RACCOLTA

DI

Problemi di Geometria

RISOLUTI CON L'ANALISI ALGEBRICA

Da Fortunato Padula

SOCIO CORRISPONDENTE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE.

NAPOLI,
DALLA STAMPERIA E CARTIERA DEL FIBRENO
Largo S. Domenico Maggiore N.° 3.

1838.

A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR MARCHESE

D. GIOVANNI D' ANDREA

SEGRETARIO DI STATO DI S. M., MINISTRO DELLE FINANZE E DEGLI AFFARI ECCLESIASTICI; GRAN CROCE DEGLI ORDINI COSTANTINIANO, DI S. GIORGIO, E DI FRANCESCO I.; GRAN CORDONE DEGLI ORDINI DI CARLO III. DI SPAGNA, DI S. GIUSEPPE DI TOSCANA, E DI S. GREGORIO MAGNO; GRAN CROCE DELLA SACRA RELIGIONE GEROSOLOMITANA; DECORATO DELLA GRAN MEDAGLIA D' ORO D' ILLIBATA FEDELTA' DA S. A. I. E R. IL DUCA DI MODENA, REGIO COMMESSARIO PLENIPOTENZIARIO PER L' ESECUZIONE DEL CONCORDATO CONCHIUSO CON LA S. SEDE; SOCIO DELLE PIU' COSPICUE ACCADEMIE NAZIONALI, E STRANIERE, ec. ec. ec.

Eccellenza

La singolare bontà con la quale l' E. V. si degnò permettere che il mio primo lavoro comparisse fregiato del venerato suo nome mi ha dato animo ad intitolarle questo secondo per due cagioni principalmente, per dimostrarle, cioè, la somma mia gratitudine, e per dare un pubblico attestato dell' alta protezione, che l' E. V. accorda alle scienze esatte. Nè debbo tacere che l'E. V. nella luminosa carica che sostiene con tanto decoro e con soddisfazione dell' universale, proteggendo le scienze, e le arti e le manifatture, che ne dipendono, seconda le alte e benefiche mire del RE *nostro signore, sempre intento al ben essere de' suoi amatissimi sudditi. Questo fortunato Regno, favorito dal sorriso della Natura per la fertilità del suolo, sarà per le cure dell' E. V. posto nel rango delle più colte nazioni dell' Europa, celebri per rinomanza di scienze, industrie, arti, manifatture, e commercio.*

Con rispetto e venerazione sono

Di V. E.

Umil.° Dev.° Obblig.° servo

Fortunato Padula.

PREFAZIONE.

La raccolta di problemi che presento al pubblico, ha per oggetto il mostrare come dalle risoluzioni algebriche de' problemi geometrici si possan trarre, per la composizione di essi, operazioni grafiche tanto semplici, quanto quelle cui mena l'analisi geometrica; e ciò non solamente riguardo a' problemi della comune Geometria, ma anche rispetto a quelli di Geometria Descrittiva. L'analisi algebrica applicata alle due dimensioni, oltre lo sviluppo di tutte le affezioni delle curve piane, ha somministrato ancora costruzioni elegantissime nei molti problemi che ha impreso a risolvere. Al contrario gli scrittori di analisi algebrica applicata alle tre dimensioni si sono limitati soltanto allo sviluppo delle proprietà delle linee storte e delle superficie curve, non che a dare eleganti forme a'determinanti analitici de' soggetti geometrici collocati nello spazio, senza darsi alcun pensiero di costruire i risultamenti secondo il genio parti-

**

colare della Geometria Descrittiva; privando così questa scienza del potente soccorso dell' analisi moderna. Una tale condotta ha potuto per avventura derivare dalle forme spesso complicatissime sotto le quali si presentano le espressioni delle incognite, circostanza che ha indotto i meno periti a dire, non poter l'analisi algebrica giungere ove perviene con semplicità l' analisi geometrica; e per tal modo è stata profferita una proposizione del tutto contraria all'indole de'due metodi. Imperocchè riflettendo che l' equazione d' un problema contiene tutte le relazioni che rendono determinabili le ignote dalle note, è facile vedere *a priori* potersi da siffatta equazione cavare tutte le operazioni grafiche che alla composizione del problema conducono. Se i moderni Geometri col soccorso del calcolo sono giunti a scoprire le leggi onde Natura governa la materia corporea, e a dedurne la spiegazione degli stupendi fenomeni, che il vasto teatro dell' Universo presenta; non sarà poi l' Algebra valevole a trovare le composizioni dei problemi geometrici, più accessibili incomparabilmente dei problemi fisico-matematici? Altri pertanto non potendo del tutto negare la superiorità dell' Algebra, si limitano a dire che di essa si possa far uso sol quando debbono considerarsi oggetti terminati da linee o superficie la cui genesi sia geometricamente definita; mentre la Geometria Descrittiva considera spesso quelle questioni ove entrano curve solamente disegnate, senza che se ne possa assegnare la genesi; e quindi ne deducono che la Geometria Descrittiva sia meno limitata dell' Algebra. Ma questa conchiusione che troppo si oppone alla tanto conosciuta generalità de'metodi algebrici, resta smentita da se ove si rifletta che se la Geometria Descrittiva perviene a risolvere problemi in cui sono date curve non definite rigorosamente, egli è perchè la natura della questione è tale, che le ignote si possano determinare per mezzo di quantità che restano assegnate graficamente, allorchè si ha soltanto la curva tracciata: tali sono in generale le rette che partendo da dati punti sotto determinate inclinazioni si arrestano alla curva. Or quantunque non sappiasi la natura della curva, si potrà nondimeno indicarne sempre l'equazione ponendo una delle coordinate di un punto qualunque di essa uguale ad una funzione dell'altra; questa funzione sarà per vero dire ignota, ma si potrà per ogni valore della variabile graficamente assegnare, quando sia disegnata la curva; quindi risolvendo il problema, si troverà necessariamente che le formole che rappresentano le ignote, racchiuderanno questa funzione; ma non pertanto potranno graficamente costruirsi per ciò che ora abbiam detto; e nel problema XXVII ne ho data un'applicazione, avendo in esso considerata una superficie di rotazione senza aver riguardo alla natura della curva generatrice.

Da ciò che precede risulta quanto utile sarebbe applicare il calcolo alla Geometria Descrittiva, la quale ha tanta influenza nel perfezionamento delle arti belle e meccaniche; ed è questo lo scopo principale cui ho mirato in quest' opera. Riflettendo pertanto che i punti principali intorno a cui la Descrittiva si aggira sono la soluzione di problemi del tutto geometrici relativi ad oggetti esistenti o che si vogliono situare nello spazio, la ricerca de' piani tangenti alle superficie, e delle

proiezioni delle medesime, e la determinazione delle ombre de' corpi; ho cercato di occuparmi di ciò, onde presentare delle idee che seguir si potrebbero nel formare un corso elementare di analisi applicata alla Descrittiva. Nella ricerca dell'ombra di un corpo, oltre della linea che separa la parte chiara dalla oscura, e che è la sola che finora si è determinata dagli autori di Descrittiva, mi sono ancora occupato di assegnare sulla porzione che resta in luce le linee che passano pe' punti egualmente rischiarati, non che la posizione che debbono avere onde le tinte delle strisce comprese fra due curve consecutive vadano diminuendo con una legge determata. Avrei dovuto considerare ancora qualche esempio sulla divisione di una volta in cunei, essendo questa una delle applicazioni essenziali della Descrittiva; ma tale ricerca dipendendo dalla conoscenza delle linee di curvatura, è noto che la Geometria Descrittiva, all'infuori di pochi casi particolari, non somministra alcuna regola per ritrovar queste linee, ed in consegnenza restando totalmente nel dominio del calcolo, mi è sembrato inutile il mostrare che anche su questo punto sarebbe più conducente il servirsi dell'Algebra. Finalmente per ciò che riguarda la ricerca delle curve prodotte dall'intersezione delle superficie, quantunque ne abbia date varie applicazioni in tutti i problemi che riguardano le ombre ed in alcuni di quelli che li precedono, non ho creduto formarne un oggetto a parte, perchè tranne i casi delle superficie ordinarie, qual è il metodo generale che la Descrittiva presenta? scegliere una serie di superficie tale che producano nelle date superficie le sezioni più semplici a costruirsi, e determinando per ciascuna le sezioni prodotte nelle date; i punti ove queste s'incontrano apparteranno alla curva cercata. Ma non si ha poi alcun mezzo per scovrire quale debba essere la natura di questa terza superficie ausiliaria: al contrario quando sonosi determinate le equazioni delle due date superficie, quando anche non si voglia fare l'eliminazione di una delle coordinate, si può prescrivere un precetto simile a quello che dà la Descrittiva, cioè di stabilire fra le tre coordinate una relazione tale che semplicizzi quanto più sia possibile le equazioni date; ed allora l'insieme di queste tre equazioni determinerà de'punti che appartengono alla curva cercata. Questi punti poi si possono determinare sia assegnando i valori di ciascuna delle coordinate, sia, e ciò riuscirà sempre più elegante, eliminando una delle coordinate fra l'equazione stabilita e ciascuna delle date, e costruendo poi le linee appartenenti alle equazioni che ne risultano. Questo procedimento ch'è identico a quello che si tiene nella Descrittiva, riesce sempre più agevole all'Algebra ne'casi nuovi, de'quali intendo parlare, perchè quando si ha un'equazione si vede immediatamente qual relazione si debba stabilire fra le variabili onde sia resa più semplice, lo che non apparisce tanto facilmente dalle considerazioni geometriche.

Ho scelto la maggior parte delle questioni che ho considerate fra i varî problemi che il ch. Signor Professore Tucci mi dava a risolvere nell'ultimo corso di Descrittiva dato alla scuola di applicazione degli Ingegneri di acque e strade, alla quale come alunno io assisteva. Nell'ordinare ora siffatte ricerche ho creduto pure utile di farle precedere da varî problemi di Analisi a due coordinate che mi trovava già di aver

risoluti, quando studiando io l'applicazione dell'Algebra alla Geometria sotto il ch. Professore Signor De Angelis, egli, in conferma delle dottrine che andava agli alunni tutti sviluppando, e per addestrarli all'eleganza delle costruzioni, li proponeva a risolvere, e mi teneva così continuamente occupato nell'applicazione dei metodi generali ai particolari problemi. Del resto non intendo con ciò di voler forse mostrare che la presente raccolta di problemi debba portare una data molto anteriore, dappoichè conviene anzi ch'io dica che tanto le soluzioni dei problemi di Descrittiva, quanto quelli di analisi a due coordinate, nel rivederle, le ho pressochè tutte cambiate, e non è restato di alcuni problemi se non se il solo enunciato: e di fatto chi non conosce che quanto più si medita sulla soluzione di un problema tanto più va esposta a semplicizzazioni? Così pure trattando le diverse questioni, ove si è presentato a fare qualche osservazione generale, non ho mancato di farla notare; onde è che varie ricerche puramente di Analisi a due coordinate ho intraprese a considerare; tra le quali, il modo come determinare il cerchio che passa pe'punti comuni a due curve coniche quando queste s'intersecano in tre punti, dalla quale ricerca si rileva che quantunque le coordinate de'tre punti suddetti sieno determinate da equazioni di terzo grado, tuttavia i determinanti del cerchio che passa per essi sono espressi da funzioni razionali de'coefficienti delle due date equazioni; in secondo luogo la condizione onde i quattro punti comuni a due curve coniche si trovino sulla circonferenza di un cerchio, ed ammessa tal condizione, come si possa assegnare il cerchio; e finalmente alcune osservazioni sulla costruzione delle equazioni di terzo e quarto grado ad una sola ignota: e facendo notare come queste ultime si possano sempre costruire con l'intersezione di una data curva del secondo grado e di un cerchio, ne ho data un'applicazione nel problema ove si tratta di condurre per un dato punto una normale ad una data curva conica, e l'ho risoluto servendomi sempre della curva data e di un cerchio, lo che parmi non sia stato ancor fatto se non che per la sola parabola. In ciascun problema di analisi a due coordinate ho posta separatamente la composizione geometrica dalla quale risultano le operazioni da eseguirsi per effettuare la risoluzione di ognuno di essi, quantunque poi non sieno tutte esposte sulla figura, perchè avendo, per non moltiplicare le tavole, considerati varì casi su di una stessa figura, troppo complicate sarebbero le figure risultate se tutte le costruzioni si fossero per disteso eseguite. Ma nei problemi di Descrittiva, poichè l'oggetto principale del disegno è di far comprendere tutto dalla sola ispezione della figura, ho eseguite tutte le costruzioni; e perciò mi sono poi limitato ad accennarle soltanto nel corso della soluzione, senza porre in ultimo una minuta composizione isolata, essendo dalla figura essa rappresentata. Da ultimo nelle ricerche attenenti a' piani tangenti alle superficie mi sono servito delle formole esposte nel *Calcolo*, e ciò credo mi sia permesso in grazia della brevità, e pel riflesso che non deve il mio lavoro servire per elementi ove è indispensabile un'uniformità di metodo, ma che il mio scopo è di mostrare principalmente che con maggior impegno coltivar si dovrebbe l'applicazione del calcolo in generale alla Descrittiva.

PROBLÈMA I.

1. D*ATA* (*Fig.* 1.) *la parabola* KIk, *il diametro* AIx *e in esso il punto* A, *e data la retta* BQ; *condurre la retta* AMN *in modo che inclinate le rette* MP, NQ *sotto un medesimo angolo dato al diametro* Ax, *sia la parte* PQ *che intercettano sulla* BQ, *uguale ad una data retta.*

Condotta per A la AR che faccia col diametro Ax l'angolo RAx uguale al dato, si prendano per assi coordinati le rette Ax, AR: sia la tangente applicata alla parabola in D parallela ad AR; e chiamando α, β le coordinate del punto D, $2p$ il parametro della parabola corrispondente al diametro che passa per D, e t, u le coordinate del punto M, le equazioni della parabola e della AMN saranno

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha) \ldots (1),\quad y=\frac{u}{t}x \ldots (2),$$

dalle quali eliminando y, avremo

$$u^2x^2 - 2(\beta ut + pt^2)x + t^2(\beta^2+2p\alpha) = 0.$$

Avendo questa equazione una radice uguale a t, l'altra sarà

$$\frac{2(\beta ut + pt^2)}{u^2} - t.$$

Ma supponendo che

$$y = ax + b$$

sia l' equazione della BQ, si rileva che, dinotando con x, x' le ascisse de' punti P e Q, e con c il coseno dell'angolo degli assi,

$$PQ = (x' - x)\sqrt{1 + a^2 + 2ca} \ldots (3)\ ;\ (*)$$

dunque poichè i punti P e Q hanno le stesse ascisse de' punti M N, chiamando $2d$ la data retta, otterremo l' equazione

$$\left(\frac{\beta ut + pt^2}{u^2} - t\right)\sqrt{1 + a^2 + 2ca} = d,$$

che unita all'equazione

$$(u - \beta)^2 = 2p(t - \alpha) \ldots\ldots (1'),$$

la quale si deduce dalla (1) osservando che il punto t, u (**) appartiene alla parabola, serve a determinare t, u. Facciamo per semplicità di calcolo

$$\frac{d}{\sqrt{1 + a^2 + 2ca}} = d',$$

(*) Difatti per le note regole dell' analisi a due coordinate è chiaro che se y, y' sono le ordinate degli stessi punti P e Q, si ha

$$PQ = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2c(x' - x)(y' - y)}:$$

d' altronde essendo i punti P e Q sulla retta BQ risulta

$$y = ax + b,\ y' = ax' + b$$

donde $y' - y = a(x' - x)$, il quale valore sostituito in quello di PQ dà immediatamente l' equazione (3). Avendosi pure $x' - x = \frac{y' - y}{a}$ è evidente che la detta distanza può essere espressa dalla formola

$$\frac{y' - y}{a}\sqrt{1 + a^2 + 2ca}.$$

(**) Per brevità in vece di dire il punto che ha per coordinate t ed u, diremo sempre il punto t, u; ed è da notarsi che nomineremo prima l' ascissa, e poi l' ordinata.

ed eliminando u^2 dalle due equazioni precedenti risulta

$$(t + 2d')(\beta u + pt - \beta^2 - 2p\alpha) + d'(\beta^2 + 2p\alpha) = 0 \ldots (4),$$

e la curva espressa da questa equazione, che come è chiaro è una iperbola, incontra la parabola ne' punti M.

2. Per costruire questa curva osserviamo che mancando il termine in u^2 uno degli asintoti è parallelo all' asse delle y, quindi cambiando l' origine e il solo asse delle ascisse, si potrebbe determinare la vera posizione degli asintoti; ma sarà più breve determinarli osservando che se immaginiamo due rette date dall'equazioni

$$t + 2d' = \gamma,\ \beta u + pt - \beta^2 - 2p\alpha = \gamma'$$

γ e γ' essendo due costanti qualunque, combinando queste equazioni con quella della curva ne risulta un' equazione di primo grado, e che per conseguenza le rette suddette incontrando la curva in un sol punto sono parallele agli asintoti; e poichè quando $\gamma = 0$, o $\gamma' = 0$ il punto d' incontro si trova a distanza infinita dall' origine, saranno

$$t + 2d' = 0,\quad \beta u + pt - \beta^2 - 2p\alpha = 0$$

l' equazioni degli asintoti. Queste equazioni si costruiscono colla massima facilità. Difatti dall' equazione (3), ponendo $x = 0$, $x' = -2d'$, si rileva che la retta espressa dall' equazione

$$t = -2d'$$

taglia sulla BQ una parte uguale a

$$-2d'\sqrt{1 + a^2 + 2ac} = -2d,$$

e che perciò se BC $= 2d$, la CO sarà un' asintoto: quanto all' altra equazione si ponga $u = 0$, e si avrà $t = \frac{\beta^2 + 2p\alpha}{p}$; ma nell' equazione (1') ponendo $u = 0$, si ha $t = AI = \frac{\beta^2 + 2p\alpha}{2p}$, dunque presa IG = IA, per G passerà l'asintoto, e poichè la tangente IH ha per equazione $2\beta u + 2pt = \beta^2 + 2p\alpha$, sarà ad IH parallelo. Assegnati in tal modo gli asintoti, resta a trovare un punto dell'iperbola , a fine di descriverla ; ora avendosi dall' equazione (4) per $t = o$, $2\beta u + 2pt = \beta^2 + 2p\alpha$, sarà H questo punto, e resterà così tutto determinato.

Composizione del problema.

Fatto l'angolo xAR uguale al dato; si prenda IG uguale ad IA, BC uguale alla retta data, e si tiri alla tangente IH la parallela GO. L'iperbola che passando per H ha per asintoti OC ed OR incontra la parabola ne' punti cercati.

5. Siccome nel prendere la distanza PQ potevasi adottare il segno $\pm$ avanti il radicale dell'equazione (3), anche la d' nell' equazione (4) potrebbe essere affetta dal segno $\pm$, lo che cambia soltanto la direzione della CO che invece di passare per C, quando si prendesse il segno $-$ passerebbe per C': quindi pare che risolvendo il problema due iperbole differenti, ne sieno otto le soluzioni; ma è chiaro che di queste iperbole una passa pe' punti M l'altra pe' punti N. Difatti allorchè tra l' equazioni (1) e (2) abbiamo eliminata la y, l'equazione ottenuta in x, non considerando il punto t, u appartenente alla parabola, ci dimostra che

$$\frac{2t\sqrt{p^2t^2 + 2p\beta ut - 2p\alpha u^2}}{u^2}$$

è la differenza delle ascisse; t, u essendo le coordinate di un punto qualunque della AMN, e quindi dovrà essere

$$\frac{t\sqrt{p^2t^2 + 2p\beta ut - 2p\alpha u^2}}{u^2} = d' \ldots (1).$$

Questa equazione essendo liberata dal radicale e divisa per t^4 si riduce ad un' equazione di quarto grado rispetto ad $\frac{u}{t}$; quindi darà quattro valori per $\frac{u}{t}$, e sostituendoli nell' equazione (2) del

n. 1 si conosceranno le quattro posizioni, che algebricamente parlando, può avere la AMN : or avendosi dalla detta equazione $\frac{y}{x} - \frac{u}{t} = o$, è chiaro che moltiplicando le quattro equazioni che si ottengono nel modo or indicato, si otterrà un' equazione che differisce dalla (1) pel solo cambiamento di x, y in t, u, e quindi se si cercasse di costruire l' equazione (1), invece di una linea del quarto ordine si avrebbero quattro rette. Ed è da notarsi, che in generale qualunque sia il grado di un' equazione fra due variabili, purchè sia omogenea rappresenta sempre tante rette che passano per l' origine per quanto è il numero che ne indica il grado. Pertanto volendo costruire le rette date dall'equazione (1), possiamo cercare ove incontrano una data retta, e le ascisse o le ordinate de' punti d'incontro verranno date da un' equazione di quarto grado, che si potrà come è noto costruire adoprando la stessa parabola data ed il cerchio. Prendiamo per la retta arbitraria quella espressa dall'equazione

$$u = \frac{2cp^2}{\beta},$$

l'equazione trovata più sopra diverrà

$$t^2\left(t^2 + 4cpt - \frac{8c^2\alpha p^3}{\beta^2}\right) = \frac{16c^4p^6d'^2}{\beta^4},$$

e ponendo

$$t^2 = 2pu \ldots\ldots\ldots\ (2),$$

avremo l' equazione

$$u^2 + 2cut - \frac{4c^2\alpha p^2}{\beta^2}u = \frac{4c^4p^4d'^2}{\beta^4},$$

che sommata colla precedente dà

$$u^2 + 2cut + t^2 - 2\left(p + \frac{2c^2\alpha p^2}{\beta^2}\right)u = \frac{4c^4p^4d'^2}{\beta^4} \ldots\ldots (3)$$

equazione appartenente ad un cerchio. Ma la (2) indica la parabola data se prendiamo Dt per asse delle t, e Du per asse delle u;

dunque rispetto a' medesimi assi dobbiamo costruire l' equazione (3). Ciò posto allorchè $u = o$ si ha dall'equazione (3) $t = \pm \frac{2c^2p^2d'}{\beta^2}$, e perciò se DT è questo valore per T deve passare il cerchio; inoltre è facile il rilevare dall' equazione del cerchio riferito a coordinate oblique, che il suo centro si determina prendendo su gli assi delle x e delle y due parti uguali alle metà de' coefficienti di x ed y a primo grado col segno cambiato, ed elevando agli assi medesimi due perpendicolari; onde essendo nullo nell' equazione (3) il coefficiente di t, presa $\mathrm{ME} = p + \frac{2c^2\alpha p^2}{\beta^2}$, sarà F il centro (*). Quindi poichè il cerchio che ha F per centro e passa per T nel caso indicato dalla figura incontra la parabola in due soli punti, i valori di t saranno due reali e due immaginarî; de' primi poi DL è positivo, DL' negativo, e per conseguenza se dl è la retta dell' equazione $u = \frac{2cp^2}{\beta}$, bisognerà prendere $dl = \mathrm{DL}$, e $dl' = \mathrm{DL}'$, e le rette $\mathrm{A}l$, $\mathrm{A}l'$ saranno le rette cercate.

(*) Possiamo anche assicurarci diversamente che F è il centro del cerchio appartenente all' equazione (3), difatti essendo $t = \pm \frac{2c^2p^2d'}{\beta^2}$ il cerchio dovrà passare anche pel punto T' posto alla stessa distanza di T da D, e la DF perpendicolare alla corda TT' nel suo punto di mezzo deve passare pel centro: del pari mettendo $t = o$ nell' equazione (2) si ha

$$u^2 - 2\left(p + \frac{2c^2\alpha p^2}{\beta^2}\right)u = \frac{4c^4p^4d'^2}{\beta^4},$$

ed i valori di u sono le ascisse de' punti ove la Du incontra il cerchio, e poichè la quantità $p + \frac{2c^2\alpha p^2}{\beta^2}$ è la semisomma delle radici di questa equazione, indicherà essa l'ascissa del punto di mezzo della corda intercetta nel cerchio, e quindi la EF anche passa pel centro.

Resta ora a vedere come debbansi costruire i valori di DE, DT, ed Ad: a tale oggetto si rifletta che dall' equazione (1, 1) (*) si rileva che la tangente applicata alla parabola in un punto qualunque α', β'; ha per equazione rispetto agli assi Ax, AR

$$y - \beta' = \frac{p}{\beta' - \beta}(x - \alpha');$$

onde se vogliamo che questa retta sia perpendicolare ad Ax, cioè che il punto α', β' sia il vertice principale, dovendo essere

$$\frac{p}{\beta' - \beta} = -\frac{1}{c},$$

si ha

$$\beta' - \beta = -cp, \text{ e quindi } \alpha' - \alpha = \frac{c^2p}{2}.$$

Siegue da ciò che se I' è il vertice principale della parabola $\mathrm{I'S'} = \frac{c^2p}{2}$, ed essendo $\beta^2 = 2p.\mathrm{SI}$, sarà

$$\mathrm{DE} = p + \frac{2c^2\alpha p^2}{\beta^2} = p + \frac{2\,\mathrm{I'S'}.\alpha}{\mathrm{SI}},$$

cioè uguale al semiparametro più la quarta proporzionale dopo SI, I'S' ed il doppio di AS. Similmente avremo $\mathrm{DT} = \frac{2c^2p^2d'}{\beta^2} = \frac{2d'.\mathrm{S'I'}}{\mathrm{SI}}$; cioè quarta proporzionale in ordine ad SI, S'I', ed Ac: finalmente essendo la $\mathrm{A}d = \frac{2cp^2}{\beta} = \frac{cp\beta}{\mathrm{SI}} = \frac{\beta.\mathrm{DS'}}{\mathrm{SI}}$, si potrà ugualmente costruire, e si vede che la costruzione non cessa di essere sufficientemente semplice; e quindi è da preferirsi alla precedente, perchè non si adopra altra curva da descriversi per assegnazione di punti oltre della parabola data.

(*) A questo modo intendiamo indicare l'equazione (1) trovata nel §. 1, e si noti che porremo sempre prima il numero che dinota l' equazione, poi il numero del paragrafo nel quale si trova.

4. Ritornando ora alla soluzione data nel n.° 2 è da notarsi che quando $\beta = o$ l' equazione della IH divenendo $2pt = \beta^2 + 2p\alpha$, ci dimostra che è parallela ad AR, e che il punto H è inassegnabile; ma in questa medesima ipotesi l' equazione (4,1) si cangia nell' altra

$$t^2 - 2(\alpha - d')t - 2\alpha d' = o$$

ovvero

$$t = \alpha - d' \pm \sqrt{\alpha^2 + d'^2}$$

e si vede che l' iperbola si trasforma in due rette parallele ad AR: essendo $AC = 2d'$ apparisce come si possa in questo caso costruire facilmente l' equazione trovata (*).

Merita particolare attenzione il caso nel quale AR fosse un diametro della parabola, cioè l' angolo dato uguale a zero, perchè gli assi coordinati che abbiamo adottati si ridurrebbero ad un solo: ma prendendo per assi il diametro AIx (fig. 2), e la parallela Ay alla tangente applicata alla parabola in I, l' equazioni (1) e (2) del n. 1 diverranno

$$y^2 = 2p(x - \alpha) \ldots\ldots (1),\ y = \frac{u}{t}x \ldots\ldots (2),$$

ed eliminando x si ottiene

$$y^2 - \frac{2pt}{u}y + 2p\alpha = o.$$

(*) I valori di t indicando le ascisse de' punti M, le ascisse de' punti N che abbiamo veduto (n. 1) essere uguali a $\frac{2(\beta ut + pt^2)}{u^2} - t$, ovvero, nella presente ipotesi, a $\frac{2pt^2}{u^2} - t = \frac{\alpha t}{t - \alpha}$, saranno indicate da

$$\frac{\alpha - d' \pm \sqrt{\alpha^2 + d'^2}}{-d' \pm \sqrt{\alpha^2 + d'^2}} - \alpha = \frac{\alpha^2}{-d' \pm \sqrt{\alpha^2 + d'^2}} + \alpha = \alpha + d' \pm \sqrt{\alpha^2 + d'^2},$$

lo che dovea aspettarsi per ciò che si è detto nel n. 2, che cioè, quando si prende d' col segno — la linea espressa dall' equazione (4, 1) passa pe' punti N.

Or essendo u una radice di questa equazione, l' altra sarà $\frac{2pt}{u} - u$, ma le ordinate de' punti P e Q sono uguali a quelle de' punti M ed N, dunque u, e $\frac{2pt}{u} - u$ sono le ordinate de' detti punti: quindi, poichè supponendo sempre che

$$y = ax + b$$

sia l' equazione della BQ si rileva che dette y, y' le ordinate di due suoi punti, la loro distanza è espressa da

$$\frac{y' - y}{a}\sqrt{1 + a^2 + 2ac},$$

avremo l' equazione

$$\left(\frac{2pt}{u} - 2u\right)\frac{\sqrt{1 + a^2 + 2ac}}{a} = 2d,$$

ovvero, ponendo per brevità

$$\frac{ad}{\sqrt{1 + a^2 + 2ac}} = d',$$

$$\frac{pt}{u} - u = d',$$

donde, tenendo presente che

$$u^2 = 2p(t - \alpha) \ldots\ldots (1'),$$

si ricava

$$pt + d'u - 2p\alpha = o:$$

equazione appartenente ad una retta.

Questa si costruisce facilmente poichè quando $u = o$ avendosi $t = 2\alpha$, si vede che presa IE = IA la retta passa per E; inoltre quando $u = -d'$ risulta $t = \frac{2p\alpha + d'^2}{p}$; ma dall' equazione (1') per $u = -d'$ si ha $t = \frac{2p\alpha + d'^2}{2p}$; dunque poichè l' equazione $u = -d'$ indica la parallela all' asse delle x condotta pel punto di mezzo della BC, che è la data retta $2d$; ne siegue che presa DF = DH il punto F anche appartiene alla retta da costruirsi, che sarà in conseguenza la FE, ed i punti M, M' uniti con A daranno le rette cercate.

5. Dall' equazione della MM' si rileva che è parallela alla tangente in D, e poichè HD = DF le congiungenti i punti M,M' con H saranno tangenti alla parabola: inoltre quando si prende $-d'$ in luogo di d' si determinano, come già si è dimostrato, i punti N,N', dunque presa AH' = AH le rette che uniscono i punti N, N' con H' sono anche tangenti alla parabola, e perciò

Se per un punto A di un diametro qualunque Ax si tiri una parallela alla tangente in I, condotte per un punto H di questa parallela due tangenti alla parabola, le congiungenti i punti di contatto M, M' con A incontrano la parabola in due punti N,N' tali, che le tangenti applicate in essi alla parabola s' incontrano in un punto H' della AH distante da A quanto il punto H.

Dippiù nell' equazione

$$pt \pm d'u - 2p\alpha = o$$

che appartiene alle MM', NN', ponendo $u = o$, si ha $t = 2\alpha$, e quindi queste rette concorrono in uno stesso punto E del diametro Ax. Avendo trovato che u essendo l' ordinata del punto M, $\frac{2pt}{u} - u$ è quella del punto N, il loro rettangolo sarà $2pt - u^2 = 2p\alpha$, cioè uguale al quadrato dell' ordinata che passa per E: similmente rilevandosi dall' equazione (2, 4) che t e $\frac{2pt^2}{u^2} - t = \alpha + \frac{\alpha^2}{t-\alpha}$, sono le ascisse de' punti M, N si vede che le loro ascisse rispetto al punto I sono $t - \alpha$ ed $\frac{\alpha^2}{t-\alpha}$, onde il loro rettangolo è uguale al quadrato di AI; e quindi ne siegue che

Quando una retta seca una parabola, il rettangolo delle ordinate de' punti d' incontro rispetto ad un diametro qualunque, è uguale al quadrato dell' ordinata condotta pel punto ove la secante incontra il diametro, o per un punto del diametro ugualmente lontano dal vertice, se il primo è fuori la parabola. Ed il rettangolo delle ascisse degli stessi punti, computate dal vertice, uguaglia il quadrato della parte del diametro intercetta fra il vertice e la secante.

Questi ed altri teoremi potrebbero ricavarsi combinando direttamente l' equazioni della parabola e di una retta qualunque.

6. Dobbiamo ancora avvertire che l' andamento tenuto nel n. 2 per costruire gli asintoti dell' iperbola espressa dall' equazione (4, 1) si può seguire in tutti i casi. Difatti sia

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o$$

un' equazione qualunque di secondo grado, e sieno i coefficienti a, b, c tali che i primi tre termini possansi decomporre in fattori reali di primo grado, talchè l' equazione possa mettersi sotto la forma

$$(my + nx)(m'y + n'x) + dy + ex + f = o,$$

è chiaro che combinando l' equazione

$$my + nx = \gamma, \text{ ovvero } m'y + n'x = \gamma'$$

con la precedente si ottiene un equazione di primo grado, e perciò le rette espresse da queste equazioni incontrano la curva in un sol punto, cioè sono parallele agli asintoti: che se determineremo γ, γ' in modo che il punto d' incontro sia situato ad una distanza infinita dall' origine, lo che avviene, come è chiaro, quando

$$\frac{\gamma m' + d}{\gamma n' + e} = \frac{m}{n}, \text{ e } \frac{\gamma' m + d}{\gamma' n + e} = \frac{m'}{n'},$$

le rette indicate dall' equazioni precedenti apparterranno agli asintoti. Ugualmente se i coefficienti a, b, c sono tali che i primi tre termini formano un quadrato perfetto, l' equazione riducendosi alla forma

$$a(y + mx)^2 + dy + ex + f = o,$$

si vede che ogni retta parallela a quella data dall' equazione

$$y + mx = o,$$

incontra la curva in un sol punto, e perciò questa retta è diametro della curva, che è evidentemente una parabola, e quindi se trovato il punto ove incontra la curva, si cerca la posizione della tangente in quel punto per mezzo della data equazione, non resta più che ad assegnare un punto della curva affinchè possa descriversi. Questo modo di costruire una equazione di secondo grado quando appartiene all'iperbola o alla parabola ha, almeno in quanto alla brevità, un vantaggio su' metodi che trovansi esposti ne' corsi di geometria a due coordinate fondati sulla permutazione delle coordinate, e perciò crediamo che possa utilmente seguirsi nella maggior parte de' casi, e noi ne daremo delle continue applicazioni. Non sarà pertanto inutile di fare osservare che il trinomio $ay^2+bxy+cx^2$ si può decomporre in fattori di primo grado e reali quando $b^2>4ac$, ed è un quadrato perfetto se $b^2=4ac$, che sono le note relazioni che passar devono fra i coefficienti a, b, c onde l'equazione esprima l'iperbola o la parabola.

7. Ne' varî problemi che tratteremo, proponendoci sempre di rischiarare, e far ben intendere le regole generali, che seguir si devono per porre in equazione un problema, gioverà osservare che l'andamento da seguirsi generalmente in tutti i casi è, come è noto, il seguente.

Si prendano per incognite, le coordinate di quel punto, quella retta, quell' angolo ec: che se fossero date sarebbe risoluto il problema, cioè sarebbero determinate tutte le altre parti che entrano nella quistione; si esprimano queste in funzione delle incognite, lo che riesce sempre facile osservando per qual cagione restano esse assegnate quando sono date le prime, *ed indicando col linguaggio algebrico le condizioni del problema, resterà messo in equazione.*

ovvero

Presa per incognita quella retta, ec: che se fosse data sarebbe risoluto il problema, cioè si potrebbe verificare se le condizioni cercate si avverino, si traducano in linguaggio algebrico tutte le operazioni grafiche che si dovrebbero fare, ed esprimendo che l'ultima condizione sia verificata verrà a porsi in equazione il problema.

Così nel problema risoluto chiaramente appariva che dato il punto M (Fig. 1) era risoluto il problema, e quindi le coordinate di questo punto prendevamo noi per incognite: inoltre dato il punto M per verificare il problema ognun vede che si unirebbe con A mediante la retta AM, si troverebbe il punto N ove questa incontra la parabola, si tirerebbero le rette MP, NQ parallele ad AR, e si vedrebbe se la PQ è uguale alla CB. Quindi per porre in equazione il problema invece di tirare la retta AM pe' due punti A, M, bisogna cercarne l'equazione, in seguito determinare il punto N ossia le sue coordinate, e come esso nasce dall' intersezione della retta e della parabola, bisognerà combinare le loro equazioni, finalmente per trovare la PQ servirebbero le coordinate de' punti P e Q ovvero le sole ascisse, essendo noto che la distanza di due punti di una retta può esprimersi in funzione delle due coordinate, o delle sole ascisse, o delle ordinate; e ponendo la PQ uguale a CB si ha l'equazione del problema. E questo appunto è l'andamento tenuto più sopra e che seguiremo sempre, quantunque lo faremo notare soltanto in alcuni problemi per non incorrere in inutili ripetizioni

È da osservarsi che la seconda delle due regole esposte poc'anzi è precisamente quella stessa che espone Lacroix nel n. 14 degli elementi di Algebra, e che se alle volte ne' problemi algebrici non apparisce tanto facilmente quali operazioni si hanno da fare per verificare se un numero soddisfà alla quistione, ne' problemi di Geometria le costruzioni per verificarli si appalesano da loro medesime; onde ci sembra di poter con sicurtà asserire che per poco di esercizio che si abbia nell' applicazione del metodo esposto, talchè se ne sia compreso lo spirito, appena inteso l'enunciato di un problema si metterà senza alcuna difficoltà in equazione, lo che non sapremmo immaginare come si possa ottenere dall' analisi geometrica. Messo poi in equazione il problema si hanno dall' analisi a due coordinate le regole generali per costruire le formole trovate ; resta però all' avvedutezza dell' analista il fare quelle osservazioni particolari che conducono ad eleganti costruzioni.

PROBLEMA II.

8. *Dati i due cerchi* (Fig. 3) LM , DM′ *e la retta* AN , *tirare le due tangenti* MN , M′N *in modo che s' incontrino in un punto della* AN, *e comprendano un angolo dato.*

Osservando che dato il punto M è risoluto il problema prenderemo per ignote le coordinate di questo punto: inoltre per verificare se il punto M soddisfaccia al problema è chiaro che bisogna condurre la tangente MN tirare dal punto N ove incontra la retta data la NM′ che comprenda con la MN l' angolo dato, e vedere se tocca il cerchio DM′. Quindi seguendo sempre il metodo esposto nel n. precedente esprimeremo algebricamente queste medesime operazioni, cercando l' equazione della MN, e le coordinate del punto ove incontra la AN; indi trovata l' equazione della NM′ che passa per N e forma con la MN l' angolo dato ponendo la condizione di dover essere tangente al cerchio DM′ avremo l' equazione del problema.

Prendansi dunque per assi le rette Cx, Cy una perpendicolare l' altra parallela alla AN, e si chiamino r, r' i raggi de' cerchi dati, α l' ascissa del punto A; p, q le coordinate del centro C′, e t, u quelle del punto M: le equazioni de' cerchi LM, DM′, e delle rette AN, MN saranno rispettivamente

$$y^2+x^2=r^2 \ldots\ldots(1),\ (y-q)^2+(x-p)^2=r'^2 \ldots\ldots (2)$$
$$x=\alpha \ldots\ldots (3),\qquad uy+tx=r^2 \ldots\ldots (4).$$

Per trovare l' equazione della NM′ si cerchino le coordinate del punto N, e ciò si ottiene ponendo nell' equazione (4) $x=\alpha$, la quale ipotesi dà

$$y=\frac{r^2-\alpha t}{u}$$

e chiamando a la tangente trigonometrica dell' angolo dato l' equazione

$$y-\frac{r^2-\alpha t}{u}=\frac{au-t}{u+at}(x-\alpha)$$

apparterrà alla M′N, la quale dovendo toccare il cerchio dell' equazione (2) avremo

$$u\left[(q-ap)u+(p+aq)t-rr'\sqrt{1+a^2}\right]=r^2u+ar^2(t-\alpha)\ldots(5)(*)$$

che dinota un' iperbola la quale intersecando il cerchio KLM determina il punto ignoto M.

9. Per costruirla si ponga $t=\alpha$, l' equazione si renderà divisibile per u, e darà conseguentemente

$$u=o,\ (q-ap)u+(p+aq)t-rr'\sqrt{1+a^2}=r^2,$$

onde A è un punto della curva, e l' altro è situato ove la retta appartenente a quest' ultima equazione, che per quanto si è detto nel n. 6 è parallela ad uno degli asintoti, incontra la AN: per assegnare questa retta pongasi l' equazione precedente sotto la forma

$$u=\frac{p+aq}{ap-q}\left[t-\frac{r(r+r'\sqrt{1+a^2})}{p+aq}\right],$$

e si vedrà in primo luogo che forma con l' asse delle ascisse un angolo che ha per tangente trigonometrica

$$\frac{p+aq}{ap-q}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{q}{p}}{1-\frac{q}{ap}}$$

cioè somma degli angoli che hanno per tangenti $\frac{1}{a}$, e $\frac{q}{p}$ ovvero

(*) Questa equazione si ricava facilmente uguagliando ad r' la distanza che il punto p, q serba dalla retta espressa per l' equazione trovata qui sopra.

uguale all' angolo BC'C, supponendo che C'BC sia l' angolo dato: inoltre la parte che taglia sull' asse delle ascisse è

$$t = \frac{r(r + r'\sqrt{1+a^2})}{p + aq};$$

ma l' equazione della C'B essendo

$$y - q = -\frac{1}{a}(x - p),$$

quando $y = o$, dà $x = \mathrm{CE} = p + aq$, e presa $\mathrm{CG} = r'$, risulta $\mathrm{EF} = r'\sqrt{1+a^2}$; dunque sarà $t = \frac{r(r + \mathrm{EF})}{\mathrm{CE}}$; sia CH questo valore di t, sarà H il punto ove la retta taglia l' asse delle x, e fatto l' angolo xHQ uguale a BC'C, sarà HQ questa retta, e Q il punto dell' iperbola. Abbiamo già detto che HQ è parallela ad un asintoto, l' altro è parallelo all' asse delle ordinate, facciamo secondo quel che si è detto nel n. 6, $u = \gamma$ nell' equazione (5) del n. precedente, ed avremo un' equazione che dà t infinita quando

$$\gamma = \frac{ar^2}{p + aq}, \text{ e perciò } u = \frac{ar^2}{p + aq}$$

è l' equazione dell' asintoto, ed avendosi dall' equazione della C'B per $x = o$, $y = \mathrm{CB} = \frac{p + aq}{a}$, ne siegue che presa C$b$ terza proporzionale dopo CB e il raggio CK, la bO è l' asintoto. Similmente si potrebbe assegnare l' altro asintoto; ma conoscendo due punti dell' iperbola è noto che presa la AR = QS deve passare per R, e dovendo essere parallelo alla HQ, sarà la retta RO l' altro asintoto.

Composizione del problema.

Condotte ad AN per C la perpendicolare CE e la parallela BC, e per C' la C'B sotto l' angolo dato, si tiri al cerchio LM la tangente BI, e presa CG uguale a C'D si menino a CA le parallele IO, GF; indi si cerchi dopo CE, CK, e CK più EF la quarta

proporzionale CH, si faccia l' angolo xHQ uguale a BC'C, AR uguale a QS, e si guidi a QH la parallela RO. L'iperbola che passando per A ha per asintoti OR, OS incontra il cerchio ne' punti cercati.

Se si voglia eseguire sulla figura tutta la costruzione, si osservi che la sola quarta proporzionale CH che dobbiamo trovare si può ottenere prendendo LP = EF e tirando PH perpendicolare a KE.

10. La costruzione assegnata cade in difetto nel caso che $aq + p = o$; cioè che l' angolo C'CL fosse l' angolo dato, divenendo infinite alcune delle rette trovate; ma l' equazione (5,8) riducendosi in questa ipotesi ad

$$u[(q - ap)u - rr'\sqrt{1+a^2}] = r^2u + ar^2(t - \alpha)$$

ci dimostra che la curva è una parabola avente l' asse e la tangente corrispondente paralleli rispettivamente agli assi delle x e delle y. Questa curva è palese che passa per A; per determinare le coordinate del vertice, si potrà volendo seguire le norme generali passare ad un altro sistema d' assi paralleli a' primitivi, e si troverà che l' ascissa e l' ornata del vertice, sono rispettivamente

$$\alpha - \frac{(r + r'\sqrt{1+a^2})^2}{4a(q - ap)}, \quad \frac{r(r + r'\sqrt{1+a^2})}{2(q - ap)}$$

questi valori si costruiscono facilmente osservando che se pel punto p, q tiriamo una retta che abbia per equazione $y - q = a(x - p)$ che, essendo $a = -\frac{p}{q}$, dinota la C'B' perpendicolare a C'C; si ha per $x = o$, $y = q - ap = \mathrm{CB}'$: inoltre condotta D'$d$ parallela a C'C abbiamo $\mathrm{C}d = r'\sqrt{1+a^2}$ e quindi presa AR' che serbi alla metà di dl la ragione di CK : CB', e la R'h terza proporzionale dopo CB' e la metà di dl, la parabola avrà I' per vertice I'R' per asse, e dovendo passare per A sarà pienamente determinata.

Se mai fosse $q - ap = o$ l' angolo BC'C sarebbe retto, e quindi HQ essendo a CB' parallela sarebbe inassegnabile il punto Q; ma per poco che si rifletta sull' equazione nella quale si cambia in tal supposizione la (5 , 8) si vede che la perpendicolare a CE per H è l'altro asintoto dell' iperbola che passa sempre per A.

Bisogna avvertire che questo problema non ha generalmente quattro soluzioni, poichè nell' equazione (5 , 8) il radicale o ciò che è lo stesso r' deve avere il segno $\pm$, e quindi si hanno due iperbole; inoltre quando una retta deve fare con un' altra avente per equazione $y = Ax$ un angolo che ha per tangente trigonometrica a la sua equazione è

$$y = \frac{A \pm a}{1 \mp A\,a}\,x + b;$$

e perciò anche a nell' equazione (5 , 8) deve essere affetta dal segno $\pm$: questa equazione esprime dunque quattro iperbole, e conseguentemente sedici sono algebricamente parlando le soluzioni del problema.

11. Abbiamo dovuto in questo problema trovare la relazione che passa tra le due costanti che trovansi nell' equazione di una retta affinchè tocchi un dato cerchio, e nel problema precedente abbiamo presa l' equazione della tangente alla parabola in un dato punto: occorrendoci in seguito, anche per ciò che si è detto nel n. 6, di conoscere la condizione onde una retta sia tangente ad una curva di secondo grado, passeremo ora ad occuparci di una tale ricerca. Sieno

$$a y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o,$$
$$y = a' x + b'$$

le equazioni della data curva e della retta, eliminando da queste equazioni la y si ha

$$(a a'^2 + ba' + c)\,x^2 + (2\,a a' b' + bb' + da' + e)\,x + ab'^2 + db' + f = o,$$

donde si ricavano le ascisse de' punti ove la retta incontra la curva; ma quando la retta è tangente, i due punti d' incontro si confondono in un solo; dunque l' equazione precedente deve avere radici uguali, e perciò dovrà essere

$$(2aa'b' + bb' + da' + e)^2 = 4\,(ab'^2 + db' + f)(aa'^2 + ba' + c),$$

ossia

$$\left.\begin{array}{l}(b^2 - 4ac)\,b'^2 + 2\,(2ae - bd)\,a'b' + (d^2 - 4af)\,a'^2 \\ + 2\,(be - 2cd)\,b' + 2\,(de - 2bf)\,a' + e^2 - 4\,cf\end{array}\right\} = o.$$

Se la retta dovesse passare per un punto determinato dalle coordinate x', y'; sarebbe $b' = y' - a'x'$; e cambiando x, y, x', y' in $x - \alpha$, $y - \beta$, $x' - \alpha$, $y' - \beta$, ne siegue che in generale l'equazione

$$\left.\begin{array}{l}(b^2 - 4ac)[y' - \beta - a'(x' - \alpha)]^2 + 2\,(2ae - bd)[y' - \beta - a'(x' - \alpha)]\,a' \\ + (d^2 - 4af)\,a'^2 + 2(be - 2cd)[y' - \beta - a'(x - \alpha)] + 2(de - 2bf)a' + e^2 - 4cf\end{array}\right\} = o \;\; \text{(I)}$$

esprime la condizione onde una retta data dall' equazione

$$y - y' = a'\,(x - x'),$$

tocchi la curva espressa per l' equazione

$$a(y - \beta)^2 + b(x - \alpha)(y - \beta) + c\,(x - \alpha)^2 + d(y - \beta) + e(x - \alpha) + f = o \ldots\ldots (1).$$

Supponiamo ora che il punto x', y' sia un punto della curva data, l' equazione di secondo grado trovata più sopra in x, dovrà avere le due sue radici uguali ad x'; ma la loro somma, come dall' equazione stessa apparisce, è uguale a

$$-\,\frac{2aa'b' + bb' + da' + e}{aa'^2 + ba' + c} = -\,\frac{(2aa' + b)(y' - a'x') + da' + e}{a\,a'^2 + ba' + c},$$

dunque ammettendo per più generalità che la (1) sia l' equazione della curva data avremo

$$-\,\frac{(2aa' + b)\,[\,y' - \beta - a'\,(x' - \alpha)\,] + da' + e}{a\,a'^2 + b\,a' + c} = 2\,(x' - \alpha),$$

ovvero

$$[2a\,(y' - \beta) + b(x' - \alpha) + d\,]\,a' + b\,(y' - \beta) + 2\,c(x' - \alpha) + e = o \ldots \text{(II)}, \;(*)$$

(*) È manifesto che il valore, di a' è uguale al valore che prende il coefficiente differenziale di primo ordine ricavato dall' equazione (1) quando si fa $x = x'$, $y = y'$.

*

e questa sarà l' equazione di condizione che può sostituirsi alla (I) nel caso che si considera.

PROBLEMA III.

12 *Data la parabola* KI*k* *e il diametro* I*x* , (Fig. 4), *si cerca tirare la* MP *in modo che le rette* PM , PN *uguaglino due rette date che sieno* IC, CD.

Poichè data la retta MP è risoluto il problema, e si verifica vedendo se le distanze che il punto P serba da' punti ove essa incontra la parabola sono uguali alle rette date, ne siegue che per mettere in equazione il problema si potranno prendere per incognite le costanti che entrano nell' equazione della MN, determinare le coordinate de' punti ove incontra la parabola e porre le distanze che passano fra questi punti e il punto P uguali alle rette date. Per eseguir ciò si prendano per assi la Ix e la tangente Iy; le equazioni della parabola e della retta MP saranno della forma

$$y^2 = px \ldots (1),\ y = a\,(x-\alpha) \ldots (2),$$

ed eliminandone x si ottiene

$$y^2 - \frac{p}{a}y - p\,\alpha = o \ldots\ldots\ldots (3).$$

Ciò posto dall' equazione (2) si rileva che chiamando c il coseno dell' angolo compreso dagli assi, la distanza di due punti che hanno per ordinate y, y' è espressa da

$$(y' - y)\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{2c}{a}},$$

dunque indicando con m, n le rette MP, NP, e con y', y'' le radici dell' equazione (3) essendo pel punto P $y = o$, avremo le equazioni

$$y'\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{2c}{a}} = m$$

$$y''\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{2c}{a}} = n,$$

e poichè, essendo y', y'' radici dell' equazione (3), si ha

$$y' + y'' = \frac{p}{a},\ y'y'' = -p\alpha,$$

sommando e moltiplicando le equazioni precedenti, ne risulta

$$\frac{p}{a}\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{2c}{a}} = m + n \ldots\ldots (4)$$

$$p\,\alpha\left(1 + \frac{1}{a^2} + \frac{2c}{a}\right) = -\,m\,n:$$

di queste equazioni la prima dà a e la seconda poi determina α. Liberando l' equazione (4) dal radicale, si avrebbe un' equazione di quarto grado rispetto ad a, per evitare la costruzione di tale equazione poniamo $a = \frac{u}{t}$, e l' equazione (4) diviene,

$$p\,t\sqrt{u^2 + t^2 + 2\,c\,ut} = (m+n)\,u^2:$$

quest' equazione appartiene a quattro rette che sarebbero le parallele condotte per l' origine alle rette cercate; pertanto non avendo fra t ed u che un' equazione, possiamo stabilirne un' altra a piacere, l' ipotesi la più semplice è

$$u^2 = pt,$$

la quale dà

$$u^2 + t^2 + 2\,cut = (m+n)^2,$$

e di queste la prima appartiene alla parabola data, l' altra ad un cerchio che ha per centro I, e per raggio $m + n$. Quindi essendo IC, CD le rette m, n descritto col centro I ed intervallo ID il cerchio DA; le IA, IB sono parallele alle rette richieste; e perciò senza determinare il valore di α, è evidente che il punto M può assegnarsi prendendo IE = IC e tirando il diametro EM.

Composizione del problema.

Descritto col centro I e col raggio ID il cerchio DBA si prendano sulle IA, IB le parti IE, IE′ uguali ad IC, e si tirino alla Ix le parallele EM, E′M′. Le parallele MP, M′P′ alle IA, IB sono le rette cercate.

13. Potendo la distanza che passa fra due punti esser presa col segno $\pm$ per la presenza del radicale, si vede che m ed n possono essere precedute dal segno $\pm$; cioè che il raggio del cerchio può essere $m \pm n$, onde il problema ammette quattro soluzioni; ma algebricamente parlando sono otto, le altre quattro corrispondendo alle radici immaginarie. Per non complicare la figura si è supposto pel caso in cui si vuol dare ad n il segno — che le rette date fossero IC′, e C′D=CD; le rette cercate sarebbero allora mp, $m'p'$ essendo pure Ie' = Ie = IC′: pertanto si rileva dall' analisi fatta che *Se un cerchio incontra una parabola* KIk *che passa pel suo centro, condotta una parallela qualunque* EM *al diametro* Ix *della parabola, ed alla* IA *la parallela* MP, *sarà* PN *uguale ad* EA.

Ed è da avvertirsi che se la EM incontra la IA tra i punti I ed A è il raggio del cerchio uguale alla somma delle rette PN, PM; se l' incontra al di là del punto A, come la em, è uguale alla differenza.

PROBLEMA IV.

14. *Tirare* (Fig. 5) *al cerchio* MS *la tangente* MN′ *in modo che il rapporto delle parti* PN, PN′ *comprese fra la parabola e il suo asse sieno nella data ragione di* $rq : qs$.

Si prendano per assi coordinati la parallela e la perpendicolare all'asse IQ della parabola condotte pel centro C del cerchio, e si

chiamino α, β; t, u le coordinate de' punti I ed M; p il parametro della parabola, r il raggio del cerchio: avremo per l'equazioni della parabola, del cerchio, e della MN

$$(y-\beta)^2 = p(x-\alpha) \ldots\ldots (1)$$
$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$uy + tx = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).\ (*)$$

Ciò posto dall'equazione (3) tenendo presente che

$$u^2 + t^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

si rileva che chiamando y, y' le ordinate de' punti N, N′, le parti NP, N′P vengono espresse da $\frac{r(y-\beta)}{t}$, $\frac{r(y'-\beta)}{t}$; (**) ma eliminando x dall'equazioni (1) e (3), si ottiene

$$(y-\beta)^2 + \frac{pu}{t}(y-\beta) = \frac{p(r^2-\alpha t-\beta u)}{t} \ldots\ldots (4)$$

donde

$$y-\beta = \frac{-pu \pm \sqrt{p^2u^2 + 4pt(r^2-\alpha t-\beta u)}}{2t},$$

dunque dinotando con $\frac{m}{n}$ la data ragione, avremo l' equazione

$$\frac{pu + \sqrt{p^2u^2 + 4pt(r^2-\alpha t-\beta u)}}{pu - \sqrt{p^2u^2 + 4pt(r^2-\alpha t-\beta u)}} = \frac{m}{n},$$

(*) Questa equazione può ricavarsi dalla (II, 11) osservando che in questo caso diviene $\alpha' u + t = o$

(**) Difatti indicando con α' l'ascissa del punto P l' equazione (3) può porsi sotto la forma $y-\beta = -\frac{t}{u}(x-\alpha')$, e la distanza del punto x, y al punto α', β sarà

$$\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta)^2} = (y-\beta)\sqrt{1+\frac{u^2}{t^2}} = \frac{r(y-\beta)}{t}$$

ovvero

$$(m-n)pu=(m+n)\sqrt{p^2u^2+4pt(r^2-\alpha t-\beta u)},$$

la quale liberata dal radicale, ponendo per brevità

$$a=\frac{mnp}{(m+n)^2},$$

in virtù dell' equazione (2') diviene

$$t[(a+\alpha)t+\beta u-r^2]=ar^2,$$

ed esprime una iperbola avente per asintoti le rette date dalle equazioni

$$t=o,\quad (a+\alpha)t+\beta u-r^2=o.$$

Si costruirà la retta espressa da quest' ultima equazione osservando che quando $t=o$, si ha $u=\frac{r^2}{\beta}$; e che facendo essa con l' asse delle x un angolo che ha per tangente trigonometrica $-\frac{a+\alpha}{\beta}$, presa AB $=a$ e condotta BD uguale e parallela ad AC, deve essere perpendicolare alla ID: d'altronde poichè dall'equazione della curva si ha $t=-a$, quando $(a+\alpha)t+\beta u=o$, si potrà assegnar facilmente un punto pel quale deve passare l' iperbola.

Composizione del problema.

Condotta CA perpendicolare all' asse IQ, si prenda CO terza proporzionale dopo CA e il raggio, ed AB che serbi al parametro la ragione di $rq.qs:\overline{rs}^2$; indi tirata BD uguale e parallela ad AC, si abbassino sulla DI le perpendicolari OR e CE. L' iperbola che passando per E ha per asintoti OR, OS incontra il cerchio ne' punti cercati.

Il valore di CO è palese come debba costruirsi sulla figura, quello di a = AB si ottiene osservando che

$$a=\frac{mnp}{(m+n)^2}=\frac{mn}{\frac{(m+n)^2}{p}};$$

ma presa FA $=m$, FG $=n$, la GL parallela alla IQ è uguale ad $\alpha+\frac{(m+n)^2}{p}$, dunque presa LH $=$ IA, avremo GH $=\frac{(m+n)^2}{p}$, ed $a=\frac{mn}{\text{GH}}$; onde elevata alla FH la perpendicolare FB', sarà AB'$=$AB $=a$. La distanza di due punti essendo affetta dal segno $\pm$ si vede che lo deve avere anche la quantità n: la costruzione procede sempre come sopra, prendendo però $a=-\frac{mnp}{(m-n)^2}$.

15. Nel caso che $\beta=o$ l' equazione dell' iperbola diviene

$$t^2-\frac{r^2}{a+\alpha}t=\frac{r^2}{a+\alpha}a,$$

onde la curva si cambia in due rette parallele all' asse delle y: l'equazione precedente si costruisce facilmente, perchè è noto che bisogna prolungare la retta uguale ad $\frac{r^2}{a+\alpha}=\frac{r^2}{\text{IB}}$ in modo che il rettangolo della tutta nella parte prolungata uguagli quello di $\frac{r^2}{\text{IB}}$ in AB'.

Nel caso che a è negativa, cioè quando si adotta l' espressione $a=-\frac{mnp}{(m-n)^2}$, il punto B' cade sul prolungamento della QA, e prendendo sempre la AB in senso opposto alla AB', se B cade tra I ed A, ossia se $a<\alpha$ bisognerà dividere la $\frac{r^2}{\text{IB}}$, che si taglierà anche da A verso Q, in modo che il rettangolo delle parti uguagli il rettangolo di $\frac{r^2}{\text{IB}}$ in AB'; ma se $a>\alpha$ bisogna prendere la $\frac{r^2}{\text{IB}}$ sul prolungamento della QA, e prolungarla nel modo suddetto: se poi $a = -\alpha$, si ottiene $t = -a = \alpha$, cioè che la tangente alla parabola condotta pel vertice determina sul cerchio i punti cercati. Tutto ciò ha luogo anche quando a è positiva ed α negativa, dipendendo tutto però in questo caso dal solo segno del binomio $a+\alpha$.

Riflettendo che quando $a + \alpha = o$ abbiamo trovato che la tangente alla parabola tirata pel vertice incontra il cerchio ne' punti cercati, indipendentemente dal raggio di questo cerchio, e che la tangente al cerchio è perpendicolare al raggio che passa pel punto di contatto, se ne deduce il seguente notabile teorema.

Se per un punto qualunque (Fig. 6) Q *dell' asse di una parabola si tira una retta* QR, *ed a questa la perpendicolare* RM; *il rapporto di* MP : NP *è sempre lo stesso comunque varî la* QN, *ed è uguale al rapporto di* IR : RS.

Lo stesso avviene se il punto Q è sul prolungamento dell'asse; così per un punto P tirata una retta qualunque PR, e per R la Rm perpendicolare alla RP, è sempre lo stesso il rapporto di nQ : Qm, ed uguale a quello di Rs: RI.

È chiaro che il primo caso corrisponde ad $a = \frac{mnp}{(m+n)^2}$ ed α negativa; il secondo ad $a = -\frac{mnp}{(m-n)^2}$ ed α positiva: se fosse $m=n$ l' equazione $a = \frac{mnp}{(m+n)^2}$ ci darebbe $a = IQ = \frac{1}{4}p$; onde sarebbe Q il fuoco della parabola; pertanto in questo caso dovendo essere la MP uguale alla NP, si vede che la NM deve esser nulla e perciò la RN tangente alla parabola. Quindi il noto teorema dal quale si deduce il modo di descrivere una parabola mediante l' intersezioni consecutive delle diverse tangenti di essa, è un caso particolare di quello enunciato poc' anzi. È manifesto ancora che se il punto Q si prende tra il punto I e il fuoco, la RN incontra la parabola, se al di là del fuoco non la incontra; e che quando il punto Q è sul pro-

lungamento dell' asse come P, la perpendicolare a PR seca sempre la parabola. Inoltre avendo detto che

MP : PN : : IR : RS,

essendo ancora IR: RS : : PR : RN ne siegue che

Se una retta qualunque PM *interseca la parabola le parti* MP, NP *sono proporzionali alle due* PR, RN. (*)

16. Supponiamo ora che restando gli stessi dati del n. 14 si voglia (Fig. 5) che il rettangolo delle parti NP, PN$'$ sia uguale ad un dato quadrato, chiamando d il lato di questo quadrato, avremo l' equazione

$$\frac{r^2}{t^2}(y-\beta)(y'-\beta) = d^2,$$

ma essendo $y-\beta$, $y'-\beta$ le radici dell' equazione (4, 14), si ha

$$(y-\beta)(y'-\beta) = \frac{(\beta u + \alpha t - r^2)p}{t},$$

dunque sarà

$$pr^2(\beta u + \alpha t - r^2) = d^2 t^3 \;\ldots\ldots\; (1).$$

Questa equazione appartiene ad una parabola cubica, ed è chiaro che la retta espressa dall'equazione $\beta u + \alpha t - r^2 = o$ (**) ne è una

---

(*) Posto il teorema dimostrato più sopra ne siegue che presa (Fig. 5) Ib uguale ad AB$'$ la retta cercata MN$'$ e la perpendicolare condottale dal punto b s' incontrano in uno stesso punto della retta tangente alla parabola in I; quindi questo problema potrebbe ridursi ad un caso particolare del problema II, e difatti l' equazione (5, 8) ponendo $a = \frac{1}{0}$ ed $r' = o$, si accorda con l' equazione trovata nel n. precedente. Serva ciò per mostrare che l' Algebra anche più della Geometria può esaminare il rapporto che passa fra i diversi problemi, e ridurre l' uno all'altro.

(**) La retta appartenente a questa equazione è evidentemente la corda comune al cerchio dato ed a quello espresso per l' equazione $y^2 + x^2 - \beta y - \alpha x = o$, cioè tangente ; inoltre poichè quando $\beta u + \alpha t - r^2 = o$ si ha $t^3 = o$, ossia $t = o$, resta assegnato anche il centro, e l'asse che è quello delle y (*) : per determinare un punto della curva, si ponga $\beta u + \alpha t - r^2 = pt$, e si avrà $t = \pm \frac{pr}{d}$.

al cerchio che ha per diametro la congiungente il punto C con I, essa è dunque la retta G'G che unisce i punti di contatto tra il cerchio e le tangenti condotte ad esso dal punto I ; questa retta è noto che si chiama *asse radicale* del punto I rispetto al cerchio, ed il punto di mezzo della G'G ed il punto I, *poli coniugati*. Se il punto I fosse nell' area del cerchio la retta data dall'equazione $\beta u + \alpha t - r^2 = o$ sarebbe sempre perpendicolare alla retta che passa pe' punti C ed I, e la sua distanza dal punto C terza proporzionale dopo la distanza che serba I da C, e il raggio. La retta G'G, il suo punto di mezzo ed I, conservano le medesime denominazioni anche quando invece di un cerchio si ha una curva del secondo grado, purchè la G'G sia parallela al diametro coniugato alla CI, ossia che le tangenti in G' e G passino per I.

(*) Ciò può anche dedursi più direttamente colla permutazione delle coordinate ponendo $t = m t'$, $u = u' + nt' + \beta'$, cioè cambiando l'asse delle x; potremo allora far sparire il termine noto ed il termine in t a primo grado, determinando a dovere $\frac{n}{m}$ e β' ; si troverà $\frac{n}{m} = -\frac{\alpha}{\beta}$, $\beta' = \frac{r^2}{\beta}$, e quindi $\beta u + \alpha t - r^2 = o$ è l'equazione dell' asse delle t', e l'equazione della curva si riduce a

$$t'^3 = \frac{pr^2 \beta u'}{m^3 d^2},$$

dalla quale si vede che la curva passa per la nuova origine, e l' asse delle t', è la tangente in questo punto. È chiaro ancora che il punto origine delle coordinate è il punto di mezzo di ogni retta condotta per esso e terminata alla curva, poichè supponendo che $u = at$ sia l'equazione di una retta qualunque che passa per l' origine, si hanno per l' ascisse de' punti d' incontro oltre $t' = o$, due valori uguali e di segno contrario, onde l'origine è un centro della curva la quale ha un ramo dalla parte delle t', u' positive, un' altro ramo dalla regione delle t', u' negative. È ancora da avvertirsi che dicendo che l' asse delle y è un asse della curva, non intendiamo che divida le corde parallele alla tangente per metà, perchè queste corde incontrano la curva in un sol punto.

Composizione del problema.

Presa (Fig. 6) IB uguale al parametro, ed AD che serbi al raggio la ragione di IB al lato del dato quadrato, si tiri ad Ix la perpendicolare DE : ed essendo FG l' asse radicale del punto I rispetto al cerchio dato, si abbassi sulla CB la perpendicolare FE. La parabola cubica che ha FA per asse, FG per tangente, e passa per E incontra il cerchio ne' punti cercati.

17. Nel caso che $\beta = o$ cioè che il cerchio abbia il centro sull' asse della parabola, l' equazione (1) del n. precedente si riduce a

$$d^2 t^3 - pr^2 \alpha t + pr^4 = o,$$

che essendo un' equazione di terzo grado rispetto a t, indica tre rette parallele all' asse delle y, le quali intersecando il cerchio determinano i punti cercati. Per costruirla si moltiplichi per t, e si avrà

$$d^2 t^4 - pr^2 \alpha t^2 + pr^4 t = o,$$

e supponendo

$$t^2 = pu \ldots\ldots (1),$$

si otterrà l' equazione

$$u^2 - \frac{r^2 \alpha}{d^2} u + \frac{r^4}{pd^2} t = o,$$

che sommata con la precedente, dà

$$u^2 + t^2 - \left(p + \frac{r^2 \alpha}{d^2}\right) u + \frac{r^4}{pd^2} t = o \ldots\ldots (2),$$

equazione dinotante un cerchio che passa pel vertice della parabola corrispondente all' equazione (1), ed ha per centro il punto determinato dalle coordinate $-\frac{1}{2}\frac{r^4}{pd^2}$, $\frac{1}{2}\left(p + \frac{r^2 \alpha}{d^2}\right)$. Quindi supponendo (Fig. 6) che I sia l'origine, A il centro del cerchio dato, ed IT l'asse delle t, poichè l'equazione (1) appartiene alla parabola data, e prese $\mathrm{IS}=r$, $\mathrm{IH}=d$, si ha $\mathrm{SN}=\frac{r^2}{p}$, $\mathrm{HK}=\frac{d^2}{p}$, ne siegue che fatta la IL uguale al parametro, $\mathrm{L}a=\frac{r^2\alpha}{d^2}=\frac{\mathrm{SN.AI}}{\mathrm{HK}}$, ed

$ab=\frac{r^4}{pd^2}=\frac{\overline{\mathrm{SN}}^2}{\mathrm{HK}}$ il cerchio che ha per diametro Ib è dinotato dall' equazione (2), e perciò presa $\mathrm{A}d'=\mathrm{I}d$ la parallela per d' ad IT fisserebbe sul cerchio dato i punti richiesti.

Giova osservare che nello stabilire l'equazione (1, 16) le distanze PN, PN' (Fig. 5) essendo affette dal segno $\pm$ anche d^2, deve essere preceduta dal segno $\pm$; onde si hanno due parabole cubiche nel caso generale e sei rette quando $\beta=o$.

PROBLEMA V.

18. *Tirare* (Fig. 7) *al dato cerchio* AM *la tangente* NMN' *in modo che condotte le* DN, D'N' *per due punti dati* D, D' *che facciano colla* NN' *gli angoli dati* LKH, LKI *sia il rettangolo di* ND *in* N'D' *uguale al quadrato di una retta data e sia* KL.

Prendendo C per origine e CD' per asse delle x, si chiamino α' la CD'; α e β le coordinate del punto D, e t ed u quelle di M, sarà l'equazione della NN'

$$uy+tx=r^2\ldots\ldots(1),$$

e quelle delle DN, D'N', chiamando a, a' le tangenti trigonometriche degli angoli dati,

$$y-\beta=\frac{au-t}{u+at}(x-\alpha)\ldots(2),\quad y=\frac{a'u-t}{u+a't}(x-\alpha')\ldots(3),$$

onde

$$\mathrm{DN}=\frac{x-\alpha}{u+at}\,r\sqrt{1+a^2},\quad \mathrm{D'N'}=\frac{x-\alpha'}{u+a't}\,r\sqrt{1+a'^2},$$

essendo x in queste formole le ascisse de' punti N ed N', che eliminando y,

dall' equazioni (1) e (2), ed (1) e (3), si trovano essere rispettivamente

$$x=\alpha+\frac{(r^2-\alpha t-\beta u)(u+at)}{ar^2},\quad x=\alpha'+\frac{(r^2-\alpha' t)(u+a't)}{a'r^2}.$$

Quindi avremo la equazione

$$\frac{(r^2-\alpha t-\beta u)(r^2-\alpha' t)}{aa'r^2}\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}=d^2,$$

che rappresenta un' iperbola, e ponendo $\frac{aa'd^2}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}=d'^2$, si ha

$$(r^2-\alpha t-\beta u)(r^2-\alpha' t)=d'^2r^2,$$

onde si vede che le rette corrispondenti alle equazioni $r^2-\alpha t-\beta u=o$, $r^2-\alpha' t=o$, ne sono gli asintoti: per trovarne un punto, si ponga $\alpha t+\beta u=o$, e si avrà $r^2-\alpha' t=d'^2$

Composizione del problema.

Unita la CD' e condotti gli assi radicali AO, BO de' punti D, D' si guidino alle KH, KI le normali per L, indi si prenda BE quarta proporzionale dopo CD', IL, LH, e si tirino alle BO, AO le parallele EF, CF. L'iperbola che passa per F tra gli asintoti OA, OB incontra il cerchio ne' punti cercati.

Se $\beta=o$ cioè se il punto D fosse sulla CD' (nel qual caso la AO è perpendicolare a CD', e noi supporremo che passi per B') l'equazione si riduce ad

$$(r^2-\alpha' t)(r^2-\alpha t)=d'^2r^2$$

ossia

$$\left(\frac{r^2}{\alpha'}-t\right)\left(\frac{r^2}{\alpha}-t\right)=\frac{d'^2}{\alpha'}\cdot\frac{r^2}{\alpha}.$$

Laonde se α ed α' hanno lo stesso segno, per costruir questa equazione devesi prolungare la B'B in modo che il rettangolo della tutta nella parte prolungata uguagli quello di B'C in BE, se hanno diverso segno (come dalla posizione di B' mostra la figura) fa d'uopo dividerla in modo che il rettangolo delle parti uguagli il rettangolo di B′C in BE.

In questo problema tanto a che a' devono essere precedute dal doppio segno $\pm$ per risolvere il problema in tutta la sua estensione, onde facendo tutte le combinazioni possibili che sono quattro sembra che quattro sieno le iperbole, e che quindi abbia il problema sedici soluzioni; ma si osservi che se non cambia il prodotto aa' l'equazione non si altera, e che quindi due sono le iperbole che risolvono il problema; onde otto sono i punti M. Si noti ancora che se cambiasi a in a', o più generalmente $\frac{aa'}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}$ se resta costante, comunque variano gli angoli, l'equazione resta la stessa: quindi purchè non varî il prodotto de' seni, possono cambiarsi ad arbitrio gli angoli dati, e il punto M sarà sempre lo stesso.

19. Se fosse dato il rapporto, la somma, o la differenza delle DN D′N′, non si otterrebbe che un'equazione di primo grado.

Supponiamo che sia dato il rapporto, ed esprimasi con $\frac{m}{n}$, si avrà

$$\frac{r^2-\alpha t-\beta u}{a}\sqrt{1+a^2}=\frac{m}{n}\cdot\frac{r^2-\alpha' t}{a'}\sqrt{1+a'^2},$$

ossia chiamando per brevità φ e φ' gli angoli N, N′,

$$(r^2-\alpha t-\beta u)n=m\frac{\text{sen}\varphi}{\text{sen}\varphi'}(r^2-\alpha' t),$$

la quale come è chiaro esprime una retta, che passa per O; inoltre essendo

$$\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{\text{sen}\varphi}{\text{sen}\varphi'}\alpha'-\alpha}{\beta}$$

la tangente trigonometrica dell'angolo che fa con l'asse delle ascisse, presa KL $=n$, KL′ $=m$, e condotte le LI, L′H′ perpendicolari a KI, KH; se facciamo CG $=\frac{\text{L}'\text{H}'.\alpha'}{\text{LI}}$, la retta da costruirsi sarà perpendicolare a DG.

Composizione del problema.

Unito il centro C co' punti D, D′ si descrivano gli assi radicali AO, BO de' detti punti; indi prese le KL′, KL uguali ad m ed n, si abbassino sulle KI, KH le normali LI, L′H′, e si tagli la CG quarta proporzionale dopo LI, L′H′, e CD′. La perpendicolare a DG per O incontra il cerchio ne' punti cercati.

In questo problema a, a' dovrebbero esser precedute dal segno $\pm$; ma siccome l'equazione non cambia quando la quantità $\frac{a}{a'}$ non muta segno due combinazioni potranno farsi, perchè le altre darebbero lo stesso risultamento: e il solo cambiamento nella costruzione è che la CG deve prendersi in senso contrario.

Si vede ancora che quantunque gli angoli dati prendano diversi valori pure se non cambia il rapporto de' loro seni, non si altera la posizione del punto M.

20. Se fosse data la somma delle rette ND, N′D′ che sia KL, chiamandola d, si avrebbe

$$\frac{r^2-\alpha t-\beta u}{\text{sen}\varphi}+\frac{r^2-\alpha' t}{\text{sen}\varphi'}=dr,$$

la quale quando $r^2-\alpha t-\beta u=o$, dà $r^2-\alpha' t=dr$ sen φ', e così avremo un punto della retta che rappresenta; un'altro si ha ponendo $r^2-\alpha' t=o$, con che viene $r^2-\alpha t-\beta u=rd$ sen φ.

Composizione del problema.

Abbassate sulle KI, KH le normali per L si tirino gli assi radicali AO, BO de' punti D, D′, e prese le $b'g'$, BG′ che serbino ad LI, LH rispettivamente, la ragione del raggio a CD, e a CD′, si conducano ad AO, BO le parallele g'P, G′P′. La retta che unisce il punto P col punto P′, incontra il cerchio ne' punti cercati.

In questo caso dovrebbero essere affetti dal segno $\pm$ soltanto senφ e sen φ', onde possiamo fare quattro combinazioni, e fra queste è chiaro che due danno la vera somma uguale a KL, le altre due la differenza.

PROBLEMA VI.

21. *Tirare* (Fig. 8) *dal dato punto* D *la* DMN *che tronchi dalla data parabola* IMN *un dato spazio.*

Si prendano per assi il diametro DIx, e la tangente per I, e sieno

$$y^2=2px\ldots.(1),\ y=\frac{u}{t-\alpha}(x-\alpha)\ldots(2),$$

le equazioni della parabola e della DN, ove $2p$ è il parametro, α l'ascissa del punto dato; e t, u le coordinate del punto M.

Essendo come è noto lo spazio MQN uguale a $\frac{2}{3}$ PQ. MN. sen MDx, (indicando P il punto di mezzo della MN, e QP un diametro) bisogna cercare il valore della MN, di sen MDx, e le coordinate del punto P, onde ottenere la QP: a tal fine si elimini la y dalle equazioni (1) e (2), e le radici dell' equazione

$$u^2x^2-2[\alpha u^2+p(t-\alpha)^2]x+\alpha^2u^2=0$$

che ne risulta, saranno le ascisse de' punti M, N; e poichè dall' equazione della MN si rileva che

$$MN=\frac{x'-x}{t-\alpha}\sqrt{u^2+(t-\alpha)^2+2cu(t-\alpha)},$$

essendo c il coseno dell'angolo degli assi ed x, x' le ascisse de' punti M, N; sarà

$$MN=\frac{2\sqrt{p^2(t-\alpha)^2+2p\alpha u^2}}{u^2}\sqrt{u^2+(t-\alpha)^2+2cu(t-\alpha)}.$$

Inoltre se si ordini l' equazione in x trovata più sopra, essendo

$2\left(\alpha+\frac{p(t-\alpha)^2}{u^2}\right)$ il coefficiente del secondo termine col segno cambiato, l'ascissa del punto P sarà $\alpha+\frac{p(t-\alpha)^2}{u^2}$, e quindi in virtù dell' equazione (2) l' ordinata verrà espressa da

$$y=\frac{p(t-\alpha)}{u},$$

e questa essendo per conseguenza l'equazione della QP, unita alla (1) darà per l' ascissa del punto Q $\frac{p(t-\alpha)^2}{2u^2}$, e perciò PQ che è la differenza delle ascisse de' punti P e Q sarà data dall' equazione

$$PQ=\alpha+\frac{p(t-\alpha)^2}{2u^2}:$$

ma dall' equazione (2), tenendo presenti le teorie relative all'equazione della retta rispetto ad assi obbliqui, si rileva che

$$\text{sen. } MDx=\frac{u\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{u^2+(t-\alpha)^2+2cu(t-\alpha)}},$$

dunque dinotando con $4d^2$ lo spazio dato si avrà

$$\frac{1}{3}\left(\alpha+\frac{p(t-\alpha)^2}{2u^2}\right)\frac{\sqrt{p^2(t-\alpha)^2+2p\alpha u^2}}{u}\sqrt{1-c^2}=d^2,\ (*)$$

(*) Non sarà inutile il far osservare che se si volesse, conoscendo un punto della DN, verificare se soddisfà al problema, la via che per se stessa si presenta sarebbe di unire un tal punto e sia G con D, determinare i punti, M,N ove la DG incontra la parabola, dividere per metà la MN in P, e tirato il diametro PQ, vedere se i due terzi del parallelogrammo formato da' lati MN, PQ sotto l' angolo QPM uguagliano il dato spazio, e se ben si rifletta per porre in equazione il problema, abbiamo eseguite col soccorso dell' algebra queste medesime operazioni.

★

ossia

$$\left(2p\alpha+\frac{p^2(t-\alpha)^2}{u^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{6pd^2}{\sqrt{1-c^2}},$$

donde, ponendo per brevità $2\mathrm{R}=\sqrt[3]{\frac{36d^4}{p(1-c^2)}}$, si ha

$$2\alpha+\frac{p(t-\alpha)^2}{u^2}=2\mathrm{R},$$

ovvero

$$u=\pm(t-\alpha)\sqrt{\frac{p}{2(\mathrm{R}-\alpha)}}\,\cdots\cdots\cdots(3),$$

equazione appartenente a due rette che passano per D, e che indicano conseguentemente le due posizioni che può avere la retta cercata.

Quest' equazione si costruisce facilmente poichè quando $t=\mathrm{R}$, si ha $u=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2p(\mathrm{R}-\alpha)}$, cioè uguale alla metà dell' ordinata della parabola corrispondente all' ascissa $\mathrm{R}-\alpha$: riguardo al valore di R si rifletta che se fosse $\alpha=\mathrm{R}$, si avrebbe dall' equazione (3) $u=\frac{1}{0}$, onde ne siegue che R è l' ascissa corrispondente a quella ordinata che prolungata stacca dalla parabola un segmento uguale al dato spazio.

Composizione del problema.

Essendo AIB il dato spazio si prenda CE uguale ad ID, e condotta l' ordinata EF si facciano le CG, CG′ uguali alla metà di EF. Le congiungenti il punto D co' punti G, G′ sono le rette cercate.

22. Da quanto abbiam detto risulta che

Se in una parabola condotte due corde parallele AB, FF′ e il diametro che le divide per metà si prenda ID uguale ad EC, e CG metà di EF, unita la DG gli spazi parabolici MQN, AIB sono uguali.

Inoltre siccome l' equazione $2\alpha+\frac{p(t-\alpha)^2}{u^2}=2\mathrm{R}$, dà

$$\mathrm{QP}=\alpha+\frac{p(t-\alpha)^2}{2u^2}=\mathrm{R}=\mathrm{IC},$$

se ne deduce il noto teorema

Se su diversi diametri si prendano uguali ascisse, le ordinate corrispondenti tagliano dalla parabola segmenti uguali.

La IC è dunque data ogni qual volta lo spazio MQN deve uguagliare un dato segmento della parabola; ma se dovesse essere uguale ad un dato quadrato bisognerebbe costruire il radicale $\sqrt[3]{\frac{9d^4}{2p(1-c^2)}}$ che esprime il valore di R: ed osservando che $2p(1-c^2)$ indica il parametro corrispondente all' asse $\mathrm{I}'x'$, è chiaro per le note regole della costruzione de' radicali di terzo grado, che presa la I′H metà del lato del dato quadrato, la I′L terza proporzionale dopo il parametro e il triplo della Hh, e la I′K uguale al parametro; descritto il cerchio LKI′, e condotta la c'C′ parallela all' asse $\mathrm{I}'x'$, la I′C′ è il valore del radicale ossia uguale alla IC, che potrebbe chiamarsi *saetta* del dato segmento.

Essendo le coordinate del punto P

$$x=\alpha+\frac{p(t-\alpha)^2}{u^2},\ y=\frac{p(t-x)}{u}\cdots\cdots(1)$$

eliminando da queste equazioni la quantità $\frac{t-x}{u}$, risulta

$$y^2=p(x-\alpha),$$

donde si vede che

Tutti i punti di mezzo delle corde di una parabola condotte per un dato punto sono allogati in una parabola che passa pel punto medesimo.

Inoltre se nelle equazioni (1) poniamo per $\frac{t-x}{u}$ il valore trovato nel n. 21 cioè $\sqrt{\frac{2(R-x)}{p}}$, si ottiene

$$x = 2R - \alpha,\ y = \sqrt{2p(R-\alpha)},$$

ed eliminandone α risulta

$$y^2 = 2p(x-R),$$

e se ne deduce per conseguenza che

I punti di mezzo delle corde che staccano da una parabola segmenti uguali sono in una parabola uguale alla data, avente lo stesso asse, e tangente alle corde medesime.

Quindi se f è il fuoco della parabola data, presa $ff' = $ I'C', sarà f' il fuoco della parabola che è il luogo de' punti di mezzo delle corde suddette, e perciò il cerchio avente per diametro la Df' incontra la I'T ne' punti m, m': e questa potrebbe essere un'altra soluzione del problema.

23. Occorrendo in alcuni de' seguenti problemi la condizione onde una retta tronchi da una parabola un dato segmento, per non ripetere in ciascuno il calcolo eseguito più sopra cerchiamo di stabilire una formola generale per tutti. Sia dunque un punto D riferito a due assi Ox, Oy; e ne sieno α, β le coordinate, sia inoltre $2p$ il parametro della parabola corrispondente ad un punto I tale che la tangente applicata in questo punto alla parabola risulti parallela all'asse delle y, e ne rappresentino α', β' l'ascissa, e l'ordinata: è chiaro che se x', y' sono le coordinate di un punto qualunque riferito al diametro che passa per I ed alla corrispondente tangente, ed x, y le coordinate dello stesso punto rispetto agli assi, si ha

$$y' = y - \beta' + n(x-\alpha'),\ x' = m(x-x'),\ (*)$$

(*) Queste formole si hanno immediatamente dalla teoria della permutazione delle coordinate, ed è noto che indicando θ l'angolo degli assi Ox, Oy; ω l'angolo che l'asse delle x fa con l'asse delle x' si ha

$$n = \frac{\text{sen}\,\omega}{\text{sen}\,(\theta+\omega)},\ m = \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,(\theta+\omega)},$$

avvertendo di prendere ω positivamente se l'asse delle x positive intersecando l'asse delle x' positive trovasi superiore, negativamente nel caso contrario.

onde l'equazione della retta che passa per D essendo della forma

$$y - \beta = A(x-\alpha)$$

rispetto agli assi Ox, Oy; per gli altri assi sarà

$$y' = \frac{A+n}{m}\left(x' + \frac{\beta-\beta'-A(\alpha-\alpha')}{A+n}m\right)$$

che dovendo troncare dalla parabola espressa per l'equazione

$$y'^2 = 2px'$$

un dato spazio, cambiando nell'equazione (3, 21) $\frac{u}{t-x}$, ed α in

$$\frac{A+n}{m},\ \text{e}\ -\frac{\beta-\beta'-A(\alpha-\alpha')}{A+n}m,$$

si otterrà

$$R\,(A+n)^2 - m\,(\alpha-\alpha')(A+n)\,A + m(\beta-\beta')(A+n) = \frac{1}{2}pm^2 \ldots (I).$$

È da notarsi che sostituendo nell'equazione della parabola per x', y' i loro valori si ottiene

$$\left(y-\beta'+n(x-\alpha')\right)^2 = 2pm(x-\alpha')$$

che è l'equazione della parabola riferita agli assi Ox, Oy.

PROBLÈMA VII.

24 *Condurre* (Fig. 9) *al cerchio* ME *la tangente* MNN' *in modo che tronchi dalla data parabola* KIk *un dato spazio.*

Prendansi per assi coordinati l' asse della parabola e la corrispondente tangente, e si chiamino α, β; t, u le coordinate de' punti C ed M, $2p$ il parametro della parabola, ed r il raggio del cerchio: saranno

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2$$
$$y^2=2px$$
$$(u-\beta)y+(t-\alpha)x=r^2+\beta(u-\beta)+\alpha(t-\alpha)$$

le equazioni del cerchio della parabola e della retta MN, che dovendo staccare dalla parabola un dato segmento, ponendo nell'equazione (I) trovata nel n. precedente

$$A=-\frac{t-\alpha}{u-\beta},\ m=1,\ n=\beta=\beta'=\alpha'=o\ ,\ \alpha=\frac{r^2+\beta(u-\beta)+\alpha(t-\alpha)}{t-\alpha}$$

si otterrà

$$2(t-\alpha)[(R-\alpha)(t-\alpha)-\beta(u-\beta)-r^2]=p(u-\beta)^2,$$

ovvero, essendo $(u-\beta)^2=r^2-(t-\alpha)^2$,

$$(t-\alpha)[(R+\tfrac{1}{2}p-\alpha)(t-\alpha)-\beta(u-\beta)-r^2]=\tfrac{1}{2}pr^2.$$

Quest' equazione appartiene come è chiaro ad una iperbola che ha per asintoti le rette espresse dalle equazioni

$$t=\alpha,\ (R+\tfrac{1}{2}p-\alpha)(t-\alpha)-\beta(u-\beta)-r^2=o\ ,$$

e passa pel punto dato dall' intersezione delle rette appartenenti alle equazioni

$$(R+\tfrac{1}{2}p-\alpha)(t-\alpha)-\beta(u-\beta)=o,\ t=\alpha-\tfrac{1}{2}p.$$

Composizione del problema.

Essendo PIQ lo spazio dato condotta ad Ix la perpendicolare CS si prendano GA ed SF uguali alla quarta parte del parametro, e CR terza proporzionale dopo CA ed il raggio: indi si guidino alla

AC le perpendicolari CD, RO ed alla PQ la parallela FD. L'iperbola che passa per D tra gli asintoti OR', OC incontra il cerchio ne'punti cercati.

Se $\beta=o$ l' iperbola si cambia in due rette che possono facilmente costruirsi, essendo date dall' equazione

$$(t-\alpha)\left(t-\alpha-\frac{r^2}{R+\frac{1}{2}p-\alpha}\right)=\frac{1}{2}p\,\frac{r^2}{R+\frac{1}{2}p-\alpha}\,.$$

25. Paragonando l' equazione ottenuta con quella trovata nel n. 14 si vede che esse sono della stessa forma onde agevolmente potrà l' una all' altra ridursi, e verremo così a stabilire, una relazione fra questi due problemi che sembrano affatto diversi. Pertanto come queste due equazioni sono riferite ad assi diversi si rifletta che l' equazione del n. precedente riferita ad assi paralleli a quelli adottati ma condotti pel centro del cerchio, sarebbe

$$t\left[\left(R+\tfrac{1}{2}p+\alpha\right)t+\beta u-r^2\right]=\tfrac{1}{2}pr^2,$$

abbiamo cambiato il segno ad α, β; perchè se α, β sono le coordinate del punto C rispetto al punto I, $-\alpha$, $-\beta$ saranno quelle del punto I rispetto al punto C. Ciò posto è evidente che l'equazione del n. 14 si riduce a questa se si cambiano in essa α, a in $\alpha+R$, $\frac{1}{2}p$, e poichè avendo indicato nel n. precedente con $2p$ il parametro si ha $a=\frac{2mnp}{(m+n)^2}$, avremo $4mn=(m+n)^2$, donde si ricava $m=n$. Quindi il problema si riduce a tirare una tangente comune al cerchio dato ed alla parabola uguale alla data e che ha G per vertice. Inoltre per quanto si è detto nella nota posta alla pag. 27, e come potrebbesi immediatamente ricavare dall' equazione (5, 8) ne siegue che presa GA $=\frac{1}{2}p$, il problema si riduce ad un caso particolare di quello risoluto nel n. 8, cioè a tirare una tangente al cerchio dato in modo che la perpendicolare abbassatale dal punto A la incontri in un punto della PQ. Donde si deduce che nel caso che $r=o$, cioè che il cerchio si riduca al punto C, il cerchio avente per diametro la retta che và dal punto C al punto A determina sulla PQ que' punti che uniti con C assegnano la posizione delle rette che passano per C e troncano dalla parabola spazî uguali a QIP: che è appunto l'ultima soluzione data al problema precedente. Per tal modo si vede come la soluzione del caso generale è identica a quella relativa al caso particolare, e come una dall'altra si deduca.

Queste relazioni pertanto le abbiamo fatte rimarcare non già perchè sieno necessarie alla soluzione de' rispettivi problemi; ma per mostrare come tutte le dipendenze che potranno mai immaginarsi fra varî problemi, sono racchiuse nelle equazioni che l' Algebra ne somministra: come non solo, risoluto un problema, dando valori particolari alle quantità che entrano nell' equazione ottenuta si ricavano le soluzioni de' diversi casi particolari che può quel problema presentare, lo che abbiam fatto sempre ne' problemi sinora risoluti; ma anche risolvendo due problemi de' quali uno è un caso particolare dell' altro, prendendo pure diverse ignote l'algebra conduce a soluzioni tali che l' una dall' altra si può sempre derivare, mentre li risolve indipendentemente seguendo sempre un principio generale che è quello esposto nel n. 7.

26. Dalle equazioni

$$(t-\alpha)[(R+\tfrac{1}{2}p-\alpha)(t-\alpha)-\beta(u-\beta)-r^2]=\tfrac{1}{2}pr^2$$
$$(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2=r^2$$
$$A=-\frac{t-\alpha}{u-\beta}$$

eliminando $u-\beta$, e $t-\alpha$ si ottiene

$$(R-\alpha)A^2+\beta A-\tfrac{1}{2}p+rA\sqrt{1+A^2}=o$$

equazione di quarto grado rispetto ad A. Or se facciamo in questa equazione $A=\frac{u}{t}$ come nel n. 12 si perviene ad una equazione nella quale facendo poi $u^2=2pt$ non si ha come in quel n. l' equazione di una curva che incontra la parabola in punti esistenti anche sulla periferia di un cerchio, onde se ne deduce che le parallele condotte pel vertice I alle quattro rette cercate non incontrano la parabola in punti tali che possa per essi passare un cerchio. Vediamo dunque se vi esista un altro punto della parabola che goda di queste proprietà; sieno t', u' le coordinate di questo punto, e facciamo

$$A=\frac{u'-u}{t'-t},$$

l' equazione precedente diverrà

$$R-\alpha+\beta\frac{t'-t}{u'-u}-\frac{1}{2}p\left(\frac{t'-t}{u'-u}\right)^2+r\sqrt{1+\left(\frac{t'-t}{u'-u}\right)^2}=o,$$

ove t, u indicano le coordinate di un punto qualunque della parallela condotta pel punto t', u' alla MNN', onde possiamo fra t, u stabilire un' equazione ad arbitrio facciamo

$$u^2=2pt\ \ldots\ (1)$$

ed essendo anche

$$u'^2=2pt',$$

per essere il punto t', u' sulla parabola, sarà

$$\frac{t'-t}{u'-u}=\frac{u'+u}{2p},$$

e l' equazione precedente diverrà

$$R-\alpha+\frac{\beta}{2p}(u'+u)-\frac{1}{8p}(u'+u)^2+r\sqrt{1+\frac{(u'+u)^2}{4p^2}}=o,$$

equazione di quarto grado in u ma sviluppata conterrebbe anche il termine in u^3 essendovi u a primo grado nella parte razionale;

*

pertanto essendo $\frac{2\beta-u'}{4p}$ il coefficiente di u, se facciamo $u'=2\beta$ sparirà questo termine, riducendosi l' equazione ad

$$R-\alpha+\frac{\beta^2}{2p}-\frac{u^2}{8p}\pm\frac{r}{2p}\sqrt{4p^2+4\beta^2+4\beta u+u^2}=0,$$

e ponendo per brevità $R-\alpha+\frac{\beta^2}{2p}=\alpha'$, tenendo presente l' equazione (1) otterremo

$$\left(\alpha'-\frac{1}{4}t\right)^2=\frac{r^2}{2p^2}(2p^2+2\beta^2+2\beta u+pt),$$

la quale ordinata e sommata con la (1) dà

$$u^2+t^2-2\left(p+4\alpha'+\frac{4r^2}{p}\right)t-\frac{16r^2\beta}{p^2}u=16\left(\frac{r^2(p^2+\beta^2)}{p^2}-\alpha'^2\right),$$

equazione spettante ad un cerchio che si può facilmente costruire. Difatti è chiaro che condotta Cc parallela ad Ix, presa cg=R=IG la Cg=α', e quindi l' ascissa IH del centro sarà uguale al semiparametro più il quadruplo di Cg, più la terza proporzionale dopo il semiparametro ed il diametro del cerchio, che sia DH: l' ordinata poi essendo uguale ad $\frac{8r^2\beta}{p^2}=\frac{4r^2}{p}\cdot\frac{\beta}{\frac{1}{2}p}$ si determina tirando Dh parallela ad FC, ed Hh perpendicolare ad Ix, finalmente presa FF′=SF, e condotta Ee parallela ad F′C abbiamo E$e=\frac{r\sqrt{p^2+\beta^2}}{p}$, e il raggio del cerchio sarà per conseguenza uguale al lato del quadrato equivalente all' eccesso che i due quadrati di hI e del quadruplo di Ee hanno sul quadrato fatto sul quadruplo di Cg. (*) Questa soluzione può sostituirsi all' altra data più sopra, e viene in tal guisa a risolversi il problema coll' intersezione della parabola data e di un cerchio. Pertanto da ciò che precede ne risulta che

(*) Si ricaverà facilmente ciò che abbiam detto paragonando l' equazione trovata con l' equazione generale del cerchio, e riflettendo che dopo aver determinate le IH, Hh, si ha

$$\overline{Ih}^2=\left(p+4\alpha'+\frac{4r^2}{p}\right)^2+\left(\frac{8r^2\beta}{p^2}\right)^2.$$

Se da un punto qualunque C *si abbassi una perpendicolare* CS *sull' asse di una parabola, e presa* CS′ *uguale a* CS, *si tiri il diametro* S′ s', *le parallele condotte per* s' *alle rette che essendo tangenti ad un cerchio qualunque avente* C *per centro troncano dalla parabola uguali spazî, incontrano la parabola in punti situati sulla periferia di un cerchio.*

È qui da avvertirsi che in alcuni casi potendo avere il problema due soluzioni invece di quattro, ossia potendo tirarsi due sole tangenti ad un cerchio avente C per centro, che stacchino dalla parabola uguali segmenti; sono due le rette che passano per s', e quindi venendosi a determinare due soli punti sulla parabola potrebbe credersi inutile per questi casi il teorema esposto, perchè per due punti vi passa sempre un cerchio; ma convien riflettere che l' algebra considera sempre che un cerchio incontra una parabola in quattro punti, gli altri due avendo coordinate immaginarie. Or se pe' due punti suddetti si fà passare un cerchio ad arbitrio, trovate le coordinate, quantunque immaginarie, degli altri due punti d' incontro, e le equazioni delle rette che li uniscono con s', le tangenti al cerchio parallele a queste rette, non troncheranno dalla parabola spazî uguali a quelli determinati dalle altre due tangenti; mentre fatte le medesime operazioni pel cerchio del quale s' intende parlare nel teorema si troverà, come è evidente, che sebbene si calcoli su quantità immaginarie, vi saranno tali riduzioni che si adempia in fine la condizione accennata, onde due rette risolvono allora realmente il problema, due altre algebricamente.

27. L' andamento tenuto in questo problema per risolverlo mediante la stessa parabola data ed un cerchio può applicarsi anche al problema IV risoluto nel n. 14. Difatti in questo numero abbiamo trovato che fra le coordinate t, u del punto ove la retta

cercata tocca il cerchio dato si avevano le equazioni

$$u^2+t^2=r^2\,,\quad t[(a+\alpha)t+\beta u-r^2]=ar^2\,,$$

e l' angolo che la medesima retta comprendeva con l'asse delle x, aveva per tangente trigonometrica $-\frac{t}{u}$: quindi se poniamo

$$-\frac{t}{u}=\mathrm{A}\,,\quad \text{ovvero } t=-\mathrm{A}u\,,$$

eliminando fra questa equazione e le due precedenti t, u otterremo l' equazione

$$r\mathrm{A}\sqrt{1+\mathrm{A}^2}+(\mathrm{A}\alpha-\beta)\mathrm{A}=a$$

che potrebbe servire a determinare A. Pertanto seguendo il metodo esposto nel n. precedente se indichiamo con t', u' le coordinate di un punto qualunque della parabola data ; e con t, u quelle del punto ove la retta condotta pel punto t', u' parallela alla retta cercata incontra la parabola, avremo $\mathrm{A}=\frac{u'-u}{t'-t}$, e quindi ponendo questo valore di A nell' equazione trovata qui sopra ne risulta

$$\frac{r(u'-u)}{t'-t}\sqrt{1+\left(\frac{u'-u}{t'-t}\right)^2}+\left(\frac{\alpha(u'-u)}{t'-t}-\beta\right)\frac{u'-u}{t'-t}=a\ \ldots\ldots\ (1).$$

D' altronde essendosi trovato nel n. 14 che

$$(y-\beta)^2=p(x-\alpha)$$

è l' equazione della parabola data, sarà

$$(u-\beta)^2=p(t-\alpha)$$
$$(u'-\beta)^2=p(t'-\alpha)$$

dalle quali sottraendo l'una dall' altra si ricava

$$u'^2-u^2-2\beta(u'-u)=p(t'-t)$$

e perciò avremo

$$\frac{t'-t}{u'-u}=\frac{u+u'-2\beta}{p}\,,$$

e l' equazione (1) diverrà

$$pr\sqrt{p^2+(u+u'-2\beta)^2}=a(u+u'-2\beta)^2-p[p\alpha-\beta(u+u'-2\beta)]\ \ldots\ (2),$$

e poichè nel secondo membro il coefficiente di $u-\beta$ a primo grado è $2a(u'-\beta)+p\beta$ si rileva che se faremo

$$2a(u'-\beta)+p\beta=0$$

l' equazione che ne risulta ordinata rispetto ad $u-\beta$ non conterrà $(u-\beta)^3$. Or avendosi dall' equazione precedente $p\beta=-2a(u'-\beta)$ l' equazione (2) tenendo presente che $(u-\beta)^2-(u'-\beta)^2=p(t-t')$, si può porre sotto la forma

$$r\sqrt{p^2+(u+u'-2\beta)^2}=a(t-t')-p\alpha\,,$$

che liberata dal radicale diviene

$$r^2[p^2+(u-\beta)^2+2(u'-\beta)(u-\beta)+(u'-\beta)^2]=a^2\left(t-t'-\frac{p\alpha}{a}\right)^2,$$

e ponendo per $(u-\beta)^2$ ed $(u'-\beta)^2$ i loro valori espressi in t e t', riflettendo che $2(u'-\beta)=-\frac{p\beta}{a}$, otterremo

$$\frac{pr^2}{a^2}[p+t+t'-2\alpha-\frac{\beta}{a}(u-\beta)]=\left(t-t'-\frac{p\alpha}{a}\right)^2$$

la quale equazione sommata con l' altra

$$p(t-\alpha)=(u-\beta)^2$$

ci darà l' equazione

$$(u-\beta)^2+\left(t-t'-\frac{p\alpha}{a}\right)^2=p(t-\alpha)+\frac{pr^2}{a^2}\left[p+t+t'-2\alpha-\frac{\beta}{a}(u-\beta)\right]$$

appartenente ad un cerchio che incontrando la parabola, determina que' punti che uniti col punto t', u' assegnano le posizioni delle rette alle quali devono esser poi parallele le tangenti da condursi al cerchio dato.

Ponendo l' equazione precedente sotto la forma

$$(u-\beta)^2+\left(t-t'-\frac{p\alpha}{a}\right)^2+\frac{p\beta r^2}{a^3}(u-\beta)-\frac{p(a^2+r^2)}{a^2}\left(t-t'-\frac{p\alpha}{a}\right)$$
$$=p\left[\frac{a^2+r^2}{a^2}\left(t'+\frac{p\alpha}{a}-\alpha\right)+\frac{r^2}{a^2}(p+t'-\alpha)\right],$$

si rileva che le coordinate del centro sono

$$t'+\frac{p\alpha}{a}+\frac{1}{2}\frac{p(a^2+r^2)}{a^2},\ -\frac{1}{2}\frac{p\beta r^2}{a^3},$$

e il quadrato del raggio è uguale a' quadrati di queste due quantità, ossia delle rette che rappresentano, più il secondo membro che non è difficile ridurre ad un quadrato.

28. Abbiamo voluto accennare questa soluzione del problema IV per mostrare come si potrebbe applicare in generale il calcolo eseguito nel n. 26; ma volendo risolvere il problema suddetto colla parabola data ed un cerchio si potrebbe anche eliminare t fra le due equazioni ottenute nel n. 14 fra t, u; e che abbiamo riportate nel n. precedente, e costruire quindi colle norme che trovansi esposte nella geometria a due coordinate l' equazione di quarto grado in u che ne risulta.

Pertanto da quanto abbiam detto si vede che nel risolvere un problema invece di prendere per ignote le coordinate di un punto che devesi determinare, se da questo punto deve poi partire qualche retta secondo determinate condizioni, giova alle volte di prendere per ignote le coordinate t, u di un punto qualunque della parallela condotta a tal retta per un punto preso ad arbitrio e che si può poi assegnare in modo che si semplicizzino quanto più si possa le equazioni che ne risultano. Un tale andamento può alle volte condurre a soluzioni semplici perchè qualunque sia il problema si avrà sempre un' equazione fra t, u la quale apparterrà non ad una linea ma ad un sistema di rette che passano pel punto che

si è preso ad arbitrio, e ciò perchè t, u non sono le coordinate di un punto particolare, ma di un punto qualunque della parallela che si è concepita tirata alla retta cercata; quindi per determinare t, u si può stabilire un' altra equazione a piacere e si prenderà quella che più semplicizza l' equazione che si è ottenuta: ma quando t, u sono le coordinate di un determinato punto allora le condizioni stesse del problema somministrano due equazioni fra t, u le quali bisogna costruirle, senza che possa aversi il mezzo di fare altre supposizioni che possano ridurle a più semplici. Così nel problema III se si prendessero per ignote le coordinate (Fig. 4) del punto M si avrebbe fra queste coordinate un' equazione appartenente ad un' iperbola la quale intersecando la parabola determinerebbe il punto M, nè vi sarebbe altro a fare, se non che eliminare una delle coordinate per mezzo dell' equazione ottenuta e quella della parabola, e costruire l' equazione che ne risulta con la parabola data ed un cerchio; mentre chiamando t, u le coordinate di un punto qualunqne della parallela condotta ad MP per I si ha fra t, u un' equazione tale che prendendo (n. 12) per l' equazione da stabilirsi ad arbitrio $u^2=pt$, combinandole insieme se ne ricava un' equazione appartenente ad un cerchio e si perviene in tal guisa ad una semplicissima soluzione del problema.

È da avvertirsi che se mai pel punto da determinarsi non si dovessero tirare delle rette richieste dall' enunciato del problema, si potranno queste fissare anche ad arbitrio, per esempio si concepirà unito il punto da determinarsi con qualche punto dato e poi si procederà alla soluzione del problema come sopra si è detto: che se scelgasi per questo punto quel punto stesso pel quale deve poi condursi la parallela, allora questa parallela sarà la stessa retta che univa il punto dato col punto cercato; e t, u le coordinate di un punto qualunque di questa medesima retta. Queste osservazioni, ed altre analoghe che potrebbero farsi, mentre ci insegnano quali norme si hanno da seguire onde pervenire ad eleganti soluzioni, ci dimostrano come l' algebra applicata alla geometria possa somministrare varie soluzioni di uno stesso problema.

PROBLEMA VIII.

29. *Dato* (Fig. 10) *il cerchio* MM′ , *la parabola* INN′ *e i due punti* A *e* B ; *descrivere un cerchio* AMM′ *che passando per* A *e* B *incontri il dato in modo che la* MM′ *stacchi dalla parabola un dato segmento.*

Si prendano per assi la AB e la perpendicolare ad essa pel suo punto di mezzo , e si chiamino a la OA =OB , r il raggio del cerchio dato , α, β; α' , β' ; t , u le coordinate del centro del cerchio dato , del punto I della parabola tale che la tangente per esso è parallela all' asse delle y , e del punto M ; $2p$ il parametro della parabola rispetto al diametro che passa per I; m , n la secante e la tangente trigonometrica dell' angolo che un tal diametro comprende con l' asse delle x positive. Le equazioni della parabola e de' cerchi MM′ , AMB saranno

$$\big(y-\beta'+n(x-\alpha')\big)^2 = 2mp(x-\alpha')\ldots\ldots\ldots(1)\,,$$

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha\,)^2 = r^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\,,$$

$$y^2+x^2-\frac{u^2+t^2-a^2}{u}y=a^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\,,$$

l' ultima delle quali si ricava facilmente osservando che il cerchio AMB deve passare pe' punti A , M , B. Ciò posto sottraendo l'equazione (2) dalla (3) si ottiene

$$\left(2\beta-\frac{u^2+t^2-a^2}{u}\right)y+2\alpha x=\alpha^2+\beta^2+a^2-r^2\,;$$

questa equazione essendo dedotta dalle due (2) , (3) apparterrà ad una linea che passa pe' punti comuni a' due cerchi; cioè pe' punti M , M′ , ma l' equazione precedente è di primo grado , dunque essa esprime la retta MM′. Inoltre avendosi

$$u^2+t^2=2\beta u+2\alpha t-\alpha^2-\beta^2+r^2$$

perchè il punto t , u appartiene al cerchio dell' equazione (2) , l'equazione trovata più sopra , ponendo per brevità $\alpha^2+\beta^2+a^2-r^2=2\alpha b$, si riducc ad

$$y=\frac{u}{t-b}(x-b)\,,$$

e ci dimostra che la MM′ passa pel punto avente per coordinate $x=b$, $y=o$. Resterebbe ora ad esprimere la condizione che la retta data dall' equazione precedente stacchi dalla parabola un dato segmento , ma avendo già dimostrato che deve passare per un punto dato, si vede che il problema si riduce all' altro risoluto nel n. 21. Pertanto essendosi trovato che la MM′ passa pel punto dato dalle coordinate $x=b$, $y=o$ indipendentemente da t , u ne siegue che descritto un cerchio qualunque ANB che passi per A e B la NN′ incontrando la BA determina il punto D che ha per ascissa $x=b$, e in conseguenza

Le corde comuni ad un cerchio dato, e a diversi cerchi che passano per due punti dati s' incontrano in uno stesso punto.

30. Avendo detto che determinato il punto D il problema si riduce a quello del n. 21, si potrebbe forse rispondere

» Non è giusta questa conseguenza: chi ne assicura che la MD
» che è la secante della porzione parabolica data ; e che perciò di-
» venta una retta data di sito, prolungata non che vada a dirit-
» tura per i punti M , M′ incontri il dato cerchio? E quale è il
» raggio di quel cerchio che passando per i punti dati esibisce i
» due M,M′ al problema soddisfacenti? .... Non crederò mai , che
» si risponda , che posto che la secante prolungata , col favor del
» cielo , incontri il dato cerchio, altro se ne possa descrivere, che
» passi per i punti dati , e per i due d' incontro. Sarebbe questa
» una scipidezza non degna della gravità delle discussioni Geome-
» triche ».

Questa difficoltà si toglie immediatamente se si rifletta che siccome descritto un cerchio qualunque ANB la corda NN′ passa per D, viceversa ogni retta DN che passa per D incontra il cerchio dato in due punti tali che per essi, e per A e B si può far passare un cerchio; e se ne determina il centro O′ abbassando dal centro C del cerchio dato la perpendicolare CO′ sulla DN. Che anzi è da osservarsi che non solo il cerchio ANB può descriversi quando la retta DN incontra il cerchio dato, ma anche quando non l' incontra; così tirata una retta qualunque Dn e ad essa la perpendicolare Co' descritto col centro o' un cerchio che passi per A può considerarsi che questo cerchio incontri il dato negli stessi punti che la retta Dn; poichè se immaginarie sono le coordinate de' punti comuni alla retta ed al cerchio; immaginarie, ma le medesime, sono le coordinate de' punti comuni a' due cerchi. (*)

(*) Difatti sia $y=a'(x-b)$ l' equazione di una retta qualunque Dn condotta pel punto D, $y^2+x^2-2qy=a^2$ l' equazione di un cerchio qualunque che passa pe' punti A, B; q essendo l' ordinata Co' del centro: sottraendo questa equazione dalla (2, 29) si ottiene l' equazione

$$2(q-\beta)y-2\alpha x=r^2-\alpha^2-\beta^2-a^2,$$

la quale esprime la retta che passa pe' punti comuni a' due cerchi, sieno o nò questi punti realmente assegnabili, e sarà identica alla equazione $y=a'(x-b)$ se $\frac{\alpha}{q-\beta}=a'$, ovvero se $\frac{\beta-q}{\alpha}=-\frac{1}{a'}$; cioè se la retta che unisce il punto C con o' è normale alla Cn: quindi il centro o' si determinerà abbassando dal punto C la Co' perpendicolare alla Dn. Siegue da ciò che quando sono dati due cerchi la retta che passa pe' due punti che sono ad essi comuni è sempre assegnabile s' incontrino o nò questi cerchi. Si potrà avere una ragione di ciò anche geometrica se si rifletta che la corda comune a due cerchi deve essere sempre normale alla retta che unisce i loro centri, e dividere una tal retta in modo che la differenza de' quadrati de' raggi sia uguale alla differenza de' quadrati delle parti, le quali condizioni si possono anche adempire quando i cerchi non s' incontrano. Non bisogna tralasciar di notare che se il quadrato del raggio maggiore fosse più grande de' quadrati del raggio minore, e della distanza de' centri, questa distanza invece di esser di-

PROBLEMA IX.

31. *Date la parabola* (Fig. 11) N′MN, *e la retta* DR, *ed in questa il punto* D, *tirare alla parabola la tangente* MA *in modo che presa la* AB *che serbi alla* AD *una data ragione, la* BN′ *parallela alla* AM *stacchi dalla parabola un dato segmento.*

Presi per assi il diametro DIx e la tangente per I, si chiamino t, u le coordinate del punto M, α la ID, a il rapporto del seno dell' angolo che la DR fà con l' asse delle x al seno dell' angolo che forma con l' asse delle y; c il coseno dell' angolo compreso dagli assi, e $2p$ il parametro della parabola. Saranno

$$y^2=2px\ldots(1),\ y=a(x-\alpha)\ldots(2),\ uy=px+pt\ldots(3)$$

le equazioni della parabola, della DR, e della MA: sia inoltre

$$y=\frac{p}{u}(x-\alpha')\ldots\ldots(4)$$

visa nel modo suddetto verrebbe ad essere prolungata. E qui conviene avvertire che spesse volte risolvendo un problema si trova che la soluzione esiste quantunque sembra impossibile poi di eseguire le costruzioni volute dall' enunciato, allora è segno che il problema è identico a qualche altro problema enunciato sotto un'altro punto di vista più generale, ma che corrisponde allo stesso ne' casi che è possibile il primo.

Così se data una parabola e fuori di essa un punto si cerca il luogo geometrico de' punti da' quali condotte due tangenti alla parabola, la congiungente i punti di contatto vada a passare pel punto dato; si trova che la locale è una retta che seca la parabola Quindi pare impossibile che i punti i quali sono nell' aia della parabola possano soddisfare alle condizioni cercate; ma se si rifletta che, per le note proprietà della parabola, il problema si riduce a trovare il luogo geometrico de' punti tali che per ciascuno di essi condotto un diametro, la parallela alla tangente corrispondente tirata pel punto di questo diametro lontano dal vertice quanto il punto che si è preso, vada a passare pel punto dato; si vedrà in qual senso i punti situati nell' aia della parabola avverino il problema.

l' equazione della NB. Dall' equazione (2) rilevasi che

$$DA=(x-\alpha)\sqrt{1+a^2+2ca},$$

x essendo l' ascissa del punto A, la quale si ottiene eliminando la y dalle equazioni (2) e (3), e risulta $x=\alpha+\frac{p(t+\alpha)}{au-p}$, onde

$$DA=\frac{p(t+\alpha)}{au-p}\sqrt{1+a^2+2ca}:$$

similmente eliminando la y dall'equazioni (2) e (4) si troverà per l' ascissa del punto B, $x=\alpha+\frac{p(\alpha-\alpha')}{au-p}$; quindi sarà

$$AB=\frac{p(t+\alpha')}{au-p}\sqrt{1+a^2+2ca},$$

ed indicando con $\frac{m}{n}$ il dato rapporto avremo l' equazione

$$t+\alpha'=\frac{m}{n}(t+\alpha).$$

D' altronde dovendo la retta dell' equazione (4) troncare dalla parabola un dato spazio, abbiamo in virtù dell' equazione (I, 23)

$$\frac{p^2}{u^2}=\frac{p}{2(R-\alpha')};$$

dunque eliminando da queste due equazioni α', avremo

$$\frac{p}{u^2}=\frac{1}{2\left(R-\frac{m-n}{n}t-\frac{m\alpha}{n}\right)},$$

dalla quale, osservando che $u^2=2pt$, si ottiene l' equazione

$$t=\frac{nR}{m}-\alpha$$

che appartiene ad una retta la quale incontra la parabola data ne' punti M.

Composizione del problema.

Condotto il diametro DIx si prenda la IC uguale ad ID, e la CE in modo che la saetta del dato segmento le serbi la data ragione, e si tiri l' ordinata MEM'. Le tangenti alla parabola ne' punti M, M' saranno le rette cercate.

Dovendo la distanza che passa fra due punti esser preceduta dal segno $\pm$, bisognerà prendere col segno $\pm$ il rapporto $\frac{m}{n}$, onde prendendo la CE da C verso e tirata la mem' parallela alla MM' avremo due altri punti m, m' che anche soddisfanno al problema. Non sarà inutile di avvertire che per le tangenti condotte pe' punti M, m la AB deve tagliarsi nel senso DR; per quelle tirate da' punti M', m' in senso opposto, cioè secondo RD.

PROBLEMA X.

32. *Tirata* (Fig. 12) *nella parabola* INN' *una corda* NN' *che ne stacchi un dato segmento, unito il suo punto di mezzo* M' *con un dato punto* D, *e presa* DM *che serbi a* DM' *un dato rapporto, si cerca il luogo geometrico del punto* M.

Si prendano per assi coordinati il diametro DIx e la tangente alla parabola in I, e si chiamino t, u le coordinate del punto M', $2p$ il parametro della parabola, c il coseno dell'angolo degli assi, ed α l' ascissa del punto D: sarà

$$y=\frac{u}{t-\alpha}(x-\alpha)\dots(1)$$

l' equazione della DM′M ; onde

$$DM'=\sqrt{u^2+(t-\alpha)^2+2cu(t-\alpha)},$$

$$DM=\frac{x-\alpha}{t-\alpha}\sqrt{u^2+(t-\alpha)^2+2cu(t-\alpha)},$$

x essendo l' ascissa del punto M, ed indicando con $\frac{m}{n}$ il dato rapporto avremo

$$n(x-\alpha)=m(t-\alpha)\ldots.(2).$$

Inoltre essendo M′ il punto di mezzo della NN′ l' equazione di questa retta sarà

$$y=\frac{p}{u}\left(x+\frac{u^2-pt}{p}\right),(*)$$

e dovendo troncare dalla parabola un dato segmento per l' equazione (I, 23) otterremo

$$u^2=2p(t-R)\ldots\ldots(3).\ (**)$$

Avute in tal guisa, esprimendo tutte le condizioni del problema, tre equazioni fra le quantità x, y, t, u basta eliminarne t, u onde

(*) Difatti supponendo che $y-u=a(x-t)$ sia l' equazione della NN′, essendo $y^2=2px$ l'equazione della parabola, eliminandone x si otterrà l' equazione

$$y^2-\frac{2p}{a}y=2p\left(t-\frac{u}{a}\right)$$

che darà le ordinate de' punti N, N′; e poichè l' ordinata u del punto M′ deve esserne le semisomma, avremo $u=\frac{p}{a}$, donde $a=\frac{p}{u}$, e l' equazione della NN′ diviene $y-u=\frac{p}{u}\left(x-t\right)$ che si riduce facilmente a quella portata qui sopra.

(**) Quest' equazione potevamo dedurla immediatamente rammentando ciò che abbiam detto nel n. 22

ottenere l' equazione della locale cercata. Or dall' equazione (2) abbiamo

$$t-\alpha=\frac{n}{m}(x-\alpha),$$

ed in consegnenza dalla (1)

$$u=\frac{n}{m}y;$$

dunque l' equazione (3) ci darà in fine

$$\frac{n^2}{m^2}y^2=2p\left(\frac{n}{m}(x-\alpha)+\alpha-R\right),$$

equazione di una parabola avente per diametro Ix, per vertice il punto dato dall' ascissa $x=\alpha+\frac{m}{n}(R-\alpha)$, la tangente parallela all' asse delle y, e per parametro $\frac{2pm}{n}$.

Composizione del problema.

Condotto per D il diametro DIx si prenda IA uguale alla saetta del dato segmento e DI′ che serbi alla DA la data ragione ; indi sulla corda menata per I′ si tagli la I′B quarta proporzionale dopo AD, DI′ e il parametro. La parabola che ha I′ per vertice, I′x per diametro, I′E per tangente, ed I′B per parametro è la locale cercata.

È da avvertirsi che la distanza che passa fra due punti essendo affetta dal segno $\pm$ possiamo dare ad n il doppio segno $\pm$: la costruzione sarebbe la stessa, soltanto la DI′ dovrebbe prendersi in senso opposto e la parabola si volgerebbe verso le x negative: verrebbesi allora a considerare il caso in cui la DM si prende sul prolungamento della M′D.

PROBLEMA XI.

33. *Date le due parabole* (Fig. 13) I'NN', IM *ed in questa il diametro* Ix *si cerca tirare nella prima la corda* NN' *che ne stacchi un dato segmento in modo che condotta dal suo punto di mezzo* M' *alla parabola* IM *la tangente* M'MP *sia* M'P *a* PM *in un dato rapporto.*

Si prendano per assi coordinati il diametro Ix e la tangente Iy, e si chiamino α, β; t, u; t', u' le coordinate del punto I' determinato in modo che la tangente in I' sia parallela all'asse delle y, del punto M, e del punto M'; e $2p$, $2p'$ i parametri delle parabole IM, I'NN'. Le equazioni della tangente PM' e delle due parabole saranno

$$y-u=\frac{p}{u}\left(x-t\right)\ldots\ldots(1)$$

$$y^2=2px\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\left(y-\beta+n(x-\alpha)\right)^2=2p'm\left(x-\alpha\right)\ldots(3).$$

Ciò posto essendo il punto t, u sulla parabola dell'equazione (2) sarà

$$u^2=2pt\ldots\ldots(4),$$

e dovendo la retta PM passare pel punto M' che ha per coordinate t', u' si avrà

$$u'-u=\frac{p}{u}\left(t'-t\right)$$

ossia tenendo presente l'equazione (4)

$$uu'=pt'+pt\ldots(5).$$

Inoltre dall'equazione (1) si rileva che la distanza di due punti

della PM' aventi per ordinate y, y' è data dalla formola

$$(y'-y)\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}+\frac{2cu}{p}},$$

indicando c il coseno dell'angolo compreso dagli assi; dunque essendo nulla l'ordinata del punto P, ed u, u' quelle de' punti M, M' sarà

$$\text{MP}=u\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}+\frac{2cu}{p}},\quad \text{M'P}=u'\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}+\frac{2cu}{p}},$$

e quindi indicando con $\frac{m'}{n'}$ il dato rapporto otterremo l'equazione

$$n'u'=m'u\ldots(6).\ (*)$$

Resta ora ad esprimere analiticamente che il punto M' sia il punto di mezzo della corda che stacca dalla parabola dell'equazione (3) il dato spazio; per eseguir ciò bisognerebbe tirare pel punto t', u' una parallela al diametro di questa parabola, e quindi cercare l'equazione della parallela alla tangente corrispondente condotta pel punto t', u', che sarebbe la NN', la quale dovendo troncare dalla parabola un dato spazio l'equazione (I, 23) ci darebbe l'equazione cercata fra t', u'. Ma per brevità osserveremo che dette t'', u'' le coordinate del punto M' riferito al diametro ed alla tangente della parabola I'NN' rispetto al punto I', si ha per l'equazione (3) del n. precedente

$$u''^2=2p'(t''-\text{R}),$$

onde essendo (n. 23)

$$u''=u'-\beta+n(t'-\alpha),\ t''=m(t'-\alpha),$$

(*) Qui è da avvertirsi che per risolvere il problema in tutta la sua generalità dovrebbe darsi ad n', il segno $\pm$ noi riterremo solo il $+$ perchè è facile il rilevare, cambiando n' in $-n'$, come dovrebbesi modificare la soluzione che siamo per dare.

*

avremo

$$\left(u'-\beta+n(t'-\alpha)\right)^2=2p'm\left(t'-\alpha-\frac{\mathrm{R}}{m}\right)\ldots\ldots(7).$$

Espresse in tal guisa tutte le condizioni del problema abbiamo le quattro equazioni (4),(5),(6),(7) fra le quattro ignote $t, u; t', u'$, e quindi si possono pienamente determinare. Or avendosi fra t, u l' equazione (4) possiamo fra le altre tre eliminare t', u' ed otterremo quindi un' altra equazione fra t, u e così costruendo i luoghi geometrici di queste due equazioni, ossia soltanto dell' ultima, perchè la (4) esprime la parabola IM, questi intersecandosi determineranno il punto M. L' eliminazione accennata si esegue facilmente poichè dalla equazione (6) abbiamo

$$u'=\frac{m'}{n'}u,$$

e quindi la (5) in virtù dell' equazione (4) ne darà

$$t'=\left(\frac{2m'}{n'}-1\right)t,$$

i quali valori sostituiti nell' equazione (7) danno

$$\left[u-\frac{n'}{m'}\beta+n\left(\left(2-\frac{n'}{m'}\right)t-\frac{n'}{m'}\alpha\right)\right]^2=2p'm\frac{n'}{m'}\left(\left(2-\frac{n'}{m'}\right)t-\frac{n'}{m'}\left(\alpha+\frac{\mathrm{R}}{m}\right)\right)\cdot(8),$$

la quale equazione appartiene come è chiaro ad una parabola che ha per diametro la retta data dall' equazione

$$u-\frac{n'}{m'}\beta+n\left(\left(2-\frac{n'}{m'}\right)t-\frac{n'}{m'}\alpha\right)=o\ldots\ldots(9)$$

e per tangente corrispondente la retta espressa per l' equazione

$$\left(2-\frac{n'}{m'}\right)t-\frac{n'}{m'}\left(\alpha+\frac{\mathrm{R}}{m}\right)=o\ldots\ldots(10).\ (*)$$

(*) Di fatto dal n. 6 ne segue che in generale $y+mx=o$, e $dy+ex+f=o$ sono le equazioni di un diametro e della corrispondente tangente della parabola. Nel caso attuale ciò si rileva anche facilmente osservando che l' equazione (3), la quale appartiene alla parabola I'NN' ed è simile alla (8), ci dimostra che il diametro e la tangente rispetto al punto I' hanno rispettivamente per equazione

$$y-\beta+n(x-\alpha)=o,\ x-\alpha=o$$

Per costruire le rette appartenenti a queste equazioni osserveremo che nell' equazione (9) quando $t=o$ si ha $u=\frac{n'}{m'}(\beta+n\alpha)$; ma dalla forma dell' equazione (3) si rileva che il diametro della parabola I'NN' condotto per I', che sia I'A, ha per equazione

$$u-\beta+n(t-\alpha)=o\ldots\ldots(11)$$

indicando t, u le coordinate variabili de' diversi punti della I'A, e perciò quando $t=o$ si ha $u=\mathrm{IB}=\beta+n\alpha$, dunque presa $\mathrm{IB'}=\frac{n'}{m'}.\mathrm{IB}$, per B' passerà la retta dell' equazione (9). Similmente ponendo $u=o$ si potrebbe determinare il punto ove incontra l' asse delle x; ma sarà più facile l' assegnare il punto ove incontra la I'A: difatti sottraendo l'equazione (11) dalla (9) si ha

$$t=-\frac{\beta+n\alpha}{n},$$

e poichè l' equazione (11) per $u=o$ dà $t=\mathrm{IA}=\frac{\beta+n\alpha}{n}$, ne siegue che, presa B$a$ = BA, a è un altro punto della retta appartenente all' equazione (9) che sarà per conseguenza la aB'. Per costruire l' equazione (10) faremo riflettere primieramente che presa I'C = R si ha $\mathrm{BC}=m\alpha+\mathrm{R}$ onde l' equazione (10) darà $t=\frac{n'}{2m'-n'}.\frac{\mathrm{BC}}{m}$, ma l' equazione (9) per $u=o$ dà $t=\mathrm{IA'}=\frac{n'}{2m'-n'}.\frac{\beta+n\alpha}{n}=\frac{n'}{2m'-n'}\,\mathrm{IA}$, dunque la (10) si ridurrà a $t=\frac{\mathrm{IA'.BC}}{m.\mathrm{IA}}$; e perciò presa $\mathrm{BC'}=\frac{\mathrm{IA'.BC}}{\mathrm{IA}}$, C' I'' sarà la tangente della parabola espressa dall' equazione (8). Finalmente per determinarne il parametro si osservi che l' equazione (3) ci dimostra che dividendo il coefficiente di x nel secondo membro per m si ha il parametro della parabola; quindi poichè dalla nota posta alla pag. 38 si rileva che $m = n\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\omega}$, ed n esprime nell' equazione (3) il coefficiente di x a primo grado esistente nel primo membro, ne risulta che indicando con ω' l' angolo che il diametro aA' fà con l' asse delle x, se dividiamo il coefficiente di t a primo grado che trovasi nel secondo membro dell' equazione (8) pel coefficiente di t a primo grado della quantità elevata a quadrato che ne forma il primo membro moltiplicato per $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\omega'}$, la quantità $\frac{2p'mn'\operatorname{sen}\omega'}{m'n\operatorname{sen}\theta}$ che ne risulta sarà il parametro della parabola che quell' equazione rappresenta: ma essendo $m = \frac{n\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\omega}$, l'espressione precedente si riduce a $2p'\frac{n'}{m'}\cdot\frac{\operatorname{sen}\omega'}{\operatorname{sen}\omega}$, dunque essendo A, A' gli angoli ω, ω' il parametro corrispondente al diametro I''A' ed alla tangente I''C' sarà $2p'\frac{n'}{m'}\cdot\frac{aA}{aA'}$.

Composizione del problema.

Condotto nella parabola I'NN' il diametro I'A che divida per metà le corde parallele alla tangente Iy, si prenda Ba uguale a BA, la B'I in modo che la BI le serbi il dato rapporto e si unisca la aB'; indi presa I'C uguale alla saetta del dato segmento si trovi dopo IA, IA' e BC la quarta proporzionale e sia BC', e si tiri alla Iy la parallela C'I''. La parabola che ha I''A' per diametro, I''C' per tangente e per parametro corrispondente la retta che sta al parametro della parabola I'NN' relativo al punto I' in

ragion composta di IB' : IB e di aA : aA' incontrando la parabola IM determina il punto M.

34. Abbiamo determinato il punto M perchè è chiaro che assegnato un tal punto resta immediatamente risoluto il problema; se si volesse assegnare il punto M' allora dovrebbesi fra le equazioni (4), (5), (6) eliminare t, u. Questa operazione si esegue facilmente poichè l'equazione (6) dà

$$u = \frac{n'}{m'}u',$$

quindi dalla (4) si avrà

$$t = \frac{n'^2}{m'^2}\cdot\frac{u'^2}{2p},$$

e finalmente sostituendo questi valori nella (5) si ottiene

$$u'^2 = 2p\,\frac{m'^2}{n'(2m'-n')}\,t',$$

equazione appartenente ad una parabola che incontra quella data dall' equazione (7) ne' punti M': quindi è chiaro che si avrà la seguente

Composizione del problema.

Condotto nella parabola I'NN' un diametro I'A si prenda I'C uguale alla saetta del dato segmento, ed IE che sia al parametro della parabola IM in ragion composta di $m' : n'$ e di $m' : 2m'-n'$. La parabola avente Ix per diametro, Iy per tangente ed IE per parametro incontrando la parabola uguale e similmente posta alla I'NN' e che passa per C, assegna la posizione del punto M'. Abbiamo detto, si tiri un diametro I'A, perchè essendo la parabola dell' equazione (7) uguale e similmente posta alla I'NN' non è necessario che il diametro I'A abbia la posizione indicata nel n. precedente. Inoltre se si rifletta che l' equazione dell' altra parabola è stata ricavata senza aver presente l' equazione (7), si vedrà che essa esprime il luogo geometrico di que' punti M' tali che condotte per ciascuno di essi una tangente M'P alla parabola, sia M'P ad MP nel dato rapporto. La soluzione che abbiamo ora esposta quantunque sembri più semplice di quella data nel n.° precedente, pure non è da esser preferita perchè conviene descrivere due parabole : ma del resto anche da essa si può avere il modo onde risolvere il problema descrivendo una sola parabola. Difatti cambiando nelle equazioni delle due parabole u' in $u'-\frac{Rn}{m}$, t' in $t'+\frac{R}{m}$, si ottiene

$$\left(u'-\beta+n(t'-\alpha)\right)^2=2p'm(t'-\alpha)$$

$$\left(u'-\frac{Rn}{m}\right)^2=2p\frac{m'^2}{n'(2m'-n')}\left(t'+\frac{R}{m}\right):$$

or se supponiamo che queste equazioni sieno riferite anche agli assi Ix, Iy, la prima appartiene alla parabola I'NN', l' altra è chiaro che, presa sulla parallela al diametro I'A condotta per I la IF uguale ad I'C$=$R e condotta FG parallela ad Iy essendo IG$=-\frac{R}{m}$, GF$=\frac{Rn}{m}$ passa per F, ed ha GF per tangente ed il diametro parallelo ad Ix : ciò posto descritta questa parabola è evidente che incontrerà la parabola I'NN' in un punto m' tale che accresciute le sue coordinate di $\frac{R}{m}$ e $-\frac{Rn}{m}$ si hanno le coordinate del punto M', ossia che il punto m' è riferito agli assi FH, FK come lo è il punto M' rispetto agli assi Ix, Iy, e quindi condotta pel punto I una retta uguale e parallela alla congiungente il punto F con m' si assegnerà la posizione del punto M'.

PROBLEMA XII.

35. *Circoscrivere* (Fig. 14.) *al dato cerchio* AMM' *un triangolo isoscele di dato perimetro.*

Potendo il triangolo BDE girare intorno al cerchio senza cangiar di grandezza possiamo supporre data la AD di posizione, e prenderla per asse delle ascisse, e fissando in C l' origine, si chiamino t, u le coordinate del punto M, ed r il raggio del cerchio. L' equazioni del cerchio e della tangente BMD saranno

$$y^2+x^2=r^2$$

$$uy+tx=r^2 \ldots\ldots (1),$$

e la distanza di due punti qualunque della BD sarà espressa dalla formola

$$(y'-y)\sqrt{1+\frac{u^2}{t^2}}=\frac{r(y'-y)}{t},$$

essendo y, y' le ordinate di que' punti. Ma ponendo $x=-r$ nell' equazione della BD si ha per l' ordinata del punto B

$$y=\frac{r(r+t)}{u},$$

dunque essendo uguale a zero l' ordinata del punto D, sarà

$$BD=\frac{r^2(r+t)}{ut},$$

e perciò indicando con $2p$ il dato perimetro avremo l' equazione

$$\frac{r(r+t)}{u}+\frac{r^2(r+t)}{ut}=p,$$

ovvero

$$t(rt-pu+2r^2)+r^3=0 \ldots\ldots\ldots (2),$$

la quale appartiene ad un' iperbola che ha per asintoti le rette espresse per l' equazioni

$$t=o\,,\ rt-pu+2r^2=o$$

e passa pel punto dato dalle coordinate $u=o, t=-r$.

Composizione del problema.

Presa la AF uguale alla metà del dato perimetro ed AG uguale ad AC si tirino le GO, CO perpendicolari alle CF, AC rispettivamente. L' iperbola che passa per A tra gli asintoti OC, OG intersecando il cerchio determina il punto M.

56. Avendosi dall' equazione dell' iperbola per $u=o$, $(t+r)^2=o$ si rileva che la AC la tocca nel punto A, e ciò potevamo anche dedurlo osservando che le parti AC, AG della retta GC comprese tra il punto A e gli asintoti sono uguali: pertanto dovendo la curva passare pel punto A che è un punto del cerchio, non essendo al cerchio tangente, dovrà incontrarlo necessariamente in un altro punto che, essendo OC un asintoto, dovrà esistere nel quadrante AL. Sia m questo punto verrà a determinarsi il triangolo *dbe* i di cui lati toccano il cerchio, ma questo non è però in esso iscritto; l' altro ramo dell' iperbola poi assegna due punti M, M' che danno il triangolo circoscritto al cerchio. Ma è da osservarsi che il punto m è sempre assegnabile come più sopra abbiam detto, ma l' altro ramo a misura che il punto O si allontana da C, cioè che diminuisce il dato perimetro, può non incontrare il cerchio, vi sarà dunque un valore di p pel quale quel ramo dell' iperbola tocca il cerchio, e questo è il minimo valore che si possa dare a p perchè sieno assegnabili i punti M,M' che in tal caso si riuniscono in un solo. Volendo determinare questo valore di p, si osservi che l' equazione (2) del n. precedente dà

$$r(r+t)^2=put=pt\sqrt{r^2-t^2}\,,$$

la quale liberata dal radicale diviene

$$r^2(r+t)^4=p^2t^2(r^2-t^2):$$

quest' equazione di quarto grado in t determina le ascisse de' punti comuni alla iperbola ed al cerchio, essa è divisibile per $t+r$, e con ciò dimostra che l' iperbola passa per A, e si riduce ad

$$r^2(r+t)^3=p^2t^2(r-t)\,\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

ovvero

$$(r^2+p^2)t^3+r(3r^2-p^2)t^2+3r^4t+r^5=o\ldots\ (1')$$

Essendo quest' equazione di grado dispari e coll' ultimo termine positivo ha necessariamente una radice reale e negativa e questa appartiene al punto m, le altre poi potranno essere reali o immaginarie, e le prime disuguali, o uguali: in questo caso che, come è chiaro, ha luogo quando l' iperbola tocca il cerchio, dovrà l'equazione (1'), per le note teorie riguardanti la ricerca delle radici uguali delle equazioni, avere una radice comune con l' equazione

$$3(r^2+p^2)t^2+2r(3r^2-p^2)t+3r^4=o\,,$$

e perciò eliminando t da queste due equazioni, si avrà un' equazione fra p ed r che ne darà il valore cercato di p. Questa eliminazione si esegue facilmente osservando che l' equazione precedente può porsi sotto la forma

$$p^2(2rt-3t^2)=3r^2(r+t)^2\,,$$

e moltiplicandola per la (1) si ottiene

$$(2r-3t)(r+t)=3t(r-t)$$

donde si ricava $t=\frac{1}{2}r$, il qual valore sostituito nella (1) dà $p=3\sqrt{3r^2}$, cioè triplo del lato del triangolo equilatero iscritto nel cerchio. Inoltre ponendo $t=\frac{1}{2}r$ ne' valori di BA, BD trovati nel n. precedente si vedrà che la prima è metà della seconda ed in conseguenza ne risulta che

Fra tutti i triangoli che si possono circoscrivere ad un cerchio il triangolo equilatero ha il minimo perimetro.

PROBLEMA XIII.

37. *Dato* (Fig. 15) *il cerchio* EMF , *la retta* AN , *ed in essa il punto* D , *trovare sul cerchio un punto* M *in modo che condotta la tangente* MN *sia il rettangolo di* MN *in* ND *uguale ad un dato quadrato.*

Si prendano per assi la perpendicolare, e la parallela condotta ad AN pel centro C, e si chiamino α, β ; t , u le coordinate dei punti D, ed M, r il raggio del cerchio, d il lato del dato quadrato : saranno

$$y^2+x^2=r^2\ ,\ uy+tx=r^2\ ,\ x=\alpha$$

le equazioni del cerchio, della tangente MN, e della AN: eliminando x dalle due ultime si avrà y = AN = $\frac{r^2-\alpha t}{u}$, onde ND = $\frac{r^2-\alpha t-\beta u}{u}$; ma dall'equazione della MN si rileva che la distanza di due punti determinati dalle ascisse x, x' è espressa da

$$(x'-x)\sqrt{1+\frac{t^2}{u^2}}=\frac{r(x'-x)}{u}\ ,$$

dunque essendo α, e t le ascisse de' due punti N ed M, sarà la MN = $\frac{r(\alpha-t)}{u}$, e quindi avremo l'equazione

$$r(\alpha-t)(r^2-\alpha t-\beta u)=d^2u^2\ ,$$

ovvero

$$r(\alpha-t)(r^2-\alpha t-\beta u)=d^2(r^2-t^2)\ldots\ldots\ (1)$$

la quale appartiene ad un' iperbola che ha per asintoti le rette date dalle equazioni

$$t=\alpha\ ,\ \ r^2-\alpha t-\beta u=\frac{d^2}{r}(t+\alpha).\ (*)$$

Per trovare un punto della curva si rifletta che ponendo $t=\pm r$ nell' equazione (1) si ottiene $r^2-\alpha t-\beta u=o$, onde presa CB = $\frac{r^2}{\text{CA}}$ e condotta la BS perpendicolare a CD saranno G , H due punti dell' iperbola ; ed essendone AO un asintoto , presa HS = GR , sarà S un punto dell' altro asintoto : quindi ricavandosi dalla sua equazione che l' angolo sotto il quale s' inclina all' asse delle ascisse ha per tangente trigonometrica $-\frac{\alpha+\frac{d^2}{r}}{\beta}$, presa CK $=\frac{d^2}{r}$, la SO perpendicolare a DK sarà l' altro asintoto.

Composizione del problema.

Condotte alla AN la perpendicolare CA e le parallele EG, FH, si prenda CB terza proporzionale dopo CA e CE ; e CK dopo CF e il lato del dato quadrato: indi tirata la BH perpendicolare a CD si porti la GR da H in S , e si abbassi sulla KD la perpendicolare SO. L' iperbola che passa pe' punti G, H ed ha per asintoti OR, OS incontra il cerchio ne' punti cercati.

38. Osservando che se vi è un punto M che risolve il problema ti-

(*) Ciò si ha immediatamente osservando che l'equazione (1) può porsi sotto la forma

$$r(\alpha-t)(r^2-\alpha t-\beta u)=d^2\Big(r^2-\alpha^2+(\alpha-t)(t+\alpha)\Big)$$

ovvero

$$r(\alpha-t)\Big(r^2-\alpha t-\beta u-\frac{d^2}{r}(t+\alpha)\Big)=d^2(r^2-\alpha^2).$$

rata l' altra tangente NM' vi è un altro punto M' che anche lo risolve; potrebbe credersi che essendovi una relazione fra le coordinate de' diversi punti cercati, possa abbassarsi il grado dell' equazione finale; ma bisogna riflettere che l' equazione (1) del n. precedente non determina tutti i punti che soddisfanno al problema, perchè la distanza che passa fra due punti essendo sempre affetta dal segno $\pm$ invece della (1) bisognava stabilire l'equazione

$$r(\alpha-t)(r^2-\alpha t-\beta u)=\pm d^2(r^2-t^2),$$

la quale esprime due iperbole che incontrano il cerchio in otto punti, e di queste due curve è chiaro che una passa pe' punti M, l'altra pe' punti M', onde non è necessario descrivere tutte e due le iperbole, e con la costruzione data si risolve completamente il problema. (*)

(*) Per poco di esercizio che si abbia nelle considerazioni algebriche, e che siasi convinto che risolvendo un problema per mezzo dell' algebra si hanno tutte le soluzioni che può avere, non si avrà alcun dubbio ad ammettere che delle due iperbole una determina i punti M, l' altra i punti M'. Difatti se una stessa iperbola passasse per alcuni de' punti M, e per qualche punto M' allora come abbiamo fatto notare più sopra si dovrebbe abbassare il grado del problema lo che non è confermato dall' equazione (1) combinata con l'altra $u^2+t^2=r^2$: nè potrebbero le due iperbole passare per punti differenti e non già dipendenti come i punti M, M' perchè altrimenti agli otto punti M, M' corrisponderebbero otto punti N, e potendosi da questi condurre sempre due tangenti al cerchio vi sarebbero sedici punti sul cerchio che risolverebbero il problema mentre l' equazioni ne danno otto, e ciò sarebbe contrario alla generalità dell' algebra. Del resto volendo dimostrare ciò che abbiamo assunto senza ricorrere ad alcun principio cerchiamo, essendo t, u le coordinate del punto M, quali sono le coordinate del punto M': a tale oggetto si rifletta che la congiungente i punti M, M' è normale alla retta che và dal punto C al punto N, e perciò essendo α, $\frac{r^2-\alpha t}{u}$ le coordinate del punto N, avrà per equazione

$$y-u=-\frac{\alpha u}{r^2-\alpha t}\left(x-t\right),$$

39. Se nell' equazione (1, 37) poniamo $\frac{r^2-\alpha t-\beta u}{u}=x$, avremo

$$\frac{r(\alpha-t)}{u}x=d^2,$$

ovvero

$$y=-\frac{\alpha u}{r^2-\alpha t}\left(x-\frac{r^2}{\alpha}\right);$$

quindi eliminando y da questa equazione e dalla altra

$$y^2+x^2=r^2$$

che appartiene al cerchio avremo l' equazione

$$\frac{\alpha^2u^2}{(r^2-\alpha t)^2}\left(x-\frac{r^2}{\alpha}\right)^2+x^2=r^2,$$

e i valori di x saranno le ascisse de' punti M, M'. Ciò posto ordinando questa equazione il coefficiente del secondo termine col segno cambiato sarà

$$\frac{2r^2\alpha u^2}{(r^2-\alpha t)^2+\alpha^2u^2}=\frac{2\alpha u^2}{r^2+\alpha^2-2\alpha t},$$

dunque poichè t è l' ascissa del punto M, quella del punto M' verrà espressa da

$$\frac{2\alpha u^2}{r^2+\alpha^2-2\alpha t}-t=\frac{2\alpha r^2-(r^2+\alpha^2)t}{r^2+\alpha^2-2\alpha t},$$

e quindi l' ordinata, come dall' equazione della MM' si rileva, sarà $\frac{(r^2-\alpha^2)u}{r^2+\alpha^2-2\alpha t}$.
Or per provare che se l' iperbola dell' equazione (1, 37) passa pe' punti M, l' altra passa pe' punti M', bisogna far vedere che t, u essendo le coordinate del punto M, il punto che ha per coordinate

$$\frac{2\alpha r^2-(r^2+\alpha^2)t}{r^2+\alpha^2-2\alpha t},\quad \frac{(r^2-\alpha^2)u}{r^2+\alpha^2-2\alpha t},$$

appartiene all' iperbola dell' equazione

$$r(\alpha-t)(r^2-\alpha t-\beta u)=-d^2(r^2-t^2);$$

ed essendo

$$\frac{r(\alpha-t)}{u}=\sqrt{\left(\frac{r^2-\alpha t}{u}\right)^2+\alpha^2-r^2}=\sqrt{(x+\beta)^2+\alpha^2-r^2},$$

otterremo l' equazione

$$x^2\left((x+\beta)^2+\alpha^2-r^2\right)=d^4 \ldots\ldots (1).$$

In quest' equazione essendo $x=\frac{r^2-\alpha t-\beta u}{u}=\frac{r^2-\alpha t}{u}-\beta$; ed $\frac{r^2-\alpha t}{u}$ l'ordinata del punto N è chiaro che la x dinota la DN : per costruirla si ponga

$$x(x+\beta)=py$$

e si avrà

$$p^2y^2+(\alpha^2-r^2)x^2=d^4,$$

ed essendo p arbitraria se $\alpha > r$ facendo $p=\sqrt{\alpha^2-r^2}$, quest' equazione dinoterà un cerchio, e quindi possiamo avere la seguente

Composizione del problema.

Condotta CA perpendicolare ad AN ed AL tangente al cerchio, si trovi dopo AL e il lato del dato quadrato la terza proporzionale e sia DQ. Le parallele a CA pe' punti ove il cerchio descritto col centro D ed intervallo DQ incontra la parabola che passando per

---

lo che ha luogo, poichè in questa equazione sostituendo invece di t, u le suddetti espressioni, osservando che $t^2+u^2=r^2$, si ottiene

$$r(\alpha-t)(r^2-\alpha t-\beta u)=d^2(r^2-t^2),$$

la quale equazione è verificata essendo il punto t, u un punto dell' iperbola data dall' equazione (1, 37). Combinando insieme le equazioni delle due iperbole e del cerchio si poteva ciò dimostrare più brevemente ; ma l' andamento che abbiamo tenuto è quello che si presenta più naturalmente.

A e D ha per parametro AL e l' asse parallelo ad AC determinano sulla AD i punti N.

Se poi $\alpha < r$, potremo supporre $p=\sqrt{r^2-\alpha^2}$, e sommando la prima delle equazioni ottenute moltiplicata per 2 con la seconda, avremo

$$y^2+x^2+2\beta x-2py=\frac{d^4}{r^2-\alpha^2}$$

equazione spettante ad un cerchio che si costruisce anche facilmente osservando che nel caso che si considera la AN intersecando il cerchio la distanza che il punto d' incontro serba dal punto A è uguale a $p=\sqrt{r^2-\alpha^2}$.

40. Se $\beta=o$ l' equazione (1) del n. precedente diviene

$$x^2(x^2+\alpha^2-r^2)=d^4$$

la quale ponendo $x^2=dy$, si riduce ad

$$y\left(y+\frac{\alpha^2-r^2}{d}\right)=d^2,$$

e prolungando la retta uguale ad $\frac{\alpha^2-r^2}{d}$ in modo che il rettangolo della tutta nella parte prolungata uguagli il dato quadrato si hanno i valori di y; indi una media proporzionale tra il lato del dato quadrato ed y ci darà $x=$ DN che si porterà (poichè nel caso che si considera il punto D cade in A) da A verso N e da A verso O. L' equazione in y avendo sempre una radice positiva e l' altra negativa si dovrà trovare una sola media proporzionale, e giova osservare che se $\alpha > r$ la radice più piccola è la positiva, se $\alpha < r$ è la più grande. In questa stessa ipotesi l' equazione (1, 37) diviene

$$\left(\alpha+\frac{d^2}{r}\right)t^2-(\alpha^2+r^2)t=r^2\left(\frac{d^2}{r}-\alpha\right),$$

e c' indica che l' iperbola si cambia in due rette parallele all' asse delle y le quali si potrebbero facilmente costruire. Di queste rette una soltanto incontra il cerchio, essendo uno de' valori di t maggiore di r come è facile assicurarsi risolvendo l' equazione precedente, o anche più semplicemente ponendo $t=z+r$ ed osservando che l' equazione in z che ne risulta ordinandola ha l' ultimo termine negativo e quindi una radice positiva che corrisponde al valore di $t>r$; ciò si accorda bene con l' osservazione fatta più sopra riguardo al numero de' valori reali della x.

41. L' andamento tenuto nel n. 39 per costruire l' equazione di quarto grado che abbiamo ritrovata può applicarsi in generale per qualunque equazione del quarto grado e non si ha quindi bisogno di liberarla dal secondo termine. Sia data l' equazione

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=o \;\ldots\ldots\ldots\; \text{(I)},$$

si ponga

$$x^2+\frac{1}{2}\,ax=py\ldots\ldots\ldots\text{(II)},$$

ed elevando a quadrato questa equazione e sottraendola in seguito dalla proposta, si avrà

$$p^2y^2+\left(b-\frac{1}{4}a^2\right)x^2+cx+d=o.$$

Ciò posto se $b>\frac{1}{4}a^2$, possiamo supporre $p=\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}$, e questa equazione apparterrà ad un cerchio, in altro caso si moltiplichi l'equazione (II) per $p^2+\frac{1}{4}a^2-b$, e sommandola con la precedente, si otterrà

$$p^2(y^2+x^2)+\left(\frac{1}{2}a(p^2+\frac{1}{4}a^2-b)+c\right)x-p(p^2+\frac{1}{4}a^2-b)y+d=o.\text{(III)},$$

equazione spettante ad un cerchio, ed essendo in essa p arbitraria ne' casi particolari si determinerà in modo che si semplicizzi per quanto è possibile quest' equazione; ovvero nel caso che si voglia fare uso di una data parabola, si porrà uguale al parametro di questa parabola corrispondente all' asse. Se invece di stabilire l' equazione (II), facciamo

$$x^2+\frac{1}{2}\,ax+\frac{1}{2}\,b=py\;\ldots\ldots\;\text{(II}'\text{)},$$

ne risulta

$$p^2y^2-\frac{1}{4}\,a^2x^2-\frac{1}{2}\,abx+cx+d-\frac{1}{4}\,b^2=o$$

che sommata con la (II′) moltiplicata per $p^2+\frac{1}{4}\,a^2$, dà

$$\left.\begin{aligned}&p^2(y^2+x^2)+\left(\frac{1}{2}a(p^2+\frac{1}{4}a^2)+c-\frac{1}{2}\,ab\right)x\\&\qquad-p(p^2+\frac{1}{4}a^2)y+\frac{1}{2}\,b(p^2+\frac{1}{4}\,a^2)+d-\frac{1}{4}\,b^2\end{aligned}\right\}=o\ldots\text{(III}'\text{)},$$

e questa equazione anche appartiene ad un cerchio.

Se le curve invece di costruirle rispetto ad assi rettangolari si riferiscono ad assi obbliqui inclinati sotto un angolo che abbia per coseno c', e che può essere determinato ad arbitrio, si possono fare altre ipotesi: così facendo

$$x^2=\frac{a}{2c'}\,y\ldots\ldots\;\text{(II}''\text{)},$$

avremo

$$y^2+2c'xy+\frac{2bc'}{a}y+\frac{4cc'^2}{a^2}x+\frac{4dc'^2}{a^2}=o,$$

e sommando queste equazioni si otterrà

$$y^2+x^2+2c'xy+\left(\frac{2bc'}{a}-\frac{a}{2c'}\right)y+\frac{4cc'^2}{a^2}x+\frac{4dc'^2}{a^2}=o\ldots\text{(III}''\text{)},$$

equazione di un cerchio.

Ne' casi particolari adunque dovendo costruire un' equazione di quarto grado si potranno adoprare le equazioni (II), (III); le (II′), (III′); o le (II″), (III″), e si sceglieranno quelle che danno la soluzione più semplice.

*

42. Per dare un' applicazione delle formole precedenti supponiamo che (Fig. 16) date le tre rette AB , m , n , si voglia prolungare la AB in M , in modo che il rettangolo di AM in MB sia al quadrato di m come il quadrato di n sta a quello di MB. Poniamo $AB = 2a$, $BM = x$, avremo

$$(2a+x)x : m^2 :: n^2 : x^2,$$

donde

$$x^4 + 2ax^3 = m^2n^2 :$$

per costruire questa equazione , facciamo

$$x^2 + ax = ay ,$$

ed otterremo successivamente

$$y^2 - x^2 = \frac{m^2n^2}{a^2} , \dots (1),$$

$$y^2 + x^2 + 2ax - 2ay = \frac{m^2n^2}{a^2}.$$

Quindi condotta pel punto di mezzo O della AB la OC perpendicolare ed uguale ad OB , e BD perpendicolare a CB ed uguale alla quarta proporzionale dopo OB , m , n ; le parallele a CO pe' punti ove il cerchio descritto col centro C intervallo CD incontra la parabola che passa per O e B , ed ha OB per parametro e l' asse parallelo ad OC , determinano sulla AB i punti cercati. (*)

Invece di descrivere la parabola è chiaro che si potrebbe anche fare uso dell' iperbola equilatera data dall' equazione (1) la quale

(*) Ponendo l' equazione della parabola sotto la forma

$$\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 = a\left(y + \frac{1}{4}a\right)$$

si vede che condotta FG' perpendicolare ad OB pel suo punto di mezzo , e presa FI metà di FB , I è il vertice della parabola ed FG' l' asse ; onde F ne è il fuoco, e la parabola è toccata in B dalla BD.

ha B per centro e BE = BD per semi-asse trasverso , ovvero che ha per asintoti BD , BC e passa per E.

Il presente problema è stato creduto difficile a risolversi con l' analisi geometrica mediante l' intersezione di una parabola ed un cerchio ; onde, per evitare una costruzione troppo lunga , è stato sciolto descrivendo due iperbole : si vede intanto che la soluzione somministrataci dall' algebra è semplicissima , e che il problema si mette così facilmente in equazione, e questa si costruisce con tale semplicità , che la proposta quistione può dirsi piuttosto un' applicazione de' metodi generali che un problema.

E qui si rifletta che non intendiamo già asserire che forse con l' analisi geometrica non possa ottenersi la medesima soluzione da noi ritrovata, poichè chi dicesse che una costruzione ottenuta con l' analisi algebrica non possa aversi dall'analisi geometrica o viceversa, direbbe una mera sciocchezza , e mostrerebbe di non aver compreso il nesso scambievole de' due metodi , essendo oramai notissimo che ogni relazione e costruzione geometrica possa esprimersi in linguaggio algebrico ; ed al contrario che ogni espressione ed operazione algebrica corrisponda ad un teorema geometrico , o ad un' operazione grafica. Ma non per questo non dobbiamo riconoscere la superiorità della moderna analisi su quella degli antichi , anche in fatto di pura geometria , nel che intendiamo propriamente istituire il paragone ; giacchè, pei grandissimi e rapidissimi progressi fatti , la di lei mercè, dalla geometria sublime , e dalle scienze fisico - matematiche, che sono le vere scienze di utilità pratica , detta superiorità fa di sè indubitata e luminosa mostra. Ed in vero l' algebra , imposto il nome alle grandezze note ed alle incognite , traducendo nel suo linguaggio l' enunciato del problema, perviene subito e sicuramente ad un' equazione , che è il *verum concessum* generale dell'analisi algebrica, sì perchè le equazioni si sanno risolvere , sì perchè i metodi generali della geometria analitica conducono sempre a costruzioni tanto semplici , di quanto il problema n' è suscettibile. Questo è l'andamento generale, sicuro ed uniforme dell'analisi moderna nella risoluzione de' problemi. L' analisi geometrica all' opposto, oltre di non avere un principio fisso da cui prender le prime mosse, ha bisogno, con ragionamenti sempre diversi, di ridurre la quistione proposta, ove le riesca, ora ad un problema, ora ad un altro del *luogo risoluto* senza mezzi certi e guida sicura; oltre di che si è obbligato alle volte di premettere lemmi, o intralciate serie di proposizioni, della qual cosa si ha un esempio evidente ne' libri degli antichi geometri, i quali non avendo posto mente alla corrispondenza reciproca delle operazioni geometriche ed aritmetiche, non seppero pervenire giammai a metodi generali; e solo raccolsero quelle proposizioni nelle quali per sorte, guidati dalla loro analisi, s'imbattetero. Era riserbato al genio immortale di Cartesio di stabilire metodi generali in geometria. Del resto le soluzioni algebriche de' problemi geometrici sono preferibili anche in questo, che oltre alle costruzioni geometriche, esibiscono ancora i valori numerici delle incognite, de' quali si fà esclusivamente uso nelle applicazioni, per la ragione che l' esattezza delle operazioni grafiche è limitata dall'imperfezione degl' istrumenti, laddove il calcolo nelle approssimazioni non riconosce limiti.

43. Abbiamo veduto nel n. 41 come si possa costruire in diversi modi un' equazione di quarto grado ad un' ignota con una data parabola ed un cerchio, onde completare la costruzione geometrica dell' equazioni di quarto grado passiamo ora ad accennare come debba procedersi quando si vuole far uso di una data curva del secondo grado e di un cerchio. Sia

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = o \;\ldots\ldots\; \text{(I)}$$

l' equazione proposta, ed

$$y^2 = mx + nx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

quella della data linea del secondo ordine. Primieramente è da osservarsi che l'equazione (I) non sempre può supporsi derivata dall' eliminazione

di y tra l' equazione (II) e quella di un cerchio: difatti qualunque sia l' equazione del cerchio sottraendone la (II) si otterrà un' equazione della forma

$$x^2 + px + q = ry,$$

la quale, combinandola in seguito con la (II) medesima, dà

$$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q - r^2n)x^2 + (2pq - r^2m)x + q^2 = o \;\ldots\ldots (1)$$

ed affinchè questa equazione sia identica alla (I) dovrà essere

$$2p = a,\; p^2 + 2q - r^2n = b,\; 2pq - r^2m = c,\; q^2 = d,$$

onde avendosi più equazioni che ignote non sempre potranno determinarsi le p, q, r in modo che sieno avverate. Si potrebbe però osservare che trattandosi di trovare i valori di x riguardati come radici di una determinata equazione, possiamo mutare l' origine degli assi a' quali è riferita l' equazione (II) cambiando x in $x + \alpha$, onde essa diverrà

$$y^2 = (m + 2n\alpha)x + nx^2 + m\alpha + n\alpha^2,$$

senza che varî l' equazione (I) perchè verremmo in tal guisa a supporre che i valori di x sieno dalla nuova origine computati. È chiaro in questo caso che invece dell' equazione (1) si avrà

$$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q - r^2n)x^2 + [2pq - r^2(m + 2n\alpha)]x + q^2 - r^2(m\alpha + n\alpha^2) = o,$$

e quindi, perchè questa sia identica alla proposta, dovrà essere

$$2p = a,\; p^2 + 2q - r^2n = b$$

$$2pq - r^2(m + 2n\alpha) = c,\; q^2 - r^2(m\alpha + n\alpha^2) = d.$$

Ma quantunque si abbiano ora quattro equazioni fra le quattro indeterminate p, q, r, α, e la prima dà $p = \frac{1}{2}a$, pure non possiamo determinare per mezzo delle altre tre le quantità q, r, α, poichè trattando queste equazioni si eleva il grado dell' equazione finale.

Non potendo dunque nel caso che è data una curva qualunque di secondo grado seguire un andamento simile a quello tenuto dagli scrittori di geometria analitica pel caso della parabola, cerchiamo di procedere in un modo analogo a quello che abbiamo esposto nel n. 26. Poniamo perciò nell' equazione (I) $x = \beta z$, β essendo una quantità da determinarsi in seguito e z una nuova ignota, ed ordinando rispetto a z otterremo

$$z^4 + \frac{a}{\beta} z^3 + \frac{b}{\beta^2} z^2 + \frac{c}{\beta^3} z + \frac{d}{\beta^4} = o:$$

or essendo z un rapporto, facciamo

$$z = \frac{u}{t},$$

ed avremo

$$\frac{u^4}{t^4} + \frac{a}{\beta}\frac{u^3}{t^3} + \frac{b}{\beta^2}\frac{u^2}{t^2} + \frac{c}{\beta^3}\frac{u}{t} + \frac{d}{\beta^4} = o.$$

Ciò posto considerando t, u come le coordinate di un punto della curva data, si ha

$$\frac{u^2}{t^2} = \frac{m}{t} + n,$$

e quindi l' equazione precedente si riduce ad

$$\frac{m^2}{t^2} + \frac{2mn}{t} + n^2 + \frac{a}{\beta}\left(\frac{m}{t} + n\right)\frac{u}{t} + \frac{b}{\beta^2}\left(\frac{m}{t} + n\right) + \frac{c}{\beta^3}\frac{u}{t} + \frac{d}{\beta^4} = o,$$

nella quale essendo $\frac{na}{\beta} + \frac{c}{\beta^3}$ il coefficiente di $\frac{u}{t}$, si vede che se faremo

$$na\beta^2 + c = o \ldots\ldots \quad (2),$$

questo termine sparisce, e l' equazione liberata da rotti non contiene in conseguenza il termine in ut, e diviene

$$m^2 + m\left(2n + \frac{b}{\beta^2}\right)t + \frac{am}{\beta}u + \left(n^2 + \frac{bn}{\beta^2} + \frac{d}{\beta^4}\right)t^2 = o,$$

e combinandola con l' equazione

$$u^2 = mt + nt^2,$$

è facile il ricavarne un' equazione appartenente ad un cerchio. Difatti se si moltiplica prima quest' ultima per $\frac{1}{n+1}\left(n^2 + \frac{bn}{\beta^2} + \frac{d}{\beta^4}\right)$, e poi si somma con la prima, ne risulta

$$\frac{1}{n+1}\left(n^2 + \frac{bn}{\beta^2} + \frac{d}{\beta^4}\right)(u^2 + t^2) + \frac{m}{n+1}\left(n^2 + 2n + \frac{b\beta^2 - d}{\beta^4}\right)t + \frac{am}{\beta}u + m^2 = o. \text{(III)}$$

che esprime un cerchio. (*)

Essendo $z = \frac{u}{t}$, ed $x = \beta z$, è chiaro che presa sull' asse delle y una parte uguale a β le perpendicolari condotte pel suo estremo sulle rette che uniscono l' origine co' punti ove il cerchio dell' equazione (III) incontra la data curva, determinano sull' asse delle x que' punti che hanno per ascissa i valori di x dati dall' equazione (I). È però da avvertirsi che essendo l' equazione (2) di secondo grado rispetto a β potrebbe dare per β valori immaginarî, e quindi sembra che non sia più applicabile quanto precede. Ma convien riflettere che dipendendo ciò unicamente da' segni di a e c, quando quello di n è dato, noi possiamo cambiando nell' equazione (I) x in $x + \alpha$ disporre di α in modo che i coefficienti del secondo, e del quarto termine dell' equazione che ne risulta sieno o nò dello stesso segno secondo che n è negativa o positiva. Difatti eseguita l' indicata sostituzione quelli coefficienti saranno rispettivamente

$$a + 4\alpha, \quad c + 2b\alpha + 3a\alpha^2 + 4\alpha^3:$$

(*) Se $n = -1$, questa equazione si riduce ad $u^2 + t^2 = mt$, che esprime la stessa curva data; e difatti sarebbe impossibile allorchè è dato un cerchio costruire un' equazione di quarto grado col cerchio dato ed un altro cerchio.

or supponendo in primo luogo che i coefficienti a e c sieno ambedue positivi nell' equazione (I) quando n è positiva, uguagliando a zero le quantità trovate qui sopra avremo

$$a + 4\alpha = o \ldots (3), \quad c + 2b\alpha + 3a\alpha^2 + 4\alpha^3 = o \ldots (4)$$

e quest' ultima dovrà necessariamente avere una radice, reale e negativa; sia α' il valore assoluto di questa radice, tre casi possono darsi o α' è maggiore di $\frac{a}{4}$, che è il valore di α dedotto dalla prima equazione prescindendo dal segno, o uguale, o minore. Nel primo caso ponendo $-\frac{a}{4}$ invece di α nell' equazione (4) il primo membro resterà positivo, e vi sarà un' altro di $\alpha > \frac{a}{4}$ in valore assoluto che anche lo renderà positivo, mentre riduce il primo membro dell' equazione (3) ad una quantità negativa.

Nel secondo caso ponendo $\alpha = -\frac{a}{4}$, poichè le due equazioni (3), (4) sono avverate, la proposta si riduce ad un' equazione derivativa dal secondo grado ed allora si costruirà con la retta e il cerchio. Nel terzo caso finalmente sostituendo $-\frac{a}{4}$ in luogo di α nell' equazione (4) si avrà un risultamento negativo, onde vi sarà un'altro valore di $\alpha < \frac{a}{4}$ che anche rende il primo membro dell' equazione (4) negativo; mentre resta positiva per questo valore la quantità $a + 4\alpha$. Quindi si vede che esistono sempre de' valori di α, anzi ne è indeterminato il numero, che rendono di segno contrario le quantità

$$a + 4\alpha, \quad c + 2b\alpha + 3a\alpha^2 + 4\alpha^3,$$

e riepilogando quanto abbiam detto si vede che per trovarli bisogna sostituire nella seconda $-\frac{a}{4}$ invece di α, e se si ha un risultamento

positivo, si può dare ad α un valore qualunque maggiore di $\frac{a}{4}$ in valore assoluto e che renda pure positiva quella quantità: che se fatta la sostituzione si avesse una quantità negativa, converrebbe adottare per α un valore minore di $\frac{a}{4}$, fatta sempre astrazione dal segno, che somministri pure un risultamento negativo.

Supponiamo in secondo luogo che n essendo negativa a e c abbiano segni diversi e sia a positiva e c negativa: l' equazione (4) avrà sempre una radice reale positiva e vi sarà un valore di α che ne rende positivo il primo membro, e questo valore che può essere come è noto una quantità qualunque maggiore del limite delle radici positive sarà il valore da darsi ad α.

Nel caso di n positiva abbiamo supposto che a e c sieno quantità positive, e che quando n è negativa sia a positiva, e c negativa; è chiaro che se fossero nel primo caso a e c negative, e nel secondo a negativa e c positiva, pure avrebbe luogo quanto abbiam detto. Finalmente non sarà inutile di avvertire che l'equazione che si ottiene dopo fatta la sostituzione essendo costruita rispetto agli stessi assi a' quali è riferita l' equazione (II) i valori che si ottengono per x devono essere aumentati di α; ma questa seconda operazione si può evitare, poichè riflettendo che in questo caso si viene a supporre $x - \alpha = \beta z$, ne siegue che le perpendicolari condotte pel punto α, β alle rette che uniscono l' origine co' punti comuni alla curva data e al cerchio che si ritrova fissano sull' asse delle ascisse i valori di x.

---

*

PROBLEMA XIV.

44. *Condurre per un dato punto* D (Fig. 17) *una normale* DM *ad una data linea del secondo ordine.*

Si prendano per assi coordinati l'asse Ix della curva data e la tangente applicata in I, e si chiamino α, β; t, u le coordinate de' punti D ed M: supponendo che

$$y^2 = 2\,mx + nx^2$$

sia l'equazione della curva data, l'equazione della normale che passa pel punto t, u sarà

$$y - u = -\frac{u}{m+nt}\left(x-t\right),$$

e dovendo passare pel punto α, β avremo

$$\beta - u = -\frac{u}{m+nt}\left(\alpha-t\right),$$

ovvero

$$u\left((n+1)t+m-\alpha\right) = \beta(m+nt)\ldots.(1),$$

equazione appartenente ad un' iperbola che incontrando la curva data determina il punto M. Essa si costruisce facilmente poichè è chiaro che ha per asintoti le rette appartenenti alle equazioni

$$u = \frac{\beta n}{n+1},\quad t = \frac{\alpha-m}{n+1}$$

e passa pel punto che ha per coordinate α, β cioè pel punto D; e poichè da' valori precedenti di t, u si rileva che $\beta - u = \frac{\beta}{n+1}$, ed $\alpha - m - t = \frac{n(\alpha-m)}{n+1}$, ne siegue che presa AC$=m$ e divise le CI, AD ne' punti E ed R nella ragione di $n:1$ le ES, RO sono gli asintoti. Or indicando con $2a$ e $2b$ gli assi della curva è noto che $m = \frac{b^2}{a}$, ed $n = \mp\frac{b^2}{a^2}$ secondochè è ellisse o iperbola, essendo poi $n = o$ nel caso della parabola; quindi n esprime la tangente trigonometrica dell' angolo che la retta condotta dal punto I ad un punto avente per ordinata $-\frac{b^2}{a}$, e situato sull' asse coniugato ad Ix comprende con Ix; e perciò se IB rappresenta questa retta sarà BA : AI :: n : 1. È noto poi che la IB chiamasi *regolatrice*, e la quantità $2m = \frac{2b^2}{a}$ *parametro* della data curva.

Composizione del problema.

Condotta dal punto D la DA perpendicolare all' asse Ix e pel punto I la regolatrice IB, si prenda AC uguale al semiparametro, si dividano le CI, AD nella ragione di BA: AI, e si tirino pe' punti di divisione alle AD, Ix le parallele ES, RO. L' iperbola che passa per D ed ha per asintoti le rette OR, OS incontra la curva data ne' punti M.

È da osservarsi che se la curva data è iperbola le CI, AD devono dividersi nell' indicata ragione, se è ellisse essendo n negativa devono prendersi i punti E ed R sul prolungamento delle IC, DA sempre però in modo che le distanze che serbano da C, I; ed A, D rispettivamente, sieno fra loro come BA : AI. Nel caso poi della parabola essendo $n = o$ cioè confondendosi la IB con l' asse Ix, la stessa costruzione data ci dimostra che gli asintoti sono l' asse Ix e la parallela per C alla DA. Pertanto in quest' ultimo caso riducendosi l'equazioni (1) ad

$$u\,(\,t + m - \alpha\,) = m\,\beta\ \ldots.\ (2),$$

ed essendo

$$u^2 = 2mt\ \ldots.\ (3),$$

si ricava da queste equazioni

$$t\,(t+m-\alpha)=\tfrac{1}{2}\beta u\ldots(4),$$

la quale sommata con la precedente dà

$$u^2+t^2-(\alpha+m)t-\tfrac{1}{2}\beta u=o,$$

equazione spettante ad un cerchio che incontra l'asse delle x nel punto che ha per ascissa $\alpha+m$, e l'asse delle y nel punto determinato dall'ordinata $\frac{1}{2}\beta$. Quindi in questo caso si ha la seguente

Composizione del problema.

Condotta pel punto D la DA perpendicolare all' asse Ix, si prenda AC' uguale al semiparametro ed IF uguale alla metà di AD. Il cerchio che ha per diametro C'F incontrando la parabola determina il punto M.

È da osservarsi che questo cerchio passa pel punto I il quale non soddisfà al problema e difatti esso non è un punto comune alle curve espresse per l'equazioni (2), (3): questo punto estraneo alla quistione si è ottenuto perchè l'equazione (2) si è moltiplicata tutta per u onde ricavarne, combinandola con la (3), l'equazione (4); e quindi l'equazione che si otterrebbe eliminando t dall'equazioni (3) e (4) ovvero da quella del cerchio e dalla (3) dovrebbe avere per radice $u=o$, la quale indica il punto I. Pertanto potendo il cerchio incontrare la parabola in tre altri punti, o in un sol punto, ne siegue che da un punto si possono condurre o tre normali o una normale ad una data parabola, lo che è pure dimostrato dall'equazioni (2), (3) dalle quali eliminando t si ottiene un'equazione di terzo grado in u che potrà quindi avere o tutte e tre le radici reali, o una reale e due immaginarie.

45. Nel caso della parabola abbiam veduto come possa il pro-

blema risolversi coll'intersezione della data parabola e di un cerchio: avendo nel n.° 43 esposto il metodo come costruire una qualunque equazione di quarto grado facendo uso di una data curva del secondo grado e di un cerchio, cerchiamo di eliminare una delle coordinate t, u dall' equazione (1) del n.° precedente e dall' equazione della curva data, e costruire poi l' equazione che ne risulta. Per eseguire quest' eliminazione prendiamo dall' equazione (1) il valore di u e sostituendolo nell' equazione

$$u^2=2mt+nt^2\ldots(1),$$

che appartiene alla curva data, otterremo

$$\beta^2(m+nt)^2=(2mt+nt^2)\Big((n+1)t+m-\alpha\Big)^2:$$

poniamo per brevità

$$(n+1)t+m-\alpha=x$$

ed osservando che $2mt+nt^2=\frac{1}{n}\Big((m+nt)^2-m^2\Big)$, si avrà

$$(x^2-n\beta^2)(nx+m+n\alpha)^2=m^2(n+1)^2x^2$$

ovvero

$$\left.\begin{array}{r} n^2x^4+2n(m+n\alpha)x^3+\Big((m+n\alpha)^2-m^2(n+1)^2-n^3\beta^2\Big)x^2 \\ -2n^2\beta^2(m+n\alpha)x \end{array}\right\}=n\beta^2(m+n\alpha)^2.$$

Paragonando questa equazione con la (I, 43) si vede che bisogna supporre $x=\frac{\beta u'}{t'}$, difatti sostituendo questo valore di x nell' equazione precedente risulta

$$\left.\begin{array}{r} n^2\beta^2\frac{u'^4}{t'^4}+2\beta n(m+n\alpha)\frac{u'^3}{t'^3}+\Big((m+n\alpha)^2-m^2(n+1)^2-n^3\beta^2\Big)\frac{u'^2}{t'^2} \\ -2n^2\beta(m+n\alpha)\frac{u'}{t'} \end{array}\right\}=n(m+n\alpha)^2,$$

ed essendo in virtù dell' equazione (1)

$$\frac{u'^2}{t'^2}=\frac{2m}{t'}+n,$$

sostituendo questo valore, come si è praticato pure nel n. 43, ed ordinando l' equazione che ne risulta si ottiene

$$(n+1)t'^2-\frac{2[(m+n\alpha)^2-m^2(n+1)^2+n^3\beta^2]}{mn(n+1)}t'-\frac{4\beta(m+n\alpha)}{m(n+1)}u'-\frac{4n\beta^2}{n+1}=o,$$

che sommata con la (1) dà

$$u'^2+t'^2-\frac{2(2m\alpha+n\alpha^2-m^2+n^2\beta^2)}{m(n+1)}t'-\frac{4\beta(m+n\alpha)}{m(n+1)}u'-\frac{4n\beta^2}{n+1}=o\ \ldots\ (2)$$

equazione appartenente ad un cerchio: e poichè quì abbiamo $x=\frac{\beta u'}{t'}$, ne siegue che le perpendicolari alle rette che uniscono l' origine co' punti ove il cerchio incontra la curva data, condotte pel punto dell' asse delle y che ha per ordinata β, determinano sull' asse delle ascisse i valori di x. Determinati i valori di x si dovrebbero trovare quelli di t e quindi poi passare ad assegnare il punto M; ma si eviterà quest' operazione osservando che essendo $x=(n+1)t+m-\alpha$, si ha dall' equazione (1) del n. precedente

$$\frac{x}{\beta}=\frac{u'}{t'}=\frac{m+nt}{u},$$

e quindi essendo, come abbiamo trovato nel n. precedente,

$$y-u=-\frac{u}{m+nt}(x-t)$$

l' equazione della normale alla curva condotta pel punto dato, ne siegue che le normali cercate sono le perpendicolari condotte pel punto dato alle rette che congiungono l' origine co' punti comuni alla curva data ed al cerchio dell' equazione (2).

46. Passiamo ora ad assegnare i determinanti di questo cerchio e primieramente si osservi che l' ordinata del centro essendo espressa dalla formola

$$\frac{2\beta(m+n\alpha)}{m(n+1)}=2\beta+\frac{2\beta n(\alpha-m)}{m(n+1)},$$

se prendiamo DD′ = DA e il punto L in modo che si abbia AL : LD′ : : $m+n\alpha : n(\alpha-m)$ sarà AL uguale alla detta ordinata; e quindi sulla LO′ dovrà trovarsi il centro del cerchio indicato dall' equazione (2): è chiaro poi che presa IG $=m$ e condotta la GH parallela alla regolatrice IB sarà AH $=n(\alpha-m)$, e quindi la ragione di $m+n\alpha : n(\alpha-m)$ è espressa da quella di IG + BA : AH. Inoltre l' ascissa del centro, come dall' equazione (2) rilevasi è espressa da

$$\frac{2m\alpha+n\alpha^2-m^2+n^2\beta^2}{m(n+1)}=2\alpha-m+\frac{n(\alpha-m)^2+n^2\beta^2}{m(n+1)}:$$

quindi essendosi già costruita l' espressione $\frac{2\beta n(\alpha-m)}{m(n+1)}$ che è la LD′, ci riuscirà facile a costruire la formola $\frac{n(\alpha-m)^2+n^2\beta^2}{m(n+1)}$, osservando che il rapporto che serba ad essa la LD′ è indicato da $\dfrac{2\beta}{\alpha-m+\frac{n\beta^2}{\alpha-m}}$

e che perciò presa GP $=\frac{n\beta^2}{\alpha-m}$, e tirata la retta PD′Q ne risulta

LQ $=\frac{n(\alpha-m)^2+n^2\beta^2}{m(n+1)}$: e conseguentemente portando la GA da Q in O′ sarà O′ il centro del cerchio dato dall' equazione (2). Quanto al modo di determinare la GP si rifletterà che abbassata dal punto D la Db perpendicolare ad IB si ottiene Ab $=n\beta$, e quindi GP $=\frac{\text{A}b.\text{AD}}{\text{AG}}$. Finalmente determinato il centro del cerchio che dobbiamo costruire ne rimane soltanto ad assegnare il raggio, percui rammenteremo che in un' equazione ordinata appartenente ad un cerchio, il raggio è espresso dalla radice quadrata della quantità che si ottiene unendo il termine noto preso col segno cambiato a' quadrati delle metà de' coefficienti di x, y a primo grado, che indicano l' ascissa e l' ordinata del centro. Quindi essendo O' il centro del cerchio, il raggio sarà uguale a $\sqrt{\overline{IO'}^2 + \frac{4n\beta^2}{n+1}}$, e poichè $\frac{n}{n+1} = \frac{BA}{IA+BA}$ ne segue che condotta la IT perpendicolare ad IO' ed uguale alla retta il cui quadrato sta a quello della AD' come BA : BA + AI, sarà O'T il raggio summentovato.

Composizione del problema.

Condotta sull'asse Ix la perpendicolare DA si prenda DD' uguale a DA, IG uguale al semiparametro, e si guidino alla regolatrice IB la parallela GH e la perpendicolare Db; indi trovato il punto L in modo che sia AL : LD' : : IG + BA : AH, e GP quarta proporzionale dopo AG, Ab, AD si tiri la PD' che incontri in Q la LO' parallela ad Ix, si porti la GA da Q in O' e si tagli sulla perpendicolare ad IO' condotta per I la IT in modo che il quadrato di essa serbi al quadrato di AD' la ragione di BA : BA + AI.

Le perpendicolari condotte pel punto D alle rette che uniscono il punto I co' punti ove il cerchio descritto col centro O' e raggio O'T incontra la curva data saranno le normali cercate.

47. È da avvertirsi che la costruzione eseguita sulla figura, avendo supposta n positiva, si rapporta all'iperbola: nel caso dell' ellisse il punto L deve prendersi dalla parte D'A avvertendo però che le sue distanze da A e D' sieno nel rapporto di IG — BA : AH, la GP deve tagliarsi da G verso x e il quadrato del raggio è uguale alla differenza de' quadrati di IO' ed IT, prendendo però la IT in modo che il quadrato fatto su di essa sia a quello di AD' come AB: IA — AB. Ma se AB fosse maggiore di AI sarebbe pure il quadrato del raggio uguale alla somma de' quadrati di IO' ed IT, dunque poichè nell'ellisse quando si prende l'asse minore

ci dimostra che due delle normali che possono condursi pel punto A si confondono con l' asse Ix, e le altre due sono le Ae, Ae'.

48. Nel n. 44 abbiamo veduto che la curva la quale intersecando la parabola determinava il punto M era una iperbola, e poichè questa incontrava la parabola in tre punti abbiamo determinato il cerchio che passava per questi punti e l' abbiamo costruito invece di quell' iperbola. Potendo avvenire spesso che due curve di secondo grado s'incontrino in tre punti, o anche in quattro ma situati sulla periferia di un cerchio, non sarà inutile di ricercare quale è la condizione onde i punti comuni a due curve di secondo grado esistano sulla circonferenza di un cerchio, e di determinare questo cerchio in caso che una tal condizione si verifichi.

Sieno

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$
$$a'y^2 + b'xy + c'x^2 + d'y + e'x + f' = 0$$

le equazioni delle curve date ed

$$y^2 + x^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

l' equazione del cerchio che passa pe' punti comuni alle due curve. Si moltiplichi quest' equazione successivamente per a, a' e si sottragga dalle due date equazioni, avremo

$$bxy + (c-a)x^2 + (d+2qa)y + (e+2pa)x + f - a(p^2 + q^2 - r^2) = 0$$
$$b'xy + (c'-a')x^2 + (d'+2qa')y + (e'+2pa')x + f' - a'(p^2 + q^2 - r^2) = 0;$$

le quali apparterranno a due iperbole che anche passano pe' quattro punti suddetti: ma in queste equazioni non vi sono che quattro costanti dunque esse devono essere identiche e perciò si avrà

$$\frac{c-a}{b} = \frac{c'-a'}{b'}, \qquad \frac{d+2qa}{b} = \frac{d'+2qa'}{b'}$$
$$\frac{e+2pa}{b} = \frac{e'+2pa'}{b'}, \quad \frac{f-a(p^2+q^2-r^2)}{b} = \frac{f'-a'(p^2+q^2-r^2)}{b'}.$$

Di queste equazioni la prima esprime la condizione onde le curve date s' incontrino in punti esistenti sulla periferia di un cerchio, le altre tre poi assegnano rispettivamente le quantità q, p, r cioè l' ordinata, l' ascissa del centro, ed il raggio, ed è da notarsi che i valori di p, q si ricavano da equazioni di primo grado. L' accennata equazione di condizione se $b = o$ ci dà $b' = o$ (non volendo supporre $c = a$ cioè che una delle curve date sia un cerchio); onde ci dimostra che

Se due curve di secondo grado hanno gli assi paralleli s' incontrano in punti situati sulla periferia di un cerchio e viceversa.

È da avvertirsi che le due equazioni trovate più sopra appartenenti a due iperbole devono essere identiche quando le due curve date s' incontrano in quattro punti; perchè allora il cerchio ha di comune con le curve date soltanto questi stessi punti; e quindi quelle equazioni che le abbiamo dedotte combinando l' equazione del cerchio con ciascuna delle date equazioni appartenendo a due curve che passano ambedue per que' quattro punti, per le ragioni dianzi esposte non possono essere diverse. Ma quando le curve date s' incontrano in tre punti allora come un cerchio incontra una curva del secondo grado sempre in quattro punti, ne segue che il cerchio passa pe' tre punti comuni alle curve date, ma incontra poi ciascuna in un altro punto diverso, onde le precitate equazioni indicando due curve che hanno soltanto tre punti di comune non è necessario che sieno identiche. Quindi il caso in cui le due curve date s' intersecano in tre punti non può ricavarsi da quanto precede, e perciò passeremo ad occupparci di esso separatamente.

Esaminiamo in primo luogo quale è la condizione onde le curve date s' incontrino in tre punti; questa si ha immediatamente osservando che in questo caso eliminando y dalle loro equazioni deve ottenersi un' equazione di terzo grado in x, e perciò fatta l' eliminazione ed uguagliando a zero il coefficiente di x^4, si avrà l' equazione

$$a(a'c-ac')^2 - b(a'c-ac')(a'b-ab') + c(a'b-ab')^2 = o,$$

ovvero

$$(a'c-ac')^2 - (a'b-ab')(b'c-bc') = o$$

che esprime la condizione cercata. Ciò posto per semplicità di calcolo osserviamo che potendo noi uguagliare nelle equazioni date i coefficienti di x^2, y^2 e poi sottrarre rispettivamente l' una dall' altra potremo avere sempre due equazioni tali che in una manchi il termine in y^2, e nell' altra il termine in x^2; cioè della forma

$$ay^2 + bxy + dy + ex + f = o \ldots. (1)$$

$$c'x^2 + b'xy + d'y + e'x + f' = o \ldots. (2);$$

onde facendo $a' = c = o$ nell' equazione di condizione trovata qui sopra, essa si riduce ad

$$ac' - bb' = o \ldots\ldots (3).$$

Or se moltiplichiamo l' equazione (1) per $\alpha x + \beta$, la (2) per $\alpha' y + \beta'$ e sommiamo i due risultamenti, otterremo

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha xy^2 + b\alpha x^2y + a\beta y^2 + d\alpha xy + e\alpha x^2 + d\beta y + e\beta x + f\beta \\ + b'\alpha' xy^2 + c'\alpha' x^2y + d'\alpha' y^2 + b\beta xy + c'\beta' x^2 + f'\alpha' y + f\alpha x + f'\beta' \\ \qquad\qquad\qquad + e'\alpha' xy \qquad\quad + d'\beta' y + e'\beta' x \\ \qquad\qquad\qquad + b'\beta' xy \end{array}\right\} = o$$

ed uguagliando a zero i coefficienti de' termini in xy^2, x^2y, xy; ed il coefficiente di y^2 a quello di x^2, avremo

$$a\alpha + b'\alpha' = o, \qquad b\alpha + c'\alpha' = o$$

$$d\alpha + b\beta + e'\alpha' + b'\beta' = o, \qquad a\beta + d'\alpha' = e\alpha + c'\beta',$$

e l' equazione precedente si ridurrà ad

$$(a\beta + d'\alpha')(y^2 + x^2) + (d\beta + d'\beta' + f'\alpha')y + (e\beta + e'\beta' + f\alpha)x + f\beta + f'\beta' = o,$$

ed appartiene ad un cerchio, e come essa è stata dedotta combinando insieme le equazioni delle due curve date, passerà pe' tre punti che sono ad esse comuni. È però da osservarsi che avendo moltiplicate le equazioni (1), (2) rispettivamente per $\alpha x + \beta$, $\alpha' y + \beta'$, questo cerchio passa non solo pe' punti comuni alle curve date ma pe' punti ove s' intersecano le linee indicate dall' equazioni che in tal guisa si ottengono. Or moltiplicando l' equazione (1) per $\alpha x+\beta$, quella che ne risulta sarà verificata dall' ipotesi $x=-\frac{\beta}{\alpha}$, e perciò la linea che rappresenta passa anche per quel punto della curva data dall' equazione (2) che ha per ascissa $x=-\frac{\beta}{\alpha}$, e in questo punto estraneo alla quistione il cerchio incontrerà pure la curva dell' equazione (2): ciò apparisce chiaramente se si rifletta che moltiplicando l' equazione (1) per $\alpha x+\beta$ si ottiene un' equazione che appartiene alla curva data, ed alla retta espressa dall' equazione $x=-\frac{\beta}{\alpha}$. Del pari è evidente che il cerchio incontra l' altra curva data negli stessi tre punti suddetti ed in un punto determinato dall' ordinata $y=-\frac{\beta'}{\alpha'}$; onde quando si fà uso del cerchio e di una delle curve date viene ad ottenersi dalla loro intersezione un punto che non soddisfà alla quistione che si considera, ed avendone determinata l' ascissa, o l' ordinata, si distinguerà immediatamente. Nè ciò si potrebbe evitare perchè abbiamo già detto che un cerchio incontra una curva del secondo grado sempre in quattro punti.

Nell' equazione che abbiamo ritrovata pel cerchio cercato entrano le quantità α, β, α', β' che si determinano per mezzo delle equazioni di condizione stabilite più sopra. Di queste le due prime danno $\frac{\alpha}{\alpha'}=-\frac{b'}{a}$, $\frac{\alpha}{\alpha'}=-\frac{c'}{b}$, donde si ricava $ac'=bb'$ che è appunto la condizione trovata perchè le due curve s' incontrino in tre punti. Determinato intanto il rapporto $\frac{\alpha}{\alpha'}$ le altre due equazioni danno $\frac{\beta}{\alpha'}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}$, e come l' equazione del cerchio dividendola per α' contiene

appunto le quantità $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\alpha'}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}$, resteranno in essa tutti i coefficienti espressi per quantità date. (*)

Fermiamoci al caso in cui $a=o$, allora l' equazione (3) dà $b'=o$, e supponendo $b=c'=1$ le equazioni date saranno

$$xy+dy+ex+f=o\,\ldots\ldots(\mathrm{I})$$
$$x^2+d'y+e'x+f'=o\,\ldots\ldots(\mathrm{II}),$$

e le equazioni tra $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ diverranno

$$\alpha+\alpha'=o,\ \beta+d\alpha+e'\alpha'=o,\ \beta'=d'\alpha'-e\alpha$$

dalle quali si ricava

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=-1,\ \frac{\beta}{\alpha'}=d-e',\ \frac{\beta'}{\alpha'}=d'+e,$$

onde l' equazione del cerchio si riduce ad

$$y^2+x^2+\left(d'+e+\frac{d^2-e'd+f'}{d'}\right)y+\left(e'+\frac{ed-f}{d'}\right)x+f'+\frac{fd+ef'-e'f}{d'}=o\,..(\mathrm{III}),$$

ed il punto estraneo alla quistione ove la curva dell' equazione (I) è incontrato dal cerchio ha per ordinata $y=-(d'+e)$, e quindi, come dall' equazione (I) si rileva, per ascissa $x=\frac{f-d(d'+e)}{d'}$. Similmente allorchè si fà uso dell' equazione (II) si ottiene un punto che ha per ascissa $x=d-e'$, e per ordinata $y=-\frac{f'+d(d-e')}{d'}$ che in generale non soddisfà alla quistione che ne riguarda. La determinazione di questi punti oltre che è necessaria per distinguere

(*) È chiaro che potevamo moltiplicare una delle equazioni per $y+\beta'$, e così avendo quattro equazioni tra le quantità α, β, β' si avea la trovata equazione di condizione, e si determinavano tutte le quantità rimanenti. Ma il calcolo eseguito è più simmetrico.

quali sono i punti che risolvono il problema particolare che si considera, possono utilmente servire per la costruzione dell' equazione (III) appartenente al cerchio, poichè, ove riesca difficile l' assegnare il raggio, determinato il centro ed un punto si può descrivere il cerchio, ed in generale secondo le circostanze particolari si potrà profittare delle osservazioni fatte per giungere ad eleganti costruzioni.

49. Le equazioni trovate nel n. precedente danno la costruzione generale e diretta delle equazioni di terzo grado ad un' ignota per mezzo di una curva di secondo grado, e di un cerchio: infatti sia

$$x^3 + ax^2 + bx + c = o \ldots . (\mathrm{I})$$

un' equazione qualunque di terzo grado. Facciamo

$$x^2 = py \ldots . (\mathrm{II}),$$

e combinando questa equazione con la precedente si otterrà

$$pxy + apy + b\,x + c = o \ldots . (\mathrm{III}),$$

e quindi paragonando queste ultime equazioni con le (I), (II) del n. precedente si vedrà che l'equazione (III) si riduce ad

$$y^2 + x^2 + \left(\frac{b-a^2}{p} - p\right)y - \frac{ab-c}{p^2}\,x - \frac{ac}{p^2} = o \ldots\ldots (\mathrm{IV}),\ (*)$$

ed indica il cerchio che intersecando o la parabola dell' equazione (II), o l' iperbola data dall' equazione (III) determina i punti che hanno per ascissa le diverse radici dell' equazione (I). Si osserverà pertanto che il cerchio incontra la parabola nel punto determinato dalle coordinate a, $\frac{a^2}{p}$, e l' iperbola nel punto che ha per

(*) Questa equazione si ricava facilmente moltiplicando l' equazione (III) per $\frac{x-a}{p^2}$, ponendo py invece di x^2, e poi sommandola con la (II).

coordinate $\frac{ab-c}{p^2} - a, p - \frac{b}{p}$, e questi sono que' punti che non soddisfanno alla quistione.

Se invece di supporre $x^2 = py$, poniamo

$$x^2 + ax = py \ldots . (\mathrm{II}')$$

si ottiene dalla (I)

$$pxy + bx + c = o \ldots . (\mathrm{III}'),$$

e quindi l' equazione (III) del n. precedente diverrà

$$x^2 + y^2 + \left(a + \frac{c}{p^2}\right)x + \left(\frac{b}{p} - p\right)y + \frac{ac}{p^2} = o \ldots . (\mathrm{IV}'),$$

ed esprime un cerchio che incontra la parabola dell' equazione (II') ne' tre punti che hanno per ascisse i valori di x dati dall' equazione (I) ed in un altro punto che ha per coordinate $x = -a, y = o$; e l' iperbola dell' equazione (III') negli stessi tre punti ed in un altro determinato dall'ascissa $x = -\frac{c}{p^2}$, e dall' ordinata $y = p - \frac{b}{p}$.

Similmente facendo altre supposizioni si avrebbero diverse equazioni che somministrerebbero altre costruzioni dell' equazione proposta: in generale si vede che per costruire una qualunque equazione di terzo grado ad un' ignota bisogna stabilire fra quest'ignota ed un' altra un' equazione di secondo grado in modo che, combinandola con la proposta si abbia un' altra equazione di secondo grado a due ignote. Questa equazione, poichè unita all' equazione che si è stabilita deve dare sempre la proposta che è di terzo grado, apparterrà ad una curva che interseca la linea rappresentata da quell' equazione in tre punti, e quindi si può ad una di esse sostituire un cerchio.

50. Allorchè si voglia costruire l' equazione data di terzo grado ad un' ignota con una data curva del secondo grado, si potrà procedere in un modo analogo a quello esposto nel n. 43. Sia

$$x^3 + ax^2 + bx + c = o \ldots . (\mathrm{I}),$$

l' equazione data da costruirsi, ed

$$y^2 = mx + nx^2 \ldots\ldots \text{ (II)}$$

quella della curva data. Si ponga $x = \beta \frac{u}{t}$ nell' equazione (I) e si otterrà

$$\frac{u^3}{t^3} + \frac{a}{\beta}\frac{u^2}{t^2} + \frac{b}{\beta^2}\frac{u}{t} + \frac{c}{\beta^3} = o:$$

quindi poichè supponendo che t, u sieno le coordinate di un punto della curva data si ha

$$\frac{u^2}{t^2} = \frac{m}{t} + n,$$

avremo

$$\frac{u}{t}\left(\frac{m}{t} + n\right) + \frac{a}{\beta}\left(\frac{m}{t} + n\right) + \frac{b}{\beta^2}\frac{u}{t} + \frac{c}{\beta^3} = o,$$

e mettendo il coefficiente di $\frac{u}{t}$ uguale a zero, cioè

$$n + \frac{b}{\beta^2} = o \ldots\ldots (1),$$

quest' equazione si ridurrà ad

$$\left(an + \frac{c}{\beta^2}\right)t^2 + amt + m\beta u = o,$$

la quale unita all' equazione

$$u^2 = mt + nt^2,$$

da l' equazione

$$u^2 + t^2 + \frac{m(a\beta^2 - c)}{an\beta^2 + c}t + \frac{m(n+1)\beta^3}{an\beta^2 + c}u = o \ldots\ldots \text{ (III)},$$

che appartiene ad un cerchio. È chiaro poi che le perpendicolari condotte pel punto dell' asse delle y che ha per ordinata β alle rette che uniscono l' origine co' punti ove il cerchio dell' equazione (III) incontra la curva data fissano sull' asse delle x que' punti che hanno

*

per ascissa i valori di x indicati dall' equazione (I). Quì pure è da avvertirsi che l' equazione (1) essendo di secondo grado potrebbe dare β immaginaria, e poichè ciò dipende da' segni di b ed n, si osserverà che cambiando x in $x+\alpha$ nell' equazione (I) il coefficiente di x a primo grado sarà

$$3\alpha^2 + 2a\alpha + b,$$

onde se n è negativa vi sarà sempre un valore di α che rende questa quantità positiva; se poi n è positiva si dovrebbe cercare un valore di α che riduce ad una quantità negativa quell' espressione; ma ciò come è noto non sempre può eseguirsi, difatti se l' equazione

$$3\alpha^2 + 2a\alpha + b = o$$

dà per α valori immaginarì, qualunque valore possa adottarsi per α sempre positiva rimane la quantità $3\alpha^2 + 2a\alpha + b$. Quindi ciò che precede può generalmente applicarsi solo allorchè n è negativa cioè che la curva data è ellisse. Cerchiamo dunque di trovare altre equazioni che possansi usare in tutti i casi: facciamo nell' equazione (I) $x = -\frac{\beta t}{u}$, ed otterremo

$$c\frac{u^3}{t^3} - b\beta\frac{u^2}{t^2} + a\beta^2\frac{u}{t} - \beta^3 = o$$

ed essendo

$$\frac{u^2}{t^2} = \frac{m}{t} + n,$$

avremo

$$c\frac{u}{t}\left(\frac{m}{t} + n\right) - b\beta\left(\frac{m}{t} + n\right) + a\beta^2\frac{u}{t} - \beta^3 = o,$$

e l' equazione che uguaglia a zero il coefficiente di $\frac{u}{t}$ sarà

$$cn + a\beta^2 = o \ldots\ldots (2),$$

onde la precedente si riduce a

$$\beta\,(nb+\beta^2)\,t^2+m\,b\beta\,t-c\,m\,u=o,$$

e combinandola con l' equazione

$$u^2=mt+nt^2,$$

se ne deduce l' equazione

$$u^2+t^2+\frac{m(b-\beta^2)}{nb+\beta^2}\,t-\frac{cm(n+1)}{\beta(nb+\beta^2)}\,u=o\;\ldots\,(\mathrm{III}'),$$

che dinota un cerchio. Avendo intanto supposto $x=-\frac{\beta t}{u}$ si rileva che le parallele tirate dal punto dell' asse delle y che ha per ordinata β alle rette condotte dall' origine a' punti ne' quali il cerchio dell' equazione (III′) interseca la curva determinano sull'asse delle ascisse i valori di x che soddisfanno all' equazione (I). Pertanto in questo caso l' equazione (2) anche dà β immaginaria se $\frac{nc}{a}$ non è una quantità negativa; ma dipendendo ciò da' segni di a, c si osservi che cambiando x in $x+\alpha$ nell' equazione (I) il cofficiente del secondo termine e il termine noto divengono rispettivamente

$$3\alpha+a,\quad \alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c,$$

e quindi per ciò che si è detto nel citato n. 43 ne risulta che possiamo sempre dare ad α tal valore che queste quantità sieno dello stesso segno o di segno contrario secondochè n è negativa, o positiva, onde la soluzione somministrata dall' equazione (III′) è sempre applicabile. È evidente poi che in tal caso le parallele alle rette che congiungono l' origine co' punti comuni alla curva data ed al cerchio espresso dall' equazione (III′) devono condursi pel punto determinato dalle coordinate α, β.

Abbiamo veduto che l' equazione (III) può sempre usarsi quando è data un' ellisse, e che nel caso dell' iperbola non è sempre applicabile. Ma in questo caso, non volendo fare uso dell' equazione (III′), si osservi che possiamo prendere l' equazione dell' iperbola riferita agli asintoti che essendo della forma

$$xy=d^2\ldots\ldots\,(3)$$

combinandola con la (I) si ottiene l' equazione

$$x^2+ax+\frac{c}{d^2}\,y+b=o\ldots(4),$$

e l' equazioni (3), (4) appartenendo a due curve del secondo grado che s' intersecano in tre punti possiamo assegnare il cerchio che passa per essi. Pertanto essendo qui gli assi obbliqui non possiamo servirci dell'equazioni stabilite nel n. 48 ma procedendo in un modo consimile si potrà trovare facilmente l' equazione del cerchio cercato. Difatti sia c' il coseno dell' angolo compreso dagli asintoti, si moltiplichi l' equazione (3) per $x+\alpha'$, e la (4) per $\alpha y+\beta$, e sommando le equazioni che ne risultano otterremo

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x^2y+a\alpha\,xy+\frac{c\alpha}{d^2}\,y^2+\beta\,x^2+bxy-d^2\,x-\alpha'\,d^2\\ +\,x^2y+\alpha'\,xy\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{\beta c}{d^2}\,y+\beta a\,x+b\,\beta\end{array}\right\}=o,$$

e ponendo

$$\alpha+1=o,\ a\alpha+\alpha'=2\,c'\,\beta,\ \frac{c\alpha}{d^2}=\beta,$$

l' equazione precedente si riduce a

$$\beta(y^2+2c'\,xy+x^2)+\left(b\alpha+\frac{\beta c}{d^2}\right)y+(a\beta-d^2)x+b\beta-\alpha'\,d^2=o$$

ed esprime un cerchio. Le parallele all' asintoto che si è preso per asse delle y condotte pe' punti comuni a questo cerchio e l' iperbola, determinano sull' altro asintoto i valori cercati di x. Abbiamo esposte queste diverse maniere di costruire un' equazione di terzo grado con una data curva onde mostrare i diversi andamenti che debbonsi seguire per ottenere varie soluzioni e scegliere poi la più elegante. Il calcolo eseguito pel caso dell' iperbola ci dimostra pure come debbansi modificare le formole del n. 48 quando gli assi sono obbliqui: ed è chiaro che invece di uguagliare a zero il coefficiente di xy nell' equazione che si ottiene dopo aver moltiplicate le proposte per $\alpha x+\beta$, $\alpha' y+\beta'$, bisogna porlo uguale al coefficiente di y^2 moltiplicato pel doppio coseno dell' angolo compreso dagli assi. Del resto quando è data un' equazione di terzo grado ad un' ignota si può moltiplicarla per $x+\alpha$, α essendo una quantità arbitraria, e così ridurla al quarto grado e poi si possono ad essa applicare le formole stabilite nel n. 43. Così moltiplicando l' equazione (I) per $x+\alpha$, si ottiene

$$x^4+(a+\alpha)x^3+(b+a\alpha)x^2+(c+b\alpha)x+c\alpha=o,$$

e qui essendo α arbitraria possiamo disporne in modo che l' equazione (2, 43) che nel nostro caso diviene

$$n(a+\alpha)\beta^2+\ c+b\alpha=o$$

sia sempre soddisfatta senza aver bisogno di cambiare poi la x: anzi quest' equazione risoluta rispetto ad α dà

$$\alpha=-\frac{c+na\beta^2}{b+n\beta^2},$$

e resta poi β arbitraria, e se ne potrà disporre in modo che si semplicizzi per quanto si possa l' equazione del cerchio che ne risulta. Ne' casi particolari adunque se non è data alcuna curva, o è data una parabola converrà fare uso dell' equazioni stabilite nel n. precedente, ovvero del metodo esposto alla fine di un tal paragrafo: chè per ottenere costruzioni eleganti sempre bisogna osservare la forma particolare delle equazioni che si devono costruire. Quando poi è data una curva, e questa è ellisse o iperbola si potranno applicare le formole stabilite in questo n. scegliendo quelle che meglio si prestano alle circostanze particolari.

51. Per dare un' applicazione di ciò che abbiam detto ne' due n. precedenti supponiamo che date le tre rette (Fig. 16) AB, m, n,

si voglia trovare sulla AB un punto M' in modo che sia il quadrato di AM' al quadrato di m come n sta ad M'B. Poniamo AB $=a$, AM' $=x$, ed avremo

$$x^2 : m^2 :: n : a-x,$$

donde

$$x^2(x-a)+m^2n=o \ldots\ldots (\mathrm{I}).$$

Quindi paragonando quest' equazione con la (I, 49) si vede che le equazioni (II), (III), (IV) del medesimo numero divengono rispettivamente

$$x^2=py \ldots\ldots (2)$$

$$pxy-apy+m^2n=o \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$y^2+x^2-\left(\frac{a^2}{p}+p\right)y+\frac{m^2n}{p^2}x+\frac{am^2n}{p^2}=o \ldots\ldots\ldots (4),$$

Quì essendo p arbitraria possiamo supporre $p=m$, onde le equazioni (3), (4) si riducono ad

$$y(x-a)+mn=o$$

$$y^2+x^2-\left(\frac{a^2}{m}+m\right)y+nx+an=o:$$

e si otterrebbe da queste equazioni una facile composizione del problema, poichè le coordinate del centro essendo indicate da $-\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}\left(m+\frac{a^2}{m}\right)$, e dovendo passare pel punto che ha per coordinate $a-n$, m (che è il punto ove incontra l' iperbola) si determina immediatamente il cerchio. Se si vuol fare uso della parabola essa è già determinata poichè ha il punto A per vertice, m per parametro e per asse la perpendicolare ad AB condotta per A. Se vogliamo servirci dell' iperbola si rifletta che essa ha per asintoti AB e la perpendicolare condotta ad essa pel punto B, e passa pel punto già assegnato che ha per coordinate $a-n$, m. Una soluzione più semplice si ricava dall' equazioni (II'), (III'), (IV') del citato n. 49 le quali, supponendo pure $p = m$, divengono

$$x^2 - ax = my \ldots\ldots\ (2')$$

$$xy + mn = o \ldots\ldots\ldots\ (3')$$

$$y^2 + x^2 - (a-n)x - my - an = o \ldots\ldots\ldots\ (4').$$

Questo cerchio si costruisce facilmente poichè esso incontra l'iperbola nel punto che ha per coordinate $-n$, m; e perciò presa $AG = n$, $GH = m$ passa per H, incontra la parabola nel punto che ha per ascissa a e l'ordinata $y = o$, cioè nel punto B, passa pure pel punto G, perchè l'equazione $(4')$ ponendo $y = o$, oltre di $x = a$ dà pure $x = -n$; dunque esso è il cerchio che ha per diametro HB. Se si vuole descrivere l'iperbola essa ha per asintoti AB e la perpendicolare elevata ad essa pel punto A, e passa per H Se si vuole fare uso della parabola si osserverà che essa ha per parametro m, per asse la perpendicolare ad AB tirata pel suo punto di mezzo, e passa per A e B.

Pertanto se dall'equazione $(4')$ si sottrae la $(2')$ ne risulta

$$y^2 = - n(x - a)$$

equazione appartenente ad una parabola che ha B per vertice BA per asse e per parametro la data retta n.

Composizione del problema.

Presa AG uguale ad n si tagli sulla GH perpendicolare a GB la GH uguale ad m. Le parallele a GH pe' punti comuni al cerchio che ha per diametro HB ed alla parabola che ha B per vertice, BA per asse, e il parametro uguale ad AG determinano sulla AB i punti cercati.

Invece della parabola si potrebbe pure descrivere come abbiamo già detto l'iperbola che passa per H tra gli asintoti AG, AR.

La distanza che passa fra due punti dovendo esser sempre presa col segno $\pm$ si vede che dovevamo porre $M'B = \pm (a - x)$,

il segno — avendo luogo quando il punto M′ cade sul prolungamento della AB. Quindi nell'equazione (1) dovremo prendere anche la n col segno $\pm$; e perciò nel caso che si adotta il segno —, cioè che si cerca determinare il punto situato sul prolungamento della AB tale che il quadrato della distanza che serba da A sia al quadrato di m come n sta al quadrato della distanza da B, bisognerà portare la AG da A verso B e la parabola avrà per asse la Bx ossia si volgerà in senso contrario. Quindi pare che volendo risolvere il problema in tutta la sua estensione si debbano descrivere due parabole; ma osservando che le parabole sono uguali e disposte in senso contrario, ne segue che presa BA′ uguale a BA, $A'G' = AG$, $G'H' = GH$, la perpendicolare ad AB pel punto ove il cerchio che ha H′B per diametro incontra la parabola descritta coll'asse BA, determina un punto N′ che è situato rispetto al punto A′ come lo è il punto cercato relativamente al punto A; e perciò presa $AN = A'N'$ sarà N questo punto.

È da avvertirsi che l'equazione (1) allorchè si prende n col segno $+$ ha sempre una radice reale negativa; le altre due poi possono essere reali o immaginarie secondochè si ottiene $m^2n < \frac{4}{27}a^3$, $m^2n > \frac{4}{27}a^3$; e sono uguali quando $m^2n = \frac{4}{27}a^3$. Quindi perchè possa dividersi la retta AB nel modo richiesto dall'enunciato del problema non deve essere $m^2n > \frac{4}{27}a^3$: e difatti è noto che la funzione $x^2(a-x)$ è un massimo quando $x = \frac{2}{3}a$, e diviene appunto $\frac{4}{27}a^3$. Quando poi nell'equazione (1) si prende n col segno — essa ammette sempre una radice reale positiva e le altre due sono immaginarie. Tutto ciò risulta dalle note proprietà generali delle equazioni, e dalle formole relative all'equazioni di terzo grado. Finalmente osserveremo che abbiamo risoluto il presente problema coll'intersezione di un cerchio e di una parabola, o di un'iperbola: se si volesse fare uso dell' ellisse si potrebbe riflettere che sommando l' equazioni $(2')$, $(4')$ risulta un' equazione appartenente all' ellisse, ma la soluzione che per tal guisa si otterrebbe sarebbe meno elegante di quella che si ottiene dall' iperbola o dalla parabola.

PROBLEMA XV.

52. *Trovare sulla periferia del dato cerchio* EFM (Fig. 18) *un punto* M *in modo che unito co' punti dati* A *e* B *sieno in data ragione le corde* ME , MF.

Si prenda per asse delle ascisse la CA, e il centro C per origine; e si chiamino α, β; t, u le coordinate de' punti B, M; α' l' ascissa del punto A, ed r il raggio del cerchio. Le equazioni del cerchio e delle due rette MA, MB, saranno

$$y^2+x^2=r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y-u=\frac{u}{t-\alpha'}(x-t)\ldots(2)$$

$$y-u=\frac{u-\beta}{t-\alpha}(x-t)\ldots(3).$$

Ciò posto per determinare le corde ME, MF bisogna cercare le coordinate de' punti E, F lo che si ottiene combinando l' equazione (1), con le (2), (3): si elimini perciò la y dalle equazioni (1), (3) ed otterremo

$$(u-\beta)^2\left(x-\frac{\alpha u-\beta t}{u-\beta}\right)^2+(t-\alpha)^2x^2=r^2(t-\alpha)^2,$$

le radici della quale sono le ascisse de' punti M, ed F. Ed essendo $-\frac{2(\alpha u-\beta t)(u-\beta)}{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2}$ il coefficiente del secondo termine di questa equazione ordinata, e t l' ascissa del punto M, quella del punto F sarà indicata dalla formola $\frac{2(\alpha u-\beta t)(u-\beta)}{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2}-t$: onde poichè, come

*

apparisce dall' equazione (3), abbiamo

$$\mathrm{MF}=\frac{x-t}{t-\alpha}\sqrt{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2},$$

ove x è l' ascissa del punto F, sarà

$$\mathrm{MF}=\frac{2u(\beta-u)+2x(\alpha-t)}{\sqrt{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2}}=\frac{2(\beta u+\alpha t-r^2)}{\sqrt{r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u}},$$

osservando che $u^2+t^2=r^2$. Ponendo ora in quest' espressione $\beta=o$, $\alpha=\alpha'$, otterremo

$$\mathrm{ME}=\frac{2(\alpha' t-r^2)}{\sqrt{r^2+\alpha'^2-2\alpha' t}},$$

e quindi indicando con $\frac{m}{n}$ la data ragione si avrà

$$n^2(\alpha' t-r^2)^2(r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u)=m^2(r^2-\alpha t-\beta u)^2(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t)\ldots(4).$$

Questa equazione in generale appartiene ad una curva di terzo grado; ma supponendo $\alpha^2+\beta^2=r^2$ cioè che il punto B (Fig. 19) sia sulla circonferenza del dato cerchio, essa rendendosi divisibile per $r^2-\alpha t-\beta u$, si riduce a

$$2n^2(\alpha' t-r^2)^2=m^2(r^2-\alpha t-\beta u)(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t)\ldots(5),$$

e dinota quindi un' iperbola, che ha per un asintoto la retta espressa dall' equazione

$$r^2+\alpha'^2-2\alpha' t=o;$$

cioè presa $\mathrm{CD}=\frac{r^2}{\alpha'}$, la perpendicolare ad AD pel suo punto di mezzo. Per determinare l' altro asintoto conviene, come abbiam detto nel n. 6, decomporre in fattori i termini di secondo grado, e perciò poniamo l' equazione (5) sotto la forma

$$2(\alpha' t-r^2)\Big(n^2(\alpha' t-r^2)+m^2(r^2-\alpha t-\beta u)\Big)=m^2(\alpha'^2-r^2)(r^2-\alpha t-\beta u),$$

donde si vede che l' altro asintoto è parallelo alla retta indicata dall' equazione

$$m^2(r^2-\alpha t-\beta u)+n^2(\alpha' t-r^2)=\gamma,$$

e determinando γ nel modo espresso nel citato n. 6, cioè che faccia svanire il coefficiente di t quando si pone nell' equazione precedente

$$m^2(r^2-\alpha t-\beta u)=\gamma-n^2(\alpha' t-r^2),$$

si troverà $\gamma=\frac{n^2(r^2-\alpha'^2)}{2}$, onde

$$m^2(r^2-\alpha t-\beta u)+n^2(\alpha' t-r^2)=\frac{n^2(r^2-\alpha'^2)}{2},$$

sarà l' equazione dell' altro asintoto. Per costruire questa equazione si rifletta che ponendo in essa $r^2-\alpha t-\beta u=o$, si ha $t=\frac{r^2}{\alpha'}-\frac{1}{2}\left(\alpha'-\frac{r^2}{\alpha'}\right)$: la prima di queste due equazioni appartiene ad una retta perpendicolare alla CB, e poichè quando $t=\alpha$, si ha $u=\beta$ esprimerà la tangente BG; la seconda poi è chiaro che si costruisce prendendo la DR da D verso C ed elevando a CA una perpendicolare. Il punto ove questa retta incontra la BG sarà un punto dell' asintoto, onde condotta ad RG la parallela DH se si porti la HG da H in S, sarà S un tal punto. Inoltre la tangente trigonometrica dell' angolo che l' asintoto medesimo comprende coll' asse delle ascisse essendo uguale ad $\frac{\frac{n^2\alpha'}{m^2}-\alpha}{\beta}$, presa $CK=\frac{n^2\alpha'}{m^2}$, quell' asintoto sarà la SO perpendicolare alla BK. Determinati in tal guisa i due asintoti dell' iperbola cerchiamone un punto; a tale oggetto si ponga nell' equazione (5) $r^2-\alpha t-\beta u=o$

ed avendosi $(r^2-\alpha' t)^2=o$ cioè $t=\frac{r^2}{\alpha'}$ si vede che l' iperbola passa pel punto H.

Composizione del problema.

Presa CK che stia a CA in ragion duplicata di $n:m$ si tirino al cerchio le tangenti AE, BG ed alla CA la perpendicolare EH; indi condotta pel punto di mezzo della DA la RG parallela ad EH si porti la GH da H in S, e si abbassi sulla BK la perpendicolare SO. L' iperbola che ha per asintoti OR, OS, e passa per H incontra il cerchio ne' punti richiesti.

È da avvertirsi che se il punto A fosse nell' area del cerchio non potrebbe condursi la tangente EA, non pertanto la EH è sempre assegnabile essendo CD terza proporzionale dopo CA e il raggio. Si noti ancora che avendosi dall' equazione dell' iperbola $(r^2-\alpha' t)^2=o$, quando $r^2-\alpha t-\beta u=o$, la BG la toccherà nel punto H, e ciò apparisce pure immediatamente se si riflette che le parti HG, HS della GS comprese fra il punto H e gli asintoti sono uguali, onde il cerchio e l' iperbola hanno per tangente comune la BG. In vece di determinare il punto H dell' iperbola potevamo cercare i punti ne' quali incontra la CA, e poichè ponendo nell' equazione (5) $u=o$ si ottiene

$$\alpha' n^2\left(\frac{r^2}{\alpha'}-t\right)^2=m^2\alpha\left(\frac{r^2}{\alpha}-t\right)\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-t\right),$$

osservando che $CF=\frac{r^2}{\alpha}$ si vede che preso sulla FR il punto P in modo che il quadrato della PD sia al rettangolo di FP in PR in ragion composta di CB' : CA e di $m^2:n^2$, P sarà un punto dell' iperbola: è chiaro poi che oltre del punto P ve ne è un altro P' che soddisfà alla stessa condizione, e che $P'S'=PR$.

53. Se $\beta = o$ l'equazione dell' iperbola si riduce ad

$$\alpha' n^2 \left(\frac{r^2}{\alpha'} - t\right)^2 = m^2 \alpha \left(\frac{r^2}{\alpha} - t\right)\left(\frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'} - t\right) \ldots (1)$$

onde ci dimostra che la curva si cambia in due rette parallele all' asse delle y. Ciò viene anche dimostrato dalla costruzione che abbiamo data poichè cadendo il punto B in F′ la BG diviene parallela ad RO, quindi gli asintoti sono paralleli, il punto H non è più assegnabile, ma i punti P, P′ possono nel modo esposto determinarsi, osservando che il punto F si confonde con F′; e l'iperbola si trasforma nelle parallele a' suoi asintoti condotte pe' punti P, P′. Per determinare questi punti nel caso particolare che consideriamo, poichè in generale può farsene almeno, cerchiamo di costruire l'equazione (1), e primieramente osserviamo che essendo $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$; quando $\beta = o$, si ha $\alpha = \pm r$, e ciò avviene secondochè si considera che il punto B cada in F′ o in F″. Supponiamo che sia $\alpha = - r$ l'equazione (1) diviene

$$\alpha' n^2 \left(\frac{r^2}{\alpha'} - t\right)^2 = m^2 r (r + t) \left(\frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'} - t\right),$$

nella quale se facciamo

$$(r + t)\left(\frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'} - t\right) = u^2,$$

si ottiene

$$\frac{r^2}{\alpha'} - t = \frac{m}{n}\sqrt{\frac{r}{\alpha'}} \cdot u,$$

e le perpendicolari a CA pe' punti comuni alle linee espresse da queste equazioni sono le rette indicate dall' equazione (1). Di queste equazioni la prima esprime il cerchio che ha F′R per diametro, la seconda appartiene ad una retta che passa pel punto D e comprende con l'asse delle ascisse un angolo che ha per tangente

trigonometrica $-\frac{n}{m}\sqrt{\frac{\alpha'}{r}}$, onde presa AL quarta proporzionale dopo n, m e la media proporzionale tra CA e il raggio sarà alla CL perpendicolare. Quindi per questo caso abbiamo la seguente

Composizione del problema.

Condotta al cerchio la tangente AE, ed alla CA le perpendicolari ED, AL si bisechi la AD in R, e si prenda AL in modo che serbi alla media proporzionale tra CA e il raggio la data ragione di $m : n$. Le parallele ad ED pe' punti comuni alla perpendicolare condotta per D alla CL ed al cerchio che ha per diametro F′R determinano sul cerchio dato i punti cercati.

Allorchè si suppone $\alpha = r$ l'equazione (1) si riduce ad

$$\alpha' n^2 \left(\frac{r^2}{\alpha'} - t\right)^2 = m^2 r (r - t) \left(\frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'} - t\right),$$

e non possiamo costruirla con lo stesso andamento perchè in luogo del cerchio descritto sul diametro F′R, si avrebbe un' iperbola equilatera avente F″R per asse trasverso. Ma in questo caso si rifletta che l'equazione precedente sviluppandone il secondo membro diviene

$$\alpha' n^2 \left(\frac{r^2}{\alpha'} - t\right)^2 = m^2 r \left[\frac{r(r^2 + \alpha'^2)}{2\alpha'} - \left(r + \frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'}\right)t + t^2\right],$$

e può porsi sotto la forma

$$\alpha' n^2 \left(\frac{r^2}{\alpha'} - t\right)^2 = m^2 r \left[\left(\frac{1}{2}\left(r + \frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'}\right) - t\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'} - r\right)^2\right],$$

e ponendo per brevità

$$\frac{1}{4}\left(\frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'} - r\right)^2 \frac{m^2 r}{\alpha' n^2} = b^2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'} + r\right) = a,$$

si riduce ad

$$\frac{n}{m}\sqrt{\frac{\alpha'}{r}} = \frac{a-t}{\sqrt{b^2+\left(\frac{r^2}{\alpha'}-t\right)^2}}.$$

Quindi poichè la formola

$$\frac{b(a-t)}{\sqrt{b^2+\left(\frac{r^2}{\alpha'}-t\right)^2}}$$

esprime la distanza che il punto dell'asse delle x determinato dall' ascissa a serba dalla retta data dall' equazione

$$y = \frac{b}{\frac{r^2}{\alpha'}-t}(x-t)\ldots\ldots\ (2),$$

ne segue che una tal distanza è indicata da

$$\frac{bn}{m}\sqrt{\frac{\alpha'}{r}} = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-r\right),$$

e perciò la retta dell' equazione (2) è tangente al cerchio che ha per centro il punto corrispondente all' ascissa a ed il raggio uguale ad $\frac{1}{2}\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-r\right) = \frac{1}{2}\mathrm{RF}''$. Ciò posto essendo $a = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}+r\right)$, ne risulta che il centro del cerchio suddetto ha per centro il punto di mezzo della RF″ onde un tal cerchio ha per diametro F″R: l' equazione (2) poi esprime evidentemente la retta che unisce il punto $\frac{r^2}{\alpha'}$, b col punto dell' asse delle x che ha per ascissa t, dunque presa Dd $= b$, le tangenti condotte pel punto d al cerchio avente F″R per diametro incontrano la CA in que' punti che hanno per ascisse i valori di t. Quanto al modo di determinare il punto d si rifletta che dal valore di b^2, si ha

$$b = \mathrm{D}d = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-r\right)\frac{m}{n}\sqrt{\frac{r}{\alpha'}} = \frac{1}{2}\mathrm{F}''\mathrm{R}.\frac{m}{n}\sqrt{\frac{r}{\alpha'}},$$

ed in conseguenza nel caso che si considera si ha quest' altra

Composizione del problema.

Tirata al cerchio la tangente AE, ed alla CA la perpendicolare ED si divida la AD per metà in R e si prenda la Dd in modo che stia alla metà di F″R in ragion composta di $m:n$ e della sudduplicata di CF″ : CA. Le perpendicolari a CA pe' punti ove è intersecata dalle tangenti condotte pel punto d al cerchio che ha per diametro F″R, incontrando il cerchio dato determinano i punti cercati.

54. Nel caso che nessuno de' punti dati fosse sulla periferia del cerchio, e $\beta = o$ cioè quando i due punti dati sono in direzione col centro, l' equazione (4, 52) diviene

$$n^2(r^2-\alpha' t)^2(r^2+\alpha^2-2\alpha t) = m^2(r^2-\alpha t)^2(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t),$$

ed appartiene a tre rette, quindi in questo caso la linea del terzo ordine espressa dall' equazione (4, 52) si cambia in tre rette perpendicolari all' asse delle ascisse. Per costruire l' equazione precedente si rifletta che se i punti dati si trovano in diverse parti rispetto al centro, le quantità α, α' sono di segno contrario; sia α' positiva, sarà α negativa, onde l' equazione precedente si riduce ad

$$n^2(r^2-\alpha' t)^2(r^2+\alpha^2+2\alpha t) = m^2(r^2+\alpha t)^2(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t)\ldots\ (1),$$

la quale moltiplicata per $r^2+\alpha'^2-2\alpha' t$, ponendo

$$(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t)(r^2+\alpha^2+2\alpha t) = 4\alpha\alpha' u^2\ldots.\ (2),$$

dà

$$m(r^2+\alpha t)(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t) = 2n\sqrt{\alpha\alpha'}.(r^2-\alpha' t)u\ \ldots..\ (3);$$

onde le ascisse de' punti comuni alle curve espresse da queste equazioni sono uguali a' valori di t indicati dall' equazione (1) avvertendo però che queste curve s' incontrano nel punto che ha per coordinate $t=\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}$, $u=o$ che non deve considerarsi perchè prodotto dall' aver moltiplicata l' equazione (1) per $r^2+\alpha'^2-2\alpha' t$.

È chiaro poi che l' equazione (2) dinota un cerchio che ha per diametro l' asse delle ascisse e l' incontra ne' punti che hanno per ascissa $t=-\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}$, $t=\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}$, onde supponendo (Fig. 18) che il punto dato B sia in B$'$, presa C$a=\frac{r^2}{\alpha'}$, e C$b=\frac{r^2}{\alpha}$, divise le aA, bB$'$ per metà in D, G sarà DG il diametro del cerchio indicato dall' equazione (2): e l' equazione (3) esprime un' iperbola che passa pe' punti b, D, ed ha per un' asintoto la retta data dall' equazione $r^2-\alpha' t=o$, cioè la aO. Quindi se si porta la Da da b in R, per R passa l' altro asintoto, e poichè il coefficiente di t^2 diviso per quello di tu col segno cambiato, che esprime la tangente trigonometrica dell' angolo che quest' asintoto comprende con l' asse delle x, (*) è uguale ad $\frac{m\sqrt{\alpha\alpha'}}{n\alpha'}$; presa la

(*) Difatti una equazione qualunque del secondo grado

$$bxy+cx^2+dy+ex+f=o$$

nella quale manca il termine in y^2, essendo messa sotto la forma

$$x(by+cx)+dy+ex+f=o,$$

ci dimostra che l' iperbola da essa rappresentata ha (n. 6.) gli asintoti paralleli alle rette date dalle equazioni

$$x=o,\ by+cx=o,$$

onde un' asintoto è parallelo all' asse delle y, e l' altro comprende con l' asse delle ascisse un angolo che ha per tangente trigonometrica $-\frac{c}{b}$, cioè il coefficiente di x^2 diviso per quello di xy col segno cambiato. Del pari un' equazione nella quale manca il termine in x^2 esprime un' iperbola che ha un'asintoto parallelo all' asse delle x; e l' altro asintoto inclinato a quest' asse sotto un angolo che ha la tangente trigonometrica uguale al coefficiente di xy diviso per quello di y^2 col segno cambiato.

*

RH $=\alpha'=$ CA, e sulla perpendicolare a CA per H la HK $=\frac{m\sqrt{\alpha\alpha'}}{n}$, sarà RK l' altro asintoto dell' iperbola.

Composizione del problema.

Tirata al cerchio la tangente AS ed a CA la perpendicolare Sa si prenda Cb terza proporzionale dopo B$'$C e il raggio, e bisecate in D e G le aA, bB$'$ si facciano le bR, RH uguali ad aD, AC: indi condotta HK parallela ad Sa e che serbi alla media proporzionale tra CA e CB$'$ la data ragione di $m:n$ si tiri la RK. Le perpendicolari a CA pe' punti comuni al cerchio che ha DG per diametro, ed all' iperbola che passa per D ed ha per asintoti OK, OS intersecano il cerchio dato ne' punti richiesti.

Non bisogna tralasciar di notare che, come più sopra abbiam detto, non deve tirarsi la perpendicolare pel punto D che anche esiste nello stesso tempo sul cerchio e sull' iperbola.

Abbiamo supposto che i punti fossero in diverse parti rispetto al centro, se fossero da una stessa parte la costruzione precedente anche avrebbe luogo; ma invece del cerchio descritto sul diametro DG si otterrebbe un' iperbola equilatera avente per asse trasverso la retta corrispondente alla GD. Ma questa costruzione non è da adottarsi perchè si dovrebbero descrivere due iperbole; mentre abbiamo già veduto come in diversi modi possa costruirsi un' equazione qualunque del terzo grado con l' intersezione di una curva del secondo ordine e di un cerchio. Per applicare le formole del n. 49 all' equazione che abbiamo trovata poniamola sotto la forma

$$n^2\alpha'\left(\frac{r^2}{\alpha'}-t\right)^2\left(\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}-t\right)=m^2\alpha\left(\frac{r^2}{\alpha}-t\right)^2\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-t\right)\ldots(1'),$$

e mettendo $t-\frac{r^2}{\alpha'}=x$, avremo

$$n^2\alpha' x^2\left(\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}-\frac{r^2}{\alpha'}-x\right)=m^2\alpha\left(\frac{r^2}{\alpha}-\frac{r^2}{\alpha'}-x\right)^2\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-\frac{r^2}{\alpha'}-x\right),$$

la quale facendo per brevità di calcolo

$$\frac{n^2\alpha'}{m^2\alpha}=\frac{n'}{m'},\ \frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}-\frac{r^2}{\alpha'}=a,\ \frac{r^2}{\alpha}-\frac{r^2}{\alpha'}=b,\ \frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-\frac{r^2}{\alpha'}=c,$$

ordinandola si riduce ad

$$(n'-m')x^3+\Big(m'(c+2b)-an'\Big)x^2-m'b(b+2c)x+m'b^2c=o\ ,$$

e paragonandola con l' equazione (I , 49) si vede che le equazioni (II') , (III'), (IV') del citato n. divengono

$$x^2+\frac{m'(c+2b)-an'}{n'-m'}x=py\ldots\ldots\ldots(2')$$

$$pxy-\frac{m'b(b+2c)}{n'-m'}x+\frac{m'b^2c}{n'-m'}=o\ \ldots\ldots(3')$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+\left(\frac{m'b^2c}{(n'-m')p^2}+\frac{m'(c+2b)-an'}{n'-m'}\right)x \\ \quad -\left(\frac{m'b(b+2c)}{(n'-m')p}+p\right)y+\frac{m'b^2c[m'(c+2b)-an']}{(n'-m')^2p^2} \end{array}\right\}=o\ \ldots\ldots(4').$$

Per costruire queste equazioni osserviamo primieramente che esse si semplicizzano supponendo l' arbitraria $p=b$, e che le quantità a , b , c sono sulla figura espresse rispettivamente dalle rette aG , ab , aD , e che se supponiamo CL $=\frac{n^2\alpha'}{m^2}$, sarà $n'=$ CL , $m'=\alpha=$ CB' (*). Inoltre per ciò che si è detto nel n. 49 il cerchio indicato dall' equazione (4') passa pe' punti dati dalle coordinate $\frac{an'-m'(c+2b)}{n'-m'}$, o ; $-\frac{m'c}{n'-m'}$, $b+\frac{m'(b+2c)}{n'-m'}=\frac{n'b+2m'c}{n'-m'}$. Quindi se prendiamo la aI $=\frac{\text{B}'\text{C.D}a}{\text{B}'\text{L}}=\frac{m'c}{n'-m'}$, IN $=\frac{\text{CL.}a\text{G}}{\text{B}'\text{L}}=\frac{an'}{n'-m'}$,

bP $=\frac{\text{CL.}ab}{\text{B}'\text{L}}=\frac{n'b}{n'-m'}$, NQ $=2$P$a=2\left(b-\frac{n'b}{n'-m'}\right)=-\frac{2m'b}{n'-m'}$,

per Q passerà il cerchio , e presa sulla perpendicolare a CA condotta per I la IT $=b$P $+\ 2a$I , ne sarà T un altro punto. Ma ponendo $y=o$ nell' equazione (4') l' equazione in x che ne risulta deve avere per radici le ascisse de' punti ove il cerchio che essa rappresenta è incontrato dalla CA, dunque poichè abbiamo già assegnato uno di questi punti che è Q ne riuscirà facile a trovare l' altro sottraendo dal coefficiente di x a primo grado col segno cambiato, che esprime la somma delle ascisse de' due summentovati punti , $\frac{an'-m'(c+2b)}{n'-m'}=a$Q, ed essendo $-\frac{m'c}{n'-m'}=a$I il residuo, ne risulta che I è un altro punto del cerchio appartenente all' equazione (4') onde TQ ne sarà un diametro. Costruita in tal guisa l'equazione (4') possiamo assegnare immediatamente i determinanti dell' iperbola espressa dall' equazione (3'), poichè ponendola sotto la forma

$$x\left(y-\frac{m'(b+2c)}{n'-m'}\right)+\frac{m'bc}{n'-m'}=o,$$

si rileva che presa TR' $=ba$ le rette R'O' , O'S sono gli asintoti ; e dovendo passare pel punto T potrà descriversi.

(*) La costruzione che andremo a dare essendo applicabile tanto allorchè i punti sono in parti diverse rispetto al centro , quanto se sono da una stessa parte, per servirci della stessa figura abbiam pure supposto che il centro sia compreso fra i punti dati, onde per l' intelligenza di ciò che segue bisogna notare che in questo caso le quantità m' , a , b devono riguardarsi come negative.

Composizione del problema.

Essendo a, b i poli coniugati ad A e B′ si bisechino in D e G le aA, bB′, ed espressa con la ragione di CA : CL la duplicata della data di $m : n$ si trovi dopo B′L, B′C, Da la quarta proporzionale aI : indi prese le IN, bP in modo che serbino alle aG, ab rispettivamente la ragione di CL : LB′, si faccia NQ doppia di Pa e si tagli sulla perpendicolare elevata a CA per I la IT uguale bP più il doppio di CI, e la TR′ uguale ad ab. Le perpendicolari a CA condotte pe' punti comuni al cerchio che ha QT per diametro ed all'iperbola che passa per A ed ha per asintoti le rette SO′, O′R′ parallele ad AC, IT, determinano sul cerchio dato i punti richiesti.

È da avvertirsi che il punto T comune al cerchio ed all' iperbola non deve considerarsi; inoltre quando il punto B′ cade pure dalla parte CA anche il punto b si troverà da questa parte, e perciò invece di assegnare i punti a, b come negli altri casi, li abbiamo distinti col nome di poli coniugati ad A e B. In questa stessa ipotesi si vede facilmente dalle formole esposte qui sopra quale sarebbe tutta la costruzione. Ma merita particolare attenzione il caso in cui il punto B′ cadesse in L poichè allora essendo $n' = m'$ l' equazione (1) si riduce ad un' equazione di secondo grado divenendo

$$(c+2b-a)x^2 - b(b+2c)x + b^2c = o.$$

e ci dimostra per conseguenza che il problema è di secondo grado, quando le corde devono essere nella sudduplicata delle distanze de' rispettivi punti dati dal centro.

L' equazione ottenuta può essere costruita facilmente, infatti ponendola sotto la forma

$$(c-a)(x-b)^2 = 2b(x-a)\left(\tfrac{1}{2}\,b - x\right),$$

si vede che se facciamo

$$(x-a)\left(\tfrac{1}{2}\,b - x\right) = y^2$$

si ottiene

$$y = \sqrt{\frac{c-a}{2b}}\cdot\left(x-b\right),$$

onde (Fig. 20) divisa la ab per metà in c, e presa sulla aS la $a\,d = \sqrt{\frac{(c-a)b}{2}}$ cioè media proporzionale tra la ca, e la DG, le perpendicolari ad AC pe' punti ove la db incontra il cerchio che ha per diametro cG determinano sul cerchio dato i punti richiesti. I punti a, b, D, G sono determinati come nella Fig. 18. Bisogna anche notare che se $\frac{c-a}{b}$ non fosse una quantità positiva la costruzione accennata non potrebbe effettuarsi; ma è facile il rilevare che se $\frac{c-a}{b}$ è una quantità negativa il problema è impossibile. Difatti da' valori di a, b, c si ha $\frac{c-a}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\alpha'}{r^2} - 1\right)$, e quindi perchè sia $\frac{c-a}{b}$ una quantità negativa deve essere $r^2 > \alpha\alpha'$. Ciò posto ponendo nell'equazione trovata più sopra per x il suo valore $t - \frac{r^2}{\alpha'}$, ed in vece di a, b, c le espressioni corrispondenti si ottiene

$$\left(1+\frac{3r^2}{\alpha\alpha'}\right)t^2 - \frac{2r^2}{\alpha'}\left(1+\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{r^2}{\alpha\alpha'}+\frac{r^2}{\alpha^2}\right)t + \frac{r^4}{\alpha'^2}\left(1+\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{r^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right) = o,$$

la quale equazione se ha radici reali dovrà averle tutte e due positive, e perchè il problema sia possibile deve essere $t < r$, onde se facciamo $t = y + r$, la trasformata in y dovrà avere le sue radici negative. Pertanto fatta l'indicata sostituzione si ha

$$\left.\begin{array}{r}\left(1+\frac{3r^2}{\alpha\alpha'}\right)y^2-2r\left(\frac{r}{\alpha'}+\frac{r}{\alpha}+\frac{r^3}{\alpha\alpha'^2}+\frac{r^3}{\alpha^2\alpha'}-1-\frac{3r^2}{\alpha\alpha'}\right)y\\+\left(1-\frac{r}{\alpha'}-\frac{r}{\alpha}+\frac{r^2}{\alpha\alpha'}\right)^2r^2\end{array}\right\}=o\,(*)$$

e quindi se

$$\frac{r}{\alpha'}+\frac{r}{\alpha}+\frac{r^3}{\alpha\alpha'^2}+\frac{r^3}{\alpha^2\alpha'}>1+\frac{3r^2}{\alpha\alpha'},$$

ovvero

$$\left(1+\frac{r^2}{\alpha\alpha'}\right)\left(\frac{r^2}{\alpha'}+\frac{r^2}{\alpha}\right)>r\left(1+\frac{3r^2}{\alpha\alpha'}\right),$$

i valori di y sono o ambedue positivi o immaginarî, e per conseguenza il problema impossibile. Or essendo $r^2>\alpha\alpha'$ possiamo supporre $r^2=\alpha\alpha'(1+\delta)$, δ essendo una quantità positiva qualunque e l' inequazione precedente diverrà

$$(2+\delta)(1+\delta)(\alpha+\alpha')>(4+3\delta)r\,,$$

ovvero elevando a quadrato

$$(2+\delta)^2(1+\delta)(\alpha+\alpha')^2>(4+3\delta)^2\alpha\alpha'\,,$$

la quale può porsi sotto la forma

$$(\alpha-\alpha')^2+\left(4-\frac{(4+3\delta)^2}{(1+\delta)(2+\delta)^2}\right)\alpha\alpha'>o\,,$$

ed essendo $4-\frac{(4+3\delta)^2}{(1+\delta)(2+\delta)^2}=\frac{8\delta+11\delta^2+4\delta^3}{(1+\delta)(2+\delta)^2}$, si vede che è sempre

(*) Quest' equazione si ricava facilmente se si rifletta che per le note proprietà delle equazioni il coefficiente di y^2 deve essere uguale a quello di t^2, e il coefficiente di y e il termine noto sono i valori che prendono la quantità

$$2\left(1+\frac{3r^2}{\alpha\alpha'}\right)t-\frac{2r^2}{\alpha'}\left(1+\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{r^2}{\alpha\alpha'}+\frac{r^2}{\alpha^2}\right),$$

ed il primo membro della proposta quando si fà $t=r$.

soddisfatta, onde quando $r^2>\alpha\alpha'$ il problema è impossibile, e sarebbe perciò inutile il cercare di costruire l' equazione ottenuta in x, quantunque non ci riuscirebbe difficile seguendo l' andamento tenuto nel n. 53. È però da avvertirsi che se $r^2>\alpha\alpha'$ il problema è impossibile, ma non perciò può risolversi purchè sia $r^2<\alpha\alpha'$, perchè questa condizione è necessaria per la possibilità del problema ma non sufficiente. Per trovare la giusta condizione necessaria e sufficiente bisogna stabilire le due inequazioni che esprimono essere negativo il coefficiente di y e reali le radici dell' equazione in y, e queste due sole sono sufficienti perchè avendo già provato che l'equazione in t non ammette radici negative non può temersi che la y divenga negativa e maggiore di $2r$ in valore assoluto, non potendo neppure sorpassare r.

55. Se si avesse $r^2=\alpha\alpha'$, cioè che il punto B' fosse in a, anche sarebbe il problema impossibile, come da ciò che precede e dalla costruzione stessa apparisce. Pertanto in questo caso essendo $\frac{r^2+x^2}{2x}=\frac{r^2+x'^2}{2\alpha'}$ l' equazione (1') del n. precedente si rende divisibile pel fattore $\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}-t=o$, e si riduce ad

$$\frac{r^2}{\alpha'}-t=\pm\frac{m}{n}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\cdot\left(\frac{r^2}{\alpha}-t\right),$$

ovvero

$$\alpha-t=\pm\frac{mr}{n\alpha'}(\alpha'-t),$$

onde il problema in questo caso è anche di secondo grado e le perpendicolari a CA pe' punti le cui distanze da a, A sono in ragion composta di $m:n$ e del raggio a CA determinano sul cerchio dato i punti cercati. (*)

(*) Essendo l' equazione trovata in t di primo grado potrebbe credersi pure che tale fosse il grado del problema; ma convien riflettere che il punto cercato è dato dall'intersezione di rette col cerchio dato, e che quindi deve considerarsi il problema come di secondo grado.

Abbiamo veduto nel n. 53 che il problema era di secondo grado quando uno de' punti era (Fig. 19) in F$'$ o in F$''$, lo stesso devesi quindi ricavare dalle equazioni e dalla costruzione riguardanti il caso generale in cui i punti dati sono in direzione col centro. Non l'abbiamo fatto rimarcare per la prima soluzione data nel n. 54 perchè è chiaro che saremmo ricaduti su quella esposta pel caso suddetto nel n. 53: ma l'altra composizione ricavata costruendo l'equazione in x del n. 54 ci porge una bella soluzione del caso succennato che ricavasi dalla stessa costruzione eseguita sulla figura per la quale non è necessario distinguere i due casi rimarcati al n. 53. Difatti supponiamo che il punto A (Fig. 18) sia sulla periferia del cerchio sarà $\alpha' = \pm r$, onde $c = o$, e le equazioni (3$'$), (4$'$) del citato n. 54 supponendo pure $p = b$, divengono

$$xy - \frac{m'b}{n'-m'}x = o$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2m'b-an'}{n'-m'}x - \left(b + \frac{m'b}{n'-m'}\right)y = o,$$

la prima delle quali ci dimostra che l'iperbola si trasforma ne' suoi asintoti. Lo stesso come abbiamo asserito può dedursi dalla costruzione stessa indicata pel caso generale, poichè supponendo che il punto A cada in A$'$, in questo punto si confonderanno pure il punto a e il punto I, e le IN, NQ si determineranno allo stesso modo, talchè sarà $A'N = \frac{CL.\,A'G}{B'L}$, $bP = \frac{CL.\,A'b}{B'L}$, $NQ = 2PA'$. La IT dovrà per conseguenza prendersi sulla A$'$T$'$, e sarà $A'T' = bP$, onde QT$'$ sarà il diametro del cerchio; e l'iperbola, presa $T'O'' = bA'$, dovendo avere per asintoti O$''$R$''$ ed O$''$T$'$ e passare per T$'$ si cambia ne' suoi asintoti: e perciò le perpendicolari a CA pe' punti ove la O$''$R$''$ interseca il cerchio che ha QT$'$ per diametro determinano sul cerchio dato i punti cercati. Se il punto A$'$ cade in A$''$ la costruzione sempre è la stessa solo deve modificarsi secondo la

*

posizione de' punti: così la $CL = \frac{n^2.CA''}{m^2}$ deve prendersi da C verso L$'$, la A$'$N che in questo caso è uguale a $\frac{CL'.A''G}{B'L'}$ deve computarsi dal punto A$''$ e nel senso B$'$L$'$, la $bP = \frac{CL'.\,A''b}{B'L'}$ in senso contrario a bA'' o nello stesso senso secondochè il punto L$'$ cade tra C e B$'$ o fuori, e la NQ secondo bP. Finalmente la $IT = bP$ si porterà sulla perpendicolare a CA per A$''$ da A$''$ verso T$''$ o in senso contrario secondochè la bP si è presa secondo Cx, o in senso opposto; e la $T''O''' = A''b$ deve prendersi sul prolungamento della A$''$T$''$ se il punto b sta fra i punti A$''$, e P; da T$''$ verso A$''$ nel caso contrario. (*)

56. Abbiamo veduto nel n. 54 come nel caso che i punti dati sono in direzione col centro moltiplicando l'equazione di terzo grado che si ottiene per $r^2 + \alpha'^2 - 2x't$ possa essa costruirsi con l'intersezione di un'iperbola e di un cerchio quando però il centro del cerchio dato è compreso fra i dati punti: abbiamo pure veduto in seguito che senza ricorrere a questa veduta particolare, ma seguendo i principî generali esposti per la costruzione di una qualunque equazione del terzo grado si perviene, anche facendo uso di un'iperbola e di un cerchio, ad una composizione del problema che può applicarsi qualunque sia la posizione de' punti dati. Quindi pare che potevamo omettere la prima costruzione data, ma come essa è alquanto più semplice dell'altra, e quindi preferibile quando ha luogo, l'abbiamo voluto rapportare per mostrare con un esempio ciò che abbiam detto alla fine del n. 50. Così pure per dare un'ap-

(*) Tutto ciò apparirà chiaramente se con la scorta delle formole, le quali danno sempre in tutti i casi la norma che si deve seguire, si esaminino i quattro casi, $n' < m'$, ed $\alpha >, o < r$, $n' > m'$ ed $\alpha >, o < r$.

plicazione delle norme indicate nel n. 28, concepiamo unito il punto cercato con un punto dell' asse delle x determinato da un' ascissa qualunque a; e dinotiamo con x, y le coordinate del punto ove la congiungente i punti t, u; a, o incontra il cerchio. Ponendo nella formola trovata nel n. 52 esprimente l' ascissa del punto F, $\beta = o$, $\alpha = a$, $t = x$, $u = y$, avremo

$\frac{2ay^2}{y^2+(x-a)^2} - x = \frac{2ar^2-(r^2+a^2)x}{r^2+a^2-2ax}$, ed essa dovendo indicare l' ascissa del punto ove la retta che unisce i punti x, y; a, o incontra il cerchio, otterremo

$$t = \frac{2ar^2-(r^2+a^2)x}{r^2+a^2-2ax}:$$

quindi essendo

$$u = \frac{y}{x-a}(t-a),$$

perchè i tre punti t, u; x, y; a, o sono in linea retta, sarà

$$u = \frac{(a^2-r^2)y}{r^2+a^2-2ax}.$$

Espressi in tal guisa i valori di t, u in funzione di x, y possiamo ottenere immediatamente l' equazione in x, y ponendo in vece di t, u le espressioni precedenti nell' equazione (4, 52) trovata fra t, u: prima di eseguire questa sostituzione facciamo per semplicità di calcolo $\frac{r^2+a^2}{2a} = p$, onde i valori di t, u si riducono a

$$t = \frac{r^2-px}{p-x},\ u = \frac{(a-p)y}{p-x},$$

e l' equazione suddetta fra x, y sarà

$$n^2\Big(\alpha'(r^2-px)-r^2(p-x)\Big)^2\Big((r^2+\alpha^2+\beta^2)(p-x)-2\alpha(r^2-px)-2\beta(a-p)y\Big)$$
$$= m^2\Big(r^2(p-x)-\alpha(r^2-px)-\beta(a-p)y\Big)^2\Big((r^2+\alpha'^2)(p-x)-2\alpha'(r^2-px)\Big) (1),$$

che appartiene ad una linea del terzo ordine. Supponendo $\alpha^2+\beta^2=r^2$, rendesi quest' equazione divisibile pel fattore

$$r^2(p-x)-\alpha(r^2-px)-\beta(a-p)y,$$

e divenendo

$$2n^2\Big(r^2(\alpha'-p)+(r^2-\alpha'p)x\Big)^2$$
$$= m^2\Big(r^2(p-\alpha)-(r^2-\alpha p)x-\beta(a-p)y\Big)\Big((r^2+\alpha'^2)(p-x)-2\alpha'(r^2-px)\Big) \ldots (2)$$

esprime una curva di secondo grado. Essendo ora a e quindi p arbitraria possiamo disporne in modo che semplicizzi l'equazione precedente; così se facciamo $\alpha' p = r^2$, l' equazione esprime un' iperbola che ha per asintoti le rette corrispondenti alle equazioni che si ottengono uguagliando a zero i fattori del secondo membro, e che potrebbesi quindi facilmente costruire assegnandone un punto. Se poniamo

$$r^2+\alpha'^2 = 2\alpha' p,\ \text{ovvero}\ a = \alpha',$$

x, y rappresenteranno (Fig. 18) le coordinate del punto E, e l'equazione (2) si riduce a

$$2n^2(r^2-\alpha' x)^2 = m^2\Big(r^2(r^2+\alpha'^2-2\alpha\alpha')+(\alpha r^2+\alpha\alpha'^2-2\alpha' r^2)x+\beta(r^2-\alpha'^2)y\Big),$$

e dinota una parabola che ha per diametro e per tangente corrispondente le rette indicate dall' equazioni

$$r^2-\alpha' x = o$$

$$\beta(r^2-\alpha'^2)y+(\alpha r^2+\alpha\alpha'^2-2\alpha' r^2)x+r^2(r^2+\alpha'^2-2\alpha\alpha') = o \ldots (3).$$

Di queste equazioni la prima esprime (Fig. 19) la DH, l' altra una retta che comprende con l' asse delle x un angolo che ha per tangente trigonometrica $-\frac{\alpha-\frac{2\alpha'(r^2-\alpha\alpha')}{r^2-\alpha'^2}}{\beta}$, onde presa nel senso AD la

$CK' = \frac{2\alpha'(r^2-\alpha\alpha')}{r^2-\alpha'^2} = \frac{2\alpha'\left(\frac{r^2}{\alpha'}-\alpha\right)}{\frac{r^2}{\alpha'}-\alpha'} = \frac{2\alpha'.DB'}{DA}$, quella retta sarà perpendicolare alla BK'. Quindi per costruire l' equazione (3) basta assegnare un punto della retta da essa rappresentata, e volendo determinare il punto ove incontra la DH che è il vertice della parabola corrispondente a questo diametro, si potrebbe porre in essa $x=\frac{r^2}{\alpha'}$ e ricavare poi la y. Ma sarà meglio lasciare nell' equazione (3) un termine affetto da x ed avente tra i fattori del suo coefficiente $r^2-\alpha'^2$, e ciò si ottiene ponendo l' equazione (3) sotto la forma

$$\beta(r^2-\alpha'^2)y+\alpha(r^2-\alpha'^2)x=2\alpha'(r^2-\alpha\alpha')x-r^2(r^2+\alpha'^2-2\alpha\alpha'),$$

poichè mettendo ora nel solo secondo membro $x=\frac{r^2}{\alpha'}$ si ha l' equazione

$$\beta y+\alpha x=r^2,$$

la quale appartenendo alla BG ci dimostra che questa incontra la DH nello stesso punto in cui la interseca la retta espressa dall'equazione (3) cioè nel punto H; e quindi la perpendicolare alla BK' condotta per H sarà la tangente corrispondente al diametro DH. Assegnati per tal modo un diametro e la tangente basta trovare un punto della parabola onde possa descriversi: questo punto lo troveremo facilmente cercando l' altro punto che la parabola ha di comune colla BG, cioè ponendo nella sua equazione $r^2-\alpha x-\beta y=o$. Fatta questa sostituzione si ha l' equazione

$$n^2(r^2-\alpha'x)^2=m^2(r^2-\alpha\alpha')(r^2-\alpha'x),$$

la quale essendo divisibile per $r^2-\alpha'x$ ci dimostra, come già abbiamo trovato, che H è un punto della parabola, e riducendosi ad

$$\frac{r^2}{\alpha'}-x=\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{r^2}{\alpha'}-\alpha\right),$$

si vede che presa sulla DC da D verso C una retta uguale ad $\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{r^2}{\alpha'}-\alpha\right)=\frac{m^2}{n^2}.\ B'D$, la parallela tirata pel suo estremo a DH determina sulla DG l' altro punto ove questa incontra la parabola. Quindi presa $HH'=\frac{m^2}{n^2}.\ BH$, sarà H' un tal punto.

Composizione del problema.

Condotte al cerchio le tangenti AE, BG ed alla CA le perpendicolari EH, BB', si prendano le CK', HH' che serbino rispettivamente alle DB', BH le ragioni di 2CA : DA e di $m^2 : n^2$. La parabola che ha H per vertice HD per diametro, la tangente perpendicolare a BK' e passa per H' incontra il cerchio ne' punti indicati da E nella Fig. 18.

57. Nel caso di $\beta=o$ la parabola si cambia in due rette, le quali, ponendo $\alpha=\mp r$ secondochè si vuole che il punto B sia (Fig. 20) in F' o in F'', sono rappresentate dall' equazione

$$2n^2(r^2-\alpha'x)^2=m^2r(r\pm\alpha')^2(r\mp x).$$

Per costruire questa equazione poniamo

$$\frac{2n(r^2-\alpha'x)}{m(r\pm\alpha')}=x',$$

e si avrà

$$x'^2=2r(r\mp x)=2r\left(r\mp\frac{r^2}{\alpha'}+\frac{m(\alpha'\pm r)}{2n\alpha'}x'\right),$$

ovvero

$$x'^2-\frac{m}{n}\left(r\pm\frac{r^2}{\alpha'}\right)x'=2r\left(r\mp\frac{r^2}{\alpha'}\right).$$

Ciò posto supponiamo che si prendano i segni superiori cioè che il punto B sia in F′, sarà il quadrato della SF″ uguale a $2r\left(r-\frac{r^2}{\alpha'}\right)$, onde presa sulla SF′ la SE $=\frac{m}{2n}\left(\frac{r^2}{x'}+r\right)=\frac{m}{n}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{F}'a$, e sulla EF″ le EH, EH′ uguali alla ES saranno F″H, F″H′ i valori di x' dati dall' equazione precedente. Trovati i valori di x' si dovrebbero cercare quelli di x ma l' equazione $x'^2=2r(r-x)$, ci dimostra che il cerchio descritto col centro F″ ed intervallo x', determina sul cerchio dato que' punti che hanno per ascissa x.

Composizione del problema.

Condotta al cerchio la tangente AS ed alla CA la perpendicolare Sa si prenda sulla SF′ la SE che serbi alla metà di $\mathrm{F}'a$ la data ragione, e sulla EF″ si porti la SE da E in H, e da E in H′. I cerchi che hanno F″ per centro e per raggi F″H, F″H′ incontrano il cerchio dato ne' punti indicati da E nella fig. 18.

Questa costruzione che è molto più elegante delle altre due date pel medesimo caso ne' n. 53, 55, e che forse non potrebbe esser più semplice, si applica ugualmente pel caso in cui il punto B cade in F″ portando la SE che allora è uguale ad $\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{F}''a$ sulla SF″ ed i cerchi avranno F′ per centro. È però da avvertirsi che se il punto A fosse nell' area del cerchio, la costruzione che abbiamo data non può effettuarsi, non perchè cambia l' equazione in x', ma perchè le particolari osservazioni che abbiamo fatte per costruirla non hanno più luogo. Pertanto supponendo che sia $\alpha'<r$, ed a il punto dato, prendendo i segni superiori l' equazione trovata più sopra in x' può porsi sotto la forma

$$x'^2-\frac{m}{n}\,\frac{r(\alpha'+r)}{\alpha'}\,x'=-2r\,\frac{r(r-\alpha')}{\alpha'},$$

ed osservando che se si prolunga la CS finchè incontra la perpen-

dicolare condotta a CA pel punto F″ in K′, si ha $\mathrm{S'K'}=\frac{r(\alpha'+r)}{\alpha'}$, $\mathrm{SK'}=\frac{r(r-\alpha')}{\alpha'}$, e $2r.\frac{r(r-\alpha')}{\alpha'}=\mathrm{SS'.SK'}=\overline{\mathrm{K'F''}}^2-\overline{\mathrm{K'S}}^2$; si vede che presa $\mathrm{F''L'}=\frac{m}{n}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{S'K'}$, F″P = SK′, K′Q = L′P, e le QR, QR′ uguali alla F″L′; le F″R, F″R′ indicano i valori di x' onde i cerchi descritti col centro F″ e co' raggi F″R, F″R′ determinano sul cerchio dato i punti accennati più sopra. Allorchè si prendono i segni inferiori cioè che il punto dato è F″ la costruzione è la stessa soltanto resta modificata secondo la posizione del punto dato. Difatti per tale ipotesi si ha l' equazione

$$x'^2+\frac{m}{n}\,\frac{r(r-\alpha')}{\alpha'}\,x'=2r\,\frac{r(x'+r)}{\alpha'},$$

onde prolungando la CS finchè incontra la perpendicolare elevata a CA dal punto F′ abbiamo $\mathrm{S'K}=\frac{r(r-\alpha')}{\alpha'}$, $\mathrm{SK}=\frac{r(\alpha'+r)}{\alpha'}$, $2r\,\frac{r(x'+r)}{\alpha'}=\mathrm{S'S.\,SK}=\overline{\mathrm{SK}}^2-\overline{\mathrm{KF'}}^2$ ossia ad $\overline{\mathrm{F'S''}}^2$, supponendo che sia KS″ = KS. Quindi presa la $\mathrm{F'L}=\frac{m}{n}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{S'K}$; e le $\mathrm{L}r$, $\mathrm{L}r'$ uguali alla LS″ saranno $\mathrm{F'}r$, $\mathrm{F'}r'$ i valori di x' e i cerchi avranno F′ per centro e per raggi rispettivamente le $\mathrm{F'}r$, $\mathrm{F'}r'$.

58. Supponendo che sia $\beta=o$ e nessuno de' punti dati sulla periferia del cerchio l' equazione (1, 56) si riduce ad

$$n^2\Big(\alpha'(r^2-px)-r^2(p-x)\Big)^2\Big((r^2+\alpha^2)(p-x)-2\alpha(r^2-px)\Big)$$
$$=m^2\Big(\alpha(r^2-px)-r^2(p-x)\Big)^2\Big((r^2+\alpha'^2)(p-x)-2\alpha'(r-px)\Big),$$

e ponendo per brevità $x-p=x'$, si ottiene

$$n^2\Big((r^2-x'p)x'-\alpha'(p^2-r^2)\Big)^2\Big((r^2+x^2-2xp)x'-2\alpha(p^2-r^2)\Big)$$
$$=m^2\Big((r^2-\alpha p)x'-\alpha(p^2-r^2)\Big)^2\Big((r^2+\alpha'^2-2x'p)x'-2x'(p^2-r^2)\Big).$$

Essendo ora p arbitraria possiamo determinarla in modo che i coefficienti di x ne' secondi fattori di ambedue i membri abbiano segni diversi, e potremo quindi costruire questa equazione come l' equazione (1, 54). Supponiamo dunque che per adempire la condizione enunciata si prenda p in modo che sia

$$\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}-p=p-\frac{r^2+x'^2}{2x'},$$

l' equazione precedente diverrà

$$\alpha n^2\Big((r^2-\alpha' p)x'-\alpha'(p^2-r^2)\Big)^2\Big[p^2-r^2+\Big(\frac{r^2+x'^2}{2x'}-p\Big)x'\Big]$$
$$=\alpha' m^2\Big((r^2-\alpha p)x'-\alpha(p^2-r^2)\Big)^2\Big[p^2-r^2-\Big(\frac{r^2+x'^2}{2x'}-p\Big)x'\Big],$$

dalla quale moltiplicandola per $p^2-r^2-\Big(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p\Big)x'$, e ponendo

$$\Big[p^2-r^2+\Big(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p\Big)x'\Big]\Big[p^2-r^2-\Big(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p\Big)x'\Big]$$
$$=\Big(\frac{r^2+\alpha'^2}{2x'}-p\Big)^2y^2\ldots(1)$$

si ricava

$$n\sqrt{\alpha\alpha'}.\Big(\frac{r^2+\alpha'^2}{2x'}-p\Big)\Big((r^2-\alpha' p)x'-\alpha'(p^2-r^2)\Big)y$$
$$=m\alpha'\Big((r^2-\alpha p)x'-\alpha(p^2-r^2)\Big)\Big[p^2-r^2-\Big(\frac{r^2+x'^2}{2\alpha'}-p\Big)x'\Big]\ldots(2)$$

e le ascisse de' punti comuni alle curve rappresentate da queste due ultime equazioni sono i valori di x'. Di queste equazioni la (1) esprime un cerchio e la (2) un' iperbola: per costruirle si rifletta che essendo $\frac{r^2+x^2}{2x}-p=p-\frac{r^2+x'^2}{2x'}$, presa (Fig. 21) $Ca=\frac{r^2}{x'}$, e $Cb=\frac{r^2}{\alpha}$ e bisecate in D, E le aA, bB e la ED in F,

sarà CF$=p$, e che avendo posto $\alpha-p=x'$ dal punto F sono computate le x'. Quindi F è il centro del cerchio indicato dall' equazione (1), ed essendone $\dfrac{p^2-r^2}{\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p}$ il raggio, se si tira al cerchio la tangente FG e sulla perpendicolare a CA per F si porta la FG da F in H e da F in H', condotta alla H'D la perpendicolare HK sarà FK il raggio del cerchio. (*) Per costruire l'equazione (2) si ponga primieramente in essa $y=o$, ed avendosi

$$(r^2-\alpha p)x'-\alpha(p^2-r^2)=o,\ p^2-r^2-\Big(\frac{r^2+x'^2}{2\alpha'}-p\Big)x'=0,$$

si vede che condotta alla bH' la perpendicolare HL per K ed L passa l' iperbola. Riguardo agli asintoti è chiaro che uno di essi ha per equazione

$$(r^2-\alpha' p)x'-\alpha'(p^2-r^2)=o,$$

e perciò condotta alla aH' la perpendicolare HR dovrà passare per R, e sarà per conseguenza indicato dalla RO parallela alla HH': l' altro asintoto presa la KS$=$LR, passerà per S ed essendo nell' equazione (2) il coefficiente di x'^2 diviso per quello di $x'y$ col segno cambiato uguale a $-\frac{m\alpha'(r^2-\alpha p)}{n(r^2-\alpha' p)\sqrt{\alpha\alpha'}}=-\frac{m\alpha.\mathrm{F}b}{n\sqrt{\alpha\alpha'}.\mathrm{F}a}$, ne segue che se facciamo la RP uguale alla Fa, ed RI $=\frac{m}{n}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}.\mathrm{F}b$

(*) Potrebbe credersi che cadendo il punto F nell' area del cerchio non possa sempre costruirsi in tal guisa il valore del raggio, ma bisogna osservare che essendo $\frac{r^2+x^2}{2x}-r=\frac{(r-x)^2}{2x}$ una quantità positiva, il punto E sarà sempre fuori del cerchio: e lo stesso dovendo pure avvenire pel punto D non potrà mai trovarsi nell' area del cerchio il punto F.

sarà espresso dalla SO parallela alla PI. Resta ora ad assegnare la quantità a la quale è determinata dall' equazione $\frac{r^2+a^2}{2a}=p$, ossia $a^2-2ap+r^2=o$, dalla quale si deduce $a=p\pm\sqrt{p^2-r^2}$, onde questa soluzione ha sempre luogo poichè già abbiam detto che $p>r$. È chiaro poi che presa la $FN=FG$, N è il punto col quale si devono unire i punti del cerchio dato che hanno per ascissa x', ed è evidente che il punto N' vi soddisfà ugualmente.

Composizione del problema.

Essendo a, b i poli coniugati ad A, B si bisechino in D, E le Aa, Bb, e la DE in F, si descriva col centro F ed intervallo la tangente FG il cerchio H'Hk, e si elevi alla CA la perpendicolare H'H: indi congiunte le H'D, H'a, H'b si tirino le rette Hk, Hl, Hr; e condotta RI parallela ad HH' e che stia alla Fb in ragion composta della sudduplicata di CB : CA e della data di $m:n$ si facciano le KS, RP uguali alle RL, Fa e si guidi alla PI la parallela SO. Le rette che uniscono il punto N co' punti ove il cerchio dato è incontrato dalle parallele ad HH' condotte pe' punti comuni al cerchio descritto col centro F e raggio FK, ed all'iperbola che passa per K tra gli asintoti OS, OR', determinano sul cerchio dato i punti cercati.

Non bisogna tralasciar di notare che il cerchio e l' iperbola passano pel punto K, ma per questo punto non devesi tirare la parallela alla HH'; inoltre si rifletta che se α, α' avessero segni diversi il radicale $\sqrt{\alpha\alpha'}$ sarebbe immaginario, onde questa soluzione non si può allora applicare. Ma quantunque in tal caso sia alquanto preferibile la soluzione che abbiamo data nel n. 54, pure determinando convenientemente p, possiamo ricavare dall'equazioni ora ottenute una soluzione che corrisponda a tutti i casi, come lo è l'ultima

riportata nel n. 54. Difatti se invece di porre $\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p=p-\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}$, facciamo $r^2+\alpha'^2-2\alpha'p=2\alpha p-r^2-\alpha^2$, in luogo delle equazioni (1),(2) si hanno le due seguenti

$$\left[p^2-r^2-\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p\right)x'\right]\left[\frac{\alpha(p^2-r^2)}{\alpha'}+\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p\right)x'\right]$$
$$=\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p\right)^2y^2$$

$$n\left(r^2+\alpha'^2-2\alpha'p\right)\left((r^2-\alpha'p)x'-\alpha'(p^2-r^2)\right)y$$
$$=m\left((r^2-\alpha p)x'-\alpha(p^2-r^2)\right)\left(2\alpha'(p^2-r^2)-(r^2+\alpha'^2-2\alpha'p)x'\right).$$

Per determinare il valore di p si osserverà che essendo $\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p\right)\alpha'=\left(p-\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}\right)\alpha$, se si divida la ED in F (*) nella ragione di CA : CB risulta $CF=p$. Ponendo $y=o$ nell' equazione del cerchio si ha

$$p^2-r^2-\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p\right)x'=o\,,\quad \frac{\alpha(p^2-r^2)}{\alpha'}+\left(\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}-p\right)x'=o\,,$$

il primo valore di x' è uguale ad FK, il secondo tenendo presente il valore di p, si rileva che può ricavarsi pure dall' equazione $p^2-r^2+\left(p-\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}\right)x'=o$, e che quindi tirate le H'Ek', Hk'K' è uguale ad FK'; e perciò K'K sarà il diametro del cerchio. Similmente ponendo $y=o$ nell' equazione dell' iperbola si vede che essa passa pure pel punto K e pel punto la cui ascissa è data dal-

(*) Per non cambiare figura supponiamo che sia EF : FD : : CA : CB quantunque corrispondendo essa alla costruzione precedente sia F il punto di mezzo della ED l' equazione $\left(p - \frac{r^2}{\alpha}\right) x' + p^2 - r^2 = o$ cioè pel punto L. Quanto agli asintoti è evidente che si assegnano come più sopra abbiam detto prendendo però la RI $= \frac{m\alpha}{n\alpha'}$. F$b$.

Composizione del problema.

Si trovino i poli coniugati de' punti A, B e sieno a, b, si bisechino le Aa, Bb in D, E, e la ED si divida in F nella ragione di CA : CB; indi si descriva col centro F ed intervallo la tangente FG il cerchio GHH', si elevi alla CA la perpendicolare HH' e tirate le rette H'D, H'E, H'b, H'a, e le Hk, Hk', Hl, Hr, si prenda sulla RO parallela ad HH' la RI che stia ad Fb in ragion composta di CB : CA e della data di $m : n$, sulla CA le RP, KS uguali alle due Fa, RL, e si conduca alla PI la parallela SO. Le rette che congiungono il punto N co' punti ove il cerchio dato è intersecato dalle parallele condotte alla HH' da' punti ne' quali s' incontrano il cerchio che ha KK' per diametro e l' iperbola che passa per R tra gli asintoti OR, OS assegnano sul cerchio dato i punti richiesti.

Questa soluzione è generalmente applicabile qualunque sia la disposizione de' punti dati solo è da avvertirsi che quando α è negativa essendo $\alpha'\left(p - \frac{r^2 + x'^2}{2x'}\right) = \alpha\left(\frac{r^2 + x^2}{2x} + p\right)$, invece di dividere la retta che corrisponde alla ED nel modo succennato bisogna prolungarla ossia cercare fuori della ED un punto le cui distanze da E e D sieno nella ragione di CA : CB.

59. Ritorniamo ora a discutere in quali casi l'equazione (4, 52) può semplicizzarsi, e ridursi ad un' equazione che esprima una curva del secondo ordine, e supponiamo che la data ragione sia di uguaglianza, cioè $m = n$, restando però i punti dati situati co-

munque rispetto al cerchio. Ponendo la precitata equazione sotto la forma

$$n^2(r^2 - \alpha' t)^2\left((r^2 - \alpha t - \beta u)^2 + (\beta t - \alpha u)^2\right)$$
$$= m^2(r^2 - \alpha t - \beta u)^2\left((r^2 - \alpha' t)^2 + \alpha'^2 u^2\right),$$

si vede che quando $m = n$, si riduce ad

$$(r^2 - \alpha' t)^2(\beta t - \alpha u)^2 = (r^2 - \alpha t - \beta u)^2 \alpha'^2 u^2,$$

dalla quale si ricava

$$(r^2 - \alpha' t)(\beta t - \alpha u) = \pm (r^2 - \alpha t - \beta u)\alpha' u \ldots. \ (1).$$

Allorchè in questa equazione prendiamo il segno — essa, tenendo presente che $u^2 + t^2 = r^2$, si riduce ad

$$(\alpha - \alpha')u = \beta(t - \alpha'),$$

ed esprime per conseguenza la retta che unisce i punti dati: e difatti questa retta se interseca il cerchio determina su di esso due punti che possono considerarsi come soddisfacenti al problema, poichè unito ciascuno di essi co' punti dati le due congiungenti si confondono in una sola retta, che è quella che passa pe' punti dati, e le due corde corrispondenti riducendosi ad una sola si possono per conseguenza riguardare come uguali. Quando prendiamo il segno + nel secondo membro l' equazione (1) diviene

$$\alpha'\beta(u^2 - t^2) + 2\alpha\alpha' ut - r^2(\alpha + \alpha')u + r^2\beta t = o,$$

ed indica un' iperbola equilatera la quale incontra il cerchio nei punti cercati. Per assegnare i determinanti di questa curva si rifletta che ponendo nell' equazione (1) $u = o$ si ha $t = o$ e $t = \frac{r^2}{\alpha'}$ quindi (Fig. 18) C, ed a sono due punti dell' iperbola. Similmente facendo $\beta t - \alpha u = o$ risulta $r^2 - \alpha t - \beta u = o$, o pure $u = o$; onde le rette espresse da queste due equazioni incontrano la retta indicata dalla prima in punti appartenenti all' iperbola; ma questa appartiene alla CB, e le altre due alle perpendicolari ad essa tirate pe' punti C, e b', essendo b' il polo coniugato a B, dunque abbiamo di nuovo il punto C ed un'altro punto b' della curva, ed è chiaro ancora che le due perpendicolari alle CA, CB condotte pe' punti a, b' s'intersecano in un punto appartenente pure all' iperbola. Determinati questi punti passiamo ad assegnare gli asintoti, per ciò che si è detto nel n. 6 essi sono paralleli alle rette dinotate dall' equazione

$$\alpha'\beta(u^2-t^2)+2\alpha\alpha' ut=o,$$

e poichè questa equazione può porsi sotto la forma

$$\frac{u^2}{t^2}+\frac{2\alpha}{\beta}\frac{u}{t}-1=o$$

si rileva che gli asintoti sono paralleli alle rette che dividono per metà gli angoli BCB', BCA: (*) e si determineranno poi osservando, come è facile il vedere, che il centro dell' iperbola è al punto di mezzo della ab'.

Composizione del problema.

Trovati i poli coniugati a, b' ad A e B si divida per metà la ab' in C'. L' iperbola equilatera che passa per C, ed ha per

(*) Difatti se poniamo l'angolo BCA $=\theta$, avremo $\frac{\beta}{\alpha}=\tang\theta$, e l'equazione trovata qui sopra si riduce ad

$$\frac{u^2}{t^2}+\frac{2}{\tang\theta}\frac{u}{t}-1=o,$$

donde $\text{tung}\ \theta=\dfrac{\frac{2u}{t}}{1-\frac{u^2}{t^2}}$, e quindi $\frac{u}{t}=\tang\frac{1}{2}\theta$, $\frac{u}{t}=\tang\frac{1}{2}(\pi-\theta)$.

asintoti le parallele condotte per C' alle rette che dividono per metà gli angoli BCB', BCA interseca il cerchio ne' punti cercati.

Se $\beta=o$ l'equazione dell' iperbola diviene

$$2\alpha\alpha' ut-r^2(\alpha+\alpha')u=o,$$

ovvero

$$u=o\quad t=\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\alpha}+\frac{r^2}{\alpha'}\right),$$

quindi l'iperbola si cambia in due rette che sono la posizione che prenderebbero in questo caso gli asintoti, infatti la prima di queste equazioni esprime la B'A, l'altra la perpendicolare elevata alla CA pel punto di mezzo della ba: e ciò nasce dacchè uno de' punti pe' quali deve passare l'iperbola cade in questo caso su di uno degli asintoti. Così pure se mai i punti fossero ad ugual distanza dal centro essendo la C'C la retta che divide per metà l'angolo BCA i due asintoti dell' iperbola sarebbero le C'C, $b'a$; onde dovendo passare pe' punti C, a, b', in queste medesime rette si trasformerebbe la curva, e quindi M, M', M'', M''' sarebbero i punti cercati.

Avendo trovato che quando i punti dati sono in direzione col centro la retta espressa dall' equazione $t=\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\alpha}+\frac{r^2}{\alpha'}\right)$ determina sul cerchio dato i punti richiesti, riflettendo che quest' equazione è di primo grado si rileva che pe' punti ove la retta che rappresenta interseca il cerchio dato vi possono pure passare altri cerchi; onde possiamo risolvere questo caso del problema coll' intersezione di due cerchi. Per determinare uno degli accennati cerchi si osservi che l'equazione della retta non contenendo u l'equazione di un cerchio che passa pe' punti che essa ha di comune col cerchio dato sarà della forma

$$u^2+t^2-2at+b=0\ldots\ldots\ldots(2);$$

ed essendo $u^2 + t^2 = r^2$ l' equazione del cerchio dato, sottraendo l' una dall' altra si deduce che

$$t = \frac{1}{2a}\left(b + r^2\right)$$

è l' equazione della retta che passa pe' punti comuni a questi due cerchi, la quale se facciamo

$$\frac{1}{2a}\left(b + r^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\alpha} + \frac{r^2}{\alpha'}\right) \ldots\ldots (3)$$

si rende identica all' equazione

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\alpha} + \frac{r^2}{\alpha'}\right),$$

e quindi la (3) indica la relazione che deve passare tra a e b onde l' equazione (2) appartenga ad un cerchio che verifichi la condizione enunciata più sopra. Pertanto avendosi una sola equazione tra a e b si rileva che indeterminato è il numero di siffatti cerchi, lo che si vede pure immediatamente se si rifletta che una retta ha di comune con un cerchio soltanto due punti. Or potendosi dare ad a o b un valore qualunque per poi determinare l' altra di queste quantità in virtù dell' equazione (3) facciamo $b = o$, ed avendosi $a = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}$, l' equazione (2) si ridurrà ad

$$u^2 + t^2 - \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}\, t = 0.$$

In questa equazione se facciamo $u = o$ si ha $t = o$, $t = \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}$; il primo di questi valori ci dimostra che il cerchio passa pel punto C, per costruire l' altro si rifletta che essendo $t = \frac{2\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}$ si ha $t - \alpha = \frac{\alpha(\alpha'-\alpha)}{\alpha+\alpha'}$, $\alpha' - t = \frac{\alpha'(\alpha'-\alpha)}{\alpha+\alpha'}$, onde divisa la B''A in D'

*

in modo che sia B''D' : D'A : : CB'' : CA, sarà CB'' il diametro del cerchio che incontra il dato ne' punti cercati. Se i punti dati non sono da una medesima parte rispetto al centro ma in diverse parti come B' ed A, allora si deve trovare fuori della B'A un punto tale che le sue distanze da A e B' sieno nella ragione di CA : CB'. In generale il cerchio cercato è il luogo geometrico di que' punti le cui distanze da' punti dati sono fra loro come le distanze che il centro del cerchio dato serba rispettivamente da' punti medesimi. E ciò è facile a rilevarsi tanto dall' equazione del cerchio quanto dal modo col quale l' abbiamo costruita. È ancora da osservarsi che questo cerchio resta determinato indipendentemente dal raggio del cerchio dato, onde ne segue che

Se dati due punti A, B'' *si determina il cerchio* CmD' *luogo geometrico de' punti le cui distanze da* A, B'' *sono fra loro in un dato rapporto, descritto col centro* C *ed un raggio qualunque* CA' *un cerchio se si unisce il punto* m *ove incontra il primo cerchio co' punti* A, B'' *le corde intercette nel cerchio* A'mM *sono sempre uguali.*

60. Nell' esaminare i diversi casi ne' quali si semplicizza l' equazione (4, 52) abbiamo sempre supposti che sieno dati due punti variando soltanto di posizione; ma da quella equazione può aversi anche la soluzione di un altro problema che a prima vista potrebbe sembrare diverso da quello enunciato nel n. 52, cioè del problema nel quale si cercasse un punto su di un dato cerchio in modo che tirate da esso due rette, una parallela ad una retta data di posizione, l' altra che passi per un dato punto sieno le corde intercette nel cerchio in data ragione. Difatti supponendo che l' asse delle x sia parallelo alla retta data basta fare nell' equazione (4,52)

$\alpha' = \frac{1}{0}$, ed essa si riduce ad

$$n^2t^2(r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u) = m^2(r^2-\alpha t-\beta u)^2 \ldots (1)$$

la quale pure appartiene ad una linea del terzo ordine, e quando il punto dato è sulla periferia del cerchio essendo $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, diviene

$$2n^2t^2 = m^2(r^2 - \alpha t - \beta u)$$

ed indica una parabola la quale ha per diametro l' asse delle y, e per tangente corrispondente la retta data dall' equazione $r^2 - \alpha t - \beta u = o$, cioè la tangente applicata al cerchio nel punto dato. Un punto della curva si assegna anche facilmente poichè ponendo $\alpha t + \beta u = - r^2$, che esprime (Fig. 22) la tangente al cerchio condotta pel punto A, si ha $t = \pm \frac{mr}{n}$. Quindi per questo caso si ha la seguente

Composizione del problema.

Condotta alla retta data la parallela Cx e la perpendicolare CI, ed al cerchio le tangenti BI, AE si prenda la CD che serbi al raggio la data ragione di $m : n$, e si tiri alla CI la parallela DE. La parabola che ha IC per diametro, IB per tangente e passa per E interseca il cerchio ne' punti cercati.

Qui pure vi sarebbero da notare altri casi cioè $\beta = o$ che rende il problema di terzo grado nel caso generale e di secondo quando il punto dato è sul cerchio; e di $\alpha = o$ che osservando essere $t^2 = r^2 - u^2$ presenta i medesimi casi; ma ci asterremo dal discuterli perchè l'equazioni che ne risultano sono per se stesse facilissime a costruirsi.

Piuttosto osserveremo che se non fosse dato alcun punto ma si dovessero condurre pel punto cercato due rette parallele a due altre date di posizione il problema è sempre di secondo grado. Infatti in questo caso supponendo pure che l' asse delle x sia parallelo ad una delle rette date; e che l' altra retta abbia per equazione $y = ax + b$

convien fare nell' equazione (4, 52) $\alpha' = \frac{1}{o}$, $\alpha = \frac{1}{o}$ e $\beta = a\alpha$; ovvero nell'equazione (1) ottenuta più sopra $\alpha = \frac{1}{o}$, $\beta = a\alpha$; lo che dà

$$n^2t^2(1 + a^2) = m^2(t + au)^2,$$

ovvero

$$nt = \pm \frac{m}{\sqrt{1+a^2}}(t + au) \ldots (2)$$

equazione appartenente ad una retta. Questa si costruisce facilmente poichè in primo luogo essendo $t = o$ quando $u = o$, si vede che passa per l' origine; inoltre mettendo

$$t + au = n,$$

risulta

$$t = \pm \frac{m}{\sqrt{1+a^2}};$$

onde il punto comune alle rette espresse da queste equazioni è pure un punto della retta indicata dall' equazione (2). Quindi se la CB è la parallela condotta pel centro all' altra retta data, presa CF $= n$, e CG $=$ CG$'$ $= m$, e condotte alla Cx le perpendicolari GH, G$'$H$'$ ed alla CB la perpendicolare FH; le CH, CH$'$ saranno le rette espresse dall' equazione (2) ed M, M$'$, M$''$, M$'''$ i punti cercati, cioè que' punti tali che condotte alle Cx, CB due parallele le parti che restano intercette nel cerchio sono fra loro come $m : n :: \text{CG} : \text{CF}$.

61. Oltre i diversi casi che abbiamo finora discussi altri ve ne potrebbero essere ne' quali il problema può essere di secondo grado, o generalmente può ridursi ad un grado minore: così nel caso esaminato nel n. 54 cioè quando i punti dati sono in direzione col centro senza che alcuno di essi sia sulla periferia del cerchio dato, se mai fosse $n^2(r^2 + \alpha^2) = m^2(r^2 + \alpha'^2)$ ovvero

$m : n :: \sqrt{r^2 + \alpha^2} : \sqrt{r^2 + \alpha'^2}$ l'equazione (1) trovata in quel n. si renderebbe divisibile per t e si riduce al secondo grado. Questo caso non l'abbiamo ivi esaminato perchè sono infiniti i casi ne' quali quell' equazione può ridursi al secondo grado. Infatti se in essa poniamo $t = a$ essendo a una quantità qualunque, e supponiamo che i dati sieno tali che si verifichi l'equazione che ne risulta, allora l'equazione (1, 54) sarà divisibile per $t - a$ e si riduce al secondo grado: ed il supporre che sia $n^2 (r^2 + \alpha^2) = m^2 (r^2 + \alpha'^2)$ torna allo stesso che eseguire ciò che ora abbiam detto facendo $a = o$.

È ancora da avvertirsi che l'equazione (4, 52) essendo di terzo grado ci dimostra che il problema ha in generale sei soluzioni, e ne' varî casi discussi i quali si sono abbassati di grado perchè l'equazione si è resa divisibile per un fattore, sempre algebricamente parlando sei soluzioni si hanno. Così nel citato n. abbiamo veduto che se $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$ l'equazione era divisibile pel fattore $r^2 - \alpha t - \beta u$ e riducevasi ad un' equazione di secondo grado che apparteneva per conseguenza ad una curva che incontrava il cerchio in quattro punti; ma quel fattore $r^2 - \alpha t - \beta u$ comune a tutti i termini dell' equazione non è da rigettarsi come fattore estraneo alla quistione; ma è da considerarsi che quella curva di terzo ordine si cambia quando il punto dato è sulla periferia del cerchio in un'iperbola e nella retta data dall' equazione $r^2 - \alpha t - \beta u = o$, onde questa anche incontra il cerchio in due punti che soddisfanno alla quistione, e si hanno in tal guisa tutte le sei soluzioni. Pertanto l'equazione $r^2 - \alpha t - \beta u = o$ appartenendo (Fig. 19) alla tangente applicata in B, al cerchio ci dimostra che due punti si riuniscono in B. Per mostrare ora come il punto B possa considerarsi come uno de' punti cercati si rifletta che dovendosi il punto richiesto unire co' due A e B, congiungendo il punto B con A si determina la posizione e la grandezza di una delle due corde, dovendosi poi unire con lo stesso punto B ne resta indeterminata la posizione, onde se pel punto B si tiri una corda nel cerchio che

serbi alla prima la ragione di $n : m$ si verranno per tal modo ad iscrivere due corde nel cerchio che passano pe' punti dati, si riuniscono in un punto del cerchio e sono nella data ragione, e a ciò se ben si rifletta può ridursi l'enunciato del problema esposto nel n. 52. Inoltre se si osservi che pel punto B possono condursi due corde nel cerchio che sieno all' altra già assegnata come $n : m$ si vedrà perchè l'algebra ci addita che due de' punti cercati si riuniscono in B. Lo stesso può dirsi pure per tutti gli altri casi ne' quali le equazioni generali sonosi divise per un fattore comune a tutti i termini.

62. Il problema del quale ci siamo finora occupati è stato risoluto con l'analisi geometrica soltanto nell' ipotesi che uno de' punti dati sia sulla periferia del cerchio, distinguendo i casi ne' quali si trova o nò in direzione col centro e con l'altro punto, ed avendo esaminati questi casi con un' analisi presso a poco uniforme, si è conchiuso che *non è dato in verun modo al metodo de' moderni* il poter risolvere un problema di natura solido per le stesse vie analitiche che conducono alla soluzione di un problema piano che è un caso particolare del primo. « Dappoichè dovendosi » in esso restringere il numero delle rette in paratesi, e varian- » done il sito, non si potrà certamente fare un medesimo calcolo » di tali rette, onde pervenire ad un' identica equazione tra loro, » la quale convenga nello stesso tempo ad un problema piano, e » ad un problema solido. »

Quest' asserzione che chiunque siasi per poco versato nelle considerazioni algebriche riconosce quanto sia falsa e precisamente contraria al carattere essenziale dell' algebra, cioè al modo generale di trattare le quistioni, è evidente che resta smentita col fatto da quanto precede. Difatti noi considerando il problema sotto un punto di vista più generale, cioè quando i punti dati sono ambedue fuori del cerchio lo abbiamo messo in equazione, ed abbiamo ritrovato che potea risolversi con l'intersezione del dato cerchio, e di una curva del terzo ordine; onde in questo caso il problema è secondo il linguaggio degli antichi Geometri *ipersolido*. In seguito abbiamo esaminati varî casi ne' quali era *solido* o *piano* e per tutti questi casi non si è dovuto fare affatto un calcolo separato; ma tutte le costruzioni corrispondenti si sono ricavate dall' equazione relativa al caso generale: anzi è da notarsi che non solo abbiamo ottenuta un'equazione che convenga nello stesso tempo ad un problema solido e ad un problema piano, ma che la composizione del problema che si deduce costruendo l' equazione appartenente al caso generale conviene pure per l' altro caso, poichè la curva del secondo grado si cambia in rette, come si è veduto ne' casi discussi a' n. 53, 55, 57, 59. Nè ciò l' abbiamo eseguito soltanto in questo problema, ma questo è l' andamento tenuto in tutti quelli che abbiamo considerati, ed è questo appunto il metodo generale ed uniforme proprio dell' algebra in tutte le quistioni che si esaminano. E qui bisogna pure far rimarcare che la vera soluzione di un problema è l' equazione alla quale esso conduce, e che la costruzione è un' operazione secondaria; onde sempre una è la soluzione che si ottiene dall' algebra pe' diversi casi che può il problema presentare, e da essa come da una fonte generale si derivano poi le costruzioni particolari che alle varie disposizioni o grandezze de' dati corrispondono. E ciò senza ricorrere più a considerazioni particolari sulla figura, mentre risoluto un problema coll' analisi geometrica spesse volte per la posizione particolare di un punto bisogna far l' analisi da principio, se pure non risulti tutta diversa, per vedere come modificar si debba la soluzione. Inoltre fra i diversi casi da noi esaminati abbiamo pure veduto che se invece di dover tirare dal punto cercato due rette a due punti dati si dovessero condurre due parallele a due rette date di posizione, la soluzione corrispondente anche si ricavava dall' equazione stabilita pel caso generale; mentre a chi è versato soltanto nelle considerazioni geometriche questo caso sembra formare un problema totalmente diverso. Di tutti i

casi poi ne abbiamo date varie soluzioni, e sotto questo punto di vista non si può certamente non riconoscere la superiorità del metodo moderno su quello degli antichi, da poichè la fecondità dell' algebra è tale che quasi potremo dire innumerevoli sono le soluzioni che possono aversi per un medesimo problema.

Finalmente riguardo alle vie analitiche colle quali si passa a risolvere un problema piano ed un problema solido, non solo diremo che con l' algebra sono precisamente identici i diversi passaggi che si hanno da fare quando i due problemi che dipendono l' uno dall' altro si vogliano risolvere separatamente; ma richiameremo ciò che altrove abbiam detto; che cioè sempre uno è il metodo col quale si risolvono col soccorso dell' algebra i problemi per quanto diversi essi sieno, lo che poi non essendo dato al metodo degli antichi, si vede chiaramente *quanta enorme differenza* siavi *tra l' un metodo e l' altro*, e quanto l' algebra *agevoli la risoluzione de' problemi* geometrici.

63. L' andamento tenuto nel n. 53 per costruire l' equazione di secondo grado ad un' ignota alla quale siamo pervenuti essendo applicabile ad ogni equazione nella quale il primo membro sia un quadrato perfetto, e il secondo membro sia composto di due fattori di primo grado, merita di essere applicato ad un' equazione qualunque per vedere come debba procedersi in generale. È chiaro poi che potendosi porre sotto la forma suddetta ogni equazione di secondo grado desso può usarsi in tutti i casi. Sia pertanto

$$m^2(x-a)^2 = \pm n^2 (x-b)(x-c)$$

l' equazione data: abbiamo messo avanti al secondo membro il doppio segno $\pm$ per distinguere i due casi accennati pure nel n. 53; cioè quando il termine in x^2 è preceduto nel secondo membro dal segno $+$ o dal segno $-$.

Ciò posto per non ripetere un calcolo simile a quello eseguito nel citato n. accenneremo soltanto i risultamenti che si ottengono, cioè la costruzione che devesi fare per ciascun caso. Quando nel secondo membro si prende il segno $+$ allora supponendo (Fig. 19) che a partire dal punto C si debbano sulla CA determinare i valori di x, e che sia $CD = a$, $CF'' = b$, $CR = c$; bisogna prendere sulla DH perpendicolare alla DA la Dd che stia alla metà di $F''R$ come $n : m$, e le tangenti condotte pel punto d al cerchio che ha per diametro la $F''R$ determineranno sulla CA due punti che hanno per ascisse i valori cercati di x.

Quando si prende il segno $-$ poichè l'equazione si riduce ad

$$m^2(x-a)^2 = n^2(b-x)(x-c),$$

i punti cercati cadranno tra F'' ed R: allora presa $DA = n$ e sulla perpendicolare a CA condotta per A la $AL = m$, si abbasseranno da' punti comuni alla DL e al cerchio che ha $F''R$ per diametro due perpendicolari alla CA; queste assegneranno sulla CA que' punti che hanno per ascisse i valori di x espressi dalla data equazione. Questo metodo come abbiam detto può applicarsi a qualunque equazione di secondo grado, ne' casi particolari poi si vedrà se debba piuttosto la data equazione costruirsi nel modo ordinario, potendo darsi che si abbia in tal guisa una soluzione più semplice. Ma quando l'equazione si presenta sotto la forma accennata, menochè non vi fossero delle grandi riduzioni allorchè si sviluppa, possiam dire chè il metodo ora esposto è sempre da preferirsi (*)

(*) Volendo occuparci della composizione di que' problemi che si risolvono con curve del secondo grado, ovvero con qualche curva generalmente conosciuta, quale è la parabola cubica che si è presentata nel n. 16, non ci siamo punto incaricati di costruire l'equazione del terzo grado trovata nel n. 52. Il voler discutere tale equazione ci allontanerebbe troppo dal nostro scopo, e d'altronde i mezzi analitici che sono ora conosciuti è noto che han ridotto la di-

*

PROBLEMA XVI.

64. *Dati* (Fig. 23.) il cerchio FME *e i due punti* A *e* B, *trovare sul cerchio un punto* M *in modo che unito co' punti* A *e* B

---

scussione delle curve a semplici applicazioni de' metodi generali. Ci limiteremo pertanto a fare osservare che volendo descriverla per assegnazione di punti possiamo supporre in essa

$$\alpha t + \beta u = \beta c$$

c essendo una quantità costante qualunque, ed avendosi un'equazione di secondo grado in t si potranno, costruendo questa equazione, determinare facilmente i punti ove la retta indicata dall' equazione stabilita incontra la curva. Questa equazione è chiaro che indica (Fig. 18) una perpendicolare alla CB condotta pel punto dell' asse delle y che ha per ordinata c; quindi variando c si potranno assegnare i diversi punti della curva. Da ciò segue che ogni retta perpendicolare a CB incontra la curva in due soli punti, e lo stesso ha luogo per tutte le perpendicolari alla CA. Inoltre allorchè facciamo

$$\alpha t + \beta u = r^2$$

dall' equazione (4, 52) si ha $(r^2-\alpha' t)^2 = 0$, onde i due punti d' incontro della retta data dall' equazione precedente, si riducono ad un solo che è un punto doppio della curva, e poichè l' equazioni $\beta u + \alpha t = r^2$, $r^2 - \alpha' t = 0$ appartengono alle $b'n$, an, sarà n un tal punto. Finalmente quando facciamo

$$r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha t - 2\beta u = 0$$

l' equazione che si ricava dall' equazione della curva è di primo grado e ciò nasce perchè il coefficiente di t^2 si annulla; quindi uno de' valori di t diventa infinito, e perciò la retta espressa da quell' equazione, che è la perpendicolare a Bb' pel suo punto di mezzo, incontra la curva in un punto assegnabile ed in un punto situato a distanza infinita, e poichè ogni altra retta ad essa parallela, per quanto poco ne disti, sempre incontra la curva in due punti; ne segue che essa ne è un' asintoto. Per le stesse ragioni si vede che la perpendi-

sia il rettangolo delle corde ME, MF *uguale ad un dato quadrato.*

Si prendano per assi delle x e delle y la parallela e la perpendicolare alla AB, e si chiamino α, β; α', β; t, u le coordinate de' punti A, B, M rispettivamente; r il raggio del cerchio e $2d$ il lato del dato quadrato. È chiaro (n. 52) che si avrà

$$\mathrm{ME} = \frac{2(\beta u + \alpha t - r^2)}{\sqrt{r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u}}\,;\quad \mathrm{MF} = \frac{2(\beta u+\alpha' t-r^2)}{\sqrt{r^2+\alpha'^2+\beta^2-2\alpha' t-2\beta u}}\,;$$

onde si otterrà l'equazione

$$(r^2-\alpha t-\beta u)(r^2-\alpha' t-\beta u)$$
$$=d^2\sqrt{(r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u)(r^2+\alpha'^2+\beta^2-2\alpha' t-2\beta u)}\ldots(1)$$

la quale dinota una curva del quarto ordine. Se $\beta = o$ cioè se i punti dati sono in direzione col centro essa si riduce ad

$$(r^2-\alpha t)(r^2-\alpha' t)=d^2\sqrt{(r^2+\alpha^2-2\alpha t)(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t)}\ldots(2)$$

ed esprime quattro rette perpendicolari all' asse delle x nelle quali si trasforma quella curva del quarto ordine, ed i punti ove que-

---

colare alla Aa pel suo punto di mezzo è un' altro asintoto della curva. Allorchè il punto B si trova sulla periferia del cerchio confondendosi in uno i due punti B, b' la retta corrispondente al primo asintoto coincide (Fig. 19) con la tangente applicata in B al cerchio, e l' altro asintoto non cambia di posizione: una parte della curva a rami infiniti che aveano quella retta per asintoto si trasforma nella tangente medesima, e l' altro asintoto della curva resta anche, come abbiamo veduto, asintoto dell' iperbola nella quale si cambia pure la curva. Il metodo che abbiamo tenuto per determinare i suddetti asintoti della curva non è certamente un metodo generale; ma ci sia permesso di averlo usato in grazia della brevità, e perchè il nostro oggetto è stato soltanto di far rimarcare queste relazioni che passano tra la curva del terzo ordine; e la retta e l' iperbola nelle quali si ttasforma quando uno de' punti dati è sulla periferia del cerchio.

ste rette tagliano l' asse delle ascisse indicano la posizione che vanno a prendere, quando $\beta = o$, i punti ove la detta curva taglia l' asse medesimo: come si rileva ponendo $u = o$ nell' equazione (1) e paragonando l' equazione che ne risulta con la (2). Nel costruire ora questa equazione distingueremo anche due casi come nel n. 54, cioè se i punti dati sono in parti diverse rispetto al centro, o da una stessa parte, nel primo caso supponende α' positiva, α sarà negativa onde l' equazione (2) diviene

$$(r^2+\alpha t)(r^2-\alpha' t) = d^2\sqrt{(r^2+\alpha^2+2\alpha t)(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t)}\,,$$

e ponendo

$$(r^2 + \alpha^2 + 2\alpha t)(r^2 + \alpha'^2-2\alpha' t) = 4\alpha\alpha' u^2\,,$$

si avrà

$$(r^2+ \alpha t)(r^2 - \alpha' t) = 2d^2\sqrt{\alpha\alpha'}.\, u\,;$$

onde le parallele all' asse delle y condotte pe' punti comuni alle curve espresse dalle due ultime equazioni assegnano sul cerchio dato i punti cercati. Queste equazioni si costruiscono facilmente poichè la prima dinota un cerchio che ha il centro sulla CA, ed avendosi per $u = o$, $t = \frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}$, $t = -\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}$ si vede che se (Fig. 24) a, b sono i poli coniugati ad A e B divise le Aa, Bb per metà in D ed E ne sarà DE il diametro. La seconda poi esprime una parabola che ha l'asse perpendicolare a CA e per parametro $\frac{2d^2}{\sqrt{\alpha\alpha'}}$, onde essendo quando $u = o$, $t = \frac{r^2}{\alpha'}$, $t = -\frac{r^2}{\alpha}$, se pel punto di mezzo della ab si eleva a CA la perpendicolare $\mathrm{FG} = \frac{2d^2}{\sqrt{\alpha\alpha'}} = \frac{4d^2}{2\sqrt{\alpha\alpha'}}$, ed alla bG la perpendicolare bI, sarà I il vertice della parabola ed IG l' asse.

Composizione del problema.

Essendo a e b i poli coniugati ad A e B si dividano per metà in D, E, F le Aa, Bb, ab; si prenda sulla perpendicolare elevata per F alla FA la FG uguale alla terza proporzionale dopo il doppio della media proporzionale tra CA e CB, e il lato del dato quadrato, e si tiri alla bG la perpendicolare bI. Le parallele alla GI condotte pe' punti ove il cerchio che ha per diametro DE incontra la parabola che ha I per vertice, IG per asse e passa per a, determinano sul cerchio dato i punti richiesti.

Allorchè i punti dati sono dalla medesima parte come A, B' facendo la stessa ipotesi invece del cerchio che ha DE per diametro si ha un' iperbola equilatera avente DE' per asse trasverso, pertanto essendo l' asse della parabola parallelo ad uno degli assi dell' iperbola pe' punti comuni a queste curve vi passa (n. 48) un cerchio. Questo cerchio senza ricorrere alle formole generali stabilite nel citato n. possiamo facilmente determinarlo: infatti trasportando l'origine degli assi in F' l' equazioni dell' iperbola e della parabola saranno della forma

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$x^2 + (b + c)x + bc = py$$

essendo $a = \mathrm{F'D}$, $b = \mathrm{F'}a$, $c = \mathrm{F'}b'$, $p = \frac{2d^2}{\sqrt{\alpha\alpha'}}$, onde sottraendo la prima equazione dalla seconda moltiplicata per 2 si ottiene l' equazione

$$y^2 + x^2 + 2(b + c)\,x - 2py + 2bc + a^2 = 0,$$

la quale appartiene ad un cerchio che ha per centro il punto determinato dalle coordinate $-(b + c)$, p; ed il raggio uguale a $\sqrt{p^2 + b^2 + c^2 - a^2}$.

Composizione del problema.

Trovati ad A e B' i poli coniugati a, b' si dividano per metà in D, E' le Aa, B'b' e la DE' in F'; indi presa aH uguale ad F'b', si elevi ad HA la perpendicolare AO uguale alla terza proporzionale dopo il doppio della media tra CA e CB', e il lato del quadrato dato, e si tiri alla Oa la perpendicolare aK uguale alla tangente menata pel punto a al cerchio che ha per diametro E'D. Le parallele alla AO tirate pe' punti comuni al cerchio descritto col centro O e raggio OK ed all' iperbola equilatera che ha E'D per asse trasverso intersecano il cerchio dato ne' punti cercati.

Nel caso che uno de' punti dati e sia B' fosse sul cerchio confondendosi i due punti B', b' in un solo B'' anche il punto E' cadrà in B'' onde F'b' $= c = a$ e per conseguenza il cerchio descritto col centro O ed intervallo OK passerà pel punto B'': come lo dimostra l' equazione di questo cerchio facendo in essa $c = a$. Quindi in questo caso non devesi trovare il raggio OK e le due rette Oa, aK non devono per conseguenza tirarsi.

Quando i punti dati sono in diverse parti rispetto al centro se si avesse $\alpha = \alpha'$ cioè che sieno equidistanti dal centro del cerchio, le equazioni della parabola e del cerchio divengono

$$4\alpha^2 u^2 + 4\alpha^2 t^2 = (r^2 + \alpha^2)^2$$

$$\alpha^2 t^2 + 2\,d^2\alpha u = r^4,$$

dalle quali si ricava

$$4\alpha^2 u^2 - 8d^2\alpha u = (r^2 + \alpha^2)^2 - 4r^4,$$

ossia

$$u^2 - \frac{2d^2}{\alpha}u = \frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{r^2}{\alpha}\right)^2 - \frac{r^4}{\alpha^2}.$$

Composizione del problema.

Condotta al cerchio la tangente AL si prenda sulla La perpendicolare ad AC la aM terza proporzionale dopo CA e la metà del lato del dato quadrato, e si congiunga il punto M col punto di mezzo P della aB; indi tirata la CQ uguale a PM si porti la aQ da M verso N e da M verso N'. Le parallele alla LN pe' punti comuni al cerchio descritto col centro C e raggio aP ed alle parallele a CA tirate da' punti N, N' determinano sul cerchio dato i punti cercati.

Se i punti A e B cadono nell' area del cerchio non si potrà tirare la tangente AL, ma sempre il punto a si determinerà prendendo Ca terza proporzionale dopo CA e il raggio.

65. Allorchè i punti dati non sono in direzione col centro ma ne distano ugualmente, essendo $\alpha=-\alpha'$ l' equazione (1) del n. precedente si riduce ad

$$(r^2-\beta u)^2-\alpha'^2 t^2 = d^2 \sqrt{(r^2+\alpha'^2+\beta^2-2\beta u)^2-4\alpha'^2 t^2} \ldots (1)$$

dalla quale, essendo $t^2=r^2-u^2$, si ottiene

$$(r^2-\beta u)^2+\alpha'^2u^2-\alpha'^2r^2=d^2\sqrt{(r^2+\alpha'^2+\beta^2-2\beta u)^2+4\alpha'^2u^2-4\alpha'^2r^2}. (2)$$

Quest' equazione esprime quattro rette parallele all' asse delle x le quali passano pe' punti comuni al cerchio ed alla curva del quarto ordine indicata dall' equazione (1). In questo caso adunque non si abbassa il grado del problema perchè la curva si trasforma in rette; ma perchè essendo essa simmetrica intorno all' asse delle y gli otto punti che ha di comune col cerchio hanno a due a due la stessa ordinata, e quindi per questi punti vi passano quattro rette determinate da un' equazione di quarto grado che è quella che ab-

biamo trovata più sopra. (*) Per costruire quest' equazione facciamo

$$(r^2+\alpha'^2+\beta^2-2\beta u)^2+4\alpha'^2u^2-4\alpha'^2r^2=4(\alpha'^2+\beta^2)x^2,$$

ed otterremo

$$(r^2-\beta u)^2+\alpha'^2u^2-\alpha'^2r^2= 2d^2\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}.\, x,$$

onde l' equazione (2) potendosi considerare che sia derivata dall' eliminazione di x tra queste equazioni, le ordinate de' punti comuni alle curve che esse rappresentano saranno i valori di u dati dall' equazione (2), e le parallele condotte all' asse delle x pe' medesimi punti saranno le rette indicate dall' equazione medesima. Ciò posto sviluppando le equazioni ottenute abbiamo

$$4(\alpha'^2+\beta^2)(u^2-x^2)-4\beta(r^2+\alpha'^2+\beta^2)u+(r^2+\alpha'^2+\beta^2)^2-4\alpha'^2r^2=0. (3)$$

$$(\alpha'^2+\beta^2)u^2 - 2\beta r^2 u - 2d^2\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}.\, x + r^4-\alpha'^2r^2 = 0,$$

delle quali la prima appartiene ad un' iperbola equilatera, e la seconda ad una parabola; ma avendo però gli assi paralleli pe' punti che sono ad esse comuni (n. 48) vi passa un cerchio la cui equazione si ottiene immediatamente sottraendo la prima delle ritrovate equazioni dalla seconda moltiplicata per 8 lo che dà

$$u^2 + x^2 - \left(\frac{3r^2\beta}{\alpha'^2+\beta^2} - \beta\right) u - \frac{4d^2}{\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}}\, x$$
$$+ \frac{2r^4}{\alpha'^2+\beta^2} - \frac{\alpha'^2r^2}{\alpha'^2+\beta^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}} + \sqrt{\alpha'^2+\beta^2}\right)^2 = 0.$$

(*) Se nell' equazione (1,64) poniamo invece di t^2 il suo valore r^2-u^2 si otterrà un' equazione pure del quarto grado fra t, u la quale appartiene per conseguenza ad una curva del quarto ordine che incontra il cerchio dato ne' punti cercati, e questa curva poi nel caso di $\alpha=-\alpha'$ si cambia nelle quattro rette espresse dall' equazione (2).

Quest' equazione appartiene ad un cerchio che ha per centro il punto determinato dalle coordinate

$$\frac{2d^2}{\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}}=\frac{4d^2}{2\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{3r^2\beta}{\alpha'^2+\beta^2}-\beta\right),$$

e per raggio il lato del quadrato equivalente a' quadrati di queste due quantità più $\frac{\alpha'^2r^2}{\alpha'^2+\beta^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}}+\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}\right)^2-\frac{2r^4}{\alpha'^2+\beta^2}$. Per costruire queste espressioni osserveremo che se $Ca=\frac{r^2}{CA}=\frac{r^2}{\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}}$, (Fig. 23) condotta ad AB la parallela aH sarà $CH=\frac{r^2\beta}{\alpha'^2+\beta^2}$, onde presa HK uguale alla metà della HG sarà CK uguale all' ordinata del centro del cerchio da costruirsi; quindi condotta KO parallela a BA ed uguale a $\frac{4d^2}{2\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}}$, sarà O un tal centro. Per determinare il valore del raggio si osservi che divisa la Aa per metà in D si ha $CD=\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}}+\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}\right)$ onde poichè condotta alla CA la parallela LN e la perpendicolare CN si ha $CN=\frac{\alpha' r}{\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}}$, sarà $\overline{DN}^2=\frac{\alpha'^2r^2}{\alpha'^2+\beta^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}}+\sqrt{\alpha'^2+\beta^2}\right)^2$ ed il quadrato del raggio sarà quindi uguale a $\overline{CO}^2+\overline{DN}^2-2\overline{Ca}^2$. Costruita per tal guisa l' equazione del cerchio passiamo ad assegnare i determinanti dell' iperbola equilatera espressa dall' equazione (3): il centro di quest' iperbola cade sull' asse delle y nel punto che ha per ordinata $\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{r^2\beta}{\alpha'^2+\beta^2}\right)$ cioè nel punto di mezzo C' della HG; onde C'D, C'L indicheranno la posizione de' due assi. Per fissare i semi-assi facciamo nell' equazione (3) $u=\frac{\beta(r^2+\alpha'^2+\beta^2)}{2(\alpha'^2+\beta^2)}$, e si avrà

$$4(\alpha'^2+\beta^2)x^2=\frac{\alpha'^2(r^2+\alpha'^2+\beta^2)^2}{\alpha'^2+\beta^2}-4\alpha'^2r^2=\frac{\alpha'^2(\alpha'^2+\beta^2-r^2)^2}{\alpha'^2+\beta^2},$$

donde si ricava

$$x=\pm\frac{\alpha'(\alpha'^2+\beta^2-r^2)}{2(\alpha'^2+\beta^2)}=\pm\frac{1}{2}\left(\alpha'-\frac{r^2\alpha'}{\alpha'^2+\beta^2}\right),$$

e quindi essendo $C'D=\frac{1}{2}\left(\alpha'+\frac{r^2\alpha'}{\alpha'^2+\beta^2}\right)$ presa DA' = AG sarà C'A' il semi-asse trasverso dell' iperbola.

Composizione del problema.

Essendo a il polo coniugato ad A si divida la Aa per metà in D, e si tirino alla AB le parallele aH, DC' e la perpendicolare CG, ed alla CA la parallela LN e la perpendicolare CN; indi prese le HK, DA' uguali rispettivamente alle HC', AG si tagli sulla parallela condotta per K alla AB la KO terza proporzionale dopo il doppio di AC e il lato del dato quadrato, e si elevi alla CO la perpendicolare CI uguale alla ND. Le parallele a BA condotte pe' punti comuni all' iperbola equilatera che ha C' per centro e C'A' per semi-asse trasverso, e al cerchio che ha O per centro e per raggio la retta il cui quadrato è uguale alla differenza tra il quadrato della OI e il doppio quadrato di Ca, determinano sul cerchio dato i punti richiesti.

Se i punti dati sono ambedue sulla periferia del cerchio essendo $\alpha'^2+\beta^2=r^2$ l' equazione (2) liberata dal radicale si rende divisibile pel fattore $(r^2-\beta u)^2+\alpha'^2u^2-\alpha'^2r^2$, e si riduce ad

$$(r^2-\beta u)^2+\alpha'^2u^2-\alpha'^2r^2=4d^4,$$

ovvero, essendo $\alpha'^2=r^2-\beta^2$, ad

$$u^2-2\beta u+\beta^2=\frac{4d^4}{r^2},$$

donde

$$u-\beta=\pm\frac{4d^4}{r^2}:$$

e quindi le parallele alla congiungente i punti dati condotte alla distanza $\frac{4d^2}{2r}$ intersecano il cerchio dato ne' punti richiesti. Da ciò segue il noto teorema « il rettangolo di due lati di un triangolo è uguale al rettangolo dell' altezza rispetto al terzo lato nel diametro del cerchio circoscritto. »

Essendosi nel caso che consideriamo divisa l' equazione generale pel fattore $(r^2-\beta u)^2+\alpha'^2u^2-\alpha'^2r^2$, non dobbiamo considerare questo come un fattore da rigettarsi; ma essendo pure verificata l' equazione se facciamo

$$(r^2-\beta u)^2+\alpha'^2u^2-\alpha'^2r^2=o,$$

ovvero $(u-\beta)^2=o$ ne segue che le due rette espresse da questa equazione le quali si confondono nella retta che unisce i punti dati incontrano il cerchio in punti che soddisfanno al problema, onde de' punti cercati due si riuniscono in uno de' punti dati e due altri nel secondo; gli altri quattro poi sono dati dall' intersezione del cerchio con le rette espresse dall' equazione

$$u-\beta=\pm\frac{4d^2}{2r}.$$

È chiaro poi come in un caso analogo si è veduto nel n. 61 che i punti dati risolvono il problema riflettendo che l' enunciato esposto nel n. 64 si riduce in generale ad iscrivere nel cerchio due corde che s' incontrino in un punto della sua periferia, passino per due punti dati, e tali che il loro rettangolo uguagli un dato quadrato.

PROBLEMA XVII.

66. *Trovare* (Fig. 25) *sul dato cerchio* MD *un punto* M *in modo che unito co' due punti dati* A *e* B *sia dato il rapporto di* MD : MB.

Prendasi CA per asse delle ascisse e C per origine; e si chiamino α, β; t, u le coordinate de' punti B ed M, α' la CA, ed r il raggio del cerchio, sarà

$$MB=\sqrt{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2}=\sqrt{r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u},$$

onde essendo (n. 52) $MD=\frac{2(r^2-\alpha' t)}{\sqrt{r^2+\alpha'^2-2\alpha' t}}$, indicando con $\frac{m}{n}$ il dato rapporto avremo l' equazione

$$4n^2(r^2-\alpha' t)^2=m^2(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t)(r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u).$$

Quest' equazione appartiene ad un' iperbola che ha per asintoto la retta data dall' equazione

$$r^2+\alpha'^2-2\alpha' t=o,$$

che si costruisce come altrove abbiamo veduto prendendo $Ca=\frac{r^2}{\alpha'}$ ed elevando una perpendicolare alla CA pel punto di mezzo della Aa. Inoltre ponendo nell' equazione dell' iperbola

$$r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u=o$$

si ottiene

$$(r^2-\alpha' t)^2=o$$

onde la retta espressa dalla prima di queste equazioni tocca l' iperbola nel punto ove l' incontra la perpendicolare elevata alla CA pel punto a che è indicata dall' equazione $r^2-\alpha' t=o$. Quindi poichè quell' equazione presa $Cb=\frac{r^2}{CB}$ esprime la perpendicolare tirata a CB pel punto medio della bB, l'iperbola sarà toccata in G dalla FG, e perciò presa $GS = GH$ per S dovrà passare l'altro asintoto. Ma questo asintoto fà con l'asse delle x un angolo che ha per tangente trigonometrica il coefficiente di t^2 diviso per quello di tu col segno cambiato, cioè $\frac{n^2\alpha' - m^2\alpha}{m^2\beta} = -\frac{\alpha - \frac{n^2}{m^2}\alpha'}{\beta}$, dunque se facciamo $CK = \frac{n^2}{m^2}\alpha'$ la SO perpendicolare a BK sarà l'altro asintoto.

Composizione del problema.

Trovati i poli a e b coniugati ad A e B si elevino a CA, CB pe' punti di mezzo delle aA, Bb le perpendicolari RO, FG, e si tiri alla RO la parallela aG; indi presa CK che stia alla CA nella duplicata di $n : m$ si porti la GH da G in S e si abbassi sulla KB la perpendicolare SO. L'iperbola descritta tra gli asintoti OR, OS in modo che passi per G incontra il cerchio ne' punti cercati.

Questo problema è un caso più generale di quello esaminato nel n. 52 cioè quando uno de' punti dati era sul cerchio, e difatti l'equazione ora ottenuta si cambia nella (5, 52) facendo $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, ed è chiaro pure che la costruzione ora eseguita si applica pure a quel caso confondendosi la FH, se il punto B cade in E, con la tangente al cerchio applicata in E. Quindi non insisteremo molto a discutere i varî casi ne' quali il presente problema è di secondo grado, limitandoci soltanto a considerare il caso in cui i punti dati sono in direzione col centro, non potendosi questo caso dedurre da ciò che si è detto nel n. 53 perchè esso è più generale. Sia dunque $\beta = o$, l'equazione dell'iperbola si riduce a

$$4n^2(r^2 - \alpha' t)^2 = m^2(r^2 + \alpha'^2 - 2\alpha' t)(r^2 + \alpha^2 - 2\alpha t),$$

ovvero

$$n^2\alpha'\left(\frac{r^2}{\alpha'} - t\right)^2 = m^2\alpha\left(\frac{r^2 + \alpha'^2}{2\alpha'} - t\right)\left(\frac{r^2 + \alpha^2}{2\alpha} - t\right),$$

la quale esprime due rette che intersecano il cerchio ne' punti richiesti. Quest' equazione si costruisce facilmente per ciò che abbiam detto nel n. 63 distinguendo i due casi di α positiva, o negativa. Nel primo caso supponendo che i punti B, F, b cadano in B', F', b', si prenderà aL in modo che stia alla metà di F'R in ragion composta della data di $m : n$ e della sudduplicata di CB' : CA; e le parallele ad aG pe' punti ove la CA è incontrata dalle tangenti condotte pel punto L al cerchio che ha per diametro F'R fisseranno sul cerchio dato i punti cercati. Nel secondo caso rappresentando con B'', F'', b'' la posizione che prendono i punti B, F, b si prenderà $aN = CB''$ ed NQ in modo che serbi alla media proporzionale tra CA e CB'' la ragione di $n : m$, e le perpendicolari alla CA pe' punti comuni alla Qa ed al cerchio che ha per diametro F''R incontrando il cerchio dato assegnano i punti cercati.

67. Se invece di supporre dato il rapporto di MD : MB supponiamo dato il rettangolo di queste due rette, indicando con d il lato del quadrato equivalente si perverrà all' equazione

$$2(r^2 - \alpha' t)\sqrt{r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha t - 2\beta u} = d^2\sqrt{r^2 + \alpha'^2 - 2\alpha' t} \ldots (1)$$

che appartiene ad una curva di terzo grado. Se il punto A è dato sulla periferia del cerchio essendo $\alpha' = r$, l'equazione precedente rendesi divisibile per $\sqrt{2r(r-t)}$ e si riduce a

$$2r(r-t)(r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha t - 2\beta u) = d^4,$$

che esprime un' iperbola avente per asintoti le rette date dall' equazioni

$$r - t = o,\ r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha t - 2\beta u = o,$$

cioè la tangente A'O' applicata al cerchio in A' e la SO'. Inoltre poichè ponendo $r - t = \frac{d^2}{2r}$, si ha $r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha t - 2\beta u = d^2$ presa $A'D' = \frac{d^2}{2r}$, $FE' = \frac{d^2}{2CB}$ e condotte alle CA, CB le perpendicolari $D'G'$, $E'G'$, sarà G' un punto della curva.

Se fosse $\beta = o$ si avrebbe in questo caso l' equazione

$$\left(r - t\right)\left(\frac{r^2 + \alpha^2}{2\alpha} - t\right) = \frac{d^4}{4\alpha r}$$

la quale può facilmente costruirsi. Nel caso generale cioè quando nessuno de' punti dati è sulla periferia del cerchio l'equazione (1) divenendo

$$2(r^2 - \alpha' t)\sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2\alpha t} = d^2\sqrt{r^2 + \alpha'^2 - 2\alpha' t},$$

appartiene a tre rette nelle quali si cambia la curva del terzo ordine da quell' equazione rappresentata. L'equazione ora ottenuta può costruirsi facilmente sia moltiplicandola pel fattore $\sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2\alpha t}$ e trattandola poi come l' equazione ottenuta nel n. 64 e la costruzione viene più semplice riflettendo che l' iperbola e il cerchio devono passare pel punto dell' asse delle x che ha per ascissa $t = \frac{r^2 + \alpha^2}{2\alpha}$, ovvero ponendo $t - \frac{r^2}{\alpha} = x$, e costruendo l' equazione in x che ne risulta con le formole del n. 49, come in un caso analogo abbiamo praticato nel n. 54, ed essendo l' equazione ora ottenuta molto più semplice di quella trovata nel n. citato ci asterremo di entrare in più minuti dettagli.

PROBLEMA XVIII.

68. *Dato* (Fig. 26) *il cerchio* FM *i due punti* A, B, *e la retta* RE, *trovare sulla periferia del cerchio un punto* M *in modo che unito con* A *e* B *sia dato il rapporto di* FM : ME.

Si prendano per assi coordinati la retta che unisce i punti dati e la perpendicolare abbassata su di essa dal centro, e si chiamino α, α' le ascisse de' punti A, B; t, u le coordinate del punto M, ed r il raggio del cerchio. Le equazioni del cerchio e delle due rette MA, MB saranno

$$(y - \beta)^2 + x^2 = r^2$$

$$y - u = \frac{u}{t - \alpha}\left(x - t\right) \ldots\ldots \quad (1)$$

$$y - u = \frac{u}{t - \alpha'}\left(x - t\right):$$

sia inoltre

$$y = ax + b \ldots\ldots (2)$$

l' equazione della retta data RE. Dall' equazione (1) si rileva che la distanza del punto M dal punto E è uguale ad

$$\frac{x - t}{t - \alpha}\sqrt{(t - \alpha)^2 + u^2} = \frac{x - t}{t - \alpha}\sqrt{r^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha t + 2\beta u},$$

x essendo l' ascissa del punto E, la quale si ricava eliminando la y dall'equazioni (1), (2) onde risulta

$$x - t = \frac{(u - at - b)(t - \alpha)}{a(t - \alpha) - u},$$

e quindi

$$ME = \frac{u - at - b}{a(t - \alpha) - u}\sqrt{r^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha t + 2\beta u}.$$

Combinando ora l'equazioni del cerchio e della MB si potrebbero determinare le coordinate del punto F ed in seguito la MF: ma per non ripetere un calcolo altre volte eseguito osserveremo che il valore della MF può ricavarsi da quello trovato nel n. 64 cambiando u in $u-\beta$ e β in $-\beta$, e fatta questa sostituzione si otterrà $MF=\frac{2(\alpha' t-\beta u+\beta^2-r^2)}{\sqrt{r^2+\alpha'^2-\beta^2-2\alpha' t+2\beta u}}$, e perciò dinotando con $\frac{m}{n}$ il dato rapporto avremo

$$2n(r^2-\beta^2-\alpha' t+\beta u)\Big(a(t-\alpha)-u\Big)$$

$$=m(u-at-b)\sqrt{r^2+\alpha^2-\beta^2-2\alpha t+2\beta u}\ \sqrt{r^2+\alpha'^2-\beta^2-2\alpha' t+2\beta u}.\ (3).$$

Quest' equazione in generale appartiene ad una curva del quarto ordine, ma supponendo che sia $\beta=o$, $a=\frac{1}{o}$, $\frac{b}{a}=-OR=-d$; cioè che la retta la quale unisce i punti dati passi pel centro e che la retta data sia ad essa perpendicolare, si riduce a

$$2n(r^2-\alpha' t)(t-\alpha)=m(d-t)\sqrt{(r^2+\alpha^2-2\alpha t)(r^2+\alpha'^2-2\alpha' t)}\ldots(4)$$

ed esprime quattro rette perpendicolari all' asse delle x ossia alla congiungente i punti dati. Nel costruire questa equazione distingueremo come nel n. 54 due casi secondochè α, α' hanno segni contrarî, o lo stesso segno: nel primo caso che ha luogo quando i punti dati sono in parti diverse rispetto al centro, come A' e B', cambiando α' in $-\alpha'$, e ponendo nell' equazione precedente

$$(r^2+\alpha^2-2\alpha t)(r^2+\alpha'^2+2\alpha' t)=4\alpha\alpha' u^2,$$

si ottiene

$$n(r^2+\alpha' t)(t-\alpha)=m\sqrt{\alpha\alpha'}.\,u(d-t),$$

e quindi le perpendicolari a CA' condotte pe' punti comuni alle curve indicate da queste equazioni sono le rette espresse dall' equazione (4). Queste due equazioni si costruiscono facilmente poichè

*

la prima appartiene ad un cerchio che ha il centro sulla CA' ed avendosi per $u=o$, $t=-\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}$, $t=\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}$, prese $Ca=\frac{r^2}{\alpha}$, $Cb=\frac{r^2}{\alpha'}$; e divise per metà in D, G le aA', bB' ne sarà DG un diametro. L' altra equazione appartiene ad un' iperbola che ha per asintoto la retta dinotata dall' equazione $d-t=o$ cioè la retta data R'O' e passa pe' punti b, A'; quindi presa bS = R'A' sarà S un punto dell' altro asintoto: ed essendo $-\frac{n\sqrt{\alpha\alpha'}}{\alpha m}$ uguale al coefficiente di t^2 diviso per quello di tu col segno cambiato; cioè alla tangente trigonometrica dell' angolo che questo asintoto comprende con l' asse delle x, presa $SH=\alpha=A'C$ ed $HK=\frac{n\sqrt{\alpha\alpha'}}{m}$, sarà SK l' altro asintoto.

Composizione del problema.

Essendo a, b i poli coniugati ad A', B' si bisechino le A'a, B'b in D, e G e prese le bS, SH uguali alle R'A', CA' si tagli sulla parallela condotta per H alla RO' la HK uguale alla quarta proporzionale dopo m, n e la media proporzionale tra CA', e CB' e si tiri la SK. Le parallele alla R'O' pe' punti ove s' incontrano il cerchio che ha per diametro DG e l' iperbola che passa per A' e b tra gli asintoti O'R', SO'K determinano sul cerchio dato i punti cercati.

Se le quantità α, α' non sono di segno contrario cioè se i punti dati sono da una medesima parte rispetto al centro, come (Fig. 27) sono i punti A e B, per costruire l' equazione che abbiamo ritrovata porremo in essa $t=\frac{px'+p^2-r^2}{x'}$, p ed x' avendo lo stesso significato del n. 58, ed avremo l' equazione

$$\frac{[2n(r^2-\alpha'p)x'-\alpha'(p^2-r^2)][(p-\alpha)x'+p^2-r^2]}{m[(d-p)x'+r^2-p^2]}$$
$$=\sqrt{\Big((r^2+\alpha^2-2\alpha p)x'-2\alpha(p^2-r^2)\Big)\Big((r^2+\alpha'^2-2\alpha'p)x'-2\alpha'(p^2-r^2)\Big)}$$

e facendo come nel n. citato $\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}-p=p-\frac{r^2+\alpha'^2}{2\alpha'}$, è chiaro che si avrà la seguente

Composizione del problema.

Trovati ad A, B i poli coniugati a, b si bisechino in D, E le Aa, Bb e la DE in F; si conduca per F la HFH′ perpendicolare alla CA e si descriva col centro F ed intervallo la tangente FG il cerchio GH′H: indi congiunte le H′A, H′b, H′R, H′D si tirino le Ha', Hb', Hr', Hd'; si prenda la B′S uguale alla A′R′, SI uguale alla media proporzionale tra CA e CB, e si elevi alla IA la perpendicolare IK che stia a CB in ragion composta di $n : m$, di AF : RF e di Fb : FE; e condotta alla HH′ la parallela R′O si tiri la SK. Le rette che uniscono il punto N co' punti ove il cerchio dato è incontrato dalle parallele alla HH′ condotte pe' punti comuni al cerchio descritto col centro F e raggio FD′ ed all'iperbola che passa per A′ ed ha per asintoti OR′, OS determinano sul cerchio dato i punti cercati.

Nel caso che uno de' punti dati fosse sulla periferia del cerchio l' equazione rendendosi divisibile per $r-t$ dal quarto grado si riduce al terzo; ma le due soluzioni date hanno luogo tuttavia pe' rispettivi casi, anzi si semplicizzano alquanto: in questo caso si potrebbe l' equazione costruire come abbiamo praticato per l' equa-

zione anche di terzo grado ottenuta nel n. 54 cioè ricorrendo alle
formole generali per la costruzione dell' equazioni del terzo grado sta-
bilite nel n. 49 ed essendo il calcolo da eseguirsi presso a poco simile
a quello dell' accennato n. 54 per non dilungarci lo tralasceremo,
e faremo per le stesse ragioni osservare soltanto, che nel caso in cui
nessuno de' punti dati è sulla periferia del cerchio potremmo sup-
porre $r^2+\alpha^2-2\alpha p=2\alpha'p-r^2-\alpha'^2$, e si otterrebbe così una solu-
zione che potrebbe applicarsi qualunque sia la disposizione de' punti
dati, appunto come abbiamo pure veduto nel n. 58 Che se i
punti dati sono ambedue sulla periferia del cerchio, l' equazione (4)
ponendo $\alpha=r$, $\alpha'=\mp r$, si rende divisibile per $(r-t)(r\pm t)$, e si
riduce ad

$$n\sqrt{(r-t)(r\pm t)}=m(t-d),$$

nella quale deve prendersi il segno superiore se i punti dati sono
in diverse parti rispetto al centro, l' inferiore se sono situati da
una stessa parte. Nel primo caso essendo $r^2-t^2=u^2$, si ha

$$nu=\pm m(t-d),$$

onde presa RN $=n$, e sulla perpendicolare condotta per N alla
B′A′ le NQ, NQ′ uguali ad m, le RQ, RQ′ incontreranno il
cerchio ne' punti cercati. Da ciò segue che
Se da un punto qualunque R *situato su di una retta* RC *che*
passa pel centro di un cerchio B″MM′, *si elevi ad essa la per-*
pendicolare RE′, *condotta pel punto* R *una secante qualunque*
RM *nel cerchio, se si tirino le rette* MB″, MA″E′; *e si meni* MP
parallela alla RE′, *sarà sempre* MP : PN : : B″M : ME′.

Quindi i triangoli MPR, MB″E′ saranno simili e perciò l' angolo
M′MA″ = A″B″M″; ed i punti M′, M″ si troveranno su di una
stessa perpendicolare alla CR. Allorchè nell' equazione trovata più
sopra si prende il segno inferiore, si ottiene

$$n(r-t)=\pm m(t-d);$$

in questo caso i due punti dati si riuniscono in un solo, e si vede che presi sulla CR due punti in modo che le loro distanze da A'' ed R sieno fra loro come $m : n$, le perpendicolari condotte per essi alla CA incontrano il cerchio dato ne' punti cercati. Nell' ipotesi che i punti dati si confondano in un sol punto il problema si riduce a *tirare da un dato punto* A (Fig. 26) *una retta* AM *in modo che sia la parte* MF' *compresa nel cerchio dato alla* ME *intercetta tra il punto* M *e la data retta come* $m : n$. E l' equazione (3) ci dimostra che in generale può questo problema risolversi con curve di secondo grado. Infatti ponendo in essa $\alpha'=\alpha$ sparisce il radicale, ed essendo inoltre arbitraria la posizione dell' asse delle ascisse possiamo supporre che passi pel centro, onde $\beta=o$, e l' equazione suddetta si riduce a

$$2n\,(r^2-\alpha t)\Big(u-a(t-\alpha)\Big)=\pm m\Big(u-at-b\Big)\Big(r^2+\alpha^2-2\alpha t\Big),$$

ed essendone il secondo membro preceduto dal doppio segno $\pm$ rappresenta due iperbole. Prendendo primieramente il segno superiore è chiaro che gli asintoti hanno rispettivamente per equazioni

$$n\,\Big(u-a(t-\alpha)\Big)=m\Big(u-at-b\Big)$$

$$2n\,(r^2-\alpha t) = m(r^2+\alpha^2-2\alpha t):$$

per trovare ora un punto della curva si osservi che ponendo $u-at-b=o$ si ha $t=\frac{r^2}{\alpha}$. L' equazioni degli asintoti si costruiscono facilmente, la prima riflettendo che esprime una parallela alla retta data e che quando $u=o$ dando $n(t-\alpha)=m\left(t+\frac{b}{a}\right)$ se si prenda (Fig. 26) il punto L fuori della retta AR'' in modo che si abbia AL : LR'' : : $m : n$ passa per L; e la seconda ponendola sotto la

forma

$$n\left(\frac{r^2}{\alpha}-t\right)=m\left(\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}-t\right),$$

si vede che presa $Ca'=\frac{r^2}{\alpha}$, e il punto S' in modo che le distanze che serba dal punto a' e dal punto di mezzo della a'A sieno fra loro come $m : n$, esprime la perpendicolare condotta alla CA pel punto S'.

Composizione del problema.

Presa Ca' terza proporzionale dopo CA e il raggio si bisechi la Aa' in D' e si prendano fuori delle $D'a'$, R''A i punti S', L in modo che le loro distanze da' punti a', D'; ed A, R'' sieno nella ragione di $m : n$; indi condotte alla CA le perpendicolari S'O'', a'N si tiri alla data retta RR'' la parallela LO''. L' iperbola che ha per asintoti O''L, O''S' e passa per N incontra il cerchio dato ne' punti cercati.

Allorchè nel secondo membro dell' equazione ottenuta prendiamo il segno inferiore, rappresenta un' altra iperbola che si costruisce similmente, il punto N resta lo stesso, soltanto i due punti L, S' varieranno di posizione; poichè quantunque debba sempre essere AL : LR'' :: a' S' : S'D' :: $m : n$, i punti L, S' devono prendersi rispettivamente tra R'' ed A; a' e D'.

Quando $a=\frac{1}{0}$, e $\frac{b}{a}=-d$; si ha

$$n\left(\frac{r^2}{\alpha}-t\right)\Big(t-\alpha\Big)=\pm m\Big(t-d\Big)\left(\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}-t\right),$$

la quale apparisce come debba costruirsi.

69. Abbiamo veduto che il problema è di secondo grado, quando i punti dati sono sulla periferia del cerchio e la retta che li uni-

sce passa pel centro ed è perpendicolare alla data; ma l'equazione (3, 68) ci dimostra che quantunque queste ultime condizioni non si avverino quando i punti dati sono sulla periferia del cerchio è di secondo grado il problema. Difatti ponendo nell' equazione citata, $\alpha'=-\alpha$, $\alpha^2+\beta^2=r^2$ si ottiene

$$n\Big(\alpha^2+\alpha t+\beta u\Big)\Big(u-a(t-\alpha)\Big)=\pm\, mr(u-at-b)\,u\ldots\ (1)$$

ossia

$$n\Big(a\alpha(\alpha^2-t^2)+a\beta(\alpha-t)u+\alpha(t+\alpha)u+\beta u^2\Big)=\pm mr(u-at-b)u\,,$$

e poichè $\alpha^2-t^2=u^2-2\beta u$, quest' equazione sarà divisibile per u ed esprime per conseguenza un sistema di rette. Ma se in questo caso si applica ciò che abbiam detto nel n. 28 si perviene ad una soluzione più semplice. Infatti indicando con t', u' le coordinate di un punto qualunque della AM (Fig. 28) l' equazione di questa retta sarà

$$y=\frac{u'}{t'-\alpha}(x-\alpha),$$

e combinandola con quella del cerchio si ricaveranno le coordinate del punto d' incontro M, e sarà

$$t=\alpha+2(t'-\alpha)\,\frac{\beta u'-\alpha(t'-\alpha)}{u'^2+(t'-\alpha)^2}$$

$$u=2\,u'\,\frac{\beta u'-\alpha(t'-\alpha)}{u'^2+(t'-\alpha)^2}\,,$$

e quindi sostituendo per t, u questi valori nell' equazione (1) si avrà

$$2nru'\Big(u'-a(t'-\alpha)\Big)$$

$$=\pm m\Big[2\Big(\beta u'-\alpha(t'-\alpha)\Big)\Big(u'-a(t'-\alpha)\Big)-(b+a\alpha)\Big(u'^2+(t'-\alpha)^2\Big)\Big]$$

Ora potendosi stabilire fra t', u' una relazione ad arbitrio, facciamo

$$u'-at'=b\,,$$

e l' equazione precedente si ridurrà a

$$2nru'=\pm\, m\,(u'^2+t'^2-2\beta u'-\alpha^2)\,,$$

ossia

$$u'^2+t'^2-2\Big(\beta\pm\frac{nr}{m}\Big)u'=\alpha^2.$$

Composizione del problema.

Sulla perpendicolare condotta pel centro C alla retta AB si taglino le CD, CD' uguali alla quarta proporzionale dopo m, n e il raggio. I cerchi che hanno per centri i punti D, e D', e passano per A incontrando la retta data determinano la posizione dei punti E; cioè di quei punti che uniti con A fissano le posizioni della retta AM.

70. Se invece del rapporto di MF : ME fosse dato il rettangolo formato da queste due rette, indicando con d il lato del quadrato equivalente è chiaro che si avrebbe l' equazione

$$2(r^2-\beta^2-\alpha' t+\beta u)(u-at-b)\sqrt{r^2+\alpha^2-\beta^2-2\alpha t+2\beta u}$$

$$=d^2\Big(a(t-\alpha)-u\Big)\sqrt{r^2+\alpha'^2-\beta^2-2\alpha' t+2\beta u}\ldots\ldots(1)\,,$$

la quale esprime in generale una linea del quinto ordine. Ma quando $a=\frac{1}{o}$, $\frac{b}{a}=-d'$, $\beta=o$, ed il punto B sulla periferia onde $\alpha'=r$, cioè che il punto B è l' estremo del diametro che passa per A, e che la retta data è a questo diametro perpendicolare, essa si riduce a

$$(d'-t)\sqrt{2r(r-t)(r^2+\alpha^2-2\alpha t)}=d^2(t-\alpha)\,,$$

la quale si costruirà facilmente come altre volte abbiamo praticato distinguendo i due casi di α positiva o negativa, secondochè i punti dati sono da una stessa parte rispetto al centro o in parti diverse. E nel primo caso si potrà pure porre $t = \frac{px' + p^2 - r^2}{x'}$, avendo p, x' il significato esposto nei n. 56, 58 della quale sostituzione ci siamo serviti anche nel n. 68.

Se poi ambedue i punti sono sulla periferia ma non in direzione col centro essendo $\alpha' = -\alpha$, $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, l'equazione (1) rendesi divisibile pel fattore $\sqrt{r^2 - \beta^2 + \alpha'^2 - 2\alpha' t + 2\beta u} = \sqrt{2(\alpha^2 + \alpha t + \beta u)}$, ed osservando che $\sqrt{(\alpha^2 + \alpha t - \beta u)(\alpha^2 - \alpha t + \beta u)} = \pm ru$, si ottiene

$$2ru(u - at - b) = \pm d^2(u - at + a\alpha)$$

che esprime due iperbole le quali passano entrambe per A, hanno per asintoto comune la retta data, e per l'altro asintoto la retta espressa dall'equazione $u = \pm \frac{d^2}{2r}$.

Composizione del problema.

Si formi sulla BF uguale al diametro il rettangolo BS' uguale al dato quadrato. L'iperbola che passando per A ha per asintoti OS', OR incontra il cerchio ne' punti cercati.

Costruendo il rettangolo al di sotto della BF si avrà l'asintoto dell'altra iperbola.

Da ciò risulta che

Se da un punto qualunque A *di un' iperbola si tiri ad un asintoto la parallela* AB *e la perpendicolare* AG, *descritto ad arbitrio un cerchio che passi per* A *i tre rettangoli di* MB *in* MA; *di* M'B *in* M'A *e di* M''B *in* M''A *saranno uguali fra loro ed al rettangolo di* AG *nel diametro del cerchio.*

Quindi comunque giri il cerchio intorno al punto A que' tre rettangoli non cambiano, varierà bensì di posizione il punto B.

*

Se $a = o$; cioè se la retta data è parallela alla congiungente i punti dati, l'equazione dell'iperbola divenendo $2ru(u - b) = \pm d^2 u$, ovvero $u = o$, $u - b = \pm \frac{d^2}{2r}$ ci dimostra che l'iperbola si cambia in due rette una delle quali è la congiungente i punti dati l'altra una parallela alla retta data condotta alla distanza $\frac{d^2}{2r}$.

Allorchè i punti dati si riuniscono in un sol punto facendo come nel n. 68 $\alpha' = \alpha$, $\beta = o$, si ha l'equazione

$$2(r^2 - \alpha t)(u - at - b) = \pm d^2(u - at + a\alpha),$$

la quale appartiene a due iperbole che hanno per asintoto comune la retta data, e per altro asintoto rispettivamente una delle rette date dall'equazione $2(r^2 - \alpha t) = \pm d^2$, e passano ambedue pel punto determinato dalle equazioni $r^2 - \alpha t = o$, $u - at + a\alpha = o$: queste equazioni si costruiscono facilmente come altrove abbiam fatto. Così pure se $a = \frac{1}{0}$, e $\frac{b}{a} = -d'$, si ottiene l'equazione

$$2(r^2 - \alpha t)(t - d') = \pm d^2(t - \alpha)$$

ossia

$$\left(\frac{r^2}{\alpha} - t\right)\left(t - d'\right) = \pm \frac{d^2}{2\alpha}\left(t - \alpha\right)$$

la quale apparisce come debba costruirsi.

PROBLEMA XIX.

71. *Dati* (Fig. 29) *il cerchio* MA'D, *il punto* A e la retta BN, *condurre pel punto* A *la* AMN *in modo che la parte* MN *intercetta fra il cerchio e la retta* BN *sia data.*

Si prendano per assi la perpendicolare e la parallela condotte alla BN pel centro C del cerchio, e si chiamino α, β; t, u le coordinate de' punti A, ed M; a la CB e d la retta data alla quale deve essere uguale la MN. Le equazioni del cerchio, della BN e della AM saranno

$$y^2+x^2=r^2$$
$$x=a$$
$$y-u=\frac{u-\beta}{t-\alpha}\left(x-t\right),$$

onde $MN=\frac{x-t}{t-\alpha}\sqrt{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2}$, x essendo l' ascissa del punto N: quindi poichè $x=a$, avremo l' equazione

$$(a-t)^2(r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u)=d^2(t-\alpha)^2$$

che appartiene in generale ad una linea del terzo ordine. Ma se $\alpha^2+\beta^2=r^2$ cioè che il punto A è sulla periferia, e sia in A', allora avendosi per $t=\alpha$, $u=\beta$ si vede che questa curva incontra il cerchio nel dato punto α, β; e perciò il grado del problema può abbassarsi, e difatti essendo in questa ipotesi

$$(t-\alpha)^2=\frac{(r^2-\alpha t-\beta u)(r^2-\alpha t+\beta u)}{r^2},$$

l' equazione precedente rendesi divisibile pel fattore $r^2-\alpha t-\beta u$ e si riduce a

$$2r^2(t-a)^2=d^2(r^2-\alpha t+\beta u).$$

Questa equazione appartiene ad una parabola che ha per diametro e per tangente corrispondente le rette date rispettivamente dalle equazioni

$$t-a=o\ ,\ r^2-\alpha t+\beta u=o:$$

per determinare un punto di questa curva si rifletta che ponendo $t-a=-d$ si ottiene $r^2+\alpha t-\beta u=o$.

Composizione del problema.

Condotta alla BN la parallela A'D e la perpendicolare CB, si elevino alla DCE le perpendicolari DI, EG, e presa BF uguale alla retta data si tiri alla BN la parallela FG. La parabola che ha IN per diametro, ID per tangente e passa per G incontra il cerchio ne'punti cercati.

Se $\beta=o$, cioè che il punto A' cada in A'' il punto I è inassegnabile e la parabola si cambia in due rette espresse per l' equazione

$$2r(t-a)^2=d^2(t+r),$$

ovvero

$$\left(t-a\right)^2-\frac{d^2}{2r}\left(t-a\right)=\frac{d^2}{2r}\left(a+r\right),$$

la quale si costruisce facilmente. Se si volesse supporre che il punto A' cada nell' altro estremo del diametro A''C si avrebbe l' equazione

$$\left(t-a\right)^2+\frac{d^2}{2r}\left(t-a\right)+\frac{d^2}{2r}\left(a-r\right)=o.$$

Allorchè $\beta=o$ e il punto dato non è sulla periferia del cerchio l' equazione di terzo grado che abbiamo ottenuta più sopra si riduce a

$$(t-a)^2(r^2+\alpha^2-2\alpha t)=d^2(t-\alpha)^2\ \ldots\ (1),$$

ed esprime tre rette parallele alla retta data nelle quali si cambia la linea del terzo ordine corrispondente all' equazione suddetta.

Per costruire l' equazione (1) si porrà sotto la forma

$$\left(t-a\right)^2\left(\frac{r^2+\alpha^2}{2\alpha}-t\right)=\frac{d^2}{2\alpha}\left(t-\alpha\right)^2,$$

e facendo per brevità $\frac{r^2+x^2}{2\alpha}=\alpha'$, $\frac{d^2}{2\alpha}=d'$, $t-a=x$ si avrà

$$x^3+(a+d'-\alpha')x^2-2d'(\alpha-a)x+d'(\alpha-a)^2=o.$$

Quindi in virtù dell'equazioni (II'), (III'), (IV') del n. 49, ponendo

$$x^2+(a+d'-\alpha')x=(\alpha-a)y\ \ldots\ldots(2),$$

otterremo

$$xy-2d'x+d'(\alpha-a)=o\ldots\ldots(3)$$

$$x^2+y^2+(a+2d'-\alpha')x-(2d'+\alpha-a)y+d'(a+d'-\alpha')=o\ldots.(4),$$

ed il punto comune al cerchio espresso da questa equazione ed all' iperbola dell' equazione (3) che non deve considerarsi, è determinato dall' ascissa $x=-d'$, e dall' ordinata $y=2d'+\alpha-a$.

Pertanto supponendo che A''' sia il punto dato si avrà per questo caso la seguente

Composizione del problema.

Essendo a il polo coniugato ad A''' si bisechi la aA''' in H e presa la BO uguale alla terza proporzionale dopo CA''' e la retta data si porti la BA''' da O in K; indi condotte alla CA''' le parallele OR, KL si taglino le KL, HP uguali alla metà della BO e si unisca la PL. Le parallele alla BK pe' punti comuni all' iperbola descritta tra gli asintoti OR, OK e che passa per L ed al cerchio che ha per diametro PL incontrano il cerchio dato ne' punti cercati.

PROBLEMA XX.

72. *Dati* (Fig. 30) *i due cerchi* NDB, MDB, *ed il punto* A *tirare la* AM *in modo che la parte* MN *intercetta fra i due cerchi sia data.*

Si prenda per asse delle ascisse la CD' fissando in C l' origine, e si chiamino α, β; t, u le coordinate de' punti A ed M; a la CC' ed r, r' i raggi de' due cerchi NDB, MDB. Le equazioni di questi cerchi e della AMN saranno rispettivamente

$$y^2+x^2=r^2\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$y^2+(x-a)^2=r'^2\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$y-u=\frac{u-\beta}{t-\alpha}\left(x-t\right)\ldots.(3),$$

e quindi avremo

$$\mathrm{MN}=\frac{x-t}{t-\alpha}\sqrt{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2},$$

x essendo l' ascissa del punto N. Questo valore di x si ricava eliminando la y dalle equazioni (1), (3) e quindi indicando con d la retta data si otterrà l' equazione

$$\frac{u^2+t^2-\beta u-\alpha t\pm\sqrt{r^2[(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2]-(\alpha u-\beta t)^2}}{\sqrt{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2}}=d,$$

la quale, essendo in virtù della (2)

$$u^2+(t-a)^2=r'^2,$$

dinota una curva del quarto grado. Ma nel caso di $\alpha^2+\beta^2=r^2$, cioè che il punto dato sia sulla periferia del cerchio NDB, come A', si riduce ad

$$\frac{u^2+t^2-\beta u-\alpha t\pm(r^2-\beta u-\alpha t)}{\sqrt{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2}}=d.$$

Allorchè in quest' equazione prendiamo il segno superiore essa si riduce a $\sqrt{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2}=d$, ed esprime il cerchio descritto col centro A′ ed intervallo la retta data e questo cerchio incontra il cerchio MDB in que' punti che danno A′M uguale alla retta data: facendo uso poi del segno inferiore, si ottiene

$$\frac{2at+r'^2-a^2-r^2}{\sqrt{2at+r'^2-a^2+r^2-2\beta u-2\alpha t}}=d,$$

ossia

$$(2at+r'^2-a^2-r^2)^2=d^2(2at+r'^2-a^2+r^2-2\beta u-2\alpha t).$$

Quest' equazione appartiene ad una parabola che ha per diametro e per tangente rispettivamente le rette indicate dalle equazioni

$$2at+r'^2-a^2-r^2=0$$

$$2at+r'^2-a^2+r^2-2\beta u-2\alpha t=0.$$

Di queste equazioni è chiaro che la prima appartiene alla BD, la seconda ad una retta perpendicolare alla C′A′ e che incontra la retta espressa dalla prima nello stesso punto ove l' incontra la retta data dall' equazione $\alpha u+\beta t=r^2$. Per assegnare un punto della parabola osserveremo che ponendo nell' equazione che la rappresenta $\beta u+\alpha t=r^2$ si ottiene $2at+r'^2-a^2-r^2=d^2$.

Composizione del problema.

Presa EF terza proporzionale al doppio di CC′ ed alla retta data, si tirino alle A′C, CC′ le perpendicolari A′I, FG, e si abbassi sulla C′A′ la perpendicolare IH. La parabola che ha IH per tangente, IE per diametro e passa per G incontra il cerchio MDB ne' punti cercati.

È da avvertirsi che se i cerchi dati non s' incontrano, la BD non è data immediatamente, ma si potrà allora determinare prendendo $CE=\frac{1}{2}a+\frac{r^2-r'^2}{2a}$, ovvero descrivendo co' punti C, C′ come centri due cerchi in modo che la differenza de' quadrati de' loro raggi sia uguale alla differenza che passa tra i quadrati de' raggi dati, e la DB passerà pe' punti ove essi s' incontrano. (*)

(*) Nel n. 67 abbiamo costruita l' equazione

$$r^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha t-2\beta u=d^2,$$

ed abbiamo trovato che denotava (Fig. 25) la retta E′G′: invece di determinare come in quel n. si è praticato il punto E′ possiamo cercare i punti e, e' ove la E′G′ incontra il cerchio, allora combinando l' equazione precedente con quella del cerchio che è $u^2+t^2=r^2$, se ne ricava

$$(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2=d^2,$$

e quindi si vede che descritto col centro B ed intervallo la retta data un cerchio questo incontra il dato ne' punti e, e'. Per tal modo la costruzione della E′G′ riesce più semplice; ma non l' abbiamo ivi esposta, perchè potrebbe darsi che il cerchio descritto col centro B e raggio d non intersechi il dato, ed allora qnantunque si potrebbe usare il ripiego indicato qui sopra, pure non è preferibile la soluzione che si otterrebbe a quella esposta nel n. citato. Così pure nel n. 19 per costruire l' equazione

$$(r^2-\alpha t-\beta u)n=\frac{m\,\mathrm{sen}\varphi}{\mathrm{sen}\varphi'}\left(r^2-\alpha' t\right),$$

potevamo cercare i punti ove la retta che essa rappresenta incontra (Fig. 7) il cerchio A′M, e tenendo presente l' equazione $u^2+t^2=r^2$, avremmo veduto che questi punti sono dati dall' intersezione del cerchio A′M col cerchio dato dall' equazione

$$\left(1-\frac{m\,\mathrm{sen}\varphi}{n\,\mathrm{sen}\varphi'}\right)(u^2+t^2)-\beta u-\left(\alpha-\frac{m\,\mathrm{sen}\varphi}{n\,\mathrm{sen}\varphi'}\alpha'\right)t=0.$$

In questo caso se $\beta=o$, ed $\alpha=\mp r$ si ha l' equazione

$$(2at+r'^2-a^2-r^2)^2=d^2(2at+r'^2-a^2+r^2\pm 2rt),$$

la quale esprime due rette parallele all' asse delle y nelle quali si trasforma la parabola. Ponendo

$$2at+r'^2-a^2-r^2=dx\ ,$$

si ottiene primieramente

$$x^2=2at+r'^2-a^2+r^2\pm 2rt\ldots.(4)$$

e quindi

$$x^2-\left(d\pm\frac{rd}{a}\right)x=\pm\frac{r}{a}\left((a\pm r)^2-r'^2\right):$$

quest' equazione si costruisce facilmente, e trovato il valore di x non è necessario determinare quello di t, poichè l' equazione (4) ci dimostra che il cerchio descritto col punto dato come centro e col raggio x incontra il cerchio MDB ne' punti cercati.

Questo cerchio è evidente che passa pel punto C, ed ha per diametro la retta che và dal punto C al punto della DD′ le cui distanze da D, D′ sono fra loro come m senφ : n senφ', e dovendo poi pe' punti suddetti condurre al cerchio dato le tangenti, si vede che esse passano pel punto che si è determinato nel modo indicato sulla DD′. Quindi dovendo prendersi il rapporto $\frac{\text{sen}\varphi}{\text{sen}\varphi'}$ col doppio segno $\pm$ ne segue che pel caso esamiaato nel n. suddetto si potrebbe avere la seguente soluzione: si prendano sulla DD′ due punti le cui distanze da D e D′ sieno nel rapporto di L′H′ : LI, e le tangenti condotte al cerchio dato per questi punti saranno le rette cercate. Ma come questa soluzione non è in effetti molto più semplice di quella che nel summentovato n. abbiamo riportata; così abbiamo creduto preferire ivi quest' ultima perchè si accordava più con le soluzioni esposte per gli altri casi dello stesso problema.

PROBLEMA XXI.

73. *Appoggiandosi sempre* (Fig. 31) *i vertici* A *e* B *del triangolo* AMB *sulle date rette* OAx, OB *si cerca la curva descritta dall' altro vertice* M.

Si prenda per asse delle ascisse la OAx ed O per origine, e si denotino con t, u le coordinate del punto M e con t' la OA, si avrà per l'equazione della MA

$$y=\frac{u}{t-t'}(x-t');$$

dippiù essendo dato il triangolo MAB, sarà cognito l' angolo MAB; onde chiamandone a la tangente trigonometrica l' equazione della AB sarà

$$y=\frac{u\pm a(t-t')}{t-t'\mp au}(x-t'),$$

e quindi

$$\text{BA}=\frac{x-t'}{t-t'\mp au}\sqrt{(1+a^2)[u^2+(t-t')^2]}$$

ove x è l'ascissa del punto B. Per trovarla sia

$$y=a'x$$

l' equazione della OB, questa insieme coll' equazione della AB dà

$$x-t'=\frac{a't'(t-t'\mp au)}{(1\pm aa')u-(a'\mp a)(t-t')};$$

e quindi chiamando b la AB, si avrà

$$\frac{a't'\sqrt{1+a^2}\sqrt{u^2+(t-t')^2}}{(1\pm aa')u-(a'\mp a)(t-t')}=b\ ,$$

ed osservando che chiamando d la AM si ha

$$u^2+(t-t')^2=d^2\ldots.(1),$$

ponendo per brevità

$$\frac{(1\pm aa')b}{a'\sqrt{1+a^2}}=m,\quad \frac{(a'\mp a)b}{a'\sqrt{1+a^2}}=n,$$

otterremo

$$\frac{dt'}{mu-n(t-t')}=1$$

ed eliminando t' dalla (1) e da questa equazione, si avrà un' equazione fra t, u che apparterrà alla curva cercata. Dalla prima si ha $t-t'=\sqrt{d^2-u^2}$, onde la seconda diviene

$$\frac{d(t-\sqrt{d^2-u^2})}{mu-n\sqrt{d^2-u^2}}=1,$$

che liberata dal radicale dà

$$(dt-mu)^2=(d-n)^2(d^2-u^2)\ldots.(2),$$

equazione spettante ad un' ellisse di cui O n' è il centro; ma pel doppio segno esistente ne' valori di m, n ne dinota due, è chiaro poi dall' equazione della AB che quando prendiamo i segni superiori, si considera il triangolo situato come lo dimostra la figura, quando facciamo uso degl' inferiori in parte opposta: noi considereremo il primo caso.

Ponendo nell' equazione (2) $u=\pm d$ si ha $(dt-mu)^2=o$ onde abbiamo che due rette parallele all' asse delle x alla distanza d toccano la curva ne' punti ove sono incontrate dalla retta dell'equazione $dt=mu$ questa adunque è la posizione del diametro coniugato a Cx, quindi allorchè il triangolo AMB si situa in modo che la AM è perpendicolare ad OA la congiungente il punto O col punto M è il semidiametro coniugato ad Ox, e poichè nell' equazione $dt=mu$ per $u=d$ viene $t=m$, queste sono le coordinate del punto M in quella posizione; il semidiametro secondo Ox si ha immediatamente poichè nell' equazione (2) $u=o$ dà $t=d-n$.

Avendo ritrovato che i determinanti della curva dipendono dalle quantità m, n passiamo a costruirle: a tal' uopo si rifletta che essendo $n=\frac{(a'-a)b}{a'\sqrt{1+a^2}}=\frac{a'-a}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}\,\frac{\sqrt{1+a'^2}}{a'}\,b$, e denotando il primo fattore il seno dell' angolo differenza de' due BOA, MAB, ossia, fatto l'angolo BCM = BOA, dell' angolo CBA; e'l terzo essendo l' unità divisa pel seno dell' angolo BOA, sarà $n=\frac{b\,\text{sen CBA}}{\text{sen BCA}}=$ CA, e quindi presa OA' = MC, sarà OA' un semidiametro. Il valore di m si otterrà osservando che $\frac{n}{m}=\frac{a'-a}{1+aa'}=$ tang CBA, onde se la DE perpendicolare a BC è uguale CA, sarà BD $=m$.

Composizione del problema.

Fatto l'angolo BCM uguale all'angolo O, si tiri DE perpendicolare a BC ed uguale a CA; indi prese le OA', OF uguali alle MC, BD si elevi FB' perpendicolare ad OA ed uguale ad MA.

L' ellisse che ha OA', OB' per semidiametri coniugati è la locale de' punti M.

Allorchè si prendono i segni inferiori la costruzione è la stessa soltanto l' angolo BCM si dee fare dall' altra parte.

Nel caso che $d-n=o$ la curva si cambia in una retta ciò accade quando il punto C cade in M cioè che l' angolo BMA è il supplemento di BOA, una tal retta ha per equazione $dt=mu$, ossia $u=\frac{n}{m}t=\frac{a'-a}{1+aa'}t=$ tang MBA. t

Nel caso che il punto M fosse sulla AB la costruzione diventa molto più semplice, poichè essendo $a=o$, si ha $n=b$, $m=\frac{b}{a'}$;

onde condotta ad Ox una perpendicolare FG uguale alla retta data prese le FB', OA' uguali ad AM', BM' l'ellisse avrà per semidiametri OA', OB'.

PROBLEMA XXII.

74. *Condurre* (Fig. 32) *pel dato punto* A *la* NAM *in modo che incontrando le rette* OMx, ONy *sia data la* MN.

Presi per assi le Ox, Oy si chiamino α e β le coordinate del punto A ; x la OM, ed y la ON ; l'equazione della MN sarà

$$y'-y=-\frac{y}{x}\,x'$$

che dovendo passare per A, si avrà

$$x(y-\beta)=\alpha y\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

e chiamando c il coseno dell'angolo $y\,Ox$ avremo

$$\mathrm{MN}=d=\sqrt{x^2+y^2-2cxy}\,\ldots\ldots(2).$$

Avendo ritrovate due equazioni in x, y da queste due possiamo eliminare una qualunque delle due ignote, e costruire l'equazione di quarto grado che ne risulta, o pure, ciò che è più elegante, costruire i luoghi geometrici che ciascuna delle equazioni (1) e (2) rappresenta considerando x, y come coordinate di un punto: ciò posto è chiaro che l'equazione (1) rappresenta una iperbola e la (2) un'ellisse ; ma questa equazione cambiandovi x in $-x$ appartiene ad un cerchio, dunque poichè quando in due equazioni fra due variabili un'incognita si cambia comunque sì nell'una che nell'altra non si altera il valore della rimanente ignota possiamo cambiare x in $-x$ anche nell'equazione (1) e cercare di costruire le equazioni

$$x(y-\beta)+\alpha y=o\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(1')$$
$$x^2+y^2+2cxy=d^2\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(2').$$

Or siccome non è il punto d'incontro che dobbiam ritrovare, ma bensì il valore della y e portarlo da O verso N per quindi unire N con A, queste due equazioni possiamo costruirle ad un sistema d'assi qualunque, purchè sieno inclinati sotto un'angolo avente c per coseno. Cerchiamo perciò, se è possibile, di stabilire in modo la posizione degli assi rispetto ad Ox, Oy, che il punto x, y nel quale s'incontrano le curve date dalle equazioni (1'), (2') sia sulla retta MN: sieno α', β' le coordinate della nuova origine, costruite l'equazioni (1') e (2') rispetto a questi assi il loro punto comune che ha per coordinate x, y, avrà per coordinate rispetto agli assi Ox, Oy, $x+\alpha'$, $y+\beta'$ e poichè abbiamo cambiato x in $-x$ bisogna che sostituendo nell'equazione $y'-y=-\frac{y}{x}x'$ ad x', y' ; $\alpha'-x$, $y+\beta'$ si avveri l'equazione $\beta'=-\frac{y}{x}(\alpha'-x)$ ossia $x(y-\beta')=\alpha' y$ che ne risulta, avendo riguardo all'equazione (1), ed è chiaro che si soddisfa a ciò facendo $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$. Essendosi in tal modo ritrovato che la nuova origine è in A imprendiamo a costruire le dette equazioni, la prima esprime un'iperbola avente per asintoti le rette delle equazioni $x=-\alpha$, $y=\beta$ ossia, presa AB=OA, la ON e la BC parallela ad OM ; l'equazione (2') poi è chiaro che dinota il cerchio descritto col centro A e raggio la data retta d.

Composizione del problema.

Presa AB= OA si tiri alla OM la parallela BC. Le rette che uniscono il punto A co' punti ove l'iperbola descritta tra gli asintoti CO, CB e che passa per A incontra il cerchio avente A per centro e raggio MN sono le rette cercate.

Si perviene più direttamente a questa medesima soluzione se in vece di chiamare x, y le OM ON, prendiamo giusta le norme indicate nel n. 28 per ignote le coordinate t, u di un punto qualunque della ME; di fatto l'equazione della NAM essendo allora

$$y-\beta=\frac{u-\beta}{t-\alpha}(x-\alpha)$$

ponendo successivamente $x=o$, $y=$ o si ha $\mathrm{ON}=\frac{\beta t-\alpha u}{t-\alpha}$, $\mathrm{OM}=-\frac{\beta t-\alpha u}{u-\beta}$ onde

$$\mathrm{MN}=\frac{\beta t-\alpha u}{(u-\beta)(t-\alpha)}\sqrt{(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2+2cu(t-\alpha)}=d.$$

Or siccome il punto t, u non è determinato; ma è un de'punti della MN si può fra t, ed u stabilire un' equazione ad arbitrio purchè questa non limiti la possibilità del problema, la più adatta come è chiaro è

$$(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2+2c(u-\beta)(t-\alpha)=d^2$$

che riduce l'equazione ottenuta ad

$$(u-\beta)(t-\alpha)=\beta t-\alpha u,$$

ed è evidente che queste due equazioni sono appunto le $(1')$, $(2')$ riferite agli assi Ox, Oy.

Volendo sostituire l'ellisse all'iperbola si ponga nell'equazione $(2')$ il valore di xy preso dalla $(1')$ e si avrà

$$x^2+y^2-2c(\alpha y-\beta x)=d^2$$

la quale appartiene ad un' ellisse, il suo centro ha per coordinate $c\beta, -c\alpha$, due semidiametri coniugati sono rispettivamente paralleli ad OM, ON, e sono entrambi uguali a $\sqrt{c^2\beta^2+c^2\alpha^2+d^2}$.

Finalmente se si cercasse la parabola, che passa pe' quattro punti

ove il cerchio incontra l'iperbola, è chiaro che i primi tre termini dovrebbero essere della forma y^2+x^2-2xy or possiamo rendere l'equazione $(2')$ di questa forma, aggiungendo, e sottraendo la quantità $2xy$, e sostituendo ad xy nell' altro termine che rimane il suo valore: si avrà per tal guisa l'equazione

$$(y-x)^2-2(1+c)(\alpha y-\beta x)=d^2$$

che si può facilmente costruire. Questa equazione rappresenta due rette nel caso di $\alpha=\beta$, poichè diviene

$$(y-x)^2-2\alpha(1+c)(y-x)=d^2,$$

e quindi per questo caso avremo la seguente

Composizione del problema.

Prese sulla AG normale ad Oy GH uguale alla retta data e sulla Oy le GL, Gl uguali ad OH si taglino sulla Ox le OL$'$, Ol' uguali alle OL, Ol. I punti ove le rette LL$'$, ll' incontrano il cerchio descritto col centro A, ed intervallo GH uniti con A fissano le posizioni della retta cercata.

I quattro punti L, L$'$, l, l' sono in un cerchio che si può facilmente determinare poichè è chiaro che condotta OK perpendicolare ad OA, K ne è il centro, e presa OR uguale alla data retta GH passa per R, onde descrivendo l'arco LR$l'l$L$'$ si hanno ad un tempo i quattro punti L,L$'$,l,l'.

Quando il punto è comunque situato rispetto alle rette Ox, Oy l'iperbola che si è trovata non dipende dalla grandezza della retta data, nè dall' assoluta posizione del punto dato dipendono gli asintoti poichè se il punto sia dovunque sulla parallela ad Ox condotta per A, la CB è data di posizione; varierà bensì l'iperbola perchè deve passare per A. Da ciò si deduce la seguente proprietà dell' iperbola, e che potrebbe essere un lemma pel problema di cui si tratta.

Se un' iperbola ha per asintoti CO, CB *e passa per un punto* A, *e prolungato il semidiametro* CA *in* D, (Fig. 32.) *finchè sia* AD *uguale a* CA, *pel punto* D *si tiri ad un asintoto* CB *la parallela* DO, *condotta pel punto* A *una retta qualunque, le parti di essa frapposte nell' iperbola e nell' angolo* COM *sono uguali.*

Ciò è facile a provarsi, poichè se NAM è la posizione della retta che passa per A, presa EF = NA, F è l'altro punto dell' iperbola; onde AF è la parte intercetta nell' iperbola, ma essendo CA = AD, anche EA ossia FN = AM, dunque FA = NM.

75. Se dopo aver ottenute le equazioni (1) e (2) si elimini la x o la y, supponiamo la prima, l' equazione di quarto grado che ne risulta nel caso di $\alpha=\beta$ si riduce ad

$$y^4-2\alpha(1+c)y^3+[2\alpha^2(1+c)-d^2]y^2+2\alpha d^2y-d^2\alpha^2=o,$$

la quale benchè di quarto grado dovrà scindersi in due di secondo; vediamo perciò di ricercare in generale la condizione che deve passare tra i coefficienti di un' equazione qualunque di quarto grado, supponendo che sieno razionali, perchè possa risolversi in due di secondo. Sieno

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=o \ldots . (\mathrm{I})$$

l' equazione proposta, ed

$$x^2+mx+n=o\,,\; x^2+m'x+n'=o$$

due fattori di secondo grado di essa: moltiplicandoli si avrà l' equazione

$$x^4+(m+m')x^3+(n+n'+mm')x^2+(mn'+m'n)x+nn'=o$$

che dovendo essere identica alla proposta sarà

$$m+m'=a\;;\; n+n'+mm'=b\;;\; mn'+m'n=c\;;\; nn'=d$$

e ponendo $mm'=z$ queste equazioni si riducono ad

$$m+m'=a\,,\, mm'=z\,,\, n+n'=b-z\,,\, nn'=d\,,\, mn'+m'n=c,$$

dalle prime quattro risulta

$$\left.\begin{array}{ll} m=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4z}}{2}\,, & m'=\dfrac{a\mp\sqrt{a^2-4z}}{2}\,, \\ n=\dfrac{b-z\pm\sqrt{(b-z)^2-4d}}{2}\,, & n'=\dfrac{b-z\mp\sqrt{(b-z)^2-4d}}{2} \end{array}\right\}(\mathrm{II})$$

e sostituendo questi valori nella quinta, si ottiene

$$a(b-z)\pm\sqrt{(a^2-4z)[(b-z)^2-4d]}=2c\,,$$

che sviluppata diviene

$$z^3-2bz^2+(ac+b^2-4d)z+c^2+a^2d-abc=o \ldots . (\mathrm{III}).$$

Or se l' equazione proposta si può risolvere in due di secondo grado bisogna che le radici di questa equazione sieno affette soltanto da radicali quadrati, e quindi una radice almeno deve essere razionale, che sarà per conseguenza un de' fattori dell' ultimo termine: adunque affinchè l' equazione proposta si possa scindere in due di secondo grado, l' equazione (III) deve essere avverata da uno de' fattori dell' ultimo termine.

Trovato un valore di z si sostituirà nell' equazioni (II), e si avranno le quantità m, n, m', n'; resta ora a vedere qual segno debba darsi a' radicali. A tal' uopo si osservi che

$$a(b-z)-2c=\pm\sqrt{a^2-4z}\,\sqrt{(b-z)^2-4d}\;;$$

onde bisogna prendere

$$m=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4z}}{2}\,,\qquad m'=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4z}}{2}$$

$$n=\frac{b-z\pm\sqrt{(b-z)^2-4d}}{2}\,,\quad n'=\frac{b-z\mp\sqrt{(b-z)^2-4d}}{2}$$

quando $a(b-z)>2c$; ed

$$m=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4z}}{2}, \qquad m'=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4z}}{2}$$

$$n=\frac{b-z\mp\sqrt{(b-z)^2-4d}}{2}, \quad n'=\frac{b-z\pm\sqrt{(b-z)^2-4d}}{2}$$

se $a(b-z)<2c$.

È facile ora il vedere che in ciascun caso il far uso una volta de' segni superiori, ed un' altra degl' inferiori, porta il cambiamento di m ed n, in m', n'; e perciò i fattori dell' equazione proposta sono gli stessi, quindi per ogni valore di z non si ha che una sola coppia di fattori, dacchè si rileva che in generale un' equazione di quarto grado, si può in tre modi decomporre in fattori di secondo grado.

Applichiamo ora le formole trovate all' equazione ottenuta eliminando x dalle equazioni (1), (2) del n. precedente; e poichè si ha

$$a=-2\alpha(1+c)\,,\ b=2\alpha^2(1+c)-d^2\,,\ c=2\alpha d^2,\ d=-\alpha^2 d^2$$

l' equazione (III) diverrà

$$\left.\begin{array}{r} z^3-2[2(1+c)\alpha^2-d^2]z^2+[4(1+c)^2\alpha^4+d^4-4\alpha^2d^2-8c\alpha^2d^2]z \\ +4\alpha^2d^2[(1+c)^2\alpha^2-cd^2] \end{array}\right\}=o.$$

Sostituendo ora in questa in luogo di z i fattori dell' ultimo termine si vedrà che $-d^2$ l' avvera, onde $z=-d^2$, e dividendo l' equazione per $z+d^2$, si troverà un' equazione di secondo grado dalla quale si ricaveranno gli altri valori di z. Facendo uso del valore $-d^2$, poichè $a(b-z)<2c$, si avrà

$$m=-\alpha(1+c)+\sqrt{\alpha^2(1+c)^2+d^2}\,,\ m'=-\alpha(1+c)-\sqrt{\alpha^2(1+c)^2+d^2}$$

$$n=\alpha^2(1+c)-\alpha\sqrt{\alpha^2(1+c)^2+d^2}\,,\ n'=\alpha^2(1+c)+\alpha\sqrt{\alpha^2(1+c)^2+d^2}$$

e l' equazione di quarto grado si decomporrà nelle due

$$y^2+my-m\alpha=o\,,\ y^2-m'y+m'\alpha=o$$

ove m ha il valore assegnato più sopra, ed m' il valore ritrovato preso col segno contrario.

Per costruire i valori di y cerchiamo di trovar prima quelli delle due quantità m, m': questi li otterremo osservando che essendo $m+m'=-2\alpha(1+c)$, $mm'=-d^2$, m ed m' sono le radici dell'equazione $x^2+2\alpha(1+c)x=d^2$, e quindi uguali a $-$ OL, $-$ Ol. Dunque prolungando la Ol in modo che il rettangolo della tutta nella parte prolungata uguagli il rettangolo di Ol in PA, e dividendo OL in modo che il rettangolo delle parti pareggi quello di OL in AP si hanno quattro punti sulla Oy che uniti con A danno le posizioni della retta cercata.

Le quantità m, m'; n, n' si possono in generale sempre costruire come radici di un' equazione di secondo grado poichè è chiaro che m, m' soddisfanno all' equazione $x^2-ax+z=o$, ed n, n' avverano l'equazione $x^2-(b-z)x+d=o$.

PROBLEMA XXIII.

76 *Date due curve del secondo ordine trovare il luogo geometrico de' punti dai quali condotte le due tangenti ad una delle curve date la retta che passa pe' punti di contatto tocchi l'altra.*

Presi sulle curve date due punti in modo che la tangente per uno sia parallela al diametro condotto per l'altro punto nella curva su cui si trova, si fissi in uno di essi l'origine, e prendansi per assi il diametro e la tangente per lo stesso punto condotti. Chiamando α e β le coordinate dell' altro punto, è chiaro che le equazioni delle curve date saranno della forma

$$y^2=2mx+nx^2\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(x-\alpha)^2=2m'(y-\beta)+n'(y-\beta)^2\ldots\ldots(2).$$

Ciò posto se denotiamo con t ed u le coordinate de' punti cercati, essendo x, y le coordinate del punto ove la tangente condotta pel punto t, u alla curva dell' equazione (1) la tocca, la sua equazione sarà (II, 11)

$$y'-y=\frac{m+nx}{y}(x'-x),$$

e dovendo passare pel punto t, u si ha

$$uy=(m+nt)x+mt\ldots\ (3)$$

che palesemente esprime la retta de' contatti, e poichè questa deve toccare la curva dell' equazione (2); si avrà (I, 11) l'equazione

$$\left.\begin{array}{r} n'[(\alpha n+m)t-\beta u+\alpha m]^2+2m'[(\alpha n+m)t-\beta u+\alpha m]u \\ +\,m'^2(m+nt)^2 \end{array}\right\}=o\ldots\ (4),$$

la quale dinota una curva di secondo ordine.

Nel caso che una delle due curve date è parabola per esempio quella dell' equazione (1) essendo $n=o$, si ottiene

$$(mt+m\alpha-\beta u)\Big(n'(mt+m\alpha-\beta u)+2m'u\Big)+m^2m'^2=o\ldots\ (5)$$

equazione che appartiene ad una iperbola i cui asintoti sono le rette delle equazioni

$$m(t+\alpha)-\beta u=o,\ n'm(t+\alpha)-(n'\beta-2m')u=o.$$

Per assegnare queste rette si osservi primieramente che passano ambedue pel punto avente per coordinate $u=o$, $t=-\alpha$: dippiù ponendo $u=m$, dalla prima delle equazioni precedenti si ha $t+\alpha=\beta$, e dall' altra $t+\alpha=\beta-\frac{2m'}{n'}$; che sono appunto i valori che prende y nell' equazione (2) quando si fa $x=\alpha$: per trovare un punto dell' iperbola si ponga $u=o$ nella sua equazione e si avrà

$$n'(t+\alpha)^2+m'^2=o,\ \text{onde}\ t+\alpha=\sqrt{-\frac{m'^2}{n'}}$$

e questa espressione si costruisce facilmenre perchè pareggia il semidiametro parallelo all'asse delle x della curva data dall'equazione (2), come apparisce dalla stessa equazione.

Composizione del problema.

Condotto (Fig. 33) pel centro C il diametro aA parallelo a quelli della parabola ed il coniugato BCD', pel punto di mezzo della DD' si guidi a CA la parallela OEx, indi prese le IO, EG, EF uguali alle EI, EO ed al semiparametro; e sulla FR parallela ad Ix le FR, FS uguali alle Gb, GB si tirino le OS, OR e si porti la CA da O in A'.

L'iperbola che passa per A' tra gli asintoti R'O, OS è la locale cercata.

Abbiamo supposto nella figura che la curva dell' equazione (2) sia un' ellisse, onde essendo n' negativa $t+\alpha=\sqrt{-\frac{m'^2}{n'}}=$ CA è reale; ma se fosse un' iperbola di cui CB ne dinotasse il semidiametro trasverso OA'=CA sarebbe immaginaria; tuttavia essendo A' un de' punti immaginarî della curva cioè uno degli estremi de' semidiametri secondarî, anche può servire per la descrizione della curva. Infatti è evidente che se pel punto A' si tiri alla OR la parallela A'H presa la HB' uguale alla HA' sarà B' un punto pel quale passa l' iperbola, essendo OB' il semidiametro coniugato ad OA'.

Se CA è che incontra l' iperbola data allora non potendola incontrare Bb sarebbe β immaginaria, e quindi la locale avrebbe il centro ma non gli asintoti; sarebbe adunque un' ellisse. Di fatto chiamando β' l' ordinata del centro, a e b i semidiametri CA e CB, si ha primieramente $\beta=\beta'+\frac{m'}{n'}$ ciò che riduce l' equazione (5) ad

$$(mt+m\alpha-\beta'u)^2-\frac{m'^2}{n'^2}u^2+m^2\frac{m'^2}{n'}=o:$$

ma $\frac{m'}{n'} = b\sqrt{-1}$, $\frac{m'^2}{n'} = -a^2$, dunque si avrà

$$\left(m(t+\alpha)-\beta' u\right)^2 + b^2u^2 = a^2m^2$$

equazione appartenente ad un' ellisse il cui centro è chiaro che ha per coordinate $t = -\alpha$, $u = o$, onde presa IO = IE sarà O il centro, e poichè $u = o$ dà $t + \alpha = \pm a$, se facciamo OA$'$ = a sarà OA$'$ un semidiametro: per trovare il coniugato si osservi che tutte le rette ad esso parallele devono avere tali equazioni che unite a quella dell' ellisse dieno per u valori uguali e di segno contrario alla qual condizione come palesemente ci addita la forma dell' equazione dell' ellisse soddisfanno le rette parallele a quella dell' equazione

$$m(t+\alpha) - \beta' u = o$$

che passando per O darà la posizione del diametro coniugato ad OA$'$. Questa equazione si costruirà prendendo EF $= m$ ed FL = FC, e la OL sarà la retta che essa rappresenta; inoltre se si rifletta che quando $m(t+\alpha) - \beta' u = o$ si ha $u = \frac{am}{b}$ ne risulta che presa OB$'$ = $\frac{a.\text{OL}}{b}$ sarà OB$'$ il semidiametro cercato.

Si osservi che restando OA ed OB della stessa grandezza l' iperbola che si è trovata avea per semidiametro trasverso OA$'$ e per coniugato OB$'$, e quando l' iperbola data incontrava il semidiametro OA la locale cercata intersecava OB$'$, onde

Se co' medesimi diametri uno de' quali sia parallelo a quelli della parabola si descriva un' ellisse e le due iperbole coniugate, le locali saranno anche un' ellisse e due iperbole coniugate, ed il diametro parallelo a quelli della parabola è uguale al corrispondente nella curva data.

Inoltre se supponiamo che fosse data la medesima parabola KIk, e

l'iperbola descritta co' semidiametri OA$'$, OB$'$, e che incontri OA$'$; la locale sarebbe un' ellisse, dippiù poichè dall' equazione della OL ponendovi $u = \beta'$ si ha $t + \alpha = \frac{\beta'^2}{m}$, risulta che CN = NP, e che la tangente per N è parallela ad OL; quindi C è il centro dell' ellisse cercata, e CA un semidiametro, la posizione del coniugato dovendosi per l'osservazione ora fatta prendere OI = IE e congiungere C con E si vede che è Bb, resta ora a trovarne la lunghezza che sappiamo dover essere $\frac{\text{OA}'.\text{OL}}{\text{OB}'} = b = \text{CB}$, onde la locale sarà l' ellisse BaA, donde ne segue che

Se data un' ellisse ed una parabola si trovi la locale de' punti da' quali condotte le due tangenti alla parabola, la retta de' contatti tocchi l' ellisse, e si prendano per curve date questa locale che è un' iperbola e la parabola, la locale che ne risulta, supponendo sempre che alla parabola debbansi tirare le tangenti, sarà l' ellisse data da prima.

Ciò si verifica in generale qualunque sieno le curve date come ciascuno potrà rilevare da quanto segue.

Potrebbe darsi il caso che uno degli asintoti dell' iperbola fosse parallelo a' diametri della parabola, allora supponendo l' asse delle ordinate parallelo all' altro asintoto, l' equazione (2) essendo della forma

$$(x-\alpha)(y-\beta) = d^2 \ldots\ldots (2')$$

l' equazione (5) viene rimpiazzata da

$$(mt + m\alpha - \beta u)^2 + 4d^2mu = o,$$

ove come si vede dall' equazione (2$'$) α e β sono le coordinate del centro dell' iperbola: questa equazione appartiene ad una parabola e poichè per $u = o$ si ha $(t+\alpha)^2 = o$, ne segue che presa IO=IE sarà O un punto della parabola ed OI la tangente a questo punto.

Il diametro condotto per O è chiaro poi che ha per equazione

$$m(t+\alpha)-\beta u=o\,,$$

che abbiamo già veduto come debba costruirsi, inoltre $u=-m$ dando $t+\alpha=-\beta+2d$ si ha immediatamente un punto e con questi dati potrà costruirsi la parabola.

77. Se nell'equazione (5) del n. precedente anche n' fosse nulla; cioè se fossero date due parabole, divenendo GB e quindi SF infinita l'asintoto OS si confonderebbe con Ox; ma il punto A' diverebbe allora inassegnabile: pertanto l'equazione suddetta riducendosi a

$$2(mt+m\alpha-\beta u)u+m^2m'=o\,,$$

ossia

$$\left(t+\alpha-\frac{\beta}{m}u\right)u+\frac{mm'}{2}=o$$

si scorge che l'iperbola ha per asintoti OR, Ox e per potenza $\frac{mm'}{2}$, dippiù poichè ponendo $u=m$ si ha $t+\alpha=\beta-\frac{m'}{2}$ presa (Fig.34) $RL=\frac{m'}{2}$ passerà per L. Se m' è negativa cioè se la parabola scorre secondo le y negative ossia da I' verso E la RL si prenderà in senso opposto.

Composizione del problema.

Presi sulle parabole i punti I ed I' in modo che la tangente per uno sia parallela al diametro condotto per l'altro, e le IO, EF, EG uguali ad IE, al semiparametro di KIk, ed alla EO; si taglino sulla FR parallela ad Ox le FR, RL uguali a GI', ed alla quarta parte del parametro di K'I'k', e si tiri la RO. L'iperbola avente OR, OS per asintoti e che passa per L è la locale cercata.

*

Se le parabole avessero gli assi paralleli non si potrebbero prendere gli assi nel modo predetto, ma in questo caso condotto il diametro II'' in modo che le tangenti per I ed I'' sieno parallele, l'equazioni delle parabole essendo

$$y^2=2mx,\quad y^2=2m'(x-\alpha)$$

l'equazione (3) del n. precedente diviene

$$uy=m(x+t)$$

e l'equazione (4)

$$u^2=\frac{m^2}{m'}(t+\alpha)\,;$$

onde la locale è una parabola che ha I''' per vertice (essendo II'''=II'') e per parametro $\frac{m^2}{m'}$.

78 Supponiamo ora che sia $n'=o$ restando n qualunque, l'equazione (4,76) si riduce a

$$2\Big((\alpha n+m)t+m\alpha-\beta u\Big)u+m'\Big(m+nt\Big)^2=o$$

che variando i dati può appartenere ad una qualunque delle curve di secondo grado: per costruirla si ponga successivamense $u=o$, $(\alpha n+m)t+m\alpha-\beta u=o$ e si avrà $(m+nt)^2=o$, di queste tre equazioni la prima è l'asse delle x, la seconda come si rileva dall'equazione (3,76) se dal punto α, β si tirano alla curva dell'equazione (1,76) le due tangenti rappresenta la retta che passa pe' contatti, la terza poi esprime una retta parallela all'asse delle y e come si scorge dall'equazione (1,76) passa pel centro della curva che questa rappresenta. Inoltre poichè si ha $(m+nt)^2=o$ le altre due rette ove sono da questa incontrata toccano la curva da descriversi, e quindi la retta data dall'equazione

$$(\alpha n+m)t-2\beta u+m\alpha=o$$

sarà il diametro che ha il coniugato parallelo all' asse delle y; ponenda per u il valore dato da questa equazione nell' equazione della locale si ha

$$\Big((\alpha n+m)t+m\alpha\Big)^2+2\beta m'(m+nt)^2=o$$

dalla quale

$$(\alpha n+m)t+m\alpha=\pm(m+nt)\sqrt{-2m'\beta}$$

ossia

$$\left(\alpha+\frac{m}{n}\right)\left(t+\frac{m\alpha}{\alpha n+m}\right)=\pm\left(\frac{m}{n}+t\right)\sqrt{-2m'\beta}$$

e poichè $\frac{m\alpha}{\alpha n+m}$ è già costruita, avendosi dall' equazione

$(\alpha n+m)t+m\alpha-\beta u=o$, quando $u=o$, $t=\frac{m\alpha}{\alpha n+m}$, nulla manca per la

Composizione del problema.

Condotto (Fig. 35) il diametro Bb parallelo a quelli della parabola si prenda il punto I in modo che la tangente alla parabola in I sia parallela ad aA coniugato di Bb, e tirate le tangenti ID, IE si unisca la ED e 'l punto G col punto di mezzo H della CF; indi guidata a Bb la parallela IL, si prendano i punti A$'$, a' in modo che le distanze da G ed H sieno come la media proporzionale tra IL e 'l parametro sta ad LC.

La curva di secondo ordine che ha A$'a'$ per diametro e che passa per F o C, essendo FC parallela al coniugato di A$'a'$, è la locale cercata.

Si conoscerà qual sia la natura della curva osservando che se m' e β hanno lo stesso segno ossia che la parabola non scorre da I

verso L, il radicale $\sqrt{-2m'\beta}$ essendo immaginario la curva è iperbola, e n' è a'A$'$ il diametro secondario. Se poi m' e β hanno diverso segno, cioè se la parabola incontra la aA, e i punti a',A$'$ contengono nel loro intervallo il punto H la locale è ellisse, e sarà in questo caso anche iperbola se il punto a' cade pure dalla parte HA$'$ e ciò secondochè $\sqrt{2m'\beta}>o<$ LC, finalmente se $\sqrt{2m'\beta}=$ LC il punto a' diviene inassegnabile, e la curva è una parabola avente A$'$ per vertice la tangente parallela ad FC, A$'$H per diametro e che passa per C.

79. Resta ora a considerare il caso in cui ambedue le quantità n ed n' non svaniscano, cioè a combinare due curve dotate di centro; ma allora il sistema di assi che abbiamo preso sin dal principio non essendo così facile a trovarsi come quando una delle curve date è parabola cercheremo di trattare a parte questo caso prendendo per asse delle ascisse la congiungente i due centri (Fig. 36) C e C$'$, e per asse delle ordinate il diametro Cy coniugato a CA; l' equazioni (1) e (2) del n. 76 saranno della forma

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\ldots(1)$$

$$(a'^2n^2+b'^2m^2)y^2+2b'^2m(x-\alpha)y+b'^2(x-\alpha)^2=a'^2b'^2\ldots(2)$$

ove, chiamando ω e φ gli angoli che C$'$A$'$ e CA fanno co' rispettivi coniugati, $m=\frac{\text{sen}(\omega-\varphi)}{\text{sen}\,\omega}$, $n=\frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\omega}$. Ragionando ora come sopra in vece dell' equazione (3, 76) si troverà

$$a^2uy+b^2tx=a^2b^2,$$

che dovendo esprimere una retta tangente alla curva dell' equazione (2) si avrà (I,11)

$$n^2\left(\frac{b^2}{u}-\frac{b^2t}{a^2u}\alpha\right)^2=a'^2n^2\frac{b^4t^2}{a^4u^2}+b'^2\left(\frac{mb^2t}{a^2u}-1\right)^2$$

la quale si riduce ad

$$n^2b^4\left(a^2-(\alpha-a')t\right)\left(a^2-(\alpha+a')t\right)=b'^2(mb^2t-a^2u)^2 \dots (3)$$

equazione che appartiene all' ellisse, all' iperbola, o alla parabola secondo i casi $a' > \alpha$, $a' < \alpha$, $a' = \alpha$. Per costruirla si ponga

$$a^2-(\alpha-a')t=o\,,\quad a^2-(\alpha+a')\,t=o$$

e si avrà $(mb^2t - a^2u)^2 = o$, e così, costruendo le rette appartenenti a queste tre equazioni, otterremo due punti della curva: inoltre poichè si ha $(mb^2t - a^2u)^2 = o$ le prime due rette che sono ambedue parallele all' asse delle y ove incontrano la terza toccano la locale richiesta; quindi quest' ultima n' è un diametro, e le prime sono al coniugato parallele: per determinare la retta dell' equazione $mb^2t = a^2u$ si rifletta che ponendo $t=a$, ne risulta $u = \frac{mb^2}{a}$, ma condotta la tangente AE, e CD parallela a C'B' coniugato di C'A', si ha $m = \frac{a}{\mathrm{AD}}$, dunque $u = \frac{b^2}{\mathrm{AD}}$ e quindi il coniugato di CD che sia CE è il precitato diametro. Dippiù i punti ove questo diametro incontra la curva essendo dati, come si è ritrovato, dall' intersezione di CE colle rette dell' equazioni $t = \frac{a^2}{\alpha-a'}$, $t = \frac{a^2}{\alpha+a'}$, presa $\mathrm{CA}'' = \frac{a.\mathrm{CE}}{\alpha+a'}$, $\mathrm{C}a'' = \frac{a.\mathrm{CE}}{\alpha-a'}$, sarà $a''\mathrm{A}''$ il diametro succennato, e la C''B'' condotta parallelamente alla CB pel punto di mezzo della $a''\mathrm{A}''$ sarà la posizione del coniugato, che avrà quindi per equazione $t = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\alpha+a'} + \frac{a^2}{\alpha-a'}\right)$, valore che posto nell' equazione (3) dà

$$\frac{n^2b^4a^4a'^2}{a'^2-\alpha^2} = b'^2(mb^2t - a^2u)^2$$

ossia

$$a^2u - mb^2t = \pm\frac{nb^2a^2a'}{b'\sqrt{a'^2-\alpha^2}}$$

e ponendo $t=o$ si avrà per la lunghezza del semidiametro coniugato a C''A'', $u = \frac{nb^2a'}{b'\sqrt{a'^2-\alpha^2}}$, e poichè $\frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2-\alpha^2} = \mathrm{CF}$, $n = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}$, e $b^2 = \mathrm{AD}\times\mathrm{AE}$, sarà $u = \frac{\mathrm{CD}\times\mathrm{AE}}{\mathrm{CF}}$.

Composizione del problema.

Uniti i centri C e C' e condotta la tangente AE, e CF parallela alla tangente in A', si tiri al semidiametro Cf il coniugato CE, e le AA'', Aa'' parallele alle EA', Ea' indi pel punto di mezzo della a''A'' si conduca la C''B'' parallela ad AE e quarta proporzionale dopo CF, CD ed AE.

L' ellisse avente C''A'', C''B'' per semidiametri coniugati è la locale cercata.

Nel caso che $a' < \alpha$, la C''B'' diviene quantità immaginaria, onde come abbiamo anche detto di sopra il luogo de' punti cercati è una iperbola; in questo caso la CD non incontra l' ellisse onde non si può avere nella retta CF la quantità $\frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2-\alpha^2}$ che diviene $\frac{b'}{a'}\sqrt{\alpha^2-a'^2}.\sqrt{-1}$; ma si osservi che presa da C verso a una parte $\mathrm{CG} = \sqrt{\alpha^2-a'^2}$ la congiungente il punto G col punto F è parallela alla retta che unisce il punto a' con B', onde quando CF non incontra la curva a'FA', cioè quando $a' < \alpha$ il solo divario è di prendere $\mathrm{CG} = \sqrt{\alpha^2-a'^2}$, tirare dal punto G una parallela alla retta che unisce il punto a' con B' onde determinare il punto F, e $C''B'' = \frac{CD \times AE}{CF}$ sarà il semidiametro secondario dell' iperbola: quando poi $\alpha = a'$ cioè che l'ellisse $a'FA'$ passa pel centro C, le $C''B''$ e Ca'' divengono quantità infinite, ma l' equazione divenendo

$$n^2 b^4 a^2 \Big(a^2 - (\alpha + a')t\Big) = b'^2 \Big(mb^2 t - a^2 u\Big)^2$$

mostra che la curva è una parabola avente A'' per vertice $A''C$ per diametro, e la tangente parallela ad AE, per trovarne un punto si faccia $t = o$, e si otterrà $u = \frac{nb^2}{b'} = \frac{CD \times AE}{C'B'}$

Composizione del problema.

Congiunti i centri C e C' si tirino la tangente AE, e le CD, CE, AA'' parallele rispettivamente a $C'B'$ coniugato a $C'A'$, alla tangente in f, ed alla $A'E$; indi sulla CB parallela ad AE si prenda CK quarta proporzionale dopo $C'B'$, CD ed AE.

La parabola avente $A''C$ per diametro la tangente parallela ad AE e che passa per K è il luogo geometrico de' punti cercati.

Nel caso che invece dell' ellisse $a'B'A'$ fosse data un' iperbola che incontri CC' ponendo $b'\sqrt{-1}$ invece di b' si ha la costruzione pe' casi enumerati, quando $\alpha < a'$ $C''A''$ e $C''B''$ non cambiano il valore assoluto; ma la $C''B'' = \frac{nb^2 a'}{b' \sqrt{a'^2 - \alpha^2}}$ diventa immaginaria e la CF che non incontra l' iperbola si costruirà come abbiam detto, onde la locale è un' iperbola che incontra il diametro $a''A''$: se $\alpha > a'$ $C''A''$, $C''B''$ anche restano dello stesso valore che se la curva è ellisse, ma $C''B''$ in vece d' essere immaginaria è reale quindi la curva è ellisse: in questo caso la CF anche incontra l'iperbola: finalmente allorchè $\alpha = a'$ la parabola scorre da A'' verso E ma sem-

pre il parametro è uguale a $\frac{\overline{CK}^2}{A''C}$. Se poi fosse $C'A'$ il semidiame-
tro secondario bisognerà cambiare a' in $a'\sqrt{-1}$ onde la locale è sem-
pre un' iperbola di cui $A''a''$ è il semidiametro secondario, che
si assegna di posizione come abbiamo già detto; ma i punti A'', a''
non si possono come sopra ritrovare poiche $CA'' = \frac{a.CE}{\alpha + a'\sqrt{-1}}$,
$Ca'' = \frac{a.CE}{\alpha - a'\sqrt{-1}}$; pertanto ne risulta $CC'' = \frac{CA'' + Ca''}{2} = \frac{a.CE.\alpha}{\alpha^2 + a'^2}$,
e $C''A'' = \frac{CA'' - Ca''}{2} = \frac{a.CE}{\alpha^2 + a'^2} a'\sqrt{-1} = \frac{CC''}{\alpha} a'\sqrt{-1}$. Quindi presa
$CC'' = \frac{a.CE.\alpha}{\alpha^2 + a'^2}$ si otterrà il punto A'' conducendo per A' una pa-
rallela alla congiungente il punto C' con C'', la CF incontrando
in tutt' i casi l' iperbola non vi sarà poi alcuna difficoltà per costruire
la $C''B''$. Quando $\alpha = a'$ la curva resta iperbola ma i valori prece-
denti divengono più semplici poichè $CC'' = \frac{a.CE}{2\alpha}$, e $C''A'' = CC''$.

Abbiamo considerato che l' ellisse $a'B'A'$ si cangi in iperbola
restando l' altra curva sempre ellisse; ma quando abbiamo detto
vale anche se aBA è iperbola, di fatto se CA incontra l' iperbola
bisogna cambiare b in $b\sqrt{-1}$ ciò che non muta le formole otte-
nute; se poi non è CA il semidiametro trasverso dovendosi sosti-
tuire $a\sqrt{-1}$ ad a, quantunque i valori $\frac{a.CE}{\alpha \pm a'}$ sembrano divenire im-
maginarî, tuttavia ha luogo ciò che abbiamo asserito, poichè in
queste formole non si dee mutare a essendo anche CE riampiaz-
zata da $CE\sqrt{-1}$, soltanto le CA'', Ca'' verrebbero in senso con-
trario.

80. Riepilogando ciò che abbiam detto riguardo alla natura della locale, chiamando per brevità A la curva alla quale si tirano le tangenti e B l' altra, si scorge che

Quando A è parabola se B è ellisse la locale è una iperbola il diametro parallelo a quelli della parabola incontra l' iperbola ed è uguale al diametro dell' ellisse ad esso parallelo: se B è iperbola che incontra il diametro parallelo a quelli della parabola, la locale è un ellisse, se poi non l' incontra si ha un' iperbola che nemmeno incontra il suo diametro parallelo all' asse della parabola. E se l' ellisse data e le due iperbole sono descritte intorno agli stessi diametri, l' ellisse e le due iperbole che si ottengono anche hanno i medesimi diametri, e sempre i diametri di B e della locale che sono paralleli a quelli della parabola sono uguali.

Allorchè B è parabola ed A ellisse la locale può essere una qualunque delle curve coniche secondo la disposizione de' dati, ma sempre passa pel centro di A, allorchè anche questa è parabola la locale è un' iperbola ed uno degli asintoti è diametro della parabola A.

Se A è ellisse o iperbola, e B ellisse, la locale è ellisse, iperbola, o parabola secondochè il centro della prima curva è dentro, fuori, o sul perimetro dell' altra, e quando la locale è ellisse o iperbola; il centro di A è compreso o nò nel perimetro della locale medesima a misura che si trova dentro o fuori il perimetro di B. Se poi B è iperbola, ed incontra la retta che unisce i centri di A e B si ha l' ellisse, l' iperbola o la parabola secondo che il centro di A è fuori, dentro, o sul perimetro di B, e nella stessa guisa è situato rispetto al perimetro della locale, quando questa è ellisse o iperbola; come ancora la congiungente il centro di A con quello della locale incontra quest' ultima.

Ne' primi due casi delle ipotesi precedenti se l' ellisse e l' iperbola che rappresenta A hanno gli stessi diametri, come ancora l' ellisse o l' iperbola dinotate da B, anche le locali quando sono ellisse o iperbola hanno i medesimi diametri; se poi sono parabole hanno lo stesso vertice la medesima tangente e lo stesso diametro, i parametri uguali ma sono rivolte in senso opposto.

Dalle precedenti osservazioni si vede che se si chiedesse il luogo

*

geometrico de' punti da' quali condotte alla curva A le tangenti la retta de' contatti tocchi la locale trovata, la curva che si troverebbe sarebbe della stessa natura che B; ma se ben si rifletta si vede (come abbiam dimostrato in un caso) che è la stessa curva B. (*)

Questo problema ci somministra il modo come condurre la tangente comune a due curve coniche A e B, poichè è chiaro che se pel punto ove la locale già costruita incontra A si tiri a questa una tangente, toccherà questa retta anche la curva B. (**)

(*) Ciò potrebbe anche dimostrarsi direttamente prendendo per curve date quelle espresse dalle equazioni (4), (1) del n. 76 e si troverebbe che la (2) sarebbe l' equazione della locale, avvertendo però che alla curva dell' equazione (1) si devono tirare le tangenti.

(**) Qui potrebbe nascer dubbio come la locale intersecando la curva A i punti che sono situati nell' area di questa curva possano soddisfare alle condizioni volute dall' enunciato del problema; a tale oggetto convien riflettere che l' equazione (3, 76) ci dimostra che se pel punto t, u si tirano alla curva dell' equazione (1) due tangenti la retta che passa pe' punti di contatto è sempre assegnabile sia o nò il punto t, u fuori della suddetta curva, e ciò nasce dacchè la retta de' contatti è sempre l' *asse radicale* del punto t, u; onde i punti che sono nell' area della curva A risolvono un problema enunciato sotto un punto di vista più generale, come abbiamo in un caso consimile fatto avvertire nella nota posta alla pag. 52. Così pure nel problema risoluto al n. 16 abbiamo veduto (Fig. 5) che il rettangolo di NP in PN' è espresso da $\frac{(\beta u+\alpha t-r^2)pr^2}{t^3}$; onde purchè t, u sieno reali quel prodotto sarà reale e quindi nel caso che $\beta=o$, (Fig. 6) la pm' risolve il problema algebricamente parlando. Per interpetrare questo risultamento osserveremo che l' equazione $\frac{r^2}{t^2}(y-\beta)(y'-\beta)=d^2$ trovata nel n. citato ci dimostra, come è chiaro anche dalla figura, che il rettangolo di NP in PN' (Fig. 5) sta al rettangolo delle ordinate de' punti N, N' come $r^2 : t^2$; ma il rettangolo delle ordinate come ce lo indica l' equazione seguente del medesimo n. e come lo abbiamo

PROBLEMA XXIV.

81. *Situare un triangolo nello spazio in modo che la sua proiezione su di un dato piano sia un triangolo equilatero.*

Si tirino (Fig. 37) tre assi ortogonali in modo che gli assi Ox, Oy delle x e delle y sieno nel piano dato; e supponendo che il piano delle x e delle z roti intorno l' asse Ox finchè venga a porsi a dirittura col piano xOy, rappresenti la Oz l'asse delle z.

Qualunque sia la posizione che deve avere il triangolo, potendo sempre condurre per un dei vertici un piano parallelo al piano dato, e per un dei lati che passano per questo vertice, un altro piano al dato perpendicolare, si vede che se questi due piani si

dimostrato nel n. 5 è uguale al rettangolo del parametro della parabola nella porzione IP del suo asse compresa tra il vertice e la tangente tirata al cerchio, dunque il problema considerato nel summentovato n. può anche enunciarsi nel modo seguente « *tirare al cerchio* MS *la tangente* MN *in modo che il rettangolo di* IP *nel parametro della data parabola* NN'I *stia al quadrato della distanza che il punto* M *serba dalla* CA *come il quadrato di una data retta* d *sta al quadrato del raggio* » e riguardando il problema sotto questo punto di vista si vede come (Fig. 6) la mp' possa risolvere il problema del n. 16. Pertanto gioverà qui avvertire che quando risolvendo un problema coll' algebra si ottiene una soluzione che non sembra troppo coordinarsi coll' enunciato del problema, in vece di rigettarla come soluzione falsa bisogna bene osservare se essa viene da qualche fattore che si è introdotto nel trattare le equazioni, perchè allora deve di fatto non essere considerata; ma se ciò non ha luogo conviene esaminare il significato di tutte le equazioni, e si vedrà sempre che il problema può essere riguardato sotto un qualche punto di vista più generale, che permette di spiegare anche geometricamente come le soluzioni somministrate dall' algebra soddisfacciano alle condizioni volute dall' enunciato del problema.

prendessero per piani delle x, y e delle x, z il triangolo cercato avrebbe un vertice all'origine, e l' altro sul piano delle x e delle z: quindi non essendovi alcuna condizione che determini la posizione del triangolo rispetto agli assi che abbiamo scelti, potremo supporre che il triangolo dato OAB sia situato nello spazio in modo che il vertice O resti nell' origine, e il punto A non esca dal piano xOz, talchè i punti A e B prendano la posizione $A'—a'$, $B'—b'$. (*) Ciò posto si chiamino x, o, z; ed x', y', z' le coordinate de' punti $A'—a'$, $B'—b'$; ed a, b, c i lati OA, OB, AB del triangolo OAB. Essendo $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ la distanza che passa fra due punti che hanno per coordinate x, y, z; x', y', z' le distanze scambievoli de' punti O, $A'—a'$, $B'—b'$ saranno espresse dalle formole

$$\sqrt{x^2+z^2}\,,\quad \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,,\quad \sqrt{(x-x')^2+y'^2+(z-z')^2}\,,$$

e le rette OA', OB', A'B' da

$$x\,,\quad \sqrt{x'^2+y'^2}\,,\quad \sqrt{(x-x')^2+y'^2}\,;$$

onde avremo le equazioni

$$x^2+z^2=a^2 \ldots\ldots (1)\,,\quad x'^2+y'^2+z'^2=b^2 \ldots\ldots (2)\,,$$

$$(x-x')^2+y'^2+(z-z')^2=c^2 \ldots\ldots (3)$$

$$x'^2+y'^2=x^2 \ldots\ldots (4)\,,\quad x'^2+y'^2=(x-x')^2+y'^2,\ \text{ovvero } x=2x' \ldots (5)$$

delle quali le prime tre esprimono che i lati del triangolo nello spazio sono uguali a' lati del triangolo OAB, e le altre due

(*) Invece di dire il punto che ha per proiezioni orizzontale, e verticale A', a' diremo sempre il punto $A'—a'$; così pure dicendo la retta $A'B'—a'b'$ deve intendersi la retta che ha per proiezioni $A'B'$, $a'b'$.

che il triangolo OA′B′ è equilatero. Ottenute cinque equazioni fra le cinque ignote x, y, x', y', z' cerchiamo di eliminarne quattro onde avere un' equazione ad una ignota: per eseguire questa eliminazione si sottragga l' equazione (2) dalla (4) e dalla (3), che per l'equazione (5) si riduce ad $x'^2+y'^2+(z-z')^2=c^2$, e si avrà

$$x^2+z'^2=b^2 \ldots\ldots (6),\quad z^2-2zz'=c^2-b^2 \ldots\ldots (7)$$

e sostituendo in quest'ultima i valori di z e z' ricavati dalle equazioni (1) e (6) ne risulta

$$a^2-x^2-2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}=c^2-b^2,$$

ovvero liberandola dal radicale

$$3x^4-2(a^2+b^2+c^2)x^2+4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=o.$$

Questa equazione si costruisce facilmente osservando che il termine noto esprime la seconda potenza del quadruplo dell' area del triangolo che ha per lati a, b, c; ovvero del triangolo OAB; quindi se si abbassa sulla Ox la perpendicolare BC che indicheremo con n, sarà

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=4a^2n^2,\ \text{ovvero}\ (a^2+b^2-c^2)^2=4a^2(b^2-n^2),$$

donde, chiamando m la $OC=\sqrt{b^2-n^2}$, si ha

$$a^2+b^2=c^2+2am,$$

e l' equazione trovata in x si riduce a

$$3x^4-4(am+c^2)x^2+4a^2n^2=o,$$

e facendo

$$x^2=2as$$

si ottiene

$$s^2-\frac{2}{3}\left(m+\frac{c^2}{a}\right)s+\frac{n^2}{3}=o,$$

equazione semplicissima dalla quale per ricavare s basta come è noto dividere la retta indicata dalla formola $\frac{2}{3}\left(m+\frac{c^2}{a}\right)$ in modo che il rettangolo delle parti sia uguale ad $\frac{n^2}{3}$.

Volendo determinare tutto sulla figura, si descriva col centro A l' arco BD, e col centro O l'arco AD, condotta la DP parallela ad Oz sarà $AP=\frac{c^2}{2a}$: dippiù descritto su di BC il semicerchio BFC, presa CE terza parte di BC, se si tira EF parallela ad Ox, e col centro C si descrive l'arco FH, sarà $\overline{CH}^2=\frac{1}{3}n^2$; e perciò trisegata la OC in R e presa RL uguale a' due terzi della AP, se col centro L si descrive il semicerchio OMM′, e per H si tira alla Ox la parallela HM, abbassata sulla Ox la perpendicolare Mm, sarà $Om=s$. Quindi poichè $x=\sqrt{2as}$, descritto l' arco ON col centro A, e l' arco NA′ col centro O, sarà $OA'=x$. Trovato il valore di x, si hanno immediatamente quelli di x' e y' elevando alla Ox dal punto di mezzo della OA′ una perpendicolare che si arresterà in B′: inoltre per l' equazioni (1) e (6) descritto col centro O l' arco Ba'', e tirata $A'a''$ parallela ad Oz si ottiene $z=A'a'$, $z'=A'a''$, e perciò la $a''b'$ parallela ad Ox incontrando la $B'b'$ determina il punto b'.

Avendosi dalle equazioni (1) e (2)

$$z=\pm\sqrt{a^2-x^2},\quad z'=\pm\sqrt{b^2-x^2},$$

ne segue che a ciascuno de' punti A′, B′ ne corrispondono due in elevato uno al di sopra del piano orizzontale l' altro al di sotto, che anzi pare a prima vista che si potrebbero prendere indifferentemente i segni de' due radicali, e così allo stesso triangolo OA′B′ invece di corrisponderne due nello spazio ne corrisponderebbero quattro; ma si osservi che l' equazione (7) dà

$$z^2+b^2-c^2=2zz',$$

e perciò se $\overline{A'a'}^2 + \overline{OB}^2 > \overline{AB}^2$ le z e z' devono avere lo stesso segno: se $\overline{A'a'}^2 + \overline{OB}^2 < \overline{AB}^2$ segni diversi; talchè se un punto si prende al di sopra l' altro va preso al di sotto del piano xOy, e così sempre due triangoli corrispondono nello spazio al triangolo OA′B′. Quanto alla posizione di questo triangolo avendosi dall' equazione (4) due valori per y' uguali e di segno contrario può avere tanto la posizione indicata nella figura quanto un' altra simile dalla parte delle y negative; e in tal modo si hanno quattro soluzioni del problema; ma queste soluzioni come pure le altre che si potrebbero ottenere facendo si che il vertice B resti nel piano xOz, o per le altre simili combinazioni, sono diverse rispetto a' piani di proiezione; ma ove si riguardi che non esiste altro che il piano dato, non si riducono effettivamente che ad una: ciò risulta dacchè l' equazione in x è simmetrica rispetto ad a, b, c, e quindi che il triangolo OA′B′ è sempre lo stesso. Una soluzione diversa pare che la dia l' altra radice dell' equazione in s poichè questa farebbe variare il lato del triangolo OA′B′, ma si rifletta che le radici di questa equazione essendo

$$\frac{1}{3}\left[m+\frac{c^2}{a}\pm\sqrt{\left(m+\frac{c^2}{a}\right)^2-3n^2}\right],$$

ovvero sostituendo ad m, n i loro valori

$$\frac{1}{3}\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{2a}\pm\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2+3(a^2+b^2-c^2)^2-12a^2b^2}}{2a}\right],$$

si ha

$$x=\sqrt{2as}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{4(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)}\right)}.$$

Ora la quantità sotto il secondo radicale potendo porsi sotto la

forma $(b^2+c^2-2a^2)^2+3(b^2-c^2)^2$, il valore di x diviene

$$x=\sqrt{\frac{1}{3}\left(b^2+c^2-2a^2\pm\sqrt{(b^2+c^2-2a^2)^2+3(b^2-c^2)^2}+a^2,\right)}$$

ed essendo $b^2+c^2-2a^2 < \sqrt{(b^2+c^2-2a^2)^2+3(b^2-c^2)^2}$, ne segue che prendendo il segno meno si ha $x<a$, e prendendo il segno superiore $x>a$; quindi nel primo caso $z=\sqrt{a^2-x^2}$ è reale, nel secondo immaginaria, ed in conseguenza la radice maggiore di s deve rigettarsi.

Essendo il valore di x simmetrico rispetto ad a, b, c, sarebbe superfluo l' accertarsi che è anche minore di b e di c, e perciò il problema di cui ci occupiamo ha sempre una soluzione.

È da notarsi che l' equazione (3) dando in virtù delle (4), (5)

$$x^2+(z-z')^2=c^2$$

essendo $a'a''=z'-z$, ed $OA'=x$, se si tira $a'b$ parallela ad Ox deve risultare ba''=AB, e che quindi siamo venuti a risolvere il seguente problema di analisi a due coordinate.

Dati due cerchi concentrici ADa′, Ba″; *e il diametro* Oz, *trovare sul cerchio* Aa′ *un punto* a′ *tale che condotte ad* Oz *la parallela* a′a″, *e la perpendicolare* a′b *sia* ba″ *uguale ad una retta data* AB.

PROBLEMA XXV.

82. *Dati un piano, una sfera, ed un ellissoide di rotazione, tirare un piano tangente alla sfera, e all' ellissoide, che faccia col piano dato un angolo dato.*

Si prenda l' origine delle coordinate nel centro dell' ellissoide, il piano delle x e delle y normale al suo asse, e il piano delle x e delle z che passi per quest' asse e il centro della sfera: le equazioni dell' ellissoide, della sfera, e del piano dato saranno della forma

$$b^2(x^2+y^2)+a^2z^2=a^2b^2,$$
$$(x-\alpha)^2+y^2+(z-\gamma)^2=r^2,$$
$$x+Ay+Bz+C=o.$$

Ciò posto si chiamino s, t, u le coordinate del punto ove il piano cercato tocca la sfera; s', t', u' quelle del punto ove tocca l' ellissoide: l' equazione di questo piano dovendo passare pel punto s, t, u, e toccare la sfera sarà

$$(s-\alpha)(x-s)+t(y-t)+(u-\gamma)(z-u)=o\ldots\ldots\ldots(1);$$

similmente dovendo toccare l' ellissoide nel punto s', t', u' avrà per equazione

$$b^2s'(x-s')+b^2t'(y-t')+a^2u'(z-u')=o \ (*).$$

Queste due equazioni dovendo appartenere al medesimo piano la

---

(*) Queste equazioni sono generalmente portate ne' trattati di analisi a tre coordinate ma si possono ricavare più facilmente osservando che l' equazione generale del piano tangente ad una superficie qualunque è

$$z'-z=\frac{dz}{dx}(x'-x)+\frac{dz}{dy}(y'-y),$$

e quindi poichè in un ellissoide che abbia per equazione

$$b^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2+a^2(z-\gamma)^2=a^2b^2,$$

si ha $\frac{dz}{dx}=-\frac{b^2(x-\alpha)}{a^2(z-\gamma)}$, $\frac{dz}{dy}=-\frac{b^2(y-\beta)}{a^2(z-\gamma)}$, l'equazione del piano tangente sarà

$$a^2(z-\gamma)(z'-z)+b^2(y-\beta)(y'-y)+b^2(x-\alpha)(x'-x)=o,$$

dalla quale facendo successivamente $a=b$, $\beta=o$; ed $\alpha=\beta=\gamma=o$ si hanno le equazioni che abbiamo esposte qui sopra.

prima deve essere avverata ponendo per x, y, z; s', t', u'; e dippiù il rapporto de' coefficienti di x, y, z deve essere lo stesso in ambedue le equazioni, quindi si avrà

$$(s-\alpha)(s'-s)+t(t'-t)+(u-\gamma)(u'-u)=o,$$

ovvero

$$(s-\alpha)s'+tt'+(u-\gamma)u'=\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)+r^2\ldots\ldots(2);$$

$$\frac{s'}{t'}=\frac{s-\alpha}{t}\ldots\ldots\ldots(3),\quad \frac{a^2u'}{b^2t'}=\frac{u-\gamma}{t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

Inoltre l' angolo che il piano dell' equazione (1) fa col piano dato ha per coseno

$$\frac{s-\alpha+At+B(u-\gamma)}{\sqrt{(s-\alpha)^2+t^2+(u-\gamma)^2}\sqrt{1+A^2+B^2}},$$

e perciò essendo dato quest' angolo chiamandone c il coseno; e osservando che $(s-\alpha)^2+t^2+(u-\gamma)^2=r^2$, si ha

$$s-\alpha+At+B(u-\gamma)=cr\sqrt{1+A^2+B^2}\ldots\ldots\ldots(5).$$

A queste quattro equazioni vanno aggiunte le due

$$(s-\alpha)^2+t^2+(u-\gamma)^2=r^2\ldots(6),\quad b^2(s'^2+t'^2)+a^2u'^2=a^2b^2\ldots(7),$$

che si hanno perchè il punto s, t, u esiste sulla sfera, e il punto s', t', u' sull' ellissoide.

Ottenute in tal modo sei equazioni fra le sei ignote $s, t, u; s', t', u'$, ne possiamo ritrovare i valori; ma siccome determinato il solo punto s, t, u è risoluto il problema; così avendo le due equazioni (5) e (6) fra s, t, u cercheremo di eliminare s', t', u' dalle altre quattro. Per far ciò si pongano nell' equazione (2) i valori di s', u' tratti dalle equazioni (3) e (4), e si avrà

$$\left(\frac{(s-\alpha)^2}{t}+t+\frac{b^2}{a^2}\frac{(u-\gamma)^2}{t}\right)t'=r^2+\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)$$

donde

$$t' = \frac{r^2+\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)}{(s-\alpha)^2+t^2+\frac{b^2}{a^2}(u-\gamma)^2}\, t\,;$$

quindi

$$s' = \frac{r^2+\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)}{(s-\alpha)^2+t^2+\frac{b^2}{a^2}(u-\gamma)^2}\,(s-\alpha)$$

$$u' = \frac{r^2+\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)}{(s-\alpha)^2+t^2+\frac{b^2}{a^2}(u-\gamma)^2}\,\frac{b^2}{a^2}\,(u-\gamma)\,,$$

e sostituendo questi valori nell' equazione (7), riducendo otterremo

$$\Big(r^2+\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)\Big)^2=a^2\Big((s-\alpha)^2+t^2\Big)+b^2(u-\gamma)^2\,,$$

la quale in virtù dell' equazione (6) diviene

$$\Big(r^2+\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)\Big)^2=a^2r^2+(b^2-a^2)(u-\gamma)^2 \ldots\ldots (8).$$

Quest' equazione essendo dedotta dalla sola condizione che il piano cercato tocchi la sfera e l' ellissoide; è chiaro che esprime la proiezione sul piano delle x e delle z di una curva tracciata sulla superficie sferica in modo che per ogni suo punto condotto un piano tangente tocchi anche l' ellissoide, e quindi incontrerà il cerchio che rappresenta la proiezione della sfera in punti tali che condotte per essi al cerchio le tangenti queste toccano anche l' ellisse che è proiezione dell' ellissoide. Similmente se si elimina t dalle due equazioni (5) e (6) si avrà l' equazione

$$(s-\alpha)^2+(u-\gamma)^2+\left(\frac{cr\sqrt{1+A^2+B^2}-B(u-\gamma)-(s-\alpha)}{A}\right)^2 r^2=\ldots (9)\,,$$

che esprime la proiezione verticale di una curva esistente sulla superficie sferica per ogni punto della quale condotto un piano tan-

gente alla sfera comprende col piano dato l' angolo che ha c per coseno.

Per costruire quest' equazione che come è evidente appartiene ad un' ellisse permutiamo gli assi passando ad altri assi rettangolari condotti pel punto α, γ; ossia cambiamo

$$s-\alpha \text{ in } ms-nu\,,\quad u-\gamma \text{ in } ns+mu$$

ove m ed n sono il coseno ed il seno che il nuovo asse delle x fà col primitivo asse delle ascisse, quindi $m^2+n^2=1$, ed avremo

$$s^2+u^2+\left(\frac{cr\sqrt{1+A^2+B^2}-(Bn+m)s-(Bm-n)u}{A}\right)^2=r^2$$

che facendo $Bm-n=0$, si riduce ad

$$A^2u^2+(1+A^2+B^2)s^2-2cr\sqrt{1+B^2}\sqrt{1+A^2+B^2}.s$$
$$=r^2\Big(A^2-c^2(1+A^2+B^2)\Big)$$

dalla quale si scorge che l' asse delle x' è uno degli assi dell' ellisse, e che per ottenere l' equazione riferita agli assi deve cambiarsi s in $s+\dfrac{cr\sqrt{1+B^2}}{\sqrt{1+A^2+B^2}}$, ed avendosi

$$A^2u^2+(1+A^2+B^2)s^2=r^2A^2(1-c^2)$$

i semi-assi verranno espressi dalle formole

$$\frac{rA\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\,,\ \text{ed}\ r\sqrt{1-c^2}.$$

Questi valori si costruiscono con molto facilità; difatti essendo

$$\frac{n}{m}=B$$

ed

$$x+Bz+C=0$$

l' equazione della traccia del piano dato col piano delle x e delle z, il nuovo asse delle x dovrà essere a questa retta perpendicolare; quindi tirando (Fig. 38) $c'e$ normale a De sarà $c'e$ la direzione di un asse dell' ellisse; inoltre se si tira C'E normale a DS e si proietta il punto e in E, si ha $c'e = C'e'.\sqrt{1+B^2}$, ed $e'E == C'e'.A$, onde presa $eE' = e'E$, avremo che la

$E'c' = C'e'.\sqrt{1+A^2+B^2}$, e $\cos. E'c'e = \dfrac{\sqrt{1+B^2}}{\sqrt{1+A^2+B^2}}$: ma supponendo l'angolo E'c'G uguale all'angolo dato, si ha $GH = r\sqrt{1-c^2}$, $c'H = cr$, e $c'h = \dfrac{cr\sqrt{1+B^2}}{\sqrt{1+A^2+B^2}}$, dunque h è il centro dell' ellisse, ed hg, HG i semi-assi, dovendo però la HG prendersi sulla Hh.

Trovati i determinanti dell' ellisse passiamo ad occuparci della costruzione dell' equazione (8): in questa sono da distinguersi due casi cioè $b>a$ che avviene allorchè l' ellisse generatrice rota intorno l' asse maggiore, e $b<a$ ossia quando l' asse di rotazione è il minore, nel primo caso ponendo $b^2-a^2=e^2$ si ha dalla citata equazione

$$\Big(r^2+\alpha(s-\alpha)+(\gamma+e)(u-\gamma)\Big)\Big(r^2+\alpha(s-\alpha)+(\gamma-e)(u-\gamma)\Big)=a^2r^2$$

che esprime un' iperbola avente per asintoti le rette delle equazioni

$$r^2+\alpha(s-\alpha)+(\gamma+e)(u-\gamma)=o\ ,\ r^2+\alpha(s-\alpha)+(\gamma-e)(u-\gamma)=o.$$

Queste rette passano ambedue pel punto dato dalle coordinate

$$u=\gamma,\ s=\alpha-\frac{r^2}{\alpha},$$

e sono rispettivamente perpendicolari alle rette che fanno coll'asse

delle x angoli aventi per tangenti trigonometriche $\frac{\gamma+e}{\alpha}$, $\frac{\gamma-e}{\alpha}$ ossia alle rette $c'f$, $c'F$, f ed F essendo i fuochi dell' ellisse, e perciò presa $c'K$ terza proporzionale dopo $C''c'$ ed r, le rette KL, KL' perpendicolari a $c'f$, $c'F$ sono gli asintoti dell' iperbola. Per determinarne un punto; si ponga nell' equazione (8) $u=\gamma$, ed avendosi

$$\Big(r^2+\alpha(s-\alpha)\Big)^2=a^2r^2\ ,\ \text{ossia}\ s=\alpha-\frac{r^2}{\alpha}\pm\frac{ar}{\alpha},$$

presa KN quarta proporzionale dopo CC', CA ed r, per N dovrà passare l' iperbola, che incontrerà l' ellisse ne' punti cercati. È però da osservarsi che il radicale esistente nell' equazione dell' ellisse potendo esser preso col doppio segno si avrà un' altra ellisse avente per centro un punto della hc' lontano da c' quanto il punto h; e i medesimi semi-assi; quindi le proiezioni verticali de' punti richiesti essendo date dall' intersezione dell' iperbola con due ellissi si potranno avere al più otto punti: onde dovendosi dall' equazione (5) ricavare il valore di t quando sono date le s ed u, essendo questa una equazione di primo grado, ne risulta che otto saranno i punti nello spazio, ossia che il problema non può avere più di otto soluzioni.

Da ciò che precede apparisce chiaramente qual sia la soluzione del problema; ma il dovere descrivere tre curve per assegnazione di punti ne rende penosa l' esecuzione: per togliere questa difficoltà si osservi che allorchè un' ellisse s' interseca con una curva qualunque si possono determinare le coordinate de' punti d' incontro coll' intersezione di un cerchio e di una curva del medesimo grado. Sia

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

l' equazione dell' ellisse, e

$$f(x,y)=o$$

quella della curva data, si faccia $y = \frac{b}{a} y'$, e l'equazioni dell'ellisse e dell'altra curva diverranno

$$y'^2 + x^2 = a^2, \quad f\left(x, \frac{b}{a} y'\right) = o,$$

delle quali la prima esprime un cerchio e la seconda una curva del medesimo grado dell'altra espressa per l'equazione

$$f(x, y) = o.$$

Applicando ciò al nostro problema ne segue che se invece dei punti che assegnano i determinanti dell'iperbola prendiamo de' punti che riferiti alla $c'h$ presa per asse delle x abbiano le medesime ascisse, e per ordinate delle rette che serbino alle ordinate de' primi punti il rapporto di gh : GH, l'iperbola così descritta deve intersecarsi con due cerchi che hanno i medesimi centri delle ellissi e per raggio hg. Ora i due punti L ed L' degli asintoti non avendo ordinate restano i medesimi, ed invece dei punti K ed N, prese le kK', nN' che serbino alle kK, nN la ragione di hg: HG, si dovranno prendere i punti K' ed N'; e quindi l'altra iperbola avrà per asintoti LK', L'K' e passerà per N'.

Per eseguire l'intera costruzione sulla figura si osservi che condotta la C''P tangente al cerchio, la PK perpendicolare alla Cx e la Aa parallela alla C''c'', si ha $c'K = \frac{r^2}{\alpha}$, $Ca = \frac{ar}{\alpha} = KN$; inoltre presa G$r$ = Kk e tirata rs parallela ad Hh, risulta $gs = k$K'; e quindi tirata la c'K', questa incontrerà la nN in N'. Per passare poi dal punto m' ove l'iperbola incontra il cerchio al punto m ove l'iperbola che passa per N incontrerebbe l'ellisse, si dovrebbe prendere la μm che serbi alla $\mu m'$ la ragione di GH: gh ovvero di Kk : K'k, e perciò tirata la K'm', la retta Kp incontrerà la $\mu m'$ nel punto m. Finalmente il punto corrispondente in pianta ad m si ottiene

tirando $m\mu'$ normale a $c'm$, e prendendo sulla mM parallela a Cz la μ''M = $\mu' m$. Similmente si troverebbero le proiezioni del punto corrispondente al punto m''.

La parte μ''M = $\mu' m$ è stata determinata considerando M—m come punto della sfera, volendo ricavare il valore di μ''M ovvero di t dall'equazione (5) basterebbe osservare che questa esprime due piani paralleli al dato, e che passano uno pel punto ove la GH incontra la μh, e l'altro per un punto ugualmente lontano che questo da c': allora prolungando la μm sino alla Cx, e menando dal punto d'incontro una parallela alla Cz finchè incontra la traccia orizzontale del piano corrispondente si avrà la lunghezza della μ''M. Questa costruzione dà la μ''M nella vera posizione; mentre l'altra non addita se deve prendersi secondo le y negative, o nel senso delle positive: ma ciò è facile a rilevarlo di fatto nel caso attuale il piano corrispondente al cerchio $m'm''$ ha per equazione

$$s - \alpha + At + B(u - \gamma) + cr\sqrt{1 + A^2 + B^2} = o$$

e quando $t = o$ si ha

$$s - \alpha + B(u - \gamma) + cr\sqrt{1 + A^2 + B^2} = o,$$

e quindi per ogni punto della regione zCx situato nell'angolo compreso da questa retta e dalle x positive, come (senza costruire la traccia del piano, osservando soltanto il punto per dove passerebbe) è facile vedere che avviene pe' punti m', m'' si ha t negativa.

Nel caso di $b < a$ invece di determinare gli asintoti dell'iperbola, si assegnerà un sistema di diametri coniugati della curva, che è un'ellisse: a tale oggetto facciasi

$$\frac{r^2}{\alpha} + s - \alpha + \frac{\gamma}{\alpha}(u - \gamma) = s', \quad u - \gamma = nu'$$

e si avrà dall'equazione (8)

$$\alpha^2 s'^2 = a^2 r^2 - e^2 n^2 u'^2$$

ove $e^2 = a^2 - b^2$. Quest' equazione esprime un' ellisse che ha per semidiametri $\frac{ar}{\alpha}$, $\frac{ar}{en}$.

Quindi uno de' semidiametri è uguale a kN, l'altro gli serba la ragione di $en : c'C''$. Non resta dunque a determinare che la posizione de' nuovi assi : la trasformazione fatta si riduce evidentemente, a cambiare l'origine, e la direzione dell' asse delle y, ed essendo il coefficiente di s uguale a quello di s' per la teorica della permutazione delle coordinate n esprimerà il seno dell' angolo che l' asse delle y' fa con l' asse delle x, e siccome l' asse delle y' ha per equazione $s'=o$, e quello delle x', $u' = o$; ne risulta che questi assi sono le rette delle equazioni

$$\frac{r^2}{\alpha} + s - \alpha + \frac{\gamma}{\alpha}(u-\gamma) = o, \quad u-\gamma = o.$$

La prima di questa è perpendicolare alla retta che unisce il punto C col punto c' e passa pel punto K, (*) l' altra esprime la $c'C''$, dunque KN è un semidiametro, e l' altro uguale ad $\frac{ar}{en}$, passerà per K, e sarà alla Cc' perpendicolare. Determinati i semidiametri dell' ellisse che dovrebbe incontrare le due ellissi dell'equazione (9) è facile determinare quelli dell' ellisse che deve intersecare i cerchi. Di fatto uno è K$'$N$'$, la direzione dell' altro poi si troverà unendo il punto K$'$ col punto ove la direzione primitiva incontra la μh, e quanto alla grandezza di questo semidiametro si osserverà che i due estremi de' semidiametri coniugati a KN, K$'$N$'$ sono sulla medesima perpendicolare a μh: il rimanente della costruzione procede come nel caso precedente. Questa

(*) Questa retta si potrebbe anche costruire tirando al cerchio la tangente dal punto C, e pel punto di contatto una perpendicolare alla congiungente i punti C e c', allora non sarebbe necessario di tirare le due C$''$P, PK.

*

soluzione è generale per ambedue i casi, poichè nel caso considerato da prima invece di descrivere un'ellisse si descriverà un' iperbola avente K$'$N$'$ per semidiametro trasverso, e l' altro per semidiametro coniugato.

Nell' equazione (8) oltre i due casi enumerati vi era da considerare il caso di $b=a$; ma questo non l' abbiamo ivi enumerato, poichè divenendo l' ellissoide una sfera viene a cambiarsi l' enunciato del problema, ed appartiene ad uno de' diversi casi ne' quali per un valor particolare de' dati si abbassa il grado del problema, e che passiamo ora ad esaminare.

83. Primieramente quando $b=a$, l' equazione (8) si riduce ad

$$r^2 + \alpha(s-\alpha) + \gamma(u-\gamma) = \pm ar \ldots\ldots\ldots (8')$$

che esprime due rette perpendicolari a Cc' condotte una pel punto N, l' altra per un punto della C$''c'$ ugualmente lontano da K, onde in questo caso il problema si risolve coll' intersezione di due rette co' due cerchi di sopra nominati, e si avranno anche otto punti. Avendo detto che la curva dell' equazione (8) trovata nel n. precedente passa pe' punti segnati sul cerchio dalle tangenti comuni ad esso ed all' ellisse, ne segue che le rette dell' equazione (8$'$) sono le congiungenti i punti ove le tangenti comuni esterne ed interne a' cerchi dati toccano il cerchio che ha per centro c'. Dietro questa osservazione la costruzione grafica riesce molto semplice potendosi tirare facilmente queste tangenti comuni. E ciò quando voglia restarsi alla scelta fatta de' piani coordinati, ma in questo caso possiamo prendere il piano orizzontale parallelo al dato, e si ha allora

$$\frac{A}{B} = o, \quad B = \frac{1}{o},$$

onde l' equazione (9) si riduce ad

$$u = \gamma \pm cr.$$

Quindi la costruzione di questo caso è la seguente. Si faccia (Fig. 39) l'angolo C'c'D uguale all' angolo dato, e tirate a' cerchi le tangenti comuni si abbassino sulla Cc' le perpendicolari Em, E'm'; saranno m, m', n, n' le proiezioni verticali de' punti cercati, e le corrispondenti in pianta si troveranno sul cerchio che ha C' per centro ed HD per raggio.

Per l' ipotesi di $a=b$ abbiamo veduto che l'equazione (8) esprime due rette, se $\alpha=o$ si cangia nell' equazione

$$\left(r^2+\gamma(u-\gamma)\right)^2=a^2r^2+(b^2-a^2)(u-\gamma)^2$$

e rappresenta anche due rette, quindi in questo caso il problema è pure di secondo grado.

Le rette dell' equazione precedente per la medesima osservazione fatta sull' equazione (8') incontrano il cerchio ne' punti ove è toccato dalle tangenti comuni al cerchio medesimo ed all' ellisse generatrice, e sono (Fig. 40) le rette DE, D'E'. L' equazione (9) si semplifica prendendo il piano verticale normale al dato, si ha allora A $= o$, e l' equazione si riduce a

$$cr\sqrt{1+B^2}=s+B(u-\gamma)\,\ldots\ldots(9'),$$

e dinota due rette parallele alla traccia del piano e che distano da c' per cr; quindi poichè condotta c'F normale alla traccia del piano, fatto l'angolo Fc'G uguale al dato, se si tiri GF parallela alla traccia del piano, c'F $= cr$; saranno Gm, G'n le rette dell' equazione (9'), ed i punti m ed n ove queste incontrano le DE, D'E' sono le proiezioni verticali de' punti cercati. Le orizzontali saranno rispettivamente su i cerchi che hanno C per centro e DE e D'E' per diametri.

Se invece di $\alpha=o$ fosse $\gamma=o$ l' equazione (8) diverrebbe

$$\left(r^2+\alpha(s-\alpha)\right)^2=a^2r^2+(b^2-a^2)u^2,$$

ed avendosi dall' equazione del cerchio

$$u^2=r^2-(s-\alpha)^2,$$

si avrà

$$\left(r^2+\alpha(s-\alpha)\right)^2=b^2r^2-(b^2-a^2)(s-\alpha)^2\ldots\ldots(8''),$$

equazione di due rette parallele all'asse delle z, e che per le ragioni dette altre volte passano pe' punti determinati sul cerchio proiezione della sfera dalle tangenti comuni a questo cerchio ed all' ellisse generatrice dell' ellissoide. L' equazione (9) si costruisce come nel caso generale, la nuova posizione che prendono le due rette nominate si ha facilmente; perchè i punti ove incontrano (Fig. 38) la $c'h$ restano i medesimi, e trovato un punto di una di esse qual posizione prende si avrà la posizione di una retta e quindi dell'altra perchè devono essere parallele: determinati i punti d' incontro co' due cerchi, si abbasseranno sulla μh delle perpendicolari, e queste incontrando le rette dell' equazione (8'') danno le proiezioni verticali de' punti cercati; le proiezioni orizzontali poi si determineranno come nel caso generale.

84. Sinora abbiamo esaminato quando si semplifica l' equazione (8): consideriamo ora i cambiamenti dell' equazione (9). Primieramente se $\frac{A}{B}=o\;B=\frac{1}{o}$ cioè che il piano dato è parallelo a quello delle x e delle y ovvero normale all' asse dell' ellissoide, si ha

$$u=\gamma\pm cr$$

in virtù della quale l' equazione (8) prende le due forme

$$r^2+\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)=\pm r\sqrt{a^2(1-c^2)+b^2c^2}$$

$$s=\alpha-\frac{r}{\alpha}\left(r\pm c\gamma\mp\sqrt{a^2(1-c^2)+b^2c^2}\right).$$

Ora fatto l' angolo C'c'D (Fig. 39) uguale al dato e tirata CF parallela a c'D se si abbassano su di questa le perpendicolari BG, AF, risulta CG $= bc$, CF$=a\sqrt{1-c^2}$, e per conseguenza presa G$f =$ CF, otterremo C$f = \sqrt{a^2(1-c^2)+b^2c^2}$, e osservando che $c\gamma$ è la parte della c'D compresa tra il punto c' e la perpendicolare abbassatale dal punto C$'$, si potranno facilmente costruire i quattro valori di s con quattro quarte proporzionali: queste rette si porteranno sull' asse Cx, e pe' loro estremi condotte delle parallele a Cz queste incontrando le Dd, D$'d'$, e il cerchio che ha C$'$ per centro ed HD per raggio, assegneranno rispettivamente le proiezioni verticali ed orizzontali de' punti cercati.

Dall' altra forma data all' equazione (8) rammentando ciò che abbiam detto intorno all' equazione (8$'$) si deduce che se col centro C ed intervallo Cf si descriva un cerchio, tirate a questo e al cerchio dato le tangenti comuni, le Em, E$'m'$ incontrano le Dd, D$'d'$ nelle proiezioni verticali de' punti cercati. Da questa soluzione, che è da preferirsi nella geometria descrittiva, si rileva che in questo caso il problema si riduce all' altro in cui sono date due sfere; cioè che i piani tangenti all'ellissoide e alla sfera data toccano la sfera che ha C per centro, e Cf per raggio.

Sia in secondo luogo A$=o$ che avviene quando il piano dato è normale al piano verticale, ossia al piano che passa pel centro della sfera, e l' asse dell' ellissoide, l' equazione (9, 82) diverrà

$$s-\alpha+B(u-\gamma)=cr\sqrt{1+B^2}\dots(1),$$

ed esprime due rette parallele alla traccia verticale del piano, ed è chiaro per ciò che abbiam detto che se si tiri (Fig. 41) la c'L perpendicolare alla proiezione del piano, e la c'D che comprenda con la c'L un angolo uguale al dato, le De, D$'e'$ saranno le rette suddette. Queste rette incontrando la curva dell' equazione (8, 82) danno le proiezioni verticali de' punti cercati, le cui coordinate si ricaveranno combinando l' equazione (1) con la (8, 82). Si

prenda adunque dalla prima il valore di $u-\gamma$ e sostituendolo nella seconda otterremo

$$(\gamma-\alpha B)^2\left(s-\alpha-\frac{Br^2+\gamma cr\sqrt{1+B^2}}{\gamma-\alpha B}\right)^2$$

$$=a^2r^2B^2+e^2\left(s-\alpha-cr\sqrt{1+B^2}\right)^2\dots(2).$$

Questa equazione quantunque sembri molto complicata pure si costruisce facilmente, infatti il primo membro essendo nato dalla sostituzione del valore di $u-\gamma$ nella formola $r^2+\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)$, ne segue che la quantità $\alpha+\frac{Br^2+\gamma cr\sqrt{1+B^2}}{\gamma-\alpha B}$ indica l' ascissa del punto ove la De incontra la retta espressa dall' equazione

$$r^2+\alpha(s-\alpha)+\gamma(u-\gamma)=o,$$

ovvero la Ke, come apparisce da ciò che altrove abbiam detto: similmente la quantità $\alpha+cr\sqrt{1+B^2}$ essendo il valore che acquista la s quando si fà $u=\gamma$ nell' equazione (1) dinoterà l' ascissa del punto g, e per conseguenza se rappresentiamo per brevità con α', α'' le ascisse de' punti g, e; cioè le CG, CE l' equazione trovata poc' anzi si ridurrà a

$$(\gamma-\alpha B)^2\left(s-\alpha''-\frac{arB}{\gamma-\alpha B}\right)\left(s-\alpha''+\frac{arB}{\gamma-\alpha B}\right)=e^2(s-\alpha')^2,$$

laonde da ciò che abbiamo detto nel n. 63 si rileva che presa la GH $=\frac{arB}{e}$ condotte al cerchio che ha E per centro e per raggio $\frac{arB}{\gamma-\alpha B}$ le tangenti HN, HN$'$ sono Cμ, Cμ' i valori di s; e quindi m, m' le proiezioni verticali de' punti cercati; le orizzontali poi si determineranno come nel caso generale riflettendo però che siccome nel caso che ora consideriamo l'equazione (9, 82) non contiene t, bisogna far uso dell' equazione (6, 82) e perciò (Fig. 38) la $\mu''M = \mu'm$ deve tagliarsi da μ'' verso M ed in senso opposto. Per costruire graficamente le quantità $\frac{arB}{e}$, $\frac{arB}{\gamma-\alpha B}$ osserveremo che l'equazione della Lc' (Fig. 41) essendo $u-\gamma=B(s-\alpha)$, ponendo $s=o$ si ottiene $u=\gamma-B\alpha=$ Cb, e quindi condotte le lh, lk parallele rispettivamente alle FA, bA sarà $g'h=$ GH, e $g'k$ il raggio del cerchio NN'. (*)

Nel caso che fosse $b^2<a^2$ invece dell' equazione trovata più sopra si otterrebbe

$$(\gamma-\alpha B)^2\left(\alpha''+\frac{arB}{\gamma-\alpha B}-s\right)\left(s-\alpha''+\frac{arB}{\gamma-\alpha B}\right)=e^2(s-\alpha')^2,$$

ed allora come dal citato n. si deduce, dovrebbe prendersi la Cb' = Cb e condurre pel punto G una parallela alla Fb', questa incontrando il cerchio NN' determinerebbe due punti da'quali tirate alla Cz due parallele si avrebbero i punti m, m' a questo caso relativi. Finalmente se $b=a$ risulta

$$s=\alpha''\pm\frac{arB}{\gamma-\alpha B},$$

(*) È utile il riflettere che chiamando x la distanza del punto g dal punto m, e γ' la ge si avrebbe l' equazione

$$(\gamma-\alpha B)^2\left(x-\gamma'-\frac{ar\sqrt{1+B^2}}{\gamma-\alpha B}\right)\left(x-\gamma'+\frac{ar\sqrt{1+B^2}}{\gamma-\alpha B}\right)=e^2x^2,$$

onde descritto col centro e, e raggio $\frac{ar\sqrt{1+B^2}}{\gamma-\alpha B}$ un cerchio, le tangenti condotte a questo cerchio dall' estremo della perpendicolare elevata dal punto g alla De ed uguale ad $\frac{ar\sqrt{1+B^2}}{e}$, determinerebbero immediatamente sulla De i punti m, m'.

onde le parallele alla Cz pe' punti P, Q incontrando la De assegnerebbero le proiezioni verticali de' punti cercati. Ma in questo caso, purchè non sia data la posizione de' piani di proiezione è più semplice il far uso della soluzione data nel n. 83. La costruzione eseguita per la De deve pure ripetersi per la D'e', il cerchio da descriversi avrà lo stesso raggio ed il punto E' per centro, e la G'H' sarà uguale alla GH: pertanto come per la disposizione de' dati il punto H' cade nell' area del cerchio descritto col centro E', e raggio EP ne segue che la D'e' non incontra l' iperbola data dall' equazione (8, 82), e che quindi il problema ammette soltanto quattro soluzioni reali.

Se oltre di essere A$=o$ fosse anche B$=o$ cioè il piano dato normale al piano orizzontale ed al verticale, la costruzione precedente si semplifica di molto. Se poi A$=\frac{1}{0}$ e $\frac{B}{A}=0$ che avviene quando il piano dato è parallelo al verticale l' equazione (9) diviene

$$(s-\alpha)^2+(u-\gamma)^2=r^2\sqrt{1-c^2}$$

ed esprime un cerchio che ha per centro (Fig. 38) il punto c', e per raggio GH in questo caso la c'E' potrà avere una posizione qualunque; e quindi si semplicizza la soluzione generale poichè le due ellissi si confondono in un medesimo cerchio col quale si farà intersecare la curva dell' equazione (8). Trovati i punti in elevato si hanno immediatamente in pianta, poichè la distanza che serbano dal piano verticale è per tutti uguale a $\pm c'$H, come lo indica l' equazione (5) che si riduce a

$$t=\pm cr=\pm c'\text{H}.$$

Vi sarebbero anche altri casi da esaminare come quando il piano è semplicemente normale a quello delle x e delle y; cioè quando B$=o$, non che le combinazioni scambievoli che possono farsi fra i diversi casi enumerati; ma siccome non si avrebbero che delle semplicizzazioni alle costruzioni date che facilmente si scorgono, così, anche per non più dilungarci, tralasceremo di discuterli.

Pertanto non è da omettersi che l'ipotesi $c=o$ che ha luogo quando il piano cercato deve essere normale al dato fà svanire il radicale dall' equazione (9) e così non si ha che una sola ellisse che ha c' per centro e per semi-assi $\frac{rA}{\sqrt{1+A^2+B^2}}$ ed r; e quindi il problema ha quattro soluzioni.

Se $c=1$ i semi-assi delle due ellissi svaniscono, onde queste si riducono a due punti, e il problema in questo caso è più che determinato.

PROBLEMA XXVI.

85. *Descrivere una sfera tangente a quattro sfere date.*

Si prenda il piano orizzontale in modo che passi pe' centri di tre sfere, e il piano verticale che passi per la congiungente il centro di una di queste col centro della quarta come vedesi nella figura 42 (*) Ponendo in C l'origine delle coordinate le equazioni delle sfere C, C', C'', C''' saranno della forma

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ldots(1)\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r'^2,$$
$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+z^2=r''^2,\quad (x-\alpha'')^2+y^2+(z-\gamma)^2=r'''^2.$$

Inoltre chiamando s, t, u, le coordinate del centro, ed R il raggio della sfera cercata la sua equazione sarà

$$(x-s)^2+(y-t)^2+(z-u)^2=R^2.$$

(*) I piani coordinati sono quelli che passano per gli assi Cx, Cy, Cz, ma il disegno è stato eseguito prendendo la Eh per proiezione del piano verticale

Ciò posto affinchè questa sia tangente ad una sfera che abbia per equazione

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2,$$

deve essere, come è noto,

$$(s-a)^2+(t-b)^2+(u-c)^2=(R\pm d)^2,$$

applicando questa equazione alle equazioni delle sfere date si hanno le seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{s^2+t^2+u^2}&=R\pm r\\ \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2}&=R\pm r'\\ \sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2}&=R\pm r''\\ \sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2}&=R\pm r'''\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

dalle quali dobbiamo ricavare le ignote s, t, u, R.

Sottraendo la prima equazione dalle altre tre, si ha

$$\sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2}=\sqrt{s^2+t^2+u^2}-a$$
$$\sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2}=\sqrt{s^2+t^2+u^2}-a'$$
$$\sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2}=\sqrt{s^2+t^2+u^2}-a''$$

ove

$$a=\pm r\mp r',\ a'=\pm r\mp r'',\ a''=\pm r\mp r''',$$

ed è da osservarsi che il segno $\pm$ che precede r', r'', r''' si dee prendere indifferentemente, ma quello da cui è affetto r è lo stesso in tutti i valori di a, a', a''. Elevando a quadrato le equazioni precedenti si ottiene

$$\alpha(\alpha-2s)+\beta(\beta-2t)=a^2-2a\sqrt{s^2+t^2+u^2}$$
$$\alpha'(\alpha'-2s)+\beta'(\beta'-2t)=a'^2-2a'\sqrt{s^2+t^2+u^2}$$
$$\alpha''(\alpha''-2s)+\gamma(\gamma-2u)=a''^2-2a''\sqrt{s^2+t^2+u^2}.$$

Da queste tre equazioni si potrebbero ricavare s, t, u; ma volendo assegnare il centro della sfera cercata, non esistendo questo su di alcuna superficicie data nel problema bisogna adoperare tre luoghi geometrici; sarà quindi più elegante il determinare il punto ove la retta che unisce l'origine col punto s, t, u incontra la sfera dell'equazione (1): ciò si può far facilmente poichè l'equazioni di questa retta essendo

$$t=\frac{y}{x}s\,,\quad u=\frac{z}{x}s$$

sostituiti questi valori nell'equazioni precedenti, e osservando che $x^2+y^2+z^2=r^2$, risulta

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\alpha-2s)+\frac{\beta(\beta x-2sy)}{x}&=a^2-\frac{2ars}{x}\\ \alpha'(\alpha'-2s)+\frac{\beta'(\beta' x-2sy)}{x}&=a'^2-\frac{2a'rs}{x}\\ \alpha''(\alpha''-2s)+\frac{\gamma(\gamma x-2sz)}{x}&=a''^2-\frac{2a''rs}{x}\end{aligned}\right\}\ldots(3),$$

dalle quali eliminando s, si deducono le equazioni

$$\frac{\alpha x-\beta y-ar}{\alpha' x+\beta' y-a' r}=\frac{\alpha^2+\beta^2-a^2}{\alpha'^2+\beta'^2-a'^2}\;\cdots\cdots\;(4)$$

$$\frac{\alpha x+\beta y-ar}{\alpha'' x+\gamma z-a'' r}=\frac{\alpha^2+\beta^2-a^2}{\alpha''^2+\gamma^2-a''^2}\;\cdots\cdots\;(5),$$

che indicano due piani, e la retta secondo la quale s' intersecano incontra la sfera ne' punti che vogliamo costruire. Riflettendo che il valore di r esistente in queste espressioni proviene dal radicale $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ pare che debba essere preceduto dal doppio segno $\pm$ ma questo dovendo essere lo stesso in ambedue le equazioni è chiaro che prendendo il segno $-$ invece del $+$ si avrebbero de' piani paralleli a questi ed ugualmente lontani dall' origine (*), ed in conseguenza la retta secondo la quale s' incontrerebbero sarebbe parallela alla retta dell' equazioni (4), (5) e disterebbe quanto questa dall' origine: quindi i punti ove taglierebbe la sfera uniti con l'origine darebbero le medesime rette che si ottengono servendosi de' punti determinati sulla sfera dalla retta espressa per le equazioni (4), (5), e siccome queste rette dobbiamo noi determinare, così abbiamo dato ad r un sol segno (**). Ciò posto per costruire l' equazione (4) si ponga successivamente

$$\alpha x+\beta y-ar=o,\quad \alpha x+\beta y-ar=\alpha^2+\beta^2-a^2$$

e si avrà

$$\alpha' x+\beta' y-a' r=o,\quad \alpha' x+\beta' y-a' r=\alpha'^2+\beta'^2-a'^2:$$

ciascuna di queste equazioni rappresenta un piano, ed assegnati questi, le rette ove s' incontrano il primo e il terzo; ed il secondo e quarto sono due rette del piano appartenente all' equazione (4). Ora le due prime potendosi mettere sotto la forma

$$r^2-\alpha x-\beta y=\pm rr',\quad r'^2+\alpha(x-\alpha)+\beta(y-\beta)=\pm rr'$$

si rileva per ciò che si è detto sull' equazione (8') del problema

---

(*) Ciò risulta dacchè le equazioni de' nuovi piani differirebbero dalle (4), (5), quando sono ordinate, pel solo termine noto che verrebbe dello stesso valore ma di segno contrario.

(**) Dippiù è da osservarsi che anche ne' valori di a, a', a'' possiamo prendere r con un sol segno. Di fatto supponiamo che si sia dato ad r il segno $+$, fatte le diverse combinazioni fra i segni di r', r'', r''' si avranno otto sistemi di equazioni (4), (5). Prendendo r col segno $-$ risulteranno otto altre coppie di equazioni identiche a quelle prima trovate sol che si cambî a, a', a'' in $-a$, $-a'$, $-a''$ il quale cambiamento essendo lo stesso che quello di r in $-r$ come abbiamo veduto non influisce sulla direzione della retta che unisce l'origine col punto s, t, u.

precedente che esprimono rispettivamente le congiungenti i punti ove le tangenti comuni a' cerchi C, C' toccano il cerchio C e il cerchio C'. Similmente le equazioni

$$\alpha'x+\beta'y-a'r=o\,,\ \alpha'x+\beta'y-a'r=a'^2+\beta'^2-a'^2$$

considerate nel piano xOy, dinotano le rette che uniscono i punti ove i cerchi C e C'' sono toccati dalle loro tangenti comuni; e nello spazio poi i piani proiettati secondo queste rette; quindi AB sarà la proiezione orizzontale del piano dell' equazione (4).

Nella stessa guisa si costruirà l'equazione (5) osservando però che i piani ottenuti dal paragone de' cerchi C e C' sono normali all' orizzontale e sono quelli stessi che abbiamo poc' anzi costruiti, e che gli altri sono perpendicolari al piano verticale. Dopo ciò è facile il rilevare dalle costruzioni eseguite sulla figura che ef, HGK sono le tracce del piano dato dall' equazione (5), (*) e perciò la retta secondo la quale s'incontrano i due piani espressi per le equazioni (4), (5) passa pel punto K del piano orizzontale, e pel punto d del verticale. Quindi presa sulla Dd' perpendicolare a DK, la Dd' = Dd, ed unita la d'K; dal punto m' ove incontra il cerchio avente per diametro pq se si tira m'M parallela a d'D e sulla Mm si taglia $\mu m=m'$M, saranno M—m le proiezioni del punto ove la retta che passa per K e d cioè la retta che ha per equazioni (4), (5) incontra la sfera C. Similmente operando pel punto n' si avrebbe l'altro punto di intersezione.

Trovato il punto M—m la CM — cm passerà pel centro della sfera cercata, e sarà facile assegnar questo centro osservando che l' equazione

$$\sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2}=\sqrt{s^2+t^2+u^2}-a\,.\ldots\ (6)$$

(*) Gioverà notare per l'intelligenza della figura che il punto G è determinato dall' intersezione della gG, condotta pel punto g parallelamente alla Ct, e della $s\,t$.

ci dimostra che se C'CR' fosse il piano che passa per CC' e la retta CM—cm, e CR' questa retta presa CL = a dovrebbe il punto da trovarsi sulla CR' distare ugualmente da L e C', e che perciò condotta la PR' normale a C'L pel suo punto di mezzo sarebbe R' il punto cercato. Da ciò si vede che bisogna trovare la posizione che la CM—cm ha nel detto piano; perciò suppongasi che questo piano rotando intorno alla CC' si abbatta sul piano orizzontale, il cerchio che questo piano produce nella sfera si confonderà col cerchio $qt'p$, quindi tirando MM' perpendicolare a CC' il punto M—m cadrà in M' e CM'R' sarà la posizione che prende la CM—cm. Trovato come si è detto il punto R' è evidente che nella R'R perpendicolare a CC' deve trovarsi la sua proiezione orizzontale quando il piano C'CR' ritorna alla primiera posizione, ma deve trovarsi sulla CM, dunque sarà in R ed in conseguenza il punto r ne sarà la proiezione verticale. Il raggio poi della sfera è uguale alla R'M'.

I radicali dell' equazione (6) potendo essere presi col segno $\pm$ pare che la CL si possa anche prendere in parte opposta, ma l' equazioni (3) essendo di primo grado rispetto ad s ci dimostrano che un sol punto deve trovarsi sulla CM', vedremo in seguito da qual parte debba tagliarsi la CL, e per ora cercheremo di esaminare quante soluzioni abbia il problema.

Avendo dimostrato che a ciascuna posizione della congiungente il punto x, y, z con l' origine corrisponde il centro di una sfera che soddisfà al problema, poichè la retta dell' equazioni (4), (5) incontra la sfera C in due punti il numero delle soluzioni sarà doppio del numero delle rette espresse dalle equazioni (4), (5), e quindi avendo detto che per le diverse combinazioni che si possono fare ne' valori a, a', a'' si hanno otto rette, sedici saranno le soluzioni del problema.

È d' avvertirsi che per quanto si è detto nel problema precedente riguardo all' equazione (8') allorchè nel valore di a si dà ad r' il segno — si considerano le tangenti esterne comuni a'cerchi C e C', e quando il segno + le tangenti interne, lo stesso ha luogo pe' valori di a', a''; e così altro non resta di ambiguo per determinare tutte le soluzioni del problema che vedere come debba assegnarsi il punto L. A tal uopo si osservi che

I. Quando ne' valori di a, a', a'' prendiamo i segni superiori cioè se facciamo

$$a = r - r',\quad a' = r - r'',\quad a'' = r - r'''$$

che è il caso corrispondente alla figura, si ha

$$R = -r + \sqrt{s^2+t^2+u^2} = -r' + \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2}$$

$$= -r'' + \sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2} = -r''' + \sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2}$$

onde la sfera cercata tocca le date esternamente, prendendo i segni inferiori si avrebbe

$$R = r + \sqrt{s^2+t^2+u^2} = r' + \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2}$$

$$= r'' + \sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2} = r''' + \sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2}$$

e quindi la sfera cercata toccherebbe le date abbracciandole, ma il prendere i segni superiori, o gl' inferiori porta il cambiamento di a, a', a'' in $-a$, $-a'$, $-a''$, e quindi restano le stesse, la retta dell'equazioni (4), (5) e le congiungenti il punto C co' punti corrispondenti ad m', n': dunque di queste due rette una dovrà contenere il centro della sfera che tocca le date esternamente, l' altra il centro della sfera che le abbraccia:

Per distinguere ora quale di questi due centri sia sulla CR' si ponga la prima delle equazioni (3) sotto la forma

$$s = \frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2)x}{2(\alpha x+\beta y-ar)}$$

donde

$$\frac{(\alpha x+\beta y)s}{x\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{(\alpha^2+\beta^2-a^2)x+2ars}{2x\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \frac{a(ax-2rs)}{2x\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \frac{a(\alpha x+\beta y)-r(\alpha^2+\beta^2)}{2(\alpha x+\beta y-ar)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Il primo membro di questa equazione esprime la distanza che il punto C serba dal piano condotto pel punto s, t, u normale a CC' ovvero la CQ; ma supponendo $r>r'$ il centro della sfera che tocca esternamente le date deve accostarsi più a C' che a C, come lo addita l'equazione

$$-r+\sqrt{s^2+t^2+u^2} = -r'+\sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2},$$

ovvero deve essere CQ $> \frac{1}{2}$ CC', dunque si dovrà avere

$$\frac{(\alpha x+\beta y)s}{x\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} > \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

e quindi $\frac{a(\alpha x+\beta y)-r(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha x+\beta y-ar}$ deve essere quantità negativa: or $\frac{\alpha x+\beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ che è la distanza del punto C dalla M'M è minore di r, a anche è minore di $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ dunque il numeratore è quantità negativa, e perciò il denominatore deve essere positivo, ossia $\frac{\alpha x+\beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} > \frac{ar}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, vale a dire la distanza del punto C da MM' maggiore che dalla st, onde il punto M dovrà essere rispetto alla ts in parte opposta al punto C, che se esiste dalla medesima parte come il punto N la corrispondente retta CR' conterrà il centró della sfera che ha un contatto interno colle date; che se finalmente ambedue i punti M ed N cadessero in parte opposta del punto C, vi sarebbero due sfere tangenti alle date esternamente, e nessuna che le abbraccia: il contrario avrebbe luogo se i punti M ed N si trovassero dalla stessa parte del punto C. Determinato così la CR′ qual centro deve contenere si prenderà $CL=r-r'$ come nella figura se su di essa esiste il centro della sfera che tocca esternamente le date, in parte opposta se passa pel centro dell' altra sfera; ovvero ciò che è lo stesso si prenderà da M′ verso C o da μ' verso C una parte uguale ad r'.

II. Se ne' valori di a, a' prendiamo i segni superiori, ed in a'' (cioè soltanto r''' perchè abbiam detto che r deve avere lo stesso segno in a, a', a'') gl' inferiori, o viceversa; si ha

$$R \lessgtr \sqrt{s^2+t^2+u^2}, \qquad R \lessgtr \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2},$$

$$R \lessgtr \sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2}, \quad R \gtrless \sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2}.$$

Quindi al primo caso corrisponde la sfera che tocca esternamente le tre C, C′, C″ ed internamente C‴, ed al secondo la sfera che toccando esternamente quest' ultima abbraccia le prime; ma queste due ipotesi non differiscono che pel cambiamento di a, a', a'' in $-a, -a', -a''$, e perciò la stessa è la retta dell' equazioni (4), (5), dunque le rette che uniscono il punto C co' punti corrispondenti ad M ed N contengono rispettivamente i centri delle due sfere nominate. Ed essendo le sfere C, C′ toccate come nel caso precedente, ne segue che se il punto M e il punto C sono in diverse parti rispetto alla st la CR′ contiene il centro della sfera che tocca esternamente le tre C, C′, C″ ed abbraccia la sfera C‴; e la retta che unisce il punto C col punto corrispondente ad N che cade dalla medesima parte che C passa pel centro della sfera che tocca esternamente C‴ ed internamente le altre tre. Che se poi i punti M ed N sono ambi in parte opposta di C vi saranno due sfere che toccano esternamente le C, C′, C″

*

abbracciando C‴, e sarà impossibile il descrivere una sfera che tocchi esternamente quest' ultima avendo colle prime un contatto interno: il contrario avrà luogo se i punti M ed N sono dalla stessa parte del punto C. In questo caso essendo $a=r-r'$, $a'=r-r''$, $a''=r+r'''$ a' cerchi C, C′; C e C″ si tireranno le tangenti comuni esterne ed a' cerchi c, c''' le tangenti comuni interne. Quanto alla determinazione del punto L è la stessa che nel caso precedente.

III. Se in a, a'' prendiamo i segni superiori ed in a' gl' inferiori, o viceversa; cioè se facciamo

$$a=\ r-r',\ a'=r+r'',\ a''\ =r-r'''$$

ovvero

$$a=-r+r',\ a'=-r-r'',\ a''=-r+r'''$$

è evidente che si ha un caso simile al precedente sol che si cambi C″ in C‴, e siccome la conoscenza della retta che contiene il centro di un' individuata sfera l' abbiam fatto cadere sul paragone delle due C e C′ avrà luogo ciò che ivi abbiam detto cambiando C″ in C‴.

IV. Se in a prendiamo i segni superiori ed in a', a'' gl' inferiori, o viceversa, si avrà

$$R \lessgtr \sqrt{s^2+t^2+u^2}, \qquad R \lessgtr \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2},$$

$$R \gtrless \sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2}, \quad R \gtrless \sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2}$$

e quindi nel primo caso la sfera cercata tocca esternamente le due sfere C e C′ ed abbraccia le due C″, C‴; e nel secondo caso abbraccia le prime toccando esternamente le due altre. Pertanto essendo nella stessa guisa toccate le due sfere C e C′ risulta dall' analisi fatta nel primo caso che se il punto M è in parte opposta a C rispetto alla st, la CR′ contiene il centro della sfera da prima nominata, e il centro dell'altra sfera è sulla retta che congiunge C col punto corrispondente ad N che esiste dalla medesima parte di C: come pure se i punti M ed N sono tutti e due dalla parte opposta di C ambedue le sfere toccano esternamente le due C e C′ ed internamente le altre due, e non ve ne può essere alcuna che tocchi queste esternamente abbracciando le prime. Avverrà il contrario se i punti M ed N cadono dalla stessa parte di C per rapporto sempre alla st. In questo caso essendo

$$a=r-r', \quad a'=r+r'', \quad a''=r+r''',$$

a' cerchi C e C′ si tireranno le tangenti comuni esterne, ed a'cerchi C, C″; c, c''' le tangenti comuni interne. Il punto L si determina sempre nella stessa guisa.

V. Allorchè si suppone

$$a=r+r', \quad a'=r-r'', \quad a''=r-r'''$$

o pure

$$a=-r-r', a'=-r+r'', a''=-r+r'''$$

si ottiene

$$R \lesseqgtr \sqrt{s^2+t^2+u^2}, \qquad R \gtreqless \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2},$$

$$R \lesseqgtr \sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2}, R \lesseqgtr \sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2};$$

e quindi delle sfere cercate una tocca internamente la sfera C′, ed esternamente le altre tre; e l'altra tocca internamente queste, ed esternamente la prima. In questo caso adunque sono C, C″ le due sfere che sono toccate nello stesso modo, e quindi partendo dalla seconda delle equazioni (3) si proverà (ciò per altro si deduce facilmente per analogia) che se il punto M cade rispetto alla $s't'$ in parte opposta a C la CR′ contiene il centro della sfera

che tocca esternamente C, C″, C‴ abbracciando C′, e il punto N che cade dalla medesima parte di C assegna la retta che passa pel centro dell'altra sfera. Se i due punti M ed N cadono in parte opposta a C ambe le sfere toccheranno internamente la C′; e viceversa se M ed N sono con C da una medesima parte la toccheranno esternamente. Da' valori di a, a', a'' si deduce che a'cerchi C e C′ si dovranno in questo caso tirare le tangenti comuni interne; ed a'cerchi C, C″; c, c''' le esterne. Il punto L si troverà portando r'' da M′ verso C se la CR′ passa pel centro della sfera che tocca esternamente C, C″, C‴, ed internamente C′; da μ' verso C nel caso contrario: è anche da notarsi che in questo caso le M′M, R′R devono tirarsi perpendicolari alla CC″.

VI. Quando facciamo

$$a=r+r', \quad a'=r-r'', \quad a''=r+r''',$$

ovvero

$$a=-r-r', a'=-r+r'', a''=-r-r'''$$

risulta

$$R \lesseqgtr \sqrt{s^2+t^2+u^2}, \qquad R \gtreqless \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2},$$

$$R \lesseqgtr \sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2}, \quad R \gtreqless \sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2},$$

onde delle due sfere una tocca esternamente le due C e C″ ed internamente C′, C‴, l'altra le tocca al contrario, quindi la CR′ conterrà il centro della prima se il punto M è rispetto alla $s't'$ in parte opposta di C, e il punto N che cade dalla stessa parte darà luogo alla seconda sfera: che se i punti M ed N cadono da una medesima parte le due sfere toccano nello stesso modo le date.

In questo caso a' cerchi C, C″ si condurranno le tangenti comuni esterne ed a C, C'; c, c''' le interne: il punto L si determina come nel caso precedente.

VII. Se poniamo

$$a=r+r',\quad a=r+r'',\qquad a=r-r''',$$

o pure

$$a=-r-r',\ a=-r-r'',\ a=-r+r''$$

ne segue

$$R \lessgtr \sqrt{s^2+t^2+u^2},\qquad R \gtrless \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2},$$

$$R \gtrless \sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2},\ R \lessgtr \sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2};$$

e quindi una sfera tocca esternamente le due C, C‴ ed internamente C′, C″; l'altra esternamente queste, ed abbraccia le prime. Essendo C e C‴ le sfere toccate nella stessa guisa si farà uso della terza delle equazioni (3) e si vedrà, come apparisce anche senza calcolo per ciò che abbiam detto, che se il punto m cade rispetto alla eg in parte opposta a c la CR′ contiene il centro della prima sfera, e l'altra retta passerà pel centro della seconda sfera se la proiezione verticale del punto N cade dalla medesima parte che c; e che se i punti d'incontro m, n sono ambedue da una stessa parte le sfere saranno toccate nella stessa guisa. Da' valori di a, a', a'' risulta che bisogna applicare a' cerchi c, c''' le tangenti comuni esterne ed a C, C′; C, C″ le interne. Il punto L poi se la CR′ contiene il centro della sfera che tocca esternamente C si determinerà prendendo $CL=r+r'$ come nella figura, in senso opposto se passa pel centro dell'altra sfera, o ciò che è lo stesso si porterà rispettivamente r' sul prolungamento de' raggi CM′, Cμ' a partire dal punto M′ o da μ'. Ciò se la M′M si tira perpendicolare a CC′ che se voglia tirarsi normale a CC″ invece di r' dovrà prendersi r''.

VIII. Finalmente allorchè si prende

$$a=r+r',\ a'=r+r'',\quad a''=r+r''',$$

ovvero

$$a=-r-r', a'=-r-r'', a''=-r-r'''$$

si ha

$$R \lessgtr \sqrt{s^2+t^2+u^2},\qquad R \gtrless \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2},$$

$$R \gtrless \sqrt{(s-\alpha')^2+(t-\beta')^2+u^2},\ R \gtrless \sqrt{(s-\alpha'')^2+t^2+(u-\gamma)^2}$$

e perciò una sfera tocca esternamente C abbracciando le rimanenti, e l'altra esternamente queste, ed internamente C. In questo caso l'equazione (6) secondochè si fà $a=r+r'$, $a=-(r+r')$ dà

$$\sqrt{s^2+t^2+u^2} \gtrless \sqrt{(s-\alpha)^2+(t-\beta)^2+u^2}$$

onde $CQ \gtrless \frac{1}{2}\, CC'$, e quindi per quanto abbiam detto nel primo caso se il punto M è in parte opposta a C rispetto alla st la CR′ contiene il centro della sfera che tocca esternamente C, e perciò internamente le altre; e il centro della seconda sfera è sull'altra retta se il punto N cade dalla medesima parte di C. Che se i punti M, N cadono da una medesima parte le due sfere toccano nello stesso modo le sfere date. In questo caso le tangenti comuni a' cerchi, dovranno essere tutte interne, e il punto L si assegnerà come nel caso precedente.

La retta st e le analoghe variando i segni di r', r'', r''' ne' valori di a, a', a'', non volendo tirare la tangente comune a' due cerchi, può costruirsi osservando che $\frac{ar}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ essendo la distanza che il punto C serba dalla st ovvero la $C\varphi$, condotti i due diametri $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ normali a CC', se si unisce la $\alpha\beta$; la $\alpha'\delta$ incontra la CC' nel punto φ. Se si unisse il punto α con β' la congiungente il punto α' col punto δ' ove la $\alpha\beta'$ interseca il cerchio $\alpha\delta\delta'$, incontrerebbe la CC' nel punto per dove passa la retta che unisce i punti di contatto segnati sul cerchio C dalle tangenti interni. Del pari le due rette tirate dal punto β' al punto ε, e da β ad ε' incontrano la CC' ne' punti per dove passa la HF e l'altra retta.

Inoltre è da notarsi che ne' casi I, II, III, IV, VIII abbiamo supposto $a < \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, nel V, e VI, $a' < \sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$, e nel VII, $a'' < \sqrt{\alpha''^2+\gamma^2}$: ne' primi quattro casi se fosse $a=r-r' > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ la sfera C racchiuderebbe la C' e quindi sarebbe impossibile il descrivere una sfera tangente alle date che tocchi esternamente la C; onde le due sfere in questo caso, se il problema è possibile il che richiede che le altre sfere o sieno nella sfera C o almeno la sechino, toccheranno internamente la sfera C. Similmente nel V e VI avendosi $r-r'' > \sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$ e nel VII $r-r''' > \sqrt{\alpha''^2+\gamma^2}$ la sfera C racchiuderebbe la C'' o la C''', e quindi le due sfere toccherebbero pure internamente la C: nell'VIII finalmente si avrebbe $r+r' > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ lo che può avvenire o perchè la sfera C contiene la C' o perchè le due sfere C e C' si tagliano; in questo caso nel rotto $\frac{a(\alpha x+\beta y)-r(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha x+\beta y-ar}$ il denominatore è quantità negativa, perchè $\frac{\alpha x+\beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ essendo la distanza del punto C dalla M'M è minore di r, ed al contrario $\frac{ar}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ è maggior di r essendo $a > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; quindi dovendo essere $CQ > \frac{1}{2}CC'$ perchè la CR' contenga il cen-

tro della sfera che tocca esternamente C, bisogna che sia il numeratore quantità positiva ossia

$$\frac{\alpha x+\beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} > \frac{r\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{a} \text{ vale a dire } C\mu'' > C\gamma.$$

Dunque se il punto γ è dalla medesima parte che C rispetto alla M'M la CR' contiene il centro della sfera che tocca esternamente C. In questo caso si dovrebbero a' cerchi C e C' tirare le tangenti comuni interne, e non potendosi adattare si farà uso della costruzione che poc' anzi abbiamo esposta.

86. Nelle costruzioni grafiche la soluzione che abbiamo data riesce facilissima potendosi adattare ad occhio la tangente comune a due cerchi; ma se le st, HF si volessero determinare con costruzione geometrica, la soluzione del problema riuscirebbe alquanto complicata, e perciò passiamo ora ad additarne un' altra.

In vece di chiamare x, y, z le coordinate del punto ove la congiungente l'origine col punto s, t, u incontra la sfera C si dinotino con x, y, z le coordinate del punto ove incontra una sfera avente l'origine per centro e per raggio d: è evidente che in luogo dell'equazioni (4), (5) del n. precedente si avranno le due

$$\frac{\alpha x+\beta y-ad}{\alpha' x+\beta' y-a'd} = \frac{\alpha^2+\beta^2-a^2}{\alpha'^2+\beta'^2-a'^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (4')$$

$$\frac{\alpha x+\beta y-ad}{\alpha'' x+\gamma z-a''d} = \frac{\alpha^2+\beta^2-a^2}{\alpha''^2+\gamma^2-a''^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (5').$$

Per costruirle si ponga nella prima

$$\alpha x+\beta y-ad = o, \text{ e si avrà } \alpha' x+\beta' y-a'd = o:$$

queste equazioni indicano due rette, una (Fig. 43) perpendicolare a CC', l'altra a CC'', e distanti da C per $\frac{ad}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\frac{a'd}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}$. Essendo la d arbitraria possiamo fare $d = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = CC'$, e queste distanze diverranno rispettivamente uguali ad a, ed $\frac{a'd}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}} = \frac{a'.CC'}{CC''}$; onde presa C$a$ $= a$ sarà aB la proiezione del piano espresso dalla prima equazione, e se Ca' $= a'$ tirata a'A parallela a C$'$C$''$ si avrà CA $= \frac{a'.CC'}{CC''}$, e perciò tagliata la CA$'$ = CA, in A$'$B è proiettato il piano della seconda equazione, e per la retta proiettata nel punto B passa il piano dell'equazione (4$'$). Facendo in questa stessa equazione

$$\alpha x+\beta y=\alpha^2+\beta^2$$

si ha

$$\alpha' x+\beta' y-a'd=(\alpha^2+\beta^2-ad).\frac{\alpha'^2+\beta'^2-a'^2}{\alpha^2+\beta^2-a^2}.$$

Queste equazioni appartengono a due rette perpendicolari a CC$'$, CC$''$ rispettivamente, e che distano da C per

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \text{ed}\ \frac{a'd}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}+\frac{\alpha^2+\beta^2-ad}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}.\ \frac{\alpha'^2+\beta'^2-a'^2}{\alpha^2+\beta^2-a^2},$$

le quali distanze ponendo per semplicità

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = CC' = c$, $\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2} = CC'' = c'$, $\sqrt{\alpha''^2+\gamma^2} = cc''' = c''$,

si riducono a

$$c\ ,\ \text{ed}\ \frac{a'c}{c'}+\frac{c^2-ac}{c'}.\ \frac{c'^2-a'^2}{c^2-a^2}=\frac{a'c}{c'}+\frac{c(c'-a')(c'+a')}{c'(c+a)}$$

$$=\frac{a'c}{c'}+\frac{(c'-a')\left(c+\frac{a'c}{c'}\right)}{c+a}:$$

quindi la prima passa per C$'$; e poichè presa $a'p = a\gamma$, $a'q =$ Aγ, e tirata qr' parallela a pC$''$ risulta $a'r' = \frac{(c'-a')\left(c+\frac{a'c}{c'}\right)}{c+a}$, portando

la $a'r'$ da A$'$ in r, la seconda passerà per r; ed E sarà la proiezione di un'altra retta esistente sul piano espresso dall'equazione (4$'$): perciò BED, Dd sono le tracce di questo piano.

Similmente si costruirà l'equazione (5$'$) onde presa la cA$'' = \frac{a''c}{c''}$ tirata la A$''e$ normale alla cc'''; per l'intersezione de' piani proiettati in aB, eg passerà il piano dell'equazione (5$'$) cioè per la retta che unisce il punto e con G; e tagliata A$''$S $= \frac{(c''-a'')\left(c+\frac{\alpha''c}{c''}\right)}{c+a}$ condotta Sf parallela ad A$''e$ per f ed H passerà un'altra retta del medesimo piano, e in conseguenza ef, GH ne sono le tracce, e la retta dell'equazioni (4$'$), (5$'$) incontra i piani di proiezione in K e d, ed ha KD per proiezione orizzontale. Il rimanente della soluzione procede come nel n. precedente sol che si cambî la sfera di raggio r in quella di raggio d.

Per determinare le parti cA$''$, A$''$S si rifletta che presa la $ca''=a''$ e condotta $a''\alpha$ parallela a cC si ha $c'' : a'' :: C'''C : C\alpha$, e quindi la $\alpha\alpha'$ parallela a C$'$C$'''$ taglia la C$\alpha' = \frac{a''c}{c''} = cA''$: dippiù se si fa la $a\Sigma$ uguale alla $c'''a''=c''-a''$ condotta la $\alpha'\alpha''$ parallela a $\gamma\Sigma$ si ottiene

$$\alpha''\Sigma=\frac{(c''-a'')\left(c+\frac{a''c}{c''}\right)}{c+a}=A''S.$$

Quanto alle parti Ca, Ca', ca'' uguali ad a, a', a'' essendo $a = r\pm r'$, $a'=r\pm r''$, $a''=r\pm r'''$ si determinano facilmente secondo il segno che si dà ad r', r'', r'''.

Vi sarebbero adesso a considerarsi de' casi in cui le soluzioni date devono modificarsi perchè cadono in difetto come avverrebbe se tre centri fossero in linea retta; ma questi si possono facilmente discutere come nel problema antecedente per mezzo delle equazioni stabilite. (*)

È però da osservarsi che (Fig. 42) le congiungenti il punto C co' punti p, q contengono i centri de' cerchi che toccano i tre C, C', C''; questi centri poi si assegnano come il punto R': il numero de' cerchi che soddisfanno al problema è otto, e l' analisi de' diversi casi è identica alla precedente, osservando che i punti M, N sono sostituiti da' punti p, q. Ciò risulta dacchè l' equazione (4) è dedotto soltanto dalle prime tre delle equazioni (2) e che resta la stessa facendo $u=o$. Non sarà inutile l' avvertire che abbiamo intesa dire che due sfere si toccano esternamente o internamente secon-

(*) Dall' analisi fatta nel presente problema si vede come per mezzo dell' equazioni che si ottengono si possa facilmente interpetrare le diverse soluzioni che si ottengono in qual guisa soddisfacciano al problema; così pure nel problema risoluto ne' n. 35, 36 abbiamo veduto (Fig. 14) che il punto m anche risolveva il problema, pertanto poichè

$$\frac{r(r+t)}{u}+\frac{r^2(r+t)}{ut}=p$$

è l'equazione del problema si vede che essendo le coordinate t, u del punto m entrambe negative si ha

$$-\frac{r(r-t)}{u}+\frac{r^2(r+t)}{ut}=p\,,$$

Quindi non la somma de' lati del triangolo dbe ma l' eccesso de' due bd, de sul terzo be è uguale alla retta data. Nel problema medesimo volendo risolverlo generalmente avremmo dovuto prendere il valore della BD col segno $\pm$ ma abbiamo preso il solo segno + perchè ne sarebbe risultata una semplicissima equazione di primo grado; e di fatto quando si prende il segno — viene a risolversi il problema in cui si cerca che sia data la MD, onde risulta anche data la CD,

dochè il piano tangente al punto ove esse si toccano le lascia in diverse parti o da una stessa parte.

PROBLEMA XXVII.

87. *Determinare su di una data superficie la locale de' punti pe' quali condotta la normale alla superficie questa faccia un angolo dato con una retta data di posizione.*

Sieno

$$y=ax+\alpha,\ z=bx+\beta$$

le equazioni della retta data, e

$$dx=pdy+qdz\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

l' equazione differenziale della superficie: la normale in un punto qualunque x, y, z avrà per equazioni

$$y'-y=-p(x'-x)\,,\ z'-z=-q(x'-x)\,,$$

e quindi il coseno dell' angolo che fa con la retta data sarà

$$\frac{1-ap-bq}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+p^2+q^2}}=c\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ove c è il coseno dell' angolo dato. La superficie rappresentata da questa equazione incontrerà la proposta secondo la curva cercata.

Applichiamo ora questa soluzione generale a qualche caso particolare, e supponiamo che si abbia una superficie di rotazione. Sieno A — aa' le proiezioni dell' asse (Fig. 44), $x\beta y$ la curva generatrice, M—m le proiezioni di un punto qualunque della superficie, siccome la proprietà caratteristica delle superficie di rotazione è che i piani normali all' asse producono cerchi, dovrà essere $\mu q=$ AM, quindi indicando con fz l' ordinata μq corrispondente all' ascissa $a\mu=z$, si avrà

$$x^2+y^2=(\mathrm{f}z)^2\ldots\ldots\ldots\ (1')$$

per l'equazione della superficie. Differenziando si ottiene

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y = \mathrm{f}z\mathrm{f}'z\,\mathrm{d}z$$

d' onde

$$p=-\frac{y}{x},\ q=\frac{\mathrm{f}z\mathrm{f}'z}{x},$$

e l'equazione (2) diviene

$$\frac{x+ay-b\mathrm{f}z\mathrm{f}'z}{\mathrm{f}z\sqrt{1+(\mathrm{f}'z)^2}}=c\sqrt{1+a^2+b^2}\ \ldots\ldots\ldots\ (2').$$

Per determinare i diversi punti della curva data dall' equazioni (1'), (2') si ponga

$$y=Ax,$$

avremo dalle dette equazioni

$$x^2(1+A^2)=(\mathrm{f}z)^2,\ \frac{(1+aA)x-b\mathrm{f}z\mathrm{f}'z}{\mathrm{f}z\sqrt{1+(\mathrm{f}'z)^2}}=c\sqrt{1+a^2+b^2},$$

quest' ultima in virtù della prima si riduce ad

$$\frac{1+aA-b\sqrt{1+A^2}.\mathrm{f}'z}{\sqrt{1+A^2}.\ \sqrt{1+(\mathrm{f}'z)^2}}=c\sqrt{1+a^2+b^2}\ \ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Per mezzo di quest' equazione si potrà determinare il punto della curva esistente sopra un dato piano meridiano. Supponiamo in primo luogo che sia $A=o$, l'equazione (3) si riduce ad

$$\frac{1-b\mathrm{f}'z}{\sqrt{1+(\mathrm{f}'z)^2}\sqrt{1+b^2}}=\frac{c\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+b^2}},$$

il primo membro di questa equazione esprime il coseno dell' angolo che la normale alla curva generatrice nel punto che ha z per ascissa fa colla proiezione verticale della retta data; dunque se, supponendo sia $a\alpha$ la proiezione verticale della retta data,

tiriamo le ab, ab' che facciano con la $a\alpha$ un angolo che abbia per coseno $\frac{c\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+b^2}}$, condotte le $\gamma\beta$, $\gamma'\beta'$ parallele alle ab, ab' e normali alla generatrice della superficie; i punti β, β' sono punti della curva cercata. Per costruire le ab, ab' supponiamo che AD' sia la proiezione orizzontale della retta data, sarà $\mathrm{AD}'=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\mathrm{AC}}$, $ac=\frac{\sqrt{1+b^2}}{\mathrm{AC}}$, $\gamma c=b.\mathrm{AC}$, e quindi $ad=\sqrt{1+a^2+b^2}.\ \mathrm{AC}$, $\frac{c\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{c.ad}{ac}$, e perciò se αae è l'angolo dato che ha per coseno c descritto col centro a intervallo ae l'arco ebb' gli angoli $ba\alpha$, $b'a\alpha$ hanno per coseno $\frac{c\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+b^2}}$.

Ciò posto siccome la superficie è di rotazione i piani delle $z, x; z, y$ possono essere presi ad arbitrio e quindi possono rappresentare un piano meridiano qualunque: onde per trovare un punto della curva su di un piano meridiano si potrà fare la medesima costruzione purchè a questo piano come piano verticale si rapporti la retta AD'$-a\alpha$. Sia adunque AN la proiezione di un piano qualunque; passando la retta AD'$-a\alpha$ pel punto D'$-c$, se questo punto si proietta sul piano AN si avrà il punto per dove passa la proiezione della AD'$-a\alpha$, e perciò condotta dal punto D' una perpendicolare sulla AN, che cada in N, presa la $an=$ AN, la ap sarà la posizione che prende la detta proiezione quando il piano AN girando intorno l' asse A$-aa'$ si pone in sito parallelo al piano di prospetto; ed in conseguenza sulle ap, ad convien fare la medesima costruzione che sulle ac, ad. Ciò posto per semplicità di costruzione supponiamo per poco che la ap cada sulla ac allora presa $ap'=ap$ condotta $p'g$ parallela a ce, e col centro a intervallo ag descritto l' arco ghh', unendo i punti h, h' con a si avrebbero le rette alle quali le normali ad $x\beta y$ dovrebbero essere parallele se ap fosse in ap', e perciò presi gli archi hk, hk' uguali ad αl dovranno essere parallele alle ak, ak'. Trovati i punti q, q' pe' quali le normali sono parallele alle ak, ak' è evidente per ciò che abbiam detto sull'equazione (1') che prese le AM, AM' uguali alle $q\mu$, $q'\mu'$; M—m, M'—m' sono le proiezioni di due punti della curva cercata che esistono sul piano AN. Similmente operando per altri piani meridiani si troveranno degli altri punti pe' quali passerà la curva da costruirsi.

Dalla costruzione fatta si vede che quanto più la an si accosta alla $a\delta$ crescono gli angoli αak, $\alpha ak'$; dunque quando si fà uso del piano AD' che dà $an = a\delta$ si avranno i punti s, s' che determinano il punto più basso, e il punto più alto della curva. Inoltre se fosse $ag < ad'$ è chiaro che il piano corrispondente a questo valore di ag non incontrerebbe la curva, dunque descritto col centro a ed intervallo ad' l' arco $d'f$, e condotta $f\varphi'$ parallela a ce, se si prende $a\varphi = a\varphi'$ ed AP $= a\pi$, il piano AP sarà il piano ultimo da considerarsi. Per questo piano le due ak, ak' coincidono colla $a\varphi$ alla quale tirando una parallela normale alla curva, si verrà a determinare il punto t che assegna il punto corrispondente u della curva cercata.

Esposta la costruzione da eseguirsi per un qualunque valore di c supponiamo ora successivamente che sia $c=o$, $c=1$; nel primo caso la soluzione data si semplicizza osservando che le normali alla $x\beta y$ devono essere perpendicolari alla ap, ovvero che i punti q, q' si assegneranno trovando sulla curva que' punti pe' quali le tangenti sono alla ap parallele: in questa ipotesi si ha la curva $xd''y$. Nel secondo caso essendo $c=1$ l' angolo αar è nullo, e la costruzione non può eseguirsi che sul piano AD', onde la curva si riduce ad un sol punto che si ottiene tirando la $\varepsilon\varepsilon'$ parallela alla ad, e determinando in seguito il punto corrispondente z.

Dando a c diversi valori cambia la distanza de' punti β, β'

ove la curva $\beta' u \beta$ tocca la generatrice della superficie, quindi potrebbe cercarsi qual valore debba darsi a c onde i punti β, β' si confondano in uno. Questo valore si ritrova facilmente osservando che i punti β, β' sono determinati in modo che le normali alla generatrice in questi punti devono essere parallele alle ab, ab', e che quindi quando queste rette coincidono colla $a\varkappa$, che come è chiaro avviene quando l' angolo dato è $\varkappa a$B allora i punti β, β' si confondono in un sol punto che si assegna tirando una normale alla generatrice parallela alla $a\varkappa$, e nella figura vedesi delineata la curva corrispondente. Ogni angolo minore di $\varkappa a$B dà delle curve che non toccano la generatrice, e si accostano sempre più al punto z a misura che l' angolo suddetto và diminuendo.

Il problema che abbiamo risoluto può essere utile nell' applicazione della Geometria Descrittiva all' Architettura, poichè allora supponendo che la retta data sia il raggio di luce, dando a c de' valori che differiscano fra loro per una progressione aritmetica da o ad 1 si ottengono diverse curve $\beta u \beta'$ tra il punto z e la $xd''y$: e partendo dal punto z che sarà il più chiaro, le tinte da darsi alle diverse fasce comprese tra due curve consecutive, dovranno essere anche in progressione aritmetica. In tal modo par che si possa dare alla parte in chiaro di un disegno tutta la precisione matematica.

Per mezzo dell' equazione (2) possiamo anche determinare le proiezioni di una superficie qualunque: di fatto essendo noto che la proiezione di una superficie su di un piano è la traccia di un cilindro perpendicolare al piano e che tocca la superficie, per ottenere le proiezioni orizzontale e verticale della superficie che sono quelle che ordinariamente si disegnano nella descrittiva, basta fare successivamente

$$a=o,\ b=\frac{1}{o}:\ \text{ed}\ a=\frac{1}{o},\ b=o$$

e si avrà

$$q=o\ldots\ldots\ (2'),\ p=o\ \ldots\ldots\ (2'').$$

che se si volesse anche la terza proiezione dovendo essere $a=o$, $b=o$ si otterrebbe

$$\frac{1}{p}\ \text{ovvero}\ \frac{1}{q}=o\ \ldots\ldots(2''').$$

Ne' seguenti problemi daremo delle applicazioni di queste equazioni.

PROBLEMA XXVIII.

88. *Determinare le proiezioni della superficie generata da una retta che si appoggia* (Fig. 45) *all' asse orizzontale* Oy *ed a' due cerchi uguali* ABC, *dBe esistenti ne' piani proiettati in* Ae, DE *e i cui centri sono equidistanti dall' asse* Oy.

Si tiri l' asse Ox parallelo ad eA, ed ugualmente lontano dalle ED, eA e si prendano per assi la Ox, la Oy, e la Oz, le equazioni de' cerchi ABC, dBe, e dell' asse Oy saranno della forma

$$y=-n,\ z^2+x^2-2mx=r^2-m^2$$
$$y=n,\ z^2+x^2+2mx=r^2-m^2$$
$$x=o,\ z=o.$$

Quindi supponendo, che

$$x=ay+\alpha,\ z=bx+\beta\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

sieno le equazioni di una generatrice, le condizioni le quali esprimono che questa incontra le tre linee date saranno

$$\beta=o,\ \left.\begin{array}{l}(1+b^2)(an-\alpha)^2+2m(an-\alpha)=r^2-m^2\\(1+b^2)(an+\alpha)^2+2m(an+\alpha)=r^2-m^2\end{array}\right\}\ldots\ldots(2),$$

*

per mezzo delle quali eliminando dalle equazioni (1) a, α, b, β, si ottiene un' equazione tra x, y, z che appartiene alla superficie di cui si tratta. Per eseguire questa eliminazione, si osservi che la seconda delle equazioni (1) essendo $\beta=o$ dà $b=\frac{z}{x}$, e quindi le due ultime equazioni (2) si riducono ad

$$\left.\begin{array}{l}(an-\alpha)^2(z^2+x^2)+2m(an-\alpha)x^2=(r^2-m^2)x^2\\(an+\alpha)^2(z^2+x^2)+2m(an+\alpha)x^2=(r^2-m^2)x^2\end{array}\right\},\ldots\ldots(2')$$

e sottraendo l' una dall' altra si ottiene

$$an(z^2+x^2)+mx^2=o,\ \text{e quindi}\ a=-\frac{mx^2}{n(z^2+x^2)},$$

d' onde

$$\alpha=x-ay=x+\frac{mx^2}{n(z^2+x^2)}y,$$

e finalmente sostituendo questi valori di a ed α in una delle equazioni precedenti, si ha

$$\left(z^2+x^2+\frac{mx(y-n)}{n}\right)^2+2mx\left(z^2+x^2+\frac{mx(y-n)}{n}\right)$$
$$=(r^2-m^2)(z^2+x^2)\ldots\ldots\ (3)$$

che è l' equazione della superficie.

Ciò posto risolvendo questa equazione rispetto alla quantità $z^2+x^2+\frac{mx(y-n)}{n}$, si ottiene

$$z^2+x^2+\frac{mxy}{n}=\pm\sqrt{r^2(z^2+x^2)-m^2z^2}\ldots\ldots\ldots\ (3'),$$

ove ponendo

$$z=bx,$$

risulta

$$x=o\,,\ (1+b^2)x+\frac{my}{n}=\pm\sqrt{r^2(1+b^2)-m^2b^2}\ \ldots\ldots\ (4)\,,$$

onde ogni piano il quale passa per l' asse delle y incontra la superficie secondo la Oy, e secondo due altre rette parallele. Per costruirle si ponga primieramente $y=-n$, e si avrà

$$(1+b^2)x=m\pm\sqrt{r^2(1+b^2)-m^2b^2}\,,$$

questa equazione è la stessa che quella ottenuta dall' equazione del cerchio ABC ponendo $z=bx$, e quindi se om è la retta che ha per equazione $z=bx$, i valori della x sono le ascisse de' punti ove la om incontra il cerchio ABC, onde considerando il solo segno superiore del radicale per M passerà la retta dell' equazione (4). Similmente facendo $y=n$ si ha

$$(1+b^2)x=-m\pm\sqrt{(1+b^2)r^2-m^2b^2}\,,$$

e per le stesse ragioni che abbiamo ora accennate proiettando il punto n in N, sarà anche questo un punto della retta data per l' equazione (4) che per conseguenza sarà la MN. Facendo la medesima costruzione per gli altri punti ove la om incontra i cerchi ABC, dBe si avrà l' altra retta corrispondente al segno — del radicale. Nel disegno non è tracciata questa retta perchè consideriamo soltanto la parte della superficie superiore al piano delle x e delle y, la parte inferiore essendo simmetrica a questa come lo indica l'equazione della medesima.

Inoltre è da osservarsi che nel sottrarre le due equazioni (2') l' equazione che abbiamo esposta è l' equazione che effettivamente ne risulta divisa per x; onde è anche a considerarsi ciò che si ha supponendo

$$x=o:$$

in questa ipotesi la prima delle equazioni (1) dà

$$a=\frac{x}{y}$$

ed una qualunque delle equazioni (2') ponendo per a e b $\frac{x}{y}$ e $\frac{z}{x}$, si riduce ad

$$n^2(z^2+x^2)+2mnxy=(r^2-m^2)y^2\,,$$

ed esprime una superficie conica avente O per centro ed uno de'cerchi ABC, dBe per direttrice; quindi la genesi data della superficie conduce a due superficie distinte cioè una superficie conica, ed una superficie di quarto grado. Noi ci occuperemo soltanto di mettere in proiezione quest' ultima, la prima essendo ben conosciuta. A tale oggetto si differenzî l' equazione (3'), e tenendo conto del solo segno superiore, ne risulterà

$$2z\mathrm{d}z+2x\mathrm{d}x+\frac{mx\mathrm{d}y+my\mathrm{d}x}{n}=\frac{r^2(z\mathrm{d}z+x\mathrm{d}x)-m^2z\mathrm{d}z}{\sqrt{r^2(z^2+x^2)-m^2z^2}}\,,$$

$$=\frac{r^2(z\mathrm{d}z+x\mathrm{d}x)-m^2z\mathrm{d}z}{z^2+x^2+\frac{mxy}{n}}\,,$$

e quindi

$$q=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{z\left(2z^2+2x^2+\frac{2mxy}{n}+m^2-r^2\right)}{\left(z^2+x^2+\frac{mxy}{n}\right)\left(2x+\frac{my}{n}\right)-r^2x}$$

$$p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\frac{mx}{n}\left(z^2+x^2+\frac{mxy}{n}\right)}{\left(z^2+x^2+\frac{mxy}{n}\right)\left(2x+\frac{my}{n}\right)-r^2x}\,,$$

e le equazioni $(2')$, $(2'')$, $(2''')$ del n. precedente divengono

$$z=o\ ,\ \text{o pure}\ z^2+x^2+\frac{mxy}{n}+\frac{m^2-r^2}{2}=0\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

$$x=o\ ,\ \text{ovvero}\qquad z^2+x^2+\frac{mxy}{n}=0\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

$$\left(z^2+x^2+\frac{mxy}{n}\right)\left(2x+\frac{my}{n}\right)-r^2x=0\ldots\ldots\ldots\ldots(7).$$

Dalla prima delle equazioni (5) combinata con la (3) si ottiene

$$x=o\ ,\ x+\frac{my}{a}=\pm r\ ;$$

onde le rette Oy, AD, CE fanno parte della proiezione orizzontale della superficie. Ricavando poi dalla seconda il valore di z^2+x^2, e sostituendolo nella (3) si ha dopo le riduzioni

$$x\left(x-\frac{r^2-m^2}{mn}y\right)+\left(\frac{r^2-m^2}{2m}\right)^2=o\ldots\ldots(5'),$$

equazione di un' iperbola che ha per asintoto l'asse Oy, dunque la proiezione orizzontale della superficie è un iperbola. Per costruirla si rifletta che l' equazione dell'altro asintoto è

$$x-\frac{r^2-m^2}{mn}y=o,$$

e che da questa quando $y=-n$ si ha $x=-\frac{r^2-m^2}{m}=o\mathrm{F}$, essendo BF tangente al cerchio, onde ne segue che la FO è l'altro asintoto. Inoltre ponendo nell' equazione $(5')$

$$y=n\ ,$$

si ottiene

$$\left(x-\frac{r^2-m^2}{2m}\right)^2=o,\ \text{ovvero}\ x=\frac{r^2-m^2}{2m}\ ,$$

dunque mentre che supponendo y costante nell' equazione $(5')$ si

hanno per x due valori, l' ipotesi di $y=n$ dà questi valori uguali, ed in conseguenza la curva tocca la O'G nel suo punto di mezzo. Pertanto conoscendo gli asintoti, ed un punto dell' iperbola si potrà descrivere, e prenderà la forma indicata nella figura.

Per le equazioni (6) allorchè si suppone $x=o$, si ha dalla (3)

$$z=o\ ,\ z=\sqrt{r^2-m^2}\ ,$$

e quando si prende l' equazione

$$z^2+x^2+\frac{mxy}{n}=o$$

si ottiene

$$(r^2-m^2)z^2+r^2x^2=o$$

la quale se $r>m$ dà

$$z=o\ ,\ x=o\ ,$$

e se $r<m$

$$z=\pm\frac{r}{\sqrt{m^2-r^2}}x\ ,$$

e quindi nel caso della figura la superficie non ha proiezione verticale essendovi soltanto le due rette proiettate in B, ed o che la toccano e sono perpendicolari al piano di prospetto; se poi i cerchi non si tagliano le tangenti condotte pel punto o a questi cerchi sono la proiezione della superficie.

Finalmente dalla (7) e dalla (3) si dovrebbe eliminare la x per avere la proiezione sul piano di profilo; ma siccome si perverrebbe ad un'equazione complicata, così sarà più semplice per costruire questa proiezione l' assegnarla per punti per mezzo delle equazioni medesime. A tale oggetto si ponga nell' equazione (7) il valore di $z^2+x^2+\frac{mxy}{n}$ tratto dall' equazione $(3')$, e si avrà

$$r^2x=\left(2x+\frac{my}{n}\right)\sqrt{r^2(z^2+x^2)-m^2z^2}\ldots\ldots\ (8).$$

La superficie espressa da questa equazione incontra la proposta secondo una curva che proiettata sul piano delle y e delle z dà la proiezione della superficie. Facendo

$$z=bx\ ,$$

risulta

$$r^2=\left(2x+\frac{my}{n}\right)\sqrt{r^2(1+b^2)-m^2b^2}\ \ldots\ldots\ldots\ (9)$$

che esprime una retta, onde la nuova superficie è pur essa una superficie rigata.

Per costruire l'equazione (9) si rifletta che le diverse rette ad essa corrispondenti al variare di b sono parallele alla retta dell' equazione

$$2x+\frac{my}{n}=o$$

ovvero alla retta OK che unisce il punto O col punto di mezzo K della oH, e che inoltre se om è la retta dell' equazione

$$z=bx\ ,$$

l'espressione $2\sqrt{r^2(1+b^2)-m^2b^2}$ è uguale alla parte della om prolungata intercetta nel cerchio ABC moltiplicata per $\sqrt{1+b^2}$; quindi poichè per $y=o$ si ha dall'equazione (9)

$$x=\frac{r^2}{2\sqrt{r^2(1+b^2)-m^2b^2}}\ ,$$

elevata al raggio mH la perpendicolare fg dal suo punto di mezzo, e tirata la gl parallela ad mM, sarà Ml $=x$, e presa OL=Ml, la LP parallela alla OK sarà la retta dell' equazione (9). Da ciò si vede come si possano assegnare le diverse generatrici della nuova superficie, e siccome il piano proiettato in om incontra la superficie

proposta secondo la nm—NM, il punto P esprimerà in pianta un punto della curva cercata che portato sul piano di profilo sulla corrispondente proiezione della nm—NM, il punto p apparterrà alla proiezione della superficie sul piano delle y e delle z: similmente si assegneranno degli altri punti p e quindi l'intera proiezione della superficie. (*)

Non avendo trovata l' equazione della curva che passa pe' punti p, non sarà inutile il cercare come senza trovare questa equazione si possa applicare la tangente in p. L' equazione della tangente alla linea data per l' equazioni (8) e (3) essendo

$$z'-z=\frac{dz}{dy}\left(y'-y\right),\ \ x'-x=\frac{dx}{dy}\left(y'-y\right)\ ;$$

la prima di esse esprime la tangente in un punto qualunque della curva che passa pe' punti p: i valori di $\frac{dz}{dy}$, e $\frac{dx}{dy}$ si possono ricavare differenziando le equazioni (8) e (3), o pure differenziando rispetto ad x, y, z, b le equazioni (4), (9), e l' altra

$$z=bx,$$

ed indi eliminando da esse la quantità db. E particolarmente per

(*) È da avvertirsi che variando la Om di posizione dal punto B al punto k al quale corrisponde una posizione della generatrice tale che ha la proiezione orizzontale parallela alla OK si ottiene il ramo ph' della curva che ha per asintoto la proiezione sul piano di profilo della generatrice proiettata sul piano di prospetto in ok. Passando la om dalla posizione ok ad un' altra posizione om' viene a determinarsi il punto p' e quindi un secondo ramo di curva $p'd'$ che ha per asintoto la retta medesima. Nella figura vedesi poi disegnata la proiezione dell' intera superficie essendo le curve, e le generatrici descritte con linee forti continuate o a puntini, secondochè sono visibili o invisibili.

trovare $\frac{dz}{dy}$, si porrà nelle equazioni (4) e (9) $\frac{z}{b}$ in luogo di x, e differenziando le equazioni

$$(1+b^2)z+\frac{mby}{n}=b\sqrt{r^2(1+b^2)-m^2b^2}\ldots\ldots\ (4'),$$

$$2z+\frac{mby}{n}=\frac{r^2b}{\sqrt{r^2(1+b^2)-m^2b^2}}\ldots\ldots\ (9')$$

che ne risultano, rispetto a b, z, y, eliminando db, si ottiene

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{mb}{n(1+b^2)}$$

e quindi l' equazione della tangente che passa pel punto avente per coordinate le y e z date dalle equazioni (4′), (9′) sarà

$$(1+b^2)z+\frac{mby}{n}=b\sqrt{r^2(1+b^2)-m^2b^2}$$

equazione identica alla (4′) cioè alla equazione della $\mu\nu$, e quindi la curva tocca le proiezioni delle diverse generatrici della superficie, e la costruzione accennata per descrivere la curva ci dà i varî punti di contatto.

Similmente potrebbe anche provarsi che l' iperbola tocca le proizioni orizzontali delle generatrici della superficie: onde poichè l' equazione (4) esprime la proiezione orizzontale di una qualunque delle generatrici, l' equazione (5′) si potrebbe trovare determinando la curva che tocca tutte le rette date dalla detta equazione. Or se si chiamino x, y le coordinate di un punto qualunque di questa curva, dovrà essere

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{n(1+b^2)}{m}.$$

ed inoltre le coordinate x, y devono avverare l' equazione (4).

*

Quindi eliminando b da queste due equazioni si ha l' equazione differenziale della curva cercata: quest' eliminazione si fà facilmente poichè ponendo per semplicità $\frac{dy}{dx}=p$, abbiamo

$$1+b^2=-\frac{mp}{n},$$

e l' equazione (4) si riduce ad

$$y=px+\frac{n}{m}\sqrt{m^2-\frac{r^2-m^2}{n}mp}.$$

Questa equazione essendo della forma

$$y=px+\mathrm{P}$$

l' integrale complete di essa è

$$y=cx+\mathrm{C}$$

ove c è una costante arbitraria, e C è composta da c come lo è P da p; quindi l' equazione (4) è l' integrale dell' equazione trovata. Ora questa equazione esprimendo le diverse rette MN è evidente che non soddisfà alla quistione; ma l' equazione differenziale che abbiamo ottenuta, se si risolve rispetto a p dà

$$p=\frac{2mxy+n(m^2-r^2)\pm\sqrt{4mn(m^2-r^2)xy+n^2(m^2-r^2)^2+4m^2n^2x^2}}{2mx^2},$$

e si scorge che oltre l' integrale completo ha una soluzione particolare la cui equazione si ha uguagliando a zero il radicale, ed è facile il vedere che questa equazione è identica alla (5′) onde la proiezione orizzontale della superficie è la soluzione particolare dell' equazione differenziale che esprime le proiezioni di tutte le generatrici.

Ciò che abbiam detto per la proiezione orizzontale si applica anche alle altre proiezioni, anzi in generale se su di una superficie qualunque si tracciano delle curve della medesima specie; l'equazione differenziale che esprime le proiezioni di tutte queste curve ha per soluzione particolare la proiezione della superficie. Di fatto sia

$$f(x, y, z) = c$$

l'equazione che esprime le diverse superficie che incontrano la proposta, ed eliminando z da questa equazione, e da quella della proposta, ne risulti l'equazione

$$F(x, y, c') = o,$$

ove c' deve essere una funzione di c, che sia data per l'equazione

$$c' = \varphi c,$$

è evidente che se si eliminano c e c' da queste tre equazioni si ha l'equazione della superficie data che sarà

$$F\big(x, y, \varphi.f(x, y, z)\big) = o \text{ ovvero } F(x, y, u) = o \ldots\ldots (10),$$

facendo per brevità

$$u = \varphi.\, f(x, y, z).$$

Ciò posto per trovare la proiezione orizzontale della superficie per ciò che abbiam detto convien differenziare l'equazione (10) ed uguagliare a zero il coefficiente di dz, indi eliminare z tra l'equazione che in tal modo si ottiene e la (10): or l'equazione che ne risulta siccome la (10) non contiene z che per la presenza della u sarà identica a quella che si ha uguagliando a zero il differenziale della (10) rispetto ad u, ed eliminando u tra l'equa-

zione che ne risulta e la stessa (10); cioè (*) alla soluzione particolare dell'equazione

$$F(x, y, c') = o,$$

che esprime le proiezioni orizzontali delle varie curve esistenti sulla superficie.

Quindi siccome la soluzione particolare di un'equazione differenziale tocca tutte le curve espresse dall'integrale completo, ne segue che in generale la proiezione di una superficie qualunque tocca le proiezioni di tutte le curve tracciate su di essa con una data legge. (**) Abbiamo detto che ciò avviene in generale, perchè le varie curve prodotte nella superficie potrebbero essere della medesima specie della curva spettante alla proiezione, ed allora le diverse proiezioni di queste curve sarebbero tutte comprese nella proiezione della superficie: ciò per altro non ripugna colla teorica esposta, perchè è noto che eliminando come abbiam detto la u, invece di una soluzione particolare si ha alle volte un integrale particolare. Pertanto avvicinando le cose analitiche alle geometriche, veniamo a conoscere che un'equazione differenziale non ammette soluzioni particolari quando le curve espresse dall'integrale completo sono tali che una di esse racchiude le altre sia anche all'infinito, o più generalmente è un limite delle altre.

Da quanto precede ne risulta un carattere geometrico per conoscere se una superficie è rigata: cioè una superficie è rigata quando i piani proiettati secondo le tangenti ad una proiezione della superficie generano rette nella medesima. Sarà poi rigata o sviluppabile secondochè i piani tangenti in due punti qualunque

(*) Vedi il procedimento esposto da *Lacroix* nel *trattato elementare di calcolo differenziale ed integrale* n.° 323. per trovare le soluzioni particolari.

(**) Da ciò si rileva perchè nel problema precedente abbiam detto che la curva $\beta u \beta'$ tocca la $t\alpha'\beta'$.

di una stessa generatrice sono differenti o coincidono in un sol piano.

Avendo trovata l' equazione della superficie si potrà risolvere qualunque problema relativo alla medesima : ciò che ordinariamente si esamina nella Geometria Descrittiva è dato un punto in pianta trovarlo in elevato o viceversa , ed applicarvi il piano tangente. Ora da ciò che abbiam detto si rileva che se è dato un punto q in elevato, tirata la oqm' si proietteranno i punti n', m' in N', M' e la qQ parallela ad Oy determinerà sulla M'N' il punto Q proiezione del punto cercato: viceversa se è dato il punto Q si tirerà la QN' tangente all' iperbola indi condotta la M'm' si unirà la om', e proiettando il punto Q in q si verrà a conoscere la proiezione verticale del punto richiesto (*). Quanto alla determinazione del piano tangente applicato al punto Q—q si potrebbe ricorrere all' equazione generale del piano tangente ad una superficie qualunque ; ma per brevità di calcolo osserveremo che le sue tracce devono passare per m' e T. Inoltre abbiamo

(*) Il metodo usato qui per trovare il punto in elevato quando è dato in pianta si applica alle superficie rigate in generale purchè se ne conoscano le proiezioni ed una direttrice ; poichè dal punto dato in pianta si tirerà una tangente alla proiezione orizzontale della superficie, il punto ove questa incontra la proiezione orizzontale della direttrice si porterà sulla corrispondente proiezione verticale, e da questo punto menando una tangente all' altra proiezione della superficie si verrà dall' incontro di questa tangente e della retta che proietta il punto dato sul piano verticale a conoscere la proiezione verticale del punto cercato. Quindi pare che il miglior modo di assegnare una superficie rigata sia il dare in vece di tre direttrici una diretrice e le proiezioni ; anche perchè le proiezioni di una superficie sempre si pongono nel disegno per farne acquistare più idea. E qui si avverta che nel problema del n. 82 avremmo dovuto rappresentare una parte della proiezione della sfera a puntini; ma allora per completare tutta la parte visibile sarebbe pur stato necessario di porre la proiezione della sezione prodotta dal piano nella sfera, locchè avrebbe complicata la figura.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\frac{mx}{n}\left(z^2+x^2+\frac{mxy}{n}\right)}{\left(z^2+x^2+\frac{mxy}{n}\right)\left(2x+\frac{my}{n}\right)-r^2x}$$

$$=-\frac{\frac{mx}{n}\left((1+b^2)x+\frac{my}{n}\right)}{\left((1+b^2)x+\frac{my}{n}\right)\left(2x+\frac{my}{n}\right)-r^2},$$

ossia, essendo per l' equazione (4)

$$(1+b^2)x+\frac{my}{n}=\sqrt{(1+b^2)r^2-m^2b^2}=\frac{r^2}{2\mathrm{M}l},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\frac{mx}{2n}}{x+\frac{my}{2n}-\mathrm{M}l},$$

dunque poichè tirando le $q'r$, QR' una perpendicolare, e l' altra parallela alla OK si ha OR' $=x+\frac{my}{2n}$, O$r=\frac{mx}{2n}$, presa la R'R=M'l' la traccia orizzontale del piano tangente sarà ad rR perpendicolare, e dovendo passare per T sarà la TS e quindi Sm' è la traccia verticale.

PROBLEMA XXIX.

89. *Trovare la proiezione verticale della superficie generata da elici di ugual passo descritte* (Fig. 46.) *intorno all' asse* Oz *da' diversi punti della retta* AB.

Presi per assi le Ox , Oy , Oz sia

$$bx+az=ab$$

l' equazione della AB nel piano zOx; ed s, u le coordinate di un punto qualunque della medesima, le equazioni dell' elice descritta da questo punto, chiamandone p il passo, saranno

$$x^2+y^2=s^2$$

$$z-u=\frac{p}{2\pi}\text{ arc. cos }\frac{x}{s}.$$

Inoltre il punto s, u essendo sulla retta AB, si ottiene

$$bs+au=ab,$$

e da queste tre equazioni eliminando s, u si ha l' equazione

$$z-\frac{b}{a}\left(a-\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{p}{2\pi}\text{ arc.cos }\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{p}{2\pi}\text{ arc.tang }\frac{y}{x},$$

che appartiene alla superficie cercata.

Ponendo $y=Ax$, si ha

$$z=b-\frac{b}{a}x\sqrt{1+A^2}+\frac{p}{2\pi}\text{ arc.tang }A:$$

queste equazioni appartengono ad una retta che fà coll' asse delle z positive un angolo avente per tangente trigonometrica $-\frac{b}{a}$; e quindi ne segue che tutti i piani condotti per l' asse Oz producono nella superficie delle rette inclinate a quest' asse come la BA. Dunque la superficie di cui si tratta si può considerare generata da una retta che incontra l' asse Oz sotto un angolo dato, e si appoggia ad un' elice descritta da un punto qualunque di essa, e sia A, ed è perciò una superficie rigata.

Supponendo $z=c$, risulta

$$c=b-\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{p}{2\pi}\text{ arc. tang }\frac{y}{x},$$

a quale facendo

$$\text{arc.tang}\frac{y}{x}=\frac{bt}{ap},\ \sqrt{x^2+y^2}=u,$$

ossia riferendo la curva dell' equazione precedente a coordinate polari in modo che O sia l' origine de' raggi vettori, e gli archi si prendano sul cerchio di raggio $\frac{ap}{b}$ a partire dalla OA, si riduce a

$$c=b-\frac{b}{a}u+\frac{b}{2\pi}\frac{t}{a},\ \text{ovvero}\ u=\frac{1}{2\pi}\left(t-\frac{2\pi a(c-b)}{b}\right):$$

equazione appartenente alla spirale di Archimede, ed essendo il raggio del cerchio sul quale si computano gli archi indipendente da c, ne segue che tutte le sezioni orizzontali della superficie sono spirali di Archimede uguali fra loro. Volendo descrivere una sezione qualunque, si osservi che essendo $\frac{pa}{b}$ il raggio del cerchio condotta oC parallela a BA, se col centro O intervallo il quadruplo di OC si descrive il cerchio A'D su di questo bisogna contare gli archi: dippiù se OD è la tangente alla spirale nel punto O, deve essere $A'D=\frac{2\pi a(c-b)}{b}=\frac{c-b}{p}\frac{2\pi ap}{b}$, onde A'D deve stare alla periferia di raggio OA' come la distanza del punto B dal piano secante è al passo dell' elice. Sia eg la proiezione del piano secante se si prende $Of'=Bf$ e, tirata $f'h$ parallela alla Ox, si proietta il punto h in H, la OH determinerà la proiezione della OD (essendo per la natura dell' elice AH : 2πAO : : $h'h : p$) e la spirale OMG sarà la curva cercata: da ciò si vede che il punto nello spazio corrispondente al punto D è sull' elice descritta dal punto $A'-a'$, e per conseguenza se a partire dal punto A' si descrive col cerchio OB' nel piano proiettato in Ba' una spirale di Archimede, e mentre il punto a' descrive un' elice intorno all' asse Oz si fà muovere il piano Ba' parallelo a se stesso, trasportando la spirale in esso descritta, questa genererà la superficie.

Vediamo ora come dato un punto in pianta si trovi in elevato, e come vi si applichi il piano tangente: sia M il punto dato in pianta, per ciò che abbiamo detto di sopra il piano NOz incontra la superficie in una retta la cui proiezione verticale presa Bo'=$n'n$, è la no', quindi m è la proiezione del punto M, ed il piano tangente dovendo passare per la MO—mo', P sarà un punto della traccia orizzontale, ed o' un punto della verticale; la traccia orizzontale poi deve esser parallela alla retta che tocca in M la spirale prodotta da un piano orizzontale che passa per m; ma questa tangente presa OK uguale al raggio del cerchio DA$'$ diviso per 2π, ossia a $\frac{pa}{2\pi b}$, e condotta KL normale ed uguale alla OM è parallela alla OL, dunque la PQ parallela alla OL è la traccia orizzontale del piano tangente, e quindi la Qo' ne sarà la traccia verticale. La costruzione data del piano tangente si può anche ottener facilmente servendosi dell' equazione generale del piano tangente ad una superficie; ma essendo noto che il piano tangente in un punto qualunque di una superficie è il piano che passa per due tangenti applicate in questo punto a due curve tracciate sulla superficie, abbiam voluto fare osservare come ne' casi particolari, ove queste curve si conoscano, possa farsi uso di questo principio che dà con più speditezza la soluzione del problema.

Passiamo ora a trovare la proiezione verticale della superficie: a tale oggetto si differenzî l' equazione della superficie rispetto ad y, e si uguagli il risultamento a zero, si avrà

$$\frac{b}{a}y\sqrt{x^2+y^2}=\frac{p}{2\pi}x,$$

la quale facendo $\frac{pa}{2\pi b}=m$ (che sarebbe la OK) diviene

$$y\sqrt{x^2+y^2}=mx.$$

*

In questa equazione ponendo $y=Ax$, si ha

$$x^2+y^2=\frac{m^2}{A^2};$$

e quindi presa OK$'$=OK, tirata una retta qualunque OD, se si conduce K$'$E parallela ad OD, e col centro O intervallo OE si descrive il cerchio ER, il punto R esprimerà in pianta un punto della superficie che sul piano verticale è proiettato in un punto che appartiene alla proiezione cercata, e quindi r è questo punto. Similmente si troveranno degli altri punti r e la curva che passa per essi sarà la proiezione verticale della superficie la quale per ciò che si è detto nel problema precedente toccherà in ciascun punto r la corrispondente generatrice hr. Per costruire la OK $=\frac{pa}{2\pi b}$ si rifletta che se si tira la Ab parallela alla retta che tocca l' elice in o si ha Ob $=\frac{p}{2\pi}$ e che quindi, condotta bk parallela alla AB, si avrà O$k=\frac{pa}{2\pi b}$.

Allorchè tra le posizioni della OD si sceglie la OD$'$ parallela alla K$'a$ il cerchio ER si confonde con aNA e il punto r' che si ottiene deve essere in conseguenza sull' elice Aon; ed in questo punto la proiezione della superficie toccherà l' elice poichè essa deve essere tangente a tutte le proiezioni delle elici descritte da' diversi punti della AB. Finalmente servendosi della Ox essendo $A=o$ il punto E, e quindi R è situato all' infinito, e siccome alla Ox corrisponde nel piano verticale la AB, questa toccherà la proiezione della superficie all'infinito, e perciò ne è asintoto. Da tutto ciò apparisce qual debba essere la forma della curva di cui si tratta, e vedesi descritta nella figura. Delle diverse generatrici che si trovano sulla proiezione verticale ne abbiamo descritte una parte forte, e una parte a puntini secondo che sono visibili, o invisibili.

Questo problema può servire a mettere in proiezione la vite triangolare.

PROBLEMA XXX.

90. *Determinare le proiezioni della superficie elicoidica generata da elici di ugual passo descritte* (Fig. 47) *da' vari punti del cerchio anb intorno all' asse* Oz *esistente nel piano del cerchio.*

Si prendano per assi le ox, oy, oz(*) e si chiamino α l' ascissa del centro del cerchio, r il raggio; avremo per l' equazioni di esso

$$y=o\,,\quad z^2+(x-\alpha)^2=r^2.$$

Sieno s, u le x, z di un punto qualunque n del cerchio l' equazioni dell' elice da esso descritta, dinotando con p il passo, saranno

$$x^2+y^2=s^2$$

$$z-u=\frac{p}{2\pi}\text{ arc.cos }\frac{x}{s}:$$

d' altronde essendo s, u le coordinate di un punto del cerchio anb si ha

$$u^2+(s-\alpha)^2=r^2,$$

dunque eliminando da queste tre equazioni le due quantità s, u avremo l' equazione

$$z=\sqrt{r^2-\left(\alpha-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}+\frac{p}{2\pi}\text{ arc. tang }\frac{y}{x}\ \ldots\ (1)$$

che appartiene alla superficie cercata.

(*) Si avverta che gli assi coordinati sono le rette accennate, ma il disegno per maggior chiarezza è stato eseguito prendendo la OX per comune sezione de' piani orizzontale e verticale.

Se in questa equazione facciamo $y=Ax$ si ottiene

$$z=\sqrt{r^2-\left(\alpha-x\sqrt{1+A^2}\right)^2}+\frac{p}{2\pi}\text{ arc. tang }A:$$

quest' equazione indica un' ellisse ma poichè cambiando in essa $x\sqrt{1+A^2}$ in x dinota un cerchio si rileva che ogni piano che passa per l' asse produce nella superficie un cerchio, e da' valori che hanno le coordinate del suo centro ne segue che la superficie può supporsi generata dal cerchio anb il cui piano, passando sempre per l' asse, si muova in modo che il centro descriva un' elice; il che in vero si potea facilmente rilevare. Di qui si vede come immediatamente dato un punto in pianta trovar si possa in elevato, e come vi si applichi il piano tangente: infatti supponendo che M sia il punto dato in pianta, tirata la OM è chiaro per ciò che ora abbiam detto che il piano proiettato in OM interseca la superficie secondo un cerchio uguale ad anb, il cui centro è proiettato verticalmente in c'; cc' essendo l' elice descritta dal punto C—c, e quindi, descritto l' arco MN col centro O e raggio OM, se si prende la μm uguale alla νn, sarà m la proiezione verticale del punto che corrisponde in pianta ad M. È evidente poi che presa la MT′ uguale alla sottangente νt, e la MN′ uguale all' arco MN, il piano tangente deve passare per le rette MT′—mt', MN′—mn', e quindi le PG, Uo' ne saranno le tracce orizzontale e verticale.

Allorchè nell' equazione della superficie poniamo $z=n$, essendo n una quantità costante qualunque, ne risulta

$$\sqrt{r^2-\left(\alpha-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}+\frac{p}{2\pi}\text{ arc. tang}\frac{y}{x}=n,$$

la quale ponendo

$$\frac{p}{2\pi}\text{ arc. tang }\frac{y}{x}=n-t,\quad \alpha-\sqrt{x^2+y^2}=u,$$

si riduce a

$$t^2+u^2=r^2$$

d' onde si rileva che le diverse sezioni orizzontali della superficie cambiano di posizione ma sono tutte uguali. Nell' equazione precedente, descritto col centro O e raggio $\mathrm{OD}=\frac{p}{2\pi}$ il cerchio DFD' e preso l' arco $\mathrm{D'F}=n$, i valori di t sono computati sul cerchio FD a partire dal punto F; ed i valori di u debbonsi tagliare su i diversi raggi vettori a partire però dalla circonferenza del cerchio descritto col centro O e raggio OC; così se FH è un valore di t unita la OH i valori di u debbono portarsi da K verso O ed in senso contrario sulla KO. L' equazione $t^2+u^2=r^2$ se fosse riferita a coordinate rettangolari apparterrebbe ad un cerchio, e dietro questa riflessione riesce spedita la costruzione della curva per assegnazione di punti. (*) Si avverta che pel piano secante abbiamo scelto quello che passa per o'', onde $\mathrm{D'F}=n=oo''$.

Volendo applicare in un dato punto L di questa curva la tangente si rifletterà che condotta pel punto H una tangente al cerchio FHD la sottangente computata su questa retta è espressa

---

(*) Indicando con β la KH se facciamo $u=u'-\beta$; l' equazione della curva diviene

$$(u'-\beta)^2+t^2=r^2,$$

in questo caso le t, u' possono riguardarsi come due coordinate, le t essendo computate sulla circonferenza FD a partire da F e le u' sulle rispettive normali; onde anche ortogonali sarebbero queste coordinate; ma però l' asse delle ascisse invece di una retta è una circonferenza di cerchio, e perciò l' equazione invece di appartenere come sembra ad un cerchio dinota una curva trascendente. Pertanto si vede come in alcuni casi possa essere utile di prendere una curva per uno degli assi coordinati; o anche se bisogna ambedue gli assi curvilinei, potendosi per tal guisa determinare più facilmente i diversi punti della curva, e scovrirne delle proprietà.

da $\frac{(u+\beta)(u+\beta+r')}{r'}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=-\frac{\mathrm{HL.DL.KL}}{\mathrm{OD.HF}}$, osservando che $r'=\mathrm{OD}$ e $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=-\frac{u}{t}$. Ma si potrebbe anche determinare la tangente in L, riflettendo che deve essere parallela alla traccia orizzontale del piano tangente alla superficie nel punto proiettato in L.

Passiamo ora a vedere come si determinino le proiezioni della superficie: differenziando l' equazione (1) si ottiene

$$\mathrm{d}z=\frac{\alpha-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{r^2-\left(\alpha-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}}\cdot\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{p}{2\pi}\,\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

onde uguagliando a zero il coefficiente di dy avremo l' equazione

$$\frac{\alpha-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{r^2-\left(\alpha-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}}\,y\sqrt{x^2+y^2}+\frac{p}{2\pi}\,x=o\,\ldots\ldots(2)$$

la quale appartiene ad una superficie cilindrica che interseca la proposta secondo una curva la cui proiezione verticale rappresenta pure la proiezione della superficie. Eliminando y da questa equazione e da quella della superficie data si otterrebbe l' equazione spettante a questa curva: volendola costruire per punti si rifletta che ponendo nell' equazione (2)

$$y^2+x^2=m^2,$$

m essendo una quantità costante qualunque, si ottiene

$$y=-\frac{p}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{r^2-(x-m)^2}}{(x-m)m}\cdot x\,\ldots\ldots(3)$$

dalla quale quando $x=m$ si ha

$$y=-\frac{p}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{r^2-(x-m)^2}}{x-m};$$

onde se ON $=m$, essendo $vn=\sqrt{r^2-(x-m)^2}$, presa la OD $=\frac{p}{2\pi}$ e condotta la DE parallela alla cn, la OQ parallela alla NE sarà la retta dell' equazione (3): quindi Q è un punto della proiezione orizzontale della curva cercata e il punto q che gli corrisponde in elevato farà parte della proiezione cercata della superficie, che si costruirà assegnando allo stesso modo i diversi punti q di essa.

Siccome ad ogni punto M in pianta ne corrispondono due in elevato per ogni spira, potrebbe nascer dubbio fra i due punti che corrispondono a Q quale è il punto q che devesi scegliere. A tale oggetto convien riflettere che dall' equazione della superficie si rileva, che quando si prende il radicale universale in essa esistente col segno $+$, si viene a determinare il punto superiore; quando col segno $-$ l' inferiore; e che d' altronde l' equazione (2), nella quale il detto radicale deve avere quello stesso segno che ha nell' equazione della superficie, ci dimostra che quando facciamo uso del segno $+$ si ha la curva A$'$QB e l' altra metà corrispondente a B$'$EA, che non è notata nella figura, e quando si tien conto del segno $-$ si ottiene la curva AEB$'$ e l' altra porzione identica alla BEA$'$ e posta nel senso delle y negative. Quindi cominciando dal punto B, al quale corrisponde in elevato il punto b, fino al punto A$'$ cui risponde il punto a', bisogna prendere sempre i punti superiori; e si ha in tal guisa in elevato il ramo di curva $bq'rqa'$ che presenta in r un punto di regresso, il quale si riferisce in pianta al punto R ove la tangente alla curva BEA$'$ è parallela all' asse delle ordinate. Per l' altra curva simmetrica alla BEA$'$ e posta dalla parte delle y negative, poichè i punti di essa si ottengono dall' equazione (2) quando si prende il radicale col segno $-$,

bisogna in elevato scegliere i punti inferiori, onde ne risulta la curva $a'r'b''$: la metà suddetta non si è posta nella figura perchè può farsi uso della stessa curva BEA$'$, facendo, per un dato punto Q, corrispondere al punto S il punto s' e non già il punto s, ed è chiaro perciò che i due rami $a'rb$, $a'r'b''$ sono simmetrici rispetto alla $b'a'$. Similmente pe' punti della superficie che corrispondono a' punti della curva AEB$'$ bisogna prendere gl' inferiori, e per tal modo si ottiene la curva $ar''b'$, e per la curva che sarebbe simmetrica alla AEB$'$ convien prendere i punti superiori, onde si ricava la curva $b'r'''a''$. Queste curve poi si riproducono per altre spire sempre ugualmente, e gioverà avvertire aver noi supposto, nell'eseguire il disegno, che la superficie cominci dal punto ove il cerchio generatore si trova in C—c, e termini quando si trova nella posizione C—c''. (*) È chiaro ancora che ove si tratti di assegnare soltanto la proiezione verticale della superficie, le curve BEA$'$, AEB$'$ non è necessario si descrivano, bastando trovare soltanto alcuni punti Q per assegnare poi i corrispondenti in elevato. Determinando, secondo il metodo esposto in generale, la proiezione orizzontale della superficie, si trova immediatamente che essa è rappresentata da' due

(*) Nell' assegnare i diversi punti delle curve BEA$'$, AEB$'$ potrebbe credersi che debbano unirsi tutti quelli che formano la parte AE con quelli che compongono la parte A$'$E; e del pari quelli che costituiscono la curva BE co' punti della EB$'$. Questo dubbio si toglierà rammentando che i punti della parte AE vengono, come abbiam detto, quando si prende col segno $+$ il radicale esistente nell' equazione (2), mentre i punti della porzione EA$'$ si ottengono quando si prende col segno $-$, e per conseguenza, per poco che siasi versato nelle costruzioni grafiche, si vedrà che non possono i punti della parte AE unirsi con quelli del ramo EA$'$. Ma per vieppiù convincersene basterà riflettere che allora le due curve avrebbero in E una tangente comune parallela all' asse delle x; mentre cercando in virtù dell' equazione (1) la posizione della tangente al punto E, si trova esservi in E un punto doppio, lo che ne addita che i due rami debbono tagliarsi, come è appunto dalla figura indicato.

cerchi descritti col centro O e co' raggi OA, OB. La proiezione poi sul piano di profilo, come è anche dalla natura della superficie evidente, risulta identica a quella sul piano di prospetto. Questo problema ci dà il modo come poter rappresentare una coclea d'Archimede, essendo il tubo di questa conformato appunto secondo la superficie che abbiamo ora considerata.

FINE.

NOTA.

Nel n. 48 abbiamo veduto come si possa determinare il cerchio che passa pe' punti comuni a due curve del secondo grado, tanto allorchè queste s'incontrano in quattro punti situati in modo che possa passare per essi un cerchio, quanto se hanno soltanto tre punti di comune. Potrebbe pure avvenire che le due curve s'incontrassero in quattro punti non esistenti sulla periferia di un cerchio; ma che però si conosca uno di questi punti, e si cercasse il cerchio che passa per gli altri tre. Per risolvere questa questione si rifletta che se, date le equazioni delle due curve, passiamo dagli assi a' quali sono riferite a due assi paralleli condotti pel punto comune alle due curve che si suppone cognito, le nuove equazioni che si otterranno saranno prive del termine noto, e perciò della forma

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex=0$$
$$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x=0.$$

Ciò posto si moltiplichino queste due equazioni per $\alpha y+\beta x+\gamma$, $\alpha' y+\beta' x+\gamma'$ rispettivamente, e sommando i prodotti otterremo

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha y^3+b\alpha xy^2+c\alpha x^2y+c\beta x^3+d\alpha y^2+e\alpha xy+e\beta x^2+d\gamma y+e\gamma x \\ \quad +a\beta xy^2+b\beta x^2y \qquad +a\gamma y^2+b\gamma xy+c\gamma x^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +d\beta xy \\ +a'\alpha' y^3+b'\alpha' xy^2+c'\alpha' x^2y+c'\beta' x^3+d'\alpha' y^2+e'\alpha' xy+e'\beta' x^2+d'\gamma' y+e'\gamma' x \\ \quad +a'\beta' xy^2+b'\beta' x^2y \qquad +a'\gamma' y^2+b'\gamma' xy+c'\gamma' x^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +d'\beta' xy \end{array}\right\}=0.$$

Dovendo ora determinare le quantità α, β, γ; α', β', γ', in modo che questa equazione rappresenti un cerchio, osserveremo primieramente che cinque sono effettivamente le quantità delle quali possiamo disporre, poichè, come si è anche veduto nel citato n. 48, non entrano in questa equazione che i rapporti di cinque delle dette quantità alla sesta; onde se volessimo porre uguali a zero i coefficienti di y^3, xy^2, x^2y, x^3, xy, ed uguagliare il coefficiente di x^2 a quello di y^2 avremmo sei equazioni, e quindi si cadrebbe in un'equazione di condizione, la quale esprimerebbe, come è chiaro, essere i quattro punti comuni alle curve date sulla circonferenza di un cerchio: e di fatto per

tal modo non se ne verrebbe ad escludere fra i punti comuni alle curve date quello che si conosceva, cioè l'origine delle coordinate. Per tener quindi conto di ciò uguaglieremo a zero i coefficienti di y^3, x^2y, y^2, y, e il coefficiente di xy^2 a quello di x^3; sicchè porremo

$$\left.\begin{array}{r} a\alpha+a'\alpha'=0,\quad c\alpha+b\beta+c'\alpha'+b'\beta'=0 \\ d\gamma+d'\gamma'=0,\quad d\alpha+a\gamma+d'\alpha'+a'\gamma'=0 \\ c\beta+c'\beta'=b\alpha+a\beta+b'\alpha'+a'\beta' \end{array}\right\}\ldots\ldots(1),$$

l'equazione precedente si renderà divisibile per x, e si ridurrà a

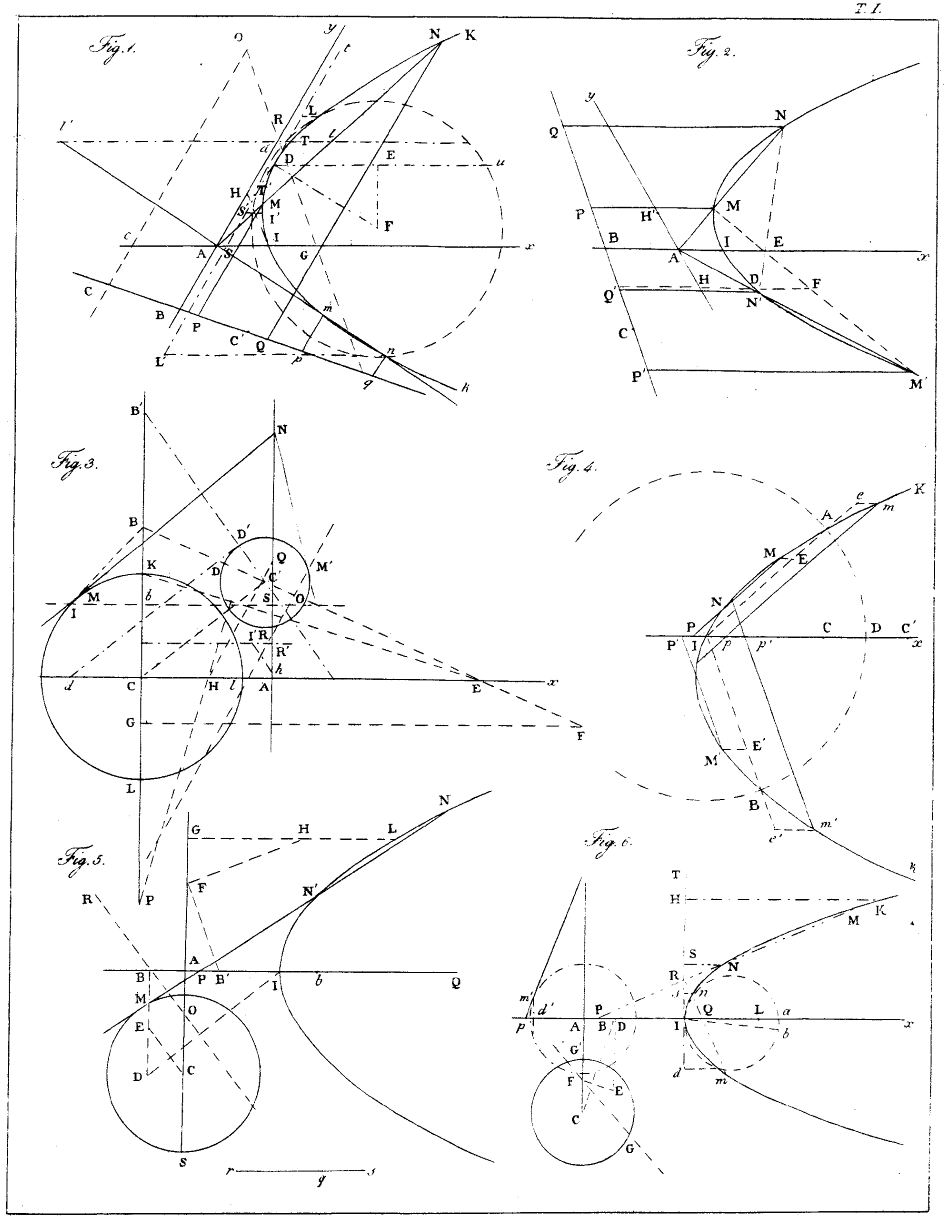
$$\left.\begin{array}{r} (c\beta+c'\beta')(y^2+x^2)+(e\alpha+b\gamma+d\beta+e'\alpha'+b'\gamma'+d'\beta')y \\ +(e\beta+c\gamma+e'\beta'+c'\gamma')x+e\gamma+e'\gamma' \end{array}\right\}=0\ldots(2),$$

equazione appartenente ad un cerchio.

Ne' casi particolari adunque dalle equazioni (1) si ricaveranno le quantità $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha}$, $\frac{\gamma'}{\alpha}$ ovvero β, γ, α', β', γ', supponendo $\alpha=1$, e l'equazione (2) poi ci determinerà il cerchio che passa per gli altri punti comuni alle tre curve date. Si potrebbe quì scendere a qualche altro particolare, ma ce ne asterremo perchè sarebbero delle osservazioni simili a quelle esposte nel precitato n. 48.

Pag.	ver.	ERRORI.	CORREZIONI
6	9	ME	DE
8	10	AC	Ac
33	24	LI, LH	LH , LI
36	23	FF′	FQ
48	5	$-\frac{1}{2}\frac{p\beta r^2}{a^3}$	$\beta-\frac{1}{2}\frac{p\beta r^2}{a^3}$
97	2	possono	può
106	6	al quadrato della	alla
108	4	$\frac{2u(\beta-u)+2x(x-t)}{\sqrt{(u-\beta)^2+(t-x)^2}}$	$\frac{2u(\beta-u)+2t(x-t)}{\sqrt{(u-\beta)^2+(t-x)^2}}$
119	8	di CI	di aI
128	5	DG	BG
135	16	per R	per K
152	4	AO	HO
166	25	MP : PN	MP : PR
171	25	MA , M′A , M″A	ME, M′E′ M″E″
176	5	CD′	CC′
182	8	e 'l terzo	e 'l secondo
185	21	$c\beta$, $-cx$	$-c\beta$, cx
193	14	FL = FC	FL = GC
ivi	18	OA, ed oB	CA e CB
196	9,11	$\frac{m^2}{m'}$	$\frac{2m^2}{m'}$
210	2	$+a^2$,)	) $+a^2$,
213	19	$r^2=$	$=r^2$
219	3	kN	KN
ivi	4	en : c'C″	c'C″ : en
222	4	b^2-x^2	b^2-a^2
223	6	quattro	tre
248	5	$\frac{\sqrt{1+a^2}}{AC}$	AC. $\sqrt{1+a^2}$
ivi	6	$\frac{\sqrt{1+b^2}}{AC}$	AC. $\sqrt{1+b^2}$
255	6	$\frac{my}{a}$	$\frac{my}{n}$
266	19	proiezione	posizione

T. I.



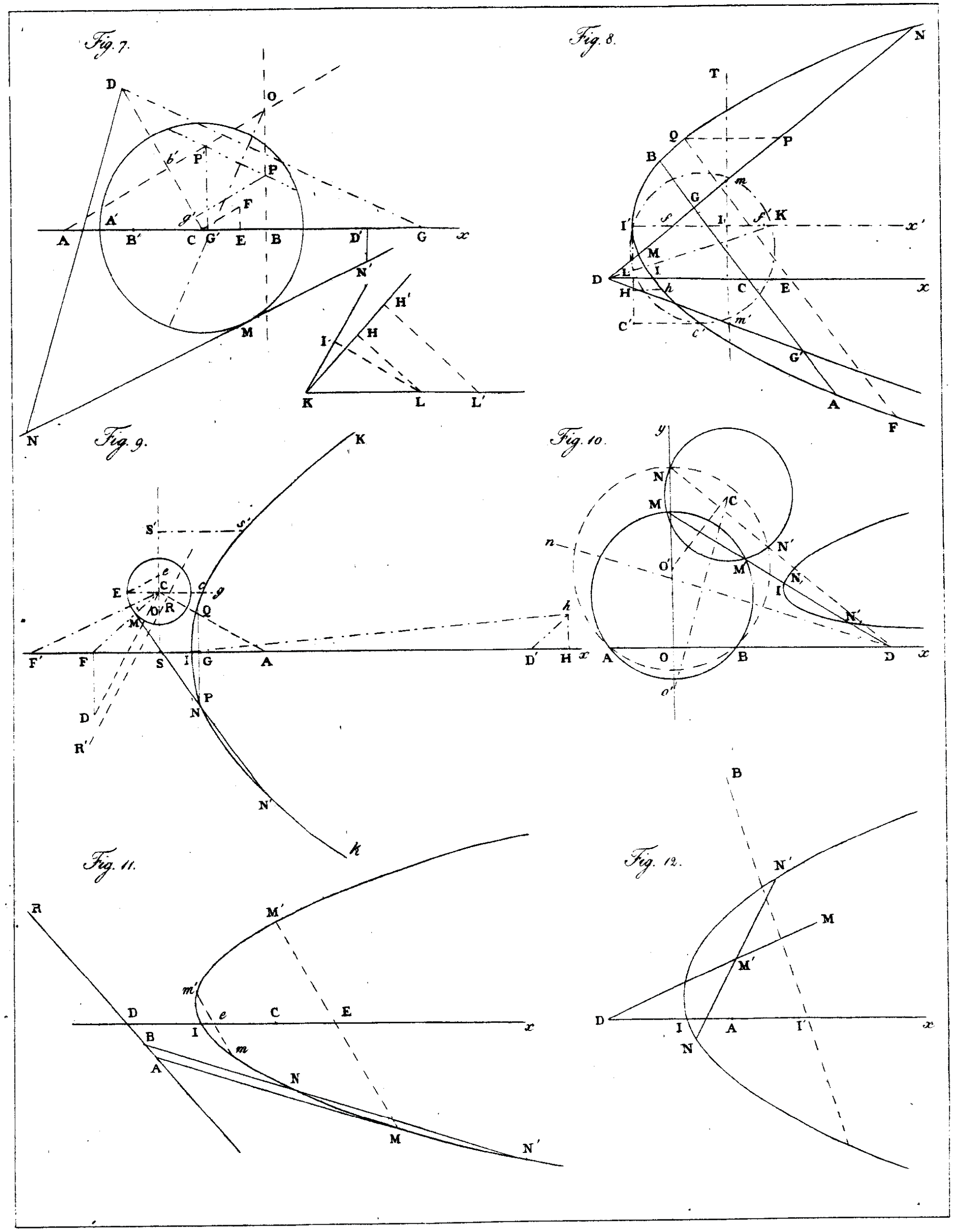


Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

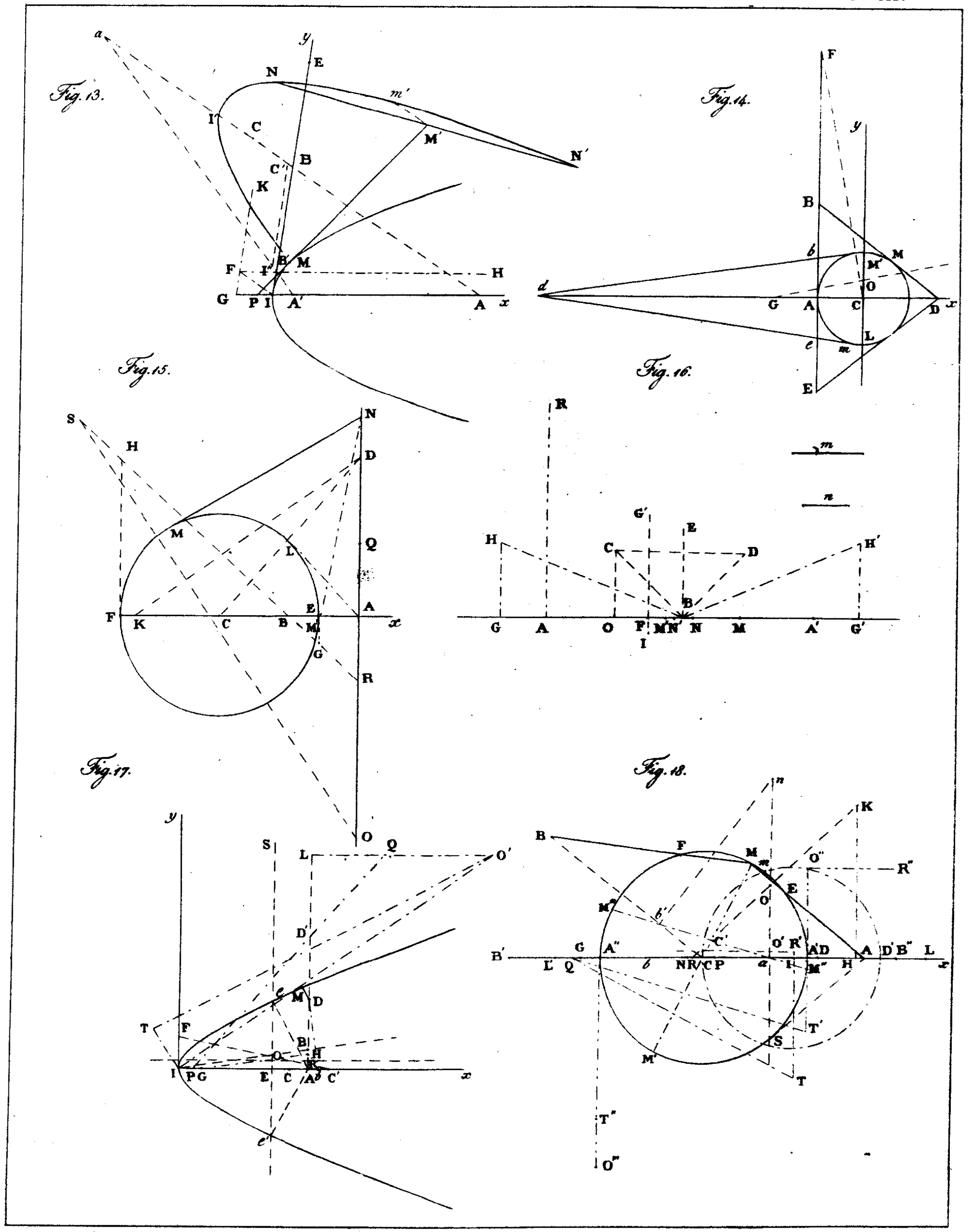


Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

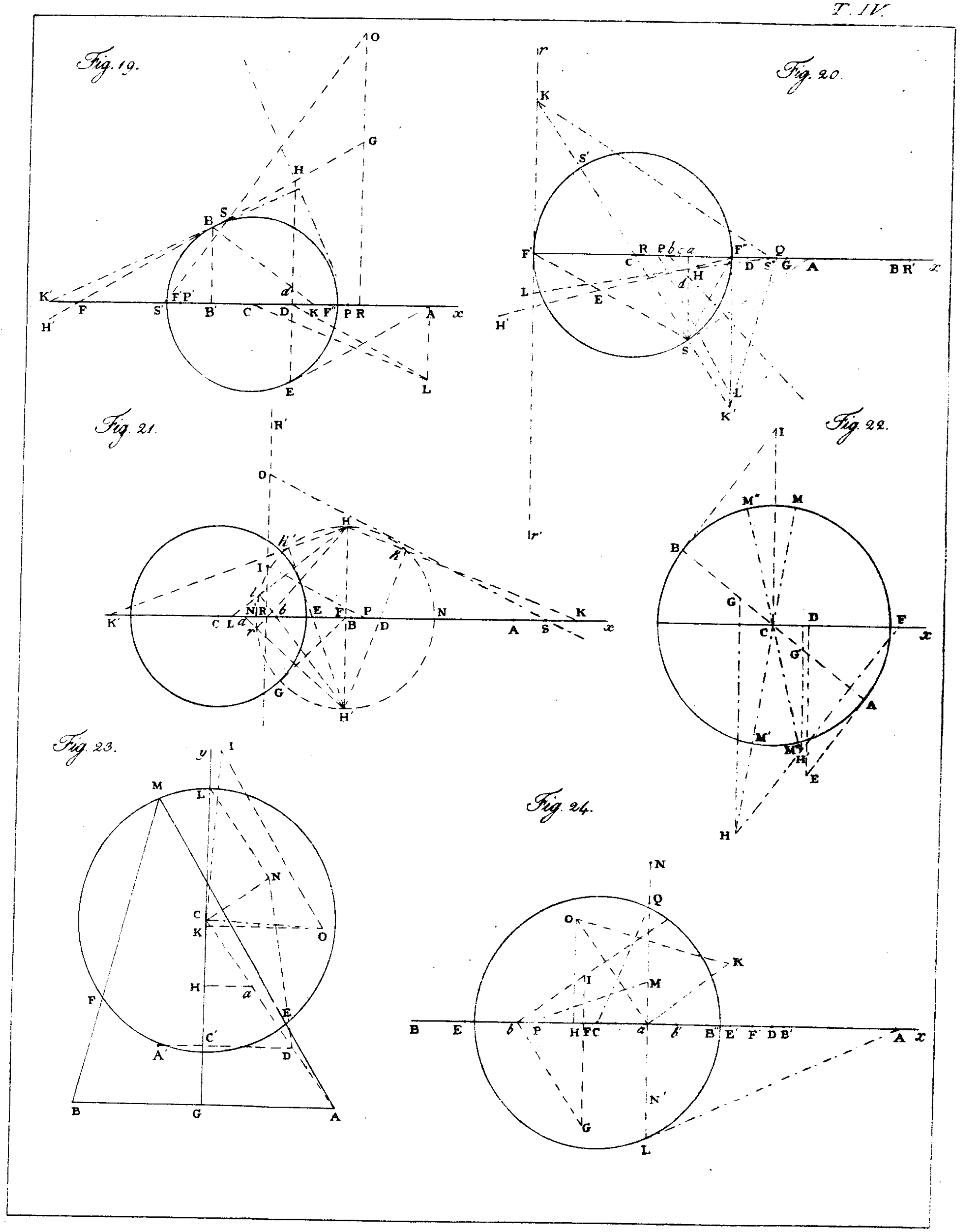


Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.

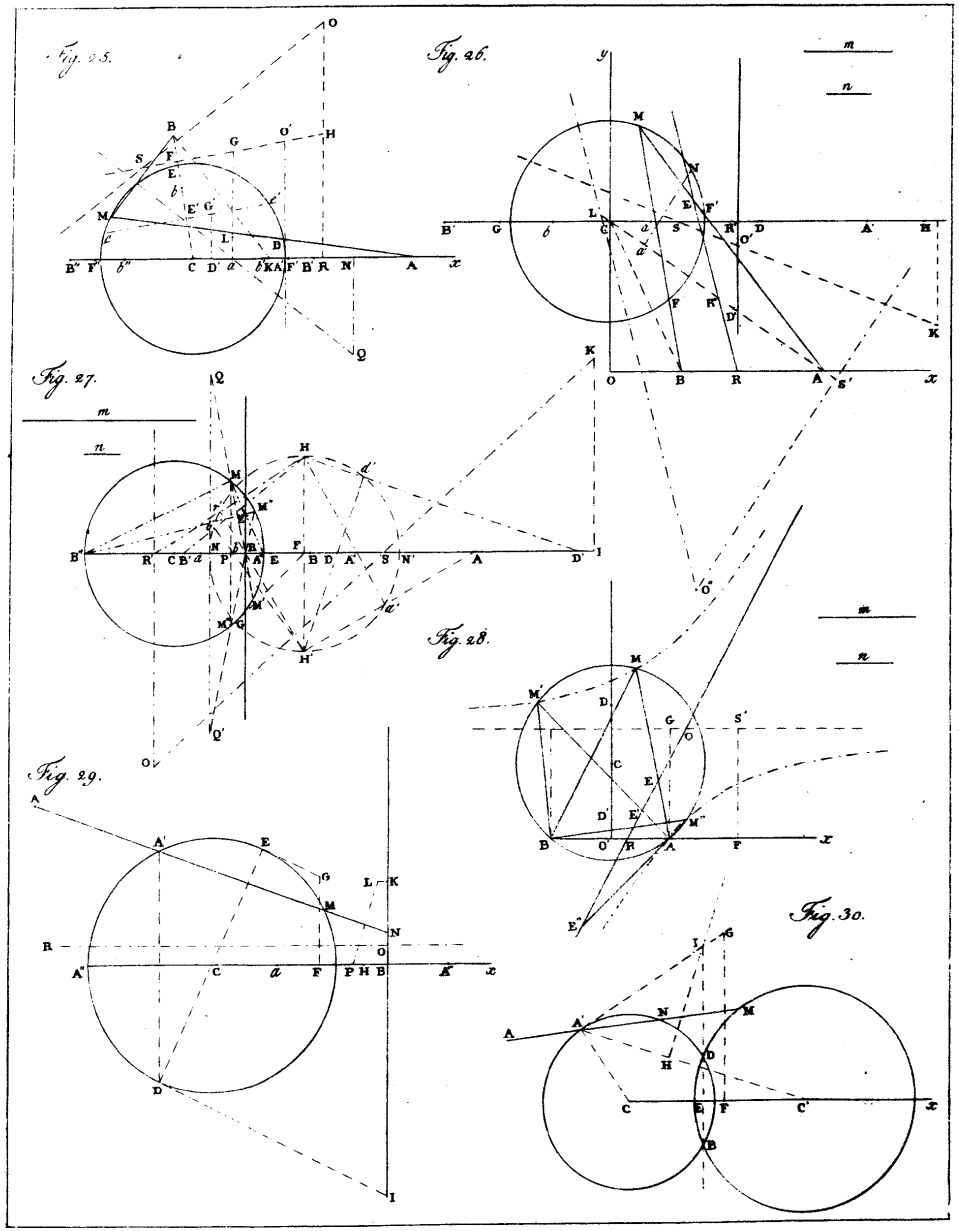


Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.

Fig. 31.

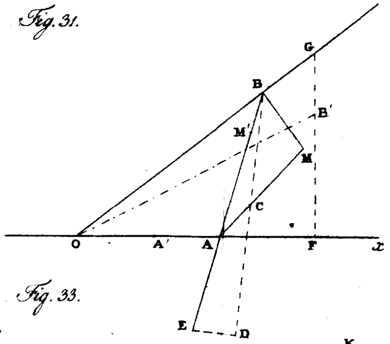


Fig. 32.

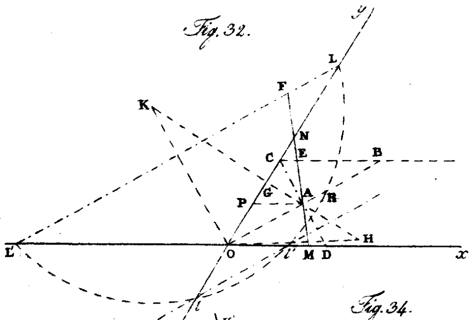


Fig. 33.

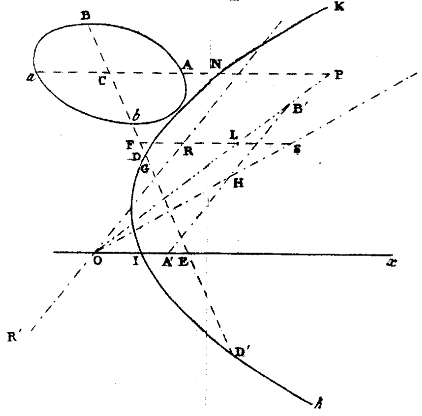


Fig. 34.

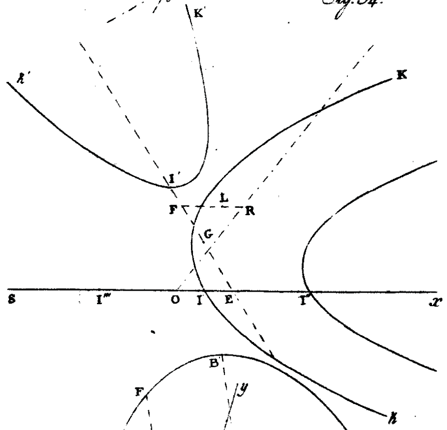


Fig. 35.

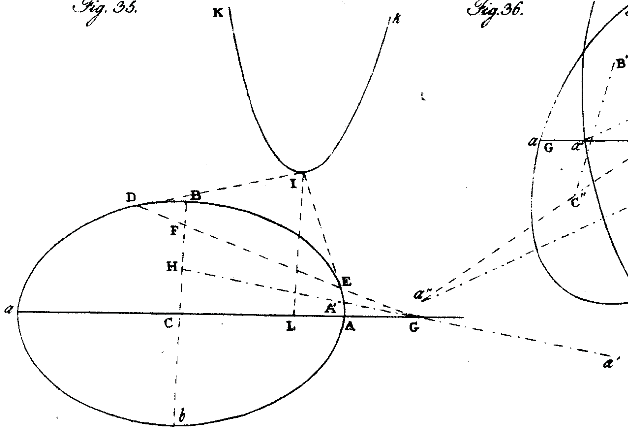


Fig. 36.

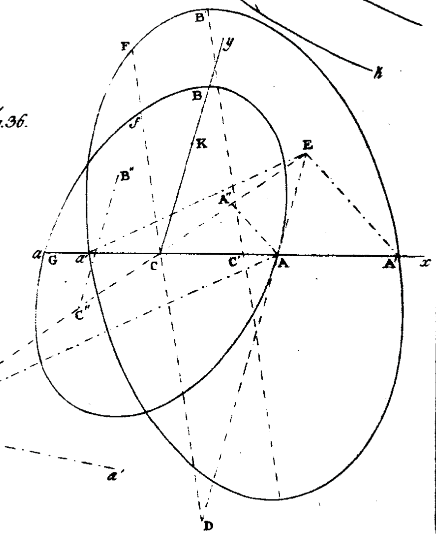


Fig. 37.

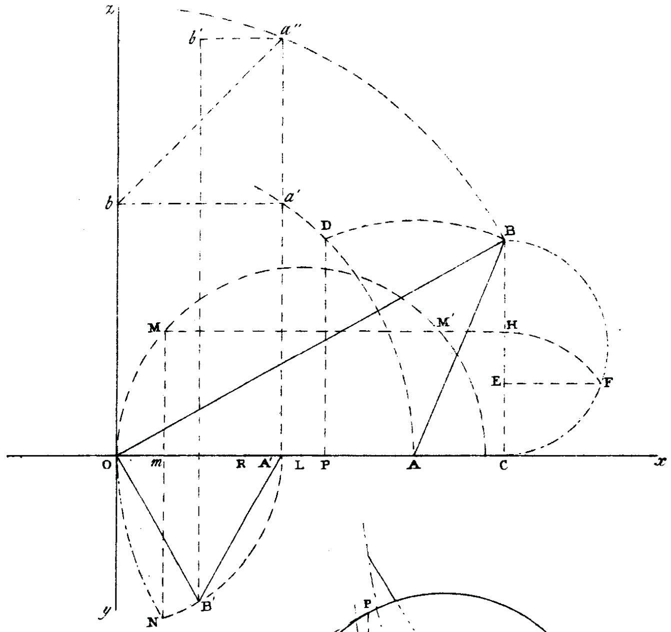


Fig. 38.

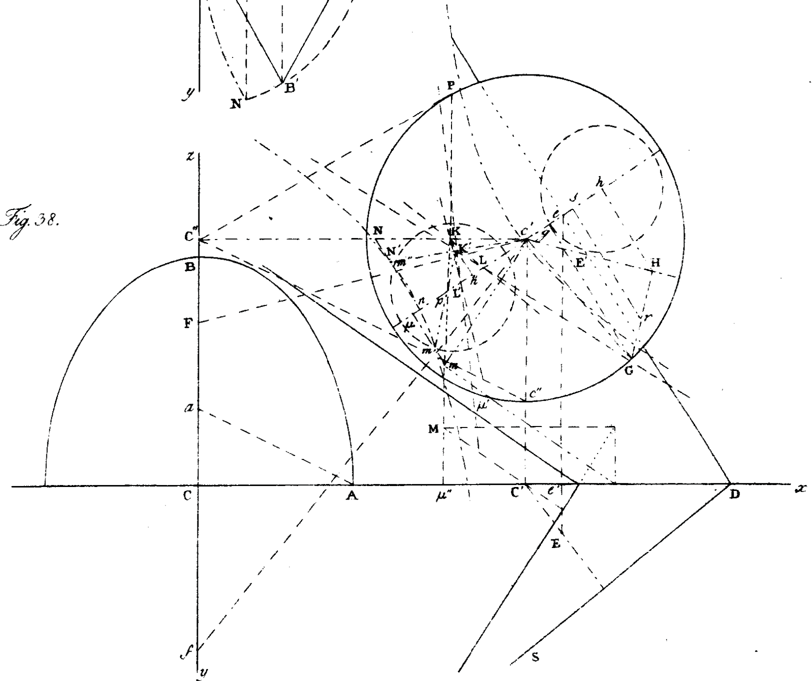


Fig. 39.

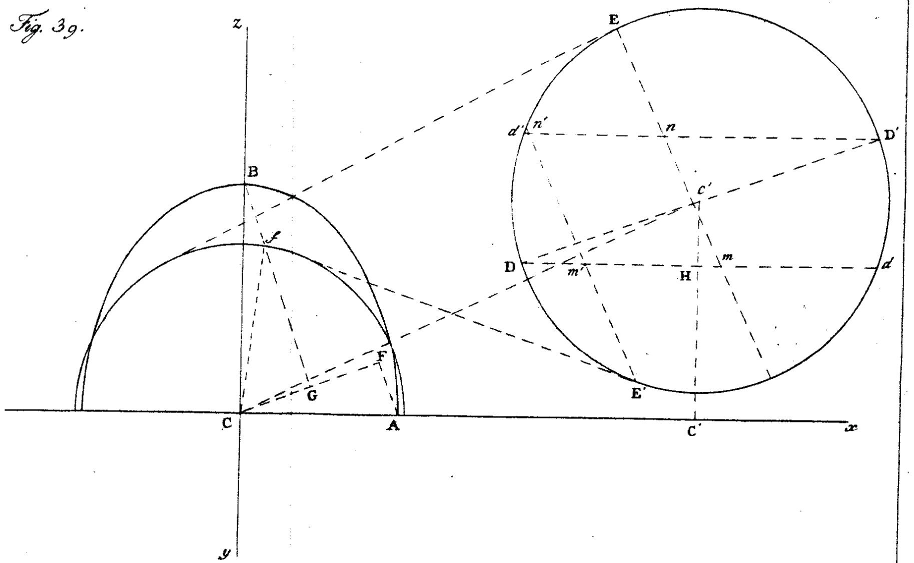


Fig. 40.

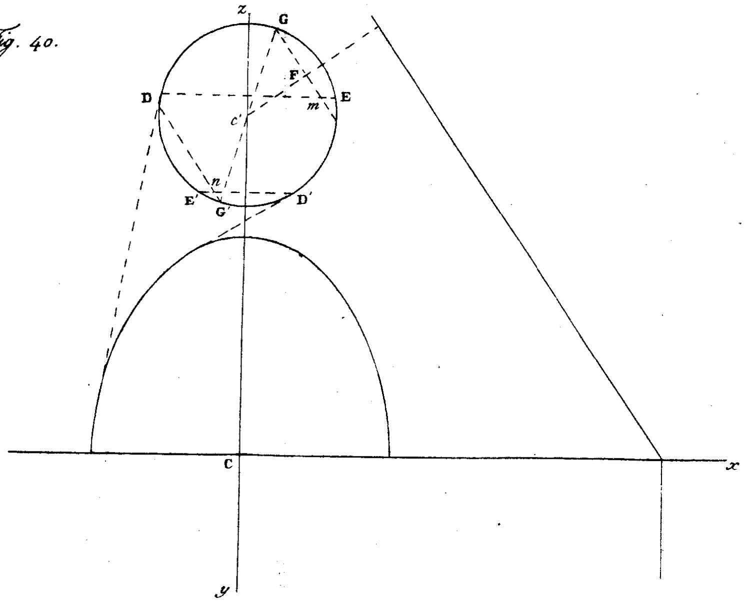


Fig. 41.

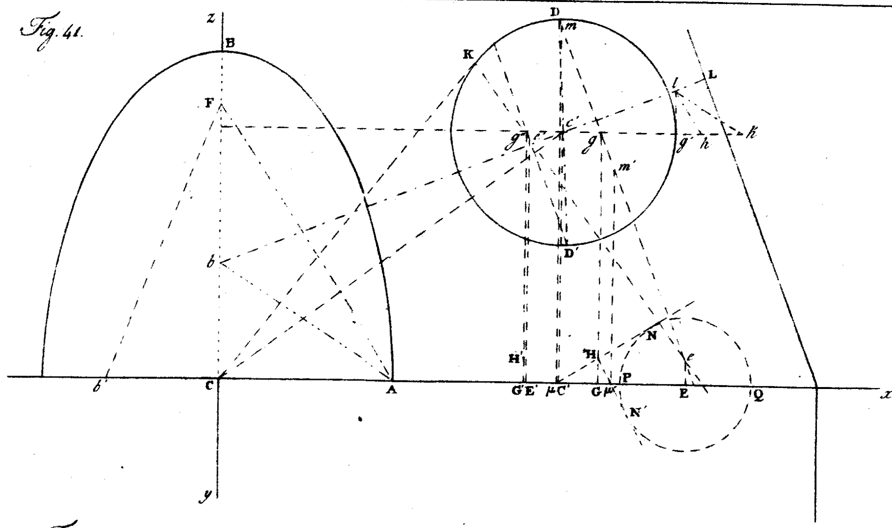
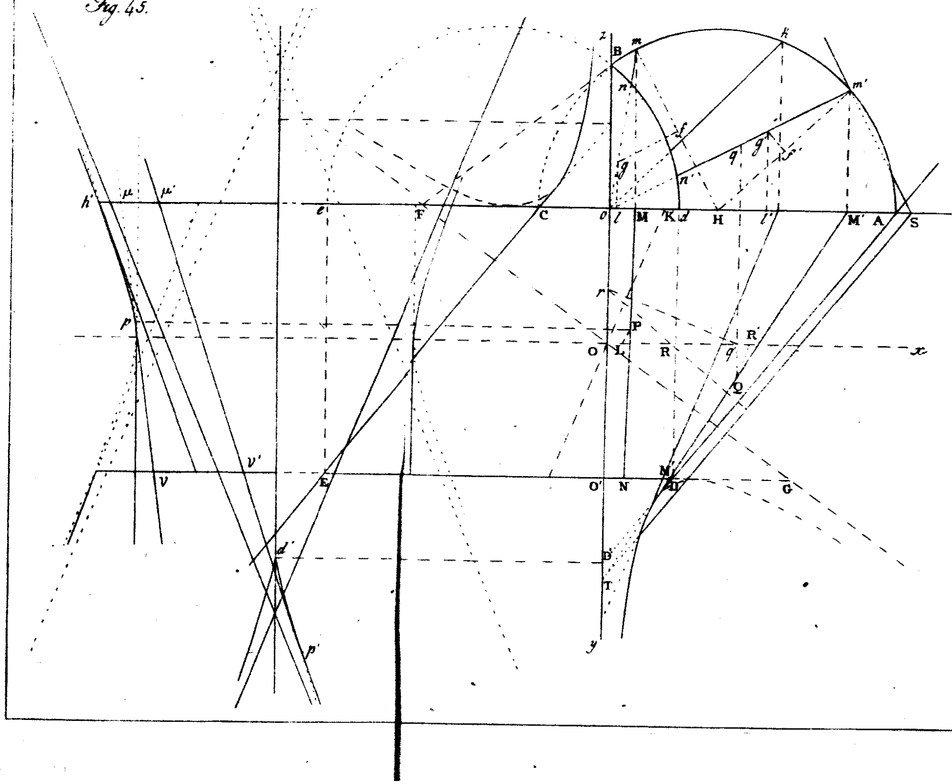
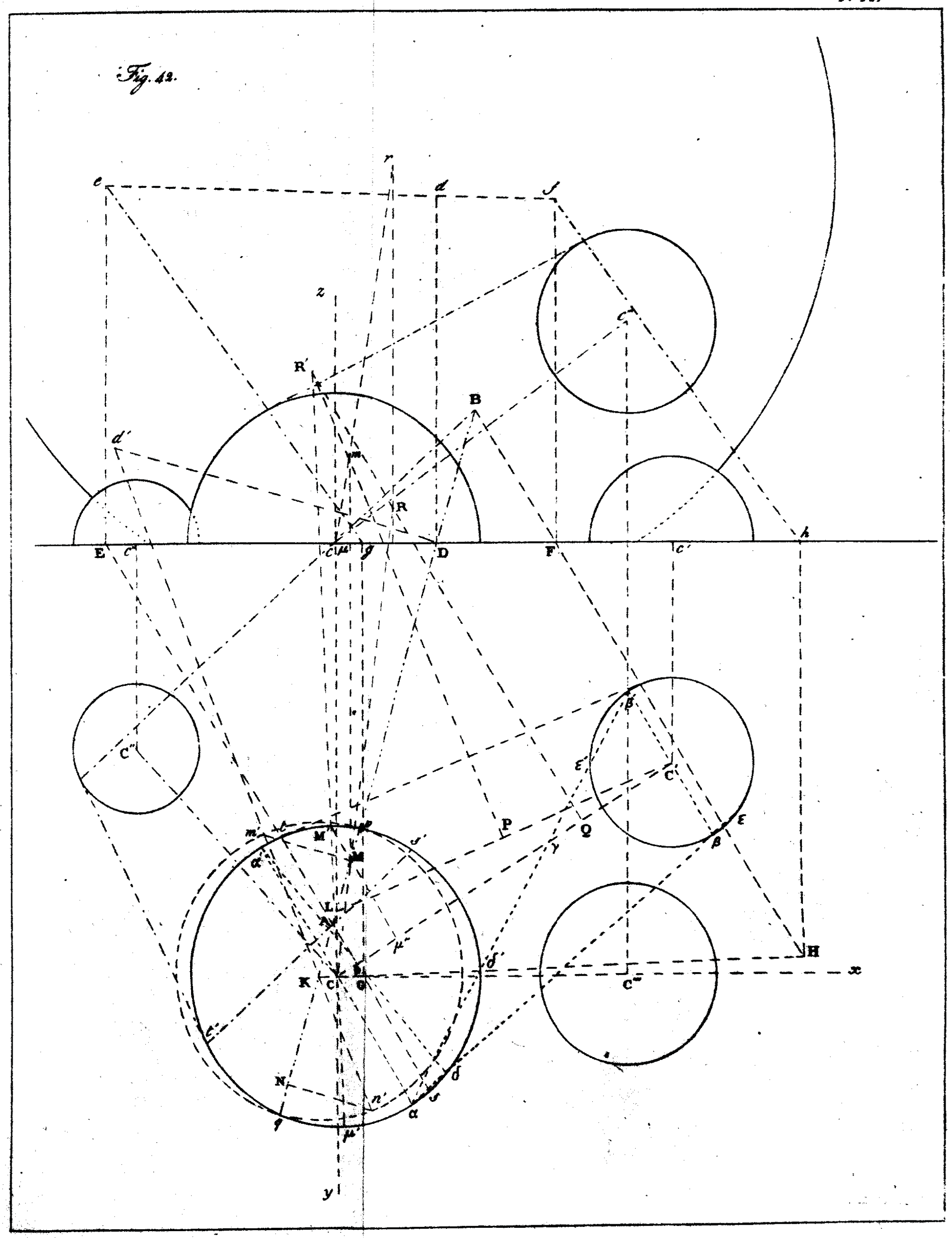


Fig. 45.



T. X.

Fig. 42.



T. XI.

Fig. 43.

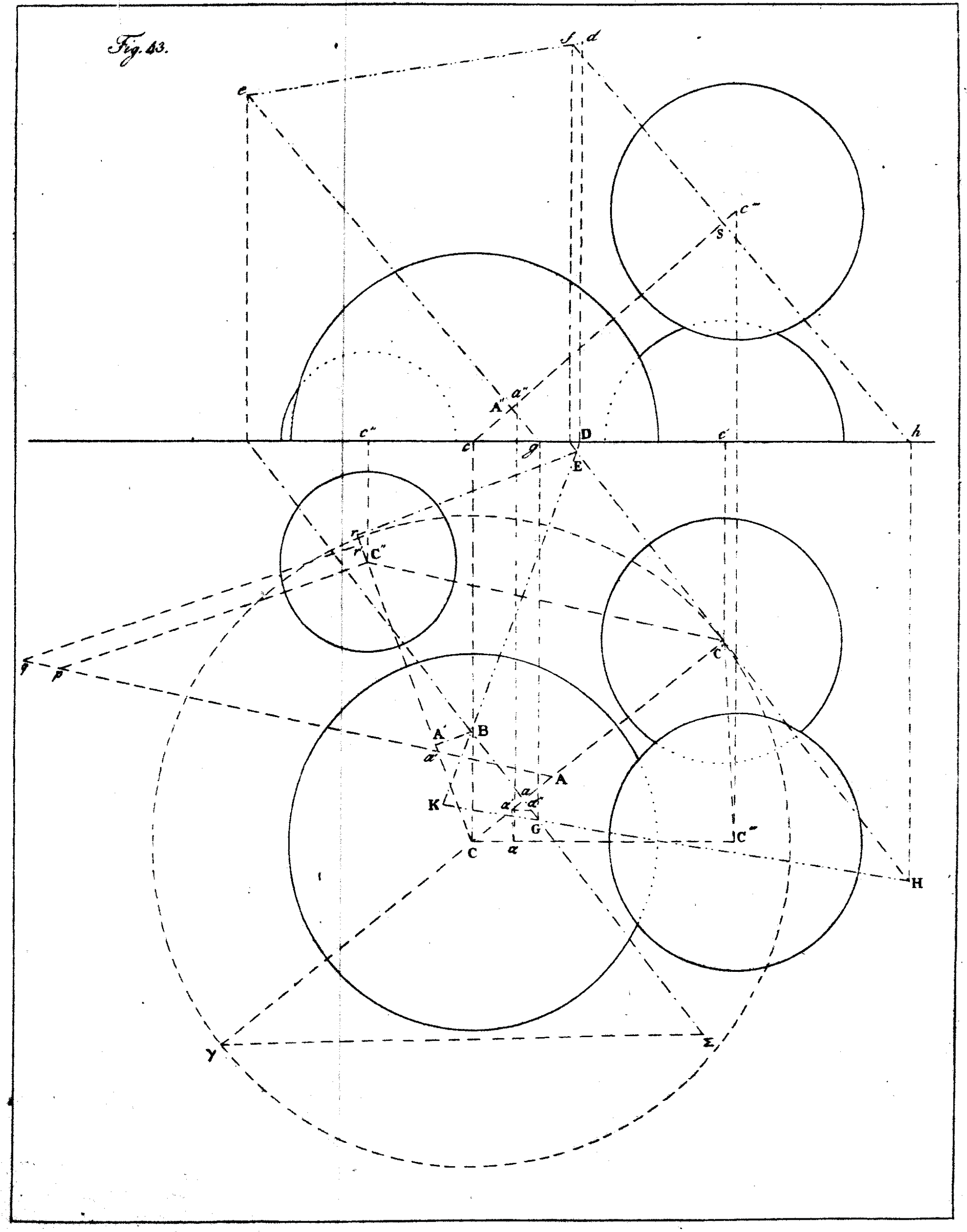


Fig. 44.

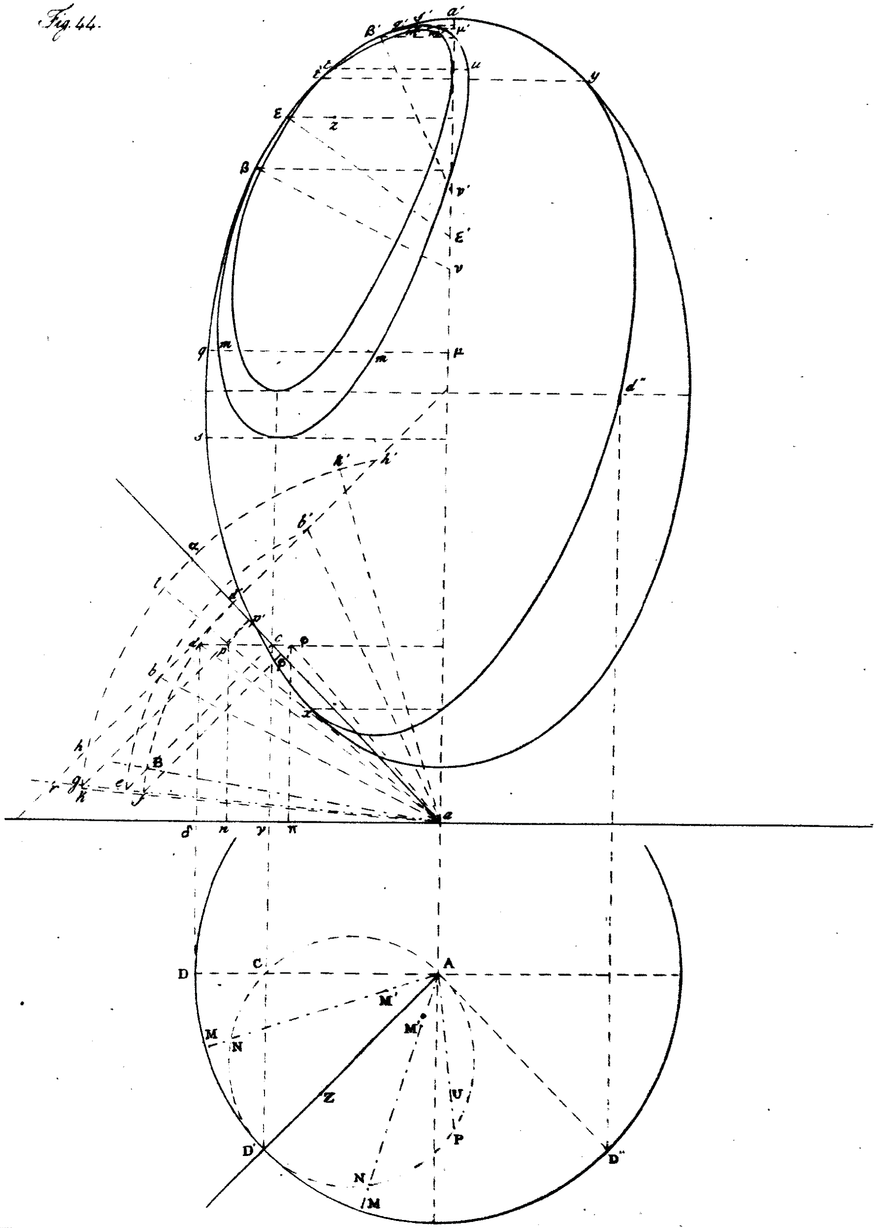
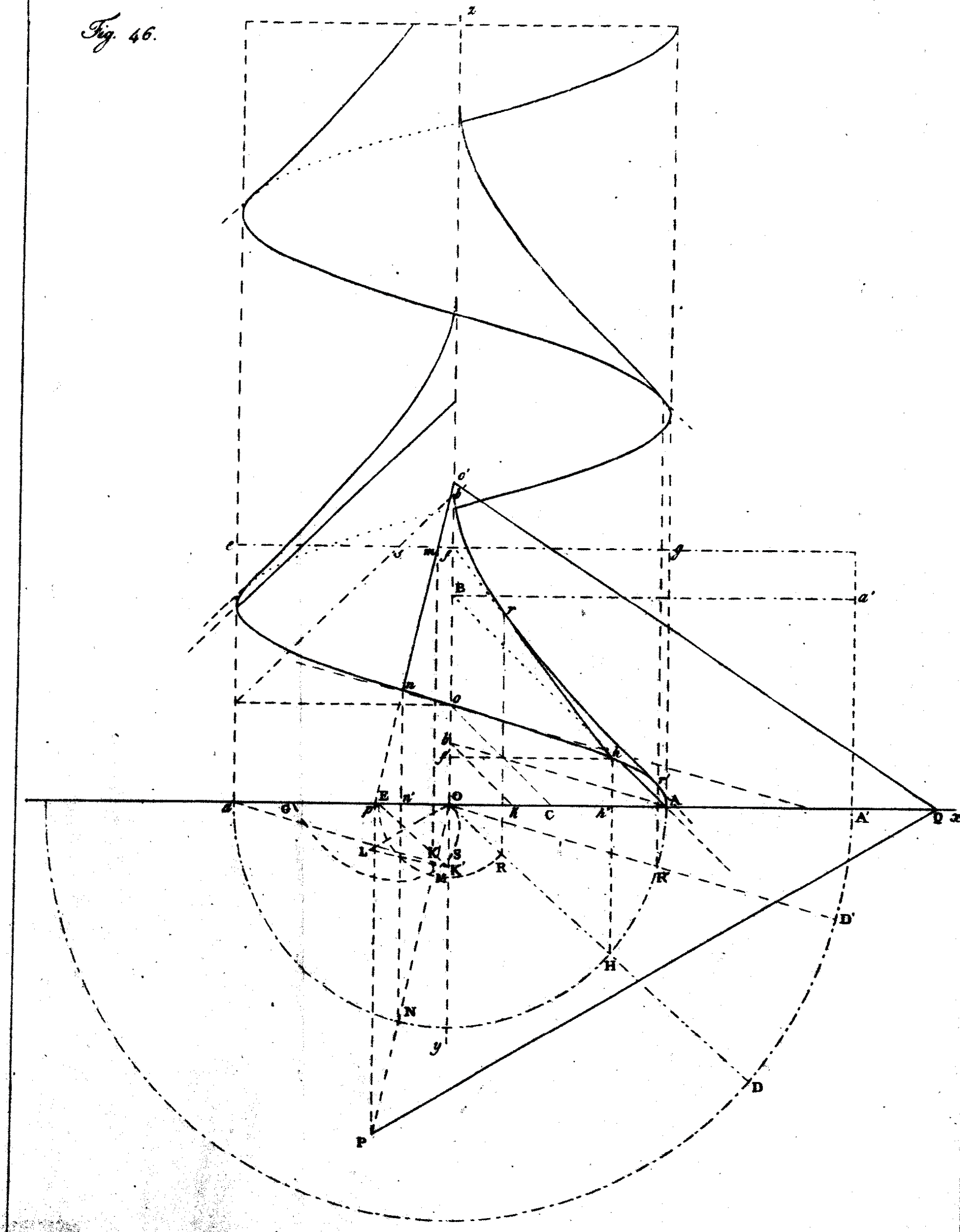
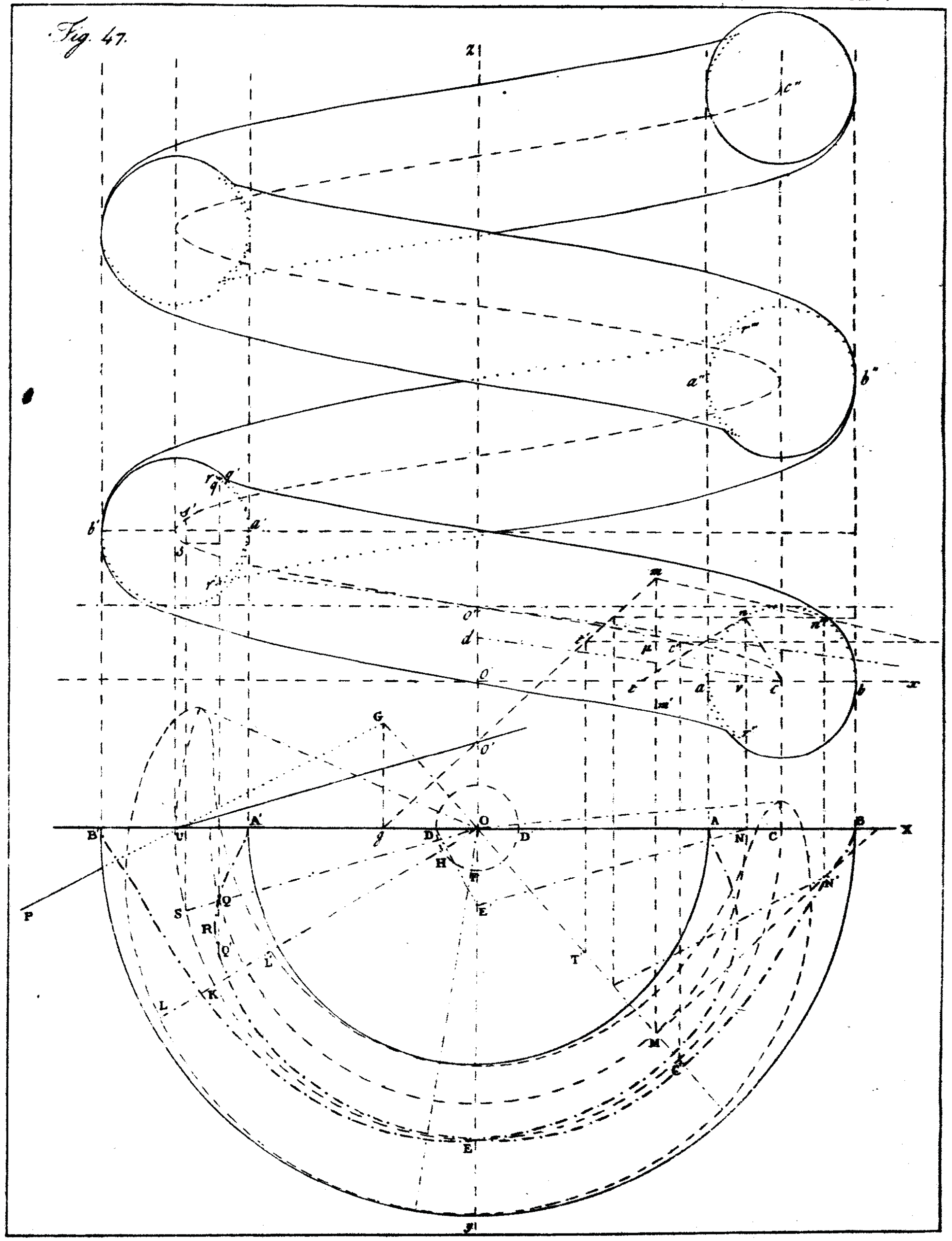


Fig. 46.





T. XIV.