historique sur les travaux.... de Monge*, di F. P. C. Dupin, Parigi, 1819; *Notice historique sur Monge* di B. Brisson, Parigi, 1818.

disegno, quantunque gli fosse detto, che non era di famiglia abbastanza distinta, perchè gli fosse concesso di studiare i problemi che richiedevano l'uso del calcolo. Infine gli si presentò un'occasione propizia. Dovendo essere tracciato un piano di fortezza secondo i dati forniti da certe osservazioni, egli lo eseguì con una costruzione geometrica. Dapprima l'uffiziale incaricato ricusò di riceverlo, perchè l'uso richiedeva un certo tempo per disegnarlo; ma la superiorità del metodo di Monge su quello allora insegnato era sì evidente, che esso fu accettato; e nel 1768 Monge fu nominato professore, a patto che i risultati della sua geometria descrittiva dovessero essere un segreto militare, riserbato ai soli uffiziali superiori.

Nel 1780 egli fu nominato a una Cattedra di matematica a Parigi e questa, insieme ad altri stipendi assegnatigli, gli assicurarono una rendita rispettabile. La prima memoria di una certa importanza che egli comunicò all'Accademia francese, fu quella del 1781, nella quale studio le linee di curvatura di una superficie. Queste erano state prima considerate da Eulero nel 1760 e definite come quelle sezioni normali, la cui curvatura era massima o minima; Monge le considerò come il luogo di quei punti della superficie, in cui s'intersecano le normali consecutive e così ne ottenne l'equazione differenziale generale. Nel 1795 applicò i suoi risultati alle quadriche aventi centro. Nel 1786 pubblicò la sua ben nota opera sulla *Statica*.

Monge abbracciò ardentemente le dottrine della rivoluzione. Nel 1792 divenne Ministro della Marina ed aiutò il Comitato di salute pubblica, mettendo la scienza a profitto della difesa della repubblica. Quando i terroristi andarono al potere, egli venne denunciato e solo una pronta fuga potè salvarlo dalla ghigliottina. Al suo ritorno nel 1794 fu nominato professore alla Scuola Normale, da poco fondata, e vi diede lezioni di geometria descrittiva.

Nel 1796 si recò in Italia colla Commissione che aveva avuto l'ordine di costringere le varie città d'Italia ad offrire tutte le pitture, le sculture, e le altre opere d'arte, che possedessero, come un presente, oppure in luogo dei contributi alla Repubblica francese, per essere poi inviate a Parigi. Nel 1798 Monge accettò una missione a Roma e, dopo averla eseguita, raggiunse Napoleone in Egitto. Di là, dopo le vittorie riportate in terra ed in mare dagl' Inglesi, ritornò in Francia.

Egli fu poi professore alla Scuola Politecnica di Parigi, ove insegnò la geometria descrittiva; le sue lezioni furono pubblicate nel 1800, sotto forma di trattato, col titolo: *Géométrie descriptive*. Quest'opera contiene l'arte di rappresentare con figure a due dimensioni le figure che ne hanno tre, problema che Monge di regola risolse coll'aiuto di due piani: il piano orizzontale e il piano verticale [1]). Monge si occupò anche della questione se la soluzione di un problema venga alterata qualora certe quantità ausiliarie, introdotte per facilitarne la soluzione, divengano immaginarie e dimostrò che il risultato non cambia. Alla Restaurazione egli fu privato degli uffici e degli stipendi, degradazione che gli fece perdere quasi la ragione, ed alla quale sopravvisse ben poco.

Gran parte delle sue memorie diedero materia nell'opera *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*, pubblicata nel 1795, trasformate poi nell'altra intitolata *Application de l'analyse à la géométrie*; la 4ª edizione ne fu pubblicata nel 1819 e Monge stesso ne rivide le prove di stampa poco prima di morire. Essa contiene, fra gli altri risultati, la soluzione di Monge di una equazione a derivate parziali del 2° ordine [2]).

Carnot. — *Lazzaro Nicola Margherita Carnot* nacque a Nolay il 13 maggio 1753 e morì a Magdeburgo il 22 agosto 1823; fu edu-

---

1) Per maggiori particolari veggasi G. Loria, *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai nostri giorni*, Milano, 1921.

2) Sotto l' impero egli fu fatto senatore, conte e gran cordone della legion d'onore; era talmente affezionato a Napoleone, che quando apprese la disfatta di Russia, fu colpito da apoplessia; il dolore per la caduta dell'Impero, più che le persecuzioni subite, gli fece perdere la ragione. Monge difese sempre i suoi alunni contro la prepotenza del Governo. I suoi allievi Malus, Biot ed altri avevano contro di loro sollevato la collera della Convenzione: «si vous renvoyez ces élèves — disse Monge al Consiglio — je quitte l'École». La Scuola Politecnica non volle presentare le sue felicitazioni al nuovo Imperatore, il quale per ciò voleva prendere contro essa misure gravissime. «Eh bien! Monge, — disse Napoleone a Monge, — vos élèves sont presque tous en révolte contre moi; ils se déclarent décidément mes ennemis». «Sire, — rispose Monge, — nous avons eu bien de la peine à en faire des républicains; laissez leur le temps de devenir impérialistes. D'ailleurs, permettez moi de vous le dire, vous avez tourné un peu court». Queste parole rivelano il carattere franco e coraggioso di Monge, il quale carattere è il contrapposto di quello di Laplace (Agg. dei T.).

cato a Burgundy ed ottenne una carica nel corpo degli Ingegneri di Condé. Benchè fosse sotto le armi, continuò i suoi studi matematici, di cui si era grandemente occupato. La sua prima opera, pubblicata nel 1784, fu sulle macchine; essa contiene una considerazione, che prelude al principio dell'energia applicato ad un grave, e la prima dimostrazione del fenomeno, che l'energia cinetica va perduta nell' urto dei corpi non perfettamente elastici. Allo scoppio della Rivoluzione nel 1789 Carnot si diede interamente alla politica. Nel 1793 fece parte del Comitato di salute pubblica e le vittorie delle armi francesi furono in gran parte dovute al suo genio di organizzazione e alla rigidissima disciplina. Occupò sempre eminenti cariche nei diversi Governi che si successero fino al 1796; ma essendosi opposto al colpo di Stato di Napoleone, dovè fuggire dalla Francia. Si rifugiò a Ginevra, ove nel 1797 pubblicò le sue *Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. Nel 1802 aiutò Napoleone; ma le sue sincere convinzioni repubblicane erano incompatibili col suo ufficio. Nel 1803 scrisse la sua *Géometrie de position* [1]). Quest'opera contiene una estesa discussione del significato geometrico dei segni delle radici di un'equazione algebrica. Nel 1814 Carnot offrì i suoi servigi per combattere in favore della Francia ma non per l' Impero, e sotto la Restaurazione fu esiliato [2]).

Poncelet [3]). — *Giovanni Vittorio Poncelet* nacque a Metz il 1° luglio 1788 e morì a Parigi il 22 dicembre 1867; entrò nel genio militare francese. Essendo stato fatto prigioniero nella ritirata dei Francesi da Mosca, durante la sua prigionia scrisse il *Traité des propriétés projectives des figures*, pubblicato nel 1822, che fu per lungo tempo ed è tuttora una delle opere più accreditate di geometria moderna. Mediante proiezione, reciprocità e omologia Poncelet stabilì ivi le principali proprietà delle coniche e delle quàdriche, e dei poligoni ad esse collegati. Meritano ancora

---

1) Egli scrisse anche la *Théorie des transversales* e dimostrò il teorema sulle proiezioni di un contorno chiuso (Agg. dei T.).

2) Vedi nell'*Éloge* di Arago, che, simile alla maggior parte dei discorsi funebri, è un panegirico piuttosto che una biografia imparziale.

3) Vedi *Notice sur la vie et les ouvrages du général Poncelet* di Didion, Parigi, 1869.

di essere ricordati il suo trattato di *Meccanica applicata*, pubblicato nel 1826, la memoria sui mulini ad acqua, pubblicata nel 1826, e la sua *Relazione sulla meccanica e le macchine inglesi*, presentata alla Esposizione universale tenutasi in Londra nel 1851. Inoltre pubblicò molte memorie nel *Giornale di Crelle*; dal punto di vista geometrico le più importanti sono: *Mémoire sur les centres de moyennes harmoriques*; *Mémoire sur la théorie générale des polaires reciproques*; l'*Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés proiéctives des lignes et des surfaces.*

Svolgimento della fisica matematica.

Il lettore avrà osservato che Lagrange, Laplace e Legendre si occuparono principalmente di analisi, geometria e astronomia. Io sono propenso a considerare Cauchy ed i matematici francesi odierni come appartenenti ad una scuola diversa per idee da quella considerata nel presente Capitolo e perciò li colloco fra i matematici moderni; credo invece che Fourier, Poisson e la maggior parte dei loro contemporanei siano i successori diretti di Lagrange e Laplace. Secondo il mio parere, gli ultimi componenti la scuola francese si dedicarono soprattutto all'applicazione dell'analisi matematica alla fisica. Prima di considerare questi matematici ricorderò i principali fisici sperimentali inglesi, che furono loro contemporanei ed i cui meriti sono stati solamente da poco adeguatamente riconosciuti. I principali tra essi sono Cavendish e Young.

Cavendish [1]. — *Enrico Cavendish* nacque a Nizza il 1º ottobre 1731 e morì a Londra il 4 febbraio 1810. La sua inclinazione per le ricerche scientifiche e matematiche si manifestò a Cambridge, ove egli risedette dal 1749 al 1753. Egli creò l'elettricità sperimentale e fu uno dei primi a trattare la chimica come scienza

1) Un riassunto della sua vita, scritta da G. Wilson, trovasi nel vol. I delle pubblicazioni della Società Cavendish, Londra, 1851. Le sue *Electrical Researches* furono edite da J. C. Maxwell e pubblicate a Cambridge nel 1879.

esatta. È degna di essere ricordata l'esperienza da lui fatta nel 1798 per determinare la densità della terra, calcolandone l'attrazione col confrontarla a quella di due palle di piombo: così dimostrò che la densità media della terra è circa cinque volte e mezzo quella dell'acqua. Questa esperienza venne eseguita dietro suggerimento di Giovanni Michell (1724-1793), allievo del Collegio della Regina a Cambridge, il quale morì prima di averlo potuto tradurre in atto.

Rumford [1]. — *Sir Beniamino Thomson Conte Rumford*, nato a Concord il 26 marzo 1753 e morto ad Auteuil il 21 agosto 1815, era oriundo inglese e combattè in America a favore dei Realisti nella guerra di secessione, terminata la quale si stabilì in Inghilterra; ma di poi entrò al servizio della Baviera, ove rivelò una grande valentia negli ordinamenti militari e civili. Da ultimo risiedette ancora in Inghilterra e qui fondò la « Royal Institution ». Gran parte delle sue memorie fu presentata alla Società Reale di Londra; nella più importante di esse è dimostrato che calore e lavoro si trasformano scambievolmente.

Young [2]. — Fra i più eminenti fisici di quest'epoca havvi *Tommaso Young*, che nacque a Milverton il 13 giugno 1773 e morì a Londra il 1º maggio 1829. Sin da fanciullo apparve qualche cosa di prodigioso, essendo dottissimo tanto nelle lingue moderne e nella letteratura, quanto nella scienza; conservò sempre il suo gusto letterario e fu proprio lui che per primo nel 1819 fornì la chiave per decifrare i geroglifici, che J. F. Champollion usò così felicemente. Egli fu avviato alla carriera del medico; e, dopo aver studiato ad Edimburgo ed a Gottinga, entrò nel Collegio Emanuel a Cambridge, ove nel 1799 si addottorò; egli attribuiva gran parte dei suoi successi agli studi universitari. La sua carriera di medico non fu molto fortunata; la sua massima favorita, cioè che una diagnosi medica è solo un bilancio di pro-

1) Un'edizione delle opere di Rumford, edita da Giorgio Ellis, e corredata di una biografia, fu pubblicata dall'Accademia americana di Scienze di Boston nel 1872.

2) La raccolta delle sue opere ed una biografia furono pubblicate da G. Peacock, in 4 volumi, Londra, 1855.

babilità, non garbava punto ai suoi clienti, i quali avrebbero preteso certa la loro guarigione per il denaro che sborsavano; per sua fortuna era fornito di molti mezzi. Parecchie memorie presentate in varie Società scientifiche dal 1798 in poi dimostrano che egli era un matematico valente; ma le ricerche che hanno reso immortale il suo nome sono quelle che riguardano le leggi dell'interferenza delle onde luminose; mostrò anche grande abilità nell'escogitare i mezzi per superare le principali difficoltà che incontrava l'accettazione della teoria ondulatoria della luce.

Dalton [1]). — Fra gli scienziati che si sono segnalati in questo periodo trovasi *Giovanni Dalton*, che nacque a Cumberland il 5 settembre 1766 e morì a Manchester il 27 luglio 1844. Dalton studiò la tensione dei vapori e la legge della dilatazione dei gas a diverse temperature. Nella chimica fondò la teoria atomica.

Si rileverà da queste note che la scuola dei fisici inglesi al principio di questo secolo si occupò principalmente della parte sperimentale della scienza. E invero non è possibile creare nessuna teoria soddisfacente senza una previa accurata determinazione de' fatti. I più eminenti fisici francesi di quest'epoca furono Fourier, Poisson, Ampère e Fresnel. Il loro metodo nel trattare le questioni di fisica è più matematico di quello dei loro contemporanei inglesi; anzi i due primi si segnalarono specialmente per la loro perizia matematica.

Fourier [2]). — Il primo di questi fisici francesi fu *Giovanni Battista Giuseppe Fourier*, che nacque ad Auxerre il 21 marzo 1768 e morì a Parigi il 16 maggio 1830. Era figlio di un sarto e fu educato dai Benedettini. La carriera delle armi dotte era allora in Francia, come era in Russia sotto il regime czarista, riservata ai giovani di nobili natali; perciò Fourier, non potendo

1) Vedi la *Memoir of Dalton* di R. A. Smith, Londra, 1856, e una memoria di W. C. Henry nelle *Cavendish Society transactions*, Londra, 1854.

2) Un'edizione delle sue opere, curata da G. Darboux, fu pubblicata in 2 volumi, Parigi, 1888-90.

intraprenderla, accettò una Cattedra di matematica in una scuola militare. Si adoprò molto nel suo distretto a promuovere la rivoluzione e fu ricompensato nel 1795 con una Cattedra nella Scuola Normale di Parigi e successivamente con una nella Scuola Politecnica.

Con Monge e Berthollet Fourier accompagnò nel 1798 Napoleone nella spedizione verso Oriente e fu nominato governatore del basso Egitto. La flotta inglese avendolo tagliato fuori dalla Francia, egli organizzò le fabbriche d'armi, alle quali l'esercito francese potè ricorrere per procurarsi munizioni da guerra. Presentò anche parecchie memorie di matematica all'Istituto egiziano, che Napoleone aveva fondato al Cairo coll'intendimento di indebolire l'influenza inglese in Oriente. Dopo le vittorie inglesi e la capitolazione dei Francesi sotto il generale Menou nel 1801, Fourier ritornò in Francia e fu nominato prefetto a Grenoble; ivi appunto egli fece le esperienze sulla propagazione del calore. Ritornò a Parigi nel 1816. Nel 1822 pubblicò la sua *Théorie analytique de la chaleur*, nella quale fonda il suo ragionamento sulla legge di raffreddamento di Newton, cioè che il passaggio del calore tra due molecole adiacenti è proporzionale alla differenza infinitesima delle loro temperature. In quest'opera dimostra pure che qualunque funzione di una variabile, continua o discontinua, può essere sviluppata in serie di seni dei multipli della variabile, risultato che di continuo è impiegato nell'analisi moderna. Di questo teorema Lagrange aveva dato casi particolari e ne aveva intuito la portata generale, ma non approfondì l'argomento; Dirichlet fu il primo a darne una dimostrazione rigorosa.

Fourier lasciò un lavoro non compiuto sulle equazioni determinate, che fu edito da Navier e pubblicato nel 1831; esso contiene molte cose originali, specialmente una dimostrazione del cosiddetto «teorema di Fourier» sulla posizione delle radici di un'equazione algebrica. Lagrange aveva dimostrato come le radici di un'equazione algebrica potessero essere separate per mezzo di un'altra equazione, le cui radici sono i quadrati delle differenze delle radici dell'equazione primitiva. Budan nel 1807 e nel 1811 enunciò il teorema generale, conosciuto col nome di Fourier; ma la sua dimostrazione non è del tutto soddisfacente.

La dimostrazione di Fourier è quella generalmente data nei trattati sulla teoria delle equazioni. La soluzione definitiva del problema fu data nel 1829 da Giacomo Carlo Francesco Sturm (1803-1855).

Sadi Carnot [1]). — Fra i contemporanei di Fourier, che si occuparono della teoria del calore, il più grande è *Sadi Carnot*, figlio dell'eminente geometra ricordato più sopra. Sadi Carnot nacque a Parigi nel 1796 e vi morì di colera nell'agosto del 1832; fu ufficiale nell'esercito francese. Nel 1824 pubblicò un breve lavoro intitolato *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, in cui si propose di mostrare in qual modo il calore produce i suoi effetti meccanici. Egli commise l'errore di supporre che il calorico fosse materia; tuttavia il suo saggio può considerarsi come determinatore dell'inizio della teoria moderna della termodinamica.

Poisson [2]). — *Simone Dionisio Poisson* nacque a Pithiviers il 21 giugno 1781 e morì a Parigi il 25 aprile 1840; si è segnalato nelle applicazioni della matematica tanto alla meccanica quanto alla fisica. Suo padre era stato soldato semplice ed al suo collocamento a riposo gli fu concesso un piccolo impiego nell'amministrazione del suo villaggio nativo; quando scoppiò la rivoluzione pare che assumesse il comando della piazza ed essendo stato lasciato tranquillo divenne persona di qualche importanza locale. Il figlio fu messo a balia ed il padre soleva raccontare come un giorno andando a visitarlo, trovò che la balia era uscita a diporto, lasciandolo legato ad una funicella, attaccata ad un chiodo, conficcato nel muro. Questa, essa spiegò, era una precauzione necessaria per impedirgli di andare sui tetti in cerca di nidi. Il padre di Poisson osò aggiungere che i suoi sforzi ginnastici lo sbattevano continuamente da una banda all'altra e così, fin

1) Un sommario della sua vita ed una traduzione inglese delle sue *Réflexions* fu pubblicata da R. H. THURSTON, Londra e New-York, 1890.

2) La biografia di Poisson si trova nell'*Encyclopaedia Britannica*, nel vol. V delle *Transactions of the R. astronomical Society* e nel vol. VI degli *Éloges* di ARAGO; quest'ultimo scritto contiene una bibliografia delle memorie e delle opere di POISSON.

dalla più tenera infanzia, egli incominciò quegli studi sul pendolo che dovevano occupare sì larga parte della sua età matura.

Fu istruito dal padre e destinato, contro sua volontà, alla carriera di medico. Un suo zio si offrì di insegnargli la medicina e cominciò a farlo esercitare nel cavar sangue. Allorchè fu destro in tale operazione, gli fu concesso di adoperare il bisturì; ma una delle prime volte che operò da solo, il paziente morì dopo poche ore; quasi tutti i medici pratici del luogo lo assicurarono che «il caso era uno dei più comuni», ma egli giurò di abbandonare quella professione.

Poisson, dopo questo fatto, al suo ritorno alla casa paterna, scoprì fra le carte ufficiali indirizzate al padre, una copia delle questioni proposte alla Scuola Politecnica e così trovò la sua strada. All'età di diciassette anni entrò in detta Scuola, ove il suo ingegno richiamò l'attenzione di Lagrange e di Laplace, l'amicizia dei quali egli conservò sino al termine della loro vita. Una memoria sulle differenze finite, che egli scrisse a soli diciotto anni, riportò il giudizio favorevole di Legendre, in conseguenza del quale ne venne ordinata la pubblicazione nel *Recueil des savants etrangers*. Appena ebbe compiuto il corso di studi, fu nominato professore alla Scuola Politecnica e continuò per tutta la sua vita ad occupare diversi impieghi scientifici governativi e varie Cattedre. Ebbe tendenze socialiste e si conservò rigido repubblicano fino al 1815; ma allora, vedendo che era impossibile che l'Impero risorgesse, si unì ai legittimisti, senza però prendere parte attiva nella politica; lo studio della matematica fu per lui un diletto ed un bisogno.

Le sue opere e memorie sono da tre o quattrocento. I principali trattati che scrisse sono: un *Traité de mécanique*, pubblicato in due volumi negli anni 1811 e 1833, che fu per lungo tempo un'opera classica; la *Théorie nouvelle de l'action capillaire* (1831); la *Théorie mathématique de la chaleur* (1835), che fu accresciuta di un supplemento nel 1837; e le *Recherches sur la probabilité des jugements* (1837). Egli intendeva, se fosse vissuto, di scrivere un'opera abbracciante tutta la fisica matematica e nella quale avrebbe fusi i risultati dei tre ultimi suoi libri.

Fra le sue memorie di matematica pura le più importanti sono quelle sugl' integrali definiti e sulle serie di Fourier, le cui applicazioni alla fisica costituiscono uno de' suoi principali titoli di gloria; inoltre il saggio sul calcolo delle variazioni e le memorie sulla probabilità dei risultati medi delle osservazioni [1]).

Forse le sue memorie di matematica applicata più notevoli sono quelle riguardanti la teoria dell'elettricità e del magnetismo, che diedero origine ad un nuovo ramo della fisica matematica; egli suppose che i fenomeni fossero dovuti alle attrazioni e repulsioni delle molecole imponderabili. Le più importanti di quelle riguardanti l'astronomia fisica sono le due che furon lette nel 1806 (stampate nel 1809) sulle diseguaglianze secolari dei movimenti medi dei pianeti e sulla variazione delle costanti arbitrarie introdotte nelle soluzioni delle questioni di meccanica; in queste memorie Poisson studia la questione della stabilità delle orbite planetarie (che Lagrange aveva già investigata; arrestandosi al primo grado di approssimazione delle forze perturbatrici), e dimostra che il risultato può essere esteso agli infinitesimi di 3° ordine; questi lavori suggerirono a Lagrange la famosa memoria del 1808. Poisson pubblicò pure una memoria nel 1821 sulla librazione della luna; ed un'altra nel 1827 sul moto della terra intorno al suo centro di gravità. Le principali sue memorie sulla teoria dell'attrazione sono: quella, pubblicata nel 1829, sull'attrazione degli sferoidi, e l'altra, pubblicata nel 1835, sull'attrazione degli ellissoidi omogenei; la sostituzione dell'equazione esatta relativa al potenziale, cioè $\Delta^2 V = -4\pi\varrho$, alla forma datane da Laplace, $\Delta^2 V = 0$, fu per la prima volta da lui pubblicata [2]) nel 1813. Finalmente ricorderò la sua memoria del 1825 sulla teoria delle onde.

Ampère [3]). — *Andrea Maria Ampère* nacque a Lione il 22 gennaio 1775 e morì a Marsiglia il 1° giugno 1836. Era versatissimo in tutti i rami dello scibile ed insegnò e scrisse su molti di essi;

[1]) Vedi *Journal de l'École polytechnique*, 1813-1823; i *Mémoires de l'Academie*, 1823 e 1833 e la *Connaissance des temps*, 1827 e anni successivi. La maggior parte delle sue memorie fu pubblicata nei tre periodici sopra menzionati.

[2]) Nel *Bulletin des sciences de la Société philomatique*.

[3]) Vedi *Étude sur la vie et les ouvrages d'Ampère*, di C. A. VALSON, Lione, 1885.

ma, dopo il 1809, quando fu nominato professore di analisi alla Scuola Politecnica di Parigi, si dedicò quasi esclusivamente alla matematica ed alla scienza. Le sue memorie sul legame fra elettricità e magnetismo furono scritte nel 1820. Secondo la sua teoria, proposta nel 1826, una molecola di materia, che può essere magnetizzata, è attraversata da un circuito elettrico chiuso, e la magnetizzazione è prodotta da qualsiasi causa che faccia avvicinare al parallelismo la direzione che hanno queste correnti nelle diverse molecole del corpo.

Fresnel; Biot. — *Agostino Giovanni Fresnel* nacque a Broglie il 1° maggio 1788 e morì a Ville-d'Avray il 14 luglio 1827: fu di professione ingegnere civile, ma dedicò il suo tempo allo studio dell'ottica fisica. La teoria ondulatoria della luce, che Hooke, Huygens ed Eulero sostennero con argomenti *a priori*, fu fondata sperimentalmente in seguito alle ricerche di Young. Fresnel trasse da questi esperimenti delle conseguenze matematiche e spiegò il fenomeno della interferenza tanto per la luce ordinaria, quanto per la polarizzata.

L'amico e contemporaneo di Fresnel, *Giovanni Battista Biot*, che nacque a Parigi il 21 aprile 1774 e vi morì il 3 febbraio 1862, richiede poche parole. Gran parte della sua produzione matematica riguarda argomenti di ottica e specialmente la polarizzazione della luce. I suoi lavori furono scritti fra il 1805 e il 1817; nel 1858 fu pubblicata a Parigi una scelta delle sue più importanti memorie storiche e letterarie.

Arago [1]). — *Francesco Giovanni Domenico Arago* nacque a Estagel nei Pirenei il 26 febbraio 1786 e morì a Parigi il 2 ottobre 1853. Studiò nella Scuola Politecnica di Parigi; leggiamo nella sua autobiografia, che quantunque i professori di quella Scuola fossero eminenti, tuttavia essi erano assolutamente incapaci di impartire la loro scienza o mantenere la disciplina.

[1]) I lavori di ARAGO, che comprendono gli *Éloges* su molti dei matematici degli ultimi cinque o sei secoli, sono stati editi da J. A. BARRAL e pubblicati in 14 volumi, Parigi, 1856-57. Nel vol. I vi è un'autobiografia di Arago.

Nel 1804 Arago fu nominato segretario dell'Osservatorio di Parigi; e dal 1806 al 1809 fu occupato a misurare l'arco di meridiano, per poi determinare la lunghezza esatta del metro [1]. Fu poi nominato ad un posto importante nell'Osservatorio, colla relativa residenza in esso, e professore alla Scuola Politecnica, ove ottenne come insegnante un notevole successo. In seguito diede delle lezioni popolari di Astronomia, le quali erano ad un tempo chiare ed accurate, pregi ben rari allora e presentemente. Riordinò l'Osservatorio nazionale, la cui direzione era da tempo insufficiente; ma, nel compiere tutto ciò, la sua deficienza di tatto e di cortesia gli sollevarono contro molte inutili difficoltà. Egli fu sino alla morte un tenace repubblicano e, dopo il colpo di Stato del 1852, quantunque quasi cieco ed agli estremi, rassegnò le sue dimissioni dal posto di astronomo, piuttosto che prestar giuramento di fedeltà. Torna a lode di Napoleone III l'ordine da lui impartito che il vecchio Arago non fosse in alcuna maniera molestato e che si lasciasse libero di dire e di fare quello che più gli piacesse.

Le prime ricerche di fisica di Arago riguardano la pressione del vapore a diverse temperature e la velocità del suono, e furono fatte negli anni 1818-1822. Le sue osservazioni magnetiche furono fatte principalmente dal 1823 al 1826. Egli scoprì quello che fu poi chiamato « magnetismo rotatorio » ed il fatto che molti corpi possono venire magnetizzati: queste scoperte furono completate e svolte da Faraday. Egli sostenne energicamente le teorie ottiche di Fresnel ed i due fisici fecero insieme quegli esperimenti sulla polarizzazione della luce, che condussero alla conclusione, che le vibrazioni dell'etere luminoso si compiono trasversalmente alla direzione del moto e che la polarizzazione consiste nella scomposizione del moto rettilineo in componenti fra loro perpendicolari. Sono dovute pure ad Arago la successiva invenzione del polariscopio e la scoperta della polarizzazione rotatoria. Da lui fu suggerita nel 1838 l' idea generale della determinazione

1) È curioso a questo proposito ricordare il fatto, che la nave che conduceva Arago al Perù per questa misura fu colpita in viaggio dal fulmine, per cui nella bussola si scambiarono i poli; onde il capitano cambiò rotta alla nave, riconducendo la spedizione a Dunkerque, d'onde era partita (Agg. dei T.).

sperimentale delle velocità della luce, nel modo col quale fu tradotta in atto da Fizeau e Foucault; ma l' indebolimento della sua vista gl' impedì di disporne i particolari o di fare le relative esperienze.

Si osserverà che alcuni degli ultimi componenti la scuola francese vissero in epoca relativamente a noi vicina; però quasi tutte le loro opere di matematica sono anteriori al 1830. Essi sono i successori diretti degli scrittori francesi che fiorirono al principio del secolo XIX e pare non abbiano avuto alcun contatto coi grandi matematici tedeschi della prima metà del secolo stesso, sulle cui ricerche è fondato gran parte del miglior lavoro matematico compiuto in questo secolo; per ciò ne parlammo qui, benchè i loro scritti siano in alcuni casi di data posteriore a quelli di Gauss, di Abel, di Jacobi e di altri matematici dell'epoca.

Introduzione dell'analisi in Inghilterra.

Il completo isolamento della scuola inglese e la sua devozione ai metodi geometrici sono i caratteri più notevoli della storia dell' ultima metà del XVIII secolo; ne fu natural conseguenza l'assoluta mancanza di qualsiasi importante e valido contributo al progresso della matematica da parte dell' Inghilterra. Ciò spiega perchè l'energia degli scienziati inglesi fu in gran parte diretta allo studio della fisica sperimentale e dell' astronomia pratica, che furon coltivate in Inghilterra forse più che altrove.

Ivory. — Il solo matematico inglese che al principio del secolo XIX adoperasse i metodi analitici ed i cui lavori meritino di essere qui ricordati, è Ivory a cui dobbiamo un celebre teorema sull'attrazione. *Sir Giovanni Ivory* nacque a Dundee nel 1765 e morì a Douglastown il 21 settembre 1875. Laureatosi nell' Università di St. Andrews, fu nominato nel Forfarshire socio e gerente di una compagnia di filatura di lino; ma continuò a dedicare alla matematica gran parte del tempo che gli restava libero. Nel 1804 divenne professore al Reale Collegio militare di

Marlow, ora trasferito a Sandhurst. Ivory pubblicò molte memorie nelle *Philosophical Transactions*; le più importanti sono quelle che riguardano l'attrazione. In una di queste (1809), dimostrò che l'attrazione di un elissoide omogeneo su un punto esterno è un multiplo di quella che esercita un altro elissoide su un punto interno, che può essere facilmente determinato. Egli criticò la trattazione di Laplace del metodo dei minimi quadrati con un'acredine inopportuna e in termini che dimostrarono che egli non l'aveva compresa.

La scuola analitica di Cambridge. — Verso la fine del secolo XVIII i più cospicui componenti la scuola matematica di Cambridge incominciarono a riconoscere che il loro isolamento dai loro contemporanei del continente era per essi assai dannoso. Il primo tentativo fatto in Inghilterra per ispiegare la notazione ed i metodi del calcolo infinitesimale, come erano usati nel continente, fu dovuto a Woodhouse, che divenne l'apostolo del nuovo movimento. Non è certo se egli avrebbe potuto diffondere da solo i metodi analitici; ma le sue vedute furono abbracciate con entusiasmo dai tre laureandi Babbage, Peacock e Herschel, che portarono poi a compimento le riforme che egli aveva suggerito. Nella presente storia, per i limiti che ci siamo imposti, non possiamo dare che poche notizie su questi quattro matematici [1]. Il primo stimolo venne dalla Francia; appunto perciò pongo queste notizie sulla scuola inglese alla fine del resoconto sulla scuola francese; ma mi affretto ad aggiungere che i matematici inglesi del XIX secolo seguirono tosto una via assolutamente indipendente da quella battuta dai loro contemporanei francesi.

Woodhouse. — *Roberto Woodhouse* nacque a Norwich il 28 aprile 1773; fu educato nel Collegio Caius a Cambridge e ne divenne in seguito *fellow*. Fu poi professore Plumiano di quell'Università; visse a Cambridge fino alla morte, che avvenne il 23 dicembre 1827.

[1]) Quanto segue è riassunto nella mia *History of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge, 1889.

La sua prima opera, intitolata *Principles of Analytical Calculation*, fu pubblicata a Cambridge nel 1803. In essa egli spiegò la notazione differenziale e ne sostenne vigorosamente l'applicazione; ma criticò severamente i procedimenti usati dagli scrittori del continente ed il loro costante sistema di assumere principî non evidenti. Dopo questa opera pubblicò (1809) una trigonometria (piana e sferica) e nel 1810 un'esposizione storica del calcolo delle variazioni e dei problemi isoperimetrici. Poi pubblicò un'astronomia, il cui primo volume (ordinariamente diviso in due parti), sulla astronomia pratica e descrittiva, fu pubblicato nel 1812; il secondo contiene un sunto del metodo di Laplace e di altri scrittori continentali nel trattare l'astronomia fisica, il quale fu pubblicato nel 1818. In tutte queste opere è studiata accuratamente la base dottrinale degli argomenti considerati, punto questo spesso trascurato nei trattati moderni.

Un uomo come Woodhouse, di scrupolosa onestà, rispettato universalmente, logico provetto, spirito caustico, era ben adatto per introdurre un sistema nuovo di analisi; e difatti, allorchè pel primo richiamò l'attenzione sulla analisi continentale, espose la insufficienza di qualcuno dei metodi usuali in guisa da apparire più oppositore che partigiano, metodo questo politico quanto onesto. Woodhouse non esercitò notevole influenza sulla maggioranza de' suoi contemporanei; quindi il movimento da lui promosso si sarebbe subito spento per via, se esso non fosse stato continuato da Peacock, Babbage e Herschel, che formarono una Società analitica con lo scopo di fare adottare nelle Università l'uso generale dei nuovi metodi analitici e delle notazioni differenziali.

Peacock. — *Giorgio Peacock*, che fu il più influente dei primi componenti la nuova scuola, nacque a Denton il 9 aprile 1791. Fu educato nel Collegio della Trinità a Cambridge, e ne divenne poi *fellow* e rettore. La fondazione dell'Osservatorio universitario è dovuta soprattutto ai suoi sforzi e nel 1836 fu eletto Professore Lowndeano di astronomia e geometria. Nel 1839 fu nominato Decano di Ely, ove risiedette fino alla morte, che avvenne l'8 novembre 1858. Quantunque l'influenza di Peacock sui matematici inglesi sia stata grandissima, tuttavia lasciò pochi ricordi scritti della sua opera; ma noterò che la sua *Relazione* intorno ai più recenti progressi dell'analisi (1833) iniziò quei pregevoli sommari dei progressi scientifici, che arricchiscono molti dei volumi annualmente pubblicati nei *Proceedings* dell'Associazione Britannica per l'avanzamento della scienza.

Babbage. — Un altro de' principali componenti la Società analitica fu *Carlo Babbage*; egli nacque a Totnes il 26 decembre 1792, entrò nel Collegio della Trinità di Cambridge nel 1810, divenne Professore Lucasiano in quella Università e morì a Londra il 18 ottobre 1871. Babbage diede il nome alla Società analitica, che, come egli affermò, fu fondata nell'intento di difendere «i principî del puro *d*-ism in opposizione al *dot*-age dell' Università» [1]). Nel 1820 fu fondata la Società astronomica principalmente pei suoi sforzi; più tardi (1820-1832) ebbe parte importante alla creazione della surricordata Associazione Britannica. Egli sarà sempre ricordato per le sue memorie di matematica, riguardanti il calcolo delle funzioni, e per l'invenzione di uno strumento analitico, il quale, non solo eseguisce l'ordinarie operazioni dell'aritmetica, ma potrebbe ridurre in tavole sinottiche i valori di ogni funzione e segnarne i risultati.

Herschel. — Il terzo di quelli che promossero l'uso generale dei metodi analitici in Inghilterra fu il figlio di Sir William Herschel (1738-1822), il più illustre astronomo della seconda metà del secolo XVIII ed il creatore dall'astronomia siderale. *Giovanni*

[1]) La lettera *d* fu usata da Leibniz e dalla sua scuola per indicare i *differenziali*; il punto (*dot*) fu adoperato dalla scuola di Newton sul finire del secolo XVII per indicare la *flussione* o *differenziale di una quantità*; onde l'antitesi fra il *d* ed il *dot*. Si sa che i *principî del puro d*-ism furono sostenuti da molti filosofi del secolo XVIII; d'altronde *dotage* nel dizionario è definito come debolezza di mente nella vecchiaia ed implica forze decadenti. Perciò quando Babbage disse che oggetto suo e de' suoi amici era di rivendicare «*i principî del puro d*-ism» in opposizione «*al dot-age dell'Università*» usò una frase familiare agli studiosi di que' tempi, la quale significava che la notazione differenziale era una di quelle, che si raccomanda da sè stessa ai filosofi razionali e che la notazione flussionale era fuori di uso ed in sè stessa non costituiva un metodo così efficace. Infatti era semplicemente un giuoco di parole, che aveva significato solo pe' suoi uditori, ma non poteva essere criticamente discussa (Agg. dei T.).

Federico Guglielmo Herschel nacque il 7 marzo 1792; fu educato nel Collegio di San Giovanni a Cambridge e morì l'11 maggio 1871. La sua prima opera originale fu una memoria sul teorema di Côtes, a cui ne tenner dietro altre di analisi matematica; ma il suo desiderio di completare l'opera del padre lo ricondusse finalmente allo studio dell'astronomia. Le sue memorie ottiche e astronomiche contengono una chiara esposizione dei principî su cui si erige la trattazione matematica di tali scienze.

Nel 1813 la Società analitica pubblicò un volume di memorie, in cui la prefazione e la prima memoria (sui prodotti infiniti) sono dovuti a Babbage; tre anni dopo essa pubblicò una traduzione del *Traité élementaire du calcul différential et du calcul intégral* di Lacroix. Nel 1817 e di nuovo nel 1819, la notazione differenziale venne adottata negli esami universitari e dopo il 1820 il suo uso fu ben consolidato. La Società analitica ottenne questa rapida vittoria col pubblicare nel 1820 due volumi di esempi esplicativi del nuovo metodo: l'uno di Peacock sul calcolo differenziale ed integrale, e l'altro di Herschel sul calcolo delle differenze finite. A partire da questo momento nei lavori inglesi sul calcolo infinitesimale è abbandonato l'uso esclusivo della notazione delle flussioni. Possiamo incidentalmente ricordare che Lagrange e Laplace, come gran parte degli altri scienziati moderni, impiegano tanto la notazione delle flussioni, quanto quella del calcolo differenziale; fu l'uso esclusivo della prima che paralizzò quello della seconda.

Fra coloro, che materialmente aiutarono l'estendersi dell'uso della nuova analisi, possiamo ricordare Guglielmo Whewell (1794-1866) e Giorgio Biddell Airy (1801-1892), entrambi membri del Collegio della Trinità di Cambridge. Il primo pubblicò nel 1817 un lavoro sulla meccanica ed il secondo, che fu allievo di Peacock, pubblicò nel 1826 i suoi *Tracts*, in cui il nuovo metodo fu applicato felicemente a diversi problemi di fisica. Gli sforzi della Società furono completati dalla rapida pubblicazione di buoni libri di testo, in cui veniva frequentemente usata l'analisi. L'uso dei metodi analitici si estese da Cambridge a tutto il resto dell'Inghilterra ed a partire dal 1830 essi vi divennero di uso generale.

Waring [1]. — *Edoardo Waring* nacque nel 1734 e morì nel 1798. A ventisette anni fu dichiarato degno di occupare nell' Università di Cambridge la Cattedra Lucasiana, che era stata illustrata da Neffiton. Egli aggiunse molte proprietà delle curve algebriche a quelle scoperte da Bernoulli, Clairaut ed Eulero. Su questo argomento scrisse le seguenti opere: *Miscellanea analytica* (Cambridge, 1762); *Proprietates algebricarum curvarum* (Id., 1762); *Meditationes algebricae* (Id., 1772); *Meditationes analyticae* (Id., 1776). Vuolsi che avesse scoperta una formula generale di risoluzione delle equazioni algebriche, ma era certamente sbagliata. È celebre la formula di Waring per esprimere $x^n + y^n$ in funzione di $x + y$ e xy.

Condorcet. — *Giovanni Antonio Nicola Carità de Condorcet* nacque a Ribemont in Picardia nel 1743 e morì nel 1794. Perdè presto il padre, ma la madre lo fece educare nel Collegio dei gesuiti a Rennes, ove si segnalò molto. Nel 1758 cominciò i suoi studi di matematica al Collegio di Navarra a Parigi, ove pure si distinse assai; e dopo dieci mesi sostenne brillantemente una discussione su di una tesi di analisi con Clairaut, D'Alembert e Fontaine, che lo salutarono come loro futuro collega nell'Accademia.

Scrisse un sistema di morale; ma la prima opera di matematica porta il titolo *Essai sur le calcul intégral*; allorchè lo indirizzò all'Accademia delle scienze non aveva che ventidue anni; la relazione che ne fece D'Alembert termina così: « L'ouvrage annonce les plus grands talents et les plus dignes d'être excités par l'approvation de l'Academie »; e poco dopo Lagrange in proposito scriveva a D'Alembert: « Le calcul integral de Condorcet m'a paru bien digne des éloges, dont vous l'avez onoré ».

Nel 1772 l'Accademia delle scienze pubblicò una memoria importantissima di Condorcet, che Lagrange giudicò aprire un nuovo campo del calcolo integrale. Nel 1774 egli vinse il primo premio dell'Accademia di Berlino sulle comete. Applicò le probabilità all' economia politica; e pubblicò anche molte memorie negli Atti di varie Accademie (Parigi, Berlino, Bologna, Pietroburgo); fu eletto membro dell'Accademia delle scienze nel 1769 e dell'Accademia di Francia nel 1782; si ammogliò nel 1786; poi ebbe una vita avventurosa a causa della politica, e morì di veleno per propria mano il 7 aprile 1794 a Bourg la Reine.

[1] Waring, Condorcet, Montucla, Meusnier, Delambre, Piazzi, Lhuilier, Oriani, Poinsot sono stati aggiunti dai Traduttori.

Condorcet lasciò molte opere inedite; di esse Charles Henry ha pubblicato nel *Bullettino* del Boncompagni quella intitolata *Des méthodes d'approximation pour les equations differentielles, lorsqu'un connaît une prémière valeur approchée.* Gli scritti di Condorcet mancano di chiarezza ed eleganza e ciò nocque non poco alla sua fama.

Montucla. — *Giovanni Stefano Montucla* nacque a Lione il 5 settembre 1725 e morì a Parigi il 18 dicembre 1799. Suo padre era un negoziante di Lione; egli fu educato nel Collegio dei gesuiti di questa città, ove acquistò il gusto delle scienze e delle lettere ed imparò ben presto il greco, il latino, l' italiano, l' inglese, il tedesco e l'olandese, lingue di cui si servì poi per analizzare le opere straniere. A vent'anni si laureò in legge a Tolosa e poi venne a Parigi per frequentare i corsi pubblici ed i dotti. Fu amico di Diderot, di D'Alembert, di Lalande, ecc., che lo amarono sino alla morte. Ristampò le *Récreations mathématiques* d'Ozanam, aggiungendovi un gran numero di articoli. Il suo primo scritto originale ed importante è l'*Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (1754). Nel 1758 pubblicò l'*Histoire des mathématiques*, opera assai pregevole; nel 1749 furono ripubblicati i due primi volumi, migliorati ed ampliati, e stava per uscire il terzo, quando la morte rapì l'autore; ne curò poi la pubblicazione l'amico Lalande, il quale ebbe a dire: « Montucla était modeste et bienfaisant à un degré, que son peu de fortune le rendait véritablement admirable ».

Meusnier. — *Giovanni Battista Maria Carlo Meusnier de la Place* nacque a Parigi il 19 giugno 1754 e morì a Cassel il 17 giugno 1793. Entrò presto nel genio militare, ove si segnalò per invenzioni ingegnose; nel 1784 fu ammesso all'Accademia delle scienze; all'epoca della rivoluzione era tenente colonnello. Negli anni 1790-1792 ebbe vari incarichi per la difesa della patria; nel 1793 fu fatto generale e si segnalò nella difesa del forte di Koenigstein contro i Prussiani; nello stesso anno, durante la difesa di Cassel, una palla lo ferì ad una coscia ed in conseguenza morì. In matematica ha lasciato il teorema seguente: « Il raggio di curvatura di una sezione obliqua di una superficie è la proiezione sul piano di questa sezione del raggio di curvatura della sezione fatta dal piano normale condotto per la tangente stessa ». Questo teorema completa la teoria di Eulero sulla curvatura delle sezioni normali fatte in un medesimo punto di una superficie. La memoria relativa che Meusnier presentò all'Accademia delle scienze, contiene molte altre osservazioni importanti.

Delambre. — *Giovanni Battista Giuseppe Delambre* nacque ad Amiens il 19 settembre 1749 e morì il 19 agosto 1822; studiò in un collegio del suo paese; si occupò di matematiche e di astronomia; e studiò quest'ultima sotto Lalande, che si compiaceva dire che Delambre era la migliore delle sue opere. Le sue tavole su Urano gli fecero guadagnare il premio dell'Accademia e quelle su Giove e Saturno un posto in essa. Fece parte con Méchain della commissione per la misurazione dell'arco di meridiano tra Dunkerque e Barcellona. Era membro del Bureau des Longitudes e fu nominato membro del Consiglio reale degli studi, posto che perdette poi. Ecco l'elenco delle sue opere: *Tables de Jupiter et de Saturne* (1784); *Base du systeme métrique decimal ou Mésure de l'arc de méridien* ecc. (Parigi, 1806, 1807, 1810, 3 vol.); *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis l'année 1789* (1810); *Abrégé d'astronomie* (Parigi, 1813); *Histoire de l'astronomie*; *Astronomie ancienne* (Id., 1817, 2 vol.), opera pregevolissima; *Astronomie du moyen-âge* (Id., 1819); *Astronomie moderne* (Id., 1821); ma morì prima di compiere quest' ultima opera; però lasciò il manoscritto compiuto e Mathieu lo pubblicò poi. Il *Moniteur* del 26 novembre 1792 parla poi di un *Mémoire sur la fixation des poids et mesures* par Méchain et Delambre.

Con Lagrange e Laplace prese parte alla Relazione all' Istituto intitolata *Notice sur les grandes tables logarithmiques et trigonométriques* ecc. (1801). Alcune importanti formule di trigonometria sferica portano il suo nome.

Piazzi. — *Giuseppe Piazzi* nacque a Ponte in Valtellina il 16 luglio 1746 e morì a Napoli il 22 luglio 1826; vestì l'abito ecclesiastico; fu professore di filosofia a Genova, di matematica a Malta, di filosofia e matematica a Ravenna e di teologia dogmatica a Roma; infine, nel 1780, fu chiamato alla Cattedra di matematiche superiori nell' Università di Palermo, ove fondò (1791) l'Osservatorio astronomico, a cui rivolse tutte le sue cure. Fece un Catalogo di 7646 stelle ed il 1° gennaio 1801 scoprì il 1° pianeta telescopico, a cui diede il nome di Cerere. Oltre un gran numero di memorie, pubblicate nei rendiconti di varie Accademie, pubblicò: *Della specula astronomica de' regi studi di Palermo* (Palermo, 1792); *Sull'orologio italiano ed europeo* (Id., 1798); *Della scoperta del nuovo pianeta Cerere Ferdinandia* (Id., 1802); *Praecipuarum stellarum inerrantium positiones ineunte saeculo XIX* (1803); è il suo Catalogo che fu esteso poi sino al 1804; *Lezioni di astronomia* (Palermo, 1817); *Ragguaglio del reale Osservatorio di Napoli* (1821).

Lhuilier. — *Simone Antonio Giovanni Lhuilier* nacque a Ginevra il 24 aprile 1750 e morì il 28 marzo 1840. Fu allievo di Luigi Bertrand, che sostituì come professore di matematica nell'Accademia di Ginevra, e fu professore di C. Sturm. Passò alcuni anni in Polonia presso il principe Czartorinski, come precettore de' suoi figli, e fece parte della Società di educazione di Varsavia. Nel 1786 vinse il premio dell'Accademia di Berlino sulla questione: *Quale è la nozione chiara e precisa che bisogna dare dell' infinito matematico.* Egli nella sua *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* si pronunciò contro l' uso del simbolo infinito e del metodo de' limiti; Lagrange presiedeva la commissione giudicatrice. Lhuilier ha pubblicato molte opere sulla matematica elementare e superiore, improntate ad un gran buon senso; le principali sono: *Élements d'aritmétique et de géometrie pour l'écoles palatines* (Varsavia, 1778) e *Élements d'ana-*

lyse géométrique, appliqués à la recherche des lieux géométriques (Parigi e Ginevra, 1809). Scrisse un gran numero di memorie riguardanti la teoria e la misura de' poligoni e de' poliedri, servendosi de' lavori del Mascheroni, la teoria delle serie mediante le quali si esprimono le funzioni esponenziali e le circolari, le probabilità ecc. Poi risolse il problema di inscrivere un poligono in un cerchio in modo che i suoi lati passino per punti dati e dimostrò che le api costruiscono i loro alveari in modo da impiegare meno cera possibile. Negli *Annales* di Gergonne (1810) dimostrò pel triangolo sferico rettangolo il teorema seguente, analogo a quello di Pitagora in planimetria:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b \cos^2 \frac{1}{2} c + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \frac{1}{2} b;$$

e diede poi l'espressione dell'area di un triangolo sferico e dell'eccesso sferico E in funzione de' suoi lati, mediante la formula:

$$\tan^2 \frac{1}{2} (E - 90^\circ) =$$
$$= \tan \frac{1}{2} s \tan \frac{1}{2} (s - a) \tan \frac{1}{2} (s - b) \tan \frac{1}{2} (s - c)$$

essendo $s = \frac{1}{2} (a + b + c)$.

Oriani [1]). — *Barnaba Oriani* nacque da poveri genitori alla Certosa (Pavia) il 17 luglio 1752 e morì in Milano il 12 novembre 1833. Que' frati certosini lo fecero educare e, dopo avere studiato sotto i barnabiti di Sant'Alessandro in Milano, abbracciò la carriera ecclesiastica. Si dedicò con ardore allo studio della matematica e dell'astronomia; fu nominato astronomo aggiunto alla Specola di Brera in Milano e poi Direttore di quell'Osservatorio, posto che occupò sino alla morte. Lasciò a detto Osservatorio una cospicua somma che contribuì molto all' incremento di esso, e assegnò 50 mila lire di premio all'astronomo Plana di

1) *Elogio di B. Oriani* detto da A. Gabba, nell'Ateneo di Brescia, Milano, 1834.

Torino pei suoi lavori. Al Bonaparte, il quale voleva che Oriani giurasse odio contro i passati Governi, rispose una nobilissima e sdegnosa lettera di rifiuto, a causa della quale perdè l' impiego. Egli ha collaborato insieme con altri astronomi nelle *Effemeridi* di Milano, scrivendovi moltissime note e memorie; ma i suoi principali lavori sono la *Trigonometria sferoidica*, la *Teorica del pianeta Urano* e le *Perturbazioni planetarie*, colle quali completò la meccanica celeste.

Poinsot. — *Luigi Poinsot* nacque a Parigi il 31 gennaio 1777, e morì ivi il 5 dicembre 1859; la sua vita, dice il Darboux, «a été irreprochable et pure comme ses écrits». Egli fu uno de' primi allievi della Scuola Politecnica, ove fu laureato ingegnere all'età di diciannove anni. Poi fu subito nominato professore nel Liceo Bonaparte, indi esaminatore e professore della Scuola Politecnica di Parigi dopo la pubblicazione dei suoi *Élements de statique* (1803), che Fourier lodò molto. Fu fatto ispettore generale nel 1813 e l'anno stesso poi fu chiamato ad occupare il posto di Lagrange nella sezione di geometria dell'Accademia delle Scienze. Appartenne al Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, fu fatto grande ufficiale della legion d'onore, deputato e senatore.

Nella *Statique* Poinsot semplificò di molto varie proposizioni e ne enunciò delle nuove; ivi trovasi la celebre «teoria delle coppie»; essa è insomma un lavoro classico, meritevole di essere letto. La sua più importante scoperta consiste nel suo teorema sul moto di un solido libero. Le altre principali sue opere sono: *Mémoire sur la composition des moments e des aires* e *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1806); *Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres* (Id., 1810); *Recherches sur l'analyse des sections angulaires* (Paris, 1825); *Théorie nouvelle de la rotation des corps* (Id., 1834); *Mémoire sur le cones circulaires roulants* (1853).

Inoltre Poinsot ha scritto molti articoli su vari giornali. Peyrard, a proposito del problema di Archimede di dividere con un piano una sfera in un dato rapporto, gli chiese la ragione delle due soluzioni estranee dell'equazione di 3° grado, a cui esso conduce; egli rispose che esse si riferivano all' iperboloide, generato dalla rotazione intorno al diametro della sfera, perpendicolare al piano secante richiesto, dell'iperbole equilatera tangente nelle estremità di questo diametro al cerchio massimo della sfera, determinato da un piano passante per questo diametro.

Lo spirito matematico era per Poinsot la base fondamentale della ragione umana, come si rileva dal seguente passo, che giova riportare: « Par les dispositions du réglement général, il paraîtrait qu'on a regardé l'étude des mathématiques come *accessoire*, tandis que tout, autour de nous, exige qu'elle soit considérée comme fondamentale, aussi bien que l'étude des langues anciennes. La géometrie est la base de toutes les sciences, comme la grammaire et les humanités la base de toute littérature. Cela est reconnu de tout le monde; mais, ce qui n'est pas démontré pour tous, c'est que les deux études s'éclairent encore et se fortifient mutuellement. Ceux qui ne voient dans les mathématiques que leur utilité d'application ordinaire en ont une idée bien imparfaite; ce serait, en vérité, acquérir bien peu de choses à grands frais; car, excepté les savants et quelques artistes, je ne vois guère personne qui ait besoin de la géometrie ou de l'algèbre une fois dans sa vie. Ce ne sont donc ni les théories ni les procédés ni les calculs en eux-mêmes, qui sont véritablement utiles; c'est l'exercice qu'ils donnent à l'esprit, c'est la bonne et la fine logique qu'ils y introduisent pour toujours. Les mathématiques jouissent de ce privilège inappréciable, et sans lequel il serait le plus souvent superflu de les étudier, c'est qu'il n'est pas nécessaire de les savoir actuellement pour en ressentir les avantages, mais qu'il suffit de les avoir bien sues. Toutes les opérations, toutes les théories qu'elles nous enseignent peuvent sortir de la mémoire; mais la justesse et la force qu'elles impriment à nos raisonnements restent; l'esprit des mathématiques demeure comme un flambeau qui nous guide au milieu de nos lectures et de nos recherches. C'est lui qui, dissipant la foule oiseuse des idées étrangères, nous découvre si promptement l'erreur et la vérité; c'est par là que les esprits attentifs, dans les discussions les plus irrégulières, reviennent sans cesse à l'objet principal qu'ils ne perdent jamais de vue; c'est ainsi qu'ils abrégent et le temps et l'ennui, recueillent sans peine le fruit précieux des bons ouvrages et traversent ces vains et nombreux volumes, où se perdent les esprits vulgaires. Si les mathématiques ont trouvé beaucoup de détracteurs, c'est que leur lumière importune détruit tous les vains systèmes, où se complaisent les esprits faux; c'est que, si les mathématiques cessaient d'être la vérité même, une foule d'ouvrages ridicules deviendraient très sérieux, plusieurs même commenceraient d'être sublimes. Mais, il était bien naturel que les esprits supérieurs et les meilleurs écrivains ne parlassent des sciences exactes qu'avec une sorte d'admiration; les grands hommes, dans quelque genre que ce soit, ne ravalent jamais les grandes choses, ils tâchent de s'y élever ».

CAPITOLO XIX.

La matematica del secolo XIX.

Il secolo XIX vide nascere nuovi ed importanti rami della matematica pura, principalmente alcuni riguardanti la teoria dei numeri od aritmetica superiore, la teoria delle forme e quella dei gruppi, la teoria delle funzioni a più periodi o trigonometria superiore, e la teoria generale delle funzioni, che comprende un estesissimo campo dell'analisi superiore. I nuovi metodi della geometria analitica e sintetica hanno pure essi create nuove teorie. Inoltre l'applicazione della matematica ai problemi di fisica ha radicalmente cambiato i fondamenti e l'indirizzo di questa scienza. Questi nuovi metodi possono considerarsi come determinanti il principio di un nuovo periodo nella storia della matematica; ed io credo che in avvenire uno storico, che divida la storia della matematica come l'ho divisa io, dovrebbe, a rigor di termini, trattare la matematica dei secoli XVII e XVIII, come se formasse un sol periodo, e la matematica del secolo XIX, come se ne incominciasse uno nuovo. Ma per fare ciò si richiede uno studio compiuto e sistematico dei progressi fatti dalla matematica nel XIX secolo. Ora per me è evidentemente impossibile analizzare adeguatamente la matematica di un'epoca troppo a noi vicina e le opere dei matematici che sono tuttora viventi o che ho conosciuto personalmente. Quindi io non tenterò neppure di dare un sommario compiuto della storia delle matematiche del XIX secolo; ma aggiungerò una specie di appendice al Capitolo precedente in cui parlerò dei caratteri principali delle matematiche pure recenti, fra le quali comprenderò la dinamica e l'astronomia teorica, tralasciando di discutere in generale l'odierna applicazione della matematica alla fisica.

Mi occuperò nella presente storia solo in alcuni casi speciali

della vita e delle opere dei matematici considerati; però aggiungerò alcune brevi notizie su coloro a cui è principalmente dovuto il progresso di qualche ramo della matematica e l'indicazione di quella parte di essa, su cui hanno fissata maggiormente la loro attenzione. Anche con queste limitazioni mi è stato assai difficile di fare una sintesi della matematica dell'epoca moderna; onde desidero ripetere esplicitamente che non intendo e non voglio che i miei lettori suppongano che le notizie da me date su un dato argomento comprendano i nomi di tutti gli scrittori che l'hanno studiato. Invero la quantità di materia studiata è tanta, che nessuno può sperare di far più che rendersi familiari i lavori prodotti in qualche ramo o in alcuni rami speciali. A conferma di questa osservazione posso aggiungere che la Commissione nominata dalla Società Reale per compilare un Catalogo della letteratura periodica, calcolò, nel 1900, che più di 1500 memorie di matematica pura venivano pubblicate presentemente ogni anno, e più di 40.000 annualmente su argomenti scientifici in genere.

Nessuna forse delle storie delle matematiche si occupò dell'opera compiuta durante il secolo XIX. Fra gli scritti che ne trattano ricorderò: il *Rapport sur les progrès de la géométrie en France* di M. Chasles e l'analogo del Bertrand sull'analisi (Paris, 1870): una breve dissertazione di H. Hankel, intitolata *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten* (Tübingen, 1885); i volumi XI e XII della *Histoire des sciences mathematique et physique* del Marie, nei quali si riportano le notizie sui matematici, che morirono nel secolo XIX; la *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (Munich, 1877), di Gerhardt; un *Discours* sui professori della Sorbona di C. Hermite nel *Bulletin de sciences mathématiques* (1890); le *Conferenze sulla matematica* (Evanston Colloquium) di F. Klein, fatte a New-York (1894); *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (3ª ediz., Torino, 1907) di G. Loria e *Die reine Mathematik in den Jahren* (1884-1899) del Lampe, Berlino, 1899.

Sono state già scritte alcune storie sullo svolgimento di rami speciali — come ad esempio quelle di Isacco Todhunter sulle teorie dell'attrazione e del calcolo delle probabilità — mentre i *Proceedings* dell'Associazione britannica per l'avanzamento della scienza e di *Jahresberichte* della Società matematica tedesca contengono numerose relazioni sul progresso di parecchie differenti branche della matematica moderna. La nona edizione della *Encyclopedia Britannica* contiene pure importanti memorie. La *Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften*, ha per oggetto di rappresentare lo stato attuale delle scienze matematiche pure ed applicate, e senza dubbio essa supplirà ampiamente alle notizie date in questo libro. Queste fonti e queste relazioni mi sono state di grande utilità; ma scrivendo il presente Capitolo, mi sono in gran parte servito dei discorsi commemorativi, pronunciati in varî Istituti inglesi e forestieri; sono anche debitore di numerose informazioni a diversi miei amici, e se non mi dilungo su ciò, gli è solo perchè non sembri che io li voglia rendere mallevadori delle inesattezze o delle omissioni, in cui io sarò incorso.

Un periodo di eccezionale attività intellettuale in ogni scienza è seguìto generalmente da un periodo di relativa sosta; così dopo la morte di Lagrange, Laplace, Legendre e Poisson, la scuola francese, che raggiunse una sì eccelsa posizione al principio del secolo XIX, per alcuni anni cessò dal produrre molto lavoro originale. Alcuni de' matematici, che citerò per primi, quali Gauss, Abel e Jacobi, furono contemporanei degli ultimi anni dei matematici francesi or ora nominati; ma siccome i loro scritti mi sembrano appartenere ad una scuola diversa, così li ho posti in principio di questo Capitolo.

Non àvvi nessun matematico del secolo XIX, i cui scritti abbian esercitato influenza maggiore di quelli di Gauss, nè un sol ramo della scienza, in cui egli non abbia lasciato traccia profonda. Quindi io non potrei incominciare in modo migliore il mio resoconto sulla matematica dell'epoca odierna, che descrivendo, sia pure brevissimamente, le più importanti ricerche di Gauss.

Gauss [1]. — *Carlo Federico Gauss* nacque a Brunswick il 23 aprile 1777 e morì a Gottinga il 23 febbraio 1855. Il padre

[1]) Una raccolta delle opere di GAUSS è stata edita da E. J. SCHERING e pubblicata dalla Società reale di Gottinga in 6 volumi, 1863-71. Molte aggiunte vennero

faceva il muratore; Gauss deve la sua elevata educazione (contro la volontà de' suoi genitori, che desideravano che traesse profitto dal frutto del suo lavoro) per la considerazione in cui fu tenuto, grazie al suo grande ingegno [1]), dal Duca regnante. Nel 1792 fu messo a studiare nel Collegio Carolina e, fino dal 1795, professori ed alunni ammettevano che già Gauss conoscesse tutto quello che i primi potevano insegnargli [2]); nel Collegio escogitò il metodo dei minimi quadrati e dimostrò per induzione la legge di reciprocità dei resti quadratici. Quindi si recò a Gottinga, ove studiò sotto Kästner; gran parte delle sue scoperte nella teoria dei numeri furono fatte appunto quando era a Gottinga. Nel 1798 ritornò a Brunswick, ove sulle prime si procacciò da vivere con l'insegnamento privato.

Nel 1799 Gauss pubblicò, come dissertazione di laurea, la prima dimostrazione del teorema, che ogni equazione algebrica ha una radice della forma $a + bi$, teorema di cui diede poi altre tre dimostrazioni diverse. Nel 1801 a questa memoria tennero dietro le sue *Disquisitiones arithmeticae*, che formano il primo volume nella collezione delle sue *Opere*. Gran parte di quest'opera era stata nell'anno precedente inviata all'Accademia francese, ma venne respinta con un disprezzo ingiustificabile, quand'anche il lavoro fosse stato di nessun valore, come i relatori credevano, onde Gauss si sentì gravemente e giustamente offeso; la sua riluttanza in avvenire a pubblicare le sue ricerche può essere in parte attribuita a questo disgraziato incidente.

La successiva scoperta di Gauss fu fatta in un ramo di matematica del tutto differente. L'assenza di qualsiasi pianeta fra Marte e Giove, ove la legge di Bode avrebbe condotto gli osservatori a trovarvene uno, era stata da tempo notata; ma ciò non si verificò fino al 1801, nel quale anno venne osservato ciascuno dei numerosi gruppi di pianeti minori, che occupano quello

pubblicate in seguito ed altre si aspettano; vedi voll. VIII-X delle sue *Opere*, Leipzig, 1900-1920, e due note di F. KLEIN, *Matematische Annalen*, 1899, vol. LI, pp. 128-33; e 1900, vol. LIII, pp. 45-48.

[1]) Si dice che a tre anni calcolasse, risolvesse problemi numerici e tracciasse nella polvere linee e figure geometriche.

[2]) Per la biografia vedi SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN, *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig, 1856.

spazio. La scoperta fu fatta, come vedemmo, dal Piazzi di Palermo; ed il più interessante fu che il suo annunzio si verificò nello stesso tempo in cui Hegel, in una sua pubblicazione, criticava severamente gli astronomi di non prestare molta attenzione alla filosofia, scienza, diceva egli, che avrebbe subito rivelato ad essi che non vi erano forse più di sette pianeti, e mediante la quale avrebbero quindi evitato uno sciupìo inutile di tempo nel cercare ciò che mai si sarebbe potuto trovare nella natura delle cose. Il nuovo pianeta fu chiamato Cerere; ma esso fu veduto sotto condizioni tali da sembrare quasi impossibile di poterne determinare l'orbita. Le osservazioni furono fortunatamente comunicate a Gauss, che ne calcolò gli elementi; e l'analisi da lui usata dimostrò che egli era il primo degli astronomi teorici, come era il più grande degli aritmetici.

L'attenzione richiamata su di lui da queste ricerche gli fruttò nel 1807 l'offerta di una cattedra a Pietroburgo, che egli però declinò. Nello stesso anno venne nominato Direttore dell'Osservatorio di Gottinga e Professore di Astronomia nella Università stessa. Egli conservò tale carica fino alla morte e, dal momento della sua nomina, non abbandonò mai il suo Osservatorio, tranne una volta per prender parte ad un Congresso scientifico a Berlino. Le sue lezioni erano di una chiarezza unica e nella forma perfette, e si dice che in esse egli facesse uso della stessa analisi colla quale aveva ottenuto i suoi vari risultati, analisi che invece manca completamente nelle dimostrazioni da lui pubblicate; per timore che i suoi allievi perdessero il filo del suo discorso, egli proibiva loro di prendere appunti.

Ho in precedenza parlato delle pubblicazioni fatte da Gauss negli anni 1799, 1801 e 1802. Per alcuni anni, a partire dal 1807, egli dedicò quasi tutto il suo tempo all'Osservatorio. Nel 1809 pubblicò ad Amburgo la sua *Theoria motus corporum coelestium*, la quale contribuì immensamente al perfezionamento dell'astronomia pratica ed introdusse il principio della triangolazione curvilinea; sullo stesso argomento, ma riguardo le osservazioni in genere, abbiamo ancora la memoria *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxia*, con una seconda parte ed un supplemento.

Poco dopo prese a trattare argomenti di geodesia, occupando dal 1821 al 1848 l' ufficio di consigliere scientifico dei Governi di Danimarca e di Hannover per le misurazioni geodetiche allora in corso: le memorie *Ueber Gegenstände der höhern Geodäsie* contengono i suoi studî su questa materia.

Le ricerche di Gauss sulla elettricità e sul magnetismo datano circa dal 1830. La sua prima memoria sulla teoria del magnetismo, intitolata *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*, fu pubblicata nel 1833. Alcuni mesi dopo insieme a Weber inventò la bussola di declinazione ed il magnetometro bifilare; nello stesso anno essi impiantarono a Gottinga, senza far uso di ferro, un Osservatorio magnetico (come Humboldt ed Arago avevano fatto prima in proporzioni più modeste), ove essi fecero le osservazioni magnetiche e dimostrarono specialmente che in pratica era possibile di trasmettere segnali telegrafici. Collegata a siffatte osservazioni è la Società, chiamata *Magnetischer Verein*, fondata da Gauss coll' intendimento di assicurare osservazioni continue e ad epoche fisse. I volumi *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*, pubblicati nel 1838 e 1839, contengono due importanti memorie di Gauss: una sopra la teoria generale del magnetismo terrestre, l'altra sulla teoria delle forze di attrazione secondo la ragione inversa del quadrato della distanza.

Analogamente a Poisson, Gauss considerò il fenomeno della elettricità come dovuto alle attrazioni e repulsioni fra due molecole imponderabili. Lord Kelvin (allora William Thomson) nel 1846 mostrò che tali fenomeni si potrebbero anche assomigliare a quelli prodotti da una corrente di calore opportunamente distribuita da varie sorgenti di elettricità.

In elettrodinamica Gauss ottenne (nel 1835) un risultato analogo a quello ottenuto nel 1846 da W. E. Weber, cioè che l'attrazione fra due molecole elettrizzate e ed e', la cui mutua distanza sia r, è governata, per quanto concerne il moto relativo e la posizione, dalla formola:

$$ee'r^{-2}\left\{1+\left[r\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^2c^{-2}\right\}.$$

Però Gauss non riteneva soddisfacenti quelle ipotesi, basate sopra una formula e non ricavate da una ipotesi fisica; sicchè, non riuscendo ad escogitarne una accettabile, abbandonò il soggetto.

Tali ipotesi furono poi proposte da Riemann nel 1858, da C. Neumann, professore a Lipsia, e da E. Betti (1823-1892) di Pisa nel 1868; ma Helmholtz negli anni 1870, 1873 e 1874 dimostrò che sono insostenibili. Una considerazione più semplice, che abbraccia tutti i fenomeni elettrici e magnetici come forze e moti di un mezzo materiale elastico, fu proposta da Michele Faraday (1791-1867) e venne poi svolta nel 1873 da Giacomo Clerk Maxwell (1831-1879) di Cambridge, il quale, usando coordinate generali, potè trarne delle conseguenze e porle d'accordo coi fatti; Maxwell concluse dimostrando che, se il mezzo fosse identico al così detto etere luminoso, la velocità della luce sarebbe eguale al rapporto delle unità elettro-magnetiche ed elettro-statiche; i successivi esperimenti ebbero per iscopo di confermare questa conclusione. Le teorie ammesse precedentemente supponevano l'esistenza di un solido elastico semplice od un'azione fra materia ed etere.

Questa ed altre teorie elettriche furono classificate da J. J. Thomson di Cambridge, in un *Rapporto* presentato nel 1885 all'Associazione britannica in: 1) quelle non fondate sul principio della conservazione dell'energia (tali sono quelle di Ampère, Grassmann, Stefan e Korteweg); 2) quelle che si fondano sulle ipotesi riguardanti le velocità e le posizioni delle molecole elettrizzate (come quelle di Gauss, W. E. Weber, Riemann e R. J. E. Clasius); 3) quelle che richiedono l'esistenza di una certa specie di energia, della quale non abbiamo altra conoscenza (come la teoria di C. Neumann); 4) quelle che si fondano su considerazioni dinamiche, ma nelle quali non si fa nessun cenno dell'azione del dielettrico (come la teoria di F. E. Neumann); 5) finalmente quelle che si fondano su considerazioni dinamiche e in cui si considera l'azione del dielettrico (come la teoria di Maxwell). Nel citato *Rapporto* queste teorie sono esposte, discusse e confrontate coi risultati delle esperienze.

Le ricerche di Gauss sull'ottica, e particolarmente sui sistemi di lenti, furono pubblicate nel 1840 sotto il titolo di *Dioptrische Untersuchungen.*

Dal presente schizzo emerge che il campo delle ricerche di Gauss fu vastissimo e si può anche aggiungere che in molti casi le sue investigazioni servirono ad aprire nuovi orizzonti. Egli fu l'ultimo dei grandi matematici che si dedicasse ad ogni genere di studî; dopo lui la letteratura della massima parte delle diverse branche della matematica si è così rapidamente accresciuta, che i matematici sono stati costretti di specializzarsi in qualche ramo o in alcuni rami particolari di essa. Dirò ora assai brevemente di alcune delle sue più importanti scoperte di matematica pura.

La sua opera più importante è rappresentata dalle *Disquisitiones arithmeticae*, che furono il punto di partenza di moltissime interessanti ricerche nella teoria dei numeri. Quest'opera e la *Théorie des nombres* di Legendre sono opere veramente classiche; ma, Legendre come non fu capacé di creare un nuovo ramo di scienza studiando le funzioni elittiche, poichè si limitò a riguardar tale teoria come un Capitolo del calcolo integrale, così trattò la teoria de' numeri semplicemente come un Capitolo di algebra. Invece Gauss trattò la teoria delle grandezze discrete, ossia l'aritmetica superiore, ben diversamente da quella delle grandezze continue od algebra; e v' introdusse una nuova notazione e nuovi metodi analitici, di cui in seguito si servirono generalmente gli altri matematici. La teoria dei numeri si può dividere in due rami principali, cioè la teoria delle congruenze e la teoria delle forme; entrambe furono studiate da Gauss. In particolare egli introdusse nelle *Disquisitiones arithmeticae* la moderna teoria delle congruenze di primo e di secondo grado e ad essa ricondusse l'analisi indeterminata. Ivi discusse anche la risoluzione delle equazioni binomie, cioè della forma $x^n = 1$ e ne dedusse il celebre teorema che «i soli poligoni regolari, che possono essere costruiti mediante la geometria elementare, sono quelli di cui il numero de' lati è uguale a $2^m (2^n + 1)$, ove m ed n sono numeri interi e $2^n + 1$ è un numero primo», scoperta fatta nel 1796. Svolse la teoria delle forme quadratiche ternarie; trattò anche la teoria dei determinanti e fu appunto sui risultati ottenuti da Gauss che Jacobi fondò le sue ricerche su questo argomento.

La teoria delle funzioni doppiamente periodiche ebbe la sua origine dalle scoperte di Abel e Jacobi, delle quali parlerò tra breve. Entrambi questi matematici giunsero alle funzioni θ che costituiscono una parte importante della teoria delle funzioni ellittiche. Ma Gauss, indipendentemente da essi ed invero assai prima, aveva scoperte quelle funzioni e le loro proprietà principali, cui era stato indotto da certi integrali che incontrò nella memoria intitolata *Determinatio attractionis*, per calcolare i quali egli inventò la trasformazione ora associata al nome di Jacobi. Benchè più tardi Gauss comunicasse questo fatto a Jacobi, tuttavia egli non pubblicò le sue ricerche; esso trovasi documentato in una serie di appunti che risalgono ad un'epoca non posteriore al 1808, i quali vennero pubblicati nella Collezione delle sue opere.

Fra le altre memorie di matematica pura di Gauss le più importanti sono: quella sulla teoria dei residui biquadratici (nelle quali i numeri complessi della forma $a + bi$ furono per la prima volta introdotti nella teoria dei numeri), con parecchie tavole, fra cui spicca quelle sul numero delle classi delle forme binarie quadratiche; quella sulla dimostrazione del teorema: «ogni equazione algebrica ha una radice reale od immaginaria»; quella sulla somma delle serie; e finalmente una sulla interpolazione: la introduzione, dovuta a lui, di criteri rigorosi per la convergenza delle serie infinite, è assai notevole. Specialmente degne di menzione sono anche le sue ricerche sulla seria ipergeometrica; esse contengono una discussione sulla funzione Γ, soggetto divenuto poi di grande importanza, e sul quale (fra gli altri) hanno scritto Kummer e Riemann. Finalmente noi abbiamo la fondamentale memoria sulla teoria generale delle superficie e quella sulla rappresentazione conforme di una superficie sopra un'altra, in cui sono estesi ad una superficie qualunque i risultati trovati da Lagrange per le sole superficie di rivoluzione. Pare anche che Gauss abbia scoperte qualcuna delle proprietà dei quaternioni, ma le relative investigazioni non furono pubblicate che pochi anni fa.

Nella teoria dell'attrazione abbiamo: una memoria sull'attrazione degli ellissoidi omogenei; la memoria del 1839, già ricordata, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entferung*, sulla teoria delle forze di attrazione secondo la ragione inversa del quadrato della distanza; e la già citata memoria *Determinatio attractionis*, in cui si dimostra che le variazioni secolari, subìte dagli elementi dell'orbita di un pianeta per l'attrazione di un altro che lo perturba, sono uguali a quelle che si otterrebbero se la massa del pianeta disturbatore fosse distribuita sopra la sua orbìta in un anello ellittico, in modo che eguali masse dell'anello corrispondessero ad archi descritti nell'orbita in tempi eguali.

I grandi maestri dell'analisi moderna sono Lagrange, Laplace e Gauss, i quali furono contemporanei. È interessante far notare il vivo contrasto dei loro stili. Lagrange è perfetto nella forma e nella sostanza; è accurato nella esposizione de suoi procedimenti; e tuttavia i suoi ragionamenti sono generali e facilmente seguibili. Laplace invece non ispiega nulla, è assolutamente trascurato nello stile e, soddisfatto che i suoi risultati siano esatti, li lascia senza dimostrazione o con una manchevole. Gauss è esatto ed elegante come Lagrange, ma è anche più difficile a seguirsi di Laplace, perchè non fa conoscere l'analisi con cui ottenne i suoi risultati; però si studia di dare una dimostrazione che sia rigorosa quanto concisa, sintetica quanto esatta.

Dirichlet [1]). — Uno degli allievi di Gauss, di cui giova parlare qui, è Lejeune Dirichlet, la cui esposizione magistrale delle scoperte di Jacobi (che fu suo tutore) e di Gauss fece ingiustamente dimenticare le sue indagini originali sopra argomenti congeneri. *Pietro Gustavo Lejeune Dirichlet* nacque a Düren il 13 febbraio 1805 e morì a Gottinga il 5 maggio 1859. Successivamente occupò le cattedre di matematica nella Università di Breslavia

1) Le sue opere sono state pubblicate in due volumi. Vol. I, Berlino, 1889 e 1897. Le sue lezioni sulla teoria dei numeri furono edite da R. DEDEKIND, 3ª edizione, Brunswick, 1879-81: le sue ricerche sulla teoria del potenziale lo furono da F. GRUBE, 2ª edizione, Lipsia, 1887. Un cenno su alcune sue ricerche, dovuto a C. W. BORCHARDT trovasi nel *Journal di Crelle*, vol. LVII, 1859, pp. 91-92.

e di Berlino e nel 1855, alla morte di Gauss, fu chiamato a succedergli come professore di matematica superiore a Gottinga. Egli intendeva di condurre a compimento alcuni lavori incompleti di Gauss, a cui era assai affezionato, quando una morte prematura glielo impedì; tuttavia pubblicò parecchie memorie che hanno servito grandemente ad agevolare lo studio di alcuni de' metodi più astrusi di quel matematico. Fra le ricerche originali di Dirichlet le più importanti sono la dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle serie di Fourier e, nella teoria dei numeri, gli studi sulle leggi assintotiche (cioè leggi che si approssimano tanto più all'esattezza, quanto più grandi divengono i numeri considerati), finalmente le indagini sopra i numeri primi.

La teoria dei numeri od aritmetica superiore. — Le ricerche di Gauss sulla teoria dei numeri furono continuate o completate da Jacobi, che fu il primo a dimostrare la legge di reciprocità cubica; studiò inoltre la teoria dei residui e nel suo *Canon arithmeticus* diede una tavola dei residui delle radici primitive.

Eisenstein [1]. — Tale argomento fu poi ripreso da *Ferdinando Gotthold Eisenstein*, professore all' Università di Berlino, ove nacque il 16 aprile 1823 e morì l' 11 ottobre 1852. La risoluzione del problema della rappresentazione dei numeri mediante le forme binarie quadratiche è uno dei più grandi risultati ottenuti da Gauss; ed i principî fondamentali, su cui si basa il modo di trattare tali questioni, furono da lui esposti nelle *Disquisitiones arithmeticae.* Gauss vi aggiunse alcuni risultati relativi alle forme quadratiche ternarie; ma la generalizzazione da due a tre indeterminate fu opera di Eisenstein, che, nella sua memoria *Neue Theoreme der höheren Arithmetik,* definì, per ogni ordine e per ogni genere, i caratteri delle forme ternarie quadratiche di determinante dispari e, nel caso delle forme definite, assegnò il grado di

[1]) Un'autobiografia ed alcune lettere di Eisenstein furono pubblicate nel tomo VII delle *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik,* 1895, pp. 143 seg.

ogni ordine o genere; però non considerò le forme di determinante pari, nè diede alcuna dimostrazione dei propri risultati.

Eisenstein considerò pure i teoremi relativi alla possibilità di rappresentare un numero come somma di quadrati e dimostrò che il teorema generale era limitato ad otto quadrati. Le soluzioni nei casi di due, quattro e sei quadrati si possono ottenere mediante le funzioni ellittiche; ma i casi, in cui il numero dei quadrati è dispari, richiedono uno speciale procedimento di pertinenza della teoria dei numeri. Eisenstein diede la soluzione del caso di tre quadrati e lasciò anche un cenno della soluzione che aveva trovato pel caso di cinque quadrati [1]; ma i suoi risultati furono pubblicati senza le dimostrazioni e sono applicabili solo ai numeri che non sono divisibili per un quadrato.

Enrico Smith [2]. — Uno dei più originali e poderosi matematici della scuola fondata da Gauss fu Enrico Smith. *Giovanni Enrico Stefano Smith* nacque a Londra il 2 novembre 1826 e morì ad Oxford il 9 febbraio 1883; fu istruito a Rugby e poi nel Collegio Balliol a Oxford, del quale fu poi *fellow*; nel 1861 fu eletto professore Saviliano di geometria ad Oxford, ove risiedè fino alla morte.

Nella scienza dei numeri sarà sempre in particolar modo ricordato il nome dello Smith, perchè egli vi si dedicò dal 1854 al 1864. I risultati delle sue ricerche storiche si leggono nel suo celebre *Report* pubblicato in più volte nei *Proceedings* della Associazione britannica dal 1859 al 1865; esso contiene, insieme ad aggiunte, un sunto di ciò che era stato fatto a quell'epoca in tale argomento. I più importanti dei suoi lavori originali di aritmetica superiore sono due memorie inserite nelle *Philosophical Transactions* del 1861 e 1867; la prima considera l'equazioni indeterminate di 1° grado e le congruenze, e la seconda l'ordine e il genere delle forme quadratiche ternarie. In questa

[1]) *Journal de Crelle,* vol. XXXV, p. 368.

[2]) La Collezione delle opere matematiche di Smith, edita da J. W. L. Glaisher, è preceduta da uno schizzo biografico, fu pubblicata in 2 volumi, Oxford, 1894. Il seguente cenno è desunto dalla Necrologia pubblicata nei *Monthly Notices of the Astron. Society,* 1884, pp. 138-149.

ultima memoria trovansi le dimostrazioni dei risultati ottenuti da Eisenstein, la loro generalizzazione alle forme quadratiche ternarie di determinante pari ed una classificazione compiuta delle forme quadratiche ternarie.

Ma lo Smith non si limitò al caso di tre indeterminate essendo riuscito a stabilire i principî da cui dipende la estensione al caso generale di n indeterminate, ed ottenne le formule generali; così egli determinò il massimo progresso che sia stato compiuto su questo ramo dopo la pubblicazione dei lavori di Gauss. Nell'esposizione dei suoi metodi e risultati, che comparve nei *Proceedings* della Società Reale [1]), Smith osservò che i teoremi relativi alla rappresentazione dei numeri mediante quattro quadrati od altre semplici forme quadratiche sono deducibili con un metodo uniforme dai principî ivi indicati, e così dicasi dei teoremi riguardanti la rappresentazione dei numeri per mezzo di sei ed otto quadrati. Egli poi prosegue dicendo che, siccome la serie dei teoremi relativi alla rappresentazione nei numeri mediante somme di quadrati non sussiste, per la ragione addotta da Eisenstein, quando il numero dei quadrati è maggiore di otto, così sarebbe desiderabile fosse completata. I teoremi per un numero pari di quadrati erano conosciuti. I teoremi principali relativi al caso di cinque quadrati furono dati da Eisenstein; ma egli considerò solo quei numeri che non sono divisibili per un quadrato e non considerò il caso di sette quadrati. Smith completò tali teoremi per il caso di cinque quadrati e vi aggiunse i corrispondenti teoremi pel caso di sette.

Questa memoria diede occasione nella storia delle matematiche ad un incidente drammatico. Quattordici anni dopo, l'Istituto di Francia, ignorando il lavoro di Smith, scelse come argomento del suo « Grand Prix des sciences mathématiques », la dimostrazione ed il compimento dei teoremi di Eisenstein per cinque quadrati. Smith redasse la dimostrazione de' suoi teoremi generali limitando le dimostrazioni dei risultati al caso speciale di cinque quadrati e solo un mese dopo la sua morte, cioè nel marzo 1883, il premio fu assegnato a lui; un secondo premio venne assegnato

1) Vedi vol. XIII, 1864, pp. 199-203, e vol. XVI, 1868, pp. 197-208.

a H. Minkowski di Bonn. Nessun altro episodio potrebbe mostrare più chiaramente l'importanza delle ricerche di Smith del fatto che la questione, della quale egli aveva data la soluzione nel 1867 come semplice corollario delle formule generali che governano questa intera classe di ricerche, venne riguardata dall'Accademia francese come una di quelle la cui risoluzione era di tale difficoltà ed importanza da essere meritevole del suo Gran Premio. È stato anche molto commentato il fatto, che quegli accademici conoscessero sì poco le ricerche dei loro contemporanei inglesi e tedeschi su tale argomento, da ignorare che la soluzione del problema, che essi avevano proposto, si trovava proprio nella loro biblioteca.

J. W. Glaisher di Cambridge ha recentemente [1]) esteso questi risultati ed investigato, con l'aiuto delle funzioni ellittiche, il numero delle rappresentazioni di un numero come somma di n quadrati, supposto n superiore a 9.

Fra le altre ricerche di Smith citerò specialmente la sua memoria di geometria *Sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques*, per la quale nel 1868 gli fu assegnato il premio Steiner dall'Accademia di Berlino.

In un lavoro inserito negli *Atti* dell'Accademia dei Lincei nel 1877, diede a conoscere un'importantissima relazione analitica, riguardante l'equazione modulare dell'ordine n e la teoria delle forme quadratiche binarie di determinante positivo n. In questa memoria l'equazione modulare è rappresentata da una curva in modo tale da offrire una vera rappresentazione geometrica dei sistemi completi delle forme quadratiche ridotte appartenenti al determinante n; e vi è data una interpretazione geometrica dei concetti di « classe equivalente » e « forma ridotta ». Lo Smith è anche autore di importanti memorie in cui riuscì ad estendere alle forme quadratiche complesse molte ricerche di Gauss che riguardano quelle reali. Dalle sue ricerche riguardanti la teoria dei numeri egli fu condotto alla teoria delle funzioni ellittiche ed i risultati, a cui giunse, specialmente sulla teoria delle funzioni Θ e Ω, sono importantissimi.

1) Un riassunto di tali ricerche si trova in una memoria dell'autore nel vol. V della 2ª serie, 1907, dei *Proceeding of the London Mathem. Society*.

Kummer. — La teoria dei numeri primi ricevette uno sviluppo quasi inatteso da *E. E. Kummer* di Berlino (1810-1893) [1]. In particolare egli studiò i numeri complessi della forma $a + \Sigma bj$, ove j è una radice complessa dell'equazione $j^p - 1 = o$, e p è un numero primo. La teoria da lui stabilita condusse al meraviglioso risultato che la proposizione secondo cui ogni numero può venire decomposto nel prodotto di fattori primi in uno ed un solo modo, non è necessariamente vera nel campo dei numeri complessi. Ciò diede origine alla teoria dei primi ideali, svolta più tardi da J. W. R. Dedekind. Kummer ha pure esteso a residui d'ordine superiore i teoremi di Gauss sui residui quadratici e scrisse ancora sulle trasformazioni delle funzioni ipergeometriche.

La teoria dei numeri, come è trattata oggidì, può dirsi avere avuto origine da Gauss. Io ho già brevissimamente accennato alle ricerche di Jacobi, Dirichlet, Eisenstein ed Enrico Smith. Mi accontenterò di aggiungere alcune notizie sul progresso successivo di certi rami di questa teoria.

La distribuzione dei numeri primi è stata studiata specialmente da G. F. B. Riemann, J. J. Sylvester e P. L. Tchebycheff [2]) (1821-1894) di Pietroburgo. La breve memoria di Riemann sul numero dei numeri primi, che sono compresi fra due numeri dati, offre un' importante prova della sua potenza analitica. Vedemmo a suo tempo che Legendre dimostrò che il numero dei numeri primi minori di n è approssimativamente eguale a

$$\frac{n}{\log . n - 1{,}08366}$$

Riemann andò più in là; la sua citata memoria ed una di Tchebycheff contengono quasi tutto quello che è stato fatto finora su questo problema di apparenza così semplice, che si è presentato da sè stesso a tutti quelli che si sono occupati della teoria

1) Cfr. *Festschrift zur Feier der 100 Geburtstages* di E. E. KUMMER, in *Abh. and zur Gesch. der Mathem.*, tomo XXIX, 1910 (G. L.).

2) La raccolta delle opere di P. L. TCHEBYCHEFF, edita da H. MARKOFF e N. SONIN fu pubblicata a Pietroburgo in due volumi; in francese venne alla luce negli anni 1900 e 1907.

dei numeri e che pure venne studiato invano da Lagrange e Gauss [1]). In detta memoria Riemann dimostrò anche che tutte le radici della funzione

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\, s+1\right)(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,(s)$$

sono della forma $\frac{1}{2} + i\,t$, ove t è un numero reale; si ritiene che questo teorema sia vero, ma finora ha resistito ad ogni tentativo per dimostrarlo.

La partizione dei numeri, problema a cui Eulero rivolse tanta attenzione, è stata trattata da A. Cayley, J. J. Sylvester e P. A. Mac Mahon. La rappresentazione dei numeri sotto forme speciali, i possibili divisori dei numeri di forme particolari ed alcuni teoremi generali riguardanti i divisori dei numeri, sono stati studiati da J. Liouville (1809-1882) — editore dal 1836 al 1874 del ben noto giornale di matematica — e da J. W. L. Glaisher di Cambridge. La teoria delle forme quadratiche è stata studiata anche da Cauchy; quella delle forme ternarie quadratiche da L. Kronecker [2]) (1823-1891) di Berlino; quella delle forme ternarie da C. Hermite (1822-1901) di Parigi.

I più diffusi trattati sull'argomento sono, forse (oltre le *Lezioni* di Dirichlet-Dedekind) quelli di G. B. Mathews (Cambridge, 1892), di E. Lucas (Parigi, 1891) e di E. Cahen (Parigi, 1900). Pare che attualmente sia diminuito l' interesse pei problemi riguardanti la teoria dei numeri; probabilmente in avvenire ci si persuaderà che questa teoria sarebbe meglio trattata seguendo altre vie.

Il concetto di *numero* fu pure studiato con grande ampiezza durante l' ultimo quarto del secolo XIX.

I numeri trascendenti diedero argomento a due memorie di

1) La storia del problema della distribuzione dei numeri primi è completamente esposta in una memoria del prof. G. TORELLI, premiata dall'Accademia di Napoli e pubblicata nel 1901 negli *Atti* di tale Società. Vedi inoltre E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 2 volumi, Leipzig und Berlin, 1909. (G. L.).

2) Vedi il *Bulletin of New York (American) Mathematical Society*, vol. 1, 1891-92, pp. 173-184.

Liouville [1]), ma furono poi trattati come un ramo a sè della matematica da L. Kronecker e G. Cantor. I numeri irrazionali e la natura del numero in generale furono pure studiati a fondo da R. Dedekind [2]), G. Cantor, K. Weierstrass, C. Méray ed E. W. Hobson. Questo tema, in questi ultimi anni, attrasse molto l'attenzione dei matematici e ora costituisce una delle branche più fiorenti della moderna matematica. Numeri transfiniti, cardinali e ordinali, teoria dei gruppi di punti e più generalmente teoria degli aggregati debbono venire citati come le principali sezioni di quell'argomento.

Funzioni ellittiche ed abeliane ossia Trigonometria superiore. — È un altro argomento che è stato molto studiato nel secolo XIX. Ho già detto come sino dal 1808 Gauss avesse scoperte le funzioni Θ e le loro proprietà principali; ma le sue ricerche rimasero per molti anni sepolte nei suoi appunti e il progresso moderno conseguito in questo ramo è dovuto alle ricerche, fatte fra il 1820 ed il 1830, da Abel e Jacobi, i cui metodi nello studio di quelle funzioni vennero completamente sostituiti a quello di Legendre; perciò essi sono a ragione considerati come i creatori di questa branca delle matematiche.

Abel [3]). — *Niels Enrico Abel* nacque a Findoë in Norvegia il 5 agosto 1802 e morì a Arendal il 6 aprile 1829 all'eta di soli 26 anni. Le sue memorie sulle funzioni ellittiche, che furono in origine pubblicate nel *Journal de Crelle*, trattano l'argomento dal punto di vista della teoria delle equazioni e delle forme al-

1) Questi fu il primo a dimostrare l'esistenza dei numeri trascendenti (non algebrici) mediante le frazioni continue nei *Comptes Rendus* (1844) e poi nel suo *Giornale*, (1851, vol. XVI) col titolo: *Sur la classe tres-étendues de quantités, dont la valeur n'est pas algebrique, ni meme réductible à des irrationelles algebriques*. Questa questione fu poi ripresa dal CANTOR, *Crelle Journal*, vol. LXXVII, 1873.

2) Due saggi di DEDEKIND possono fungere da propedeutica in tale argomento; essi furono tradotti in inglese, Chicago, 1901.

3) Una vita di Abel scritta da C. A. BJERKNES fu pubblicata a Stockolma nel 1880 e tradotta poi (1885) in francese; un'altra è dovuta a L. DE PESLOÜAN. Due edizioni delle *Opere* di ABEL sono state fatte, di cui l'ultima, edita da SYLOW e LIE e pubblicata a Cristiania in 2 volumi nel 1881, è la più completa. Vedi anche il volume del Centenario 1902 ed una memoria di MITTAG-LEFFLER.

gebriche, metodo a cui naturalmente lo condussero le sue ricerche.

L'importante e generalissimo risultato conosciuto come «teorema di Abel», che fu successivamente applicato da Riemann per fondare la teoria di nuove funzioni trascendenti, fu presentato all'Accademia di Francia nel 1826 [1]); ma (principalmente per incuria di Cauchy) non fu stampato fino al 1841 [2]). La sua pubblicazione è dovuta soprattutto alle istanze fatte da Jacobi, in seguito ad una dichiarazione relativa fatta da B. Holmboe nella sua edizione delle opere di Abel, fatta nel 1839. È difficile di esporre chiaramente e brevemente il teorema di Abel; ma si potrebbe definire come un teorema che serve a calcolare la somma di un certo numero d'integrali che abbiano lo stesso integrando, ma limiti diversi, i quali sono radici di un'equazione algebrica. Il teorema dà la somma degl'integrali in funzione delle costanti, che compariscono in questa equazione e nell'integrando. Noi possiamo riguardare l'inverso dell'integrale di questo integrando come una nuova funzione trascendente, e così il teorema fornisce una proprietà di questa funzione. Per esempio, se il teorema di Abel si applica all'integrando $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, esso fornisce il teorema d'addizione per le funzioni (trigonometriche) circolari. Il nome di funzione abeliana è stato dato ai trascendenti superiori dotati di periodicità multipla, che furono per la prima volta studiati da Abel. Le funzioni abeliane collegate alla curva $f(x, y) = 0$ sono della forma $\int u\, dx$, ove u è una funzione razionale di x e y; la loro teoria fu investigata da molti scrittori moderni.

Abel criticò l'uso delle serie infinite di ignota convergenza e scoprì il ben noto teorema che dà il criterio per riconoscere la validità del risultato che si ottiene moltiplicando fra loro due serie infinite. Come prova della fecondità delle sue idee accennerò alla

1) LEGENDRE chiamò questo teorema: *monumentum aere perennius*.

2) Vedi l'introduzione alle *Elliptische Innctionen* di A. ENNEPER (2ª edizione per cura di F. MÜLLER, Halle, 1890), inoltre L. KÖNIGSBERGER, *Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten*, Leipzig, 1879. Sulla teoria delle funzioni abeliane, vedi *Proceeding of the Brit. Assoc.*, vol. LXVII, 1897, pp. 246-286.

sua celebre dimostrazione dell' impossibilità di esprimere una radice di un'equazione generale di 5° grado in funzione dei suoi coefficienti mediante un numero finito di radicali e di funzioni razionali; questo teorema è importantissimo, dacchè chiuse per sempre un campo della matematica che aveva prima attratto l'attenzione di molti matematici. Aggiungerò che questo teorema fu enunciato per la prima volta nel 1798 da Paolo Ruffini, medico italiano, professore di matematica a Modena [1]), il quale inoltre giunse per primo al metodo di approssimazione detto di Horner [2]).

Jacobi [3]). — *Carlo Gustavo Jacob Jacobi* nacque da genitori israeliti a Potsdam il 10 decembre 1804 e morì a Berlino il 18 febbraio 1851; studiò nell' Università di Berlino, ove ottenne nel 1825 il grado di dottore in filosofia. Nel 1827 fu nominato professore straordinario di matematica a Königsberg e nel 1829 fu promosso ordinario; occupò questa cattedra fino al 1842, allorchè il governo prussiano gli concesse la pensione e lo trasferì a Berlino, ove visse fino al 1851. Jacobi fu il più grande professore di matematica della sua epoca e le sue lezioni, quantunque un po' disordinate, tuttavia stimolavano i più capaci dei suoi allievi e esercitavano su di essi una grande influenza, starei per dire fino allora senza precedenti.

Le più importanti ricerche di Jacobi sono quelle sulle funzioni ellittiche, e si sa che la loro notazione moderna è dovuta a lui; così la loro teoria, che egli stabilì simultaneamente ad Abel, ma indipendentemente da lui. I suoi risultati si trovano nel trattato *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (Königsberg, 1829) ed in alcune posteriori memorie pubblicate nel *Journal de Crelle*; essi sono anteriori alle prime ricerche di Weierstrass, menzionate più sotto. La corrispondenza fra Jacobi e Legendre sulle funzioni ellittiche fu pubblicata nel volume I delle *Opere* di Jacobi. Jacobi, come Abel, riconobbe che la teoria delle funzioni ellittiche non è semplicemente un insieme di teoremi d' integrazione, ma che esse costituivano una nuova specie di funzioni, vale a dire quelle doppiamente periodiche; inoltre egli pose particolare attenzione alla teoria della funzione Θ. Il seguente passo [1]), in cui egli espone questa veduta, è abbastanza interessante, per venire riprodotto testualmente: «E quo, cum universam, quae fingi potest, amplectatur periodicitatem analyticam elucet, functiones ellipticas non aliis adnumerari debere transcendentibus, quae quibusdam gaudent elegantiis, fortasse pluribus illas aut maioribus, sed speciem quandam iis inesse perfecti et absoluti».

Fra le altre ricerche di Jacobi citerò specialmente le sue memorie sui determinanti, le quali ne diffusero l' uso, e ricorderò particolarmente la sua invenzione del Jacobiano (o determinante funzionale), che è il determinante formato dalle n^2 derivate parziali di primo ordine di n date funzioni di altrettante variabili indipendenti. Ricorderò anche le memorie sui trascendenti abeliani; le ricerche sulla teoria dei numeri, di cui si è già parlato; le importanti memorie sulla teoria delle equazioni differenziali, ordinarie e parziali; i suoi studî sul calcolo delle variazioni; e le contribuzioni al problema dei tre corpi e ad altri problemi particolari di dinamica. Gran parte dei risultati di queste ultime ricerche è contenuto nel suo *Vorlesungen über Dynamik*.

Riemann [2]). — *Giorgio Federico Bernardo Riemann* nacque a Breselenz il 17 settembre 1826 e morì a Selasca il 20 luglio 1866. Studiò a Gottinga sotto Gauss, e poi a Berlino sotto Jacobi, Dirichlet, Steiner ed Eisenstein, che erano in quell'epoca tutti professori di quella Università. Benchè fosse povero e di malferma

---

1) Cfr. H. BURCKHARDT, *Die Anfänge der Gruppentheorie und P. Ruffini*, in *Abh. zur Gesch. der Math.*, T. VI, 1892.

2) F. CAJORI, *Horner's Method of approssimation anticipated by Ruffini*, in *Bull. of the Amer. math. Society*, maggio 1911.

3) Vedi C. J. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, Munich, 1877. La raccolta delle *Opere* di JACOBI fu edita da DIRICHLET in 3 volumi (1846-71), ed accompagnata da una biografia, 1852; una nuova edizione sotto la direzione di C. W. BORCHARDT e K. WEIERSTRASS fu pubblicata a Berlino, in 7 volumi, 1881-1891. Vedi anche L. KÖNIGSBERGER, *C. G. Jacobi*, Leipzig, 1904.

---

1) Vedi WERKE, vol. I, 1881, p. 87.

2) La raccolta delle *Opere* di RIEMANN edita da H. WEBER, cui è premessa una breve vita scritta da R. DEDEKIND, fu pubblicata a Lipsia, 2ª edizione, 1892. Un'altra breve biografia di RIEMANN è stata scritta da E. J. SCHERING, Gottinga, 1867.

salute, tuttavia lottò coraggiosamente per proseguire le sue ricerche. Nel 1857 fu nominato professore a Gottinga, e dopo questa nomina il suo ingegno fu universalmente riconosciuto; ma nel 1862 la sua salute incominciò a declinare, e quattro anni dopo morì, lavorando volentieri e con coraggio sino alla fine dei suoi giorni. Riemann può considerarsi uno dei più profondi e geniali matematici del suo tempo. La mole del suo lavoro è piccola, ma è notevolissima per originalità e genialità; in particolare le sue ricerche sulle funzioni e sulla geometria diedero origine a studî di grande importanza.

La sua prima memoria, scritta nel 1850, intorno alle funzioni algebriche di una variabile complessa diede origine ad un nuovo metodo di trattare la teoria delle funzioni. Lo svolgimento di questo metodo è specialmente dovuto alla scuola di Gottinga, a cui i nomi di Riemann e Klein sono strettamente legati. Nel 1854 Riemann scrisse la sua celebre memoria riguardante le ipotesi sulle quali si fonda la geometria; di essa parleremo in seguito. A questa tennero dietro parecchie memorie sulle funzioni ellittiche e sulla distribuzione dei numeri primi di cui si è già parlato. Finalmente studiò le funzioni molteplicemente periodiche; in una memoria pubblicata nel *Giornale di Crelle-Borchardt* nel 1857 egli fece per le funzioni abeliane ciò che Abel aveva fatto per le funzioni ellittiche.

Ho già parlato delle ricerche di Legendre, Gauss, Abel, Jacobi e Riemann sulle funzioni ellittiche ed abeliane. Lo stesso argomento fu anche studiato, tra altri, da J. G. Rosenhain (1816-1887) di Königsberg, che scrisse (nel 1844) sulle funzioni iperellittiche e Θ doppie e sulle funzioni a due variabili con quattro periodi; da A. Göpel (1812-1847) di Berlino, che studiò [1]) le funzioni iperellittiche; da L. Kröneker [2]) di Berlino, che scrisse sulle funzioni ellittiche; da L. Königsberger [3]) di Heidelberg, che studiò la trasformazione delle funzioni Θ doppie; da F.

1) Vedi *Journal de Crelle*, vol. XXXV, 1847, pp. 277-312; una commemorazione scritta da JACOBI trovasi ivi a pp. 313-317.

2) La raccolta delle sue *Opere* in 4 volumi, edita da K. HENSEL, è ora in corso di pubblicazione a Lipsia, 1895, ecc.

3) Vedi le sue *Lezioni* pubblicate a Lipsia nel 1874.

Brioschi (1824-1897) di Milano, che scrisse sulle funzioni ellittiche ed iperellittiche; da Enrico Smith di Oxford, che studiò la teoria delle trasformazioni, le funzioni Θ e Ω e certe funzioni modulari; da A. Cayley di Cambridge, il quale fu il primo a studiare (nel 1845) la teoria dei prodotti doppiamente infiniti e a determinare la loro periodicità, e si occupò anche del legame esistente fra le ricerche di Legendre e quelle di Jacobi; e da C. Hermite (1822-1901) di Parigi, le cui ricerche in gran parte riguardano la teoria delle trasformazioni e gli sviluppi più elevati delle funzioni Θ.

Weierstrass [1]). — La trattazione della trigonometria superiore fu messa sopra una via alquanto differente dalle ricerche di Weierstrass. *Carlo Weierstrass* nacque a Ostenfeld vicino a Münsten il 31 ottobre 1815 e morì a Berlino il 19 febbraio 1897; fu uno dei più grandi matematici dal secolo XIX. Non prese parte alcuna alla cosa pubblica; la sua vita fu tranquilla; e passò gli ultimi quarant'anni di essa a Berlino, ove era professore.

Il suo nome è associato a due rami della matematica pura: alle funzioni ellittiche ed abeliane ed alla teoria della funzioni. Le sue prime ricerche sulle funzioni ellittiche riguardano le funzioni Θ, che egli trattò sotto una nuova forma, in cui sono espresse secondo le potenze del modulo. Negli ultimi tempi diede un metodo simmetrico per trattare tutte le funzioni ellittiche. Jacobi aveva mostrato che una funzione di n variabili può possedere $2n$ periodi; conformemente a ciò Weierstrass cercò l'espressione più generale di siffatte funzioni e mostrò che godono di proprietà analoghe a quelle delle funzioni ellittiche. Perciò le proprietà di queste possono dedursi come casi particolari di risultati generali.

Fu condotto naturalmente a tale metodo dai suoi studî sulla teoria generale delle funzioni, che coordinò comprendendovi i diversi rami di ricerche, prima trattati indipendentemente. In modo particolare creò una teoria completa delle funzioni uniformi. Ri-

1) La raccolta delle opere di WEIERSTRASS è ora in corso di pubblicazione, Berlino, 1894 ecc.; notizie intorno alla sua vita scritta da G. MITTAG-LEFFLER e H. POINCARÉ trovansi in *Acta Mathematica*, 1897, vol. XI, pp. 79-82 e 1899, vol. XXII, pp. 1-18.

chiamò specialmente la sua attenzione sulla rappresentazione delle funzioni mediante prodotti infiniti e le serie. Oltre alle funzioni studiò pure e trattò dalla cattedra la natura delle ipotesi su cui si fonda l'analisi, il calcolo delle variazioni e la teoria delle superficie minime. I suoi metodi sono notevoli per il loro carattere generale ed estesissimo. Le ricerche recenti sulle funzioni ellittiche sono in gran parte fondate sui metodi di Weierstrass.

Fra gli altri matematici più notevoli che hanno recentemente studiato questo argomento ricorderò i nomi di G. H. Halphen [1]) (1844-1889), ufficiale dell'esercito francese, le cui ricerche furono in gran parte fondate sui lavori di Weierstrass; F. Klein di Gottinga, che ha studiato le funzioni abeliane, le funzioni modulari ellittiche e le funzioni iperellittiche; H. A. Schwarz di Berlino; H. Weber di Strasburgo; M. Nöther di Erlagen; W. Stahl di Aachen; F. G. Frobenius di Berlino; e J. W. L. Glaisher di Cambridge, che ha specialmente svolta la teoria della funzione Z.

I trattati sulle funzioni ellittiche ora più in uso credo che siano quelli di J. Tannery e J. Molk, 4 volumi, Parigi, 1893-1910; di P. E. Appell e E. Lacour, Parigi, 1896; di H. Weber, Brunswich, 1891; e di G. H. Halphen, 3 volumi, Parigi, 1886-1891.

Teoria delle funzioni. — Ho già detto che la moderna teoria delle funzioni è dovuta in gran parte a Weierstrass. Essa costituisce un argomento singolarmente attraente ed è divenuta una branca importante e assai estesa delle discipline matematiche. Storicamente parlando si può asserire che essa fu iniziata da A. Cauchy, il quale gettò le fondamenta della teoria delle funzioni sinettiche di una variabile complessa. Il lavoro con questo indirizzo fu continuato da Liouville [2]), che studiò principalmente le funzioni doppiamente periodiche. Queste ricerche furono gene-

[1]) Uno schizzo intorno alla sua vita e le sue opere si legge nel *Giornale di Liouville*, 1889, pp. 345-359 e nei *Comptes-rendus*, T. CV, 1850, pp. 489-497. Di recente le sue *Opere* furono pubblicate a Parigi in quattro volumi.

[2]) Questi fu il primo a dimostrare l'esistenza dei numeri trascendenti (non algebrici) mediante le frazioni continue nei *Comptes Rendus* (1844), e poi nel suo *Giornale* (1851, vol. XVI) col titolo: *Sur la classe très-étendues de quantités, dont la valour n'est pas algebrique, ni même réductible à des irrationelles algebriques.* Questa questione fu poi ripresa dal CANTOR (*Crelle Journal*, vol. 77, 1873) (Nota dei T.).

ralizzate e sistematizzate in un grande trattato di C. Briot (1817-1882) e J. C. Bouquet (1819-1885), e successivamente furono ulteriormente ed ampiamente svolte da C. Hermite.

Ricorderò poi le ricerche sulla teoria delle funzioni algebriche, che traggono la loro origine in memorie di Riemann degli anni 1850 e 1857, proseguendo le quali H. A. Schwarz stabilì esattamente certi teoremi («principio di Dirichlet»), le cui dimostrazioni date dal Riemann erano state oggetto di obbiezioni. A Riemann siamo ancora debitori di importanti lavori sulle funzioni modulari che furono pubblicati solo di recente. Poi F. Klein collegò la teoria delle funzioni di Riemann alla teoria dei gruppi e scrisse sulle funzioni automorfe e modulari; H. Poincaré investigò pure le funzioni automorfe (funzioni fuchsiane e kleiniane) e la teoria generale con speciali applicazioni all'equazioni differenziali; e recentissimamente G. Painlevé ha studiato le funzioni uniformi e K. Hensel le funzioni algebriche.

Ho già detto che l'opera di Weierstrass gettò nuova luce su tutta la scienza. La sua teoria delle funzioni analitiche è stata svolta da M. G. Mittag-Leffler di Stockolma, uno dei più eminenti matematici viventi; mentre C. Hermite, P. E. Appell, C. E. Picard e E. Goursat, tutti di Parigi, hanno studiato alcuni rami speciali della teoria generale.

Come trattati di questa materia ricorderò i seguenti: *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, di F. Casorati, Pavia, 1868; C. Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, 2° ediz., Lipsia, 1884; *Theory of Functions of a Complex Variable*, di A. R. Forsyth, 2ª ediz., Cambridge, 1900; *Funktionstheorie*, di J. Petersen, Copenhagen; *Abel's Theorem*, di H. F. Baker; *Traité des Fonctions algébriques*, di P. Appell e E. Goursat, Parigi, 1895; *The Theory of Functions*, di J. Harkness e F. Morley, Londra, 1893.

Algebra superiore. — La teoria dei numeri può considerarsi come un'aritmetica superiore e la teoria delle funzioni ellittiche ed abeliane come una trigonometria superiore. L'algebra superiore (cioè la teoria delle equazioni algebriche) ha pure essa richiamato l'attenzione di molti, e fu un argomento di studio favorito pei matematici che io mi propongo di ricordare ora, benchè i loro studî non siansi limitati in alcun modo a questo soggetto.

Cauchy[1]. — Il principale rappresentante della scuola analitica francese del secolo XIX è *Agostino Luigi Cauchy*[2]; egli nacque a Parigi il 21 agosto 1789 e morì a Sceaux il 25 maggio 1857; studiò nella Scuola Politecnica, semenzaio in quell'epoca di tanti matematici francesi, abbracciando la professione d'ingegnere civile. La sua prima memoria del 1811 fu sui poliedri. Legendre la trovò di tale valore che consigliò Cauchy a studiare la risoluzione di un problema analogo, che aveva deluso gli antecedenti investigatori, e la bontà di tale consiglio fu nel 1812 dimostrata dal successo di Cauchy. Le memorie sull'analisi e sulla teoria dei numeri presentate negli anni 1813, 1814 e 1815, mostrarono che le sue attitudini non si limitavano soltanto alla geometria; in una di queste memorie generalizzò alcuni risultati, che erano stati stabiliti da Gauss e da Legendre; ed in un'altra dimostrò il teorema che assegna il numero di valori che una funzione algebrica può assumere allorchè si permutano le costanti letterali che essa contiene. Fu quest'ultimo teorema che pose Abel in grado di dimostrare che, in generale, un'equazione algebrica di grado superiore al 4° non può essere risolta mediante espressioni algebriche.

[1] Vedi *La vie et les travaux du Baron Cauchy*, di L. VALSON, 2 vol., Parigi, 1868. Un'edizione completa delle *Opere* di CAUCHY si sta ora pubblicando dal Governo francese.

[2] Dice il MARIE (che, riguardo a Cauchy, non era giudice imparziale) «che per giudicarlo bisogna distinguere in lui l'analista ed il pensatore, il teorico ed il pratico, l'inventore ed il capo-scuola. Come inventore, come teorico, come analista egli è da lodarsi e da ammirarsi; come capo-scuola non si ha che a biasimarlo; come pratico è stato del tutto negativo; come pensatore poi si poteva dubitare che egli non sapesse ciò che si faceva. Sinceramente devoto alle idee cattoliche, nella scienza non ha introdotto che dottrine negative». Il TERQUEM, nelle *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1857), dice: «Mathématicien dans le sens plus large, l'ésprit de Cauchy n'était pas cantonné dans un coin de la science. Partout il fondait, partout il créait, partout il était au premier range».

Il VALSON, nel suo studio citato sopra Cauchy così dice: «Cauchy alliat un grand caractère à une grande modestie; il a toujours fait ce qu'il croyait être son dévoir, sans crainte, sans se préoccuper de ses intérêts; il a aussi simplement que noblement réfusé le serment a Louis-Philippe (1839) et à Napoléon III (1852); il a tenu jusqu'a sa dernière heure celui qu'il avait antérieurement prête à la branche ainée des Bourbons. De rares faveurs lui ont été offerts, il n'en a jamais demandé. Il est resté invariablement attaché à sa foi religieuse, sans en faire montre, ni la cacher, et sans jamais se laisser aller à blesser des sentiments opposés. Il n'a ni recherché, ni refusé les honneurs.... Quoique peu riche, il dépensait beaucoup, en oeuvres charitables.... Sa vie entiére proteste contre l'accusation d'avidité». Certo il Cauchy fece male ad accettare la cattedra che era stata tolta ingiustamente al grande Monge; ma egli l'accettò, dice il Valson, più per obbedire ad un comando del re, che per altro. Come accademico fu accusato di essere parziale nelle sue relazioni; ma ciò non può asserirsi con sicurezza (Nota del T.).

A Cauchy e Gauss noi dobbiamo una trattazione scientifica delle serie con un numero infinito di termini; per primo diede regole generali per investigarne la convergenza o la divergenza, le quali furono poi generalizzate da J. Bertrand (1822-1900), segretario dell'Accademia delle Scienze, A. Pringsheim ed ampliate considerevolmente da E. Borel, G. Servant ed altri membri della attuale scuola matematica francese. Ben pochi erano i lavori precedenti che contenessero qualche discussione intorno alle limitazioni delle serie da adoperarsi. Si dice che Laplace, il quale era presente quando Cauchy lesse la sua prima memoria su un tale argomento, fu così impressionato dagli esempi sul pericolo che si correva impiegando le serie senza un previo e rigoroso studio della loro convergenza, che mise da banda il lavoro che allora aveva per mano e non ricevè più alcuna visita onde verificare la validità delle dimostrazioni date nei primi volumi della sua *Mécanique céleste*; si accertò così che, per fortuna, non era caduto in alcun errore. La teoria delle serie e il trattamento delle nozioni fondamentali del calcolo infinitesimale, che si trovano allora nella maggior parte dei trattati in uso, eran basati sui lavori di Eulero; ed a chiunque fosse abituato a metodi rigorosi apparivano non esenti da obiezioni; uno dei meriti principali di Cauchy è di aver collocati questi soggetti su fondamenti sicuri.

Avvenuta la restaurazione (1816) l'Accademia francese fu *purificata* e, ad onta dell'indignazione e dello scherno di tutti gli scienziati di Francia, Cauchy accettò la cattedra rimasta vacante coll'espulsione di Monge. Egli fu nominato ad un tempo professore alla Scuola Politecnica; e le lezioni che vi diede sull'Analisi algebrica, sul calcolo e sulla teoria delle curve furon pubblicate come libri di testo. La rivoluzione del 1830 lo costrinse all'esilio; allora fu nominato prima professore a Torino, d'onde si recò a Praga per imprendere colà la educazione del Conte di Chambord. Ritornò in Francia nel 1837; nel 1848 e di nuovo nel 1851 (con speciale ordine dell'imperatore Napoleone III) gli fu concessa una Cattedra di matematica, dispensandolo dall'obbligo di prestar giuramento di fedeltà.

La sua attività fu prodigiosa; e dal 1830 al 1859 pubblicò nelle *Memorie dell'Istituto di Francia* o nei *Comptes Rendus* da 600 a 700 memorie e circa 150 relazioni. In alcune di esse è troppo visibile la fretta febbrile con cui furono scritte; mentre a molte di esse nuocciono l'oscurità, le ripetizioni di risultati già noti ed anche qualche errore. Fra le più importanti sue ricerche ricorderò la discussione dei criteri per la convergenza delle serie; la determinazione del numero delle radici reali ed immaginarie di ogni equazione algebrica; il metodo per calcolare approssimativamente queste radici; la teoria delle funzioni simmetriche delle radici delle equazioni di grado qualunque; la valutazione *a priori* di una quantità minore della differenza minima fra le radici di un'equazione; finalmente le memorie sui determinanti (1841), le quali cooperarono a renderli di uso generale, e le ricerche sulla teoria dei numeri. Cauchy fece anche qualche tentativo per ridurre a scienza gli artifizi per determinare gl'integrali definiti. La regola per determinare i valori principali degli integrali fu enunciata da lui; il calcolo dei residui è di sua invenzione; la sua dimostrazione del teorema di Taylor sembra abbia avuto origine da uno studio che egli fece sulla doppia periodicità delle funzioni ellittiche; sono interamente dovuti a Cauchy i procedimenti per mostrare l'analogia fra due differenti risultati col dare valori immaginarî alle variabili indipendenti a cui prima si erano attribuiti soltanto valori reali. Diede pure un metodo analitico diretto per determinare le diseguaglianze planetarie di lungo periodo; nella fisica scrisse molte memorie riguardanti le onde e la quantità di luce riflessa dalle superficie metalliche e così pure altre riguardanti l'ottica [1].

---

[1]) CAUCHY, incoraggiato da Laplace e Poisson, pubblicò nel 1822 il suo celebre *Cours d'Analyse algébrique de l'école royale polytechnique*, opera divenuta subito classica.

Argand. — Parlerò qui brevemente di *Giovanni Roberto Argand*; egli nacque a Ginevra il 18 luglio 1768 e morì a Parigi il 13 agosto 1822. In un *Essai*, pubblicato nel 1806, egli diede la rappresentazione di un numero complesso e l'applicò a dimostrare che ogni equazione algebrica ha una radice; questo lavoro precedè le memorie di Cauchy nello stesso argomento; ma l'*Essai* non richiamò su di sè grande attenzione, allorchè fu pubblicato. Una prima dimostrazione che $\sqrt{-1}$ può essere adoprata per indicare la perpendicolarità nello spazio a due dimensioni, ed anche un tentativo di generalizzare questa idea allo spazio a tre dimensioni, con un metodo simile a quello dei quaternioni, era stata data nel marzo 1797 da C. Wessel in una memoria, presentata all'Accademia delle Scienze di Copenhagen; altre memorie sullo stesso argomento furono pubblicate nelle *Philosophical Transactions* nel 1806 e da H. Kühn nelle *Memorie* dell'Accademia di Pietroburgo per l'anno 1750 [1]).

Hamilton [2]). — È opinione di alcuni matematici che la storia dei *quaternioni* sarà considerata come una delle grandi scoperte del secolo XIX; essa è dovuta a sir *William Rowan Hamilton*, il quale nacque da genitori scozzesi a Dublino il 24 agosto 1805 e vi morì il 2 settembre 1865. La sua istruzione, impartita in casa, pare sia stata molto saltuaria; sotto la sorveglianza di uno zio, che era un buon glottologo, egli si dedicò dapprima agli studî delle lingue; a sette anni leggeva con facilità il latino, il greco, il francese ed il tedesco; all'età di tredici anni poteva vantarsi di possedere tante lingue quanti erano gli anni che aveva. Fu verso quest'epoca che gli cadde tra mano una copia dell'*Aritmetica universale* di Newton; fu dessa che lo introdusse nello studio dell'analisi moderna; subito dopo s'impadronì degli elementi della geometria analitica e del calcolo infinitesimale; poi lesse i *Principia* ed i quattro volumi sino allora pubblicati della

---

[1]) Vedi W. W. BEMAN, nei *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science*, vol. XLVI, 1897.

[2]) Vedi la vita di Hamilton (con una bibliografia dei suoi scritti), di R. P. GRAVES, 3 volumi, Dublino, 1882-89; i fatti principali si leggono in un articolo nella *North British Review* del 1886.

Mécanique céleste di Laplace. Scoprì un errore in quest' ultima opera e la memoria che scrisse nel 1823 a questo proposito lo segnalò subito ai matematici. Nell'anno seguente entrò nel Collegio della Trinità di Dublino; la sua carriera universitaria è unica, poichè, resasi vacante nel 1827 la Cattedra di astronomia quando egli era ancora studente, venne spinto a concorrervi e fu eletto ad unanimità, essendo sottinteso che gli si sarebbe concesso di continuare i propri studî.

La sua prima memoria riguardava l'ottica; fu scritta nel 1823 e pubblicata nel 1828 col titolo di un *Theory of Systems of Rays*; vi furono poi aggiunti nel 1831 e 1832 due supplementi; nell' ultimo di questi si predice il fenomeno della rifrazione conica. A questa tenne dietro (1824) una memoria *On the principle of Varying Action* e (1834, 1836) altre memorie che trattavano di un *General Method in Dynamics* ed in cui la meccanica teorica venne trattata come un ramo di matematica pura. Le sue *Lectures on Quaternions* furono pubblicate nel 1852; alcuni de' risultati da lui ottenuti su questo argomento pare che fossero stati scoperti prima da Gauss; ma non erano noti e non furono pubblicati se non molto tempo dopo la morte di Hamilton. Fra le altre sue memorie ricorderò specialmente: quella sulla forma della soluzione di una equazione algebrica generale di 5° grado, che confermò la conclusione a cui erano giunti il Ruffini e Abel, cioè che non poteva essere ottenuta mediante le operazioni e funzioni più elementari; quella sulle funzioni fluttuanti; quella sull'odografo; e da ultimo quella sulla soluzione numerica delle equazioni differenziali. I suoi *Elements of Quaternions* furono pubblicati dopo la sua morte (1866): un' autorità competente dice, rispetto a quest'opera, che i metodi di analisi ivi esposti mostrano quanto grande sia stato il progresso dovuto ad essi in confronto a quelle della geometria analitica, il qual progresso può paragonarsi a quello conseguito coi metodi della geometria analitica su quelli della geometria di Euclide. In epoca più recente l'argomento è stato più ampiamente studiato da P. C. Tait (1831-1901) di Edimburgo, da A. Macfarlane in America e da C. Joly a cui si deve un *Manual of Quaternions* (London, 1906).

Nelle sue publicazioni Hamilton fu molto scrupoloso e lasciò

un' immensa collezione di manoscritti, che sono ora conservati nella Biblioteca del Collegio della Trinità di Dublino; è da sperarsi che alcuni saranno pubblicati.

Grassmann [1]. — L'idea dell'algebra non-commutativa venne in mente a Grassmann circa la stessa epoca che ad Hamilton. *Ermanno Günther Grassmann* nacque a Stettino il 15 aprile 1809 e vi morì il 26 settembre 1877. Fu professore nel Ginnasio di Stettino. Le sue ricerche sull'algebra non-commutativa si trovano nella sua *Ausdehnungslehre*, pubblicato per la prima volta nel 1844 e poi totalmente rifatta nel 1862. In tempi recenti quest'opera esercitò grande influenza, specie sul continente, ove i metodi di Grassmann furono generalmente seguiti a preferenza di quelli di Hamilton. Le ricerche di Grassmann furono proseguite ed ampliate specialmente da V. Schlegel e G. Peano.

Lo studio scientifico dei principî fondamentali dell'algebra, iniziato da Hamilton e Grassmann, fu continuato da De Morgan e Boole ed in seguito ancora più ampiamente da H. Hankel (1839-1873) nella sua opera sui numeri complessi (1867) e in altra direzione, da G. Cantor nelle sue memorie sulla teoria degli irrazionali (1871); ma questa indagine è così tecnica che non posso se non accennarvi; mi limiterò a dire qualche cosa intorno a Boole e De Morgan.

Boole. — *Giorgio Boole*, nato a Lincoln il 2 novembre 1815 e morto a Cork l' 8 dicembre 1864, inventò da sè un sistema di algebra non commutativa. Nelle sue memorie sulle trasformazioni lineari egli svolse parte della teoria degl' invarianti. Il suo volume *Finite Differences* è tuttora un'opera classica sull' argomento. Giova anche ricordare che il Boole fu uno dei creatori della logica matematica.

De Morgan [2]. — *Augusto De Morgan* nacque in Madura (Madras) nel giugno 1806 e morì a Londra il 17 marzo 1871;

---

1) Vedi la raccolta delle sue *Opere* in 3 volumi, edita da F. ENGEL, ed altri. (Lipsia, 1894, 1902 e segg.),

2) La sua *Vita* fu scritta dalla sua vedova S. E. MORGAN, Londra, 1882.

studiò al Collegio della Trinità a Cambridge. Nel 1828 divenne professore nella Università che era stata da poco fondata a Londra; è quella che ora chiamasi Collegio Universitario. In questa Università (tolti i cinque anni 1831-1835) egli insegnò senza interruzioni fino al 1867, ed esercitò, per mezzo dei suoi lavori e degli allievi, una grande influenza sui matematici inglesi odierni. La Società Matematica di Londra fu, si può dire, creata da lui; inoltre egli ebbe parte importante nella compilazione degli Atti della R. Società Astronomica.

Fu assai versato nella filosofia e nella storia delle matematiche; i suoi studî in proposito si trovano in articoli staccati, dei quali mi sono largamente servito in questo libro. Sono meritevoli di essere particolarmente ricordati: le sue memorie sui fondamenti dell'algebra (*Cambridge Philosophical Transactions*, vol. VIII e IX); il trattato di calcolo differenziale, pubblicato nel 1842, opera di gran valore e notevole per la teoria rigorosa sulle serie infinite; e le note sul calcolo delle funzioni e sulla teoria delle probabilità. La sua memoria sul calcolo delle funzioni contiene uno studio dei principî della logica matematica; le applicazioni da lui fattene riguardano la soluzione delle equazioni funzionali, piuttosto che la teoria generale delle funzioni.

Galois [1]. — Un nuovo ramo d'algebra — la teoria dei gruppi di sostituzioni — fu concepito da *Evaristo Galois*, che prometteva di divenire uno dei più originali matematici del secolo XIX; nato a Parigi il 26 ottobre 1811, morì in duello, per una causa futilissima, il 30 marzo 1832, nell' immatura età di circa 20 anni.

La teoria moderna dei gruppi ha modificata profondamente la trattazione della teoria delle equazioni. Essa ha avuto origine dai lavori di Galois, Cauchy e J. A. Serret (1819-1885), i quali si occuparono soprattutto di gruppi di sostituzioni finiti discontinui. Questo indirizzo di ricerche è stato proseguito da C. Jordan e da E. Netto. Il problema di operare con gruppi discontinui, con applicazioni alla teoria delle funzioni, è stato ulteriormente studiato (tra gli altri) da F. G. Frobenius, F. Klein e W. Burnside.

1) Vedi l'ediz. delle sue *Opere* con una introduzione di E. PICARD, Parigi, 1897.

Cayley [1]. — Un altro inglese, che sarà sempre considerato come uno dei più grandi matematici del fecondo secolo XIX, è *Arturo Cayley*. Egli nacque a Surrey il 16 agosto 1821 e, dopo avere studiato al Collegio della Trinità di Cambridge, si dedicò al fôro. Ma il suo sguardo era sempre volto verso la matematica; nel 1863 fu eletto professore Sadleriano a Cambridge, ove passò il rimanente della sua vita e vi morì il 26 gennaio 1895.

Gli scritti di Cayley trattano le più importanti parti della moderna matematica pura. Ho già parlato dei suoi lavori riguardanti la partizione dei numeri e le funzioni ellittiche, studiate dal punto di vista di Jacobi; gli altri lavori sulle funzioni ellittiche trattano specialmente la teoria della trasformazione e l'equazione modulare. Tuttavia è specialmente per le sue ricerche nella geometria analitica e nell'algebra superiore che egli merita di essere ricordato.

Nella geometria analitica il concetto di ciò, che chiamasi (forse non molto felicemente) l'*assoluto*, è dovuto a Cayley. « Questa teoria, come dichiara egli stesso, infatti considera le proprietà metriche di una figura non come le proprietà della figura considerata da sè, ma come quelle che si hanno allorchè si considera in relazione ad un'altra figura, che in genere è una conica, in conseguenza chiamata *assoluto* »; le proprietà metriche possono essere sottoposte ad una trattazione descrittiva. Cayley contribuì grandemente allo sviluppo della teoria generale delle curve e delle superficie; tutta l'opera sua si basa sull' ipotesi della connessione necessariamente stretta esistente fra le operazioni algebriche e quelle geometriche.

Nell'algebra superiore la teoria degl' invarianti è in gran parte dovuta a Cayley; le sue dieci memorie classiche sulle forme binarie e ternarie, e le sue ricerche sulle matrici e sull'algebra non commutativa segnano un'epoca nel progresso della scienza.

Sylvester. — Un altro professore della stessa epoca fu *Giacomo Giuseppe Sylvester*, nato a Londra il 3 settembre 1814 e morto il 15 marzo 1897. Egli pure studiò a Cambridge, ove fece amicizia

1) La raccolta delle sue *Opere* in 13 volumi fu pubblicata a Cambridge (1889-98).

con Cayley, amicizia che durò per tutta la sua lunga vita. Come quest'ultimo, egli pure si diede al fôro; ciò non ostante si dedicò tutto allo studio della matematica. Occupò successivamente cattedre di matematica a Woolwich, Baltimora ed Oxford. Aveva una costituzione robusta ed era un insegnante di grande iniziativa; ma è difficile riassumere la sua opera scientifica, perchè essa è estesissima, sparpagliata e saltuaria.

Sylvester scrisse pregevoli memorie nella teoria dei numeri, le quali riguardano la distribuzione dei numeri primi e la partizione dei numeri. In analisi scrisse sul calcolo e sulle equazioni differenziali. Ma forse il suo studio favorito era l'algebra superiore; fra le sue molte memorie in questo ramo ricorderò particolarmente quelle sulle forme canoniche, sulla teoria dei controvarianti, sui reciprocanti, o invarianti differenziali, e sulla teoria delle equazioni (specialmente sulla regola di Newton). Posso anche aggiungere che egli creò il linguaggio e le notazioni di molte parti di quei soggetti che ebbe a studiare.

I lavori di Cayley e Sylvester sono fra loro in vivo contrasto: quelli di Cayley sono ordinati, precisi, accurati nella forma e compiuti; quelli di Sylvester sono impetuosi, imperfetti, ma non meno vigorosi ed interessanti. Entrambi questi matematici trovarono grandissima attrattiva nello studio dell'algebra superiore, e ad entrambi è gran in parte dovuta la forma odierna di essa.

Lie [1]. — Un altro grande analista del XIX secolo, di cui parlerò qui, è *Marius Sophus Lie*; nacque il 12 dicembre 1842 a Nordfjordeid presso Floro (Norvegia) e morì a Christiania il 18 febbraio 1899. Studiò a Christiania, poi ottenne un posto di perfezionamento all'estero; durante i suoi viaggi fece la conoscenza di Klein, Darboux e Jordan, alla cui influenza è dovuta gran parte della sua carriera.

Nel 1870 egli scoprì la trasformazione mediante la quale una sfera si può far corrispondere ad una retta, e però i teoremi sui sistemi di rette possono trasformarsi in altri riguardanti i sistemi

[1] Vedi il discorso necrologico di A. R. Forsyth nel *Year Book of the Royal Society*, Londra, 1901, riprodotto come esordio di *The collected mathematical Papers* (4 vol., Cambridge, 1904-12).

di sfere e viceversa. A questa seguì una memoria sulla teoria delle trasformazioni di contatto nello spazio.

Nel 1872 fu nominato professore a Christiania. Le sue prime ricerche, che fece qui, riguardarono le relazioni esistenti tra equazioni differenziali e trasformazioni infinitesime. Esse lo condussero naturalmente alla teoria generale dei gruppi continui di infinite trasformazioni; i risultati delle sue ricerche su questo argomento si trovano nella sua *Theorie der Transformations-gruppen* scritta in collaborazione con F. Engel, Lipsia, 3 volumi (Leipzig, 1888-1893) e le sue conclusioni furono pubblicate col concorso di G. Scheffers, nel 1893. Verso il 1879 Lie volse la sua attenzione alla geometria differenziale; una trattazione organica, se non compiuta, delle sue idee in proposito si trova nel vol. I, unico pubblicato, della *Geometrie der Berührungstransformationem*, scritta pure col concorso dello Scheffers.

Lie sembra sia stato offeso ed esacerbato dalla nessuna estimazione, in cui gli sembrava fossero generalmente tenute le sue ricerche. La sua reputazione venne, ma lentamente. Nel 1886 egli fu chiamato a Lipsia, come successore di F. Klein, e nel 1898 ritornò a Christiania, ove era stata creata una cattedra per lui. Nonpertanto egli continuava a meditare sulle cause dell' ingiusta trascuratezza del passato e la fortuna degli ultimi dieci anni di sua vita fu molto turbata dal ricordo delle amarezze sofferte [1].

Hermite. — Un altro grande algebrista dello stesso secolo fu *Carlo Hermite*, nato a Dienze in Lorena il 24 dicembre 1822 e morto a Parigi addì 14 gennaio 1901. A partire dal 1869 fu professore alla Sorbona e sia con l' insegnamento diretto, sia attraverso ai propri allievi esercitò una profonda influenza sui matematici odierni. Egli ha quindi un posto eminente tra i professori più distinti di quella grande Scuola.

Ancora alunno della Scuola Politecnica, scrisse a Jacobi intorno alle funzioni abeliane, riscotendone ben meritati elogi. Le

[1] Un elenco completo dei lavori di Sophus Lie si trova in appendice alla *Necrologia di Sophus Lie*, di Corrado Segre, nel *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche*, di G. Loria, anno II, 1899.

prime pubblicazioni di Hermite vertevano in gran parte sulla trasformazione di quelle funzioni, problema che egli risolse finalmente con l'aiuto delle funzioni modulari. Egli applicò poi le funzioni ellittiche alla risoluzione delle equazioni di 5° grado e all'integrazione dell'equazione differenziale di Lamé.

Scelse poi come argomento dei propri studî le frazioni continue algebriche, e ciò lo condusse (1873) alla celebre dimostrazione del teorema fatto che e non può essere radice di un'equazione algebrica; onde è un numero trascendente. In modo simile F. Lindemann dimostrò nel 1882 la trascendenza di π. Tali dimostrazioni furono poi perfezionate e semplificate da K. Weierstrass, D. Hilbert e F. Klein.

Egli si è anche occupato della teoria dei covarianti associati nel campo binario e della teoria delle forme ternarie. Hermite conservò sino al termine della propria vita la sue doti creatrici nel calcolo integrale e nella teoria delle funzioni.

Il numero dei matematici, che si occuparono di algebra superiore (compresa la teoria delle forme e la teoria delle equazioni) è sì grande, che riesce difficile riassumerne i risultati e ricordarli individualmente.

La convergenza della serie è stata studiata da J. L. Raabe (1801-1859) di Zurigo, J. Bertrand (1822-1900), E. E. Kummer (1810-1883); da U. Dini (1345-1918), da A. Pringsheim [1]) e da sir Giorgio Gabriele Stokes (1819-1903) [2]) di Cambridge, a cui è dovuto il ben noto teorema sui valori critici delle somme delle serie periodiche.

Qui, passando, è mio dovere di citare i lavori di B. Riemann, G. G. Stokes, H. Hankel e G. Darboux sopra gli sviluppi asintotici e di H. Poincaré sulle applicazioni degli stessi alle equazioni differenziali; nonchè di quelli di E. Borel e E. Cesarò sopra le serie divergenti.

Sulla teoria dei gruppi di sostituzioni ho già parlato dei lavori compiuti da una parte da Galois, Cauchy, Serret, Jordan e

1) Sulle ricerche di Raabe, Bertrand, Kummer, Dini e Pringsheim vedi il *Bulletin of the New-York (American) Mathematical Society*, vol. II, 1892-93, pp. 1-10.

2) La raccolta delle *Memorie di matematica e di fisica* di STOKES fu pubblicata a Cambridge nel 1880-1907.

Netto, e dall'altra da Frobenius, Klein e Burnside in relazione coi gruppi discontinui, e da quelli di Lie sui gruppi continui.

Ricorderò inoltre: C. W. Borchardt [1]) (1817 1880) di Berlino, che studiò specialmente le funzioni generatrici nella teoria delle equazioni e le medie aritmetico-geometriche; C. Hermite, di cui ho parlato prima; Enrico Betti di Pisa e F. Brioschi di Milano, che entrambi studiarono le forme binarie; S. H. Aronhold di Berlino (1819-1884) che si occupò dei metodi simbolici nella teoria delle forme; P. A. Gordan [2]) di Erlangen, che ha studiato la teoria delle equazioni, le teorie delle forme e dei gruppi, e dimostrò (contrariamente all'opinione di Cayley) che una forma binaria ammette solo un numero finito di forme invariantive; R. F. A. Clebsch [3]) (1837-1872) di Gottinga, che in modo originale trattò la teoria delle forme binarie in alcune memorie ed in un trattato pubblicato nel 1872; egli studiò anche le funzioni abeliane; P. A. Mac Mahon, ex-ufficiale nell'esercito inglese, si è occupato delle relazioni tra le funzioni simmetriche e gl'invarianti e covarianti delle forme binarie e di analisi combinatoria; Felice Klein di Gottinga (1849-1925), che, oltre alle ricerche già indicate sulle funzioni e nei gruppi discontinui finiti, ha studiato le equazioni differenziali; A. R. Forsyth di Cambridge, che ha svolto la teoria degl'invarianti e la teoria generale delle equazioni differenziali; P. Painlevé di Parigi, che ha studiato la teoria delle equazioni differenziali; e da ultimo D. Hilbert di Gottinga, che ha ottenuti alcuni risultati fondamentali della teoria delle funzioni omogenee con quante si vogliono variabili. (Cfr. F. Meyer, *Rapporto sullo stato presente della teoria degli invarianti*, tradotto da G. Vivanti (Giorn. di matem., T. XXXII, 1894).

Un resoconto sugli scritti recenti di algebra superiore non sarebbe compiuto se non contenesse un cenno dell'ammirabile opera di G. Salmon, prevosto del Collegio della Trinità a Du-

1) Una edizione di tutte le sue *Opere*, dovuta a G. HETTNER, fu pubblicata a Berlino nel 1888.

2) Un'edizione completa delle sue lezioni sugl'invarianti per cura di G. KERSCHENSTEINER doveva essere pubblicata a Lipsia; ma non ne furono pubblicati che due volumi (1885, 1887), relativi ai determinanti e le forme binarie.

3) Un compendio della vita e delle opere di Clebsch è stampato nei *Mathematische Annalen*, 1873, vol. VI, pp. 197-202; e 1874, vol. VII, pp. 1-55.

blino, intitolata *Higher Algebra* e del *Cours d'Algèbre superieure* di A. Serret [1]), già professore alla Sorbona di Parigi (1819-1898), in cui sono esposte le principali scoperte dei rispettivi autori. Un ammirabile sommario storico della teoria delle funzioni di variabili complesse leggesi nelle già citate *Vorlesungen über die complexen Zalhen* (Lipsia, 1867) di H. Hankel.

Geometria analitica. — Conviene ora di richiamare l'attenzione dei lettori sopra un'altra parte della matematica pura, la geometria analitica, che è stata attivamente coltivata in questi ultimi anni. Essa è stata studiata da una folla di matematici moderni; io però non voglio descrivere tutte le loro ricerche e mi accontenterò di parlare solo dei matematici seguenti.

Giacomo Booth [2]) (1806-1878) e Giacomo Mac-Cullagh [3]) (1809-1846), entrambi di Dublino, furono i primi matematici inglesi del secolo XIX che si occuparono di argomenti di geometria analitica; ma essi trattarono in gran parte argomenti già studiati da altri. Concetti nuovi furono introdotti nella geometria da Giulio Plücker [4]) (1801-1868) di Bonn, che si dedicò prima specialmente allo studio delle curve algebriche (*Analytistche geometrische Enkwickelungen*, Essen 1828-31); *System der analytischen Geometrie*, 1885; *Theorie der algebraischen Curven*, 1839; *System der Geometrie des Raumes*, 1846); son celebri le *formule di Plücker* riguardanti le singolarità delle curve. Nel 1847 scambiò la cattedra di matematica con quella di fisica e le sue successive ricerche riguardarono gli spettri ed il magnetismo. Però, dopo quasi venti anni nei quali aveva abbandonato lo studio della geometria per darsi a quello della fisica, ritornò alla scienza che dapprima gli aveva procacciato la fama; e nel 1865 concepì una geometria dello spazio avente per elemento la retta, idea che diede origine all'opera intitolata *Neue Geometrie des Raumcs gegründet auf die Betrachtung der geraden Linien als Raumelement* (Lipsia, 1868-69). Però le sue prime comunicazioni sull'argomento, che contengono i soli enunciati, furono fatte alla Società Reale di Londra (*Philosophical Transactions*, 1865, pag. 725, e 1866 pag. 361). Lo stesso argomento fu poi investigato da G. Battaglini (1826-1892), F. Klein e S. Lie [1]). Di recente fu esposto da R. Sturm (*Die Gebilden I und II Grades der Linien geometrie*, 3 vol., Leipzig, 1892-96) e da C. M. Jessop (*Treatise on the Linecomplex*, Cambridge, 1903).

1) Questi ha poi pubblicato un corso di calcolo infinitesimale (2 volumi) molto noto ed un trattato di trigonometria assai stimato.

2) Vedi il suo *Treatise on some new Geometrical Methods*, Londra, 1873.

3) Vedi la raccolta delle sue *Opere*, edita da JELLETT e HAUGHTON, Dublino, 1880.

4) La raccolta delle *Opere* di PLÜCKER, in 2 volumi, edita da A. SCHOENFLIES e F. POCKELS, fu pubblicata a Lipsia nel 1895 e 1896.

La maggior parte delle memorie di geometria analitica di A. Cayley e di H. Smith riguardano la teoria delle curve e delle superficie; le più notevoli fra quelle di L. O. Hesse (1811-1874) concernono la geometria delle curve piane; quelle di G. Darboux riguardano la geometria delle superficie; e quelle di G. H. Halphen di Parigi si occupano delle singolarità delle superficie e della classificazione delle curve sgembe. Le singolarità delle curve e delle superficie sono state pure considerate da H. G. Zeuthen di Kopenhagen, e da H. C. H. Schubert di Amburgo.

La teoria delle curve sghembe è stata studiata da M. Nöther di Erlangen e G. H. Halphen, mentre R. F. A. Clebsch di Gottinga ha applicato alla geometria le funzioni ellittiche ed il teorema di Abel. Fra le più recenti opere di geometria analitica citiamo le *Leçons sur la théorie générale des surfaces* di G. Darboux e le *Leçons sur les systemes orthogonaux et les coordonnées curvilignes* dello stesso; e le *Vorlesungen über Geometrie* di R. F. A. Clebsch, edite da Lindemann [2]); finalmente le *Conic sections*, la *Geometry of three Dimensions* e le *Higher Plane Curves* di G. Salmon [3]), che comprendono le principali scoperte di questi matematici.

Finalmente ricorderò l'estensione della geometria analitica che si apprende dagli scritti (1844 e 1862) di H. Grassmann, di G. F. B. Riemann (1854), di A. Cayley ed altri, colla introduzione dell'idea dello spazio ad n dimensioni, dalla quale estensione traggono origine i lavori di G. Veronese, C. Segre, G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi e molti altri.

1) Maggiori particolari storici sull'argomento si trovano in G. LORIA, *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (3ª edizione, Torino, 1907).

2) Tradotte in francese da A. BENOIST.

3) Trattati tradotti in tedesco dal FIEDLER di Zurigo e di molto ampliati.

Analisi. — Fra quelli che hanno esteso il campo dell'analisi (compreso il calcolo infinitesimale e le equazioni differenziali) e che è difficile poter mettere in qualcuna delle categorie enumerate più sopra, vi sono i seguenti, che io dispongo in ordine alfabetico:

Appell, Bertrand, Boole, Cauchy, Darboux, Forsyth, Frobenius, Lazaro Fuchs (1833 1902), Halphen, Jacobi, C. Jordan, Königsberger, Sophie Kowalwski (nata il 15 gennaio 1850 e morta il 18 febbraio 1891; vedi il *Bulletin des sciences mathématiques* vol. XV, pp. 212-220), Lie, Poincaré, Riemann, Schwarz, Sylvester e K. Weierstrass, il quale ha ampiamente studiato il calcolo delle variazioni.

L'argomento delle *equazioni differenziali* meriterebbe di venire staccato e trattato da sè. Ma è tanto vasto che è difficile — direi impossibile — descrivere in un solo paragrafo le recenti relative ricerche. Basterà rimandare il lettore alla mirabile serie di trattati (sette volumi) sull'argomento di A. R. Forsyth, che porgono un quadro completo dell'argomento. Recentemente attrasse grande attenzione la nuova teoria delle equazioni integrali, originata dall'inversione degli integrali definiti. Un semplice esempio ne fu dato da Abel; ma poi il tema fu trattato da V. Volterra, J. Fredholm, D. Hilbert e moltissimi altri geometri.

Geometria sintetica. — I matematici che ho sopra ricordati generalmente si occuparono di analisi. Ora parlerò di alcuni dei più importanti lavori del secolo XIX riguardanti la Geometria *sintetica* [1]. Si può dire che la geometria sintetica moderna tragga tutte le sue origini dalle opere di Monge (1800), di Carnot (1803) e di Poncelet (1822); ma questi geometri accennarono appena alla grande generalizzazione che essa era poi destinata a ricevere in Germania per opera principalmente dei celebri matematici Steiner e Staudt.

1) L'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie* di M. CHASLES, Parigi, 2ª ediz., 1875, il *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Paris, 1870 della stesso, ed il discorso *Die Synthetische Geometrie in Alterthum und in der Neuzeit* di Th. REYE, Strasburgo, 1886, contengono interessanti sommari della storia della geometria; però l'opera di Chasles è scritta da un punto di vista esclusivamente francese.

Steiner [1]. — *Giacomo Steiner* « il più grande geometra che sia apparso dall'epoca di Apollonio in poi » nacque a Utzensdorf (cantone di Berna) il 18 marzo 1796 e morì a Berna il 1° aprile nel 1863. Suo padre era contadino ed il figlio non ebbe modo di imparare a leggere e scrivere prima dell'età di 14 anni. Si recò poi ad Heidelberg e quindi a Berlino, mantenendosi da sè stesso col dare lezioni private. La sua *Systematische Entwickelungen* fu pubblicata nel 1832 e gli assicurò subito la fama; esso contiene uno studio compiuto del principio di dualità e delle relazioni proiettive delle punteggiate e dei fasci ecc., fondato sulla considerazione di proprietà metriche (doppi rapporti). Grazie all'influenza di Crelle, Jacobi e A. von Humboldt, che furono ammirati del valore di questa opera, fu creata nell'Università di Berlino una cattedra di geometria per Steiner, il quale la occupò, in qualità di professore straordinario, fino alla morte. Le più importanti delle successive sue ricerche sono contenute in memorie che comparvero per la prima volta nel *Journal de Crelle*; queste si riferiscono principalmente alle proprietà delle curve e delle superficie algebriche in generale, delle pedali in particolare, ed ai massimi e minimi; le argomentazioni sono puramente geometriche. Le opere di Steiner sono a ragione considerate come classiche nella geometria sintetica moderna.

Von Staudt. — Un sistema di geometria pura, affatto diverso da quello di Steiner, fu proposto da *Carlo Giorgio Cristiano von Staudt*, nato a Rothenburg il 24 gennaio 1798 e morto il 1° giugno 1867, professore di matematica ad Erlangen. Nella sua *Geometrie der Lage* (Geometria di posizione) pubblicata nel 1847 [2], egli formulò un sistema di geometria concepito indipendentemente da ogni idea di numero e di grandezza; ma, ad onta della forma astratta del suo metodo, egli riuscì a stabilire le proprietà proiettive non-metriche delle figure; studiò i punti, la retta ed

1) La raccolta delle *Opere* di STEINER, edita da WEIERSTRASS, fu pubblicata in due volumi, Berlino, 1881-82. Un ragguaglio della sua vita è contenuto nell'*Erinnerung an Steiner* di C. F. GEISER, Schaffaussen, 1874 (trad. italiana nel volume VII della 2ª Serie degli *Annali di matematica*).

2) Tradotta in italiano da M. PIERI, Torino, 1887.

i piani immaginari e giunse anche ad una definizione geometrica di numero; questi concetti furono ulteriormente svolti nelle sue *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1856-1860. Questa geometria è singolare e splendida; su di essa Culmann fondò la sua statica grafica.

Come testi comunemente usati di geometria sintetica menzionerò: il *Traité de géométrie supérieure* di Chasles, 1852; le *Vorlesungen über synthetische Geometrie*, di J. Steiner, 1867; *gli Elementi di geometria proiettiva* di Luigi Cremona (nato a Pavia il 7 dicembre 1830, morto a Roma il 10 giugno 1903), tradotti in inglese da C. Leudesdorf, Oxford, 2ª ediz., 1893; e la *Geometrie der Lage*, di Th. Reye, Hannover, 1866-1868, tradotta in inglese da T. F. Holgate, New-York, part I, 1898. Un'ottima esposizione della teoria moderna geometrica delle curve piane e delle superficie algebriche si ha nella *Introduzione aa una teoria geometrica delle curve piane* (Bologna, 1862), e nei *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* (Id., 1867) di L. Cremona (1830-1903).

Va notato che le differenze e nei metodi e nelle idee, già osservate fra la geometria analitica e la geometria sintetica, tendono a scomparire col loro ulteriore progresso.

Geometria non-euclidea [1]. — È opportuno dire qui qualche cosa intorno alle ricerche recenti riguardanti i fondamenti della geometria.

La questione della verità delle ipotesi comunemente ammesse nella nostra geometria era stata considerata da G. Saccheri (nato a Sanremo il 5 settembre 1667, morto a Milano il 25 ottobre 1733) [2] sino dal 1733, ed in epoca più recente fu studiata da Nicola Jvonowitch Lobatschewsky (professore a Kasan, nato a Nijni-Novgorod nel 1792 e morto a Kasan il 12 febbraio 1856) nel 1826 e di nuovo nel 1840; da Gauss forse circa il 1792, certamente nel 1831 e nel 1846, e da Giovanni Bolyai (nato a Klau-

1) Vedi per la preistoria della geometria non-euclidea, ENGEL und STÄKEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig, 1896 ed un rapporto di G. B. HALSTED inserito in *Science*, Nuova Serie, vol. X, New York, 1899, pp. 545-557.

2) Vedi GIROLAMO SACCHERI, *Euclides ab omni naevo vindicatus etc.*, Milano, 1833 su cui E. BELTRAMI ha richiamato l'attenzione dei matematici (*Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, 1889).

senburg nel 1802 e morto a Maros-Vasarhely nel 1860) nel 1832 nell'appendice al primo volume del *Tentamen* di suo padre Volfango. Ma fu la memoria di Riemann (1854) che richiamò la generale attenzione sulla geometria non-euclidea; la teoria è stata di poi estesa e semplificata da diversi, specialmente da A. Cayley, Eugenio Beltrami [1] (1835-1900), Ermanno Ludovico Ferdinando von Helmholtz (professore a Berlino, nato a Potsdam il 31 agosto 1821 e morto nel 1894), Felice Klein di Gottinga e A. N. Whitehead di Cambridge, nella sua *Universal Algebra*. Questo argomento [2] è così speciale, che mi limiterò a dare un semplice abbozzo del come ne sia sorta l'idea.

Il sistema geometrico euclideo, l'unico con cui sia famigliare la generalità delle persone colte, riposa su un certo numero di assiomi e postulati fra loro indipendenti. Quelli che sono necessari nella geometria di Euclide furono di recente investigati ed elencati. Essi includono, non soltanto quanto vi è detto esplicitamente, ma anche altre cose inconsciamente applicate. Mutandole, assumendo cioè altri assiomi, si giunge ad una nuova successione di proposizioni, costituenti pure un sistema geometrico. Perciò non vi è alcun limite al numero delle posssibili geometrie non euclidee che possono venire fabbricate.

Fra gli assiomi ed i postulati di Euclide ve ne è uno sulle parallele, che ordinariamente è enunciato sotto la seguente forma: Se una retta ne incontra due altre per modo da formare due angoli interni dalla stessa parte la cui somma sia inferiore a due retti, quelle rette prolungate indefinitamente finiranno per incontrarsi dalla parte dove la somma è inferiore a due retti. Enunciato sotto questa forma tale assioma è ben lungi dall'evidenza, onde da tempo immemorabile furono fatti numerosi tentativi per dimostrarlo [3]. Ma nessuno vi riuscì; ed oggi si sa che esso non può dedursi dagli altri assiomi accettati da Euclide.

1) Le *Opere matematiche* di G. BELTRAMI formano 4 volumi in 4°, Milano, 1902-1920. Un elenco dei suoi scritti si trova negli *Annali di matematica*, marzo 1900.

2) Per ulteriori particolari vedi le mie *Mathematical Recreations and Problems*, 4ª edizione, Londra, cap. XII, 1905.

3) Alcuni fra i più interessanti di tali tentativi si trovano raccolti nella *Geometry without axioms*, London, 1833 di T. P. THOMPSON e poi nella *Philosophie des mathématiques*, Paris, 1903 di J. RICHARD.

La prima concezione di un corpo di geometria non-euclidea è dovuta alla scoperta, fatta indipendentemente da G. Saccheri, Lobatschewsky e Giovanni Bolyai, cioè che si può ottenere un sistema solido di geometria a due dimensioni ammettendo che non sia vero il postulato delle parallele, che, invece, per un punto si possa condurre un certo numero di rette (cioè linee geodetiche) parallele ad una retta data. La risultante geometria si chiama *iperbolica*.

Più tardi Riemann ha introdotta la distinzione fra spazio illimitato e spazio infinito e dimostrato che si può fabbricare un altro sistema altrettanto logico di geometria a due dimensioni, in cui tutte le rette hanno lunghezza finita, cosicchè un punto mobile lungo una retta finisce per tornare al suo punto di partenza. Ciò guida alla geometria a due dimensioni detta *ellittica*, analoga alla iperbolica, ma caratterizzata dal fatto che non si può per un dato punto condurre alcuna retta che, sufficientemente prolungata, incontri un'altra retta data. Ciò richiama alla mente la geometria delle figure tracciate sulla superficie di una sfera.

Cosicchè, secondo che da un punto si può condurre nessuna retta, o una sola, od un fascio di rette parallele ad una data retta, noi abbiamo tre sistemi di geometria a due dimensioni conosciuti rispettivamente sotto i nomi di geometria ellittica, parabolica o omaloidica o euclidea, e iperbolica.

Nei sistemi parabolico ed iperbolico le rette sono di lunghezza infinita. Nell'ellittico, invece, hanno lunghezza finita. Nel sistema iperbolico non esistono figure simili di grandezze differenti; l'area di un triangolo si può dedurre dalla somma dei suoi angoli, che è sempre inferiore a due retti; esiste un massimo finito per l'area di un triangolo. Nel sistema ellittico tutte le rette hanno la medesima lunghezza finita; due rette si tagliano sempre; e la somma degli angoli di un triangolo supera due rette. Malgrado tali ed altre particolarità della geometria iperbolica ed ellittica è impossibile dimostrare sperimentalmente che una di esse è vera nello spazio nel quale viviamo. Infatti, per eseguire delle misure in ciascuna di queste geometrie noi dobbiamo disporre di un' unità di misura; e se noi viviamo in uno spazio avente le proprietà caratteristiche dell' una o dell'altra di tali geometrie

e tale che la massima distanza che possiamo concepire (per es. la nostra distanza dalle stelle fisse) sia immensamente minore di qualunque unità insita nel sistema considerato, allora ci riuscirà impossibile di discernere, mediante le nostre operazioni le differenze fra quelle tre geometrie. Veramente sarebbe possibile osservando le parallassi delle stelle di provare la falsità del sistema parabolico o di uno degli altri due, ma, col mezzo di misurazioni, non si potrà mai dimostrare la verità della geometria euclidea. Difficoltà congeneri si hanno in connessione a quantità eccessivamente piccole. In una parola, benchè le conclusioni a cui si arresta la geometria euclidea sono più esatte di quanto possono verificare le esperienze effettuate su cose finite, quali sono quelle che stanno a nostra disposizione, pure possono cessare di essere vere per oggetti assai maggiori o assai minori od in regioni di spazio a noi inaccessibili.

Altri sistemi geometrici non-euclidei si possono ottenere mutando qualche altro degli assiomi e dei postulati accolti da Euclide. Certuni sono interessanti, ma quelli citati testè possiedono un' importanza speciale a cagione di fatti sensazionali perchè non portano alcuna conseguenza inconciliabile con le proprietà dello spazio nel quale viviamo. Possiamo trattare la medesima questione osservando che, affinchè uno spazio a due dimensioni possieda le proprietà geometriche che ci sono famigliari, è necessario che sia possibile costruire, in un qualunque suo punto, una figura congruente ad una data; ora ciò accade solo quando è costante il prodotto dei raggi principali di curvatura in un punto qualunque dello spazio a due dimensioni o della superficie considerata. Ora tale prodotto è costante nei seguenti casi: 1) superficie sferiche (quel prodotto è allora positivo); 2) superficie piane (quel prodotto è nullo e si ricade allora nella geometria euclidea); 3) superficie pseudo-sferiche (prodotto negativo). Il trattoide (superficie generata dalla rotazione di una trattrice) offre un esempio di superficie pseudo-sferica; in ogni punto esso ha la forma di una sella. Per conseguenza noi possiamo costruire sistemi geometrici normali sulle sfere, sul piano e sul trattoide. Tali sistemi porgono esempi di geometria rispettivamente ellittica, euclidea, iperbolica. Ora se una superficie viene flettuta senza dilatazione o contrazione, la curvatura rimane inalterata; perciò le tre indicate specie sono tipi di superficie speciali su cui si possono costruire figure fra loro congruenti. Ad esempio un piano può essere avvolto su di un cono ed il risultante sistema geometrico sul cono è del tutto simile a quello che si ha nel piano.

Nel precedente riassunto dei fondamenti della geometria non-euclidea ho tacitamente supposto che la misura della distanza si conservi dovunque la stessa.

Quanto sopra si è detto si riferisce allo spazio a due dimensioni. Naturalmente qui sorge la questione, se vi siano differenti specie di spazî a tre o più dimensioni. Riemann dimostrò che vi sono tre specie di spazî a tre dimensioni, aventi proprietà analoghe alle tre specie di spazio a due dimensioni già studiate. Esse differiscono tra loro pel fatto che in ogni punto si possono condurre parallelamente ad una superficie data o nessuna superficie geodetica, od una superficie geodetica, od un fascio di superficie geodetiche; una superficie geodetica essendo tale che ogni linea geodetica che congiunge due punti di essa giace tutta sulla superficie.

Fondamenti della matematica. Ipotesi relative. — Le discussioni connesse alla geometria non-euclidea posero in evidenza i fondamenti logici della relativa teoria. Le analoghe questioni sopra i principî assunti e le ipotesi fatte nella matematica in generale vennero studiate da R. Dedekind, G. Cantor, G. Frege, G. Peano, D. Hilbert, W. Russell e A. N. Wihitehead.

Cinematica. — La cinematica teorica, cioè l' investigazione delle proprietà del movimento, degli spostamenti e delle deformazioni, considerati indipendentemente dalla forza, dalla massa e da altri concetti fisici, venne trattata da parecchi autori. Essa è un ramo della matematica pura e costituisce una appropriata introduzione allo studio della filosofia naturale. Io non posso che alludervi rapidamente.

Porrò termine a questo Capitolo con alcune osservazioni — più o meno ordinate — sopra i rami della matematica aventi un carattere meno astratto e riguardanti i problemi, che s' incontrano in natura. Incomincerò col parlare della meccanica. Questa scienza può essere trattata graficamente od analiticamente.

Statica grafica. — Nella statica grafica teorica le regole per risolvere i diversi problemi sono date mediante il disegno; esse traggonsi dalla geometria proiettiva, onde l'argomento è intimamente collegato alla geometria moderna. Questo metodo per risolvere le questioni è stato fino ad ora applicato specialmente ai problemi di meccanica, di elasticità e di elettricità; esso è utile specialmente nella ingegneria ed in quelle materie in cui, mediante il disegno ed il calcolo, si possono ottenere soluzioni approssimate di molte equazioni differenziali e di altre specie, delle quali è frequente l'uso; questo metodo non conduce, in ogni caso, ad errori più gravi di quelli che si avrebbero a causa della imperfetta conoscenza della struttura dei materiali adoperati.

Si può dire che questa teoria abbia avuto origine coll'opera di Poncelet; ma io credo che solo nell' ultimo ventennio siano state pubblicate esposizioni organiche di essa. Fra i lavori più noti di tal genere io ricorderò la *Graphische Statik* di C. Culmann (Zurigo, 1875) recentemente ristampata da W. Ritter; le *Lezioni di statica grafica*, di A. Favaro (Padova, 1877) (una traduzione francese con note fu fatta da P. Terrier in 2 volumi, 1879-85); gli *Elementi di calcolo grafico* (Torino, 1875) e *Le figure reciproche della statica grafica* (Milano, 1879) di L. Cremona (ne esiste una traduzione inglese di T. H. Beare, Oxford, 1889), che sono largamente fondati sulle opere di Möbius; *La statique graphique*, di M. Levy (Parigi, 4 volumi, 1886-88); e *La statica grafica*, di C. Saviotti di Roma (1888).

Il carattere generale di queste opere sarà sufficientemente illustrato dalla seguente notizia sul contenuto di quella di Culmann. Culmann incomincia con una descrizione della rappresentazione geometrica delle quattro operazioni fondamentali di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; passa poi alle operazioni di elevazione a potenza ed estrazione di radice, l' ultima delle quali viene eseguita mediante la spirale equiangola (logaritmica). In seguito dimostra in qual modo le quantità considerate — come i volumi, i momenti ed i momenti d' inerzia — possono essere rappresentati con rette; quindi deduce le leggi per combinare le forze, le coppie ecc.; e finalmente spiega la costruzione e l' uso della ellisse e dell' ellissoide d' inerzia, gli assi neutrali ed il nocciolo; gran parte del rimanente dell'opera è dedicata a dimostrare come i disegni geometrici, eseguiti con questi principî, diano le soluzioni di molti problemi pratici riguardanti archi, ponti, armature, pressione della terra nei muraglioni e nei tunnel, ecc.

Questa scienza è stata studiata durante l' ultimo ventennio da molti matematici, specialmente in Italia ed in Germania, ed applicata ad un gran numero di problemi. Ma siccome stabilii in principio di questo Capitolo che, per quanto era possibile, avrei evitato di parlare delle opere degli autori viventi, perciò mi devo limitare ad un semplice cenno sull'argomento [1]).

Meccanica analitica. — Mi volgo ora alla meccanica trattata analiticamente. Le cognizioni sulla meccanica razionale dei solidi, possedute dai grandi matematici del secolo XVIII, si possono dire riassunte nell'ammirabile *Mécanique analityque* di Lagrange e nel *Traité de mécanique* di Poisson; mentre l'applicazione di essa all'astronomia si trova nella *Mécanique céleste* di

[1]) Aggiungerò qui una breve notizia su CLIFFORD, che fu uno dei più distinti fra i matematici inglesi della seconda metà del secolo XIX ad adottare l'uso dei metodi grafici e geometrici a preferenza di quelli analitici. Guglielmo Kingdon Clifford, nato ad Exeter il 4 maggio 1845 e morto a Madera il 3 marzo 1879, studiò nel Collegio della Trinità a Cambridge e fu poi *fellow* di esso. Nel 1871 fu professore di matematica applicata al Collegio Universitario di Londra, posto che occupò fino alla morte. La sua grande facilità di esposizione e la potenza di afferrare le analogie fecero di lui uno dei più brillanti illustratori dei principî matematici. La sua salute deperì nel 1876, ed allora l'autore di questo libro lo sostituì nell' insegnamento per alcuni mesi; Clifford allora si recò in Algeria e ritornò alla fine dell'anno; ma solo per ricadere di nuovo malato nel 1878. Fra le più importanti delle sue opere abbiamo le memorie *Teory of biquaternions, On the Classifications, On the Classification of Loci* (non terminata), *The Theory of Graphs* (non finito), e *Canonical Dissection of a Riemann 's Surface;* inoltre gli *Elements of Dynamic*, che contengono pure molte cose interessanti. Le sue memorie matematiche vennero raccolte in un volume, pubblicato dopo la sua morte, sotto il titolo *Mathematical Papers:* mentre i suoi articoli e le sue conferenze di filosofia scientifica riempiono i due volumi di *Lectures and Essays*. Per ulteriori notizie sulla vita e le opere di Clifford, si veggano le fonti citate nell'articolo che lo concerne del *Dictionnary of National Biography*, vol. XI.

Laplace. Queste opere sono state già analizzate. La meccanica dei fluidi è più difficile di quella dei solidi e la teoria ne è meno progredita.

La *Statica teorica*, e specialmente la teoria del *potenziale* e delle *attrazioni*, è un argomento che ha richiamato grandemente l'attenzione dei matematici del secolo XIX.

Ho già detto che l' idea del potenziale è dovuta a Lagrange e si trova in una memoria che risale al 1773. Tale idea fu subito afferrata da Laplace che, in una sua memoria del 1784, l'usò liberamente, sicchè in passato a lui ne fu attribuito ingiustamente il merito. Nella stessa memoria Laplace generalizzò anche l' idea dell'analisi armonica, che era stata concepita nel 1783 da Legendre. Dell'opera di Gauss sulle attrazioni ho già parlato. La teoria delle superficie di livello e delle linee di forza è in gran parte dovuta a *Chasles*, che determinò anche l'attrazione di un elissoide su qualunque punto esterno. Ricorderò qui ancora *Der Barycentrische Calcül*, pubblicato nel 1827 da A. F. Möbius (1790-1868) [1]), uno dei più eminenti allievi di Gauss. Nè si devono dimenticare le importanti memorie pubblicate nel 1828 sul potenziale e le proprietà di esso da G. Green (1793-1841) [2]).

[1]) La raccolta delle *Opere* di MÖBIUS fu pubblicata a Lipsia, in 4 volumi, 1885-87.

[2]) Una edizione completa delle *Opere* di GREEN fu pubblicata a Cambridge nel 1871. Egli fu uno dei primi matematici del secolo XIX, che abbia studiato più profondamente le proprietà del potenziale. Egli nacque presso Nottingham nel 1793 da povera famiglia e morì a Cambridge nel 1841. Quantunque si fosse istruito da sè, aveva acquistato una certa dimestichezza con diversi libri di matematica; e nel 1827 scrisse una memoria sul potenziale — nella quale questo termine fu introdotto per la prima volta —, ove dimostrò le sue principali proprietà e ne applicò i risultati alla elettricità ed al magnetismo. Questa importante memoria contiene l' importante teorema presentemente noto col suo nome. Essa fu letta manoscritta da qualche vicino dell'autore capace di giudicarla e fu pubblicata per sottoscrizioni nel 1828; ma sembra che da principio non destasse grande interesse. Risultati consimili erano stati indipendentemente ottenuti nel 1839 da GAUSS, a cui si deve la larga diffusione che conseguirono.

Negli anni 1832 e 1833 GREEN presentò alla Società filosofica di Cambridge le memorie riguardanti l'equilibrio dei fluidi e le attrazioni nello spzaio ad n dimensioni; nello stesso anno 1833 presentò alla Società Reale di Edinburgo la sua memoria sul moto di un fluido agitato dalle vibrazioni di un solido elissoidale. Nel 1833 entrò nel collegio Caius di Cambridge e vi fu poi nominato *fellow*. Egli potè allora dedicarsi alle ricerche originali; e nel 1837 pubblicò le sue memorie sul moto delle acque in un canale e sulla riflessione e la rifrazione del suono e della luce. Nell' ultima egli deduce, applicando la teoria ondulatoria, le leggi geometriche del suono e della luce dal principio di energia; il fenomeno della riflessione totale vi è spiegato fisicamente, e vi si ricavano certe proprietà del mezzo vibrante. Studiò pure la propagazione della luce in qualunque mezzo cristallino.

La *Dinamica teorica*, messa sotto la forma moderna da Jacobi, è stata coltivata da molti dei matematici già citati. Qui, ricordo, che il principio detto della *Variyng Action* fu studiato da Sir William Hamilton nel 1827 e che le *equazioni hamiltoniane* furon da lui date nel 1835; inoltre richiamerò l'attenzione dei lettori sulle ricerche riguardanti la dinamica di J. E. E. Bour (1832-1866) e di J. Bertrand (1822-1900). L'uso delle coordinate generali, introdotto da Lagrange, ora è divenuto il metodo ordinario per trattare i problemi di dinamica (come pure alcuni di fisica).

Come testi comunemente usati ricorderò quelli sulla dinamica dei punti materiali e dei sistemi rigidi di E. I. Routh di Cambridge; le *Leçons sur l'intégration des équations differentielles de la mécanique*, di P. Painlevé, Parigi, 1895, e *L'intégration des équations de la mécanique*, di J. Graindorge (1843-1896), Bruxelles, 1889. Va ancora fatto qui cenno del *Treatise on Natural Philosophy*, di Sir William Thomson (ora Lord Kelvin) e di P. G. Tait.

Nulla dirò sopra la meccanica dei fluidi, liquidi e gassosi considerati separatamente dalle teorie fisiche, su cui essi si fondono, e non farò che ricordare le memorie di Green, Sir Giorgio Stokes, Lord Kelvin e Helmholtz. La meravigliosa ma difficile teoria dei moti vorticosi (*vortex-rings*) è dovuta a questi due ultimi matematici. Un problema relativo ad essa è stato studiato anche da J. J. Thomson; ma è un soggetto che tuttora sorpassa la potenza della nostra analisi. La teoria del suono può essere trattata unitamente alla idrodinamica; ma per quello che la riguarda rimando il lettore, che desiderasse maggiori informazioni, all'opera pubblicata a Cambridge nel 1877 da Lord Rayleigh.

Astronomia teorica. — È compresa, o può esserlo, nella dinamica teorica. Fra quelli che nel secolo XIX si sono dedicati a tale studio il nome di Gauss è fra i più eminenti; ma dei suoi lavori in proposito si è già parlato.

Bessel [1]). — Il più noto dei contemporanei di Gauss fu *Federico Guglielmo Bessel*, che nacque a Minden il 22 luglio 1784 e

1) Vedi l'*History of Astronomy*, pp. 36-53, di A. M. Clerke, Edinburgo, 1887. La raccolta delle opere e della corrispondenza di Bessel è stata edita da R. Engelmann e pubblicata in 4 volumi, a Lipsia, 1875-82.

morì a Königsberg il 17 marzo 1846. Bessel cominciò la sua carriera come mozzo a bordo di una nave; ma nel 1806 divenne assistente nell'Osservatorio di Lilienthal e nel 1811 fu nominato Direttore del nuovo Osservatorio prussiano di Königsberg, ove risiedette tutto il rimanente della sua vita. Bessel introdusse nella matematica pura le funzioni [1]) che portano ora il suo nome; ciò avvenne nel 1824, quantunque il loro uso fosse stato indicato già in una memoria pubblicata sette anni prima. Le sue scoperte più importanti sono: la riduzione (esposta ne' suoi *Fundamenta Astronomiae*, Königsberg, 1818) delle osservazioni fatte a Greenwich dal Bradley di 3222 stelle, e la determinazione della parallasse annuale delle stelle «61 Cygni». Le osservazioni di Bradley sono state recentemente rivedute da A. Auwers di Berlino [2]).

Leverrier [3]). — Fra gli avvenimenti astronomici del secolo XIX quello della scoperta del pianeta Nettuno, fatta da Leverrier e da Adams, è uno dei più sorprendenti. *Urbano Giovanni Giuseppe Leverrier* era figlio di un umile impiegato governativo di Normandia; nacque a St. Lô l'11 marzo 1811 e morì a Parigi il 23 settembre 1877. Studiò alla Scuola Politecnica e nel 1837 vi fu nominato professore di astronomia. Le sue prime ricerche astronomiche furon presentate all'Accademia delle Scienze nel 1839; in esse egli calcolò limiti, assai più ristretti di quelli determinati da Laplace, fra cui variano le inclinazioni e le orbite dei pianeti. La scoperta, fatta indipendentemente l'uno dall'altro nel 1846 da Leverrier e Adams del pianeta Nettuno [4]) mediante la perturbazione, che esso produceva nell'orbita di Urano, richiamò la

1) Vedi la memoria *Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht* (1824), in cui, oltre introdurre la classe di funzioni trascendenti $I_n(x)$, ne diede le proprietà principali e costrusse delle tavole per la loro valutazione. Successivamente queste funzioni sono state molto studiate.

2) Bessel inoltre ha pubblicato: 1) *Ricerche sulla lunghezza del pendolo semplice a secondi per Berlino*; 2) *Osservazioni astronomiche*; 3) *Ricerche fatte dal 1835 al 1838 per stabilire un metro campione per la Prussia.*

3) Per ulteriori particolari sulla sua vita vedi l'*Éloge* di Bertrand nel vol. XLI delle *Mémoires de l'Académie*; e per notizie della sua opera vedi il discorso di Adams, nel vol. XXXVI del *Monthly Notices* della R. Società astronomica.

4) Galle di Berlino, il 23 settembre 1845, scoperse Nettuno, stella di 8ª grandezza a 2500 milioni di miglia dal sole, dietro le indicazioni trasmessegli da Leverrier.

generale attenzione sulla astronomia fisica e rafforzò ad un tempo l'opinione sulla generalità della gravitazione universale. Nel 1855 Leverrier successe ad Arago come direttore dell' Osservatorio di Parigi e lo riordinò secondo le esigenze dell'astronomia moderna. Allora si propose di studiare le ricerche teoriche dei moti planetari e di rivedere tutte le tavole, che li riguardavano; visse tanto da poter rivedere le ultime bozze di stampa di questo grande lavoro.

Adams [1]). — Colui che scoprì insieme a Leverrier il pianeta Nettuno fu *Giovanni Couch Adams*, che nacque in Cornovaglia il 5 giugno 1819; studiò nel Collegio di San Giovanni a Cambridge; poi fu nominato professore Lowndeaniano in quell' Università e direttore dell' Osservatorio; morì a Cambridge il 21 gennaio 1892.

Vi sono tre importanti questioni, che sono specialmente associate al nome di Adams. La prima consiste nella scoperta del pianeta Nettuno mediante le perturbazioni che esso produce nell'orbita di Urano; rispetto all'epoca di questa scoperta va notato che fu fatta assai prima di quella di Leverrier.

La seconda trovasi nella memoria del 1855 sull'accelerazione del movimento medio della luna. Laplace l'aveva calcolata nella ipotesi che fosse prodotta dalla eccentricità dell'orbita della terra, ed aveva ottenuto un risultato che accordavasi sostanzialmente col valore dedotto da un confronto degli annali delle eclissi antiche e moderne. Adams dimostrò che certi termini di un'espressione erano stati trascurati e che, se fossero stati considerati, il risultato sarebbe solo circa una metà di quello trovato da Laplace. L'esattezza dei calcoli di Adams fu negata da Plana, Pontécoulant e da altri astronomi del continente; ma Delaunay in Francia e Cayley in Inghilterra li sottoposero ad una verifica; tuttavia questo punto non è del tutto chiarito.

La terza ricerca, legata al nome di Adams, è la determinazione, fatta nel 1867, dell'orbita delle Leonidi o sciami di stelle cadenti, che furono particolarmente sorprendenti nel novembre del 1866 ed il cui periodo è circa di trentatre anni. H. A. Newton

1) Una raccolta delle sue memorie con una biografia fu pubblicata in 2 volumi a Cambridge, 1896-1900.

(1830-1896), ha dimostrato esservi solo cinque orbite possibili. Adams calcolò la perturbazione, che sarebbe prodotta dai pianeti sul moto del nodo dell'orbita di uno sciame di meteore in ciascuno di questi casi e trovò che questa perturbazione si accordava coll'osservazione per una delle orbite possibili, ma per nessuna altra. Così l'orbita fu determinata.

Altri astronomi ben noti del secolo XIX sono i seguenti:

Giovanni Antonio Amedeo barone Plana, che nacque [1]) a Voghera nel 1781 e morì a Torino nel 1864. Nel 1800 entrò alla Scuola Politecnica di Parigi ed appena uscitone fu nominato professore di matematica nella Scuola di Artiglieria di Alessandria. Nel 1809 presentò all'Accademia di Torino la sua prima memoria *Equazione della curva formata da una lamina elastica.* Nel 1811 fu nominato, dietro le raccomandazioni di Lagrange, professore di astronomia nell' Università di Torino e nel 1813 direttore dell'Osservatorio di detta città. La sua opera principale è la celebre *Teoria del moto della luna*, che gli valse la gran medaglia della Società di astronomia di Londra, di cui poi divenne membro. Nel 1811 pubblicò una *Memoria sulla teoria dell'attrazione degli elissoidi*; studiò la distribuzione della elettricità statica nei conduttori, la teoria della elasticità, ecc.

Filippo Gustavo Doulcet, conte di Pontécoulant, nato nel 1795 e morto a Pontécoulant il 21 luglio 1871 è autore di una *Théorie analytique du système du monde* (Paris, 1820) in quattro volumi.

Carlo Eugenio Delaunay, nato a Lusigny il 9 aprile 1816, si annegò nelle acque di Cherbourg il 3 agosto 1872; la sua opera sulla teoria della luna insegna i migliori metodi sin ora conosciuti per le ricerche analitiche sopra tale problema, e le sue (incomplete) tavole lunari rappresentano uno fra i piu importanti progressi astronomici del secolo XIX.

Pietro Andrea Hansen [2]), nato a Schleswig l' 8 dicembre 1795 e morto a Gotha, ove era direttore dell' Osservatorio, il 18 marzo 1874, compilò delle tavole lunari, pubblicate in Londra

1) Aggiunta dei traduttori.

2) Per una notizia delle sue numerose memorie vedi le *Phil. Transactions of the R. Society*, Londra, 1876-1877.

nel 1857, che sono ancora usate nella preparazione dell'*Almanacco nautico*; diede poi i metodi più delicati, ancora usati, per la determinazione delle perturbazioni della luna e dei pianeti.

Di F. Tisserand (1845-1896) di Parigi la *Mécanique céleste* è ora autorità classica nell'astronomia dinamica.

Altri notevoli risultati sono legati ai nomi di Hill, Darwin e Poincaré.

Giorgio Guglielmo Hill, nato a New-York nel 1838 e fino al suo collocamento a riposo (1901) direttore dell'*American Ephemeris*, nel 1884 determinò le diseguaglianze del moto della luna, dovuta alla non sfericità della terra, ricerca che completò la teoria lunare di Delanuay [1]). Hill ebbe anche a trattare lo spostamento secolare del perigeo della luna e lo spostamento del perigeo di un pianeta sotto certe condizioni; ha scritto poi intorno alla teoria analitica del moto di Giove e Saturno, con un progetto di preparazione delle tavole delle loro posizioni in un tempo dato.

Simon Newcomb, nato nella Nuova Scozia il 12 marzo 1835, sovraintendente delle *American Ephemeris*, nel 1884 riesaminò le più antiche osservazioni fatte a Greenwich, applicò i risultati ottenuti alla teoria della luna e rivide le tavole di Hansen.

G. H. Darwin (1845-1912), studiò l'effetto delle maree su di uno sferoide vischioso, lo sviluppo dei sistemi planetari mediante la frizione delle maree, la meccanica degli sciami meteorici.

H. Poincaré (nato a Nancy il 29 aprile 1854, morto a Parigi il 9 luglio 1912), ha studiato il difficile problema dei tre corpi, e la forma assunta da una massa fluida sotto la sua propria attrazione.

Il trattato sulla teoria della luna di E. W. Brown, Cambridge, 1896, ed una relazione (stampata nei *Reports of the Britisch Association*, Londra, 1899, vol. LXIX, pp. 121-159) di E. T. Whittaker sulle ricerche collegate alla soluzione del problema dei tre corpi, contengono pregevoli notizie sui recenti progressi della teoria della luna e dei lunari e pianeti.

Nell' ultima metà del secolo XIX sono stati applicati i risul-

1) Sui progressi recenti della teoria lunare, vedi i *Reports of the British Association*, vol. LXV, Londra, 1895, p. 614.

tati dell'analisi spettrale per determinare la costituzione e e direzioni dei moti dei corpi celesti rispetto alla terra. La storia dell'analisi spettrale nella sua prima fase sarà sempre associata ai nomi di G. R. Kirchhoff (1824-1887) di Berlino, di A. J. Angström di Upsala (1814-1874) e di Sir Giorgio Stokes di Cambridge; ma essa appartiene all'ottica piuttosto che all'astronomia. Come la sua applicazione all'astronomia fosse inaspettata è dimostrato dal fatto che A. Comte nel 1842, occupandosi dello studio dei fenomeni naturali, lamentava lo sperpero di tempo fatto da alcuni astronomi, che prestavano attenzione alle stelle fisse, giacchè, egli diceva, nulla potrà apprendersi intorno ad esse; ed infatti un secolo fa sarebbe parso incredibile che si potesse investigare la costituzione chimica dei mondi in ispazî tanto lontani.

Durante questi ultimi anni il campo dell'astronomia è stato ancora ulteriormente esteso dall'arte fotografica. A quali nuovi progressi ciò possa condurre è quasi impossibile prevedere.

In particolare si fu così in grado di determinare le forme delle gigantesche spirali nebulose che sembrano rappresentare lo studio primitivo di ampli sistemi attualmente in istato di sviluppo.

La costituzione dell' universo, nel quale il nostro sistema solare non è che un atomo insignificante, da tempo attrasse l'attenzione di astronomi pensatori e fu specialmente studiata da Guglielmo Herschell. Di recente J. C. Kapteyn riuscì a dimostrare che tutte le stelle di cui si possono determinare i moti propri appartengono all' uno ed all'altro di due fiumane che hanno direzioni opposte, e che hanno velocità una circa tripla dell'altra. Il sistema solare appartiene alla fiumana più lenta. Questi risultati furono confermati da A. S. Eddigton e F. W. Dyson. Si dice che noi oggi ci troviamo nel vestibolo di scoperte importanti sulla costituzione dell' universo visibile.

Donati [1]). — *Giovanni Battista Donati* nacque in Pisa il 16 dicembre 1826 e morì in Firenze il 19 settembre 1893. Studiò nel-

1) Agli astronomi precedenti i traduttori hanno creduto dovere aggiungere Donati, Secchi, De-Gasparis, Tisserand e Schiaparelli, come quelli che possono degnamente figurare accanto ad essi.

l'Università di Pisa, ove ebbe a maestro Fabrizio Ottaviano Mossotti; fu nominato astronomo aggiunto nell'Osservatorio di Arcetri presso Firenze nel 1852, direttore nel 1864 e professore di astronomia nel R. Istituto. Nel 1866 pubblicò l'insigne memoria *Determinazione dell'orbita dei corpi celesti mediante tre osservazioni*, dedicata al Mossotti. Le memorie originali del Donati si riferiscono ad osservazioni sulle comete, sulle strie e la scintillazione delle stelle e sulle aurore boreali; a lui si deve poi un numero grandissimo di note e memorie, riguardanti l'astronomia e l'ottica astronomica. Riordinò ed ampliò l'Osservatorio che dirigeva con tanta cura e sapienza. Si dedicò anche allo studio della storia delle scienze, cercando di rivendicare ai nostri grandi le scoperte, che erano attribuite ingiustamente ad altri; fra l'altro mostrò come B. Castelli, fino dal 1642, divinasse l'esistenza dell'Australia, e nel 1864 fece conoscere un manoscritto di Paolo Toscanelli, giacente nella Biblioteca Nazionale di Firenze, sulle osservazioni delle comete degli anni 1433, '49, '56, '57 e '72 [1]). Fu insignito di molte onorificenze e fu membro di quasi tutte le Accademie scientifiche; nel 1859 ottenne il gran premio Lalande per la scoperta della gran cometa.

Secchi. — *Angelo Secchi* nacque in Reggio Emilia il 28 giugno 1818 e morì presso Fiesole il 26 febbraio 1878; appartenne alla Compagnia di Gesù; nel periodo (1849) della repubblica romana esulò in Inghilterra e nell'America settentrionale, ove seguitò a studiare. Egli compì i suoi studî in Roma; insegnò matematica al Collegio romano e fisica a Loreto; rimpatriato nel 1849, fu nominato Direttore dell'Osservatorio astronomico del Collegio romano, ove passò, meditando e scrivendo, tutto il resto della sua vita. Tutte le sue opere vertono sulla fisica celeste e gli fruttarono gran fama. Scrisse molte note, memorie e dissertazioni per Accademie, Istituti e Giornali; inoltre: 1. *Il quadro fisico del*

1) Vedi *Bollettino della Società Geografica italiana*, vol. X, fasc. 3: *Elogio di G. B. Donati*, di GUSTAVO UZIELLI.

sistema solare; 2. *Le soleil*, compendio sublime di quanto si conosce finora sul sole; 3. *Le stelle, saggio di astronomia siderale*; 4. *L'unità delle forze fisiche* (2 vol.); 5. *Le lezioni di fisica terrestre* [1]) ecc.

De-Gasparis [2]). — *Annibale De-Gasparis* nacque in Bugnora in provincia di Aquila il 9 novembre 1819 e morì in Napoli il 21 marzo 1892. Studiò nel seminario di Chieti; poi, recatosi in Napoli nel 1838, studiò matematiche sotto il Tucci ed il De-Angelis; entrò nella Scuola di ponti e strade, che abbandonò ben presto per darsi allo studio della scienza a lui prediletta, l'Astronomia. Nel 1848 fu accolto come alunno dal Capocci nell'Osservatorio di Capodimonte, ove si segnalò ben presto pel suo ingegno e per la rara attitudine di osservatore diligente e di calcolatore indefesso; finalmente nel 1851 fu nominato professore di astronomia nell'università di Napoli; e questa nomina il De-Gasparis la deve principalmente all'avere scoperto nel 1849 i tre pianeti Igea, Partenope, Egeria, che gli valsero subito altissima rinomanza nel mondo scientifico e la medaglia d'oro della R. Società astronomica di Londra. Nel 1864, alla morte del Capocci, fu nominato direttore dell'Osservatorio astronomico di Capo di Monte. Di fibra assai robusta, il De-Gasparis resisteva per lunghe ore al lavoro intellettuale più intenso, sia di sviluppi analitici, sia di calcoli numerici od a quello delle osservazioni; lavorò indefessamente non solo nel campo dell'astronomia pratica, seguitando specialmente le osservazioni per la cattura dei piccoli pianeti, ma ancora in quello dell'analisi matematica e dell'astronomia teorica con un grandissimo numero di memorie (circa cento) quasi tutte inserite negli *Atti* e nei *Rendiconti* dell'Accademia di Napoli, ma alcune nei *Comptes rendus* dell'Accademia delle scienze

1) Chi desiderasse ulteriori notizie sulla vita del Secchi consulti: *Il padre Angelo Secchi*, commemorazione del padre F. DENZA, Torino, 1878. *Il padre A. Secchi*, commemorazione fatta all'Istituto lombardo da C. BELGIOIOSO, il 21 marzo 1878.

2) Vedi negli *Atti dell'Accademia di Napoli* l'*Elogio di Annibale De-Gasparis*, fatto da EMANUELE FERGOLA.

di Parigi, nelle *Astronomische Nachrichten*, nei *Transunti* dell'Accademia dei Lincei, nelle *Memorie della Società italiana dei XL*, e nelle *Memorie della R. Astronomical Society*. Il De-Gasparis, oltre ai tre menzionati, scoprì fino al 1865 i pianeti Eunomia, Psiche, Massalia, Temi, Ausonia e Beatrice. Fra i lavori teorici se ne trovano molti di matematica pura; e quelli di astronomia sono principalmente relativi ai metodi per determinare l'orbita dei pianeti, al problema di Keplero ed alla teoria delle perturbazioni.

Il De-Gasparis era insignito di molte onorificenze delle più ambite, membro di quasi tutte le Accademie italiane e straniere, senatore del regno fino dal 1861. La sua bontà d'animo e la sua generosità verso i poveri erano proverbiali.

Tisserand [1]. — *Felice Tisserand* nacque a Nuits-Saint-Georges l'11 gennaio 1845 e morì a Parigi nel 1896. Fece gli studî secondari in un Collegio di Beaune, quelli superiori all'École Normale di Parigi. Insegnò per qualche mese in un liceo e poi fu nominato aggiunto nell'Osservatorio di Parigi, ove era direttore Leverrier. La sua tesi di laurea ebbe per oggetto la teoria del moto della luna e riscosse il plauso della Sorbona. All'età di 28 anni fu nominato Direttore dell'Osservatorio di Tolosa, ove pubblicò parecchie memorie sull'astronomia fisica. Per opera del Tisserand Tolosa divenne in Francia il centro dell'attività astronomica; allora nessun Osservatorio lo uguagliava. Fu nominato membro della sezione astronomica dell'Accademia di Parigi, poi membro del *Bureau des Longitudes* e della Facoltà delle Scienze e finalmente direttore dell'Osservatorio di Parigi, ove Tisserand ha risolto il gran problema « di riconoscere se una cometa osservata è nuova od altra volta è apparsa sul nostro orizzonte », dando un criterio assai facile, che porta il suo nome, e che ricavò adoperando certe formule di Jacobi. Diede pure, mediante una formula, un metodo regolare e preciso per la correzione delle

[1] Vedi Darboux, *Notice historique sur la vie et les travaux de Félix Tisserand*, letta il 18 dicembre 1896 nella seduta pubblica annuale all'Accademia delle Scienze.

osservazioni. Ha inoltre pubblicato uno splendido *Traité de Mécanique céleste* ed una raccolta di esercizî di calcolo infinitesimale. L'Accademia Imperiale di Pietroburgo gli decretò con voto unanime il premio Schubert.

Schiaparelli. — *Giovanni Virginio Schiaparelli* nacque in Savigliano (provincia di Cuneo) il 14 marzo 1835 da genitori biellesi, morì il 4 luglio 1910. Studiò prima in Savigliano, poi all'Università di Torino, ove il 12 agosto 1854 si laureò, con plauso, ingegnere idraulico ed architetto civile; poi si dedicò all'insegnamento privato delle matematiche ed allo studio dell'astronomia.

Nel 1857 fu inviato dal Governo italiano a Berlino a studiare astronomia sotto Encke e vi rimase sino al 1859, in cui passò all'Osservatorio di Pulcova. Nel 1859 fu nominato secondo astronomo nell'Osservatorio di Milano e poi primo astronomo. Insegnò per alcuni anni geodesia a quel Politecnico. Ha pubblicato tra note, memorie articoli ecc., più di duecento lavori riguardanti le *stelle fisse, l'Esperia, le comete, le stelle cadenti e meteoriti, le stelle doppie, Marte, Mercurio, Venere, Saturno, Urano, l'eclissi e il passaggio di Venere, la geodesia, la geografia, la storia dell'astronomia antica, il carteggio Oriani Piazzi, la matematica, la meteorologia ed il magnetismo terrestre* ecc. Fu senatore; ottenne la medaglia d'oro (4 gennaio 1868) dalla Società italiana dei XL per le sue memorie; l'Accademia di Francia gli assegnò (18 maggio 1868) il premio Lalande pe' suoi lavori sulle stelle cadenti e il 29 dicembre 1890 lo stesso premio per le sue belle osservazioni sulla rotazione di Mercurio e di Venere; il 9 febbraio 1872 la R. Società astronomica di Londra gli assegnò la medaglia d'oro « for his researches on the connexion between the orbis of comets and meteory »; ed il 31 luglio 1876 l'imperiale Accademia tedesca gli conferì la medaglia d'oro *Cothenius* per la sua opera *Note e riflessioni sulla teoria astronomica delle stelle cadenti*. Questi premi bastano da soli ad attestare il merito grandissimo delle sue opere, che fanno collocare Schiaparelli al primo posto fra gli astronomi odierni. Nel 1899 egli chiese il meritato riposo. È superfluo il dire che fu insignito di quasi tutti gli ordini cavallereschi ed inscritto in tutti gli istituti accademici nostrani e stranieri [1]).

Fisica matematica [2]). — Un compendio della storia delle matematiche del secolo XIX non sarebbe certamente compiuto se non vi si parlasse della loro applicazione ai numerosi problemi sopra il calore, l'elasticità, la luce, l'elettricità e altri rami della fisica. La storia della fisica matematica è tuttavia così estesa, che io non posso pretendere di scriverla adeguatamente, anche considerandola per entro una storia della matematica; inoltre è così strettamente collegata alle opere dei fisici viventi (o appena morti), specialmente di von Helmholtz e di Lord Kelvin (meglio conosciuto come Sir William Thomson), che mi è lecito considerarla come uscente dai limiti che mi sono fissato in questo Capitolo. È tuttavia interessante notare che il progresso della fisica è dovuto in gran parte all'applicazione ad essa della matematica; per ciò diviene sempre più difficile per un fisico di proseguire nelle sue ricerche, se non è anche un matematico.

Fra i recenti fisici-matematici (tacendo coloro che si son dedicati alla fisica sperimentale o alle teorie cui non è ancora stata applicata l'analisi matematica), posso particolarmente ricordare i seguenti (i cui nomi son qui messi in ordine alfabetico), benchè l'elenco non si possa in alcuna maniera dire compiuto ed esauriente.

Lodovico Boltzmann da Vienna, i cui scritti generalizzarono assai la teoria cinetica dei gas e rappresentano un tentativo per condurre la fisica molecolare entro il dominio delle matematiche.

T. Boussinsq ha scritto sull'ottica.

---

1) Per ulteriori notizie v. *All'astronomo G. V. Schiaparelli. Omaggio. 30 giugno 1860-30 giugno 1900.* Milano.

2) La matematica forma un ponte tra la fisica e la fisica matematica, dice il KANT; e D'ALEMBERT: «Les vérités mathématiques sont en quelque sort les assymptotes des vérités physiques». I traduttori per questa parte hanno creduto più conveniente attenersi alla 2ª edizione inglese invece che all' ultima.

Rodolfo Giulio Emanuele Clausius, nato a Cöslin il 2 gennaio 1822 e morto a Bonn, ove era professore di fisica, il 24 agosto 1888, il quale fu tra i primi a studiare la teoria del calorico dal punto di vista matematico.

A. Clebsch, già citato, che studiò l'elasticità dei corpi solidi.

Giulio Guglielmo Riccardo Dedekind, pure dianzi citato, autore di un' importante memoria sul problema delle vibrazioni di un elissoide liquido, ove è trattato come un problema di matematica pura.

Michele Faraday, nato a Newington il 22 settembre 1791 e morto a Hampton Court il 25 agosto 1867, il quale mostrò una straordinaria abilità nel dedurre importanti risultati da principii fondamentali, emancipandosi dai simboli con cui sono ordinariamente trattati. Per ulteriori particolari vedi la biografia scrittane da Tyndall (2ª edizione, 1870).

Giorgio Francesco Fitzgerald, professore a Dublino, ivi nato il 3 agosto 1851 e morto il 22 febbraio 1901; ha studiato l'elettromagnetismo e l'ottica.

Giovanni Bernardo Leone Foucault, nacque a Parigi il 18 settembre 1819 e morì di paralisi l'11 febbraio 1868; le sue principali memorie riguardarono: l' uso della fotografia (1840); la lampada elettrica (1849); la determinazione della velocità della luce (1850 e 1862); la dimostrazione [1]) del moto diuturno della terra mediante la rotazione del piano di oscillazione di un pendolo semplice (1851); il giroscopio (1852); la rotazione di un disco di rame fra due poli di un magnete (1855); un polarizzatore (1857). Per più minuti particolari vedi *La vie et les travaux de Léon Foucault* di J. Lissajous, Parigi, 1875; ed anche una nota di J. Bertrand

---

1) Se α indica la latitudine di un luogo, β la rotazione della terra in un certo tempo, β_1 la deviazione del piano di oscillazione in quello stesso tempo, allora si ha la formula $\beta_1 = \beta$ sen α, che può servire anche a determinare le latitudini geografiche dei luoghi.

come prefazione alla edizione della raccolta delle opere di Foucault, Parigi, 1878.

J. Willard Gibbs, nato a New Haven l'11 febbraio 1839, studiò termodinamica e la teoria elettromagnetica di Maxwell.

Riccardo Tetley Glazebrook del Collegio della Trinità di Cambridge, nato a Liverpool il 18 settembre 1854, si occupò dell'ottica e dell'elettricità. La sua relazione nei *Reports* dell'Associazione britannica per l'anno 1885 sulla teoria della luce contiene un sommario importante di gran parte delle ricerche matematiche concernenti tale argomento, fatte durante il secolo XIX. Dopo un breve cenno sulle vedute di Green, Cauchy, Mac-Cullagh e F. E. Neumann, egli descrive i lavori più recenti a misura che cadono sotto il dominio della semplice teoria dei solidi elastici, o delle teorie che suppongono una relazione fra la materia e l'etere o della teoria elettromagnetica di Maxwell.

Green, anteriormente considerato, le cui memorie di fisica riguardarono in generale la teoria delle acque (idraulica).

Oliviero Heaviside (nato a Londra il 18 maggio 1850), ha studiate le teorie matematiche dell'ottica e dell'elettromagnetismo.

Von Helmholtz (nato a Postdam il 31 agosto 1821 e morto a Berlino l' 8 settembre 1894) che è in prima linea in tutti i rami della fisica matematica; la raccolta delle sue memorie fu pubblicata in due volumi a Lipsia nel 1882 e 1883.

Lord Kelvin (sir William Thomson), professore a Glasgow, nato a Belfast il 26 giugno 1824, ha arricchito colle sue ricerche ogni ramo di fisica; la raccolta delle sue memorie fu pubblicata a Cambridge in sei volumi (Cambridge, 1892-1911).

Gustavo Roberto Kirchhoff, che fu professore di fisica prima ad Heidelberg e poi a Berlino, nacque a Königsberg il 12 marzo 1824

e morì a Berlino il 17 ottobre 1887; il suo nome sarà sempre associato alla storia dell'analisi spettrale; fece importanti ricerche sull'elettricità; la raccolta delle sue memorie fu pubblicata a Lipsia nel 1882.

Gabriele Lamé nacque a Tours il 22 luglio 1795 e morì a Parigi nel 1870, ove era professore alla Scuola Politecnica; le principali sue opere sono: 1. *Cours de Physique à l' École polytechnique* (1836), che portò una vera rivoluzione nell' insegnamento di questa scienza, che fin allora era stata insegnata troppo empiricamente; egli vi portò il rigore matematico, quel rigore senza il quale le teorie non posson assumere forma definitiva; e queste innovazioni introdotte nella fisica certo hanno di molto contribuito al suo progresso; 2. *Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes* (1857); 3. *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur* (1861); 4. *Leçons sur les coordonnées curvilinées et leurs applications* (1859); 5. *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité* (1852); 6. *Résumé de plusieurs discours préliminaires des sciences exactes*; 7. *Examen des differentes méthodes employées pour resoudre les problemes de géométrie* (1818). Scrisse pure memorie su diversi punti della teoria dei numeri [1]).

Mac-Cullagh, trattò dell'ottica fisica.

Giacomo Clerk Maxwell nacque ad Edimburgo il 13 giugno 1831 e morì il 5 novembre 1879 a Cambridge, ove era professore di fisica sperimentale. Fra i suoi più importanti lavori abbiamo: una memoria (1859) sulla stabilità degli anelli di Saturno; varie note sui colori; una memoria sul campo elettromagnetico; il grande *Treatise of Electricity and Magnetism*, pubblicato nel 1873 e che portò una vera rivoluzione in due importanti capitoli della fisica; la *Theory of Heat*, pubblicata nel 1871; ed il libro elementare *Mather and Motion*; a questi io posso aggiungere la memoria

1) Il *Mémoire sur le dernier théorème de Fermat*, pubblicato nei *Comptes Rendus*, tome IX, 1839, p. 45, ottenne il *grand prix*, assegnato dall'Accademia; furono relatori Cauchy e Liouville; pubblicò altre ricerche in proposito, ma errate come quelle di Cauchy.

sulle figure reciproche della statica grafica e quelle sulla teoria molecolare dei gas e materie affini. Per notizie più complete vedi la raccolta delle sue *Opere* in 2 volumi, Cambridge, 1890, e la biografia scrittane da L. Campbell e W. Garnett, Londra, 1882.

Francesco Ernesto Neumann di Königsberg, nato a Ukermakr l' 11 settembre 1798 e morto a Königsberg il 23 maggio 1895, scrisse sull'elettricità e sulla luce.

Guglielmo Giovanni Macquarn Rankine di Glasgow, nacque a Edimburgo il 5 luglio 1820 e morì il 24 dicembre 1872; le sue scoperte in termodinamica ed in idromeccanica si trovano nell'edizione della raccolta dei suoi lavori, pubblicata in Londra nel 1881.

Lord Rayleigh, nato il 12 novembre 1842 e morto il 30 giugno 1919, oltre ad ottime memorie sull'ottica matematica e la fisica, ha scritto un classico trattato sul suono, pubblicato a Cambridge nel 1877.

Barré de Saint-Venant (nato il 23 agosto 1797, morto il 6 gennaio 1886), le cui ricerche sull'elettricità e sulla torsione sono ben note.

Giorgio Gabriele Stokes (nato il 13 agosto 1819, morto il 2 febbraio 1903). Gran parte delle sue memorie riguardano l' idromeccanica o l'ottica od argomenti analoghi; esse sono state recentemente raccolte e pubblicate dall' Università di Cambridge.

Pietro Guthrie Tait, professore in Edinburgo, nato a Dalkeith il 28 aprile 1831 e morto il 4 luglio 1901, ha scritto, applicando la matematica, su vari argomenti di fisica, e specialmente sulla teoria molecolare dei gas.

Giuseppe Giovanni Thomson del Collegio della Trinità e professore Cavendishiano nell' Università di Cambridge, nato a Manchester il 18 dicembre 1856, ha studiato i vortici anulari e l'applicazione delle coordinate generali e vari problemi di fisica.

Guglielmo Edoardo Weber, nato a Wittemberg il 24 ottobre 1804 e morto a Lipsia il 23 giugno 1890; gran parte delle sue importanti ricerche riguardarono l'elettrodinamica; i suoi lavori sono stati pubblicati dalla Società reale di Gottinga per cura di W. Voigt in due volumi (Berlino, 1892).

E. Gustavo Enrico Wiedemann, nato a Berlino il 2 ottobre 1826 e morto a Lipsia il 23 marzo 1899, è autore di un'ammirabile opera sulla elettricità e su argomenti affini in 4 volumi, che ebbe varie edizioni.

APPENDICE I [1]).

Aggiunte del Dott. Gambioli.

Brianchon. — *Carlo Giulio Brianchon* nacque a Sèvre nel 1785; allievo della Scuola Politecnica di Parigi (1804), fu nominato ufficiale di artiglieria nel 1808. Fece le campagne di Spagna e di Portogallo, e nel 1815 fu nominato Vice-direttore generale della fabbrica d'armi di Francia e poi professore di scienze applicate nella Scuola di artiglieria della Real Guardia. Ha lasciato importanti memorie sulle *Proprietà delle sezioni coniche*; ed è conosciuto soprattutto pel suo bel teorema sull'esagono circoscritto ad una conica, correlativo a quello di Pascal.

Cournot. — *Antonio Agostino Cournot* nacque a Gray nel 1801; studiò matematiche nel liceo di Besançon e fu ammesso alla Scuola Normale nel 1821. Divenne ispettore aggiunto dell'Accademia di Parigi nel 1831, professore nella Facoltà di Scienze di Lione nel 1834, Rettore dell'Accademia di Grenoble nel 1835, Ispettore generale nel 1838 e Rettore dell'Accademia di Digione nel 1854; si ritirò nel 1862. Ha curato un'edizione delle lettere di Eulero ad una principessa di Germania; e fatte le traduzioni del *Trattato di astronomia* di John Herschel e degli *Elementi di meccanica* di Kater e di Zardem. Inoltre ha pubblicato importanti opere originali, riguardanti i principî stessi della scienza, e sono: *Traité élémentaire de la théorie de fonctions et du calcul infinitesimal* (1841); *De l'origine et des limites de la correspondence entre l'algèbre et la géometrie* (1847); *Essai sur les fondements*

---

1) Benchè alcuni de' matematici, menzionati in quest'Appendice, siano stati ricordati precedentemente dall'autore, tuttavia il traduttore ha creduto conveniente parlarne qui più particolareggiatamente piuttosto che aggiungere le loro biografie nel corso dell'opera.

de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique (1851); *Traité de l'enchainement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire* (1861); più qualche opera di economia politica.

Sturm. — *Giacomo Francesco Sturm* nacque a Ginevra il 29 settembre 1803 e morì a Parigi il 20 dicembre 1853; fu il successore di Poisson nella cattedra di meccanica alla Sorbona: nel 1829 egli pubblicò il celebre teorema, che porta il suo nome, che determina il numero delle radici reali di un'equazione algebrica; comprese fra due limiti dati. Sturm dice che il suo teorema lo trovò in occasione di alcune sue ricerche di meccanica riguardanti il pendolo a compensazione. Questo teorema ed il metodo di Horner danno insieme un mezzo sicuro e pronto per determinare le radici reali di un' equazione numerica. Egli inoltre pubblicò un *Cours de mécanique de l'école polytechnique* ed un *Cours d'analyse de l'école polytecnique*; ed un gran numero di note e memorie sui vari giornali scientifici. Chi desiderasse maggiori particolari sulla vita e sulle opere di Sturm legga la prefazione al suo *Cours d'analyse* od il *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*, mai et juin 1856.

Crelle. — *Augusto Leopoldo Crelle* nacque ad Eichenwerder nel 1780 e morì nel 1855; fu ingegnere dei ponti e delle strade in Prussia; poi membro del Consiglio superiore di architettura (1816); indi fu incaricato di tracciare la ferrovia da Berlino a Postdam, la prima che fu fatta in Germania. Dal 1824 sino al 1849 fu impiegato al Ministero della Pubblica Istruzione, nella quale epoca (1826) fondò, aiutato da Abel e Steiner, il suo *Giornale di matematica pura ed applicata* che porta il suo nome e che divenne subito in gran fama per le memorie pubblicatevi da Abel, Jacobi e Steiner. Tutti gli scienziati del mondo si tenevano onorati di farvi inserire le loro memorie e Crelle stesso vi scriveva; esso contribuì molto alla diffusione dei nuovi studî sulla geometria pura. Nel primo volume Abel vi pubblicò la dimostrazione dell' impossibilità di risolvere mediante radicali le equazioni generali del 5° grado e una memoria sul teorema binomiale. Crelle fu eletto membro dell'Accademia delle scienze di Berlino nel 1828. I suoi lavori principali sono: *Saggio sul calcolo delle grandezze variabili* (1811); *Raccolta d'osservazioni e di proposizioni di matematica* (1820-1822); *Manuale di aritmetica e di algebra* (1825); *Esposizione enciclopedica della teoria dei numeri* (1854) ecc.

Dupin. — *Francesco Pietro Carlo* barone di *Dupin* nacque a Varzy nella Nièvre nel 1784 e morì nel 1873; uscì dalla Scuola Politecnica nel 1803 ed entrò nel genio navale. Viaggiò per sette od otto anni in missione nel Belgio, in Olanda, in Italia e nelle isole Jonie. Al suo ritorno fu impiegato nei porti di Tolone e di Dunkerque. Fece un viaggio in Inghilterra per studiarvi le costruzioni navali; reduce dal suo viaggio scrisse memorie importantissime, che gli valsero la nomina all'Accademia delle scienze e la cattedra di meccanica al Conservatorio delle arti e dei mestieri. Luigi XVIII lo creò barone nel 1824; fu nominato consigliere di Stato nel 1831, poi membro del Consiglio dell'ammiragliato di Francia nel 1837 e grande ufficiale della legion d'onore nel 1850. Fu eletto rappresentante del popolo nel 1848, poi deputato al parlamento; e nel 1852 fu nominato senatore. Oltre un gran numero di note sull'economia politica e sulle questioni sociali egli ha pubblicato: *Développements de Géometrie* (1813), *Essai sur les travaux scientifiques de Gaspard Monge* (1819), *Applications de géometrie et de mécanique* (1822). Egli ha completato il teorema di Eulero colla considerazione dell' *indicatrice* e delle *tangenti coniugate*, ed il teorema di Malus relativo alla rirrazione.

Chasles. — *Michele Chasles* nacque a Epernon nel 1793 e morì a Parigi nel 1880. Entrò nella Scuola Politecnica nel 1812 e ne uscì nel 1814. Rinunciò agli uffizi pubblici per darsi agli affari; più tardi rinunciò a questi per darsi tutto alla scienza, che del resto non aveva mai interamente abbandonato. Era un gran lavoratore; dal 1814 al 1816 pubblicò nella *Correspondance sur l'École Politechnique* molte note, in alcune delle quali si occupa della trasformazione del cerchio e della sfera in ellisse ed in elissoide ecc. Negli anni 1828 e 1829 pubblicò parecchie memorie negli *Annales de Gergonne* sulle *Sections coniques confocales et les per-*

spectives ou projections stéréographiques, ove fa una felice applicazione delle polari reciproche e dei centri di omologia. Negli anni 1829 e 1830 sulla *Correspondance mathématique et physique de Bruxelles* pubblicò parecchi suoi lavori, tra i quali nuove dimostrazioni del teorema di Sturm sulle coniche, un'analisi sui *Principes des transformations polaires de coniques, des cônes* ecc. e una memoria sulla *Transformation des relations métriques des figures*.

Nel 1837 sotto gli auspicî dell'Accademia di Bruxelles diede in luce l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, con due memorie sulla *dualità* e l'*omografia*, opera di gran valore. A partire da questo punto i lavori di Chasles assumono forma originale. Nel *Journal de l'École Polytechnique* egli pubblicò le memorie seguenti: *Sur l'attraction exercée sur un point extérieur par un ellipsoide homogéne* (1840); *Sur les courbes et les surfaces de 2e degré*; *Sur les contacts des courbes et des surfaces*; *Sur les lignes géodesiques et les lignes de courbure des surfaces du 2e ordre*. Nel 1852 fu pubblicata la sua *Géometrie supérieure* (2a ed., 1880); nel 1854-55 una memoria *Sur la construction d'una courbe du 3me degré déterminée par neuf points*; nel 1857 nel *Journal* di Liouville un lavoro *Sur la détermination des courbes gauches du 3me ordre*; nel 1862, nello stesso giornale, una memoria *Sur les courbes à doubles courbures du 4me ordre, intersections de deux surfaces du 2e degré*; nel 1863 una ricostituzione dei *Porismi d'Euclide*. Nel 1865 pubblicò il primo volume del *Traité des sections coniques*; ed infine nello stesso (unico) anno *Une méthode pour obtenir le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions données*. Poi fece inserire nei *Comptes rendus de l'Académie des sciences* un gran numero di memorie, che concernono le applicazioni del *principio di corrispondenza* che porta il suo nome, ecc. Nel 1867 scrisse per ordine del Ministro della Istruzione un esteso rapporto sui progressi della geometria in Francia.

Sino al 1830 era membro dell'Accademia di Bruxelles; nel 1831 fu eletto membro corrispondente di quella di Francia; nel 1841 fu nominato professore di geodesia e meccanica della Scuola Politecnica; e nel 1846 fu istituita alla Facoltà di scienze

di Parigi una Cattedra di geometria superiore proprio per lui; nel 1851 divenne membro effettivo dell'Accademia di Francia e ufficiale della legion d'onore nel 1860. Checchè ne dica il Marie nella sua *Storia delle scienze matematiche e fisiche* (vol. XII, p. 200), il Chasles può senza dubbio essere considerato come uno dei principali fondatori della geometria moderna e come uno dei più eminenti geometri francesi.

Duhamel. — *Giovanni Maria Costante Duhamel* nacque a Saint-Malo nel 1797, morì a Parigi nel 1872. Uscì dalla Scuola Politecnica nel 1816; abbracciò la carriera dell'insegnamento, fu nominato ripetitore della Scuola Politecnica, poi ivi esaminatore e professore di analisi e meccanica; e nel 1851 Direttore degli studî; rimpiazzò all'Accademia delle scienze Poisson nel 1840; nel 1841 fu fatto cavaliere della legion d'onore e grande ufficiale nel 1861.

Scrisse un certo numero di memorie in vari punti dell'analisi trascendente e della meccanica razionale, inserite nei *Rendiconti* dell'Accademia delle scienze, nel *Giornale* del Politecnico e nel *Journal des savants*. Inoltre pubblicò a parte: *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*, con M. Regnaud (1823); *Cours d'analyse de l'école polytechnique* (1840); *Cours de mécanique* (1845); *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* (1866 in 2 volumi, ed in una 2a edizione in 5 volumi). Duhamel fu un bravo insegnante; ma tenne troppo alla forma; e qualche volta nei suoi scritti cadde in errore.

Hermite [1]. — *Carlo Hermite* nacque in Parigi nel 1822 e vi morì il 14 gennaio 1901. Nel 1843 entrava alla Scuola Politecnica; nel 1856, all'età di 34 anni, nell' Istituto; e nel 1862 veniva creata una Cattedra per lui nella Scuola normale; poco dopo fu anche nominato professore alla Scuola Politecnica ed alla Sorbona.

È quasi impossibile potere analizzare in un compendio di storia la lunga serie dei suoi lavori, che hanno gettato tanta luce

1) Vedi il discorso pronunciato all'Accademia delle scienze di Francia su C. Hermite, da C. JORDAN, il 21 gennaio 1901.

sull' intera metà del XIX secolo; tanto più che l'opera di Hermite è svariatissima e sparsa qua e là. Egli senza dubbio contribuì molto a rialzare in Francia gli studî della matematica superiore, che, a dire il vero, alla fine della prima metà del secolo XIX, vi era, se non in decadenza, assai in ritardo; e che l'opera sua abbia dato eccellenti frutti ne è prova la numerosa schiera dei geometri francesi viventi.

L'opera di Hermite fu molto utile e come insegnante e come scienziato; colla prima divulgando le grandi scoperte di Abel, Jacobi e Cauchy, che in mezzo secolo avevano trasformato la scienza matematica; colla seconda ideando metodi generali e fecondi.

Era di animo mitissimo e di una bontà proverbiale e di una squisita gentilezza di modi; era prodigo di incoraggiamenti e di aiuti non solo verso i suoi allievi, bensì anche verso gli studiosi di tutti i paesi che a lui ricorrevano.

Fu in rapporti di amicizia coi maggiori matematici di tutto il mondo, ed in particolare con quelli d' Italia.

I suoi lavori furono pubblicati in tutti i giornali scientifici di Francia e degli altri paesi, fra i quali gli *Annali di matematica* e gli *Atti dell'Accademia di Torino* [1]).

Nel 1843 iniziò brillantemente la sua carriera scientifica con ricerche sulle funzioni abeliane, che, in forma di lettere, Jacobi volle inserite nella raccolta delle proprie memorie. Il grande Jacobi un po' più tardi gli scrisse: « Non vi addolorate se alcune delle vostre scoperte si sono incontrate colle mie antiche ricerche; siccome voi avete dovuto incominciare là appunto, ove io ho finito, vi è stata necessariamente una piccola sfera di contatto. Dopo di ciò, se voi mi onorerete delle vostre comunicazioni, io non avrò che da imparare da esse ». Infatti, quanto diceva il gran geometra tedesco non tardò a verificarsi.

Hermite si era dapprima proposto di generalizzare la teoria delle frazioni continue; ma si trovò ben presto condotto a problemi più vasti sulla *teoria delle forme algebriche*, ove non tardò ad ottenere i più ammirabili risultati. Sino dai suoi primi

1) Furono raccolti in 4 volumi, che videro la luce a Parigi (1905-1916).

lavori egli indicò i vari metodi per *ridurre le forme quadratiche ad un numero qualunque di indeterminate*; e l' introduzione in questa teoria delle variabili continue lo condusse un po' più tardi alla scoperta delle verità le più nascoste.

Diede la soluzione completa del problema dell'equivalenza aritmetica delle forme quadratiche generali in forme decomponibili in fattori lineari; determinò le trasformazioni di queste forme in sè stesse; introdusse infine la nozione feconda di forme quadratiche a variabili coniugate e dedusse dalla loro teoria una nuova dimostrazione dei bei teoremi di Jacobi sul numero di scomposizioni di un numero nella somma di 5 quadrati.

Diede una dimostrazione del tutto nuova e puramente aritmetica dei celebri teoremi di Sturm e Cauchy sulla separazione delle radici di un'equazione algebrica.

Arrivò poi a questa meravigliosa proposizione che «*le radici delle equazioni algebriche a coefficienti interi e disuguale discriminante, si esprimono mediante un numero di irrazionali distinti* ».

Nel 1858 risolvè mediante le funzioni ellittiche, le equazioni del 5° grado, precedendo di poco Kronecker, Brioschi e Betti.

Fu oggetto dei suoi studi anche la teoria delle forme binarie algebriche (1852); e pare che in ispecial modo possa attribuirsi a lui la legge di reciprocità, la scoperta dei covarianti associati e la formazione del sistema completo dei covarianti delle forme cubiche e biquadratiche in invarianti della forma del 5° ordine. In ogni modo in questo campo fu degno emulo di Cayley e Sylvester. Oltre questi studî egli proseguiva le sue ricerche sui *trascendenti*; ed in una serie di memorabili lavori risolvette il problema della trasformazione delle funzioni iperellittiche, e dallo sviluppo in serie delle funzioni ellittiche dedusse le formule importanti relative al numero delle classi delle forme quadratiche.

Gettava intanto le basi della teoria delle funzioni modulari e risolveva particolareggiatamente la questione tanto difficile della loro trasformazione, aprendo così la via a coloro che dovevano poi generalizzare questa teoria.

Studiò poi l' interpolazione, nuovi metodi di sviluppo delle funzioni in serie di polinomi, e la continuità degl' integrali definiti, che dipendono da un parametro.

Nella teoria delle funzioni ellittiche scoprì una formola fondamentale, che permette di decomporle in elementi semplici e quindi di integrarle; e pel primo studiò le funzioni doppiamente periodiche di seconda specie.

Nel 1873, nella famosa memoria *Sur la fonction exponentielle* (*Comptes Rendus*, T. 77), dimostrò che il numero e è trascendente; e questa memoria diede occasione (nel 1882) al Lindemann di dimostrare la trascendenza di π, poichè questi ottenne un tal risultato seguendo la stessa via battuta da Hermite per l'esponenziale.

Hermite amava la scienza per sè stessa, nè si preoccupava quasi per nulla delle sue applicazioni: esse vennero spontaneamente e direi quasi per di più. All'equazione di Lamé, la cui integrazione costituisce l' ultimo dei suoi grandi lavori, egli ha connessa tutta una serie di problemi di meccanica: rotazione di un solido, determinazione della curva elastica, oscillazioni del pendolo conico ecc.

Ci piace di rammentare, a proposito dei primi lavori di Hermite, una frase caratteristica di Lamé: « En lisant les mémoires d'Hermite, on a la chair de poule ».

Bertrand [1]. — *Giuseppe Luigi Francesco Bertrand* nacque a Parigi l' 11 marzo 1822 e vi morì il 3 aprile 1900. Studiò al Collegio di San Luigi ed ancor giovanissimo fu ammesso, dietro domanda dello zio Duhamel, alla Scuola Politecnica, ove compì i suoi studî felicemente riuscendo sempre tra i primi; si addottorò a soli diciannove anni. L' 8 maggio 1842 fu vittima di un grave scontro ferroviario, avvenuto fra Versailles e Parigi; e deve ascriversi a gran fortuna se Bertrand non rimanesse abbruciato insieme a tanti altri suoi compagni di viaggio, a causa dell' incendio che si appiccò ad alcuni carrozzoni del convoglio; ma sempre portò al volto i segni delle scottature sofferte. Si ammogliò nel dicembre 1844; ebbe parecchi figli ed un gran numero di nepoti. Visse una vita tranquilla e direi quasi patriarcale, in mezzo alle gioie della famiglia ed ai suoi studî prediletti di matematica. Si occupò ben poco di politica; ma nell'anno terribile (1870) insieme ai propri figli combattè a favore della sua patria. Fu nominato nel 1844 ad un tempo professore di matematica al Collegio San Luigi, ove aveva studiato, e ripetitore di analisi alla Scuola Politecnica. Nel 1848 fu nominato alla Scuola Politecnica esaminatore di ammissione ed al Collegio di Francia andò a sostituire nell' insegnamento Biot; nel 1852 passò professore di matematiche speciali nel liceo Bonaparte, già collegio Enrico IV, ove insegnò appena tre anni; nel 1856 abbandonò definitivamente l' insegnamento secondario, avendo occupato il posto di Sturm alla Scuola normale; e nel 1856 divenne pure professore di Analisi alla Scuola Politecnica, cattedra che conservò fino al 1º aprile 1895. Entrò nel Collegio di Francia il 19 aprile 1862 come titolare della Cattedra di fisica matematica, che occupò sino alla morte.

[1] Vedi l'*Éloge historique de Joseph-Louis-François Bertrand*, lu par Gaston Darboux, dans la séance publique de l'Académie des Sciences tenue le lundi 16 décembre 1901.

Nel 1856 fu nominato membro dell'Accademia delle scienze e nel 1874 ne fu eletto Segretario perpetuo per le scienze matematiche; nel 1884 venne ammesso all'Accademia di Francia. Il metodo d' insegnamento del Bertrand era eccellente; nella esposizione era chiaro e preciso, e possedeva l'arte magica di un'esposizione veramente affascinante. Bertrand, dice il Darboux, « était un logicien incomparable; tous ceux qui ont causé avec lui en conviendront aisément. Son raisonnement était toujours irréprochable et, pour ne pas être de son avis, c'était aux premisses qu'il fallait s'attaquer.... ».

Tolto l'assedio a Parigi e ritiratosi il Governo a Versailles, la Scuola Politecnica fu trasferita a Tours; mentre Bertrand si recava colà a compiere i suoi doveri di professore, apprese che il furore pazzesco e feroce della Comune, nelle funeste giornate del maggio 1871, gli aveva incendiato la sua casa colla preziosa biblioteca, il manoscritto, già pronto per la stampa, di un'opera sulla termodinamica, tutti i materiali accuratamente classificati del 3º volume del suo *Traité de Calcul differential et de Calcul intégral*; il frutto di tutta una vita di lavoro era così annientato. Bertrand come il grande Eulero sopportò stoicamente questa perdita irreparabile; rifece la biblioteca come poteva, e si rimise al lavoro per rifare le opere perdute.

Come frutto del suo insegnamento elementare pubblicò nel 1849 il suo *Traité d'Arithmetique* e nel 1850 il suo *Traité d'Algèbre*, che sono opere classiche; e come frutto di quello superiore le eccellenti opere seguenti:

1. *Traité de Calcul differentiel et de Calcul intégral* in due volumi (1864-1870);
2. *Thermodynamique* (1887);
3. *Calcul des Probabilités* (1889);
4. *Théorie mathématique de l'Electricité* (1890).

Inoltre Bertrand ha pubblicato sui diversi rami delle matematiche pure ed applicate nei *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, nel *Journal de l'École Polytechnique*, nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées di Liouville*, nel *Journal des Savants*, nella *Revue des deux mondes* ed in altre raccolte circa 260 lavori fra memorie, note, relazioni, elogi, articoli storici e di altra specie. Le principali sue memorie son quelle riguardanti la geometria differenziale, cioè quelle sui sistemi ortogonali di superficie, che sono composte di tre famiglie isoterme ecc.; studiò le curve storte, e scoprì una classe di esse, che godono della proprietà che «le loro normali principali sono anche normali principali di un'altra curva»; esse furono chiamate *curve di Bertrand*. Fra i lavori di analisi citeremo la memoria *Sur le nombre des valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme*, pubblicata nel 1845 nel *Journal de l'École Polytechnique*. In meccanica scrisse nel 1847 una memoria sulla teoria dei moti relativi, frutto dei suoi studî sulle opere della fine del secolo XVII e della prima metà del secolo XVIII; nel 1848 pubblicò la *Note sur la similitude en mécanique*, lavoro assai notevole e spesso utilizzato: ed infine gl'importanti ed estesi lavori sulla *teoria delle curve tautocrone*; l'importantissima *Mémoire sur les intégrales communes à plusiers problèmes de mécanique*; e l'altra *Mémoire sur quelques-unes des formes les plus simples que peuvent prendre les intégrales des équations differentielles du mouvement d'un point matériel.*

Scrisse poi una memoria riguardante i poliedri regolari e diede un'elegante dimostrazione del teorema di Cauchy: «I vertici di qualunque poliedro regolare concavo sono sempre anche i vertici di un poliedro regolare convesso».

Fra le sue opere letterarie possiamo notare: *Les fondateurs de l'Astronomie moderne* (1865); quattro anni dopo pubblicò *L'Académie des sciences et les Académiciens de 1866 à 1793*, la quale opera ha dovuto costargli non poche ricerche; vanno ancora ricordati due volumi di *Éloges académiques*. Inoltre si è occupato di argomenti riguardanti la storia delle scienze fisiche e matematiche, ed ha scritto intorno a Descartes e la sua filosofia, su Clairaut, Eulero, Dionisio Papin, Ampère. La storia delle scienze non può essere, senza pericolo, trascurata; e ben a ragione il Bertrand disse: «l'étude du passé est le guide le plus sûr de l'avenir».

APPENDICE II.

Su alcuni matematici italiani dei tempi recenti.

Al presente compendio ho voluto aggiungere questa breve appendice *Su alcuni matematici italiani dei tempi recenti*, per molteplici ragioni: primieramente perchè leggendo alcune delle storie straniere della matematica mi sono persuaso che i nostri matematici sono imperfettamente conosciuti oltr'alpe; in secondo luogo per rendere un doveroso omaggio a tanti eminenti uomini, che hanno col loro alto ingegno, col lungo studio e coll'immenso amore per le discipline matematiche, contribuito sì largamente allo sviluppo ed all'incremento di esse, conquistandosi un posto eccelso nella storia della scienza; in terzo luogo per mostrare tanto agli Italiani, quanto agli stranieri, che i matematici nostri di questi ultimi tempi non hanno in alcuna maniera demeritato in confronto ai loro predecessori, e che senza dubbio non sono inferiori a quelli delle altre nazioni. Infatti un Cremona, un Betti, un Beltrami, un Brioschi, un Casorati, un Dini, basterebbero da soli per illustrare un'intiera nazione. In questa Appendice procederò, come nel compendio, per ordine cronologico; ma dividerò i nostri matematici in tre grandi categorie: la 1ª quella dei *geometri*; la 2ª quella degli *analisti*; la 3ª quella dei *matematici storici*.

Per molte e varie ragioni non discuterò a fondo le loro opere; e se per tutti non potrò dare un elenco esatto dei loro lavori, rimanderò però il lettore a quelle fonti, in cui egli troverà non solo questo elenco, ma le opere di ogni autore largamente discusse. Ho nella presente Appendice menzionato solo Cremona e Dini fra i matematici viventi [1]), perchè essi si debbono ritenere come due capiscuola: il primo nella geometria sintetica, il secondo nell'analisi. L'avere poi omessi gli altri matematici viventi non vuol dire che essi non siano degni di figurare accanto a questi due decani della scienza; e senza dubbio non pochi di essi saranno superiori ad alcuni di quelli, che ho dovuto menzionare in questa appendice. E considerando poi che molti di essi sono ancor giovani, egli è certo che potranno colle loro scoperte rendere ancora segnalati servizi alla scienza e così accrescere la loro fama scientifica; onde presentemente la storia non può dire l'ultima parola su di essi.

Dott. DIONISIO GAMBIOLI.

---

1) Quando fu compilata la presente Appendice il Cremona e il Dini erano ancor in vita; il primo morì il 10 giugno 1903, il secondo il 28 ottobre 1918.

I.

I Geometri.

Mascheroni. — *Lorenzo Mascheroni* nacque a Castagneto nella provincia di Bergamo il 14 maggio 1750 da famiglia piuttosto agiata, e morì di etisia in Parigi nel 1801 all'età ancora verde di 50 anni. Fu educato nel seminario di Bergamo, ove studiò filosofia e teologia e vestì l'abito sacerdotale. Fu professore a Bergamo prima di retorica, poi di fisica e matematiche. Nel 1779 pubblicò un'operetta poetica *La falsa eloquenza del pulpito*, nel 1782 una dissertazione *Maniera di misurare l'inclinazione dell'ago magnetico*, nel 1784 in Milano una dissertazione *Sulla gnomonica*, nel 1785 l'opera esimia: *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*, che gli fruttò un credito universale e l'offerta nel 1786 della Cattedra di matematiche nell' Università di Pavia. Nel 1787 diede alle stampe il piccolo lavoro *Metodo di misurare i poligoni piani* di cui pare che il Lhuilier si sia servito largamente nella compilazione della sua *Poligonometria*. Commentò il calcolo integrale di Eulero, nei due volumetti (1790-92) intitolati: *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*. Nel 1793 pubblicò un poemetto in versi: *L'invito a Lesbia Cidonia* (Contessa Paolina Secco Suardo Grismondi di Bergamo) celebre poetessa di que' tempi; questo poemetto didascalico è, nel suo genere, il migliore che possegga la nostra letteratura. È del 1797 la *Geometria del compasso*, che dedicò a Bonaparte l'italico, da cui ne ebbe in regalo due corniole; essa venne l'anno stesso tradotta in francese da Carette, uffiziale del genio ed ora (1901) ne fu pubblicata una nuova edizione a Palermo. Si dedicò allo studio della geodesia e pubblicò i *Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni*. Studiò argomenti di fisica; finalmente, incaricato dal Governo francese dello studio del ragguaglio delle nuove misure metriche, si recò a Parigi e compose nel 1798 le *Notizie generali del nuovo sistema dei pesi e misure dedotte dalla grandezza della terra.* Ma la sua opera principale ed ingegnosa è la sua *Geometria del compasso*, colla quale risolve tutti i problemi senza la riga. Alla morte di Mascheroni il suo amico e poeta Monti scrisse in suo onore il noto poemetto *La Mascheroniana.*

Fergola [1]. — *Nicola Fergola* nacque in Napoli il 20 ottobre 1753 da poveri ma onesti genitori, e vi morì il 21 giugno 1824; dapprima egli studiò belle lettere e filosofia, e poi nelle scuole di San Tommaso d'Aquino iniziò lo studio della geometria elementare, che vi era però insegnata assai male; proseguì poi questo studio all' Università sotto Marcello Cecere e Giuseppe Cirillo, e frequentò anche le lezioni del celebre abate Genovesi. La mediocrità dell' insegnamento matematico, che in quell'epoca s' impartiva alla Università, lo spinse dapprima a studiare da sè stesso la *Geometria* di Descartes ed i *Principia* di Newton; rimasto orfano, fu costretto ad aprire verso il 1775 una di quelle scuole private d' insegnamento superiore, che fiorirono in Napoli sino al 1860. Questa scuola divenne ben presto un vivaio di matematici; ed infatti da essa uscirono Giordano, Giannatasio, Sangro, Visconti, De Ruggero, Flauti, Scorza, Bruno, Grimaldi, Maresca ecc. Il Fergola fu direttore della sua scuola fino al 1801, nel quale anno lasciò quel posto al Flauti ed al Giannatasio. La fama acquistatasi dal Fergola negli studi matematici gli procurò nel 1789 la nomina a professore della Università interna del R. Convitto di San Salvatore e nel 1791 la cattedra nel R. Collegio della Annunziatella, cattedra che non accettò, e nel 1801 quella di *Analisi* all' Università di Napoli, occupata prima dal Marzucco e che poi cedette al Flauti nel 1812, per prendere quella di *Sintesi*, nella quale poco dopo venne sostituito dal Giannatasio. Ritiratosi dall'insegnamento pubblico, non abbandonò però mai quello privato, che proseguì sino alla sua morte. Il Fergola non ambiva le cariche pubbliche; quelle che più volte gli furono offerte, ebbe sempre a rifiutarle; ed avrebbe rifiutata anche la cattedra universitaria, se il re non l'avesse quasi costretto ad accettarla; nel 1808 rifiutò la croce di cavaliere; egli dedicava solo tutto sè stesso alla sua scuola, la quale gli procacciò grande e ben meritata fama e come insegnante e come scienziato; ed invero la schiera numerosa dei valenti uomini, che uscirono dalla sua scuola, fa fede della sua valentia come docente; ed i suoi numerosi lavori provano la larghezza delle sue vedute, l'originalità delle sue ricerche e l' inclinazione grandissima, che egli aveva per le scoperte scientifiche.

[1] Vedi: *Elogio storico di Niccola Fergola*, letto il 26 settembre 1824 da V. FLAUTI all'Accademia delle scienze di Napoli: *Niccola Fergola e la scuola di matematici che la ebbe a duce*, di GINO LORIA, Genova, 1892.

Il Fergola, dietro la propria esperienza, raccomandava come preparazione eccellente alle ricerche originali lo studio degli antichi, e forse non aveva torto; ma i suoi discepoli, specialmente il Flauti, abusarono di questa opinione del loro maestro, esagerandone la portata ed i frutti che se ne ripromettevano; la loro scuola chiamarono *sintetica*, in opposizione all' altra, che era sorta in Napoli stessa sotto gli auspici del Padula e che addimandavasi *analitica*. E tanto esageravano da giungere a mettere in ridicolo la *Géometrie* di Descartes. Anche il Fergola stesso ebbe il grave torto di provare ed esprimere un' insormontabile avversione verso la *meccanica analitica* di Lagrange, innamorato com'era dei metodi geometrici dell'antica Grecia. Ad onta di questo grave peccato è d' uopo riconoscere che il Fergola possedeva nel campo matematico ampie vedute ed idee elevatissime; e ne è prova questo passo, che abbiamo tolto dal contenuto di una sua relazione, diretta all'Accademia delle scienze di Napoli, in risposta ad una richiesta di quel sodalizio di suggerire i mezzi atti a promuovere ed indirizzare le investigazioni scientifiche: « lodando i metodi sintetici degli antichi geometri, che consistono nell' uso giudizioso del principio di riduzione, osservava però che siffatto artifizio euristico, benchè sicuro e gloriosamente pensato, sia oggetto a certa lentezza, nello scoprire il vero, la quale sovente delude le nostre speranze. Quindi desiderava che una società intenta all' incremento delle scienze cercasse di assegnar mezzi per guidarvi i geometri e prescrivere delle regole per agevolarne l'uso. E, oltre poi al proposto miglioramento della soluzione dei problemi geometrici, ei suggeriva doversi estendere e migliorare que' metodi dell'algebra de' finiti e degl' infiniti, donde maggior perfezione arrechisi alla geometria dei curvilinei, ed a' moti naturale-variabili. Ed avendo fin dal principio distinto in due rami tutte le investigazioni sulle quantità, cioè nella ricerca de' metodi generali, ed in quella delle importanti verità particolari rilevate per mezzo di tali metodi, discendeva ad indicare certe mire particolari da tenersi dall'Accademia sul primo e sul secondo ramo » [1]).

Come si dirà, parlando del Padula, la scuola del Fergola era condannata per la ristrettezza del campo in cui si era chiusa a perire; ed essa infatti si può dire che morì col suo fondatore; però è giusto riconoscere che rese un segnalato servizio alla scienza italiana.

Ecco l'elenco dei lavori del Fergola, pubblicati in gran parte negli Atti dell'Accademia di Napoli:

1. *Solutiones novorum quorundam problematum geometricorum* (1779);
2. *Risoluzione di alcuni problemi ottici* (1780);
3. *La vera misura delle volte a spira* (1785);
4. *Nuovo metodo di risolvere alcuni problemi di sito e posizione*, proposto nel 1786;
5. *Trattato analitico delle sezioni coniche* (1814);
6. *Trattato analitico dei luoghi solidi* (1818);
7. *I problemi delle tazioni risoluti con nuovi artificî di geometria* (1819);
8. Continuazione della memoria del Sangro, *Nuova soluzione del problema sul cilindroide Wallisiano*, ove tal problema viene risolto analiticamente con metodo diretto e generale;
9. *Dal teorema tolemaico ritraggonsi immediatamente i teoremi delle sezioni angolari di Vieta e di Wallis e le principali verità proposte nella trigonometria analitica dei moderni*;
10. *Il teorema ciclometrico cotesiano dedotto dalla formula dei coseni degli archi multipli, nella quale siasi praticato un'ovvia trasformazione*;
11. *Il teorema inverso delle forze centrali per le orbite algebriche risolvesi agevolmente per quello delle sezioni angolari*;
12. *Ricerche areometriche sui vulcani*;
13. *Sulle concussioni*;
14. Lasciò poi un corso di analisi sublime, che rimase in gran parte inedito.

Per cura del Flauti furon poi pubblicati i lavori seguenti:

15. *Sulla rettificazione dell'ellisse e gl' integrali che ne dipendono*, estratta dai manoscritti del defunto Nicola Fergola e presentata all'Accademia da V. Flauti;
16. *Dell' invenzione geometrica.* Opera postuma di Nicola Fergola ordinata, compiuta e corredata d' importanti note da V. Flauti (1842).

Chi desidera maggiori particolari su Fergola e la scuola napoletana ricorra all'eccellente opera citata del prof. G. Loria.

[1]) Vedi gli *Atti dell'Accademia di Napoli*, pp. XXIV-XXV.

Flauti [1]). — *Vincenzo Flauti* nacque in Napoli il 4 aprile 1782 e vi morì il 20 giugno 1863; era avviato agli studî di medicina; ma avendo conosciuto Nicola Fergola, ne divenne alunno ed amico, e così appassionato cultore delle matematiche discipline; studiò anche insieme allo Scorza sotto la direzione di Marcello Cecere. Nel 1803 fu nominato professore di *matematica sintetica* nella Università di Napoli colla qualità di sostituto, e nel 1812 professore di *analisi sublime* ed *arte euristica* (cattedra lasciata dal Fergola); tenne questo insegnamento fino al 1849, nel quale anno fu nominato professore onorario di detta Università.

Quando discorremmo del Fergola si ebbe occasione di parlare anche del Flauti; e come ben dice il Loria, accennando alla famosa matematica disfida del 1839, lanciata alla scuola analitica dalla scuola sintetica, questa aveva il Fergola per proprio ispiratore ed il Flauti per proprio aquilifero [2]).

[1]) *Nicola Fergola e la scuola dei matematici che lo ebbe a duce*, di GINO LORIA, Genova, 1892. Alcune notizie sul Flauti abbiamo avute dal prof. Federico Amodeo.

[2]) A questo proposito ricordiamo l'interessante pubblicazione del Flauti intitolata: *Produzioni relative al programma di tre questioni geometriche proposte da un nostro pro-*

È superfluo rammentare che il Flauti era uno dei discepoli del Fergola fra i più pugnaci nel combattere la geometria analitica di Lagrange e nel decantare i metodi de' geometri antichi, che egli difendeva anche contro appunti giustissimi; però ciò non toglieva, che talvolta, quando lo credeva opportuno, adoperasse l'abborrito metodo lagrangiano, come lo prova una sua memoria sulle curve inviluppi.

Dal Governo borbonico il Flauti ebbe (1806) l'incarico di redigere un corso di matematiche per l'istruzione de' giovani ascritti ai collegi; ed infatti pubblicò nel 1810 la 1ª edizione degli *Elementi di Euclide*, che nelle successive edizioni furono notevolmente migliorati e nell'ultima edizione (22ª nel 1857) vi aggiunse le materie, di cui constano il 1º libro di Archimede *Sulla sfera ed il cilindro e sulla misura del circolo*. In questi elementi il Flauti come proemio e discorso preliminare fa la storia critica degli *Elementi* e delle diverse edizioni di Euclide, ed in una lunga serie di note giustifica i cambiamenti fatti; egli è certo che gli *Elementi di Euclide* del Flauti costituiscono un buon libro da potersi utilmente consultare anche oggi. Successivamente il Flauti compose la *Trigonometria*, che è un eccellente trattato, il quale contiene in principio una dotta esposizione delle origini e dello sviluppo della trigonometria ed in fine una collezione di tavole riassuntive delle formule ottenute (1819).

In seguito pubblicò un'algebra, che contiene da principio una specie di compendio di storia delle matematiche, poi l'introduzione all'analisi algebrica, indi l'algoritmo algebrico (libro I); poi le equazioni di 1º e 2º grado ed altre ricerche che ne dipendono (libro II); da ultimo la teorica generale delle equazioni e la risoluzione di quelle di 3º e 4º grado (libro III).

Infine ha pubblicato la *Geometria di sito*, la quale non è altro che una geometria descrittiva, e contiene molte importanti e buone innovazioni e molti cambiamenti assai rilevanti. Questa

fessore, stampata in Napoli il 1840 a proposito del celebre concorso bandito da lui nel 1839 fra i matematici del regno delle due Sicilie allo scopo (egli diceva!) di promuovere e comparare i metodi per l'invenzione geometrica.

opera importante del Flauti potrebbe essere consultata assai utilmente anche oggi; ed è un'ingiustizia l'asserire che la *Geometria descrittiva* del Bellavitis sia l'unico contributo dato dall'Italia alla dottrina inventata dal Monge.

Inoltre il Flauti insieme al Fergola aveva formato un disegno di un corso di matematiche, che pubblicato doveva constare di 21 volumi; e certo una tale pubblicazione avrebbe fatto molto onore al nome del Fergola ed in parte anche a quello del Flauti; questo corso risultava dalle seguenti parti:

Parte I. *D'istituzione*, che comprendeva un corso di geometria elementare e sublime, ed un corso di analisi algebrica elementare e sublime.

Parte II. *Per l'invenzione geometrica*, che conteneva l'invenzione geometrica, la geometria di sito sul piano e nello spazio, il trattato analitico delle sezioni coniche e de' luoghi geometrici di 2º ordine.

Parte III. *Lavori analitici e di perfezionamento insieme raccolti ed ordinati. Opuscoli matematici*, che conteneva le dissertazioni preliminari del Flauti, il compimento dell'invenzione geometrica diviso in due parti, dei contatti circolari e sferici; l'iscrizione dei poligoni nelle curve di 2º ordine, ed altre ricerche correlative; uno dei principali problemi della piramide triangolare, in più modi risoluto ed anche generalizzato; ricerche sul cilindroide di Wallis; le nuove ricerche analitico-geometriche sulle trascendenti circolari con argomenti affini; miscellanea di analisi e di geometria; trattati fisico-matematici ecc.

Da quanto si è detto è d'uopo riconoscere che l'opera del Flauti, quantunque sia stata troppo informata ai metodi antichi e direi quasi rifuggente dai metodi moderni, tuttavia ha arrecato non lievi benefizî alla scienza ed all'insegnamento.

Oltre le opere sopra indicate, il Flauti ha pubblicato nelle memorie dell'Accademia delle scienze di Napoli le seguenti:

1. Un lavoro sul celebre problema del cilindroide Wallisiano;

2. *I problemi delle tazioni risoluti con nuovi artifizî di geometria* (1819);

3. *Nuove soluzioni de' problemi dei contatti sferici*;

4. Continuazione della precedente memoria sui contatti sferici;

5. *Soluzioni geometriche di alcuni principali problemi sulla piramide triangolare*;

6. *Divinazione delle soluzioni apolloniane del problema de' tre cerchi*;

7. *Del metodo in matematiche, della maniera di ordinare gli elementi di queste scienze e dell' insegnamento dei medesimi con una esposizione del corso di matematiche.* Dissertazioni lette alla Reale Accademia delle scienze di Napoli l'anno 1821 e pubblicate per la seconda volta nel 1822;

8. *La misura del cilindroide Wallisiano* (1839);

9. *Nota su di una dimostrazione analitica del V postulato di Euclide e sul principio di omogeneità, adottato da alcuni moderni analisti per fondamento di loro ricerche geometriche e di analisi algebrica* (1842);

10. *Nota su di un importante luogo di una memoria di Chasles, tendente a ricondurre l' insegnamento delle matematiche sul buon sentiero* (1846);

11. *Per la nuova Cattedra fondata nell' Università di Parigi per l' insegnamento della geometria superiore* (1848);

12. Commento al Lemma 28º del libro I de' *Principii matematici della filosofia naturale* di Newton;

13. *Anecdota ad publicam eruditionem spectantia* (1848);

14. *Osservazione sui metodi proposti da Lagrange per le curve inviluppi con altre ricerche affini* (1848-50);

15. *Nota su una dimostrazione analitica del V postulato di Euclide, fondandola sul principio di* omogeneità, *e sul modo convenevole di usare un tal principio nelle ricerche geometriche* (1852);

16. *Modo come i geometri antichi poterono pervenire a conoscere la diversa natura de' problemi*;

17. *Osservazioni storico-critiche sull'Archimede e l'Apollonio di Maurolico* (1857);

18. *Sulla genuina nozione delle quantità negative*;

19. *Su due libri di Apollonio Pergeo detti delle inclinazioni e sulle diverse restituzioni di essi* (1850).

Giorgini [1]). — *Gaetano Giorgini* nacque da famiglia patrizia ricchissima in Montignoso in quel di Lucca il 15 giugno 1795 e vi morì il 14 settembre 1874. Passò l'adolescenza presso la Corte della principessa Elisa in qualità di paggio, ed in compagnia di questa principessa fu a Parigi, ove soggiornò parecchi anni, studiandovi indefessamente scienze esatte, tanto che nel 1812 vi conseguì il primo premio di matematica nel concorso generale de' licei di Parigi, e poco dopo venne ammesso nella Scuola Politecnica, riuscendo primo per merito sopra tutti gli altri concorrenti, tra cui vi era Michele Chasles, che fu poi amico carissimo del Giorgini; e gli attestati rilasciatigli nel luglio del 1814 da Arago e Poisson provano che il Giorgini aveva approfittato immensamente delle lezioni, che aveva frequentato in quella scuola. Ritornato in patria non abbandonò i suoi studî prediletti delle matematiche, i quali gli fruttarono il posto di direttore delle acque, strade e macchie del Ducato di Lucca, conferitogli da Maria Luisa di Borbone nel 1818; e nel 1819 ottenne ad un tempo la cattedra di calcolo infinitesimale e di meccanica nel liceo; ma, a causa della ingiusta guerra mossagli dagli invidiosi, abbandonò il posto e si ritirò a vita privata in Firenze, ove nel 1825 dal granduca Leopoldo di Toscana fu nominato professore di matematiche applicate nell'Accademia di belle arti e membro del consiglio direttivo del nuovo corpo degl' ingegneri del Granducato. Fu conservatore del catasto, riordinò gli studî in Toscana, fu membro attivissimo dei varî Congressi scientifici, che si tennero in quell'epoca dal 1839 al 1846, fu Ambasciatore (1847), Ministro degli esteri dopo il 1849, Consigliere di Stato ed ingegnere idraulico; e da re Vittorio Emanuele fu nominato senatore; nel 1862 si ritirò definitivamente a vita privata.

Dall'elenco delle sue opere, che più sotto diamo, è facile persuadersi che egli era dotato di profonda coltura e di ricco genio inventivo, ad onta che il Segretario dell' Accademia di Francia, Giuseppe Bertrand, glielo avesse, forse per ispirito d' invidia, negato, nel ritratto che fece del Giorgini nell'*Elogio di Mi-*

1) Vedi nel *Giornale di matematiche* del BATTAGLINI, vol. XXXI, 1893, *Intorno alla vita e alle opere di G. Giorgini*, cenni di GINO LORIA.

chele Chasles: a torto il Bertrand cercò di diminuire il merito e di rimpicciolire la figura del Giorgini, per fare vie più grandeggiare quella dello Chasles; a torto dico, perchè non vi era proprio bisogno di questo tentativo da parte del segretario perpetuo dell'Accademia di Francia, dal momento che ognuno riconosceva in Chasles «l'Archimede del secolo XIX»[1]).

Ecco l'elenco de' suoi lavori:

a) *Teoria delle superficie di secondo ordine* (1817). Essa è un'esposizione elementare ed elegante delle proprietà delle superficie di 2° ordine ecc.;

b) *Teoremi sulle curve coniche* (1823). Questa memoria di poca importanza si può considerare il seguito del lavoro precedente;

c) *Teoria analitica delle proiezioni* (1819). In questo importante lavoro vengono posti i fondamenti della teoria delle proiezioni dei sistemi di segmenti rettilinei nel piano e nello spazio, dei sistemi di aree piane ed infine dei gruppi costituiti dai segmenti rettilinei ed aree piane; questi risultati generali così ottenuti vengono applicati alla poligonometria, alla poliedrometria ed alla dimostrazione di teoremi geometrici e cinematici.

d) *Sopra alcune proprietà de' piani de' momenti principali e delle coppie di forze equivalenti* (1828). Questa importante memoria

---

1) Riportiamo qui la lettera che il Bertrand inviò al prof. G. LORIA dopo che ebbe letta la biografia che quest'ultimo diede del Giorgini nel *Giornale di Matematiche* di Napoli.

6 juin 1893.

Monsieur,

« Gaitan Giorgini, d'aprés les souvenirs que Chasles aimait à rappeler, réunissait à une intelligence supérieure toutes les graces de l'esprit et les plus aimables qualités du cœur. En associant son nom à l'éloge de son ami j'ai voulu honorer sa mémoire, et si j'ai mal réussi, ma pensée a été mal exprimée.

« Je n'ignorais pas que Giorgini a produit quelques travaux mathématiques; je n'avais ni à les citer ni à les juger, sachant qu'ils étaient loin de réaliser les hautes espérances autorisées par de brillants débuts, et plus encore par la puissance de son esprit. Giorgini aurait pu devenir un grand géomètre, les circonstances l'ont détourné de la science. Tel était le jugement de Chasles, qui jamais ne prononçait son nom sans laisser paraître une affection émue et une estime qui allait jusqu'à l'admiration. Je ne l'ai connu que par la conversation de Chasles, et si ce que j'en ai dit n'a pas satisfait les amis de sa mémoire, c'est que j'ai bien mal traduit les impressions recueillies de la bouche d'un ami eccellent et devoué.

« Veuillez recevoir, monsieur, nos salutations les plus empressées ».

è una continuazione del lavoro precedente e contiene il primo studio del complesso lineare dal punto di vista meccanico;

e) *Intorno alle proprietà geometriche dei movimenti di un sistema di punti di forma invariabile* (1830). Questa elegantissima memoria ha per oggetto di riempire in parte la lacuna, che Carnot indicava con queste parole: « Les grandes difficultés analytiques qu'on rencontre dans la science de l'equilibre et du mouvement viennent principalment de ce que la théorie des mouvements géometriques n'est pas faite »; la prima parte contiene le proprietà geometriche del moto infinitesimo di un sistema rigido; nella seconda parte si spiega la composizione e la decomposizione dei movimenti infinitesimi di un sistema rigido ecc.;

f) *Appendice alla memoria intorno alle proprietà geometriche del movimento di un sistema di forma invariabile* (1832);

g) *Elementi di statica* (1835). Questo è il primo volume di un trattato completo di meccanica in quattro parti, che il Giorgini aveva divisato di pubblicare, ma che disgraziatamente non condusse a termine. Il volume esistente è raccomandabile agli studiosi per chiarezza, eleganza di esposizione e pel rigore scientifico, cui è sempre informato.

Il Giorgini era uno dei XL della Società italiana delle scienze sino dal 1832 e pensionario anziano nel 1864, professore onorario dell' Università di Pisa ecc.

Chelini[1]). — *Domenico Chelini* nacque in Gragnano su quel di Lucca da agiata famiglia campagnuola il 18 ottobre 1802 e morì in Roma il 16 novembre 1878. Studiò dapprima in Lucca sotto il Puccinelli dei canonici Lateranensi i primi rudimenti di lingua latina; fu iniziato agli studî scientifici dallo scolopio Pietrini. Dietro il consiglio e l'aiuto del Puccinelli il Chelini fu ammesso in Roma ad indossare l'abito di scolopio il 18 novembre 1818; così dal 1819 al 1826, potè proseguire i suoi studî nel Collegio Nazareno ove si distinse negli studî scientifici e letterari tanto, che, come ebbe compiuto il suo corso, fu ammesso ad in-

---

1) Vedi *In memoriam Dominici Chelini. Collectanea mathematica, nunc primum* edita cura et studio L. CREMONA et E. BELTRAMI, Milano, Hoepli, 1881.

segnare nel Collegio stesso; nel 1827 fu nominato professore di retorica a Narni, ove fu consacrato sacerdote. A Narni potè proseguire da sè i suoi studî prediletti di matematica, a cui si dedicò sempre con grande ardore fino alla sua morte. Da Narni passò nel 1828 a Città di Pieve come professore di filosofia, e di qui ad Alatri; e nel 1831 fu richiamato al Collegio Nazareno, ed ivi ebbe la cattedra di matematica, che tenne per ben venti anni, sebbene per alcuni anni, dopo il 1836, fosse anche professore di filosofia. Nel 1843 e 1844 ebbe occasione di conoscere in Roma Jacobi, che era insieme a Lejeune-Dirichlet, Steiner, Schlaeffi e Borchardt, de' quali meritò la benevolenza e la stima.

Nel 1851 fu nominato professore di meccanica ed idraulica nella Università di Bologna; nel 1860 ne fu destituito, perchè non prese parte alla funzione religiosa per la festa dello Statuto; ma nello stesso anno fu restituito alla sua cattedra, ove fu tollerato sino al 1864; nel quale anno non avendo voluto prestar il giuramento politico, impedendoglielo la sua qualità di ecclesiastico, venne nuovamente destituito, quantunque egli amasse sinceramente la patria e fosse alieno dall'associarsi a qualunque atto ostile al Governo nazionale. In quell'occasione il Chelini ebbe prove non dubbie di quanto affetto e quanta stima fosse circondato dai colleghi e dai suoi discepoli dell'Ateneo felsineo; e sopportò con ammirabile serenità di animo l' ingiusta misura, che l'aveva colpito. Nel 1867 ottenne nella Università di Roma la cattedra di meccanica razionale; ma quattro anni dopo, venne di bel nuovo dimesso, allorchè divenuta Roma capitale d' Italia, gli fu ripresentato il dilemma: « o giurare o andarsene ». D'allora in poi insegnò nella così detta Università vaticana e privatamente.

Da quanto si è detto risulta ben chiaramente la fermezza del carattere dello scolopio Chelini, che oggidì specialmente può ben servire d'esempio.

Sino dal 1847 era ascritto all'Accademia de' nuovi Lincei, nel 1854 lo fu a quella di Bologna e nel 1863 alla Società italiana dei XL; inoltre apparteneva a non poche altre Accademie scientifiche e Società minori. Il Chelini era di modi semplicissimi e di una modestia esemplare; la sua vita fu tutta dedita allo studio ed all' insegnamento, a cui si era dato con vero intelletto d'amore, siccome si addiceva al suo carattere ed all'abito che indossava, poichè scolopio vuol dire appartenente a quell'ordine religioso dedito all' insegnamento scolastico.

Le sue pubblicazioni sono in numero di 53 e comprendono un periodo di operosità di circa 44 anni. Il suo primo lavoro fu una memoria *Sulla teoria delle quantità proporzionali* (1834); e l' ultimo fu una memoria *Sopra alcune questioni dinamiche* (1877). Questi lavori furono pubblicati nel *Giornale arcadico*, nella *Raccolta scientifica* del Palomba, negli *Annali* del Tortolini, nel *Giornale di matematica* del Battaglini di Napoli, nel *Bollettino di bibliografia* ecc. del Boncompagni, negli *Atti dell'Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*, nelle *Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna*, ed infine gli *Elementi di meccanica razionale con appendice sui principî fondamentali delle matematiche* furono pubblicati separatamente nel 1860 in Bologna da Giuseppe Legnani. L' elenco completo delle opere del Chelini si trova nella citata *Collectanea mathematica*, redatto dal prof. Cremona. Il Beltrami ripartisce questi lavori del Chelini in quattro gruppi:

a) quelli che riguardano la geometria analitica propriamente detta;

b) quelli relativi alla geometria differenziale ed alla teoria delle superficie;

c) quelli di cinematica e di meccanica;

d) quelli diversi, che son ben pochi, poco profondi e di non grande mole.

Noi qui brevemente discorreremo dei lavori del Chelini: la sua vasta coltura ed il suo alto ingegno certo erano atti a coltivare e fecondare ogni più elevato ordine di ricerche matematiche; e senza dubbio egli avrebbe dato opere più originali, se non si fosse troppo preoccupato de' metodi e de' principî, non curandosi abbastanza della ricerca. Il Chelini coi suoi lavori pareva che si sforzasse ad essere più utile alla scuola che alla scienza; e si può dire, senza tema di andare errati, che l' intento, che si era prefisso, fu compiutamente raggiunto. Una caratteristica dei lavori del Chelini è l'eleganza e la semplicità e la brevità de' metodi impiegati armonicamente in ogni parte delle opere sue. Aveva un culto profondo per il Poinsot, del quale si sforzò di essere come il rappresentante in Italia.

Gruppo I. — Geometria analitica:

a) Teorica dei valori delle proiezioni. In questa memoria si trovano particolareggiatamente esposti e dichiarati tutti quei procedimenti elementari per la composizione non solo delle rette, ma anche delle aree, che egli adoperò in seguito in tutte le sue ricerche, e che dovevano a suo giudizio costituire come la base ed il meccanismo essenziale della geometria analitica.

b) Saggio di geometria analitica, trattata con nuovo metodo. In questo lavoro il Chelini applica sempre largamente tanto nella geometria del piano, quanto in quella dello spazio il suo metodo preferito delle proiezioni, vi dà sotto una forma molto semplice ed elegante l'equazione dell' iperboloide, considerato come superficie gobba a tre direttrici rettilinee; e dall'equazione subito deduce le proprietà delle generatrici e delle direttrici.

c) Sopra uno dei tre principî, che formano l'anello di congiunzione fra l'algebra e le diverse parti delle matematiche. In questo lavoro il Chelini applica il metodo delle proiezioni alla trigonometria piana e sferica.

d) Sui centri dei sistemi geometrici. Memoria assai importante.

e) Sull' uso sistematico dei principî relativi al metodo delle coordinate rettilinee.

f) Della teoria dei sistemi semplici di coordinate e sulla discussione dell'equazione generale di 2° grado in coordinate triangolari e tetraedriche.

g) Delle sezioni del cono e della prospettiva nell' insegnamento della geometria analitica.

h) Dell' uso del principio geometrico della risultante nella teoria dei tetraedri.

i) Sulla composizione geometrica dei sistemi di rette, di aree e di punti.

l) Sulla nuova geometria de' complessi. In queste due ultime memorie havvi l'esposizione più sistematica e più completa delle vedute fondamentali del Chelini; in essa egli ha dato il massimo

svolgimento al suo proposito di richiamare alla pura geometria tutti quei concetti e tutte quelle considerazioni, che, quantunque siansi presentate storicamente prima nella meccanica e nella cinematica, tuttavia non cessano di appartenere alla geometria.

m) Interpretazione geometrica di formule essenziali alle scienze dell'estrasione, del moto e delle forze. In questa memoria il Chelini applica i soliti principî di proiezione, di composizione e decomposizione di segmenti, di aree e di punti, e assumendo un tetraedro a figura di riferimento vi svolge in più larga misura la potenza de' suoi artifizi dimostrativi e vi stabilisce molte relazioni eleganti fra le coordinate tetraedriche di una retta ed altri elementi desunti dalla considerazione del tetraedro e della retta stessa.

n) Sopra alcuni punti mobili della teoria elementare dei tetraedri e delle coniche.

o) Intorno ai poligoni inscritti e circoscritti alle coniche.

Gruppo II. — Teoria delle superficie:

a) Sulla curvatura delle linee e delle superficie. In questa bella memoria il Chelini dà un riassunto molto completo di questa teoria con metodi intuitivi e semplicissimi, fondati specialmente su considerazioni di proiezione.

b) Dimostrazioni geometriche delle trasformazioni degl' integrali multipli relativi alle superficie ed ai volumi. In questa memoria stabilisce assai brevemente le formule di quadratura e cubatura in coordinate curvilinee ortogonali.

c) Teoremi relativi alle linee di curvatura e geodetiche sopra i paraboloidi.

d) Determinazione geometrica, in coordinate ellittiche, degli elementi ds_1, ds_2, ds_3, delle tre linee d' intersezione s_1, s_2, s_3, secondo cui si intersecano in un punto tre superficie ortogonali di 2° grado (λ), (μ), (ν).

e) Di alcuni teoremi di Gauss relativi alle superficie curve. Questa memoria ha per oggetto precipuo di far conoscere i risultati delle celebri *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

f) Osservazioni sopra una memoria del Sig. Liouville intorno alla teoria generale delle superficie. In questa nota il Chelini dà le formule per la curvatura geodetica e quella di Gauss ecc.

g) *Memoria sulle formule fondamentali riguardanti la curvatura delle superficie e delle linee.*

h) *Della curvatura delle superficie con metodo diretto ed intuitivo.*

i) *Teoria delle coordinate curvilinee nello spazio e nelle superficie.*

Queste due importantissime memorie sono le ultime di questo gruppo; nella prima il Chelini, fondandosi sempre sui suoi prediletti principî di proiezione, svolge la teoria generale della curvatura delle superficie; nella seconda compendia in bell'ordine tutto ciò che si sa di più fondamentale sulla teoria delle superficie, sia considerate isolatamente, sia coordinate in sistema triplo.

Gruppo III. — Meccanica:

a) *Equazioni differenziali del moto di un sistema di punti materiali.* Questo primo lavoro di meccanica del Chelini ha unicamente per iscopo la dimostrazione delle equazioni di Hamilton.

b) *Principio delle velocità virtuali.* In questa nota, giovandosi de' suoi metodi di proiezione, dimostra un tal principio.

c) *Nota sulla spiegazione della esperienza del Signor Foucault intorno al pendolo.*

d) *Determinazione analitica della rotazione dei corpi liberi secondo i concetti di Poinsot* (1859). Questa memoria è assai importante e fu lodata anche dagli stranieri.

e) *Gli elementi di meccanica razionale con appendice* (1860). È un'opera pregevolissima sotto ogni rapporto.

f) *Della legge onde un ellissoide eterogeneo propaga la sua attrazione da punto a punto.*

g) *Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile.*

h) *Dell'uso delle coordinate obliquangole nella determinazione dei momenti d' inerzia.*

i) *Sugli assi centrali delle forze e delle rotazioni nell'equilibrio e nel moto dei coni.*

l) *Sulle proprietà geometriche e dinamiche dei centri di percossa nei moti di rotazione.*

m) *Intorno ai principî fondamentali della dinamica con applicazioni al pendolo ed alla percussione de' corpi secondo Poinsot.*

n) *Sopra alcune questioni dinamiche.*

Gruppo IV. — Scritti di vario argomento:

a) *Teoria delle quantità proporzionali.*

b) *Formazione e dimostrazione della formula, che dà i valori delle incognite nelle equazioni di 1° grado.*

c) *Nota sulle proprietà di alcune espressioni algebriche relative alle superficie di 2° ordine e sulla riduzione di alcuni integrali multipli.*

d) *Teorema di Steiner sul volume di un corpo terminato da basi parallele e circoscritto lateralmente da una superficie rigata.*

e) *Nota sulla risoluzione in numeri interi dell'equazione* $x^2 + y^2 = N$.

Bellavitis [1]). — *Giusto Bellavitis* nacque di nobile ma non agiata famiglia in Bassano, grossa terra del Vicentino, il 22 novembre 1803 e morì a Padova il 9 novembre 1880. Fu istruito dal padre, ragioniere del comune di Bassano; nominato cancellista di detto municipio, ebbe agio di dedicarsi agli studî matematici. Il 26 settembre 1840 fu eletto membro pensionato del Regio Istituto veneto di scienze, e nel 1842 docente di matematica del liceo di Vicenza; ed infine nel 1845 professore della Università di Padova, ove insegnò sino al termine della sua vita. Ebbe moglie e figli, a cui fu affezionatissimo. Era di carattere vivace e d' ingegno prontissimo; uomo di molto buon cuore e di modi franchi ed amabili, saldo e sincero nell'amicizia. Nel suo primo lavoro, che apparve nel 1836, segnalò alcuni errori che si riscontravano nella meccanica del Venturoli riguardo al moto rotatorio. Pubblicò poi alcune memorie sul calcolo differenziale; una sulla determinazione delle aree dei poligoni e dei volumi dei poliedri in funzione delle distanze dei loro vertici, le cui espressioni furon ritrovate dallo Staudt nel 1842: una sulla teo-

1) Vedi *Commemorazione di G. Bellavitis* del prof. D. Turazza, letta il 23 ottobre 1881 ad un'adunanza del R. Istituto veneto di scienze ecc.; *Justus Bellavitis; eine Skizze seines Lebens und Wissenschaftlichen Wirkens* di A. Favaro, Dresden, 1881.

ria delle funzioni inverse; alcune osservazioni intorno agli immaginari; una memoria sopra alcune formole e serie infinite relative ai fattoriali ed agli integrali euleriani, ed infine alcune memorie sulla geometria derivata, che videro la luce negli anni 1832 e 1838. Pubblicò alcune note sulla classificazione delle curve di 3° e 4° ordine; ed infine una geometria descrittiva di assai pregio. Nei lavori d'indole algebrica primeggiano le ricerche intorno alla risoluzione delle equazioni numeriche, che inserì negli *Atti* e nelle *Memorie del Regio Istituto veneto di scienze*. Inoltre pubblicò negli *Annali* di Tortolini e negli *Atti dell'Accademia dei Lincei* alcune note sulla partizione dei numeri, sull'analisi indeterminata, sugl'immaginari, sui numeri bernoulliani, sui determinanti e sulle sostituzioni lineari del Salmon; inoltre pubblicò un'algebra, che ha un certo valore; qui non parleremo dei suoi lavori d'indole filosofica o riguardanti la meccanica e la fisica. Invece discorreremo della sua opera originale: *Il calcolo delle equipollenze*, a cui il Bellavitis, deve principalmente la sua fama. Carnot nella sua *Géometrie de position* (1803) aveva già parlato dei vantaggi che venivano alla geometria coll'introdurre in essa di un algoritmo, che ad un tempo rappresentasse la grandezza e la posizione delle diverse parti di una figura; talchè senza aver bisogno di ricorrere a considerazioni geometriche speciali, si potessero ottenere i risultati cercati mediante l'applicazione di un calcolo fondato sopra un piccolo numero di leggi generali. Il desiderio di Carnot, come ben dice F. Hoüel, fu compiutamente realizzato nell'anno 1835, dopo 32 anni, dal genio inventivo di Giusto Bellavitis col suo *Calcolo delle equipollenze*. Questo metodo presenta questi vantaggi principali:

1) L'abbondanza dei teoremi, che discendono da un unico principio; ogni proprietà dei punti in una retta dà immediatamente una proprietà dei punti di un piano, giacchè cambiansi l'equazioni relative ai primi punti in equipollenze relative alle seconde.

2) La facilità con cui si giunge alla soluzione grafica dei problemi per quelle questioni, che paiono ben difficili; questo metodo fornisce direttamente soluzioni assai più brevi di quelle scoperte mediante combinazioni artificiali di teoremi geometrici.

3) La teoria delle curve, sbarazzata da ogni particolar sistema di coordinate, conduce a formule più semplici e ad un tempo più generali, che esprimono le affinità delle curve senza riferirle ad alcun elemento arbitrario.

4) Questo metodo fornisce il tipo reale delle quantità immaginarie, mediante il quale sono pienamente giustificati i calcoli dell'algebra nel modo, che Cayley riguardava come il solo soddisfacente.

Il metodo delle equipollenze applicato alle figure piane, come dice il Turazza, esprime tutto intero il soggetto geometrico, ed è senza dubbio uno de' modi più semplici e più diretti di rappresentare le relazioni di grandezza e di posizione; ma il metodo delle equipollenze perde compiutamente questo suo pregio, quando si voglia applicarlo alle figure dello spazio, e vani riuscirono gli sforzi fatti dal Bellavitis allo scopo di renderne possibile l'applicazione alle figure a tre dimensioni. A tal uopo occorreva escogitare un nuovo algoritmo, che come quello delle equipollenze in un piano, avesse un significato geometrico, ed il conseguire ciò, come si è veduto nel Capitolo XIX, era riservato ad Hamilton col suo metodo dei quaternioni. Il Bellavitis aveva tentato una segnatura relativa alla direzione nello spazio, e mercè la quale potè giungere alla formola della trasformazione delle coordinate; ma qui il Bellavitis si dovè arrestare, e, come si è detto, i nuovi simboli furono introdotti dal matematico inglese.

Col metodo delle equipollenze il Bellavitis risolvè molti e svariatissimi problemi, alcuni de' quali assai difficili, e mercè questo metodo ne potè dare soluzioni brevi ed eleganti; egli è certo che questo nuovo istrumento in mano del proprio inventore faceva miracoli, cioè dava più di quello che avrebbe dato in altre mani. È curioso notare che il Bellavitis diede un'accurata esposizione del metodo dei quaternioni di Hamilton, cercando collegarlo con quello delle equipollenze, e ne fece delle importanti applicazioni al triangolo sferico, alla composizione dei moti rotatori coi progressivi, al prodotto geometrico dei lati di un pentagono gobbo inscritto in una sfera, al teorema che le altezze di un tetraedro sono quattro generatrici di un iperboloide.

Il metodo delle equipollenze, tradotto anche in Francia dal Laisant, non ha incontrato gran favore fra gli scienziati; e di ciò più volte si è lagnato il Bellavitis. La causa di questo fatto forse la si trova nella poca simmetria dei calcoli, cui questo metodo conduce, e nell'avere avuti per emuli due metodi sorti circa nella stessa epoca, cioè il *calcolo baricentrico* del Möbius ed il *metodo* suaccennato *dei quaternioni* dell' Hamilton.

Bedetti [1]). — *Giulio Bedetti* nacque in Bologna nel 1809 e vi morì il 31 gennaio 1845; sotto il Lapi studiò matematiche e nel 1823 conseguì la laurea; fu astronomo alla Specola di detta città, appartenne alla Facoltà matematica di quella Università e fu membro dell'Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Il Bedetti ha pubblicato due importantissime memorie: la prima *Sul piano tangente* (1842); la seconda *Sulla quadratura delle superficie curve* (1844), in cui tratta di alcune cose riguardanti la loro curvatura e del relativo postulato d'Archimede; esse si leggono nei *Rendiconti dell'Accademia dell'Istituto delle scienze di Bologna* (Tomi X e VI). Inoltre negli stessi *Rendiconti* sono stati pubblicati i seguenti lavori:

3. *Del moto di due mobili, che a vicenda si attraggono* (1841).
4. *Delle massime e minime distanze di un punto dato da una data linea, coll'applicazione alle sezioni coniche, ossia alla materia del libro V delle coniche d'Apollonio Pergeo* (1843).
5. *Intorno alle rette normali alle superficie curve* (1844).

Il Bedetti aveva familiari tanto la rigorosa analisi di Apollonio, quanto l'analisi moderna.

Sannia [2]). — *Achille Sannia* nacque da buona famiglia il 22 aprile 1822 in Campobasso, e morì in Napoli l' 8 febbraio 1892. Il padre come magistrato fu trasferito a Lucera, ove il figlio Achille fece i primi studî; poi li compì a Napoli, ove il genitore suo era arrivato all'alta carica di consigliere della Corte suprema, posto che egli perdè ben presto essendosi ribellato all'arbitrio ed alla prepotenza del re. Il povero Achille così dovè trascorrere gli ultimi anni di sua giovinezza fra stenti e privazioni; ma non

1) Vedi *Annali di fisica, chimica e matematiche* ecc. di G. A. Maiocchi, vol. XVIII, 2° trimestre 1845, p. 189, Milano.

2) Vedi la Prefazione alla sua *Geometria proiettiva*, scritta dal prof. E. D'Ovidio; inoltre la *Commemorazione* letta all'Accademia di Palermo da G. Torelli (1892).

si arrestò negli studî matematici, che condusse a compimento (1847) nella scuola di ponti e strade trasformata poi in iscuola per gl' ingegneri, ove per benevolenza de' suoi professori, quantunque mal visto dalla polizia borbonica, fu dopo qualche anno (1853) nominato professore. In quell'epoca per opera del mal Governo borbonico lo studio universitario intisichiva, ed in quella vece fioriva il privato; perciò il Sannia aprì uno studio di matematiche, che rese segnalati servigi (1825-1865), poichè il Sannia era un professore come suol dirsi nato, il vero modello del docente: chiaro ed accurato nella esposizione, di parola facile e precisa, di ingegno grande e di coltura vasta, onde non poteva non riuscire un eccellente insegnante; e tale sempre si mantenne; e questo è uno dei principali suoi meriti; onde non pochi furono gli allievi che egli fece, i quali poi occuparono posti eminenti nel campo delle matematiche. Nel 1865, in cui egli chiuse lo studio privato, entrò nella Università in qualità di professore di geometria proiettiva. Quando il governo italiano lo nominò Direttore della scuola degl' ingegneri, egli con rara modestia declinò la carica offertagli, pregando il Governo di conferirla all' illustre Padula.

Occupò molte cariche politiche, le quali gli tolsero molto tempo allo studio; e gli procurarono più amarezze, che gioie; fu consigliere del Comune di Napoli e di altre città, Deputato al Parlamento e da ultimo Senatore.

Coltivava con amore, oltre lo studio delle matematiche, anche quello del nostro idioma; e si dice che sapesse a memoria tutta la *Divina Commedia*. Ma la sua passione dominante, prediletta, era l' insegnamento: faceva lezione ai suoi scolari anche per via. Per eccessiva modestia, e forse per troppo scrupolo, durante la sua verde età non pubblicò nessun lavoro; poi essendosi dato anima e corpo all' insegnamento, richiamò tutta la sua attenzione ed il suo ingegno su di esso.

Insieme al proprio nipote, Enrico d'Ovidio, eminente matematico della scuola napoletana, ora professore emerito dell'Università di Torino, pubblicò gli *Elementi di geometria* che è uno de' migliori libri di testo che possegga l' Italia. Non molto tempo prima di morire pubblicò le sue *Lezioni di Geometria proiettiva*, opera di molto pregio per dovizia di materiali che in essa vi trovi, per eleganza e generalità delle dimostrazioni e delle costruzioni; opera che ebbero anche a lodare il Cremona ed il Segre che la definisce un trattato scientifico di geometria pura.

Battaglini [1]). — *Giuseppe Battaglini* nacque a Napoli l'11 gennaio 1826 e vi morì il 29 aprile 1892. Gran parte della sua prima età trascorse in Martina Franca (provincia di Lecce) nella casa del nonno paterno, ove condusse a buon termine gli studî di coltura generale. Ritornato a Napoli studiò privatamente la matematica, e poi entrò nel 1844 nella scuola di ponti e strade, d'onde nel 1848 uscì ingegnere; ed in quello stesso anno entrò come assistente presso l'Osservatorio astronomico di Capodimonte, posto offertogli dal direttore Capocci; ma dopo pochi mesi per ragioni politiche si dimise e dovè rassegnarsi ad aspettare per ben dodici anni prima di riavere un posto governativo; ed intanto studiò profondamente la matematica, campando la vita con private lezioni. Nel 1860 fu nominato, dal nuovo Governo, consigliere della pubblica istruzione e professore ordinario di geometria superiore nella Università di Napoli, che tenne sino al 1872, allorchè il Governo lo trasferì all'Università di Roma, ove insegnò calcolo infinitesimale ed alcuni dei più importanti rami delle matematiche superiori; per ragioni di salute, nel 1885, ritornò a Napoli, ove risedè fino alla sua morte. Il Battaglini era di carattere assai gioviale; d'ingegno pronto e di una memoria tenacissima, prodigiosa. Possedeva una vastissima coltura matematica, filosofica e letteraria; era di carattere modesto; si compiaceva spesso di conversare co' suoi alunni, cui era largo di consigli e di aiuti. Nelle sue lezioni universitarie preferiva ad ogni altro il metodo di assegnare sempre un buon libro di testo, cui si atteneva scrupolosamente. E forse questa è una delle ragioni, per cui ha tradotto in italiano quasi tutte le opere di T. Todhunter, la teoria delle sostituzioni del

1) Vedi *Giornale di matematica* del BATTAGLINI: *Cenno biografico su G. Battaglini*, del prof. A. CAPELLI, 1892. Vedi anche *Memorie dell'Accademia dei Lincei*, 1895: *Commemorazione di G. Battaglini* del prof. E. D'OVIDIO.

Netto, ecc. Era socio di molte Accademie scientifiche; l'ultima onorificenza l'ebbe dall'Università di Kasan, che lo aggregava quale professore onorario in occasione del primo centenario della nascita di Lobachewski. Il Battaglini fondò (1863), insieme ad altri matematici, e diresse per molti anni il *Giornale di Matematiche* che porta ancora il suo nome. Le sue memorie, circa una novantina, pubblicate in gran parte negli *Atti della R. Accademia dei Lincei* ed in quelli della *R. Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli*, si trovano quasi tutte riprodotte nel suo giornale. I più antichi dei suoi lavori, che si conoscono, furon pubblicati nel tomo II degli *Annali del Tortolini* di Roma, nel 1851; in essi si tratta de' poligoni inscritti e circoscritti nelle coniche e nelle quartiche; un altro ha per argomento le condizioni, affinchè l'intersezione di due superficie di 2° grado si riduca a due curve piane. Pubblicò molte memorie sulle trasformazioni geometriche, incominciando a cercare una dipendenza di figure, che contenesse come casi particolari l'omografia e l'involuzione; trattò poi distesamente delle relazioni metriche relative alle forme geometriche di 1ª e 2ª specie; gettò le basi della teoria delle involuzioni dei diversi ordini; trovò i primi teoremi sulle proiettività cicliche, gettando così i primi semi della teoria delle trasformazioni periodiche. Dal 1864 al 1868 pubblicò una lunga serie di lavori riguardanti la teoria delle forme algebriche e l'interpretazione geometrica dei loro invarianti e covarianti; poi furon ripresi un po' più tardi e si chiudono colle memorie sui connessi ternari e sulle forme bilineari delle diverse specie (binarie, ternarie, quaternarie). Un altro gruppo di memorie, che abbracciano un periodo di circa sei anni, cioè dal 1866 al 1871, è informato ai concetti della nuova geometria di Plücker; alcune di esse sono sui complessi di rette, in cui si studia anche quel complesso di 2° grado, che chiamasi col suo nome; altri sono sulla meccanica, riguardanti la statica e la cinematica dei sistemi rigidi. Coltivò anche la geometria non-euclidea; lo provano la memoria *Sulla geometria immaginaria di Lobachewski* (1867); e quella *Sulla affinità circolare non-euclidea* (1876); inoltre tradusse le opere di Lobachewski e di Bolyai. A questi diversi gruppi di lavori aggiungeremo altre memorie isolate, in cui egli tratta argomenti diversi; tra esse ricordiamo le seguenti:

1. *Sulla partizione dei numeri* (1857).
2. *Sui determinanti* (1862).
3. *Sull'elettrometro bifilare* (1870).
4. *Sulla quadrica rispetto alla quale due quadriche date sono polari reciproche tra loro* (1872).
5. *Sopra una superficie di 8° ordine* (1875).
6. *Sulle cubiche ternarie sizigetiche*, memoria assai importante, inserita nel volume pubblicato in onore del Chelini (1879).
7. *Sull'equazione differenziale ellittica* (1880 e 1885).
8. *Sui punti sestatici di una curva di ordine qualunque* (1888).
9. *Intorno ad una serie di linee di 2° grado* (1892).

Riepigolando, adunque i lavori del Battaglini si possono distribuire nei seguenti gruppi [1]):

1. *Sulle forme geometriche di 1ª specie.*
2. *Sulle forme algebriche binarie.*
3. *Sulle forme geometriche di 2ª specie.*
4. *Sulle forme algebriche ternarie.*
5. *Sui complessi di rette.*
6. *Sull'applicazione della geometria della retta alla meccanica, e su altre questioni di meccanica.*
7. *Sulla geometria non-euclidea.*
8. *Sui connessi.*
9. *Sulle curve e superficie di gradi superiori.*
10. *Sulle curve e superficie di 2° ordine.*
11. Lavori diversi.

Veronese [2]). — *Giuseppe Veronese* nacque a Chioggia il 7 maggio 1854; nella città natale percorse le scuole tecniche, a Venezia l'istituto tecnico, ove ebbe a maestro Pietro Cassani. Nel 1872 accettò di andare a Vienna come impiegato presso

1) Per maggiori particolari vedi la già citata *Commemorazione di G. Battaglini*, del prof. E. D'Ovidio.

2) Cfr. la *Commemorazione* fattane da C. Segre all'Accademia dei Lincei, nella seduta del 4 novembre 1917; ivi il lettore troverà il completo elenco delle pubblicazioni matematiche dell'eminente geometra.

un'impresa per la sistemazione del Danubio e disegnatore per l'Esposizione mondiale che ebbe luogo in quella città nell'anno successivo. Ma poco dopo lasciò quel posto per iscriversi nel Politecnico di Zurigo; ivi seguì di preferenza le lezioni del Fiedler e con tale profitto che ben presto potè fare importanti aggiunte a quanto allora sapevasi intorno alla configurazione a cui danno luogo sei punti di una conica. La risultante memoria sull'esagramma di Pascal fu da lui presentata come dissertazione di laurea all'Università di Roma, ove, sino dal novembre 1876, era ad un tempo studente e assistente alla cattedra di geometria proiettiva e descrittiva, della quale era titolare Salvatore-Dino. Quella memoria fu inserita fra quelle dell'Accademia dei Lincei, e in questo ufficio egli rimase durante quattro anni. In questo periodo egli presentò alla stessa Accademia due altri lavori relativi ad alcune notevoli configurazioni esistenti nel piano o nello spazio. Nell'anno 1880-81, grazie a un assegno di perfezionamento all'estero, il Veronese studiò a Lipsia sotto la direzione di F. Klein, ed appunto allora scrisse la fondamentale memoria sulla geometria sintetica degli iperspazi, che fu pubblicata nel vol. XIX dei *Mathematische Annalen*; complementi di essa sono due più brevi lavori, uno sulla geometria descrittiva dello spazio a quattro dimensioni, l'altro sulla superficie di quart'ordine con conica doppia, considerata come proiezione dell'intersezione di due varietà quadratiche pure dello spazio a quattro dimensioni, che videro la luce sotto gli auspicî del R. Istituto Veneto.

Durante il soggiorno a Lipsia il nostro matematico scrisse anche una memoria per rispondere al quesito posto nel 1881 dall'Accademia del Belgio, cioè alla questione di estendere la teoria dell'esagramma di Pascal a curve e superficie superiori; quantunque non sia stata premiata, essa fu pubblicata negli *Annali di matematica*.

Nell'ottobre del 1881 il Veronese veniva, in seguito a concorso, chiamato a occupare nell'Università di Padova la cattedra di Geometria analitica, già illustrata dal Bellavitis e la conservò per tutta la sua vita, mentre per incarico insegnò geometria superiore. Cominciò allora a meditare sui principî della geometria con tanto frutto che ne risultarono la poderosa opera *Fondamenti* *di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee* (Padova, 1891 ; trad. tedesca, Lipsia, 1894), nonchè un trattato scolastico di geometria dal Veronese composto col concorso di P. Gazzaniga e che ebbe molte edizioni.

Durante la XX Legislatura (1897-1900) fu deputato al Parlamento per il collegio di Chioggia ; dal 1899 fu consigliere del comune di Padova ; nel marzo 1904 fu nominato senatore.

Colpito da influenza nell' inverno 1911-12, non riacquistò più la primitiva salute. Morì a Padova, fra il generale rimpianto, il 17 luglio 1917.

Corrado Segre [1]. — *Corrado Segre* nacque a Saluzzo il 20 agosto 1863, e morì a Torino il 18 maggio 1924. Studiò con onore (1875-1879) nell' Istituto tecnico di Torino, ove ebbe a maestro Giuseppe Bruno, e poi nella Facoltà di matematica in quella Università (1879-1883).

Il padre voleva che il Nostro seguisse i corsi d' ingegneria ; ma egli preferì la scienza pura. Gravissimo fu per lui il quarto anno di studio universitario per gravi sventure domestiche, che influirono grandemente sulla sua salute. Ad onta di queste terribili traversie familiari ebbe la forza di redigere la sua magistrale dissertazione di laurea, che pubblicata in due parti nelle « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », ne occupa ben centocinquanta pagine ; essa è intitolata : *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni sulla geometria della retta e delle sue serie quadriche* (serie II, t. XXXVI, 1883). Fu laureato a pieni voti assoluti con lode.

Dal 1883 al 1888 fu nella Università di Torino assistente prima del D'Ovidio, allora professore di algebra complementare e di geometria analitica, poi, dal 1885, del Prof. Bruno, che gli affidò l' insegnamento della geometria proiettiva. Nel 1888 vinse il concorso per la cattedra di professore straordinario di geometria superiore nella stessa Università ; e nel 1892 fu promosso ordinario.

1) Vedi negli *Annali di matematica pura ed applicata*, serie 4ª, tomo II, fascicolo I, novembre 1924, la memoria *L'opera geometrica di Corrado Segre* di Gino Loria ; e nell' *Annuario della R. Università di Torino*, 1924-1925, la necrologia scritta dal prof. Gino Fano.

Il Nostro occupò detta cattedra con grande decoro ed onore per ben trentasei anni.

Egli portò importanti contributi alla geometria proiettiva (a 3 dimensioni), fra l'altro nel campo della geometria della retta ed in quello degli elementi immaginari.

Preceduto soltanto dal Veronese, già soprattutto nella Memoria da lui presentata per la tesi di laurea, avviò la costruzione della geometria proiettiva di uno spazio a più dimensioni, che rispecchia la teoria invariantiva, rispetto a sostituzioni lineari, delle equazioni algebriche fra un numero qualunque di variabili, come la geometria proiettiva dello spazio ordinario e del piano la rispecchiano per le equazioni fra sole 3 o 2 variabili. Ebbe un vastissimo sviluppo da parte del Nostro colla maggior parte dei suoi lavori del quinquennio 1883-1888 la geometria a più dimensioni, i quali s' imposero a tutti gli studiosi e procurarono al Segre, benchè giovanissimo, una eminente posizione scientifica.

Oltre la teoria delle quadriche, de' fasci da esse costituiti e delle loro varietà basi, che fanno parte della Memoria per la tesi di laurea, che ne fece altresì applicazione alla 1ª classificazione completa dei complessi quadratici dello spazio ordinario, ricorderemo lo studio dei fasci de' coni quadrici, delle omografie e correlazioni (dove, come anche nella classificazione dei fasci di quadriche, sono sfruttati importanti risultati analitici di Weierstrass, Fröbenius, Voss, Kronecker), delle rigate, delle varietà composte di una semplice infinità di piani e di spazi, di particolari varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni, e di enti, anche dello spazio ordinario, che da questi si possono ottenere come proiezioni, come ad es., le superficie del 4° ordine con conica doppia, e talune congruenze di rette del 2° e del 3° ordine.

Il Segre si occupò anche in seguito di spazi a più dimensioni ; e negli ultimi anni le sue ricerche riguardano i complessi lineari di piani dello spazio a 5 dimensioni, la geometria dei regoli a schiere rigate, che si rappresentano mediante le coniche sezioni piane di una quadrica dello spazio stesso, la superficie con una doppia infinità di curve piane o spaziali. Tanta e tale era la sua competenza nella geometria a più dimensioni da indurre la Direzione della « Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften » ad affidare al Nostro l'articolo sulla geometria a più dimensioni, pubblicato nel 1921, di oltre 200 pagine, ricco per ogni singolo argomento di preziosi dati bibliografici, molti de' quali raccolti e catalogati gradualmente con somma cura, durante forse un periodo di trent'anni.

Per molti rami delle matematiche fu in modo speciale feconda l'unione della geometria proiettiva iperspaziale colla teoria delle trasformazioni birazionali, (cremoniane). Precisamente dal Segre e dal Castelnuovo (che dal 1887 al 1891 trovossi a Torino in qualità di assistente) ebbe inizio l'applicazione dei metodi proiettivi iperspaziali allo studio della « geometria sopra una curva algebrica », cioè delle proprietà invarianti di una curva algebrica per trasformazioni birazionali, studio che aveva dato luogo a profonde ricerche con procedimenti del tutto diversi, da parte principalmente di Riemann, Clebsch, Brill, Noether.

Ricorderemo in ispecial modo che il Nostro si valse del concetto per lo studio di una corrispondenza fra due curve algebriche della rigata, costituita dalle rette congiungenti le coppie di punti omologhi delle due curve, una relazione importante fra i caratteri di una varietà ∞' di spazi, in particolare di una rigata e quelli di una curva tracciata su di essa; come ricorderemo che egli fece l'esposizione riassuntiva di tutto questo gruppo di ricerche in una Monografia del 1893.

In questo campo di principale importanza nacque così un nuovo procedimento di ricerca, essenzialmente geometrico ed italiano, che contribuì non poco a conseguire nuovi risultati ed a permettere nuovi punti di vista ed utili sguardi d'insieme; e come anche in seguito, congiuntamente ai metodi trascendenti, algebrici, aritmetici, contribuì ad affrontare con successo le analoghe e più difficili questioni di geometria sulle superficie algebriche e sulle varietà a tre o più dimensioni.

Benchè a questi ultimi e più recenti sviluppi, in gran parte gloria italiana, siano legati principalmente i nomi di geometri più giovani del Segre, tuttavia è pur merito del Nostro di avere aperta la nuova via, portandovi altresì notevoli contributi. Ricorderemo fra altri uno dei così detti « invarianti relativi » delle superficie, a cui è rimasto il nome di Zeuthen-Segre; inoltre il Segre lo estese a varietà a più dimensioni.

Ricordiamo la sua Memoria del 1896 sulla scomposizione delle singolarità di una superficie, ove sono lumeggiate nel miglior modo le questioni numerative sulle moltiplicità d'intersezione delle superficie con linee aventi singolarità qualunque negli stessi punti singolari delle prime, e sulle riduzioni apportate dalle diverse singolarità alla classe delle superficie.

Fu una creazione originale del Nostro verso il 1890 la teoria degli enti iperalgebrici, cui il Segre pervenne in due modi diversi; primo considerando rappresentazioni reali del sistema degli elementi complessi di una forma fondamentale di 1ª, 2ª specie, quale ad es. il piano e la sfera reali per le forme di 1ª specie, e quei luoghi di elementi complessi che vi hanno per immagini enti algebrici reali; secondo per via analitica, consideranto staccatamente come variabili indipendenti le due componenti reali, parte reale e coefficiente di i, di ogni coordinata complessa, e ponendo legami algebrici fra queste coppie di componenti reali. In luogo delle proiettività, quali più semplici corrispondenze algebriche, compaiono le antiproprietà, che servono a generare e studiare i più semplici enti iperalgebrici.

Più tardi nel 1912 il Nostro studiò la rappresentazione di un altro sistema di punti immaginari, aventi per coordinate i così detti « numeri duali », mediante omografie fra i punti ordinari delle rette dello spazio.

Un altro notevolissimo gruppo di lavori del Segre, dal 1907 in poi, appartiene al campo, largamente e brillantemente coltivato in questo periodo, della geometria proiettiva-differenziale. Al campo proiettivo-differenziale appartiene pure la Nota « Sugli elementi curvilinei che hanno in comune la tangente ed il piano osculatore », l'ultima da lui presentata (13 aprile 1924) all'Accademia dei Lincei, al pari di un'altra presentata nel marzo 1924, all'Accademia delle Scienze di Torino. A questa copiosa e svariata produzione scientifica del Segre era congiunta l'opera efficacissima d'insegnante, di vero Maestro in tutta l'estensione della parola. Le sue lezioni, redatte da lui, con gran cura, trascritte in appositi quaderni, erano mirabili per semplicità di esposizione e di chiarezza.

Sino dal 1889 era socio dell'Accademia delle Scienze di Torino, dal 1897 membro della Società Italiata delle scienze (detta dei XL), dal 1901 socio nazionale dell'Accademia dei Lincei ecc., e membro di molte accademie straniere. Di carattere nobile ed integro, saldo nelle sue convinzioni, franco e leale nell'espressione del suo pensiero, tenace nelle amicizie, dedicò tutta la sua vita alla scienza, alla scuola ed alla famiglia.

L'elenco delle pubblicazioni del Segre comprende 128 numeri, vanno dal 1883 al 1924, e trovasi al termine della necrologia già citata del Prof. Loria; vogliamo per brevità solo qui riportare, dalla stessa, l'elenco dei Corsi di lezioni tenuti da lui nella Università di Torino.

1888-1889. — *Teoria generale delle curve e superficie algebriche.*

1889-1890. — *Introduzione alla teoria delle curve e superficie algebriche.*

1890-1891. — *Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti.*

1891-1892. — *Geometria differenziale.*

1892-1893. — *Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti.*

1893-1894. — *Introduzione alla geometria delle trasformazioni birazionali del piano.*

1894-1895. — *Teoria delle singolarità delle curve e superficie algebriche.*

1895-1896. — (Manca l'indicazione dell'argomento).

1896-1897. — *Sulle singolarità delle curve e superficie algebriche.*

1897-1898. — *Gruppi continui di trasformazioni.*

1898-1899. — *Sulle curve algebriche di vari spazi.*

1899-1900. — *Geometria numerativa.*

1900-1901. — *Sulla teoria delle superficie razionali e dei sistemi lineari di curve piane.*

1901-1902. — *Introduzione alla geometria sopra una superficie algebrica.*

1902-1903. — *Geometria non-euclidea.*

1903-1904. — *Applicazione degli integrali abelliani alla geometria.*

1904-1905. — *Sulla forma delle curve algebriche.*

1905-1906. — *Introduzione alla classificazione delle curve algebriche sghembe.*

1906-1907. — *I gruppi in geometria.*

1907-1908. — *Capitoli vari di geometria della retta.*

1908-1909. — *Rassegna di concetti e metodi della geometria moderna.*

1909-1910. — *Superficie di 3° ordine e curve piane di 4° ordine.*

1910-1911. — *Le curve e le superficie algebriche, dal punto di vista della geometria delle trasformazioni birazionali.*

1911-1912. — *Gruppi continui di trasformazioni.*

1912-1913. — *Enti geometrici legati ai sistemi lineari di coniche e quadriche.*

1913-1914. — *Capitoli di geometria degli iperspazi.*

1914-1915. — *Teoria degl' invarianti applicata alla geometria.*

1915-1916. — *Capitoli di geometria differenziale.*

1916-1917. — *Vedute superiori della geometria elementare.*

1917-1918. — *Applicazione degl' integrali abelliani alle curve algebriche.*

1918-1919. — *Complessi di rette di 1° e di 2° grado.*

1919-1920. — *Sui gruppi d'ordine finito.*

1920-1921. — *Geometria dell'equazioni differenziali.*

1921-1922. — *Capitoli di geometria algebrica.*

1922-1923. — *Geometria dei cerchi e delle sfere.*

1923-1924. — *Capitoli di geometria differenziale.*

Armenante [1]. — *Angelo Armenante* nacque in Potenza il 21 ottobre 1844, e morì in Roma il 16 aprile 1878. Da principio scelse la carriera di ufficiale di marina, poi per ragioni di salute l'abbandonò; passò allora a studiare matematiche nella Università di Napoli, ove si laureò nel 1868. Vinta una borsa di studio, si recò a Milano, ove nell'Istituto Tecnico Superiore seguì (1868-69) con grande profitto i corsi di matematiche superiori, che allora vi davano Cremona, Brioschi e Casorati. Fu poi nominato (1869) professore di matematica nel liceo di Chieti, poi in quello di Parma e nel 1870 nel liceo Ennio Quirino Visconti di Roma.

Riordinata l'Università di Roma l'Armenante vi fu nominato (1871) professore incaricato di analisi superiore e quindi (1873) straordinario di geometria analitica, continuando però sempre a

[1] Vedi *Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane*, pubblicato per cura del prof. G. Battaglini, vol. XVI, 1878.

dare de' corsi liberi di analisi superiore nella scuola di magistero in quella Facoltà matematica. Ebbe anche l'incarico per alcun tempo delle esercitazioni matematiche per gli allievi della scuola degli ingegneri e fu anche addetto, qual consultore matematico, all' ufficio di statistica presso il Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. Molti e su svariati argomenti sono i lavori pubblicati dall'Armenante in Giornali scientifici e negli *Atti* delle Accademie: i più importanti riguardano la geometria superiore: uno tra essi, sul quale lavorava da qualche tempo, relativo alle trasformazioni razionali involutorie, è rimasto incompleto fra le sue carte; si ha ancora il corso litografato delle sue lezioni di geometria analitica, impartite all' Università di Roma.

Negli *Annali di matematica*, serie 2ª, vol. IV, pubblicò uno studio sulle superficie rigate razionali di ordine qualunque e nel *Giornale di matematiche* del Battaglini (tomi XI e XII), una memoria *Sulle quartiche di 2ª specie.*

Ecco l'elenco esatto dei suoi lavori:

1. *Sui determinati cubici* (1866).
2. *Intorno alla rappresentazione delle superficie gobbe di genere p = 0 su di un piano* (1869).
3. *Sulle curve gobbe razionali del 4° ordine* (1873).
4. *Generalizzazione dei connessi di 2° ordine e di 2ª classe* (1875). In collaborazione col prof. Jung.
5. *Sopra un'equazione di 8° grado.*
6. *Relazione sulle lezioni complementari date nell'Istituto Tecnico Superiore di Milano dai professori Brioschi, Casorati e Cremona.*
7. *Sulle trasformazioni birazionali od univoche (eindeutigen) e sulle curve normale e subnormale del genere p.* (1869).

Lavori diversi:

8. *Sulla tavola della popolazione italiana per età.*
9. *Della compilazione delle tavole di mortalità.*

De-Paolis [1]). — *Riccardo De-Paolis* nacque in Roma da buona famiglia il 9 gennaio 1854 e vi morì di peritonite tubercolare il 24 giugno 1892. Fece i suoi studî in detta città prima privatamente e poi nel liceo di Santa Maria della Pace; indi studiò matematiche nell' Università romana, sotto il Cremona, il Battaglini ed il Beltrami, e vi si laureò nel 1875. Era biondo e di gentile aspetto; d'ingegno pronto, parlatore chiaro e forbito, di carattere dolce e gioviale. Le sue lezioni erano molto chiare; era assai amato dai suoi studenti, con cui si compiaceva spesso di conversare; li consigliava amorevolmente, eccitandoli nello studio e nella ricerca, seguendo con cura i loro primi passi, esaminando e criticando attentamente i loro primi lavori. La sua bontà lo faceva amare da tutti. In famiglia era modello di marito, di padre, di fratello amorosissimo. In punto di morte non volle conforti religiosi, dicendo che la sua religione eran sempre state la famiglia e la scuola, e che per esse non aveva fatto mai nulla di cui potesse pentirsi, e volle che il fratello nel comporlo nella bara gli mettesse in mano, sul cuore, invece del crocifisso, i ritratti della moglie, della figlia e del fratello medesimo. Egli è un fatto che il De-Paolis abusò della sua forte fibra; volle studiare troppo; e nel 1888 e nel 1889 lavorò tanto, che cadde seriamente malato; e da quell'epoca non si riebbe più dal morbo, che lo trasse al sepolcro così presto.

1) Vedi *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, tomo VI, 1892: *Cenni biografici su R. De-Paolis*, del prof. C. Segre.

Come allievo del Cremona l'indirizzo costante delle ricerche scientifiche del De-Paolis fu quello geometrico del suo maestro; come del resto si può dire che ciò sia avvenuto in Italia per gran parte de' giovani geometri, dopo i lavori del Cremona sulla teoria geometrica delle curve e delle superficie e sulle trasformazioni birazionali, che portano il suo nome.

La sua carriera è brevissima: nel 1875 fu nominato professore di matematiche al Liceo di Caltanisetta; dopo un anno fu nominato assistente all' Università di Roma e supplente di geometria analitica, fino al 1878; in quell'anno fu nominato professore all' Università di Bologna; nel 1880 passò a quella di Pavia, e nello stesso anno all' Università di Pisa come professore di geometria superiore, ove rimase fino alla sua morte.

Il De-Paolis scrisse venti memorie, che furon in gran parte pubblicate negli *Atti dell'Accademia de' Lincei.* La prima fu per l'argomento di tesi di laurea: *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine* n *con un punto* (n — 1) *plo* (1875).

La memoria *Le trasformazioni piane doppie* (1877), è uno studio generale di queste trasformazioni.

A questa tennero dietro due altre memorie su due particolari trasformazioni doppie e sulle loro applicazioni, e sono:

La trasformazione piana doppia di 2° ordine e la sua applicazione alla geometria non euclidea (1878); *La trasformazione piana doppia di 3° ordine, 1° genere, e la sua applicazione alle curve di 4° ordine* (1878).

Abbiamo poi i lavori, che tengono per lo spazio un posto analogo a quello che pel piano avevano i lavori suaccennati, cioè: *Le trasformazioni doppie dello spazio* (1885); e le note *Su alcune particolari trasformazioni involutorie dello spazio* (1885); citiamo ancora le *Ricerche sulle superficie di 3° ordine* (1881), e la nota *Su alcune proprietà della superficie di Kummer* (1890), e i due lavori: *Sulla espressione di una forma binaria di grado* n *con una somma di potenze* n′ (1882), ed *Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari* (1886).

Il De-Paolis incomincia coi successivi lavori a manifestare la tendenza di risalire sempre ai fondamenti, ai principî delle teorie; e questa tendenza si manifesta nella sua memoria *Sui fondamenti della geometria proiettiva* (1881), ove egli prosegue e completa quanto avevano fatto Staudt, F. Klein, Darboux ed altri, onde stabilire il teorema fondamentale della geometria proiettiva, e per arrivare, senza ricorrere alla misura delle grandezze, alle coordinate proiettive nelle forme di prima specie; nonchè nei suoi *Elementi di Geometria*, ove mirabilmente egli fonde insieme la geometria solida colla piana e stabilisce rigorosamente le verità fondamentali della geometria e la teoria dell'equivalenza, dei limiti e della misura. Della tendenza, che aveva il De-Paolis, di occuparsi di trattazioni sistematiche, son prova *I fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari* (di rette) (1885).

Nei suoi scritti il De-Paolis, quantunque vi faccia uso del metodo analitico e più precisamente dell'algebra degli invarianti, tuttavia manifestò in generale preferenza, secondo la scuola cremoniana, pei metodi essenzialmente geometrici; ed infatti egli lavorò indefessamente ad emancipare la geometria dai sussidi

dell'algebra, a fondare la vera *Geometria pura*. Nel 1887 concorse al premio reale per le matematiche dell'Accademia dei Lincei con un lavoro di oltre 300 pagine manoscritte intitolato: *Fondamenti di una teoria puramente geometrica delle linee e delle superficie*; opera che fu giudicata non favorevolmente: ciò che accorò assai il De-Paolis, e fu la causa che lo spinse all'eccessivo lavoro, a quel lavoro, che doveva ucciderlo. Questa opera era divisa in tre parti:

1ª *Teoria generale delle corrispondenze tra i punti di più gruppi*; 2ª *Teoria generale delle corrispondenze proiettive, nelle forme fondamentali ad una dimensione*; 3ª *La stessa nelle forme fondamentali a tre dimensioni.*

La prima parte fu pubblicata col titolo: *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze, che si possono stabilire tra i loro elementi*, dalla Società italiana delle scienze (dei XL) (1890); la seconda col titolo: *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie*, dall'Accademia delle scienze di Torino (1892). Anche queste memorie sono insolite per l'acume e la potenza dell'ingegno geometrico, tanto nel campo dell'*Analysis situs*, quanto in quello della geometria proiettiva.

A dire di persone competenti, i corsi di geometria proiettiva e di geometria descrittiva, che tenne il De-Paolis nell'Università di Pisa, erano di gran pregio da meritare di essere pubblicati; ed infatti il De-Paolis ne aveva l'intenzione, e aveva già avviato delle trattative in proposito; e senza dubbio a quest'ora avrebbero veduto la luce, se la morte non avesse sì presto rapito alla scienza ed alla patria nostra un matematico di così alto ingegno.

Caporali [1]. — *Ettore Caporali* nacque a Perugia il 17 agosto 1855 e morì tragicamente in Napoli il 2 luglio 1886. Fece gli studi secondari nella sua città natale; quelli superiori nella Università di Roma, ove si laureò nel 1875; e nello stesso anno fu nominato professore di matematica al liceo di Catania;

[1]) Vedi la *Necrologia di E. Caporali* letta dal prof. D. Padeletti all'Università di Napoli (1836) ed inserita nelle *Memorie di Ettore Caporali*, Napoli, 1888. Inoltre: G. Loria, *L'opera scientifica di Ettore Caporali*, in *Giorn. di Mat.*, tomo XXVII, 1889.

nel 1876 assistente alla scuola degli ingegneri di Roma, e nel 1878 professore straordinario di geometria superiore della Università di Napoli; nel 1884 fu promosso ad ordinario. Come il De-Paolis, era allievo del Cremona; ed i suoi studî perciò furono informati alla scuola del suo maestro, che lo annoverò fra i suoi discepoli migliori e ne seguì con affetto, direi quasi paterno, la carriera, che iniziata sì splendidamente, era arra sicura di superbe speranze; e sino dalla pubblicazione delle sue prime memorie i matematici nostri videro in lui, chi avrebbe potuto tenere alto il nome della scienza italiana. Era socio di parecchie delle più importanti accademie italiane; ma egli non ambiva nè onori, nè uffici; solo era cara al suo cuore la estimazione grandissima, in cui lo tenevano i primi matematici italiani e stranieri. Era d'ingegno svegliatissimo; di una bontà d'animo eccezionale e di un onestà scrupolosa. Forse per l'eccessivo lavoro, fatto incessantemente nei più belli anni della sua giovinezza, la forza gli venne meno; e tanto egli si afflisse della diminuita attività del suo ingegno, che ciò egli reputava irreparabile, che in un momento di sconforto e di suprema tristezza, frutto di un amore infelice, rivolse la propria mano contro se stesso.

Nel corso della sua breve vita il Caporali pubblicò, negli *Atti* di varie Accademie, dodici memorie che qui menzioneremo brevemente:

1. *Sulla superficie del 5° ordine dotata di curva doppia di 5° ordine* (1875), fu argomento di tesi di laurea; ove diede con eleganza e sicurezza, mediante la rappresentazione piana, molte proprietà e nuove di queste superficie.
2. *Teoremi sulle curve di 3° ordine* (1878).
3. *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di Kummer* (1878).
4. *Sui complessi e sulle congruenze di secondo grado* (1878); ivi si stabilisce con metodo puramente geometrico la corrispondenza fra i punti dello spazio ed i raggi di un complesso di 2° grado e si deduce una serie d'importanti proprietà di questi complessi.
5. *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* (1879), pubblicata nel volume intitolato: *In memoriam Dominici Chelini Collectanea Mathematica*, edita a cura e studio di L. Cremona ed E. Beltrami. In questa memoria, che è forse la più importante, il Caporali estende il concetto della corrispondenza fra i punti di un piano e le curve di una rete, dato dal Cremona, fra i punti dello spazio e le curve di un sistema lineare triplamente infinito, e ne ricava molti importanti e nuovi risultati.
6. *Sulle trasformazioni univoche piane involutorie* (1879).
7. *Sopra alcuni sistemi di rette* (1879).
8. *Sull'esaedro completo* (1881).
9. *Teoremi sulle superfici di 3° ordine* (1881); ove tra gli altri teoremi è notevole il seguente: Quando 4 vertici di un pentagono coniugato ad una superficie cubica sono situati sopra di essa, anche il 5° vertice ed i 10 punti diagonali giacciono sulla superficie.
10. *Sulle tangenti condotte ad una curva algebrica piana per un punto multiplo* (1881).
11. *Sopra una certa curva del 4° ordine* (1883).
12. *Sul sistema di due forme binarie cubiche* (1883).

La Società italiana delle scienze, detta dei XL, per queste importanti memorie gli conferì un premio.

L'ultimo suo lavoro (1883) fu la relazione su una memoria del Cantor, presentato alla R. Accademia di Napoli pel concorso del 1882 su questo argomento: *Considerando la trasformazione birazionale fra due piani tra loro coincidenti, trovare le condizioni, affinchè applicando più volte di seguito la stessa trasformazione, si ritorni alla figura di partenza.*

Fra i manoscritti del Caporali, che furon pubblicati poi nel libro intitolato *Memorie di Geometria*, si trovano i seguenti lavori:

1. *Studio sull'esagramma di Pascal* (1879).
2. *Enunciati sulle configurazioni piane* (1879).
3. *Sulla teoria delle curve del 4° ordine* (1882-83).
4. *Formule generali sulle varietà dello spazio a quattro dimensioni.*
5. *Estensione del principio di corrispondenza agli spazi di più dimensioni* (1884).

6. *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* (1884), in collaborazione al Del-Pezzo.

7. Frammenti diversi.

Cremona [1]). — *Luigi Cremona* nacque a Pavia l' 8 dicembre 1830, e morì in Roma il 10 giugno 1903. Fece i suoi studî nell' Università di Pavia sotto il Brioschi, ove si laureò in matematiche pure ed applicate. Fu nominato professore di matematica nel liceo di Cremona, poi in quello di Sant'Alessandro di Milano e nel 1860 professore di geometria superiore nell' Università di Bologna; indi (1867) passò ad insegnare geometria superiore e statica grafica nell' Istituto Tecnico Superiore di Milano. Infine nel 1873 fu chiamato a riordinare la scuola degli ingegneri di Roma, della quale fu nominato Direttore, e ad un tempo professore di geometria proiettiva e successivamente di geometria superiore di quella Università.

Nel 1848 combattè nelle prime campagne della indipendenza e prese parte alla difesa di Venezia.

Tutta la sua vita si può dire che il Cremona la dedicò allo studio della geometria ed al riordinamento dell'insegnamento delle matematiche in Italia; ed a lui si deve l' introduzione nelle nostre scuole dell' insegnamento della geometria proiettiva e della statica grafica.

È superfluo dire che il Cremona era membro di tutte le Accademie e di tutte le Società scientifiche nostrane e straniere; cavaliere dell'ordine del merito di Savoia, senatore del regno fino dal 1889; membro del Consiglio Superiore della pubblica istruzione; fu per un mese nel 1898 anche Ministro della Pubblica Istruzione. Il Cremona ottenne due premi dall'Accademia delle scienze di Berlino nel 1866 e nel 1868; il primo per la memoria sulla superficie di 3° ordine, il secondo senza avervi concorso.

---

1) Vedi *Dizionario biografico*, di DE-GUBERNATIS; *Catalogue of scientific papers compiled by Society of London*; *Bibliografia sulla Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* ecc., di R. RUBINI; *Giornale di Matematiche di Napoli*, vol. I, 1863; *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, di G. LORIA; *Memorie della Accademia delle scienze di Torino*, serie 2ª, tomo 38, 1888.

Come il Brioschi ed il Betti, il prof. Cremona volle rialzare le sorti dello insegnamento delle matematiche elementari; ed a tal uopo tradusse dal tedesco gli eccellenti *Elementi di matematica* di Riccardo Baltzer, che comprende: *a*) l' aritmetica ordinaria; *b*) l'aritmetica generale; *c*) l'algebra; *d*) la planimetria; *e*) la stereometria; *f*) la trigonometria. Indubbiamente l' opera del Baltzer-Cremona introdotta nelle nostre scuole medie apportò i suoi frutti benefici, e forse è da deplorarsi che oggidì un sì pregevole testo sia stato messo da parte.

Discorrere a fondo della produzione scientifica del Cremona è cosa assai ardua, ed una tale discussione escirebbe dai limiti di un compendio come questo; perciò ci limiteremo ad accennare brevemente il contenuto dei suoi principali lavori, ed infine ne daremo un elenco, che non pretendiamo presentare come compiuto.

Nel 1848 lo Steiner, ristudiando la teoria delle polari di un punto rispetto ad una curva, mostrò com'essa poteva servire di fondamento ad una teoria delle curve piane, studiate senza impiegare le coordinate ed introdusse alcune notevoli curve covarianti ad una data. Queste brevi indicazioni, unitamente alle ricerche dello stesso Steiner, dello Chasles e di Jonquières sulla generalizzazione delle curve algebriche mediante fasci proiettivi di curve di ordini inferiori, servirono al Cremona di base alla sua *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*; in cui egli espone con metodo uniforme, insieme a molti risultati nuovi, tutto ciò che di più importante era stato ottenuto fino all'ora in quell' importantissimo ramo della geometria superiore. Nella prima parte di questo interessante lavoro il Cremona incomincia a trattare del *rapporto anarmonico, delle punteggiate e fasci proiettivi, dei centri ed assi armonici e della involuzione*; indi dichiara *la genesi delle curve piane*; infine passa a trattare del *numero delle condizioni, che determinano le curve di dato ordine e di data classe.*

Nella seconda parte dà la *definizione delle curve polari*; d'onde trae importantissimi teoremi; indi dà un'altra serie di *teoremi relativi al sistema di curve*, ripigliando l'argomento delle polari: e qui egli, considerando le *prime polari*, definisce le curve *stei-*

neriana ed *hessiana*. Indi passa a trattare delle *reti geometriche*, e qui studia quella speciale curva, che chiama *jacobiana*, e ne mostra importantissime proprietà. Poi passa a dimostrare le famose *formule* del Plücker; indi studia le *curve generate dalle polari, quando il polo si muove con legge data*; indi tratta delle *curve descritte da un punto*, le indicatrici del quale variano con legge data; poi passa ad esporre *alcune proprietà della curva hessiana* e *della steineriana*; e termina questa parte colle *proprietà delle seconde polari*.

La terza parte è consacrata alle *curve di terzo ordine*; in essa considera l' *hessiana* e la *cayleyliana* di una curva di 3° ordine; poi considera *un fascio di curve del 3° ordine, aventi i medesimi flessi*, applicando un teorema generale sui fasci di curve; ne trae alcuni importanti teoremi, quelli specialmente sulle *cubiche sizigetiche*; finalmente considera *la curva di 3° ordine come hessiana di tre diverse reti di coniche*.

Lo spirito di generalizzazione che informa le ricerche geometriche, dacchè su esse si esercita più o meno palesemente l' influenza dell'analisi, spinse ben presto i matematici ad occuparsi di quei fenomeni dello spazio, i quali presentano analogie con quelli già studiati nelle curve piane; però la teoria di queste figure è di origine moderna; il Cremona si occupò della generazione delle superficie mediante i sistemi proiettivi e reciproci di superficie di ordini inferiori, e ne espose la teoria nella sua memoria *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*. Nell'altra memoria *Sulle superficie di terz'ordine*, nonchè in una pubblicata nel 1871 nei *Rendiconti dell'Istituto lombardo*, il Cremona dà le molte proprietà relative alla distribuzione delle rette e dei piani tritangenti ed alle curve di una superficie cubica, scoperte da lui.

A lui devesi inoltre uno studio diffuso e particolareggiato sulle superficie rigate di 3° grado ed uno studio nuovo e completo sulle superficie rigate di 4° ordine; inoltre una memoria sulle superficie di 4° ordine, aventi per linea doppia una conica qualunque ed una sulle proprietà della superficie romana di Steiner.

Poi havvi un gruppo di memorie sopra notevoli proprietà delle curve sghembe; e cioè uno studio sulle cubiche gobbe e loro analogia colle coniche; una memoria sulla teoria delle curve gobbe tracciate su di un iperboloide ad una falda, della quale egli gettò le basi e che arricchì di molti teoremi; una nota sulle proprietà delle quartiche gobbe di 1ª specie; un'altra sulle quartiche di 2ª specie ecc.

Ora bisognerebbe dimostrare l' importanza dei lavori del Cremona sulla teoria delle trasformazioni geometriche, cioè in qual modo questo grande geometra abbia ridotto lo studio delle trasformazioni geometriche a quello di una rete omaloidica di curve e la determinazione di una tal rete alla risoluzione di un sistema indeterminato di equazioni lineari, ma ciò mi porterebbe troppo in lungo, nè per me sarebbe agevol compito. La prima generalizzazione delle trasformazioni cremoniane è la rappresentazione di una superficie su di un piano. La seconda diede origine alla teoria delle trasformazioni razionali dello spazio di cui la teoria generale fu fondata dal Cremona fino dal 1870. Senza dubbio, fra i lavori che riguardano questa teoria, il più importante è dovuto al Cremona. Guidato dall'analogia, che questa dottrina presenta con quella della corrispondenza univoca fra due piani, egli mostra come essa si riconduca allo studio dei sistemi omaloidici triplicemente infiniti di superficie: indi passa ad esporre un bellissimo metodo per ottenere un numero infinito di tali sistemi, allorchè si conosca la rappresentazione piana di una superficie; e mostra da ultimo con opportuni esempi, come la teoria delle trasformazioni razionali conduca alla rappresentazione di molte superficie su altre; in particolare alla rappresentazione piana di parecchie di esse: questa applicazione, unitamente al metodo sopra detto, mostra ad evidenza come dalla rappresentazione piana di una superficie si possono, ottenere non solo le rappresentazioni di infinite altre, ma anche innumerevoli trasformazioni razionali dello spazio.

Prima di dare l'elenco dei lavori del Cremona diremo che essi servirono a far riconquistare all' Italia quel posto distinto che le spetta nella scienza, e che la sua opera come insegnante fu altrettanto efficace quanto quella dello scienziato, poichè dalla scuola del Cremona uscirono i De-Paolis, i Caporali, i Bertini, i Veronese ecc. che tanto fecero e fanno onore alla scienza italiana.

Il Cremona, oltre essere stato un grande geometra, possedette il rarissimo pregio di essere un valentissimo insegnante; le sue lezioni, quantunque sempre riguardassero i rami più astrusi della geometria superiore, erano sempre chiare, limpide, piane: il Cremona possedeva il segreto in altissimo grado della comunicativa; aveva, direi quasi, la manìa di fare scomparire qualunque difficoltà.

Nel 1879 pubblicò in Milano gli *Elementi di Calcolo grafico* (1874), opera che è stata tradotta in inglese ed in altre lingue; inoltre: *Le figure reciproche nella statica grafica*, 3ª ediz., preceduta da un' introduzione del prof. Jung, Milano, 1879.

Nel 1873 pubblicò gli *Elementi di geometria proiettiva*, un volume il quale aveva per iscopo di diffondere in Italia le nuove teorie geometriche, formando un insieme, omogeneo ed armonico, di que' metodi che sogliono dirsi moderni, perchè creati e perfezionati da geometri a noi relativamente vicini, come Carnot, Brianchon, Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, Staudt ecc. Essa contiene ventitrè paragrafi: nel 1° l'autore dà le definizioni fondamentali; nel 2° espone la proiezione centrale; nel 3° l'omologia piana; nel 4° le figure omologiche a tre dimensioni; nel 5° si parla delle varie forme geometriche; nel 6° del principio di dualità; nel 7° delle forme proiettive fondamentali; nell' 8° delle forme armoniche; nel 9° dei rapporti anarmonici (doppi rapporti); nel 10° delle costruzioni di forme proiettive; nell' 11° si trattano i casi particolari e si risolvono degli esercizi; nel 12° si studia la involuzione; nel 13° e nel 14° si discorre delle forme proiettive nel cerchio e nelle coniche; il 15° contiene costruzioni ed esercizi; il 16° contiene i corollari dei teoremi di Pascal e di Brianchon; il 17° il teorema di Desargues; nel 18° si studiano gli elementi uniti e gli elementi doppi; nel 19° si risolvono i problemi di 2° grado; nel 20° si discorre dei poli e delle polari; nel 21° del centro e dei diametri; nel 22° si studiano le figure polari reciproche; il 23° contiene diversi corollari e costruzioni. Questa importante opera è stata tradotta in francese, in tedesco ed in inglese. A questo volume doveva seguirne un altro, che avrebbe dovuto contenere le proprietà focali delle coniche, la teoria dei coni e delle figure sferiche, ed i principî di geometria analitica, volume che disgraziatamente non venne mai pubblicato.

Ecco un elenco delle principali pubblicazioni disseminate nei periodici scientifici e negli *Atti* di alcune Accademie:

Annali di scienze matematiche-fisiche, pubblicati a Roma da B. Tortolini:

1. *Sulle tangenti sfero-coniugate*, vol. 6°, 1855.
2. *Intorno ad un teorema di Abel*, vol. 7°, 1856.
3. *Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura*, 2ª serie, vol. 1° e 2°, 1858-59.
4. *Intorno alle superficie della seconda classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe*, vol. 2°, 1859.
5. *Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quart'ordine (e terza classe)*, vol. 2°, 1859.
6. *Sopra un problema generale di geometria*, vol. 4°, 1860.
7. *Intorno ad una proprietà delle superficie curve, che comprende in sè come caso particolare il teorema di Dupin sulle tangenti congiunte*, vol. 4°, 1860.
8. *Sulle coniche e sulle superficie di second'ordine congiunte*, vol. 4°, 1860.
9. *Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado*, vol. 4°, 1861.
10. *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane*, vol. 6°, 1864.

Annali di matematiche, diretti da Brioschi e Cremona (Serie 2ª):

11. *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determinazione delle loro curve assintotiche*, vol. 1°, 1867-68.
12. *Sulle trasformazioni razionali dello spazio*, vol. 1°, tomo 5°, 1871-73.

Nouvelles Annales de Mathématiques, par MM. Terquem et Gerono:

13. *Sur les coniques sphériques*, vol. 19, 1860.
14. *Proprieté de la cubique gauche*, Ivi.
15. *Mémoire de Geométrie pure sur les cubiques gauches*, 2me série, vol. 1°, 1862.
16. *Démonstration géometrique de deux théorèmes relatif a la surface d'égale pente circonscrite à une conique*, 4me vol., 1865.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, di Milano:

17. *Sulle superficie gobbe del terz'ordine*, vol. 2°, p. 291, 1861.
18. *Rappresentazione delle superficie di Steiner e delle superficie gobbe del terzo grado sopra un piano*, vol. 4°, p. 15, 1867.
19. *Un teorema intorno alle forme quadriche non omogenee fra due variabili*, vol. 4°, p. 199, 1867.
20. *Sopra una certa famiglia di superficie gobbe*, vol. 4°, p. 10, 1868.
21. *Sopra una certa curva di quart'ordine*, vol. 5°, p. 19, 1868.
22. Sull'opera del prof. Casorati: *Teoria delle funzioni di variabili complesse*, vol. 5°, p. 420, 1868.

23. *Sulla trasformazione delle curve iperellittiche* vol. 2°, p. 566, 1869.
24. *Intorno al numero dei moduli delle equazioni e delle curve algebriche di un dato genere*, vol. 5°, p. 620, 1869.
25. *Sulle 27 rette di una superficie del terz'ordine*, vol. 3°, p. 209, 1870.
26. *Sulla superficie di 4° ordine, dotata di una conica doppia*, vol. 4°, pp. 140 e 159, 1871.
27. *Sulle trasformazioni razionali nello spazio*, vol. 4°, pp. 469 e 315, 1871 [1]).
28. *Rendiconti dei lavori della classe di scienze matematiche e naturali*, vol. 5°, p. 931, vol. 6°, p. 707, 1872-73.
29. *Sulla superficie e le curve che passano pei vertici d' infiniti poliedri formati da piani oscillatori di una cubica gobba*, vol. 12°, p. 347, 1879.

Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna :

30. *Introduz. ad una teoria geometrica dalle curve piane*, vol. 12°, 1861 [2]).
31. *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, 4ª ser., vol. 2°, 1862.
32. *Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba*, vol. 3°, 1863.
33. *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie*, vol. 6°, 1866 [3]).
34. *Sulle trasformazioni delle figure piane*, 2ª serie, vol. 6°, 1866.
35. *Sulle superficie gobbe di quarto grado*, vol. 8°, 1868.
36. *Sugli integrali a differenziale algebrico*, vol. 10°, 1870.
37. *Sulle linee di curvatura delle superficie di secondo grado*, 3ª serie, vol. 1°, 1871.
38. *Sulla trasformazione razionale di secondo grado nello spazio, la cui inversa è di quarto grado*, 3ª serie, vol. 1°, 1871.
39. *Rappresentazione piana di alcune figure algebriche dotate di curve cuspidali*, vol. 2°, 1872.

Rendiconto delle Sessioni dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna :

40. *Intorno alla trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad una retta qualunque di ciascuna delle due figure corrisponda nell'altra una sola retta*, 1861-62.

Journal für die reine und angewandte Mathematik :

41. *Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe*, vol. 58°, 1861.
42. *Note sur les cubiques gauches*, vol. 60°, 1862.
43. *Sur les surfaces gauches du 3me degré*, vol. 60°, 1862.
44. *Sur les hyperboloides de rotation qui passent par une cubique gauche donnée*, vol. 63°, 1864.

---

1) Quest'ultima memoria fu riprodotta in boemo da WEYR nel *Ziva* di Praga e dal DEWULF in francese nel *Bulletin de Sciences mathématiques et astronomiques*, diretto da DARBOUX a Parigi.

2) Il CURTZE ne fece nel 1865 una edizione tedesca a Greisswald, che fu più tardi ristampata dal CALVARY a Berlino e tradotta in lingua boema a Praga nel 1873 dal WEYR.

3) Il CURTZE ne fece una traduzione tedesca, Berlino, Calvary, 1870, aggiungendovi il *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, inserito nel vol. LXVIII del *Giornale di Crelle*.

45. *Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents*, vol. 63°, 1864.
46. *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, vol. 63°, 1864.
47. *Mémoire de géometrie pure sur les surfaces du 3me ordre*, vol. 68°, 1868.

Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris :

48. *Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloide à une nappe*, vol. 52°, 1861.
49. *Sur les surfaces développables du cinquième ordre*, vol. 54°, 1862.
50. *Sur les nombres de coniques qui satisfont à des conditions doubles*, vol. 59°, 1864.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato a Napoli da BATTAGLINI, JANNI e TRUDI:

51. *Sulla teoria delle coniche*, vol. 1°, 1863.
52. *Un teorema sulle cubiche gobbe*, vol. 1°, 1863.
53. *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, vol. 1°, 1863.
54. *Area d' un segmento di sezione conica*, vol. 1°, 1863.
55. *Sulla projezione iperboloidica di una cubica gobba*, vol. 2°, 1864.
56. *Sulla teoria delle coniche*, vol. 2°, 1864.
57. *Considerazioni sulle curve piane del terz'ordine*, vol. 2°, 1864.
58. *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, vol. 3°, 1865.
59. *Commemorazione di Eugenio Beltrami*, vol. 37°, 1900.

Reports of the British Association for the Advancement of Science :

60. *On the geometrical trasformation of plane curves*, vol. 34°, 1864.

The Oxford, Cambridge and Dublin Messinger of Mathematics :

61. *On the fourteen points conic*, vol. 3°.
62. *On normal to conics, a new treatment of the subject*, vol 3°.

Matematische Annalen, pubblicati a Leipzig dai sigg. A. CLEBSCH ed E. NEUMANN.

63. *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen*, vol. 4°, 1871.
64. *Observations géométriques à propos de la note de* M. BRIOSCHI: *Sur les tangentes doubles d'one courbe du 4me ordre avec un point double*, vol. 4°, 1871.

Collectanea Mathematica in memoriam Dominici Chelini, Milano, 1881:

65. *Sopra una certa superficie del 4° ordine.*

Pieri [1]). — *Mario Pieri* nacque nel 1858 a Lucca e vi morì il 1° marzo 1913. Fece gli studî secondari nella sua città natale, gli universitarî prima a Bologna, poi a Pisa, ove si laureò nel 1885. Insegnò prima nell'Accademia militare di Torino, poi geome-

---

1) Vedi nel *Bollettino di Bibl. e Storia delle scienze matematiche* del 1913, pp. 65-74 la necrologia del prof. BEPPO LEVI.

tria proiettiva e descrittiva nelle Università di Catania e Parma. Quale allievo del De-Paolis studiò alcune questioni relative alle trasformazioni birazionali e ad un tempo, primo in Italia, seguendo Zeuthen e Schubert, si occupò di geometria numerativa, ed in quest' ultimo campo ricorderemo le Note sul *Problema degli spazi secanti* (*Rendiconti dell'Istituto lombardo*, 26, 1893; 27, 1894; 28, 1895); quelle sul principio di corrispondenza e relative applicazioni simboliche nel senso dello Schubert (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 2, 3, 1897; *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, 25, 1890; *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 5, 1891).

Passò in seguito nel campo della geometria della retta, ove fece importanti ricerche.

Lo spirito sommamente critico dal nostro doveva maggiormente emergere nello studio dei fondamenti della geometria proiettiva reale e complessa, coi lavori seguenti:

1. *I principî della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo* (*Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino*, 2, 48, 1898).
2. *Circa il Teorema fondamentale di Staudt ed i principî della geometria proiettiva* (*Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, 39, 1904).
3. *Nuovi principî di geometria complessa* (*Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino*, 2, 55, 1905).

Si sa che è stata adoperata più del bisogno come idea primitiva nella geometria elementare la congruenza delle figure riguardata come trasformazione di punti in punti; il Pieri invece nell'esteso lavoro (*Memorie della Società italiana delle scienze*, 3, 15, 1908: *La Geometria elementare istituita sulle nozioni di «punto» e «sfera»*), definisce tutte quante le operazioni o relazioni geometriche fondamentali per mezzo delle idee di *punto* e di *equidistanza da un punto* con un procedimento analogo a quello, onde la geometria descrittiva introduce le collineazioni e le correlazioni, partendo *dai soli concetti di punto proiettivo e di allineamento fra punti proiettivi.*

Si possono ricordare inoltre altre note e memorie all'indirizzo logico-deduttivo, continuando in questi lavori gli studî critici del Peano; poi importanti ricerche di geometria differenziale e descrittiva ecc.

In ultimo, benchè gravemente malato, iniziò nuovi studî sulla recente analisi vettoriale, nel quale argomento pubblicò le note:

1. *Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 33, 1912).
2. *Sui sistemi di* ∞^1 *superficie* (*Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, 48, 1921).

II.

Gli analisti.

Lorgna [1]. — *Antonio Maria Lorgna* nacque in Verona nell'anno 1730 e vi morì il 28 giugno 1796. Era brigadiere e governatore della scuola militare in Verona; fondò la Società italiana delle scienze (dei XL) nel 1782, di cui fu naturalmente socio. Si occupò di fisica, di idraulica applicata e di matematiche; qui noi riporteremo solamente i lavori che il Lorgna ha lasciato su quest'ultima scienza:

1. *De quibusdam maximis et minimis* (1766).
2. *Opuscula tria ad res mathematicas pertinentia* (1767).
3. *Fabbrica ed usi principali della squadra di proporzione* (1768).
4. *Specimen de seribus convergentibus* (1775).
5. *De casu irreducibili et seribus infinitis* (1776).
6. *Saggi di statica e meccanica* (1782).
7. *Principî di geografia astronomica-geometrica* (1789).
8. *De sectionum conicarum organica descriptione* (1791).
9. *Nuova investigazione della somma generale delle serie* (1782).
10. *Ricerche intorno al calcolo integrale delle equazioni differenziali finite.*
11. *Della irriduttibilità della formola cardanica* (1782).
12. *Indagini nel calcolo integrale* (1784).
13. *Delle progressioni reciproche delle potenze affette* (1784).
14. *Sopra l'integrazione della formula* $Qdx + Py^2dx + dy = 0$ (1784).
15. *Delle variazioni analitiche finite* (1788).
16. *Teorema fisico-matematico intorno al moto de' liquidi uscenti da fori delle conserve* (1784).

[1]) Vedi *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch*, del POGGENDORFF, vol. II.

17. *Dell'azione di un corpo retto da un piano immobile esercitata ne' punti di appoggio che lo sostentano* (1794).
18. *Calcolo delle variazioni finite nella trigonometria piana e sferica* (1794).
19. *Méthode pour sommer les séries réciproques de sinus, cosinus etc.* (1788).
20. *Théorie d'une nouvelle espèce de calcul, fini et infinitésimal* (1788).
21. *Observationes circa aequationum diff.* $ydy + Mydx + Ndy = 0$ (1773).
22. *De curvarum in concamerationibus impulsa nova theoria* (1783).

Saladini [1]. — L'abate *Girolamo Saladini* nacque a Lucca nell'anno 1731 e morì a Bologna il 1° giugno 1813. Fu professore dell'Università di Bologna, prima di geometria (1761-1800), poi di astronomia (1800), ed infine di matematiche (1801); fu membro dell'Istituto delle scienze; appartenne alla Società italiana ecc.

Elenco dei lavori:

1. *Elementi geometriae infinitesimorum* (1760).
2. *Compendio di analisi finita ed infinitesimale* (1775).
3. *Methodus bernoulliana de reducendis quadraturis transcendentibus ad longitudinem curvarum algebricarum* (1767).
4. *Memoria circa la deviazione meridionale dei gravi liberamente cadenti* (1802).
5. *Riflessioni intorno la memoria circa alla salita delle macchine aerostatiche nell'aria, di Eulero* (1803).
6. *Metodo di determinare il centro di pressione nelle cateratte ossia parature di figure circolare ed ellittica* (1804).
7. *De meridionali gravium libere decidentium declinatione* (1794).
8. *Del salire dei corpi in aria per la loro specifica leggerezza* (1787).

Altri due lavori sulla stadera universale e sul compasso sferico.

[1]) Vedi POGGENDORFF, loc. cit.

Malfatti [1]. — *Giovanni Francesco Giuseppe Malfatti* nacque in Ala di Trento il 26 settembre 1731 e morì in Ferrara il 9 ottobre 1807. Fece i primi studî letterari in Trento, poi i liceali presso i padri gesuiti in Verona; indi passò a studiare all'età di 17 anni matematiche e filosofia a Bologna, ove ebbe a maestri Francesco Maria Zanotti, Laura Bassi ed il gesuita Vincenzo Riccati. Nel 1754 passò in casa del marchese Cristino Bevilacqua di Ferrara, che gli accordò, perchè potesse con suo agio darsi agli studî matematici, una pensione vitalizia; nel 1771 fu nominato professore di matematiche sublimi nell' Università di Ferrara, cattedra che occupò per circa 30 anni, e così cooperò a ridestare e diffondere l'amore alle matematiche discipline. La repubblica veneta gli offrì il posto di matematico di quel Governo e la Corte di Vienna quello di matematico di essa; ma egli affezionatissimo alla famiglia Bevilacqua ed a Ferrara rifiutò entrambe le offerte.

Il Malfatti era d'indole mite ed affettuosa; di carattere schietto e sincero, di animo generoso; non ambì onori; tuttavia era membro delle Accademie di Bologna, di Torino e di Mantova; e nel 1785 fu ascritto nel novero dei XL soci della Società italiana delle scienze dal suo fondatore Antonio Maria Lorgna, cui era legato da stretta amicizia.

Il Malfatti era profondo e valentissimo analista, ed il Lorgna stesso spesse volte lo consultava pe' suoi lavori: egli predilesse nei suoi studî gli argomenti di matematiche pure.

Elenco dei lavori:

1. *Due lettere latine dirette al Riccati intorno alla risoluzione delle equazioni del 4° grado* (1758).

2. *De aequationibus quadrato-cubicis disquisitio analytica*, Siena, 1771. In questa celebre memoria, dopo avere dato un nuovo metodo di risoluzione delle equazioni dei tre primi gradi, cioè dopo avere determinato per ciascuna di queste equazioni un'altra equazione inferiore di grado di una unità, denominata da lui risolvente, applica lo stesso metodo alle equazioni del 5° grado,

[1]) Vedi *Bullettino di Bigliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche* del BONCOMPAGNI, tomo IX, 1876.

e giunge, con un metodo ingegnosissimo di eliminazione, alla effettiva calcolazione della risolvente, la quale è di 4° grado [1]).

3. *Esame critico di un problema di probabilità di Daniele Bernoulli e soluzione di un altro problema analogo al bernoulliano* (1782).

4. *Delle formule differenziali, la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle sezioni coniche* (1784).

5. *Delle serie ricorrenti* (1786).

6. *Soluzione generale di un problema geometrico di Pappo alessandrino* (1788).

7. *Esame di una dimostrazione, che dà Eulero di un teorema analitico, e di una celebre regola per determinare la natura ed i valori prossimi delle radici di qualunque equazione* (1788).

8. *Essai analytique sur l' intégration de deux formules différentielles et sur la somme générale des séries harmoniques à termes rationels* (1788-89).

9. *Determinazione del tempo che impiega un grave discendente per un canale circolare* (1794).

10. *Tentativo sul problema delle pressioni che soffrono gli appoggi collocati agli angoli di una figura, derivate da un peso posto dentro la sua aja* (1799).

11. *Brevi riflessioni alla critica del tentativo sul problema delle pressioni, fatta dal Paoli nel tomo IX della Società dei XL* (1803).

[1]) Il BRIOSCHI, nella sua memoria *Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni di 5° grado*, pubblicata nelle *Memorie dell'Istituto lombardo di scienze e lettere*, vol. IX, 1863 e riprodotta negli *Annali* del TORTOLINI, tomo V, 1863, ben dice che «le scienze matematiche ebbero in Italia nella seconda metà del secolo XVIII valentissimi cultori, le cui opere, poco note fra noi, sono quasi sconosciute agli stranieri. La storia delle matematiche in questo periodo di tempo è così strettamente legata a quella delle nostre Accademie scientifiche, che soltanto frugando con diligenza negli *Atti* delle Società italiane delle scienze, in quelle delle Accademie di Torino, di Bologna, dei fisiocritici di Siena ecc. possiamo formarci un chiaro concetto del fiorire fra noi di questi studi in quell'epoca. Rinveniamo infatti in quegli *Atti*, oltre i primi lavori del sommo LAGRANGE, e la maggior parte dei lavori matematici di RUFFINI, quelli del PAOLI, del MALFATTI, del MANFREDI, del FONTANA, del SALADINI, del LORGNA, di quella schiera, cioè, di matematici, i quali o precedettero di poco tempo od ebbero parte all'educazione scientifica dei nostri egregi colleghi, il BORDONI, il MOSSOTTI, il PIOLA, il BELLI. Non v' ha dubbio che un lavoro storico intorno ai progressi delle matematiche in quell'epoca, nel quale si ponesse in evidenza la molta parte che vi bbero gl' Italiani, sarebbe non solo utile dal lato scientifico, ma per l' Italia tutta potrebbe ritenersi il soddisfacimento di un debito di gratitudine.... ».

12. *Memoria sopra un problema stereometrico* (1802 e 1803). È il problema che prese da lui il nome ed è il seguente: « In un prisma triangolare devono praticarsi tre cavità cilindriche, tali che i tre cilindri abbiano col prisma eguali altezze e il loro volume sia il massimo, ed il volume della massa rimanente della cavità sia il minimo »; il quale si riduce a quest'altro: « d'inscrivere in un dato triangolo tre cerchi tali, che si tocchino fra loro, e tali anche che due lati del triangolo siano tangenti a due qualunque di loro ».

13. *Dubbi proposti al socio Paolo Ruffini sulla sua dimostrazione della impossibilità di risolvere le equazioni superiori al 4° grado* (1804).

14. *Appendice al problema delle pressioni* (1805).

15. *Saggio di alcuni problemi numerici* (1805).

16. *Problema geometrico*: « *Fra i triangoli equilateri, i quadrati ed il circolo, che si possono inscrivere in un dato triangolo, scegliere la figura dell'aja massima* » (1806).

17. *Trattato inedito delle sezioni coniche e de' luoghi geometrici.*

Fontana [1]). — *Gregorio Fontana* nacque a Villa di Nogarola presso Rovereto il 7 dicembre 1734 e morì a Milano il 24 agosto 1803. Era sacerdote delle scuole pie; fu insegnante nelle case del suo ordine a Roma, a Sinigaglia, a Bologna, e poi nel 1793 professore di matematica all'Università di Pavia al posto del Boscovich. Nel 1800 venne a Milano, ove visse di una pensione; nel 1796 Napoleone lo nominò membro del consolato della repubblica cisalpina.

La sua produzione scientifica fu abbastanza ricca e svariata, tenuto conto de' tempi, in cui il Fontana viveva; e crediamo fare cosa utile dare l'elenco de' suoi principali lavori.

1. *Analyseos sublimioris opuscula* (1763).

2. *Memorie matematiche* (1796).

3. *Sopra i logaritmi delle quantità negative e sopra gl' immaginari* (1782).

1) Vedi POGGENDORFF, loc. cit.

4. *Sopra la discesa de' gravi per la convessità de' canali curvilinei* (1782).

5. *Sopra le serie* (1784).

6. *Sopra l'equazione di una curva, sopra la falsità di due famosi teoremi, e sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccioli* (1784).

7. *Sopra la forza centrifuga* (1784).

8. *Teoremi sopra le serie infinite convergenti ecc.* (1785).

9. *Ricerche analitiche sopra diversi soggetti* (1788).

10. *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale ed il nulla immaginario* (1798).

11. *Sopra alcune particolarità concernenti le gravità terrestri* (1799);

12. *Esame e rettificazione dei difetti che s' incontrano in tutte le dimostrazioni del teorema fondamentale di idraulica* (1799).

13. *Nuova soluzione di un problema statico euleriano* (1802).

14. *Sopra i progressi matematici di G. Cardano e B. Cavalieri ecc.* (1774).

15. *Dei trianguli sphaerici dimensione.*

16. *De binomii newtoniani indicem irrationalem habentis evolutione* (1774).

17. *Theoremata ad calculum integralem spectantia.*

18. *Octo problemata quaedam atmosphaerica.*

19. *De aequationibus indefinitis, deque methodo indeterminatorum.*

20. *De axibus aequilibrii.*

21. *Problemata de curvis a centro gravitatis descriptis.*

22. *De singularibus nonnullis centri gravitatis affectionibus in spatio hyperbolico-asymptotico.*

23. *Sopra il solido generato dalla rivoluzione dell'ellisse attorno ad uno de' suoi diametri.*

24. *Sopra il centro di gravità della logaritmica finita ed infinitamente lunga.*

Inoltre il Fontana si è dedicato allo studio della idrodinamica e della balistica, ed in questi rami ha lasciato alcuni lavori, i cui titoli qui per brevità non riportiamo.

Paoli [1]). — *Pietro Paoli* nacque in Livorno nel 1759 e morì il 21 febbraio 1839 a Pisa. Fece i primi studî a Livorno sotto i gesuiti; indi recossi a Pisa nel 1774, ove studiò scienze fisico-matematiche. Nel 1780 fu nominato professore di matematica nel ginnasio di Mantova; di là andò nel 1782 ad insegnare matematica nell' Università di Pavia; e nel 1784 passò ad insegnare algebra nell' Università di Pisa, cattedra che occupò fino al 1814. Fu poi nominato auditore dell' Università e nel 1816 sovraintendente agli studî di Toscana; indi consultore idraulico, ed in tal qualità diresse importanti lavori sull'Arno; e da ultimo fu presidente della Deputazione del catasto toscano; nel 1830 fu collocato a riposo. Il Paoli fu membro della Società italiana dei XL, dell'Accademia di Torino, di Napoli, di Palermo e membro corrispondente dell' Istituto di Francia.

Il Paoli scrisse gli *Opuscula analytica* (Livorno, 1780) ed i celebri *Elementi d'algebra*, di cui uscirono due edizioni, la seconda delle quali (Pisa, 1804), consta di tre volumi; inoltre il Paoli scrisse molte memorie di gran pregio, che furono in gran parte pubblicate negli *Atti della Società italiana dei XL*. Le opere del Paoli nel loro complesso rivelano in lui, forse più che in ogni altro geometra italiano del suo tempo, una cognizione profonda, completa e familiare dell'analisi matematica moderna; e ciò spiega il gran successo incontrato dagli *Elementi di algebra* del Paoli, libro che può essere utilmente adoperato anche presentemente.

Elenco dei lavori:

1. *Sulla teoria delle equazioni e sulle serie ricorrenti* (1775).
2. *Sulle equazioni a differenze finite e parziali* (1784).
3. *Sulle equazioni a differenze finite* (1788).
4. *Ricerche sulle serie* (1788).
5. *Riflessioni sull' integrazione di quelle equazioni, che non soddisfano alle condizioni d' integrabilità* (1788).
6. *Della integrazione dell'equazione a differenze parziali finite ed infinitesime* (1799).

1) Vedi in *Memorie e documenti per la storia dell'Università di Pavia*, par. I, 1878, scritti del prof. E. Beltrami.

7. *Nuova dimostrazione di un teorema importante sulla teoria dei numeri* (1789).
8. *Sulle equazioni a differenze parziali* (1807).
9. *Sul calcolo delle derivazioni* (1807).
10. *Sopra le equazioni primitive che soddisfano alle equazioni differenziali fra tre o un più gran numero di variabili* (1807).
11. *Sopra gl' integrali definiti* (1828).
12. *Sull' integrazione dell'equazione*:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(1-\frac{i\,(i+1)}{x^2}\right)y=0 \qquad (1828).$$

13. *Sull' uso del calcolo delle differenze finite nella dottrina degli integrali definiti* (1828).
14. *Opuscula analytica* (1780).

Ruffini [1]). — *Paolo Ruffini* nacque a Valentano, luogo del ducato di Castro, diocesi di Montefiascone, provincia di Roma, circondario di Viterbo, il 23 settembre 1765 da Basilio Ruffini reggiano, che era medico in quel paese, e da Francesca Ippoliti romana; e morì in Modena il 9 maggio 1822. Venne adolescente a Modena, dove compì gli studî elementari, che aveva incominciati a Reggio, e vi seguì poi il corso universitario, e si laureò in filosofia e medicina il 9 giugno 1788. Medico, come Cardano, si diede a coltivare le matematiche, che studiò sotto Paolo Cassiani, il quale insegnava instituzioni analitiche, e che il Ruffini sostituì appena laureatosi in qualità di professore ordinario di detta materia. Con decreto 30 giugno 1791 gli fu conferita una seconda cat-

1) Vedi Enrico Burckhardt, *Paolo Ruffini ed i primordi della teoria dei gruppi*, tradotta dal tedesco dal prof. E. Pascal (*Annali di Matematica*, 1894); *Influenza dell'opera matematica di Paolo Ruffini sullo svolgimento delle teorie algebriche*, discorso letto il 4 novembre 1902, in occasione della solenne apertura degli studi nella R. Università di Modena, dal prof. E. Bortolotti (Estratto dall'*Annuario della R. Università di Modena*, 1902-1903); *Notizie sulla vita e sugli scritti di Paolo Ruffini*, di A. Lombardi (Modena, presso la Tip. Comunale, 1824); *Notizie biografiche e letterarie degli scrittori dello Stato estense*, tomo I, fasc. VI, 1834. Le carte ed i manoscritti di Paolo Ruffini si trovano presso l'avv. Luigi Ruffini suo pronipote e segretario del R. Istituto di Belle Arti in Modena.

Si è intrapresa la stampa di tutti gli scritti del Ruffini; vedi *Opere matematiche di Paolo Ruffini (1765-1822) e il suo carteggio con gli scienziati del suo tempo*, a cura di E. Bortolotti, T. I (Palermo, 1912).

tedra, quella di *elementi matematici*, che era precedentemente occupata dal Fantini. Con editto 3 novembre 1797 fu nominato rappresentante del Dipartimento del Panaro pel Consiglio dei Juniori della Repubblica cisalpina, carica che rifiutò per la sua debole salute, per non trascurare i suoi studî e per la tema di non potere scrupolosamente adempiere il suo dovere di professore. Il Governo d'allora ingiunse al Ruffini di prestare il civico giuramento; egli rifiutò di darlo con queste parole: « Se lo spirito d'interesse potesse farmi agire contro coscienza, allora mi riputerei un pessimo cittadino, indegno di servire la patria, quella patria a cui mi protesto fedele e pel cui bene son pronto ad impegnare sempre tutte le mie forze » (Lettera del 17 aprile 1798-28 gennaio, anno VI della Repubblica, diretta « Ai cittadini della commissione della pubblica istruzione »). Con decreto 6 fiorile dell'anno VI della Repubblica fu destituito dalla Cattedra e dovette aspettare fino al 29 ottobre 1799 prima di esservi restituito. Trasformata l'Università di Modena in un Liceo superiore, il Governo d'allora gli offrì la cattedra d'instituzioni analitiche della Università di Pavia; ma il Ruffini la rifiutò. Il 13 marzo 1798, istituitasi a Modena la celebre Scuola del genio ed artiglieria, il Ruffini ne fu nominato professore. Ritornato il Governo ducale egli fu eletto Rettore della restaurata Università degli studî; indi fu nominato professore di clinica medica, di medicina pratica e di matematica applicata. Fu nominato socio dell'Accademia italiana delle scienze, detta dei XL, di cui fu presidente, e di quella Nazionale di Siena. Il Ruffini era modesto, cortese, remissivo nei modi, fermissimo nelle idee, intransigente anzi, specialmente in materia di religione; lo spirito nuovo portato dalla Rivoluzione non soffocato dalla Restaurazione, vedeva in lui piuttosto che il matematico insigne, onore e vanto della scienza e della patria, lo strumento del Governo reazionario. Leggendo le varie biografie ed i diversi elogi, che se ne fecero dopo la morte, traspare da essi, che il Ruffini sia stato tenuto più in conto come medico che per le sue opere matematiche; ma è un fatto che egli deve senza dubbio la sua fama ai suoi lavori di matematica, poichè i suoi scritti di medicina, di filosofia e di religione non hanno alcun valore.

Ora discorreremo brevemente dell'opera scientifica di questo matematico. Più sopra si è detto che il Ruffini venne tolto dalla cattedra e una tal destituzione durò qualche tempo; ma fu una fortunata interruzione questa, che gli diede agio di concentrare tutte le sue forze per condurre a termine la sua:

a) *Teoria generale delle equazioni*, in due volumi, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali del grado superiore al 4° (Bologna, 1798, nella stamperia di San Tommaso d'Aquino).

A questo lavoro tennero dietro due altre memorie:

b) *Intorno alla soluzione delle equazioni algebriche determinate particolari di grado superiore al 4°* (*Memorie della Società italiana delle scienze*, tomo IV, pp. 444-526, colla data 21 ottobre 1801). Questa memoria fu, tra tutte quelle del tomo IV, dichiarata degna di corona; e l'autore si ebbe il premio di una medaglia d'oro e di sessanta zecchini.

Nel volume seguente (X) delle stesse *Memorie* si trova a pp. 384-409 una lettera di Pietro Abbati (Conte Marescotti) al Ruffini (30 settembre 1802), in cui l'Abbati, convinto della esattezza della dimostrazione del Ruffini, imprende a semplificarla ed a generalizzarla. Questo lavoro dell'Abbati contiene molte cose nuove ed assai notevoli, tra cui la prima dimostrazione del teorema: « che il numero dei valori formalmente diversi di una funzione di n elementi è sempre un divisore di $n!$ ».

c) *Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del cerchio* (*Memorie della Società italiana delle scienze*, tomo IV, p. 527).

d) *Della insolubilità delle equazioni algebriche generali di grado superiore al 4°* (*Memorie della Società italiana delle scienze*, tomo X, parte 2ª, Modena, 1803, pp. 410-470, colla data 18 dicembre 1802).

e) *Memoria sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado* (Modena, appresso la Soc. Tip., 1804, pp. 5-175). Memoria coronata dalla Società italiana delle scienze.

f) *Risposta ai dubbi proposti dal socio Gian Francesco Malfatti sopra la insolubilità algebrica delle equazioni di grado supe-*

riore al 4° (*Memoria della Società italiana delle scienze*, tomo XII, parte I, Modena, 1805, pp. 213-267, colla data 27 giugno 1805).

g) *Riflessioni di Paolo Ruffini intorno ad un metodo proposto dal consocio Malfatti G. F. per la risoluzione delle equazioni del 5° grado* (*Memorie della Società italiana delle scienze*, tomo XII, parte I, pp. 321-340, colla data 21 settembre 1805).

h) *Della immortalità dell'anima* (in-8°, Modena, Soliani, 1806).

i) Per gli aspiranti alla scuola militare il Ruffini pubblicò un *Trattato di algebra elementare* (Modena, Società tipografica, 1807-1808, tomo II).

l) Ed un'*Appendice sull'applicazione dell'algebra alla geometria.*

m) Ritorna sull'argomento per « togliere la taccia di troppo vaghi a certi ragionamenti, i quali da alcuni, benchè insigni geometri, non sono stati forse approfonditi abbastanza »; e pel desiderio che « venga generalmente ammessa una proposizione, qual' è la insolubilità delle equazioni algebriche generali di grado superiore al 4°, la quale da alcuni non si considera vera, o almeno non si considera finora bastantemente provata » (Cfr. *Discorso preliminare*, pp. VII e VIII), raccogliendo in un opuscolo stampato in Modena, presso la Società tipografica l'anno 1813 col titolo *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali*, quanto antecedentemente aveva scritto su questa materia. La dimostrazione del teorema della insolubilità viene ivi data in una forma così semplice e piana, che salvo poche variazioni non sostanziali, è ancora quella che al dì d'oggi, con mutato nome, va per le scuole.

n) Volendo approfondire alcuni punti toccati nel libro di *Elementi di algebra*, egli pubblica infine una memoria col titolo: *Di un nuovo metodo generale per estrarre le radici numeriche*, (*Memorie della Società italiana delle scienze*, tomo XVI), e nel 1813, un'*Appendice* a quella memoria.

Le altre opere matematiche del Ruffini, che furon pubblicate nell' ultimo periodo della sua vita, sono:

o) Una memoria *Intorno al metodo generale proposto dal signor Hoene Wronski, onde risolvere le equazioni di tutti i gradi*; (stampata nel tomo XVIII delle *Memorie della Società dei XL*, Parte matematica, p. 56, 1820), e nel tomo stesso, pp. 69 e 269, due opuscoli).

p) *Della classificazione delle curve algebriche a semplice curvatura.*

q) Pubblicò ancora un'opera filosofica col titolo: *Riflessioni critiche sopra il saggio filosofico intorno alle probabilità del signor Conte Laplace* (Modena, appresso la Società tipografica, 1821).

r) Memoria sulle aree (inedita).

s) Si deve finalmente al Ruffini la regola, che porta il suo nome, e che serve a calcolare il quoziente ed il resto di un polinomio intero $P(x)$ diviso per $x \mp a$ e conseguentemente il valore di $P(x)$ per $x = \pm a$ [1]).

Il Burckhardt nella sua memoria dimostra questi tre fatti principali (loc. cit., p. 211):

1) che i concetti di primitività e transitività si trovano già esposti ed applicati nella teoria delle equazioni, pubblicata nel 1799 dal Ruffini;

2) che nella Memoria di Ruffini del 1801 era già indicata la via per giungere alla terza di quelle nozioni fondamentali, che non fu poi definitivamente acquistata se non dal Galois, nel 1832;

3) che appartengono al Ruffini quasi tutte le proposizioni attinenti a questa teoria, che ordinariamente si attribuiscono al Cauchy.

Perciò è ingiusto che tutt'ora, dopo la piena ed irrefutabile dimostrazione data dal Burckhardt della priorità del Ruffini, la dimostrazione del teorema da lui stesso scoperto si debba chiamare col nome di *Dimostrazione di Wantzel del teorema di Abel.*

Nella memoria meno nota, ma non meno importante, in cui tratta *Della soluzione delle equazioni algebriche determinate* il Ruffini, precorrendo di un trentennio lo sviluppo della scienza, dà in questo lavoro un primo saggio di applicazione di quelle teorie, che poi presero il nome dal Galois, ed ottiene notevolissimi risultati, fra cui ricorderemo lo scoprimento del legame che

---

1) A torto essa viene spesso attribuita all' Horner; cfr. F. CAJORI, *P. Ruffini e il cosiddetto « metodo di Horner »*. « Bollettino di Bibl. e Storia acc. », T. XII, 1911, pp. 81-86).

havvi fra la irriducibilità di un'equazione e la transitività del suo gruppo, e fra la risolubilità mediante equazioni ausiliarie di grado inferiore e la imprimitività dello stesso gruppo. Rammenteremo poi il contributo che il Ruffini ha dato alla teoria dei numeri trascendenti con le *Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del circolo.*

Inoltre ricorderemo il carteggio che il Ruffini ebbe, ma che ancora è inedito, col matematico Frullani; in esso egli dà prova di avere sulla convergenza delle serie, idee molto più avanzate che non avessero i matematici del suo tempo, idee che non seppero farsi strada se non dopo i lavori del Cauchy e del Riemann.

Le dimostrazioni date dal Ruffini certamente non sono prive di mende; il fatto di trovare poca chiarezza e precisione nelle definizioni e nelle dimostrazioni è un difetto del resto di cui non sono esenti nemmeno le opere de' migliori matematici di quel tempo. Il modo di esprimersi del Ruffini è difficile ad intendersi; e questa difficoltà era accresciuta dal fatto, che gran parte delle idee adoperate erano in quel tempo del tutto nuove; ed egli non cercò di renderle di facile uso con un opportuno sistema di espressioni e di adatte notazioni; se avesse nella sua dimostrazione introdotto il concetto di campo di razionalità, essa sarebbe riuscita più semplice e compiuta. Ma ad onta dei difetti, che possiede la sua dimostrazione, tuttavia gli scritti del Ruffini fecero, anche in intere teorie, progredire di molto l'algebra superiore.

Egli pel primo considerò a fondo il problema posto da Waring, Vandermonde, Lagrange ai loro seguaci, di una ricerca cioè sistematica delle permutazioni, per le quali una funzione razionale di n elementi muta o no il suo valore, e, almeno per $n = 5$, lo condusse a buon punto. Il Ruffini dimostrò pure compiutamente il teorema importante: « non esistono funzioni di cinque elementi a tre o quattro valori »; e pel primo applicò a questo campo di ricerche l'idea fondamentale di gruppo di operazioni e distinse i vari gruppi, che per quelle ricerche abbisognavano; diede poi la dimostrazione del teorema che: « non è possibile la soluzione per radicali delle equazioni di grado superiore con funzioni, che si esprimono razionalmente mediante le radici »; e tale

dimostrazione non solo la diede pel primo, ma dopo varie redazioni (non meno di cinque) la mise anche sotto quella forma, che ora si suole, come si è già detto più sopra, attribuire a Wantzel.

Per debito di giustizia accanto al Ruffini dobbiamo collocare il suo amico Abbati, il quale, benchè le sue ricerche fossero ispirate dal Ruffini, tuttavia riuscì in esse a dimostrare per la prima volta due teoremi fondamentali; l'Abbati ed il Ruffini si possono quindi ritenere come i fondatori della teoria dei gruppi.

Non sarà discaro ai nostri lettori se qui riporteremo alcuni passi del Cauchy e dell'Abel, dai quali risulterà chiaramente come tali matematici non ignorassero i lavori del Ruffini, e riporteremo anche alcuni ragguagli dei matematici d'oltr'alpe sulle Memorie del nostro matematico, dai quali emerge ad evidenza, che essi si mostrarono poco favorevoli a tali Memorie e poco proclivi a farle accogliere nei Rendiconti delle Accademie; e risulta anche come si guardassero bene dal darne il loro giudizio.

Ecco una lettera del Cauchy diretta al nostro Ruffini:

« Si je n'en ai pas parlé dans mon cours d'analyse (*del teorema di Ruffini*), c'est que, ce cours étant destiné aux élèves de l'École Royale Polytechnique, et ne devais pas trop m'écarter des matières indiquées dans les programmes de l'École. C'est pour la même raison que je n'ai rien dit ni de la résolution algébrique des équations binômes, donnée par M. Lagrange.... Mais, dans une autre mémoire, que j'ai lu l'année dernière à l'Académie des Sciences, j'ai cité votre travail, et après rappellé que vos démonstrations établissent l'impossibilité de résoudre algebriquement les équations, j'ai presenté des méthodes propres à donner les racines sous la forme d'intégrales définies.

« J'ajouterai que votre travail sur l'insolubilité algébrique des équations est précisement le titre que j'ai fait valoir dernièrement en votre faveur après de quelques membres de l'Académie, lorsqu'il s'est agi de nommer un corrispondent pour la section de géometrie.

« Arceuil près Paris, ce 20 Septembre 1821.

« A. L. CAUCHY ».

La prefazione all'ultimo lavoro di Abel contiene queste parole:

« Dans ce mémoire, je vais traiter le problème de la résolution algebrique des équations dans toutes sa généralité. Le premier, et, si je ne me trompe, le *seul* qui avant moi ait cherché à demontrer l'impossibilité de la résolution algèbrique des equations generales est le géomètre Ruffini; mais son mémoire est tellement compliqué qu'il est très-difficile de juger de la justesse de son raisonnement ».

Ecco i diversi giudizî, se tali si posson chiamare, che furono pronunciati dai contemporanei sulle ricerche del Ruffini.

Il Lagrange (allora già vecchio) sollecitato privatamente dal Ruffini, poi invitato dall' Istituto di Francia ad esaminare una sua memoria, dopo lunghissimo indugio, la rimandava rifiutandosi di emettere alcun giudizio « per non sollevare questioni fra i matematici dell' Istituto, nè entrare in discussione coll'autore ».

Il Legendre, che era collega di commissione, insieme a Lacroix, del Lagrange approvava quel divisamento, ed aggiungeva parlando ad amici comuni, che « la strada tenuta dal Ruffini, non avrebbe potuto mai condurre a provare ciò, che egli si era proposto ».

Il Delambre comunicava al Ruffini la decisione di quell' Istituto (di cui egli era segretario perpetuo), con lettera dell' 11 maggio 1811:

« Je conçois parfaitement que vous soyez peu satisfait du peu d'empressement qu'ont témoigné pour votre mémoire deux des commissaires qui vous avaient été donnés.

« Vous ne pouvez pourtant vous dissimuler que l'opinion la plus *géneralment répandue* est que s'il est impossible d'avoir una solution complète des équations algébriques, il ne soit aussi bien difficile de démontrer clairement cette impossibilité que tout le monde croît sentir. Quelque fût le parti qu'eussent embrassé vos commissaires, il leur fallait un travail très-considérable soit pour motiver leur approbation, soit pour réfuter votre démonstration. Vous connoissez assez le prix du temps pour concevoir aussi la répugnance qu'ont la plupart des géomètres pour s'occuper longtemps des travaux les uns des autres; et si par hasard il ne s'étaient pas trouvés de votre avis, ils auraient eu besoin d'être animés par un motif bien puissant pour entrer en lice avec un géomètre aussi savant et aussi exercé ».

Dall' Inghilterra il presidente della Società Reale sir Joseph Banks gli faceva scrivere dal Segretario Tommaso Young, « che coloro che avevano letto la sua memoria erano convinti della esattezza dei suoi ragionamenti », ma non diceva chi fossero quelli, nè gli accordava di sottoporre l'opera al giudizio della Società Reale di Londra.

Dalla Germania, il Gauss, cui il Ruffini fece pervenire le sue opere per mezzo del marchese Rangone, non si degnò mai di rispondergli, benchè reiteratamente ed insistentemente sollecitato. Bürg, Pasquich, Gerstner gli fecero sapere che lo tenevano in estimazione grandissima, ma che *non avevano tempo* di leggere i suoi lavori, interessantissimi e bellissimi, ma troppo difficili.

Il Delambre molto prima che il Ruffini presentasse la sua memoria gli aveva fatto conoscere che « non occorreva si esponesse, se non si trattava di cosa d' importanza e di molta solidità.... Avrebbe potuto correre il rischio di essere preso in burletta. I matematici italiani non sono molto considerati.... [1]), essi non sono al corrente delle nuove scoperte, e continuano a discutere ciò, che altrove da molto tempo è stato deciso ».

Da quanto precede si vede ben chiaramente, e ciò a parziale giustificazione di quegli scienziati, che in quel tempo vi era una specie di prevenzione contro i matematici italiani, i quali non eran tenuti in alcun conto dai dotti stranieri. E se l'opera dei nostri scienziati non riuscì ad imporsi quanto quella degli stranieri, ciò dipese dalle condizioni politiche di servaggio, in cui era caduta la patria nostra; e senza dubbio la nessuna importanza politica di essa era di gravissimo nocumento alla sua riputazione scientifica; e traeva dietro il poco conto scientifico, in cui essa era tenuta.

Brunacci [2]). — *Vincenzo Brunacci* nacque in Firenze il 3 marzo 1768 e morì a Pavia il 16 giugno 1818. Per compiacere al

1) Noti il lettore queste parole di un collega dell' « italianissimo » Lagrange (G. L.).

2) Vedi *Memorie e documenti per la storia della Università di Pavia*, Parte I, 1878, scritta dal prof. E. Beltrami.

padre studiò dapprima giurisprudenza, indi medicina, in cui si laureò a Pisa nel 1788; ma poi essendosi approfondito negli studî fisico-matematici, nel 1788 venne nominato professore di fisica nell' Università di Pisa.

Nel 1790 passò ad insegnare matematica e nautica nell' Istituto di Marina a Livorno coll' incarico poi di insegnare anche matematica ed artiglieria nel corpo de' cannonieri e cadetti. In quest'epoca il Brunacci pubblicò le sue prime ricerche sul calcolo integrale e tradusse il *Trattato di navigazione* del Bouguer, annotandolo e completandolo con un volume di proprie aggiunte. Nel 1798 pubblicò il *Calcolo integrale delle equazioni lineari*; ma poco dopo per cause politiche dovè esulare in Francia, ove conobbe i più grandi matematici di quel tempo.

Nel 1800 nell' Università di Pisa sostituì il suo maestro Paoli; nel 1801 fu nominato professore di matematica sublime nella Università di Pavia, ove poi venne incaricato anche dell' insegnamento della geodesia ed idrometria, di cui, come per quella della introduzione al calcolo, egli stesso aveva promossa l' istituzione.

Nel 1802 pubblicò l'*Analisi derivata*, e negli anni 1804-1808, l'ampio *Corso di matematica sublime*, oltre parecchie memorie d'analisi e di meccanica inserite negli *Atti* delle principali Accademie italiane, cui egli apparteneva. Nel 1808 pubblicò gli *Elementi d'algebra e geometria*, e nel 1811 il *Compendio al calcolo sublime* in due volumi; si occupò inoltre di idraulica, di meccanica animale, di capillarità ecc.

Il Brunacci fu analista valente, promotore indefesso dei metodi di Lagrange ed autore di importantissimi lavori, specialmente nel calcolo integrale e nelle differenze finite. Egli contribuì non poco ad elevare in Italia il livello dello insegnamento delle matematiche sì colle opere, che colle lezioni e colle riforme da lui provocate e sostenute calorosamente nell'ordinamento degli studî; dotato com'era di rare qualità didattiche, fece numerosi valenti allievi, fra i quali basterà citare il Bordoni ed il Mossotti.

Altri lavori:

1. *Opuscolo analitico sopra la integrazione delle equazioni a differenze finite* (Livorno, 1792).
2. *Calcolo delle equazioni differenziali* (Firenze, 1798).

3. *Memoria sull' uso delle variazioni delle costanti nella integrazione delle equazioni a coefficienti variabili* (1805).
4. *Sopra l' integrazione di alcune equazioni a differenze finite* (1805).
5. *Memoria sopra i principî e le applicazioni del calcolo differenziale ed integrale* (1806).
6. *Memoria per distinguere i massimi ed i minimi nell'ordinario calcolo delle variazioni* (1806).
7. *Sopra le soluzioni particolari delle equazioni alle differenze finite* (1806).

Abbati [1]). — Il conte *Pietro Abbati Marescotti* nacque in Modena il 1° settembre 1768 e vi morì il 7 maggio 1842. Fece i primi studî sotto il canonico Mediani, e studiò matematiche nella Università di Modena sotto il Fantini, il Cassiani ed il Venturi; in questi studî palesò rara attitudine e singolare profitto, dandone pubblico saggio (1784) con una *Memoria intorno alle linee parallele*. Si perfezionò poi sotto Paolo Ruffini, di cui fu amicissimo.

Nel periodo del primo regno italico, l'Abbati, già salito in fama di dotto cultore delle scienze esatte, fu nominato membro della Società di arti meccaniche, della Società agraria del dipartimento del Panaro, della Società dei *Dissonanti*, nel 1826 fu eletto membro della Società italiana delle scienze e nel 1835 socio corrispondente dell'Accademia di scienze e belle lettere di Palermo.

Pubblicò parecchie memorie importanti, che riguardano l'analisi algebrica; e certamente l'Abbati avrebbe conseguito maggiori titoli nel coltivare la scienza, se non fosse stato dal Governo estense chiamato alle cure dello Stato prima in qualità di Consultore, poscia nel 1839 in quella di Consigliere nel Ministero di pubblica economia ed istruzione, nella qual carica ebbe ad occuparsi specialmente di tutto quanto si riferiva alla direzione delle acque e delle strade.

Di animo mite, cattolico di soda pietà cristiana, fu affeziona-

1) Vedi *Notizie della vita e delle Opere del conte Pietro Abbati Marescotti*, di P. RICCARDI, in Modena, 1879, pubblicate in occasione delle nozze Abbati-Marinelli.

tissimo al suo Sovrano, il quale lo ricompensò largamente con onorificenze e con titoli nobiliari, concedendogli l'uso di uno stemma gentilizio e nel 1818 il titolo di conte.

Discorrendo delle opere del Ruffini abbiamo avuto occasione di parlare di Pietro Abbati; qui ora riporteremo l'elenco de' suoi lavori:

1. Lettera di Pietro Abbati, modenese, al socio Paolo Ruffini (Modena, 30 settembre 1802, inserita nelle *Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze*, tomo X, pp. 385-409, 1803). In questa lettera l'Abbati dimostra rigorosamente il teorema: « Qualunque sia la funzione

$$Z = f(x', x'', \ldots, n^{(n)}),$$

di n radici dell'equazione

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + V = 0,$$

essa non potrà mai avere tanti valori eguali che il numero dei diseguali risulti < 5 e > 2 ».

2. *Riflessioni* di Pietro Abbati, modenese, *intorno al metodo di Lodovico Lagrange, membro emerito della Società italiana delle scienze, per la soluzione delle equazioni numeriche*; memoria che ha riportata l'*accessit* della medesima Società (Modena, 1804). Questa memoria fu scritta in occasione del premio (di 60 zecchini e di una medaglia d'oro), proposto dalla Società italiana delle scienze « a chi meglio ed interamente esponesse il metodo più breve, cioè men faticoso, per trovare le radici numeriche di un'equazione di qualunque grado ». Fra le cinque memorie ammesse al concorso si sa che ottenne il premio proposto, quella del Ruffini, *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado* ecc.

3. *Sul calcolo delle funzioni razionali delle radici di una data equazione qualunque algebrica determinata, dotate della forma* $f(x', x'', x''' \ldots x^{(m)})$, memorie di Pietro Abbati modenese (Modena, 1804, *Memorie della Società italiana delle scienze*, tomo XII).

Lo stesso argomento era stato trattato dal Paoli nella sua memoria *Sulla teoria delle equazioni e sulle serie ricorrenti* (Vedi le *Memorie della R. Accademia di scienze, belle lettere ed arti di Mantova*, 1795, tomo I, p. 121), dipendentemente dalla integrazione delle equazioni a differenze finite parziali; ma l'Abbati riuscì a risolvere la stessa questione con regole puramente fondate sulla semplice teoria delle equazioni. Con questa memoria l'Abbati pose i principî della teoria dei gruppi, della quale egli, insieme al Ruffini, si può considerare come fondatore.

4. Lettera di P. Abbati all'abate F. Venini, membro dell'Istituto nazionale italiano (Modena, 1806). In questa lettera l'Abbati riproduce una regola, esposta nella memoria precedente, e ne dimostra la generalità.

5. *Sopra un problema di Daniele Bernoulli e De La Grange*; memoria del conte Abbati Marescotti, socio onorario, inserita nel tomo XIX degli *Atti della Società italiana delle scienze*, residente in Modena (Modena, 1824).

Bordoni [1]). — *Antonio Bordoni* nacque il 19 luglio 1788 a Mezzana Corti e morì a Pavia il 26 marzo 1860.

Percorse gli studî elementari, secondari e superiori in solo otto anni; non ancora ventenne fu nominato (1807) professore nella scuola militare di Pavia, istituita da Napoleone I, e nel 1817 professore di matematica pura elementare nell' Università di Pavia. Alla morte del Brunacci (1818) salì alla cattedra di calcolo sublime, geodesia ed idrometria, che occupò sino al 1841; nel quale anno gli fu tolto l'insegnamento del calcolo sublime. Nel 1852 abbandonò anche la cattedra di geodesia ed idrometria, conservando l' ufficio di Direttore degli studî matematici, che copriva fino dal 1824, e che tenne fin che visse.

Il Bordoni fu indubbiamente uno dei più cospicui matematici italiani del secolo XIX e quegli che contribuì maggiormente a tener vivo il culto del massimo geometra italiano, Luigi Lagrange.

Molti sono i lavori e di gran mole lasciati dal Bordoni. Fra i più estesi e pubblicati a parte havvi:

1. *Trattato delle ombre* (1816).
2. *Trattato degli argini* (1820).
3. *Trattato di geodesia* (1821, 1847, 1859).

1) Vedi *Memorie per la storia dell'Università di Pavia*, serie I, 1878, scritte dal prof. E. Beltrami.

4. *Annotazioni della meccanica del Venturoli* (1823 e 1833).
5. *Lezioni di calcolo sublime* (1831).
6. *Trattato delle divise* (1834).
7. *Sull'acqua uscente da una bocca.*

Le sue numerose memorie si trovano pubblicate o in opuscoli separati, stampati a Pavia od a Milano, o negli *Atti della Società italiana dei XL*, nel *Giornale* del Brugnatelli e negli *Atti dell'Istituto lombardo*; gran parte di questi lavori trattano di meccanica razionale e delle applicazioni dell'analisi alla geometria. Quest' ultimo ramo fu coltivato dal Bordoni con particolare predilezione e con grande novità ed eleganza nelle sue *Lezioni di calcolo sublime*, e gli ha fornito molti argomenti per interessantissime ricerche originali, che trattò magistralmente con metodi lagrangiani e che assicurano al Bordoni una reputazione duratura e ben meritata; bene a ragione il Beltrami dice che « non sarà difficile allo storico imparziale della scienza il trarre positivi argomenti di priorità in favore di lui, specialmente rispetto alla dottrina delle coordinate curvilinee, che d'ordinario si attribuisce a Gauss ».

Tucci [1]). — *Francesco Paolo Tucci* nacque a Vignola in Basilicata il 20 giugno 1790 e morì in Napoli il 30 giugno 1875. Fece i suoi studî a Napoli e fu alunno del Fergola; fra gli allievi di questo matematico fu quegli, che più di tutti diede preferenza ai metodi analitici. Nel 1817 era già professore nella Scuola Politecnica di Napoli, che poi divenne il Collegio militare, e vi rimase ad insegnare, fino al 1861, calcolo differenziale ed integrale. Nel 1823 era già professore di geometria descrittiva nella Scuola di applicazione di ponti e strade ed in seguito anche di applicazioni di geometria descrittiva e di geodesia. Inoltre, insieme a Salvatore De-Angelis, tenne fino al 1850 uno studio privato, che fu celebre a Napoli.

Elenco delle sue principali pubblicazioni, inserite nelle *Memorie dell'Accademia di Napoli*:

1. *Soluzione analitica sul problema delle quattro sfere, condotta a fine col metodo delle coordinate* (1812).

1) Abbiamo queste notizie avute dal prof. FEDERICO AMODEO di Napoli.

2. *Soluzione di un problema creduto da Lagrange difficilissimo a trattare colla geometria* (1812).
3. *Sulla normale comune a due coniche* (1814).
4. *Il problema del cerchio e dei tre punti, risoluto con metodo analitico ed esteso alle rimanenti curve coniche* (1818).
5. *Osservazione sul problema della piramide triangolare e nuova sua risoluzione analitica* (1823).
6. *Sulla permutazione dei piani di proiezione in descrittiva* (1823).
7. *Delle misure delle volte rette ed oblique* (1833).
8. *Delle misure delle scale e delle volte a spira* (1834).
9. *Elementi di calcolo differenziale ed integrale* (1843 e 1858).
10. *Sulle equazioni delle evolute di alcune curve del 4° grado* (1846).
11. *Quadratura delle porzioni di paraboloide iperbolico terminato da 4 linee rette, preceduta da osservazioni sulla importanza geometrica ed artistica di tali superficie* (1844).
12. *Congetture circa la minima superficie continua terminata da un quadrilatero storto* (1852). Questa memoria contiene qualche inesattezza, rilevata anche dal prof. Beltrami.
13. *Soluzione di alcuni problemi relativi alle curve coniche ed alle superfici generate dal rivolgimento di esse intorno ai loro assi principali. E seguito dell'analisi degli ombelichi geometrici* (1812).

Ed altri molti.

Mossotti [1]). — *Ottaviano Fabrizio Mossotti* nacque a Novara il 18 aprile 1791 da buona famiglia, e morì a Pisa il 20 marzo 1863. Fece gli studî secondari nella sua città natale; passò poi a studiare all' Università di Pavia sotto il Brunacci; e quivi ottenne la laurea in fisica e matematica nel 1811, e vi rimase uditore fino al 1813. In quest'anno il Mossotti fu nominato alunno gratuito nella Specola di Brera a Milano; nel 1815 alunno stipendiato e vi restò fino al 1823 sotto la direzione di Oriani, Cesaris

1) Vedi: *Il Politecnico*, vol. 17, Milano, 1863 (*Commemorazione del prof. F. O. Mossotti*, del prof. CODAZZA); *Giornale di matematiche di Napoli*, vol. I, 1863 e negli *Annali di matematica* del BRIOSCHI, tomo V, 1863, la *Necrologia del Mossotti*, fatta dal BETTI.

e Carlini; quivi egli si diede interamente a quegli studî assidui e profondi, che lo condussero ben presto in rinomanza.

Il Mossotti alla potenza dell' ingegno accoppiava il candore dell'animo, generosità di propositi, sentimenti liberalissimi, tanto che fu costretto ad emigrare prima in Isvizzera, e poi, nel 1825, a Londra, ove abitò presso il conte Giovanni Arrivabene di Mantova. In Londra fece conoscenza coi più distinti matematici, astronomi e fisici di quell' epoca, tra cui col celebre Young, pel quale compiva parecchi lavori, particolarmente sulle comete e ne era generosamente sovvenuto; lavorò anche per l'ammiragliato, traendone decorosa esistenza. Nel 1827 passò in America, a Buenos-Ayres, ove fu prima ingegnere astronomo ed assessore dell' ufficio topografico, poi professore di fisica e di calcolo infinitesimale; ed anche qui ebbe agio di approfondirsi ne' suoi studî. Nel 1835 abbandonò l'America, e dopo la morte del Caturegli fu nominato al posto di Direttore dell' Osservatorio astronomico di Bologna; ma il papa per compiacere all'Austria ritirò la nomina, dandogli un indennizzo di 2500 scudi.

Nel 1839 fu nominato professore di matematica superiore nella Università di Corfù, ove insegnava fisica sperimentale l' Orioli; il Mossotti vi insegnò inoltre fisica matematica.

Nel 1841 fu chiamato, per opera del Giorgini e dell'Amici, professore di fisica matematica, meccanica celeste e geodesia nell' Università di Pisa, ove insegnò fino alla sua morte.

È nostro dovere il ricordare che il Mossotti combattè all'età di 60 anni da valoroso nella memorabile giornata del 29 maggio 1848 a Curtatone ed a Montanara, in qualità di maggiore del battaglione universitario pisano, che faceva parte di quella valorosa legione toscana, guidata dal Montanelli, composta di soli cinquemila combattenti, che seppero tener testa a più di quindicimila Austriaci, i quali perderono 24 pezzi di artiglieria e quattro mila uomini di riserva.

Il Mossotti fu socio della Società astronomica di Londra; e nel 1825 fu eletto membro della Società italiana delle scienze, detta dei XL, e fu anche socio delle più insigni Accademie, ascritto ai più illustri ordini cavallereschi, ed infine fu senatore del nuovo regno d' Italia, carica di cui egli si compiacque molto.

Il Mossotti era d'indole mite, schietto, gentile, come ogni buon piemontese; di tenaci propositi, di sicura amicizia; amato e stimato tanto dai suoi colleghi, quanto dai suoi discepoli. Possedeva una larga cultura letteraria, tanto che durante la sua dimora a Londra, per compiacere a Lord Vernon, illustrò dottamente alcuni passi astronomici della *Divina Commedia* (canto IX del *Purgatorio* e XXVII del *Paradiso*), lodatissimo lavoro che attesta nell'astronomo Mossotti il profondo cultore de' classici.

Il Mossotti era sempre calmo e sereno, benevolo con tutti; avvicinandolo, uno si sentiva compreso di affetto e riverenza per lui; caritatevole, nessuno se ne andava scontento, se ricorreva a lui per essere soccorso. Il Municipio di Pisa, la riconoscenza dei discepoli e degli Italiani vollero erigergli nel 1867 un monumento nel camposanto urbano [1]). Il Mossotti nella sua vita scientifica di cinquant'anni coltivò di preferenza l'applicazione dell'analisi alla fisica, alla meccanica razionale ed alla meccanica celeste. I lavori che il Mossotti ha pubblicato su questi diversi rami non sono in gran numero, ma sono ammirevoli per l'eleganza del calcolo, per la chiarezza della esposizione, per l'ordine con cui sono condotti e per i risultati ottenuti.

Il Mossotti perfezionò e fece notevolmente progredire l' idrodinamica, le teoriche delle forze molecolari, la capillarità, l'ottica, gli istrumenti ottici, l'elettricità, la meccanica celeste; ma come Gauss egli desiderava di produrre, ma non aveva fretta di pubblicare i suoi lavori; onde ne ha lasciati non pochi inediti, quasi compiuti ed alcuni de' quali sono di grande importanza; per altri si sono rinvenuti ben pochi e semplici appunti.

Egli possedeva appieno l'analisi pura, che sapeva applicare con quella eleganza che si ammira nelle opere di Lagrange; e sicuramente, se il Mossotti non si fosse troppo dedicato allo studio della costituzione interna dei corpi, avrebbe contribuito non poco a fare avanzare quell' importantissimo ramo delle discipline matematiche.

Il Mossotti, prima di Abel e di Jacobi, aveva avuto la felicis-

---

1) Vedi *Elogio del Mossotti* del prof. DE BENEDETTI, in occasione della inaugurazione del monumento a F. O. Mossotti, 16 giugno 1867. Il monumento è di Giovanni Dupré.

sima idea di considerare la funzione inversa degli integrali ellittici di prima specie, ma assorto ne' problemi di fisica molecolare e di meccanica celeste non proseguì in questi studî, che senza dubbio l'avrebbero condotto a quelle importanti scoperte analitiche, che sono state tra le più belle e feconde del secolo XIX.

Le opere del Mossotti si possono distribuire in quattro categorie:

1ª quelle astronomiche;
2ª quelle di meccanica;
3ª quelle di fisica matematica;
4ª quelle astronomiche dantesche.

Ecco i titoli delle principali:

a) Lavori astronomici:

1. *Nuova analisi del problema di determinare le orbite delle comete* (1817-18-19); memoria che fu tradotta in tedesco e pubblicata nei tomi 3° e 4° delle *Zeitschrift für Astronomie.*
2. *Sulla figura e sul tempo della rotazione del sole* (1821).
3. *Sull'opposizione di Giove, osservata al quadrante murale* (1820); nella qual relazione il Mossotti si rileva abilissimo osservatore.
4. *Sur un nouvel instrument pour prendre les distances.*
5. *Sur le calcul des distances des astres.*
6. *On the variation of the mean motion of the comete of Enke produced by the resistence of an ether* (1824).
7. *Solar eclipse of january 20, 1833 observed at Buenos-Ayres.*
8. *Places of Enke's corne from observations at Buenos-Ayres* etc.
9. *Notices scientifiques.*
10. *Sulla costituzione del sistema stellare, di cui fa parte il sole* (1839-40).

Negli ultimi tempi il Mossotti si occupava di un lavoro *Sulla posizione delle orbite cometarie*; lavoro che fu consegnato nel 1858 al prof. Bolzani dell' Università di Kazan.

b) Lavori di meccanica:

11. *Nota sull' ariete idraulico* (1812), in cui il Mossotti risolse, col principio delle velocità virtuali, i problemi fondamentali della teoria di questo apparato.

12. *Sul moto di un fluido elastico, che esce da un vaso* (1813).
13. *Sul moto di un'elice elastica che si scatta* (1817).
14. *Sul moto dell'acqua nei canali.*
15. *Lezioni di meccanica razionale.*

c) Lavori di fisica matematica:

16. *Sur les forces qui régissent la constitution interieure des corps* (1836); memoria di grandissimo valore.
17. *Formula per rappresentare la tensione del vapore acqueo, fondata sulle leggi della costituzione dei vapori* (1837).
18. *Lezioni di fisica matematica,* ove il Mossotti raccolse le nuove ricerche, i nuovi fatti, le nuove dottrine sulla luce, nonchè le proprie idee ed i propri studî.

Fondandosi sulla prima memoria, che pubblicò in questo ramo, il Mossotti pubblicò altre note e memorie riguardanti i fenomeni capillari, la polarizzazione rotatoria della luce sotto l'influenza delle azioni elettro-magnetiche, il fenomeno della dispersione della luce, ed un lavoro sull'ottica, in cui analizza la luce mediante gli spettri dei reticoli di Fraunhofer; ed infine (1862) una nota sull'azione dei parafulmini, nella quale egli spiega quest'azione coi principî sulla polarizzazione delle atmosfere molecolari, dei mezzi dielettrici e della influenza che perciò essi hanno sulla distribuzione ed il movimento della elettricità alla superficie dei corpi conduttori.

19. *Proprietà dei centri coniugati e dei piani principali, dedotte dalle considerazioni degli assi dei pennelli luminosi* (1858).

Oltre i lavori sopra indicati il Mossotti pubblicò molti articoli e note o in periodici od in occasione di prolusioni di laurea; e fra questi àvvi: la nota sulla riduzione degli angoli fatti dagli archi geodetici, formanti un piccolo triangolo agli angoli fatti dalle loro corde (1850); la nota sul pendolo di Foucault (1853); il discorso sulle macchie del disco solare (1854).

Le principali opere di fisica del Mossotti sono le sue *Lezioni di fisica matematica,* il suo *Trattato di meccanica razionale,* la *Teoria degli istromenti ottici,* e la memoria *Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps.*

d) Scritti astronomici danteschi:

1. Prolusione di laurea (1844): *Illustrazione di un passo*

del canto IX del « Purgatorio », che fu pubblicata nel *Politecnico*, vol. VII, 1845.

2. Prolusione di laurea (1861): *Illustrazione di un passo del canto XXVII del « Paradiso »*, che fu pubblicata nella *Rivista italiana di scienze, lettere ed arti colle effemeridi della pubblica istruzione*, anno II, vol. 53, settembre 1861.

3. Lettera al principe B. Boncompagni: *Illustrazione di un passo del canto II del « Paradiso »*, pubblicata negli *Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei*, anno XVIII, 1865.

Piola [1]). — *Gabrio Piola* nacque in Milano il 15 luglio 1791 e vi morì il 9 novembre 1850; insegnò matematiche in Milano e fu membro dell' Istituto lombardo di scienze e lettere. Coltivò l' idraulica e la meccanica applicata, ma particolarmente la matematica pura; fu professore del suo concittadino Francesco Brioschi.

Elenco dei suoi lavori:

1. *Sull'applicazione dei principî della meccanica analitica del Lagrange ai principali problemi* (Milano, 1825).
2. *Sulla trasformazione delle formule integrali duplicate e triplicate* (1828).
3. *Sulla teoria delle funzioni discontinue* (1828).
4. *Nuove ricerche per una risoluzione più rigorosa di vari problemi sul moto delle acque* (1843).
5. *Sul moto permanente delle acque* (1845).
6. *Sul moto di un pendolo* etc. (1831).
7. *Sull'applicazione del calcolo delle differenze alle questioni di analisi indeterminata* (1831).

Frullani [2]). — *Giuliano Frullani* nacque a Livorno nel 1795 e morì a Firenze il 5 marzo 1834. Fu professore onorario della Università di Pisa e Direttore del catasto; fu corrispondente di parecchie Accademie, tra cui quella di Bruxelles.

---

1) Vedi POGGENDORFF, op. cit., vol. II.
2) Id., vol. I.

I suoi lavori principali sono:

1. *Ricerche sopra le serie e sopra l' integrazione delle equazioni a differenze parziali* (1816).
2. *Sopra la dipendenza fra i differenziali delle funzioni e gl' integrali definiti* (1820).
3. *Sopra la integrazione della formula*:

$$\frac{dx}{(1+2qx\cos\varphi+q^2x^2)^{n-1}} \qquad (1821).$$

4. *Sopra gli integrali definiti* (1828).
5. *Sopra l' uso di alcune serie nella determinazione degl' integrali definiti* (1828).
6. *Sopra la riduzione di alcune trascendenti* (1828).
7. *Sopra alcune formule integrali* (1832).

Mainardi [1]). — *Gaspare Mainardi* nacque ad Abbiategrasso nel giugno 1800 e morì in Lecco il 9 marzo 1879. Compì gli studí classici nel Convitto di Parabiago, i filosofici nel Liceo di Sant'Alessandro in Milano e quelli di matematiche nella Università di Pavia. Nel 1822 fu nominato assistente alla Cattedra di fisica e di matematica pura elementare in detta Università; e più tardi, nel 1826, supplente alla Cattedra di matematica elementare; poi, nel 1830, supplente alla Cattedra dell' introduzione al calcolo; e finalmente, nel 1840, professore ordinario di introduzione al calcolo e di calcolo differenziale ed integrale. Nel 1863 abbandonò l' insegnamento, e gli venne conferito il grado di professore emerito dell' Università di Pavia.

Fu membro dell' Istituto lombardo, socio dei Corpi scientifici di Venezia, Modena, Bergamo, Upsala e dell'Accademia dei Lincei di Roma.

Lasciò molti lavori di un certo valore, tra cui le *Lezioni d'introduzione al calcolo sublime*, opera che godette e gode la più alta stima presso i cultori della scienza.

---

1) Vedi: *Breve cenno necrologico di Gaspare Mainardi*, del Presidente CARLO BELGIOIOSO (*Rendiconti dell'Istituto lombardo di scienze e lettere*, serie II, vol. XII, 1879).

Elenco dei lavori:

1. *Teoremi sul triangolo rettilineo inscritto e circoscritto al cerchio e loro uso nella soluzione di alcune geometriche questioni* (1826).

2. *Sui diametri coniugati delle superficie di 2° ordine* (1827).

3. *Sulle superficie generabili del movimento di una linea piana qualunque* (1828).

4. *Sullo sviluppo imperfetto continuo di una curva piana; estensione di un teorema memorabile di Giovanni Bernoulli* (1837).

5. *Sui triametri della linee di 3° ordine* (1837).

6. *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali per mezzo d'integrali definiti* (1837).

7. *Sulla teoria dell'azione capillare* (1836 e 37).

8. *Sulle vibrazioni di una sfera elastica* (1838).

9. *Estensione del metodo immaginato da Daniele Bernoulli per risolvere le equazioni algebriche col mezzo delle serie ricorrenti* (1839).

10. *Sulle condizioni di equilibrio di una corda attorta e di una verga elastica sottile, leggermente piegata* (1840-41).

11. *Sulla integrazione della formula* $\frac{F}{E^2\sqrt[3]{\varphi}}$, *essendo* F, E, φ *funzioni intere di una stessa variabile* (1845).

12. *Di un celebre teorema di Abel e Jacobi* (1844 e 46).

13. *Sull' idrodinamica* (1844-46).

14. *Sulla integrazione approssimata delle funzioni* (1845-46).

15. *Di un metodo per integrare alcune equazioni differenziali non lineari* (1848-50).

16. *Sulla integrazione delle equazioni differenziali* (1850).

17. *Nuovi teoremi di analisi* (1850).

18. *Dei poligoni massimi inscritti e dei minimi circoscritti alla ellisse, e dei poliedri analoghi nell'ellissoide* (1850).

19. *Dichiarazione dei teoremi di analisi enunciati nel tomo I, pag. 342, degli « Annali di matematiche »* (1851).

20. *Sulle operazioni inverse dell'aritmetica* (1849-52).

21. *Di un facile problema di geometria, rimarcabile per la novità delle conseguenze* (1849-52).

22. *Sul calcolo delle variazioni* (1852).

23. *Sui criteri del calcolo delle variazioni* (1852).

24. *Compimento del problema del Joachimsthal sulla teoria generale delle superficie* (1852).

25. *Intorno ad un'equazione di Poisson*

$$f(x) - \frac{b}{k - cx} \cdot f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = h - \frac{y}{c - ax} \cdot \quad (1853).$$

26. *Integrazione delle equazioni a differenze finite lineari a coefficienti costanti* (1851).

27. *Intorno la integrazione delle equazioni a derivate parziali* (1854).

28. *Integrazione delle equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti e complete* (1855-56).

29. *Intorno alla memoria di Abel: « Sur une proprieté générale d'une classe très-étendue de fonctions trascendentes »* (1855-56).

30. *Note che riguardano alcuni argomenti della meccanica razionale ed applicata* (1856).

31. *Intorno ad alcune dottrine della geometria di posizione* (1856).

32. *Conseguenze a cui conduce il metodo di Charpit e Lagrange, applicato alle equazioni differenziali del 2° ordine* (1856).

33. *Sulla teoria generale degli invarianti delle forme omogenee* (1856-57).

34. *Alcune osservazioni ad una nota del Bertrand, pubblicata nei « Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris »* (3 novembre 1856, pag. 829) (1856).

35. *Sulla teoria generale delle superficie* (1856).

36. *Sul regresso delle serie e la serie di Taylor* (1858).

37. *Una regola per attribuire il segno proprio ad ogni parte di un determinante numerico* (1858).

38. *Sulla eliminazione e le equazioni algebriche e differenziali lineari simultanee* (1858).

39. *Sulle forme binarie del 2° grado* (1858).

40. *Equazioni del moto di un punto in una superficie continua* (1858).

41. *Sulle polari delle superficie algebriche* (1858).

42. *Sui poligoni rettilinei contemporaneamente inscritti e circoscritti a due curve coniche situate nello stesso piano* (1858).

43. *Intorno ad alcuni teoremi di geometria* (1858).

44. *Sopra un articolo dell' opera di Todhunter*: « *History of the calculus of variations* » (1862).

45. *Sulle condizioni di integrabilità delle funzioni* (1862).

46. *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche per mezzo di funzioni irrazionali* (1867).

47. *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* (1867).

48. *Esprimere le sommatorie simmetriche delle radici di una equazione algebrica per i suoi coefficienti* (1867).

49. *Intorno ad una serie di Laplace* (1867).

50. *Integrazione delle equazioni lineari a differenze finite* (1867).

51. *Sulla teoria generale delle superficie* (1869).

52. *Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del 2° ordine* (1873).

53. *Poligoni e poliedri* (1873).

54. *Dei poligoni massimi inscritti e minimi circoscritti all'ellisse e poliedri analoghi dell'ellissoide* (1873).

55. *Sulla teoria generale delle curve* (1873).

56. *Sulle curve piane* (1873).

57. *Sulle superficie geometriche* (1873).

58. *Analogia fra le equazioni algebriche e le differenziali lineari* (1873).

59. *Un' integrale della equazione differenziale lineare a coefficienti costanti* (1873).

60. *Relazioni fra le radici di una forma binaria cubica e quelle de' suoi primi covarianti* (1873).

61. *Sulla equazione fondamentale della balistica* (1873).

Tortolini [1]). — *Barnaba Tortolini* nacque in Roma il 19 novembre 1808 e morì in Ariccia il 24 agosto 1874. Studiò lettere e filosofia nel Collegio romano sotto il gesuita Caraffa, autore di alcune opere matematiche; e continuò gli studî matematici e filosofici nell' Università della Sapienza, ove si laureò (*ad honorem*) nel 1829 e vi compì il corso tecnico d' ingegneria; indi, studiata teologia, fu ordinato prete nel 1832. Nel 1835 fu nominato professore di fisica matematica nel Collegio di *Propaganda fide*; nel 1836 supplente nella Cattedra di meccanica e idraulica nell' Università; nel 1837 professore d' introduzione al calcolo sublime nella Università di Roma, e poi professore di calcolo differenziale ed integrale presso la stessa Università; nel 1845 professore di fisica matematica nel Seminario Romano; e nel 1856 Direttore della tipografia di *Propaganda fide*.

1) Vedi *Annali di matematica* del BRIOSCHI, serie II, tomo VII, 1875-76.

Un elenco esatto delle opere del Tortolini venne pubblicato dal principe Boncompagni negli *Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei*. Sono oltre cento memorie inserite per la maggior parte nel *Giornale arcadico di scienze, lettere ed arti*, negli *Atti dell'Accademia pontificia dei nuovi Lincei* e negli *Annali di matematica*. Queste opere trattano principalmente della *Teoria degli integrali definiti* e della *rappresentazione di aree e di volumi per mezzo di integrali di questa specie*; della *teoria degli integrali ellittici e delle loro applicazioni, sia alla divisione degli archi di curve piane, sia ad altre questioni geometriche*; del *calcolo dei residui e dell'uso del medesimo nella integrazione delle equazioni differenziali lineari di quelle a differenze finite e delle equazioni a derivate parziali*; infine diverse memorie intorno a questioni d'analisi applicata alla geometria.

Il Tortolini è benemerito della scienza e dell' Italia particolarmente per avere fondato e pubblicato gli *Annali di scienze matematiche e fisiche* (Roma, 1850-1857), e poi, insieme coi professori Betti, Brioschi e Genocchi, la prima serie degli *Annali di matematica pura ed applicata* (Roma, 1858-1865); imperocchè questi due importantissimi periodici, raccogliendo e diffondendo i lavori de' più distinti cultori delle matematiche discipline, ravvivarono e fecondarono gli alti studî di matematica, e ad un tempo rappresentarono degnamente in faccia alle Nazioni colte di Europa l'attività e la produzione scientifica dell' Italia in una epoca in cui la patria nostra era serva e divisa.

Il Tortolini fu uno dei XL della Società italiana delle scienze (fondata dal Lorgna), membro delle Accademie di Bologna, dei Nuovi Lincei in Roma, di Napoli, di Torino, di Upsala ecc.

Minich [1]. — *Serafino Raffaele Minich* nacque in Venezia, da famiglia dalmata di naviganti, il 5 novembre 1808 e morì in Padova il 29 maggio 1883. Fece i suoi primi studî a Venezia nel ginnasio di S. Giovanni Laterano, indi pel suo ingegno ottenne un posto gratuito nel liceo di Santa Caterina di quella città. Compiuti gli studî liceali ottenne un sussidio dal Governo per proseguirli all' Università di Padova, ove si laureò in matematiche nel 1829. Ritornato a Venezia si dedicò all' ingegneria; e per sopperire ai bisogni della sua famiglia, a cui era mancato il padre, dovè accettare il posto di contabile presso la fabbriceria di S. Marco. Nel 1830 fu nominato assistente nell' Università di Padova e nel 1834 professore supplente di introduzione al calcolo infinitesimale nella stessa Università; nel 1836 ottenne la cattedra di professore di matematica nel liceo di Bergamo, cattedra che non occupò, perchè fu nello stesso anno nominato professore supplente di calcolo sublime a Padova; nel 1837 volle laurearsi in filosofia, e nel 1842 fu nominato professore ordinario di analisi algebrica, geometrica ed infinitesimale nella Università di Padova, di cui fu più volte rettore. Fu più volte Deputato al Parlamento Nazionale pel 3° collegio di Venezia. Fu membro dell' Istituto veneto di scienze e lettere, della Società italiana delle scienze, detta dei XL, dell'Accademia dei Lincei e di altre Accademie, e decorato di diversi ordini cavallereschi.

Quasi tutte le produzioni scientifiche e letterarie del Minich furono pubblicate negli *Atti* e nelle *Memorie dell'Istituto veneto di scienze, lettere ed arti*, nei *Saggi e Riviste dell'Accademia di Padova*, negli *Annali di matematica*, nelle *Memorie dell'Accademia dei Lincei*, in quelle della *Società dei XL*, nei *Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Parigi*, ed in altre. Un elenco dei principali suoi lavori scientifici si trova nel *Catalogo della Società Reale delle scienze di Londra*, e di tutti nella *Commemorazione del prof. A. Favaro*, letta all' Istituto Veneto. I lavori stampati del Minich ascendono a 107, e molti altri sono tuttora manoscritti.

1) Vedi *Della vita e delle opere di Raffaele Minich*, commemorazione letta il 9 dicembre 1883 all' Università di Padova dal prof. D'ARCAIS.

I lavori matematici del Minich si possono dividere in quattro categorie:

1ª quelli attinenti all'analisi infinitesimale;

2ª quelli sulle equazioni algebriche;

3ª quelli sulla geometria differenziale;

4ª quelli di meccanica e riguardanti altri rami della scienza, i quali sono in minor mole e di minore importanza. Noi discorreremo brevemente solo di alcuni fra i più importanti di essi.

Il suo primo lavoro fu: *Della quadratura assoluta di alcuni spazi cicloidali* (1827).

Fra i più importanti di quelli della prima categoria è quello pubblicato nel 1838 negli *Atti dell'Accademia di Padova* dal titolo: *Sulla integrazione delle equazioni lineari a coefficienti costanti*.

Nel 1851 il Minich riprese lo stesso argomento e pubblicò una voluminosa memoria: *Sulla espressione dell' integrale completo di ogni equazione generale a due variabili per mezzo degli integrali particolari della stessa equazione col secondo membro ridotto a zero*, nelle *Memorie dell'Istituto veneto*. Questa memoria è forse la più bella e la più importante fra le produzioni scientifiche di Minich; ed essa può riuscire utile specialmente come preparazione alle ricerche su questo stesso soggetto, aventi per base la variabilità complessa.

Nel 1846-47 presentò all' Istituto veneto l' importante memoria, divisa in due parti: *Sugli integrali algebrici di un sistema di equazioni, i cui termini sono integrabili per mezzo di trascendenti abeliane e sulla proprietà fondamentale di simili trascendenti*.

Altre memorie pubblicò sulle equazioni differenziali totali e su quelle a derivate parziali (1877-78); e stava pubblicando un trattato di calcolo infinitesimale, che rimase incompleto per la sua morte.

Presentò più volte all' Istituto veneto de' lavori sulla risoluzione delle equazioni algebriche, ma essi hanno ben poca importanza.

Nella geometria sono notevoli le ricerche del Minich sui poliedri, contenute in due memorie (1832, 1852); inoltre (1854) sulle coniche osculatrici delle curve piane, ed alcune note sulle superficie di 2° ordine. Infine vengono i lavori di meccanica e di fisica, i quali hanno pure essi poca importanza.

Maggi [1]). — *Pietro Luigi Maria Maggi* nacque in Verona da ricca ed integerrima famiglia il 30 aprile 1809, e morì in Padova il 17 marzo 1854.

Perduto il padre, che era medico di molto ingegno, la madre sua si dedicò all'educazione di Pietro; e grandicello lo diede alle cure di un dotto religioso, che gli apprendesse i primi rudimenti del sapere. All'età di nove anni entrò nel ginnasio vescovile di Verona; compiutivi gli studî di grammatica, passò a studiare umanità nel ginnasio comunale di S. Sebastiano, ove potè formarsi una soda coltura letteraria. Nel 1824 passò al liceo, ove si perfezionò negli studî de' nostri classici e poeti; e sin d'allora egli stesso incominciò a scrivere in poesia.

L'abate Giuseppe Zamboni, a cui il Maggi era legato da sincera amicizia, contribuì moltissimo a farlo innamorare della scienza e specialmente della matematica e della fisica. Nel 1827 il Maggi s'inscrisse nella Facoltà di matematica della Università di Padova, ove per futile motivo venne arrestato e poco dopo rilasciato dalla polizia austriaca, la quale in seguito lo tenne sempre d'occhio. Laureatosi nel 1829, il Maggi si recò (1830) a Pavia ad udirvi le lezioni del Bordoni, che tosto s'avvide dell'elettissimo ingegno del Maggi e gli offerse il posto di assistente alla sua cattedra, posto che il Maggi rifiutò.

I suoi primi lavori il Maggi li pubblicò nel *Poligrafo*; essi gli procacciarono tosto la stima del Bellavitis, uno dei collaboratori di detto periodico (1830), e lo fecero conoscere nel mondo degli scienziati. L'Accademia di Verona lo volle perciò nominare suo membro effettivo nel 1835; e nel 1850 ne fu eletto presidente. Nel 1842 l' Istituto veneto di scienze e lettere lo nominò suo membro corrispondente e nel 1844 membro effettivo.

Il Maggi si dedicava con grande passione allo studio della

---

1) Vedi *Pietro Maggi, matematico e poeta veronese*, di GIAMBATTISTA BIADEGO, Verona, 1879.

geometria, dell'analisi, della meccanica, della fisica e dell'astronomia; e spesso per ritemprarsi studiava i classici latini ed italiani. Intanto, morto l'abate Zamboni, restò vacante la cattedra di fisica del liceo di Verona; il Maggi fu designato a succedergli; ma il Governo austriaco non acconsentì che il Maggi occupasse quel posto. Nel 1850 si resero vacanti le cattedre di matematica applicata nelle Università di Padova e di Pavia; entrambe le Facoltà di questa Università nominarono alla Cattedra posta a concorso il Maggi, che optò per quella di Padova, ove fu nominato professore supplente nel 1850 ed ordinario nel 1853. Quivi la polizia austriaca gli arrestò il diletto fratello Giuseppe (1852); il quale poi morì in un orrido carcere di Mantova; tanto fu il dolore, che provò Pietro Maggi per questo fatto che ben presto si sentì venir meno le forze ed a mala pena potè finire di rivedere le sue *Lezioni di analisi infinitesimale*, giacchè il morbo che lo travagliava da qualche tempo, lo trasse ben presto al sepolcro.

I lavori scientifici di Pietro Maggi possono dividersi in due categorie, cioè quelli che appartengono alla fisica matematica e sperimentale, e quelli di matematica pura.

Categoria prima:

1. *Saggio di una teoria matematica delle induzioni elettrodinamiche* (1833).
2. *Sopra una nuova proprietà del ferro dolce magnetizzato* (1850).
3. *Sull'attrazione universale e sul magnetismo, con una spiegazione sul fenomeno delle code cometarie* (1849), *e con un accenno alle aurore boreali.*
4. *Elogio dell'abate Zamboni* (1850), che contiene una bella pagina della storia della fisica.
5. *Sopra un uso geometrico del filo voltaico* (1850).
6. Una bellissima e dotta relazione sull'opera di Avogadro: *Fisica de' corpi ponderabili* (1849).
7. *Sui suoni e sui calori, sull' udito e sulla vista* (1849); lavoro di piccola mole, ma di grande importanza per la novità de' concetti.
8. *Intorno ad un fenomeno ottico assai comune, ma poco*

avvisato nè trattato dagli scrittori ed intorno l'arte del chiaro-scuro (1841).

9. *Sull' uso della luce polarizzata nelle corrispondenze telegrafiche* (1851).

10. *Osservazioni sulle stelle cadenti fatte nelle notti vicine al 10 agosto 1850*; lette in una memoria del 1851 all' Istituto Veneto.

11. *Di alcune apparenze del sole presso l'orizzonte* (1852).

Categoria seconda:

1. *Ricerche sulle linee di stringimento e d'allargamento; aggiuntevi alcune considerazioni meccaniche ed idrauliche* (1835).

2. *Intorno ad una maniera più generale d'evolute e d'evolventi ed intorno ad un sistema di rette nello spazio* (1838-39) [1]).

3. *Sugli avvicinamenti di vario ordine dei sistemi a tre dimensioni* (1850).

4. *Nota su di un teorema geometrico di Johannsthal* (1850).

Come si vede i lavori di matematica del Maggi son pochi di numero; essi sono applicazioni del calcolo infinitesimale a problemi metrici; in essi l'esposizione è chiara e rigorosa, e talvolta le dimostrazioni son semplici ed eleganti.

Pietro Maggi, come si disse, fu anche poeta; egli sentiva la poesia della natura; ed ha lasciato molti e pregevoli lavori poetici; studiava ed aveva cara la bibbia; ed appunto de' salmi tradusse e pubblicò il CIII; scrisse anche un'ode intitolata *La rovina di Babilonia, presagita da Isaia al capo XIII.* Le poesie del Maggi rivelano lo studio amoroso e costante, che egli faceva dei classici; onde egli trattò con gran facilità il verso sciolto, l'ottava e la terzina.

Trudi [2]). — *Nicola Trudi* nacque in Campobasso il 21 luglio 1811, e morì in Caserta il 3 ottobre 1884. Nella sua città fece i primi studî; rimasto orfano, andò a Napoli per trovarvi un'occupazione, che gli desse i mezzi per campare la vita. A 21 anni fu impiegato nella Prefettura e poi passò all' amministrazione

1) Cfr. G. Loria, *Spezielle alg. und transcendente ebeue Kurven, Theorie und Geschichte,* Leipzig, 1902, p. 638; II ed., T. II (1911), p. 274.

2) Vedi *Commemorazione su Nicola Trudi,* di G. Torelli, letta all'Accademia Pontaniana il 9 novembre 1884.

delle carceri; provveduto così alla meglio al pane quotidiano, ricominciò da sè gli studî interrotti, frequentando biblioteche e la casa di Vincenzo Flauti, in gran fama di cultore delle discipline geometriche; e sotto di lui studiò matematica. Al concorso aperto dal Flauti per promuovere e comparare i metodi geometrici, il Trudi nel 1840 rispose con due memorie, ove diede eleganti costruzioni dei problemi di Cramer e di Malfatti; messosi su questa via, oltrepassando i limiti del programma del concorso, presentò altri quattro lavori; il primo sulle coniche, polari reciproche; il secondo su varie proprietà delle coniche, quali quella dell'esagono e suoi casi particolari; il terzo ed il quarto sui poligoni inscritti e circoscritti alle coniche con date condizioni. Nel 1850 fu nominato professore di matematiche nel Collegio di marina e nel 1851 professore di calcolo infinitesimale nella Università di Napoli. Cercò di diffondere gli studi matematici in tutti i modi ed a tal uopo fece l'amicizia di Jacobi, di Steiner e di Sylvester, quando vennero a Napoli.

Scrisse la *Teoria dei determinanti*, opera assai pregevole; e come appendice a questo libro scrisse tre note: la prima su di un determinante più generale di quello che suol dirsi determinante delle radici di un'equazione; la seconda sul processo del massimo comun divisore fra due funzioni intere di una variabile; la terza sulla trasformazione delle forme quadratiche in somme di quadrati.

Scrisse due memorie sulla teoria delle funzioni ellittiche, ove ricavò i celebri teoremi di Poncelet sui poligoni variabili inscritti e circoscritti a due coniche; in una terza memoria, *Sopra una singolare eliminazione*, dedusse i suddetti teoremi senza adoperare le funzioni ellittiche. Inoltre pubblicò due memorie sulle equazioni differenziali lineari e due intorno alle equazioni binomie.

Si occupò della scomposizione e dello sviluppo delle funzioni fratte razionali, dei coefficienti delle facoltà analitiche e dei coefficienti binomiali, dei numeri ultrabernoulliani e di questioni riguardanti le coniche.

Pubblicò pure sul *Giornale di matematica* una memoria sull' uso delle coordinate omogenee e sul teorema di Sturm.

Negli ultimi anni di sua vita gli argomenti favoriti del Trudi furono la partizione dei numeri e le funzioni simmetriche, su cui scrisse parecchie importanti memorie.

Il Trudi fu socio dell'Accademia delle scienze di Napoli, della Società dei XL, dell'Istituto d'incoraggiamento e della Pontaniana di Napoli, della Gioenia di Catania; e negli *Atti* di esse pubblicò tutti i suoi lavori.

Chiò [1]. — *Felice Chiò* nacque in Crescentino, piccola città del Piemonte, il 29 aprile 1813 e morì in Torino il 28 maggio 1871. Fece gli studî secondarî in Vercelli, gli universitarî a Torino, ove si laureò in filosofia positiva nel 1835. Studiò matematiche sotto Giovanni Plana, che allora insegnava analisi infinitesimale e che l'aiutò molto co' suoi consigli e appunto dietro sua proposta ottenne nel 1838 la Cattedra di matematica nella R. Accademia militare di Torino. Nel 1854 fu nominato professore di fisica matematica nell' Università di Torino; e negli ultimi anni v' insegnò l'analisi e la geometria superiore. Fu deputato al Parlamento subalpino per sei legislature, come rappresentante del suo paese (1849-60); fu insignito di vari ordini cavallereschi e membro del consiglio superiore della pubblica istruzione; d'indole altera e sdegnosa non cercava onorificenze; in politica fu un solitario, abborrente dalle consorterie e dai partiti; fu un'anima altamente onesta, in tutta l'estensione della parola, e che sentì italianamente.

Il primo lavoro del Chiò (*Journal de mathematiques de Liouville*, tomo 3°, 1838) fu quello, in cui diede una bella soluzione del problema «fra i piani tangenti di un'ellissoide assegnare quello sul quale il triangolo determinato dai tre piani principali dell'ellissoide abbia un'area minima».

I successivi lavori del Chiò son tutti informati alla scuola di Agostino Cauchy, di cui egli era seguace ed ammiratore. Alcuni di questi furono presentati al Congresso della Società degli scienziati italiani, tenutosi in Torino nel 1840, e furon pubblicati negli

1) Vedi *Notizie intorno alla vita ed agli scritti di Felice Chiò*, di A. GENOCCHI, nel *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, tomo IV, Roma, 1871.

Atti dello stesso; essi trattano di alcune serie o della convergenza delle serie in generale. Nel 1841 presentò all'Accademia di Torino una memoria intitolata *Réflexions nouvelles sur les series periodiques*. Nel 1842-43 il Chiò inviò alla stessa Accademia una memoria e parecchie Note sul criterio dato da Lagrange per la convergenza della serie:

$$F(x) = F(u) + . F'(u) . f(u) + \frac{1}{\underline{|2}} \frac{F'(u) . f(u)^2}{du} + \\ + \frac{1}{\underline{|3}} \frac{d^2F(u) f(u)^3}{du^2} + \ldots, \tag{1}$$

ove è $u - x + f(x) = 0$, e sull'appiicazione della serie (1), per trovare tutte le radici di questa equazione, considerando diverse forme della $f(x)$. È noto che Lagrange aveva cercato dimostrare che se $f(x)$ è una funzione intera di x, la (1) dà sempre la radice più prossima a zero. Invece il Chiò dimostrò che la regola di convergenza data da Lagrange è inesatta e inesatta pure l'asserzione, che la radice espressa fosse quella del minimo valor numerico. L'Accademia torinese respinse e memoria e note per opera principalmente del Menabrea, dichiarandole non meritevoli di essere pubblicate. Allora il Chiò, dietro consiglio del Cauchy, le presentò (1844-46-47) all'Accademia delle scienze di Parigi, dalla quale furono approvate e pubblicate nei *Comptes rendus de l'Académie de Sciences de l'Institut de France* ed in altre Riviste.

Nel 1852 pubblicò una memoria *Sopra una questione di algebra*, cioè sulla regola data da Newton (nell'*Aritmetica universale*) per estrarre le radici dei binomi irrazionali senza dover risolvere equazioni complesse; in questa memoria il Chiò mette in piena luce dette regole, dandone dimostrazioni chiare e rigorosissime.

Nel 1853 pubblicò una memoria *Intorno ai determinanti*, dove sono specialmente pregevoli le applicazioni delle proprietà dimostrate. Inoltre scrisse una Nota *Sulla eliminazione*, stampata nella *Raccolta scientifica* di Roma; un'altra *Sopra le curve a doppia curvatura* negli *Annali* del Tortolini, e due Note *Sulla somma* *della progressione armonica* e *Sul calcolo delle differenze finite* negli *Atti dell'Accademia di Torino*; da ultimo alcuni teoremi sugli integrali definiti.

Negli ultimi anni aveva preso a studiare la teorica delle funzioni, seguendo sempre le idee di Cauchy; e di queste ricerche faceva oggetto delle lezioni universitarie.

Lasciò non pochi lavori manoscritti, tra i quali una terza *Memoria sopra la serie di Lagrange*, un sunto della quale fu presentato alla Società filomatica di Parigi (1868), di cui il Chiò era socio; una memoria *Sull' ottica geometrica* ed altre *Sulle quadrature*, *Sulla teoria elettro-dinamica* e *Sull' integrazione delle equazioni differenziali lineari*.

Pubblicò anche delle notizie biografiche su Giovanni Plana e Luigi Lagrange.

L'opera del Chiò fu più critica, che originale.

Del-Grosso [1]. — *Remigio Del-Grosso* nacque da buona famiglia il 20 maggio 1813 in Colle Sannita, paesello della provincia di Benevento, e morì in Napoli il 29 febbraio 1876. Studiò a Foggia presso i padri delle Scuole pie (1822); e nel 1827 andò a Benevento, ove studiò matematiche, con grande amore, nelle scuole de' Gesuiti; vestì l'abito ecclesiastico e nel 1837 fu ordinato prete. Nel 1838 andò ad insegnare filosofia e matematiche nel seminario di Larino; e nel 1840 si recò a Napoli, ove fu, dietro un esame, ricevuto alunno astronomo nell'Osservatorio di Capodimonte, e sotto il De-Gasparis, potè a suo bell'agio approfondirsi negli studî astronomici. Nel 1843 si recò a Firenze come astronomo aggiunto in quell'Osservatorio; e finalmente nel 1845 ritornò in Napoli. Dal 1846 al 1847 fu direttore e professore di un istituto privato in S. Marzano presso Sarno; nel 1848 fu nominato professore di astronomia nautica nella Scuola dei piloti in Napoli; finalmente nel 1860 fu nominato professore di meccanica applicata nella Università partenopea; ed in quest'anno smesse l'abito di prete, che per lui era una maschera insopportabile, e così respirò più libero. Nel 1863 fu eletto professore di meccanica celeste nella stessa Università di Napoli, cattedra che conservò fino all' ultimo giorno della sua vita. Fu membro del Consiglio superiore, dell' Istituto d' incoraggiamento, dell'Accademia pontaniana e socio ordinario (1876) dell' Accademia delle scienze di Napoli.

[1] Vedi *Poesie* di REMIGIO DEL-GROSSO, precedute da una breve notizia della vita e delle opere dell'autore, scritta da LUIGI SETTEMBRINI, Napoli, 1877.

Visse il Del-Grosso una vita modesta ed operosa, sempre immerso ne' suoi diletti studî matematici, di cui seguì attentamente il progresso; ma seppe anche di letteratura antica e scrisse versi latini con molto gusto ed eleganza; inoltre compose alcune poesie nel nostro idioma, le quali rivelano come egli avesse una vasta e profonda coltura letteraria ed una felice vena poetica.

Lasciò il Del-Grosso dieci lavori di matematica e cinque letterari, ed inoltre alcuni altri in manoscritto: diamo l'elenco di quelli pubblicati.

a) Lavori scientifici:

1. *Memoria sulle linee di 2° grado.*
2. *Elementi di navigazione.*
3. *Memoria sulla lemniscata di Bernoulli.*
4. *Elementi di meccanica razionale.*
5. *Saggio di meccanica celeste.*
6. *Teoria elementare del moto di traslazione dei Pianeti.*
7. *Memoria sulle perturbazioni planetarie.*
8. *Memoria sull'attrazione degli sferoidi.*
9. *Memoria sul moto dei proiettili ne' mezzi resistenti.*
10. *Memoria sulle perturbazioni sviluppate secondo il metodo proposto da Hansen.*
11. *Memoria sulle equazioni differenziali, che si presentano nei problemi di meccanica.*
12. *I progressi fatti dalla dinamica dopo Lagrange.*
13. *Dimostrazione elementare dell'equazione di equilibrio dei fluidi elastici omogenei e di uniforme temperatura.*
14. *Dimostrazione di un teorema di ottica.*
15. *Nota sul problema dei tre corpi.*
16. *Sul modo di ridurre gl' integrali dell'equazioni lineari di 1° ordine a differenze miste in semplici integrali definiti*, pubblicata nelle *Memorie dell'Accademia pontaniana* nell'anno 1852.

b) Lavori letterari:
1. *La cometa Donati.* Carme.
2. *L'origine dei Vulcani.* Carme.
3. *Le nebulose.* Carme.
4. *I nuovi pianeti.* Carme.
5. *Il Mare.* Carme.
6. *Il Sole.* Carme.
7. *Il Vesuvio.* Due frammenti di un carme.
8. *Newton e l'astronomia moderna.* Discorso inaugurale letto nella Università di Napoli.

Turazza [1]. — *Domenico Turazza* nacque in Malcesine sul Benaco il 30 luglio 1813 e morì in Padova il 12 gennaio 1892. Compì gli studî elementari nel paese natìo, e quelli secondarî a Verona; nel 1831 andò a studiare matematiche all' Università di Padova, ove si laureò nel 1835. Nel 1837 fu nominato professore di matematica e meccanica nel liceo di Vicenza, nel 1841 professore di geometria descrittiva nell' Università di Pavia e nel 1842 professore ordinario di geodesia e di idrometria in quella di Padova. Conosceva bene le lingue francese, tedesca, inglese e spagnola; e dalla seconda tradusse due trattati di geometria.

I primi moti rivoluzionari del 1848 non commossero la mite e religiosa anima del Turazza; ma quando il pontefice iniziò la guerra santa, il Turazza si scosse e si gettò lui pure nella rivoluzione, marciando contro il nemico.

La maggiore produzione scientifica del Turazza si verificò tra il 1849 ed il 1866, della quale parleremo più sotto. Fu membro di quasi tutte le Accademie scientifiche d' Italia e dell'estero; fu Preside più volte della facoltà di scienze e Rettore dell' Università; fu nominato (1884) commendatore e cavaliere del merito civile di Savoia (1887), e quindi senatore del regno.

Il Turazza lasciò oltre *novanta* lavori, di cui solo una metà sono d' indole scientifica; l'altra metà è costituita da lavori pu-

[1]) Vedi *Della vita e delle opere di D. Turazza.* Commemorazione fatta da A. Favaro, all' Università di Padova, il 27 marzo 1892.

ramente letterari; qui discorreremo solo di una parte de' suoi lavori scientifici. Essi si possono dividere in quattro categorie:

a) quelli di matematica pura;
b) quelli di meccanica razionale;
c) quelli di fisica;
d) quelli di idraulica.

A quest' ultima categoria appartengono quelli di maggior valore, tra cui un trattato completo e di molto pregio sull' idraulica. A questi lavori senza dubbio il Turazza deve gran parte della sua fama di scienziato; e de' quali non possiamo qui nè discorrere, nè dare l'elenco. L'elenco particolareggiato dei lavori delle tre prime categorie basterà da solo a mettere in evidenza il loro valore intrinseco. Essi furono pubblicati in gran parte negli *Atti dell'Istituto veneto di scienze, lettere ed arti* ed alcuni anche negli *Annali* del Tortolini.

a) Lavori di matematica pura:
1. *Sullo sviluppo in serie delle funzioni, sulla quadratura delle curve e cubatura dei solidi* (1835).
2. *Del teorema di Sturm sulla risoluzione delle equazioni numeriche* (1836).
3. *Intorno all' uso dei compartimenti diseguali nella ricerca del valore numerico d' un dato integrale* (1850).
4. *Intorno ai valori massimi e minimi di alcune funzioni a dati posti di dati argomenti* (1840).
5. *Della superficie il cui piano tangente fa col raggio vettore un angolo, che è funzione data qualunque del raggio vettore medesimo* (1851).
6. *Del teorema di Sylvester.* Relazione (1865-66).

b) Lavori di meccanica:
1. *Del moto di un corpo rotondo pesante fisso ad un punto del suo asse di figura, oppure giacente sopra un piano* (1862).
2. *Appendice alla memoria precedente* (1862).
3. *Di alcune proprietà relative agli assi di rotazione d' un sistema rigido* (1862).
4. *Intorno agli assi principali ed agli assi permanenti in un sistema rigido qualunque* (1864).

5. *Intorno ad un nuovo teorema relativo alla rotazione di un sistema rigido intorno ad un asse* (1864-65).

6. *Di un nuovo teorema relativo alla rotazione di un corpo intorno ad un asse* (1865).

7. *Alcune ricerche intorno agli assi di rotazione ed al moto dei sistemi rigidi* (1867).

8. *Il moto dei sistemi rigidi* (1868).

9. *Dei sistemi di forze formati con due forze soltanto, i quali sono equipollenti ad un sistema qualunque di forze agenti sopra punti invariabilmente congiunti fra loro* (1870).

10. *Equilibrio di un'asta parallelepipeda rettangolare* (1874).

11. *Dei sistemi di rette coniugate così che lungo le stesse si possa far agire un sistema di due forze equipollenti ad un sistema qualunque di forze date* (1884).

12. *Di un nuovo teorema relativo alla rotazione di un corpo* (1882).

13. *Introduzione ad un corso di statica dei sistemi variabili* (1888).

14. *Di alcune proprietà degli assi di rotazione* (1889).

c) Lavori di fisica:

1. *Teoria dinamica del calorico* (1859).

2. *Della formula proposta da W. Rankine per rappresentare numericamente la relazione fra la tensione, la temperatura ed il volume del gas acido carbonico* (1860).

3. *Di alcuni problemi spettanti alla teoria dinamica del calorico* (1861).

Padula [1]. — *Fortunato Padula* nacque in Napoli il 23 dicembre 1815 e vi morì il 27 giugno 1881. Completò i suoi studî secondarî in Napoli e studiò matematiche alla scuola di Paolo Tucci e Salvatore De-Angelis; poi passò a studiare alla Scuola degl'Ingegneri d'acque e strade, ove si laureò nel 1837. Appena ventenne fu nominato professore nella Scuola militare in S. Giovanni a Carbonara; d'onde dopo un anno passò al Collegio militare della Nunziatella; poi in quello della R. Marina, ove fu Direttore. Fu professore di meccanica e Direttore ad un tempo della Scuola degli Ingegneri; e nel 1860 fu nominato professore di meccanica razionale nella Università di Napoli. Fu socio ordinario dell'Accademia delle scienze di Napoli, della Pontaniana e dell' Istituto d' incoraggiamento e socio corrispondente di parecchie altre Accademie scientifiche nazionali ed estere, senatore del regno e commendatore mauriziano. Era di carattere mite ed allegro, modestissimo; amava la patria come la scienza; fu di animo generoso ed assai caritatevole verso i poveri.

[1] Vedi nei *Rendiconti dell'Accademia di Napoli* la *Biografia di F. Padula* letta da R. Rubini il 13 agosto 1881.

Parlando di Nicola Fergola si è detto che in Napoli erano sorte due scuole: la *sintetica* e l'*analitica*; a quest' ultima apparteneva il Padula; e ne fu uno strenuo difensore.

Nel 1837 pubblicò una memoria: *Sui solidi caricati verticalmente e sui solidi di egual resistenza*; e nel 1838 un volume col titolo: *Raccolta di problemi risoluti con l'analisi algebrica*, col qual lavoro iniziava i giovani a porre i problemi in equazioni e risolverli; in detta raccolta trovasi risoluto il problema di « condurre da un punto dato la normale ad una data conica », egli ne dedusse il teorema che « le perpendicolari condotte pe' vertici d' una conica alle normali alla medesima curva menate per uno stesso punto, incontrano la conica in punti situati sulla periferia d' un cerchio ». Con quest'opera il Padula intese di combattere la scuola sintetica, che dopo la morte del Fergola, era capitanata dal Flauti. Questi, come già dicemmo, nel 1838 lanciò una disfida alla scuola analitica con un programma destinato a promovere e comparare i metodi per l' invenzione geometrica, presentato ai matematici del regno delle due Sicilie; ai temi proposti il Padula diede nel 1839 una risposta esauriente e definitiva, che fu il colpo di grazia per la scuola sintetica. In questa risposta, dopo una dottissima introduzione, risolvette i tre famosi problemi proposti dal Flauti:

1) Inscrivere in un cerchio un triangolo, i cui lati passino per tre punti dati;

2) Inscrivere in un triangolo tre cerchi, in modo che ciascuno tocchi gli altri due e due lati del triangolo;

3) Inscrivere in una data piramide triangolare quattro sfere in modo, che ciascuna tocchi le altre tre e tre facce della piramide; il quale ultimo, come mostrò il Padula, è un problema più che determinato.

Nel 1842-43 pubblicò due note *Sulla scienza delle costruzioni* e ancora le *Ricerche d'analisi a due coordinate*; e nel 1844 una memoria *Sulle linee di contatto delle superficie*. Avendo in questo tempo il Padula conosciuto in Napoli lo Steiner e lo Jacobi, essi forse gl'ispirarono il suo lavoro più importante: *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, che pubblicò in quell'anno.

Nel 1852 pubblicò negli *Annali* del Tortolini la memoria *Dei punti multipli delle curve algebriche*; poi una memoria *Sulle curve di 4° grado, che hanno tre punti di regresso*; e nel 1857 l'importante memoria: *Ricerche sulle superficie curve* (*Atti dell'Accademia delle scienze*, vol. II, p. 308).

Nell'anno 1863 diede alla luce la memoria *Ricerche di geometria analitica* (*Atti dell'Accademia delle scienze*, vol. I); e l'anno dopo presentò al R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli una lunga memoria col titolo: *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, nella quale vengono dimostrati molti e bei teoremi. Come si vede, col Padula la scuola napoletana assume nuovo indirizzo e nuova vita ed allarga il campo delle ricerche.

Genocchi [1]. — *Angelo Genocchi* nacque a Piacenza il 5 marzo 1817 da agiata famiglia e morì in Torino il 7 marzo 1889. Fece i primi studî nella sua città natale, ove fece pure il corso di giurisprudenza. Si laureò a Parma nel 1839 ed esercitò l'avvocatura fino al 1848. Intanto già da due anni si era dato all'insegnamento, e nel 1846 era stato nominato professore sostituto della Facoltà legale, indi professore di diritto romano nelle scuole superiori di Piacenza. Si recò a Torino nell'anno fatidico dei rivolgimenti italiani; e quivi abbandonò interamente l'esercizio dell'avvocatura e proseguì, frequentando alla Università le lezioni del Plana e del Chiò, gli studî delle matematiche, che da

1) Vedi *Cenni necrologici di Angelo Genocchi*, letti alla R. Accademia delle scienze di Torino, da F. Siacci, il 7 aprile 1889, e pubblicati negli *Atti*, serie II, tomo XXXIX.

sè solo aveva intrapreso a Piacenza e da Parma. Solo nel 1851 pubblicò la sua prima memoria, riferentesi alla *Teoria dei numeri*; e nel 1852 un'altra nota *Sui residui quadratrici*; lavori che tosto lo fecero conoscere nel mondo degli scienziati.

Nel 1857 aveva pubblicato già più di quaranta memorie; ed in quest'anno fu nominato professore di algebra complementare e geometria nell'Università di Torino, cattedra che per una eccessiva ritrosia avrebbe volentieri rifiutata, se non glielo avessero impedito le insistenze del Chiò: nel 1860 passò alla cattedra di analisi superiore; nel 1862 a quella d'introduzione al calcolo; e nel 1865 finalmente a quella del calcolo infinitesimale, che conservò sino alla sua morte.

Il Genocchi era di carattere mite; menava vita ritiratissima insieme alla sua vecchia madre, immerso sempre nei suoi studî prediletti di matematica, a cui dedicò tutta la vita.

Era modestissimo, alieno da onorificenze e da cariche, che assai volontieri rifiutava. Egli era senatore del regno, cavaliere del merito civile, presidente dell'Accademia delle scienze di Torino, uno dei XL della Società italiana delle scienze, membro dell'Accademia dei Lincei, della Società delle scienze di Liegi e corrispondente di vari Istituti scientifici. Oltre la scienza amò anche le arti belle, finchè gli durò la vista; e si dilettava anche di musica. Negli ultimi anni di sua vita, per cateratta agli occhi, perdè la vista; e questa grave sventura l'amareggiò immensamente.

La produzione scientifica di Angelo Genocchi è assai vasta; consta più di centosessanta lavori, che riguardano quasi tutti i rami delle matematiche pure; essi trattano:

a) le serie;

b) il calcolo integrale;

c) la teoria dei numeri.

I principali son quelli che appartengono all'ultima categoria; ed è un fatto che in Italia egli forse era l'unico rappresentante, fra gli analisti, che si occupasse con passione di questo ramo difficilissimo delle matematche, qual'è quello *della teoria dei numeri*, studio trascurato anche oggidì. Il Catalan dice che se il Genocchi avesse avuto un po' più di salute, avrebbe potuto meglio di ogni altro, fare una *nuova teoria dei numeri*; sicchè il Genocchi ben si può definire «il Legendre italiano».

Nella teoria delle serie egli trattò i numeri di Bernoulli, gli sviluppi e la convergenza della serie di Stirling e di altre, l'espressione del resto nella serie di Eulero sotto forma d' integrale definito; e sempre trattò le questioni con grande chiarezza, eleganza ed originalità.

Nel calcolo integrale sono magistrali la memoria *Sulle ovali di Cartesio*, che rettificò con tre archi di ellissi; quella *Sugli integrali ellittici ed abelliani*; in una di queste memorie, stabilita una formula più generale d'altra esposta senza dimostrazione, data da Jacobi nella celebre memoria *De functionibus ellipticis Commentatio prima*, in cui l'autore dei *Fundamenta*, dopo avere ottenuto per la prima volta le equazioni differenziali ordinarie, a cui soddisfano separatamente il numeratore ed il denominatore della formula di trasformazione $y = \frac{U}{V}$, si esprime così: «Integrale completum aequationum differentialium tertii ordinis, quibus functiones U, V definiantur, in promptu esse non videtur», il Genocchi dà il risultato che era sfuggito allo Jacobi, ottenendo la soluzione completa di questa equazione differenziale, deducendone il teorema dell'addizione degli integrali ellittici di 3ª specie. In molte memorie il Genocchi si è occupato della teoria della funzione euleriana e degli integrali euleriani. Si occupò ben poco delle applicazioni matematiche, e solo a scopo di critica scrisse del moto de' liquidi ne' vasi e del calore solare nelle regioni circumpolari della terra.

Ma come, si è detto sopra, il Genocchi si è principalmente occupato di aritmetica superiore; le sue ricerche hanno per oggetto la teoria dei numeri complessi, la legge di reciprocità nella teoria dei residui quadratici, sulla quale scrisse un'opera veramente magistrale, la risoluzione in numeri interi delle equazioni indeterminate. I lavori del Genocchi furon pubblicati nelle *Nouvelles annales de mathématiques*, negli *Annali di matematica* del Tortolini, nei *Comptes-rendus*, nel *Bulletin de l'Académie du Belgique*, nelle *Memorie dell'Accademia di Torino*, in quelle de' *Lincei*, nel *Giornale di matematiche* di Napoli, ecc.

Non potendo dare l'elenco completo dei lavori del Genocchi, crediamo fare cosa utile riportando i titoli di quelli riguardanti la teoria di numeri.

1. *Satisfaire par des nombres rationels aux deux equations*:

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2, x^2 - y^2 - 1 = u^2 \text{ (1851).}$$

2. *Démonstration d'un théorème d'Euler* (1853).

3. *Démonstration de quelques propositions d'arithmétique, d'après Euclide* (1854).

4. *Remarques sur un théorème de M. Brioschi* (1854).

5. *Démonstration d'un théorème de M. Brioschi* (1855). In questa memoria il Brioschi ha mostrato che «il prodotto di una somma di otto quadrati per una somma di otto quadrati è una somma di otto quadrati»; il Genocchi l' ha generalizzato per una somma di 2^n quadrati. Una dimostrazione del teorema di Eulero per mezzo dei numeri complessi venne data da C. Hermite.

6. *Théorème de M. Brioschi* (1851).

7. *Démonstration d'un théorème de Fermat* (1883).

I lavori precedenti sono stati pubblicati nelle *Nouvelles annales de mathématiques*.

8. *Intorno all'espressione generale de' numeri Bernoulliani* (1852).

9. *Sulla formula sommatoria di Eulero e sulla teorica dei residui quadratici* (1852); memoria di grande importanza.

10. *Intorno alla forma quadratica* $x^2 + y^2$. Osservazioni.

Questi lavori sono stati pubblicati negli *Annali di scienze matematiche e fisiche* del Tortolini.

11. *Formule per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite* (1860).

12. *Intorno ad un problema indeterminato*. Lettera (1867).

13. *Intorno all' equazione* $x^r + y^r + z^r = o$ (1864); è ivi generalizzata la dimostrazione di Lamé.

14. *Intorno ad alcune somme di cubi* (1865).

15. *Intorno ad alcune forme di numeri* (1868-69).

I lavori 14-15 sono stati pubblicati negli *Annali di matematica pura ed applicata* dal Tortolini.

16. *Dimostrazione di un teorema intorno ai prodotti di alcune*

somme di quadrati (1864). Questa nota fu pubblicata nel vol. II, p. 47 del *Giornale di Matematiche* del Battaglini, di Napoli.

17. *Note sur les nombres complexes* (1854).

18. *Note sur quelques sommations de cubes* (1866).

I lavori 17-18 sono stati pubblicati nel *Journal de mathèmatiques pures et appliquées* di Liouville.

19. *Sur un manuscrit de Fermat, récemment publié* (1884); pubblicata in *Mathesis* di Mansion e Neuberg.

20. *Sur les nombres de Bernoulli* (1885); pubblicata nel *Journal für die reine und angewandte Mathematik.*

21. *Ueber die summe von Cubikzahlen* (1866); pubblicata nei *Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben unter der verantworlichen Radaction* von Schlömilch, Witzschel, Kahl, Cantor.

22. *Note sur la théorie des résidus quadratiques*; pubblicata nelle *Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers* dell'Accademia delle scienze di Bruxelles; fu premiata.

23. *Sur une propriété des nombres* (1857); pubblicata nel *Bulletin de l'Académie royale des sciences* ecc. del Belgio.

Nei *Comptes-rendus de l'Académie des sciences,* ha pubblicato i lavori seguenti:

24. *Generalisation du théorème de Lamé sur l' impossibilité de l'équation* $x^r + y^r + z^r = o$ (1876).

25. *Remarques sur une démonstration de la loi de réciprocité* (1855).

Negli *Atti della R. Accademia di Torino*:

26. *Intorno a tre problemi aritmetici di Pietro Fermat* (1876).

27. *Cenni di ricerche intorno ai numeri primi* (1876).

Nelle *Memorie della Società italiana delle scienze, detta dei XL*:

28. *Intorno ad alcune egualità nella dottrina dei numeri* (1881).

Negli *Atti dell'Accademia pontificia de' nuovi Lincei*:

29. *Intorno ad alcune somme di cubi.*

Nel *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche del Boncompagni*:

30. *Ancora un cenno dei residui cubici e biquadratici* (1875).

31. *Sur quelques théorèmes qui peuvent conduire à la loi de reciprocité de Legendre* (1885).

Il Genocchi si occupò anche di storia delle matematiche, come l'attestano le pubblicazioni che riguardano Leonardo Pisano, la corrispondenza fra Lagrange e D'Alembert, la storia dell'algebra, i manoscritti del Fermat, ecc.

Rubini [1]. — *Raffaele Rubini* nacque in Brindisi il 20 ottobre 1817 e vi morì il 13 maggio 1890. Fece i primi studî in Brindisi; e non ancora diciottenne si recò a Napoli, ove studiò matematiche alla scuola del Padula; nel 1844 si laureò in matematiche ed in architettura. Insegnò dapprima nel collegio della Nunziatella e poi nel 1848 nel liceo di Lecce, cattedra che per i suoi principî patriottici perdè ben presto. Nel 1859 fu nominato professore di meccanica razionale nella R. Scuola di Marina di Napoli e nel 1861 professore della stessa materia nell' Università di Napoli, cattedra che scambiò nel 1863 con quella di algebra.

Il Rubini era uomo di molto buon cuore ed assai caritatevole; per la versatilità del suo ingegno amava e coltivava con trasporto la musica, la pittura e la poesia, e fu perciò amico di artisti e di letterati di valore. Era socio di molte Accademie scientifiche, e commendatore della corona d' Italia.

Pubblicò molti trattati con vena inesauribile:

1. *Trattato di geometria analitica.*
2. *Complementi di algebra.*
3. *Elementi di calcolo infinitesimale.*
4. *Teoria delle forme algebriche*, in due volumi, che va segnalata in modo speciale come quella che presentava la maggiore difficoltà, sia per l'estensione del campo da percorrere, come per la scelta di un conveniente metodo di esposizione; questa opera serve di preparazione per lo studio dei classici lavori del Salmon, del Clebsch, del Cayley, del Sylvester, dell' Aronhold, del Gordan.
5. *Un corso completo di matematiche elementari.*

Oltre i lavori sopra menzionati il Rubini lasciò diverse memorie, che si trovano sparse nei *Rendiconti dell'Accademia delle*

---

1) Vedi *Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Napoli*: *Elogio di Raffaele Rubini,* del prof. A. CAPELLI.

scienze di Napoli, negli *Annali* del Tortolini e nel *Giornale di matematiche* del Battaglini.

Negli *Annali di scienze matematiche e fisiche*:

6. *Sul luogo geometrico dell' equazione algebrica e del 2° grado* $r^2 = 2mn + mn^2$ *riferita a coordinate polari* (1853).

7. *Teoremi relativi alle superficie di 3° grado* (1854).

8. *Nota sull' applicazione della teoria dei teoremi dei determinanti* (1857).

Nel *Giornale di matematiche* del Battaglini:

9. *Teoria delle funzioni ellittiche* (1863).

10. *Sulla divisione di una funzione intera per un'altra* (1866).

11. *Intorno all'equazioni binomie* (1867).

12. *Formole di trasformazione nella teoria dei determinanti* (1878).

13. *Intorno ad un punto di storia matematica* (1870).

14. *Esercizi d' integrazione col calcolo dei simboli di operazione* (1881).

Nei *Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Napoli*:

15. *Su talune formule relative ai determinanti* (1876).

16. *Intorno ad un'assertiva di Boole* (1880).

Betti [1]. — *Enrico Betti* nacque presso Pistoia il 21 ottobre 1823 da famiglia originaria dalla terra di Tobbiana nella montagna pistoiese, e morì l' 11 agosto 1892 nella villa di Stibbiolo a Soiana presso i Bagni di S. Giuliano in quel di Pisa. Perdè il padre mentre era ancor bambino; e la madre sua, che egli amò d' immenso affetto, a stento potè fargli compiere gli studî classici nel liceo Forteguerri di Pistoia; poi andò a studiare a Pisa, ove ottenne per esami un posto di studio in quella Università. Si laureò in matematiche pure nel 1846, avendo avuto a maestro Ottaviano Fabrizio Mossotti; e subito fu nominato assi-

1) Vedi *Rivista matematica*, settembre 1894; *Il senatore Enrico Betti*. Cenno necrologico di E. PASCAL; *Annuario della Università di Pisa*, 1892-93; *Il Nuovo Cimento*, serie 3ª, tomo 32, 1893; *Enrico Betti*, del prof. V. VOLTERRA; *Annali di matematica pura ed applicata* del BRIOSCHI, serie 2ª, tomo 10, fasc. 1° giugno 1892; *Enrico Betti*, di F. BRIOSCHI; *Atti dell' Istituto veneto*, tomo 50, serie 7ª, tomo 4°, disp. 4ª, 1892-93; *Commemorazione di E. Betti*, di E. PADOVA.

stente ad una Cattedra; e così ebbe agio di perfezionare la sua coltura scientifica. Caldo, come tanti altri del suo tempo, per amore di patria e di libertà, nel 1848 prese parte col battaglione universitario toscano alla prima campagna per l' indipendenza italiana, ed il 29 maggio di quell'anno combattè valorosamente alla battaglia di Curtatone, ma di ciò egli non menò mai vanto. Tornato in Toscana, si dedicò con animo virile tutto ai suoi diletti studî matematici ed alla sua famiglia, composta della madre e di due sorelle, che perdette ben presto.

Nel 1849 andò ad insegnare matematiche nel liceo di Pistoia, d'onde passò nel 1854 a quello di Firenze, e nel 1857 fu nominato professore di algebra superiore nella Università di Pisa; nel 1859 fu trasferito alla cattedra di analisi e geometria superiore, e nel 1863, morto il suo professore ed amico Mossotti, insegnò anche fisica matematica, cattedra che conservò finchè visse; e nel 1870 lasciò l' insegnamento della analisi e della geometria superiore per assumere quello della meccanica celeste.

Salito in tanta fama pe' suoi lavori scientifici, venne nominato membro di varie Accademie e Società scientifiche italiane e straniere; fu decorato del merito civile di Savoia; noto per la sua gran rettitudine ed amore alla patria fu eletto più volte deputato al Parlamento Nazionale del collegio di Pistoia; fu segretario generale del Ministero della pubblica istruzione dal 1874 al 1876; ed ebbe dal Governo importanti incarichi, che disimpegnò sempre con grande onore; dal 1865 fino alla sua morte fu Direttore della scuola normale superiore, annessa alla Università di Pisa, che sotto la sua direzione potè venire in tanto onore e dare tanti valenti insegnanti sì delle scuole secondarie, che delle universitarie; nel 1884 fu nominato senatore del regno. Il Betti dedicò tutta la sua vita agli studî ed all' insegnamento, nel quale rese de' grandi servigi, spronando i giovani sempre a nuove ricerche e venendo spesso in loro aiuto ed incoraggiandoli a proseguire nell'arduo cammino della scienza. Coloro che ebbero la fortuna di avere a maestro il Betti, lo considerarono come un loro secondo padre e conservano di lui indelebile memoria; e quelli che ebbero anche la fortuna di conoscerlo da vicino poterono apprezzare le doti del suo nobile animo e della sua alta mente. Benchè di carattere mite, tuttavia l'ingiustizia lo trovava un avversario invincibile, e non vi era nobile causa che non ritrovasse in lui un difensore ostinato: sicchè quando era sotto la cattiva impressione di una cosa da altri ingiustamente commessa, l'uomo che avreste giudicato così schivo dalle lotte e dai rumori del mondo, si trasformava e appariva sotto la figura di un lottatore tenace e risoluto. Era stimato immensamente dai colleghi, venerato dai discepoli.

Discutere a fondo l'opera scientifica di Enrico Betti, che comprende 54 lavori di grande importanza e rappresenta la produzione di 35 anni di studî assidui, sarebbe cosa molto ardua; parleremo solo de' principali, dando infine l'elenco di tutte le pubblicazioni del celebre matematico pistoiese.

La carriera scientifica del Betti può essere divisa in tre fasi distinte, che corrispondono all'insegnamento da lui impartito.

Prima fase:

Il decennio che corre fra il 1850 e il 1860 fu dedicato dal Betti esclusivamente alle ricerche algebriche, e cioè sulla risoluzione delle equazioni algebriche e sopra la teoria delle sostituzioni. Si sa che il Kronecker, fondandosi sulla prima memoria del Betti, che dà le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè un'equazione algebrica sia risolubile per radicali, diede le formule generali di risoluzione per le equazioni di grado primo, risolubili per radicali, e poco dopo il Betti le trovò per quelle, il cui grado è una potenza di un numero primo. Proprio in quell'epoca era stata lanciata una sfida, simile a quella di Fermat, dal Galois con quella celebre lettera al Chevalier la notte stessa che precedette il duello, che troncò la vita del più giovane e forse del più gran matematico di quel tempo; ed in quella lettera erano enunciati una serie di teoremi senza dimostrazione, teoremi che affaticavano la mente dei più eminenti analisti; fu merito grandissimo del Betti di averne dato dimostrazioni rigorose. Fra gli altri, è assai importante questo: «L'equazione modulare per la trasformazione delle funzioni ellittiche nei casi di $p = 5, 7, 11$ non è risolubile per radicali, in generale può abbassarsi dal grado $p + 1$ al grado p»; questo teorema fu dimostrato dal Betti nel 1852. Ecco la via seguita dal Betti. I seni amplitudine che hanno per argomento la p^{ma} parte dei periodi, se p è un numero primo dispari, sono radici di un'equazione di grado $\frac{p^2-1}{2}$, la cui soluzione dipende da quella di una risolvente di grado $(p+1)$ e da successive estrazioni di radici; ma allorchè ci si propone di determinare i seni amplitudine esprimibili razionalmente per un seno amplitudine dato, colla sola condizione, che gli argomenti di quelli, che siano funzioni lineari intere dell'argomento di questa ed in modo che il grado più elevato delle funzioni, che compaiono nel numeratore e nel denominatore della funzione trasformata sia p, o più brevemente quando ci proponiamo il problema della trasformazione di ordine p delle funzioni ellittiche, tra i moduli delle funzioni trasformate e quella della funzione data esiste una relazione (equazione modulare), di grado $p + 1$, la quale è una risolvente della equazione per la divisione dei periodi. Onde, risolta l'equazione modulare, la risoluzione di quella, che serve a determinare i seni amplitudine delle frazioni $p.^{esime}$ dei periodi, è ridotta ad estrazioni di radici; e precisamente il teorema di Galois stabiliva l'esistenza di una risolvente di 5° grado per l'equazione che serve a determinare i seni amplitudine delle quinte parti dei periodi, e che quindi esisteva un'equazione di 5° grado, le cui radici si sarebbero potute esprimere mediante i seni amplitudine col modulo k delle quinte parti de' periodi. Perciò trattavasi di costruire questa risolvente della equazione modulare: e allorchè si fosse pervenuti a dimostrare, che per una conveniente scelta del modulo k e di opportune trasformazioni eseguite sulla incognita, si poteva far coincidere quella risolvente colla più generale equazione di 5° grado, si sarebbero ottenute le formule di risoluzione di questa mediante i seni amplitudine delle quinte parti del periodo. Il Betti, trovata la risolvente di 5° grado della equazione modulare, cercò di metterla sotto la forma detta di Jerrad, a cui mediante una trasformazione di Tschirnauss si può ridurre qualsiasi equazione di 5° grado (essa manca dei termini di 4°, 3°, 2° grado ed ha un sol coefficiente letterale). Egli era pervenuto già a mostrare che dalla risolvente sparivano due termini, gli mancava solo di fare sparire il terzo, quando l'Hermite ed il Kronecker pubblicarono le loro dimostrazioni; in questo modo l'Italia, che già aveva il vanto di aver dato con Tartaglia e Cardano le formole di risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, perdette quello di aver risoluto quelle di 5°; e di ciò il Betti fu addoloratissimo; ed attribuiva l'insuccesso alla poca pratica che aveva allora della teoria delle funzioni ellittiche.

Seconda fase:

In questo secondo periodo (1860-63) il Betti si è applicato all'analisi, quale si intende oggidì, e più specialmente alla teoria delle funzioni. La teoria delle funzioni ellittiche e sue applicazioni e la teorica delle funzioni algebriche di una variabile complessa sono infatti il soggetto delle Memorie che egli pubblicò dal 1860 al 1862. La prima di esse, che è disgraziatamente rimasta incompleta, prova che il Betti sino da quell'epoca possedeva ed aveva introdotto nell'insegnamento que' metodi, che solo da poco sono stati divulgati ed hanno fatto vedere, mercè la scuola di Weierstrass, che ne fu l'iniziatore, la loro grande potenza e la loro fecondità. Venuto il Riemann per qualche tempo a Pisa, il Betti subito strinse amicizia con lui; le idee del Riemann tosto furono abbracciate dal Betti, che riprese lo studio della teoria delle funzioni coi metodi riemanniani; l'influenza di Riemann si mostra con maggior chiarezza nei risultati ed anche nei successivi lavori del Betti sulla fisica matematica.

Terza fase:

In questo periodo, che va dal 1863 circa fino agli ultimi giorni della sua vita, i lavori del Betti riguardano quasi tutti la meccanica e la fisica matematica. Egli coltivò quasi tutti i rami di queste discipline, e cioè: la teoria del potenziale, quella della propagazione del calore, la termodinamica, l'elettricità, il magnetismo, la capillarità, l'elasticità, l'idrodinamica, ed il problema degli n corpi.

Il Betti dedicò molti anni di studio alla teoria del potenziale, sulla quale pubblicò l'aureo trattato *Teoria delle forze newtoniane e sue applicazioni alla elettrostatica ed al magnetismo.*

Le sue lezioni sulla elasticità furono pubblicate nel giornale *Il nuovo cimento*, nel 1872; e costituiscono un'opera di capitale importanza, e segnano una data memorabile nella storia

di questa teoria. Invero il Betti fu il primo ad applicare felicemente alla integrazione delle equazioni differenziali dell'equilibrio dei solidi elastici que' metodi, che erano riusciti così fecondi per le equazioni di Laplace. A fondamento del suo metodo il Betti pose un teorema, che ora è conosciuto col suo nome e che da solo, per la sua profondità e per l'importanza delle sue applicazioni, costituirebbe un titolo non comune di gloria. Il metodo, iniziato dal Betti e seguìto e perfezionato dai matematici posteriori, fu applicato felicemente alla risoluzione dei più importanti problemi di fisica matematica e di meccanica.

Il Betti si è occupato anche di geometria; nel 1860 pubblicò un lavoro, in cui diede alcuni eleganti teoremi sulle curve tracciate sopra una superficie qualunque, che il Betti chiama ellissi ed iperbole geodetiche, teoremi che dànno una bella estensione delle proprietà delle ellissi e delle iperbole ordinarie.

Elenco dei lavori del Betti:

I. *Annali di scienze fisiche e matematiche* del Tortolini:

1. *Sopra la determinazione analitica dell'efflusso dei liquidi per una piccolissima apertura* (1850).
2. *Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriducibili di grado primo* (1851).
3. *Un teorema sulle risolventi dell'equazioni risolubili per radicali* (1851).
4. *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* (1851).
5. *Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche* (1853).
6. *Un teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche* (1854).
7. *Sopra la teorica delle sostituzioni* (1845).
8. *Sopra la più generale funzione algebrica, che può soddisfare una equazione, il grado della quale è potenza d'un numero primo* (1855).
9. *Sopra le forme omogenee a due indeterminate* (1856).
10. *Sopra le serie doppie ricorrenti* (1857).

II. *Annali di matematica pura ed applicata*, Serie I:

11. *Sopra le equazioni algebriche con più incognite* (1858).
12. *Sopra i covarianti delle forme binarie* (1858).

13. *Sopra le funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più equazioni algebriche* (1858).

14. *Sopra i combinanti* (1858).

15. *Sopra la teorica generale delle superficie curve* (1860).

16. *La teorica delle funzioni ellittiche e sue applicazioni* (1860).

III. *Annali di matematica pura e applicata*, Serie II:

17. *Sopra le funzioni sferiche* (1867).

18. *Sopra le temperature variabili di una lastra terminata* (1865).

19. *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (1874).

20. *Sopra l'equazione di equilibrio dei corpi solidi elastici* (1874).

21. *Sopra il moto di un numero qualunque di punti che si attraggano e si respingano fra loro* (1877).

22. *Sopra i sistemi tripli di superficie isoterme ed ortogonali* (1878).

23. *Sopra i moti che conservano la figura ellissoidale ad una massa fluida eterogenea* (1881).

IV. *Annali delle Università toscane*, Pisa:

24. *Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa* (1863).

25. *Memoria sopra la teoria della capillarità* (1866).

26. *Sopra la determinazione delle temperature variabili d' un cilindro* (1868).

V. *Il nuovo cimento*, Serie I:

27. *La teoria delle forze che agiscono secondo la legge di Newton e le sue applicazioni alla elettrostatica* (1865).

28. *Teoria della capillarità* (1867).

29. *Sopra la elettrodinamica* (1868).

30. *Sopra la determinazione delle temperature variabili in una lastra terminata, quando la conducibilità non è eguale in tutte le direzioni* (1868).

31. *Sopra la distribuzione delle correnti elettriche in una lastra rettangolare* (1870).

32. *Teoria dell'elasticità* (1874).

33. *Un teorema sulle funzioni potenziali* (1874).

34. *Sopra il potenziale di un sistema di conduttori isolati carichi di elettricità e di coibenti elettrizzati comunque* (1877).

35. *Sopra la teoria dei condensatori* (1879).

36. *Sopra il moto dei fluidi elastici* (1883).

VI. *Giornale di matematiche*, Napoli:

37. *Ottaviano Fabrizio Mossotti*: necrologia (1863).

38. *Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa definita da un'equazione di 3º grado* (1865).

VII. *Memorie della Società italiana delle scienze*, Serie III, parte II:

39. *Sopra la determinazione delle temperature nei corpi solidi ed omogenei* (1868).

VIII. *Atti della R. Accademia dei Lincei*, Serie II:

40. *Sopra la funzione potenziale di un'ellisse omogenea* (1875).

Transunti, Serie III:

41. *Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti* (1887).

42. *Sopra un'estensione dei principî generali della dinamica* (1877).

43. *Sopra il moto di un ellissoide fluido eterogeneo* (1881).

44. *Sopra la entropia di un sistema newtoniano in moto stabile* (1889).

45. *Sopra un teorema di meccanica* (1891).

IX. *Atti della R. Accademia di Torino*:

46. *Teorema di elettricità statica* (1866).

X. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*:

47. *Sopra un'estensione della terza legge di Keplero* (1888).

XI. *Collectanea mathematica (in memoriam Dominici Chelini)*.

48. *Sopra la propagazione del calore* (1880).

XII. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*:

49. *Sur les fonctions symétriques des racines des équations* (1857).

XIII. *Quaterly Journal of mathematics*:

50. *Extrait from a letter of Sig. E. Betti of M. Sylvester*, t. I.

XIV. *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*:

51. *Sur les résolutions par radicaux des équations dont le dégré est une puissance d'un nombre premier* (1859).

52. *Sur les substitutions de six lettres* (1866).

XV. *Procedings of the London mathematical society :*

53. *On the motion of on elastic solid strained by extraneous forces* (1889).

XVI. Pubblicazione isolata :

54. *Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni alla elettrostatica ed al magnetismo* (1879). Quest'opera fu tradotta anche in tedesco.

Insieme al Brioschi il Betti pubblicò gli *Elementi di Euclide* e da solo tradusse la classica *Algebra elementare* del Bertrand, contribuendo così anch'egli a rialzare in Italia lo studio delle matematiche elementari, come aveva grandemente contribuito a rialzare quello delle matematiche superiori.

Per cura dell'Accademia dei Lincei si sono pubblicate le *Opere matematiche* del Betti, in due volumi.

Codazzi [1]. — *Delfino Codazzi* nacque in Lodi il 7 marzo 1824 e morì a Pavia il 21 luglio 1873. Dapprima fu professore di scienza naturale e matematica nel ginnasio liceale di Lodi; poi titolare di matematica nel liceo di Pavia; nel 1865 fu nominato professore ordinario di algebra complementare e di geometria analitica nella Università della stessa città.

Il Codazzi pubblicò molti lavori negli *Annali di matematica* (tanto dell'antica, quanto della nuova serie); essi riguardano la teoria delle superficie e quella delle coordinate curvilinee, e sono indubbiamente da collocarsi fra i più notevoli, che su tali materie siano usciti in quell'epoca. Nel 1861 l'Istituto di Francia accordò con parole di alto encomio la menzione onorevole ad una sua memoria, che egli aveva presentato pel concorso del 1858 al gran premio di matematica, relativamente alla teoria delle superficie applicabili su una superficie data. Questa memoria contiene la miglior risposta al quesito proposto; ed infatti le importantissime formule di risoluzione, che sono in esso stabilite, quantunque già incontrate dal Mainardi, portano nella scienza il nome di *formule di Codazzi*.

1) Vedi nelle *Memorie per la storia della Università di Pavia*, serie 1ª, 1878, l'Articolo scritto da E. Beltrami.

Brioschi [1]. — *Francesco Brioschi* nacque da modesta famiglia in Milano il 22 dicembre 1824, e vi morì il 13 dicembre 1897. Fece i primi studî nella sua città natale; indi passò a studiare matematiche all'Università di Pavia, ove si laureò nel 1845, e fu allevato alla scuola del Bordoni, nel culto, forse un po' troppo esclusivo, dei metodi lagrangiani; ma poco appresso entrò con Gabrio Piola di Milano nell'ambiente meno rigido delle ricerche fisico-matematiche di Fourier, di Poisson, di Cauchy. Nel 1850 fu nominato supplente di matematica applicata all' Università di Pavia; fu promosso ordinario nel 1853; in questo tempo tenne anche la cattedra in qualità di supplente di architettura idraulica; nel 1859 fu nominato professore di analisi superiore, cattedra che tenne sino al 1861. In questo anno fu chiamato come segretario generale all' Istruzione pubblica coi Ministri De-Sanctis e Matteucci, carica che occupò sino alla fine del 1862; in questo frattempo fu eletto deputato al Parlamento Nazionale del collegio di Todi; nel 1865 fu nominato senatore.

Nel 1863 fondò l'Istituto tecnico superiore in Milano (Politecnico), di cui fu sempre Direttore e professore ordinario d' idraulica ed incaricato d'analisi infinitesimale; in quell'anno cessò di appartenere definitivamente all' Università di Pavia, della quale fu poi (1875) nominato professore emerito. Ottenne dal Governo parecchi importanti incarichi amministrativi, che disimpegnò sempre con grande zelo e profondità di vedute. Appartenne per lungo tempo al Consiglio superiore della pubblica istruzione, ove portò un gran contributo coll'elevatezza del suo ingegno, la vastità della sua coltura e la conoscenza profonda della scuola.

Fu membro di quasi tutte le Accademie, Istituti e Società scientifiche tanto italiane, quanto straniere; e nel 1884 successe al Sella nella presidenza dell'Accademia de' Lincei; nel quale

1) Vedi: 1. *Comptes rendus*, 27 dicembre 1877: *Necrologia di F. Brioschi.* fatta da C. Hermite; 2. *Nuova Antologia*, vol. 73, serie 4ª, fasc. 1° gennaio 1897: *Francesco Brioschi*, del prof. G. Colombo; 3. *Annali di Matematica*, serie 2ª, tomo XXVI (settembre-dicembre 1876): *Necrologia di Francesco Brioschi*, del prof. E. Beltrami; 4. *Annuario dell'Università di Pavia*, 1898-99: *Pochi cenni su F. Brioschi*, del prof. E. Pascal; 5. *Circolo degli ingegneri ed architetti di Milano*, 1898: *Commemorazione di F. Brioschi*, del prof. E. Paladini; 6. *Giornale di Matematiche* del Battaglini di Napoli, vol. 36: *Cenno necrologico di F. Brioschi*, del prof. A. Capelli; 7. *Mathematische Annalen*, 50 Band, 4 Hetf, 22 juli 1868: *Francesco Brioschi*, von M. Nöether.

ufficio rimase fino alla morte, mantenendo sempre alto il prestigio di quell' insigne sodalizio.

Francesco Brioschi all'eccelso ingegno univa una fibra robustissima; di carattere inflessibile e di volontà ferrea non conosceva ostacoli; lavoratore indefesso poteva attendere ad un tempo a più incarichi ed allo studio scabroso delle matematiche; ed in tutti riusciva sempre colla sua operosità inesauribile vittorioso; era di modi austeri e semplici, che talvolta avevano del rude, onde lo rendevano poco benviso a quelli, che non lo conoscevano da presso. Ma egli è un fatto che tutti que' giovani matematici, che si rivolgevano a lui, ne avevano sempre aiuti e larghi consigli, e metteva a loro disposizione i suoi *Annali.*

Francesco Brioschi, tanto dissimile in questo dai suoi allievi Beltrami e Casorati, se si fosse occupato solo della scienza matematica, certo avrebbe al suo nome già grande, aggiunto maggior lustro; e senza dubbio sarebbe divenuto il più grande analista dell'epoca nostra. Egli non potè però sottrarsi al fascino dei larghi orizzonti, che si erano aperti nel 1859; sentì l'attrattiva irresistibile della vita pubblica ed il contagio di quello spirito di intrapresa, che le mutate condizioni economiche avevano destato in Italia; comprese le esigenze dei tempi e seppe, fino ad un certo punto, secondarle, seguendo le nuove correnti ed emergendo spesso e dominando, come avviene agli uomini veramente di forte ingegno; ma nella vita pratica gli mancò forse la profonda conoscenza degli uomini. Egli credette che l'elevatezza dell'animo e dei propositi potessero imporsi senza altro agl' interessi e dominarli; ma cadde in errore; e questo può in gran parte spiegare i rovesci che gli procurarono non poche amarezze e gravissimi danni economici.

In quanto alla politica gli mancò forse, oltre alla conoscenza degli uomini, quella paziente fiducia nel successo di un' idea, ad onta degli ostacoli e degli apparenti regressi, che solo può condurre alla meta voluta o sperata; perciò la sua linea di condotta non fu sempre diretta in guisa da assicurargli quella posizione, cui poteva legittimamente aspirare; e questa è forse l' unica ragione, onde il Brioschi in politica non arrivò a quegli alti uffici, ai quali pel suo altissimo ingegno, per la sua vasta e multiforme

coltura e per la sua grande operosità poteva legittimamente aspirare. Fu anche sui primi tempi (1855-59) tacciato, forse ingiustamente, di austriacante; ma in ogni modo gli eventi gli fecero in avvenire cambiare opinione, giacchè fu poi devotissimo al Governo italiano. Egli fu in relazioni personali ed amichevoli coi più rinomati matematici stranieri: con Cayley, Sylvester, Kronecker, Bertrand, Hermite e ultimo Humbold; il quale, quando lo vide per la prima volta in Germania nel 1854, non potè trattenere la sua grata sorpresa di trovare sì giovine l'autore della *Teoria dei determinanti.*

Furono suoi allievi carissimi il Beltrami, il Casorati ed il Cremona, tre vere illustrazioni della scienza italiana. Quale singolare contrasto fra il Brioschi ed il Beltrami! L' uno dava molta importanza all'artefizio algoritmico, l'altro invece molto all' intuizione; l' uno dopo poco più di dieci anni di studî si gettò nell'agone della vita pubblica; l'altro invece non si lasciò mai adescare dalla politica e dai facili ed effimeri trionfi, onde non volle mai uscire dalla quiete degli studî e delle sue pacifiche e tranquille occupazioni; l' uno carattere dominatore, direi quasi prepotente ed assoluto; l'altro mite, dolce e pieghevole; l' uno raccolse alti ed insperati trionfi, ma anche non poche amarezze; l'altro si tenne pago delle gioie, che procura la ricerca del vero; e non fu, si può dire, amareggiato mai in vita sua.

L'opera scientifica del Brioschi fu assai copiosa: duecentocinquanta lavori in un lasso di mezzo secolo diede alla luce il Brioschi: questa produzione si può dire prodigiosissima, quando si pensi alle gravissime occupazioni estranee agli studî, cui si era dato a tutt' uomo il matematico milanese. Un elenco dei suoi lavori si trova in fondo alla versione italiana del cenno necrologico sul Brioschi fatto dall'Hermite e pubblicato nel *Bollettino di Bibliografia e Storia delle scienze matematiche*, aprile-giugno 1898.

I suoi lavori furono pubblicati negli *Annali* del Tortolini di Roma, che poi egli trasportò a Milano e li fece rifiorire, essendone divenuto il direttore; negli *Atti dell'Istituto lombardo di scienze e lettere*; nelle *Nouvelles Annales de Mathematique*; nel *Journal de Mathématiques di Liouville*; nel *Journal für die Mathematik di Crelle*; nei *Comptes rendus dell'Istituto di Francia*;

nel *Giornale di matematica* del Battaglini; nei *Rendiconti dell'Accademia de' Lincei*; nei *Mathematische Annalen* ecc.; alcune opere furon pubblicate separatamente.

Ad onorare la memoria del Brioschi l' Istituto tecnico superiore volle innalzargli nel suo atrio una bella statua, decretando inoltre che si raccogliessero le sue opere in un' unica pubblicazione, che comprende cinque grossi volumi.

In sulle prime il Brioschi informò i suoi studî, e conseguentemente i suoi lavori, alla scuola francese; poi allargò il campo delle sue ricerche, prendendo a modello i matematici tedeschi, specialmente Jacobi, con cui egli aveva tanta affinità di temperamento scientifico; ma più particolarmente prese a studiare le opere dei matematici inglesi, i cui metodi e procedimenti egli predilesse più degli altri; quantunque nel 1886, dopo le pubblicazioni del Klein, con cui si estendevano al campo iperellittico le funzioni ellittiche di Weierstrass, il Brioschi tosto s' impadronisse prima di ogni altro di quelle nuove idee e vi collaborasse subito utilmente. La principale produzione scientifica del Brioschi si verificò nei primi dieci anni della sua carriera, cioè dal 1851 al 1860.

Il Brioschi non si rivela un pensatore originale, che crea nuove idee ed apre alla scienza nuovi campi, ed egli stesso soleva dire parlando di sè la parola modesta: *io sono un calcolatore*, e lo era davvero potentissimo; tuttavia in esse riscontrasi uno spirito dotato d' impronta propria, il quale senza posa si svolgeva maturandosi, sempre pronto ad accogliere e a rielaborare nuove germoglianti idee; l'opera del Brioschi durante mezzo secolo ha senza dubbio promosso il progresso della scienza.

Discorrere a fondo delle sue opere non solo sarebbe cosa ardua, ma esigerebbe un volume intero; chi però desiderasse ulteriori notizie sui suoi lavori, lo rimandiamo alla bellissima biografia del prof. Nöether di Erlangen.

Ricorderemo brevemente fra i lavori che onorano il grande analista italiano quelli che riguardano:

a) la geometria superiore;

b) il calcolo integrale;

c) l'algebra superiore;

tralasciando di menzionare quelli di meccanica, di idraulica e di altri rami d' ingegneria pratica.

Nella *geometria superiore* citeremo quelli che concernono le linee di curvatura, le proprietà delle superficie le cui linee di curvatura sono piane o sferiche, l' integrazione dell'equazione delle linee geodetiche, le tangenti doppie di alcune linee di 4° ordine, aventi un punto doppio ecc.

Nel *calcolo integrale* una memoria *Sulle equazioni a derivate parziali di 2° ordine*, un lavoro *Sulla distinzione dei massimi e minimi nel calcolo delle variazioni*, una memoria *Sopra una proprietà delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine*, ecc.

Nell'*algebra* ricorderemo: *La teorica dei determinanti e le sue principali applicazioni*, che fu pubblicata in Pavia nel 1854, e tradotta in quasi tutte le lingue; essa contribuì molto a diffondere l' uso in Italia di questo nuovo ed elegante algoritmo; un lavoro *Sopra i determinati gobbi*; uno *Sulla eliminazione*; quello *Sulla generalizzazione delle proprietà dei determinanti speciali, su cui fondasi la trasformazione delle funzioni abeliane del 1° ordine*; quello *Sulla interpolazione*; la memoria *Sulle funzioni di Sturm*. Ma i principali lavori di algebra superiore del Brioschi concernono la teoria delle forme algebriche, nella quale acquistò fama di speciale competenza, avendovi lavorato per tutta la vita; e quelli sulle equazioni algebriche.

Funzioni ellittiche. Sarebbe troppo lungo enumerare tutti i lavori sopra questa parte importante dell'analisi, i quali colpiscono tanto per la rara potenza del calcolo, quanto per la chiarezza dei metodi; ricorderemo solo quella parte tanto importante delle ricerche del Brioschi, ove l'algebra si disposa alla teoria delle funzioni ellittiche ed abeliane, ricerche che condussero alla soluzione delle equazioni di 5° e di 6° grado. In esse l'ingegno del Brioschi si mostra in tutta la sua potenza: esse gettano una luce completa sulle proprietà più recondite della equazione jacobiana, che determina il moltiplicatore, per mezzo del modulo nella trasformazione del 5° ordine; esse svelano il segreto della risoluzione dell'equazione del 5° grado, che Kronecker aveva dedotta da quella equazione, e che aveva comunicato all'Accademia di Francia, senza dimostrare il suo bel risultato. Per le equazioni del 6° grado il Brioschi tiene una via opposta; esce dal campo delle funzioni ellittiche ed impiega invece le trascendenti più elevate, che nascono dall' inversione degli integrali iperellittici della 1ª classe; si adoperano le funzioni di due variabili analoghe alle trascendenti di Jacobi, e fra esse le dieci espressioni che, essendo funzioni pari, non si annullano per valori nulli degli argomenti; son queste le quantità per mezzo delle quali sono rappresentate le radici e che dànno la risoluzione dell'equazione del 6° grado, scoperta grande e bella, che fu il coronamento della carriera scientifica del Brioschi.

Il Brioschi inoltre tradusse dall' inglese il trattato delle funzioni ellittiche del Cayley, facendovi molte ed importantissime aggiunte; si dice che il Brioschi avesse così familiari le funzioni ellittiche e le loro trasformazioni come qualunque altro le funzioni goniometriche. Insieme al Betti contribuì a rialzare l' insegnamento della geometria elementare nelle nostre scuole secondarie, facendo sostituire al metodo di Legendre quello euclideo; tutti conoscono l'eccellente edizione che questi due valenti matematici hanno fatto degli *Elementi di geometria* del grande matematico alessandrino, corredandoli di una bella ed elegante raccolta di esercizî, tratti da opere inglesi.

Faà di Bruno [1]). — *Francesco Faà di Bruno* nacque dai marchesi Faà di Bruno, di Alessandria il 7 marzo 1825 e morì a Torino il 26 marzo 1888. Compì gli studî classici nel rinomato Collegio dei padri somaschi in Novi Ligure; nel 1840 entrò nell'Accademia militare di Torino e ne uscì nel 1846 luogotenente di stato maggiore. Prese parte con plauso alla campagna del 1848-49, e per ricompensa nel 1° marzo 1849 fu promosso capitano. La casa di Savoia pensò di affidare a lui l' incarico d' insegnare le scienze ai principi Umberto ed Amedeo; per renderlo più idoneo per tale ufficio fu inviato a perfezionarsi negli studî a Parigi, ove nel 1851 conseguì il diploma di licenza in scienze matematiche; ma nel frattempo furono mutati i progetti, che erano stati formulati su di lui ed ingiustamente fu messo da banda. Questo fatto l' afflisse a ragione immensamente; sentendosi poco adatto alla vita militare ed invece grandemente attratto dagli studî matematici nel 1853 diede le dimissioni da capitano e riprese la via di Parigi, ove continuò gli studî matematici sotto Cauchy Leverrier, e sotto l' amichevole influenza di Moigno ed Hermite; nel 1855 la Facoltà di scienze di Parigi gli conferì la laurea in matematica. Ritornato in Torino si fece abate e fondò il Conservatorio di N. S. del Suffragio; nel 1857 iniziò nella Università un corso libero di analisi superiore, seguendo nelle sue lezioni i metodi del suo grande maestro Agostino Cauchy; e nel 1860 venne acclamato dottore aggregato di quella Università. Nel 1871 fu nominato al posto del Chiò professore straordinario di analisi e geometria superiore; e nel 1876 si restrinse all' insegnamento dell'analisi superiore, che tenne fino alla sua morte.

1) Vedi *Vita dell'abate Faà di Bruno*, del Can. A. Berteu, Torino, 1898. Cfr. *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, anno I, 1898, p. 94.

Il Faà di Bruno pubblicò numerosi articoli, riguardanti vari rami di matematica, nei più riputati giornali d'Europa e d'America, un'opera *Sulla teoria della eliminazione*, una *Sul calcolo degli errori*; ma il suo lavoro più importante è il suo *Trattato sulla teoria delle forme binarie*, scritto in lingua francese, il quale specialmente nella traduzione tedesca che ebbe, è ritenuto come una buona guida per un primo studio in tale importante ramo delle matematiche superiori.

Il Faà di Bruno attendeva ad un'opera di maggior mole della precedente, la quale disgraziatamente rimase a mezzo. Essa consisteva in un grande trattato in tre volumi, scritto in francese, *Sulla teoria e sulle applicazioni delle funzioni ellittiche*, il quale egli considerava come il suo testamento scientifico, in cui doveva essere coordinato tutto l' immenso materiale, riguardante quell' importantissima branca dell'analisi superiore, che il Faà di Bruno aveva raccolto ed in parte sfruttato nelle sue lezioni. La pubblicazione di quest'opera all'epoca della sua morte era giunta al 40° foglio di stampa; ma poi venne interrotta, perchè non bastavano al compimento di essa quanto si ritrovò fra i suoi manoscritti. Senza dubbio quest'opera avrebbe accresciuta la stima e la fama che godeva il Faà di Bruno presso i matematici del tempo. In quest'opera, oltre i calcoli complementari esposti e molte acute osservazioni, vi troviamo la correzione di due importanti inesattezze, che erano sfuggite all'autore dei *Fundamenta nova*, e che furono poi tolte nella ristampa di quest'opera, eseguita per incarico dell'Accademia di Berlino.

Il Faà di Bruno era uomo modestissimo, e spesso sottoponeva i risultati delle sue ricerche, prima di pubblicarli, al giudizio dei suoi amici autorevoli; egli dedicò la maggior parte della sua vita allo studio ed alle opere di carità, che, come ben dice il Loria, tramanderanno ai posteri benedetta la sua memoria.

Elenco dei lavori:

1. *Note sur un nouveau procédé pour connaître immédiatement, dans certains cas, l'existence de racines immaginaires dans une équation numérique* (1850).
2. *Démonstration d'un théorème de M. Sylvester, rélatif à la décomposition d'un produit de deux déterminants* (1851).
3. *Démonstration d'un théorème rélatif à la réduction des fonctions homogènes à deux lettres à leur forme canonique* (1852).
4. *Sullo stabilimento di un osservatorio magnetico e meteorologico in Torino* (1853).
5. *Teorema di geometria* (1853).
6. *Note sur un théorème de M. Brioschi* (1854).
7. *Sulla teorica degli invarianti* (1855).
8. *Sulla determinazione di una funzione simmetrica delle radici di una equazione in funzione dei coefficienti della medesima* (1855).
9. *Sulle funzioni simmetriche delle radici di una equazione* (1855).
10. *Sullo sviluppo delle funzioni* (1855).
11. *Sur les restes produits par la recherche du plus grand diviseur commun entre deux polynômes* (1856).
12. *Sur une nouvelle formule symbolique* (1856).
13. *Sulle funzioni isobariche* (1856).
14. *Sulla risultante di un numero qualunque d'equazioni algebriche: Teorema generale* (1856).
15. *Sopra i resti di Sturm* (1856).
16. *Note sur un théorème de M. Brioschi* (1857).
17. *Note sur une nuovelle formule de calcul différentiel* (1857).

18. *Invariant of the twelfth degree of the quintic* (a, b, c, d, e, f $(x, y)^5$) (1857).
19. *Sopra il volume della piramide triangolare* (1857).
20. *Sulla risultante di due equazioni di 4° grado* (1588).
21. *Démonstration élémentaire du théorème fondamental des lignes géodétiques* (1865).
22. *Augmentation de la température de l'air suivant la hauteur* (1866).
23. *Raison dernière des accords musicaux* (1866).
24. *Génération de la gamme* (1866).
25. *Sur un nouveau baromètre a mercure* (1867).
26. *Sur les fonctions symétriques* (1873).
27. *Sur la fonction génératrice de Borchardt* (1875).
28. *Sur la partition des nombres* (1878).
29. *Sur la partition des nombres: réplique à M. Ch. Hermite* (1878).
30. *Sur un théorème général dans la théorie des covariants* (1880).
31. *Notes on modern algebra*: 1. *Application du théorème donné par l'auteur sur le développement des fonctions*; 2. *Sur un théorème dans les déterminants*; 3. *Sur une propriété du Jacobien*; 4. *Pour faire suite à la démonstration du Jacobien*; 5. *Sur la résolution de la quartique*; 6. *Résolution de la quintique dans le cas où* $I_{18} = 0$ (1880).
32. *Sur quelques théorèmes rélatifs au développement des fonctions et aux covariants* (1880).
33. *Trois notes sur la théorie des formes*: 1. *Sur un théorème générale dans la théorie des formes binaires*; 2. *Sur le Jacobien des formes binaires*; 3. *Théorème général sur les déterminants fonctionnels* (1881).
34. *Sur une nouvelle série dans les fonctions elliptiques* (1882).
35. *Quelques applications de la théorie des formes binaires aux fonctions elliptiques* (1882).
36. *Sur le développement des fonctions rationelles* (1883), ecc.

Novi [1]). — *Giovanni Novi*, figlio di un generale del genio, nacque in Napoli il 2 gennaio 1827 e morì in Pisa il 10 dicem-

[1]) Queste notizie ebbi direttamente da Pisa dal figlio del Novi, dott. Paolo.

bre 1866. Studiò nel Collegio militare della Nunziatella a Napoli, ove ebbe a maestri il Tucci e l'Amante, e per le lettere Francesco De-Sanctis; ne uscì col grado di ufficiale del genio; ma nel 1848 non volle prestar l'opera sua al Governo borbonico, onde sen venne a Firenze. Quivi fu nominato professore di fortificazioni e di artiglieria nella scuola dei cadetti, istituita allora dal Ministro d'Aiala. Ritornato il Granduca, abolì questa scuola, erigendo il liceo « Ferdinando » o Collegio militare, di cui il Novi fu nominato professore di meccanica e di artiglieria. In quest'epoca (1856) il Novi tradusse l'*Aritmetica* del Bertrand, e pubblicò una sua *Aritmetica*, che doveva servire come preparazione per lo studio di quella; tradusse pure la *Geometria* dell'Amiot, facendovi importantissime aggiunte. Nel 1856 tradusse l'*Elogio di Jacobi*, che Lejeune-Dirichlet aveva letto all'Accademia di Berlino. Nel 1859 il Novi fu nominato professore di algebra superiore nella Università di Pisa, cattedra che coprì, ad onta della sua malferma salute, sino alla sua morte; nel 1862 fu nominato cavaliere mauriziano.

Il Novi ha pubblicato (1863) il *Trattato di algebra superiore*, Parte I: *Analisi algebrica*, a cui doveva tener dietro la parte II, della quale lasciò quasi completo il manoscritto nelle mani del prof. Betti; ma non volle che venisse pubblicata.

La prima parte contiene le nozioni sull'analisi combinatoria, e sui numeri complessi, sui limiti e sulla continuità delle funzioni; poi passa a studiare assai ampiamente la serie diverse cioè le doppie, la esponenziale, la logaritmica, le circolari ed iperboliche ecc. Infine studia i prodotti infiniti, le facoltà analitiche, le frazioni continue e le trasformazioni di esse in serie ed in prodotti infiniti e viceversa. Da questa prima parte si rileva che il Novi aveva una larga coltura algebrica.

Beltrami [1]). — *Eugenio Beltrami* nacque da famiglia di artisti e di patrioti in Cremona il 16 novembre 1835 e morì in Roma

1) Vedi *Commemorazione del sen. prof. E. Beltrami*, letta dal prof. L. Cremona, nell'adunanza della R. Accademia dei Lincei del 10 giugno 1900; G. Loria, *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche* (*Bibl. mathematica*, serie 3ª, vol. V, 1901); *Eugenio Beltrami*: discorso letto al R. Istituto lombardo di scienze e lettere, nell'adunanza del 10 gennaio 1901, dal prof. E. Pascal.

il 18 febbraio 1900. Fece gli studî secondarî nella sua città natale ed intraprese poi gli studî di matematica nell' Università di Pavia; ma per ragioni di famiglia li dovè troncare, e fu costretto di accettare un impiego nell'amministrazione delle strade ferrate del Lombardo-Veneto. All'età di 25 anni, dietro i consigli del Brioschi, il Beltrami incominciò a ristudiare da sè la matematica; e nel novembre del 1861 pubblicò negli *Annali* del Tortolini (vol. IV) il suo primo lavoro intitolato *Sopra alcuni sistemi di curve piane*. Nel 1862 condusse a termine un lavoro di maggior mole ed importanza: *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti*, che pubblicò negli *Annali* del Tortolini (vol. IV, serie 1ª, 1862), inspirandosi ad un lavoro consimile pubblicato dal Brioschi nel 1857.

Nello stesso volume degli *Annali* di Tortolini, oltre una breve osservazione riguardante un metodo per ottenere le equazioni delle linee di curvatura di una superficie e dei raggi di curvatura, vi è la traduzione fatta dal Beltrami della memoria di Gauss, pubblicata nel 1825 nelle *Astronomischen Nachrichten*, edita ad Altona da Schumacher: *Soluzione generale del problema « rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data in modo, che la rappresentazione riesca nelle sue parti infinitesime una figura simile alla figura rappresentata »*. Questo particolare, benchè apparentemente insignificante, non è tuttavia privo d' interesse, poichè ci fa vedere che il Beltrami, già sino dall' inizio de' suoi studî, si ispirò alle opere del grande matematico tedesco; ed invero si mantenne sempre continua in seguito l' influenza di Gauss e della sua scuola in tutto lo sviluppo progressivo del genio del Beltrami.

Questi lavori gli procurarono la nomina nel 1862 di professore di algebra e geometria analitica dell' Università di Bologna; da quest'epoca la sua vita trascorse sempre serena e tranquilla, non assorbita da altro, che dalle cure della famiglia, della sua scuola e delle sue predilette speculazioni. A Bologna strinse amicizia col Cremona e col Chelini; ma dopo un anno passò all' Università di Pisa ad insegnarvi geodesia; qui negli anni 1864-65, fra gli altri lavori, scrisse quelle celebri *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, che furono la base principale delle sue ulteriori investigazioni su questo ramo. A Pisa s' imbattè più volte col celebre Riemann; e senza dubbio le profonde idee sulla natura dello spazio del matematico tedesco dovettero ispirare ed esercitare grande influenza nelle classiche ricerche e sui singolari risultati sugli spazî a curvatura costante, che il Beltrami dopo tre o quattro anni diede alla luce. Dopo tre anni di soggiorno a Pisa preferì ritornare a Bologna in qualità di professore di meccanica razionale, disciplina a cui si sentiva più attratto per la peculiare natura dei suoi studî. Nel 1873 passò all' Università di Roma ad insegnarvi meccanica razionale ed analisi superiore; e dopo tre anni (1876) passò all' Università di Pavia, ove insegnò fisica matematica e meccanica superiore sino al 1891, in cui accettò di essere trasferito di nuovo all' Università di Roma.

È superfluo il dire che il Beltrami fu membro di quasi tutti gl' Istituti scientifici nostrani e stranieri; venne nominato senatore nel 1899 ed alla morte del suo amico Brioschi fu nominato presidente dell'Accademia dei Lincei. Beltrami era di animo mite, di carattere dolce ed a un tempo austero, cultore appassionato del nostro idioma e della musica. Le sue lezioni erano chiare ed ordinatissime, ed esposte con forma eletta ed affascinante: era altamente stimato e ben voluto dai suoi discepoli, che lo amavano come un padre.

Scrisse oltre 120 fra memorie e note, che pubblicò fra le *Memorie dell'Istituto lombardo*, dell'*Ateneo veneto*, nel *Giornale di matematica* del Battaglini, nei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, nei *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, negli *Annali* ecc., i quali lavori riguardano parecchi rami delle matematiche, come emerge da quanto segue:

I. Geometria analitica:

a) sulle curve piane e sulla superficie di Steiner, scrisse quattro Note;

b) sulla superficie del 3° ordine, una memoria;

c) sui teoremi di Feuerbach, di Simpson e di Steiner, ecc., sei memorie;

d) sulle forme binarie cubiche, una memoria;

e) su altri punti diversi dello stesso ramo, sette lavori.

II. Geometria infinitesimale:

a) sulla teoria generale delle superficie, sulla curvatura e deformazione delle superficie; sulle superficie, i cui raggi di curvatura sono legati da una relazione, sull'applicabilità, sui parametri differenziali di superficie, sui sistemi tripli di superficie ortogonali, sulle geodetiche di una superficie, scrisse ventinove lavori;

b) intorno alle assintotiche sulle superficie, due lavori;

c) sulle superficie rigate e loro flessioni, due lavori;

d) sulle superficie ad area minima, una memoria;

e) sulle superficie a curvatura costante, sulla geometria pseudo-sferica, sugli spazi a curvatura costante e sulle geodetiche in tali spazi, scrisse otto lavori, che hanno una grande importanza per la geometria non-euclidea.

Nella classica memoria *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (*Giornale di matematiche* del Battaglini, VI, pp. 284-312, 1868, arriva alla importantissima conclusione che i teoremi della geometria non-euclidea trovano la loro realizzazione sulle superficie a curvatura costante negativa. Nello studio delle superficie a curvatura costante positiva trovò l' interessante teorema, che lo spazio a curvatura costante positiva è contenuto nello spazio a curvatura costante negativa. Però disgraziatamente l' Hilbert nella sua memoria *Ueber Flächen von konstanter Gausscher Krümmung* (*Trans. of the American mathem. Society*, 2, 1901) ha dimostrato che « non esistono superficie di curvatura costante negativa regolari in tutta la loro estensione »; sicchè, come ben dice il prof. Loria nella *Biblioteca Mathematica* (30 dicembre 1901), il valore della rappresentazione immaginata dal Beltrami nel suo *Saggio d' interpretazione della geometria non-euclidea* è assai limitato. Qui è bene ricordare che prima dell' Hilbert il prof. Genocchi di Torino in una delle sue migliori memorie (*Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géometries non-euclidéennes*, nelle *Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino*, 29), aveva notato non essere dimostrato che l'equazione a derivate parziali, caratteristica delle superficie di curvatura costante negativa, ammetta almeno un integrale soddisfacente a tutte le condizioni imposte alla pseudo-sfera per servire alla rappresentazione del Beltrami; l'Hilbert dimostrò che verificavasi appunto il contrario;

f) sulla geometria infinitesimale delle curve, tre lavori.

III. Analisi pura:

a) sui parametri differenziali e sulle forme differenziali quadratiche, due lavori;

b) sulle formule di calcolo integrale, sulle serie trigonometriche e sulle funzioni cilindriche, sei note;

c) sulle funzioni sferiche, cinque note;

d) sulla teoria delle equazioni, due note;

e) sulle forme binarie, una nota.

IV. Meccanica dei fluidi:

In questo ramo, scrisse quattro memorie.

V. Meccanica in generale:

In questa parte delle matematiche, scrisse sette memorie.

VI. Potenziale; Attrazione; Elettricità; Magnetismo; Elettro-magnetismo:

a) sulla teoria analitica della funzione potenziale e del potenziale e sull'attrazione newtoniana, scrisse sedici memorie;

b) sulla elettrostatica ed elettrodinamica, sei lavori;

c) sul magnetismo e sull'elettromagnetismo, sette lavori tra note e memorie.

VII. Elasticità:

a) Sulle equazioni generali, e sul potenziale d'elasticità, otto lavori tra note e memorie;

b) sulle formule di Maxwell, tre memorie;

c) sulla formola di Kirchhoff, quattro Note.

VIII. Calorico:

In questo ramo della fisica scrisse tre note; una delle quali fu solo annunciata.

IX. Acustica:

In questo ramo di fisica scrisse una nota: *Sulla scala diatonica* (*Rendiconti dell' Istituto lombardo di scienze e lettere*, serie II, vol. XV, 1882).

Qui è acconcio ricordare che il Beltrami oltre che matematico fu anche valentissimo cultore della musica, nella quale ebbe da prima per maestro la madre sua, e poi si era esercitato col Ponchielli. Egli sapeva eseguire al clavicembalo i capolavori più difficili; ma nascondeva questo suo talento musicale con ritrosa modestia, quasichè temesse d'ingelosire la superba dea, la matematica, cui aveva consacrato tutto sè stesso. Egli pensava che « fra la musica e le matematiche esiste assai più affinità di quanto non si pensi comunemente, che un ragionamento matematico è come una serie di accordi fatti vibrare dalla lira intellettuale formata coi raggi matematici del pensiero umano, e che la scoperta di una nuova parte delle matematiche è paragonabile a quella d' una nuova modulazione armonica » (Lettera di Beltrami a Wolff).

Sotto la direzione della Facoltà di scienze della Università di Roma venne fatta una bella edizione delle *Opere matematiche* del Beltrami, che comprende quattro volumi.

Casorati [1]. — *Felice Casorati* nacque in Pavia il 17 dicembre 1835 da buona famiglia, poichè il padre fu medico esimio e professore nella Università di detta città [2], e vi morì l' 11 settembre 1890. Fece i suoi studî nella sua città natale, ove nell'anno 1856 ottenne dalla Università il diploma d'ingegnere ed architetto. Nel 1856 fu nominato assistente del Brioschi alla cattedra di matematica applicata, e nel 1857 supplente di topografia e idrometria. Sino dall'anno 1856 pubblicò il suo primo lavoro: *Intorno alla integrazione delle funzioni irrazionali*, che tosto rivelò le doti del suo bell' ingegno e la profonda coltura degli studî analitici moderni; ed in quest'anno 1857 fece un corso libero di *geodesia superiore*, il qual corso gli die' occasione di scrivere nel 1858 la pregevole memoria: *Intorno ad alcuni punti della teoria dei minimi quadrati*. Nell'autunno del 1858, insieme al Betti ed al Brioschi, fece un viaggio scientifico all'estero, ove ebbe opportunità di stringere relazioni personali coi principali matematici di Germania e di Francia.

1) Vedi G. Loria, *Cenni intorno alla vita e alle opere di F. Casorati* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, tomo V); *Commemorazione di Felice Casorati*, letta nell'adunanza del 15 dicembre 1892 del R. Istituto lombardo di scienze e lettere, dal prof. E. Bertini.

2) Se ne veda la *Necrologia* scritta da E. Bertini nel tomo II (1860-61) degli *Atti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere*.

Nel 1858 fu nominato, nella stessa Università, professore di algebra e geometria analitica, cattedra che, nel 1863, alla morte del Mainardi, scambiò con quella di calcolo infinitesimale. Simultaneamente al corso di calcolo professò geodesia ed analisi dal 1865 al 1868 nella Università di Pavia e dal 1868 al 1875 nel R. Istituto tecnico superiore di Milano; e questi corsi di geodesia gli diedero occasione di pubblicare alcuni lavori inerenti a questa scienza, tra cui quello *Sulle proprietà cardinali degli istrumenti ottici anche non centrali*; mentre i corsi di analisi gli diedero modo di fare molti lavori sulle funzioni a variabili complesse, che formano i maggiori titoli della sua fama scientifica.

Nel 1868-69 in Milano i professori Brioschi, Casorati e Cremona tennero tre corsi, cui assistettero molti professori nostrani e stranieri. Questi corsi furon memorabili non solo pel valore degl' insegnanti, ma per l' importanza degli argomenti, che erano sulla teoria delle funzioni abeliane, secondo: 1) i metodi di Jacobi (Brioschi); 2) di Clebsch e Gordan (Cremona); 3) di Riemann (Casorati). In quest' ultimo, il Casorati, dopo avere esposto ampiamente, colla abituale sua lucidità, i teoremi fondamentali sulle funzioni monodrome e polidrome, condusse gli allievi con mano maestra all'apprendimento della superficie riemanniana e delle sue splendide applicazioni.

Le lezioni del Casorati erano piane e limpide; in esse discuteva ed analizzava ogni teoria nei suoi principî fondamentali e nel rigore delle sue deduzioni. I suoi scritti procedono sempre con molta spontaneità e semplicità; ed in essi faceva il minimo uso del calcolo, che sapeva presentare mirabilmente con abilità ed eleganza, desideroso che lo svolgimento delle sue idee seguisse con naturalezza ed evidenza e quanto più si poteva col puro ragionamento. Come quelli del suo amico Beltrami, i lavori del Casorati sono scritti in una forma corretta e nitida, con diligenza e con una rigorosa esposizione, con somma cura di particolari e con una giusta distribuzione delle parti; cose tutte che accrescono pregio alla sostanza, e la lettura loro riesce più attrattiva e meno faticosa.

La grande rettitudine dell'animo era in Casorati mirabilmente congiunta a grande mitezza e benignità di giudizi, che gli provenivano non solo dall' indole sua dolce, ma dalle fortunate circostanze della sua vita, trascorsa quasi sempre placida e serena come quella del Beltrami. Nel conversare era piacevole e schietto e ad un tempo cauto e prudente; del suo sapere e de' suoi meriti e delle sue onorificenze non mostrava alterezza alcuna; verso i suoi scolari si comportava come un padre, essendo loro largo di aiuti e di consigli, spronandoli colla parola e coll'esempio alle ricerche originali. Onde, ben a ragione, il prof. D'Ovidio disse nella sua commemorazione del Casorati, letta all'Accademia delle scienze di Torino: « fu amato da tutti coloro che lo conobbero da vicino per la squisita bontà dell'anima, per la cortese semplicità de' modi, per le sue stesse singolarità ».

Fu membro effettivo o socio corrispondente di tutte le Accademie scientifiche d' Italia e dell'estero, insignito della croce di cavaliere dell'ordine civile di Savoia e della commenda; l' Università di Pavia gli eresse, nel 1893, un monumento accanto agli altri grandi, che illustrarono quel glorioso ateneo; e la città volle che la scuola tecnica portasse il suo nome.

I lavori del Casorati sono 47, il cui elenco particolareggiato si trova nella commemorazione del prof. Bertini sopra citata; a cui vanno aggiunte le traduzioni dal tedesco dei due discorsi, l' uno su Dirichlet, fatto dal Kummer e l' altro su Steiner, fatto dal Geiser. Essi furono pubblicati negli *Annali di matematica*, nei *Rendiconti dell' Istituto lombardo*, negli *Atti dell' Accademia dei Lincei*, negli *Acta mathematica*, e nei *Comptes rendus*.

Noi qui sotto li daremo classificati in cinque gruppi, come li ha divisi il prof. Bertini. A questa divisione si sottraggono cinque lavori, che si riferiscono a svariati argomenti, tra i quali uno, in cui si applica il metodo di Hermite alla trasformazione delle funzioni ellittiche di ordine qualunque, ed un altro contenente alcune trasformazioni di determinanti, da cui nascono vari teoremi sullo jacobiano di più forme e sull' hessiano di una forma; lo stesso dicasi di altri cinque lavori, dei quali il precipuo scopo si accosta a quello delle scienze di osservazione.

Gruppo I. — A questo appartengono quei lavori, che trattano delle funzioni ad una sola variabile a più di due periodi e dell' inversione degli integrali:

1. *Sur les fonctions à périodes multiples* (1861-64).

2. *Sopra il teorema di Jacobi riguardante la periodicità multipla e sopra l'illegittimità di una parte delle conseguenze, che ne furon dedotte* (1882).

3. *La periodicità multipla nelle funzioni di una sola variabile* (1883).

4. *Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes* (1886).

5. *Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales abéliennes et en particulier des fonctions inverses des intégrales elliptiques de 2^e^ et 3^e^ espèce* (1886).

6. *Sopra le* « coupures » *del sig. Hermite, i* « Querschnitte » *e le superficie di Riemann ed i concetti d'integrazione si reale, che complessa*: Art. 1°: « Querschnitte », « coupure » *e superficie riemanniana rappresentativa di funzione algebrica*; Art. 2°: *Rami di un integrale definito, considerato come funzione di un parametro e superficie rappresentativa di questa funzione (incompiuta)* (1887-88).

Gruppo II. — A questo gruppo appartengono memorie riguardanti differenti questioni relative alle funzioni, trattate col *Calcolo delle differenze finite*, ed altre sulle equazioni differenziali:

1. *Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa* (1880).

2. *Sull'equazione fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali lineari* (1880).

3. *Sur la distinction des integrals des équations différentielles linéaires en sous-groupes* (1881).

4. *Sopra un recentissimo scritto del sig. L. Stickelberger.*

5. *Generalizzazione di alcuni teoremi dei signori Hermite, Brioschi e Mittag-Leffer, sulle equazioni differenziali lineari del 2° ordine* (1881).

6. *Osservazioni sui modi comunemente usati nella trattazione di parecchie questioni dell'analisi infinitesimale* (1881).

7. *Sulle equazioni differenziali lineari* (1882).

Gruppo III. — A questo appartengono quelli che hanno per

oggetto relativo le *equazioni algebrico-differenziali*, che ammettono primitive complete algebriche:

1. *Alcune formule fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 2° grado tra due variabili ad integrale generale algebrico* (1874-76-79).

2. *Sulla teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali* (1875).

3. *Nuova teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di 1° ordine e 2° grado tra due variabili* (1876, '79).

4. *Sulle soluzioni singolari delle equazioni a derivate parziali* (1876).

5. *Ricerche sulle equazioni differenziali a primitiva generale algebrica* (1877).

6. *Nota concernente le equazioni differenziali* (1877).

7. *Sulle condizioni alle quali deve soddisfare una primitiva, affinchè il grado della corrispondente equazione differenziale, rispetto alle variabili, riesca minore del normale* (1878).

8. *Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 1° grado per mezzo di funzioni lineari* (1878).

9. *Ricerche sulle equazioni algebrico-differenziali* (1879).

10. *Nota concernente la teoria delle soluzioni singolari delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 1° grado* (1879).

11. *Una formula fondamentale concernente i discriminanti delle equazioni differenziali e delle loro primitive complete* (1881).

Gruppo IV. — A questo appartengono i lavori di geometria analitica e differenziale:

1. *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve* (1861).

2. *Sulle coordinate dei punti e delle rette nel piano, dei punti e delle rette nello spazio* (1878).

3. *Nuova e migliore forma delle equazioni degli assintoti di una linea piana algebrica* (1879).

4. *Sugli assintoti delle linee piane algebriche* (1889).

5. *Nuova definizione della curvatura delle superficie e suo confronto con quella di Gauss* (1889).

6. *Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée com-*

mune des rapports avec les mésures de courbure gaussienne et moyenne (1890).

Gruppo V. — A questo gruppo appartengono i lavori, forse i più importanti del Casorati, che hanno per oggetto la teoria delle funzioni di variabile complessa. Questi lavori insieme a quelli del Betti furono gli unici che in Italia fecero conoscere e seguire i metodi di Cauchy e di Riemann. Il vol. I della *Teorica delle funzioni di variabile complessa*, a cui doveva far seguito un secondo volume, che per ragioni diverse non potè vedere la luce, destò ammirazione e plauso in tutti gli scienziati; e ne scrissero molti elogi il Beltrami ed il Cremona. In questo libro il Casorati, dopo aver fatto la storia degli studî su questo ramo, espone in modo semplice e breve i fondamenti della teoria delle funzioni di variabile complessa secondo i concetti di Chauchy e di Riemann; esso dovrebbe essere consultato da ognuno, che intende occuparsi di questo ramo importantissimo delle matematiche:

1. *Alcune riflessioni relative alla teorica generale delle funzioni di variabili affatto libere ossia complesse* (1866).
2. *Un teorema fondamentale nella teorica delle discontinuità delle funzioni* (1868).
3. *Teorica delle funzioni di variabili complesse* (un volume, Pavia, Tip. Fusi, 1868).
4. *Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali abeliani di 1ª specie* (1869).
5. *Intorno al numero de' moduli delle equazioni o delle curve algebriche di un dato genere* (1869).
6. *Sulle funzioni analitiche* (1882).
7. *Aggiunte a recenti lavori dei sigg. Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa* (1882).

Egli è un fatto che il Casorati, il Brioschi, il Beltrami ed il Cremona non solo resero celebre la scuola matematica lombarda, ma colla loro opera contribuirono immensamente a far rivivere e ad allargare in Italia il campo degli studî matematici, che a dir vero eran caduti alquanto in basso, e richiamarono coi loro lavori l'attenzione dei matematici stranieri; così si conquistarono una meritata fama mondiale.

Padova [1]). — *Ernesto Padova* nacque in Livorno il 17 febbraio 1845 da ricca famiglia di commercianti e morì in Padova l'8 marzo 1896. Fu mandato a studiare al liceo di Marsiglia presso uno zio; poi ritornò in quello di Livorno nel 1861; indi studiò matematiche nell'Università di Pisa, ove si laureò con onore nel 1866; ed avendo ottenuto un posto di perfezionamento vi studiò sotto il Betti ed il Beltrami per un altro anno. Nel 1867 fu nominato professore nel liceo «Principe Umberto» di Napoli; e dopo due anni insegnante interno nella Scuola Normale Superiore di Pisa; indi nel 1872 professore di meccanica razionale della Università di Pisa, conservando sempre il posto precedente nella Scuola Normale; nel 1882 fu trasferito a Padova in qualità di professore di meccanica superiore.

Ernesto Padova era d'ingegno svegliatissimo, di carattere mite, e sul suo volto sereno si vedeva sempre quel dolce sorriso, che subito rivelava la bontà dell'animo e del cuore; era un indefesso lavoratore; e benchè ricchissimo, volle tenere la cattedra sino alla fine della sua vita, allorchè era tormentato dal morbo che lo trasse al sepolcro: era professore scrupolosissimo e zelante, ma pur troppo non possedeva gran comunicativa, avendo ben poca facilità di parola.

I lavori del Padova ammontano a cinquantacinque, e sono stati pubblicati nel *Giornale di matematiche* del Battaglini, nel *Nuovo cimento*, negli *Atti dell'Accademia dei Lincei*, negli *Atti dell' Istituto veneto di scienze e lettere*, ecc.

Questi lavori riguardano:

a) la matematica pura;
b) la meccanica analitica;
c) la fisica matematica;

i più numerosi ed i più importanti son quelli che si riferiscono a questi due ultimi rami.

Egli trattò a più riprese il famoso problema *Della rotazione di un corpo rigido intorno ad un centro fisso* e vi portò un notevole contributo; questo era uno degli argomenti a lui favorito. Un altro argomento a lui sopra ogni altro prediletto fu quello

1) Vedi *Commemorazione del prof. Ernesto Padova*, letta dal prof. G. Ricci Curbastro il 30 maggio 1897, all'Università di Padova.

delle equazioni della dinamica, le quali cercò di stabilire su tali fondamenti, su cui potessero basare non soltanto la teoria del moto dei sistemi materiali, ma altresì quelle teorie meccanico-fisiche, le quali mirano a spiegare i fenomeni ottici ed elettromagnetici come movimenti vibratori dell'etere.

Il Padova si occupò più volte anche della teoria delle superficie secondo il metodo di Gauss; una prima memoria fu quella: *Sulle espressioni invariabili*, ove si stabilisce il carattere invariantivo di certe espressioni, le quali trovano la loro interpretazione geometrica nella teoria della curvatura delle superficie negli iperspazi. Affini a questa per argomento sono le due Note *Sulla teoria delle coordinate curvilinee*, in cui l'autore si occupa de' parametri differenziali delle coordinate curvilinee dei punti di una superficie ed estende il metodo di Beltrami per lo studio delle superficie minime nello spazio euclideo a quello delle superficie che ne sono le immagini, quando delle superficie stesse si faccia una rappresentazione conforme in altro spazio a tre dimensioni. Infine vi è una memoria *Sulla teoria generale delle superficie*, in cui espone le formule ed i risultati fondamentali di questa teoria colle notazioni del *calcolo differenziale assoluto*, mettendo così in evidenza i vantaggi, che questo presenta nelle applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Accanto a queste memorie si possono rammentare quelle in cui la teoria delle coordinate curvilinee è applicata allo studio della deformazione dei corpi elastici tanto nello spazio euclideo, quanto in ispazi diversi; in una di esse si stabiliscono per la prima volta in coordinate ortogonali qualunque e per uno spazio a curvatura costante le equazioni di condizione, cui debbono soddisfare i coefficienti di deformazione e quindi le componenti delle tensioni di un corpo elastico; queste equazioni sviluppate per alcuni speciali sistemi conducono a notevoli risultati. L' opera scientifica del Padova è importante tanto per la sua mole, quanto per la varietà degli argomenti trattati, che fan fede della sua vasta coltura e per l' indirizzo sempre informato ai migliori e più recenti studî, e talora anche per originalità di veduta ed importanza di risultati.

Rammenteremo che insieme al prof. Sayno di Milano tradusse

dal tedesco l' importante opera *Geometria descrittiva di Guglielmo Fiedler*.

Le sue lezioni poligrafate di meccanica razionale dettate all' Università di Pisa fanno fede della vasta coltura del Padova, della chiarezza della esposizione e della modernità de' suoi studî.

Il Padova fu socio corrispondente di molte Accademie scientifiche d' Italia.

Padelletti [1]). — *Dino Padelletti* nacque in Montalcino presso Siena nel 1852 e morì in Napoli il 10 marzo 1892, un'ora dopo l'adorata sua madre. Studiò matematiche nell' Università di Pisa, ove non ancora ventenne conseguì la laurea. Ottenne un posto di perfezionamento all'estero e così andò a studiare a Zurigo, Dresda, Berlino, Londra. Nel 1875 fu nominato professore della teoria dei meccanismi nell' Istituto tecnico superiore di Milano, nel 1877 professore di meccanica razionale nell' Università di Palermo; nel 1879 fu trasferito all' Università di Napoli, ove fu fatto professore ordinario nel 1884. Era socio dell'Accademia Pontaniana; socio corrispondente della Società di scienze di Palermo: socio ordinario di quella di Napoli, di cui fu presidente nel 1887 e segretario nel 1893.

Il Padelletti aveva una vastissima coltura non soltanto scientifica, ma anche letteraria; ne fanno fede specialmente:

a) il discorso su Leonardo da Vinci;

b) la relazione sul riordinamento della biblioteca universitaria;

c) la nota sull' insegnamento pareggiato e l' Università di Napoli.

Le pubblicazioni scientifiche del Padelletti sono parecchie; le prime per ordine cronologico, riguardano la meccanica applicata e vertono sui *regolatori a forza centrifuga, sul dinamometro* e *sugli ingranaggi*.

Le successive riguardano esclusivamente la meccanica razionale; esse apparvero nel *Giornale di matematiche* del Battaglini,

1) Vedi negli *Atti dell'Accademia di Napoli*, l'*Elogio di Dino Padelletti*, del prof. L. Pinto.

nel *Giornale di scienze di Palermo* ed in un volume dei *Transunti dell'Accademia dei Lincei*; e sono:

1. *Relazioni fra le traiettorie, le brachistocrone e le funicolari* (1879).

2. *Figure alternatamente reciproche, ottenute mediante lo spostamento finito di un sistema rigido e diagrammi reciproci piani, che se ne deducono* (1879).

3. *Studî sui diagrammi reciproci; principî del calcolo dei quaternioni elementarmente esposti* (1882).

4. *Nota sulle catenarie* (1882).

Tutti questi lavori furono fusi nei due volumi di *Lezioni di meccanica razionale*, che servivano di testo agli studenti. Però le memorie più importanti egli le presentò all'Accademia delle scienze di Napoli e sono inserite in quei *Rendiconti*; esse sono le seguenti:

1. *Sugli assi coniugati di rotazione, le cui direzioni comprendono un angolo costante ed in particolare sugli assi coniugati ortogonali* (1880).

2. *Sull'equivalenza astatica di un sistema di forze nella rotazione intorno ad un asse* (1881).

3. *Osservazioni nella teoria delle dinamo* (1882).

4. *Su un calcolo nella teoria delle dinamo analogo a quello dei quaternioni* (1882).

5. *Alcuni corollari di un teorema del prof. Fergola* (1882).

6. *Sulla più semplice forma delle equazioni di equilibrio di un sistema rigido vincolato* (1883).

7. *Sulle analogie fra la teoria della statica e quella dei momenti d'inerzia* (1883).

8. *Su un'estensione del concetto di polo e caratteristica in cinematica* (1884).

9. *Sul centro delle forze nel piano* (1884).

10. *Sui sistemi di forze impulsive* (1884).

11. *Sulle superficie che rotolano una sull'altra nel moto di rotazione di un corpo attorno ad un punto* (1886).

12. *Sulla composizione grafica delle forze nello spazio* (1889).

13. *Sul movimento del pendolo semplice, quando si tiene conto dell'effetto della rotazione terrestre* (1891).

Come professore il Padelletti era zelantissimo, chiaro nella

esposizione, gentilissimo ne' modi, ed aveva gran cura per gli studenti, a cui era largo di consigli e di suggerimenti.

Ascoli [1]). — *Giulio Ascoli* nacque in Trieste il 20 novembre 1843 e morì in Milano il 12 luglio 1896. Fece gli studî secondari a Trieste e poi passò a studiare matematica nella Università di Pisa, ove si laureò in matematiche pure nel 1868; ed in questa stessa epoca frequentò il corso di matematiche superiori, che in quell'anno scolastico (1868-69) tennero all'Istituto tecnico superiore di Milano il Brioschi, il Casorati ed il Cremona. Fu poi eletto professore di matematica (1874) nell'Istituto tecnico di Milano, e nel 1879 professore straordinario di calcolo differenziale, di algebra complementare e di geometria analitica nell'Istituto tecnico superiore (Politecnico) della stessa città. Nel 1879 fu nominato socio corrispondente dell'Istituto lombardo di scienze e lettere. L'Ascoli, oltre essere un buon matematico, era anche un distinto docente; il suo metodo d'insegnamento, specialmente in geometria, si discostava dall'ordinario: teneva più alla parte sostanziale di esso, che a quello dell'eccessivo rigore scientifico, rappresentato dall'ingombrante numero dei postulati, che volentieri metteva da banda; ed alla dimostrazione di un difficile teorema, mal digerita dallo scolaro, preferiva che questi ne avesse compreso la sostanza e lo sapesse chiaramente esporre.

I lavori principali del prof. Ascoli riguardano le serie trigonometriche e la serie di Fourier; in essi l'autore dimostra una conoscenza profonda di questo ramo importante dell'analisi; gli altri lavori sono tutti su argomenti di calcolo infinitesimale.

L'Ascoli era un lavoratore indefesso; ed anche durante la lunga malattia, che in sì verde età lo trasse al sepolcro, dedicava il suo tempo allo studio: stava pubblicando un lavoro sui fondamenti dell'algebra, di cui non sono uscite che poche pagine d'introduzione. Le pubblicazioni dell'Ascoli si trovano nel *Giornale* del Battaglini, nei *Rendiconti dell'Istituto lombardo*, negli *Annali di matematica* e negli *Atti dell'Accademia de' Lincei*. Eccone l'elenco:

1) Le notizie dell'Ascoli le abbiamo avute dalla sua famiglia.

1. *Dimostrazione di un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di variabili complesse* (1871).

2. *Dimostrazione di un teorema di Cauchy* (1871).

3. *Ueber trigonometrische Reihen* (1872).

4. *Sulla serie di Fourier* (1873).

5. *Sulla serie* $\Sigma\ A_n\ X_n$ (1876).

6. *Sul concetto di integrale definito* (1875).

7. *Nuove ricerche sulla serie di Fourier* (1878).

8. *Sulle funzioni, la cui derivata prima appartiene alla classe zero* (1879).

9. *Sul prodotto di più funzioni integrabili e finite* (1879).

10. *Un teorema di calcolo integrale* (1879).

11. *Sulla rappresentazione di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica* (1879).

12. *Sulle serie trigonometriche a due variabili* (1880).

13. *Il concetto di lunghezza di linea non è soltanto indipendente dal concetto di derivata, ma anche da quello di continuità* (1883).

14. *Il concetto di lunghezza di curva è indipendente da quello di derivata* (1883).

15. *Le curve limite di una varietà data di curve* (1884).

16. *Intorno ad alcune rappresentazioni conformi* (1885).

17. *Di nuovo sulle rappresentazioni conformi* (1885).

18. *Ancora una volta intorno alle rappresentazioni conformi* (1885).

19. *Dei rami algebrici di curva* (1885).

20. *Si pone in chiaro il paragrafo 3 della memoria di Riemann: « La teoria delle funzioni abeliane »* (1885).

21. *Integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^2 u = 0$ *in una area riemanniana* (1885).

22. *Ancora una volta sulle funzioni che soddisfano all'equazione differenziale* $\Delta^2 u = 0$ (1885).

23. *Ulteriori ricerche sulle funzioni che soddisfano all'equazione differenziale* $\Delta^2 u = 0$ (1885).

24. *Di nuovo sulle funzioni che soddisfano all'equazione differenziale* $\Delta^2 u = 0$ (1885).

25. *Intorno alle funzioni che soddisfano all'equazione differenziale* $\Delta^2 u = 0$ (1885).

26. *Integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^2 u = 0$ *nell'area di cerchio* (1884).

27. *Un teorema sulle funzioni, di cui ciascun termine è una funzione di* $z = x + iy$ (1886).

28. *Integration der differentialgleichung* $\Delta^2 u = 0$ *in einer beliebigen Riemann'schen Fläche* (1887).

29. *Riassunto della mia memoria « Le curve limiti di una varietà data di curve »* (1888).

30. *Riassunto della mia memoria « Le curve limiti di una varietà data di curve » ed osservazioni critiche alla medesima* (1888).

31. *Indice assai particolareggiato di quanto è contenuto nella mia memoria « Sulle funzioni a due variabili reali, le quali sono sempre crescenti o decrescenti nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita »* (1889).

32. *Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono e decrescono nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita* (1889) (tre note).

33. *Ricerca delle condizioni, cui deve soddisfare la funzione* f(s) *dei punti del contorno* C^{A}, *di un'area connessa qualsivoglia* A *posta a distanza finita, purchè si possa costruire in quest'ultima una funzione* f(x, y), *la quale essendo ovunque continua, cresca ognora nel verso positivo di ciascuno degli assi e raggiunga i valori* f(s) *lungo* C^{A} (1890).

34. *Sulla definizione d'integrale* (1895).

35. *Delle funzioni regolari in un'area connessa qualsivoglia a distanza finita* (1892).

36. *Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita* (1892).

37. *Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo piano a distanza finita* (1892).

38. *Sulle derivate apparenti* (1894).

Cazzaniga [1]). — *Tito Camillo Cazzaniga* nacque in Mantova il 9 aprile 1872 e vi morì il 30 ottobre 1900. Fece gli studî secondari a Mantova, e gli studî universitari a Pavia, ove si laureò con lode in matematiche pure nel 1896. Nel 1897 ottenne una borsa di studio per fare il corso di perfezionamento; ebbe successivamente nell' Università di Pavia incarichi di supplenze per le matematiche superiori, e fu assistente alla cattedra di calcolo infinitesimale; infine nel 1900 fu nominato professore di matematica nel liceo di Sassari; ed aveva nello stesso anno ottenuto anche la libera docenza di calcolo infinitesimale nella R. Università di Messina.

La Facoltà di scienze della R. Università di Pavia gli rilasciò il seguente attestato: « Il preside, in seguito a voto unanime della Facoltà, la quale ritenne che il dott. Cazzaniga abbia pienamente corrisposto alla fiducia in esso ripetutamente riposta, rilascia ecc. ».

La produzione scientifica del Cazzaniga in un tempo relativamente breve fu abbastanza copiosa ed importante; ed i suoi lavori sui determinanti d'ordine finito ed infinito e sopra altri importanti argomenti di analisi, dimostrano la estesa e profonda coltura analitica del Cazzaniga; e se la morte non l'avesse sì presto rapito alla scienza, certo avrebbe arrecato all'analisi altri notevoli contributi.

Ecco l'elenco de' suoi lavori:

1. *Sopra i determinanti, di cui gli elementi principali variano in progressione aritmetica* (1896).
2. *Sui determinanti di ordine infinito* (1897).
3. *Sopra i determinanti gobbi* (1897).
4. *Relazioni fra i minori di un determinante di Hankel* (1898).
5. *Intorno ad un tipo di determinanti nulli di ordine infinito* (1898).
6. *Sul calcolo di qualche determinante numerico* (1898).
7. *Funzioni olomorfe nel campo ellittico* (1898).
8. *Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico* (1898).

1) Le notizie sul Cazzaniga, parte le abbiamo avute dalla moglie e parte dal prof. Alberto Brambilla di Napoli.

9. *Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico* (1898).
10. *Appunti sulla moltiplicazione di alcuni determinanti normaloidi* (1899).
11. *Intorno ai reciproci dei determinanti normali* (1899).
12. *Précis d'une théorie élémentaire des déterminants cubiques* (1898).
13. *Note critiche sulla teoria degli integrali curvilinei e di superficie* (1900).
14. *Qualche complemento al teorema di Hunyady* (1900).
15. *Due teoremi nella teoria delle forme* (1900).
16. *Aggiunte ad una mia Nota intorno ai determinanti* (1901).

Ed ha lasciato litografati i lavori seguenti:

17. *Sulla teoria delle funzioni di variabile complessa* (Pavia, 1897).
18. *Teoria dei gruppi di sostituzioni* (Pavia, 1898).
19. *Alcune lezioni di analisi* (preliminari ad un corso sul potenziale).

Dini [1]). — *Ulisse Dini* nacque in Pisa il 14 novembre 1845 e vi morì il 28 ottobre 1918; fece i suoi studî nella sua città natale e vi si laureò nel 1864; ebbe a maestro il Betti ed il Mossotti, che concepirono nel Nostro le più alte speranze, che furono di poi pienamente confermate ed attuate.

Le singolari disposizioni alla ricerca si rivelarono nel Dini nella sua prima pubblicazione (1864), cioè la tesi di laurea su un argomento suggeritogli dal Betti, colla quale si inizia una prima serie d'importanti lavori dell'autore sulla geometria differenziale. In questo stesso anno 1864, il Dini ebbe la fortuna di avvicinare il Beltrami, chiamato a Pisa dal Betti alla cattedra di geodesia, la cui amicizia intima aumentò in lui l'ardore nella ricerca matematica. E proprio in questo stesso anno 1864 risale la dimora in Pisa del grande matematico tedesco Bernardo Riemann, col quale il Betti ed il Beltrami spesso si trovarono in amichevole e

1) *Solenne commemorazione del prof. U. Dini*, fatta il 12 marzo 1922 nell'Università di Pisa dal prof. L. Bianchi; Walter B. Ford, *Cenni intorno alla vita e alle opere di U. Dini*, pubblicati nel *Bollettino di matematica*, 1922, n. 11-12.

scientifico conversare; e senza dubbio tali relazioni con matematici di così alto valore contribuirono non poco a sviluppare nel Dini le peregrine facoltà, che natura gli aveva dato.

Nel 1865 il Dini ottenne una borsa di studio per perfezionarsi a Parigi, ove fu bene accetto da quegli illustri matematici, dall' Hermite ed in particolare dal Bertrand; il quale presentò alla Accademia di Francia un'elegante Nota del Dini, in cui per la prima volta vennero determinate le superficie a curvatura costante negativa, che si chiamano oggi *elicordi del Dini.*

Nel 1866, ritornato in Italia, fu nominato professore della Università di Pisa, ove insegnò ininterrottamente per ben 52 anni. Due nomi erano allora specialmente celebri nella Facoltà matematica, cioè quelli di Enrico Betti e di Ulisse Dini; il maestro ed il discepolo, così diversi nella forma della esposizione, come anche nell' indole stessa della loro mente matematica. Se accogliamo le vedute di Enrico Poincaré, esposte nell'opera *La valeur de la science*, si potrebbe significare tale diversità collocando il Betti nella schiera dei matematici *intuitivi*, il Dini piuttosto in quella dei *logici*; mettendo però entrambi fra i matematici *inventori*. Se nel primo ed importante gruppo di lavori di geometria differenziale il Dini si accostò agl' intuitivi, ben presto la natura del suo acuto ingegno, eminentemente critico, lo portò naturalmente fra i *logici*, mediante importanti ricerche di calcolo infinitesimale e di analisi, che ne aumentarono e ne completarono grandemente la fama.

Come si è detto, la prime ricerche del Dini (1868-1870) appartengono alla geometria differenziale, cioè appartengono alla determinazione della proprietà di certe equazioni a derivate parziali di 2° ordine, che s' incontrano nella teoria delle superficie applicabili; e la sua opera su tale argomento è consacrata in diciotto memorie, relative specialmente ai problemi generali sulla teoria della curvatura e linee geodetiche, alcuni dei quali proposti prima dal Beltrami.

Sino dall' inizio della sua carriera scientifica, il Nostro fu colpito dall'osservare che alcuni principî fondamentali dell'analisi apparivano mancanti e nello enunciato e nelle dimostrazioni di quell'assoluto rigore richiesto nella matematica; e in ciò lo

confermarono la lettura delle memorie dei discepoli di Weierstrass, cioè di Hankel, Schwarz ed Heine. Talchè nel 1877, cioè dopo sette anni dall' inizio delle sue ricerche in questo senso, potè pubblicare il trattato, divenuto poi famoso, intitolato: *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*, che è tutto originale e riguardato come fondamentale nella teoria delle funzioni di variabili reali ed in ciò che il Dini vi espose intorno alle funzioni continue e discontinue, le derivate e le condizioni della loro esistenza, le serie, gl' integrali definiti, le proprietà dei rapporti incrementali ecc. Quest' opera servì come modello in tutto il mondo e fu tradotta più tardi (1902) in tedesco.

A partire dall'anno 1877-78 il Dini rielaborò ed espose nelle sue lezioni una grande varietà di argomenti di analisi infinitesimale (per es. diede per la prima volta una trattazione rigorosa della teoria generale delle funzioni implicite); le ricerche da lui compiute in questo periodo rimasero inedite fino al 1915, in cui furono raccolte compiutamente in 4 volumi intitolati: *Lezioni di analisi infinitesimale.*

Nel 1878 il Dini volge le sue investigazioni alla critica della convergenza e delle altre proprietà della serie di Fourier. Queste sue ricerche furono pubblicate due anni dopo in un trattato intitolato: *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di variabili reali*, opera che contiene un completo corpo di ricerche originali e risultati importantissimi.

Vi si studia la convergenza delle serie di Fourier sotto diversi aspetti, vi si espone una discussione compiuta della convergenza di altri sviluppi analoghi in uso nella fisica matematica, come ad esempio quelli di una funzione arbitraria mediante funzioni di Bessel, di Legendre, ecc.

Chi desiderasse conoscere l'elenco completo, di circa 60 Memorie del Nostro, lo troverà nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* del febbraio 1919, pubblicato dal prof. Luigi Bianchi.

Il Dini ha occupato parecchie cariche politiche ed amministrative, talvolta ritraendone, come il Brioschi, amarezze e danno economico; fu deputato pel Collegio di Pisa per molte legislature; poi fu nominato senatore. È superfluo dire che il Nostro appartenne a quasi tutte le Accademie e Società scientifiche nostrane ed a parecchie straniere; fece parte per molti anni del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, fu Rettore della Università di Pisa e, fino alla sua morte, Direttore della Scuola superiore normale di Pisa.

Arzelà [1]. — *Cesare Arzelà* nacque il 6 marzo 1847 in Santo Stefano di Magra, terra della Lunigiana, e vi morì il 15 marzo 1912. Studiò nel Ginnasio di Sarzana e poi nel Liceo di Pisa, e nel 1865 entrò nella Università di Pisa, ove si laureò in matematica. Insegnò nelle scuole secondarie; nel 1878 vinse il concorso per la cattedra di algebra della Università di Palermo; e nel 1880 lasciò questo Ateneo per quello di Bologna, ove per concorso aveva ottenuto la cattedra di calcolo infinitesimale.

Il suo *Trattato di calcolo infinitesimale*, cui ha lavorato a lungo, e che disgraziatamente è rimasto incompiuto, attesta la cura che pose nel dar forma didattica all' importante materia; senza entrare in particolari ricorderemo l' innovazione da lui attuata colla fusione del calcolo integrale col differenziale.

Nel 1879 l'Arzelà ripubblicò il classico *Trattato di algebra* del Bertrand, dandogli nuova veste, rendendolo cioè più moderno e più adatto alle nostre scuole.

Pubblicò poi insieme all' Ingrami un eccellente *Trattato di aritmetica razionale*.

Discorso brevemente delle opere di carattere didattico dell'Arzelà, passiamo ora a discuterne l'opera scientifica non elementare. La produzione scientifica dell'Arzelà rispecchia le qualità caratteristiche del suo ingegno prevalentemente critico, della sua mente dotata di squisito senso analitico e di singolare acume.

Nel 1871 pubblicò una *Nota sopra alcune applicazioni di una formula data da Jacobi*; nel 1873 una *Sullo sviluppo in serie ordinate secondo le potenze decrescenti della variabile, di* n *funzioni algebriche, definite da altrettante equazioni a coefficienti determinati*. In questo intorno di tempo egli pubblicò due lavori di carattere elementare, l' uno sulla *Teoria dei limiti* e l'altro sui *Massimi e Minimi*.

1) Vedi nei *Rendiconti delle Sessioni della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna*, 1911-12, la *Commemorazione* letta il 26 maggio 1912 dal prof. S. PINCHERLE.

Nel 1885 inserì nei *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, *Un teorema intorno alle serie di funzioni*, ove stabilì il criterio detto allora *di convergenza uniforme a tratti* e che ora si dice *convergenza quasi uniforme*. Su questo argomento il Nostro tornò più volte, rendendolo sempre migliore, fissandone infine la forma definitiva e le conseguenze nel suo maggior lavoro, pubblicato nel 1899 e 1900 fra le *Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna*. Altri lavori che si riattaccano a questo criterio, egli pubblicò nel periodo 1888-1900; essi si trovano in un Elenco che leggesi in fine della *Commemorazione* citata (e che riproduciamo qui sotto; vedi i nn. 16, 17, 38).

Da questi studî l'Arzelà passò a quelli di calcolo funzionale. Le prime sue idee sull'argomento si trovano nella Nota pubblicata nel 1889: *Funzioni di linee*. L'argomento contenuto in questa Nota viene elaborato, ampliato e migliorato in diversi lavori successivi, che nell'elenco citato portano i nn. 21, 22, 25, 27, 29.

Nelle Note 27 e 36 dà una proposizione assai generale, che pone come condizione necessaria e sufficiente l'esistenza, nella varietà data, di una sotto-varietà di funzioni ugualmente oscillanti.

La considerazione delle condizioni del limite di una successione di funzioni gli permette di dare una dimostrazione assai semplice di un notevole teorema dell' Osgood sulle serie delle funzioni analitiche, dimostrazione che è stata anche tradotta in inglese (vedi Note 34 e 37 del citato elenco).

Fra le più importanti applicazioni, che il Nostro fa delle considerazioni ora ricordate, sono da menzionare quelle contenute nelle Note 23 e 28, ed in fine colla sua ultima Memoria (n. 44), l'applicazione al calcolo delle variazioni dei concetti ricordati del calcolo funzionale.

I problemi di questo calcolo hanno affaticato la mente del Nostro per molti anni e fino ai suoi ultimi giorni hanno costituito l'oggetto principale delle sue meditazioni; ed i suoi sforzi hanno contribuito a risolvere alcune importanti questioni di questo ramo della scienza; per altre questioni hanno giovato ad indicare la via che può condurre alla soluzione.

Altri lavori dell'Arzelà sono destinati a portare utili perfezionamenti ai punti più importanti dell'analisi e del calcolo infinitesimale; ed essi sono quelli indicati nell'elenco citato coi nn. 8, 15, 19, 26, 30 e 35.

L'Arzelà fu eletto nel 1894 socio onorario della R. Accademia delle scienze di Bologna, nel 1904 Corrispondente nazionale di quella dei Lincei; nel 1905 ottenne la medaglia d'oro della Società delle scienze dei XL; nel 1907 il premio reale per la matematica, a metà col prof. Castelnuovo; ebbe nel 1910 la nomina a Corrispondente della Società matematica di Kharkoff; nel 1911 fu eletto membro della Società dei XL.

Elenco delle opere:

1. *Nota sopra alcune applicazioni di una formula data da Jacobi* (*Giornale di Matematiche*, tomo IX, Napoli, 1871).
2. *Sviluppo in serie ordinate secondo le potenze decrescenti della variabile, di* n *funzioni algebriche definite da altrettanti equazioni a coefficienti determinati* (Idem, tomo XI, 1873).
3. *Deformazione di un ellissoide omogeneo, elastico, isotropo* (Idem, tomo XII, 1874).
4. *Sopra la teoria dell'eliminazione algebrica* (Id., t. XV, 1876).
5. *Teoria dei limiti e dei numeri irrazionali* (Firenze, 1877).
6. *Un'osservazione intorno ai massimi e minimi di una funzione reale di una variabile reale* (*Giornale di scienze naturali ed economiche*, Palermo, 1879).
7. *Un'osservazione intorno alle serie di funzioni* (*Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Bologna*, 1883).
8. *Sui prodotti infiniti* (*Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna*, serie IV, tomo IV, 1883).
9. *Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue* (*Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Bologna*, 1884).
10. *Sulla integrazione per serie* (Bologna, 1884).
11. *Un teorema intorno alle serie di funzioni* (*Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, Roma, serie IV, tomo I, 1885).
12. *Sulla integrabilità di una serie di funzioni* (Ibidem).
13. *Sulla integrazione per serie* (Ibidem).
14. *Sopra una certa estensione di un teorema relativo alle serie trigonometriche* (Ibidem).
15. *Sui prodotti infiniti* (*Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Bologna*, 1886).

16. *Sugli integrali di funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono altra variabile* (Idem, 1888).
17. *Sulla teoria delle funzioni analitiche* (Ibidem).
18. *Funzioni di linee* (*Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, Roma, serie V, tomo V, 1889).
19. *Sugli integrali doppi* (*Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna*, serie V, tomo II, 1892).
20. *Sulle serie doppie trigonometriche* (Idem, tomo IV, 1894).
21. *Sulle funzioni di linee* (Ibidem).
22. *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie* (Idem, serie V, tomo V, 1895).
23. *Sull'esistenza degli integrali nelle equazioni differenziali ordinarie* (Idem, tomo VI, 1896).
24. *Sull'integrazione per serie* (*Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, Roma, 1897).
25. *Sul principio di Dirichlet* (*Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Bologna*, 1897).
26. *Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni analitiche* (Idem, 1898).
27. *Sulle serie di funzioni*: parte prima (*Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna*, serie V, tomo VIII, 1899).
28. *Sulle serie di funzioni*: parte seconda (Idem, 1900).
29. *C. Arzela's Abhandlung*: «*Sulle serie di funzioni*» *bearbeitet von I. T. Pohl und B. Raucheggen* (*Monatshefte für Math. und Phisik*, tomo XVI, Vienna, 1900).
30. *Sull'integrazione per sostituzione* (*Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Bologna*, 1900).
31. *Estensione di un criterio di convergenza dato da Riemann* (Idem, 1901).
32. *Sul secondo teorema della media per gl'integrali doppî* (*Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna*, serie V, tomo X, 1902).
33. *Sulle serie di funzioni di variabile reale* (*Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Bologna*, 1902).
34. *Sulle serie di funzioni analitiche* (Idem, 1903).
35. *Sull'inversione di un sistema di funzioni* (Ibidem).
36. *Sulle serie di funzioni ugualmente oscillanti* (Idem, 1904).

37. *Note on series of analytic functions* (*Annales of mathematics*, serie II, tomo V, Salem U. S. A., 1904).

38. *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata* (*Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Bologna*, 1905).

39. *Sull' integrabilità di una serie di funzioni integrabili* (Idem, 1906).

40. *Esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali* (*Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna*, serie VI, tomo III, 1907).

41. *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata* (*Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Bologna*, 1907).

42. *Sul limite di un integrale doppio* (Ibidem).

43. *Sul teorema di E. Borel* (Idem, 1909).

44. *Su alcune questioni di calcolo funzionale* (*Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna*, serie VI, tomo VII, 1911).

45. *Variazioni deboli e forti delle funzioni* (*Rendiconti dell'Accademia delle scienze di Bologna*, 1911).

46. *Trattato d'Algebra elementare* (tre edizioni) (Firenze, Le Monnier, 1882-1905).

47. *Complementi d'Algebra elementare ad uso degli Istituti tecnici* (Idem, 1894).

48. *Aritmetica razionale*, in collaborazione con G. Ingrami (Bologna, Zanichelli, 1894).

Ricci-Curbastro. — Il 6 agosto 1925 si spense improvvisamente a Bologna *Gregorio Ricci-Curbastro*, nato di nobile famiglia a Lugo il 12 gennaio 1853. Egli aveva cominciati i suoi studî universitari a Roma, avevali continuati a Bologna e li compì a Pisa, ove si laureò nel 1875. A Pisa rimase ancora per profittare degli insegnamenti di Betti e Dini; nell'anno 1877-78, grazie ad un posto di perfezionamento all'estero, potè seguire le lezioni date da F. Klein e A. Brill nel «Politecnico» di Monaco. Nell'anno 1879-80 fu assistente del prof. Dini e nel dicembre 1880 ottenne, per concorso a professore straordinario, la cattedra di fisica matematica nell' Università di Padova; tale cattedra conservò sino al 1890, quando passò in qualità di ordinario a quella di analisi algebrica, che conservò sino alla morte: della fisica matematica mantenne l' incarico, che poi mutò in quello della geometria superiore.

Mente equilibrata e carattere fermo, disimpegnò con onore uffici pubblici importanti nella natìa Lugo e a Padova, sua patria di adozione; maestro efficace e zelante si interessò attivamente ai lavori dei propri alunni.

La produzione scientifica del Ricci si inizia con un lavoro di elettrodinamica; egli però lasciò presto (1884) questo argomento per dedicarsi a ricerche destinate a condurlo alla creazione del calcolo differenziale assoluto, suo precipuo titolo d'onore; il valore di questo nuovo algoritmo fu riconosciuto e misurato soltanto quando permise all' Einstein la formulazione della relatività generale. Senza fare una esauriente enumerazione delle pubblicazioni relative [1]), ci limitiamo a ricordare l'esposizione fattane nel 1901 dal Ricci, con la collaborazione del Levi-Civita, nei *Mathematische Annalen* e le applicazioni alla teoria delle superficie che si leggono in un corso litografato (1898).

Migliorando costantemente le sue lezioni di *Algebra complementare*, nelle successive edizioni litografate, le fece assurgere a tale perfezione da decidersi a farle stampare; ma non ebbe la soddisfazione di vedere il volume ultimato, il quale è destinato a suonare all'orecchio nostro come una voce d'oltre tomba. (G. L.).

Capelli [2]). — *Alfredo Capelli* nacque a Milano il 5 aprile 1855 e morì a Roma il 28 gennaio 1910. Studiò a Roma sotto la guida di Cremona, Beltrami e Battaglini, poi a Pavia col Casorati ed in ultimo assistette a Berlino ai corsi di Weierstrass e Kronecker; fu assistente nella Università di Pavia; ottenne per concorso la

[1]) L'elenco completo degli scritti scientifici del Ricci trovasi in calce alla bellissima *Commemorazione* che di lui fece T. LEVI-CIVITA il 3 gennaio 1926 alla R. Accademia dei Lincei e che fu poi stampata fra le *Memorie* di essa (serie VI, vol. I, fasc. VIII).

[2]) Vedi nel *Giornale di matematica*, vol. 48 (1° della 3ª serie), 1910, la *Biografia* del prof. G. TORELLI; negli *Atti dell'Accademia Pontaniana*, vol. 43 (il 18° della 2ª serie), 1913, la *Biografia* del GALLUCCI; negli *Atti del R. Istituto veneto*, 1910, pp. 59-65, la *Biografia* del RICCI.

Cattedra di algebra complementare nella Università di Palermo, e dal 1886 fino alla morte insegnò la stessa materia in quella di Napoli. Fu per ben 16 anni direttore del *Giornale di matematica* del Battaglini.

L'elenco dei lavori del Capelli trovasi in fine della *Biografia* del Torelli. Innanzi tutto vogliamo ricordare l'opera classica del Nostro, di quasi mille pagine, intitolata *Istituzioni di analisi algebrica*, che rivela la grande valentia didattica dell'autore.

Delle sue 83 pubblicazioni, 70 riguardano l'analisi, algebrica ed infinitesimale; 2 la geometria; 11 sono biografie, note bibliografiche, discorsi, relazioni e traduzioni.

Le prime 70 possono classificarsi così: 13 riguardanti l'analisi infinitesimale e 57 l'analisi algebrica; in 27 di quest' ultime si trattano argomenti della teoria delle forme algebriche; in 5 le sostituzioni, in 11 le equazioni algebriche; in 14 si trattano diverse teorie di algebra e di aritmetica.

Come si vede il gruppo più numeroso dei lavori del Nostro è quello riguardante la teoria delle forme algebriche, il quale negli anni 1882 e 1896 gli fruttò due premi della Società italiana delle scienze; e certo questi lavori procureranno un nome duraturo al Capelli nella storia delle matematiche. In tali studî, continuati per ben 25 anni, il Nostro, con evidente progresso, conseguì con rigore risultati veramente importanti.

Iniziò i suoi studî col generalizzare una formula, data di già dal Gordan per le forme binarie, e con successive estensioni giunse allo sviluppo di una forma di n serie ad n variabili secondo le potenze del determinante delle variabili moltiplicate per polari di forme ad $(n-1)$ serie. Poi osservò che l'operazione invariantiva adoperata dal Cayley si può sostituire con una operazione della specie degli « emananti » del Sylvester; così potè giungere a stabilire in modo generale le proprietà degl' invarianti e dei convarianti delle forme di un numero qualunque di serie di variabili, sempre riconducendo la tecnica delle operazioni sulle forme invariantive al suo elemento essenziale, vale a dire all'operazione di polare. Ricorderemo anche la ricerca che egli fece sull'ardua questione del numero dei convarianti di gradi dati nelle variabili, e nei coefficienti delle forme fondamentali.

Le ricerche più recenti del Nostro su questo argomento, si connettono a quelle di Hilbert sui sistemi completi di formazioni invariantive per le forme algebriche e sulle successioni infinite di polinomi a più variabili.

Nei cinque lavori sulla teoria delle sostituzioni, all' infuori dell' ultimo, si trova esteso il concetto dell' isomorfismo dei gruppi di sostituzioni, e parecchie proposizioni sulla composizione di tali gruppi, importantissime per l' utilità che arrecava alla teoria delle equazioni algebriche. Si connettono a quest' ultima teoria i lavori del 3º gruppo, che hanno per iscopo risposte e pregevoli perfezionamenti, riguardanti questioni speciali. Le due prime Note danno un criterio, onde, date due funzioni algebriche qualunque di n variabili indipendenti, si può riconoscere se una di esse sia esprimibile razionalmente per mezzo dell'altra e delle funzioni simmetriche elementari delle variabili; poi vi si studiano mediante la teoria di Galois gl' irrazionali algebrici numerici relativi ad un dato campo di razionalità. Le altre tre Note, indipendentemente dalla teoria ora citata, trattano questioni, che riguardano l' irriducibilità dell'equazione binomia in un campo qualunque di razionalità, estendendo i risultati già noti per casi particolari.

In due Note si dànno due teoremi analoghi a quelli di Cartesio e Fourier per la ricerca d' un limite superato dal numero delle radici reali di un'equazione algebrica, comprese in un dato intervallo, prendendo in considerazione invece della successione delle derivate, la successione delle differenze ad incremento finito.

In un lavoro successivo si stabilisce un metodo di approssimazione delle radici di un'equazione, impiegando l' uso delle successioni ricorrenti; infine in un altro si dà un'elegante interpretazione del numero che esprime la caratteristica della matrice di Sylvester per la risultante di due funzioni intere.

Infine in quattro Note si ritrova lo sviluppo di quel ramo della funzione n delle variabili indipendenti $p_0, p_1, \dots p_n$, la quale soddisfi all'equazione:

$$a_0 + p_3 + (a_1 + p_1)\,z + (a_2 + p_2)\,z^2 + \dots + (a_n + p_n)\,z^n = 0$$

e che per $p_0 = p_1, ... = p_n = 0$ diventi uguale ad una determinata radice semplice e finita dell'equazione:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n = 0$$

si esamina il campo di convergenza di questo sviluppo, e con varî metodi se ne calcolano i coefficienti.

Le pubblicazioni del 4° gruppo riguardano in gran parte l'algebra e l'aritmetica, e specialmente i fondamenti della scienza dei numeri, mettendo in relazione l'aritmetica elementare coi concetti di gruppo e di invariante. Le Memorie dei due ultimi gruppi rimanenti, riguardano soggetti diversi da quelli suesposti, cioè l'analisi infinitesimale e la geometria; al 1° gruppo appartengono i lavori che nell'elenco citato vanno dal n. 58 al n. 70; al 2° gruppo i lavori che portano i nn. 71 e 72; il primo de' quali merita speciale menzione, perchè in esso il Nostro, per mezzo di considerazioni semplici di geometria infinitesimale, dimostra un teorema stabilito dal Liouville con metodo analitico alquanto complicato.

Oltre le matematiche il Capelli coltivava gli studî filosofici, dei cui progressi era informatissimo, come lo dimostra il suo *Discorso* inaugurale dell'anno accademico 1889-90 tenuto nella Università di Napoli, sul tema: *La matematica nella sintesi delle scienze*; ivi, prendendo in esame i processi logici, che si seguono per risolvere molte questioni di algebra, il Nostro faceva vedere come questi medesimi procedimenti possano servire a trattare questioni di filosofia. Anche in qualche arte bella il Capelli ha dato saggio di non comune capacità, con miniature da lui fatte e di squisita perfezione. È superfluo ricordare che egli apparteneva a numerose società scientifiche nostrane e straniere.

Lauricella [1]. — *Giuseppe Lauricella* nacque in Girgenti il 15 dicembre 1867 e morì in Catania inopinatamente il 9 gennaio 1913. Fece gli studî secondari nella sua città natale; gli studi universitari a Pisa, ove ebbe a maestri il Bianchi, il Dini ed il Volterra, di cui ebbe l'amicizia fino agli ultimi giorni della sua breve vita; il 2 luglio 1892 si laureò; il 1° dicembre 1894 fu nominato assistente alla Cattedra di calcolo infinitesimale; talchè ebbe modo di approfondirsi negli studî matematici; e colla sua dissertazione sull'*Equilibrio dei corpi elastici isotropi* ottenne il diploma di abilitazione all'insegnamento presso la Scuola normale di Pisa.

1) Vedi negli *Atti dell'Accademia gioenia*, 1914, la *Biografia* scritta dal prof. DANIELE, e nel *Bollettino della Mathesis*, a. V, n. 1, maggio 1913, quella del prof. L. SILLA.

Insegnò dal 1895 al 1898 negli Istituti tecnici; poi ottenne per concorso la Cattedra di calcolo infinitesimale nella Università di Catania, che tenne insieme a quella di fisica matematica fino al 1910. In questo anno fu chiamato dalla Facoltà di scienze della Università di Roma ad insegnarvi analisi superiore e meccanica razionale; ma nel 1911 volle far ritorno alla Università di Catania.

I lavori scientifici pubblicati dal Nostro sono una sessantina, il cui elenco trovasi nella citata *Biografia* del prof. Silla. Tali lavori riguardano parecchi campi dell'analisi e della fisica matematica; ma bisogna ricordare specialmente le sue ricerche sulla teoria della elasticità, le applicazioni delle equazioni integrali alla fisica matematica e la risoluzione dell'equazione integrale di prima specie. Senza dubbio il contributo apportato dal Lauricella con questi lavori è stato altamente apprezzato dai matematici, e certo facevano presagire un brillante avvenire al nostro giovane matematico.

Morera [1]. — *Giacinto Morera* nacque a Novara il 18 luglio 1856 e morì a Torino l'8 febbraio 1909. Si laureò in ingegneria nel 1878 a Torino e nel 1879 in matematiche pure; andò poi a perfezionarsi a Pisa, a Pavia, a Berlino e a Lipsia.

Nel 1886 ottenne per concorso la Cattedra di meccanica razionale nella Università di Genova, ove rimase fino al 1900;

1) Vedi nel *Giornale di matematica*, vol. 48 (1° della 3ª serie), 1910, la *Commemorazione* comunicata alla Società matematica di Kharkoff dal prof. G. A. MAGGI.

indi passò all'Università di Torino, in cui poi ottenne la Cattedra di meccanica superiore e l'incarico della meccanica razionale nel « Politecnico », allora istituito. Era Membro dell'Accademia delle scienze di Torino e Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. A Torino ebbe a maestro il Siacci, che v'insegnava meccanica superiore; il Siacci impresse allo spirito scientifico del Morera un indirizzo, che nel Nostro si conservò fino alla fine.

L'opera scientifica del Morera, che consta di 57 lavori, il cui elenco trovasi alla fine della *Biografia* del Maggi citata, comprende un gran numero di svariate questioni, riguardanti la meccanica razionale, la fisica matematica e l'analisi pura.

Innanzi tutto ricorderemo i numerosi lavori riguardanti la teoria delle equazioni generali della meccanica analitica e i diversi problemi d'analisi ad esse collegati. Essi costituiscono interessanti complementi, perfezionamenti e dimostrazioni di nuove circostanze, attinenti alla deduzione, alla integrazione ed alla trasformazione delle equazioni della meccanica e delle equazioni alle derivate parziali di 1° ordine ed ai differenziali totali, e queste ricerche del Nostro hanno una intima relazione coi lavori di Mayer e Lie sullo stesso argomento. Nell'analisi pura citeremo il teorema che porta il suo nome, e può considerarsi come l'inverso del celebre Teorema di Cauchy, cioè che se w e z sono variabili complesse tali, che al variare di z entro un certo campo la w vari con continuità e resti finita e monodroma, e se $\int w dz$ si annulla su ogni contorno w rappresenta nel campo considerato una funzione di z; e di questo teorema il Nostro fa importanti applicazioni in diversi lavori.

Pochi, ma importanti lavori del Morera, riguardano la funzione potenziale; e le formule, note sotto il suo nome, per l'espressione delle derivate seconde della funzione potenziale di un corpo, spiccano per generalità e semplicità di deduzione.

Il Morera arricchì la meccanica d'importanti risultati dei sistemi continui, e fra gli ultimi suoi lavori ricorderemo particolarmente le ricerche sull'attrazione dello ellissoide eterogeneo e degli strati ellissoidali, sul problema di Dirichlet nel campo ellissoidico, e sulle funzioni armoniche ellissoidali ecc. Dei lavori rimanenti si trovano i titoli nell'elenco già citato.

Cesàro [1]). — Ernesto Cesàro nacque a Napoli il 12 marzo 1859 e vi morì tragicamente annegato in mare per salvare il proprio figlio il 12 settembre 1906. Fece i primi studî classici nella sua città natale; poi nel 1873 si recò a Liegi per studiare in quella « École des mines », ove il Nostro ebbe occasione di conoscere il Catalan, che ebbe per il Cesàro grande stima, amicizia e protezione. Con qualche interruzione il Cesàro seguitò i suoi studî d'ingegneria a Liegi fino al 1883; ma non riuscì a laurearsi, perchè invaso dalla passione dello studio delle matematiche, seguiva di malavoglia gli studî d'ingegneria mineraria; mirava invece ad inscriversi nella Facoltà matematica in una nostra Università; ed infatti dopo molte traversie riuscì nell'anno 1883-84 a farsi iscrivere al 4° anno di matematiche pure nella Università di Roma, ove ottenne il 22 febbraio 1887 la *laurea ad honorem.*

L'opera scientifica del Cesàro è varia e copiosissima, chè va dal 1878 al 1906 e, secondo l'elenco dato dal Perna, le sue pubblicazioni sommano a 259, senza contare le questioni proposte e risolte da lui. La vita scientifica del Nostro, si può dividere in due grandi periodi: il primo va dal 1878 al 1886, cioè durante il suo soggiorno a Liegi; il secondo s'inizia dal 1887 e va fino al 1906. Nel 1886 per concorso ottenne la Cattedra di algebra dell'Università di Palermo; e nel 1891 quella di calcolo infinitesimale della Università di Napoli; doveva poi passare alla Università di Bologna ad insegnarvi meccanica razionale e, per incarico, qualche altra materia; ma la immatura fine troncò ogni progetto di trasferimento.

Sino dal 1875 il Cesàro, benchè giovanissimo, meravigliò il Catalan, direttore della *Nouvelle correspondance mathématique*, per il suo forte ingegno matematico tanto da accettare la collaborazione del Nostro, il quale oltre a proporre questioni diverse e non facili, risolveva e generalizzava quelle proposte da altri. Il primo periodo della vita scientifica del Nostro s'inizia col

[1]) Vedi nel *Giornale di matematica*, vol. 45, 1907, la *Biografia* del prof. PERNA e nei *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, vol. 16, serie V, 1° semestre 1907, pp. 76-82 la *Commemorazione* del prof. V. CERRUTI.

pubblicare nel *Giornale* di Catalan le due Note: a) *Quelques propriétés de la courbe représentée par* $u = \pi \frac{\text{sen w}}{\text{w}}$; b) *Théorème d'arithmétique* ecc. Nel 1878 compose il lavoro *Forme poliedriche regolari e semi-regolari in tutti gli spazi*, che vide la luce solo nel 1886 nelle *Memorie dell'Accademia delle scienze di Lisbona*. Nel 1880 pubblicò nel *Giornale* del Catalan parecchie Note di aritmetica e di geometria che gli valsero l'ammirazione dei dotti; nelle quali ritrova, rilevandone l' importanza, i numeri di Eulero e di Bernoulli, e ne fa importanti applicazioni; ed allora incominciò ad occuparsi di questioni di meccanica. Però l'aritmetica fu sempre pel Nostro il soggetto preferito, incoraggiato a tali studî anche dal Catalan; e nel 1881 preparò diverse Note, pubblicate nelle *Memorie dell'Accademia delle scienze di Liegi*, sotto il titolo *Sur diverses questions d'arithmétique*, notevole per le applicazioni all'aritmetica superiore del calcolo infinitesimale, che lo condussero all'aritmetica assintotica; ivi ritrova il risultato di Catalan *Sulla costante di Eulero*; si serve in esse della *rappresentazione simbolica dei numeri*; e vi stabilisce elementarmente la *formula di Stirling*. Contemporaneamente (1883) pubblicò una importante Nota su tre rette rotanti colla stessa velocità intorno a tre centri, ove dà il risultato seguente:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen x}}{1 - e^{\frac{x}{k}}}\, dx = \frac{1}{2}\left[1 - \pi K \frac{e^{\pi k} + e^{-\pi k}}{e^{\pi k} + e^{-\pi k}}\right]$$

e getta le prime basi della sua *Geometria intrinseca* con alcune eleganti questioni sparse in undici Note. In quelle intitolate *Identités arithmétiques* si trovano numerose relazioni fra i divisori di un numero; in nove Note si occupa della *Théorie des moyennes*. Basterebbero questi lavori del Cesàro per collocarlo fra i primi matematici di questi ultimi tempi.

Il secondo periodo della vita scientifica del Cesàro s' inizia colla pubblicazione delle sue *Excursions arithmétiques à l'infini*; colle Note sul calcolo isobarico sulle funzioni olomorfe, sul calcolo delle probabilità, sui determinanti, sulla geometria intrin-

seca ecc. Le *Excursions arithmétiques* ecc. constano di nove Memorie, pubblicate negli *Annali di matematica*, le quali sono di somma importanza per gli argomenti trattativi, fra cui: a) *Sur le rôle arithmétique de sin* $\frac{\pi x}{2}$; b) *Sur la fonction* π—[z]; c) *Sur la fonction* τ(z); d) *Sur l'inversion de certains series*; ed ai risultati nuovissimi, cui arrivò il Cesàro, si ricollegano all'opera precedente del Nostro *Sur diverses questions arithmétiques*.

Ora parliamo dei suoi Trattati. L'*Analisi algebrica* è uno dei migliori trattati del genere che si conoscono, così originale e suggestivo, così ricco di preziosissimi esercizî e nuovi; esso fu molto lodato dal Beltrami e dall' Hermite.

Il *Calcolo infinitesimale* è un'altra opera del Nostro di un certo pregio per il suo contenuto e la sua originalità; ma il Cesàro non era contento dell'opera sua.

La *Geometria intrinseca*, che incominciò ad essere pubblicata nel 1896, è l'opera più importante del Nostro; la quale fu tradotta in tedesco; essa è frutto delle sue lunghe e laboriose ricerche; in cui fa importanti applicazioni alle solite curve, alle curve dette del Cesàro, alle rullette, all'analisi baricentrica, alle reti di curve, alle curve di Bertrand, alle superficie rigate, alle superficie di Weingarten, alle deformazioni infinitesime delle superficie, alle congruenze, alle curve negli iperspazi, ed agli iperspazi in generale. Infine ricorderemo le Memorie del Nostro riguardanti la fisica matematica, cioè: a) *Moti rigidi e deformazioni termiche negli iperspazi*; b) *Sulle formule di Maxwell*; c) *Sur le pouvoir rotatoire magnétique*; d) *Sul calcolo della dilatazione e della rotazione nei mezzi elastici* ecc. Ricorderemo anche la bella *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, che è molto ricercata. L'attività scientifica del Nostro, la potenza del suo lavoro sono sbalorditive, passando a trattare argomenti fra loro diversissimi: dall'aritmetica assintotica alla geometria intrinseca. Nell'aritmetica assintotica prende il primo posto da vero innovatore fra i nostri matematici; nel calcolo delle probabilità si svela sommo maestro, specie per le questioni geometriche; arricchisce la teoria de' limiti di nuovi teoremi di grande importanza; delle serie si mostra uno degli studiosi più appassionati;

è un trattatista sommo, insegnante scrupoloso ed efficacissimo. La sua attività didattica era anch'essa veramente prodigiosa; basti ricordare che nell'anno 1894-95 dettò contemporaneamente ben cinque corsi, cioè sul calcolo infinitesimale, sulla geometria differenziale, sulle superficie di Riemann, sull'analisi algebrica, e di esercitazioni di algebra.

Orlando [1]. — *Luciano Orlando* nacque a Caronia (Messina) il 13 maggio 1887, e morì eroicamente durante la guerra gettando un ponte sull'Isonzo, nella notte del 21 agosto 1915 sotto il fuoco nemico, meritando la medaglia d'oro. Compiuti gli studî secondari a Bologna, entrò nell'Accademia militare di Torino, donde passò alla Scuola di applicazione d'artiglieria e genio, e ne uscì due anni dopo tenente del genio. Spirito battagliero e temperamento nervoso non era adatta per lui la vita militare, onde non tardò ad abbandonarla dopo pochi anni, per darsi interamente agli studî matematici; ed infatti nel 1903 si laureò nella Università di Messina.

L'Orlando ha pubblicato più di 70 lavori, apparsi nei giornali scientifici e nei *Rendiconti* delle nostre Accademie; essi riguardano l'analisi infinitesimale, la fisica matematica e l'aritmetica superiore. Il suo esuberante ingegno e la sua grande energia lo spinsero ad un tempo ad altre occupazioni, ad altri studi. Fu assistente alle Cattedre di calcolo infinitesimale e di algebra nella Università di Roma; fu impiegato per qualche tempo al Ministero di Agricoltura; insegnante al Magistero femminile; coadiuvatore per gli studi di aereonautica presso il Ministero della Guerra; direttore della Scuola superiore di aviazione in Roma; e come ciò non bastasse si diede alle speculazioni industriali, che pur troppo andarono male. Tuttavia egli in mezzo a tanto lavoro ogni tanto ritornava ai suoi prediletti studî di matematica; e così potè ottenere la libera docenza per titoli, e si apprestava a salire la Cattedra universitaria; in un ultimo concorso di calcolo

1) Vedi nell'*Annuario scientifico ed industriale*, tomo 50, 1915, pp. 494-495 una *Necrologia* scritta dal prof. BURGATTI e nel *Bollettino di bibliografia e storia*, ecc. tomo XVIII, 1916, pp. 1-10, una del prof. MARCOLONGO.

infinitesimale riuscì secondo, ma disgraziatamente il concorso fu annullato dal Consiglio superiore. Dato il suo carattere aperto e troppo leale, abituato a dire la verità a qualunque costo, era naturale che si fosse creato non solo avversari, ma non pochi nemici; chè troppi sono gli uomini che non sanno perdonare i piccoli difetti in omaggio alle grandi virtù! E di virtù il Nostro ha dato sublime esempio sulle rive dell'Isonzo, ove come capitano del genio moriva da eroe.

Tonelli [1]. — *Alberto Tonelli* nacque a Lucca il 25 dicembre 1849 e morì a Roma nel 1921. Fece gli studî secondari nella sua città natale; poi passò a studiare all'Università di Pisa, ove si laureò in matematiche nel 1871; fu uno dei discepoli prediletti del Dini, che per il Nostro presagiva una splendida carriera scientifica. Andò a perfezionarsi a Gottinga e nel 1877 ottenne per concorso la Cattedra di calcolo infinitesimale nella Università di Palermo; nel 1879 passò ad insegnare la stessa materia in quella di Roma. In questa Università per qualche anno insegnò anche analisi superiore, ed in seguito ebbe l'incarico dell'algebra che conservò fino alla morte.

I primi lavori del Nostro, i quali risentono l'influenza dei suoi primi maestri, che ebbe a Pisa, Betti e Dini, sono dedicati alla teoria delle funzioni abeliane. Allo stesso soggetto si riattacca una Nota scritta a Gottinga nel 1875, nella quale appare per la prima volta quel tipo di superficie più volte connesse, che, riscoperto due anni dopo da Clifford, è penetrato nella scienza con quest'ultimo nome. Intanto la coltura del Tonelli si estende ed egli conduce a termine pregevoli ricerche nel campo delle funzioni analitiche, delle funzioni potenziali, e nella teoria delle equazioni a derivate parziali del 2° ordine. Un altro indirizzo, molto lontano da quelli e poco coltivato da noi, lo attrae, ed egli dedica alla difficile teoria de' numeri tre pregevoli Note. Più tardi la sua produzione scientifica, così brillantemente iniziata, si rallentò, quando egli sentì che è spesso opera più meritoria foggiare delle

1) Vedi nell'*Annuario della R. Università di Roma*, 1921-1922, il discorso commemorativo di G. CASTELNUOVO; inoltre la *Rassegna Matematica*, del febbraio 1921.

anime che aggiungere una pietra alla edilizia della scienza; così da maestro valoroso divenne educatore sommo. Fu per ben quindici anni, cioè fino al 1919, Rettore della Università di Roma, rendendo segnalati servigi amministrativi col promuovere e sollecitare dal Governo la costruzione de' nuovi edifizî universitari. Durante la guerra esortò i giovani a fare il loro dovere di buoni italiani, e sempre li confortò e li sorresse colla parola e cogli scritti.

Cerruti [1]). — *Valentino Cerruti* nacque in Croce-Mosso, terra del Novarese, il 14 febbraio 1850 e morì a Roma nel 1909. Fece i suoi studî a Torino, ove si laureò in ingegneria civile, poi in matematiche pure, manifestando colla tesi di laurea spiccate attitudini alla ricerca scientifica tanto da guadagnarsi la stima del Cremona, il quale prima lo chiamò a Roma come assistente raccomandato anche dal Sella; poi lo fece nominare professore di meccanica razionale; in seguito insegnò anche meccanica superiore; fu Direttore della scuola di applicazione degli ingegneri, carica che tenne fino alla morte; fu anche Rettore della Università; senatore del regno, e più volte fu Membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione. Dedicatosi fino dall' inizio della sua carriera alle ricerche di meccanica teorica, pubblicò una serie di importanti lavori, che misero testè in evidenza il suo valore; un elenco delle sue pubblicazioni trovasi in fine della citata *Biografia* del Lauricella. Fra essi meritano particolarmente di essere ricordati i seguenti: a) *Intorno alle piccole oscillazioni di un corpo interamente libero*, in cui l'Autore caratterizza alcuni elementi geometrici che valgono a ricostruire in ogni caso l'andamento del moto studiato; b) *Intorno alla generalizzazione di alcuni teoremi di meccanica*, ove sono raccolti alcuni eleganti risultati frutto delle sue lezioni.

Ma, come suol dirsi, il cavallo di battaglia del Nostro è costituito dalle sue ricerche sulla teoria della elasticità, ove rifulse maggiormente il suo ingegno.

1) Vedi nel *Giornale di matematica*, vol. 50 (3° della 2ª serie), 1912, il discorso commemorativo del prof. G. LAURICELLA.

Il suo primo lavoro su tale argomento fu quello *Sulle vibrazioni dei corpi elastici isotropi*, in cui il Nostro si propone il problema di esprimere gli elementi che caratterizzano il moto vibratorio dei solidi elastici isotropi, e quindi le componenti stesse del moto, mediante le condizioni iniziali ed i dati alla superficie limite, ispirandosi ad un lavoro analogo del Betti.

Con mirabile intuito egli scrisse sugl' integrali singolari, i quali hanno lo stesso ufficio che l' inversa del raggio vettore nella teoria di Green; e fondandosi sul celebre teorema del Betti, creò un metodo d' integrazione divenuto classico. Mediante la sua analisi, il Cerruti riuscì a generizzare al caso del moto vibratorio le formule che il Betti aveva trovato pel problema statico. Forse egli si fondò troppo sull'analogia analitica del problema dinamico, con quello statico risoluto dal Betti; ed è forse per questa ragione che egli fu condotto a trascurare alcuni termini, la cui mancanza tolse alle sue formule l' importanza che altrimenti avrebbero avuto. In questa Memoria si trova pure incidentalmente la formula che dà l' integrale generale dell'equazione canonica dei piccoli movimenti; ma anch'essa è inquinata della stessa inesattezza. Come si sa due anni dopo il Kirchoff la stabilì con tutta esattezza. Malgrado tale svista, questo lavoro ha un alto valore scientifico. Dopo di esso il Cerruti volse le sue ricerche alle applicazioni. Scopo del Nostro era di applicare la teoria generale creata dal Betti per lo studio dei problemi di equilibrio, che egli stesso aveva estesa al caso del moto elastico, a casi particolari di importanza fondamentale, per dare ad essa tutto quel valore che aveva già acquistato la teoria di Green relativa al problema del Δ^2. Molte erano le difficoltà analitiche da superare che egli superò brillantemente. Studiando profondamente il metodo del Betti ottenne una serie di nuovi ed importanti risultati fondamentali; talchè fu condotto a ricostruire quel metodo nella classica Memoria *Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, che forse è il lavoro più importante del Nostro. Il metodo del Betti, perfezionato con questa Memoria dal Cerruti, ora va sotto il nome di metodo Cerruti-Betti. Il Nostro non si accontentò dei risultati ottenuti per avvalorare il suo metodo e quello del Betti; ma con una tenacia veramente ammirevole, egli affrontò i problemi dell'equilibrio di una sfera elastica isotropa, di un involucro sferico, di uno strato limitato da due piani paralleli ed altri casi misti di grande importanza.

In virtù dell'impulso straordinario dato prima dal Betti e poi dal Cerruti la teoria della elasticità raggiunse un alto grado di perfezione, e l'Italia divenne la dimora prediletta di questo bellissimo ramo della scienza.

I progressi ora raggiunti nella teoria dell'equilibrio e delle vibrazioni dei corpi elastici isotropi sono immensi; ma i risultati del Cerruti sono sempre d'importanza fondamentale ed imperitura, e fanno sì che il suo nome, come quello immortale di Enrico Betti, rimanga indissolubilmente collegato a questa teoria.

Tardy [1]). — *Placido Tardy* nacque a Messina da famiglia originaria dalla Francia il 23 ottobre 1816. Esauriti gli studî che potevansi compiere nella città natia passò a Lucca, poi a Milano, per studiare sotto la guida di G. Piola e P. Frisiani e, nel 1838, a Parigi, ove usufruì degli insegnamenti del Liouville e del Poisson. Rimpatriato fu nominato (novembre 1841) professore nell'Università di Messina. I moti rivoluzionari accaduti nel 1847 a Messina e Reggio-Calabria, ai quali egli non rimase estraneo, lo costrinsero ad esulare. Riparato a Firenze, iniziò pratiche per ottenere una Cattedra e nel 1851 fu nominato professore di geometria analitica e calcolo infinitesimale nella R. Scuola di Marina di Genova; tre anni dopo era eletto Direttore degli studî nel medesimo Istituto. Resasi vacante la Cattedra di analisi infinitesimale nell'Ateneo genovese, il Tardy fu chiamato ad occuparla (ottobre 1859) e la conservò sinchè, dietro sua domanda, fu collocato a riposo (dicembre 1881); si ritirò allora a Firenze, ove una violenta polmonite lo spense il 1º novembre del 1914.

La produzione scientifica del Tardy non è molto copiosa, quantunque vada dal 1836 al 1904. Tratta questioni di teoria dei numeri e della teoria delle equazioni differenziali lineari; le

[1]) G. Loria, *Commemorazione* letta alla R. Accademia dei Lincei nella seduta del 7 marzo 1915 (*Rendiconti*, serie V, vol. XXIV, 1° semestre 1915); con elenco delle pubblicazioni.

più notevoli sue Memorie sono quelle sui differenziali di indice qualunque, le quali si riattaccano alla recente teoria delle equazioni integrali; tutti i lavori del Tardy si distinguono per il rigore dei ragionamenti e l'accuratezza della forma.

Tedone [1]). — *Orazio Tedone* nacque a Ruvo di Puglia il 10 maggio 1870 e morì, per un tragico accidente occorsogli alla stazione ferroviaria di Pisa, il 18 aprile 1922. Cominciò gli studî universitari a Napoli e li compì a Pisa sotto la direzione del Betti, del Dini, del Bianchi e del Volterra; insegnò poi nell'Istituto tecnico di Milano e, a partire dal 1898, nell'Università di Genova, ove occupò le Cattedre di analisi superiore, meccanica razionale e fisica matematica.

La sua opera scientifica si inizia (1893-96) con alcuni lavori di indole metodologica sull'idrodinamica e l'elasticità; ma in principio del 1896 la sua attenzione fu atratta da un argomento allora di moda, il «principio di Huygens» nell'ottica fisica, e ne diede una nuova dimostrazione. Poco dopo, in una estesa scrittura *Sulle vibrazioni dei corpi solidi omogenei ed isotropi* (*Memorie dell'Accademia di Torino*, serie II, tomo 47, 1897), estese la rappresentazione di Kirchhoff alle vibrazioni più generali che possono avvenire in un mezzo elastico omogeneo ed isotropo: a partire da questo momento dedicò il meglio delle sue forze alla teoria dell'elasticità su cui pubblicò tre estese Memorie negli *Annali di matematica* (serie III, tomi 8, 10 e 17) ed un pregevole articolo nell'*Enciklopëdie der mathem. Wissenschaften.* Verso il termine della sua troppo breve esistenza passò ad occuparsi dell'integrazione delle equazioni di Maxwell-Herz, notevoli per le applicazioni che trovano nella teoria elettro-magnetica della luce.

Altri scritti di analisi e di fisica matematica concernono con quelli citati ad assicurare al Tedone un posto notevole nella scuola avente per capo-stipite Enrico Betti [2]).

[1]) C. Somigliana, *Commemorazione* letta all'Accademia dei Lincei (vedi *Rendiconti*, serie V, vol. 32, 1° semestre 1923); con elenco delle pubblicazioni.

[2]) Di questi egli curò la stampa del vol. II delle *Opere*.

Siacci. — *Francesco Siacci*, nacque a Roma il 20 aprile 1839. Sin da quando era studente in quell' Università si distinse per vivacità d' ingegno e attitudine alla ricerca scientifica, e così attrasse la munifica benevolenza di Baldassare Boncompagni, che divenne suo protettore. Nel 1860 l' Ateneo Romano gli conferì la laurea *ad honorem*. L' anno seguente, per motivi politici, emigrò a Torino e fu subito nominato dal Governo sardo sottotenente d'artiglieria. Fece la campagna del 1866 e poi fu nominato professore di balistica nella Scuola d' artiglieria e genio di Torino; in quella materia non tardò a divenire un' autorità riconosciuta in tutta Europa, scrivendone un Trattato che fu subito tradotto in francese. A partire dall' anno 1871-72 insegnò pure nell' Università di Torino, prima meccanica superiore, poi meccanica razionale. Nel 1891 fu, a sua domanda, trasferito all' Università di Napoli; nell' anno seguente lasciò il servizio militare attivo col grado di tenente-colonnello. A Napoli morì il 31 maggio 1907. Il Governo italiano, in considerazione delle sue alte benemerenze militari e scientifiche ha deliberato di ripubblicarne tutti gli scritti scientifici [1]).

(G L.).

Levi. — *Eugenio Elia Levi*, nato a Torino il 18 ottobre 1883, studiò nell' Università e nella Scuola Normale Superiore di Pisa, ove si laureò in matematica nel 1904. Dopo un periodo di assistentato presso il prof. U. Dini, nel 1909 divenne professore di analisi infinitesimale nell' Università di Genova. Interventista della prima ora, allo scoppiare della grande guerra chiese ed ottenne di servire nell'esercito italiano come volontario e si distinse per intelligenza e valore, sì da raggiungere ben presto il grado di capitano del genio. Morì per ferro nemico il 28 ottobre 1917 a Subida nei pressi di Cormons [2]).

(G. L.).

---

1) L'elenco completo delle pubblicazioni del Siacci trovasi al termine della *Commemorazione* fattane da G. Morera all'Accademia di Torino e pubblicata negli *Atti*, vol. XLIII, 1907-908).

2) L'elenco completo delle sue pubblicazioni (tutte originali e importanti) trovasi nel tomo V (1926) di J. Poggendorff's, *Biographisch-literarisches Handwörterbuch*.

APPENDICE III.

Gli storici della matematica.

Cossali. — L' abbate *Pietro Cossali* nacque a Verona il 29 giugno 1768 e morì a Padova il 2 dicembre 1815; fu professore a Verona (1788), all' Università di Parma, di fisica, mineralogia, astronomia e idraulica (1788); a Padova professore onorario nel 1806; poi ispettore generale delle acque, membro dell'Accademia di Padova (1808) e della Società italiana di scienze, dei XL (1811). La principale delle sue opere è la *Storia critica dell'origine e primi progressi in Italia dell'Algebra* (Parma, 1799), opera assai stimata da potere essere utilmente consultata anche oggidì.

Alcuni lavori più importanti del Cossali:

1. *Discussione sull'assoluta irriducibilità del binomio cubico* (1782).
2. *Sulla misteriosa alembertiana equazione* $(1 + hi)^m = (1 - hi)^m$ (1802).
3. *Limite non comunemente avvertito della consueta regola di doppia posizione* (1813).
4. *Disquisizione sui vari metodi di eliminazione* (1813).
5. *Artifici degli antichi per evitare nelle soluzioni de' problemi le equazioni del 2º grado* (1815).
6. *Metafisica delle equazioni* (1817).
7. *Particulares methodi de cubicarum equationum solutione a Cardano luci tradita* ecc.
8. *Trattato sulle figure isoperimetre.*

Venturi. — *Giambattista Venturi*, nato nel 1746 a Bibiano, vicino a Reggio, ebbe in questa città come maestro lo Spallanzani, sotto la direzione del quale fece tanti progressi che a soli 23 anni ebbe la cattedra di metafisica e geometria in quel seminario; nel 1773 passò a Modena in qualità di professore di filosofia. Nel 1796 andò a Parigi con una missione politica. Morì a Reggio il 10 settembre 1822. Sono tuttora ricordati con onore come importanti lavori storici:

1. *Commentari sopra la storia e la teoria dell'ottica* (Bologna, 1814; ivi *Il Traguardo* di Erone).

2. *Memorie e lettere inedite di Galileo Galilei* (Modena, 1818).

3. *Saggio sulle opere fisico-matematiche di Leonardo da Vinci* (Parigi, 1797, recentemente ristampato per cura di M. Cermenati, come lo scritto che inizia gli studî di Leonardo come scienziato).

Libri [1]). — *Guglielmo Bruto Icilio Timoleone Libri-Carucci dei conti della Somaglia* nacque a Firenze il 2 gennaio 1803 e morì nella villa Vannini, ora Facelli, presso Fiesole, il 28 settembre 1869. Fece gli studî secondari in Firenze e quelli universitari in Pisa. Nel 1820 pubblicò la sua prima *Memoria di matematiche*, che richiamò anche l'attenzione del Cauchy. A venti anni il Libri fu nominato professore di fisica matematica (1823) nell' Università di Pisa; ma dopo un anno cadde gravemente malato, e perciò fu costretto di rinunciare alla cattedra; ma il Granduca di Toscana, che l'onorava di una stima particolare, lo nominò professore emerito, con stipendio della stessa Università. Ritiratosi dall' insegnamento, il Libri continuò con maggior lena a studiare matematiche e nel 1824 pubblicò nel *Recueil des savants étrangers* due memorie, che furono molto lodate dal Fourier. Nel 1825 il Libri si recò per la prima volta a Parigi, ove fu accolto con gran deferenza dagli scienziati e dall'alta società, riconoscendo in lui il matematico insigne, il valente letterato e il filosofo erudito. Fu bibliografo profondo; e tanto era la sua passione per i libri ed i codici antichi, che spendeva somme ingenti per farne acquisto; ed era invaso da una specie di biblio-

[1]) Vedi: *Biographisch-Literarisches Bandewörterbuch...*, di G. POGGENDORFF, vol. I; e la biografia sul *Libri* del prof. ANDREA STIATTESI (1879), G. LORIA, *Guglielmo Libri come storico della scienza* (*Atti della Soc. ligustica d. sc. nat. e geog.*, t. XXVIII, 1918).

mania, che talvolta lo rendeva persino ridicolo. Sin dal 1829 aveva incominciato ad occuparsi della storia delle scienze nel medioevo ed aveva fatto uno studio particolare sui manoscritti di Leonardo da Vinci. Ritornò poi in Toscana, risoluto di prendere parte a tutti i movimenti politici, che avevano per iscopo di liberare l' Italia dai vecchi governi; ma fu cacciato da Firenze e dalla Toscana tutta, e gli furono confiscati i beni; si rifugiò a Modena; ma vedendo che i tentativi della rivoluzione fallivano, ritornò a Parigi, ove nel 1833 si fece cittadino francese, e nello stesso anno fu nominato Membro dell'Accademia dell' Istituto delle scienze di Francia al posto di Legendre; e dalla Facoltà delle scienze fu nominato professore di calcolo delle probabilità; poi al Collegio di Francia supplì gratuitamente il Lacroix. Nemico acerrimo dei gesuiti, italiano in Francia, circondato da tanti onori, il Libri fu ben tosto oggetto di immensa invidia e di una guerra sorda ed implacabile; ma di carattere vivace e di animo battagliero il Libri tenne sempre testa ai suoi nemici; intanto però la loro cerchia si allargava: egli aveva nemici fra gli scienziati, nemici fra gli eruditi ed i devoti; ed infine si creò anche nemici politici. Fra le altre cariche il Libri fu nominato segretario e membro della Commissione, chiamata dal Villemain, per redigere un catalogo dei manoscritti esistenti nelle biblioteche di Francia; a causa di questa carica, pel suo poco tatto, si inimicò tutti i componenti dell' « École des chartes ». Come sopra si è detto, il Libri era un grande amatore di libri e di manoscritti antichi, onde egli si era formato una ricchissima biblioteca di 30 mila volumi e 2 mila manoscritti, la quale era stata valutata 700 mila lire; e si sa che molti libri rari e codici furono da lui regalati alla Biblioteca Mazarino di Parigi e ad altre Biblioteche di Francia. I suoi nemici, tra questi il più accanito era il suo antico amico Francesco Arago, andarono sempre aumentando di numero e di livore tanto che una terribile macchina infernale fu montata a suo danno: fu accusato con lettere anonime di avere rubato dalle diverse Biblioteche di Francia, che era stato incaricato d' ispezionare, libri rari e codici preziosissimi per un valore di oltre 500 mila franchi. A questa accusa il Libri, e questo fu il suo imperdonabile torto, rispose colla fuga, riparando a

Londra. Il 22 giugno 1850 fu condannato *in contumacia* a dieci anni di reclusione ed alle spese, liquidate in L. 9224,75. Io ho letto su questo increscioso affare i seguenti lavori:

1. *Lettres à M. Hatton, juge d'instruction, au sujet de l'incroyable accusation intentée contre M. Libri, contenant des curieux détails sur toute cette affaire*, par M. Paul Lacroix (bibliofile Jacob) (Paris, 1849).

2. *Une lettre inédite de Montaigne etc.*, par Achille Jubinal (Parigi, 1850).

3. *Mémoire sur la persécution qui on fait soufrir en France à M. Libri*, par M. Ranieri Lamporecchi ecc. (Londra, 1850).

4. *Lettre de M. Libri au president de l'Institut de France* (Londra, 1850).

5. *Le procès de M. Libri*, par Prosper Mérimée (*Revue des deux mondes*, tomo XIV, 1852).

6. L'opera citata del cav. Andrea Stiattesi.

Dopo questa lettura mi sono convinto, che se il Libri non si fosse reso contumace, avrebbe senza dubbio trionfato, poichè la verità si sarebbe fatta strada, specialmente innanzi a certe accuse, che facilmente si potevano combattere. È d'uopo riconoscere che non solo l'Italia, ma anche tutta Europa erano schierate dalla parte del Libri, e che anche una parte della Francia sosteneva il Libri, come attestano tutte le pubblicazioni citate più sopra. Volendo però essere imparziali rimandiamo il lettore alla *Revue des deux mondes* (tomo 137, 15 septembre 1896), ove a p. 278 havvi un articolo di J. Bertrand intitolato *Souvenirs académiques. Un article anonyme de la «Revue des deux mondes»*; nel quale il valente matematico francese fa una critica acerba di una lettera del Libri *Sur l'état des sciences en France*; e si studia di fare apparire questo matematico italiano sotto una fosca e sinistra luce: pel Bertrand come matematico il Libri è una nullità; come uomo è un ingrato ed uno scroccone; infine il Libri è stato un ladro in Italia ed in Francia; ma però il Bertrand nulla dimostra, nulla prova; asserisce solamente. Ricorderemo infine, ad onore del Libri, che egli era uomo di gran cuore, caritatevolissimo e disinteressato; di principî sinceramente liberali ed un gran patriota. Nel 1831 fu il Libri, che colla parola e col suo coraggio, impedì ai rivoluzionari di far fuoco contro le Tuilleries e altri monumenti di Parigi.

Il Libri oltre essere valente matematico, era anche un profondo cultore della storia di questa scienza; la sua *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, in 4 volumi (Parigi, 1837), è un'opera classica (sgraziatamente incompleta), che può essere utilmente studiata anche oggidì. Inoltre il Libri ha lasciato molte note e memorie di matematica, di cui qui diamo l'elenco:

1. *Mémoire sur la théorie de nombres* (Firenze, 1820).
2. *Memorie di matematica e di fisica* (Pisa, 1827).
3. *Sur divers points d'analyse* (1824).
4. *Risolution génerale de l'equation indeterminée du 1er degré à deux inconnues* (1825-26).
5. *Note sur les valeurs de la fonction* 0^{∞} (1830).
6. *Extrait d'une Mémoire d'analyse* (1830).
7. *Mémoire sur quelques formules génerales d'analyse* (1831).
8. *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1831).
9. *Mémoire sur la théorie de nombres* (1832).
10. *Mémoire sur la résolution de quelques équations indeterminées* (1832).
11. *Mémoire sur la risolution des équations indeterminées a l'aide des series* (1832).
12. *Mémoire sur la résolution des équations algebriques, dont les racines ont entre elles un rapport donnée, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires, dont les intégrales particulières peuvent s'exprimer les unes par les autres* (1831).
13. *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1833).
14. *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences de tous les ordres* (1834).
15. *Mémoire sur les intégrales definies aux différences de tous ordres* (1834).
16. *Rémarques à l'occasion d'un mémoire de M. Chasles, concernant quelques points de l'histoire de l'algèbre* (1841).
17. *Mémoire sur l'emploi des fonctions discontinues dans l'analyse, pour la recherche des formules générales* (1852).
18. *Mémoire sur la résolution d'une classe d'equations numeriques* (1843).

19. *Réponse à la note insérée par M. Liouville dans les « Comptes rendus de la séance du 21 août » (relative à une question de priorité concernant la division des fonctions abeliènnes ou ultra-elliptiques* (1843).

20. *Mémoire sur les intégrales définies aux différences finies* (1834).

21. *Note sur les rapports, qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations linéaires aux différentielles et aux différences* (1876).

22. *Recherches sur la détermination approchée des racines des équations algebriques* (1837).

23. *Mémoire sur l'integration des équations linéaires aux différences du 2e ordre et des ordres supérieures à coefficients constants ou variables* (1833).

24. *Mémoire sur la théorie génerale des équations différentielles linéaires à deux variables* (1839).

25. *Note sur un théorème de M. Dirichlet* (1840).

Inoltre il Libri ha scritto qualche altro lavoro su argomenti riguardanti la fisica, di cui qui non crediamo opportuno riportare i titoli. A quelli sopra accennati possiamo aggiungere i due seguenti:

26. Molti articoli nel *Journal des Savans*, ad es. *Vie de Galilei* (1840-41).

27. *Vie de Fermat* (1835 e 1841-45).

Boncompagni [1]). — *Baldassare Boncompagni Ludovisi dei principi di Piombino* nacque in Roma il 10 maggio 1821 e vi morì il 13 aprile 1894. Studiò sotto l'abate Domenico Santucci, uomo di lettere, e sotto il professore di fisica ed astronomia abate Ignazio Calandrelli, i quali lo avviarono negli studî storici e matematici; indi studiò sotto Barnaba Tortolini, colla guida del quale potè approfondirsi nello studio delle scienze esatte, a cui si dedicò interamente, addimostrando però fino da principio una particolare propensione per le ricerche storiche, di cui diede

[1]) Vedi *Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti*, tomo 53, serie 7a, t. 6° disp. 5a, 1894-1895: *Don Baldassare Boncompagni* ecc., notizia di A. Favaro.

un primo saggio nel 1846 colla memoria *Intorno ad alcuni avanzamenti della fisica in Italia nei secoli XVI e XVII.*

Nel 1847 fu fra i trenta chiamati da papa Pio IX a comporre l'Accademia pontificia dei nuovi Lincei.

Egli non prese parte ai rivolgimenti politici, che condussero l'Italia a Roma nel 20 settembre 1870; se non aderì al nuovo Governo, mantenendosi fedele al papa, tuttavia non si tenne legato a quel partito che, specialmente ne' primi tempi, si atteggiava ostilmente ai così detti usurpatori. Non volle prender parte ai lavori della nuova Accademia, chiamata anch'essa de' Lincei, che fu fondata in Roma dal nuovo Governo; e rifiutò anche l'offerta di un seggio nel Senato del regno, fattagli da Quintino Sella.

Essendo il Boncompagni ricchissimo, fondò nel 1868 a proprie spese il *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, che dava gratis a tutte le biblioteche ed agl' istituti scientifici; e perchè poi riuscisse una tale pubblicazione perfetta, fondò anche una tipografia matematica. Di questo *Bullettino* uscirono venti grossi volumi; ne cessò la pubblicazione nel 1888. Questa importantissima e dispendiosa pubblicazione del Boncompagni rese un gran servizio alla storia delle scienze ed alla coltura matematica; in essa s' iniziò la vera ricerca e critica storica, fondata su criteri scientifici; e ben tosto il *Bullettino* del Boncompagni si acquistò gran fama in tutto il mondo scientifico.

Inoltre il Boncompagni si formò una ricchissima biblioteca matematica, forse la più ricca di Europa; possedeva 20 mila volumi e 600 manoscritti rarissimi; si dice che egli vi abbia speso non meno di 20 milioni di lire! Purtroppo, dopo la sua morte, un sì prezioso tesoro scientifico andò disperso.

Il principe Boncompagni, oltre essere un valentissimo bibliografo e cultore della storia delle scienze matematiche e fisiche, si occupava anche di analisi, come lo provano alcune sue pubblicazioni su questo ramo delle matematiche. Il Boncompagni era di animo mitissimo; semplice ne' modi e non curante delle forme esteriori, tanto che era troppo negletto nel vestire, non addicentesi certo alla sua alta posizione sociale; ma egli teneva più all'abito scientifico ed ai suoi diletti studî, che alle apparenze esteriori; era caritatevolissimo; e davvero questo mecenate moderno ha saputo spendere ben saggiamente le sue ricchezze.

Crediamo fare cosa utile dando qui l'elenco dei suoi principali lavori:

1. *Scritti di Leonardo Pisano* (Firenze, 1857 e 1862).
2. *Algorithmi de numero Indorum* (Roma, 1857).
3. *Ioannis Hispalensis liber algorismi* (Roma, 1857).
4. *Scritti inediti di Pietro Cossali* (Roma, 1859).
5. *Un'opera di M. Steinschneider* (Roma, 1858).
6. *Due pubblicazioni di E. Narducci* (Roma, 1858).
7. *Alcune pubblicazioni di F. Woepcke* (Roma, 1858).
8. *Un'opera di Ristoro d'Arezzo, pubblicata da E. Narducci* (1859).
9. *Lettere inedite di Lagrange e di L. Eulero* (Pietroburgo, 1878).
10. *Deux lettres inédites di I. L. Lagrange* (Berlin, 1878).
11. *Lettera inedita di L. Lagrangia* (Firenze, 1879).
12. *Lettera di C. F. Gauss a Sofia Germain* (Firenze, 1879).
13. *Cinq lettres de S. Germain à C. F. Gauss* (Berlin, 1880).
14. *Di alcune lettere di E. Torricelli del P. M. Mersenne e di Fr. du Verdus* (1874). (Vedi *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche*).
15. *La parola «cumulo» usata da Francesco Dal Sole in senso di mille milioni* (1874) (Idem).
16. *Il «tractactus de abaco» di Gerlando* (1877) (Idem).
17. *Due lettere di Benedetto Castelli a Ferdinando Cesarini* (1878) (Idem).
18. *Vite inedite di tre matematici (Giovanni Dank di Sassonia, Giovanni de Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro), scritte da Bernardino Baldi. Appendice di documenti inediti relativi a Fra L. Pacioli* (1879) (Idem).
19. *Michele Chasles.*
20. *Trattato di aritmetica di P. D. Smeraldo Borghetti* (1880) (Idem).
21. *Scritto inedito di Adelardo di Bath, intitolato: «Regulæ abaci»* (1881) (Idem).
22. Nella *Collect. mat.* del Beltrami e Cremona, per onorare la memoria di Domenico Chelini, il Boncompagni pubblicò: *Intorno ad un testamento di Nicolò Tartaglia* (1881).
23. *Biografia del matematico Giuseppe Calandrelli* (1840) (*Giornale arcadico*).
24. *Biografia dell'astronomo Andrea Conti* (1840) (Idem).
25. *Avanzamenti della fisica in Italia nei secoli XVI e XVII* (1846) (Idem).
26. *Vita ed opere di Guido Bonatti* (1851).
27. *Vita ed opere di Gherardo Cremonese del secolo XVII* (*Atti dei Lincei*).
28. *Vita ed opere di Gherardo da Sabbionetta del sec. XIII* (1851) (Idem).
29. *Vita ed opere di Leonardo Pisano matematico del secolo XII* (1851-52) (Idem).
30. *Bibliografia degli scritti di F. Woepcke* (1856) (Idem).
31. *Intorno ad un trattato di aritmetica stampato nel 1478* (1862-63) (Idem).
32. *Documento inedito relativo a Nicolò Copernico* (1877) (Idem).

A questi lavori si possono aggiungere i seguenti:

33. *Una proprietà dei numeri dispari* (1855).
34. *Somma di 4 potenze di numeri naturali* (1876).
35. *Recherches sur les intégrales définies* (1843) (*Journal de Crelle*).
36. *Note historique sur une formule de Leibniz relatifs à* $\int u.\, dz$ (1868) (*Les Mondes*).
37. *Intorno alla risoluzione delle equazioni simultanee* $x^2 + h = y^2$, $x - h^2 = z^2$ (1855) (*Annali* del Tortolini).

Riccardi [1]. — *Pietro Riccardi* nacque il 4 maggio nel 1828 a Modena e vi morì il 30 settembre 1898. Nel 1848 si laureò in matematica a Bologna e fu nominato nell'anno stesso luogotenente nel corpo del genio; nel 1851 si laureò ingegnere architetto ed idraulico; nel 1859 fu nominato professore di geodesia

---

[1] Vedi POGGENDORFF, op. cit., vol. III, e la Necrologia *Pietro Riccardi*, di D. PANTANELLI nel *Bullettino di bibliografia e storia delle matematiche*, anno II, 1899.

nella Università di Modena; nel 1873 professore di geometria pratica nell' Istituto tecnico della stessa città; e nel 1787, professore della stessa materia nella scuola degli ingegneri di Bologna; si ritirò dall' insegnamento nel 1888. Fu membro delle Accademie di Modena, di Padova e di Bologna, e di quella di Modena fu anche presidente; dal 1859 in poi fu sempre consigliere comunale e provinciale della sua città nativa.

Dal padre, che era professore di matematiche nella Università di Modena, il Riccardi ereditò una ricca biblioteca, che fu la base fondamentale di tutti i suoi lavori bibliografici.

Fra questi il principale è la *Biblioteca matematica italiana* estesa a tutto il secolo XVIII, cui dedicò ben cinque lustri di studî indefessi. Essa comprende le indicazioni, seguite il più delle volte da brevi e chiari commenti, di 8083 opere di 2310 autori; questo lavoro è interessantissimo e per la mole e per la grande accuratezza, con cui è stato compilato.

Un altro lavoro importante e per mole e pel contenuto è la *Storia della geodesia in Italia* che fu iniziato nel 1865, e condotto a termine nel 1889. Questa storia è generale dai primi documenti storici a tutto il XVIII secolo, limitata alla geodesia elementare nel secolo XIX; essa può essere letta con piacere, essendo anche scritta in uno stile severo e castigato.

Pietro Riccardi deve essere annoverato fra i più benemeriti scrittori di bibliografia e di storia delle matematiche; ed i suoi lavori di certo hanno reso un gran servigio alla storia ed alle scienze matematiche.

Ecco l'elenco dei principali:

1. *Lettera al principe Boncompagni* (Modena, 1869).
2. *Bibliografia galileiana* (1872).
3. *Lettere inedite di A. Volta* (1876).
4. *Notizia della vita e delle opere di Pietro Abati Marescotti* (1879).
5. *Biblioteca matematica italiana, dalle origini della stampa ai primi anni del secolo XIX*, in 3 volumi (1870, 1880, 1891).
6. *Cenni sulla storia della geodesia in Italia, dalle prime epoche fino oltre alla metà del secolo XIX* (1879, 1882 e 1883).
7. *Commemorazione di Michele Chasles* (1881).

8. *Un opuscolo di F. Dal-Sole* (1877). (*Bullettino bibliografico* del Boncompagni).
9. *Nuovi materiali per la storia delle matematiche della Università di Bologna* (1879) (Idem).
10. *Alcune rare edizioni di opere astronomiche di Francesco Capuano di Manfredonia* (Accademia di Modena).
11. *Recenti memorie sul processo di Galileo*, documenti (1874).
12. *Le opere di A. Volta* (1877).
13. *Note statistiche di storia matematica* (1880).
14. *Indicazione di alcune opere di matematici modenesi* (1882).
15. *Almanacchi astrologici del secolo XVIII* (1885).
16. *Le prime edizioni degli «Elementi di Euclide»* (1886).
17. *Note di bibliografia matematica* (1886).
18. *Saggio di una bibliografia Euclidea* (1887-90).
19. *Di alcune opere di prospettiva di autori italiani, omesse nella «Histoire de la perspective» di M. Poudra* (1889).
20. *Saggio di una biblioteca matematica italiana del secolo XIX* (1890).
21. *Contributo degli Italiani alla storia delle scienze matematiche pure ed applicate* (1877).
22. *Alcune lettere di Lagrange, di Laplace e di Lacroix dirette al matematico Pietro Paoli, e sette lettere del Paoli al prof. Paolo Ruffini* (1877).

Chi desiderasse conoscere l'elenco completo delle opere del Riccardi può consultare il *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, di G. Loria, anno II, 1899.

Favaro. — *Antonio Favaro* nacque a Padova il 21 maggio del 1847 da nobile famiglia. Compiuti nel 1865 gli studî secondari nella città natale, per consiglio del noto poeta Giacomo Zanella, si inscrisse in quella Facoltà matematica, donde poi passò alla Scuola d'applicazione degli Ingegneri di Torino, ove, nel 1869, conseguì il diploma d' ingegnere. Fu subito nominato dal Turazza proprio assistente (cattedra di meccanica razionale) e durante l'assenza del titolare lo sostituì nell' insegnamento. Nel 1872 fu nominato professore straordinario di statica grafica, disciplina in cui ottenne l' ordinariato dieci anni dopo, e sulla quale scrisse una trattazione metodica che fu altamente apprezzata dai competenti, come prova la traduzione francese di cui fu onorata. Durante quattro anni, quando il Minich si ritirò dall' insegnamento, fece per incarico il corso di calcolo infinitesimale, iniziando in pari tempo un corso libero sulla storia della matematica. Attratto dalle ricerche storiche, si occupò delle vicissitudini subite dal patrio Ateneo e così fu tratto ad occuparsi del tema che doveva assorbire la massima parte della sua attività: Galileo Galilei. Essendosi convinto che questo sommo scienziato era più nominato che effettivamente conosciuto, si fece promotore di una edizione nazionale critica, veramente completa delle sue opere; ed ebbe la soddisfazione di poter dare in luce, nel ventennio 1890-1909 i venti splendidi volumi che la formano. Colpito dalla legge sui limiti d'età allo spirare dell'anno 1921-22, tutto lasciava sperare che egli potesse dedicare alla storia delle scienze molti anni di feconda attività; invece un insulto apoplettico lo spense pochi mesi dopo il suo ritiro dalla cattedra (29 settembre 1922).

Sotto il titolo *Quarant'anni di studi galileiani* il Favaro nel 1915 ha reso conto delle vaste ricerche da lui compiute per illustrare l'opera e l'ambiente in cui visse il celebre fisico fiorentino. Dopo la sua morte, per cura del figlio, fu pubblicato, negli *Atti dell'Istituto Veneto* un Elenco completo delle sue pubblicazioni: ad esso rimandiamo i nostri lettori desiderosi di complete informazioni al riguardo. Limitiamoci, per deficienza di spazio, a ricordare le serie di Note o Memorie intitolate *Amici e corrispondenti di Galileo*, *Scampoli galileiani*, *Oppositori di Galileo*.

Errerebbe però chi credesse che il Favaro siasi occupato esclusivamente del creatore del metodo sperimentale; infatti numerosi sono i lavori da lui dedicati alla storia dell' Università di Padova e negli ultimi anni della sua vita volse precipuamente la propria attenzione a Leonardo da Vinci, portando così un contributo di somma importanza ai lavori preparatori dell'edizione completa dei manoscritti del pittore della « Gioconda ».

Le numerose distinzioni cavalleresche e accademiche conferite al Favaro, sono attestazioni della considerazione altissima di cui egli godeva.

(G. L.).

AGGIUNTA.

Klein. — *Felice Klein*, nacque a Düsseldorf il 25 aprile 1849. Compiuti nella sua città natale, nell'autunno 1865, gli studî secondari s'inscrisse come studente nell' Università di Bonn, ove allora la personalità più eminente era il Plücker, che vi insegnava sino dal 1836: e appunto del Plücker divenne assistente a partire dal secondo semestre della sua carriera universitaria. Ma tale collaborazione ebbe breve durata, essendo stata troncata dalla morte dell'eminente fisico-matematico tedesco, avvenuta nel 1868. Durante il periodo di assistentato il Klein fu posto al corrente delle idee che dovevano sfociare nella geometria della retta nello spazio e alla morte del suo maestro ebbe l' incarico di ultimare e presiedere alla stampa della celebre *Neue Geometrie des Raumes*, che può dirsi il testamento scientifico del Plücker. Alla stessa diramazione della matematica appartiene la dissertazione con cui egli, il 12 dicembre 1868, ottenne la dignità dottorale.

Per proseguire i propri studi il Klein passò poi a Gottinga, attrattovi dalla fama del Clebsch, poi a Berlino, ove allora brillavano Weierstrass e Kummer, e a Parigi con S. Lie. In quest' ultima città egli fu sorpreso dallo scoppio della guerra franco-prussiana, che lo costrinse a rimpatriare frettolosamente.

Le pubblicazioni da lui fatte nei primi volumi dei *Mathematische Annalen* destarono l'ammirazione del Clebsch e appunto al suggerimento di questo eminente scienziato devesi se il Klein, poco più che ventitreenne, fu chiamato all' Università di Erlangen in qualità di professore ordinario: gli è esordendo in tale qualità che egli lesse quelle *Considerazioni comparate sui vari indirizzi della ricerca geometrica*, che è uno dei più giustamente famosi elementi dell'odierna letteratura matematica.

Nel 1875 il Klein lasciò l' Università Erlangen per il Politecnico di Monaco, donde nel 1880 passò all' Università di Lipsia, per poi raggiungere nel 1886 l' Università di Gottinga, ove era destinato a rimanere sino al termine della sua laboriosa esistenza (22 giugno 1925)[1].

Numerosi ed importanti sono gli scritti matematici di Felice Klein; se noi ci dispensiamo dal riferirne qui l'elenco, gli è che a lui fu dato di presiedere alla loro ristampa, in tre volumi[2]) che i matematici di tutto il mondo hanno salutati con unanime plauso.

Fu professore impareggiabile, e le sue lezioni si diffusero in tutto il mondo per mezzo della litografia; devoti discepoli si sono impegnati di curarne la stampa, soddisfacendo così il voto dell'illustre estinto, che occupò gli ultimi mesi della sua vita a dare forma definitiva alla sua celebre *Elementarmathematik von einem höheren Standpukt aus.*

Dotato di grande attività e di multiforme coltura, promosse importanti riforme nella istruzione matematica della sua patria (basti ricordare l' introduzione del calcolo infinitesimale nell' insegnamento medio).

Lo spirito filosofico e l'indole organizzatrice di cui era ricco, lo posero a capo di numerose opere collettive: ricordiamo infatti la grande *Enciclopedia* delle quattro Accademie, le pubblicazioni della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico e l'opera d' insieme intitolata *Die Kultur der Gegenwart.*

L' influenza benefica da lui esercitata sullo sviluppo della scienza e dell' insegnamento è di tale entità che essa continuerà anche dopo la sua morte per opera di ammiratori entusiasti.

(G. L.).

---

1) Avvenuta durante la stampa del presente volume.

2) *Gesammelte mathematische Abhandlungen* (Berlin, Springer, 1921-23).

INDICE ALFABETICO DEI NOMI.

Avvertenza. — I numeri in corsivo segnalano i passi più importanti relativi a un dato Autore.

A

B

C

D

CORREZIONI.

Pag	21 nota,	*invece di*	Boutronn	*leggasi*	Boutroux
»	163 l. ultima	» »	Tisserard	»	Tisserand
»	195 l. 4	» »	Neffiton	»	Newton
»	298 nota	» »	Cappelli	»	Capelli
»	377 l. 4 dal basso	» »	Fuerbach	»	Feuerbach
»	379 l. 32	» »	Tschirnauss	»	Tschirnhausen