RACCOLTA
DI TEORIE DIVERSE

Esposte sotto l' enunciazione di quei Problemi che son dati a risolvere nelle Lezioni di Matematiche dell' Ab. Marie

DEL

CAV. SAMMARTINO

Tomo I.

CATANIA 1808.

NELLE STAMPE DEL BISAGNI

CON *APPROVAZIONE*.

AL SIGNOR

D. VINCENZO PATERNÒ CASTELLO

DUCA DI CARCACI EC. EC.

SIGNORE

I *Tratti replicati delle vostre Virtù vi han dato un dritto, o Signore, alla pubblica riconoscenza. In Voi Catania mia Patria ha un esempio continuo di beneficenza e giustizia: in Voi l' indigenza trova una mano che la solleva e soccorre.*

Nel presentarvi adunque questo mio assai tenue ed imperfetto lavoro, io intendo manifestare, o Signore, quei sentimenti di gratitudine, che ogni Cittadino sensibile dee all' uomo giusto e virtuoso. Accettatelo intanto Voi, qualunque esso sia: ed accettatelo solo in tributo di ciocchè vi si dee per giustizia. Mettetelo sotto la protezione del Nome vostro onde sostenere, nò co' titoli dell' umana grandezza, di cui siete abbastanza ricolmo, ma co' caratteri più imponenti della vera virtù, quello dell' Autore. E credetemi qual io mi dichiaro con ogni ossequio

Signore

Catania a 5. Settemb. 1806.

Devotiss. Obb. servidore
Agatino Sammartino

AVVERTIMENTO

Cinque edizioni che nel corto periodo di circa vent' anni si son fatte nella sola Firenze delle lezioni elementari di Matematiche dell' Ab. Marie ne formano senza contrasto l' elogio il più compiuto e perfetto. In queste lezioni si trovano alla fine di ogni trattato proposti a risolvere de' problemi onde servire, dicono gli editori Fiorentini, di esercizio agli studiosi, e di compimento a quelle teorie, che la picciolezza del volume non ne permise loro il dettaglio. Il libro che comparisce alla luce non promette a primo aspetto che la soluzione di questi problemi: ma esso non è in fondo però che un supplemento a queste lezioni, ed una raccolta insieme di teorie diverse sulle matematiche pure.

Sotto l' enunciazione in effetto di tali problemi si trovano esposte le teorie principali le teorie più sublimi le più che interessano questa parte delle Matematiche: teorie trattate in maniera, che formando de' saggi completi più o meno estesi secondo la grandezza del soggetto,

supplisca no nel tempo stesso al difetto delle lezioni che io ho preso di mira, ed a cui nelle citazioni occorrenti io mi rapporto: teorie che tutte conchiudo con applicarle al caso dell'enunciazioni che vi han dato argomento: teorie finalmente, per vederne la cui specie io rimetto il lettore alla tavola delle materie, ed alle pagine dell' intiera raccolta per più da vicino conoscerne l' individual contenuto.

Le teorie, cui le ventisei enunciazioni proposte sulle due parti del Calcolo differenziale avrebbero dato principio, è che doveano chiudere questo mio qualunque siasi libro. Ma siccome questo calcolo ha oggi sofferto fra le mani del nostro immortale Lagrange de' cambiamenti radicali e notabili, di cui non si parla nelle lezioni che abbiamo di mira a supplire; così avrei creduto mancare all' esattezza, ed al compimento del piano, non venendo ad esporre questi cambiamenti, che tanto interessano. Tale fu la ragione, che determinato mi avea di finirlo in un opuscolo sull' analisi derivata, onde abbracciarne la parte, che con esse ha relazione e rapporto. Ma riflettendo, che questo Opuscolo

non potea essere sì limitato e finito, e che avrebbe perciò troppo ingrandito il presente Volume; che le nuove teorie non avrebbero potuto esservi a perfezione trattate; e che supplendo alle mancanze delle lezioni, la gioventù mai avrebbe avuto con esso un corso regolato ed uniforme su questa parte di analisi, onde sperarne de' pronti e felici successi: fece che io ne avessi il materiale impiegato in un corso di Analisi sublime su di cui stò lavorando, e che avrà per titolo: *Lezioni sulla derivazione diretta ed inversa delle funzioni Analitiche, ossia Corso ragionato di Calcolo differenziale e integrale*: corso che sarà concepito in maniera che servendo di compimento e dilucidazione a quello delle lezioni, e così supplendo al mancante in questo mio libro, formasse insieme un trattato tutto a se indipendente su quella parte di Analisi.

Accolga adunque per ora la gioventù studiosa il presente Volume, che da circa due anni le avrei dedicato, se la difficoltà di quì oggi stampare queste materie non me lo avesse impedito, ed aspetti al più presto che le circostanze

mie permetteranno, ciocchè le ho promesso e avvisato.

N. B. Le citazioni precedute dalla lettera *l* chiamano alla quarta Edizione Fiorentina delle lezioni: Quelle isolate, e sole citano a questo libro.

Colla frase poi *Autore delle lezioni* io intendo indistintamente indicare tanto l'Autore Originale, che gli Editori Fiorentini; ignorando ciocchè all'uno e ciocchè agli altri appartiene.

Teorie esposte sotto l'enunciazione de' Problemi delle Lezioni proposti al fine dell' Algebra.

PROB. 1.

Come dimostrerete che il comun divisore trovato colla regola data (56.) è un massimo?

1. LA regola onde trovare il massimo comun divisore di un dato rotto consiste nel dividerne il termine più grande pel più piccolo: quindi per l' avanzo che se ne è avuto: quindi questo avanzo pel nuovo avanzo, e così in appresso fino all' avanzo = o. L' avanzo precedente al zero è il cercato massimo comun divisore.

Se ricorriamo a quanto si dice (55) resteremo tosto convinti che il progresso di questa regola non è che l' operazione onde sviluppare in continuo il dato rotto ordinario. Possiamo adunque ripetere da questo numero la propostaci dimostrazione.

In effetto sia $\frac{B}{A}$ il rotto proposto, e f assunta (56) la tavola.

$$B = Al + r$$
$$A = rl' + r'$$
$$r = r'l'' + r''$$
$$r' = r''l''' + r'''$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$r^{(n-2)} = r^{(n-1)}\, l^{(n)} + r^{(n)}$$

delle parti onde si effettua quell' evoluzione, e perciò di quelle che si hanno nel progresso della regola in questione. Mettiamo quindi nel valore di B ed A successivamente quei di A, r, r', r'', ... $r^{(n-2)}$, e di r, r', r'' ... $r^{(n-1)}$, e ne avremo le due tavole seguenti.

Tav. de' valori di B.

$$B = Al + r$$
$$B = r(ll' + 1) + r'l$$
$$B = r'((ll' + 1)l'' + l) + r'(ll' + 1)$$
$$B = r''((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1) + r'''((ll' + 1)l'' + l)$$
$$B = r'''(((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1)l^{IV} + (ll' + 1(l'' + l)$$
$$+ r^{IV}((ll' \pm 1)l'' \pm l)l''' \pm ll' \pm 1)$$
$$B = \text{ec.}$$

Ovvero (50)

$$B = AM + r$$
$$B = rM' + r'M$$
$$B = r'M'' + r''M'$$
$$B = r''M''' + r'''M''$$
$$B = r'''M^{IV} + r^{IV}M'''$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$B = r^{(n-1)}M^{(n)} + r^{(n)}M^{(n-1)}$$

Tav. de' valori di A

$$A = rl' + r'$$
$$A = r'(l'l'' + 1) + r''l$$
$$A = r''((l'l'' + 1)l''' + l') + r'''(l'l'' + 1)$$
$$A = r'''((l'l'' + 1)l''' + l')l^{IV} + l'l'' + 1) + \ldots$$
$$r^{IV}((l'l'' + 1)l''' + l')$$
$$A = \text{ec.}$$

Ovvero (50)

$$A = A$$
$$A = rN' + r'N$$
$$A = rN'' + r''N'$$
$$A = r''N''' + r'''N''$$
$$A = r'''N^{IV} + r^{IV}N'''$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A = r^{(n-1)}N^{(n)} + r^{(n)}N^{(n-1)}$$

Quindi prendendo da queste tavole l' espressioni omogenee, cioè le date negli stessi residui si avrà in generale $\frac{B}{A} = \frac{r^{(n-1)}M^{(n)} + r^{(n)}M^{(n-1)}}{r^{(n-1)}N^{(n)} + r^{(n)}N^{(n-1)}}$ da cui supposto che $r^{(n)}$ risult i $= 0$, se ne ha $\frac{B}{A} = -\frac{M^{(n)}}{N^{(n)}}$. Questa espressione del rotto proposto è quella che mi dà l'argomento a conchiudere che il residuo $r^{(n-1)}$ precedente all' $= 0$ è divisore tanto del numeratore, che del denominatore, e che ne è ancora il massimo per essere (52.2.) $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ primi tra loro.

Noi abbiamo supposto improprio il rotto Proposto: se fosse però un rotto proprio la dimostrazione sempre avrebbe il suo luogo, perchè non si avrebbe che a supporre soltanto $l = 0$. Di ciò sene potrà col fatto convincere operando nel modo stesso sulla seconda tavola del citato numero (56)

PROB. 2.

Dimostrare le Regole date a' numeri (l.78 79.83.)

2. LE Regole enunciate non si versano che sul modo di compendiare le operazioni molto lunghe della moltiplicazione e divisione de' decimali quando si vuole nel risultato una certa approssimazione. Noi andiamo a dimostrare queste due regole nella maniera la più generale, che ci sarà possibile. Ci dispensiamo di enunciarle per ora; e ciò perchè lo faremo nel progresso della dimostrazione.

3. Incomincio dalla moltiplicazione, e prendo a tale oggetto le formole (A), (B) onde rappresentare in un modo generale due fattori qualunque, e composti comunque d'interi e decimali, ed in cui con A, B, ec. a, b, ec. intendo notare qualsisia delle cifre significative de' numeri. Quindi passando a formarne il prodotto (P) (P) osservo che nella sua formazione i termini del moltiplicatore (B) si son presi da sinistra a destra, e che se si avessero preso da destra a si-

[redacted]

Tavola pe' num. 3 ...

$$(A)\ldots A10^m+B10^{m-1}+C10^{m-2}+D10^{m-3}+\ldots G10^3+H10^2+K10+I+\frac{L}{10}+\frac{M}{10^2}+\frac{N}{10^3}+\ldots\frac{Q}{10^{m-3}}+\frac{R}{10^{m-2}}+\frac{S}{10^{m-1}}+\frac{Z}{10^m}$$

$$(B)\ldots a10^m+b10^{m-1}+c10^{m-2}+d10^{m-3}+\ldots g10^3+h10^2+k10+i+\frac{l}{10}+\frac{n}{10^2}+\frac{o}{10^3}+\ldots\frac{r}{10^{m-3}}+\frac{s}{10^{m-2}}+\frac{x}{10^{m-1}}+\frac{z}{10^m}$$

$$(P)$$

$$aA10^{2m}+aB10^{2m-1}+aC10^{2m-2}+aD10^{2m-3}\ldots+aI10^m+aL10^{m-1}+aM10^{m-2}+N10^{m-3}+\ldots aZ$$

$$\begin{array}{llllllll}
*bA & *bB & *bC\ldots & *bK & *bI & *bL & *bM & *\ldots bS+\frac{bZ}{10} \\
 & *cA & *cB\ldots & *cH & *cK & *cI & *cL & *\ldots cR*cS+\frac{cZ}{10^2} \\
 & & *dA\ldots & *dG & *dH & *dK & *dI & *\ldots dQ*dR*dS+\frac{dZ}{10^2} \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & +iA & +iB & +iC & +iD & +\ldots iI*iL*iM*iN+\ldots\frac{iZ}{10^m} \\
 & & & & *lA & *lB & *lC & *\ldots lK*lI*lL*lM*\ldots lS+\frac{lZ}{10^{m+1}} \\
 & & & & & *nA & *nB & *\ldots nH*nK*nI*nL*\ldots nR*nS+\frac{nZ}{10^{m+2}} \\
 & & & & & & *oA & *\ldots oG*oH*oK*oI*\ldots oQ*oR*oS+\frac{oZ}{10^{m+3}} \\
 & & & & & & & \ldots \\
 & & & & & & & zA+zB+zC+zD+\ldots zI+zL+zM+zN \quad \ldots+\frac{zZ}{10^{2m}}
\end{array}$$

(L'Asterisco nota la mancanza del segno +)

$$(P)$$

$$\text{I.}\quad \begin{cases}(A)\ldots A10^m+B10^{m-1}+C10^{m-2}+D10^{m-3}+\ldots G10^3+H10^2+K10+I+\frac{L}{10}+\frac{A}{10^2}+\frac{N}{10^3}\ldots+\frac{Q}{10^{m-3}}+\frac{R}{10^{m-2}}+\frac{S}{10^{m-1}}+\frac{Z}{10^m} \\ (B)\ldots\ \frac{z}{10^m}+\frac{x}{10^{m-1}}+\frac{s}{10^{m-2}}+\ldots\ \frac{o}{10^3}+\frac{n}{10^2}+\frac{l}{10}+i+k10+h10^2\ldots+d10^{m-3}+c10^{m-2}+b10^{m-1}+a10^m\end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases}(A)\ldots A10^m+B10^{m-1}+C10^{m-2}+D10^{m-3}+\ldots G10^3+H10^2+K10+I+\frac{L}{10}+\frac{M}{10^2}+\frac{N}{10^3}\ldots+\frac{Q}{10^{m-3}}+\frac{R}{10^{m-2}}+\frac{S}{10^{m-1}}+\frac{Z}{10^m} \\ (B)\ldots\ \frac{z}{10^m}+\frac{x}{10^{m-1}}+\frac{o}{10^3}+\frac{n}{10^2}+\frac{l}{10}+i+k10\ldots+d10^{m-3}+c10^{m-2}+b10^{m-1}+a10^m\end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \begin{cases}(A)\ldots A10^m+B10^{m-1}+C10^{m-2}+D10^{m-3}+\ldots G10^3+H10^2+K10+I+\frac{L}{10}+\frac{M}{10^2}+\frac{N}{10^3}+\ldots\frac{Q}{10^{m-3}}+\frac{R}{10^{m-2}}+\frac{S}{10^{m-1}}+\frac{Z}{10^m} \\ (B)\ldots\ \frac{z}{10^m}+\frac{o}{10^3}+\frac{n}{10^2}+\frac{l}{10}+i\ldots\ d10^{m-3}+c10^{m-2}+b10^{m-1}+a10^m\end{cases}$$

nistra, cioè in ordine inverso, se ne avrebbe ottenuto non solo il medesimo risultato, ma ordinando alle potenze scendenti di 10, un risultato eziandio perfettamente identico, cioè composto delle medesime linee verticali. Questa osservazione mi permette a potere io scrivere in qualunque siasi modo questo moltiplicatore, e cercare di scriverlo ancora in maniera, che i prodotti parziali de' termini suoi con quei del moltiplicando, compresi nella stessa linea verticale del prodotto totale, abbiano una certa corrispondenza simetrica in tutti i casi.

4 Per poco che rifletto su questo soggetto, mi avveggo che invertendo l' ordine de' termini di (*B*), e scrivendoli in maniera sotto di (*A*) quanto quello delle unità vi corrisponda successivamente sotto quello de' decimi de' centesimi de' millesimi ec., scrivendo successivamente cioè i due fattori nel modo che si veggono inseriti nella tavola, ne avrò le due conclusioni seguenti.

I. La somma de' prodotti parziali di tutti i termini di (*B*) pe' corrispondenti superiori di (*A*) formano successivamente in (*P*) (*P*) la linea verticale de' decimi de' centesimi de' millesimi ec.

II. Le linee verticali di esso oltre quella de' decimi nel primo, oltre quella de' centesimi nel secondo, oltre quella de' millesimi nel terzo, ec. caso, non sono che l' aggregato de' prodotti de' termini stessi di (*B*) per quelli di (*A*) che gli restano a destra.

Quindi dico che volendo nel prodotto una certa approssimazione di decimali „ basta rovesciare l' ordine delle cifre del moltiplicatore, e „ scriverle in maniera sotto il moltiplicando quanto quella delle unità vi corrisponda sotto la indicante l' ordine decimale di „ stabilita approssimazione: basta trascurare nel „ progresso dell' operazione tutte le cifre decimali di detto moltiplicando che restano a destra di quella del moltiplicatore per cui si moltiplica: basta portare finalmente sotto l' ultima linea verticale la prima cifra di ogni nuovo prodotto parziale.

5. Questa regola generale che l' osservazione ci ha guidato a stabilire va soggetta a delle modificazioni, onde evitarne gli errori, cui ci andrebbe a portare.

Infatti la naturale confusione delle cifre

numeriche fa che la prima linea verticale omessa in (*P*) (*P*) abbia sempre parte in un certo numero delle sue ultime cifre, le quali perciò non possono che risultarne false ed erronee. Se noi però limiteremo l' approssimazione cercata ad un certo numero di più decimali, allora eviteremo l' errore indicato. Quindi non si tratta che determinare all' incirca questo numero di più decimali, onde rettificare la regola stabilita, e così avere da essa un prodotto prossimamente esatto.

6. Il valore di ciascuna linea verticale di (*P*) (*P*) dipende dal numero de' termini che la compongono, e perciò dal numero delle cifre de' due fattori: inoltre nelle linee de' decimi, de' centesimi, de' millesimi, ... degli *uesimi* in generale, questo numero di termini ci viene espresso da $2m-1$, da $2m-2$ da $2m-3$, ... da $2m-u$: Finalmente preso il limite superiore per ciascuna delle cifre di questi fattori, cioè supposte tutte $=9$, se ne avrà in $(2m-u)\,81$ l' espressione del massimo di tutti i valori di cui la linea generale u è capace. Quindi segue che dal numero delle cifre de' due fattori, e dall' ordine decimale cui

si vuol limitare il prodotto, dipende quello di più che ci abbiamo proposto di stabilire. Quindi risulta che essendo m, u tali quanto l' espressione $(2m-u)\,81$ abbia $v+1$ cifre, il numero cercato di più decimali dovrà essere $=v$, acciò non si possa commettere al più che una unità di errore nell' ultima cifra decimale del prodotto: Quindi finalmente avviene che ciò dee a forzione aver luogo per qualunque altro caso, in cui può trovarsi ciascuna cifra de' fattori in questione, e che essendo $99\ldots v+1$ il limite superiore de' numeri con $v+1$ cifre, potrà stabilirsi l' equazione indeterminata $(2m-u)\,81 = \ldots 999\ldots v+1$, onde determinare con essa il valore di m, cioè della quarta parte del numero di tutte le cifre de' fattori mercè la cognizione di u, e de' valori dati ad arbitrio ad v; si verrà io dico a determinare fino a qual numero di cifre de' due fattori avrà luogo l' assunto valore di v per l' approssimazione u.

7. Noi possiamo applicarne questa formula al caso proposto nelle lezioni, a quello cioè in cui $u=3$, $v=2$ In fatti avvertendo che nella formula $(2m-u)\,81 = 999\ldots v+1$ per u dee

Prendesi $u+v$, poichè l'approssimazione u ne richiede v di più, si avrà $2m = 17$, cioè l'approssimazione a' millesimi nel prodotto si avrà esatta con tutta sicurezza limitandola a due decimali di più, fino che il numero delle cifre de' due fattori non oltrepassa 34.

Questo numero di 34 può divenir più grande secondo che più picciole di 9 sono le cifre di essi fattori: noi ne abbiamo veduto il perchè: Questo numero ancora diviene più grande quando il numero delle cifre tantò intere che decimali non è eguale, come abbiamo supposto, ne' due fattori. Noi andiamo a vedere di ciò la ragione.

8. A tale oggetto osservo che la mancanza della sola prima cifra A, o a in uno de' due fattori non influisce sulle linee verticali, indicanti in (P) (P) le cifre decimali; che la mancanza delle sole due prime nell'uno o nell'altro diminuisce soltanto di un termine la linea de' decimi; che la mancanza delle prime tre annulla due termini nella linea dei decimi, ed un solo in quella de' centesimi; e così continuando arrivo a conchiudere che la mancanza delle prime y, t cifre ne' due fattori diminuisce ciascuno per parte sua di $\begin{matrix} y-1 \\ t-1 \end{matrix}$ il numero de' termini della linea de' decimi, di $\begin{matrix} y-2 \\ t-2 \end{matrix}$ quello della linea de' centesimi, di $\begin{matrix} y-3 \\ t-3 \end{matrix}$ quello della linea de' millesimi,..... ed in generale di $\begin{matrix} y-u \\ t-u \end{matrix}$ quello della linea degli uesimi: diminuzione che ha luogo fin quando $u < y-1$, $< t-1$.

Inoltre osservo che mancando un certo numero y' delle ultime cifre in uno de' due fattori (numero sempre $< m$, poichè si suppone che abbia de' decimali) mancherà egualmente di y' il numero de' termini di ciascuna delle linee decimali, restandone annullate quelle, in cui tal numero di termini $< y'$

9. Se chiamiamo m il numero delle cifre decimali di uno de' due fattori, avremo in $m-y'$ quello delle cifre decimali dell'altro, ed in $m-y$, in $m-t$ quelli delle loro cifre intere, ed avremo perciò in $2m-(y+t+y')$ il numero totale

delle loro cifre. Osservo poi quattro casi dipendenti dallo stato di u rapporto ad y, e t: casi che io dispongo per brevità in una tavola, cioè nella seguente

Stato di u rapp. ad y,t	Dim. della lin. $u$esima
$u < y,\ u < t$	$y + t + y' - 2u$
$u < y,\ u > t$	$y + y' - u$
$u > y,\ u < t$	$t + y' - u$
$u > y,\ u > t$	y'

num de' term. di essa	form. de' valori di essa
$2m - y - t - y' + u$	$(2m - y - t - y' + u)81 = 99..v + 1$
$2m - y - y'$	$(2m - y - y')81 = 99..v + 1$
$2m - t - y'$	$(2m - t - y')81 = 99..v + 1$
$2m - y' - u$	$(2m - y' - u)81 = 99...v + 1$

Si veda in questa tavola che i due casi intermedj sono indipendenti di u, cioè il num. de' termini della linea, cui si limita l' approssimazione non dipende dall' ordine decimale di essa. Si avverta intanto che vi si possono fare alcune riflessioni, che noi omettiamo, e ci basta sol-

tanto il prevenire che niente potrebbe con facilità pronunciarsi su di essa in generale; ma che i casi particolari applicati a quella delle quattro formule, che vi corrisponde, sarà il corso per cui potrà arrivarsi alla cognizione se ha luogo per essi l' assunto numero v di più decimali. Tanto ci basta per passare alla seconda parte di questo Problema, cioè al compendio della divisione de' decimali.

10. Io riguardo (P), (A), (B) come il dividendo divisore, e quoziente di una divisione da eseguirsi. La regola ordinaria della divisione m' insegna che essendo $2m$ le cifre del divisore, $2m$ dovranno ancora essere quelle da considerarsi nel dividendo, onde poterne incominciare l' operazione; e che quindi bisognerebbe successivamente aggiungere a' successivi residui le cifre che si son soppresse del dividendo dalla $(2m+1)$esima in poi. Questa regola è stata ridotta in compendio, onde diminuisce la fatiga ne' calcoli molto lunghi. Veggiamo in che consiste questo compendio.

11. Considerando $2m$ cifre in (P), ed ottenutane la prima a del quoziente (B) se ne avrà il residuo bA, bS, zA, bA cui bisognerebbe unirsi la

linea verticale ($2m + 1$) esima onde averne la seconda b. A tal punto io rifletto che ciascuna linea orizzontale di (P) è quella che ci dà una cifra in (B): anzi che ogni cifra di (B) si ottiene dividendo il primo termine di ciascuna linea orizzontale di (P), per quello di (A). Inoltre rifletto che l'msima cifra decimale di (B) si ottiene dall'ultimo termine zA della linea verticale di (P), che ne marca la $2m$ sima cifra. Quindi le linee verticali da questa in poi non influiscono sul valore delle m cifre decimali del quoziente (B), e perciò si possono omettere e trascurare.

12. Ma come continuare l'operazione venendo ad omettersi le cifre da queste linee rappresentate? Avuta la cifra a del quoziente, il residuo, che se ne avrà, sarà minore del divisore, e perciò come dividerlo per esso senza l'aggiunta della cifra immediata? Ecco come si viene a riparare a questo disordine, come si viene cioè a compensare nel divisore l'omissione successiva delle linee del dividendo (P)

13. La cifra b del quoziente (B) si ottiene dalla divisione del primo residuo pel divisore,

ed essa non si ripete immediatamente che dalla seconda linea orizzontale di (P): venendo a non aggiungersi a questo residuo la linea verticale della cifra immediata, si viene a trascurare in questa linea orizzontale il termine bZ, cioè il prodotto dell'ultima cifra Z del divisore (A) per la b di (B), che si cerca. Quindi oltre di aggiungere la cifra, cui questo termine appartiene, e che come abbiam veduto non influisce sul valore di b, noi possiamo omettere quest' ultima cifra Z; omissione che annullerebbe ancora tutti i primi termini delle linee verticali susseguenti, i quali non influiscono sulle m cifre decimali della nostra approssimazione.

Similmente la cifra c non si ottiene che dal secondo residuo, cui si dovrebbe aggiungere ancora la seconda linea verticale delle omesse: l'omissione di queste due linee però produce nella terza orizzontale, da cui il valore di c si ottiene, la mancanza de' termini cS, cZ; mancanza che si verrebbe similmente ad avere se oltre dell' ultima Z si venisse ancora a trascurare in (A) la penultima S.

Così continuando a sopprimere le cifre di (*A*) a misura che si dovrebbe aggiungere una linea verticale al corrispondente residuo, si arriverà in fine del calcolo per le domandate *m* decimali in (*B*), alla totale soppressione delle linee verticali di (*P*), le quali si sono separate a destra fin dal principio dell' operazione.

14. Quindi facilmente conchiudesi la regola del compendio, cioè „ si considerino nel „ dividendo tante decimali di più che nel di„ visore, quante se ne vogliono nel quoziente, „ si separino poi in esso dividendo tante cifre a „ destra quante sono quelle del divisore: si operi „ giusta la regola ordinaria fino al residuo, cui „ bisognerebbe aggiungere la prima delle cifre „ separate, onde continuare l'operazione: si se„ guiti a dividere per questo residuo, sopprimen„ do però l'ultima cifra del divisore: così per „ ogni nuovo residuo si sopprima una nuova „ cifra di esso divisore; ed arrivato a sopprimerle " tutte si separino nel quoziente a destra tante „ cifre quante se ne sono domandate "

15. Questa regola però và indispensabilmente soggetta a delle modificazioni, e ciò per le ragioni stesse per cui abbiam dovuto modificarne, quelle della moltiplica. La confusione delle cifre numeriche fa che la prima linea omessa ha sempre parte in un certo numero delle sue ultime cifre: quindi le ultime decimali del quoziente non risulterebbero esatte, poichè inesatte sarebbero le cifre da cui si ripetono: quindi fa duopo trattenerne alcune di più, cioè separarne a destra del dividendo non quanto sono quelle del divisore, m'alcune di meno. Questo minor numero di cifre che bisogna seperare nel dividendo è chiaro che dee corrispondere a quelle di più che determinammo per la moltiplica. Noi ci crediamo in dritto di dispensarci a ripetere quanto vi si disse, e lasciamo ad altri una sì facile applicazione.

PROB. 3.

Uno mi dice: la metà de' miei scudi col loro terzo e quarto gli supera di uno. Quanti scudi ho?

16. Chiamato x il numero cercato di scudi si avrà dalla condizione proposta l'equazione $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$, da cui se ne ottiene $x = 12$.

PROB. 4.

L' età a di uno è npla di quella di suo figlio; tra quanti anni sarà npla?

17. Sia x il numero degli anni a passare, onde l' età del padre divenghi *npla* di quella del figlio, e sarà in tal momento $a+x$ l' età di quello, ed $\frac{a}{m}+x$ quella di questo; quindi avremo per condizione $a+x=n(\frac{a}{m}+x)$ ed $x=\frac{a(m-n)}{m(n-1)}$

PROB. 5.

Dando 3 soldi per uno a' poveri, mi mancano 9 soldi: ma dandone 2 me ne avanzano 2 Quanti sono i soldi ed i poveri?

18. Se x è il numero de' poveri, sarà $3x-9$ e $3x+2$ quello de' soldi nelle due diverse distribuzioni, e però si avrà $3x-9=2x+2$, ed $x=11$; cioè 11 furono i poveri, e 24 i soldi a dividersi loro.

PROB. 6.

Uno avea 6 lire quando tirò il salario di 5 mesi; 2 mesi dopo avea già spese $\frac{3}{4}$ del suo denaro, ma riscosso il salario si trovò con 99 lire. Quanto avea il mese?

19. Quando chiamiamo x il salario cercato, avremo

mo $5x+6$ pel numero di lire che si trovò l'individuo in questione dopo aver riscosso il salario de' 5 mesi, $\frac{3}{4}(5x+6)$ quello che ne spese, e però $\frac{1}{4}(5x+6)$ quello che gliene sopravanzò; e $2x$ finalmente quello de' due mesi. Quindi avremo l'equazione $\frac{1}{4}(5x+6)+2x=99$: ed $x=30$ l.

PROB. 7.

Uno lascia a' nipoti 120000 lire, cioè 12000 lire a ciascun maschio, e 9000 lire a ciascuna femmina. Se avesse lasciato 9000 a' maschi, e 12000 alle femmine sarebbero avanzate 9000. Quanti sono gli uni, e le altre?

20. Io dico x i maschi, ed y le femmine; suppongo per semplicità $120000=a$, $12000=b$, $9000=c$; onde avrò dalle condizioni proposte..... $bx+cy=a$, $by+cx=a-c$. Dalla prima ho $x=\frac{a-cy}{b}$ che sostituito nella seconda mi dà $y=\frac{ab-ac-bc}{b^2-c^2}$ da cui con le opportune sostituzioni ne ottengo $y=4$, e però $x=7$; cioè 7 furono i maschi, e 4 le femmine.

PROB. 8.

C *Cacciatore promette a* B *una somma* b *per ogni scarica in pieno. Dopo un numero* n *di scariche o* C, B *nulla si debbono, o* C *deve a* B *una quantità* d, *o* B *la deve a* C. *Trovare in generale le scariche a vuoto.*

21. x essendo le scariche andate a vuoto saranno $n-x$ quelle in pieno, e però bx, $a(n-x)$ le somme che C, B si debbono scambievolmente per legge di loro convenzione. Quindi . . . .

$bx \pm d = a(n-x)$, ed $x = \frac{an \mp d}{a+b}$

PROB. 9.

Diviso un numero in m *ed in* m + 1 *parti eguali il prodotto delle une eguaglia quello delle altre. Qual' è questo numero?*

22. Il numero cercato chiamato x, sarà $\frac{x}{m}$, $\frac{x}{m+1}$ ciascuna delle m, $m+1$ parti eguali, in cui vuo esso successivamente dividersi. Quindi dovendo il prodotto di tutte le prime, e di tutte le seconde esserne per condizione l'istesso, io avrò l'equazione $\left(\frac{x}{m}\right)^m = \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}$, le quale mi dà . . . .

$x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$

PROB. 10

A *raddoppia co' suoi i denari di* B *e di* C, *quindi* B *raddoppia quelli di* A *e di* C, *e poi* C *raddoppia quelli di* A *e di* B: *cosicchè in fine ciascuno ha* 16 *lire. Quante ne aveano in principio?*

23. I numeri di x, y, z lire son quelli che suppongo aver avuto A, B, C, onde soddisfare alle condizioni proposte: Questi numeri è chiaro che dopo la prima condizione divengono $x-y-z, 2y, 2z$; dopo la seconda $2x-2y-2z, 2y-(x-y-z)-2z\ (=3y-x-z), 4z$; dopo la terza finalmente $4x-4y-4z, 6y-2x-2z, \ldots\ldots$ $4z-(2x-2y-2z)-(3y-x-z) = 7z-x-y$; numeri che dovendo per condizione essere tutti $= 16$, ci daranno le tre equazioni $x-y-z=4$, $3y-x-z=8$, $7z-x-y=16$. Trattando queste equazioni giusta alcuno de' noti metodi di eliminazione se ne otterrà $x=26$, $y=14$, $z=8$.

PROB. 11.

Con a *carte si fanno* b *monti di egual numero* c *di punti, e la prima carta di ciascun monte val* 10 *se è figura,* 11 *se è asso,* 12 *se è due ec., ma le altre carte del monte vagliono ciascuna un solo punto. Fatti i monti e rese le carte* d *avanzate,*

se ne avanzano, si chiede quanti punti x *facciono le prime carte di tutti i monti?*

Dalle condizioni proposte si rileva che bc è il numero contenuto di punti in tutti i monti; che $bc - x$ ne è quello degli stessi punti meno quello contenuto nelle prime carte; e che $bc - x + b$ ne è quello delle carte impiegate nella formazione de' monti. Dalle condizioni medesime abbiamo in $a - d$ una seconda espressione dello stesso numero di carte impiegate ne' monti. Quindi l' equazione $bc - x + b = a - d$; quindi . . $x = d + b(c + 1) - a$.

PROB. 12.

I crediti di 7. persone sommate a 6 a 6 sono 994, 1036.; 840, 910, 896, 952, 882. *Qual credito ha ciascuno?*

25. Suppongo che r, s, t, u, x, y, z sieno i crediti cercati, donde ne ho le sette equazioni.

$$r + s + t + u + x + y = 994 = a$$
$$r + s + t + u + x + z = 1036 = b$$
$$r + s + t + u + y + x = 840. = c$$
$$r + s + t + x + y + z = 910 = d$$
$$r + s + u + x + y + z = 896 = e$$
$$s + t + u + x + y + z = 952 = f$$
$$r + t + u + x + y + z = 882 = h$$

Diversi sono i metodi che si possono adoprare, onde ricavare da esse il valore particolare di ciascuna incognita. Se viene a prendersi la somma loro totale; quindi a dividersi per 6 questa somma, e finalmente a sottrarsi da questo quoziente ciascuna di esse, se ne otterranno i valori cercati.

O pure sommate a 6 a 6 queste equazioni, quindi sostratte le ultime 6 somme successivamente dalla prima e sostituiti nella prima equazione i risultati $s = r + h - f$, $t = r + h - e$, $u = r + h - d$, $x = r + h - c$, $y = r + h - b$, $z = r + h - a$, se ne avrà $r = \ldots\ldots \frac{a + b + c + d + e + f - sh}{6} = 203$; donde quelli delle altre incognite.

Mi basta di avere indicato questi due metodi particolari; e mi basta di avvertire soltanto che vi sono de' metodi generali, onde eliminare le incognite di un numero qualunque di equazioni tanto del primo che di qualunque grado. Nelle nostre lezioni non si parla de' primi, e de' secondi si fa un cenno solamente per quello dell' equazioni del secondo grado a due incognite. Chi ne sarà curioso potrà per quelli riscontrare le opere del Bezout, e vedere per questi il num. 121. di questo volume.

PROB. 13.

Quali sono i numeri x, y *la cui somma è* a *e quella de' lor cubi è* b?

26. Se dalla prima delle due equazioni $x+y=a$, $x^3+y^3=b$ di condizione, prendiamo il valor di x e lo mettiamo nella seconda, noi ne avremo . . . . . $y^2-ay=\frac{b-a^3}{3a}$: donde ne otterremo alla fine $y=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$, e però $x=\frac{a}{2}\mp\sqrt{\frac{ab-a^3}{12a}}$

PROB. 14.

Qual' è il numero r *le cui potenze* m, m+2 *prese l'una* p *e l' altra* g *volte si eguagliano?*

27. Io veggo che chiamato x il numero cercato, l'unica equazione di condizione si è $px^m=gx^{m+2}$ quale diviso per x^m ci porta al risultato $x=\pm\sqrt{\frac{p}{g}}$

PROB. 15.

Son 20 *tra uomini e donne in una locanda, e gli uni e le altre spendono* 24 *lire, ma ogni uomo spende* 5 *lire più di ogni donna quanti sono gli uni e le altre?*

28. Quando x marca il numero degli uomini, $20-x$ ne marcherà quello delle donne, ... e $\frac{24}{x}$, $\frac{24}{20-x}$ le somme pagate da ciascuno individuo. Quindi dovendo la prima di queste somme esser più grande della seconda di 1 lira si avrà l' equazione $\frac{24}{x}-1=\frac{24}{20-x}$ donde . . . . $x^2-68x=-480$, ed $x=\frac{60}{8}$. L' analisi è da se sola incapace ad indicarci qual di questi due risultati risolva l'equazione proposta. La condizione enunciata di non dover essere che 20 tra uomini e donne è quella che ne supplisce il difetto col farci escludere il risultato 60 come ad essa contrario.

PROB. 16.

Dimostrare i teoremi de' numeri (40; 2; 8; 38, III; 44; IV, V; 55; 58; 305.)

(1. 10; 2.)

29 Una potenza m di 10 diminuita di 1 è sempre un multiplo di 9.

Osservo che $10^m=(9+1)^m$, e quindi per la formula Nevvtoniana . . . . . .

$$10^m = 9^m + m9^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 9^{m-2} \ldots + 1$$

donde $\frac{10^m - 1}{9} = 9^{m-1} + m9^{m-2} + \frac{m(m-3)}{9} 9^{m-3} + \text{ec.}$

ma siccome io veggo che tutti i coefficienti del secondo membro non sono che la somma.... (l. 146. 337.) di $m-1$, $m-2$, $m-3$, $m-4$, ec. termini della serie de' numeri figurati, e però de' numeri intieri ogni volta che ve lo sarà m; così $\frac{10^m - 1}{9} = E$.

(l. 10. 3)

30. Le potenze pari o impari di 10, quelle diminuite, e queste accresciute di 1 son sempre un multiplo di 11.

L' essere $10^m = (11-1)^m$ ci dà, giusta il teorema medesimo di Newton, ...;

$$10^m = 11^m - m11^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 11^{m-2} - \ldots \pm 1$$

secondo che m è pari o impari, e quindi

$$\frac{10^m \mp 1}{11} = 11^{m-1} - m11^{m-2} + \frac{m(m-1)}{2} 11^{m-3} \text{ ec.} = E$$

(l. 38. III.)

31. Varie sono le formole, e varj teoremi compresi nel numero enunciato. Io parlerò soltanto di quelli, i quali mi sembra che meritano qualche attenzione. Io incomincio dunque a parlare sul modo di esprimere in generale i numeri primi.

Ecco che riflitto che se si eccettui il 2, tutti i numeri primi son tutti numeri impari, e che però ciascuna delle formole .....

(a).. $2m \pm$; (b).. $4m \pm 1$, (c).. $6m \pm 1$; $6m \pm 3$;

(d).. $8m \pm 1$, $8m \pm 3$, $8m \pm 5$; ec.

è egualmente propria a rappresentarli. Riflettero ancora che dalle (a), (b) si hanno i numeri primi confusi con tutti gli altri impari; che la seconda delle (c) rappresenta tutti quegli impari

multipli di 3, e perciò non abbracciando nella sua espressione che il solo primo 3, ne avviene, che tutti i primi sono compresi nell'altra $6m \pm 1$; e che finalmente le (d); ec. non solamente danno i numeri primi confusi con tutti gli altri impari come le (a), (b), ma che dovranno ancora ripetersi da più di una formula: quindi conchiudo che la formula $6m \pm 1$ è quella che fra tutte le (a), (b), (c), (d), ec. esclude il maggior numero degli impari, e comprende, eccetto il 2 ed il 3, tutti i primi, ed è perciò quella che dee prescegliersi, onde rappresentare in un modo generale tutti i numeri primi. Non credo fuori proposito l' avvertire che non ha luogo la proposizione contraria, cioè che, tutti i numeri dati dalla formula $6m \pm 1$ son tutti numeri primi.

(l. 38. III; 7.)

32. Marcando sempre con E un numero intero, noi abbiamo da' semplici principj della divisione $\frac{a}{3} = E \pm \frac{1}{3}$, e però $a = 3E \pm 1$, . . .

$a^2 = 9E^2 \pm 6E + 1$, $2a^2 + 1 = 18E^2 \pm 12E + 3$, ed infine

$\frac{2a^2+1}{3} = 6E^2 \pm 4E + 1$, quando a non è un multiplo di 3. Quindi essendo in questo caso . .

$\frac{2a^2+}{3} = E$, ne avviene che $2a^2 + 1$ sarà sempre un multiplo di 3, quando non ve lo è a. Essendo però a un multiplo di 3, e perciò $\frac{a}{3} = E$, giammai ve lo sarà $2a^2+1$, poichè.

$$\frac{2a^2+1}{3} = 6E + \frac{1}{3}$$

(l. 38. III; 9)

33. Dalla formula citata del binomio noi abbiamo

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2 + \ldots$$

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{2.\,3}a^{p-3}b^3 \ldots b^p$$ Osservo in questo sviluppo e veggo che $(a \pm b)^p - a^p - b^p = pa^{p-1}b \pm \ldots$

$\frac{p\,p-1)}{2}a^{p-2}b^2 + \ldots$, e che i coefficienti del suo secondo membro son sempre de' numeri intieri quando p è un intero; veggo inoltre che non essendo p un numero primo, e potendo essere perciò multiplo di alcuno de' fattori del denominatore, può influire a rendere intieri tali coefficienti; ma che essendo primo non può avervi influenza, e però dovrà essere in questo caso $\frac{p-1}{2} = E$, $\frac{(p-1)(p-2)}{2\;3} = E$, ec. quindi in questo caso, in cui p è un numero primo, sarà sempre $\frac{a+b^{p} - a^{p} - b^{p}}{p} = E$, cioè $(a+b)^{p} - a^{p} - b^{p}$ è sempre un multiplo di p.

(l. 38. III. 10. 11. 12)

Dimostrato il teorema precedente riesce facile dimostrare che $c^{p} - c$ è un multiplo di p quando p è un numero primo. In effetto abbiamo mercè il citato teorema nella supposizione di p nu-

ero primo, e marcando con E de' numeri intieri qualunque

$$2^{p} = (1+1)^{p} = Ep+2$$

$$3^{p} = (2+1)^{p} = Ep+2^{p}+1$$

$$4^{p} = (3+1)^{p} = Ep+3^{p}+1$$

$$5^{p} = (4+1)^{p} = Ep+4^{p}+1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$c^{p} = (c-1+1)^{p} = Ep+(c-1)^{p}+1$$

quindi mettendo il primo valore nel secondo; il secondo nel terzo; poi il terzo nel quarto; e così successivamente; si avrà in generale

$^{p} = Ep+c$, epperò $\frac{c^{p}-c}{p} = E$.

Essendo $\frac{c^{p}-c}{p} = E$ ne avviene che c o $c^{p-1}-1$ necessariamente essere un multiplo di p. Indi non essendo c un multiplo di p, ve lo

sarà sempre $c^{p-1} - 1$

Non essendo c, d de' multipli di p quando esso è un numero primo, si avranno l' equazioni $\frac{c^{p-1} - 1}{p} = E$, $\frac{d^{p-1} - 1}{p} = E$, e perciò $\frac{c^{p-1} - d^{p-1}}{p} = E$.

Quindi $c^{p-1} - d^{p-1}$ è sempre un multiplo di p un quando p è numero primo, e c, d sono primi con esso. Quindi resta dimostrato questo teorema che l' Eulero annunciò senza dimostrazione, per non esserne come egli ci avverte in possesso, nelle memorie dell' Accademia delle scienze Petropolitane (*an.* 1732. 1733. *p.* 101, *edizi. di Bologna*).

(l. 38. III; 13. 14.)

Supposti a, b, ec. de' numeri interi conosciuti, ed il polinomio $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots z$ multiplo di d quando $x = f = f' =$ ec.; dico che ve lo sarà ancora quando $x = f \pm md = f' \pm m'd$, ec. supponendo m, m', ec. de' numeri interi qualunque; dico inoltre che i valori indipendenti

di x. e capaci a rendere questo polinomio multiplo di d sono tutti compresi tra $-\frac{1}{2}d$, $+\frac{1}{2}d$

Se metto successivamente f, f', ec. nel polinomio proposto, ne avrò per condizione. . . .

$$\frac{af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} + \ldots z}{d} = E$$

$$\frac{af'^n + bf'^{n-1} + cf'^{n-2} + \ldots z}{d} = E$$

ec. ec

Se vi metto successivamente $f \pm md$, $f' \pm m'd$, ec, ne avrò ordinando alle potenze di f, f', ec. . . .

$$af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} + \ldots z + amndf^{n-1} +$$

$$\left(\frac{an(n-1)}{2} m^2 d^2 \pm b(n-1)md\right) f^{n-2} + \text{ec.}$$

$$af'^n + bf'^{n-1} + cf'^{n-2} + \ldots z + am'ndf'^{n-1} +$$

$$\left(\frac{an(n-1)}{2} m'^2 d'^2 \pm b(n-1)m'd\right) f'^{n-2} + \text{ec.}$$

ec. ec.

Ovvero

$$d(E \pm amnf^{n-1} + (\frac{an(n-1)}{2}m^2 d \pm b(n-1)m)f^{n-2} \pm \text{ec.})$$

$$d(E \pm am'nf'^{n-1} + (\frac{an(n-1)}{2}m'^2 d \pm b(n-1)m')f'^{n-2} + \text{ec})$$

ec. ec.

Quantità in tutti i casi multiple di d

Dimostrata la prima, passo alla dimostrazione della seconda proposizione. A tale oggetto io suppongo $x (= f) > \pm \frac{1}{2} d = \pm \frac{1}{2} d + i$, e ne ho $x = f \pm md = \pm \frac{1}{2} d + i \pm md$. Quindi osservo che m è indeterminata, e perciò suscettibile di quel valore che ci sarà più opportuno. Quindi determino m sotto la condizione onde risulti $f \pm md < \pm \frac{1}{2} d$, e ciò per avere tutti i valori di x tanto maggiori che minori di $\pm \frac{1}{2} d$. Quindi faccio $f \pm md = \pm \frac{1}{2} d - i'$, e ne ho l'equazione

$\pm \frac{1}{2} d + i \pm md = \pm \frac{1}{2} d - i'$, cioè ne ho $m = \frac{i + i'}{d}$. Osservando questo valore di m, mi avveggo che quantunque i, i' sono introdotte come indeterminate, frattanto per uno stesso valore di x e di d, non possono subire anch' esse che un solo valore, e perciò non possono darne che un solo per m. In effetto dalla prima supposizione abbiamo $i = f \mp \frac{1}{2} d$, abbiamo cioè che i per lo stesso valore di x, non ha che un valore solamente. Inoltre essendo i'' il valore più picciolo di i' che rende $\frac{i+i'}{d}$ un numero intero, tutti gli altri suoi valori che ve lo potrebbero rendere egualmente non sarebbero che $i'' + Ed$, i quali si oppongono alla condizione della seconda ipotesi, da cui i' si ha, sempre $< \pm \frac{1}{2} d$.

37. Quindi il valore f di $x > \pm \frac{1}{2}d$ ne ha sempre un altro $< \pm \frac{1}{2}d$ che adempie ancora alla condizione proposta. Un altro valore $f' > \pm \frac{1}{2}d$ di x, darà per n un nuovo valore, quanto sia $f' \pm nd < \pm \frac{d}{2}$, e perciò darà per x un nuovo valore soddisfacente alla condizione medesima; e così di seguito. Quando adunque niun valore di $x < \pm \frac{d}{2}$ renderà multiplo di d il polinomio proposto, è questo l' argomento, onde conchiudere l'impossibilità di trovarne alcuno che ve lo rende; e quanti sono i valori di $x < \pm \frac{d}{2}$, che ve lo rendono, altretante saranno le serie di quelli $> \pm \frac{d}{2}$ che vi soddisfanno ancora.

38. Se io chiamo p qualunque de' valori di $x < \pm \frac{d}{2}$ corrispondenti alla condizione di adem-

piersi, sarà $p = f \pm md$, e però $f = p \mp md$, cioè i valori di $x > \pm \frac{d}{2}$ si possono riguardare come dipendenti di quelli $< \pm \frac{d}{2}$. Quindi tutti quei indipendenti fra loro son tutti $< \pm \frac{d}{2}$, son tutti compresi cioè tra i limiti $-\frac{d}{2}$, e $+\frac{d}{2}$.

(l. 44. IV.)

39 Dalla natura della divisione abbiamo che il residuo è sempre minore del divisore. Quindi il residuo corrispondente al caso di D diviso per d non può che essere eguale ad alcuno de' numeri 1, 2, 3, 4, ... $d - 1$. Bilanciando i gradi di probabilità io veggo adunque che questo residuo ha $d - 1$ casi a favore ed uno contrario, cioè che la divisione di D per d ha nel riuscire esatta un caso a favore e $d - 1$ per contra. Quindi si può scommettere con eguale vantaggio $d - 1$ contra 1, che tale divisione non risulterà senza resto.

(l. 44- V.)

40. Se dal dividere successivamente per d, d' uno stesso numero n io ne ho i quozienti q, q', cioè se io ho $\frac{n}{d} = q$, $\frac{n}{d'} = q'$ ne avrò ancora

$q \pm q' = \frac{n}{d} \pm \frac{n}{d'}$; e quindi $\frac{n}{dd'} = \frac{q \pm q'}{d' \pm d}$, ed

$$n = \frac{dd'(q \pm q')}{d' \pm d}$$

(l. 55. II. III.)

41 Noi sappiamo che la formola generale, onde esprimere un numero qualunque, si è . . . $a10^m + b10^{m-1} + c10^{m-2} + \ldots t10 + u$, e veggiamo perciò che ogni numero terminante in zero, o in 5 si può generalmente esprimere con . . . .

$$a10^m + b10^{m-1} + c10^{m-2} + \ldots t10$$

$$a10^m + b10^{m-1} + c10^{m-2} + \ldots t10 + 5$$

Osservo la prima di queste espressioni, e veggo di essere un multiplo di 2, di 5, e di 10; ne

osservo la seconda, e la veggo un multiplo di 5: quindi conchiudo che tutti i numeri, i quali terminano in zero sono divisibili per 2, 5, 10; e tutti quegl' altri, i quali finiscono in 5, sono divisibili soltanto per 5.

(l. 55. IV.)

42. Dalla medesima espressione generale de' numeri, noi abbiamo la prima parte non solo un multiplo di 2^n, ma ancora di 5^n, 10^n. Quindi se velo sarà la seconda parte $e10^{n-1} + f10^{m-2} + \ldots u$, tutto il numero proposto sarà multiplo di 2^n, 5^n, 10^n: Ma questa seconda parte non forma che l' n sue ultime cifre; quindi ogni numero la somma delle cui ultime cifre è divisibile per 2^n, 5^n, 10^n, sarà un multiplo ancora di 2^n, 5^n, 10^n.

(l. 55. VI

44 Se io multiplico per 11 l' espressione generale de' numeri, ne avrò . . . . . .

$$11\,(a10^{m} + b10^{m-1} + c10^{m-2} + d10^{m-3} + e10^{m-4} + \ldots$$

$$\ldots + u10^{3} + t10^{2} + s10 \pm v) = \ldots$$

$$s10^{m+1} + 10^{m}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + 10^{m-1}\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} + 10^{m-2}\begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} + \ldots$$

$$+ 10^{m-3}\begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix} + 10^{m-4}\begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} + 10^{m-5}\begin{pmatrix} \\ f \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots 10^{4}\begin{pmatrix} u \\ \end{pmatrix} + 10^{3}\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} + 10^{2}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} + v$$

Osservo in questo prodotto che la somma de' termini alternativi ne è l'istessa, è uguale cioè ad $a + b + c + d + \ldots v$. Quindi ne deduco che ogni numero la somma delle cui cifre alternative è uguale, sarà certamente divisibile per 11.

(l. 58)

45 Il soggetto su di cui si versa l'articolo enunciato appartenendo alle frazioni continue è quello che mi presenta l'occasione onde dettagliare sebbene in ristretto la di lor teoria. L'autore delle lezioni nel brevissimo saggio che dà

su di questa teoria non parlo che della sola evoluzione di un rotto ordinario in continuo, e della riduzione di questo a quello. Noi allorchè verremo a sviluppare la dottrina sulla soluzione numerica dell'equazioni, e sugl'indeterminati del secondo grado, avremo indispensabile l'uso di alcune proprietà scoperte dagli Analisti su questa specie di frazioni. Questo è l'argomento per cui son principalmente venuto ad impegnarmi in questo dettaglio. Quindi secondo il piano che io mi ho proposto seguire in questa raccolta verrò ad applicare le dottrine generali al caso particolare proposto nell'articolo della questione, e che a suo luogo non mancherò di enunciare. Quindi per niente dipendere da quel poco che l'autore delle lezioni ne dice e per darne un saggio indipendente a se stesso, incomincio dalla definizione col dire.

46. Frazione continua si dice quella frazione il cui denominatore è composto di un intero e di un rotto, tale che ha ancor esso un denominatore composto di un intero, e di un rotto, che egualmente ha un denominatore composto di un rotto, e così di seguito. Ecco l'esempio di una frazione continua.

$$l+\cfrac{a}{l'+\cfrac{b}{l''+\cfrac{c}{l'''+\cdots\cfrac{r}{l^{(m)}+\cfrac{u}{X}}}}}$$

$$l+\cfrac{1}{l'+\cfrac{1}{l''+\cfrac{1}{l'''+\cdots\cfrac{1}{l^{(m)}+\cfrac{1}{X}}}}}$$

frazione continua in cui le quantità componenti non sono che de' numeri interi positivi o negativi. Quantunque la seconda frazione non sia che un caso particolare della prima, frattanto noi andremo a considerar questa e non quella; poi-

chè le frazioni della sua forma son quelle che hanno nell' analisi un uso grandissimo; poichè quelle della prima non lo sono quasi di alcuno; poichè il metodo di trattare quelle della prima e le conseguenze che sene hanno non sono che le stesse di quelle che risultano dalla seconda; e poichè finalmente le operazioni e le formule per queste debbono trovarsi più semplici e meno inviluppate che in quelle.

Stabilita adunque la forma di queste frazioni la di cui prima idea se ne dee a M. Broncker, noi andiamo ad esaminarne quelle principali proprietà, che sappiamo essere state per la prima volta conosciute dal celebre Ugenio. Noi andiamo a vederne in primo luogo il modo della loro generazione.

47. Sia X una quantità che non può esprimersi in numeri interi, ed l l'intero ad essa prossimamente inferiore: onde avremo $X-l<1$, $\frac{1}{X-l}>1$.. $=X'$, e però $X=l+\frac{1}{X'}$. Sia similmente l' l'intero prossimamente inferiore ad X', e sarà...

$X' - l' < 1$, $\frac{1}{X' - l'} > 1 = X''$, e però $X' = l' + \frac{1}{X''}$.

Sia nel modo stesso l'' l'intero prossimamente inferiore ad X'', onde averne $X'' - l'' < 1$, $\frac{1}{X'' - l''} > 1 = X'''$, e però $X'' = l'' + \frac{1}{X'''}$. Così continuando a notare con $l''' \ldots l^{(n-1)}$, $l^{(n)}$ gl'interi prossimamente inferiori ad X''', ... $X^{(n-1)}$, $X^{(n)}$, noi avremo la seguente

TAV. I.

$X - l < 1$	$\frac{1}{X - l} > 1 = X'$
$X' - l' < 1$	$\frac{1}{X' - l'} > 1 = X''$
$X'' - l'' < 1$	$\frac{1}{X'' - l''} > 1 = X'''$
. . . . .	
$X^{(n-1)} - l^{(n-1)} < 1$	$\frac{1}{X^{(n-1)} - l^{(n-1)}} > 1 = X^{(n)}$

$X = l + \frac{1}{X'}$	$l < X$
$X' = l' + \frac{1}{X''}$	$l' < X'$
$X'' = l'' + \frac{1}{X'''}$	$l'' < X''$
. . . . .	
$X^{(n-1)} = l^{(n-1)} + \frac{1}{X^{(n)}}$	$l^{(n-1)} < X^{(n-1)}$

48. Se nella prima formula della terza linea verticale di questa tavola mettiamo successivamente i valori che si hanno in quelle ad essa susseguenti, ne avremo . . . . . .

$$X = l + \frac{1}{X'} = l + \frac{1}{l' + \frac{1}{X''}} = l + \frac{1}{l' + \frac{1}{l'' + \frac{1}{X'''}}} = \ldots$$

$$\ldots l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{l^{(n-1)} + \cfrac{1}{X^{(n)}}}}}}$$

ne avremo cioè l'evoluzione di X in frazione continua, in cui gli $l^{(n)}$ sono de' numeri tutti positivi, quando si riguardano come gl'interi prossimamente inferiori alle $X^{(n)}$: locchè è stato da noi indicato col segno $<$, e di che se ne può ripetere la ragione dalla prima linea verticale della tavola stessa.

49. Se successivamente omettiamo ne' valori di X il termine rispettivo $\frac{1}{X^{(n)}}$ ne avremo le approssimazioni consecutive

$$X = l = l + \frac{1}{l'} = l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l''}} = l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' + \cfrac{1}{l'''}}} = \ldots$$

$$\ldots l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' + \cfrac{1}{l''' + \ddots \cfrac{1}{l^{(n-1)}}}}}$$

Ovvero riducendo in frazione comune

$$X = l$$

$$X = \frac{ll' + 1}{l'}$$

$$X = \frac{(ll' + 1)l'' + l}{l'l'' + 1}$$

$$X = \frac{((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1}{(l'l'' + 1)l''' + l'}$$

$$X = \frac{(((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1)\,l^{IV} + (ll' + 1)l'' + l}{((l'l'' + 1)l''' + l')\,l^{IV} + l'l'' + 1}$$

$X =$ ec.

50. Quindi notando per maggior ſemplicità $M, M' \ldots M^{(n)}$ i numeratori ed $N, N', \ldots N^{(n)}$ i denominatori di queſte frazioni; ed oſſervando nel tempo ſteſſo la legge ſotto cui progrediſcono, cioè che ogni numeratore o denominatore è ſempre uguale all' ultimo de' numeratori o denominatori che lo precedono moltiplicato nel corriſpondente degli $A^{(n)}$, e del numeratore o denominatore penultimo, ne avremo $X = \frac{M^{(n)}}{N^{(n)}}$, e gli $M^{(n)}, N^{(n)}$ dalle

TAV. II.

$M = l$

$M' = ll' + 1$

$M'' = (ll' + 1)l'' + l$

$M''' = ((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1$

$M^{IV} = (((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1)l^{IV} + (ll' + 1)l'' + l$

$M^{V} =$ ec.

$N = 1$

$N' = l'$

$N'' = l'l'' + 1$

$N''' = (l'l'' + 1)l''' + l'$

$N^{IV} = ((l'l'' + 1)l''' + l')l^{IV} + l'l'' + 1$

$N^{V} =$ ec.

Ovvero

Tav. II.	*Tav. III.*
$M = l$	$N = 1$
$M' = Ml' + 1$	$N' = Nl'$
$M'' = M'l'' + M$	$N'' = N'l'' + N$
$M''' = M''l''' + M'$	$N''' = N''l''' + N'$
$M^{IV} = M'''l^{IV} + M''$	$N^{IV} = N'''l^{IV} + N''$
. . . . .	. . . . .
$M^{(n)} = M^{(n-1)}l^{(n)} + M^{(n-2)}$	$N^{(n)} = N^{(n-1)}l^{(n)} + N^{(n-2)}$

51 Se vorremo eſpreſſe finalmente in frazioni communi le diverſe eſpreſſioni del valore di X ſenza l'omiſſione indicata, avremo

$$X = \frac{lX'+1}{X'} = \frac{(ll'+1)X''+l}{l'X''+1}$$

$$= \frac{(l'(ll'+1)+l)X'''+ll'+1}{(l'l''+1)X'''+1} = \text{ec.}$$

ovvero adottando le ſuppoſizioni compreſe nell'eſpoſte due tavole, avremo

$$X = \frac{MX'+1}{NX'} = \frac{M'X''+M}{N'X''+N}$$

$$= \frac{M''X'''+M'}{N''X'''+N'} = \ldots \frac{M^{(n-1)}X^{(n)}+M^{(n-2)}}{N^{(n-1)}X^{(n)}+N^{(n-2)}}$$

52. Dietro a quanto veniamo di eſporre non rieſce difficile rilevare le proprietà principali che godono le frazioni $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$, $\frac{M''}{N''}$ ec. Ricaviamo adunque queſte proprietà: diamo così compimento a queſta teoria delle frazioni continue: e veniamo quindi allo ſviluppo del numero enunciato che forma il ſoggetto radicale di eſſa.

Le tavole I. II. ci convincono facilmente I. che la ſerie de' valori dell'$M^{(n)}$, e dell'$N^{(n)}$ è ſempre creſcente, epperò che le frazioni eſprimenti il valore di X ſono eſpreſſe in termini ſempreppiù grandi come ſi aumenta il numero n degli apici, cioè come più ſene ſpinge più avanti l'approſſimazione.

II. Che $M'N - MN' = 1$, $M''N' - M'N'' = -1$

$M'''N'' - M''N''' = 1$, $M''''N''' - M'''N'''' = -1$

ec.

cioè in generale che

$$M^{(n)}N^{(n-1)} - M^{(n-1)}N^{(n)} = \pm 1$$

ſecondo che n è impari o pari.

Quindi avviene che ſuppoſto che i termini in qualunque di queſte frazioni abbiano un fattor comune k, cioè ſuppoſto

$M^{(n)} = KM_1^{(n)}$, $N^{(n)} = KN_1^{(n)}$

ſi avrà $M_1^{(n)}N_1^{(n-1)} - M_1^{(n-1)}N_1^{(n)} = \pm \frac{1}{k}$

cioè ſi avrà un'equazione aſſurda in quanto il primo membro è intero, e fratto il ſecondo, ſi avrà cioè un argomento che queſti termini ſon ſempre primi tra loro...

III. Che prendendo in generale le tre frazioni contigue

$$\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}, \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}, \frac{M^{(n)}}{N^{(n)}}$$

esprimenti le diverse approssimazioni del valore di X; formandone le due equazioni consecutive (II.)

$$M^{(n-1)} N^{(n-2)} - M^{(n-2)} N^{(n-1)} = \mp 1$$

$$M^{(n)} N^{(n-1)} - M^{(n-1)} N^{(n)} = \pm 1$$

dividendoli quindi per

$$N^{(n-1)} N^{(n-2)}, \quad N^{(n)} N^{(n-1)}$$

ci daranno

$$\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}} = \mp \frac{1}{N^{(n-1)} N^{(n-2)}}$$

$$\frac{M^{(n)}}{N^{(n)}} - \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} = \pm \frac{1}{N^{(n)} N^{(n-1)}}$$

le quali per essere (I.)

$$N^{(n)} N^{(n-1)} > N^{(n-1)} N^{(n-1)}$$

ci insegnano che la differenza di due frazioni contigue và sempreppiù impicciolendosi.

IV. Che le due approssimazioni contigue del valore di

$$X = \frac{M^{(n-2)} X^{(n-1)} + M^{(n-3)}}{N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}}$$

$$= \frac{M^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)}}{N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)}}$$

ci danno

$$X = \frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}} \mp \frac{1}{\left(N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}\right) N^{(n-2)}} \qquad (a)$$

$$= \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} \pm \frac{1}{\left(N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)}\right) N^{(n-1)}} \qquad (b)$$

e ci insegnano perciò che la prima essendo

$> \frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$, è sempre la seconda $< \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$

Inoltre per essere (*tav.* I.)

$$X^{(n-1)} > l^{(n-1)} \quad X^{(n)} > l^{(n)}$$

e perciò

$$N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)} > N^{(n-2)} l^{(n-1)} + N^{(n-3)} \left(= N^{(n-1)}\right)$$

$$N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)} > N^{(n-1)} l^{(n)} + N^{(n-3)} \left(= N^{(n)}\right)$$

epperò

$$\frac{1}{N^{(n-2)}\left(N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}\right)} < \frac{1}{N^{(n-2)} N^{(n-1)}}$$

$$\frac{1}{N^{(n-1)}\left(N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)}\right)} < \frac{1}{N^{(n-1)} N^{(n)}}$$

$$< \frac{1}{N^{(n-2)} N^{(n-1)}} \quad \text{(III.)}$$

c'insegnano che non solo essendo la prima

$> \frac{M^{\prime\prime\ldots n-2}}{N^{\prime\prime\ldots n-2}}$, è la seconda $< \frac{M^{\prime\prime\ldots n-1}}{N^{\prime\prime\ldots n-1}}$ ma che

ancora il valore di X è sempre ristretto fra i limiti $\frac{M^{\prime\prime\ldots n-2}}{N^{\prime\prime\ldots n-2}}$, $\frac{M^{\prime\prime\ldots n-1}}{N^{\prime\prime\ldots n-2}}$ Inoltre per essere (tav.I.)

$$X^{\prime\prime\ldots n-1} < l^{\prime\prime\ldots n-1} + 1, \quad X^{\prime\prime\ldots n} < l^{\prime\prime\ldots n} + 1$$

e perciò per essere

$$N^{\prime\prime\ldots n-2}\left(N^{\prime\prime\ldots n-2} X^{\prime\prime\ldots n-1} + N^{\prime\prime\ldots n-3}\right)$$

$$< N^{\prime\prime\ldots n-2}\left(N^{\prime\prime\ldots n-2}(l^{\prime\prime\ldots n-1} + 1) + N^{\prime\prime\ldots n-3}\right)$$

$$\left(= N^{\prime\prime\ldots n-2}\left(N^{\prime\prime\ldots n-1} + N^{\prime\prime\ldots n-2}\right)\right)$$

$$N^{\prime\prime\ldots n-1}\left(N^{\prime\prime\ldots n-1} X^{\prime\prime\ldots n} + N^{\prime\prime\ldots n-2}\right)$$

$$< N^{\prime\prime\ldots n-1}\left(N^{\prime\prime\ldots n-1}(l^{\prime\prime\ldots n} + 1) + N^{\prime\prime\ldots n-2}\right)$$

$$\left(= N^{\prime\prime\ldots n-1}\left(N^{\prime\prime\ldots n} + N^{\prime\prime\ldots n-1}\right)\right)$$

epperò

$$\frac{1}{N''..n-2(N''..n-3\,X''..n-1 + N''..n-3)}$$

$$> \frac{1}{N''..n-2(N''..n-1 + N''..n-2)}$$

$$\frac{1}{N''..n-1(N''..n-1\,X''..n + N''..n-2)}$$

$$> \frac{1}{N''..n-1(N''..n + N''..n-1)}$$

continua ad insegnarci che la differenza tra il valore di X e ciascuna delle frazioni

$$\frac{M''..n-2}{N''..n-2},\ \frac{M''..n-1}{N''..n-1}$$ non solamente è

$$< \frac{1}{N''..n-2\,N''..n-1} < \frac{1}{N''..n-1\,N''..n}$$

ma che ancora è

$$> \frac{1}{N^{(n-2)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})}\ ;\ e$$

$$> \frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})}$$

cioè che tali differenze trovansi sempre fra i limiti

$$\frac{1}{N^{(n-2)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})}$$ ed $$\frac{1}{N^{(n-1)}\,N^{(n-2)}}$$; fra

$$\frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})}$$ ed $$\frac{1}{N^{(n-1)}\,N^{(n)}}$$: limiti

assai ristretti, e che ci mostrano perciò la picciolezza degli errori che si vanno a commettere, allorchè si prende per X ciascuna di esse frazioni; e limiti le di cui rispettive differenze essendo . . . . . .

$$\frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})},\ \frac{1}{N^{(n)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})}$$

ci avvertono ancora che essi divengono sempre più stretti come si aumenta il numero n degli apici, e perciò sempre più piccioli risultano cotali errori. Quindi se si farà $n = 2 = 4 = 6 =$ ec.

la frazione $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$ è che rappresenta la serie in generale delle frazioni tutte $< X$, e la $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ quella delle frazioni tutte $> X$, ma che l'una e l'altra si convergono verso il vero valore di X, e per cui si esprimono colla voce generica di frazioni convergenti.

V. La tav. I. in cui $X^{(n-1)} = l^{(n-1)} + \frac{1}{X^{(n)}}$ è quella che ci dà $l^{(n-1)} = \frac{X^{(n-1)} X^{(n)} - 1}{X^{(n)}}$ e quindi essendo $N^{(n-1)} = N^{(n-2)} l^{(n-1)} + N^{(n-3)}$ noi ne avremo . . . . . .

$$N^{(n-1)} = \frac{N^{(n-2)}(X^{(n-1)} X^{(n)} - 1) + X^{(n)} N^{(n-3)}}{X^{(n)}}$$

donde l'espressione . . . . . .

$$M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X = \mp \frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)})}$$

che si ottiene (IV. *b*), diviene . . . .

$$M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X = \mp \frac{1}{(N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}) X^{(n)}}$$, cioè . . . .

$$X^{(n)}(M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X) = \mp \frac{1}{N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}}$$

$= (\text{IV } a)\ - M^{(n-2)} + N^{(n-2)} X$, e però per essere sempre $X^{(n)} > 1$, si avrà, facendo astrazione de' segni, $M^{(n-2)} - N^{(n-2)} X > M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X$.

Siccome $M^{(n-2)} < M^{(n-1)}$, ed $N^{(n-2)} < N^{(n-1)}$

siccome tra $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$, ed $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$

non si può trovare una terza frazione $\frac{h}{k}$ tale che sia k tra $N^{(n-2)}$ ed $N^{(n-1)}$; cioè che sia nel tempo stesso $k > N^{(n-2)}$ e $< N^{(n-1)}$, come vedremo; siccome finalmente essendo $N^{(n-2)} < N^{(n-1)}$ è ancora $M^{(n-2)} \ldots < M^{(n-1)}$, così ne avviene che se nell' espressione $M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X$ si metterà a luogo di $M^{(n-1)}$, $N^{(n-1)}$ de' numeri più piccioli, allora essa ne diverrà maggiore in quantità. Quindi in generale io conchiudo che una quantità della forma $p - qX$, in cui a luogo di p, q vi si mettono de' valori minori, essa acquisterà un valore più grande quando $\frac{p}{q}$ è una delle frazioni convergenti verso il valore di X; proprietà che trova la sua applicazione nella seconda parte del problema 49.

53. Non resta onde compire questa teoria, che assegnar la ragione, per cui tra . . . . $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$ ed $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ non vi si può trovare una

terza frazione $\frac{h}{k}$, il di cui denominatore sia fra i di loro denominatori. In effetto io la veggo nel num. III.; poichè supponendo che $\frac{h}{k}$ fosse una delle frazioni convergenti intermedia fra le indicate, avremo $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}} - \frac{h}{k} = \pm \frac{1}{kN^{(n-2)}}$ ed . . . $\frac{h}{k} - \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} = \pm \frac{1}{kN^{(n-1)}}$, e però senza badare a' segni $\frac{1}{kN^{(n-2)}}$ ed $\frac{1}{kN^{(n-1)}} < \frac{1}{N^{(n-2)}N^{(n-1)}}$ cioè . . . . . $kN^{(n-2)}$ e $kN^{(n-1)} > N^{(n-2)}N^{(n-1)}$; cioè . . . $k > N^{(n-2)}$, e $> N^{(n-1)}$: locchè ci mostra

che la frazione $\frac{h}{k}$ ſuppoſta intermedia fra le indicate ha il ſuo denominatore maggiore di ambedue i denominatori di eſſe, cioè che il denominatore, è però il ſuo numeratore non può eſſere intermedio fra i denominatori e numeratori di eſſe. Ciò provandoci adunque la falſità dell' ipoteſi, ci convince, che ciaſcuna delle frazioni convergenti ſi avvicina tanto al vero valor di X, quanto non può eſſo eſprimerſi in termini più ſemplici.

54. Ecco che dopo il dettaglio delle principali proprietà ſulle frazioni continue, dettaglio che potrà eſſerci utile nel ſeguito, noi andiamo ad applicarne le idee generale, a quella loro ſpecie, che riſulta dall'evoluzione de' rotti communi, onde vedere come il ſaggio dato dall' Autore è compreſo in quello da cui veniamo; e trattare ancora il ſoggetto contenuto nel numero enunciato.

55. Sia $X = \frac{B}{A}$, in cui A, B ſono de' numeri interi e razionali; ed è chiaro che l'intero proſ-

ſimamente inferiore ad X, cioè l, non è in queſto caſo che il quoziente intero di B diviſo per A. Quindi ſe chiamo r il reſiduo di queſta diviſione, avrò $X - l = \frac{B}{A} - l = \frac{r}{A}$, e però $\frac{1}{X-l} = X' = \frac{A}{r}$. Similmente l' intero proſſimamente inferiore ad X', cioè l', non è che il quoziente intero di A diviſo per r, e quindi ſe chiamo come ſopra r' il reſiduo di queſta diviſione, avrò $X' - l' = \frac{A}{r} - l' = \frac{r'}{r}$ e però $X'' = \frac{r}{r'}$. Se nuovamente divido r per r' ne avrò l'', e quindi ſe chiamo r'' il reſiduo corriſpondente avrò $X'' - l'' = \frac{r}{r'} - l'' = \frac{r''}{r'}$ e però $X''' = \frac{r'}{r''}$; così continuando arriveremo a trovare . . . . . $X^{(n)} = \frac{r^{(n-2)}}{r^{(n-1)}}$. Quindi dalla diviſione di $r^{(n-2)}$ per $r^{(n-1)}$ ad averne $l^{(n)}$ e chiamando $r^{(n)}$ il reſiduo corriſpondente ad avere . . . . . .

$$X^{(n)} - l^{(n)} = \frac{r^{(n-2)}}{r^{(n-1)}} - l^{(n)} = \frac{r^{(n)}}{r^{(n-1)}}, \text{ ed } X^{(n+1)} = \frac{r^{(n-1)}}{r^{(n)}}$$

L'evoluzione adunque del rotto comune $\frac{B}{A}$ in continuo dipende dalle divisioni indicate da $\frac{B}{A}$, $\frac{A}{r}$, $\frac{r}{r'}$, $\frac{r'}{r''}$, . . . $\frac{r^{(n-1)}}{r^{(n)}}$: ma come $B > A$, $A > r$, $r > r'$, ec e però come le quantità B, A, r', r'', . . . $r^{(n)}$ diminuiscono continuamente; e si è chiaro che qualunque sia la legge di questa diminuzione, se nel corso dell' operazione non verrà ad incontrarsi esatta alcuna delle indicate divisioni, cioè se il rotto sarà irriducibile dovrà indispensabilmente trovarsi $r^{(n)} = 1$

56. Inoltre raccogliendo le parti per cui abbiamo passato nell'evoluzione di $\frac{B}{A}$ in rotto continuo, noi avremo la tavola

$$\frac{B}{A} - l = \frac{r}{A} \qquad B = Al + r$$

$$\frac{A}{r} - l' = \frac{r'}{r} \qquad A = rl' + r'$$

(ovvero)

$$\frac{r}{r'} - l'' = \frac{r''}{r'} \qquad r = r'l'' + r''$$

. . . . . .

$$\frac{r^{(n-2)}}{r^{(n-1)}} - l^{(n)} = \frac{r^{(n)}}{r^{(n-1)}} \qquad r^{(n-2)} = r^{(n-1)} l^{(n)} + r^{(n)}$$

Ma riflettendo in questo luogo che l' Autore suppone $B < A$, e facendo perciò $l = 0$, è chiaro che il primo rigo di questa tavola non ci dà che $B = r$, e che però essa diviene per questo caso particolare.

$$A = Bl' + r'$$
$$r(= B) = r'l''' + r''$$
$$r' = r''l'''' + r''''$$

. . . . . .

$$r^{(n-2)} = r^{(n-1)} l^{(n)} + r^{(n)}$$
$$r^{(n-2)} = r^{(n-1)} l^{(n)} + r^{(n)}$$

o pure ricavando da ciascuna di queste formule il valore di B, mercè le opportune sostituzioni, noi ne avremo la tavola de' suoi valori, cioè ne avremo la seguente

Tav. de' valori di B

$$B = \frac{A - r'}{l'}$$

$$B = \frac{Al'' + r''}{l'l' \pm 1}$$

$$B = \frac{(l'l''' + 1)A - r'''}{l'''(l'l'' \pm 1) \pm l'}$$

$$B = \text{ec.}$$

nella quale introducendo i valori dell' $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ cui si riducono quelli registrate nelle tavole II. III. facendovi $l = 0$, se ne avrà l' altra diversamente espressa

$$B = \frac{MA - r'}{N'}$$

$$B = \frac{M''A + r''}{N''}$$

$$B = \frac{M'''A - r'''}{N'''}$$

. . . . . .

$$B = \frac{M^{(n)}A \pm r^{(n)}}{N^{(n)}}.$$

Quindi l'espressione generale $B = \frac{M^{(n)}A \pm r^{(n)}}{N^{(n)}}$ delle formule di questa tavola è quella che nel caso di $\frac{B}{A}$ irriducibile, e però di $r^{(n)} = 1$ ci dà $\frac{BN^{(n)}}{A} = M^{(n)} \pm \frac{1}{A}$, e ci ripete perciò che in un tal caso $BN^{(n)}$ è sempre un multiplo di A

col resto ± 1 secondo che pari o impari è il numero n degli apici.

Che un rotto irriducibile ci porta al resto $r^{(n)} = 1$, e che ci dà $BN^{(n)}$ moltiplo di A col resto ± 1, è quello che forma il soggetto dell' articolo enunciato, ed è stato perciò l'ultimo termine de' nostri dettagli, onde soddisfare all' impegno che cen' era stato proposto.

(l. 305.)

57. Se i termini di una data progressione che ha d per differenza, o q per quoziente, si sommino a due a due, a tre a tre, o in generale ad m ad m, ne nascerà una nuova progressione omogenea che avrà dm^2 per differenza o q^m per quoziente.

La risposta a questo teorema si ottiene facilmente dalle formule (l.234.285.246. 297.). In effetto se chiamiamo n i termini di ciascuna delle due serie proposte, e li sommiamo per mezzo di queste formule ad m ad m', noi ne avremo quei delle serie in questione. Si tratta adunque di trovare colle formule (l.234.246.) gli

$m$simi, $(m+1)$esimi, $2m$simi, $(2m+1)$esimi, ec. termini delle due serie, e quindi colle (l.285.297.) le somme parziali degli m termini di esse. Le prime formule ci danno

$a+d(m-1)$	. . .	aq^{m-1}
$a+dm$	. . .	aq^{m}
$a+d(2m-1)$	. . .	aq^{2m-1}
$a+2dm$	. . .	aq^{2m}
$a+d(3m-1)$	. . .	aq^{3m-1}
ec.		ec.

pe' termini distanti m fra loro nelle due serie, e le seconde ci danno

$$S = \frac{m}{2}(2a+d(m-1)) \; ; \quad S = \frac{a^{\frac{m}{m-1}}(q^{m}-1)}{a^{\frac{1}{m-1}}(q-1)}$$

$$S' = \frac{m}{2}(2a+d(3m-1)); \quad S' = \frac{a^{\frac{m}{m-1}}\left(q^{\frac{m(2m-1)}{m-1}} - q^{\frac{m^2}{m-1}}\right)}{a^{\frac{1}{m-1}}\left(q^{\frac{2m-1}{m-1}} - q^{\frac{m}{m-1}}\right)}$$

$S'' =$ ec. $\qquad S'' =$ ec.

per le loro corrispondenti somme parziali. Prendendo la differenza, o il quoziente di S, S', noi ne avremo $d = dm^2$ o $q = q^m$, e così la risposta che ci avevamo proposto a rilevare.

PROB. 17.

Un mobile fa miglia 9 nel primo giorno; 8 nel secondo ec.: un altro ne fa nel primo giorno 27, e nel secondo 18, ec.: ambedue in progressione geometrica. Qual è il viaggio per tutta l' eternità?

58. Le serie de' cammini de'due mobili proposti essendo decrescenti: una decrescenza per l' eternità, cioè infinita, riducendo il finito all' infinitesimo, oltre della cognizione enunciata de' primi termini delle due serie in questione e de' lor quozienti, cene porge ancor quella de' loro ultimi termini. Quindi con questi tre elementi, e col soccorso della formula (1.299) si arriva allo sviluppo proposto. Quindi io dico facendo nella formula citata $S = \frac{uq - a}{q - 1}$, $a = 9$ $= 27$, $q = \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$, ed $u = \frac{9}{m}$ se ne avrà il risultato $x = 81$.

PROB. 18.

Due Corrieri con le celerità m, n partono nel punto stesso l'uno da Firenze per Livorno, e l'altro da Livorno per Firenze, e la distanza tra questi due luoghi è a. Ove si incontreranno?

59. Se si conta x da Firenze fino al punto di rincontro, dovrà contarsi $a - x$ da questo punto a Livorno. Quindi i cammini che fecero nel tempo stesso i due Corrieri furono x, $a - x$. Quindi abbiamo per condizione $x : a - x :: m : n$.

Quindi finalmente $x = \frac{am}{m + n}$

PROB. 19.

Un Orologio tra le 5 e le 6 ha la lancetta de' minuti su quella delle ore. Che ora è?

60. Suppongo che $m : 1$ sia il rapporto delle celerità della lancetta de' minuti a quella dalla lancetta delle ore; e che x sia il cammino, qual dovrà farsi della prima onde raggiungere la seconda; cammino che io suppongo contato dal principio di tutte le divisioni. Dopo ciò io osservo che la lancetta delle ore caminerà $\frac{x}{m}$ nel

tempo che quella de' minuti percorrerà x; e che chiamato n il numero delle divisioni contenute tral principio di esse, ed una di quelle ore fra cui successe il rincontro, si avrà $n \pm \frac{x}{m}$ per una espressione del cammino cercato della lancetta de'minuti. Quindi si avrà $x = n \pm \frac{x}{m}$; donde

$$x = \frac{mn}{m \mp 1}$$

Se noi adopriamo la divisione sessagesimale, cioè la divisione ordinaria delle mostre, noi avremo $x = 27' \frac{3}{11}$. Se vorremo adottare poi quella immaginata, e già oggi abbandonata, da'Francesi, cioè la decimale, noi avremo che ciascuna delle dieci ore, in cui si divide in tal caso il quadrante, contiene 10 divisioni di minuti, e però $m = 10$, $n = 50$, ed $x = 55', 55$.

Quindi conchiudo che nelle mostre a divisione ordinaria le due lancette si ritrovarono giusta la

condizione enunciata l'una sull'altra a $5^{or}\, 27' \frac{3}{11}$ ed in quelle a divisione decimale a $5^{or}\, 55', 55$.

PROB. 20

Tre cagioni separatamente producono i tre effetti e, e', e'' *ne' tempi* t, t', t''. *Qual tempo* x *impiegheranno a produrre insieme l'effetto* e'''.

61. Gli effetti dati essendo prodotti per condizione nell'indipendenza l'uno dall'altro ne' tempi dati, danno le tre proporzioni

$$t : e :: x : \frac{ex}{t}$$

$$t' : e' :: x : \frac{e'x}{t'}$$

$$t'' : e'' :: x : \frac{e''x}{t''}$$

donde sene ottiene la somma, e però l'effetto totale e''': sene ottiene cioè

$$\frac{ex}{t} + \frac{e'x}{t'} + \frac{e''}{tx''} = e''', \text{ e quindi}$$

$$x = \frac{e'''}{\frac{e}{t} + \frac{e'}{t'} + \frac{e''}{t''}} = \frac{e'''t\,t'\,t''}{et't'' + e't't'' + e''tt'}$$

PROB. 21.

A pose in società il doppio di B, *e di più* 5 *lire* : *A ebbe di guadagno* 660 *lire e B* 300. *Cerco i capitali, ed il frutto.*

62. Con x marco il capitale di B, ed avrò in $2x+5$ quello di A, ed in $3x+5$ il fondo totale. Inoltre nella somma de' guadagni parziali io ho 960 lire pel guadagno totale, ed ho perciò la proporzione $960 : 300 :: 3x+5 : x$; donde $x = 25$ lire Quindi io dico che 25 lire si fu il capitale di B, 55 lire quello di A, ed al 12 per 1 il frutto de l' impiego.

PROB. 22.

Un peso un numero ed una misura di due materie vale p', p'', *e con la mescolanza de' pesi numeri o misure* m', m'' *di esse ne vorrei fare i pesi numeri o misure* m *di una materia media, onde un suo peso numero o misura vaglia* p. *Date quattro delle sei cose trovarne le altre due.*

63. Essendo m', m'' ed m i pesi numeri o misure delle materie date e del misto cercato, saranno $p'm'$, $p''m''$, e pm i loro prezzi rispettivi. Quindi partendo sull' ipotesi che un peso numero o misura di un misto sia eguale alla somma de' pesi numeri o misure delle materie che concorrono a formarlo (locchè và soggetto a qualche eccezione), noi avremo l' equazioni $m' + m'' = m$, $p'm' + p''m'' = pm$. Queste equazioni son quelle che date quattro delle quantità in questione cene danno le altre due. La ragione è evidente. La maniera onde arrivarvi è assai facile. Il tempo è prezioso e non da spendersi su questo dettaglio poco interessante.

PROB. 23.

Dovendo A *pagare a* B *una rendita* a *per* t *anni, oltre quella che scade oggi, conviene di saldarlo intieramente con abbonargli il frutto semplice ad* m *per* 100 *Quanto riscuoterà* B?

64 Una rendita può pagarsi in due maniere, cioè anticipata e posposta. Questo problema adunque può guidarci a due risultati diversi. Noi l' andiamo con un solo raziocinio a mettere sotto il dominio di una medesima formula.

Io incomincio a riflettere che se B verrebbe a lasciare ad A fino al termine dell' anno tsimo

tutte le annualità che gli dee, è pur troppo naturale e ragionevole che egli ne avrebbe ripetuto un certo frutto, che io lo ſtabiliſco ad m per 100, per eſſere tale il frutto eſpreſſo nella condizione enunciata; ne avrebbe cioè ripetuto queſto frutto ſulla rendita a pe' ſucceſſivi periodi

I. $t,\ t-1,\ t-2,\ t-3, \ldots 1$

II. $t-1,\ t-2,\ t-2,\ t-4, \ldots 1$

e ne avrebbe perciò ottenuto gl' intereſſi . . .

I. $\frac{amt}{100} + \frac{am(t-1)}{100} + \frac{am(t-2)}{100} + \frac{am(t-3)}{100} + \ldots \frac{am}{100}$

$= \frac{amt(t+1)}{200}$

II. $\frac{am(t-1)}{100} + \frac{am(t-2)}{100} + \frac{am(t-3)}{100} + \frac{am(t-4)}{100} + \ldots \frac{am}{100}$

$= \frac{amt(t-1)}{200}$.

Quindi con queſta nuova convenzione cognetturale il credito di B contro di A dovette eſſere divenuto $at + \frac{amt(t+1)}{200}$ dopo i t anni.

L' azzardo adunque di queſta nuova condizione viene a farci mutare i ſenſi della propoſta enunciazione, e ci fa dire che „ A doven-
„ do a B dopo un periodo di t anni il fondo . .
„ $= at + \frac{amt(t+1)}{200}$ conviene di ſaldarlo ſubito
„ con abbonargli il frutto ſemplice ad m per 100 „

Con queſta nuova veduta che noi abbiamo dato all' enunciazione propoſta, ſe veniamo a chiamare x la ſomma che riceve B nell' iſtante della convenzione, e perciò t anni prima del tempo, in cui gli dovea il fondo $at + \frac{amt(t+1)}{200}$, è chiaro che B dovette laſciare ad A nell' anticipo del pegamento l' Intereſſe $\frac{mtx}{100}$ per dritto di convenzione. Quindi la ſomma che egli viene a ricevere nel punto di queſta convenzione, ſi ha nell' eſpreſſione $at + \frac{amt(t+1)}{200} - \frac{mtx}{100} = x$: donde

$x = \frac{at(200 + m(t+1))}{2(mt + 100)}$.

Il torno che abbiam dato allo sviluppo di questo problema, per quanto ci venghi autorizzato dal risultato che l' autore delle lezioni mette al seguito dell'enunciazione, per altretanto sembra poco soddisfacente alla buona ragione. La soluzione che naturalmente presenta l'enunciazione proposta è molto pronta ed evidente; e molto semplice ne è il risultato cui essa ci guida. Mi basta di avere avvertito i miei dubbj sul raziocinio da me tenuto, onde soddisfare al risultato che quell'autore ci dà, e di aver prevenuto il lettore sulla diversa soluzione che l' enunciazione a primo aspetto presenta, onde poterla eseguire.

PROB. 24.

Data al frutto semplice di m *per* 1 *una sorte* c *risolvo di consumare in* t *anni e sorte e frutti spendendo annualmente una egual somma* x. *Cerco* x.

65. L' interesse come è ad m per 1, sarà mc quello che corrisponde alla sorte principale: quindi $c(m+1)-x$ esprime l' avanzo di questa sorte per le spese del primo anno, ed $x-cm$ la quantità di cui in esso diminuì. Similmente l' interesse su questo avanzo della sorte principale essendo $m(c(m+1)-x)$, ci darà l' avanzo... $c(m+1)^2-x(m+1)-x$ per le spese del secondo anno; ed $(m+1)(x-mc)$ per la diminuzione corrispondente. Così ragionando noi avremo la serie degli avanzi, che io ometto, e quella delle corrispondenti diminuzioni, che io rapporto

$$x-cm$$
$$(x-cm)(m+1)$$
$$(x-cm)(m+1)^2$$
$$(x-cm)(m+1)^3$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(x-cm)(m+1)^{t-1}$$

Questa essendo una progressione geometrica se ne ha prontamente in $\frac{((m+1)^t-1)(x-mc)}{m}$ l'espressione della sua somma. Quindi la condizione enunciata, che le diminuzioni successive furono tali quanto ne' t anni ne esaurirono la sorte principale, è quella che ci dà l' equazione $\frac{((m+1)^t-1)(x-mc)}{m}=x$; e con essa il valore cercato di $x=\frac{mc(m+1)^t}{(m+1)^t-1}$

PROB. 25.

Col metodo de' coefficienti indeterminati calcolare i rotti

$$\text{I.}\quad \frac{\pm(2ax+x^2)u+(a+x)u^2}{(a+x)^2 \mp (a+x)u}$$

$$\text{II.}\quad \frac{(ax+x^2+ux)^{\frac{1}{2}}+(ax+x^2 \pm ax+ux)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 \pm ux)^{\frac{1}{2}}}$$

I. Per dare in generale la forma alla serie, che dovrà rappresentare il rotto proposto, io osservo che le potenze di u comminano con un cammino naturale, e suppongo perciò . . .

$$\frac{\pm(2ax+x^2)u+(a+x)u^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)u} = Au+Bu^2+Cu^3+\text{ec.}$$

donde ottengo $\pm(2ax+x^2)u+(a+x)u^2 = \ldots$

$$Au((a+x)^2 \pm (a+x)u)+Bu^2((a+x)^2 \pm (a+x)u)$$

$$+Cu^3((a+x)^2 \pm (a+x)u)+\text{ec.}$$

Quindi eseguendo le operazioni indicate, trasportando tutto in un membro, ed ordinando secondo le potenze di u, sene avrà . . .

Le quantità A, B, C, ec. a, x essendo indipendenti di u dovranno restare le stesse qualunque ne sia il valore. Quindi questa equazione dovendo sempre avverarsi indipendentemente de' valori particolari di u, ne avviene che divisa prima per u, e fatto quindi $u=o$, ci darà $A(a+x)^2 \mp (2ax+x^2)=o$; divisa nuovamente per u, e fattovi per la seconda volta $u=o$ ci darà $B \pm A(a+x)-(a+x)=o$, e così continuando ci darà $=o$, tutti i termini affetti dalla medesima potenza di u. Questo teorema di cui avremo occasione di farne uso nel seguito, è quello che ci dà l'equazioni . . . .

$$A(a+x)^2 \mp (2ax+x^2)=o$$

$$B(a+x)^2 \pm A(a+x)-(a+x)=o$$

$$C(a+x)^2 \pm B(a+x)=o$$

ec.

onde averne

$$A=\frac{\pm(2ax+x^2)}{(a+x)^2},\ B=\frac{a^2}{(a+x)^3},\ C=\frac{\mp a^2}{(a+x)^4},\ \text{ec.}$$

e quindi

$$\frac{\pm(2ax+x^2)u+(a+x)u^2}{(a+x)^2\pm(a+x)u} = \pm\frac{(2ax+x^2)u}{(a+x)^2}$$

$$+\frac{a^2u^2}{(a+x)^3}\mp\frac{a^2u^3}{(a+x)^4}+\text{ec.}$$

II. Per isviluppare in serie i tre radicali componenti la frazione proposta, io vi osservo rapporto ad u due termini in ciascuna; vi osservo inoltre le potenze 0, 1 di u; e vi osservo perciò nelle potenze di esso l'ordine naturale, incominciando però dal zero. Quindi suppongo

$$(ax+x^2\pm xu)^{\frac{1}{2}} = A+Bu+Cu^2+\text{ec.}$$

$$(ax+x^2\pm au\pm xu)^{\frac{1}{2}} = A'+B'u+C'u^2+\text{ec.}$$

$$(x^2\pm xu)^{\frac{1}{2}} = A''+B''u+C''u^2+\text{ec.}$$

Quadrando, ordinando alle potenze di u, e trasportando il tutto in un membro, noi avremo

$$0 = A^2+2ABu+B^2u^2+2BCu^3+\text{ec.}$$
$$-(ax+x^2)\mp x+2AC+2AD+\text{ec.}$$

$$0 = A'^2+2A'B'u+B'^2u^2+2B'C'u^3+\text{ec.}$$
$$-(ax+x^2)\mp(a+x)+2A'C'+2A'D'+\text{ec.}$$

$$0 = A''^2+2A''B''u+B''^2u^2+2B''C''u^3+\text{ec.}$$
$$x^2\mp x+2A''C''+2A''D''+\text{ec.}$$

donde l'equazioni

$$A^2-(ax+x^2)=0,\ 2AB\mp x=0,\ B^2+2AC=0,$$
$$2BC+2AD=0,\ \text{ec.}$$

$$A'^2-(ax+x^2)=0\ 2A'B'\mp(a+x)=0,\ B'^2+2A'C'=0$$
$$2B'C'+2A'D'=0,\ \text{ec.}$$

$$A''^2-x^2=0,\quad 2A''B''\mp x=0,\ B''^2+2A''C''=0,$$
$$2B''C''+2A''D''=0,\ \text{ec.}$$

68 Da queste equazioni deducendo i valori di A, B, ec.; A', B' ec.; A'', B'', ec.; si avrà

$$\sqrt{(ax+x^2 \pm xu)} = \sqrt{(ax+x^2)} \pm \frac{xu}{2\sqrt{(ax+x^2)}}$$

$$- \frac{x^2 u^2}{8\sqrt{(ax+x^2)^3}} \pm \frac{x^3 u^3}{16\sqrt{(ax+x^2)^5}} - \text{ec.}$$

$$\sqrt{(ax+x^2 \pm au \pm ux)} = \sqrt{(ax+x^2)} \pm \frac{(a+x)u}{2\sqrt{(ax+x^2)}}$$

$$- \frac{(a+x)^2 u^2}{8\sqrt{(ax+x^2)^3}} \pm \frac{(a+x)^3 u^3}{16\sqrt{(ax+x^2)^5}} - \text{ec.}$$

$$\sqrt{(ax \pm xu)} = x \pm \frac{1}{2}u - \frac{u^2}{8x} \pm \frac{u^3}{16x^2} - \text{ec.}$$

e perciò

$$\frac{\sqrt{(xa+x^2 \pm ux)} - \sqrt{(ax+x^2 \pm au \pm xu)}}{\sqrt{(ax \pm xu)}} = \ldots$$

$$\frac{\mp au}{2\sqrt{(ax+x2)}} + \frac{(a^2+2ax)u^2}{8\sqrt{(ax+x^2)^3}} \mp \frac{(a^3+2a^2x+3ax^2)u^3}{16\sqrt{(ax+x^2)^5}}$$

$$x \pm \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8x} \pm \frac{u^3}{16x^2} \ldots$$

$$= Au + Bu^2 + Cu^3 + \text{ec.}$$

Donde sene ottiene finalmente

$$\frac{\sqrt{(ax+x^2 \pm xu)} - \sqrt{(ax+x^2 \pm au \pm xu)}}{\sqrt{(x^2 \pm xu)}} = \frac{\mp au}{2x(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{(3a^2+4ax)u^2}{8x(ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{(5a^3+12a2x+8ax^2)u^3}{16x(ax+x^2)^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

PROB. 26.

Sommare i rotti decimali I. 0,00330033 *ec.*
II. 0,4059090 *ec.*

69. Se chiamo n le cifre del periodo di un rotto decimale continuo, ed m quelle dopo cui viene ad incominciare, avrò in generale . . . .

$$\frac{m}{10^m} + \frac{n}{10^{m+n}} + \frac{n}{10^{m+2n}} + \frac{n}{10^{m+3n}} + \text{ec.}$$

per la sua espressione; espressione che dal secondo termine in poi forma una serie a quoziente. Quindi conoscendo in questa serie tre elementi, cioè il primo termine $\frac{n}{10^{m+n}}$, il quoziente $\frac{1}{10^n}$, e l'ultimo termine $\frac{n}{\infty}$, sono otterrà (l.295) il termine sommatorio . . . .

$$\frac{n10^n}{10^{m+n}(10^n-1)}$$ Quindi marcando con S la

somma cercata si avrà $S = \frac{m}{10^m} \cdots$

$$+\frac{n10^n}{10^{m+n}(10^n-1)} = \frac{n+m(10^n-1)}{10^m(10^n-1)}.$$

70. Per applicare questa formula generale, con cui si ottiene la somma di qualunque frazione decimale periodica, sia perfetta sia imperfetta, alle due frazioni enunciate, io avverto che quando m, n sono alla condizione di esponenti rappresentano il numero sola

mente delle cifre del periodo: laonde non essendo in questa condizione rappresentano il periodo stesso.

Quindi abbiamo I. $m = 0$, $n = 0033$, $= 4$,

$$\text{ed } S = \frac{33}{9999} = \frac{1}{303}$$

Quindi abbiamo II. $m = 405$, $= 3$, $n = 90$, $= 2$;

$$\text{ed } S = \frac{40185}{99000} = \frac{893}{2200}$$

PROB. 27.

Sommare n *termini della serie* . . . .

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{16}{x^4} + \text{ec.}$$

71. Questo problema, in cui dovrò parlare di serie, mi presenta l'occasione a dare un'idea sull' origine loro in analisi; sulla distinzione delle principali lor specie; sulla maniera onde la loro interpolazione si effettua: e ciò non per altro che per soddisfare ad una qualche richiesta; che ad evitare la confusione di una specie coll'altra, come mi è successo vedere; che

a prevenire l' errore, in cui ho veduto qualche volta cadere, di poterſi una ſpecie maneggiare e trattarſi colle formule che ad un' altra ſpecie appartengono.

La ſomma e la ſottrazione, la moltiplicazione e diviſione, l' elevazione a potenze ed eſtrazion di radici ſulle grandezze in generale, formano il ſoggetto dell' Algebra. È il mezzo onde le formule riſultanti da queſte operazioni s'impiegano alla ſoluzion de' problemi ne fanno quella della parte di eſſa che porta il nome di Analiſi La relazione il rapporto la dipendenza fra le grandezze cognite ed incognite di un problema ne ſono le condizioni: e le condizioni tradotte nel linguaggio tutto proprio dell' Algebra ne fanno l'equazioni ond' eſſo ſi ſcioglie. La ſoluzione adunque di un problema ſempre preſenta alle noſtre vedute l' idea di una relazione di un rapporto di una dipendenza fra certe grandezze. Queſta relazione queſto rapporto queſta dipendenza è ciò che oggi ſi eſprime in analiſi col nome *funzione*. L' Algebra adunque è la ſcienza delle grandezze in generale: e l' analiſi propriamente parlando è la parte di queſta ſcienza

che ſi verſa ſul calcolo delle funzioni. Le funzioni di cui oggi ſi è l'analiſi co'ſuoi progreſſi arricchita ſono di un numero grande e per così dire infinito. Vi ſono delle funzioni, dette algebriche, la di cui eſpreſſione ſotto la propria forma è limitata e finita: e vene ſon delle altre che traſcendenti ſi dicono, le quali non poſſono eſprimerſi che con un progreſſo di monomj illimitato e infinito. Le funzioni algebriche quantunque ſotto la propria forma hanno un'eſpreſſione limitata e finita; frattanto poſſono ancor valutarſi con un progreſſo finito o infinito di varj monomj. Le potenze intere e poſitive di un binomio ſi poſſono eſprimere con un progreſſo di termini ma limitato e finito: le frazionarie però e le negative, le frazioni, che ſono tutte algebriche funzioni, non ſi poſſono eſprimere che ſempre con altri illimitati e infiniti. I logaritmi, le funzion circolari, che ſono delle funzion traſcendenti, non ſi poſſon avere che in progreſſi di termini ſempre illimitati e infiniti. Quindi gli aggregati di termini con cui ſi valutano le funzioni algebriche ſon capaci di eſſer ridotti ad un' eſpreſſione limitata, e

finita; laonde quegli altri con cui sen' esprimono le trascendenti non possono in alcuna maniera esser mutate nel loro infinito andamento. Ecco l' origine adunque delle serie; delle serie capaci di somma e insommabili; delle serie finite e infinite.

Quei progressi, cui le funzioni di qualunque specie ci portano, ed in cui i termini componenti comminano con un certo ordine con una certa legge costante ed a tutti comune, si distinguono col vocabolo *serie*. Quelle serie, che mercè alcuna operazione qualunque posson ridursi ad una espressione limitata e finita si chiaman sommabili; ed insommabili quelle altre si dicono che affatto ricusano questa riduzione. Le serie son finite o infinite secondo che hanno un numero finito o infinito di termini. Le potenze intere e positive di un binomio, e le potenze negative di esso ci danno di questa doppia specie di serie un esempio. Le serie sono dippiù divergenti o convergenti secondo che i termini componenti camminano crescendo o decrescendo. Le serie divergenti quanto più continuate tanto più si discostano dal valore delle

funzioni cui esse appartengono, e ne esprimon perciò il solo sviluppo: le convergenti al contrario tanto più visi accostano, e ne rappresentano lo sviluppo insieme e il valore. Le funzioni potendo all' infinito variare fa che stragrande sia il numero delle serie in analisi. Le serie insommabili sono assai più delle sommabili. Fra queste le Algebriche, le geometriche, le algebrico-geometriche ne sono le specie principali. Le algebriche son quelle che formansi di progressioni aritmetiche; le geometriche di progressioni geometriche; e le algebrico-geometriche di serie algebriche e geometriche. Queste tre specie di serie distinguonsi in ordini. Si dicono dell'n (sebbene l'autore delle sezioni dica dell'$n-1$) ordine le algebriche coll'n differenze costanti, le geometriche provenienti da n progressioni geometriche, le algebrico-geometriche in cui gli ordini delle due serie componenti fanno n.

Lo sviluppo delle frazioni proprie razionali genera una specie di serie in cui un termine qualunque risulta costantemente da un determinato numero de' precedenti moltiplicati in quantità costanti. Queste serie, dette dagli analisti *ricorrenti*, distinguonsi ancora per ordini: e si dicono dell'ordine n quelle in cui alla formazione di un termine vene concorrono

n de' precedenti. Le progressioni aritmetiche in cui ciascun termine è funzione de' due che lo precedono son serie ricorrenti del secondo ordine; e le geometriche lo sono del primo in quanto ogni termine dipende dal precedente soltanto. Quindi le serie algebriche e geometriche, e perciò le algebrico-geometriche son tutte comprese nella classe delle ricorrenti.

L' autore delle lezioni parla delle serie algebriche, di alcune specie particolari dell'algebrico-geometriche, e nulla ci dice delle geometriche, algebgeometriche in generale, e ricorrenti. Quindi soggiungo quì di passaggio che quando delle serie geometriche sene conoscono le progressioni che le compongono, e dell'algebrico-geometriche le serie che vanno a formarle: quando si conosce dippiù il modo onde le une e le altre combinansi per tale composto: allora sene hanno i termini e le somme generali col combinare nel modo stesso i termini e le somme generali delle serie componenti. Quando però nè le serie componenti, nè il modo ond'esse concorrono a compor le composte ci è conosciuto; allora per averne i termini e le somme generali bisogna ricordarsi che esse son serie ricorrenti, e perciò che posson trattarsi col metodo onde queste si trattano.

Una serie ricorrente si somma completamente in infinito col risalire alla frazione ond' è venuta. Per vedere in ristretto come ciò si eseguisce sia

$$a+a'z+a''z^2+\ldots a^{(i)}x^i + \text{ec.}$$

una serie qualunque, e sia

$$(b+b'z+\ldots b^{(i)}z^i \text{ ec.}):(1-cz-c'z^2-\ldots c^{(i)}z^{i+1} \text{ ec.})$$

la frazione onde proviene: sia cioè

$$(b+b'z+\ldots b^{(i)}z^i \text{ ec.}):(1-cz-c'z^2-\ldots c^{(i)}z^{i+1} \text{ ec.})$$
$$=a+a'z+a''z^2+\ldots a^{(i)}z^i + \text{ec.}$$

e s'avranno i val. (A); $a=b$, $a=b'+ac$, $a''=b''+a'c+zc'$, $\ldots a^{(i)}=b^{(i)}+a^{(i-1)}c+a^{(i-2)}c'+\ldots a^{(r-1)}c^{(i-r)}$ ec.

Osservo ora questi valori e veggo che quando il numeratore e denominatore della frazione generatrice sono limitati in maniera quanto il massimo numero i degli apici non sia nel primo maggiore che nel secondo, allora ciascuno di essi è costantemente l'aggregato de' prodotti parziali di un numero determinato di quei che lo precedono ne' coefficienti di quel denominatore. Quindi la serie proposta è sempre ricorrente quando la frazione generatrice è propria e non spuria: quindi conoscendo la legge con cui una serie ricorre, e perciò le quantità moltiplicatrici $c''\ldots$ de' termini precedenti che concorrono a formarne uno qualunque di essa, cioè la *scala di relazione*, si conoscerà nell'atto stesso il denominatore della frazione generatrice, colle formule (A) il suo numeratore, e perciò la somma cercata.

Il termine generale di una serie riccorrente si ottiene collo scomporre similmente a' numeri (l. 107 + ... 107 6) la frazion-somma nelle sue frazioni semplici; collo svolgere in serie queste frazioni; e col sommarne infine i termini generali rispettivi che sanno sempre assegnarsi.

Una serie ricorrente perfine sa sommarsi in un numero finito n di termini, perchè la somma in infinito di essa oltre l'n suo termine si ottiene nel modo stesso onde sene ha quella di tutti i suoi termini, e perchè sottraendo la prima dalla seconda somma non dee aversene che a finita proposta.

Un'applicazione di questo metodo può vedersi nella serie enunciata. Infatti essendo $3, -3, 1$ la sua scala di relazione, sarà $(x-1)^3 : x^3$ il denominatore, $(x+1) : x^2$ il numeratore della frazione sua generatrice, epperò $x(x+1) : (x-1)^3$ la somma completa in infinito di essa; il suo termine generale, è manifesto ed $= n^2 : x^n ; (n^2(x-1)^2 + x(x+1) + 2n(x-1)x) : x^n (x-1)^3$ la sua somma in infinito oltre l'n suo termine, e finalmente la somma (p 103.l.7) de' primi suoi n termini.

Tanto basta su tale soggetto. Questo tratto estemporaneamente e così di volo abbozzato non ha permesso che io entrasse in più minuti dettagli. Passiamo intanto a sommar la serie enunciata colle formole (l.341). Prendiamone perciò la formola del valore di T: paragoniamola colla $T = n^2 : x^n$ della serie in questione e ne avremo finalmente $a = 1$

$b =$ ec. $= c$, $m = 2$, $h = x = q$; e quindi sostituendo questi valori nella . . . . . .

$$S = -\frac{1}{hq^{n-1}(q-1)^2}\left((q-1)\,an^m + (amq + (q-1)b)n^{m-1} + \frac{(m(m-1)aq(q+1)}{2(q-1)} + (m-1)bq + (q-1)c)\,n^{m-2} + \ldots \times -(q^n - 1)\right)$$

della somma generale ivi data, sene avrà . . .

$$S = \frac{-1}{x^n(x-1)^2}\left((x-1)n^2 + 2nx - \frac{x(x+1)}{x-1}(x^n - 1)\right)$$

$$= \frac{x(x+1)(x^n-1)}{x^n(x-1)^3} - \frac{n}{x^n(x-1)}\left(\frac{2x}{x-1} + n\right)$$

per quella che forma il soggetto delle domande proposte.

Per interpolare una serie altro non s'intende che inserire fra due termini consecutivi qualunque di essa un certo numero di altri termini, i quali conservin tra loro la legge stessa della data.

Sia $a, a', a'', a''', \ldots a^{(r-1)}, a^{(r)}$, ec. la serie da interpolarsi, e sia m il numero de' termini che vi si vogliono interpolare. Quindi incomincio a

riflettere che per ogni termine, eccetto il primo, della serie data sene hanno $m+1$ nell' interpolata, e perciò il numero de' termini che la serie proposta avrà dopo la sua interpolazione fino al suo termine generale $a^{(r)}$ sarà $r' = r(m+1) + 1$. Questa espressione dandoci $r = \frac{r'-1}{m+1}$ ci dà il termine generale della serie interpolata; poichè supposto conosciuto l'$a^{(r)}$ della proposta si avrà nell' atto stesso $a^{\left(\frac{r'-1}{m+1}\right)}$ per quello ad essa corrispondente dopo la sua interpolazione. Trovato il termine generale della serie interpolata si è arrivato al termine della questione, poichè col suo mezzo si ha tutta la serie interpolata. Per vedere il tutto più da vicino e più chiaramente proponiamoci d'interpolar di due termini la serie enunciata. Per questo caso noi abbiamo $m = 2$, $r = \frac{r'-1}{3}$, $n = r+1 = \frac{r'+2}{3}$

e $T\left(= \frac{n^2}{x^n}\right) = \frac{\left(\frac{r'+2}{3}\right)^2}{x^{\frac{r'+2}{3}}}$. Quindi facendo successivamente $r' = 1 = 2 = 3 = 4 = 5 =$ ec. sene avrà la serie interpolata

$$\frac{1}{x} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 : x^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 : x^{\frac{5}{3}} + \frac{2^2}{x^2} + \ldots$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^2 : x^{\frac{7}{3}} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 : x^{\frac{8}{3}} + \frac{3^2}{x^3} + \text{ec.}$$

serie in cui i denominatori formano una progressione geometrica, e i numeratori una serie algebrica del secondo ordine come nella enunciata.

Se la circostanza non domanda l' interpolazione per intero della serie, ma soltanto di due termini consecutivi qualunque; allora non occorre incominciar dal principio di essa l' inter-

polazione onde averne interpolati i termini preposti, ma basta incominciare i valori di r' da quello in cui $\frac{r'-1}{m+1}$ risulta $= r$, cioè bisogna incominciare da $r(m+1)+1$ i valori di r'. Come per esempio se i due termini verranno interpolarsi fra il terzo e quarto solamente della serie enunciata; allora sarà $n=3$, e però $r=2$,

$$r'=7=8=9=10 \text{ ce li dà in } T=\frac{x^2}{x^3}=\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{x^{\frac{10}{3}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{11}{3}\right)^2}{x^{\frac{11}{3}}}=\frac{4^2}{x^4}.$$ Se de'termini interpolati non sene vuol di tutti la cognizione, ma sene ha di bisogno quella di un solo; allora chiamando r'' il numero indicante il posto del termine cercato basta fare $r'=r(m+1)+1+r''$. Infatti se il secondo solamente de' due termini interpo-

lati è quello che si vuol conoscere, allora si avrà $r''=2$, e però essendo $m=2$, $r=2$, sarà

$$r'=9, \text{ e } T=\frac{\left(\frac{11}{3}\right)^2}{x^{\frac{11}{3}}} \text{ il termine cercato.}$$

Questo metodo d'interpolazione suppone conosciuto il termine generale, e perciò la legge della serie da interpolarsi; l'oggetto in generale però dell'interpolazione è di determinare de' valori intermedj fra certe osservate quantità senza conoscere la legge onde sono formate. Questo metodo adunque non può soddisfare a questo oggetto. Riflettendo però che l'interpolazione mira per l'ultimo fine la matematica pratica; che la matematica pratica renuncia al rigore de' risultati, e si contenta di un' approssimazione soltanto; che la principale perfezione de' metodi riguardanti la pratica consiste nelle spingere più verso il vero questa approssimazione: riflettendo a tuttociò; si resta convinto che il metodo di cui abbiamo parlato se non può a rigor geometrico soddisfare al fine dell'interpolazione,

si può però a rigor pratico e prossimamente: in effetto sebbene una serie di osservazioni non conservi una legge costante una legge perfetta, è facile frattanto scoprire il suo andamento quantunque incostante e imperfetto; scoperto questo suo andamento è facile fra le serie di cui sene conosce perfettamente la legge trovarne quella che più ad esso avvicinasi: trovata questa serie potrà essa trattarsi a luogo della proposta, e così arrivare con esattezza, nò già geometrica ma fisica, alla conoscenza delle osservazioni intermedie che avrebbero luogo fra i termini osservate di questa. Quanto Lalande ci ha fatto vedere, cioè che l'interpolazione delle osservazioni astronomiche può trattarsi senza errore sensibile nella più parte de'casi come se fosse delle serie algebriche del secondo ordine; può opportunamente servirci di esempio e di pruova.

I progressi del calcolo alle differenze han dato con tanta di generalità che di sublimità insieme e di analisi la soluzione del problema delle interpolazioni. Questo non è il luogo a parlare di teorie tanto complicate e sublimi. Ne parleremo forse in un altro lavoro: e diriziamo soltanto perora chi vorrà essere a giorno della bellezza di queste soluzioni al calcolo differenziale e integrale del Lacroix n. 873. e seg.

Questo tratto, per cui abbiamo rapidamente passato, ci presenta il quadro a formarci un' idea delle serie. In questo quadro si veggono nascer le serie fin da' primi principj dell' algebra: sene osservano dipinte le specie con colori chiari e distinti: se ne scorge l'interpolazione abbozzata in una maniera semplice e piana. Questo tratto adunque soddisfacendo a quanto sul principio per le addotte ragioni m' imposi, permette che io passi alle teorie, a cui mi chiamano l' enunciazioni seguenti.

PROB. 28.

Per la regola di doppia falsa posizione calcolare il valor di r *nell' equazione* $r^r = 2000$.

72 I logaritmi applicati all' equazione enunciata mi danno $A \ldots r \log r = \log. 2000 = 3,30103$. Quindi vengo a supporre $r = a = 4$, onde avrò dalla A, $4 \log. 4 = 2,408 : 4 = 3,30103$, cioè avrò un errore $m = 0,89279$ Un errore positivo mi convince di essere stata troppo piccola l' ipotesi azzardata per r. Quindi passo ad una seconda più grande, e suppongo $r = b = 5$; da cui ne ho

5 log. 5 = 3,49485 = 3,30103, e però un nuovo errore $n = -0,19382$: applicando alla formula (l. 316) $B...r = \frac{an + bm}{m + n}$ queste due ipotesi, ne avremo $r = 4,8216$. Questo risultato mi mostra che il vero valore di r è tra 4,8 e 4,9. Quindi passo a stabilire due altre ipotesi per r, cioè $r = a = 4,8$ ed $r = b = 4,9$; onde avrò mercè la A i due errori $m = 0,310722$, $n = -0,0809304$; e mercè la B, $r = 4,827725$.

Osservo i due risultati di r, e vi veggo essere identiche le prime tre cifre, e vi veggo perciò che la seconda correzione per r, cui questo metodo ci ha guidato, non cade che sulla quarta: quindi conchiudo che il vero valor di r è certamente tra 4,82 e 4,83. Passo pertanto a supporre $r = a = 4,82$, $r = b = 4,83$, onde averne colla A gli errori $m = 0,0087435$, $n = -0,0024345$, e colla B, $r = 4,827832$.

73 L'identità delle prime quattro cifre di questo, e del valore precedente di r, mi dice, di riguardare tra 4,827, e 4,828 il valore di r, e di supporre perciò successivamente $r = a = 4,287$, $r = b = 4,828$,

per quindi dedurne dalla A gli errori 0,0009197, −0,0001985, e con essi dalla B, $r = 4,827839$. Le prime sei cifre di questo e del risultato precedente sono le stesse, e perciò colla ripetizione de' medesimi calcoli partendo da nuove ipotesi non potrei sperare un' approssimazione maggiore che nella settima cifra. Quindi è che posso prendere per rigorosamente approssimato il valor di $r = 4,8278$ onde rispondere alla questione enunciata. Raccolgo intanto le diverse parti dell' operazione già da noi esposta, onde metterle tutte sott' occhi, nella seguente tavola.

Equ: $A...r$ log. $r = 3,30103$	Eq. $B...r = \frac{an + bm}{m + n}$
1.. ip. $r = a = 4$...err $m = 0,89279$	
2.. ip. $r = b = 5$...err. $n = -0,19382$	$r = 4,8216$
3.. ip $r = a = 4,8$...err. $m = 0,0310722$	
4.. ip. $r = b = 4,9$...err. $n = -0,0809304$	$r = 4,827725$
5.. ip. $r = a = 4,82$...err. $m = 0,0087435$	
6.. ip. $r = b = 4,83$...err. $n = -0,0024345$	$r = 4,827832$
7.. ip. $r = a = 4,827$...err. $m = 0,0009197$	
8... ip. $r = b = 4,828$...err. $n = -0,0001985$	$r = 4,827839$

PROB. 29.

Le cifre di un numero son tali che il loro prodotto è 54, la somma delle estreme divisa per la media è 6, e sottratto 594 dal numero si hanno le tre cifre stesse in ordine inverso. Che numero è?

74. Chiamo xyz il numero cercato, il quale posto sotto la forma $100x + 10y + z$ mi dà le tre equazioni $xyz = 54$, $\frac{x+z}{y} = 6$, $100x + 10y + z - 594 = 100z + 10y + x$, cioè $x - z = 6$, onde soddisfare alle condizioni enunciate. Quest' equazioni mi danno poi coll'eliminazione $x = 6 + z$, $y = \frac{z+3}{y}$ e $z^3 + 9z^2 + 18z - 162 = 0$. Il tutto adunque si riduce a ricavar da questa il valore di z: valore che non solo dee risultare reale, ma razionale ancora e positivo, acciò non sia in contradizione colla proposta enunciazione.

Osservando l' equazion finale $z^3 + 9z^2 + 18z - 162 = 0$ veggo nel suo ultimo termine negativo, e nel suo grado impari che le sue radici

debbono essere o due immaginarie ed una reale positiva, o tutte tre reali positive, o finalmente due reali negative ed una positiva: veggo inoltre nel suo secondo termine positivo negato il caso di tutte tre radici reali positive: quindi conchiudo che questa equazione non può avere che una sola radice reale positiva, e che il problema proposto non può ammettere che una sola soluzione: soluzione che ammetterà in effetto se questa radice è razionale.

75. Per avere questa radice, se esiste, io incomincio a riflettere che una equazione qualunque $z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + cz^{m-3} + \ldots t = 0$ di cui tutti i coefficienti sono interi, non può avere che intere le sue radici razionali, poichè se si nota con $z = \frac{p}{q}$ una di queste radici, in cui p, q sono de' numeri interi e primi tra loro si avrà $\frac{p^m}{q^m} = -\frac{1}{q^{m-1}}(ap^{m-1} \pm bqp^{m-2} \pm \ldots \pm cq^2 p^{m-2} \pm \ldots \pm tq^{m-1})$; cioè

$$\frac{p^m}{q} = -(ap^{m-1} + bqp^{m-2} + cq^2 p^{m-2} + \ldots tq^{m-1})$$

$= E$ (num. intero); cioè supponendo fratta la radice si avrà un risultato impossibile. Proseguo a riflettere dopo ciò che l'ultimo termine essendo sempre il prodotto di tutte le radici, ne avviene che le razionali debbono sempre trovarsi tra i fattori interi di esso. Quindi se si mettono successivamente per l'incognita in un' equazione tutti i fattori interi del suo ultimo termine si vedrà quali e quanti son quelli che la risolvono, e perciò se essa ha o nò delle radici razionali, e quante ne ha. Su di queste riflessioni è fondato il metodo a trovare le radici razionali di un' equazione conosciuto; sotto il nome de' divisori dell' ultimo termine: metodo che io vengo ad applicare al caso in questione.

76. Troppo lungo riuscirebbe sovente l' usar questo metodo nell' esposta maniera. Quindi è che si abbia pensato di fissare il carattere particolare di quei fattori dell' ultimo termine su di cui debbono cadere le radici cercate La determinazione di questo carattere è dipendente dal-

la trasformazione dell' equazioni. Supponendo in un' equazione l' incognita $z = u \pm 1$, senza altra operazione che di mutare in essa z in ± 1 noi ne avremo gli ultimi termini t_1, t_2 delle due trasformate che ne risultano. Quindi notando con d la parola divisore, avremo $u = \pm dt_1 = \pm dt_2$ e perciò $z = \pm dt_1 + 1 = \pm dt = \pm dt_2 - 1$: locchè c' insegna che fra i divisori di t quelli saranno i valori di z, che si troveranno tra i divisori di t_1 accresciuti, e tra quelli di t_2 diminuiti dell' unità.

77. Per applicarvi l' equazione di cui si tratta io vi faccio $z = u \pm 1$ e ne avrò $t_1 = -134$, $t_2 = -172$; e perciò dovendo z esser positiva ne avrò $z = d\,134 + 1 = d\,162 = d\,172 - 1$. Quindi trovando che fra i divisori di 162 il solo $+3$ è quello si vede tra i divisori di 134 accresciuti, e fra quelli di 172 diminuiti di 1, conchiudo che $z = 3$, e però $x = 9$, $y = 2$; e finalmente che il numero cercato $xyz = 923$.

PROB. 30.

Il Comandante di una fortezza assediata scrive al suo Generale che tante sono le centinaja de' suoi soldati quante le unità nella radice positiva dell'equazione $x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 18x = 28$. *Il biglietto viene in mano degli assediati che non intendon la cifra. Come la spiegherete?*

78. Per ispiegare la cifra del biglietto enunciato non si tratta che di risolvere l' equazione in esso proposta. Con un razicinio simile a quello del problema precedente io potrei determinare che una è la radice positiva di questa equazione e che 200 ne è la sua qnantità: ma volendo far conoscere il metodo generale e sublime, che l' immortale Lagrange ci ha dato nelle memorie di Berlino (an. 1768.) per la soluzione numerica dell' equazioni, io me ne allontano: e ciò ancora perchè in esso dovrò dimostrare molti teoremi, di cui manca l'algebra delle lezioni.

79. Un' equazione non può avere che delle radici razionali eguali o ineguali, delle radici irrazionali eguali o ineguali, e delle radici immaginarie. Il metodo di Mayer proposto nelle Memorie di Pietroburgo (an. 1728), di cui

quello del Lagrange non ne è in fondo che il compimento e la perfezione, ci dà direttamente nel primo caso le radici, cene assegna i limiti nel secondo, e cene suggerisce nel terzo gli argomenti certi e sicuri. Questo metodo adunque comprende in un modo il più generale tutte le ricerche che si posson proporre sulla soluzione numerica dell' equazioni.

Il termine generale delle serie algebriche è una equazione del grado m, la cui incognita è la caratteristica del suo numero di termini. Quindi se in un'equazione qualunque si fa passare l' incognita per tutti i termini della serie naturale de' numeri, sene avrà sempre un seguito che formerà una serie algebrica, e che qualche analista ha chiamato serie dell' equazione. Tutti i termini zero di questa serie indicheranno nel corrispondente de' valori dell' incognita una radice dell' equazione: tutti i cambiamenti di segno fra i termini di essa mostreranno de' passaggi per zero, e però delle radici fra quei termini de' valori dell' incognita, che producono tali cambiamenti. Quindi il carattere di questa serie dell' equazione ci dà prontamente le radici se l' e-

quazione cui appartiene ne ha delle razionali, o i limiti di queste radici se esse non sono che irrazionali.

Si rifletta però che quando la differenza k della serie naturale de' valori dell' incognita ... c, k, 2k, 3k, 4k, ec, è maggiore della più picciola differenza fra le radici della proposta equazione, allora apparisce che fra un suo termine e l'altro vi possono esser contenute più di una radice; ma sempre però in numero dispari come vedremo (198), e possono perciò gl' istessi limiti appartenere a più radici. Quindi per avere i limiti di tutte le radici bisogna prendere k $=$, o $<$ della più picciola differenza fra queste radici. E' indispensabile adunque la ricerca di k sotto tale condizione; ricerca per altro che ci mostrerà il numero delle radici eguali ed immaginarie contenute nell' equazione. Gli argomenti sull'esistenza di queste radici indipendentemente della ricerca che or veniamo di notare, si possono apprendere negli *Elementi teorico-pratici del P. Gherli* v 2. p 246 e seg., in cui si trova sviluppato ne' più minuti dettagli il metodo di Mayer di cui abbiamo già fatto parola.

80. Noi divideremo intanto la somma di tutte le nostre ricerche in due parti. Nella prima troveremo in generale la più piccola differenza fra tutte le radici di una equazione qualunque con applicarla a quella che forma il soggetto del proposto problema; e nella seconda vedremo una delle semplicizzazioni di cui il metodo stesso è capace.

I. Se in una equazione si mette $-x$ per x; se si cambia cioè il segno a tutti i termini suoi, ne' quali x vi entra con dimensioni dispari, allora verrà essa a mutarsi in un' altra, le cui radici non sono che le stesse, ma con segno contrario. La ricerca adunque delle radici negative di una equazione si riduce a quella delle positive, previa soltanto l' indicata mutazione ne' segni. Non parleremo perciò che delle sole radici positive: potendo il metodo stesso adoprarsi per le negative.

81. Io rifletto a tale oggetto che un' equazione con segni alternativi non ha che positive le sue radici, poichè la sostituzione di una quantità negativa rendendo i suoi termini o tutti positivi, o tutti negativi non potrebbe giammai

ridurla a zero. Quindi la forma da darsi ad una equazione le di cui radici si suppongono positive si è $(A)\ldots x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots \pm Rx^2 \mp Sx \pm T = 0$; avvertendo che il segno superiore corrisponderà sempre ad m pari, e l' inferiore ad m impari.

Se noi trasformiamo questa equazione in un altra le di cui radici sieno le differenze di quelle di essa, allora noi avremo un mezzo facile, onde avere una quantità che sia minore della più picciola di esse. Infatti se $y^n + A'y^{n-1} + B'y^{n-2} + \text{ec.} = 0$ rappresenta questa trasformata, e se si farà in essa $y = \frac{1}{z}$ avremo la . . . .

$(C)\ldots z^n + A''z^{n-1} + B''z^{n-2} + \text{ec.} = 0$, in cui preso il limite superiore f delle sue radici positive, sarà $f > z$, e però $\frac{1}{f} < \frac{1}{z} < y$, minore cioè della più picciola differenza fra le radici della proposta Quindi potrà farsi $k = 0 < \frac{1}{f}$. Tutta la ricerca adunque non si riduce che al calcolo di questa trasformata. Ecco che andiamo ad eseguirlo.

8a. Per determinare la trasformata di cui si parla incomincio a riflettere che essendo m le radici della proposta, saranno $m(m-1)$ quelle della trasformata, poichè $m(m-1)$ sono (l.337) le bine combinazioni di m quantità, di cui però la metà sono eguali e con segno contrario dell' altra metà; quindi dovendo essere le radici positive della trasformata eguali in numero ed in quantità alle negative, dovrà essa avere una forma tale, quanto rimanchi la stessa mettendo $-x'$ per x'; vi dovranno mancare cioè tutti i termini con potenze impari di x'; dovrà essere cioè della forma . . . . .

$x'^{m(m-1)} + A'x'^{(mm-1)-2} + B'x'^{m(m-1)-4} + \text{ec.} = 0$. Facendo quindi in questa equazione . . . $y = x'^2$, $\frac{m(m-1)}{2} = n$, e riflettendo che y è sempre positivo, si avrà $(B)\ y^n - A'y^{n-1} + B'y^{n-2} \ldots \pm T' = 0$. Tutto è determinato in questa equazione fuori de' coefficienti A', B', ec. Noi l' andiamo a determinare.

83. Si osservi a tale oggetto che i coefficienti di un'equazione non sono che combinazioni delle sue radici: quindi i coefficienti della (B) non deono essere che una funzione di quelli della (A). Cerco adunque di scoprire il carattere di queste funzioni nella natura di tali coefficienti, ed osservo che se la (A) avrà le sole due radici a, b, la (B) ne avrà le $(a-b)^2$ e sarà $A' = a^2+b^2-2ab = 2(a^2+b^2)-(a+b)^2$, $B' = C' =$ ec. $= 0$; se essa ne avrà le sole tre a, b, c, la (B) ne avrà le $(a-b)^2, (a-c)^2, (b-c)^2$, e sarà

$$A' = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2$$
$$-2(ab+ac+bc) = 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2,$$
$$B' = (a-b)^2(a-c)^2 + (a-b)^2(b-c)^2 + (a-c)^2(b-c)^2$$
$$= 3(a^4+b^4+c^4) - 2(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) + \ldots$$
$$3(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$
$$C' = D' = \text{ec.} = 0.$$

Queste due osservazioni ci bastano, onde insegnarci che i coefficienti della (B) sono dipendenti dalle somme delle potenze simili delle radici della (A) Quindi passo a calcolare in generale le somme delle potenze simili delle radici di un' equazione per mezzo de' suoi coefficienti, i quali sono nel nostro caso le sole quantità conosciute.

84. Il grado di un'equazione, e però il numero delle sue radici è sempre determinato: le potenze di queste radici però che si vogliono sommare può esserlo indeterminato: quindi io veggo che si possono incontrare due casi, l'uno quando il grado r da sommarsi delle radici è minore del grado dell' equazione, e l'altro quando ne è maggiore. Io incomincio dal primo.

85. Divido successivamente l' equazione

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots \pm T = 0$$

di cui le radici suppongo che sieno $a, b, c, \ldots t$, per $x-a, x-b, \ldots x-t$, onde averne l' equazioni

$$x^{m-1} - A_1 x^{m-2} + B_1 x^{m-3} \ldots \mp S_1 = 0$$
$$x^{m-1} - A_2 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} \ldots \mp S_2 = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x^{m-1} - A_m x^{m-2} + B_m x^{m-3} \ldots \mp S_m = 0$$

dalla cui somma io poi ottengo l'equazione

$$mx^{m-1} - (A_1 + A_2 + \ldots A_m)x^{m-2} + \ldots$$

$$(B_1 + B_2 + \ldots B_m)x^{m-3} \ldots \mp (S_1 + S_2 + \ldots S_m) = 0$$

La doppia espressione di cui è capace questa equazione è quella che ci porta al fine proposto. In effetto ogni termine del coefficiente di x^{m-2} contiene tutte le radici meno una alternando. La somma adunque di questi termini conterrà ciascuna di queste radici $m-1$ volte, e sarà perciò $= (m-1)A$. Similmente ciascun termine del coefficiente di x^{m-3} non essendo che l'aggregato de' bini prodotti di tutte le radici meno una alternando, è chiaro che ciascun bino prodotto mancherà a giro in due solamente di essi, e però non vi sarà contenuto nella lor somma che $m-2$ volte; somma che sarà espressa perciò con $(m-2)B$, e così di seguito. Quindi l'una delle due indicate espressioni si è . . .

$$mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} \ldots \mp S = 0$$

§6. Per averne la seconda si esprima con q_r q_{r-1} .. q le somme delle diverse potenze delle radici in questione, e riflettendo che . .

$A_1 = A - a, A_2 = A - b, A_3 = A - c, \ldots, A_m = A - t$

e però che $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_m = mA - q$;

che $B_1 = B - aA_1 = B - Aa + a^2, B_2 = B - bA_2 =$

$B - Ab + b^2, \ldots B_m = B - tA_m = B - At + t^2$,

e però $B_1 + B_2 + \ldots B_m = mB - Aq + q_2$

che $C_1 = C - aB_1 = C - aB + Aa^2 - a^3, C_2 = C - B_2$

$= C - Bb + Ab^2 - b^3, \ldots C_m = C - B_m t = C - Bt + At^2 - t^3$

e però $C_1 + C_2 + \ldots C_m = mC - Bq + Aq_2 - q_3$

che così continuando si arriva a trovare . . .

$$S_1 + S_2 + \ldots S_m = mS - Rq + Pq_2 \ldots \pm Aq_{m-2} \mp q_{m-1}$$

in cui il segno superiore ha luogo quando m è pari, e quando è impari l'inferiore. Quindi la seconda espressione cercata si è . . .

$$mx^{m-1} - (mA - q)x^{m-2} + (mB - Aq + q_2)x^{m-3} - (mC - Bq + Aq_2 - q_3)x^{m-4} \ldots \mp (mS - Rq + Pq_2 \ldots \pm Aq_{m-2} \mp q_{m-1}) = 0$$

Dal paragone di queste due espressioni io ne ottengo l' equazioni

$(m-1)A = mA - q$

$(m-2)B = mB - Aq + q_2$

$(m-3)C = mC - Bq + Aq_2 - q_3$

$\vdots$

$(m-m+1)S = mS - Rq + Pq_2 \ldots \pm Aq_{m-2} \mp q_{m-1}$

donde si deduce

$q = A$

$q_2 = Aq - 2B$

$q_3 = Aq_2 - Bq + 3C$

$\vdots$

$q_{m-1} = Aq_{m-2} - Bq_{m-3} \pm (m-1)S$ &c

Queste formule che ci danno le somme cercate fino al grado $m-1$ ci dicono che bisogna passare alla ricerca del secondo caso, onde averle qualunque sia il valore di r.

87. Se suppongo in questo secondo caso $r = m+n$, e moltiplico per x^n l' equazione proposta, ne avrò $x^r - Ax^{r-1} + Bx^{r-2} \ldots \pm Tx^{r-m} = 0$. Se metto quindi in questa nuova equazione successivamente per x ciascuna delle radici $a, b, c, \ldots t$, ne avrò il seguito dell' equazioni

$$a^r - Aa^{r-1} + Ba^{r-2} \ldots \pm Ta^{r-m} = 0$$

$$b^r - Ab^{r-1} + Bb^{r-2} \ldots \pm Tb^{r-m} = 0$$

$$c^r - Ac^{r-1} + Bc^{r-2} \ldots \pm Tc^{r-m} = 0$$

$$\vdots$$

$$t^r - At^{r-1} + Bt^{r-2} \ldots \pm Tt^{r-m} = 0$$

dalla di cui somma ne otterrò

$$a^r + b^r + c^r \ldots + t^r - A(a^{r-1} + b^{r-1} + c^{r-1} \ldots + t^{r-1}) + B(a^{r-2} + b^{r-2} + c^{r-2} \ldots + t^{r-2}) \ldots \pm T(a^{r-m} + b^{r-m} \ldots + c^{r-m} \ldots + t^{r-m}) = 0$$

cioè

$$q_r = Aq_{r-1} + Bq_{r-2} \ldots \pm Tq_{r-m} = 0$$

e quindi

$$q_r = Aq_{r-1} - Bq_{r-2} \ldots \mp Tq_{r-m}$$

Le due formule generali adunque

(D)

$$q_{m-1} = Aq_{m-2} - Bq_{m-3} \ldots \pm (m-1)S$$

$$q_{m+n} = Aq_{m+n-1} - Bq_{m+n-2} \ldots \mp Tq_n$$

ci dando successivamente per tutti i casi le somme delle potenze simili delle radici di una equazione, mercè la cognizione de' suoi coefficienti.

88. Come queste formule ci danno le somme in questione col soccorso de' coefficienti dell' equazione per cui si cercano, così ci danno i coefficienti di un'equazione per mezzo delle somme delle potenze simili delle sue radici. Quindi se noi arriveremo a trovare le somme delle potenze simili delle radici della (B) avremo immediatamente i suoi coefficienti. Queste somme non debbon essere che delle funzioni delle diverse potenze r della radici della (A), poichè osservammo (82) che questi coefficienti non sono che delle funzioni di tale somma.

Sieno $l, l_2, l_3, \ldots l_r$ le somme delle diverse potenze delle radici della (B); radici le quali sono

$(a-b)^2, (a-c)^2, (a-d)^2, (a-e)^2$ ec.

$(b-c)^2, (b-d)^2, (b-e)^2$ ec.

$(c-d)^2, (c-e)^2$, ec.

$(d-e)^2$ ec.

e di cui sene cerca la somma delle potenze r^2 Io debbo adunque trovare il termine sommatorio delle quantità

$(a-b)^{2r}, (a-c)^{2r}, (a-d)^{2r}, (a-e)^{2r}$ ec.

$(b-c)^{2r}, (b-d)^{2r}, (b-e)^{2r}$, ec.

$(c-d)^{2r}, (c-e)^{2r}$, ec.

$(d-e)^{2r}$, ec.

89. Per venirne a capo io riflettto che le potenze pari di un binomio hanno nel loro sviluppo un termine medio della forma

$\frac{2r(2r-1)(2r-2)\ldots(r+1)}{2.3 \ldots r} a^r b^r$, il cui coefficiente è il massimo fra tutti gli altri, e che inoltre tali potenze pari contengono tutte le possibili permu-

tazioni delle quantità a, b: quindi è facile rilevare che sviluppando le quantità da sommarsi, si vedrà nella lor somma che le quantità a^{2r}, b^{2r}, c^{2r} ec. vi saranno contenute $m-1$ volte, cioè vi sarà contenuto un termine della forma $(m-1)q_{2r}$; che vi sarà inoltre contenuto il prodotto di tutte le permutazioni come $a^{2r-1}b$, $b^{2r-1}a$ per $2r$, quello di tutte le permutazioni come $a^{2r-2}b^2$, $b^{2r-2}a^2$ per $\frac{2r(2r-1)}{2}$, quello di tutte le permutazioni come $a^{2r-3}b^3$, $b^{2r-3}a^3$ per $\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{2\cdot 3}$, e così seguitando quello finalmente di tutte le permutazioni come $a^r b^r$ per $\frac{2r(2r-1)(2r-2)\ldots(r+1)}{2\cdot 3\cdot\ldots r}$

90 Per trovare un'espressione, onde racchiuda tali permutazioni, che son delle funzioni simetriche delle radici di un' equazione, io osservo che $(a^v+b^v+c^v+\text{ec.})(a^u+b^u+c^u+\text{ec.})$ contiene nel suo sviluppo tutti i prodotti come $a^v b^u$, $b^v a^u$, e tutte le potenze come... a^{v+u} b^{v+u}, ec. Quindi risulta che

$q_v q_u = q_{v+u} + q_{v,u}$, e perciò $q_{v,u} = q_v q_u - q_{v+u}$. Facendo adunque successivamente $u = 2r-1$, $= 2r-2$, $= 2r-3 = \ldots r$ ed $u = \ldots 1$, $= 2$, $= 3$, $= \ldots r$, si avrà la somma di tutte le permutazioni o funzioni simetriche come... $a^{2r-1}b$, ab^{2r-1} espressa da $q_{2r-1}q - q_{2r}$, quella di tutte le permutazioni, o funzioni simetriche come $a^{2r-2}b^2$, $b^{2r-2}a^2$, espressa da $q_{2r-2}q - q_{2r}$ e così di seguito fino a quella delle permutazioni o funzioni simetriche come $a^r b^r$ espressa da $\frac{q_r q_r - q_{2r}}{2}$. Quindi l'unione delle quantità proposte si è

$$l_r = (m-1)q_{2r} - 2r(q_{2r-1}q - q_{2r}) + \frac{2r(2r-1)}{2}(q_{2r-2}q_2 - q_{2r}) \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2\cdot 3\ldots r\cdot 2}(q_r q_r - q_{2r}) = mq_{2r} - 2rq_{2r-1}q + \frac{2r(2r-1)}{2}q_{2r-2}q_2 \ldots \pm \frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2\cdot 3\ldots r\cdot 2}q_r^2$$

$$-\left(1 - 2r + \frac{2r(2r-1)}{2} \ldots \pm \frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2\cdot 3\ldots r\cdot 2}\right)q_{2r}$$

ma osservando che il coefficiente di q_{2r} è lo sviluppo di $\frac{(1-1)^{2r}}{2}$, cioè $=0$, si avrà

$$(E)\ldots l_r = mq_{2r} - 2rq_{2r-1}\,q + \frac{2r(2r-1)}{2}\,q_{2r-2}\,q_2 \ldots \pm \frac{(2r\,2r-1)\ldots(r+1)}{2.3\ldots r.2}\,q_r q_r.$$

Con questa espressione noi avremo tutto l' occorrente onde conoscere tutta la trasformata di cui si tratta. Noi le faremo vedere quando verremo all' applicazione; applicazione che faremo dopo avere esposto gli argomenti che la (B) ci porge sulle radici eguali ed immaginarie esistenti nella (A), e dopo averne mostrato la maniera di ottenerle.

91 Si supponghi che la (B) sia risultata della forma $y^n - A'y^{n-1} + B'y^{n-2} \ldots \pm Ky^p = 0$, cioè della forma $(y^{n-p} - A'y^{n-p-1} + B'y^{n-p-2} \ldots \ldots \pm K')y^p = 0$; la prima delle quali ci dà p valori di y eguali a zero, cioè ci dà l'argomento che la (A) contiene $2p$ radici eguali, e la seconda ci darebbe segni, onde conoscere il numero delle radici immaginarie, se avremmo il mezzo, di rilevarne quello delle radici negati-

ve di un'equazione qualunque. Infatti sappiamo (Dalembert mem. Acad. Berl. 1746.) che le radici immaginarie di un' equazione son sempre in numero pari, e che una della forma $f+g\sqrt{-1}$, dovrà sempre avere la sua corrispondente $f-g\sqrt{-1}$: quindi se fra le radici della (A) vene saranno delle immaginarie $f\pm g\sqrt{-1}$, $f\pm g'\sqrt{-1}$, ec. i valori di x' non possono essere che della forma $a-b$; $a-f\mp g\sqrt{-1}$, $f-f'\pm(g-g')\sqrt{-1}$, $2g\sqrt{-1}$, e però quei di $y = x'^2$ non possono avere che la forma . . . . . .

$$(a-b)^2, (a-f\mp g\sqrt{-1})^2, (f-f'\pm(g-g')\sqrt{-1})^2$$

$(2g\sqrt{-1})^2$ cioè reali positivi, immaginarj e reali negativi. Si osservi però che ogni coppia di radici immaginarie esistenti nella (A) dà necessariamente per un valore $=(2g\sqrt{-1})^2 = -4g^2$ cioè dà una radice reale negativa nella (B), e che tutte le radici negative della (B) non possono provenire che dalle coppie delle immaginarie della (A): quindi conoscendo quante radici negative si contengono nella (B), noi cono-

ſceremo quante coppie di radici immaginarie eſiſtono nella (A).

92. L'Analiſi però non ci ſuggeriſce delle regole generali, e ſicure, onde venire a queſta cognizione. Il teorema di Carteſio generalizzato e dimoſtrato da Degua (Mem. Acad. 1741), cioè *che ogni equazione in generale non può avere un numero di radici poſitive maggiore di quello delle variazioni di ſegno, nè un numero di radici negative maggiore della ſucceſſione dello ſteſſo ſegno*, ovvero, *ogni equazione di cui le radici ſono reali ha preciſamente tante radici poſitive quante variazioni, e tante negative quante ſucceſſioni dello ſteſſo ſegno*; queſto teorema io dico che è la regola più generale da noi conoſciuta, altra cognizione non ci ſomminiſtra applicandolo alla (B) che quella dell'eſiſtenza o non eſiſtenza delle radici immaginarie nella (A) e quella di un limite ſul numero delle loro coppie: quindi per mezzo della (B) poſſiamo avere l'argomento ſe la (A) contiene delle radici immaginarie, ma non poſſiamo ſaperne il numero. Il metodo però di cui ſiamo in dettaglio, ci dà il compenſo, onde arrivare in una maniera indiretta a quanto non

ci porta direttamente. Infatti ſe con eſſo troviamo le radici eguali ed ineguali dell'equazione avremo nella differenza tra il numero di eſſe, ed il grado dell'equazione il numero delle radici immaginarie. Dopo avere ſottomeſſo a qualche eſame l'equazione (B) noi vedremo come da eſſa ſene ottengono le radici eguali, ineguali, e però immaginarie.

93. Per avere le radici eguali di un'equazione abbiamo biſogno di un teorema, che unitamente a tanti altri indiſpenſabili mancano nelle lezioni. Ecco che andiamo a dimoſtrarlo.

Se dividiamo i termini di un'equazione

(A). $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots \mp St \pm T = 0$ per x, e li moltiplichiamo nel tempo ſteſſo pel ſuo eſponente, ne avremo un'altra . . .

(B). $mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + (m-3)Cx^{m-4} \ldots \mp S = 0$, le di cui radici avranno per limiti quelle della propoſta (A).

In effetto ſieno a, b c, ec le radici della (A) diſpoſte ad ordine di grandezza, ſia cioè $a > b$, $b > c$, $c > d$, ec, ed avremo . . .

$(A) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ec. Inoltre si faccia nella proposta (A) successivamente $x = x+a = x+b = x+c =$ ec. ed è chiaro che ne avremo delle trasformate (A_1), (A_2), (A_3) ec. le di cui radici essendo rispettivamente $a-a$, $b-a$, $c-a$, ec.... $a-b$, $b-b$, $c-b$, ec... $a-c$, $b-c$, $c-c$, ec...ec. ci mostrano che manca in tutte il termine noto, quindi è facile il vedere, che i rispettivi ultimi termini di queste trasformate sono

(B_2).. $ma^{m-1} - (m-1)Aa^{m-2} + (m-2)Ba^{m-3}$ ec. $=$
$\pm(b-a)(c-a)$ ....

(B_3).. $mb^{m-1} - (m-1)Ab^{m-2} + (m-2)Bb^{m-3}$ ec. $=$
$\pm(a-b)(c-b)$ ....

(B_4)....$mc^{m-1} - (m-1)Ac^{m-2} + (m-2)Bc^{m-3}$ ec. $=$
$\pm(a-c)(b-c)$ ....

ec. ec. ec.

i quali, come chiaramente si vede, sono con segni alternativi. Osservo frattanto che mettendo successivamente nella (A_1) a, b, c, ec. a luogo di x, avremo i risultati (B_2), $(B\ )$, (B_4) ec. avremo cioè de' risultati con segni contrarj: donde conchiudo che le radici $m-1$ della (B_1) so-

no fra le m della proposta; cioè fra le a, b, c, ec Applicando quindi questo teorema al caso nostro ne risulta che se la (A) avrà p radici $= a$, q radici $= b$, r radici $= c$, ec. la (B) conterrà $p-1$, $q-1$, $r-1$, ec. radici $= a$, b, c, ec. cioè se la $(A) = (X).(x-a)^p(x-b)^q(x-c)^r$ ec. sarà la $(B) = (X').(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}$ ec., cioè le (A), (B) avranno un comun divisore $(R) = (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}$ ec.

Quindi $\frac{(A)}{(R)} = (X).(x-a)(x-b)(x-c)$ ec $= (K)$, cioè dividendo la proposta pel massimo commun divisore che essa ha colla (B) sene avrà la (K) che contiene tutte le sue radici, colla differenza soltanto che le multiple sono in essa divenute semplici: quindi (B), (K) hanno il massimo commun divisore $(R') = (x-a)(x-b)(x-c)$ ec. quindi $\frac{(K)}{(R')} = (X)$: quindi finalmente, raccogliendo, col dividere per x la proposta (A), e col moltiplicarne i termini pe' rispettivi esponenti; col prendere tra la risultante (B) e la proposta (A) il massimo commun divisore (R);

col dividere la propofta (A) per quefto commun divifore (R); col prendere tra quefto quoziente (K) e la (B) il maffimo commun divifore (R'); col dividere infine il quoziente (K) per quefto divifore (R'), ne avremo le due equazioni (X), (R') la prima delle quali, contenendo tutte le radici difuguali, e la feconda tutte le uguali prefe una volta, fi potranno trattare col metodo dell' equazioni con radici tutte ineguali. Il metodo adunque per avere le radici uguali di un'equazione non cofifte che nella riduzione a quello per averne le ineguali. Le radici ineguali pofitive di un' equazione fi hanno col mettervi fucceffivamente per x i termini della ferie o, k, 2k,...nk; e le negative col foftituire $-x$ ad x, e quindi nuovamente o, k, 2k,.. nk per x.

94. L'equazione propofta può contenere ancora delle radici immaginarie. Noi non abbiamo de' metodi a priori che per folo conofcerne l' efiftenza. Il loro numero non fi determina che a pofteriori, come abbiamo veduto: quindi l' ultima foftituzione nk che dà l' ultima radice ci potrebbe effere ignota, fe non avremmo de' mezzi onde venirne a cognizione. L' uno di tali

mezzi fi è quello di vedere nella ferie dell'equazione dopo la foftituzione di nk per x, fe i termini vanno all' infinito fenza dare alcun zero, o alcun cambiamento di fegno. Quefto progreffo infinito fi rileva allorchè prendendo fino alle coftanti le differenze, e fcrivendole l' una fotto dell' altra, daranno le linee verticali collo fteffo fegno. Noi ne vedremo la ragione, allorchè verremo all' applicazione.

95. Un fecondo mezzo farebbe quello di paragonare nk col limite f delle radici pofitive, poichè dee effere fempre minore. Abbiamo avuto bifogno (80) di quefto limite per la determinazione di k, ma non abbiamo infegnato come trovarlo. Per nulla lafciare fenza di noftrazione non ci refta che determinare il limite delle radici pofitive di un' equazione. La teoria delle trasformazioni cene fuggerifce la pronta maniera onde foddisfarvi. Infatti fia

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots T = 0$$

un' equazione qualunque, in cui fatta $x = h + y$ cene dà la trasformata in ordine alle potenze di y incominciando dal zero

$$h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + Ch^{m-3} + \ldots T$$
$$+ (mh^{m-1} + (m-1)Ah^{m-2} + (m-2)Bh^{m-3} \ldots)$$
$$+ y^2 \left(\frac{m(m-1)}{2} h^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Ah^{m-3} \ldots\right)$$
$$+ y^3 \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} h^{m-3} + \ldots\right)$$
$$+ \text{ec.}$$
$$= 0$$

ovvero fatto

(M)

$$A_1 = h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + \ldots T$$
$$B_1 = mh^{m-1} + (m-1)Ah^{m-2} + \ldots S$$
$$C_1 = \frac{m(m-1)}{2} h^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Ah^{m-3} + \ldots R$$

ec. ec.

si avrà la trasformata

$A_1 + B_1 y + C_1 y^2 + \text{ec.} = 0$, in cui fatto $h = n+1$, ci dà

$$A_1 = (n+1)^m + A(n+1)^{m-1} + B(n+1)^{m-2} + \ldots T$$
$$B_1 = m(n+1)^{m-1} + (m-1)A(n+1)^{m-2}$$
$$+ (m-2)B(n+1)^{m-3} + \ldots S$$

$$C_1 = \frac{m(m-1)}{2}(n+1)^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} A(n+1)^{m-3}$$
$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{2} B(n+1)^{m-4} + \ldots R$$

ec. ec. ec.

96. Incomincio ad osservare che

(N)

$$(n+1)^2 = 1 + n(n+1) + n$$
$$(n+1)^3 = n(n+1)^2 + (n+1)^2 = 1 + n(n+1)^2 + n(n+1) + n$$
$$(n+1)^4 = n(n+1)^3 + (n+1)^3 = 1 + n(n+1)^3 + n(n+1)^2 + n(n+1) + n$$

. . . . . .

$$(n+1)^m = 1 + n(n+1)^{m-1} + n(n+1)^{m-2} + \ldots n$$

epperò

$$A_1 = 1 + n(n+1)^{m-1} + n(n+1)^{m-2} + \ldots n$$
$$+ A(n+1)^{m-1} + B(n+1)^{m-2} + \ldots T$$
$$B_1 = m(1 + n(n+1)^{m-1} + n(n+1)^{m-2} + \ldots n)$$
$$+ (m-1)A(n+1)^{m-2} + \ldots S$$

ec. ec.

Passo avanti ed osservo che essendo n una quantità positiva tutti i termini delle formule (N) saranno positivi tanto se m è pari che impari, e che essendo nel tempo medesimo n una quantità maggiore di quei tra i coefficienti A, B, C,... T, che sono negativi, oppure eguale al più grande di essi, saranno positivi in tutti i casi i valori di A, B, ec. locchè ci mostra che le radici reali della trasformata

$$A_1+B_1y+C_1y^2+\text{ec.}=0$$

son tutte negative: quindi dall' equazione di posizione $x=y+n+1$ si ha sempre $n+1>x$, e ciò per esser y negativa ed x positiva. Il limite adunque delle radici positive di un' equazione si ottiene coll' aumentare di 1 il suo massimo coefficiente negativo preso positivamente.

97. Il limite trovato con questo metodo non è il più prossimo che può darsi. La sola esposizione del metodo per cui vi abbiamo arrivato è bastante onde convincercene. Passiamo perciò ad avvertire il tentativo che può adoprarsi per aver questo più prossimo limite. In effetto se noi mettiamo per h nelle formule (M) successi-

vamente $f-1, f-2, f-3$, ec. fintanto che danno de' risultati simultaneamente positivi, avremo nell'ultimo di essi il più prossimo limite cercato delle radici positive dell' equazione proposta.

98. Colla dimostrazione di quest' ultimo teorema resta compita per tutte le parti quella teoria che sul principio promisse. Altro non ci resta adunque che eseguirne l' applicazione.

Mi sembra opportuno l' avvertire che io disporrò in una tavola l' applicazione di cui si tratta, onde tenerne sott' occhi tutte le parti.

TAV. DI APPLICAZIONE.

Equ. enunc. $x^4+7x^3-2x^2-18x-28=0$

Coeff. della (A)

$A=-7$, $B=-2$, $C=18$, $D=-28$

Esp. delle (A), (B), $m=4$, $n=\frac{m(m-1)}{2}=6$

Valori di q_r cavati dalle (D)

$q = A =$ 7

$q_2 = Aq - 2B =$ 53

$q_3 = Aq_2 - Bq + 3C =$ 336

$q_4 = Aq_3 - Bq_2 + Cq - 4D =$ 2419

$q_5 = Aq_4 - Bq_3 + Cq_2 - Dq =$ 16767

$q_6 = Aq_5 - Bq_4 + Cq_3 - Dq_2 =$ 117713

$q_7 = Aq_6 - Bq_5 + Cq_4 - Dq_3 =$ 823431

$q_8 = Aq_7 - Bq_6 + Cq_5 - Dq_4 =$ 5765089

$q_9 = Aq_8 - Bq_7 + Cq_6 - Dq_5 =$ 40353127

$q_{10} = Aq_9 - Bq_8 + Cq_7 - Dq_6 =$ 282476273

$q_{11} = Aq_{10} - Bq_9 + Cq_8 - Dq_7 =$ 1977324631

$q_{12} = Aq_{11} - Bq_{10} + Cq_9 - Dq_8 =$ 13841291169

Valori di l_r cavati dalla (E)

$l = mq_2 - qq =$ 163

$l_2 = mq_4 - 4qq_3 + 3q_2q_2 =$ 8795

$l_3 = mq_6 - 6qq_5 + 15q_2q_4 - 10q_3q_3 =$ 586183

$l_4 = mq_8 - 8qq_7 + 28q_2q_6 - 56q_3q_5 =$ 43956035
$+ 35q_4q_4$

$l_5 = mq_{10} - 10q_9q + 45q_8q_2 - 120q_3q_7 =$ 3475405303
$+ 12[illegible]q_4q_6 - 158q_5q_5$

$l_6 = mq_{12} - 12q_{11}q - 66q_{10}q_2 =$ 280377943175
$- 220q_9q_3 + 495q_8q_4$
$- 792q_7q_5 + 462q_6q_6$

Valori di A', B', ec. dedotti dalle (D)

$A' = l =$ 163

$B' = \frac{1}{2}(A'l - l_2) =$ 8887

$C' = \frac{1}{3}(B'l - A'l_2 + l_3) =$ 200393

$$D' = \frac{1}{4}(C'l - B'l_2 + A'l_3 - l_4) = \qquad 1523672$$

$$E' = \frac{1}{5}(D'l - C'l_2 + B'l_3 - A'l_4 + l_5) = \qquad 1176404$$

$$F' = \frac{1}{6}(E'l - D'l_2 + C'l_3 - B'l_4 + A'l_5 - l_6) = - \qquad 44355600$$

Trasformata $(B)\ldots y^6 - 163y^5 + 8887y^4 - 200393y^3 + 1523672y^2 - 1176404y - 44355600 = 0$

Trasformata $(C)\ldots z^6 + \frac{1176404z}{44355600} - \frac{1523672z^4}{44355600} + \frac{200393z^3}{44355600} - \frac{8887z^2}{44355600} + \frac{163z}{44355600} - \frac{1}{44355600} = 0$

Suo lim. $f = 1,0343$; suo lim. più proffimo di f dato dalle form. $(M_j) = 1\ldots$ Quindi $1 < x'$ e $k = 1$.

Serie de'val. di x	...0,	1,	2,	3,	4,	ec.	
dell'equaz. ...	−28,	−40,	0,	+170,	+572,	ec.	
delle dif.pr...	−10,	−12,	+40,	+170,	+402,	ec.	
delle dif.sec...	−32,	−2,	+52	+130,	+232,	ec.	
delle dif.ter. ..	+6,	+30,	+54,	+78,	+102,	ec.	
delle dif.cost. ..	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	ec.	

Ser.de'v.di $-x$...	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9, ec.
dell'equaz...	-28,	-18,	-40,	-100,	-180,	-238,	-208,	0,	$+500$,	$+1420$, ec.
delle dif.pr.	$+12$,	$+10$,	-22,	-60,	-80,	-58,	$+30$,	$+208$,	$+500$,	$+930$, ec.
delle dif.sec.	$+52$,	-2,	-32,	-38,	-20,	$+22$,	$+88$,	$+178$,	$+292$,	$+430$, ec.
delle dif.ter.	-78,	-54,	-30,	-6,	$+18$,	$+42$,	$+66$,	$+90$,	$+114$,	$+138$, ec.
delle dif.qost.	$+24$,	$+24$,	$+24$,	$+24$,	$+24$,	$+24$,	$+24$,	$+24$,	$+24$,	$+24$, ec.

99. Io veggo nell'ultima parte di questa tavola che le serie dell'equazione contengono due termini $=0$, l'uno corrispondente ad $x=2$, e l'altro a $-x=7$. Veggo inoltre che le colonne verticali formate dalle differenze successive delle serie dell'equazione, prese a destra del zero hanno tutti i loro termini collo stesso segno. La prima di queste due osservazioni mi dà dunque 2, e -7 per radici razionali dell'equazione proposta, e la seconda mostrandomi che i termini della serie dell'equazione andranno collo stesso segno all'infinito sempre più crescendo (poichè ciascuno di essi è sempre formato del precedente più il suo corrispondente disotto, come per esempio $-40=-28-12$, $170=0+170$, $500=0+500$, ec.) mi assicura che il più delle radici sono immaginarie. Quindi l'equazione proposta avrà due radici immaginarie. La trasformata (*B*) avendo una sola permanenza di segno, e perciò non potendo avere più di una radice negativa, ci avea diggià indicato che la proposta non potea contenere più di questo numero di radici immaginarie.

Quindi conchiudo che fra queste quattro radici il $+2$ è quella che corrisponde alle condizioni proposte nel nostro problema, dicendoci che 200 erano i soldati chiusi nella piazza.

100. Il numero (162) ci chiama alla ricerca de' limiti delle radici delle equazione $x^3 - 13x + 5 = 0$ Vengo perciò a trovarli col metodo, che noi veniamo di esporre, onde darne una seconda applicazione, e preparare nel tempo stesso un materiale per la soluzione del problema ivi proposto.

Equ. proposta $x^3 - 13x + 5 = 0$

Coeff. della (A).... $A = 0$, $B = -13$, $C = -5$

Valori di q_r cav. dalla (D)

$q = A =$	0
$q_2 = -2B =$	26
$q_3 = 3C = -$	15
$q_4 = -Bq_2 =$	338
$q_5 = -Bq_3 + Cq_2 = -$	325
$q_6 = -Bq_4 + Cq_3 =$	4469

Valori di l_r cavati dalla (E); e di A', B', ec. dalla (D)

$l = 3q_2 =$	78
$l_2 = 3q_4 + 3q_2q_2 =$	3042
$l_3 = 3q_6 + 15q_2q_4 - 10q_3q_3 =$	142977
$A' = l =$	78
$B' = \frac{1}{2}(A'l - l_2) =$	1521
$C' = \frac{1}{3}(B'l - A'l_2 + l_3) =$	8113

Trasf. (B)... $y^3 - 78y^2 + 1521y - 8113 = 0$

Trasf. (C)... $z^3 - \frac{1521z^2}{8113} + \frac{78z}{8113} - \frac{1}{8113} = 0$

lim. f di $(C) = 1,1875$ .. limite più prossimo di f dato dalle form. (M), $= 1$... ed $1 < x'$, $k = 1$.

Ser. de' val. di x...0, 1, 2, 3, 4, ec.
dell' equ. ...+5, −7, −13 −7, +17, ec.

Ser. de' val. di $-x$...0, 1, 2, 3, 4, ec.
dell' equ. ...+5, +17, +23, +17, −7, ec.

Non và duopo di aggiungervi le serie successive delle differenze, poichè i tre cambiamenti di segno ci danno prontamente tutte tre le radici dell' equazione proposta. Senza estendere di vantaggio questa tavola conchiudo che l' equazione di cui si tratta ha due radici positive, ed una negativa e che i limiti cercati sono

$0, -3, +3$

101. Il calcolo di queste tavole ci mostra con abbastanza chiarezza quanto laborioso e difficile sia la pratica del metodo esposto. Lagrange vedendo la necessità indispensabile di determinare il valore della minima differenza delle radici dell' equazione proposta, onde fissarne quello di k; riflettendo che il calcolo della trasformata (B), da cui quella determinazione dipende, diviene sempre più lungo come il grado dell'equazione s' innalza; osservando infine che un tal metodo riesce quasi impraticabile quando questo grado è alquanto elevato, ha esposto degli altri mezzi più facili e pronti onde arrivare a quella inevitabile cognizione: quindi per dare un compimento a questo saggio sulla soluzione numerica dell' equazioni, io vado a dettagliare al più

che posso in ristretto un di quegl' ingegnosi artificj immaginati da quel sommo ed immortale geometra che forma il soggetto della seconda parte.

102. II. Sia (81) $(A) \ldots x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{ec.} = 0$ l'equazione proposta: se mettiamo in essa per x ciascuna delle m quantità $a, b, c, \ldots t$, è chiaro che ne avremo m equazioni particolari in a, in b, in $c, \ldots$ in t: e se in ciascuna di quest' equazioni faremo rispettivamente $a = x + y_1$, $b = x + y_2$, $C = x + y_3, \ldots t = y + z_m$ è chiaro egualmente che ne avremo m trasformate le quali sono tutte comprese nell' equazion generale.

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} \text{ ec.}$$
$$+ y_m(mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3}$$
$$- (m-3)Cx^{m-4} \text{ ec.})$$
$$+ \frac{1}{2} y_m^2(m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)Ax^{m-3}$$
$$+ (m-2)(m-3)Bx^{m-4} \text{ ec.})$$
$$+ \frac{1}{2.3} y_m^3(m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$
$$- (m-1)(m-2)(m-3)Ax^{m-4} \text{ ec.})$$
$$+ \text{ec.}$$
$$= 0$$

ovvero per efferne il primo termine la ſteſſa equazione propoſta, e perciò $=0$

$$\{mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - (m-3)Cx^{m-4} \text{ ec.})$$

$$+ \frac{1}{2}y_m\, m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-2)(m-3)Bx^{m-4} \text{ ec.})$$

$$+ \frac{1}{2.3}y_m^2\, m(m-1)(m-2)x^{m-3} - (m-1)(m-2)(m-3)Ax^{m-4} \text{ ec.})$$

$$+ \text{ ec.}$$

$$= 0$$

Fatto quindi

$$A' = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - (m-3)Cx^{m-4} \text{ ec.}$$

$$B' = \frac{1}{2}(m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-2)(m-3)Bx^{m-4} \text{ ec})$$

$$C' = \frac{1}{2.3}(m(m-1)(m-2)x^{m-3} - (m-1)(m-2)(m-3)Ax^{m-4} + \text{ec.})$$

ce. ec.

ſene avrà

$$(B) \ldots A' + B'y_m + C'y_m^2 \text{ ec.} = 0$$

103. Se ſi ſupponghi che le quantità $a, b, c, \ldots t$ ſieno le radici dell' equazione propoſta, allora quelle di queſta trasformata ſaranno . . .

$$y_1 (= x - a) = a - a = b - a = c - a = d - a = \ldots t - a$$

$$y_2 (= x - b) = a - b = b - b = c - b = d - b = \ldots t - b$$

$$y_3 (= x - c) = a - c = b - c = c - c = d - c = \ldots t - c$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_m (= x - t) = a - t = b - t = c - t = d - t = \ldots t - t$$

cioè le trasformate compreſe nell' equazione (B) avranno per radici tutte le bine combinazioni differenze di quelle della propoſta. ciaſcuna delle quali ha la ſua eguale in quantità, ma con ſegno contrario. Conoſcendo quindi queſte trasformate noi conoſceremo ancora la minima di tali differenze, e perciò facendo k eguale o più picciolo di eſſa, avremo ciocchè ſi cercava.

104. In un caso più complicato di quello di sopra ci troveremo se per fissare il valore di k noi dovremo calcolare e conoscere singolarmente tutte queste radici; poichè mediante il ripiego notato (81) noi abbiamo ivi evitato tal conoscenza e cene è solo bastata quella del loro complesso, quella cioè della trasformata (*B*) che tutte le abbraccia e comprende. Il ripiego che ci ha sopra risparmiato la cognizione singola di queste radici è quell' istesso che cene può ancora risparmiare quella della trasformata (*B*).

Infatti se in questa trasformata facciamo $y_m = \frac{1}{z}$, noi ne avremo la (*C*)... $z^{m-1} + \frac{B'}{A'} z^{m-2} + \frac{C'}{A'} z^{m-3} + \ldots \frac{1}{A'} = 0$, di cui bisognerebbe prendere il limite superiore delle sue radici positive onde fissare con esso il valore di k giusta il numero citato. Quindi tutto il ripiego di cui ivi si tratta consiste nella ricerca di questo limite: ma noi sappiamo che esso altro non è che il massimo coefficiente negativo preso positivamente ed aumentato dell'unità, o pure un nu-

mero maggiore di esso: le ricerca adunque di questo limite si riduce in fondo a trovare in generale fra i coefficienti $\frac{B'}{A'}, \frac{C'}{A'}, \ldots \frac{1}{A'}$ il massimo negativo, o un numero più grande di esso: ecco come abbiamo cambiato veduta a quel ripiego; ed ecco dietro a quali riflessioni andiamo a servircene onde fissare il valor di k senza una conoscenza positiva di questi coefficienti.

105. I coefficienti di cui sene dee trovare il massimo negativo, o un numero più grande di esso, sono delle funzioni fratte di x. Se fossero intere noi avremmo un mezzo facile e pronto onde ottener questo numero. In effetto questi coefficienti possono risultare negativi o positivi allorchè per x visi mette alcuno de' suoi valori. Quindi se chiamiamo *M* l'aggregato de' termini positivi e *N* quello de' negativi di questi coefficienti, e prendendo i limiti superiore ed inferiore de' valori positivi di x, ne mettiamo il primo per x in *N*, ed il secondo per x in *M*, è chiaro che ne' coefficienti della prima specie dovrà aversi un risultato maggiore di quello che si avrebbe mettendo per x in *M*, *N* qualunque

de' suoi valori positivi: prendendo il più grande de' risultati che tale sostituzione ci dà per questi coefficienti della prima specie, noi avremo il numero cercato per la parte de' valori positivi di x. Quindi se noi conosceremo quali fra tutti i coefficienti in questione sono i negativi, avremmo con questo mezzo risposto intieramente per questa parte alla proposta domanda. Ma noi supponiamo non conosciuti questi coefficienti, e però non sappiamo quali sono i negativi, quali i positivi. Il mezzo adunque da noi proposto per la classe de' coefficienti negativi sarebbe di nessun uso se il fine della nostra ricerca sarebbe a trovarne il massimo negativo. Noi ci contentiamo però di un numero maggiore di esso; e perciò facendo la sostituzione sopra indicata in tutti i coefficienti in questione sieno o non sieno negativi, è chiaro che ne' non negativi noi potremmo avere con essa de' risultati positivi, nulli o negativi: e sene mettiamo quest' ultimi, cioè i negativi, in linea co' risultati che si avrebbero da' coefficienti negativi, è chiaro egnalmente che scegliendone fra tutti il più grande, noi

prenderemo un numero sempre maggiore del massimo coefficiente negativo in tutti quei casi che corrispondono a' valori positivi di x.

Se poi nell' equazione proposta e ne' coefficienti in questione si metterà $-x$ per x, e quindi si ripeterà sopra di essi l' operazione stessa di sopra, allora si avrà con ciò il numero maggiore del massimo coefficiente negativo in tutti quegli altri casi che corrispondono a' valori negativi di x. Quindi fra questo numero e quello di sopra, prendendone il più grande, è chiaro che avremo il cercato numero maggiore del massimo coefficiente negativo in tutti i casi de' valori di x. Tutta la ricerca adunque è ridotta a rendere funzioni intere di x i coefficienti di cui si tratta: ecco come facilmente si ottiene.

106. Per eseguire questa riduzione prendo un polinomio indeterminato

$Y = A''x^{m-1} + B''x^{m-2} + C''x^{m-3} +$ ec. per cui ne moltiplico i termini rispettivi de' coefficienti in questione, onde avrò per ciascuno di tali prodotti una funzione del grado $2m-2$. Quindi prendo dall' equazione proposta il valor di x^m

e con esso, moltiplicandolo prima per x e sostituendolo poi nel prodotto che ne risulta, trovo quello di x^{m+1} espresso in x^{m-1} e le potenze ad essa inferiori: così moltiplicando ancora per x questo valor di x^{m+1} e sostituendovi quello di x^m, ne avrò quello di x^{m+2} espresso ancora in x^{m-1} e le potenze ad essa inferiori. Continuando in tal maniera arriverò a formare i valori da x^m fino ad x^{2m-2} tutti espressi in x^{m-1} e le potenze ad essa inferiori. Sostituendo quindi questi valori in quelle funzioni noi l'avremo ridotte dal grado $2m-2$ al grado $m-1$, e ad avere perciò m termini. Se perfine suppongo singolarmente $=0$ i termini di quella fra queste funzioni che rappresenta il prodotto dall' assunto polinomio pel denominatore comune a tutti i coefficienti in questione, avrò nel nuovo stato di questi coefficienti sparito l' x nel denominatore; avrò inoltre $m-1$ equazioni, le quali contenendo l'm indeterminate di detto polinomio

mene daranno coll'eliminazione i rispettivi valori espressi nella prima A'', che si determina a capriccio secondo l' opportunità richiede, ed avrò perciò determinato il polinomio corrispondente ad un dato caso, onde moltiplicare i termini de' coefficienti di cui si tratta per così ridurli da funzioni fratte a funzioni intere di x. L' applicazione di questo metodo a qualche caso particolare renderà più chiare le idee che vi abbiamo esposto in generale. Io non sò allontanarmi dal prenderne uno di quei cui abbiamo applicato il primo metodo, onde poterne fare con questo un paragone. L' applicazione al secondo di essi ne è più semplice e facile, onde io per legge di brevità prendo l' equazione $x^3-13x+5=0$ in esso proposta, e passo in una tavola ragionata ad applicarvi il metodo di cui abbiamo trattato.

Tavola ragionata di applicazione.

107. Equazione proposta $x^3-13x+5=0$ Coefficienti della (A). $A=0, B=-13, C=-5, D=$ ec. $=0$

Limite superiore delle sue radici positive $=(96)$ 14; limite corrispondente più prossimo $(97)=4$. Fatto $x=\frac{1}{x}$ nell' equazione proposta si avrà la trasformata $x^3-\frac{13x^2}{5}+\frac{1}{5}=0$ il limite superiore più prossimo delle cui radici positive essendo $(97)=3$, ci dice che l' inferiore di quelle positive della proposta $=\frac{1}{3}$.

Supponendo nell'equazione proposta $x=-x$ ne avremo l' equazione $x^3-13x-5=0$, i limiti superiore ed inferiore delle cui radici positive (97) essendo $=4=2$, ci avvertono che 4 ed $\frac{1}{2}$ sono i limiti superiore ed inferiore delle radici negative della proposta.

Questi limiti superiori ed inferiori delle radici sì positive che negative potrebbero trovarsi ancor più ristretti se nella proposta faremo $x=\frac{v}{m}$, e quindi opereremo sulla risultante come abbiamo operato sopra di essa.

Prendo $Y=A''x^2+B''x+C''$, che moltiplico per $A'=3x^2-13$, onde avrò

$$A'Y=3A'x^4+3B''x^3+(3C''-13A'')x^2-13B''x-13C''$$

Vi sostituisco i valori di $x^3=13x-5$, di $x^4=13x^2-5x$, e ne ottengo

$$A'Y=(26A''+3C'')x^2+(26B''-15A'')x-(15B''+13C'')$$

epperò $26A''+3C''=0$, $26B''-15A''=0$; cioè $B''=\frac{15A''}{26}$, $C''=-\frac{26A''}{3}$; cioè fatto $A''=78$ avrò $B''=45$, $C''=-676$. Quindi

$Y=78x^2+45x-676$, $A'Y=8113$

$$B'Y=3x(78x^2+45x-676)=234x^3+135x^2-2028x=135x^2+1014x-1170$$

$C'Y=78x^2+45x-676$. Quindi

$$\frac{B'Y}{A'Y}=\frac{1}{8113}(135x^2+1014x-1170)$$

$$\frac{C'Y}{A'Y}=\frac{1}{8113}(78x^2+45x-676)$$

Quindi mettendovi 4 per x ne' lor termini negativi, ed $\frac{1}{3}$ ne' positivi, ne avremo i risultati $-\frac{817}{8113}, -\frac{1957}{24339}$. Quindi sostituendovi prima $-x$, e poi 4 per x ne' negativi, ed $\frac{1}{2}$ ne' lor termini positivi, ne otterremo $-\frac{20769}{32452}, -\frac{1673}{16226}$

Quindi $\frac{20769}{32452}$ è un numero certamente più grande del massimo coefficiente negativo della (B) in tutti i valori di x. Quindi $\frac{53221}{32452}$ è il limite superiore alle sue radici positive, cioè per dir meglio i valori positivi di z sono tutti minori di $\frac{53221}{32452}$, e però quei di $y_m \left(=\frac{1}{z}\right) < \frac{32452}{53221}$... $(=0,61)$. Ma i valori di y_m sono metà positivi, e rispettivamente eguali all'altra metà nega-

tivi: ma questi valori non sono che le differenze fra le radici della proposta; così potrà fissarsi il valor di k eguale o minore di 0, 61.

PROB. 31

Determinare i fattori della quantità

$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

108. L'equazioni non sono che il prodotto di più fattori: noi lo sappiamo dalla loro natura. Quindi la quantità proposta può riguardarsi e trattarsi come un' equazione, onde averne i fattori cercati. Ordino pertanto questa quantità secondo le potenze di a, e mettendola sotto la forma $a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2=0$, scopro che essa è un' equazione derivata dal secondo grado. Noi sappiamo che la formula generale $x^{2m}+px^m+q=0$ di questa specie di equazioni conduce al risultato $x=\sqrt[m]{-\frac{1}{2}(p\pm\sqrt{(p^2-4q)})}$

Paragonando quindi questa formula colla proposta equazione avremo $m=2$, $p=-2(b^2+c^2)$, $q=(b^2-c^2)^2$ e finalmente $x=a=\pm(b+c)$, ed $x=a=\pm(b-c)$: donde si raccoglie che

$a+b+c=0$; $a-b-c=0$; $a+b-c=0$; $a-b+c=0$ sono i quattro fattori componenti la quantità enunciata fattori che si possono facilmente mettere sotto la forma in cui l' Autore delle lezioni celi ha presentati.

PROB. 32.

Estrarre la radice quadrata da $11+\sqrt{120}$, *da* $39+2\sqrt{5}$, *da* $6\sqrt{-1}$

109. I metodi generali son sempre da preferirsi a' particolari. Essi hanno fra gli altri il sommo vantaggio di comprendere in un risultato tutte le soluzioni che vi hanno relazione e rapporto. L' Autore delle lezioni non parla che in un modo particolare del metodo a questo problema relativo. Io voglio trattarlo adunque in generale: farne vedere la sua generalità qualunque sia il grado della radice da estraersi: e mostrarne in fine come con semplici ed opportune sostituzioni sene ottengono le radici delle proposte quantità.

110. La formula generale d' assumersi per la radice m di $a+\sqrt{b}$ dee avere una tal forma quanto in qualunque operazione si possa soddisfare la condizione che le quantità razionali ed irrazionali in un'equazione debbono essere singolarmente eguali fra loro, e quanto soddisfatta questa condizione ci porti ad un problema determinato. Queste due condizioni d' adempiersi ci guidano a prendere l' irrazionale misto $x+\sqrt{y}$, ovvero introducendo l' indeterminata k, $\sqrt[m]{k(x+\sqrt{y})}$ per la formula della redice in questione; a supporre cioè $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})}=\ldots$ $\sqrt[m]{k(x+\sqrt{y})}$ e ciò perchè elevata ad m quest' equazione di supposizione cene darà un' altra in cui contenendo il secondo come il primo membro due parti l'una razionale, e l' altra irrazionale ci darà due incognite in due equazioni, delle quali l' irrazionale contenendo il solo radicale quadrato ci darà, quadrandola, un' altra equazione tutta razionale, e ciò io dico perchè corrisponde e soddisfa alle due notate condizioni. Qualunque altra forma però lesi desse non potrebbe certamente adempirle: poichè se la comporremo di un maggior numero d' incognite anderemo ad un problema indeterminato,

e ci opporremo perciò alla seconda di quelle due condizioni; se gliene introdurremo una sola ci contrasteremo allora colla prima di esse; se prenderemo $\sqrt[n]{y}$ a luogo di $\sqrt{y}$, l' equazione che risulta dall'eguagliar fra loro le parti irrazionali conterrebbe radicali di specie diversa, e perciò quadrata non dando che un irrazionale eguale ad un razionale si urterebbe ancora contro la prima; se finalmente in vece di x le metteremo $\sqrt[n]{x}$, allora elevata ad m si avrebbe in generale il secondo membro tutto irrazionale, e contrario ancora perciò alla medesima prima condizione.

111. Ma si osservi che una quantità qualunque ha tante radici diverse quante sono le unità nell'indice del radicale. Quindi la quantità $a+\sqrt{b}$ non ha la sola radice $x+\sqrt{y}$; ma ne ha in tutto m diverse. Per averle espresse tutte in una formula generale io noto con d qualunque di queste radici; onde avrò $d^m = a+\sqrt{b} = (x+\sqrt{y})^m$ cioè avrò l' equazione

$d^m - (x+\sqrt{y})^m = 0$, la quale risoluta ci darà d per mezzo di $x+\sqrt{y}$. In questo luogo che non si tratta di assegnar la quantità delle radici ma semplicemente la forma di esse, io mi riporto alla soluzione trigonometrica che se ne è data (326): onde avrò

$$d = \left(\cos\frac{2ci}{m} \pm \sqrt{-1}.\ \text{sen.}\frac{2ci}{m}\right)(x+\sqrt{y}) =$$

$(f \pm h\sqrt{-1})(x+\sqrt{y})$. Questa è la forma dell'espressione generale che complette tutte le m radici diverse di $a+\sqrt{b}$.

112 Dietro a queste riflessioni assumiamo l'equazione $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})} = (x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$: eminiamola quindi ed uguagliamo fra loro le parti razionali ed irrazionali: notiamo infine con n il numero de' termini che precede uno qualunque in posto impari dello sviluppo di $(a+b)^m$ ed avremo

X

$$(a)\ldots k\left(x^m + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot3\cdot4}x^{m-4}y^2\right.$$

$$\left. + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2\,3\,\ldots\,n}x^{m-2}y^{\frac{n}{2}} + \text{ec.}\right) = a$$

$$(b)\ldots k\sqrt{y}\left(mx^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot3}x^{m-3}y\right.$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{2\cdot3\ldots5}x^{m-5}y^2$$

$$\left. + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{2\cdot3\ldots(n+1)}x^{m-n-1}y^{\frac{n}{2}} + \text{ec.}\right) = \sqrt{b}$$

Essendo $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})} = (x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$ sarà $a+\sqrt{b} = k(x+\sqrt{y})^m$ epperò $a-\sqrt{b} = k(x+\sqrt{y})^m - 2\sqrt{b}$. Quindi sviluppando e sostituendo per $\sqrt{b}$ il suo valore preso dal l'equazione (b) avremo $a-\sqrt{b} = k(x-\sqrt{y})^m$ epperò $\sqrt[m]{(a-\sqrt{b})} = (x-\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$.

113. Le due equazioni $\sqrt[m]{(a\pm\sqrt{b})} = (x\pm\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$ multiplicate insieme mi danno $\sqrt[m]{\frac{a^2-b}{k^2}} = x^2 - y$, epperò preso per k un valor tale quanto soddisfaccia all' equazione $\frac{a^2-b}{k^2} = p^m$ (valore sempre possibile ad aversi, poichè non trovandone altro può sempre farsi $k = (a^2-b)^{\frac{1\pm m}{2}}$) mi dà le parti componenti la radice in questione. In fatti dall' equazione $\frac{a^2-b}{k^2} = p^m$ abbiamo $y = x^2 - p$, epperò l'equazione (a) sarà trasformata nella

$$(c)\ldots k\Big(x^m + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(x^2-p)$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot3\cdot4}x^{m-4}(x^2-p)^2$$

$$+\ldots\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2\cdot3\ldots n}x^{m-n}(x^2-p)^{\frac{n}{2}}\text{ ec.}\Big)$$

$=a$, la quale, ſviluppate le potenze diverſe di x^2-p, ed ordinata per x, ſi preſenta ſotto l'eſpreſſione.

$$x^m\Big(1+\frac{m(m-1)}{3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot3\cdot4}$$

$$+\ldots\frac{m\ldots(m-n+1)}{2\ldots n}+\text{ ec.}\Big)$$

$$-px^{m-2}\Big(\frac{m(m-1)}{2}+\frac{2m(m-1)\ldots(m-3)}{2\cdot3\cdot4}$$

$$+\ldots\frac{n\,m\ldots(m-n+1)}{2\cdot2\ldots n}+\text{ ec.}\Big)$$

$$+p^2x^{m-4}\Big(\frac{m\ldots(m-3)}{2\ldots4}+\frac{3m\ldots(m-5)}{2\ldots5}$$

$$+\ldots\frac{n(n-2)m\ldots(m-n+1)}{2\cdot4\cdot2\ldots n}+\text{ ec.}\Big)$$

$$-p^3x^{m-6}\Big(\frac{m\ldots(m-5)}{2\ldots6}+\frac{4m\ldots(m-7)}{2\ldots8}$$

$$+\ldots\frac{n(n-2)(n-4)m\ldots(m-n+1)}{2\cdot3\cdot8\cdot2\ldots n}+\text{ec.}\Big)$$

$$+p^4x^{m-8}\Big(\frac{m\ldots(m-7)}{2\ldots8}+\frac{5m\ldots(m-9)}{2\ldots10}$$

$$+\ldots\frac{n(n-2)(n-4)(n-6)m\ldots(m-n+1)}{2\cdot3\cdot4\cdot16\cdot2\ldots n}+\text{ec.}\Big)$$

$-$ ec.

$$=\frac{a}{k}$$

114. Per dare una eſpreſſione più ſemplice a queſta equazione e così farla più facile alla ſoluzione, io ricorro alla legge, ſe eſiſte, con cui progrediſcono l' equazioni particolari che

essa rappresenta in generale. Faccio adunque $m = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 =$ ec., e ne avrò la tavola seguente di equazioni.

Tav. per la pag. 174. num. 114.

$$2x^2 - p = \frac{a}{k}$$

$$4x^3 - 3px = \frac{a}{k}$$

$$8x^4 - 8px^2 + p^2 = \frac{a}{k}$$

$$16x^5 - 20px^3 + 5p^2x = \frac{a}{k}$$

$$32x^6 - 48px^4 + 18p^2x^2 - p^3 = \frac{a}{k}$$

$$64x^7 - 112px^5 + 56p^2x^3 - 7p^3x = \frac{a}{k}$$

$$128x^8 - 256px^6 + 160p^2x^4 - 32p^3x^2 + p^4 = \frac{a}{k}$$

$$256x^9 - 576px^7 + 432p^2x^5 - 120p^3x^3 + 9p^4x = \frac{a}{k}$$

$$512x^{10} - 1280px^8 + 1120p^2x^6 - 400p^3x^4 + 50p^4x^2 - p^5 = \frac{a}{k}$$

$$1024x^{11} - 2816px^9 + 2816p^2x^7 - 1232p^3x^5 + 220p^4x^3 - 11p^5x = \frac{a}{k}$$

$$2048x^{12} - 6144px^{10} + 6912p^2x^8 - 3584p^3x^6 + 840p^4x^4 - 72p^5x^2 + p^6 = \frac{a}{k}$$

$$4096x^{13} - 13312px^{11} + 16640p^2x^9 - 9984p^3x^7 + 2912p^4x^5 - 364p^5x^3 + 13p^6x = \frac{a}{k}$$

ec. ec. ec.

115, Offervando la ferie dell' equazioni di quefta tavola mi avveggo, che duplicandone ciafcuna poffiamo metterle fotto l'efpreffione, in cui le veggiamo nell'altra quì appreffo inferita. E ciò lo facciamo per afficurarci dell'efiftenza, e convincerci del carattere di quella legge che ci occuppiamo a fcoprire nel loro progreffo.

Tavola per la pag. 175. num. 115.

$$\int_{2x}^{2} - 2\int_{2x}^{1-2} p = \frac{2a}{k}$$

$$\int_{2x}^{3} - 3\int_{2x}^{3-2} p = \frac{2a}{k}$$

$$\int_{2x}^{4} - 4\int_{2x}^{4-2} p + \frac{4(4-3)}{2}\int_{2x}^{4-4} p^2 = \frac{2a}{k}$$

$$\int_{2x}^{5} - 5\int_{2x}^{5-2} p + \frac{5(5-3)}{2}\int_{2x}^{5-4} p^2 = \frac{2a}{k}$$

$$\int_{2x}^{6} - 6\int_{2x}^{6-2} p + \frac{6(6-3)}{2}\int_{2x}^{6-4} p^2 - \frac{6(6-4)(6-5)}{2\cdot 3}\int_{2x}^{6-6} p^3 = \frac{2a}{k}$$

$$\int_{2x}^{7} - 7\int_{2x}^{7-2} p + \frac{7(7-3)}{2}\int_{2x}^{7-4} p^2 - \frac{7(7-4)(7-5)}{2\cdot 3}\int_{2x}^{7-6} p^3 = \frac{2a}{k}$$

$$\int_{2x}^{8} - 8\int_{2x}^{8-2} p + \frac{8(8-3)}{2}\int_{2x}^{8-4} p^2 - \frac{8(8-4)(8-5)}{2\cdot 3}\int_{2x}^{8-6} p^3 + \frac{8(8-5)(8-6)(8-7)}{2\cdot 3\cdot 4}\int_{2x}^{8-8} p^4 = \frac{2a}{k}$$

$$\int_{2x}^{9} - 9\int_{2x}^{9-2} p + \frac{9(9-3)}{2}\int_{2x}^{9-4} p^2 - \frac{9(9-4)(9-5)}{2\cdot 3}\int_{2x}^{9-6} p^3 + \frac{9(9-5)\cdots(9-7)}{2\cdot 3\cdot 4}\int_{2x}^{9-8} p^4 = \frac{2a}{k}$$

$$\int_{2x}^{10} - 10\int_{2x}^{10-2} p + \frac{10(10-3)}{2}\int_{2x}^{10-4} p^2 - \frac{10(10-4)(10-5)}{2\cdot 3}\int_{2x}^{10-6} p^3 + \frac{10(10-5)(10-6)(10-7)}{2\cdot 3\cdot 4}\int_{2x}^{10-8} p^4 - \frac{10(10-6)(10-7)(10-8)(10-9)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\int_{2x}^{10-10} p^5 = \frac{2a}{k}$$

$$\int_{2x}^{11} - 11\int_{2x}^{11-2} p + \frac{11(11-3)}{2}\int_{2x}^{11-4} p^2 - \frac{11(11-4)(11-5)}{2\cdot 3}\int_{2x}^{11-6} p^3 + \frac{11(11-5)(11-6)(11-7)}{2\cdot 3\cdot 4}\int_{2x}^{11-8} p^4 - \frac{11(11-6)(11-7)(11-8)(11-9)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\int_{2x}^{11-10} p^5 = \frac{2a}{k}$$

ec.

Gli $\int$ rovesci $\int$ che abbracciano la quantità x stanno a luogo di parentesi.

116. Che esiste una legge costante nel progresso di quest' equazioni, ed in che consiste questa legge, è molto facile a rilevarsi. In effetto un termine qualunque di esse ha un coefficiente sempre composto di tanti fattori quanto è il numero de' termini che lo precede: il primo di questi fattori nel numeratore eguaglia sempre il grado dell' equazione; il secondo si ha sempre col diminuire questo grado del numero de' termini, cui quello in questione corrisponde; e gli altri si hanno col sottrarre successivamente l' unità da questo secondo fattore: questi fattori poi nel denominatore non sono che i termini consecutivi della serie de' numeri naturali; questo termine contiene inoltre $2x$ elevato al grado $2m$ dell'equazione diminuito del doppio del numero de' termini precedenti, e la potenza di p eguale a questo numero di termini. Quindi essendo n il numero de' termini che precede un certo termine T, sarà

$$T = \frac{m(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)}{2.3\ldots n}(2x)^{m-2n}p^{n}$$

la espressione generale di esso, e perciò

$$(c)\ldots(2x)^m - m(2x)^{m-2}p + \frac{m(m-2)}{2}(2x)^{m-4}p^2 -$$

$$\frac{m(m-4)(m-5)}{2\cdot 3}(2x)^{m-6}p^3 + \ldots$$

$$\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\cdot 3\cdot 4}(2x)^{m-8}p^4 - \ldots$$

$$\frac{m(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(2x)^{m-10}p^5 + \text{ec.} = \frac{2a}{k}$$

per la più semplice espressione cercata dell'equazione (c) equazione dalla cui soluzione dipende la radice in questione. Quindi tutte le volte che questa equazione avrà delle radici razionali allora della quantità proposta sene può ottenere la desiderata radice. Il metodo adunque di cui si tratta porta alla soluzione di un'equazione del grado stesso della radice che si tratta di estrarre. Quando questo grado però è pari, quando cioè $m = 2r$ allora l'equazione fondamentale può ridursi al grado r, e semplicizzarsi molto perciò la soluzione del problema.

117. In fatti nel caso di m pari l'equazione (c) non contiene in tutti i suoi termini che le

potenze pari di $2x$. Quindi facendovi $x^2 = z$, sene avrà prontamente la desiderata riduzione. Essendo però in questo caso $x = \sqrt{z}$, ne avviene che la radice de' gradi pari sarà sempre della forma $(\sqrt{z} + \sqrt{y})\sqrt[m]{k}$

118. Veniamo ormai ad applicare il metodo esposto alle quantità enunciate. Paragoniamo pertanto queste quantità colla formula generale $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})}$, e ne avremo $m = 2, = 2, = 2$, $a = 11, = 39, = 0$, e $b = 120, = 20, = -36$. Quindi sarà

$$\frac{a^2-b}{k^2} = \frac{1}{k^2}, = \frac{1501}{k^2}, = \frac{36}{k^2}$$ ovvero supposto

$k = 1, = \sqrt{1501}, = 1$, sarà $\frac{a^2-b}{k^2} = 1, = 1, = 36$, e $p = 1, = 1, = 6$. Quindi l'equazione (c) dandoci le tre equazioni particolari $2z - 1 = 11$, $(2z-1)\sqrt{1501}, = 39, 6(2z-1) = 0$, ci dà $z = 6, = \frac{39+\sqrt{1501}}{2}, = 33$ e però $y = 5, = \frac{39-\sqrt{1501}}{2}$,

$= -3$. Quindi finalmente sarà $\sqrt{(11+\sqrt{120})} =$

$\sqrt{6+\sqrt{5}}$, $\sqrt[3]{(39+2\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{39+\sqrt{1501}}{2}}$

$+\sqrt{\frac{39-\sqrt{1501}}{2}}$, $\sqrt[3]{(6\sqrt{-1})} = \sqrt{3}+\sqrt{-3}$:

Quì si noti pria di finire che il secondo risultato ci dee far riguardare come impossibile l' estrazione della radice della seconda quantità enunciata, come il calcolo ci avea diggià pronunciato col darci z irrazionale.

PROB. 33.

Quali sono i numeri la cui somma è a ed il quoziente del minore diviso per la radice cuba del maggiore è g?

Chiamo y il maggiore ed x il minore de' due numeri in questione, e ne avrò le due equazioni di condizione $y+x=a$, $\frac{x}{\sqrt[3]{y}}=g$: donde ottengo $y=a-x$, ed $x^3+g^3x-ag^3=0$. Lo sviluppo adunque di questo problema non dipende che dalla soluzione di un' equazione del terzo grado.

119. Il Bezout, uno degli Analisti più grandi che in materia di analisi pura abbiano conosciuto i tempi nostri, ci ha dato nelle memorie dell' Accademia delle scienze di Parigi (an. 1762. 1765.) un metodo generale onde algebricamente risolvere l' equazioni di tutti i gradi. Questo metodo quantunque riesca sì laborioso a maneggiarsi quando si tratta di equazioni che superano il quarto grado quanto lo stesso Bezout sembra avervi rinunciato o ad altro tempo rimesso per migliorarlo: frattanto per esser uno de' più ingegnosi di quanti ne sono stati immaginati finora; per essere, a giudizio del Lagrange, uno di quelli da cui possiamo sperarne un giorno qualche vantaggio; e per non essere infine esposto per l' ordinario ne' libri elementari: è che io voglio quì darne una breve e succinta idea, con applicarlo quindi all' equazione finale del proposto problema.

120. Ogni equazione determinata

$x^m+ax^{m-1}+a'x^{m-2}+\ldots v=0$ può riguardarsi come il risultato di due equazioni a due incognite delle quali l'una è stata eliminata. Quindi il Bezout venne ad assumere due equazioni della forma ;

$$y^m - 1 = 0$$

$$by^m + cy^{m-2} + dy^{m-3} + \ldots x = 0$$

Venne poi ad eliminarvi y e ad ottenerne un' equazione in x del grado m: venne in seguito a paragonar questa equazion finale termine per termine colla proposta, ad averne tante equazioni quanto sono i coefficienti indeterminati b, c, d, ec. ed a determinare con esse questi coefficienti medesimi: venne a prendere quindi dalla prima i valori tutti di y: e mettendoli insieme con quei trovati per b, c, d, ec. nella seconda venne a ricavarne perfino i valori di x.

121. Questo è in ristretto il metodo del Bezout: ma prima di passarne all'applicazione notiamo che esso al pari degli altri è dipendente da quello di eliminazione de' gradi superiori. Quindi per non omettere una conoscenza che i metodi algebrici indispensabilmente suppongono, e per farla ordinaria e comune in quanto non trovasi ne' libri di elementi, vengo io quì ad inferire ancora un tratto del più semplice e del migliore di tutti i metodi che noi conosciamo

sù questo soggetto; che il Bezout medesimo ne è l'autore; e che egli ha esposto nella sua *Teoria dell'equazioni* con tanti dettagli che ne ha esaurito per così dire l'intero soggetto.

122. Per eseguire un' eliminazione completa uop'è che l'equazioni date sieno tante quanto è il numero delle incognite in questione. Quindi suppongo che l'equazioni date sieno complete; che v ne sia il loro numero, e però anche v quello delle incognite in esse combinate; e che supposte ordinate nel grado ad ordine di grandezza sieno notate colle formule.

$(t \ldots v)^m = 0$, $(t \ldots v)^n = 0$, $(t \ldots v)^r = 0$, $(t \ldots u)^q = 0$, $(t \ldots v)^r = 0$, ec. Dopo ciò si prenda un polinomio completo fralle medesime incognite v di un grado indeterminato a, ed a coefficienti indeterminati, e se ne moltiplichi la prima delle date equazioni onde sene avrà l' equazion prodotto $(t \ldots v)^{a+m} = 0$. Si prendano dalle altre equazioni date i valori di u^n, x^p, y^q, z^r ec., e si sostituiscano in essa onde far concorrere alla sua formazione tutte le date equazioni, cioè onde

racchiudere in essa tutte le relazioni date fra le incognite in questione. Quindi in questa trasformata dell'equazion prodotto, che chiamo T, si facciano $=o$ i coefficienti di tutti i termini che in essa sono affetti dalle incognite u, x, y, z, ec. e sene avranno dell'equazioni onde determinare le indeterminate introdotte col polinomio moltiplicatore; ed in fine si avrà un'equazione, la quale non contenendo che la sola incognita t, ne sarà l'equazion finale della proposta eliminazione.

123. Per determinare queste indeterminate è chiaro che noi abbiamo bisogno di tante equazioni quanto è il loro numero, ovvero volendone lasciare una arbitraria onde avere il campo di dare al primo termine dell'equazion finale il coefficiente 1, ne abbiamo bisogno una di meno di quanto è questo numero. Ma si rifletta che il numero di queste indeterminate dipende soltanto dalla scelta del polinomio moltiplicatore, e quello de' termini della T da egualarsi a zero onde averne quell'equazioni, che dar cene dovranno il valore, ha una dipendenza combinata di questo polinomio colle date equazioni.

Quindi la scelta del polinomio moltiplicatore dee variare a seconda dell'equazioni date: e variare eziandio sotto la condizione che il numero delle sue indeterminate sia tale che combinato colle date equazioni desse nella T tanti de' suindicati termini da egualarsi a zero quanto unità meno una esso contiene, sia tale cioè quanto espresso con A sene avesse, chiamando B quello degl'indicati termini della T, l'equazione di condizione $A=B+1$

124. Si osservi in questo luogo che la determinazione delle A indeterminate è dipendente dalla soluzione delle B equazioni: quindi è che bisogna combinare in maniera queste indeterminate nel polinomio moltiplicatore quanto queste equazioni risultino le più semplici. La maniera più semplice di avere in generale queste equazioni si è di non farle ascendere il primo grado. Quindi bisogna limitare al primo grado le indeterminate che si assumono col polinomio moltiplicatore, perchè è chiaro che allora quest'equazioni neppure ascenderanno questo grado.

125. Si osservi inoltre che il polinomio mol-

tiplicatore dovendo esser completo fa che il numero de' suoi termini, e perciò quello delle indeterminate in esso contenute è dipendente dal suo grado, fa cioè che A dee esser sempre una funzione di a. Quindi l' equazione di condizione $A = B + 1$ ci dovrà far conoscere il grado, e però il numero delle indeterminate del polinomio moltiplicatore, e quindi ci darà la conoscenza del grado dell' equazion finale, e del valore delle indeterminate che vi son contenute, ci farà conoscere cioè tuttocciò che dee sapersi onde avere la piena cognizione dell' equazion finale. Passiamo adunque alla determinazione delle parti componenti questa equazione di condizione.

126. Per avere A, per avere cioè il numero de' termini contenuti in un polinomio completo di un grado qualunque m, I. mi avveggo che facendo ne' termini dello sviluppo $(t+u)^m$ successivamente

$$u = u + x = u + x + y = u + x + y + z = \text{ec.}$$

ne ha la tavola seguente

Term. dello svil. di $(t+u)^m$

$$t^m, \quad t^{m-1}u, \quad t^{m-2}u^2, \quad t^{m-3}u^3, \ldots u^m$$

Term. dello svil. di $(t+u+x)^m$

$$t^m, \; t^{m-1}(u+x), \; t^{m-2}(u+x)^2, \; t^{m-3}(u+x)^3, \ldots (u+x)^m$$

Term. dello svil. di $(t+u+x+y)^m$

$$t^m, \; t^{m-1}(u+x+y), \; t^{m-2}(u+x+y)^2, \; t^{m-3}(u+x+y)^3, \ldots (u+x+y)^m$$

Term. dello svil. di $(t+u+x+y+z)^m$

$$t^m, \quad t^{m-1}(u+x+y+z), \quad t^{m-2}(u+x+y+z)^2, \; t^{m-3}(u+x+y+z)^3, \ldots (u+x+y+z)^m$$

ec. ec.

II. Mi avveggo dippiù che facendo nella prima linea orizzontale di essa $u = 1$, nella seconda $x = 1$, nella terza $y = 1$, nella quarta $z = 1$, e così di seguito, i termini che rispettivamente la compongono divengono quelli di un polinomio completo ad una, a due, a tre, ec. incognite dello stesso grado m, e perciò che la somma

di quei di un polinomio completo di questo grado ad v incognite eguaglia la somma di quelli della potenza m di un polinomio di $(v+1)$ termini, e conchiudo pertanto che la determinazione di A si riduce in generale a quella del numero de' termini dello sviluppo dell' m potenza di un polinomio qualunque.

III. Mi avveggo infine opportunamente per quest' ultima ricerca, che i numeri de' termini, i quali singolarmente in ciascuna linea di questa tavola sono affetti dalla potenza stessa di t formano sempre nel loro progresso una delle serie de' numeri figurati, cioè pel binomio quella del primo ordine, pel trinomio quella del secondo ordine, pel quadrinomio quella del terzo ordine, e così seguitando per l' $(v+1)$nomio quella del l' v ordine. Quindi si avrà (L. 331)

n. de' term di $(t+u)^m = n$

n. de'term. di $(t+u+x)^m = \frac{n(n+1)}{2}$

n. de'term. di $(t+u+x+y)^m = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$

n. de'ter. di $(t+u+x+y+z)^m = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4}$

Donde si raccoglie per analogia che il numero de' termini della potenza m dell'$(v+1)$nomio si ha generalmente espresso nell' espressione $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+v-1)}{2.3.4\ldots v}$. Ma siccome il numero de' termini nella serie corrispondente a ciascuna linea è sempre $n=m+1$; così il valor di A ci è sempre espresso dalla formula generale $A=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+v)}{2.3.\ldots v}$, ovvero notando, per la semplicità della cifrazione, coll' ultimo fattore semplicemente questa espressione, notazione che ancora praticherò per l' appresso in tutti i casi simili, dalla $A=\frac{(m+v)}{v}$.

157. Per aver B, cioè il numero de' termini che nell' equazion T sono affetti dalle incognite fuori la t, si rifletta che se nell' equazion prodotto si prendono tutti i termini moltiplicati per u^n, e dopo la sostituzione del suo valore se ne considera il risultato, è chiaro che si vedranno de' termini tali quanto trovano tutti i

lor simili nella stessa equazion prodotto; e perciò ammassandosi con questi lor simili ne avviene che coll'indicata sostituzione il numero totale de' termini dell' equazione si viene a diminuire di quello degli affetti di u^n: dippiù che se esclusi i termini di u^n nell' equazion prodotto si sostituisce il valor di x^p, il numero de' suoi termini in questo stato verrà per la stessa ragione diminuito di quello degli affetti di x^p; che se esclusi questi ancora si sostituisce il valor di y^q, il nnmero de' suoi termini in questo secondo stato sarà ancora diminuito da quello degli affetti di y^q; e così di seguito. Ma siccome l' equazion prodotto non si trasforma nella T che colla sostituzione semplicemente de' valori di u^n, x^p, y^q, ec.; così per avere il numero de' termini di questa trasformata non bisogna che levar da quello dell'equazion prodotto il numero degli affetti di u^n, più il numero di quelli, che senza essere affetti di u^n, lo sono di x^p, più il numero di quelli che senza esserlo di u^n, x^p, lo

sono di y^q, e così di seguito. Quindi se noi notiamo con h la somma di questi numeri di termini, e ci ricordiamo che l' equazion prodotto non è che un polinomio completo ad v incognite del grado $a+m$, e perciò che il suo numero di termini è espresso da $\frac{(a+m+1)(a+m+2)\ldots(a+m+v)}{2.3.\ \ldots\ldots\ v}$, cioè adottando la notazione (126) da $\frac{(a+m+v)}{v}$, noi avremo il numero de' termini della $T = \frac{(a+m+v)}{v} - h$. Se da questo numero di termini poi ne leviamo quello dell' equazion finale, che chiamandone k il grado sarà espresso da $k+1$, ne avremo quello di $B = \frac{(a+m+v)}{v} - h - k - 1$ e però l' equazione di condizione $A = B+1$ divenendo $\frac{(m+v)}{v} = \frac{(a+m+v)}{v} - h - k$ ci da $k = \frac{(a+m+v)-(m+v)}{v} - h$. Quindi per conoscere il grado dell' equazion finale uop' è che si conosca ancora il valore di h.

128. Per arrivare a quest' ultima cognizione fissiamo per un momento l' attenzione sull' equazion prodotto, ed osserveremo facilmente che l' aggregato di tutti i termini divisibili per u^n compone, non considerando questo lor fattore comune, un polinomio completo delle medesime incognite del grado $a+m-n$; che quello di tutti i divisibili per x^p, ne compone un altro del grado $a+m-p$; che quello di tutti i divisibili per y^q ne compone un terzo del grado $a+m-q$; e così in appresso. Quindi i numeri rispettivi di tutti i termini parzialmente affetti di u^n, x^p, y^q, ec. sono gli stessi di quelli de' polinomj completi

$$(t\ldots v)^{a+m-n},\ (t\ldots v)^{a+m-p},$$
$$(t\ldots v)^{a+m-q},\ (t\ldots v)^{a+m-r},\ \text{ec.}$$

cioè sono

$$\frac{(a+m-n+v)}{v},\quad \frac{(a+m-p+v)}{v}$$
$$\frac{(a+m-q+v)}{v},\quad \frac{(a+m-r+v)}{v},\ \text{ec.}$$

129. Or se dal numero di tutti i termini che nell' equazion prodotto, sono divisibili per x^p sene toglie quello che velo sono nel polinomio completo $(t\ldots v)^{a+m-n}$, che eguaglia il numero di quelli del polinomio completo $(t\ldots v)^{a+m-n-p}$ cioè $\frac{(a+m-n-p+v)}{v}$, è chiaro che se ne avrà il numero de' divisibili per x^p ma non per u^n espresso da $\frac{(a+m-p+v)-(a+m-n-p+v)}{v}$: se dal numero di tutti quei che nella stessa equazion prodotto sono divisibili per y^q sene toglie quello che velo sono in $(t\ldots v)^{a+m-n}$, cioè $\frac{(a+m-n-q+v)}{v}$, e quello ancora che velo sono ne' divisibili per x^p ma non per u^n, cioè $\frac{(a+m-p-q+v)-(a+m-n-p-q+v)}{v}$, sene avrà quello de' divisibili per y^q ma non per u^n, x^p, espresso da

$$\frac{1}{v}\left\{(a+m-q+v)-(a+m-n-q+v)-(a+m-p-q+v)+(a+m-n-p-q+v)\right\}$$

Nel modo stesso si troverà che quello de' divisibili per z^r ma non per u^n, x^p, y^q è espresso dalla formula

$$\frac{1}{v}\left\{(a+m-r+v)-(a+m-n-r+v)+(a+m-p-r+v)+(a+m-n-p-r+v)-(a+m-q-r+v)+(a+m-n-q-r+v)+(a+m-p-q-r+v)-(a+m-n-p-q-r+v)\right\}$$

e così seguitando si troveranno tutti gli altri numeri che dovranno sommarsi onde avere il valore di h. Ma come ottenere in generale questa somma mercè le trovate espressioni? Il calcolo alle differenze cene presenta un mezzo facile e pronto, che quì non può avere il suo luogo. Io lo esporrò in forma di applicazione allorchè nelle lezioni che promise nell' avvertimento dovrò parlare di questo calcolo. Dico

perora soltanto che questa somma risulterà tale quanto messa per h nell' espressione del valore di k, ci darà $k = mnpqr\ldots$, ci darà cioè il grado dell' equazion finale eguale al prodotto di tutti gli esponenti dell' equazioni in questione.

130. Conoscendo k si conosce ancora a. In effetto l' equazion prodotto non è che un polinomio completo del grado $a+m$, e però $a+m$ è il numero delle dimensioni di ciascun de' suoi termini: inoltre l' equazioni date non sono che de' polinomj completi de' gradi n, p, q, r, ec., e però il massimo esponente della t sarà in ciascuna di esse rispettivamente $= n = p = q = r =$ ec. Quindi dovendo nell' equazion prodotto il termine in cui vi entrano tutte le incognite essere della forma $t^{a+m} u^{n-p} \ldots u^n x^p \ldots$ ne avviene che nella T non può l'incognita t avere un esponente più alto di $a+m$: esponente che si conserva ancora il maggiore nell' equazion finale. Il grado adunque dell' equazion finale si è ancora espresso da $a+m$, e perciò essendo $k = a+m$ sarà $a = m(npqr\ldots - 1)$

131. Ma come applicar questo metodo alla soluzione dell'equazioni. Questo è quello che resta ad eseguirsi. Ed il Bezout avrebbe forse ciò fatto se la morte, seguita poco dopo la pubblicazione di questo suo metodo, non glielo avesse impedito. Una teoria dell'equazioni è stata di recente pubblicata dal Ruffini. Ed il Paoli nel volume delle aggiunte a' suoi elementi di Algebra ci avverte che co' travagli del Lagrange e con quest' opera, resta compita in Italia ove nacque questa teoria. Il Ruffini adunque avrà forse esaurito questo soggetto: soggetto in cui consiste tutta la difficoltà, e l' imperfezione della soluzione algebrica dell' equazioni. Ma quest' opera non è arrivata a queste parti: nè l' istorico delle Matematiche sembra conoscerla all' epoca dell' ultima edizione della sua istoria. Ci basta adunque di aver fatto un cenno di questo elegantissimo metodo: e ciò per non omettere l' occasione che ci si è presentata, onde renderlo commune, e farlo più chiaro ed intelligibile alla gioventù.

132. Passo inoltre ad applicare al caso del problema proposto il metodo generale che mi ha portato a parlare dell' eliminazione e prendo perciò le due equazioni $y^3 - 1 = 0$, $by^2 + cy + x = 0$ delle quali ne moltiplico la seconda per y onde averne la $by^3 + cy^2 + xy = 0$ del grado medesimo della prima, e la prima per b onde averne $by^3 - b = 0$. Quindi sottraggo questa da quella e ne ho $cy^2 + xy + b = 0$, che colla $by^2 + cy + x = 0$, mi dà, riguardando y^2 ed y come due incognite, $y^2 = \frac{x^2 - bc}{c^2 - bx}$, $y = \frac{b^2 - cx}{c^2 - bx}$. Moltiplico poi per y la $cy^2 + xy + b = 0$, e mettendo nel prodotto il valore 1 di y^3 e quei di y^2, y, ho $x^3 - 3bcx + b^3 + c^3 = 0$. Paragono questa equazion finale colla $x^3 + g^3x - ag^3 = 0$ delle condizioni enunciate e ne avrò $g^3 = -3bc$, $b^3 + c^3 = -ag^3$ e perciò $c^3 - \frac{g^9}{27c^3} = 0$.

$-ag^3$, cioè $c^6+ag^3c^3=\frac{g^9}{27}$, cioè un' equazione derivativa del ſecondo grado che ci dà prontamente $c=-\sqrt[3]{\left\{\frac{ag^3}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{1}{27}g^9}\right\}}$ e quindi $b=-\sqrt[3]{\left\{\frac{ag^3}{2}\mp\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{1}{27}g^9}\right\}}$.

Metto queſti valori in quello di x preſo dalla ſeconda delle due aſſunte equazioni e ne avrò

$$x=y^2\sqrt[3]{\left\{\frac{ag^3}{2}\mp\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{27}}\right\}}$$

$$+y\sqrt[3]{\left\{\frac{ag^3}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{27}}\right\}}$$

prendo in fine le tre radici

$$y=1,\ y=-\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ y=-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

dell' equazione $y^3-1=0$, e mettendole nel

trovato valor di x ſe ne avranno le tre

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2}+\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{27}}\right)}$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2}-\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{27}}\right)}$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2}+\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{27}}\right)}$$

$$+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2}-\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{27}}\right)}$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2}+\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{2}}\right)}$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2}+\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{27}}\right)}$$

dell' equazione $x^3+g^3x-ag^3=0$, che riſolvono la queſtione propoſta.

133. Questa espressione algebrica delle radici dell'equazioni del terzo grado è conosciuta sotto il nome di formula Cardanica. Girolamo Cardano quantunque non sia stato il primo a ritrovarla; quantunque l'abbia appreso colla dimostrazione o nò dal Tartaglia; per essersi frattanto distinto nel trattarla, e per avercela communicata, ha avuto la gloria di darle il suo nome in preferenza dell'inventore. Ma non sono le sole equazioni del terzo grado che ammettono per radice la formula Cardanica. In tutti i gradi vi son dell'equazioni che ne ammettono della forma medesima. L'esporre ora in generale quell'equazioni che ammettono la sua formola per radice; il determinare così i confini cui la sua teoria si estende e si limita: mi sembra una ricerca degna a fermarci in questo luogo, onde dare alla soluzione Cardanica dell'equazioni una veduta più sublime insieme e più luminosa. Il dettaglio adunque di questa teoria generale occuperà il seguente tratto di questa lezione teoria che io estenderò fino a mostrare ancora in generale l'impossibilità di risolvere il così detto caso irriducibile; teoria in cui esporrò un metodo trigonometrico generale e nuovo onde averne in questo caso le radici; teoria finalmente che per quanto io sappia niuno ha esposto finora in un piano così concepito ed esteso.

134. Sia in generale $x^m + a'x^{m-1} + ax^{m-2} + b'x^{m-3} + bx^{m-4} + \ldots hx^{m-n} + \ldots rx^2 + vx + t = 0$ un' equazione del grado m, e sia supposto, giusta il metodo ordinario, $v = y + \frac{p}{y}$ onde averne la corrispondente trasformazione. Per arrivare a questo intento giova il ricordarsi che i coefficienti della serie dello sviluppo di $(a+b)^m$ crescono fino al termine $\frac{1}{2}(m+1)$ quando m è impari, e fino all' $\frac{1}{2}(m+2)$ quando è pari, donde decrescono con un progresso retrogrado a quello degli aumenti, ed in maniera tale che due qualunque di essi egualmente distanti dai termini

estremi sono eguali, in maniera tale cioè che il coefficiente di un termine qualunque $r+1$ ha sempre il suo eguale in quello del termine $m-(r-1)$: giova dippiù il ricordarsi che gli esponenti delle quantità a, b in ciascun di questi due termini eguali sono nell' una il numero r de' termini che lo precede, ed il numero $m-r$ che lo siegue nell'altra: giova il richiamarsi perfine che la espressione del termine generale delle coppie di questi termini eguali si è

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{2.3\ldots\ldots r}(a^r b^{m-r}+b^r a^{m-r}):$$

espressione di cui nel caso di m pari dovrà quando $r=\frac{m}{2}$ stimarsi per metà, in quanto questo termine è unico in tal caso nella serie. Quindi raccogliendo giova dico il riflettere che la serie dello sviluppo di $(a+b)^m$ può scriversi in generale e compiutamente sotto la forma

$$(a+b)^m = a^m+b^m+m(a^{m-1}b+b^{m-1}a)$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}(a^{m-2}b^2+b^{m-2}a^2)$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}(a^{m-3}b^3+b^{m-3}a^3)$$

. . . . . .

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{2.3\ldots r}(a^{m-r}b^r+b^{m-r}a^r)$$

. . . . . .

$$+\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+2}{2}}{2.3\ldots\frac{m-1}{2}}\left(a^{\frac{m+1}{2}}b^{\frac{m-1}{2}}+b^{\frac{m+1}{2}}a^{\frac{m-1}{2}}\right)$$

(ovvero)

$$\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+2}{2}}{2.3\ldots\frac{m}{2}}a^{\frac{m}{2}}b^{\frac{m}{2}}$$

(secondo che m è impari o pari)

135. Applicando questa riflessione alle diverse parti dell' equazione proposta; indicando con n' il numero de' termini che precede in esse un termine qualunque; e supponendo n un numero pari: avremo secondo che m è impari o pari la tavola che va quì appresso inserita.

Tavola per la pag. 204. num. 135.

$$x^m = y^m + (py)^m + mp\left(y^{m-2} + (py)^{m-2}\right) + \frac{m(m-1)}{2}\, p^2 \left(y^{m-4} + (py)^{m-4}\right) + \cdots \frac{m(m-1)\cdots(m-n'+1)}{2\,3\cdots n'}\, p^{n'} \left(y^{m-2n'} + (py)^{m-2n'}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{m(m-1)\cdots\frac{m+2}{2}}{2\cdots\frac{m-1}{2}}\, p^{\frac{m-1}{2}} (y+py) \text{ (ovvero) } \frac{m(m-1)\cdots\frac{m+4}{2}}{2\cdots\frac{m-2}{2}}\, p^{\frac{m-2}{2}} \left(y^2 + (py)^2\right) + \frac{m(m-1)\cdots\frac{m+2}{2}}{2\cdots\frac{m}{2}}\, p^{\frac{m}{2}}$$

$$x^{m-1} = y^{m-1} + (py)^{m-1} + (m-1)p\left(y^{m-3} + (py)^{m-3}\right) + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\, p^2 \left(y^{m-5} + (py)^{m-5}\right) + \cdots \frac{(m-1)\cdots(m-n')}{2\cdots n'}\, p^{n'} \left(y^{m-2n'-1} + (py)^{m-2n'-1}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(m-1)\cdots\frac{m+3}{2}}{2\cdots\frac{m-3}{2}}\, p^{\frac{m-3}{2}} \left(y^2 + (py)^2\right) + \frac{(m-1)\cdots\frac{m+1}{2}}{2\cdots\frac{m-1}{2}}\, p^{\frac{m-1}{2}} \text{ (ovvero) } \frac{(m-1)\cdots\frac{m+2}{2}}{2\cdots\frac{m-2}{2}}\, p^{\frac{m-2}{2}} (y+py)$$

$$x^{m-2} = y^{m-2} + (py)^{m-2} + (m-2)p\left(y^{m-4} + (py)^{m-4}\right) + \cdots \frac{(m-2)\cdots(m-n'-1)}{2\cdots n'}\, p^{n'} \left(y^{m-2n'-2} + (py)^{m-2n'-2}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(m-2)\cdots\frac{m-3}{2}}{2\cdots\frac{m-3}{2}}\, p^{\frac{m-3}{2}} (y+py) \text{ (ovvero) } \frac{(m-2)\cdots\frac{m+2}{2}}{2\cdots\frac{m-4}{2}}\, p^{\frac{m-4}{2}} \left(y^2 + (py)^2\right) + \frac{(m-2)\cdots\frac{m-2}{2}}{2\cdots\frac{m-2}{2}}\, p^{\frac{m-2}{2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{m-n} = y^{m-n} + (py)^{m-n} + (m-n)p\left(y^{m-n-2} + (py)^{m-n-2}\right) + \cdots \frac{(m-n)\cdots(m-n'-1)}{2\cdots n'}\, p^{n'} \left(y^{m-2n'-n} + (py)^{m-2n'-n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(m-n)\cdots\frac{m-n+3}{2}}{2\cdots\frac{m-n-1}{2}}\, p^{\frac{m-n-1}{2}} (y+py) \text{ (ovvero) } \frac{(m-n)\cdots\frac{m-n+4}{2}}{2\cdots\frac{m-n-2}{2}}\, p^{\frac{m-n-2}{2}} \left(y^2 + (py)^2\right) + \frac{(m-n)\cdots\frac{m-n+2}{2}}{2\cdots\frac{m-n}{2}}\, p^{\frac{m-n}{2}}$$

$$x^{m-n-1} = y^{m-n-1} + (py)^{m-n-1} + (m-n-1)p\left(y^{m-n-3} + (py)^{m-n-3}\right) + \cdots \frac{(m-n-1)\cdots(m-n'-1)}{2\cdots n}\, p^{n'} \left(y^{m-2n'-n-1} + (py)^{m-2n'-n-1}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(m-n-1)\cdots\frac{m-n+3}{2}}{2\cdots\frac{m-n-3}{2}}\, p^{\frac{m-n-3}{2}} \left(y^2 + (py)^2\right) + \frac{(m-n-1)\cdots\frac{m-n+1}{2}}{2\cdots\frac{m-n-1}{2}}\, p^{\frac{m-n-1}{2}} \text{ (ovvero) } \frac{(m-n-1)\cdots\frac{m-n+2}{2}}{2\cdots\frac{m-n-2}{2}}\, p^{\frac{m-n-2}{2}} (y+py)$$

ecc.

136. Si osservi ora per la sostituzione di questi valori nell'equazione di cui si tratta che il termine n' in x^m, x^{m-1} ha l'esponente medesimo del termine $n'-1$ in x^{m-2}, x^{m-3}; del termine $n'-2$ in x^{m-4}, x^{m-5}; del termine $n'-3$ in x^{m-6}, x^{m-7}; e così seguitando del termine $n'-\frac{n}{2}$ in x^{m-n}, x^{m-n-1}. Si osservi dippiù che gli esponenti dell'equazion proposta diminuendo di uno in uno, e quei del valor di x^m di due in due, ne avviene che un esponente di quella non si trova in questo che in un posto la metà meno avanzato; e perciò l'esponente del termine n di quella non si trova corrispondere che a quello dell' $\frac{n}{2}$ di questo. Quindi per avere l'espressioni generali de' termini contigui n, $n+1$ dell' equazione bisogna supporre $n=2n'$ nel rispettivo termine ge-

nerale di x^m, x^{m-1}, di x^{m-2}, x^{m-3}, di x^{m-4}, x^{m-5}, ec. avendo prima praticato la modificazione notata nella prima osservazione. Sostituiamo adunque dietro a tali osservazioni i notati valori nel equazion proposta, e ne avremo in generale la trasformata, che si vede stesa nella quì annessa tavola.

Tav. per la pag. 206. num. 136.

$$y^m + (p:y)^m + a\left[y^{m-1} + (p:y)^{m-1}\right] + \left\{a + mp\right\}\left[y^{m-2} + (p:y)^{m-2}\right] + \left\{a'(m-1)p + b'\right\}\left[y^{m-3} + (p:y)^{m-3}\right]$$

$$+ \left\{\frac{m(m-1)}{2}p^2 + a(m-2)p + b\right\}\left[y^{m-4} + (p:y)^{m-4}\right] + \left\{\frac{a'(m-1)(m-2)}{2}p^2 + b'(m-3)p + c'\right\}\left[y^{m-5} + (p:y)^{m-5}\right]$$

$$+ \left\{\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}p^3 + \frac{a(m-2)(m-3)}{2}p^2 + b(m-4)p + c\right\}\left[y^{m-6} + (p:y)^{m-6}\right]$$

$$+ \left\{\frac{a'(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3}p^3 + \frac{b'(m-3)(m-4)}{2}p^2 + c'(m-5)p + d'\right\}\left[y^{m-7} + (p:y)^{m-7}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{\frac{m(m-1)\cdots(m-\frac{n-2}{2})}{2\cdots\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}} + \frac{a(m-2)(m-3)\cdots(m-\frac{n}{2})}{2\cdots\frac{n-2}{2}}p^{\frac{n-2}{2}} + \frac{b(m-4)(m-5)\cdots(m-\frac{n+2}{2})}{2\cdots\frac{n-4}{2}}p^{\frac{n-4}{2}} + \cdots h\right\}\left[y^{m-n} + (p:y)^{m-n}\right]$$

$$+ \left\{\frac{a'(m-1)\cdots(m-\frac{n}{2})}{2\cdots\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}} + \frac{b'(m-3)\cdots(m-\frac{n+2}{2})}{2\cdots\frac{n-2}{2}}p^{\frac{n-2}{2}} + \frac{c'(m-5)\cdots(m-\frac{n+4}{2})}{2\cdots\frac{n-4}{2}}p^{\frac{n-4}{2}} + \cdots k'\right\}\left[y^{m-n-1} + (p:y)^{m-n-1}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{\frac{a'(m-1)\cdots\frac{m+3}{2}}{2\cdots\frac{m-3}{2}}p^{\frac{m-3}{2}} + \frac{b'(m-3)\cdots\frac{m+1}{2}}{2\cdots\frac{m-5}{2}}p^{\frac{m-5}{2}} + \cdots r\ (\text{ovv.})\ \frac{m\cdots\frac{m+4}{2}}{2\cdots\frac{m-2}{2}}p^{\frac{m-2}{2}} + \frac{a'(m-2)\cdots\frac{m+2}{2}}{2\cdots\frac{m-4}{2}}p^{\frac{m-4}{2}} + \cdots r\right\}\left[y^{2} + (p:y)^{2}\right]$$

$$+ \left\{\frac{m\cdots\frac{m+3}{2}}{2\cdots\frac{m-1}{2}}p^{\frac{m-1}{2}} + \frac{a(m-2)\cdots\frac{m+1}{2}}{2\cdots\frac{m-3}{2}}p^{\frac{m-3}{2}} + \cdots s\ (\text{ovvero})\ \frac{a'(m-2)\cdots\frac{m+2}{2}}{2\cdots\frac{m-2}{2}}p^{\frac{m-2}{2}} + \frac{b'(m-3)\cdots\frac{m}{2}}{2\cdots\frac{m-4}{2}}p^{\frac{m-4}{2}} + \cdots s\right\}\left[y + p:y\right]$$

$$+ \left\{\frac{a'(m-1)\cdots\frac{m+1}{2}}{2\cdots\frac{m-1}{2}}p^{\frac{m-1}{2}} + \frac{b'(m-3)\cdots\frac{m-1}{2}}{2\cdots\frac{m-3}{2}}p^{\frac{m-3}{2}} + \cdots 2pr + t\ (\text{ovvero})\ \frac{m\cdots\frac{m+2}{2}}{2\cdots\frac{m}{2}}p^{\frac{m}{2}} + \frac{a(m-2)\cdots\frac{m}{2}}{2\cdots\frac{m-2}{2}}p^{\frac{m-2}{2}} + \cdots 2pr + t\right\} = 0$$

137. Osservando questa trasformata io mi avveggo che facendone svanire tutti i termini intermedj, e notando con q il suo ultimo termine, ne avremo l'equazione $y^m + (\frac{p}{y})^m + q = 0$.

Questa equazione, cioè la $y^{2m} + qy^m + p^m = 0$, non è che una equazione derivata dal secondo grado. Se visi suppone perciò $y^m = z$, cioè se si assume l'equazione $y^m - z = 0$, se ne avrà la

$z^2 + qz + p^m = 0$: donde $z = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{q^2}{4} - p^m)}$.

Se si riflette quindi che le radici dell' equazione $y^m - z = 0$ sono espresse (326) dalla formula generale

$$y = \sqrt[m]{z}\left(\text{cos.}\frac{2ci}{m} \pm \text{sen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1}\right) = \left\{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - p^m)}\right\}^{\frac{1}{m}}\left\{\text{cos.}\frac{2ci}{m} \pm \text{sen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1}\right\}$$

e si avverte come abbiamo notato (111) che non si cerca in questo luogo di assegnar le radici in

questione, ma di scoprirne soltanto il carattere, e che pertanto possiamo permetterci l'introdurre in un trattato algebrico dell'equazioni un'espressione trigonometrica, avremo tutte le radici di cui si tratta generalmente espresse dalla formula $x\left(=y+\frac{p}{y}\right)=\left\{\cos.\frac{2ci}{m}\pm\right.$

$$\text{sen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1}\left\{\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-p^m\right)}\right\}^{\frac{1}{m}}+\right.$$

$$\left\{\cos\frac{2ci}{m}\mp\text{sen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1}\left\{\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-p^m\right)}\right\}^{\frac{1}{m}}\right.\right.$$

espresse cioè dalla formula Cardanica presentata sotto la veduta di tutta la generalità di cui essa è capace: ed avremo perciò da conchiudere che facendo $=0$ tutti i detti termini intermedj, si avranno tante equazioni quanti sono i coefficienti indeterminati dell'assunta equazione, e che determinando con esse questi coefficienti, si avrà in generale la formula di tutte l'equazioni che ammettono per radice quella del Cardano. Facciamo adunque $=0$ questi termini intermedj, e veggiamone l'equazioni che ne risultano disposte nel piano della seguente tavola.

Tav. per la pag. 208. num. 137.

$$a'=0$$

$$a+mp=0$$

$$a'(m-1)p+b'=0$$

$$\frac{m(m-1)}{2}p^2+a(m-2)p+b=0$$

$$\frac{a'(m-1)(m-2)}{2}p^2+b'(m-3)p+c'=0$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot3}p^3+\frac{a(m-2)(m-3)}{2}p^2+b(m-4)p+c=0$$

$$\frac{a'(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot3}p^3+\frac{b'(m-3)(m-4)}{2}p^2+c'(m-5)p+d'=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{m(m-1)\ldots\left(m-\frac{n-2}{2}\right)}{2\ldots\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}+\frac{a(m-2)(m-3)\ldots\left(m-\frac{n}{2}\right)}{2\ldots\frac{n-2}{2}}p^{\frac{n-2}{2}}+\frac{b(m-4)(m-5)\ldots\left(m-\frac{n+2}{2}\right)}{2\ldots\frac{n-4}{2}}p^{\frac{n-4}{2}}+\ldots b=0$$

$$\frac{a'(m-1)\ldots\left(m-\frac{n}{2}\right)}{2\ldots\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}+\frac{b'(m-3)\ldots\left(m-\frac{n+2}{2}\right)}{2\ldots\frac{n-2}{2}}p^{\frac{n-2}{2}}+\frac{c'(m-5)\ldots\left(m-\frac{n+4}{2}\right)}{2\ldots\frac{n-4}{2}}p^{\frac{n-4}{2}}+\ldots b'=0$$

ec. ec. ec.

138. Queste equazioni ci danno mercè l' eliminazione e l' analogia i valori de' coefficienti dell' assunta equazione; ci danno cioè

$$a' = b' = c' = d' = \ldots b' = \ldots r \text{ (ovvero) } v = 0$$

ed

$$a = -mp$$

$$b = \frac{m(m-3)}{2} p^2$$

$$c = -\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3} p^3$$

$$d = \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4} p^4$$

$$e = -\frac{m(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)}{2.3.4.5} p^5$$

$$f = \frac{m(m-7)(m-8)(m-9)(m-10)(m-11)}{2.3.4.5.6} p^6$$

. . . . . .

$$h = \pm \frac{m\left(m-\frac{n+2}{2}\right)\left(m-\frac{n+4}{2}\right)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}}$$

(secondo che $\frac{n}{2}$ è pari o impari)

. . . . . .

$$v = \pm \frac{m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-3}{2}.\frac{m-5}{2}\ldots 2}{2.3.4\ldots\frac{m-1}{2}} p^{\frac{m-1}{2}} = \pm m p^{\frac{m-1}{2}}$$

(secondo che $\frac{m-1}{2}$ è pari o impari)

(ovvero)

$$v = \mp \frac{m.\frac{m}{2}.\frac{m-2}{2}.\frac{m-4}{2}\ldots 3}{2.3.4\ldots\frac{m-2}{2}} p^{\frac{m-2}{2}} = \pm \frac{m^2}{4} p^{\frac{m-2}{2}}$$

(secondo che $\frac{m}{2}$ è pari o impari)

139. Quindi la formula generale d' assegnarsi per l' equazioni Cardaniche si è per m impari

$$x^m - mpx^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2} p^2 x^{m-4}$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3} p^3 x^{m-6} + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{m(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)}{2.3\ldots n} p^n x^{m-2n} \mp$$

$$\ldots \pm m p^{\frac{m-1}{2}} x \left(\text{sec. che } \frac{m-1}{2} \text{ è pari o impari}\right) + z = 0$$

in cui n è il numero de' termini che in essa precede un dato termine; ed essendo in questo caso $q = r$, sarà $x =$

$$\left(\cos.\frac{2ci}{m} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen.}\frac{2ci}{m}\right)\left\{-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} - p^m\right)}\right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$+\left(\cos.\frac{2ci}{m} \mp \sqrt{-1}\,\text{sen.}\frac{2ci}{m}\right)\left\{-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} - p^m\right)}\right\}^{\frac{1}{m}}$$

la formula generale corrispondente delle sue radici.

140. Quindi la formola generale di assegnarsi per l'equazioni Cardaniche si è per m pari

$$x^m - mpx^{m-2} + \frac{m\,m-2}{2}p^2x^{m-4}$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}p^3x^{m-6} + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{m(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)}{2.3.\ldots.n}p^n x^{m-2n} \mp \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{m^2}{4}p^{\frac{m-2}{2}}x^2$$ (secondo che $m:2$ è pari o im-

pari) $+ t = 0$. Per averne quella delle sue radici si rifletta che essa dipende dal valor di

$$q = \frac{m\ldots\frac{m+2}{2}}{2\ldots\frac{m}{2}}p^{\frac{m}{2}} + \frac{a(m-2)\ldots\frac{m}{2}}{2\ldots\frac{m-2}{2}}p^{\frac{m-2}{2}} + \ldots t$$

Per semplicizzare questo valore io prendo l'indeterminata k e suppongo

$$\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+2}{2}}{2\ldots\frac{m}{2}}p^{\frac{m}{2}} + \frac{a(m-2)\ldots\frac{m}{2}}{2\ldots\frac{m-2}{2}}p^{\frac{m-2}{2}} + \ldots k = 0;$$

supposizione che mi dà $q = t - k$. Paragono questa equazione colla (138)

$$\frac{n(m-1)\ldots\left(m-\frac{n-2}{2}\right)}{2\ldots\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}} + \frac{a(m-2)(m-3)\ldots\left(m-\frac{n}{2}\right)}{2\ldots\frac{n-2}{2}}p^{\frac{n-2}{2}}$$

$+ \ldots h = 0$, e ne ho $m = n$, $h = k$. Quindi mettendo m, k per n, h nel valor generale di h determinato per analogia (138), si avrà

$$k = \pm \frac{m \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-4}{2} \cdots 2}{2 \cdot 3 \cdots \frac{m}{2}} \; p^{\frac{m}{2}} = \pm 2 p^{\frac{m}{2}}$$

epperò $q = t - k = t \mp 2p^{\frac{m}{2}}$. Quindi

$$x = \left\{ \cos. \frac{2ci}{m} \pm \operatorname{sen}. \frac{2ci}{m} \sqrt{-1} \right\} \left\{ -\frac{t \mp 2p^{\frac{m}{2}}}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} \left(t \mp 2p^{\frac{m}{2}} \right)^2 - p^m \right)} \right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$+ \left\{ \cos. \frac{2ci}{m} \mp \operatorname{sen}. \frac{2ci}{m} \sqrt{-1} \right\} \left\{ -\frac{t \mp 2p^{\frac{m}{2}}}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} \left(t \mp 2p^{\frac{m}{2}} \right)^2 - p^m \right)} \right\}$$

sarà la formula generale cercata delle radici dell'equazione corrispondente a questo caso.

141. Data un' equazione noi sappiamo, per quanto si è detto, conoscere dalla sola sua ispezione se essa ammette o nò radice della forma Cardanica; ed ammettendola noi sappiamo sul campo assegnarla. L'argomento che a primo aspetto si presenta per questa cognizione è quello, che eccettuato l'ultimo termine ne' soli gradi impari, essa dee sempre mancare di tutti quei in posto pari; che il coefficiente del secondo dee essere un multiplo del suo grado, e che eccetto l'ultimo termine i segni debbono alternare oppure esser tutti positivi secondo che p è positivo o negativo. Gli altri argomenti onde dell' intutto fissare tal conoscenza riuscirebbero assai inviluppati nell' espressione se vorremo tradurli nel linguaggio ordinario. Quindi contentandoci di averli espressi coll' espressione delle due formule generali già sopra registrate, passiamo a riflettere su quelle delle radici dell' equazione di cui si tratta, cioè sulla formula Cardanica, Presentata sotto la veduta di tutta quella generalità di cui essa è capace.

142. Incomincio ad osservare che queste due formule hanno la forma medesima, ed in altro non consiste la lor differenza che il s nell' una tien luogo di $s \mp 2p^{\frac{m}{2}}$ nell' altra. Quindi le riflessioni che faremo sulla prima non possono differirsi nelle conseguenze da quelle che han luogo per la seconda se non in ciò solamente che proviene da questa differenza e da quella di esserne il grado impari o pari. Lasciando di notare nel numero seguente il prodotto combinato di queste differenze passiamo ad indicare con $a \pm \sqrt{b}$ i due termini della radice in questione, e per maggior semplicità dell'espressione, a supporre i loro coefficienti numerici $\cos. \frac{2ci}{m} \pm \text{sen.} \frac{2ci}{m} \sqrt{-1} = f \pm h\sqrt{-1}$: onde avremo $x = (f \pm h\sqrt{-1})\, \sqrt[m]{(a+\sqrt{b})} + (f \pm h\sqrt{-1})\, \sqrt[m]{(a-\sqrt{b})}$

Dopo ciò prosieguo ad osservare che il primo passo onde mettere più in veduta ed esaminare

perciò più da vicino il carattere di questa formula si è quello di effettuire l' estrazione della radice m di $a \pm \sqrt{b}$. Il metodo esposto (110) onde avere in termini finiti questa radice non ha luogo che in un caso particolare, nel caso cioè in cui l'equazione (c) che è la stessa della proposta, ha radici razionali. Per mantenerci quindi nella generalità ed abbracciare colle nostre conclusioni tutti i casi di cui la questione è capace, io ricorro all'estrazione per serie; ed ho perciò

$$\sqrt[m]{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt[m]{a}\left\{1 + \frac{\sqrt{b}}{am} \mp \frac{(m-1)\sqrt{b}}{2am} + \frac{(m-1)(2m-1)b}{2.3a^2m^2} \mp \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)b\sqrt{b}}{2.3.4\,a^3m^3} \pm \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)(4m-1)b^2}{2.3.4.5\,a^4m^4} \mp \text{ec.}\right\}$$

e quindi

$$x = 2\sqrt[m]{a}\left(f\left\{1 - \frac{(m-1)b}{2a^2m^2}\left(1 + \frac{(2m-1)(3m-1)b}{3\cdot 4\, a^2m^2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(2m-1)(3m-1)(4m-1)(5m-1)b^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\, a^4m^4} + \text{ec.}\right)\right\}$$

$$\pm \frac{h\sqrt{-b}}{am}\left(1 + \frac{(m-1)(2m-1)b}{2\cdot 3\, a^2m^2}\right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)(4m-1)b^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\, a^4m^4} + \text{ec.}\right)\Bigg)$$

valore di x che in un caso particolare, come vedremo, non ha potuto sommarsi e ridursi a termini finiti.

143. Riflettendo ora sulle parti di questa nuova espressione di x, io relevo che i $2m$ valori in essa contenuti non sono in fondo che m, poichè i valori di c egualmente distanti da o ed m non danno per f che il medesimo valore, ed altra differenza non portano in quello di h che solamente nel segno; che gli m valori di essa sono tut-

ti ineguali, e $\sqrt[m]{a}$ è sempre una quantità reale; e che finalmente $\sqrt{-b}$ può essere immaginaria nulla o reale secondo che $\frac{1}{4}t^2 > = 0 <$ di p^m. Quindi conchiudo che un' equazione della famiglia Cardanica avrà tutte ineguali le sue radici; che essendo $\frac{1}{4}t^2 > p^m$ il valor di x risulta immaginario fuori il caso in cui c e però $h = 0$, cioè che l' equazione ha una sola radice reale tutte le altre essendo immaginarie; che essendo $\frac{1}{4}t^2 = p^m$ le radici dell' equazione proposta saranno in tutti i casi reali; che finalmente essendo $\frac{1}{4}t^2 < p^m$, e dippiù p positivo, tutte le radici saranno allora reali, poichè in questo caso b risulta negativo.

144. Una circostanza singolare s' incontra in quest' ultimo caso; circostanza che lo ha reso

memorabile nell' analisi Cartesiana. In questo caso abbiam veduto che le radici dell'equazione sono reali, e frattanto la formula

$$x = (f+h\sqrt{-1})\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})} + (f-h\sqrt{-1}) \times \sqrt[m]{(a-\sqrt{-b})}$$

che l'esprime in generale si presenta in tutti i casi sotto aspetto immaginario. La riduzione di questa espressione immaginaria a forma reale non si è saputo ottenere che per approssimazione, sia ricorrendo alle serie come sopra (142) abbiam praticato, sia col mezzo delle formule trigonometriche. Ma una riduzione per approssimazione non è una riduzione rigorosa e perfetta, una riduzione alla vera sua forma. La formula Cardanica è un'espressione algebrica, un'espressione finita in tutti i casi. Quindi un'espressione algebrica e finita sarebbe la vera sua riduzione: in questa espressione algebrica e finita è che si avrebbe la riduzione alla vera sua forma: e questa espressione non differendo dalla formula stessa Cardanica che nel solo essere spogliata dall'aspetto immaginario, che non le appartiene, ci darebbe la riduzione perfetta la riduzione rigorosa che si desidera.

Vani sono riusciti i tentativi degli Analisti, onde eseguire questa riduzione: locchè ha fatto chiamar questo caso, *Caso irriducibile*. Ed il Cav. Lorgna nella sua *Esercitazione Analitica*, e quindi nelle Memorie (an.1782) della Società Italiana, ha creduto a sufficienza provare per l'equazioni del terzo grado che vani riusciranno ancora quegli altri che saranno per farsi sul soggetto medesimo. Per dare intanto un'idea di questa prova sull'irriducibilità ne vò ad esporre in fondo i raziocinj dopo aver fissato però il carattere di questo caso famoso. Se ci ricordiamo quanto abbiamo notato (116) che quando l'equazione (*c*) ha radici razionali, allora si può sempre ottenere in termini finiti la radice m di $a \pm \sqrt{-b}$. Se quindi indichiamo con u, z due quantità razionali noi possiamo sempre avere in questo caso $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})} = (u \pm \sqrt{-z})\sqrt[m]{k}$, e però $x = ((u+\sqrt{-z})(f+h\sqrt{-1}) + (u-\sqrt{-z})(f-h\sqrt{-1}))\sqrt[m]{k} = 2\sqrt[m]{k}(fu+h\sqrt{z})$: avere cioè la formula in questione spogliata degl' immaginarj e ridotta a forma reale e finita. Il caso

adunque in cui l'equazione propoſta ha radici razionali non và compreſo nel caſo irriducibile. Il caſo irriducibile ſuppone perciò che le radici dell'equazione ſieno reali, ineguali, ed irrazionali: donde avviene che ſe un'equazione oltre i caratteri notati (141) avrà reali ineguali ed irrazionali le ſue radici non ſolo ci porterà alla formula Cardanica, m'alla formula Cardanica eziandio nel caſo irriducibile.

145. Un altro carattere oltre i notati onde un'equazione ſia indiſpenſabilmente nel caſo irriducibile è quello che i ſuoi coefficienti ſieno tutti razionali. Il non avvertire a queſto carattere ha fatto cadere in inganno molti analiſti, ed a fatto riguardar loro molte equazioni che ne erano mancanti come tanti caſi, giuſta la fraſe dell'Encicopledifta, rapiti all'irriducibilità. Se in queſt' equazioni irrazionali, in apparenza irriducibili, ſi toglie ogni irrazionalità e ſi riducono alla forma della propoſta; ecco che ſvaniſce tutta l'illuſione della loro irriducibità. Il Cav. Lorgna lo ha fatto vedere nella *Eſerc. Anal.*; delle cui rifleſſioni non poſſo profittare per non aver alle mani queſta ſua opera. E noi lo faremo vedere più ſotto in un applicazione. Ma eſponiamo prima la ſomma della dimoſtrazione Lorgniana ſull' impoſſibilità di ſciogliere il nodo dell' irriducibilità.

146. Supponiamo poſſibile la riduzione di cui ſi tratta e veggiamo dalle concluſioni cui queſta ſuppoſizione ci porta di ricavarne una di quelle pruove, che ſi dicono negative in quanto negano qualche provata condizione. Notando con d la funzione algebrica e finita che ſi ottiene colla ſuppoſta riduzione, e riflettendo che il prendere $\sqrt[m]{(a\pm\sqrt{-b})}$ o $(f\pm k\sqrt{-1})\sqrt[m]{(a\pm\sqrt{-b})}$ è un' iſteſſa coſa, in quanto ambedue non eſprimono che le ſteſſe m radici di $a\pm\sqrt{-b}$, avremo $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}+\sqrt[m]{(a-\sqrt{-b})}=d$. Oſſervo poi così di paſſaggio che le radici m di $a\pm\sqrt{-b}$ non ſono che tutte funzioni dell' incognita che ſi determina riſolvendo l'equazione (c): incognita che per la medeſimezza in queſto caſo dell' equazione (c) colla propoſta non può aver per valore che un

funzione di t, p. Quindi la funzione d qualunque essa sia non può essere che una funzione di t, o p solo, oppure di t, e p presi insieme. Dopo questa osservazione io prendo l'equazione di supposizione $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}+\sqrt[m]{(a-\sqrt{-b})}=d$, e ne divido, e moltiplico nello stesso tempo per il primo il secondo termine del primo membro onde l'avrò trasformata nella

$$\left(\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}\right)^2-d\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}=-\sqrt[m]{(a^2+b)}=-p;$$

che risoluta co' metodi consueti mi dà $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}=\frac{1}{2}(d\pm\sqrt{(d^2-4p)})$ risultato che dee avverarsi in tutte le condizioni annesse al caso di cui si tratta ond'essere possibile la proposta riduzione. Interroghiamo adunque questo risultato, e sentiamo la risposta che esso ci dà col linguaggio della sua espressione.

147. Se fissiamo lo sguardo sull' espressione di questo risultato chiaramente leggeremo che per

esser possibile la supposta riduzione uop'è che $a+\sqrt{-b}$ abbia per radice m una funzione di d della forma $\frac{1}{2}(d\pm\sqrt{(d^2-4p)})$. Se riflettiamo sulla forma di questa funzione prontamente rileveremo esser quell' istessa che noi abbiamo (110) fissato per la radice m di $a+\sqrt{-b}$, e conchiuderemo perciò che essa dee andar soggetta a quelle condizioni medesime onde abbiamo dedotto la possibilità di quella estrazione. Se richiamiamo infine su di questa funzione quanto dicemmo in quel numero facilmente ricaveremo dall' equazione (b) che $\sqrt{(d^2-4p)}$ è immaginario, come dee essere onde il risultato $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}=\frac{1}{2}(d\pm\sqrt{(d^2-4p)})$, di cui stiamo all' esame, sia legittimo e niente completta di assurdo, donde potrem conchiuderne la proprietà generale dell' equazioni a radici tutte reali ed ineguali che il quadrato di una qualunque di queste radici è sempre minore del quadruplo della somma di tutti i loro bini pro-

dotti diviso per l'esponente massimo dell' equazione; e ricaveremo dippiù facilmente che d dee esser non solo una quantità razionale, ma essere ancora radice dell' equazione (c) che in questo caso, come abbiamo sopra notato, è l'istessa dell' equazione proposta, ed è perciò un' equazione nel caso irriducibile. Quindi essendo condizione del caso irriducibile che l' equazione proposta abbia tutte irrazionali le sue radici, ne avviene che l' argomento che la supposta riduzione ci ha dato nel risultato $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})} = \frac{1}{2}(d \pm \sqrt{(d^2-4p)})$, di dover essere cioè d razionale, è un argomento tutto contrario al carattere distintivo dell' irriducibilità, ed è perciò un argomento che nega la supposta riduzione $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}+\sqrt[m]{(a-\sqrt{-b})}$ a d. Ma siccome noi abbiamo espresso con d una funzione qualunque sia possibile ed immaginabile: siccome non abbiamo sottoposto tal supposizione ad alcuna condizione particolare, ma l' abbiamo presa bensì in tutta l' estensione della generalità; così uop' è conchiudere che le radi-

ci dell' equazioni Cardaniche nel caso irriducibile non possono con qualunque immaginabile metodo spogliarsi dell' aspetto immaginario in cui son presentate, e ridursi alla vera lor forma reale algebrica finita.

148 Questi sono in fondo i raziocinj co' quali il Longna ha creduto troncare ogni nuova ricerca sulla riducibilità del caso irriducibile, e co' quali si è creduto in dritto di dichiarar cavilloso e disonorante l' analisi, quell'analista che sarà per mettere in dubbio l' irriducibilità in questione. Io senza fermarmi sopra di essi, ma sol contentandomi di averne abbozzato un quadro co' materiali però che le teorie di questo mio libro mi hanno presentato i più pronti, passo a mostrar come la trigonometria ci viene in questo caso a soccorrere in farci prontamente trovare esatte o approssimate le radici che per l' ordinario l' analisi pura ci dà per vie molto laboriose, e molto lunghe.

149. Io prendo (1735.) a tale oggetto dalla trigonometria analitica l' equazione

$$\text{cos.}^m a - \frac{m(m-1)}{2}\text{cos.}^{m-2} a\,\text{sen.}^2 a +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}\text{cos.}^{m-4} a\,\text{sen.}^4 a -$$

$$\ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.\ \ldots\ n}\text{cos.}^{m-n} a\,\text{sen.}^n a + \text{ec.}$$

$$= \text{cos.}^m a + \frac{m(m-1)}{2}\text{cos.}^{m-2} a(\text{cos.}^2 a - 1) +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}\text{cos.}^{m-4} a(\text{cos.}^2 a - 1)^2$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2\ \ldots\ n}\text{cos.}^{m-n} a(\text{cos.}^2 a - 1)^{\frac{n}{2}}\text{ec.}$$

$=\text{cos.}\,ma$, ed osservo che essa è perfettamente simile alla (c) del num. 116. Trattando quindi come alla (c) questa equazione, arriveremo certamente ad averla sotto l'espressione

$$(2\text{cos.}a)^m - m.(2\text{cos.}a)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2\text{cos.}a)^{m-4}$$

$$\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2\text{cos.}a)^{m-6} + \text{ec.} = 2\text{cos.}ma$$

(ovvero)

$$\text{cos.}^m a - \frac{m}{2^2}\text{cos.}^{m-2} a + \frac{m(m-2)}{2^4 2}\text{cos.}^{m-4} a -$$

$$\frac{m(m-4)(m-5)}{2^6\,2.3}\text{cos.}^{m-6} a + \text{ec.} - \frac{\text{cos.}\,ma}{2^{m-1}} = 0$$

Questa equazione che appartiene alla famiglia delle Cardaniche non comprende però sotto la sua espressione se non quelle soltanto che ci danno sotto aspetto immaginario le loro radici quantunque reali; poichè paragonandola colla generale del numero 139 abbiamo $p = \frac{1}{2^2}$, $z = -\frac{\text{cos.}\,ma}{2^{m-1}}$, e perciò $\frac{1}{4}z^2 \left(= \frac{\text{cos.}^2 ma}{2^{2m}}\right) < p^m \left(= \frac{1}{2^{2m}}\right)$.

Questa equazione ci viene in soccorso per farci prontamente trovare esatte, o approssimate le radici di tutte l'equazioni irriducibili.

Per vederne la maniera basta riflettere che l'oggetto della soluzione di questa equazione non è che di trovare gli m valori di cos.a cioè dell'

incognita. La trigonometria ci dà senza ricorrere a soluzione analitica questi valori; poichè conoscendo sempre il valor di cos.ma, che si ha col paragonarlo al termine cognito dell'equazione proposta, si ottiene dalle tavole quello di ma, e poi quello di a e di cos.a: inoltre tutti i valori possibili di cos. ma essendo tutti compresi (l.710.) nell'espression delle formule, cos.$(2ci \pm ma)$, $-$cos.$((2c+1)i \pm ma)$ tutti quelli di cos.a lo saranno in quella delle formule cos. $(\frac{2ci}{m} \pm a)$, $-$cos.$(\frac{2c+1}{m} i \pm a)$: ecco con quale facilità e con quale prontezza ci da le radici di cui si tratta, e come ci risparmia perciò la fatiga di laboriosissimi calcoli in cui sovente s'impegna l'analisi pura.

Pria di passare a qualche applicazione debbo avvertire che dopo l'impressione del num. 143 trovai per caso nel calcolo del Lacroix un cenno che mi fa dubitare di essere stato io il primo a concepire l'idea di questo metodo trigonometrico, che mi trovava in quel numero annunciato assolutamente per nuovo. Ciò vaglia a non crederfi che io voglia attribuirmi la pri-

ma idea di un metodo di cui altri avranno forse parlato: metodo però che quantunque si trovasse altrove trattato potrò frattanto, insieme a molte altre teorie di questo libro, attribuirmi per averlo concepito esteso ed applicato senza alcuna notizia.

150. Per prima applicazione io prendo l'equazione

$$x^3 - 3r^2x + r^3\sqrt{2} = 0,$$

che M. Nicole (Mem. Accad. 1740) ha trovato per la trisezione dell'arco di 90°, e che si è riguardata come uno de' casi rapiti all'irriducibilità. Paragonando questa equazione colla generale de' gradi impari avremo

$$x = \frac{r}{\sqrt[6]{2}}\left(\sqrt[3]{(-1+\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(-1-\sqrt{-1})}\right)$$

Il metodo (109) ci dà $\sqrt[3]{(-1 \pm \sqrt{-1})} = \ldots$ $\frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt[3]{2}}$ epperò $x = r\sqrt{2}$. Dividendo per

questa radice l'equazione proposta sene avrà una del secondo grado che ci darà

$x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}} (\sqrt{3} \mp 1)$ per le altre due. Quindi si è conchiuso che quantunque l'equazion proposta abbia reali ineguali irrazionali le sue radici, frattanto la formula Cardanica sotto aspetto immaginario si è trovata suscettibile di riduzione; e si è creduto perciò vedere in questa equazione un caso assolutamente rapito all'irriducibilità.

151. Un caso veramente rapito all'irriducibilità sarebbe questo se fra i caratteri del caso irriducibile non si trovasse quello, di cui il Lorgna ci ha il primo prevenuti, cioè di dover essere razionale l'equazione. La proposta equazione non appartiene che in apparenza alla classe delle irriducibili. Se da essa leviamo via ogni irrazionalità; ecco che la vedremo ascritta non più nelle irriducibili, ma nella classe bensì delle riducibili. Levando in fatti questa irrazionalità ne avremo l'equazione

$$(x^2)^3 - br^2(x^2)^2 + 6r^4 x^2 - 2r^6 = 0,$$

in cui supponendo $x^2 = z + 2r^2$ onde levarvi il secondo termine e ridurla alla forma della proposta ne avremo la $z^3 - 3r^4 z = 0$; che è un equazione riducibile e non mai irriducibile; che ha $z = 0$, $z = \pm r^2\sqrt{3}$ per radici; e che finalmente ci dà

$$x = r\sqrt{2},\ x = r\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})} = (109) \pm \frac{r}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} \mp 1)$$

per quelle della proposta.

152. Per seconda applicazione prendo l'equazione $x^4 - 16x^2 + 16 = 0$, la quale paragonata colla generale de' gradi pari mi dà $p = 4, t = 16$ e per essere $\frac{m}{2} = 2$ un numero pari, mi dà

$$s - 2p^{\frac{m}{2}} = -16, \text{ e quindi}$$

$$x = \sqrt[4]{8}\left(\sqrt[4]{(1 + \sqrt{-3})} + \sqrt[4]{(1 - \sqrt{-3})}\right):$$

valore sotto aspetto immaginario: valore dei di

cui termini, trattati col metodo (118.), non se-
ne può estrarre la radice: valore che per essere
razionale l'equazione, e reali ineguali irrazio-
nali le sue radici non si può spogliare di que-
sto aspetto e ridursi a forma reale algebrica fi-
nita: valore finalmente che può assegnarsi, co-
me abbiamo notato, e colle serie e col soccor-
so della trigonometria. Noi ricorriamo a que-
sta onde dare un'applicazione del metodo espo-
sto (149)

153. Tutti i valori di cos.a essendo general-
mente espressi dalle formule

$$\cos.\left(\frac{2ci}{m} \pm a\right), \quad -\cos.\left(\frac{(2c+1)i}{m} \pm a\right),$$

saranno per l'equazioni del quarto grado

$$\pm \cos.a, \ \pm \text{sen}.a, \ \pm \cos.(45^\circ + a), \ \pm \cos.(45^\circ - a).$$

Se chiamo poi r il raggio, e paragono la pro-
posta coll'equazione del numero (149) ne avrò

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = 4, \text{ cioè } r = 4, \text{ e } \cos.4a = -\left(\frac{2}{r}\right)^3 \cdot 16 =$$

$$-1 = -\frac{r}{2} = -\cos.60^\circ, \text{ cioè } a = 30 = 60^\circ.$$

Quindi i valori approssimati di x sono

$$\pm \cos.30^\circ, \pm \text{sen}.30^\circ, \pm \text{sen}.15^\circ, \pm \cos.15^\circ,$$

cioè ridotti in parti del raggio

$$r = 4, \pm 4 \cos.30^\circ, \pm 4 \text{sen}.30^\circ,$$

$$\pm 4 \text{sen}.15^\circ, \pm 4 \cos.15^\circ, \text{ cioè } \pm 2\sqrt{3},$$

$$\pm 2, \pm 1,0353, \pm 3,8637.$$

Questi due ultimi sono quelli però che molto si avvicinano al valor vero di x; mentre i primi ne son molto distanti. Sostituiti quelli in effetto per x nell'equazione proposta non si troverà 0, 001 di errore.

PROBL. 34.

Dimostrare i teoremi de' numeri (l.394.395)

154. Io tralascio di trascrivere i sensi dei teoremi enunciati, poichè nel progresso di questo dettaglio si arriverà a scoprire in che essi consistono.

Ogni equazione può trasformarsi in un'altra senza secondo termine; trasformazione che mai tralasciasi di praticare onde renderne vieppiù semplice la soluzione. Il metodo per arrivarvi

re è purtroppo conosciuto, ed io supponendo eseguito ciò coll' autore delle lezioni, passo a prendere i due fattori componenti la proposta (l. 393)

$$x^4 + tx^2 + qx + u = 0,$$

sotto la forma

$$x^2 - mx\sqrt{n} + b \pm c\sqrt{n} = 0$$

$$x^2 + mx\sqrt{n} + b \mp c\sqrt{n} = 0,$$

il di cui prodotto dà, giusta la frase dell' autore, l'equazione compostissima

$$x^4 + (2b - m^2n)x^2 \mp 2cmnx + b^2 - c^2n = 0.$$

Suppongo quindi eguale a zero, nulla, una, o due delle quantità m, b, c, onde averne tutti i casi possibili; supposizione che mi dà i sette casi, che io dispongo nella seguente tavola

I.

$$x^4 + (2b - m^2n)x^2 \mp 2cmnx + b^2 - c^2n = 0$$

$$t = 2b - m^2n \ldots q = \mp 2cmn \ldots u = b^2 - c^2n$$

II. . . . $b = 0$

$$x^4 - m^2nx^2 \mp 2cmnx - c^2n = 0 \ldots t = -m^2n$$

$$q = \mp 2cmn \ldots u = -c^2n$$

III. . . . $c = 0$

$$x^4 + (2b - m^2n)x^2 + b^2 = 0 \ldots t = 2b - m^2n$$

$$q = 0 \ldots u = b^2$$

IV. . . . $m = 0$

$$x^4 + 2bx^2 + b^2 - c^2n = 0 \ldots t = 2b \ldots q = 0$$

$$u = b^2 - c^2n$$

V. . . . $b = c = 0$

$$x^4 - m^2nx^2 = 0 \ldots t = -m^2n \ldots q = 0 \ldots u = 0$$

VI. . . . $b = m = 0$

$$x^4 - c^2n = 0 \ldots t = 0 \ldots q = 0 \ldots u = -c^2n.$$

VII. . . . $c = m = 0$

$$x^4 + 2bx^2 + b^2 = 0 \ldots t = 2b \ldots q = 0 \ldots u = b^2$$

155. Se arrivo a determinare i fattori di queste sette equazioni espressi in parti de' coefficienti della proposta, ne avrò in un modo generale quelli di qualunque equazione che si potrà proporre del quarto grado: comincio a

tale oggetto ad osservare che le III. IV. sono ambedue derivate dal secondo grado; che la V è immnue di affezione zero lineare cubica; che la VI è pura; e che la VII è un quadro perfetto. Quindi sene vedono a primo sguardo i di loro fattori. Passo adunque ad osservare le I, II, e veggo che la I è l'equazione risultata dal prodotto degli assunti fattori, e che però essi sono quelli che le appartengono, e che gli ultimi tre termini della II sono il prodotto di n per un quadrato perfetto, e però mettendola sotto la forma $x^4 = n(mx \pm c)^2$ ci dà

$$x^2 + mx\sqrt{n} \pm c\sqrt{n} = o, \quad x^2 - mx\sqrt{n} \mp c\sqrt{n} = o$$

pe' suoi fattori. Per esprimere poi questi fattori in parte de' coefficienti t, q, u della proposta onde averli dalla sola sua ispezione, osservo che i valori rispettivi di t, q, u presi dalla tavola (154), e combinati fra loro mi danno per la

I... $m = \mp \frac{2c(2b - t)}{q}$, $n = \frac{q^2}{4c^2(2b - t)}$,

$$2b - t = \frac{q^2}{4(b^2 - u)}$$

e per la II.. $m = \pm \frac{2ct}{q}$, $n = -\frac{q^2}{4c^2 t}$, $t = \frac{q^2}{4u}$:

osservo dippiù che b non è che la parte intera razionale del termine conosciuto, e che perciò la noto con E. Quindi mettendo tutti questi valori ne' fattori trovati per le I. II. ne avrò i due teoremi enunciati, cioè se nell' equazione $x^4 + tx^2 + qx + u = o$ sarà $t = \frac{q^2}{4u}$

i suoi due fattori saranno

$$x^2 + x\sqrt{-t} \pm \sqrt{-u} = o$$
$$x^2 + x\sqrt{-t} \mp \sqrt{-u} = o;$$

e se sarà $2E - t = \frac{q^2}{4(E^2 - u)}$,

si avranno sotto la forma

$$x^2 - x\sqrt{(2E - t)} + E \pm \sqrt{(E^2 - u)} = o$$
$$x^2 + x\sqrt{(2E - t)} + E \mp \sqrt{(E^2 - u)} = o$$

156. Si avverta pria di finire che il nu-

mero E si determina mercè l'equazione $2E - t = \frac{q^2}{4(E^2 - u)}$, cioè $E^3 - \frac{1}{2}tE^2 - uE - \frac{q^2 - 4ut}{8} = 0$ equazione che dall' avere o nò delle radici razionali intere, determina l'affermativa o negativa applicazione del metodo al caso proposto nel teorema secondo.

PROBL. 35.

Risolvere l' equazioni

$x^4 + 6x^2 - 12x + 6 = 0$, ed $x^4 - 18x^2 + 25x + 6 = 0$.

158. Per rispondere alla proposta questione, entro ad esaminare se il metodo di cui abbiamo parlato nel problema precedente vi ha luogo di applicazione. Trovo con questo esame che la prima dalle due equazioni enunciate soddisfa al l'equazione di condizione $t = \frac{q^2}{4u}$, e che la seconda non adempie ne a questa nè alla $2E - t = \frac{q^2}{4(E^2 - u)}$, cioè nel nostro caso alla

$E^3 + 9E^2 - 6E - \frac{1057}{8} = 0$, poichè niun valore di E può ridurla a zero. Quindi conchiudo che $x^2 + x\sqrt{-6} \pm \sqrt{-6} = 0$ sono i fattori della prima, e che fa duopo ricorrere ad altro metodo, onde averne quei della seconda.

159. Vi tento però il metodo de' fattori razionali, e la suppongo formata dal prodotto di

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ per } x^2 + ax + c = 0,$$

cioè la suppongo della forma

$$x^4 + (b + c - a^2)x^2 - a(b - c)x + bc = 0.$$

Il paragone di due equazioni le di cui radici si suppongono le stesse non dee farsi che termine con termine, poichè la somma semplice di esse radici, quella de' suoi bini, terni, ec. prodotti è sempre eguale in ambedue. Quindi ho

$$b + c - a^2 = -18,\ a(b - c) = -25,\ bc = 6,$$

e però $b = \frac{a^2 - 18a - 25}{2a}$, $c = \frac{a^2 - 18a + 25}{2a}$, ed

$a^6 - 36a^4 + 300a^2 - 625 = 0$. Il tutto dipende nel cavar da quest' ultima il valore di a. Per

venirne a capo pongo $a^2 = z$, onde avrò $z^3 - 36z^2 + 300z - 625 = 0$. Osservo poi che a dee essere per condizione razionale, e che però il valor di z dee esserne un quadrato perfetto. Quindi fra i fattori 1, 5, 25, 125, 625 dell' ultimo termine ne prendo il quadrato 25 onde averne $a = 5$, e però $b = 1$, $c = 6$, e finalmente $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 + 5x + 1 = 0$ pe' fattori cercati della seconda equazione delle due enunciate.

160. Mettendo termine a questa soluzione io debbo avvertire che l'essere risultati imaginarj i fattori del secondo grado

$$x^2 \pm x\sqrt{-6} \mp \sqrt{-6} = 0$$

della prima delle proposte due equazioni non dee farci argomentare che essa non ne ha de' reali. Ogni equazione di grado parì è sempre scomponibile in fattori reali del secondo. Questo teorema è stato in maniere diverse dimostrato. Io mi trattengo sopra di esso un momento, onde convincere in generale su di quanto ho dovuto avvertire sull'equazione enunciata in

particolare; onde provare con esso la proposizione d'Alembertiana sulle radici imaginarie che ho dovuto citar (91); onde darne una dimostrazione assai semplice e piana: dimostrazione che rassomigliando a quella che Laplace ha dato nel giornale della scuola normale ne è più semplice però più generale ed esente dalla dipendenza de' due teoremi da cui la tira quel sommo geometra, e da cui se non m' inganno (perchè il nome famoso del Laplace me ne fa purtroppo temere) mi sembra tutta indipendente

Si noti con r, r' due radici qualunque di un'equazione di grado m, che chiamo (A) e si avrà (a) $x^2 - (r+r')x + rr' = 0$ per l'espressione generale de' suoi fattori doppj: L'equazione (A) è chiaro che avrà tanti fattori reali di secondo grado quanti saranno i valori reali di $r+r'$ ed rr'. Per determinare questi fattori basta fissare in generale per tutte le radici in questione il valore di queste quantità Per fissare questo valore basta conoscere due equazioni che le complettano come due incognite. Per assegnare nel modo più semplice

queste due equazioni basta prenderle della forma

$$r+r'+prr'=q,\quad r+r'+p'rr'=q'$$

Se noi avremo il modo di conoscere queste due equazioni onde cavarne i valori di $r+r'$, e di rr'; se noi otterremo uno o più valori reali che sistituiti in (a) ci danno uno o più risultati reali, è chiaro che l'equazione (A) avrà sempre uno o più fattori doppj reali. Or la conoscenza di queste due equazioni è sempre possibile. In effetto le bine combinazioni diverse dell'm radici della (A) sono $\frac{m(m-1)}{2}$.

Quindi supponendo $y=r+r'+prr'$ si avranno con tutte queste radici $\frac{m(m-1)}{2}$ fattori della forma $y-r-r'-prr'=0$; fattori che moltiplicati fra loro daranno un'equazione (B) del grado $\frac{m(m-1)}{2}$; equazione di cui i coefficienti non essendo, come abbiam veduto (82...88) per un caso simile che delle funzioni simetriche delle radici della (A), e perciò sapendo determinarsi in funzione di quei di questa, ne avviene che sempre ci sia conosciuta.

La funzione adunque $r+r'+prr'$ si ha sempre dalla nota equazione (B), e tanti saranno i suoi valori reali quante sono le radici reali di questa equazione.

Essendo p un'indeterminata introdotta senz'altra condizione che quella di essere reale, ed essendo perciò suscettibile di un'infinità di valori diversi, ne viene che colle radici r, r' della (A) potranno formarsi un'infinità di fattori compresi tutti nella formula generale.

$$y-r-r'-p^{0,\ldots 1}rr'=0$$

e perciò potranno aversi un'infinità di equazioni del grado $\frac{m(m-1)}{2}$ in tutto simili alla (B), tutte conosciute, e che avranno sempre una o più radici reali quando una o più ne avrà la lor simile (B). Quindi se questa equazione (B) avrà una sola radice reale non solo si avrà uno ma un'infinità di valori reali per q. Quindi potendo aversi sempre in questo caso la conoscenza delle due equazioni.

$$r+r'+prr'=q,\quad r+r'+p'rr'=q'$$

si avrà sempre egualmente per la (A) un fattore reale di secondo grado.

Se l'equazione (B) non ha radici reali; allora essendo y immaginario; sapendo che una quantità immaginaria può essere mista con reale, e perciò essere della forma $f+g\sqrt{-1}$; riflettendo che le funzioni quanto composte esse sieno sono sempre il risultato delle operazioni fondamentali dell' algebra sulle funzioni semplici; osservando perfine che col sommare, sottrarre, moltiplicare, dividere, elevare a potenze sì intere che fratte, delle quantità della forma $f+g\sqrt{-1}$, si hanno de' risultati riducibili sempre alla forma $A+B\sqrt{-1}$: si resterà certamente convinto che in qualunque caso sarà sempre.

$$r+r'+pr'=n+k\sqrt{-1},\quad r+r'+p'rr'=n'+h'\sqrt{-1}$$

epperò

$$r+r'=\frac{np'-n'p+(p'h+ph')\sqrt{-1}}{p'-p}=a+b\sqrt{-1}$$

$$rr'=\frac{n'-n+(h'-h)\sqrt{-1}}{p'-p}=a'+b'\sqrt{-1}$$

donde si avrà

$$(a)=x^2-(a+b\sqrt{-1})x+a'+b'\sqrt{-1}=0$$

Se divido ora l'equazione (A) per questo suo fattore imaginario, è chiaro che essendo essa reale mi dee dare un quoziente non solo imaginario, ma combinato ancora talmente quanto nel suo prodotto per esso fattore si elidano fra loro gl' imaginarj. Quindi, notando con f la parola funzione, è chiaro che l'equazione (A) risulta sempre dal prodotto di questo fattore per un altro della forma $fx+f'x\sqrt{-1}$ cioè che

$$(A)=(x^2-(a+b\sqrt{-1})x+a'+b'\sqrt{-1})(fx+f'x\sqrt{-1})$$

in cui le due funzioni fx, $f'x$ sono supposte tali quanto gl' imaginarj si annullano fra loro.

Osservando questa equazione io veggo che mutando ne' suoi due fattori i segni de' termini imaginarj, si ha sempre il medesimo risultato per quanto spetta alla parte reale, e che la parte imaginaria annullandosi nel primo nò può non annullarsi nel secondo prodotto. Quindi avviene che la (A) può riguardarsi come il prodotto tanto di

$$x^2-(a+b\sqrt{-1})x+a'+b'\sqrt{-1} \text{ per } fx+f'x\sqrt{-1}$$

quanto di

$$x^2-(a-b\sqrt{-1})x+a'-b'\sqrt{-1} \text{ per } fx-f'x\sqrt{-1}$$

cioè l'equazione (A) è divisibile esattamente per qualunque delle due formule

$$x^2-(a\pm b\sqrt{-1})x+a'\pm b'\sqrt{-1}$$

cioè queste due formule sono fattori ambedue dell'equazione (A) Risolvendo questi due fattori ne' quattro semplici

$$x-\frac{1}{2}(a+b\sqrt{-1}+\sqrt{(c+d\sqrt{-1})})=0$$

$$x-\frac{1}{2}(a-b\sqrt{-1}+\sqrt{(c-d\sqrt{-1})})=0$$

$$x-\frac{1}{2}(a+b\sqrt{-1}-\sqrt{(c+d\sqrt{-1})})=0$$

$$x-\frac{1}{2}(a-b\sqrt{-1}-\sqrt{(c-d\sqrt{-1})})=0$$

(in cui si è supposto

$$a^2-b^2-4a'=c, 2(ab-2b')=d)$$

formando i sei bini prodotti che di essi sene possono fare diversi: sene troveranno sempre due che saranno reali. Per restarne convinti con una prova di fatto si multiplichino divisamente fra loro i due primi, e i due ultimi, e sene avranno i due prodotti

$$x^2-ax\pm\frac{a\mp x}{2}(\sqrt{(c+d\sqrt{-1})}+\sqrt{(c-d\sqrt{-1})})$$

$$\pm\frac{r}{2}\sqrt{-1}(\sqrt{(c+d\sqrt{-1})}-\sqrt{(c-d\sqrt{-1})})$$

$$+\frac{a^2+b^2}{4}+\sqrt{(c^2+d^2)}$$

prodotti in cui il terzo e quarto termine non essendo imaginarj che in apparenza, come facilmente si vede, ci convincono che l'equazione (A) contiene puranche in questo caso un fattore reale di secondo grado.

Quindi conchiudo che sapendo sempre assegnarsi, mercè i coefficienti della data equazione (A), le due equazioni

$$r+r'\mp prr'=q, r+r'+p'rr'=q'$$

avendo da esse in tutti i casi per (a) un risultato almeno reale: conchiudo io dico che l'equazione (A) contiene sempre un fattore reale almeno di secondo grado.

Quindi se divido la (A) per questo fattore, ne avrò un' equazion-quoziente di grado pari o impari secondo che essa è pari o impari; equazion-quoziente che per le stesse ragioni, anche essa conterrà un fattore reale di secondo grado: se prosieguo a dividere questa equazion quoziente per questo suo fattore ne avrò una seconda equazion-quoziente, che conterrà puranche un fattore reale di secondo grado: se continuerò a dividere ogni nuova equazion-quoziente pel suo corrispondente fattore, arriverò finalmente ad un quoziente zero se la (A) è di grado pari, e ad un'equazion-quoziente di primo grado se essa è di grado impari; equazion-quoziente di primo grado che in tutti i casi è reale, come quì appresso vederemo.

Quindi essendo l'equazioni pari scomponibili esattamente in fattori reali di secondo grado, e le impari col dare un' equazion-quoziente reale di primo grado, ne avviene che le radici imaginarie debbono esistere in esse

non solo a coppie, m'a coppie tali eziandio che l'una essendo della forma $f+g\sqrt{-1}$ dee essere l'altra della forma $f-g\sqrt{-1}$: e ciò perchè sotto tale condizione solamente è che il prodotto ne risulta reale.

Quindi la scomposizione dell' equazioni in fattori del secondo grado sarebbe un mezzo onde avere le radici sì reali che imaginarie in esse contenute; mezzo però che non ha affatto luogo in quanto si tratterebbe sempre di risolvere non solo un'equazione, ma un' equazione eziandio di un grado più alto.

Per nulla lasciar poi indimostrato mi resta provare che l'ultima equazion-quoziente che si ottiene scomponendo un' equazione di grado impari in fattori del secondo, è sempre un' equazione reale di primo grado. Dimostrando che ogni equazione di grado impari ha in tutti i casi una radice reale almeno di primo grado, è chiaro che resta dimostrato nell'atto stesso quest' ultima mia ricerca. Passiamo adunque alla dimostrazione di quest'altro teorema, e chiudiamo quindi con esso questo discorso.

In un' equazione

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ec.} = 0$$

si può sempre dare ad x un valor tale quanto il primo suo termine x^m risulti maggiore della somma di tutti gli altri, e perciò quanto il valore del suo primo membro risulti col medesimo segno di questo suo termine. Questa proposizione tosto apparisce allorchè l'equazione proposta si mette sotto la forma

$$x^m\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \text{ec.}\right) = 0 :$$

In effetto considerandone il primo membro in se stesso, cioè indipendentemente dall'esser legato in equazione; riflettendo che i valori di x sono in esso circoscritti sol quando si riguardano legati in equazione, in quanto debbono darne sempre zero per risultato, ma che non sono ristretti da limite alcuno quando esso si considera indipendentemente di ciò, cioè come un seguito di termini solamente; essendo purtroppo chiaro che quanto grandi sieno questi valori nello sta-

to di questa indipendenza sene può sempre concepire un altro che li sorpassi di quanto più si vorrà; osservando finalmente i termini

$$\frac{a}{x}, \frac{b}{x^2}, \frac{c}{x^3}, \text{ec.}$$

di esso: si resterà certamente convinto che può sempre darsi ad x un valore n tanto grande quanto questi termini divenendo picciolissimi la loro somma

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \text{ec.} < 1$$

e perciò sia

$$an^{m-1} + bn^{m-2} + cn^{m-3} + \text{ec.} < n^m$$

Quindi mettendo per x nell' equazione proposta questo numero n successivamente col segno $+$ e $-$, si avrà per essere m impari, $x = \pm n^m$; e perciò il valore del suo primo membro risultando con segno contrario ci convince che essa ha una radice reale tra $+n$ e $-n$: radice di cui sene hanno i limiti più stretti o, $+n$ quando l'ultimo termine è negativo; o, $-n$ quando è

positivo; e ciò perchè l'equazione si riduce sempre a quest'ultimo termine, cioè risulta col medesimo segno di esso, quando si suppone $x = 0$. Qui si osservi così di passaggio che quando quest' ultimo termine è negativo ne' gradi pari, allora il primo termine essendo sempre positivo, fa che il valore dell' equazione col farvi successivamente $x = n = 0 = -n$ risulti col segno $+, -, +$, e ci convinca perciò che essa ha almeno due radici reali tra $0, +n$, e $0, -n$, cioè l'una positiva e l'altra negativa.

PROBL. 36.

Trovare per approssimazione la radice dell' equazione

$$x^3 - 13x + 5 = 0$$

161. L'enunziazione di questo problema sembra che voglia indicarci di essere una sola la radice reale della propostavi equazione. Ma è purtroppo facile il vedere (l.392) che essa ha tali tutte tre le sue radici: locchè si è ancor da noi veduto (100)

Varj sono i metodi di approssimazione immaginati finora degli Analisti. L'analisi e la trigonometria ancora ha de' suoi particolari:

Non parlo de' secondi, poichè il caso nostro, essendo nel caso irriducibile, si sà trattare per quanto abbiamo noi detto (149). Per ciò riguarda i primi veggo che il primo passo a tutti comune si è quello di trovarne un limite, ed il secondo di approssimar sempreppiù questo limite al vero suo valore. Il metodo di cui l'autore si serve mi sembra alquanto imperfetto ed inviluppato. Quindi per questa e per la ragione di far conoscere in breve la varietà de' metodi, io mi son determinato per quello di Mayer (79), onde trovare i limiti delle radici cercate, e di avvicinarmi sempreppiù da questi al vero valore di esse col variare il metodo come dovrò variarne la ricerca.

162. Prendo adunque (100) i limiti $0, -3, +3$ delle radici dell' equazione enunciata, e partendo dal primo di essi incomincio ad avvicinarmi a quella che gli corrisponde, giusta il metodo che il nostro Lagrange cene ha dato nelle Memorie di Berlino per gli anni 1767.1768.

163. Sia $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \text{ec.} = 0$ l'equazione proposta. Sia l il limite inferiore della radice che si cerca, e perciò $x \geq l$, e $< l + 1$;

Sia finalmente $\bar{x} = l + \frac{1}{x'}$, onde avremo una trasformata della forma

$$a'x'^{m} + b'x'^{m-1} + c'x'^{m-2} + \text{ec.} = 0;$$

trasformata che ha una radice reale > 1, perchè $\frac{1}{x'} > 0$, e < 1. Il metodo stesso (100) ci dà un limite l' per questa radice, e ci guida a supporre perciò $x' = l' + \frac{1}{x''}$, onde averne una nuova trasformata della stessa forma

$a''x''^{m} + b''x''^{m-1} + c''x''^{m-2} + \text{ec.} = 0$. Con un raziocinio analogo al precedente dico che essa ha una radice reale > 1, il di cui limite chiamato l'' mi porta a supporre $x'' = l'' + \frac{1}{x'''}$, onde averne un'altra trasformata co' medesimi caratteri della prima, e così di seguito. L'equazioni

$$x = l + \frac{1}{x'}, x' = l' + \frac{1}{x''}, x'' = l'' + \frac{1}{x'''}, \text{ ec.}$$

ci danno il valor di

$$x = l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' + \cfrac{1}{l''' + \text{ec.}}}}$$

ci danno cioè x in frazione continua: donde avremo (52.IV) le frazioni convergenti verso di essa, e però le diverse approssimazioni per x.

164. Questo metodo non solo ci avvicina continuamente alla radice cercata, ma ci porta ancora al vero suo valore, quando esso lo è commensurabile, poichè in tal caso una delle trasformate ci darà esattamente in uno de' limiti l, l', l'', ec. la radice reale positiva. Noi andiamo a vedere l'applicazione di questo metodo alla prima delle radici, che formano il soggetto delle nostre ricerche; applicazione che esponiamo in una tavola ragionata, onde renderla più semplice, e tenerne sott'occhi tutte le parti.

Equazione proposta, in cui $l = 0$

$$x^3 - 13x + 5 = 0$$

I. ipot. $x = 0 + \frac{1}{x'} = \frac{1}{x'}$;

Trasf corrif. $x'^3 - \frac{13}{5}x' + \frac{1}{5} = 0$

Valori di $x' = 1, = 2, = 3, =$ ec.

Serie corrif. $-\frac{7}{5}, -\frac{11}{5}, +\frac{19}{5}$, ec..

$l' = 2$; app. corr. $x = \frac{1}{2} = 0,5$

II. ipot. $x' = 2 + \frac{1}{x''} = \frac{2x'' + 1}{x''}$;

Trasf. corrif. $x''^3 - \frac{8}{11}x''^2 - \frac{17}{11}x'' - \frac{5}{11} = 0$

Valori di $x'' = 1, = 2, =$ ec.

Serie corrif. $-\frac{19}{11}, +\frac{17}{11}$, ec.

$l'' = 1$; appr. corr. $x = \frac{1}{3} = 0,3333$

III ipot. $x'' = 1 + \frac{1}{x'''} = \frac{x''' + 1}{x'''}$

Traf. corrif. $x'''^3 - \frac{25}{19}x''' - \frac{11}{19} = 0$

Valori di $x''' = 1, = 2 =$ ec.

Serie corrif. $-\frac{17}{19}, +\frac{91}{19}$, ec.

$l''' = 1$; app. corr. $x = \frac{2}{5} = 0,4$

IV. ipot. $x''' = 1 + \frac{1}{x''''} = \frac{x'''' + 1}{x''''}$

Traf corrif. $x''''^3 - \frac{32}{17}x''''^2 - \frac{57}{17}x'''' - \frac{19}{17} = 0$

Valori di $x'''' = 1, = 2, = 3, = 4, =$ ec.

Serie corrif. $-\frac{91}{17}, -\frac{125}{17}, -\frac{19}{17}, +\frac{320}{17}$, ec.

$l'''' = 3$; app. corr $x = \frac{7}{18} = 0,3889$

V. ipot. $x''' = 3 + \frac{1}{x^{v}} = \frac{3x^{v}+1}{x^{v}}$

Traſ. corriſ. $x^{v3} - \frac{210}{19} x^{v2} - \frac{121}{19} x^{v} - \frac{17}{19} = 0$

Valori di $x^{v} = 1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7, = 8 = 9 = 10 = 11 = 12 =$ ec.

Serie corriſp.

$-\frac{329}{19}, -\frac{947}{19}, -\frac{1757}{19}, -\frac{2645}{19},$

$-\frac{3497}{19}, -\frac{4199}{19}, -\frac{4637}{19}, -\frac{4697}{19},$

$-\frac{4265}{19}, -\frac{3227}{19}, -\frac{1469}{19}, +\frac{1123}{19}$, ec.

$l^{v} = 11$; app.corr. $x = \frac{79}{203} = 0,3892$

VI. ipot. $x^{v} = 11 + \frac{1}{x^{vi}} = \frac{11x^{vi}+1}{x^{vi}}$

Traſ.corriſ. $x^{vi\,3} - \frac{2156}{1469} x^{vi\,2} - \frac{417}{1469} x^{vi} - \frac{19}{1469} = 0$

Valori di $x^{vi} = 1, = 2, = 3, =$ ec.

Serie corriſ. $-\frac{1123}{1469}, +\frac{2275}{1469}$, ec.

$l^{vi} = 1$; app.corr. $x = \frac{86}{221} = 0,3891$

VII. ipot. $x^{vi} = 1 + \frac{1}{x^{vii}} = \frac{x^{vii}+1}{x^{vii}}$

Tr.cor. $x^{vii\,3} + \frac{322}{1123} x^{vii\,2} - \frac{2551}{1123} x^{vii} - \frac{1469}{1123} = 0$

Valori di $x^{vii} = 1, = 2, = 3, =$ ec.

Serie corr. $+\frac{2575}{1123}, +\frac{97}{1123}, -\frac{24997}{1123}$, ec.

$l^{vii} = 3$; app.corr. $x = \frac{251}{645} = 0,3891$.

L'identità che io osservo nelle quattro prime cifre decimali delle due ultime approssimazioni, mi fa dire e conchiudere che 0, 3891 è la radice cercata.

165. Per trovare la seconda di queste radici parto del suo limite -3, e chiamata y la correzione che vi corrisponde, passo a supporre nella proposta $x = -(3+y)$, onde avrò la trasformata $y^3 + 9y^2 + 14y + 17 = 0$. Rifletto quindi che y è sempre < 1, e che questa operazione non è che di approssimazione, e perciò vengo a trascurarvi y^3 come assai picciolo, onde averne l'equazione $9y^2 + 14y + 17 = 0$, e da essa $y = 0, 8$, e però $x = -3, 8$

166. Per avvicinarmi sempreppiù al vero valore della radice in questione, chiamo z la correzione da farsi al trovato valore di x, e suppongo perciò nella proposta $x = -(3,8+z)$: donde avrò una nuova trasformata

$$z^3 + 11, 4z^2 + 30,3z + 0, 47 = 0;$$

In quest'equazione essendo z assai picciola non solo può trascurarsi z^3, come nella precedente, ma ancora $11, 4z^2$ perchè pure può riguardarsi come insensibile. Quindi $30, 3z + 0,47 = 0$, ed $y = -0,0155$, $x = -3, 7845$. Operando così ci avvicinaremo di vantaggio al vero valore della radice.

Ad imitazione intanto del caso precedente ne espongo in una tavola tutta l'operazione.

Equaz. proposta, il limite della cui radice $= -3$

$$x^3 - 13x + 5 = 0$$

I. Supp. $x = -(3+y)$

Trasf.compl. $y^3 + 9y^2 + 14y + 17 = 0$

Tras. di appr. $y^2 + \frac{14}{9}y - \frac{17}{9} = 0$

che ci dà $y = 0,8$, ed $x = -3,8$

II. Supp. $= -(3,8+z)$

Trasf.compl $z^3 + 11,4z^2 + 30,3z + 0,47 = 0$

Tras.di appr. $30,3z + 0,47 = 0$,

che ci dà $z = -0,0155$, ed $x = -3,7845$

III. Supp. $x = -(2,7845 + u)$

Tr.comp. $u^3 + 11,35\,u^2 - 29,7672u - 0,0046 = 0$

Traſ. di app. $29,7672u + 0,0046 = 0$

che ci dà $u = -0,0001$, ed $x = -3,7843$

IV. Supp. $x = -(3,7843 + t)$

Tr.comp. $t^3 + 11,35t^2 + 29,2939t + 0,0003 = 0$

Traſ. di appr. $29,2939t + 0,0003 = 0$,

che ci dà $t = -0,00001$, ed $x = -3,7843$.

E' l' uniformità delle prime quattro decimali che mi fa terminare la tavola, e conchiudere che $-3,7843$ ſi è la ſeconda delle radici cercate.

167. Per aver la terza di queſte radici vi applico il metodo indiretto delle doppie falſe poſizioni. Incomincio adunque a preparare una formula, onde averne la correzione corsiſpondente al ſuo limite con maggior prontezza di quello ſi ottiene col metodo ordinario (l. 316)

168. Sia $x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \text{ec.} = v$ l' equazione propoſta; ſia dato ad x un valore x' tale, che ſi abbia $x - x' = i$. Quindi è chiaro che do-

vrà averſi per v un valor falſo v': Io faccio $v - v' = h$, ed avrò $x = x' + i$, $v = v' + h$; valori che ſoſtituiti nell' equazione propoſta ci dà

$$x'^m + mx'^{m-1}i + \frac{m(m-1)}{2}x'^{m-2}i^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x'^{m-3}i^3 + \text{ec.}$$

$$+ bx'^{m-1} + b(m-1)x'^{m-2} + \frac{b(m-1)(m-2)}{2}x'^{m-3}$$

$$+ \frac{b(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}x'^{m-4} \text{ ec.}$$

$$+ cx'^{m-2} + c(m-2)x'^{m-3} + \frac{c(m-2)(m-3)}{2}x'^{m-4}$$

$$+ \frac{c(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3}x'^{m-5} \text{ ec.}$$

ec. ec. ec.

$= v' + h$

Maneggiando queſto metodo ſotto la condizione che i ſia aſſai picciolo, veggo che ſi poſſono ſenza errore ſenſibile traſcurare tutti i termini colle potenze di i ſuperiori alla prima e

che può prenderſi per proſſimamente vera l'equazione $x'^m + bx'^{m-1} + cx'^{m-2} + \text{ec.} = v$. Quindi ſi avrà

$$(mx'^{m-1} + b(m-1)x'^{m-2} + c(m-2)x'^{m-3}\text{ec.})i = h:$$

donde

$$i = \frac{h}{mx'^{m-1} + b(m-1)x'^{m-2} + c(m-2)x'^{m-3}\text{ec.}}$$

Applicando queſta formula al caſo della noſtra ricerca ſi avrà $m = 3, b = 0, c = -13, v = -5$, ed $i = \frac{h}{3x'^2 - 13}$. Se ſuppongo $x' = 3$, avrò che la propoſta $x(13 - x^2) = 5$ ſi riduce a $14 = 5$; locchè mi dà $h = 7$; valore che per eſſere troppo grande mi dà i contro l'ipoteſi. Quindi ſenza venire al calcolo di i paſſo ad una ſeconda ipoteſi: ma ſiccome il calcolo precedente mi dice che il valor di x dee eſſer maggiore dell'aſſunto, così paſſo a ſupporre $x = 3,5$, e vengo il tutto a metterlo ſott'occhi in una tavola

I. ip. $x' = 3,5$; $h = -0,38$; $i = -0,1002$; $x = 3,3998$;
II ip. $x' = 3,4$; $h = -0,13$; $i = -0,0046$; $x = 3,3952$
III. ip. $x' = 3,395$;

che non ci dà correzione alcuna pel trovato valor di x, e perciò ci da 3,3952 per l'ultima delle radici cercate. Quindi 0, 3891; − ,7843; 3,3952 ſono le radici approſſimate dell'equazione propoſta; e che abbiamo trovato con tre metodi diverſi, come ſul principio promiſe.

PROB. 37.

169. *Trovare la radice della equazione generale.*

$$x^n - \frac{n(n-1)}{2}abx^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}ab(a+b)x^{n-3}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}ab(a^2+ab+b^2)x^{n-4} \text{ ec} = 0$$

Io non veggo che l'equazione enunciata poſſa andar ſoggetta a quelle conſiderazioni generali che gli analiſti han fatto fin'ora ſull'equazioni. Io vi veggo al contrario un carattere tutto proprio e particolare. L'eſpreſſione che nell'enunciazione ſi uſa *di equazione generale* non può eſſere che relativa a quelle ſoltanto della ſua forma. Alcune oſſervazioni adunque particolari ſopra di eſſa ſon quelle che guidar mi dovranno, onde ſcoprire la forma di quella radice, che fa il ſoggetto di queſto problema.

570 Considerando sulla forma e sul progresso de' termini di questa equazione, io vi scopro che manca in essa il secondo; che la serie degli esponenti di x, e della parte in n de' suoi coefficienti, è quell'istessa della potenza n di un binomio; che l'altra parte di questi coefficienti non contiene che le sole quantità a, b, in dui si osserva constantemente un fattore ab; che questo fattore è moltiplicato ne'termini successivi per 1, $a+b$, a^2+ab+b^2, ec. qual'è la sola parte in cui non si vede una legge manifesta. Per dare questa legge a questa parte dell'equazione onde più chiaramente distinguerne la natura, io veggo essere un passo legittimo il moltiplicarne i termini per un certo fattore. Per iscoprire la natura, di questo fattore non ricorro che all'osservazione, la quale espressamente mi dice, che esso dee contenere le sole quantità a,b, e che avendo la forma $a-b$ e dell'intutto capace a soddisfare alla nostra ricerca: peronde diviene

$$a-b,\ a^2-b^2,\ a^3-b^3 \text{ ec.}$$

Altro non ci resta per completare l'equazione proposta, e metterla insieme sotto una legge costante, che determinare la forma del secondo suo termine. Niente più facile di questo. E' la legge con cui camminano le quantità

$a-b$, a^2-b^2, a^3-b^3, ec. quella che ci mostra essere a^0-b^0 la quantità che dee in essa moltiplicarne ab, ciocchè lo riduce a zero. Quindi l'equazione della nostra enunciazione diviene

$$(a-b)x^n-nab(a^0-b^0)\,x^{n-1}-\frac{n(n-1)}{2}ab(a-b)x^{n-2}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}ab(a^2-b^2)x^{n-3}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}ab(a^3-b^3)x^{n-4}\text{ec.}=$$

$$a(x^n+nbx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}b^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}b^3x^{n-3}\text{ec})$$

$$-b(x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^3x^{n-3}\text{ec})$$

$=a(x+b)^n-b(x+a)^n=0$: donde si ottiene

$$(x+b)\sqrt[n]{a}=(x+a)\sqrt[n]{b},\ \text{e però}\ x=\frac{a\sqrt[n]{b}-b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$$

Fine del Primo Tomo

Tavola degli errori a correggersi

Errori	*Correzioni*
Pag. 32. l. 9. e l. 7, r e $\sqrt{\left(\frac{ab-a^3}{12a}\right)}$	x e $\sqrt{\left(\frac{4b-a^3}{12a}\right)}$
26. l. 12. $3x+2$	$2x+2$
27. l. 16. $x=\frac{a-cy}{6}$	$x=\frac{a-cy}{b}$
68. l. 1. irazione	frazione convergente
ivi l. 8. de' numeri più piccioli	de' numeri più piccioli ma sempre nella serie de' termini delle frazioni convergenti,
70. l. 9 esprimersi	esprimersi da un' altra
81. l. ult. $\frac{e''}{tx''}$	$\frac{e''x}{t''}$
112. l. 10 $\frac{z+3}{y}$	$\frac{z+3}{3}$
116. l. 6. Assediati	Assedianti
129. l. 7. r^2	r
131. l. 3. e l. 8; u e q	v e q_z
135. l. 14. St	Sx
136. l, ult. (31)	(B)
153. l. 10. $t=y+z_m$	$z=x+y_m$
162. l. 11. 2	$\frac{1}{2}$
176. l. 15. $t(2z-1)=0$	$z-3=0$
201. l. 8, $v=$	$x=$
240. l. 8. $+ax+c$	$-ax+c$
248: l, ult. $r+r'+pr^2$	$r+r'+pr^2$

TAVOLA DELLE MATERIE

Dimostrazione della regola del massimo commun divisore cavata dalla teoria delle frazioni continue. num 1 pag. 9.

Dimostrazione algebrica e però generale della nota regola sul compendio della moltiplicazione e divisione de' decimali. 2. 13.

Soluzione di alcuni Problemi di primo e secondo grado. 16. 25.

Varj ed utili teoremi dimostrati su i numeri 29 33.

Teoria delle frazioni continue 45 48.

Dimostrazione di un teorema sulle progressioni aritmetiche, e geometriche, oggi dette serie a differenze e a quoziente 57. 76.

Alcuni problemi risoluti sulla regola del tre ed altre regole ad essa subalterne. 78. 58.

Applicazione del metodo de' coefficienti indeterminati allo sviluppo in serie di alcune algebriche frazioni. 68. 88.

Calcolo di una formula generale onde sommare i rotti decimali periodici sieno perfetti sieno imperfetti. 69. 93.

Tratto rapido sull' origine distinzione ed interpolazione delle serie. 71 95.

Applicazione della regola delle doppie false posizioni all' equazione esponenziale $r^r = 2000$ 72. 109

Metodo onde avere le radici razionali dell' equazioni mercè i divisori dell' ultimo termine. 74. 112.

Teoria generale sulla soluzione numerica dell' equazioni, ed altri teoremi in essa dimostrati sull' equazioni in generale. 78. 116.

Scomposizione di una quantità algebrica ne' suoi fattori. 108 165.

Metodo generale onde estrarre la radice qualunque m delle quantità della forma $a+\sqrt{b}$. 109 166.

Soluzione algebrica dell' equazioni secondo il Bezout. 119. 181.

Dell' eliminazione ne' gradi superiori. 121. 182.

Il metodo Cardanico generalizzato per l' equazioni di tutti i gradi sieno pari, sieno impari. 133. 200.

Esame generale della formula Cardanica: caso irriducibile: suoi veri caratteri: dimostrazione dell' impossibile sua riduzione: ed un metodo trigonometrico generale onde averne in esso le radici. 142. 215

Due teoremi dimostrati sul modo onde scomporre l' equazioni del quarto grado in fattori del secondo 154. 234.

Dimostrazione assai semplice della proposizione d' Alembertiana sulle radici immaginarie. 260. 241.

Esposizione di tre metodi onde avere per approssimazione le radici dell' equazioni. 161. 253.

Soluzione dell' equazione $x^n - \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}ab(a+b)x^{n-3}$ ec. $= 0$. 169. 260.