PRINCIPJ FONDAMENTALI

DEL CALCOLO

DIFFERENZIALE

E

INTEGRALE

APPOGGIATI

ALLA DOTTRINA

DE' LIMITI

IN PAVIA MDCCLXXXVIII.

Nella Stamp. del R. I. Monast. di S. Salvatore

Con permissione.

AGLI STUDIOSI
DI MATEMATICA

D. ANGELO LOTTERI
Monaco Girolamino
Pub. Ripetitore di Matematica
NELLA R. UNIVERSITA' DI PAVIA.

Dacchè M. d' Alembert sulle tracce già prima segnate da Newton sostituì il Metodo de' Limiti *a quello degli* Infinitesimi *nel Calcolo Differenziale, questa parte fondamentale della moderna sublime Analisi cambiò tosto d' aspetto, e comparve agli occhi de' più scrupolosi Geometri in forma assai più luminosa. Bentosto fu il principio del Francese Geometra adottato dalle Nazioni più colte; e quindi videro i dotti uscire in questi ultimi anni dalla Francia, dalla Germania, e da altri Paesi Opere eccellenti di questo genere, nelle quali la teoria de' Limiti è stata applicata al Calcolo Differenziale col più felice successo. Fra queste parvemi d' un pregio non mediocre quella d' un anonimo Uffizial Prussiano, che in un picciol volume scritto in lingua Alemanna, ad uso degli Ingegneri ed Artiglieri, ha raccolte le cose più interessanti e necessarie per guidare i Giovani principianti*

al Calcolo sublime. Io ne intrapresi la traduzione colla mira di presentarla fedelmente al Pubblico; ma accorgendomi nel corso di mia fatica, che v' era luogo ad aggiunte, a restrizioni, a cambiamenti, per avervi trovato (come non di raro avviene ne' libri di questo genere) delle massime ed asserzioni inesatte, incomplete, ed alcune a mio giudizio del tutto erronee, mi sono determinato a travestir questo libretto sotto una forma non poco diversa, affine di renderlo più utile a quella classe di lettori, a cui è destinato.

Prima di tutto ho premessa un' Introduzione*, in cui seguendo il d' Alembert hò tentato di dare un' idea metafisica del principio de' Limiti; idea che sembrommi indispensabile a disporre la mente de' Principianti a siffatte dottrine, e senza di cui bisognerebbe andar come di salto ad afferrarne i difficili e delicati principj. Le regole poi della differenziazione comprese ne' primi due Capi dell' Opera, sono tolte fedelmente dall' Original tedesco: ma la formola differenziale della rettificazione delle curve, la quale ci serve di fondamento per la differenziazione delle quantità trigonometriche, fu da me dimostrata per una via diversa da quella dello Scrittor Prussiano, e che mi parve quanto semplice, altrettanto rigorosa. Il trattato* de' Massimi e de' Minimi*, che è il più importante ed ameno del Calcolo Differenziale, è stato da me mutato più che per metà, sì affine di presentare per via diretta e dimostrativa la serie di Taylor, che ne è la base, come per inserirvi delle applicazioni di vario genere in luogo delle troppo uniformi e monotone dell' Originale Alemanno. Ho in seguito trasportato al proprio luogo il Capo dei Differenziali delle quantità esponenziali, che dal nostro A., seguendo il Bèzout, era inserito nel Cal-*

colo Integrale, *perchè parvemi*, *che la materia lo comportasse*, *ed il buon ordine lo richiedesse*, *sebbene poi questo trasporto abbia cagionato alquanto di variazione*. *Al trattato del* Raggio di curvatura, *che parevami più laborioso che esatto*, *ho creduto meglio di sostituire quello di M. Cousin*, *da cui pure ho preso quasi fedelmente i trattati de'* Punti di Flesso, e di Regresso, *e dei* Punti multipli delle curve, *che giudicai troppo necessarj a' Giovani*, *che intendono iniziarsi con frutto in queste sublimi dottrine*.

Il Calcolo Integrale (*a riserva delle formole generali per le applicazioni geometriche*, *che sono derivate dal nostro principio*) *non è presso a poco che una copia di quello*, *che M. Bézout ha scritto nel suo* Corso di Matematica ad uso del Corpo Reale dell' Artiglieria, *mutilato però*, *ove credemmo necessario di limitarci*, *ed ampliato dallo Scrittor tedesco e da me eziandio*, *ove la materia lo richiedeva*. *Il nome di questo Matematico è tanto celebre*, *che inutili diverrebbero i nostri encomj*.

Ho poi creduto di formare un singolar pregio alla presente Opera, *coll' inserirvi quattro interessanti Appendici*, *che il cel. P. D. Gregorio Fontana Pub. Prof. di Matematica Sublime in questa nostra R. Università di Pavia si compiacque di favorirmi*, *e che si troveranno inserite a' proprj luoghi*, *fuorchè la prima*, *che per più comodamente esporla*, *l' abbiam posta in fine del libro*, *e che ci somministra una completa dimostrazione del famoso Teorema di Taylor esteso al numero di quante variabili si voglia*. *La seconda ci presenta un' elegante e rigorosa dimostrazione d' un Teorema di Eulero*, *risguardante l' integrazione della formola differenziale* $\frac{dz}{\log. z}$. *Ci offre la terza un metodo*

generale per integrare un' equazione differenziale della forma $Ydx^2 = mdy^2 + nyddy$. *La quarta finalmente è una correzione d' una delicata svista del Bézout*, *che perciò è tanto più importante*, *quanto meno sono avvertiti gli errori degli uomini grandi*. *Sarebbe questo l' opportuno luogo di render palesi que' vivi sentimenti*, *che pur dovrei a quest' uomo celebre*, *di cui già da cinqu' anni ho la soddisfazione di ascoltare le tanto interessanti ed istruttive Lezioni*, *e per cui eccitamento io mi azzardo di pubblicare questo libretto*, *qualunque poi sia l' esito*, *che sarà per avere*; *ma la modestia di lui mi prescrive di più non diffondermi*, *e di sopprimer così i giusti trasporti d' un animo riconoscente*.

Se poi a fronte di mia instancabil diligenza nel rifare tutti i calcoli, *nel correggere le inesattezze*, *nel rischiarar i passi oscuri*, *e finalmente nell' assistere giornalmente all' impressione dell' Opera*, *vi si troveranno tuttavia degli errori*, *e delle mancanze*, *mi si perdoni tuttociò dal Lettore benevolo*. *L' insufficienza mia*, *la difficoltà de' calcoli assai penosi*, *la facilità comune a qualunque più perito Geometra di sbagliare in simili materie*, *la fretta di compiere l' impressione innanzi l' incominciar delle nostre Scuole*, *ponno essere gli appigli di mia difesa*. *Del resto per inesatto*, *per mancante che sia questo libro*, *mi lusingo*, *ch' esso non sarà del tutto inutile a' Giovani studiosi di queste amene Scienze*, *a' quali soltanto di giovare intesi*, *e di consacrare le deboli mie fatiche*.

INDICE DE' CAPI

Contenuti nella presente Opera.

CALCOLO DIFFERENZIALE

CALCOLO INTEGRALE

INTRODUZIONE

AL CALCOLO DIFFERENZIALE

La nozione metafisica del Calcolo differenziale, come nota d'Alembert, oltre l'esser la più importante, è altresì la più difficil parte di esso. Gl'inventori stessi di questa sublime analisi non le hanno dato da principio quell'aspetto di verità e di evidenza, ch'essa meritava. Leibnitz sgomentato quasi dalle difficoltà, che ovunque insorgevano contro l'idea da lui introdotta degli *infinitamente piccioli*, non li ridusse che a *incomparabili*, e questa geometrica inesattezza ritardò, o almen limitò i progressi di questa ammirabile scoperta, perchè non appariva ancora quali fossero i sodi principj, su di cui ella doveva stabilirsi. Newton, che non ha men contribuito di Leibnitz all'invenzione del Calcolo Differenziale, fu più cauto ne' suoi principj, e non si può negare, che l'idea, che dà questo gran Geometra circa le Flussioni, non contenga i buoni semi dell'esattezza geometrica, sebbene non s'intraveggano che con qualche oscurità. Ma fintanto che non si propose il Calcolo differenziale, che come una scienza, che insegna a computare, e paragonare le quantità infinitamente picciole, ci furon sempre degli ingegni incontentabili, che riclamarono contro i suoi metodi, e fra questi son

celebri M. Rolle, e Nieuwentit, sebbene il secondo di questi dopo aver ammessa l'esistenza degli infinitesimi di prim'ordine, potesse con ugual facilità ammettere ancora quelli del secondo, che egli ostinatamente ripudiava, ed a cui come a necessaria conseguenza lo conduceva la sola Geometria.

Ma se le difficoltà di questi ed altri illustri uomini sembravano ritardare la perfezione di questa novella Scienza, contribuirono per un altro aspetto a metterla in miglior luce. Imperciocchè convinti i Geometri della verità del metodo dai risultati, che trovavano costantemente conformi a quelli, che altronde si ottenevano dall'Algebra sola, e dalla Geometria, incominciarono a sospettare dei principj, con cui si soleva proporre, e trovarono, che tutta l'oscurità e dubbiezza del nuovo Calcolo non traeva origine che dalla sua definizione. D'Alembert è il primo, che penetrando quelle tenebre, ove tentavano d'ascondersi sì belle produzioni dello spirito umano, ne rintracciò il vero principio, e lo pubblicò nel IV. Tomo dell'Enciclopedia. Un tal principio, che de' *Limiti* si chiama, in sostanza non è che il Metodo de' *Limiti* degli Antichi ossia delle *Esaustioni*, e M. Cousin ne fa un esatto confronto, e lo concilia mirabilmente col Calcolo differenziale, il quale in tal maniera sembra che non desideri ulterior evidenza ne' suoi principj.

Per limite altro non s'intende, che una certa quantità, a cui altre quantità vanno incessantemente accostandosi durante il loro aumento o diminuzione, senza che mai la raggiungano, o a lei s'uguaglino. Così il cerchio è il limite di tutti i poligoni iscritti, e circoscritti; i primi aumentano a misura che s'accostano al cerchio, i secondi non s'accostano al cerchio, che nella loro diminuzione. Una frazione a misura che diminuisce o cresce il suo denominatore, d'altrettanto s'accosta all'infinito, o allo zero, i quali due estremi non si debbono in conseguenza considerare, che come limiti delle quantità crescenti o decrescenti, nè v'ha idea più precisa e più esatta di questa per comprendere la nozione dell'*infinito*, e dello *zero*.

Le quantità non si considerano che per rapporto ad altre quantità. Il paragone di questi rapporti è l'oggetto del Calcolo; quindi se fra le quantità, di cui si cerca un rapporto qualunque, ve ne sono di quelle che variano continuamente, nel mentre che altre si mantengono inalterate, questo rapporto andrà sempre avvicinandosi a un certo limite, senza però che mai lo raggiunga. La ricerca di questo limite è appunto l'oggetto del Calcolo differenziale. Infatti il Sig. d'Alembert lo definisce, come *una Scienza, che insegna a determinare algebricamente il limite d'un rapporto, di cui già si ha l'espressione in linee, e ad uguagliare in seguito fra se questi due limiti;* ovvero in altro modo, il Calcolo differenziale è il metodo di trovar i limiti di quel rapporto finito, che hanno tra loro due quantità cangianti, delle quali è altronde nota, ed analiticamente espressa la relazione. Che poi questi due limiti debbano esser uguali è una verità di prima evidenza. Siano X, e Z i limiti d'una medesima quantità Y; io dico che sarà $X = Z$. Imperciocchè se ci fosse fra loro qualche differenza V, sarebbe $X = Z \pm V$; ma per ipotesi la quantità Y può

accostarsi quanto si vuole a X, che è quanto dire, che la differenza fra X e Z può esser minore di qualunque assegnabile: dunque se Z differisce da X della quantità V, non potrà Y accostarsi a Z più da vicino della quantità V, e quindi Z non sarà limite di Y, ciò che è contro l'ipotesi. Un'altra verità non meno importante è la seguente. Se due quantità crescenti o decrescenti conservano costantemente nella loro variazione lo stesso rapporto, questo rapporto sarà lo stesso che quello de' loro limiti. Questo teorema tuttochè evidente sarà da noi dimostrato ove tratteremo de' Differenziali logaritmici. Questi due teoremi semplicissimi si ponno dire le chiavi di tutto il Calcolo differenziale, e M. Cousin vorrebbe che si applicassero eziandio alla Geometria elementare, a fine di evitare certe inesattezze prodotte da una falsa nozione, che si suol dare dell'infinito. Questo chiarissimo Matematico ha fatto vedere la fecondità di tali principj, applicandoli ai problemi più interessaati del Calcolo differenziale, e il libro, che ora offeriamo al Pubblico, ne contiene le applicazioni opportune. Intanto faremo riflettere con d'Alembert, che il problema di determinar la sottangente d'una curva per la via de'limiti, che noi fra poco mostreremo, per particolare e semplice ch'egli sia, può però ben meditato e compreso infondere ne' Principianti una chiara e distinta idea della teoria, con cui dee trattarsi il Calcolo differenziale, e quindi non sarà difficile di applicarla alle ricerche più delicate, ch'egli ci offre ad ogni passo, massime circa gli accidenti delle curve, su di cui quello principalmente si aggira.

CAPO I.

ELEMENTI

DI CALCOLO DIFFERENZIALE

1. Fra le quantità, che noi quì prendiamo a considerare, ve n'ha alcune, le quali o crescono o scemano, ed altre, che mantengono costantemente lo stesso valore. Le prime, che soglionsi indicare colle ultime lettere x, y, z, ec. dell'Alfabeto, si chiamano *variabili*; le altre poi diconsi quantità *costanti*, e si esprimono colle prime lettere a, b, c, ec. Così nelle linee curve le coordinate sono variabili, ma il Parametro e l'Asse quantità costanti.

2. Per indicar di quanto una quantità è cresciuta o scemata, suolsi premettere a tale quantità il greco carattere Δ, così che quando si dee indicare, che la grandezza variabile x sia accresciuta o diminuita d'una certa quantità, si scrive $x \pm \Delta x$.

Il Simbolo Δx denota una sola quantità, come log. x, ovvero $\sqrt{x}$ ec. Una potenza di grado n di Δx dovrebbesi propriamente segnare con $(\Delta x)^n$. Ma perchè il carattere Δ non indica un particolar fattore, ma bensì deesi riguardare Δx come una sola lettera nel calcolo, però comunemente si scrive Δx^n. Quindi la seconda potenza di Δx, la terza, la

quarta ec. viene denotata con Δx^2, Δx^3, Δx^4, ec.

Indica pertanto il Simbolo Δx^n, che la differenza Δx è innalzata alla n^{esima} podestà, laddove il simbolo $\Delta\,(x^n)$ vuol dire che devesi cercare la differenza della quantità x^n.

3. Sia data una funzione $V = a x^n$, ove n esprime un numero costante, positivo o negativo, intero o rotto. Questa funzione puossi considerare come un'equazione alla curva AM,
Fig. 1. le cui ascisse da x, e le ordinate siano espresse da V.

Essendo V una funzione della x, nascerà in V un cangiamento, tosto che questo sarà accaduto in x. Dunque se x cresce della quantità $\Delta x = Pp$, anche V crescerà d'una certa quantità $\Delta V = mq$. Quindi si ha $V + \Delta V = a\,(x + \Delta x)^n$. Ma si ha $(x + \Delta x)^n =$

$$x^n + n x^{n-1} \Delta x + \frac{n\,.\,n-1.}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \&c.$$

Dunque $V + \Delta V =$

$$a x^n + a n x^{n-1} \Delta x + \frac{a n\,.\,n-1.}{1\,.\,2} x^{n-2} \Delta x^2 + \&c.$$

e

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = a n x^{n-1} + \frac{a n.n-1.}{1\,.\,2} x^{n-2} \Delta x + \&c.$$

Per mezzo dunque di questa operazione trovasi il rapporto di $mq : Mq$, ossia il rapporto dell'ordinata MP alla sottosecante PT. Vogliasi ora trovare il rapporto dell'ordinata MP alla sottangente PT; facilmente si vede, che il rapporto dell'ordinata MP alla sottosecante PS sempre più s'accosta a quel rapporto, quanto più picciole diventano le differenze ΔV, Δx; ma che il rapporto dell'ordinata alla sottosecante non può mai diventar uguale al rapporto dell' ordinata alla sottangente, a meno che non sia $\Delta V = o$, e $\Delta x = o$. Quando ciò accada, si otterrà $\frac{\Delta V}{\Delta x} = a n x^{n-1}$, e tal è il rapporto, in cui sta l' ordinata alla sottangente nella curva AM. Ad esprimere d' una maniera universale questo rapporto, ci serviamo d' un certo segno: cioè, allorquando si ΔV, che Δx sono diventate $= o$, si prefigge alle quantità V ed x il carattere d, il quale quì pure è bensì un segno, che indica il limite della diminuzione di Δx, e Δy, ma non mai un fattore.

Quindi per esprimere, che colla precedente operazione si è realmente trovato il rapporto dell' ordinata alla sottangente, si scrive così $\frac{dV}{dx} = a n x^{n-1}$. Ma però non si dee credere, che si voglia dire con tal espressione, che sia $\frac{o}{o} = a n x^{n-1}$. Ma $\frac{dV}{dx}$ è un segno, con cui si può rappresentare non solo il summentovato rapporto, ma ancora ogn' altra quantità, come $m a x^{m-1}$, quando sia $V = a x^m$.

4. Se $V = x^n$; sarà $\frac{dV}{dx} = n x^{n-1}$

Se $V = x^2$; sarà $\frac{dV}{dx} = 2x$

$V = x^3$; ... $\frac{dV}{dx} = 3x^2$

$V = x^4$; ... $\frac{dV}{dx} = 4x^3$;

Se $V = x^{-2}$; ... $\frac{dV}{dx} = -2x^{-3}$

$V = x^{\frac{2}{3}}$ ... $\frac{dV}{dx} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$

$V = x^{-\frac{4}{5}}$ ... $\frac{dV}{dx} = -\frac{4}{5} x^{-\frac{9}{5}}$

E così di seguito.

5. Quando sia $V = a^2 \pm a x \pm b y \pm z$, sarà $V + \Delta V = a^2 \pm a \Delta x \pm b y \pm b \Delta y \pm z \pm \Delta z$, giacchè a, b nè crescono nè diminuiscono. Dal che ne siegue $\frac{\Delta V}{\Delta x} = \pm a \pm \frac{b \Delta y}{\Delta x} \pm \frac{\Delta z}{\Delta x}$. Ora può richiedere un certo Problema, che s' abbia a sapere quel rapporto, che viene indicato dal simbolo $\frac{dV}{dx}$. E questo si è $\frac{dV}{dx} = \pm a \pm \frac{b\,dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}$, qualora ΔV, Δx, Δy, Δz tutte simultaneamente s' annullino. Se sono date le equazioni tra, y, x, z, si potrà da loro cavarne i rapporti indicati dai simboli $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, e $\frac{dV}{dx}$.

6. Altri Autori hanno determinato il rapporto dell' ordinata alla sottangente per un' altra via, che quì vuol essere esposta a miglior intelligenza di alcune espressioni. Essi cioè hanno introdotte delle quantità infinitamente picciole per cui non altro intendono, se non se quantità le quali in confronto di altre sono da considerarsi come un nulla, e perciò possono trascurarsi nel calcolo. Adducono ad esempio un granello d' arena, il quale nè ingrossa, nè impicciolisce la mole d' un monte; una frazione, il di cui numeratore essendo uguale all' unità

abbia un denominatore più grande di qualsisia numero assegnabile, la qual frazione, a loro avviso, può a ragione trascurarsi, quando in certi calcoli debbasi aggiugnere o sottrarre da un altro numero.

Tale anti-geometrico principio è stato da essi applicato al presente caso nella maniera seguente. Se si ha per es. $V = ax^2$ (così essi ragionano); cresca V, giusta il lor linguaggio, d'una quantità infinitamente picciola, cui dinotano con dV; crescerà in conseguenza anche x d'una quantità infinitamente picciola dx, onde ne ricavano
$V + dV = a(x + dx)^2 = ax^2 + 2axdx + adx^2$, e $dV = 2axdx + adx^2$, ove dx^2 è il quadrato di dx, giacchè quì pure d è un segno e non già un fattore. Ora, giusta il comune principio, dx è una tal picciolissima frazione, di cui s'è parlato poc' anzi, il di cui quadrato in conseguenza si può a più forte ragione omettere nel calcolo. Dal che ottengono $dV = 2axdx$; ciò che più acconciamente si esprime con $\frac{dV}{dx} = 2ax$.

7. Quest' ultima definizione ha introdotto le seguenti espressioni. E' dV il *Differenziale* di V, dx il *Differenziale* della x. Essendo dV $anx^{n-1}dx$, quando $V = ax^n$, l'espressione $anx^{n-1}dx$ chiamasi il *Differenziale* di V, ovvero di ax^n. Quindi comunemente si dà la regola seguente.

Per trovar il differenziale dV d'una quantità $V = ax^n$, si moltiplichi ax^n per l'esponente n, si diminuisca l'esponente d'un'unità, e s'innalzi x alla potenza $n - 1$; indi si moltiplichi il prodotto anx^{n-1} pel differenziale della x, cioè per dx.

La scienza di trovare il differenziale di $V = ax^n$, ha quindi tratto il nome di *Calcolo Differenziale*. Più acconciamente poteva ella chiamarsi *Metodo delle Tangenti*.

Le formole del §. 4. sono comunemente scritte nel seguente modo.

1. $dV = nx^{n-1}dx$, 4. $dV = -2x^{-3}dx$

2. $dV = 2xdx$ 5. $dV = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx$

3. $dV = 3x^2dx$ 6. $dV = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}dx$; &c

e §. 5. $dV = \pm adx \pm bdy \pm dz$.

8. Sia data una funzione $V = xy$, e si supponga insieme, che tra V ed x, tra V ed y, e finalmente tra x ed y abbiano luogo certe equazioni, come per es. $V = x^m$, $V = ay^p$, $x = ey^n$. Qualora in queste equazioni non sianvi altre quantità variabili, fuorchè V ed x, V ed y, x ed y, le quali sieno elevate ad una potenza, l'esponente della quale è una quantità costante, noi ci troviamo in istato, mediante le cose dette, di determinare que' rapporti, o grandezze, cui sogliono i Matematici esprimere con $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dx}{dy}$.

Quando nella funzione $V = xy$, la quantità x cresca di Δx, y di Δy, ed V di ΔV, noi ottenghiamo $V + \Delta V =$
$(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y$, onde $\Delta V = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y$, ossia
$\frac{\Delta V}{\Delta x} = y + \frac{x\Delta y}{\Delta x} + \Delta y$.

Ora se svaniscono nel medesimo tempo ΔV, Δx, Δy, cioè se diventa $\Delta V = 0 = dV$, $\Delta x = 0 = dx$, $\Delta y = 0 = dy$; si avrà

$\frac{dV}{dx} = y + \frac{x\,dy}{dx} + dy$. Ma l' espressioni $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ dinotano certe quantità, o rapporti di certe quantità, i quali ponno essere surrogati in luogo di tali simboli: laddove il simbolo dy isolato non è simbolo di veruna quantità, ma bensì unicamente $= 0$. Quindi si ha $\frac{dV}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$. Poichè $\Delta V = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$, è ancora $\frac{\Delta V}{\Delta y} = \frac{y\Delta x}{\Delta y} + x + \Delta x$, onde si conchiude del pari essere $\frac{dV}{dy} = \frac{y\,dx}{dy} + x$, giacchè dx per se non esprime punto una quantità, ma soltanto un nulla.

9. Di leggieri si vede, che queste osservazioni sulla funzione $V = xy$ non sono punto limitate alle funzioni di due variabili, ma si possono applicare con ugual verità alle funzioni di tre e più variabili. Se si ha per esempio $V = xyz$, si può sempre assumere, che tra V ed x, tra y ed V, tra V e z, e tra x, y, z, abbianvi certe relazioni, le quali esprimer si potranno per mezzo di equazioni. Siamo perciò in istato di scoprire ciò, che propriamente dir si vogliono i simboli $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, $\frac{dx}{dy}$ &c, e facilmente apparirà, che $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ &c esprimono alcune quantità, nel

mentre che dx, dy, dz separatamente non altro vogliono indicare che zero. Quindi se nella funzione $V = xyz$ si suppone ogni quantità crescente, si trova $V + \Delta V = (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) = xyz + zy\Delta x + zx\Delta y + xy\Delta z + z\Delta x\Delta y + y\Delta x\Delta z + x\Delta y\Delta z + \Delta x\Delta y\Delta z$; e $\frac{\Delta V}{\Delta x} = zy + \frac{zx\Delta y}{\Delta x} + \frac{xy\Delta z}{\Delta x} + z\Delta y + y\Delta z + \frac{x\Delta y\Delta z}{\Delta x} + \Delta y\Delta z$. Ora se $\Delta V = 0 = dV$, $\Delta x = 0 = dx$, $\Delta y = 0 = dy$, $\Delta z = 0 = dz$, sarà $\frac{dV}{dx} = zy + \frac{zx\,dy}{dx} + \frac{xy\,dz}{dx} + z\,dy + y\,dz + \frac{x\,dy\,dz}{dx} + dy\,dz$, e $z\,dy = 0$, $y\,dz = 0$, $dy\,dz = 0$, $\frac{x\,dy\,dz}{dx} = \frac{x\,dz\,dy}{dx} = 0$. Poichè quantunque $\frac{dz}{dx}$, ovvero $\frac{dy}{dx}$ rappresenti un' effettiva quantità; se questa però vien moltiplicata per $x\,dy$, o per $x\,dz$ dee necessariamente andar a zero; e però otteghiamo $\frac{dV}{dx} = zy + \frac{zx\,dy}{dx} + \frac{xy\,dz}{dx}$. L' espressione $\Delta V = zy\Delta x + zx\Delta y +$ &c avrebbe potuto ancor dividersi per Δy, ovvero per Δz. Nel primo caso avremmo ottenuto $\frac{dV}{dy} = \frac{zy\,dx}{dy} + zx + \frac{xy\,dz}{dy}$, e nel secondo caso $\frac{dV}{dz} = zy\frac{dx}{dz}$

$+ zx \frac{dy}{dz} + xy.$

10. Questa regola altrimenti si propone nel modo seguente. Le quantità ΔV, Δx, Δy, Δz, &c sono espresse da dV, dx, dy, dz &c, ed in conseguenza queste ultime sono considerate bensì come quantità, ma come quantità infinitamente picciole come al §. 6. Si può adunque calcolare co' simboli dV, dx, dy &c come con vere quantità; onde si ottiene

1°. $dV = y\,dx + x\,dy$; poichè il prodotto $dx\,dy$ di due grandezze infinitamente picciole da se stesso svanisce.

2°. $dV = zy\,dx + zx\,dy + xy\,dz$; poichè i termini $z\,dx\,dy$, $y\,dx\,dz$, $x\,dy\,dz$, $dx\,dy\,dz$ sono tanto piccioli, che ponno trascurarsi.

Quest'è pertanto la regola comune. Si trova il differenziale d'una funzione di due o più variabili, se si consideri ciascuna quantità come variabile ad una ad una, e si differenzii, come se le altre fossero costanti. La somma di tutti questi differenziali sarà il differenzial cercato.

11. Ormai è facile il differenziare le seguenti funzioni.

Si trova $d(ax^m y^n) = ax^m d(y^n) + ay^n d(x^m) = nax^m y^{n-1} dy + may^n x^{m-1} dx$, e $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(xy^{-1}) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$, ponendo cioè $a = 1$, $m = 1$, $n = -1$.

Quando poi la quantità, che deesi differenziare è composta di più termini, allora si differenzia ciascun termine separatamente. Per esempio $d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2\,dx + 2bx\,dx + cx\,dy + cy\,dx$ come pure

$d\left(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2}\right) = 2ax\,dx + b\,dx - 2cyx^{-3}dx + cx^{-2}dy$; e $d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3yx^2\,dx + x^3dy + 2ay\,dy$.

La formola $(a + bx + cx^2)^5$ si differenzia allo stesso modo che la potenza x^n. Cioè si ha $d(a + bx + cx^2)^5 = 5(a + bx + cx^2)^4 d(a + bx + cx^2) = 5(a + bx + cx^2)^4 (b + 2cx)dx$. E $d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} d(a + bx^2) = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} . 2bx\,dx = \frac{10}{3} bx\,dx(a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$.

Quando la quantità da differenziarsi risulta da un aggregato di potenze e di altri fattori, allora ciascun fattore si considera come una semplice variabile, e si procede colle regole precedenti. Così sarà $d[x^3(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}] = (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} d(x^3) + x^3 d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = 3x^2dx(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3}bx^4dx(a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$. Di più $d\left(\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right) = d[(x+a)^3(x+b)^{-2}] = (x+a)^3 d(x+b)^{-2} + (x+b)^{-2} d(x+a)^3 = \frac{(x + 3b - 2a)(x+a)^2 dx}{(x+b)^3}$.

Se si avrà a differenziare una quantità radicale, in vece del segno radicale si ponga l'esponente rotto: e si avrà $d\sqrt{x} = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$, $d\sqrt[5]{x^3} = d(x^{\frac{3}{5}}) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx$. Inoltre $d\sqrt{(a^2 - x^2)} = d(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Finalmente $d[x^m \sqrt[q]{(a + bx^n)^p}] =$

$$d\left[x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\right] = \frac{pnb}{q} x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}$$

$$+ m x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$; e così di seguito.

CAPO II.

Del Calcolo Differenzio-Differenziale.

12. Sia data una funzione $V = x^n$. In luogo di x si sostituiscano successivamente i valori che sieguono: $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, $x+3\Delta x$, $x+4\Delta x$, $x+5\Delta x$, e così di seguito. La quantità, in cui si cangia V, mettendo $x+\Delta x$ per x si dinoti con V', e con V'' la quantità in cui si cangia V col sostituirvi $x+2\Delta x$ in luogo di x, e finalmente con V''' la quantità, in cui si cangia V col sostituire $x+3\Delta x$ in vece di x, &c. Sarà dunque $V = x^n$

$$V' = (x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2} x^{n-2}\Delta x^2$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} . x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

$$V'' = (x+2\Delta x)^n = x^n + 2nx^{n-1}\Delta x + \frac{4n.n-1}{1.2} . x^{n-2}\Delta x^2$$

$$+ \frac{8n.n-1.n-2}{1.2.3} . x^{n-3}\Delta x^3 + \&c$$

$$V''' = (x+3\Delta x)^n = x^n + 3nx^{n-1}\Delta x + \frac{9n.n-1}{1.2} . x^{n-1}\Delta x^2$$

$$+ \frac{27n.n-1.n-2}{1.2.3} . x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

Abbiamo in conseguenza

$$V' - V = \Delta V = n x^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2} . x^{n-2}\Delta x^2$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} . x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

$$V'' - V' = \Delta V' = nx^{n-1}\Delta x + \frac{3n.n-1}{1.2} . x^{n-2}\Delta x^2$$

$$+ \frac{7n.n-1.n-2}{1.2.3} . x^{n-3}\Delta x^3 + \&c ;$$

$$V''' - V'' = \Delta V'' = nx^{n-1}\Delta x + \frac{5n.n-1}{1.2} . x^{n-2}\Delta x^2$$

$$+ \frac{19n.n-1.n-2}{1.2} . x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

E così di seguito.

Se dalla differenza $\Delta V'$ si sottrae la differenza ΔV, la quantità che ne risulta si indica con $\Delta\Delta V$, o più brevemente con $\Delta^2 V$. Così si esprime con $\Delta^2 V'$ la quantità, che proviene dal sottrarre $\Delta V'$ da $\Delta V''$. Quindi è $\Delta V' - \Delta V = \Delta^2 V =$ . . . . $n.n-1. x^{n-2}\Delta x^2 + n.n-1.n-2. x^{n-3}\Delta x^3 + \&c$, onde ne siegue

$$\frac{\Delta^2 V}{\Delta x^2} = n.n-1. x^{n-2} + n.n-1.n-2. x^{n-3}\Delta x + \&c.$$

Quanto più picciole diventano Δx, ΔV, tanto più il valore di $\frac{\Delta^2 V}{\Delta x^2}$ s'accosta alla funzione $n.n-1. x^{n-2}$. Ma finchè Δx, ΔV sono quantità, non potrà mai il valore di $\frac{\Delta^2 V}{\Delta x^2}$ ugua-

gliar-

gliarsi alla funzione $n . n - 1 . x^{n-2}$. Ma se sarà $\Delta x = 0 = dx$, e $\Delta V = 0 = dV$, allora sarà anche $\Delta^2 V = 0$, e ciò suol indicarsi con $d^2 V$. Perciò abbiamo $\frac{d^2 V}{dx^2} = n . n - 1 . x^{n-2}$.

In luogo della quantità $n . n - 1 . x^{n-2}$ suolsi più frequentemente scrivere $\frac{d^2 V}{dx^2}$, così che può dirsi generalmente, che il simbolo $\frac{d^2 V}{dx^2}$ indichi l' esistenza di certe quantità, e sia surrogato in luogo della quantità precedente o di altra simile. L' espression medesima $\frac{d^2 V}{dx^2}$ può avere nissun valore, poichè zero diviso per zero può dare anche zero per quoziente.

14. Abbiamo trovato precedentemente $\Delta V'' = n x^{n-1} \Delta x + \frac{5 n . n - 1}{1 . 2} . x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{19 n . n - 1 . n - 2}{1 . 2 . 3} . x^{n-3} \Delta x^3 +$ &c. e $\Delta V' = n x^{n-1} \Delta x + \frac{3 n . n - 1}{1 . 2} . x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots\ldots \frac{7 n . n - 1 . n - 2}{1 . 2 . 3} . x^{n-3} \Delta x^3 +$ &c onde ne siegue $\Delta V'' - \Delta V' = \Delta^2 V' = n . n - 1 . x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{12 n . n - 1 . n - 2}{1 . 2 . 3} . x^{n-3} \Delta x^3 +$ &c.

Se dalla differenza $\Delta^2 V'$ si sottrae la differenza $\Delta^2 V$, la quantità che risulta dalla sottrazione si esprime con $\Delta^3 V$. Ora poichè $\Delta^2 V = n . n - 1 . x^{n-2} \Delta x^2 + n . n - 1 . n - 2 . x^{n-3} \Delta x^3$

$+ \frac{14 n . n - 1 . n - 2 . n - 3}{1 . 2 . 3 . 4} x^{n-4} \Delta x^4 +$ &c; però troviamo $\Delta^2 V' - \Delta^2 V = \Delta^3 V = n . n - 1 . n - 2 . x^{n-3} \Delta x^3 + \frac{3 n . n - 1 . n - 2 . n - 3}{1 . 2} . x^{n-4} \Delta x^4 +$ &c onde si deduce $\frac{\Delta^3 V}{\Delta x^3} = n . n - 1 . n - 2\, x^{n-3} + \frac{3 n . n - 1 . n - 2 . n - 3}{1 . 2} . x^{n-4} \Delta x +$ &c; ora quando è $\Delta x = 0 = dx$, si ha ancora $\Delta x^3 = 0 = dx^3$, e $\Delta^3 V = 0 = d^3 V$, e si ottiene $\frac{d^3 V}{dx^3} = n . n - 1 . n - 2 . x^{n-3}$, ove $\frac{d^3 V}{dx^3}$ è un simbolo, per cui si suole dinotare l' esistenza della quantità $n . n - 1 . n - 2 . x^{n-3}$, o di altra a lei analoga.

15. Se simili operazioni saranno spinte più oltre, ne risulterà

$$\frac{d^4 V}{dx^4} = n . n - 1 . n - 2 . n - 3 . x^{n-4}$$

$$\frac{d^5 V}{dx^5} = n . n - 1 . n - 2 . n - 3 . n - 4 . x^{n-5}$$

$$\frac{d^6 V}{dx^6} = n . n - 1 . n - 2 . n - 3 . n - 4 . n - 5 . x^{n-6}$$

e così di seguito.

16. Se sarà $V = x^2$, sarà $\frac{d^2 V}{dx^2} = 2$.

Se $V = ax^4$, sarà $\frac{d^2 V}{dx^2} = 12 a x^2$, e $\frac{d^3 V}{dx^3} = 24 a x$;

Se $V = a x^m$, sarà $\frac{d^2 V}{dx^2} = m (m - 1) a x^{m-2}$,

$$\frac{d^3V}{dx^3} = m(m-1)(m-2)\,a\,x^{m-3},$$

$$\frac{d^4V}{dx^4} = m(m-1)(m-2)(m-3)\,a\,x^{m-4},$$

e così in avanti.

17. Comunemente questo Teorema si propone nel modo che siegue. Se si ha, per esempio $V = x^3$, e si considerino dV, dx come vere quantità, sarà $V + dV = (x+dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$, e $dV = 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$. Cresca ora dV della quantità d^2V, ma sia però dx una costante quantità, il cui valore rimanga inalterabile a fronte di tutti i cangiamenti, che subir potranno dV, ed x. Si avrà perciò $dV + d^2V = 3(x+dx)^2dx$ $3(x+dx)dx^2 + dx^3 = 3x^2dx + 6xdx^2 + 3dx^3 + 3xdx^2 + 3dx^3 + dx^3$, onde $d^2V = 6xdx^2 + 6dx^3$. Ma $6dx^3$, giusta il comun principio, non è che il prodotto di tre grandezze infinitesime, e che si annichila in paragone di $6xdx^2$, che è il prodotto di due quantità infinitesime soltanto; si deduce in conseguenza $d^2V = 6xdx^2$ e questa stessa espressione ottenuta si avrebbe, se si fosse differenziato $dV = 3x^2dx$ secondo la regola del §. 7., considerandosi però dx come quantità costante.

Quindi dall' essere d^2V il differenziale di dV, e $6xdx^2$ il differenziale di $3x^2dx$, hanno presa origine i nomi di *Differenzio-Differenziale*, e di *Calcolo Differenzio-Differenziale*.

Le formole del §. 12. fino al §. 17. sogliono perciò esprimersi nel modo seguente.

$$d^2V = n.n-1.x^{n-2}dx^2$$

$$d^3V = n.n-1.n-2.x^{n-3}dx^3$$

$$d^4V = n.n-1.n-2.n-3.x^{n-4}dx^4$$

$$d^5V = n.n-1.n-2.n-3.n-4.x^{n-5}dx^5$$

&c; e sempre dalla precedente si ricava la susseguente, procedendo come al §. 7.

18. Si può supporre in ogni funzione come $V = x^n$, che tanto V, quanto x siano certe funzioni della variabile t, come sarebbe $V = (a+t^n)^p$, $x = at^m$ &c. Inoltre si può supporre, che, mentre V ed x crescono secondo una legge arbitraria, la quantità t acquisti l'aumento costante Δt, così che i valori di t seguano la progressione aritmetica t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$, $t+3\Delta t$, $t+4\Delta t$, &c, frattantochè i corrispondenti valori di V sono V, $V+\Delta V$, $V+2\Delta V+\Delta^2V$, $V+3\Delta V+3\Delta^2V+\Delta^3V$, &c; ed i valori corrispondenti di x sono x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x+\Delta^2x$, $x+3\Delta x+3\Delta^2x+\Delta^3x$, &c.

Siano ora date le equazioni, per cui V ed x siano espresse per t, e per quantità costanti; si potrà facilmente per esse trovare le quantità, cui i Matematici costumano di indicare co' simboli $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$, &c.

19. Di sopra §. 12. abbiamo successivamente sostituito nella funzione $V = x^n$ i seguenti valori di x: $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, $x+3\Delta x$, $x+4\Delta x$, &c. E' dunque cresciuta x costantemente della quantità invariabile Δx. Ma può accadere, che la stessa Δx cresca o scemi, nel mentre che cresce o scema la x; ed ora esamineremo questo caso più da vicino. Si ha $V = x^n$,

$$V' = (x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

$$V'' = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)^n = x^n + \dots\dots\dots$$
$$2nx^{n-1}\Delta x + 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{8n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^2.\Delta x + \&c.$$
$$nx^{n-1}\Delta^2 x + 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x.\Delta^2 x + 2n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^2.\Delta^2 x$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta^2 x.\Delta^2 x + n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x(\Delta^2 x)^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.x^{n-3}(\Delta^2 x)^2\Delta^2 x$$
$$+ \&c.$$

Di più $V' - V = \Delta V =$
$$nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2}.x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.;$$
e $V'' - V' = \Delta V' = \dots\dots\dots$
$$nx^{n-1}\Delta x + \frac{3n.n-1}{1.2}.x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{7n.n-1.n-2}{1.2.3}.x^{n-3}\Delta x^2.\Delta x$$
$$+ nx^{n-1}\Delta^2 x + 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x.\Delta^2 x + 2n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^2.\Delta^2 x$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}.x^{n-2}\Delta^2 x.\Delta^2 x + n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x(\Delta^2 x)^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.x^{n-3}(\Delta^2 x)^2\Delta^2 x + \&c.$$
d'onde ne siegue $\Delta V' - \Delta V = \Delta^2 V = nx^{n-1}\Delta^2 x$
$$+ n.n-1.x^{n-2}\Delta x^2 + n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^2.\Delta x$$
$$+ 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x.\Delta^2 x + 2n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^2.\Delta^2 x$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}.x^{n-2}\Delta^2 x.\Delta^2 x + n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x(\Delta^2 x)^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}(\Delta^2 x)^2\Delta^2 x + \&c.$$
Giacchè V ed x sono funzioni di t, per avere i valori di $\frac{\Delta^2 V}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}$, &c, si dividano tutti i termini per Δt^2, con che si verrà ad ottenere $\frac{\Delta^2 V}{\Delta t^2} = nx^{n-1}\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} + \dots\dots$

$$n.n-1.x^{n-2}.\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} + n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x.\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}$$
$$+ 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x.\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} + 2n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^2.\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta^2 x.\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} + n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x.\Delta^2 x\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}(\Delta^2 x)^2.\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} + \&c.$$
Ora se ΔV, Δx, Δt tutte assieme s'annullano, come si è qui presupposto; sarà $dx.\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $d^2x.\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $dx.\frac{dx^2}{dt^2} = 0$, $dx^2\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $dx.d^2x.\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $d^2x^2.\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, onde otteniamo $\frac{d^2V}{dt^2} = nx^{n-1}\frac{d^2x}{dt^2} + n.n-1.x^{n-2}\frac{dx^2}{dt^2}$.
Cioè, se x è una funzione di t, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx^2}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ sono segni, i quali sono posti in luogo di certe quantità, le quali vengono espresse da x e da t. Se ora si avessero queste medesime quantità, e fossero moltiplicate per dx, d^2x, $d^2x.d^2x$, cioè per zero, tutti i termini, in cui occorrono tali fattori, si annullerebbero, e quindi dovrebbero omettersi nel calcolo.

Di quì ne apparisce, come proceder si debba, quando si vogliono rintracciare le quantità, che vengono denotate da $\frac{d^3V}{dt^3}$, $\frac{d^4V}{dt^4}$, $\frac{d^5V}{dt^5}$ &c. Se $V = x^2$, sarà $\frac{d^2V}{dt^2} = 2x\frac{d^2x}{dt^2}$

$+\frac{2dx^2}{dt^2}$. Se $V = x^3$, si troverà $\frac{d^2V}{dt^2} = 3x^2\frac{d^2x}{dt^2} + 6x\frac{dx^2}{dt^2}$. Inoltre $V = ax^m$ ci dà $\frac{d^2V}{dt^2} = max^{m-1}\frac{d^2x}{dt^2} + m(m-1)ax^{m-2}\frac{dx^2}{dt^2}$, &c.

20. Se si ammettono, come d' ordinario si fa, le quantità infinitesime, si può proporre questa regola del §. 18., come segue.

Se per es. $V = x^2$, si ha $V + dV = x^2 + 2xdx + dx^2$, e $dV = 2xdx + dx^2$.

Inoltre $dV + d^2V = 2.(x+dx)(dx+ddx) + (dx+ddx)^2$, e $d^2V = 2xddx + 2dx^2 + 4dxddx + ddx^2$.

Quì i termini $4dxddx$, ddx^2 svaniscono, perchè son prodotti di quantità infinitesime l'una per rapporto all' altra, e perciò infinitamente più piccioli, che non siano $2xddx$, $2dx^2$. Dunque si ha $d^2V = 2xddx + 2dx^2$, la qual espressione si avrebbe altresì avuta, se si fosse differenziato $dV = 2xdx$, secondo la regola del §. 10., considerando però dx come costante.

Le formole de' §. 18, 19, sogliònsi d' ordinario scrivere nel modo seguente.

$d^2V = nx^{n-1}d^2x + n.n-1.x^{n-2}dx^2$

$d^2V = 2xd^2x + 2dx^2$

$d^2V = 3x^2d^2x + 6xdx^2$

$d^2V = max^{m-1}d^2x + m(m-1)ax^{m-2}dx^2$, &c.

21. Abbiamo superiormente trovato §. 8. $\Delta V = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$. Se ora supponiamo, che Δx cresca di Δ^2x, quando x cresce di Δx; che Δy cresca di Δ^2y, quando y cresce di Δy, abbiamo $\Delta V + \Delta^2V = (x+\Delta x)(\Delta y + \Delta^2y) + (y+\Delta y)(\Delta x + \Delta^2x) + (\Delta x + \Delta^2x)(\Delta y + \Delta^2y)$, o ancora

$\Delta V + \Delta^2V = x\Delta y + 3\Delta x\Delta y + x\Delta^2y + 2\Delta x\Delta^2y + y\Delta x + y\Delta^2x + 2\Delta y\Delta^2x + \Delta^2x\Delta^2y$; e $\Delta^2V = x\Delta^2y + 2\Delta x\Delta^2y + 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2x + 2\Delta y\Delta^2x + \Delta^2x\Delta^2y$. Ora poichè V, x, y ponno essere funzioni di t, §. 18., e la differenza di t si può supporre costante, si divida ogni termine per Δt^2, con che si ha $\frac{\Delta^2V}{\Delta t^2} = \frac{x\Delta^2y}{\Delta t^2} + 2\Delta x.\frac{\Delta^2y}{\Delta t^2} + \frac{2\Delta x}{\Delta t}.\frac{\Delta y}{\Delta t} + y\frac{\Delta^2x}{\Delta t^2} + 2\Delta y\frac{\Delta^2x}{\Delta t^2} + \Delta^2x.\frac{\Delta^2y}{\Delta t^2}$. Annullandosi tutte ad un tempo ΔV, Δx, Δy, Δt, diventa $\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{xd^2y}{dt^2} + \frac{2dx}{dt}.\frac{dy}{dt} + \frac{yd^2x}{dt^2}$. Imperciocchè facilmente apparisce, che i termini $2dx.\frac{d^2y}{dt^2}$, $2dy.\frac{d^2x}{dt^2}$, $d^2x.\frac{d^2y}{dt^2}$ sono tutti $= 0$.

22. Se si prendono, come ordinariamente succede, gli infinitesimi, sarà $d^2V = xd^2y + 2dxd^2y + 2dxdy + yd^2x + 2dyd^2x + d^2xd^2y$. Ma $2dxd^2y$, $2dyd^2x$ e d^2xd^2y sono prodotti di quantità infinitesime di prim' ordine, cioè di dx, dy per quantità infinitesime di ordine inferiore come d^2x, d^2y. Quindi è, che questi termini attesa la loro picciolezza ponno cancellarsi dall' espressione precedente, onde si ha $d^2V = xd^2y + yd^2x + 2dxdy$; come si sarebbe trovato, se si fosse differenziato $dV = xdy + ydx$, considerando dx, dy come quantità effettive e variabili, e procedendo secondo la regola del §. 10.

23. Se Δx è costante, abbiamo

$$\frac{\Delta^2 V}{\Delta t^2} = \frac{x\Delta^2 y}{\Delta t^2} + 2\Delta x . \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2} + \frac{2\Delta x}{\Delta t} . \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

onde nasce

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{x\,d^2 y}{dt^2} + 2dx . \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\,dx}{dt} . \frac{dy}{dt},$$

ovvero $d^2 V = x\,d^2 y + 2\,dx\,dy$. Se è costante Δy, si ha $d^2 V = y\,d^2 x + 2\,dx\,dy$. Amendue quest' espressioni si sarebbero altresì ottenute, se in $dV = x\,dy + y\,dx$, si fosse nel primo caso trattata dy come variabile, e dx come costante, e viceversa nel secondo.

24. Se nella funzione $V = xy$ supponghiamo che x punto non cresca, mentre y cresce di Δy, ed V di ΔV, avremo $\Delta V = x\Delta y$.

Se poi x cresca di Δx, quando Δy cresce di $\Delta^2 y$, ne verrà

$$\Delta V + \Delta^2 V = (x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) = x\Delta y + \Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + \Delta x\Delta^2 y,$$

e $$\frac{\Delta^2 V}{\Delta t^2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} . \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{x\Delta^2 y}{\Delta t^2} + \Delta x \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}.$$

Se simultaneamente svaniscono Δx, Δy, Δt, sarà $$\frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{dx}{dt} . \frac{dy}{dt} + \frac{x\,d^2 y}{dt^2} + dx . \frac{d^2 y}{dt^2},$$ cioè $$\frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{dx}{dt} . \frac{dy}{dt} + \frac{x\,d^2 y}{dt^2},$$ per essere $dx . \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$, ossia $d^2 V = dx\,dy + x d^2 y$; alla qual' espressione arrivato sarebbesi, se si fosse differenziato $dV = x\,dy$, considerando come variabile dy, e dx come costante.

Se fosse $V = x^{-1} y$, e crescendo y di Δy, x non variasse punto, ma crescesse però

al crescere Δy di $\Delta^2 y$, si troverebbe $d^2 V = \frac{d^2 y}{x} - \frac{dx\,dy}{x^2}$.

25. Poichè §. 21. $\Delta^2 V = x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y$, sarà $\Delta^2 V + \Delta^3 V = (x + \Delta x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) + 2(\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) + 2(\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (y + \Delta y(\Delta^2 x + \Delta^3 x) + 2(\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta^2 x + \Delta^3 x) + (\Delta^2 x + \Delta^3 x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y)$, da cui in fine si ricava $d^3 V = x d^3 y + 3 dx d^2 y + 3 dy d^2 x + y d^3 x$.

Di quì apparisce il metodo con cui cercar si debbono $d^4 V$, $d^5 V$, $d^6 V$, &c.

26. Quando sia $V = xyz$, noi abbiamo sopra trovato §. 9. $\Delta V = zy\Delta x + zx\Delta y + xy\Delta z + z\Delta y\Delta x + y\Delta z\Delta x + x\Delta y\Delta z + \Delta x\Delta y\Delta z$; onde si ricava

$$\begin{aligned} \Delta V + \Delta^2 V = {} & (z + \Delta z)(y + \Delta y)(\Delta x + \Delta^2 x) \\ & + (z + \Delta z)(x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) \\ & + (x + \Delta x)(y + \Delta y)(\Delta z + \Delta^2 z) \\ & + (z + \Delta z)(\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta x + \Delta^2 x) \\ & + (y + \Delta y)(\Delta z + \Delta^2 z)(\Delta x + \Delta^2 x) \\ & + (x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta z + \Delta^2 z) \\ & + (\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta z + \Delta^2 z)(\Delta x + \Delta^2 x) \end{aligned}$$

e finalmente

$$d^2 V = zy\,d^2 x + z\,dx\,dy + zy\,dx\,dz + xy\,d^2 z + x\,dy\,dz + x\,dz\,dy + xz\,d^2 y + z\,dx\,dy.$$

Ed in questo modo si trovano $d^3 V$, $d^4 V$, &c.

27. Quando sia $y^n = \frac{x^m}{a}$, si trova $x = ay^{\frac{n}{m}}$, e $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{an}{m} y^{\frac{n}{m} - 1} . \frac{ddy}{dt^2} + \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m} - 2} . \frac{dy^2}{dt^2}$. Ma $\frac{an}{m} y^{\frac{n}{m} - 1}$

$= \frac{dx}{dy}$: però $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{ddy}{dt^2} + \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} \frac{dy^2}{dt^2}$ ovvero

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{ddy}{dt^2} = \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} \frac{dy^2}{dt^2}$$

ciò che comunemente si esprime così:

$$\frac{dyddx - dxddy}{dy^2} = \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} dy.$$

Ma $d\left(\frac{an}{m} y^{\frac{n}{m}-1}\right) = \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} dy = d\left(\frac{dx}{dy}\right)$. Perciò $\frac{dyddx - dxddy}{dy^2} = d\left(\frac{dx}{dy}\right)$. In simil maniera si può facilmente dimostrare, che è $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$.

Sia $y^n = (b^2 - a^2 x^m)^2$; similmente si troverà $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, e $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{dyddx - dxddy}{dy^2}$.

28. Se $V = ax^m + bx^r$ si trova $d^2V = max^{m-1} d^2x + m(m-1) ax^{m-2} dx^2 + brx^{r-1} d^2x + br(r-1) x^{r-2} dx^2$. Ma se Δx sarà costante, s' avrà $d^2V = m(m-1) ax^{m-2} dx^2 + r(r-1) bx^{r-2} dx^2$, e $d^3V = m(m-1)(m-2) \times ax^{m-3} dx^3 + r(r-1)(r-2) bx^{r-3} dx^3$; &c.

Sia $V = x^m (a+x)^n$, sarà $V + \Delta V =$

$(x + \Delta x)^m (a + x + \Delta x)^n$. E se Δx è costante, si troverà $\frac{d^2V}{dx^2} = n(n-1) x^m (a+x)^{n-2} + m(m-1) x^{m-2} (a+x)^n + 2mn x^{m-1} (a+x)^{n-1}$ e $\frac{d^3V}{dx^3} = m(m-1)(m-2) x^{m-3} (a+x)^n + n(n-1)(n-2) x^m (a+x)^{n-3} + 3mn(m-1) x^{m-2} (a+x)^{n-1} + 3mn(n-1) x^{m-1} (a+x)^{n-2}$; &c.

CAPO III.

Dei Differenziali delle funzioni circolari.

29. Prima di mostrare come si differenzino i seni, coseni, e le altre funzioni circolari bisogna, che dimostriamo la seguente proposizione.

Fig. 1. Presa una curva qualunque AMZ, e preso in essa un arco Mm che sia la differenza di AM, se da M, ed m si abbassino le ordinate MP, mp sull' asse Ap, e si tiri la corda Mm, questa sarà sempre minore dell' arco, ch' essa sottende. Dunque il rapporto dell' arco Mm a Mq sarà sempre maggiore del rapporto della corda Mm alla stessa Mq; cioè sarà $\frac{\Delta s}{\Delta x} > \frac{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta x}$. Ma se Mq diminuirà, ossia se il punto m s' anderà avvicinando al punto M, questi due rapporti tenderanno ad ugua-

gliarsi l' un l' altro, finchè giunte Δx, Δy, Δs al limite delle loro diminuzioni, si troveranno perfettamente uguali, e quindi $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$, o semplicemente $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, la qual formola oltre al somministrarci il metodo di differenziare le funzioni circolari, sarà da noi nella seconda parte di questo libro applicata alla rettificazione delle curve.

30. Sia *AMB* un semicircolo, in cui l'arco $AM = \varphi$, l' ascissa o senoverso $AP = x$; il seno dell' angolo *ACM*, cioè l' ordinata $PM = y$; il raggio $AC = r$, onde $y^2 = 2rx - x^2$. Quindi ne segue $\frac{dy}{dx} = \frac{r - x}{y}$, e $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(r-x)^2}{y^2}$. Fig. 2.

Abbiamo precedentemente trovato per ogni linea curva $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Però si ha nel cerchio $\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{r^2 - 2rx + x^2}{2rx - x^2}\right)} = \sqrt{\frac{r^2}{2rx - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$.

Ma x è il senoverso dell' angolo φ, e $\sqrt{(2rx - x^2)} = y$ ne è il seno. Perciò è $\frac{d\varphi}{d.\ \text{sen.}\ v.\ \varphi} = \frac{r}{\text{sen.}\ \varphi}$, ovvero $d\varphi = \ldots \frac{r\,d(\text{sen.}\ v.\ \varphi)}{\text{sen.}\ \varphi}$, come d' ordinario si esprime, o

finalmente $\frac{d\varphi.\ \text{sen.}\ \varphi}{r} = d(\text{sen.}\ v.\ \varphi)$.

31. Ma $\cos.\ \varphi = r - \text{sen.}\ v.\ \varphi$, quindi $-d.\cos.\ \varphi = d.\ \text{sen.}\ v.\ \varphi$, e $\frac{d\varphi}{-d\cos.\ \varphi} = \frac{r}{\text{sen.}\ \varphi}$, ciò che comunemente espresso con $d\cos.\ \varphi = -\frac{d\varphi\ \text{sen.}\ \varphi}{r}$ dà questa regola: si trova il differenziale del coseno, se si moltiplica il differenzial negativo dell' arco pel seno, e si divide pel raggio. Tale espressione è impropria. Cercasi la quantità, il cui simbolo si è $\frac{d.\cos.\ \varphi}{d\varphi}$, ossia il limite del rapporto fra le differenze dell' arco, e del suo coseno, e tal quantità trovasi essere $= -\frac{\text{sen.}\ \varphi}{r}$.

32. Abbiamo di sopra trovato $\frac{dy}{dx} = \frac{r - x}{y}$, che si può anche esprimere con $\frac{d.\ \text{sen.}\ \varphi}{d.\ \text{sen.}\ v.\varphi} = \frac{\cos.\ \varphi}{\text{sen.}\ \varphi}$. Ma perchè $\frac{d\varphi}{r.\ d\,\text{sen.}\ v.\ \varphi} = \frac{1}{\text{sen.}\ \varphi}$, quindi $d.\ \text{sen.}\ \varphi = \frac{d\varphi \cos.\ \varphi}{r}$, e ne deriva la regola: Il differenzial del seno è uguale al differenzial dell' arco moltiplicato nel coseno, e questo prodotto diviso pel raggio.

33. Qualora vogliasi trovare il differenziale della tangente d' un arco φ, il cui raggio sia $= r$, è d' uopo ricordarsi, che tang. $\varphi =$

$\frac{r\,\mathrm{sen.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi}$. Se si ponga $\frac{r\,\mathrm{sen.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi} = y$, sarà $r\,\mathrm{sen.}\,\varphi = y\cos.\,\varphi$, e $rd.\mathrm{sen.}\,\varphi = d\varphi\cos.\,\varphi = dy\cos.\,\varphi - \frac{y\,d\varphi\,\mathrm{sen.}\,\varphi}{r}$, onde ne nasce $dy = d\varphi\,\frac{\cos.\,\varphi^2 + \mathrm{sen.}\,\varphi^2}{\cos.\,\varphi^2} = \frac{r^2\,d\varphi}{\cos.\varphi^2}$, cioè $d.\,\mathrm{tang.}\,\varphi = \frac{r^2\,d\varphi}{\cos.\,\varphi^2}$; ciò che suole enunciarsi così: il differenziale della tangente è uguale al prodotto del quadrato del raggio nel differenziale dell'arco, diviso poi pel quadrato del coseno.

34. Il differenziale della cotangente si trova nell' ugual maniera. Cioè si ha $\cot.\,\varphi = \frac{r\cos.\,\varphi}{\mathrm{sen.}\,\varphi}$. Si ponga $\frac{r\cos.\,\varphi}{\mathrm{sen.}\,\varphi} = y$, e sarà $r\cos.\varphi = y\,\mathrm{sen.}\,\varphi$, e $r\,d(\cos.\,\varphi) = yd(\mathrm{sen.}\,\varphi) + dy\,\mathrm{sen.}\,\varphi$; cioè $-\,d\varphi\,\mathrm{sen.}\,\varphi = \frac{y\,d\varphi\cos.\,\varphi}{r} + dy\,\mathrm{sen.}\,\varphi$, ossia $-\,d\varphi\,\mathrm{sen.}\,\varphi - \frac{d\varphi\cos.\,\varphi^2}{\mathrm{sen.}\,\varphi} = dy\,\mathrm{sen.}\,\varphi$, ossia $-\frac{d\varphi\,(\mathrm{sen.}\,\varphi^2 + \cos.\,\varphi^2)}{\mathrm{sen.}\,\varphi^2} = dy$. E finalmente $dy = d.\cot.\,\varphi = -\frac{r^2\,d\varphi}{\mathrm{sen.}\,\varphi^2} = -\frac{d\varphi\,.\,\mathrm{cosec.}\,\varphi^2}{r^2}$.

35. Si ha $\sec.\,\varphi = \frac{r^2}{\cos.\,\varphi}$. Se si fa $\frac{r^2}{\cos.\,\varphi} = y$, sarà $0 = y\,.\,d\cos.\,\varphi + dy\,.\cos.\,\varphi$, ossia $\frac{r\,d\varphi\,\mathrm{sen.}\,\varphi}{\cos.\varphi^2} = dy = d.\sec.\,\varphi$. Dunque $d.\sec.\,\varphi$

$= \frac{d\varphi\,\mathrm{tang.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi} = \frac{d\varphi\,\mathrm{tang.}\,\varphi\,\sec.\,\varphi}{r^2}$.

36. Poichè $\mathrm{cosec.}\,\varphi = \frac{r^2}{\mathrm{sen.}\,\varphi}$, trovasi $d.\,\mathrm{cosec.}\,\varphi = -\frac{d\varphi\cot.\,\varphi}{\mathrm{sen.}\,\varphi} = \frac{-d\varphi\cot.\varphi\,\mathrm{cosec.}\varphi}{r^2}$.

37. A fine di mettere sott' occhio tutte queste formole si è aggiunta la seguente tavola.

Abbiamo

$$d\varphi = \frac{rd.\,\mathrm{sen.}\,v.\,\varphi}{\mathrm{sen.}\,\varphi} \quad \text{e } d.\mathrm{sen.}v.\varphi = \frac{d\varphi\,\mathrm{sen.}\,\varphi}{r}$$

$$d\varphi = \frac{-\,rd.\cos.\,\varphi}{\mathrm{sen.}\,\varphi} \quad \text{e } d\cos.\,\varphi = \frac{-\,d\varphi\,\mathrm{sen.}\,\varphi}{r}$$

$$d\varphi = \frac{r\,d.\,\mathrm{sen.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi} \quad \text{e } d\,\mathrm{sen.}\,\varphi = \frac{d\varphi\cos.\,\varphi}{r}$$

$$d\varphi = \frac{\cos.\,\varphi^2.\,d.\,\mathrm{tang.}\,\varphi}{r^2} \quad \text{e } d.\mathrm{tang.}\varphi = \frac{r^2\,d\varphi}{\cos.\,\varphi^2}$$

$$d\varphi = \frac{r^2 d.\,\mathrm{tang.}\,\varphi}{\sec.\,\varphi^2} \quad \text{e } d.\mathrm{tang.}\varphi = \frac{d\varphi\,.\,\sec.\,\varphi^2}{r^2}$$

$$d\varphi = \frac{-\,\mathrm{sen.}\,\varphi^2 d.\cot.\,\varphi}{r^2} \quad \text{e } d.\cot.\varphi = \frac{-r^2 d\varphi}{\mathrm{sen.}\,\varphi^2}$$

$$d\varphi = \frac{-\,r^2 d.\cot.\,\varphi}{\mathrm{cosec.}\,\varphi^2} \quad \text{e } d.\cot.\varphi = \frac{-d\varphi.\mathrm{cosec.}\varphi^2}{r^2}$$

$$d\varphi = \frac{\cos.\,\varphi\,.\,d.\sec.\,\varphi}{\mathrm{tang.}\,\varphi} \quad \text{e } d.\sec.\varphi = \frac{d\varphi\,\mathrm{tang.}\,\varphi}{\cos.\,\varphi}$$

$$d\varphi = \frac{r^2 d.\sec.\,\varphi}{\mathrm{tang.}\varphi.\sec.\varphi} \quad \text{e } d.\sec.\varphi = \frac{d\varphi\,.\,\mathrm{tang.}\,\varphi\,,\,\sec.\,\varphi}{r^2}$$

$$d\varphi = \frac{-\mathrm{sen.}\varphi.d.\mathrm{cosec.}\varphi}{\cot.\,\varphi} \quad \text{e } d.\mathrm{cosec.}\varphi = \frac{-\,d\varphi\cot.\varphi}{\mathrm{sen.}\,\varphi}$$

$$d\varphi = \frac{-\,r^2 d.\,\mathrm{cosec.}\,\varphi}{\cot.\,\varphi\,\mathrm{cosec.}\,\varphi} \quad \text{e } d.\mathrm{cosec.}\varphi = \frac{-\,d\varphi\cot.\,\varphi\,\mathrm{cosec.}\,\varphi}{r^2}$$

38. Ne' seguenti esempi si suppone il raggio uguale all' unità. Trovasi perciò

$d.\cos.3\varphi = -3d\varphi\,\text{sen}.3\varphi$

$d.\cos.m\varphi = -m\,d\varphi\,\text{sen}.m\varphi$

$d.\cos.\frac{1}{2}\varphi = -\frac{1}{2}d\varphi\,\text{sen}.\frac{1}{2}\varphi$

$d.\text{sen}.m\varphi = m\,d\varphi\cos.m\varphi$

$d.\text{sen}.\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}d\varphi\cos.\frac{1}{2}\varphi$

$d.\text{sen}.\frac{2}{4}\varphi = \frac{2}{4}d\varphi\cos.\frac{2}{4}\varphi$

$$d.(\text{sen}.\varphi.\cos.u) = \cos.u.\,d.\,\text{sen}.\varphi + \text{sen}.\varphi.\,d.\cos.u = d\varphi\cos.\varphi.\cos.u - du\,\text{sen}.u\,\text{sen}.\varphi.$$

$$d.\text{sen}.\varphi^m = m\,\text{sen}.\varphi^{m-1}\,d.\,\text{sen}.\varphi = m\,d\varphi\cos.\varphi\,\text{sen}.\varphi^{m-1}$$

$$d.\text{tang}.m\varphi = \frac{m\,d\varphi}{\cos.m\varphi^2}$$

$$d.\text{tang}.\varphi.\text{tang}.u = \text{tang}.\varphi.\,d.\,\text{tang}.u + \text{tang}.u.\,d.\,\text{tang}.\varphi = \frac{\text{tang}.\varphi\,du}{\cos.u^2} + \frac{\text{tang}.u\,d\varphi}{\cos.\varphi^2}$$

$$d.(\text{tang}.m\varphi)^n = n(\text{tang}.m\varphi)^{n-1}\,d.\,\text{tang}.m\varphi = \frac{m\,n(\text{tang}.m\varphi)^{n-1}\,d\varphi}{(\cos.m\varphi)^2}$$

e così si proceda in tutte le altre formole di questo genere.

CAPO IV.

Dei Differenziali Logaritmici.

39. Se x, y sono due quantità variabili, amendue crescenti, ma in modo che durante il loro incremento abbiano fra se costantemente lo stesso rapporto per es. di $a:b$, e che tali

quantità vadano accostandosi ad altre due quantità costanti A, B in modo, che quando $x=A$, y diventi $=B$; sarà $a:b::A:B$; ossia le quantità A, B avranno fra se quello stesso rapporto, che serbano fra loro costantemente le quantità x, y nel loro rispettivo incremento.

Imperciocchè se $x:y::a:b$, sarà $x=\frac{ay}{b}$. Supponghiamo ora, che x sia cresciuta di tanto, da diventare $=A$; sarà pure $A=\frac{ay}{b}=\frac{aB}{b}$, giacchè nel medesimo tempo anche y è diventata $=B$. Da qui ne siegue $a:b::A:B$

40. Se x ed y durante il loro vicendevole incremento si mantengono costantemente eguali fra se, sarà pure $a=b$, e quindi $A=B$; cioè a dire i Limiti, a cui s' accostano le variabili eguali x ed y, sono in tal ipotesi scambievolmente eguali.

Fig. 3. 41. Sia una curva GF, le cui ascisse Aa, Ab, AB &c siano in progressione aritmetica, e le ordinate AG, ac, bd, &c. in progressione geometrica. Tal curva si chiama Logaritmica, perchè le sue ascisse sono i logaritmi dell' ordinate.

Se si prende il punto A per origine delle ascisse, le ascisse verso AB indicano i logaritmi positivi, quelle a sinistra di A i negativi. Sia l' ordinata $AG=1$, e il logaritmo di questo numero $=0$. Le ordinate ac, bd, &c rappresentano dunque dei numeri interi, nel mentre che le ordinate al di quà di A rappresentano delle vere frazioni. Poichè la curva alla destra di A va sempre più scostandosi dall' asse delle ascisse, e alla sinistra dello stesso punto sempre più vi si avvicina; però tutte le ordinate a sinistra di A diventano sempre più picciole di AG, e conseguentemente diventano porzioni della medesima, e poichè $AG = 1$, esse vengono ad essere parti dell'unità, cioè frazioni proprie.

42. Si possono assumere due Logaritmiche, l'ordinate delle quali seguano la stessa progressione geometrica, ma le cui ascisse formino due fra se diverse progressioni aritmetiche; quindi è chiaro, che qualsisia numero può avere quanti logaritmi si voglia. Si può altresì conservare in amendue le Logaritmiche una sola e medesima progressione aritmetica, ma poi supporre diversa in entrambe la progressione delle ordinate. Dunque ad un sol logaritmo appartengono tanti numeri, quanti si voglia.

43. Sia $\alpha\beta$ una Logaritmica. L'ascissa MC si ponga $= x$, e si supponga che questa cresca della quantità costante Δx, così che le ascisse seguano la progressione x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$, $x + 4\Delta x$, &c. Fig. 4.

Ai punti a, c tirinsi le tangenti Pa, Qc, le quali taglino l'asse MN in P e Q. Si conducano inoltre le ordinate Aa, Cc; con che si può dimostrare, che i segmenti dell'asse racchiusi fra le ordinate e le tangenti, saranno uguali fra se, cioè che sarà $PA = QC$, che è quanto dire, che la sottangente nella Logaritmica è di ugual lunghezza in tutti i di lei punti, ossia ch'ella è costante.

44. Si prenda $AB = CD$, e si guidino le ordinate Bb, Dd, e sarà, attesa la natura della Logaritmica, $Bb : Aa :: Dd : Cc$. Pe' punti c, d, e per a, b si menino le rette dc, e ba, e si

prolunghino, finchè incontrino l'asse in q, e p, e sarà $qD : qC :: Dd : Cc$.

Inoltre $pB : pA :: Bb : Aa$. Conseguentemente $qD : qC :: pB : pA$, e $qD - qC : qC :: pB - pA : pA$, cioè $CD : qC :: AB : pA$. E perchè abbiamo supposto $AB = CD = \Delta x$, sarà altresì $qC = pA$.

Immaginiamoci ora, che il punto D s'accosti al punto C, e il punto B al punto A, ma sempre in modo che le linee CD, AB rimangano fra loro uguali; rimarrà pure uguale il rapporto di $Dd : Bb$ a quello di $Cc : Aa$, e sarà in conseguenza di bel nuovo $qC = pA$. Ma le linee QC, PA sono i limiti, a cui si avvicinano continuamente le linee qC, pA; e perchè queste variabili qC, pA in ogni loro cangiamento si conservano sempre uguali, anche i loro limiti, cioè le sottangenti QC, PA saranno scambievolmente uguali; ossia la sottangente nella Logaritmica è una quantità costante.

45. Sia pertanto $\alpha\beta$ una Logaritmica, la cui sottangente $= a$. Si ha $y\frac{dx}{dy} = a$, e $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y}$, ciò che si suole esprimere così: $dx = \frac{ady}{y}$, e da cui si ha la regola: Si trova il differenziale dell'ascissa nella Logaritmica, se si divida il differenziale dell'ordinata per l'ordinata stessa, e si moltiplichi il quoziente colla sottangente di quella Logaritmica, di cui x ed y sono le coordinate. Ora poichè l'ascissa è il logaritmo dell'ordinata, è chiaro da ciò, come trovar si possa il differenziale d'un logaritmo.

Supposto $a = 1$, otteniamo $dx = \frac{dy}{y}$, e tal supposizione sarà conservata ne' seguenti paragrafi.

46. Qualora sia $x = \log.\ y$, si trova $dx = \frac{dy}{y}$. Così sarà pure $d.\log.\ x = \frac{dx}{x}$; $d\log.(a+x) = \frac{dx}{a+x}$; $d.\log.\left(\frac{a}{a+x}\right) = d[\ \log.\ a - \log.\ (a+x)\ ] = -\frac{d(a+x)}{a+x} = -\frac{dx}{a+x}$.

Inoltre $d.\log.\ \frac{1}{x} = d(\log.1 - \log.\ x) = -\frac{dx}{x}$;

$d.\log.\ x^2 = d(2\log.\ x) = \frac{2dx}{x}$

$d.\log.\ xy = d(\log.\ x + \log.\ y) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$;

$d.\log.\ \frac{x}{y} = d(\log.\ x - \log.\ y) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$

$d.\log.\ \frac{a+x}{a-x} = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$

$d.\log.\ (a^2+x^2) = \frac{d(a^2+x^2)}{a^2+x^2} = \frac{2xdx}{a^2+x^2}$

$d.\log.\sqrt{(a^2+x^2)} = \frac{d\sqrt{(a^2+x^2)}}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{xdx}{a^2+x^2}$

Finalmente $d.\log.\ [x^m(a+bx^n)^p] = d[m\log.\ x + p\log.\ (a+bx^n)] = \frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n}$; &c.

47. Ormai è facile il differenziare certe funzioni nelle quali i seni, coseni, tangenti &c. sono affetti comunque da logaritmi. Se per es. si ha $y = \log.\ \text{sen}.\ \varphi$, sarà $dy = \frac{d\ \text{sen}.\ \varphi}{\text{sen}.\ \varphi}$. Ma

$d.\ \text{sen}.\ \varphi = \frac{d\varphi\cos.\ \varphi}{r}$, però $dy = \frac{d\varphi\cos.\ \varphi}{r.\ \text{sen}.\ \varphi} = \frac{d\varphi\cot.\ \varphi}{r^2}$. Laonde $d.\log.\ \text{sen}.\ \varphi = \frac{d\varphi\cot.\ \varphi}{r^2}$.

Se $y = \log.\ \cos.\ \varphi$, sarà $dy = \frac{d.\cos.\ \varphi}{\cos.\ \varphi} = \frac{-d\varphi\ \text{sen}.\ \varphi}{r\cos.\ \varphi} = \frac{-d\varphi\ \text{tang}.\ \varphi}{r^2} = d.\log.\ \cos.\ \varphi$.

Se $y = \log.\ \text{tang}.\ \varphi$, sarà $dy = \frac{d.\ \text{tang}.\ \varphi}{\text{tang}.\ \varphi} = \frac{r^2 d\varphi}{\text{tang}.\ \varphi\ \cos.\ \varphi^2} = \frac{r\,d\varphi}{\text{sen}.\ \varphi.\cos.\ \varphi} = d.\log.\ \text{tang}.\ \varphi$; &c.

CAPO V.

Dei differenziali delle quantità esponenziali.

48. Chiamansi *Quantità Esponenziali*, quelle che sono elevate ad una potenza, il cui esponente è una quantità variabile. Tali sono b^y, y^t, &c, che sono esponenziali del *prim' ordine*, e b^{y^t}, z^{y^t}, &c. che sono del *secondo*, e così di seguito.

Qualunque quantità, come b^y, si può considerare come l'ordinata d'una Logaritmica, e perchè x può essere la differenza fra quest' ordinata e l'ordinata principale $=1$, perciò si può legittimamente supporre $b^y = 1+x$.

49. Noi qui assumeremo come dimostrate dall' Algebra due famose serie, le quali ci porgeranno i soccorsi per giungere al nostro scopo, la prima delle quali si è quella, che ci presenta il valore del logaritmo iperbolico d' un numero qualunque espresso generalmente da $1 + x$, ed è la seguente: $\log.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \&c.$

La seconda che suol dedursi dalla precedente ci dà il valore d' una quantità esponenziale qualunque, ed è $b^y = 1 + y \log.b + \frac{y^2(\log.b)^2}{2} + \frac{y^3(\log.b)^3}{2.3} + \frac{y^4(\log.b)^4}{2.3.4} + \&c$ intendendo sempre, che si tratti di logaritmi iperbolici, e che la sottangente della logaritmica sia $= 1$. Quindi se sarà e quel numero il cui logaritmo iperbolico $= 1$, sarà pure

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} + \frac{y^5}{2.3.4.5} + ec.$$

50. Sia dunque $z = b^y$. Se y cresce di Δy, anche z crescerà d'una certa quantità, che si suole esprimere con Δz. Trovasi $z + \Delta z = b^{y+\Delta y} = b^y . b^{\Delta y}$, e $\Delta z = b^y . b^{\Delta y} - b^y = b^y (b^{\Delta y} - 1)$. Ma per la seconda delle serie esposte $b^{\Delta y} - 1 = \Delta y \log.b + \frac{\Delta y^2}{2}(\log.b)^2 + \frac{\Delta y^3}{2.3}(\log.b)^3 + \&c$, dal che ne viene $\Delta z = b^y \Delta y \log.b + \frac{b^y \Delta y^2}{2}(\log.b)^2 +$

$\frac{b^y \Delta y^3}{2.3}(\log.b)^3 + \&c$, ovvero $\frac{\Delta z}{\Delta y} = b^y \log.b + \frac{b^y \Delta y}{2}(\log.b)^2 + \frac{b^y \Delta y^2}{2.3}(\log.b)^3 + \&c.$ Se diventa $\Delta y = 0 = dy$, sarà pure $\Delta z = 0 = dz$, e $\frac{dz}{dy} = b^y \log.b$, che d' ordinario si esprime con $dz = b^y dy \log.b$, e per essere $y \log.b$ il logaritmo di b^y ne nasce il canone: Si trova il differenziale d' una quantità esponenziale di prim' ordine, se si moltiplica la medesima pel differenziale del suo logaritmo.

51. Sia ancora $z = y^t$. Crescendo simultaneamente tutte queste variabili si avrà $z + \Delta z = (y + \Delta y)^{t+\Delta t}$, e $\Delta z = (y+\Delta y)^{t+\Delta t} - y^t = (y + \Delta y)^t (y + \Delta y)^{\Delta t} - y^t$.

Ora per giungere all' espressione del rapporto $\frac{\Delta z}{\Delta y}$, e quindi di $\frac{dz}{dy}$ sarebbe d' uopo svolgere in serie i due fattori $(y + \Delta y)^t$, $(y + \Delta y)^{\Delta t}$, l' uno colla formola newtoniana, l' altro coll' ajuto di amendue le serie sopra citate; ma il processo del calcolo è sì lungo e complicato, che giudichiamo meglio d' ometterlo, e dimostrar invece il teorema seguente.

Sia proposta da differenziare la funzione $z = E$, ove E indica una quantità esponenziale di qualunque ordine. Sarà in conseguenza $\log.z = \log.E$, e differenziando (§. 45, 46) $\frac{dz}{z} = \frac{dE}{E}$, ovvero $dE = E\frac{dz}{z} = E . d . \log.E$; cioè qualunque sia E, il suo differenziale sarà sempre uguale al prodotto della stessa E nel differenziale del suo logaritmo; nè v' ha limitazione alcuna alla generalità di questa proposizione.

52. Se fosse pertanto $E = y^t$, sarebbe $dE = y^t d(\log. y^t) = y^t d(t \log. y) = y^t \left(dt \log. y + \frac{t\,dy}{y}\right)$, o meglio $\frac{dE}{dy} = y^t \left(\frac{t}{y} + \log. y . \frac{dt}{dy}\right)$.

Sia inoltre $E = y^{t^u}$, sarà $dE = y^{t^u} d(\log. y^{t^u}) = y^{t^u} d(t^u \log. y)$; e se quest' ultima formola si svolge opportunamente col sussidio del precedente caso, si troverà $\frac{dE}{dy} = y^{t^u} t^u \left[\frac{1}{y} + \frac{u}{t} \log. y . \frac{dt}{dy} + \log. t . \log. y . \frac{du}{dy}\right]$.

Se fosse $y = e$, essendo e quel numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità, sarebbe nel primo caso $\frac{dE}{dt} = e^t$; e se fosse nel secondo $y = t = e$, sarebbe $\frac{dE}{du} = e^{e^u}$; poichè è in nostro arbitrio il dividere dE per dt o per du, piuttosto che per dy, qualora lo porti il caso.

Ormai siamo in istato di differenziare le formole seguenti.

$$d(a^x + y^z) = a^x dx \log. a + y^z \left(\frac{z\,dy}{y} + dz \log. y\right).$$

$$d(a^2 + x^2)^x = (a^2 + x^2)^x . d\,l\,(a^2 + x^2)^x = (a^2 + x^2)^x \left(dx \log. (a^2 + x^2) + \frac{2x^2 dx}{a^2 + x^2}\right); \&c.$$

CAPO VI.

Delle Sottangenti, e Sottonormali.

Fig. 1. 53. Sia AMZ una curva qualunque a coordinate ortogonali. Si ponga l' arco $AM = s$, l' ascissa $AP = x$, l' ordinata $PM = y$. Se l' ascissa verrà ad acquistare l' incremento $Pp = \Delta x$, anche l' ordinata crescerà di $qm = \Delta y$, e l' arco AM di $Mm = \Delta s$. Si conduca la secante mMS, ed al punto M la tangente TM. Per essere il triangolo mMq simile al triangolo MPS sarà $\Delta y : \Delta x :: y : PS$, onde $PS = y \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Ora quanto più il punto m s' accosterà al punto M, tanto più il rapporto di $MP : PS$ s' accosterà al rapporto di $MP : PT$, e tanto più la sottosecante PS alla sottangente PT; onde se il punto m coinciderà col punto M, cioè se diventerà $\Delta x = 0 = dx$, $\Delta y = 0 = dy$, la sottosecante si confonderà colla sottangente, e si avrà $PT = y \frac{dx}{dy}$, formola generale, nella quale sostituito a $\frac{dx}{dy}$ il suo valore cavato dall' equazion differenziale della curva proposta, s' avrà l' espressione della sottangente.

Nella Parabola, in cui $y^2 = ax$, si trova $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$, e $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x =$ alla sottangente.

Quando sia, come nell' Ellisse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, sarà $\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x}$, e $\frac{y dx}{dy} = -\frac{a^2 y^2}{b^2 x} = -\frac{a^2}{x} + x = x - \frac{a^2}{x}$.

54. Al punto M della secante MS si conduca la perpendicolare MR, e la perpendicolare MK alla tangente MT; con che MK sarà la Normale, e PK la Sottonormale. Abbiamo l' analogia $mq : Mq :: PM : PS$. Ma per essere il triangolo MPS, simile al triangolo MPR, si ha $MP : PS :: PR : MP$ e quindi ancora $mq : Mq :: PR : MP$, ossia $\Delta y : \Delta x :: PR : y$, d' onde $PR = \frac{y \Delta y}{\Delta x}$.

Ma quanto più il punto m s' avvicina al punto M, tanto più anche il punto R s' avvicina a K, e quando m cade sopra M, cioè quando $\Delta x = 0 = dx$, e quindi anche $\Delta y = 0 = dy$, allora PR si confonde colla sottonormale $PK = \frac{y dy}{dx}$, che è l' espression generale della sottonormale nelle curve, le cui coordinate sono vicendevolmente perpendicolari. Nella Parabola è $y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} a$, e nell' Ellisse $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, e $y \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2}$.

Da questa formola si può facilmente determinare la normale MK. Nella Parabola per es. sarà $MK = \sqrt{(ax + \frac{1}{4} a^2)}$. ec.

55. Facciamo di passaggio un' osservazione su i rapporti $\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dy}$. Se si prolunga la tangente

TM fino all' incontro in N coll' ordinata pm prodotta, risulterà l' angolo $Nmq = MTP$, onde si avrà l' analogia $Mq : Nq :: PT : PM :: 1 : \text{tang.} NMq$. ossia $y \frac{dx}{dy} : y :: 1 : \text{tang.} NMq$, onde $\frac{dy}{dx} = \text{tang.} NMq = \text{tang.} MTP$; cioè $\frac{dy}{dx}$ esprime la tangente dell' angolo formato dalla curva (che è quanto dire dalla sua tangente in un punto qualunque) coll' asse. Similmente si mostrerebbe essere $\frac{dx}{dy}$ la tangente dell' angolo formato dalla curva coll' ordinata corrispondente. E perchè $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è la tangente dell' angolo formato dalla corda Mm colla perpendicolare Mq, si vede ancora, che il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è minore del rapporto $\frac{dy}{dx}$.

CAPO VII.

Del Massimo o Minimo valore d' una funzione.

56. Una delle più interessanti e più belle applicazioni del Calcolo Differenziale si è il metodo di determinare il *Massimo* o il *Minimo* valore d' una funzione. Il vantaggio d' un tal metodo s' estende a tutte le parti della Matematica, e con esso si sono fatte delle scoperte delle

più interessanti. Ma prima di esporre una tal teoria, ci è d'uopo di premettere un teorema, senza di cui quella non potrebbe trattarsi fondatamente.

57. Sia y una funzione di x, e si supponga che mentre y diventa successivamente $y+\Delta y$, $y+\Delta y+\Delta(y+\Delta y)$, ossia $y+2\Delta y+\Delta^2 y$, &c, x acquisti sempre l'aumento costante Δx. Quindi diventando

x,	y diventerà
$x+\Delta x$	$y+\Delta y$
$x+2\Delta x$	$y+2\Delta y+\Delta^2 y$
$x+3\Delta x$	$y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y$
$x+4\Delta x$	$y+4\Delta y+6\Delta^2 y+4\Delta^3 y+\Delta^4 y$
$x+n\Delta x$	$y+n\Delta y+\frac{n.n-1.}{2}\Delta^2 y+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}.\Delta^3 y + \ldots\ldots + \Delta^n y$

Se dunque si chiami Y ciò che diviene y, allorchè x è diventata $x+n\Delta x$, sarà $Y = y+n\Delta y+\frac{n.n-1}{2}.\Delta^2 y+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}.\Delta^3 y + \ldots\ldots, +\Delta^n y$.

Questa serie si trasformi nella seguente

$$Y = y+n\Delta x.\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{n.n-1}{2}.\Delta x^2.\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}+\frac{n.n-1.n-2.}{2.3}\Delta x^3.\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}+\&c\,;$$

indi posta $n=\frac{1}{m}$, s'avrà di nuovo

$$Y = y+\frac{\Delta x}{m}.\frac{\Delta y}{\Delta x}+\left(\frac{\Delta x^2}{2m^2}-\frac{\Delta x}{2m}.\Delta x\right)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}+\left(\frac{\Delta x^3}{2.3m^3}-\frac{\Delta x^2}{2m^2}.\Delta x+\frac{\Delta x}{3m}.\Delta x^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}+\text{ec.}$$

Questa formola è sempre vera, qualunque sia il valore di Δx; ma allorchè $\Delta x = 0 = dx$, sarà altresì $\Delta y = 0 = dy$, onde $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=\frac{d^3 y}{dx^3}$, &c.; inoltre è in nostro arbitrio di supporre, che diminuendo continuamente Δx, ed m, si abbia simultaneamente $\Delta x = 0$, $m = 0$. Chiamiamo pertanto q ciò che allora diviene $\frac{\Delta x}{m}$, e sarà q come Δx una quantità costante.

Ciò posto, se nell'ultimo valore di Y invece di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ &c. si sostituisca $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, &c, e invece di $\frac{\Delta x}{m}$, $\frac{\Delta x^2}{m^2}$, $\frac{\Delta x^3}{m^3}$, q, q^2, q^3, &c; e si cancellino que' termini che restano tuttora moltiplicati per Δx, Δx^2, Δx^3, &c, la formola diverrà

$$Y = y+q.\frac{dy}{dx}+\frac{q^2}{2}.\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{q^3}{2.3}.\frac{d^3 y}{dx^2}+\frac{q^4}{2.3.4}.\frac{d^4 y}{dx^4}+\&c.$$

Per maggior generalità chiamiamo Y ciò che diventa y, allorchè x si cangia in $x \pm q$; è chiaro che avremo

$$Y = y \pm q.\frac{dy}{dx}+\frac{q^2}{2}.\frac{d^2 y}{dx^2}\pm\frac{q^3}{2.3}.\frac{d^3 y}{dx^3}+\frac{q^4}{2.3.4}.\frac{d^4 y}{dx^4}\pm\text{ec.}\,*$$

(*) Questa famosa serie, che dal suo inventore,

58. Premesse tali osservazioni passiamo ormai al nostro argomento.

Qualunque volta una funzione di x cresce fino a un certo grado, al di là del quale torna a decrescere di bel nuovo, tal funzione ha acquistato il suo massimo valore. Essa pertanto dee essere di tal indole, che, se in lei in luogo di x si ponga $x + q$, ovvero $x - q$, dee nascere in amendue i casi un valore più picciolo, quantunque q possa essere picciola, quanto si voglia. In questo caso si dice, che vi ha un *Massimo*. Ma se la funzione decresce fino ad un certo valore della x, poi di nuovo ricresca, dicesi aver essa acquistato un valor minimo, ovvero esserci un *Minimo*. Se si introducono anche per questo caso le precedenti sostituzioni, sì l'una, che l'altra produrranno de' valori più grandi.

Le ordinate nel cerchio e nell' Ellisse vanno crescendo, finchè quelle s'uguagliano al raggio, queste al semiasse minore. Al di là di questi punti le ordinate di amendue le curve tornano a diminuire: tal sarebbe l' esempio pel primo caso, cioè pel Massimo. Al secondo servano d' esempio le equazioni $x^2 - 2x + 3 = y$, e $x^2 - 10x + 60 = y$. Imperciocchè se si pone nella prima equazione $x = 1$, sarà $y = 2$. Se si ponga invece di x un numero più grande, o anche più picciolo, si troverà in amendue i casi un valor più grande per y. Lo stesso succede nella seconda equazio-

---

di Taylor si chiama, è di un uso frequente, e noi aggiungeremo in fine dell' Opera la dimostrazione della stessa estesa dal P. Fontana al numero di tre e più variabili, la quale per la sua generalità merita di esse-

ne. Si ponga in essa $x = 5$, e sarà $y = 35$: ogn' altro valore di x induce in y un valor più grande.

59. Noi additeremo in questo Capo come ritrovar si possa il massimo, o minimo valore d'una funzione, e d'onde si possa conoscere, se il valor ritrovato sia il massimo, o il minimo di essa; ma limitiamo soltanto le nostre ricerche a quelle funzioni, in cui un valore di x appartiene ad un valore di y.

60. Qualora sia y una funzione uniforme della x, si trova nel modo seguente, se tal funzione abbia un valore massimo o minimo. Se in luogo di x si sostituisce $x + q$, la funzione y si cangia nella seguente $y + q\frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{q^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{q^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{d^5y}{dx^5} + \&c$, e se pongasi $x - q$ invece di x, la y si cangerà in $y - q\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{q^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{q^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{d^5y}{dx^5} + \&c.$

61. Nel caso pertanto che y sia un Massimo, è d'uopo che sia $y > y + q.\frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{q^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{q^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{d^5y}{dx^5} + \&c$, e nel tempo stesso $y > y - q.\frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{q^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$

$$+\frac{q^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{q^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{d^5y}{dx^5}+\&c.$$

62. Ma se y è un Minimo, dovrà essere $y < y+q.\frac{dy}{dx}+\frac{q^2}{1.2}.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{q^4}{1.2.3.4}.\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{q^5}{1.2.3.4.5}.\frac{d^5y}{dx^5}+\&c$, e altresì $y < y-q.\frac{dy}{dx}+\frac{q^2}{1.2}.\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{q^4}{1.2.3.4}.\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{q^5}{1.2.3.4.5}.\frac{d^5y}{dx^5}+\&c.$

63. La quantità q si può supporre tanto picciola, che la somma de' termini $\frac{q^2}{1.2}.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}+\&c.$ consecutivi dopo il secondo sia più picciola del secondo termine. Se dunque $\frac{dy}{dx}$ è simbolo d'una quantità positiva, la serie $y+q.\frac{dy}{dx}+\frac{q^2}{1.2}.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}+\&c.$ sarà incontrastabilmente maggiore di y. Ma la seconda serie $y-q.\frac{dy}{dx}+\frac{q^2}{1.2}.\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}+\&c.$ sarà minore di y.

Se poi $\frac{dy}{dx}$ indicherà una quantità negativa, si avranno le due serie

$$y-q.\frac{dy}{dx}-\frac{q^2}{1.2}.\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}-\&c.$$

$$y+q.\frac{dy}{dx}-\frac{q^2}{1.2}.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}-\&c.$$

delle quali la prima è minore di y, maggiore la seconda, poichè si può supporre q tanto picciola, che la somma de' termini dopo il secondo sia più picciola di questo secondo termine. Da ciò è chiaro, che y non sarà nè un Massimo, nè un Minimo, fin tanto che $\frac{dy}{dx}$ esprime un' effettiva quantità.

64. Ma se la quantità rappresentata da $\frac{dy}{dx}$ è zero, ciò che si dinota col porre $\frac{dy}{dx}$ uguale a zero; e se $\frac{d^2y}{dx^2}$ rappresenta una quantità o positiva, o negativa, se ne ottengono le due serie

$$y\pm\frac{q^2}{1.2}.\frac{d^2y}{dx^2}\pm\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}\pm\frac{q^4}{1.2.3.4}.\frac{d^4y}{dx^4}\pm\&c.$$

$$y\pm\frac{q^2}{1.2}.\frac{d^2y}{dx^2}\mp\frac{q^3}{1.2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}\pm\frac{q^4}{1.2.3.4}.\frac{d^4y}{dx^4}\mp\&c.$$

Se q sarà nuovamente considerata così picciola, che la somma de' termini, che vengono in seguito al termine $\frac{q^2}{2}.\frac{d^2y}{dx^2}$, sia più picciola di questo termine medesimo, allora amendue le serie saranno maggiori di y, purchè $\frac{d^2y}{dx^2}$ dinoti una quantità positiva; e in tal caso la funzione y avrà un valor minimo.

Se poi $\frac{d^2y}{dx^2}$ indicherà una quantità negativa, le due serie saranno minori di y, cioè sarà y un Massimo.

65. Ma sia ancora la quantità, che viene espressa da $\frac{d^2y}{dx^2}$, eguale a zero, ciò che si dinota col porre $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, per cui si ottiene

$$y \pm \frac{q^3}{2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} \pm \frac{q^4}{2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} \pm \frac{q^5}{2.3.4.5}\cdot\frac{d^5y}{dx^5} \pm \&c.$$

$$y \mp \frac{q^3}{2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} \pm \frac{q^4}{2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} \mp \frac{q^5}{2.3.4.5}\cdot\frac{d^5y}{dx^5} \pm \&c.$$

sarà perciò la prima serie maggiore di y, minore la seconda, sempre che $\frac{d^3y}{dx^3}$ dinoti una quantità positiva.

Ma se $\frac{d^3y}{dx^3}$ esprime una quantità negativa, sarà la prima serie minore, e la seconda maggiore di y; avvegnachè si può supporre q tanto picciola, che la somma de' termini dopo il termine $\frac{q^3}{2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ sia minore di questo termine stesso. Non avrà pertanto la funzione in entrambi i casi nè un massimo, nè un minimo valore.

Qualora sia $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, ma $\frac{d^4y}{dx^4}$ dinoti effettivamente una quantità, allora le due serie saranno maggiori di y, purchè $\frac{d^4y}{dx^4}$ sia positiva; e minori amendue di y, se $\frac{d^4y}{dx^4}$ sia negativa; poichè si può prendere q tanto picciola, che la somma de' termini dopo $\frac{q^4}{2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}$ sia minore di questo termine medesimo.

Se $\frac{d^4y}{dx^4}$ rappresenti una quantità positiva, la funzione y sarà un Minimo, sarà poi un Massimo, se $\frac{d^4y}{dx^4}$ rappresenti una quantità negativa.

66. Da queste riflessioni, che senza alcuna difficoltà si possono estendere a più termini ancora, se ne deducono questi corollarj. Quando la funzione debba aver il valor massimo, o minimo, la quantità indicata con $\frac{dy}{dx}$ dee essere uguale a zero.

Se poi $\frac{d^2y}{dx^2}$ dà una quantità positiva, y è un Minimo; ma se $\frac{d^2y}{dx^2}$ dà una quantità negativa, y è un Massimo.

Se $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, e per l'opposto $\frac{d^3y}{dx^3}$ è qualche cosa, non vi ha nè Massimo, nè Minimo, benchè sia $\frac{dy}{dx}=0$. Da ciò è evidente, che non ogni volta, che sia $\frac{dy}{dx}=0$, ha luogo un Massimo, ovvero un Minimo; ma che dee essere $\frac{dy}{dx}=0$, acciò possa esserci o il Massimo o il Minimo.

Quando $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, ma $\frac{d^4y}{dx^4}$ è positiva, y è un Minimo; un Massimo se $\frac{d^4y}{dx^4}$ è negativa.

Il criterio per assicurarsi del Massimo si è, se $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, o generalmente $\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}$ sia una quantità negativa, ove $2m$ esprime qualunque numero pari; il criterio pel Minimo è, quando $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, o generalmente $\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}$ sia una quantità positiva.

67. L' artifizio pertanto, con cui si determina il massimo, o il minimo valore d' una funzione, consiste nel differenziare la data funzione, e nell' uguagliare a zero la quantità espressa da $\frac{dy}{dx}$, indi da quest' equazione determinare il valore della x.

Comunemente si usa di dire, che per trovare il Massimo o il Minimo d' una funzione, si deve porre il di lei differenziale $= 0$. Ma ciò induce la falsa idea, che il differenziale d' una quantità non sia realmente e per se stesso uguale a zero, ma si debba supporlo soltanto per la ricerca del Massimo o del Minimo. Però io dico espressamente, che si deve porre a tal effetto $\frac{dy}{dx} = 0$, ma non mai nè $dx = 0$, nè $dy = 0$.

68. A porre in miglior luce questo metodo si sono annessi quegli esempi sì geometrici

che analitici, che ci son sembrati più opportuni,

Sia proposto da prima il Problema: Spezzare un dato numero a in due parti tali, che il prodotto di queste parti diventi un Massimo. Sia x una di tali parti, $a - x$ l' altra; e il loro prodotto $= ax - x^2 = y$. Perciò $\frac{dy}{dx} = 0 = a - 2x$, e $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, che è una quantità negativa. Tale funzione adunque ha un valor massimo, e questo ha luogo, quando $x = \frac{1}{2}a$. Laonde $ax - x^2 = \frac{1}{4}a^2$. Dunque il massimo prodotto delle parti x, ed $a - x$ del numero a è il quadrato della sua metà.

69. Questo problema si può proporre più generalmente così: Debbasi spezzare una data quantità a in due parti tali, che il prodotto d' una certa potenza dell' una nella stessa o in un' altra potenza della seconda diventi un Massimo. Sia x una delle parti, ed m l' esponente della potenza, a cui viene alzata. Sarà dunque la seconda parte $a - x$, e supposto n l' esponente della sua potenza, il prodotto delle due parti sarà $x^m(a-x)^n = y$; d' onde ne siegue $\frac{dy}{dx} = -nx^m(a-x)^{n-1} + mx^{m-1}(a-x)^n = 0$, e $mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$, ossia $m(a-x) = nx$, e finalmente $\frac{ma}{m+n} = x$.

70. Se dopo aver determinato un Massimo o un Minimo col valore ritrovato della variabile, lo stesso Massimo o Minimo risulta negativo; ciò vuol dire, che quello non appar-

tiene al caso in questione, ma bensì al caso direttamente opposto, ove hanno luogo le stesse condizioni, ma in senso contrario.

Fig. 5. Debbasi per es. dividere la retta AB in un punto C in modo, che il quadrato di AC diviso pel segmento BC dia il quoto minimo possibile. Sia la data retta $AB = a$, $AC = x$, e $BC = a - x$, e il quoto $\frac{x^2}{a - x} = y$, onde ne segue $(2a - x)x = 0$. Ciò dà tanto $x = 0$, quanto $x = 2a$. Se questo secondo valore si ponga in $\frac{x^2}{a - x}$, questo quoziente si converte in $- 4a$; onde il Minimo non appartiene al caso presente. Se si consideri più attentamente l'espressione $x = 2a$, si vede, che il punto C non può cadere tra A, e B, ma che la quistione può soltanto risolversi, allorchè il punto C cada al di là di B sul prolungamento della AB. Cioè se $AC' = x$, BC non sarà più $= a - x$, ma bensì $= x - a$, e il quoziente $= \frac{x^2}{x - a}$. Ne viene però in conseguenza $x^2 - 2ax = 0$, ossia $x = 2a$, e questo valore sostituito nella formola dà $4a$, che è il quoto minimo, che ottener si possa dividendo $4a^2$ per a.

Fig. 6. 71. Si debba fra tutte le linee, che si possono tirare per un dato punto D dell'angolo ABC, determinare la posizione di quella, la quale formi co' lati di quest'angolo il minimo triangolo possibile.

Per il punto D si conduca la retta DG parallela ad AB, e per lo stesso punto si conduca come piace la retta EF. Sopra BC si cali

il perpendicolo DK, e dal punto E, ove si tagliano le due EF, AB, si cali il perpendicolo EL. Le linee BG, DK si suppongono note. Però sia $BG = a$, $DK = b$, e $BF = x$.

Dalla similitudine de' triangoli BEF, GDF si ha $GF : DF :: BF : EF$ e dalla similitudine degli altri triangoli DFK, ELF si ha $DF : EF :: DK : EL$, ossia $GF : BF :: DK : FL$, cioè $x - a : x :: b : EL = \frac{bx}{x - a}$. L'area del triangolo $BEF = \frac{bx}{x - a} \cdot \frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2} bx^2}{x - a}$; e fatto questo valore $= y$, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2} bx^2 - bax}{(x - a)^2} = 0$, onde si ricava $x = 2a$. Se pertanto prendasi $BF = 2a = 2BG$, la retta FDE, che passa pe' punti D ed F, racchiude cogli altri due lati il minimo triangolo possibile.

72. Fra tutti i triangoli di ugual perimetro, e di ugual base, determinar quello, che ha la massima superficie.

Sia $AB = a$, e il perimetro del triangolo
7. $ABC = c$. Si abbassi la perpendicolare CP, e si ponga $AP = x$, $CP = y$, e sarà pure $PB = a - x$; $AC = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, e $CB = \sqrt{(a^2 - 2ax + x^2 + y^2)}$. Quindi si ha $\sqrt{(x^2 + y^2)} + \sqrt{(a^2 - 2ax + x^2 + y^2)} + a = c$, ovvero $\sqrt{(x^2 + y^2)} + \sqrt{(a^2 - 2ax + x^2 + y^2)} = c - a$, dalla qual' equazione si trova $y^2 = \frac{c^4 - 4ac^3 + 4a^2c^2 + 4ac^2x - 4c^2x^2 - 8a^2cx + 8acx^2}{4a^2 + 4c^2 - 8ac}$.

La superficie del triangolo è $\frac{ay}{2}$, e se $\frac{ay}{2}$ è un Massimo, sarà pure un Massimo $\frac{a^2y^2}{4}$.

Ma è $\frac{a^2y^2}{4} = (a^2c^4 - 4a^3c^3 + 4a^4c^2 + 4a^3c^2x - 4a^2c^2x^2 - 8a^4cx + 8a^3cx^2) : (16a^2 + 16c^2 - 32ac)$; onde praticato il metodo de' Massimi, si trova $4a^3c^2 - 8a^2c^2x - 8a^4c + 16a^3cx = 0$. Quest' equazione ridotta alla minima espressione ci dà $x = \frac{1}{2}a$. E però il triangolo ricercato è isoscele.

Si conduca una perpendicolare sul mezzo della AB, e dal punto B con raggio $= \frac{c-a}{2}$ si descriva un arco, il quale tagli la perpendicolare medesima nel punto C; indi tirate le rette CB, e CA, si ottiene il triangolo ABC, il quale fra tutti i triangoli di ugual perimetro, e di ugual base ha la superficie massima.

73. Generalmente, quando fra tutti i triangoli di ugual contorno si debba cercar quello, che ha la superficie massima, si osservi, che dee sempre essere $AP = x = \frac{1}{2}a$. Per lo che si ha $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + y^2)} = c - a$, e $y = \sqrt{\left(\frac{c^2 - 2ac}{4}\right)}$. E poichè questo fra tutti i triangoli di ugual contorno ha la massima superficie, deesi differenziare $\frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{c^2 - 2ac}{4}\right)} = \frac{ay}{2}$ in modo che si consideri la sola a come variabile; ciò che ci dà $\sqrt{(c^2 - 2ac)} - \frac{ac}{\sqrt{(c^2 - 2ac)}} = 0$, ossia $c^2 - 3ac = 0$, e finalmente $a = \frac{1}{3}c$.

Dall' avere precedentemente trovato $x = \frac{1}{2}a$, ed ora $a = \frac{1}{3}c$ ne risulta, che il triangolo dee essere equilatero. Dunque tra tutti i triangoli, che hanno lo stesso perimetro, l' equilatero è quello, che racchiude la massima superficie.

74. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli di ugual solidità b^3, e di cui uno de' lati della base sia a, trovar quello, che ha la minima superficie.

Pongasi x l' altro lato della base, onde sarà la superficie di essa $= ax$. Sia y l' altezza, e sarà $axy = b^3$, e $y = \frac{b^3}{ax}$. Se si moltiplichi quest' altezza prima per a, indi per x, si avranno due prodotti, la somma de' quali uguaglierà la metà di tutta la superficie laterale, e quindi la superficie intera $2ax + \frac{2b^3}{x} + \frac{2b^3}{a} =$ Min. Dopo la differenziazione si trova $a = \frac{b^3}{x^2}$, e $x = \sqrt{\frac{b^3}{a}}$, e quindi $y \left(= \frac{b^3}{ax}\right) = \sqrt{\frac{b^6}{a^2x^2}} = \sqrt{\frac{b^3}{a}}$. Laonde il parallelepipedo in quistione avrà un lato della base $= a$, e l' altro lato ugual all' altezza $= \sqrt{\frac{b^3}{a}}$.

75. Si procede similmente per risolvere il seguente problema. Fra tutti i cilindri retti di ugual superficie b^2 determinare il massimo in capacità.

Se x è il diametro della base, y l' altezza del cilindro, posto $1 : c$ il rapporto del diametro alla periferia, la superficie di esso comprese ambedue le basi sarà $= cxy + \frac{cx^2}{2} = b^2$.

La capacità del cilindro, cui chiamo v sarà $= \frac{cx^2y}{4}$. Dunque per essere $cxy = b^2 - \frac{cx^2}{2}$, sarà $v = \frac{b^2x}{4} - \frac{cx^3}{8} =$ Mass. Dunque $\frac{dv}{dx} = \frac{b^2}{4} - \frac{3}{8}cx^2 = 0$, e $x^2 = \frac{2b^2}{3c}$. Ma per essere dalla primiera equazione $y = \frac{b^2}{cx} - \frac{x}{2}$, e perciò $y^2 = \frac{b^4}{c^2x^2} - \frac{b^2}{c} + \frac{x^2}{4}$, sostituendo il valor ritrovato di x^2, si trova facilmente $y^2 = \frac{2b^2}{3c}$, onde $x = y$. Laonde fra tutti i cilindri di ugual superficie, quello ha la massima capacità, l'altezza del quale s'uguaglia al diametro della base.

Il Problema inverso, di trovare cioè fra tutti i cilindri di ugual solidità a^3 quello che ha la minima superficie, non contando però che una delle sue basi, si risolve così. Chiamando come sopra x il diametro della base, y l'altezza del cilindro, sarà la superficie cercata $= cxy + \frac{cx^2}{4}$. Ma per essere la capacità $a^3 = \frac{cx^2}{4}y$, e quindi $y = \frac{4a^3}{cx^2}$, la superficie, che chiamo s sarà $= \frac{4a^3}{x} + \frac{cx^2}{4} =$ Min.; onde $\frac{ds}{dx} = -\frac{4a^3}{x^2} + \frac{1}{2}cx = 0$, la qual

equazione ci dà $x = \frac{2a}{\sqrt[3]{c}}$, onde $y \left(= \frac{4a^3}{cx^2}\right) = \frac{a}{\sqrt[3]{c}}$, e però $x : y :: \frac{2a}{\sqrt[3]{c}} : \frac{a}{\sqrt[3]{c}} :: 2:1$; cioè l'altezza del cilindro di minima superficie deve uguagliarsi al semidiametro della base.

Dunque ne' mortai di camera cilindrica, la cui altezza sia uguale al semidiametro della base, la polvere agisce il meno possibile contro le pareti laterali della camera.

76. Cercasi ora il massimo in solidità fra tutti i cilindri iscrivibili in un dato cono retto.

Sia rappresentato il cono proposto dal triangolo ABC, che passa pel suo vertice e pel diametro della base, e sia il diametro $BC = 2b$, l'altezza $AD = a$. Indi si tiri per un punto qualunque F la MN parallela a BC, e da' punti M, N si calino le normali MP, NR sulla base BC, e supponiamo che il rettangolo $MPRN$ sia quello, che passando per l'asse sega il cilindro cercato per metà. Sia $PM = y$, $BP = x$. Per i triangoli simili ABD, MBP sarà $AD : BD :: PM : BP$, ovvero $a : b :: y : x$; e quindi $y = \frac{ax}{b}$. Sarà poi il diametro PR della base del cilindro cercato $= 2PD = 2(b - x)$, e posto $1 : c$ il rapporto del diametro alla circonferenza, $2c(b - x)$ sarà la circonferenza della base cilindrica, e $c(b - x)^2$ ne sarà l'area, e finalmente la solidità, cui chiamo $s = \frac{ac}{b}x(b - x)^2 = acbx - 2acx^2 + \frac{acx^3}{b} =$ Mass.; e $\frac{ds}{dx} = acb - 4acx + \frac{3acx^2}{b} = 0$;

ordinando quest' ultima equazione si ha $x^2 - \frac{4}{3}bx + \frac{1}{3}b^2 = 0$, dalla quale si hanno due valori per x, cioè $x = b$, $x = \frac{1}{3}b$, de' quali non ha luogo che il secondo; giacchè se ponghiamo il primo nell' espressione del diametro della base cilindrica, essa diventa $= 0$. Per lo contrario facendo uso del secondo, troviamo il diametro $= 2(b - x) = 2(b - \frac{1}{3}b) = \frac{2}{3}.2b$ $= \frac{2}{3}BC$, e l' altezza $y = \frac{ax}{b} = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}AD$.

Se si prenda pertanto sull' altezza AC una porzione $AF = \frac{1}{3}AD$, e pel punto F si meni la parallela MN alla BC, questa determinerà i punti M, N ne' lati del triangolo, da' quali abbassate le perpendicolari MP, NR, verrà formato il rettangolo $MPRN$, da cui è facile il passaggio al cilindro.

77. Aggiungiamo un problema puramente numerico. Domandasi qual è quel numero x, la cui radice di grado x è un Massimo?

Si ha tosto $\sqrt[x]{x}$, ossia $x^{\frac{1}{x}} = y =$ Mass.,

onde $d.x^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}\, d.\log.x^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}}\, d.\frac{1}{x}\log.x$ $= dy$. Sviluppiamo colle regole date questo differenziale, e sarà $x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{dx}{x^2} - \frac{dx}{x^2}\log.x\right) = dy$,

$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1 - \log.x}{x^2}\right) = 0$, la qual equazione dà $\log.x = 1 = \log.e$, ed $x = e$, essendo e la base de' logaritmi iperbolici.

78. Per mostrare più generalmente l' uso della teoria stabilita di sopra, prendiamo ad

esaminare quale debba essere il valore di x, acciò la funzione generale $(x - a)^n = y$ diventi un Massimo, ovvero un Minimo.

Sia primieramente $n = 1$, e sarà $x - a$ $= y$, e $\frac{dy}{dx} = 1$, onde $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Dunque nel caso di $n = 1$ la funzione proposta non sarà mai nè un Massimo, nè un Minimo.

Sia $n = 2$, cioè $(x - a)^2 = y$, e $\frac{dy}{dx} =$ $2(x - a) = 0$, onde $x = a$, e $\frac{ddy}{dx^2} = 2$; quindi sostituendo a in luogo di x nella funzione $(x - a)^2$, questa diverrà un Minimo.

Sia $n = 3$, e $(x - a)^3 = y$, e però $\frac{dy}{dx}$ $= 3(x - a)^2 = 0$, e quindi $x = a$; ma $\frac{ddy}{dx^2}$ $= 2.3(x - a) = 2.3(a - a) = 0$. Dunque non si può conchiuder nulla, e bisogna procedere alla terza differenza. Ora $\frac{d^3y}{dx^3} = 2.3$, e $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$. Pertanto si raccoglie con sicurezza, che $(x - a)^3$ non può mai essere nè un Massimo, nè un Minimo.

Se $n = 4$, avremo $(x - a)^4 = y$; $\frac{dy}{dx}$ $= 4(x - a)^3 = 0$, e $x = a$; $\frac{ddy}{dx^2} =$ $3.4(x - a)^2 = 3.4(a - a)^2 = 0$. Manca dunque il criterio opportuno, e perciò è d' uopo passare ad un' ulterior differenziazione. Si ha pertanto $\frac{d^3y}{dx^3} = 2.3.4(x - a) = 0$, da cui $x = a$, e $\frac{d^4y}{dx^4} = 2.3.4$; e perciò $(x-a)^4$ sarà un Minimo.

Poniamo ancora $n = 5$, onde $(x - a)^5 = y$, e $\frac{dy}{dx} = 5(x - a)^4 = 0$, da cui si ha di nuovo $x = a$, e $\frac{ddy}{dx^2} = 4.5(x - a)^3 = 0$. Non potendo nulla conchiudere; andiam più oltre. Abbiamo $\frac{d^3y}{dx^3} = 3.4.5(x - a)^2 = 0$, onde ancora $x = a$, e $\frac{d^4y}{dx^4} = 2.3.4(x - a) = 2.3.4(a - a) = 0$. Siamo quindi di bel nuovo alla necessità di indagare i differenziali successivi. Procedendo dunque avanti si trova $\frac{d^5y}{dx^5} = 2.3.4.5$, e $\frac{d^6y}{dx^6} = 0$; per lo che la funzione $(x - a)^5 = y$ non potrà mai essere nè un Massimo, nè un Minimo.

Dall' andamento di queste operazioni, che si ponno continuare ad arbitrio, se ne raccoglie generalmente, che la funzione $(x - a)^n = y$ non sarà mai nè un Massimo, nè un Minimo, ogni qual volta n sia dispari, ma potrà bensì esser soltanto un Minimo, qualora n sia pari.

79. Quando le indeterminate di un problema sieno più di una, si deve osservare generalmente, che la soluzione de' problemi di tal natura si agevola moltissimo coll' assumere

da principio un numero più picciolo di variabili, poi a poco a poco considerar come tali quelle quantità, che da prima si prendevano come costanti. Se per es. devesi spezzare un dato numero in tre parti tali, che il prodotto di queste parti sia un Massimo, si proceda, come segue.

Se a è il numero dato, x, y due delle parti in cui si vuol separare, sarà $a - x - y$ la terza parte, e il prodotto di tutte e tre sarà $axy - x^2y - xy^2$. Ora invece di considerare x ed y come variabili, non considero al presente come tale che la sola x. Quindi ritrovo $ay - 2xy - y^2 = \frac{1}{4}y(a - y)^2$. Adesso differenzio per rapporto alla sola y, ed ottengo $\frac{1}{4}(a - y)^2 - \frac{2}{4}y(a - y) = 0$, da cui trovo $y = \frac{1}{3}a$. Laonde i tre fattori sono tutti uguali fra se, e ciascuno $= \frac{1}{3}a$.

80. Per esercizio de' Principianti si aggiunge una serie di problemi tratti da diversi Autori, e le cui soluzioni si troveranno sparse nelle loro Opere.

I. Qual è il numero, che ha col suo logaritmo il rapporto minimo?

II. Qual è l'arco, che moltiplicato pel suo seno, dà un Massimo?

III. Quand' è che la frazione $\frac{x}{1 + x^2}$ diventa un Massimo, e quando un Minimo?

IV. Qual è il massimo de' triangoli iscrivibili in un circolo sopra una corda data?

V. Qual è il massimo in solidità di tutti i cilindri iscrivibili in una data sfera?

VI. Qual è il massimo in superficie dei coni iscrivibili in una data sfera?

VII. Dato di posizione un cerchio per rapporto a due punti collocati fuori di esso, determinar un punto sulla sua circonferenza, da cui condotte le rette ai punti dati, la somma di queste sia la minima possibile.

CAPO VIII.

Del Raggio di Curvatura.

81. Se si immagina, che lungo il perimetro della curva $ABDF$, concava dalla medesima parte, sia attaccato un filo $ABDF$, di cui un estremo sia fisso in F, l'altro sia teso lungo la tangente BA, e che si faccia muovere l'estremo A tenendolo sempre teso, e staccandolo dalla curva BDF, si vede, che l'estremo di questo filo descriverà in questo movimento una curva AHK, Ciò posto la curva BDF si chiama l'*Evoluta* della curva AHK, e le porzioni rettilinee AB, HD, KF del filo si chiamano *Raggi dell' Evoluta*, o *Raggi di Curvatura*, o *Raggi Osculatori* della curva AHK. Suppongo che due raggi di curvatura HD, KF si taglino in un punto X, e che da questo punto come centro, con raggio uguale all' unità, si descriva l'arco ab. Dopo tal definizione è chiaro che quanto più il punto K s'accosterà al punto H, tanto più il rapporto dell'arco ab all'arco HK della curva s'accosterà al rapporto, che passerebbe fra lo stesso arco ab, e un arco descritto dal punto X come centro, e con raggio Fig. 9.

$= XH$; rapporto, che non è altro che quello di $1 : XH$, cioè quello de' raggi corrispondenti, e che, per l'accostamento continuo di K verso H, e quindi di KX verso DH, si approssima continuamente a quello di $1:DH$, cioè dell' unità al raggio di curvatura. Si vede adunque che il rapporto dell' unità al raggio di curvatura è il limite del rapporto tra l'arco ab, e l'arco HK della curva. Ma l'arco ab, o piuttosto l'angolo HXK non è che la differenza dell'angolo HVA formato dalla normale HV, coll' altra normale AV situata sull' asse: imperciocchè crescendo AH di HK, l'angolo HVA cresce di HXK; e quindi questo è la vera differenza di quello, e perciò l'arco ab sarà la vera misura di questa differenza. Il rapporto pertanto dell' unità al raggio di curvatura sarà il vero limite del rapporto fra le differenze dell' angolo HVA, e dell'arco AH della curva; onde chiamando R il raggio di curvatura, dovrà essere $R = \frac{d.AH}{d.HVA}$.

È d'uopo osservare, che allorquando la curva è concava verso l'asse, come nella figura qui annessa, gli angoli formati dalle normali coll' asse vanno crescendo allo scostarsi dall' origine delle coordinate; e per lo contrario questi angoli stessi vanno diminuendo nelle curve convesse.

Chiamando dunque s l'arco AH, si ha (*)

(*) Condotta pe' punti H, K la secante SHK, e pel punto H la tangente TH, e la KQ parallela a PH, e finalmente la HO perpendicolare sopra KQ, si vede, che il rapporto della corda HK a HO tanto più

$ds:dx::1:\text{sen.}\,HVA$, e $ds:dy::1:\cos.\,HVA$, dalle quali analogie si ricava facilmente

$$d.HVA\left(=\frac{d.\,\text{sen.}\,HVA}{\cos.\,HVA}\right)=\frac{\pm\, ds.d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy},$$ e

$$R=\frac{\pm\, dy}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)},$$ ove il segno $+$ vale per le curve concave, il segno $-$ per le convesse.

Ma $$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}},$$

e $$d\left(\frac{dx}{ds}\right)=d\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}}=-\frac{d\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{-\frac{dy}{dx}.d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

si accosta al rapporto dell'arco HK a HO, quanto più K s'accosta ad H, e che questi rapporti diverranno uguali all'annullarsi di HO. Ora il rapporto della corda $HK:HO$ ha per limite il rapporto di $HT:PT$, ovvero di $HV:PH$; dunque il rapporto di $HT:TP$, ovvero di $HV:PH$, chè per la similitudine de' triangoli HTP, PHV è lo stesso, è il limite del rapporto fra la differenza dell'arco AH, e dell'ascissa AP; cioè $ds:dx::HV:PH::1:\text{sen.}\,HVA$. Si vede del pari, che il rapporto di $HT:HP$, o di $HV:PV$ è il limite del rapporto fra le differenze dell'arco AH, e dell'ordinata PH, onde $ds:dy::HV:PV::1:\cos.\,HVA$.

Pertanto $$R=\frac{dx\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\mp\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)},$$ essendo il segno $-$ per le curve concave, il segno $+$ per le convesse.

Ponendo in luogo di $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ il suo valore $\frac{ds^3}{dx^3}$, si ha un'altra espressione pel raggio di curvatura, cioè

$$R=\frac{ds^3}{\mp\, dx^2.\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

Finalmente osservando che $d.HVA$ è altresì $=\frac{-d\cos.\,HVA}{\text{sen.}\,HVA}=\frac{\mp\, ds.d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}$, si troverà facilmente un terzo valore di $R=\frac{\mp\, dx}{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}$,

Se per es. AH è un arco di cerchio di raggio $=r$, stando alla prima delle tre formole, dall'equazione $y^2=2rx-x^2$ si ha $\frac{dy}{dx}=\frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$, $d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{-r^2dx}{(2rx-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=\frac{r^3}{(2rx-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, onde tosto si vede essere $R = r$, che vuol dire, che il raggio di curvatura è lo stesso che il raggio del cerchio, ovvero che l'evoluta del cerchio non è che un punto, che si confonde col centro.

Nella Parabola, la cui equazione è $y^2 = ax$, si trova $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{ax}}$, $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-a^{\frac{1}{2}}dx}{4x^{\frac{3}{2}}}$, $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \left(1+\frac{a}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}$, e

perciò $R = \frac{dx\left(1+\frac{a}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}}{dx\,.\,a^{\frac{1}{2}} : 4x^{\frac{3}{2}}} = \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{a}}$.

82. Mediante il raggio dell'Evoluta si può paragonare la curvatura, che ha una curva in un punto, a quella che ha in un altro qualunque. La curvatura che ha una curva in un punto è la stessa, che avrebbe un circolo, che passasse pel punto medesimo, e che avesse per semidiametro il raggio stesso dell'Evoluta, e questo suol chiamarsi *Circolo Osculatore*; la curvatura del quale è sempre come in tutti i circoli in ragion inversa del raggio. Per lo che se si volesse paragonare la curvatura d'una Parabola nell'origine delle sue ascisse, a quella ch'ella ha, quando l'ordinata passa pel fuoco, si rifletta, che nel primo punto $x = 0$, onde

$R\left(= \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{a}}\right)$ sarà al presente $= \frac{1}{2}a$;

nell'altro punto poi, per essere $x = \frac{1}{4}a$, diventa $R = a\sqrt{2}$. Sarà quindi la curvatura del primo punto a quella del secondo $:: a\sqrt{2} : \frac{1}{2}a :: \sqrt{8} : 1$.

CAPO IX.

De' Punti d' Inflessione e di Regresso.

Fig. 10. 83. Allorquando una curva AFK è in parte concava, e in parte convessa verso una retta AP, il punto F, che separa la parte concava dalla convessa, si chiama *Punto d' Inflessione*, e la curva prosiegue in allora il suo andamento dalla stessa parte AE.

Quando poi la curva dopo esser giunta in F, torce il cammino all' indietro, e va per FK', il punto F dicesi *Punto di Regresso* (*).

È chiaro che nelle curve che hanno un punto d' inflessione, crescendo continuamente l' ascissa AP, cresce del pari la parte AT dell' asse, intercetta fra l' origine delle ascisse, e il punto di concorso della tangente coll' asse,

(*) I punti di regresso sogliono dividersi in due specie: la prima delle quali si ha quando due rami di curva si oppongono scambievolmente la loro concavità, o convessità; la seconda, che suol dirsi di *Regresso a becco d' uccello*, si ha, allorchè i due rami si abbracciano opponendosi la convessità dell' uno alla concavità dell' altro. Il Sig. Ab. de Gua negò l' esistenza de' punti di questa specie, e trasse nella sua opinione la massima parte de' Geometri de' suoi tempi. Ma Eulero in una Memoria inserita negli Atti dell' Acad. di Berlino 1749, rilevò il delicato errore di questo chiaris. Geometra, e giustificò il March. de l' Hôpital, che avea insegnato il primo l' esistenza di questi punti nelle curve.

finchè il punto P vada a cadere sul punto E, dopo di che questo segmento torna a diminuire. Quindi si vede, che risguardando AT come una funzione dell'ascissa AP, essa deve diventar un Massimo AL, allorchè il punto P cade sul punto cercato E.

Nelle curve dotate d'un punto di regresso, crescendo il segmento AT, cresce altresì l'ascissa AP, finchè il punto T coincide col punto L, dopo di che il segmento stesso diminuisce di nuovo. Considerando adunque AP come una funzione di AT, quella deve divenire un Massimo al confondersi del punto T col punto L.

Sarà dunque nel primo caso, per essere $AT = \frac{ydx}{dy} - x$, $\frac{d.AT}{dx}$ ossia $\frac{d\left(\frac{ydx}{dy} - x\right)}{dx} = 0$; e $\frac{dx}{d\left(\frac{ydx}{dy} - x\right)} = 0$ per il secondo. Differenziando la prima quantità supposta dx costante, si ha $\frac{dxdy^2 - xdyddy - dxdy^2 - ydxddy + xdyddy}{dxdy^2} = 0$, che si riduce a $-\frac{yddy}{dy^2} = 0$, o semplicemente a $ddy = 0$, e riflettendo, che per essere dx costante, sarà ddy della forma Pdx^2, ove P è una funzione di x, sarà finalmente $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Si avrà similmente nel secondo caso $\frac{dx^2}{ddy} = 0$, le quali formole serviranno a

determinare i punti sì di flesso che di regresso.

84. È necessario di osservare, che ciò che si è detto §. 66, ha luogo anche nel presente caso, colla sola diversità, che laddove per determinar l'esistenza d'un Massimo, debbono annullarsi le differenze o limiti di grado impari, e sussistere quelle di grado pari, quì succede l'opposto. Per es. dall'essere per un certo valore di x, $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, non ne viene in conseguenza esserci in tal punto un flesso, ma è d'uopo per ciò, che questo valore di x non distrugga $\frac{d^3y}{dx^3}$, ovvero che se questo valore si annulla, renda nullo anche $\frac{d^4y}{dx^4}$, senza però che svanisca $\frac{d^5y}{dx^5}$. In una parola si richiede che il numero delle differenze evanescenti in virtù della sostituzione del valore di x sia impari contando dalla prima esclusivamente, e che conservino un valor reale quelle, che loro immediatamente succedono.

Consideriamo la curva espressa dall'equazione $y = 1 - x^4$. Si avrà $\frac{dy}{dx} = -4x^3$; $\frac{ddy}{dx^2} = -12x^2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -24x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = -24$. Ora supponendo $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ si ha $x = 0$, e $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, rimanendo $\frac{d^4y}{dx^4}$ una reale quantità. Dunque l' ordinata y che passa per l' origine delle ascisse, non passa per un punto d' inflessione. Ciò che si può osservare si è, che essendo $\frac{dy}{dx} = 0$ nel caso del Massimo, quest' eqnazione ci dà $x = 0$, il qual valore sostituito nelle differenze ulteriori $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ le rende nulle, sussistendo però $\frac{d^4y}{dx^4}$, che è quantità reale negativa. Laonde allorchè nella nostra curva sarà $x = 0$, y sarà un Massimo.

CAPO X.

De' rotti che talvolta si presentano sotto la forma di $\frac{0}{0}$, e dei Punti multipli delle curve.

85. In qualunque equazione a due variabili della forma (M) $ax^n + bx^{n-1}y \ldots + gy^n + a'x^{n-1} + b'x^{n-2}y +$ &c. $= 0$, il rapporto delle differenze viene sempre dato dall' equazione (N) $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 +$ &c $+ a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y \ldots + g\Delta y^n = 0$, in cui A, B, C sono funzioni delle variabili stesse, a, b, c, &c i coefficienti medesimi dell' equazione (M). Ciò nasce chiaramente dal porre $x + \Delta x$ in luogo di x, $y + \Delta y$ in luogo di y, e dal cancellare in seguito la proposta.

Se dunque si cercasse il limite del rapporto fra le differenze delle coordinate, questo si caverebbe dai primi due termini di (N) $A\Delta x + B\Delta y$, e sarebbe $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$, giacchè tutti i termini dopo il secondo si annullano con Δx, e Δy.

Ora può accadere che qualche valor particolare di y, o di x, o di ambedue assieme, rendesse nulli A, e B nel medesimo tempo, e che perciò il limite $\frac{dy}{dx}$ si presentasse sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per es. nell' equazione $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$, si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)^2 + 2x(x-a)}{2a(y-b)}$; ora è chiaro, che se diventasse $x = a$, quando $y = b$, svanirebbero assieme il numeratore, e 'l denominatore di questo rapporto.

Annullandosi A, e B è chiaro, che il rapporto delle differenze non potrà esser dato che dai termini superstiti $C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 +$ &c $= 0$, da cui si ha l' equazione pel limite cercato $E\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + D\frac{dy}{dx} + C = 0$, dovendo nel caso di Δx, e $\Delta y = 0$ svanire tutti i termini dopo $E\Delta y^2$. La curva, che ha per equazione $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$, ha altresì per rapporto delle differenze delle coordinate $2a(y-b)\Delta y + a\Delta y^2 = (3x-a)(x-a)\Delta x + (3x-2a)\Delta x^2 + \Delta x^3$, la qual equazione nel caso di $x = a$, e $y = b$ si riduce a $\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = 1 + \frac{\Delta x}{a}$. Dunque al punto, in cui x, y diventano a, b, il limite del rapporto sarà dato dall' equazione semplicissima di secondo grado $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$, da cui si hanno due valori del limite $\frac{dy}{dx}$, cioè $+1$, e -1. Si è già osservato di sopra §. 55, che $\frac{dy}{dx}$ esprime la tangente dell' angolo formato dalla curva coll' asse delle ascisse; se pertanto questa tangente ha due valori, è di necessaria conseguenza, ch' essa appartenga a due rami di curva, che passano pel punto stesso, e un tal punto suol dirsi *doppio*, perchè è comune a due rami della curva.

86. Può accadere, che i valori stessi, che già annullarono A e B, annullassero ancora C, D, ed E. In tal ipotesi il rapporto delle differenze sarebbe espresso dai termini, che rimangono nell' equazione (N), cioè $F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + K\Delta y^4 + \&c. = 0$, e allora il limite del rapporto che si cerca, sarebbe compreso nell' equazione di terzo grado $I\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + G\frac{dy}{dx} + F = 0$, dovendosi annullare tutti i termini dopo $I\Delta y^3$ nel caso di $\Delta x = 0 = dx$, e di $\Delta y = 0 = dy$.

Sia l' equazione $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$. Si cerchi il rapporto delle differenze delle coordinate nel caso di $x = 0$, per cui in virtù dell' equazione della curva è ancora $y = 0$, e si troverà dato per $b\Delta x^3 - a\Delta x\Delta y^2 + \Delta y^4 = 0$. Passando al limite di cui si tratta, si troverà, che questo è dato dall' equazione $\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 - \frac{a}{b}\left(\frac{dx}{dy}\right) = 0$,

la qual equazione ha tre radici, che sono 0, $+\sqrt{\frac{a}{b}}$, $-\sqrt{\frac{a}{b}}$, e tali sono i valori del limite cercato, che indicano passar necessariamente per quel punto, in cui x ed $y = 0$, tre rami di curva; e questo punto così definito dicesi *Punto Triplo*. In generale il grado di moltiplicità de' punti è sempre lo stesso, che il grado dell' equazione, che contiene il limite.

87. Dal fin quì detto apparisce, come si possa trovare il valore d' una frazione $\frac{B}{A}$, allorquando per un certo valore delle variabili questa frazione si riduce a $\frac{0}{0}$. Il valore d' una simil espressione si avrà differenziando separatamente i termini della frazione tante volte di seguito, quante sarà necessario, acciò più non si riducano a zero nel medesimo tempo; e in tal differenziazione si avranno a trattare dx, e dy come costanti. In fatti qualunque espressione frazionaria $\frac{B}{A}$ a due variabili si può sempre considerare, come se fosse il valore di $\frac{dx}{dy}$, cioè si può supporre $\frac{dx}{dy} = \frac{B}{A}$, e perchè annullandosi assieme A, e B non si può determinare il valor del limite $\frac{dx}{dy}$; si differenzieranno a parte i termini della frazione prendendo dx, e dy costanti, con che si avrà una nuova equazione $\frac{dx}{dy} = \frac{d.B}{d.A}$. Facilmente poi si vede, che l' equazione $Adx - Bdy = 0$ sarà sempre vera anche dif-

ferenziandola quante volte si vuole. E se ancora dA, dB s' annullassero in virtù di quel valore di x, e y, che rendeva nulli A, e B, si passerebbe ad un' altra differenziazione, da cui si avrebbe $\frac{dx}{dy} = \frac{ddB}{ddA}$, e così di seguito, e si giungerebbe finalmente al valor del limite che si cerca.

88. Il Problema di determinare i *punti multipli* d' una curva è semplicissimo. Rappresentisi sempre con (M) l' equazione della curva, e con (N) il rapporto delle differenze delle coordinate. Si faccia $A = 0$, $B = 0$, e si avranno tanti punti multipli, quanti saranno i valori differenti di y, che unitamente ai valori corrispondenti di x soddisferanno all' equazione (M). Fra questi valori differenti di y comprendiamo ancora quelli, che essendo altronde uguali, sono però di segno contrario, e quegli ancora, i quali tuttochè uguali e del medesimo segno, non corrispondono però alla medesima ascissa. Ma non si consideri che un punto soltanto, e si supponga che un solo sia il valore di x, e un solo di y. Se tali valori dedotti dall' equazioni $A = 0$, $B = 0$, non soddisfanno che a (M), il punto sarà doppio; sarà poi triplo, se tali valori renderanno nulli anche i coefficienti C, D, E; quadruplo, se questi valori soddisferanno all' equazione (M), ed annulleranno ancora i coefficienti C, D, E, F, G, H, I; e così di seguito.

Cercansi i punti multipli della curva, che ha per equazione $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$, e per cui il rapporto delle differenze delle coordinate è dato per $2a(y-b)\Delta y -$

$(3x-a)(x-a)\Delta x - (3x-2a)\Delta x^2 + a\Delta y^2 - \Delta x^3 = 0$. Faccio $y-b=0$, $(3x-a)(x-a) = 0$, con che si ha $y=b$, $x=a$, e $x=\frac{1}{3}a$; ma perchè non è che $y=b$, e $x=a$ che soddisfaccia all' equazion della curva proposta, perciò non si ha che un solo punto multiplo, e un tal punto è doppio.

Sia proposto a trovare i punti multipli della curva espressa dall' equazione $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$. L' equazione delle differenze è la seguente: $(4y^3 - 2axy)\Delta y - (ay^2 - 3bx^2)\Delta x + (6y^2 - ax)\Delta y^2 - 2ay\Delta x\Delta y + 3bx\Delta x^2 + 4y\Delta y^3 - a\Delta x\Delta y^2 + b\Delta x^3 + \Delta y^4 = 0$. Faccio $4y^3 - 2axy = 0$, e $ay^2 - 3bx^2 = 0$, onde ottengo $x=0$, $y=0$, indi due altri valori che sono $x = \frac{a^2}{6b}$, $y = a\sqrt{\frac{a}{12b}}$: ma questi due ultimi non soddisfanno all' equazion della curva, perciò non v' ha altro punto multiplo, che quello indicato da $x=0$, e da $y=0$; cioè non v' ha punto multiplo che all' origine delle coordinate; onde non ci resta che di definire qual sia la moltiplicità di un tal punto. Questo punto è triplo, avvegnachè l' essere $y=0$, $x=0$ rende nulli i coefficienti di Δx^2, di $\Delta x\Delta y$, e di Δy^2, e si hanno i tre valori del limite $\frac{dx}{dy}$, che sono 0, $\sqrt{\frac{a}{b}}$, e $-\sqrt{\frac{a}{b}}$ come abbiamo trovato di sopra, e di cui il primo ci manifesta, che una delle tangenti è perpendicolare all' asse delle ascisse.

89. L' equazione, che contiene il limite potrebbe avere delle radici immaginarie: allora vi sarebbero tanti rami invisibili, quante sono le ra-

dici immaginarie. I punti determinati da tali radici sono staccati dal corso della curva, e si chiamano *Punti Conjugati*. Questa medesima equazione potrebbe avere eziandio delle radici eguali; e ciò vorrebbe dire, che più rami assieme della curva si toccano, e tanti saranno i valori uguali di $\frac{dy}{dx}$, quanti saranno i rami, che si toccano.

90. Diamo fine a questo capo col dimostrare il teorema seguente. Una curva di grado n non può avere punti di moltiplicità superiore a $n-1$. Sia (M) l'equazion della curva; e (N) l'equazione del rapporto delle differenze delle coordinate. Acciò la curva avesse un punto di moltiplicità n, bisognerebbe, che i valori di y e di x cavati dalle equazioni $A=0$, $B=0$ soddisfacessero alla proposta, e mandassero simultaneamente a zero i coefficienti C, D &c, cioè che non restassero dell' equazione alle differenze che i termini $a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + \ldots + g\Delta y^n = 0$. Immagino pertanto due nuove coordinate, che abbiano origine nel punto in quistione, e sostituendo nell' equazion della curva $x+p$ a x, e $y+q$ a y, si otterrà una trasformata, in cui si dovrà cancellar la proposta, atteso che i valori di y, e di x debbono a lei soddisfare, cioè annullarla, ed in cui si dovranno ancora annullare que' coefficienti, ch' abbiamo di già annullati nell' equazione delle differenze. Con tali operazioni la nostra trasformata non si riduce, che a $ap^n + bp^{n-1}q + \ldots + gq^n = 0$, la quale potendosi sempre risolvere in n fattori di primo grado, indica, che il punto in quistione non appartien già alla curva,

ma bensì a un sistema d'un numero n di linee rette, che si tagliano in questo punto. Che poi tutti i fattori di quest' equazione siano di primo grado, e quindi reali, è manifesto dall' essere la trasformata simile in tutto all' equazione delle differenze $a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}$ &c, la quale non sarebbe l' equazione per la moltiplicità de' punti, se qualche suo fattor lineare non fosse reale, onde il rapporto fra p e q sarà identico con quello di Δx e Δy, come determinati amendue da un' equazione perfettamente simile.

Fine del Calcolo Differenziale.

ELEMENTI
DI CALCOLO INTEGRALE

1. Sia data la funzione $V = x^n$. Noi abbiamo ricercato nel Calcolo Differenziale la quantità, il cui valore viene rappresentato col simbolo $\frac{dV}{dx}$, e generalmente co' simboli $\frac{d^r V}{dx^r}$, o $\frac{d^r V}{d^r x}$. Ora quando da tali espressioni abbiasi a ricercare nuovamente la funzione V; ciò ottiensi necessariamente per un metodo, il quale per essere direttamente opposto a quello di differenziare, suolsi perciò chiamare metodo di *integrare*. La Scienza, che propone le regole di ristabilire invece de' simboli $\frac{dV}{dx}$, o generalmente invece de' simboli $\frac{d^r V}{dx^r}$, o $\frac{d^r V}{d^r x}$ la funzione V, chiamasi *Calcolo Integrale*, e la quantità trovata V dicesi l' *Integrale*.

Per indicare, che una quantità è da integrarsi, si fa uso del segno $\int$, il quale si prefigge alla quantità da integrarsi. Debbasi per es. indicare, che si vuole integrare l' espressione $dV = nx^{n-1}dx$; si scriverà $\int dV = \int nx^{n-1}dx$.

Si è adottato il segno $\int$, che si legge *Somma*, o *Sommatoria*, perchè il Calcolo Integrale

altrimenti si propone come una Scienza, la quale insegna a trovare la somma di quantità infinitesime. Ma ben apparisce dal modo, con cui si è da noi proposto il Calcolo Differenziale, che sommare e integrare non possono essere espressioni sinonime.

2. Di qualsisia quantità, che venga algebricamente espressa, si può, come abbiam veduto, assegnare il differenziale. Ma non si può del pari assegnar l' integrale di qualunque quantità differenziale, per cui non intendiamo soltanto quelle, che sono nate da una differenziazione completa, ma altresì qualunque quantità, nella quale occorrono i simboli dx, dy; poichè alcune non son nate da una differenziazione completa, come sono xdy, $xdy - ydx$, ed altre simili.

CAPO I.

Dei Differenziali d' una variabile, che possono integrarsi algebricamente.

3. Per integrare un differenzial monomio, si deve

1º accrescere l' esponente della variabile d' un' unità;

2º dividere il differenzial proposto pel prodotto di questo esponente così accresciuto dell' unità, in dx, ovvero dy.

Il fondamento di questa regola si trova facilmente nelle prime regole del Calcolo Differenziale. Imperciocchè se si vuole trovar di nuovo la quantità, che è stata differenziata, egli è naturale che bisogna servirsi di un metodo direttamente opposto a quello, che fu adoprato nella differenziazione. Sarà pertanto $\int 2x^1 dx = \frac{2x^2 dx}{2dx} = x^2$; poichè $d(x^2) = 2xdx$. Inoltre $\int xdx = \frac{x^2 dx}{2dx} = \frac{x^2}{2}$; in fatti si ha $d\left(\frac{x^2}{2}\right) = xdx$: sarà pure $\int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1} dx}{(\frac{2}{3}+1) dx} = \frac{3}{5} a x^{\frac{5}{3}}$. Così pure $\int \frac{adx}{x^3} = \int ax^{-3} dx = \frac{a x^{-3+1} dx}{(-3+1)dx} = \frac{a x^{-2}}{-2} = \frac{-a}{2x^2}$. Generalmente adunque, qualunque sia m, o positivo, o negativo, intero, o rotto, sarà sempre $\int a x^m dx = \frac{a x^{m+1} dx}{(m+1) dx} = \frac{a x^{m+1}}{m+1}$.

Si può prescindere da questa regola per ritrovare l'integrale di dx, ovvero di adx. Poichè chiaramente si vede, che l'integrale pel primo caso è x, ax pel secondo.

Quando il differenziale monomio sia affetto da un radicale, si sostituisca in vece del radicale l'esponente rotto. Quindi per integrare $adx\sqrt[3]{x^2}$ si scriva $ax^{\frac{2}{3}}dx$; poi si proceda come sopra.

4. Abbiamo veduto nel Calcolo Differenziale, che quando ad una data funzione è aggiunto, o sottratto un termine costante, questo svanisce nella differenziazione. Dunque quando si integra, è d'uopo che si restituisca questa

costante. Tale costante aggiunta può avere un valore arbitrario, finchè non si ha altro scopo che quello di trovare l'integrale, cioè a dire un'espressione, la qual differenziata sia uguale al differenzial proposto. In fatti le due espressioni $\frac{a x^{m+1}}{m+1}$, e $\frac{a x^{m+1}}{m+1} + C$, ove C significa una quantità costante, hanno il medesimo differenziale, cioè $a x^m dx$, e la quantità C può avere qualunque valor si voglia. Ma se l'integrazione sarà intrapresa a fine di risolvere un problema proposto, allora quella costante acquista un valore, il quale vuol esser determinato dalle condizioni del problema. In seguito indicheremo con più esempi il modo, di cui si fa uso per determinar questa costante. Frattanto a qualunque integrale, ancorchè sia stato trovato indipendentemente da qualunque problema, aggiungiamo la costante C.

CAPO II.

De' Differenziali complessi, l' integral de' quali si può assegnare colle regole precedenti.

5. I. Qualunque quantità, che non comprenda veruna potenza polinomia, nè verun divisore variabile polinomio, si può integrare colla regola del §. 3. Se abbiasi ad integrare $ax^3dx + \frac{bx^2dx}{c} + edx$, si integri ciascun

membro in particolare; con che si ha $\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3c}+ex+C$. Così si trova $\int ax^3dx+\int bx^{-4}dx=\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^{-3}}{-3}+C=\frac{ax^4}{4}-\frac{b}{3x^3}+C$.

II. Quand' anche occorrano delle podestà polinomie, si può tuttavia procedere secondo le regole superiormente esposte, purchè queste potenze non si trovino nel denominatore, e 'l loro esponente sia soltanto un numero positivo intero. In tal guisa si può integrare con facilità $(a+bx^2)^3dx$, se si sciolga effettivamente $a+bx^2$ nella terza potenza, per cui si ottiene $(a+bx^2)^3dx=a^3dx+3a^2bx^2dx+3ab^2x^4dx+b^3x^6dx$, il cui integrale $=a^3x+\frac{3a^2bx^3}{3}+\frac{3ab^2x^5}{5}+\frac{b^3x^7}{7}+C$.

6. Potendosi qualunque quantità complessa, innalzata ad una potenza, il cui esponente è un numero positivo intero, svolgere in una serie di monomj; perciò si può integrare qualunque quantità complessa, la quale non ne comprenda altre parimenti complesse, l' esponente delle quali sia un numero negativo intero, o rotto. Però quando s' abbia ad integrare $gx^3dx(a+bx^2)^2+a^2x^7dx(c+ex^2+fx^3)^4$, si sviluppi secondo le regole dell' Algebra $(a+bx^2)^2$, nella serie competente, indi si moltiplichi ciascun termine della serie per gx^3dx. Lo stesso si faccia coll' altro membro dell' espression differenziale proposta, e così

non si avrà che ad integrare col canone del §. 3. una serie di monomj.

7. Si dee quì eccettuare il caso, in cui, uno degli esponenti essendo negativo, accadesse dopo lo svolgimento in serie, e dopo la moltiplica col termine della forma $x^r dx$, che l' esponente della variabile diventasse in qualche termine $=-1$, in allora non si dee far uso della regola predetta, ma si dee integrare per mezzo de' logaritmi. Se per es. data sia $\frac{adx}{x^3}(a+bx^2)^2$, ossia $ax^{-3}dx(a+bx^2)^2$, si sviluppa quest' espressione in $ax^{-3}dx(a^2+2abx^2+b^2x^4)=a^3x^{-3}dx+2a^2bx^{-1}dx+ab^2xdx$. L' integrale del primo ed ultimo termine si è $-\frac{a^3x^{-2}}{2}+\frac{ab^2x^2}{2}$ ma l' integrale del termine di mezzo è $2a^2b\log.x$, come faremo vedere più chiaramente in avanti. Imperciocchè si ha dal §. 46. del Calcolo Differenziale $\frac{dx}{x}=d.\log.x$.

8. III. Quand' anche il proposto differenziale involgesse una quantità polinomia elevata ad una potenza, il cui esponente sia un numero intero o rotto, positivo o negativo, siamo ormai in istato d' integrarlo colle precedenti regole, purchè la quantità, che vien moltiplicata dal polinomio, sia il differenziale, che si otterrebbe differenziando il polinomio stesso, se questo non fosse elevato che alla sola prima podestà.

In tal caso non si dee far altro, se non che considerare il polinomio come una sola variabile, ed applicarvi la regola del §. 3. letteralmente. A questo caso appartiene l' espressione $gdx(a+bx)^p$, poichè gdx è il differenziale di $(a+bx)^1$, moltiplicato però per la costante $\frac{g}{b}$. Per integrarlo adunque, si scriva così $\int gdx(a+bx)^p = \frac{gdx(a+bx)^{p+1}}{(p+1)d(a+bx)} + C = \frac{gdx(a+bx)^{p+1}}{(p+1)bdx} + C = \frac{g(a+bx)^{p+1}}{(p+1)b} + C$. Si differenzi di nuovo questa quantità, e si troverà $gdx(a+bx)^p$.

Si esamini ora l' espressione $\frac{a^2dx+2axdx}{\sqrt{(ax+x^2)}}$, ovvero $(a^2dx+2axdx)(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, e si troverà, che questa si può integrare col canone superiore, per essere $a^2dx+2axdx$ il differenziale di $ax+x^2$, ma moltiplicato per a. Applicandovi pertanto il canone si trova

$$\int(a^2dx+2axdx)(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(a^2dx+2axdx)(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx+2xdx)} + C = 2a(ax+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

L' unico caso che ammetta eccezione si è quando l' esponente del polinomio $= -1$: allora si procede all' integrazione per mezzo de' logaritmi.

CAPO III.

De' Differenziali binomiali che possono integrarsi algebricamente.

9. Intendiamo per differenzial binomiale quello, in cui la quantità complessa è la potenza di un binomio. Così $gx^1dx(a+bx)^{\frac{3}{5}}$ è un differenzial binomiale. La formola $gx^mdx(a+bx^n)^p$ ha il carattere di poter rappresentare qualsisia differenzial binomiale, poichè le lettere g, a, b, m, n, p indicano qualunque possibile quantità, positiva o negativa. Non si può perciò integrare qualunque differenzial binomiale algebricamente: ma però chiaramente apparisce dalle cose dette, che un differenzial binomiale come sarebbe $gx^mdx(a+bx^n)^p$ è integrabile ne' due casi seguenti.

I. Quando p è un numero intero positivo, qualunque poi siano gli esponenti m ed n (toltone il caso del §. 7.) e ciò per li §. 6, 7, 8.

II. Quando l' esponente m fuori delle parentesi è minore di un' unità dell' esponente n della x sotto le parentesi; cioè quando il differenziale è della forma $gx^{n-1}dx(a+bx^n)^p$, si può generalmente integrare, qualunque siano n e p, eccettuato il caso di $p = -1$. In fatti anche gx^{n-1} è il differenziale di $a+bx^n$, moltiplicato però nella costante $\frac{g}{nb}$. E questo è appunto il caso da noi già considerato §. 8.

10. Oltre questi casi ve n' ha due altri, che si ponno comprendere in un solo, e che comprendono il precedente; onde passiamo ad additarli.

I. È integrabile qualunque differenziale, in cui l' esponente della x fuori del binomio accresciuto dell' unità è divisibile per l' esponente della stessa x sotto il binomio, e dà per quoto un numero intero positivo.

L' artifizio di cui ci è d' uopo servirci in questo caso sì per integrare, come pure per dimostrare la generalità di questa proposizione consiste in ciò, che si pone la quantità binomiale semplice uguale ad una sola variabile, e mediante questa, e le altre quantità costanti si esprime il proposto differenziale sotto un' altra forma. Sia $x^m dx(a+bx^n)^p$ il differenziale, che si vuol integrare algebricamente. Si ponga $a+bx^n=z$, sarà $x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; e però $x^m=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$, e $x^m dx(a+bx^n)^p=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} dx.z^p$. Ma $dx=\frac{1}{n}\frac{(z-a)^{\frac{1}{n}-1}}{b^{\frac{1}{n}}}dz$.

Dunque $x^m dx(a+bx^n)^p=$

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}.\frac{1}{n}\frac{(z-a)^{\frac{1}{n}-1}}{b^{\frac{1}{n}}}dz.z^p=$$

$\frac{1}{\frac{n+1}{nb}}(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}.z^p dz$. Se ora $\frac{m+1}{n}$ è un numero negativo, o rotto, è chiaro, che $(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}$ non si può svolgere in una serie finita; ma se $m+1$ sarà realmente divisibile per n, quand' anche il quoto non fosse che l' unità, ma però sempre un numero positivo, quel differenziale che ha una tal proprietà, sarà sempre integrabile algebricamente. Ora si noti che $m+1$ è l' esponente della x fuori del binomio, accresciuto di un' unità, e diviso per n esponente della x sotto il binomio stesso.

Debbasi per es. integrare $gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$. Tosto si scorge, che questo differenziale è suscettibile d' integrazione, poichè l' esponente della x fuor del binomio, cioè 3, accresciuto dell' unità, dà 4, il quale diviso per l' esponente 2 della x nel binomio dà il numero intero e positivo 2 per quoziente.

Si faccia pertanto $a+bx^2=z$, e però $x^2=\frac{z-a}{b}$. Ora osservo, che il differenziale x^3dx, che moltiplica il binomio, è nato dal differenziare x^4 (prescindendo però dal coefficiente costante); alzo pertanto l' equazione $x^2 = \frac{z - a}{b}$ al quadrato, ed ottengo $x^4 = \left(\frac{z - a}{b}\right)^2$, e differenziando $4x^3 dx = 2\left(\frac{z - a}{b}\right)\frac{dz}{b}$, quindi $x^3 dx = \left(\frac{z-a}{b}\right)\frac{dz}{2b} = \left(\frac{z - a}{2b^2}\right) dz$. Si sostituiscano in luogo di $x^3 dx$, e di $(a + bx^2)$ i loro valori espressi per z nella quantità $gx^3 dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$, con che si ha $g\frac{(z - a)dz}{2b^2} . z^{\frac{4}{5}} = \frac{gz^{\frac{4}{5}+1} dz}{2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}} dz}{2b^2}$. Conseguentemente $\int gx^3 dx(a + bx^2)^{\frac{4}{5}} = \int \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \int \frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2} = \frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2b^2} + C = \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{z}{\frac{4}{5}+2} - \frac{a}{\frac{4}{5}+1}\right) + C = \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{5}{14}z - \frac{5}{9}a\right) + C$. Si ristabilisca per z il suo valore $a + bx^2$, e nascerà finalmente $\frac{g(a + bx^2)^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left[\frac{5}{14}(a+bx^2) - \frac{5}{9}a\right] + C$.

11. In simil guisa si procede in qualunque altro caso, che sia sottoposto alle condizioni indicate. Assumiamo per esempio $gx^8 dx(a + bx^3)^{-\frac{2}{3}}$; che è suscettibile d'integrazione completa, perchè l'esponente 8 ac-

cresciuto dell'unità cioè 9 diviso per 3, che è esponente nel binomio, dà un numero intero positivo per quoziente.

Pongo adunque $a + bx^3 = z$, e trovo $x^3 = \frac{z - a}{b}$, e perchè $x^8 dz$ (non considerando un coefficiente costante) è nato dalla differenziazione di x^9, alzo l'equazione $x^3 = \frac{z-a}{b}$ al cubo, ed ho $x^9 = \left(\frac{z - a}{b}\right)^3$, il cui differenziale $9x^8 dx = 3\left(\frac{z - a}{b}\right)^2 \cdot \frac{dz}{b}$, e $x^8 dx = \left(\frac{z - a}{b}\right)^2 \cdot \frac{dz}{3b}$. Perciò il precedente differenziale si cambia in $g\left(\frac{z - a}{b}\right)^2 . z^{-\frac{2}{3}}\frac{dz}{3b} = \frac{gz^{2-\frac{2}{3}}dz}{3b^3} - \frac{2gaz^{1-\frac{2}{3}}dz}{3b^3} + \frac{ga^2z^{-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}$, il cui integrale è $\frac{gz^{3-\frac{2}{3}}}{3(3 - \frac{2}{3})b^3} - \frac{2gaz^{2-\frac{2}{3}}}{3(2 - \frac{2}{3})b^3} + \frac{ga^2z^{1-\frac{2}{3}}}{3(1 - \frac{2}{3})b^3} + C$, il quale o si riduce ad essere $= \frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}\left(\frac{z^2}{3 - \frac{2}{3}} - \frac{2az}{2 - \frac{2}{3}} + \frac{a^2}{1 - \frac{2}{3}}\right) + C$, ovvero $= \frac{g}{3b^3}z^{\frac{1}{3}}[\frac{3}{7}z^2 - \frac{3}{2}az + 3a^2] + C$.

Ristabilito poi in luogo di z il suo valore $a + bx^3$, sarà il cercato integrale $= \frac{g}{3b^3}(a + bx^3)^{\frac{1}{3}}[\frac{3}{7}(a + bx^3)^2 - \frac{3}{2}a(a + bx^3) + 3a^2] + C$.

12. II. Qualora un differenzial binomio non sembri avere le proprietà allegate, è necessario di tentar le ricerche, per assicurarsi se le possegga o no. Si rende negativo l'esponente della x entro il binomio, se questi è positivo, o positivo s'egli è negativo. Ciò avviene, se si dividano i due termini del binomio per quella potenza della x, che vi si comprende, e colla stessa elevata alla potenza totale del binomio si moltiplichi il binomio al di fuori.

Se si vuol rendere negativo per es. l'esponente 2 della x nel binomio $gx^4dx(a+bx^2)^5$, si divida $a+bx^2$ per x^2, e si otterrà

$$gx^4dx\left(\frac{a}{x^2}+b\right)^5, \text{ ossia } gx^4dx(ax^{-2}+b)^5.$$

Ma l'esponente 5 ci dice, che la quantità x^2 con cui si è diviso, deve elevarsi alla quinta potenza; però a fine di restituire il primiero valore alla proposta funzione; si deve moltiplicare fuori del binomio per $(x^2)^5 = x^{10}$, con che si ottiene $gx^{14}dx(ax^{-2}+b)^5$.

Ricorrendo a quest'artifizio si troverà, che molti differenziali binomj, i quali non vengono compresi nella regola del §. 10, nullameno vi appartengono. Se avessi per es. da integrare $\frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, ossia $a^2dx(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$, io ben veggo, che l'esponente della x fuor del binomio, cioè 0, accresciuto di 1, non è divisibile per l'esponente 2 della x nel binomio. Pertanto io m'ingannerei, se per ciò conchiuder volessi, che la proposta quantità non è suscettibile d'integrazione algebrica. Imperocchè s'io rendo negativo l'esponente della x nel binomio,

e scrivo $a^2(x^2)^{-\frac{3}{2}}dx(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = a^2x^{-3}dx(a^2x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, m'accorgo bentosto, che se -3 aumentato di 1 venga diviso per l'esponente -2 dentro il binomio, si viene ad ottenere un numero intero positivo. Faccio adunque $a^2x^{-2}+1 = z$, trovo perciò $x^{-2} = \frac{z-1}{a^2}$, e perchè $x^{-3}dx$, prescindendo dal coefficiente costante, è il differenziale di x^{-2}, differenzio perciò, e trovo $-2a^2x^{-3}dx = dz$, e $x^{-3}dx = -\frac{dz}{2a^2}$. Dunque il proposto differenziale si trasforma in $-\frac{dz}{2}\cdot z^{-\frac{3}{2}}$, il cui integrale si è

$$\frac{-z^{1-\frac{3}{2}}}{2(1-\frac{3}{2})} + C = z^{-\frac{1}{2}} + C = (a^2x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{(a^2x^{-2}+1)}} + C = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + C.$$

Il procedere è dunque il medesimo di quello del §. 10.

13. Noi abbiamo tacitamente supposto, che la potestà della x non si trovi che in un de' termini del binomio. Qualora avvenisse che tali potestà si trovassero in ambedue i termini, si dividano questi per una delle due potestà di x, che si trovano ne' due termini del binomio, e si moltiplichi al tempo stesso fuori del binomio per quella medesima potestà elevata al grado, che vien indicato dall' esponente del binomio stesso. Però quand' abbia ad integrare $\frac{a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} = a^2x^{-1}dx(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, io

trasformo quest' espressione in $a^2x^{-1}(x)^{-\frac{1}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}} =$ $a^2x^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$, a cui, applicato il canone del §. 10, apparisce esser questa quantità incapace d'integrazione algebrica. Ma rendendo negativo l'esponente della x nel binomio si ottiene $a^2x^{-\frac{3}{2}}(x)^{-\frac{1}{2}}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, ossia $a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, che è integrabile algebricamente pel §. 12. Perciò si prenda $ax^{-1}+1=z$, e sarà $x^{-1}=\frac{z-1}{a}$, e $-x^{-2}dx$ $=\frac{dz}{a}$, ovvero $x^{-2}dx = -\frac{dz}{a}$. Dunque $a^2x^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ si cangia in $-adz.z^{-\frac{1}{2}}$, ovvero in $-az^{-\frac{1}{2}}dz$, il cui integrale si è $-\frac{az^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-2az^{\frac{1}{2}}+C=-2a(ax^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}$ $+C=-2a\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)}+C$.

Quando siansi esauriti i tentativi de' due casi da noi proposti per un differenziale binomio, si può conchiudere con sicurezza, che, se questo non è compreso in veruno di tali casi, non abbia tampoco un integrale puramente algebrico.

I differenziali trinomj, quadrinomj &c. sono suscettibili d'integrazione ne' casi espressi ne' §. 5. e seg. Ma vi ha altri casi ancora, ov' essi hanno un integrale puramente algebrico. Ma perchè tali casi son pochi, e di rado occorrono, perciò li passiamo sotto silenzio.

CAPO IV.

Applicazione delle regole precedenti alla misura di quelle superficie, le quali sono terminate in parte da linee rette, in parte da linee curve.

Fig. 11. 14. Sia AZ una curva qualunque. Si conducano perpendicolarmente all' asse Ap le ordinate LK, MP, mp, e facciasi $AP=x$, $PM=y$; inoltre $Pp=\Delta x$, e $rm=\Delta y$, lo spazio APM $=V$, onde lo spazio $PMmp=\Delta V$. Sarà l'area del rettangolo $PMrp=y\Delta x$, e l'area dell'altro rettangolo $PRmp=(y+\Delta y)\Delta x$. Facilmente si vede, che $\Delta V > y\Delta x$, ossia $\frac{\Delta V}{\Delta x} > y$. Si ponga pertanto $\frac{\Delta V}{\Delta x}-\varphi=y$. Di più è $\Delta V < (y+\Delta y)\Delta x$, ossia $\frac{\Delta V}{\Delta x} < y+\Delta y$. Dunque potrà essere $\frac{\Delta V}{\Delta x}+\psi=y+\Delta y$.

I limiti pertanto della quantità $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ sono y, e $y+\Delta y$. Quanto più picciola diventa Δx, e con lei ancora ΔV, Δy, tanto più s'accostano fra di loro questi limiti, ed allora diventano uguali, quando $\Delta x=0$, $\Delta y=0$. In tal caso anche $\varphi=0$, $\psi=0$; poichè si avrebbe $\frac{\Delta V}{\Delta x}-\varphi=\frac{\Delta V}{\Delta x}+\psi$, la qual equazione sarebbe contraddittoria se non fossero φ, e $\psi = 0$, quindi si ottiene $\frac{dV}{dx} = y$, che si costuma scrivere: $dV = ydx$, e $V = \int ydx$.

15. Affine di applicare questa formola ad una curva, di cui è data l'equazione, si cerchi per mezzo di lei il valore di y, dato per x, e si ponga nell'equazione $V = \int ydx$, il cui integrale ci darà la superficie cercata, sempre che vi si aggiunga o sottragga una quantità costante da determinarsi dai dati del problema.

16. Il trapezio $PMmp$ si può considerare tanto come differenza dello spazio APM, quanto come differenza dell'altro spazio $KLMP$. Se dunque si trovi, mediante la formola $V = \int y dx$, un integrale, non v'ha ragione, perchè questo appartenga piuttosto allo spazio APM; che non allo spazio $KLMP$, il qual ultimo differisce dal primo della quantità costante AKL. Perciò all' integral trovato è necessario di aggiungere una costante, la quale additi di quanto differisca lo spazio, che si vuol determinare, da quello che si trova immediatamente per mezzo del calcolo. Gli esempi in questo caso sono i più proprj ad insegnarci il metodo, di cui si dee far uso per determinare questa quantità costante.

A tal fine scegliamo la Parabola ordinaria, la cui equazione è $y^2 = px$, ossia $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; e però $V = \int y dx = \int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; e tal'è l'espressione algebrica per la quadratura della Parabola.

Sarà pertanto trovata la quadratura dello spazio APM, o dello spazio $KLMP$, l'ultimo

de' quali si computa dal punto K, ognora che sia determinata l'ascissa x, il parametro p, e la costante C, che è quanto dire quel punto, da cui si vuole computare l'integrale. Vogliasi dunque computarlo dal punto A, sarà perciò $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$. A fine di determinare il valor di C, si osservi, che si annulla lo spazio APM, quando si annulla la x, ed in tal caso l'equazione si cangia in $0 = 0 + C$, e per conseguenza anche $C = 0$. Laonde non si deve aggiungere all' integral trovato nissuna costante, e sarà $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

Ma qualora si volesse prender l'integrale dal punto K, per essere AK una quantità nota, sia essa $= b$, e s'avrà $KLMP = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$. Ora diventa lo spazio $KLMP = 0$, quando AP ossia x diventa $= b$; dunque $0 = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$, e $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, e perciò $KLMP = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})$. Da quì si scorge di quanto vantaggio sia la costante, che si deve aggiugnere o sottrarre dall' integrale, e come questa possa soltanto determinarsi dalle condizioni del problema.

Poichè $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x$, e $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$, si ha $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}AP.PM$. Di più $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}b$. Ora se x diventa $= AK = b$, sarà pure $y^2 = pb$, ed $y = KL = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$. Adunque $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}KL.AK$. Finalmente lo spazio parabolico $KLMP = \frac{2}{3}AP.PM - \frac{2}{3}AK.KL$. Di tutte e quattro le sezioni coniche la Parabola è la sola, che si possa quadrare algebricamente.

Prendiamo per secondo esempio l' equazione generale per tutte le Parabole, cioè $y^{m+n} = a^m x^n$. Trovasi $y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$, e $y\,dx = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx$, il cui integrale si è =

$$\frac{a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1}}{\frac{n}{m+n}+1} + C = \frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} x + C = \frac{m+n}{m+2n} xy + C.$$

È dunque $APM = \frac{m+n}{m+2n} xy$ senza costante, perchè svanisce lo spazio APM collo svanire della x.

CAPO V.

Applicazioni del Calcolo Integrale alla Rettificazione delle Curve.

17. Rettificare una curva si dice l' assegnare una linea retta, la quale sia uguale in lunghezza alla curva, o ad un di lei determinato arco. Il metodo per raggiugnere quest' oggetto si è il seguente.

Sia l' arco $AM = s$, l' ascissa $AP = x$, l' ordinata $PM = y$. Abbiamo dimostrato nel Calcolo Differenziale §. 29, che per tutte le curve Fig. 11

vale la formola $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, onde ne siegue $s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Tutto dunque consiste a poter integrare la formola $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Si differenzi l' equazione della curva, e dopo che si è cavato da lei il valore di dy dato in x, e dx, o il valore di dx dato in y e dy, questo si sostituisca in $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ove allora non si troverà che x e dx^2, ovvero y e dy^2. Per dar di ciò un esempio, tra tutte le Parabole, che sono generalmente rappresentate dall' equazione $y^{m+n} = a^m x^n$, prendiamo quella, la cui natura ci vien espressa da $y^3 = a x^2$. Da questa si ha $x^2 = \frac{y^3}{a}$, e $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$. Perciò $dx = \frac{\frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy}{a^{\frac{1}{2}}}$, $dx^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{y\,dy^2}{a}$. Quindi $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{9y\,dy^2}{4a}\right)} = dy\sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)}$. L' integrazione di questa formola non ha punto di difficoltà, poichè l' esponente della y fuori del radicale è minore di un' unità dell' esponente della y stessa sotto il radicale. Trovasi pertanto

$$\int dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)} = \int dy \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9\,dy}{4a}} + C = \frac{8a}{27}\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

La costante C si determina così: Qualora vogliasi determinar la lunghezza dell' arco AM, questo s' annulla assieme colla y. In tal caso si ha $\frac{8a}{27}(1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{8a}{27} + C = 0$, onde $C = -\frac{8a}{27}$. Perciò la lunghezza dell'arco AM $= \frac{8a}{27}\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$.

18. Quando saper si volesse, quale fra le altre Parabole fosse rettificabile, si procederebbe come siegue. Dall'equazione di questo genere di curve $y^{m+n} = a^m x^n$ si ha $y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$. Sia per brevità $\frac{m}{m+n} = k$, e $\frac{n}{m+n} = l$; sarà $dy = la^k x^{l-1} dx$, onde $dy^2 = l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2$; e quindi $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2)} = dx\sqrt{(1 + l^2 a^{2k} x^{2l-2})}$, la qual formola in questo stato non è integrabile, se non quando $2l - 2 = 1$. Ma se si cangia il segno all'esponente della x sotto il radicale, si ottiene $x^{l-1} dx \sqrt{(x^{2-2l} + l^2 a^{2k})}$, il qual differenziale sarà integrabile algebricamente §. 10., se $l - 1$ accresciuto dell'unità, e diviso per $2 - 2l$ dia per quoto un numero intero positivo, cioè se $\frac{l}{2-2l} = t$, indicando t un numero di tal natura. Da ciò ne viene $l = 2t - 2tl$, e $l = \frac{2t}{2t+1} = \frac{n}{m+n}$, e finalmente $m = \frac{n}{2t}$.

Per lo che tutte le Parabole, che sono algebricamente rettificabili sono comprese nell'

equazione $y^{\frac{n(2t+1)}{2t}} = a^{\frac{n}{2t}} x^n$, e cavando la radice di grado n, $y^{\frac{2t+1}{2t}} = a^{\frac{1}{2t}} x$.

CAPO VI.

Applicazioni alla misura delle Superficie curve.

19. Noi ci ristringeremo alla misura delle superficie di que' corpi soltanto, che sono generati dalla rivoluzione d'una curva AM intorno al suo asse AP.

Fig. 12. Mentre l'arco Am s'aggira intorno di Ap la corda Mm genera colla sua rivoluzione una superficie d'un cono troncato: ed è facile il dimostrare, che questa superficie ha per misura il prodotto della corda Mm nella periferia d'un circolo, che ha per raggio la retta ab, la quale taglia per metà la corda Mm, ed è perpendicolare all'asse Ap. Sia $r:c$ il rapporto del raggio alla periferia, e sarà (ritenute le denominazioni del §. 14) la superficie del tronco di cono $= \frac{c}{r}\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$ $= \frac{c}{r}\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$. Se si chiama V la superficie generata dalla rivoluzione dell'arco AM, si potrà dinotare con ΔV la superficie generata dalla rivoluzione dell'arco Mm. Ma perchè

$\Delta V > \frac{c}{r}\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$, però

$\frac{\Delta V}{\Delta x} > \frac{c}{r}\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$. Si tiri la tangente *NMT*, e sopra *Ap* la perpendicolare *Np*. Colla rivoluzione della retta *MN* nasce la superficie d'un altro cono troncato, la quale è uguale al prodotto del lato *MN* nella periferia d'un circolo di raggio *Kh*, il quale bipartisce ugualmente *MN* in *K*, ed è normale sul mezzo di *Pp*. Ora pei triangoli simili *TMP*, *MNr*, $PT : TM :: Mr : MN$, ossia $\frac{ydx}{dy} : y\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)} :: \Delta x : MN$, onde $MN = \Delta x\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Di più $PT : Th :: PM : hK$, onde $hK = y+\frac{\Delta x\, dy}{2\,dx}$, perciò la superficie del nuovo cono troncato $= \frac{c}{r}\left(y+\frac{\Delta x\, dy}{2\,dx}\right)\Delta x\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, e $\frac{\Delta V}{\Delta x} < \frac{c}{r}\left(y+\frac{\Delta x\, dy}{2\,dx}\right)\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$.

Il valore pertanto di $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ giace fra i limiti $\frac{r}{c}\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$, e $\frac{c}{r}\left(y+\frac{\Delta x\, dy}{2\,dx}\right)\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Allo scemare di Δx i due limiti s'accostano, finchè diventando $\Delta x = 0 = dx$ e $\Delta y = 0 = dy$ s'uguagliano scambievolmente.. Ed è allora che si ha $\frac{dV}{dx} = \frac{c}{r}y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, e integrando $V = \int\frac{c}{r}y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

Fig. 2. 20. Debbasi per es. cercare la superficie di una sfera. Il cerchio *AMB*, dalla cui rivoluzione essa vien generata, ha per proprietà $y^2 = ax - x^2$, quando sia $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; dalla qual' equazione si ricava $dy = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$, e $dy^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2dx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax-x^2}$. Quindi $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2+\frac{\frac{1}{4}a^2dx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax-x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$. Onde $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{c}{r}\sqrt{(ax-x^2)}.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \frac{\frac{1}{2}ac}{r}dx$. L'integrale di quest' espressione è $\frac{\frac{1}{2}ac}{r}x + C$, o $\frac{\frac{1}{2}ac}{r}x$ solamente, qualora si prenda l'integrale dal punto *A*.

21. Cerchisi ora la superficie d'un Paraboloide. Per essere $x = \frac{y^2}{p}$, e $dx = \frac{2ydy}{p}$, $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{\left(dy^2+\frac{4y^2dy^2}{p^2}\right)} = dy\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)}$; e perciò $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ è $= \frac{cydy}{r}\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)}$, l'integrale di cui $= \frac{cp^2}{12r}\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C$. Se *y* diventa $= 0$, si trova $C = -\frac{cp^2}{12r}$. Laonde la su-

perficie del Paraboloide indeterminato $AMLA$ $= \frac{cp^2}{12r}\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{cp^2}{12r}$.

CAPO VII.

Applicazioni alla misura delle solidità.

22. Quì pure noi ci limiteremo alla misura di que' solidi solamente, che vengono generati dalla rotazione d' una curva qualunque intorno del suo asse.

Fig. 11. Se l' area APM si aggira intorno dell' asse AP, dicasi V la solidità del corpo così generato. Dalla rivoluzione dell' area $PMmp$ terminata dall' arco Mm nasce un solido $= \Delta V$, e dalla rivoluzione del trapezio $MPpm$ ne nasce un cono troncato, la cui solidità $=$ $\frac{c}{2r}(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2)\frac{\Delta x}{3}$; indi il rettangolo $RPpm$ produce un cilindro di solidità $=$ $\frac{c}{2r}(y + \Delta y)^2 \Delta x$. Ma è $\Delta V >$ $\frac{c}{2r}(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2)\frac{\Delta x}{3}$, ossia $\frac{\Delta V}{\Delta x} >$ $\frac{c}{2 \cdot 3r}(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2)$, e $\Delta V <$ $\frac{c}{2r}(y + \Delta y)^2 \Delta x$, ovvero $\frac{\Delta V}{\Delta x} < \frac{c}{2r}(y + \Delta y)^2$. Dunque i limiti di $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ sono

$\frac{c}{2 \cdot 3r}(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2)$, e $\frac{c}{2r}(y + \Delta y)^2$. Questi due limiti si confondono allorchè $\Delta V = 0 = dV$, $\Delta x = 0 = dx$, e $\Delta y = 0 = dy$. Allora troviamo $\frac{dV}{dx} = \frac{c}{2r}y^2$, onde si ricavá $V = \frac{c}{2r}\int y^2 dx$.

Fig. 13. 23. Prendiamo per primo esempio l' Ellissoide. L' equazione all' Ellisse è $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$, supposto $AP = x$, $PM = y$, l' asse maggiore $AB = a$, l' asse minore $Dd = b$. Moltiplicando per $\frac{cdx}{2r}$ si ha $\frac{cy^2dx}{2r} =$ $\frac{cb^2}{2ra^2}(axdx - x^2dx)$, il cui integrale $=$ $\frac{cb^2}{2ra^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$, o puramente $\frac{cb^2}{2ra^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ qualora si voglia computase la solidità dal punto A.

Vogliasi ora la solidità dell' Ellissoide intero. Si ponga $x = AB = a$, e si avrà $\frac{cb^2}{2ra^2}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{cb^2a}{12r} = \frac{cb^2}{4r}\cdot\frac{a}{3} = \frac{cb^2}{8r}\cdot\frac{2a}{3}$. Il fattore $\frac{cb^2}{8r}$ non è che l' area d' un cerchio di diametro $b = Dd$; e $\frac{cb^2a}{8r}$ non è altro che la solidità d' un cilindro circoscritto all' Ellissoide, del quale se ne prendono due terzi.

Ma se si volesse determinare il solido ellittico da un punto dato *K*; si ponga in tal caso $AK = e$. Bisogna dunque che $\frac{cb^2}{2ra^2}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+C$ si annulli quando diventa $x=e$, nel qual caso si ha $C = -\frac{cb^2}{2ra^2}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)$. Quindi la solidità d'un tronco ellittico giacente fra due piani paralleli $= \frac{cb^2}{2ra^2}\left(\frac{ax^3}{2}-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{cb^2}{2ra^2}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)$. Questa formola serve a misurar la capacità delle botti, che possono esser considerate come ellissoidi troncate ai due vertici.

24. Per la solidità del Paraboloide si ha Fig. 14. $\int\frac{cy^2dx}{2r}=\int\frac{cpxdx}{2r}=\frac{cpx^2}{4r}+C$, o solamente $\frac{cy^2}{2r}\cdot\frac{x}{2}$ computandosi l'integrale dal vertice *A*. Ma se la solidità del Paraboloide si volesse computare da un determinato punto *K*, annullandosi quest'integrale col diventar $x=e$, sarebbe $C=-\frac{cpe^2}{4r}$, e però la solidità del conoide parabolico troncato $=\frac{cpx^2}{4r}-\frac{cpe^2}{4r}=\frac{cp}{4r}(x^2-e^2)$. E mediante questa formola si può in qualche modo giudicare della quantità di terra che si scaglia da una mina.

Dopo alcune esperienze si è conchiuso, che in un terreno uniforme, la cui superficie

MN sia orizzontale, le pareti laterali dell'imbuto sono incurvate a foggia di Paraboloide, il fuoco del quale giace nel centro della mina. La distanza *KP* (linea della minor resistenza) del fuoco di cotesto imbuto dal piano superiore *MN* è secondo alcune osservazioni la metà del diametro *MN*. Con questo dato si può nel seguente modo misurare la solidità del torso *NOLM*, che viene scagliato dalla mina. Posto $KP = PM = a$, si ha dalle proprietà della Parabola $p = 4e$, ove $e = AK$, e per essere generalmente $p=\frac{y^2}{x}$, sarà nel nostro caso $p=\frac{a^2}{a+e}=4e$, ossia si avrà l'equazione $e^2+ae-\frac{1}{4}a^2=0$, da cui $e=\frac{-a}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{2}=\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{2})$. Per noi $x=a+e$, ossia $x^2=a^2+2ae+e^2$, ed $x^2-e^2=a^2+2ae=a^2\sqrt{2}$. Dunque la formola generale $\frac{cp}{4r}(x^2-e^2)$ si convertirà in $\frac{cp}{4r}.a^2\sqrt{2}=\frac{ca^3}{2r}(2-\sqrt{2})=\frac{355}{113}a^3(2-1,4142135)=1,8403012a^3$, che è il solido cercato, il quale è $\frac{46}{25}$ in circa del cubo della linea di minor resistenza. In questo calcolo non abbiamo tenuto conto della cavità *LAO*, perchè questa vien formata per la maggior parte dallo sforzo, che esercita la polvere contro il fondo dell'imbuto.

25. Prendiamo ora a misurare la solidità

della così detta unghia, che vien formata, quando si taglia un cilindro obbliquamente con un piano che passa per la sua base; e per ristringerci al caso più semplice, supponiamo, che questo piano passi pel centro della base del cilindro. Nella figura 16. questo solido è $ABDE$.

Fig. 17. Se si taglia questo solido con dei piani paralleli fra se, e perpendicolari alla base ABE, vengono formati dei triangoli simili, i quali stanno fra loro come i quadrati de' loro lati omologi. Sia dunque il raggio CE della base $= r$, l'altezza $DE = h$, y la base PM del triangolo PMN; e si avrà $CED : PMN :: r^2 : y^2$. Ora $CED = \frac{rh}{2}$, conseguentemente $PMN = \frac{hy^2}{2r}$. Se l'ascissa $AP = x$ cresce della porzione $Pp = \Delta x$, l'ordinata PM si cangia in $pm = y + \Delta y$, e si ha $CED : pmn :: r^2 : (y+\Delta y)^2$, onde ne viene $pmn = \frac{h}{2r}(y + \Delta y)^2$.

La solidità del segmento $APMNA$ sia $= V$, la solidità della falda $PNMpnm$ sarà $= \Delta V$, e $\frac{\Delta V}{\Delta x} > \frac{h}{2r}(2rx - x^2)$; e per essere $(y + \Delta y)^2 = 2rx + 2r\Delta x - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2$, $\frac{\Delta V}{\Delta x} < \frac{h}{2r}(2rx - x^2 + 2r\Delta x - 2x\Delta x - \Delta x^2)$. Ora se $\Delta x = o = dx$, è ancora $\Delta V = o = dV$, e i due limiti di $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ si uguagliano. Si ricava pertanto $\frac{dV}{dx} = \frac{h}{2r}(2rx - x^2)$, e $V =$

$\frac{h}{2r}\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right) + C$. Quando $x = o$, anche $V = o$, e perciò $C = o$; e se fosse $x = 2r$, sarebbe $V = \frac{h}{2r}\left(4r^3 - \frac{8r^3}{3}\right) = \frac{4}{6} hr^2 = \frac{hr}{2} \cdot \frac{4r}{3} = CED . \frac{2}{3} . AC$.

CAPO VIII.

Metodo d'integrare per approssimazione.

26. Quì non intendiam di parlare, se non di que' differenziali polinomj, i quali non soggiacciono alle regole, che noi abbiamo date di sopra. La maniera d'integrare per approssimazione consiste nello sviluppare in una serie convergente di monomj il differenzial proposto, nel cercare l'integrale di ciascun termine, e finalmente nel determinare il numero di questi termini dalle circostanze del problema.

2. 27. Se si volesse determinar la lunghezza d'un arco circolare AM per mezzo del suo senoverso AP, si procederebbe così:

Posto $AP = x$, il diametro $AB = 1$, l'arco $AM = u$, sarà $PM = \sqrt{(x - x^2)}$, e come insegna il Calcolo Differenziale (§. 30.) $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(x - x^2)}}$, ossia $du = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - x^2)}}$. Adunque $u = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ $= \int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Ma è $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ $= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \&c.$ E però $\int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \&c.) = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}$ $+ \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \&c.$ A quest' integrale non va aggiunta alcuna costante, giacchè esso svanisce colla x, come dee essere, poichè anche l' arco AM da esso espresso è $= 0$. Laonde si ha Arc. AM $= x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \&c.)$.

Qualunque volta l' arco AM sia minore della semicirconferenza, il seno-verso sarà minore del diametro 1, cioè x sarà una frazione. I termini della precedente serie vanno dunque tanto più diminuendo, quanto più picciolo è il seno verso dell' arco, di cui si vuol calcolar la lunghezza. Qualora trovar si dovesse la misura d' un arco, il cui seno-verso sia un centesimo del diametro, s' avrebbe $x = \frac{1}{100} = 0{,}01$, e quindi $x^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$; e sarebbe $AM =$ $0{,}1\,(1 + \frac{0{,}01}{6} + \frac{3\,(0{,}01)^2}{40} + \frac{5}{112}(0{,}01)^3 + \&c.)$, e giacchè il termine, che verrebbe in seguito nella serie, sarebbe per lo meno cento volte più piccolo del precedente $\frac{5}{112}(0{,}01)^3$, perciò

possiamo assegnare il grado di esattezza, con cui viene determinata la lunghezza di quest' arco, se stando a questi soli quattro termini, dividiam l' ultimo per cento. Ora $\frac{5}{112}(0{,}01)^3 =$ $\frac{5}{112}(0{,}000001) = 0{,}0000000446$, che diviso per cento dà 0,000000000446.

Se dunque noi calcoliamo ogni termine della serie precedente fino a dieci cifre decimali, ne potremo conchiudere con sicurezza, che nel calcolo della lunghezza dell' arco non si commetterà l' errore di un' unità, che dopo la nona cifra decimale. Abbiamo però

$\frac{5}{112}(0{,}01)^3 = 0{,}0000000446$;

$\frac{3}{40}(0{,}01)^2 = 0{,}0000075000$;

$\frac{0{,}01}{6} = 0{,}0016666666$.

La somma pertanto della serie precedente si trova $= 0{,}1\,(1{,}0016742112) = 0{,}100167421$, fermandoci alla nona decimale, alla qual si sarebbe potuto aggiungere ancor la decima.

E questa è la lunghezza di quell' arco, il cui seno-verso è la centesima parte del suo diametro.

Si potrebbe trovare un numero, che abbastanza s' avvicinasse all' intera periferia, se si moltiplicasse la lunghezza trovata dell' arco AM pel numero delle volte, in cui il numero de' gradi di quest' arco è contenuto in 360°. Ma la difficoltà consiste in ciò appunto, che non si sa questo numero.

Es.

Essendo il seno di 30° la metà del raggio, e potendosi facilmente dal seno d' un arco trovare il seno-verso, si potrebbe calcolare il seno-verso di 30 gradi, indi porre cotesto valore invece di x nella serie superiore, e moltiplicando il risultato per 12, che è il quoto di 360 diviso per 30, si otterrebbe una quantità approssimantesi alla periferia del cerchio. Ma perchè in tal caso la serie suddetta riuscirebbe poco convergente, e però saremmo costretti a sommar un gran numero di termini affine di ottener un risultato soltanto mediocremente vicino al vero; perciò siamo in necessità di indagare un altro mezzo, con cui soddisfare alle nostre ricerche.

28. Sia φ un arco di circolo, x la sua tangente, a il raggio, sarà (Calc. Diff. §. 38. form. 5.) $d\varphi = \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2}$, e $\varphi = \int \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} = \int a^2 dx (a^2 + x^2)^{-1}$. Ma $(a^2 + x^2)^{-1}$

$$= a^{-2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c.\right).$$

Onde $\int \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} =$

$$\int dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c\right) =$$

$$x\left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \frac{x^6}{7a^6} + \frac{x^8}{9a^8} - \&c\right).$$

Tutto adunque si riduce a conoscere un arco, il quale sia contenuto nella periferia un certo numero di volte, e di cui sia nota la tangente. Ora l' arco di 45 gradi fa al nostro caso; poichè egli è contenuto 8 volte nella pe-

riferia, e la sua tangente è uguale al raggio. Pongasi perciò $x = a$, e la lunghezza dell' arco φ sarà data nella serie seguente: $a(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c)$. Ma perchè i termini di questa serie vanno scemando troppo lentamente, è d' uopo di esaminare, se l' arco di 45° si potesse smembrare in altri due archi di note tangenti. Non è punto necessario di saper il numero de' gradi di ciascun di questi archi, ma basta al nostro scopo, che la loro somma sia $= 45^\circ$. Se noi avrem determinato una volta la lunghezza di ciascun di questi archi per mezzo delle loro tangenti, prenderem la somma di queste due lunghezze, ed otterremo con ciò la lunghezza dell' arco di 45°. Ma perchè di tali archi ciascuno è minore del semiquadrante, perciò le lor tangenti saranno minori del raggio, e quindi la serie rappresentatrice della lunghezza di ciascheduno sarà più convergente, e più facile a sommarsi.

Se b, e c sono due archi qualunque, si ha $\text{tang.}(b + c) = \frac{\text{tang.}\, b + \text{tang.}\, c}{1 - \text{tang.}\, b . \text{tang.}\, c}$, posto il raggio $= 1$. Se dunque $b + c = 45^\circ$, nel qual caso $\text{tang.}(b + c) = 1$, si ha $\frac{\text{tang.}\, b + \text{tang.}\, c}{1 - \text{tang.}\, b\, \text{tang.}\, c} = 1$, e $\text{tang.}\, b = \frac{1 - \text{tang.}\, c}{1 + \text{tang.}\, c}$. Facciasi $\text{tang.}\, c = \frac{1}{2}$, e sarà $\text{tang.}\, b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Quindi è d' uopo soltanto di calcolare la lunghezza di un arco, la cui tangente sia $= \frac{a}{2}$, e quella d' un altro, la tangente del quale sia

$= \frac{a}{3}$. Sostituiscasi pertanto $\frac{a}{2}$ in luogo di x nella serie, la quale si trasformerà in $\frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^4} - \frac{1}{7\cdot 2^6} + \frac{1}{9\cdot 2^8} - \frac{1}{11\cdot 2^{10}} + \&c\right)$, indi sostituendovi $\frac{a}{3}$ in vece di x, si otterrà l' altra $\frac{a}{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{5\cdot 3^4} - \frac{1}{7\cdot 3^6} + \frac{1}{9\cdot 3^8} - \frac{1}{11\cdot 3^{10}} + \&c\right)$. Si eseguisca il calcolo, e si computi ciascuna serie fino alla decima cifra decimale (*), e si troverà il valor della prima $= \frac{a}{2}(0{,}9272952180)$, ossia $a(0{,}4636476090)$, e pel valore della seconda $\frac{a}{3}(0{,}9652516632)$, ossia $a(0{,}3217505544)$. Dunque la lunghezza dell' arco di $45^\circ = a(0{,}7853981634)$, e moltiplicato questo numero per 4 per avere la semiperiferia, dà $a(3{,}1415926536)$. Dunque sta il raggio alla semiperiferia, ovvero il diametro alla periferia $:: a : a(3{,}1415926536) :: 1 : 3{,}1415926536$; rapporto, che si potrebbe facilmente trovare con maggior esattezza per mezzo del metodo precedente.

(*) Della prima serie meno convergente bisogna sommare per lo meno quindici termini, e dieci per lo meno della seconda.

CAPO IX.

Dell' integrazione dei Differenziali logaritmici.

29. Abbiam veduto, che $d.\log. x = \frac{dx}{x}$ (Calc. Diff. §. 46.). Dunque reciprocamente $\int\frac{dx}{x} = \log. x + C$. Inoltre $d.\log. ax = \frac{adx}{ax} = \frac{dx}{x}$, e $\log. ax = \log. x + C$, ove C è necessariamente $= \log. a$.

30. Si trova inoltre $\int\frac{dx}{a+x} = \log.(a+x) + C$, e $\int\frac{2xdx}{a^2+x^2} = \log.(a^2+x^2) + C$. Però in tali casi l' integrale è il logaritmo del denominatore.

Ma per integrare $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$, è d' uopo dare a questo differenziale una forma tale, per cui apparisca nel numeratore il differenziale del denominatore, cioè $3x^2dx$. Perciò deesi scrivere la formola così: $\frac{a}{3}\cdot\frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$, indi si trova l' integrale $= \frac{a}{3}\log.(a^3+x^3) + C$. Così pure $\int\frac{dx}{a-x} = \int -1 \times \frac{-dx}{a-x} = -\log.(a-x)$

$+ C = \log. \frac{1}{a - x} + C$. Inoltre $\int \frac{xdx}{a^2 + x^2} =$
$\frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \log. (a^2 + x^2) + C = \ldots.$
$\log. \sqrt{(a^2 + x^2)} + C$. Finalmente $\int \frac{ax^{n-1}dx}{k + bx^n} =$
$\int \frac{a}{nb} \cdot \frac{nbx^{n-1}dx}{k + bx^n} = \frac{a}{nb} \log. (k + bx^n) + C = \ldots$
$\log. (k + bx^n)^{\frac{a}{bn}} + C.$

31. Ecco un esempio della maniera di determinare in numeri il valore di siffatti integrali. Per avere per es. il valore di $\log. (a + x)$, quando $a = 5$, e $x = 2$, bisogna cercare il logaritmo iperbolico di 7. A tal fine cerco nelle tavole ordinarie il logaritmo briggiano di 7, il quale è $0{,}8450980$. Questo lo moltiplico per $2{,}3025851$, ed ottengo $1{,}94591$ pel valore di $\log. (a + x)$, o pel valore dell' integrale di $\frac{dx}{a + x}$, nell' ipotesi di $a = 5$, e di $x = 2$.

32. Occorrono talvolta dei differenziali, integrabili per mezzo de' logaritmi, sebbene non compajano sotto una forma simile alle precedenti. A tal caso appartiene il differenziale $\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)}}$. Ci riesce qualche volta di dare a queste espressioni la forma di un differenzial logaritmico col moltiplicarle per una funzione di x tale, che il prodotto, che ne nasce, sia il differenziale di questa funzione, o almeno sia il di lei differenziale moltiplicato o diviso per una quantità costante. In allora si

divida di nuovo per la stessa funzione, e un tal differenziale sarà visibilmente un differenzial logaritmico. Applichiamo quest' osservazione al differenziale $\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)}}$. Si moltiplichi per $x + \sqrt{(x^2 - 1)}$, con che si ottiene $\frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - 1)}}$ $+ dx$, che è realmente il differenziale di $x + \sqrt{(x^2 - 1)}$. Si ha per conseguenza $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)}} =$

$$\int \frac{dx + \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - 1)}}}{x + \sqrt{(x^2 - 1)}} = \log. [x + \sqrt{(x^2 - 1)}] + C.$$

In simil guisa si trasforma il differenziale $\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, qualora si moltiplichi il suo numeratore e denominatore per $\sqrt{-1}$, per cui si ottiene $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(x^2 - 1)}}$, il cui integrale è $\sqrt{-1}. \log. [x + \sqrt{(x^2 - 1)}] + C$.

APPENDICE

DEL P. D. GREGORIO FONTANA.

È cosa mirabile nell' integrazione delle formole logaritmiche, come una tra le più semplici di queste, che è $\int \frac{dz}{\log. z}$, sia ancora rimasta indomabile dopo i replicati tentativi di Eulero. Questi però, se non ha potuto assegnare l' integrale in generale, lo ha assegnato per certi valori determinati della variabile z, ed ha per es. stabilito questo importante Teorema, che il detto integrale preso da $z = 0$ fino a $z = 1$ ha un valore infinito, teorema, ch' egli dimostra con questo brevissimo discorso: „ Si supponga la variabile z già pervenuta al valore infinitamente vicino all' unità, sicchè sia $z = 1 - \omega$, essendo ω infinitesima; allora a motivo di $dz = -d\omega$, e $\log. z = \log. (1 - \omega) = -\omega$, la formola $\int \frac{dz}{\log. z} = \int \frac{d\omega}{\omega}$ diventa visibilmente $= \log. \omega$, cioè infinita „. Parmi però rimanere qualche sospetto sulla legittimità di questa dimostrazione, perchè non si vede, che coll' integrale $\log. \omega$ siasi adempito alla prima delle due condizioni, di dover cioè incominciare da $z = 0$, ovvero da $\omega = 1$, che ripugnerebbe al supposto di ω infinitesimo.

Ecco ora come io prendo a dimostrar il teorema, passando però per un lungo circuito, che per altro parmi rigoroso, ed anche elegante.

Preso i per un numero infinito, sarà $z^{\frac{1}{i}} = u + 1$, essendo u un infinitesimo. Dunque $\log. z = i \log. (1 + u) = iu = i(z^{\frac{1}{i}} - 1)$; e però $\int \frac{dz}{\log. z} = \int \frac{dz}{i(z^{\frac{1}{i}} - 1)}$. Facciasi $z^{\frac{1}{i}} = x$ e perciò $z = x^i$, $dz = ix^{i-1}dx$, onde $\int \frac{dz}{i(z^{\frac{1}{i}} - 1)}$

$$= \int \frac{x^{i-1}dx}{x-1} = \int dx [x^{i-2} + x^{i-3} + x^{i-4}$$

$$+ x^{i-5} \ldots + 1 + \frac{1}{x-1}] = \frac{x^{i-1}}{i-1} + \frac{x^{i-2}}{i-2} + \frac{x^{i-3}}{i-3} \ldots + x + \log. (x-1) + \text{Cost.}$$

E poichè per la prima condizione $\int \frac{dz}{i(z^{\frac{1}{i}} - 1)}$ dee svanire allorchè $z = 0$, ovvero x^i, oppure $x = 0$, sarà quindi $\text{Cost.} = -\log. -1$. Dunque

$$\int \frac{dz}{\log. z} = \frac{x^{i-1}}{i-1} + \frac{x^{i-2}}{i-2} + \frac{x^{i-3}}{i-3} \ldots + x + \log. \frac{x-1}{-1};$$

e preso $z = 1$, cioè $x = 1$ nasce

$$\int \frac{dz}{\log. z} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{i-1} + \log. 0 = \infty - \infty.$$

Per evitare ora questo valore indeterminato e vago $\infty - \infty$, getto in serie $\log. \frac{x-1}{-1}$, ovvero $\log. (1-x)$, ed ho

$$\log. (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \ldots - \frac{x^{i-1}}{i-1} - \frac{x^i}{i} - \frac{x^{i+1}}{i+1} - \frac{x^{i+2}}{i+2} \ldots - \frac{x^{2i}}{2i} - \frac{x^{2i+1}}{2i+1} - \frac{x^{2i+2}}{2i+2} \ldots - \frac{x^{\lambda i}}{\lambda i},$$

nella qual serie visibilmente convergente, a motivo di x non mai maggiore dell' unità, il numero λ è un numero infinito qualunque, non essendovi ragione alcuna, per cui debba arrestarsi la serie al numero i di termini, piuttosto che ad un numero comunque più elevato di i come è λi. Perlocchè sostituito nella predetta equazione questo valore di log. $(1 - x)$, si troverà

$$\int \frac{dz}{\log.\, z} = -\frac{x^i}{i} - \frac{x^{i+1}}{i+1} - \frac{x^{i+2}}{i+2} - \frac{x^{i+3}}{i+3} \dots - \frac{x^{\lambda i}}{\lambda i}$$

; e quindi posto $z = 1$, e conseguentemente $x = 1$, sarà $\int \frac{dz}{\log.\, z}$ (dentro i limiti di $z = 0$, e $z = 1$) $= -\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+3} \dots - \frac{1}{\lambda i}$. Ora io ho dimostrato nel primo Opuscolo del I. Vol. degli *Atti della Soc. Ital.*, che $\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} \dots + \frac{1}{\lambda i} = \log.\, \lambda$. Dunque $\int \frac{dz}{\log.\, z} = -\log.\, \lambda$, cioè l'infinito negativo. Il che era &c.

CAPO X.

Dell' Integrazione dei Differenziali delle Quantità Esponenziali.

33. Non si può prescrivere su di ciò altra regola se non che bisogna studiarsi di spezzare il differenzial proposto in due altri fattori, l'un de' quali sia il differenziale del logaritmo dell' altro. Se ciò accade, si divida per quest' altro fattore. Pertanto facilmente si vede, che

$x^y\left(dy \log.\, x + \frac{y\,dx}{x}\right)$ è suscettibile d' integrazione, poichè il fattore $dy \log.\, x + \frac{y\,dx}{x}$ è il differenziale di $y \log.\, x$, e $y \log.\, x$ è il logaritmo di x^y. Si trova dunque per integrale

$$\frac{x^y\left(dy \log.\, x + \frac{ydx}{x}\right)}{d \log.\, x^y} + C = \frac{x^y\left(dy \log.\, x + \frac{ydx}{x}\right)}{dy \log.\, x + \frac{ydx}{x}} + C = x^y + C.$$

È chiaro parimente, che anche $e^{ax}dx$ è capace d' integrazione, perchè dx è il differenziale del logaritmo di e^{ax}, diviso per una costante. Perciò si ha $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}dx}{a\,dx \log.\, e} = \frac{e^{ax}}{a \log.\, e}$. Ora se e sarà quel numero, il cui logaritmo $= 1$, trovasi l' integrale di $e^{ax}dx$, dividendo questo differenziale pel differenziale dell' esponente di e.

34. Se fosse proposto il differenziale $e^{ax}x^m dx$, ove e esprime quel numero, il logaritmo del quale $= 1$, sarà primieramente $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$. Quindi si può supporre $\frac{e^{ax}x^m}{a} - f = \int e^{ax}x^m dx$. Differenziando sarà $e^{ax}x^m dx + \frac{m}{a}e^{ax}x^{m-1}dx - df = e^{ax}x^m dx$. Ne viene perciò $\frac{m}{a}x^{m-1}e^{ax}dx = df$. Per tro-

var f, non fa d' uopo che d' integrare $\frac{-}{a} x^{m-1} e^{ax} dx$. Ma la regola d' integrar un tal prodotto è quella appunto che si cerca. Perciò bisogna procedere con questo, come sopra, cioè bisogna porre $f = \frac{m x^{m-1} e^{ax}}{a^2} - g$, giacchè $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$. Indi si trova dg, come prima fu trovato df. Cioè si ha $df = \frac{m x^{m-1} e^{ax} dx}{a} + \frac{m(m-1) x^{m-2} e^{ax} dx}{a^2} - dg$, e però $dg = \frac{m(m-1) x^{m-2} e^{ax} dx}{a^2}$. Sia ora di nuovo $g = \frac{m(m-1) x^{m-2} e^{ax}}{a^3} - h$, e differenziando $dg = \frac{m(m-1) x^{m-2} e^{ax} dx}{a^2} + \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3} e^{ax} dx}{a^3} - dh$. Dunque $dh = \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3} e^{ax} dx}{a^3}$. Sia ancora $h = \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3} e^{ax}}{a^4} - l$, e così di seguito. Abbiam di sopra trovato $\int e^{ax} x^m dx = \frac{e^{ax} x^m}{a} - f$; quindi sostituendo prima ad f, indi a g, h, &c. i loro rispettivi valori, s' avrà la serie $\int e^{ax} x^m dx = \frac{e^{ax} x^m}{a} - \frac{m x^{m-1} e^{ax}}{a^2} + \frac{m(m-1) x^{m-2} e^{ax}}{a^3} - \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3} e^{ax}}{a^4} + \&c =$

$e^{ax}\left(\frac{x^m}{a} - \frac{m x^{m-1}}{a^2} + \frac{m(m-1) x^{m-2}}{a^3} - \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3}}{a^4} + \&c.\right)$ Quando m è un numero intero e positivo, allora la serie si rompe al termine che si trova moltiplicato in $m - m$. Sia per es. $m = 2$, sarà $\int e^{ax} x^2 dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$. In cotesto caso i termini camminano co' segni alteranti $+$ e $-$.

Ma se m sarà un intero negativo, sarà $\int \frac{e^{ax} dx}{x^m} = e^{ax}\left(\frac{1}{a x^m} + \frac{m}{a^2 x^{1+m}} + \frac{m(m+1)}{a^3 x^{2+m}} + \frac{m(m+1)(m+2)}{a^4 x^{3+m}} + \&c\right)$. Sia nuovamente $m = 2$, e s' avrà $\int \frac{a^{ax} dx}{x^2} = e^{ax}\left(\frac{1}{ax^2} + \frac{2}{a^2 x^3} + \frac{2.3}{a^3 . x^4} + \frac{2.3.4}{a^4 . x^5} + \&c\right)$.

Sia $m = \frac{2}{3}$. Se poniamo questo valore; nella prima equazione avremo $\int e^{ax} x^{\frac{2}{3}} dx = e^{ax}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a} - \frac{2}{3a^2 x^{\frac{1}{3}}} - \frac{2}{3^2 a^3 x^{\frac{4}{3}}} - \frac{8}{3^3 a^4 x^{\frac{7}{3}}} - \&c\right)$, se lo poniamo nella seconda, avremo $\int \frac{e^{ax} dx}{x^{\frac{2}{3}}} = e^{ax}\left(\frac{1}{ax^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{3a^2 x^{\frac{5}{3}}} + \frac{2.5}{3^2 a^3 x^{\frac{8}{3}}} + \frac{2.5.8}{3^3 a^4 x^{\frac{11}{3}}} + \&c\right)$.

35. Si può adoprare con molto vantaggio il numero e, il cui logaritmo $= 1$, per l' integrazione di que' differenziali, che contengono de' logaritmi. Se si ha ad integrare per es. $x^n\,dx\,(\log.\,x)^m$, posto $\log.\,x = z = z\,\log.\,e$, sarà $x = e^z$, e $dx = e^z dz$, e $x^n\,dx\,(\log.\,x)^m = z^m\,dz\,e^{(n+1)z}$, il qual differenziale è integrabile algebricamente nel caso istesso del precedente, e nella stessa maniera.

CAPO XI.

Dell' Integrazione de' differenziali, ne' quali entrano seni e coseni, ec.

36. Abbiamo veduto, che $d\,\text{sen.}\varphi = d\varphi\,\cos.\varphi$, e $d.\cos.\,\varphi = -\,d\varphi\,\text{sen.}\,\varphi$. Dunque reciprocamente l' integrale della prima formola sarà $= \text{sen.}\,\varphi + C$, e della seconda $= \cos.\,\varphi + C$. Su questi due capi si può fondare l' integrazione di qualunque differenziale affetto da seni e coseni, seguendo altronde le regole da noi precedentemente stabilite. Gli esempi renderanno la cosa chiarissima.

Abbiasi ad integrare $d\varphi\,\cos.\,3\varphi$; questa si scriva così: $\frac{3d\varphi\,\cos.\,3\varphi}{3}$, e l' integrale si trova $= \frac{\text{sen.}\,3\varphi}{3} + C$. Medesimamente si trova l' integrale di $d\varphi\,\text{sen.}\,3\,\varphi$, scrivendo in sua vece $\frac{-3d\varphi\,\text{sen.}\,3\varphi}{-3}$; poichè allora l' integral sarebbe $= \frac{\cos.\,3\varphi}{-3} + C$. Generalmente $\int d\varphi\,\text{sen.}\,m\varphi$ si cangia in $\int \frac{-\,d\varphi\,\text{sen.}\,m\varphi}{-\,m}$, ed è $= \frac{-\cos.\,m\varphi}{m} + C$.

Debbasi integrare $(\text{sen.}\,\varphi)^n\,d\varphi\,\cos.\,\varphi$; si osservi, che questa espressione è $= (\text{sen.}\,\varphi)^n\,d\,\text{sen.}\,\varphi$. Se trattasi ora sen. φ come una variabile ordinaria x, ogni differenziale si potrà integrare, come s' integra $n x^{n-1} dx$, e sarà $= \frac{(\text{sen.}\,\varphi)^{n+1}}{n+1} + C$.

Se fosse proposto ad integrare $(\text{sen.}\,m\varphi)^n\,d\varphi\,\cos.\,m\varphi$, si scriverebbe: $\frac{(\text{sen.}\,m\varphi)^n\,m d\varphi\,\cos.\,m\varphi}{m} = \frac{(\text{sen.}\,m\varphi)^n\,d\,\text{sen.}\,m\varphi}{m}$, il cui integrale $= \frac{(\text{sen.}\,m\varphi)^{n+1}}{m\,(n+1)} + C$.

Per trovare $\int (\cos.\,m\,\varphi)^n\,d\varphi\,\text{sen.}\,m\,\varphi$, si scriva invece $\int \frac{-\,(\cos.\,m\,\varphi)^n\,m\,d\,\varphi\,\text{sen.}\,m\,\varphi}{-\,m}$; il cui integrale si trova $= \frac{(\cos.\,m\varphi)^{n+1}}{-\,m\,(n+1)} + C$.

Debbasi integrare $d\varphi\,\text{sen.}\,p\varphi\,.\,\cos.\,q\varphi$: è d' uopo risovvenirci, che $\text{sen.}\,(a+b) = \text{sen.}\,a\,\cos.\,b + \text{sen.}\,b\,\cos.\,a$; $\text{sen.}\,(a-b) = \text{sen.}\,a\,\cos.\,b - \text{sen.}\,b\,\cos.\,a$; onde sommando le due formole e dividendo per 2 s' avrà sen. a cos. $b = \frac{1}{2}$ sen. $(a+b) + \frac{1}{2}$ sen. $(a-b)$. Di più per essere cos. $(a+b) =$ cos. a cos. $b -$ sen. a sen. b, e cos. $(a-b) =$ cos. a cos. $b +$ sen. a sen. b, è altresì cos. a cos. $b = \frac{1}{2}$ cos. $(a+b) + \frac{1}{2}$ cos. $(a-b)$, e sen. a sen. $b = \frac{1}{2}$ cos. $(a-b) - \frac{1}{2}$ cos. $(a+b)$. Dunque sen. $p\varphi$. cos. $q\varphi = \frac{1}{2}$ sen. $(p+q)\varphi + \frac{1}{2}$ sen. $(p-q)\varphi$. Resta pertanto ad integrarsi $\frac{1}{2}d\varphi$ sen. $(p+q)\varphi + \frac{1}{2}d\varphi$ sen. $(p-q)\varphi = \frac{\frac{1}{2}(p+q)d\varphi \text{ sen.} (p+q)\varphi}{p+q} + \frac{\frac{1}{2}(p-q)d\varphi \text{ sen.} (p-q)\varphi}{p-q}$; e l' integrale si trova $= \frac{-\frac{1}{2}\text{ cos.} (p+q)\varphi}{p+q} - \frac{\frac{1}{2}\text{ cos.} (p-q)\varphi}{p-q} + C$.

Nella stessa maniera si integrano i differenziali della forma: $d\varphi$ sen. $p\varphi$ cos. $q\varphi$ sen. $r\varphi$, cambiando questi prodotti in seni e coseni della somma o differenza degli archi $p\varphi$, $q\varphi$, $r\varphi$.

Qualora si debba integrare $d\varphi$ (sen. $\varphi)^3$, si converta in $d\varphi$ sen. φ (sen. $\varphi)^2$. Ma (sen. $\varphi)^2$ $=$ sen.φ sen.$\varphi = \frac{1}{2}$ cos. $(\varphi-\varphi) - \frac{1}{2}$ cos. $(\varphi+\varphi)$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. 2φ. Dunque sen. φ (sen. $\varphi)^2 = \frac{1}{2}$ sen. $\varphi - \frac{1}{2}$ sen. φ cos. 2φ. Conseguentemente $d\varphi$ (sen. $\varphi)^3 = \frac{1}{2} d\varphi$ sen. $\varphi - \frac{1}{2} d\varphi$ sen. φ cos. 2φ. Se ora si proceda con sen. φ cos. 2φ, come si è proceduto con sen. $p\varphi$ cos. $q\varphi$, allora l' integrazione non ha più niente di difficoltà.

Di quì si comprende come si debbono integrare l' espressioni $d\varphi$ (sen. $\varphi)^n$, $d\varphi$ (cos. $\varphi)^n$, ove n è un numero intero positivo.

D' una simil maniera si possono integrare le espressioni della forma $d\varphi$ (sen. $p\varphi)^m$ (cos. $q\varphi)^n \times$

(sen. $r\varphi)^s$, in cui m, n, s sono interi positivi.

Quando in alcuni differenziali occorra l' espressione della tangente, questa si riduca a seni, e coseni, stante che tang.$\varphi = \frac{\text{sen.} \varphi}{\text{cos.} \varphi}$; &c.

CAPO XII.

Di alcuni differenziali, che sono integrabili per archi, o per segmenti di cerchio.

37. Dacchè le tavole logaritmiche non meno, che le trigonometriche sono state calcolate per i seni, coseni &c di qualunque angolo, non è punto necessario di svolger in serie que' differenziali, i quali si riferiscono a' logaritmi, ovvero al cerchio, ma si possono integrare nella maniera seguente.

38. È facile il dimostrare, che l' espressione per es. $\frac{\frac{1}{2}a dx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$ è il differenziale d' un arco di cerchio di diametro $= a$, e di ascissa $= x$. Conseguentemente l' integrale di $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - x^2)}}$ e la lunghezza dell' arco AM sono espressioni sinonime. Se si cerca pertanto dato un valore della x, un determinato valore di quest' integrale, si sottragga da CA, ossia da $\frac{1}{2}a$ il dato valore di x, ossia di AP, e si otterrà CP. È dunque noto nel triangolo ret-

tangolo CMP l'angolo retto, l'ipotenusa CM, e 'l lato CP. Perciò si troverà anche l'angolo ACM. Dall'esser poi noto il numero de' gradi compresi nell'arco AM, si può facilmente calcolare la lunghezza di quest'arco.

39. Se dato fosse il differenziale $\frac{h\,dx}{\sqrt{(gkx - px^2)}}$, in cui h, g, p, k sono quantità costanti, si può ridurlo simile al precedente dividendo prima sotto e sopra per $\sqrt{p}$, con che si ha $\frac{\frac{h\,dx}{\sqrt{p}}}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - x^2\right)}}$

$= \frac{h}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - x^2\right)}}$; di poi si moltiplichi sopra e sotto per $\frac{gk}{2p}$, per cui si trova

$$\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}}{\frac{gk}{2p}} \cdot \frac{\frac{gk\,dx}{2p}}{\sqrt{\left(\frac{gkx}{p} - x^2\right)}} = \frac{2ph}{gk\sqrt{p}} \cdot \frac{\frac{gkdx}{2p}}{\sqrt{\left(\frac{gkx}{p} - x^2\right)}}.$$

e l'integral di questo si è un arco di cerchio, il cui diametro $= \frac{gk}{p}$, e l'ascissa $= x$, il qual arco va poi moltiplicato per $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$.

40. Quando si supponga, che le ascisse prendano la loro origine non già nel punto A, ma bensì nel punto C, e che sia il raggio CA

$= b$, e l'ascissa $CP = x$, $\frac{-b\,dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)}}$ sarà il differenziale dell'arco AM. Dato pertanto un differenziale della forma $\frac{k\,dx}{\sqrt{(gh - px^2)}}$, questo si trasformi in $\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - x^2\right)}}$.

Ora $\frac{gh}{p}$ significa quì lo stesso che b^2 nel differenzial precedente, e la quantità $-b$ (fattore della dx) nel presente caso è $= -\sqrt{\frac{gh}{p}}$; si moltiplichi pertanto il numeratore ed il denominatore per questa quantità, e sarà

$\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \cdot \frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - x^2\right)}}$. Pongasi ora $CA = \sqrt{\frac{gh}{p}}$, e $CP = x$; e $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \cdot AM + C = \frac{-k}{\sqrt{gh}} \cdot AM + C$ sarà l'integral cercato.

41. $\frac{a^2dx}{a^2 + x^2}$ è il differenziale d'un arco circolare di raggio $= a$, e di tangente $= x$.

La lunghezza di quest'arco si può trovare cercando per mezzo della tangente x l'angolo ACN.

Sia proposto $\frac{k\,dx}{g\,b^2 + h\,x^2}$. Si divida sopra e sotto per h, con che si ha $\frac{k}{h} \cdot \frac{dx}{\frac{g\,b^2}{h} + x^2}$; e moltiplicando parimenti sotto e sopra per $\frac{g\,b^2}{h}$ si ha

$$\frac{\frac{k}{h}}{\frac{g\,b^2}{h}} \cdot \frac{\frac{g\,b^2}{h}\,dx}{\frac{g\,b^2}{h} + x^2} = \frac{k}{g\,b^2} \cdot \frac{\frac{g\,b^2}{h}\,dx}{\frac{g\,b^2}{h} + x^2}.$$

Si avrà dunque l'integrale del differenzial proposto, calcolando la lunghezza di quell'arco, che ha x per tangente, e $\sqrt{\frac{gb^2}{h}}$ per raggio, e moltiplicando l'arco istesso per $\frac{k}{g\,b^2}$.

42. Nel cerchio si ha $ydx = dx\sqrt{(ax - x^2)}$. Dunque qualsivoglia differenziale, il quale o abbia di già questa forma, o vi sia riducibile, s'integrerà per un semisegmento circolare. Supposta l'origine delle ascisse nel punto C, e fatto $CA = b$, $CP = x$, $-\,d\,x\sqrt{(b^2 - x^2)}$ sarà il differenziale del semisegmento APM.

CAPO XIII.

De' casi, ne' quali l'integrale d'un certo differenzial binomio dipende dall'integrale noto d'un altro differenzial binomio.

43. Se dopo le indagini idonee a scoprire, se un proposto differenziale binomio è integrabile algebricamente, ci siamo accertati non esser quello compreso ne' casi prescritti di sopra, non si deve perciò tosto ricorrere al metodo d'approssimazione, che spiegato abbiamo ne' capi precedenti. Avvegnachè può accadere, che l'integrale del proposto differenzial binomio dipenda dall'integrale di un differenzial binomio più semplice. Noi cercheremo di sviluppare i caratteri, che aver deggiono tali differenziali, affine di esser in questo modo capaci d'integrazione.

44. Qualora dunque si voglia esaminare se l'integrale di $x^m\,dx\,(a + b\,x^n)^p$ dipenda dall'integrale di $x^q\,dx\,(a + b\,x^n)^r$, si proceda nel modo seguente. Si prenda a differenziare la formola $x^{m+1}(a + bx^n)^p$, e sarà

$d[x^{m+1}(a + bx^n)^p] = (m+1)x^m(a + bx^n)^p dx + npbx^{m+1}x^{n-1}(a + bx^n)^{p-1}dx$. Dunque

$d[x^{m+1}(a + bx^n)^p] - npbx^{m+n}dx(a + bx^n)^{p-1} = (m+1)x^m dx(a + bx^n)^p$; ovvero

$(m+1)x^m dx(a + bx^n)^p = d[x^{m+1}(a + bx^n)^p] - npbx^{m+n}dx(a + bx^n)^{p-1}$. E però

$(m+1)\int x^m dx(a + bx^n)^p = x^{m+1}(a + bx^n)^p$

$- npb \int x^{m+n} dx (a + bx^n)^{p-1}$, cioè

$$\int x^m dx (a + bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1} \int x^{m+n} dx (a + bx^n)^{p-1}.$$

Nella stessa maniera si trova $\int x^{m+n} dx (a + bx^n)^{p-1}$

$$= \frac{x^{m+n+1}(a + bx^n)^{p-1}}{m+n+1} - \frac{n(p-1)b}{m+n+1} \int x^{m+2n} dx (a + bx^n)^{p-2},$$

mettendo cioè nell' equazion precedente $m + n$ invece di m, e $p - 1$ invece di p. Si ottiene perciò

$$\int x^m dx (a + bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{npbx^{m+n+1}(a + bx^n)^{p-1}}{(m+1)(m+n+1)} + \frac{n^2 p (p-1) b^2}{(m+1)(m+n+1)} \times \int x^{m+2n} dx (a + bx^n)^{p-2}.$$

45. Facilmente si vede essere generalmente

$$\int x^m dx (a + bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{npbx^{m+n+1}(a + bx^n)^{p-1}}{(m+1)(m+n+1)} + \frac{n^2 p (p-1) b^2 x^{m+2n+1}(a + bx^n)^{p-2}}{(m+1)(m+n+1)(m+2n+1)} - \ldots$$

$$\pm \frac{n^{t-1} p (p-1)(p-2) \ldots (p-t+2) b^{t-1}}{(1+m)(1+m+n)(1+m+2n)\ldots[1+m+n(t-1)]} \times x^{1+m+n(t-1)} (a + bx^n)^{p-t+1} \mp \frac{n^t p (p-1) \ldots\ldots (p-t+1) b^t}{(1+m)(1+m+n)\ldots[1+m+n(t-1)]} \times \int x^{m+tn} dx (a + bx^n)^{p-t}.$$

Il segno superiore vale, quando t è un numero positivo intero, ma impari, l' inferiore,

quando t è un intero positivo pari. Ora se $p - t = r$, ovvero $p - r = t$, ossia eguale ad un numero intero t, allora l' integrale di $x^m dx(a + bx^n)^p$ dipende dall' integrale di $x^{m+tn} dx (a + bx^n)^r$, e se $t = \frac{q-m}{n}$ è numero intero positivo, allora l' integrale del differenzial proposto dipende dall' integrale di $x^q dx (a + bx^n)^r$; poichè in tal caso si ha $q = m + tn$.

46. L' integrale poi di $x^{m+tn} dx (a + bx^n)^r$ dipende dall' integrale di $x^h dx (a + bx^n)^r$, ognora che $\frac{m+tn-h}{n}$, ovvero $\frac{m-h}{n}$, cioè la differenza degli esponenti della x fuor del binomio divisa per l' esponente della x entro il binomio dà per quoto un numero intero positivo. Per dimostrarlo si assuma la formola $x^{q+1}(a + bx^n)^{p+1}$, la quale differenziata ci dà

$$d[x^{q+1}(a + bx^n)^{p+1}] = (q+1) x^q dx (a + bx^n)^{p+1} + n(p+1) b x^{q+1+n-1} dx (a + bx^n)^p = (aq + a) x^q dx (a + bx^n)^p + (qb + b) x^{q+n} dx (a + bx^n)^p + (npb + nb) x^{q+n} dx (a + bx^n)^p = (aq + a) x^q dx (a + bx^n)^p + (npb + nb + qb + b) x^{q+n} dx (a + bx^n)^p.$$

Onde

$$\int x^{q+n} dx (a + bx^n)^p = \frac{x^{q+1}(a + bx^n)^{p+1}}{b(np+n+q+1)} - \frac{a(q+1)\int x^q dx (a + bx^n)^p}{b(np+n+q+1)}.$$

47. Se dunque trovar si voglia l' integrale di $x^m dx (a + bx^n)^p$ per mezzo dell' integral noto di $x^q dx (a + bx^n)^p$, si ponga $q + n = m$, ossia $q = m - n$, con che si avrà

$$\int x^m dx (a + bx^n)^p = \frac{x^{1+m-n}(a + bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} -$$

$$\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}dx(a+bx^n)^p.$$ Parimenti si trova, ponendo $q+n=m-n$, ossia $q=m-2n$

$$\int x^{m-n}dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{1+m-2n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m-n+1)}$$
$$-\frac{a(m-2n+1)}{b(np+m-n+1)}\int x^{m-2n}dx(a+bx^n)^p.$$

Quindi ne nasce la formola generale.

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{1+m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)}$$
$$-\frac{a(1+m-n)x^{1+m-2n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^2(np+m+1)(np+m+1-n)}+$$
$$\frac{a^2(1+m-n)(1+m-2n)x^{1+m-3n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^3(np+m+1)(np+m+1-n)(np+m+1-2n)}\ \ldots\ldots$$
$$\mp\frac{a^{t-1}(1+m-n)(1+m-2n)\ldots[1+m-n(t-1)]x^{1+m-tn}(a+bx^n)^{p+1}}{b^t(np+m+1)(np+m+n-1)\ldots[np+m+1-n(t-1)]}\pm$$
$$\frac{a^t(1+m-n)(1+m-2n)\ldots\ldots(1+m-tn)}{b^t(np+m+1)(np+m+1-n)\ldots[np+m+1-n(t-1)]}\int x^{m-tn}dx(a+bx^n)^p.$$

Vale il segno superiore, qualora t sia pari, l' inferiore, qualora t sia dispari. Da quì si vede, che se $m-tn=u$, ovvero $m-u=tn$, o $t=\frac{m-u}{n}$, cioè se la differenza degli esponenti della x fuor del binomio divisa per l' esponente n della x nel binomio dà per quoto un numero intero positivo, l' integrale di $x^m dx(a+bx^n)^p$ dipenderà da quello di $x^u dx(a+bx^n)^p$, e che quello potrà trovarsi per questo.

48. L' integrale di $dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ dipende dalla quadratura del cerchio. Sia il raggio $=1$, l' ascissa presa dal centro $=x$, sarà quindi l' ordinata $=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Ora se si volesse trovare

$\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$ per mezzo dell' integrale di $dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, si osservi, che ciò è possibile, mentre $t=\frac{m-u}{n}=\frac{4-0}{2}=2$ è un intero positivo. Si ha poi $a=1$, $b=-1$, $m=4$, $n=2$, e $p=\frac{5}{2}$; perciò si trova $\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$

$$=x^5(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{5x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{5\cdot7}+$$
$$\frac{5\cdot3}{5\cdot7}\int x^6dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$ Di più

$$\int x^6dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{-x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10}-\frac{7x^5(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10.8}$$
$$-\frac{7\cdot5x^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10.8.6}-\frac{7\cdot5\cdot3x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10.8.6.4}$$
$$+\frac{7\cdot5\cdot3}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Onde finalmente si ha

$$\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10}$$
$$-\frac{3x^5(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10.8}-\frac{3.5x^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10.8.6}-$$
$$\frac{3.5.3x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10.8.6.4}+\frac{3.5.3}{10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

Come si possano integrare que' differenziali, che son della forma $dx\sqrt{(1-x^2)}$, l' abbiam già veduto di sopra.

49. Quand' anche la differenza $m-n$ degli esponenti della x fuori delle parentesi divi-

visa per l' esponente della x dentro di esse non presentasse un numero positivo intero, non si dovrebbe perciò tosto conchiudere, che l' integrale del differenzial proposto non dipende dall' integrale dell' altro differenzial più semplice. In tal caso si deve rendere negativo l' esponente della variabile dentro delle parentesi in ambedue i differenziali, e se la differenza de' due nuovi esponenti fuor delle parentesi divisa per l' esponente della x entro di esse dà un numero intero positivo, nuovamente l' integrale dell' uno di tali differenziali dipenderà dall' integral dell' altro.

Se si domandasse, se l' integrale di $x^{-8}dx(a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$ dipenda dall' integrale di $dx(a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$, a prima vista si risponderebbe di no, poichè $\frac{m-u}{n} = \frac{-8}{4} = -2$. Ma se dei due differenziali si trasforma il primo in $x^{-10}dx(a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, il secondo in $x^{-2}dx(a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, allora si vede, che $\frac{m-u}{n} = \frac{-10+2}{-4}$ dà un numero intero positivo per quoto. Quindi l' integral del primo de' due differenziali dipende dall' integral del secondo, e si ha $\int x^{-10}dx(a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$$= -\frac{x^{5}(a^4x^{-4} - 1)^{\frac{1}{2}}}{7a^4} - \frac{5x^{-1}(a^4x^{-4} - 1)^{\frac{1}{2}}}{21a^8} + \frac{5}{21a^8}\int x^{-2}dx(a^4x^{-4} - 1)^{\frac{1}{2}} + C.$$

CAPO XIV.

Dell' integrazione de' rotti razionali.

50. Qualunque differenzial razionale è sempre integrabile o algebricamente, o per archi di cerchio, o per logaritmi, o per tutti e tre questi mezzi assieme, o per due soltanto.

Egli sarà integrabile algebricamente, quando non vi sia alcuna quantità variabile nel denominatore, a meno che questa non fosse monomia; eccettuato però il caso che l' esponente di lei fosse $= 1$, in cui s' integra co' logaritmi, com' è chiaro dalle cose dette.

Non ci restan dunque che i casi, ne' quali il differenzial proposto ha un denominatore razionale polinomio.

51. Il differenziale dee esser di tal indole, che l' esponente della massima podestà della variabile nel numeratore sia minore almeno di un' unità, che nel denominatore. Quando ciò non sia, si dee dividere il numeratore pel denominatore, fintanto che il residuo non abbia la massima potestà minore di quella del suo denominatore. Se si avesse per es. ad integrare $\frac{x^3dx}{a^2 + 3ax + x^2}$, sarebbe necessario di dividere x^3dx per $a^2 + 3ax + x^2$, con che si otterrebbe $xdx - 3adx$ per quoto, e $8a^2xdx + 3a^3dx$ per residuo. Dunque in luogo di $\frac{x^3dx}{a^2 + 3ax + x^2}$

si otterrà l' espressione $xdx - 3adx + \frac{8a^2xdx + 3a^3dx}{a^2 + 3ax + x^2}$.

52. Affine di scoprire il metodo, con cui poter integrare i rotti differenziali razionali, è d'uopo ricordarci, che il differenziale del logaritmo d'una quantità è uguale al differenziale della quantità, diviso per la quantità medesima. Giacchè adunque tali differenziali vengono sempre espressi per frazioni, egli è naturale il sospetto, che l' integrazione delle frazioni razionali differenziali dipenda dai logaritmi. Sia dato per es. $2a \log.(a+x) - 2a \log.(2a+x)$. Il differenziale sarà $\frac{2adx}{a+x} - \frac{2adx}{2a+x}$, ovvero $\frac{2a^2dx}{2a^2 + 3ax + x^2}$.

Adesso per integrar questa frazione, sarebbe necessario di spezzarla in due altre, una delle quali avesse per denominatore $a+x$, e l' altra $2a+x$, ed i loro numeratori fossero quantità costanti moltiplicate in dx. I due rotti sarebbero così integrabili co' logaritmi.

53. E' dunque affatto naturale nell' integrazione d'un tal rotto differenziale il tentare di smembrarlo in tanti rotti semplici, quanti sono i fattori del denominatore, e di dare a questi rotti uno di tali fattori per denominatore. E questo infatti si è il metodo, di cui dobbiam servirci, quando tutti i fattori, da' quali risulta il denominatore d'un proposto differenziale, sono ineguali fra se.

54. Ma se alcuni dei fattori del denominatore saranno fra se uguali, non ci dobbiamo aspettare dal precedente metodo un buon suc-

cesso; poichè l' integrale non può in tal caso dipendere dai soli logaritmi.

Se si volesse per es. integrare $\frac{dx}{(a+x)^2}$; l' integral sarebbe $-(a+x)^{-1} + C$, il quale non dipende certamente da' logaritmi.

Ma se fosse proposta la quantità $\frac{a^2}{a+x} + 2a \log.(a+x) + 2a \log.(2a+x) - a \log.(3a+x)$, il di lei differenziale sarebbe $= -\frac{a^2dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{a+x} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x} = \frac{(2ax+a^2)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x} = \frac{(10a^4 + 26a^3x + 17a^2x^2 + 3ax^3)dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$, e per integrar questo rotto sarebbe indispensabile di convertirlo di nuovo in $\frac{(2ax+a^2)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$, ossia di spezzarlo in tre fattori più semplici, il primo de' quali avesse per denominatore il prodotto di tutti i fattori eguali, ed in cui il numeratore contenesse la massima podestà della variabile minore d'un grado della massima del denominatore. Ciascuno degli altri due rotti avrebbe per denominatore uno de' fattori ineguali, e nissuna potenza della x nel numeratore.

Se dunque $\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{n-1})dx}{M + Nx + Px^2 + \ldots Tx^n}$ rappresenta generalmente qualunque rotto differenziale razionale, e si suppone, che siavi nel denominatore un numero m di fattori uguali $x+g$, un altro numero p di fattori uguali $x+h$, &c, e di più un numero arbitrario di fattori ineguali $x+i$, $x+q$, $x+r$, &c, nel qual caso la precedente espressione si cangia in

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots\ldots kx^{n-1})\,dx}{(x+g)^m(x+h)^p\ldots(x+i)(x+q)(x+r)};$$

allora per poter procedere all' integrazione si deve porre

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots\ldots kx^{n-1})\,dx}{(x+g)^m(x+h)^p\ldots(x+i)(x+q)(x+r)} =$$

$$\frac{Ax^{m-1}dx+Bx^{m-2}dx\ldots\ldots+Rdx}{(x+g)^m} +$$

$$\frac{A'x^{p-1}dx+B'x^{p-2}dx+\ldots\ldots+R'dx}{(x+h)^p} + \&c.$$

$$+\frac{Ldx}{x+i}+\frac{Mdx}{x+q}+\frac{Ndx}{x+r}+\&c.$$

ove A, B, C, A', B', &c. sono costanti, che vanno determinate, qualora si voglia eseguire l'integrazione. Per riguardo ai rotti semplici $\frac{Ldx}{x+i}$, $\frac{Mdx}{x+q}$ &c. l'integrazione non ha punto di difficoltà. Imperciocchè i loro integrali sono $L.\log.(x+i)$, $M.\log.(x+q)$, &c. Per quanto poi risguarda i rotti complessi come

$$\frac{Ax^{m-1}dx+Bx^{m-2}dx\ldots\ldots+Rdx}{(x+g)^m},$$

si ponga $x+g=z$, onde $x=z-g$, e $dx=dz$. Sostituendo questi valori nella formola precedente, questa si trasforma in una serie di differenziali monomj facili ad integrarsi, e de' quali un solo ha la forma $\frac{dz}{z}$, cioè a dire sarà integrabile

per logaritmi. Dello stesso tenore si proceda col termine $\frac{A'x^{p-1}dx+B'x^{p-2}dx\ldots,+R'dx}{(x+h)^p}$; cioè si faccia $x+h=z'$.

55. Due cose ci restano ancora da ricercare: la prima si è di trovare i fattori del denominatore del differenzial proposto; l' altra di determinare i coefficienti A, B, C &c.

56. Per trovare i fattori del denominatore, si dee procedere, come si avesse a risolvere un' equazione, che fosse $=0$, da cui si ricavano i fattori binomiali, dal prodotto de' quali risulta il denominator medesimo. A tal fine noi ci riportiamo alle regole, che ci offre su di ciò l' Algebra ordinaria.

57. Per determinare i coefficienti A, B, C, &c, bisogna prima ridurre tutti i rotti che son moltiplicati da questi coefficienti allo stesso denominatore. Con ciò si ottengono due membri d' un' equazione, che hanno lo stesso denominatore, il quale perciò si può ommettere in amendue. Trasportati in seguito tutti i termini da una sola parte, ne nasce finalmente un' equazione, la quale non potrà mai verificarsi indipendentemente da qualunque valore della x, a meno che la somma de' termini, che si trovano moltiplicati per una stessa potenza della x, non sia zero. Quindi è che si ottengono tante equazioni, quanti sono i coefficienti indeterminati. Perciò la determinazione di essi non è soggetta ad alcuna difficoltà. Gli esempi metteranno la cosa in miglior luce.

58. Debbasi integrare $\frac{dx}{a^2-x^2}$. Uguagliando a zero il denominatore a modo di equazio-

ne, si vede tosto che i fattori binomiali, da' quali risulta, sono $a + x$, ed $a - x$; e perciò si faccia $\frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{Adx}{a + x} + \frac{Bdx}{a - x}$, ossia $\frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{(Aa - Ax + Ba + Bx)\,dx}{a^2 - x^2}$, ovvero $1 = Aa - Ax + Ba + Bx$, e trasponendo il secondo membro nel primo, così che i termini costanti formino una colonna da se, ed un'altra ne formino i termini affetti dalla x, si avrà

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & + Ax \\ - Aa & - Bx \\ - Ba & \end{array}\right\} = 0.$$

Per quel che si è detto di sopra, la prima colonna ci dà l'equazione $1 - Aa - Ba = 0$, e la seconda $A - B = 0$; onde si ricava $A = \frac{1}{2a} = B = \frac{1}{2a}$. Perciò $\frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{\frac{1}{2a}dx}{a + x} + \frac{\frac{1}{2a}dx}{a - x}$, e $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log.(a + x) - \frac{1}{2a}\log.(a - x) + C = \frac{1}{2a}\log.\left(\frac{a + x}{a - x}\right) + C$.

59. Scegliamo per secondo esempio la frazione $\frac{10a^4dx + 26a^3xdx + 17a^2x^2dx + 3ax^3dx}{(a + x)^2\,(2a + x)\,(3a + x)}$. Questa si ponga $= \frac{(Ax + B)\,dx}{(a + x)^2} + \frac{Cdx}{2a + x} + \frac{Ddx}{3a + x}$, e si riduca quest' ultima frazione allo stesso denominatore, poi si tolga il divi-

sor comune, e si divida per dx, indi trasportati tutti i termini in un sol membro sarà

$$\left.\begin{array}{llll} 10a^4 & + 26a^3x & + 17a^2x^2 & + 3ax^3 \\ - 6a^2B & - 5aBx & - Bx^2 & - Ax^3 \\ - 3a^3C & - 6a^2Ax & - 5aAx^2 & - Cx^3 \\ - 2a^3D & - 7a^2Cx & - 5aCx^2 & - Dx^3 \\ & - 5a^2Dx & - 4aDx^2 & \end{array}\right\} = 0.$$

In conseguenza

$$3a - A - C - D = 0$$
$$17a^2 - B - 5aA - 5aC - 4aD = 0$$
$$26a^3 - 5aB - 6a^2A - 7a^2C - 5a^2D = 0$$
$$10a^4 - 6a^2B - 3a^3C - 2a^3D = 0$$

dalle quali equazioni si ricava $A = 2a$, $B = a^2$, $C = 2a$, $D = -a$. Pertanto il differenzial proposto si converte in $\frac{(2ax + a^2)\,dx}{(a + x)^2} + \frac{2adx}{2a + x} - \frac{adx}{3a + x}$. L'integrale de' due ultimi termini è $2a\log.(2a + x) - a\log.(3a + x)$. Per integrare il primo si faccia $a + x = z$, onde $x = z - a$, e $dx = dz$; quindi $\frac{(2ax + a^2)\,dx}{(a + x)^2} = \frac{(2az - a^2)\,dz}{z^2} = \frac{2adz}{z} - \frac{a^2dz}{z^2}$, il cui integrale $= 2a\log. z + \frac{a^2}{z} = 2a\log.(a + x) + \frac{a^2}{a + x}$. L' integral completo è dunque $\frac{a^2}{a + x} + 2a\log.(a + x) + 2a\log.(2a + x) - a\log.(3a + x) + C$.

60. Ma se nel denominatore di un dato differenziale frazionario vi saranno de' fattori immaginarj, si risolva il denominatore prima ne' suoi fattori reali, e il prodotto, che rimane, si ri-

risolva in fattori non già di primo, ma di secondo grado. Da qualunque fattore di secondo grado, che s' esprime generalmente con $ax^2 + bx + c$, ne nasce allora una frazione della forma $\frac{Axdx + Bdx}{ax^2 + bx + c}$.

Sia per esempio da integrarsi la frazione $\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3}$; si vede, che $a - x$ è un fattore del denominatore. Si divida pertanto per questo fattore, e si otterrà $a^2 + ax + x^2$ per prodotto degli altri due fattori, cui supponiamo essere immaginarj.

Pertanto invece di spezzare la frazione in tre rotti più semplici, ciascun de' quali abbia un fattore del prodotto $a^3 - x^3$ per denominatore, si spezzi in due frazioni soltanto, l'una delle quali abbia per denominatore $a - x$, e l' altra il fattore $a^2 + ax + x^2$. Si faccia perciò $\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} = \frac{Adx}{a - x} + \frac{Bxdx + Cdx}{a^2 + ax + x^2}$. Ridotti questi due nuovi rotti alla stessa denominazione, levato il divisor comune, diviso tutto per dx, e trasportati tutti i termini da una sol parte, si ha

$$\left.\begin{array}{l} a^4 - Aax - Ax^2 \\ - Aa^2 + Cx + Bx^2 \\ - Ca - Bax \end{array}\right\} = 0.$$

Si uguagli a zero ciascuna colonna, che vien moltiplicata per una stessa potenza della x, e si otterrà $B - A = 0$, $C - Aa - Ba = 0$, $a^4 - Aa^2 - Ca = 0$. In conseguenza $A = \frac{a^2}{3}$,

$B = \frac{a^2}{3}$, $C = \frac{2a^3}{3}$, e $\int \frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} = \int \frac{a^2 dx}{3(a - x)}$ $+ \int \frac{a^2 xdx + 2a^3 dx}{3(a^2 + ax + x^2)}$.

Tosto vedremo come trovar si possa l' integrale della seconda frazione.

61. Quando tra' fattori di secondo grado se ne trovino di uguali, per ciascun numero n di essi si ha una frazione della forma

$$\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \ldots\ldots + Qdx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Qualora si volesse per es. integrare $\frac{(x^4 + 5ax^3 + 4a^3 x)dx}{(a^2 + ax + x^2)(a^3 - x^3)}$, si troverebbe, che il denominatore si spezza in questi tre fattori $x - a$, $x^2 + ax + a^2$, e $x^2 + ax + a^2$. Ora senza che mi trattenga a spezzare ciascuno di questi ultimi fattori in due altri, che sarebbero immaginarj, mi prevalgo piuttosto del loro prodotto, cioè di $(x^2 + ax + a^2)^2$ per denominator d'una sola frazione. Nel numeratore di questa ci debbono essere tutte le potenze della x, la massima delle quali sia minore d'un grado della massima, che è nel denominatore. Quindi si ottiene $\frac{(x^4 + 5ax^3 + 4a^3 x)dx}{(a^2 + ax + x^2)(x^3 - a^3)} =$

$$\frac{Adx}{x - a} + \frac{Bx^3 dx + Cx^2 dx + Dxdx + Edx}{(a^2 + ax + x^2)^2}.$$

Operando come sopra si avrà

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + 5ax^3 \qquad\qquad\qquad + 4a^3 x \\ - Ax^4 - 2aAx^3 - 3a^2 Ax^2 - 2a^3 Ax - a^4 A \\ - Bx^4 + aBx^3 + aCx^2 + aDx + aE \\ \qquad - Cx^3 - Dx^2 - Ex \end{array}\right\} = 0$$

onde si ha $A = \frac{10}{9}$, $B = -\frac{1}{9}$, $C = \frac{8}{3}a$, $D = -\frac{2a^2}{3}$, $E = \frac{10}{9}a^3$. Determinati così i coefficienti, altro non ci rimane, che di proporre le regole, con cui integrare la seconda delle frazioni assunte.

62. Incominciamo dalle regole, con cui si integrano i differenziali della forma $\frac{Axdx + Bdx}{ax^2 + bx + c}$.

Dividendo il numeratore, ed il denominatore pel coefficiente a, il differenziale potrà esser espresso da $\frac{A'xdx + B'dx}{x^2 + b'x + c'}$. Si faccia ora sparire dal denominatore il secondo termine ponendo $x = z - \frac{1}{2}b'$, ciò che dà pure $dx = dz$. Sostituiti questi valori nel differenzial precedente se ne ottiene un altro della forma $\frac{Czdz + Ddz}{z^2 + q^2} = \frac{Czdz}{z^2 + q^2} + \frac{Ddz}{z^2 + q^2}$, il cui primo termine si integra per logaritmi, ed il secondo per un arco di cerchio di raggio $= q$, e di tangente $= z$, oltre un fattor costante.

Si debba per es. integrare $\frac{\frac{1}{3}a^2xdx + \frac{2}{3}a^3dx}{x^2 + ax + a^2}$. si faccia $x = z - \frac{1}{2}a$, onde $dx = dz$, perciò il differenziale proposto diverrà $= \frac{\frac{1}{3}a^2zdz}{z^2 + \frac{3}{4}a^2} + \frac{\frac{1}{2}a^3dz}{z^2 + \frac{3}{4}a^2}$. L'integrale del primo termine è $\frac{a^2}{6}\log.(z^2 + \frac{3}{4}a^2)$, e quello del secondo non

è che un arco di cerchio, che ha z per tangente, e per raggio $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, il qual arco dee poi moltiplicarsi per $\frac{2}{3}a$.

63. Mostriamo finalmente, come si integrino i differenziali della forma $\frac{ax^3dx + bx^2dx + xdx + cdx}{(a^2 + ax + x^2)^2}$. A tal fine si scacci dal denominatore il secondo termine col porre $x = z - \frac{1}{2}a$, con che il differenziale si cambierà nel seguente:

$$\frac{az^3dz}{(z^2 + \frac{3}{4}a^2)^2} + \frac{Az^2dz}{(z^2 + \frac{3}{4}a^2)^2} + \frac{Bzdz}{(z^2 + \frac{3}{4}a^2)^2} + \frac{Cdz}{(z^2 + \frac{3}{4}a^2)^2}$$

ove $A = b - \frac{3}{2}a^2$, $B = \frac{3}{4}a^3 - ab + 1$, $C = -\frac{1}{8}a^4 + \frac{1}{4}a^2b - \frac{1}{2}a + c$.

Que' termini, ne' quali z ha un esponente pari nel numeratore, sono integrabili col metodo de' §. 43, 44, &c; e quelli in cui l'esponente della z nel numeratore è un numero impari, s'integreranno per mezzo del §. 10.

CAPO XV.

Di alcune trasformazioni, che possono agevolare l'integrazione.

64. Su di quest'articolo non si ponno dare delle regole generali. L'inspezione del calcolo, l'uso, che si vuol fare d'una quantità, la sagacità di calcolare debbono additarci in ogni caso ciò, che abbiamo a fare.

Lo scopo di tali trasformazioni si è di render razionali que' differenziali, che non lo sono. Se ciò riesce, l'integrazione allora non è più sottoposta ad alcuna difficoltà.

65. Se non si hanno che de' radicali monomj, questi si convertono in potenze di esponente frazionario, che abbia dappertutto lo stesso denominatore. Rappresenti $x^{\frac{k}{n}}$ una potenza di tal natura; si faccia $x^{\frac{1}{n}} = z$, e però $x = z^n$, e $dx = nz^{n-1}dz$. Questo valore di dx sostituito nel differenzial proposto, lo renderà razionale. Così per es. $\frac{dx\sqrt{x} + a\,dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}dx + adx}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{3}{6}}dx + adx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}$. Si faccia $x^{\frac{1}{6}} = z$, ossia $x = z^6$, e sarà $dx = 6z^5\,dz$. Dunque sostituendo questi valori s' avrà $\frac{6z^8dz + 6az^5dz}{z^4 + z^3} = \frac{6z^5dz + 6az^2dz}{z + 1}$, di cui l' integrale è facile a trovarsi col metodo delle frazioni razionali.

66. Qualunque quantità affetta soltanto da un radical polinomio, che non sorpassi il secondo grado, ed in cui la variabile, che vi è compresa, non sia alzata ad una potenza maggiore della seconda, si potrà sempre render razionale, mediante l' uno o l' altro de' seguenti metodi.

I°. Qualora il quadrato della variabile sotto il radicale sia libero da ogni coefficiente, si ponga il radicale stesso uguale alla variabile,

che vi è compresa, più o meno un' altra variabile.

II°. Ovvero si spezzi la quantità affetta dal radicale ne' suoi fattori; indi la radice di questo prodotto così decomposto si uguagli al prodotto d' uno di questi fattori e d'una nuova variabile.

Se fosse dato per es. $\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$; si può fare $\sqrt{(x^2 - a^2)} = x - z$. Onde $x = \frac{z^2 + a^2}{2z}$, e $dx = \frac{(z^2 - a^2)\,dz}{2z^2}$, e finalmente $\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = -\frac{dz}{z}$, che è subito integrabile.

Si poteva porre ancora $\sqrt{(x^2 - a^2)} = \sqrt{[(x-a)(x+a)]} = (x-a)y$, onde $(x-a)(x+a) = (x-a)^2y^2$, e quindi $x = \frac{a + ay^2}{y^2 - 1}$, $\sqrt{(x^2 - a^2)} = \frac{2ay}{y^2 - 1}$, e finalmente $\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \frac{-2dy}{y^2 - 1}$; giacchè $dx = \frac{-4ay\,dy}{(y^2 - 1)^2}$.

67. Si può applicare questo metodo alla rettificazione della Parabola; ove (§. 17) $s = \int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int dy\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)}$. Si purifichi il quadrato della variabile scrivendo $\frac{2dy}{p}\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + y^2\right)}$, e si faccia $\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + y^2\right)} = y + z$. Eseguito tutto il calcolo si vedrà,

che la formola precedente s'integra in parte algebricamente, in parte per logaritmi, onde si scopre l'indole singolare degli archi parabolici, che per esser rettificati, presuppongono la quadratura dell'Iperbola.

68. Quando non vi sian sotto il radicale che il quadrato della variabile e delle costanti, la quantità radicale si potrà porre uguale al prodotto della variabile semplice, che vi si contiene, in un'altra nuova variabile. Dato pertanto $\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, si potrà porre $\sqrt{(a^2-x^2)} = xz$; e quand'anche ci fosse un termine, che contenesse la variabile semplice, si potrà nullameno usar di questa trasformazione, purchè questo si faccia sparire col metodo del Capo precedente §. 62, 63.

79 Finalmente si può, a fine di rendere razionale un differenziale, uguagliare la variabile, ovvero una funzione di essa ad un' altra variabile, o ad una funzione di questa, in cui si lasci a bella posta qualche cosa di indeterminato, che condur ci possa, al nostro intento. A fine di distinguere i casi, ne' quali per es. si può render razionale la formola $x^m dx(a+bx^n)^p$, si ponga $(a+bx^n)^p = z^q$, ove q è indeterminata. Perciò si trova $a+bx^n = z^{\frac{q}{p}}$, $x^n = \frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}$, $x^m = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$. Laonde

$$x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{q}{npb^{\frac{m+1}{n}}} . z^{\frac{q}{p}+q-1} dz \left(z^{\frac{q}{p}}-a\right)^{\frac{m+}{n}}$$

e questo differenziale è integrabile algebricamente, qualunque sia q, purchè $\frac{m+1}{n}-1$ sia un numero positivo intero, o anche $=0$.

Tale espressione può altresì rendersi razionale nel caso, in cui $\frac{m+1}{n}-1$ sia un intero negativo, purchè si faccia $q=p$. Sia infatti g questo numero, e si vedrà che la formola precedente non compreso il coefficiente costante diverrà $= \frac{z^q dz}{(z-a)^g}$, cioè razionale.

Che se fosse $p = \pm \frac{k}{2}$, ove k è un numero intero impari, si può ridurre l'espressione superiore al caso accennato §. 66, ponendo però $q=k$, ed essendo $\frac{m+1}{n} = \pm \frac{k'}{2}$; ove k sia un numero intero impari. Poichè fatte le sostituzioni si troverà, che il differenziale non comprenderà, che un radicale di secondo grado, e sotto di esso il solo quadrato della variabile.

70. In alcuni casi si può facilitare l'integrazione col porre la variabile uguale ad una certa funzione d'un'altra, come sarebbe $\frac{1}{z}$. Se per es. si avesse $\frac{x^{15}dx+adx}{x^{20}+x^{18}}$, ponendo $x=\frac{1}{z}$ si troverebbe $\frac{-z^3dz-az^{18}dz}{1+z^2}$, la qual'espressione si può sviluppare colla divisione in una serie di termini monomj, ed in altri della forma $\frac{Adz}{1+z^2}$.

CAPO XVI.

Dell' Integrazione dei Differenziali a due o più variabili.

71. Se rimontiamo alla regola, che abbiamo data nel Calcolo Differenziale per la differenziazione delle quantità a più variabili, facilmente ci accorgeremo, che per integrare i differenziali a più variabili si debbono raccogliere ed integrare tutti que' termini, che si trovano moltiplicati nel differenziale d' una sola e medesima variabile, come se quella sola variabil fosse, e tutte le altre costanti. Si differenzi allora quest' integral trovato, facendo variare successivamente tutte le quantità realmente variabili, e tal risultato si sottragga dal differenzial proposto: che se dopo la sottrazione non ci rimarrà alcun residuo, il trovato integrale sarà completo colla sola aggiunta della costante. Se poi ci avanza un residuo, questo non conterrà quella variabile, per rapporto a cui si è incominciata l' integrazione; onde si operi con questo giusta la regola di prima, replicandola per rapporto a ciascuna variabile.

Se si dovesse per es. integrare l' espressione $3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$, si raccolgano i termini, che sono moltiplicati per dx, cioè $3x^2ydx + y^5dx$, e si integrino questi, come se y fosse costante. L' integrale è $x^3y + y^5x$, il quale differenziato di

nuovo per rapporto ad amendue le variabili, e sottratto dal differenzial proposto non lascia alcun residuo; quindi ne siegue, che $x^3y + y^5x + C$ è il vero integral completo.

72. Sia ora proposta ad integrare l' espressione $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$. Raccogliendo tutti i termini moltiplicati in dx, ed integrandoli come se y e z fosser costanti, si trova l' integrale $x^3y + x^2z + \frac{1}{2}x^2$. Ma sottratto il differenzial completo di questa quantità dal proposto, resta y^2dy di residuo, l' integrale di cui è $\frac{y^3}{3}$; aggiunto pertanto questo all' integral precedente si avrà per integral completo $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$.

73. Ma perchè non è possibile di integrare qualunque differenziale a più variabili, egli è perciò necessario d' imparare a distinguere i casi, ne' quali ciò possa effettuarsi.

74. Sia $Pdx + Qdy$ un differenziale, in cui P, e Q sono funzioni di x ed y. Affinchè questo sia suscettibile d' integrazione, bisogna, che il differenzial della P preso nella sola variazione della y, e diviso per dy, sia uguale al differenziale della Q, presa la sola x come variabile, e diviso per dx. Tal teorema si suole esprimere come siegue: $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Per dimostrare questa singolare proprietà dell' espressione $Pdx + Qdy$, sia V l' integral completo di $Pdx + Qdy$. Sarà perciò $dV = Pdx + Qdy$.

Per essere Pdx il differenziale di V per rapporto alla variazione della sola x, e Qdy

il differenziale di V per rapporto alla variazione della sola y, usando de' simboli precedenti si ha $P = \frac{dV}{dx}$, $Q = \frac{dV}{dy}$. Si differenzi la prima di queste due espressioni, facendo variare soltanto la y, e si divida per dy; indi si differenzi la seconda, facendo variare la x, e si divida per dx, e si avrà $\frac{dP}{dy} = \frac{ddV}{dxdy}$, $\frac{dQ}{dx} = \frac{ddV}{dydx}$. Ma il risultato di queste operazioni dee esser identico, sia che si differenzi la V facendo variare da prima la y, poi la x, sia che si faccia variare prima la x, e poi la y; quindi $\frac{ddV}{dxdy} = \frac{ddV}{dydx}$, e però $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Sia per es. $V = xy$, sarà $dV = ydx + xdy$. Dunque $P = y$, $Q = x$, e $\frac{dP}{dy} = 1$, $\frac{dQ}{dx} = 1$, onde siamo sicuri, che il proposto è un differenzial completo, e perciò integrabile.

Sia ancora $V = \sqrt{(x^2 + 2xy)}$, sarà $dV = \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{(x^2 + 2xy)}}$; dunque $P = \frac{x + y}{\sqrt{(x^2 + 2xy)}}$, $Q = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 2xy)}}$, e $\frac{dP}{dy} = \frac{xy}{(x^2 + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{dQ}{dx} = \frac{xy}{(x^2 + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$. In conseguenza $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; onde dV sarà integrabile.

Sia inoltre $dV = \frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$; quindi

$P = \frac{1}{3}y^3$, $Q = xy^2$, e $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = y^2 = \frac{d(xy^2)}{dx} = y^2$.

75. Dunque affinchè un certo differenziale sia immediatamente integrabile, deve avere il carattere di essere $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Qualora manchi questo carattere, il differenzial proposto non è suscettibile d'integrazione immediata. Così $ydx - xdy$; $xydx + 2xdy$ non sono integrabili, perchè tali differenziali non hanno il carattere indicato.

Quantunque $Pdx + Qdy$ non fosse un differenzial completo, e quindi fosse neppure $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$: può darsi però il caso, che l'equazione $Pdx + Qdy = 0$ si possa convertire in un differenzial completo col solo moltiplicarla per un certo fattore, che tosto vedremo. Ma se il differenzial proposto avrà il carattere di essere $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, egli sarà integrabile colla regola del §. 71.

Se $dV = \frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$, si trova $V = \frac{1}{3}y^3x + C$. E se $dV = (ax + by + c)dx + (bx + fy + g)dy$, trovasi $V = \frac{ax^2}{2} + bxy + cx + \frac{fy^2}{2} + gy + C$.

76. Quando un differenziale proposto contenga più di due variabili, cioè sia della forma

$Pdx + Qdy + Rdz$, si proverà facilmente, affinchè cotesto differenziale sia completo, dover essere I°. $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; II°. $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$; III°. $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Imperciocchè sia $V = \int [Pdx + Qdy + Rdz]$, quindi trattando z come quantità costante sarà $dV = Pdx + Qdy$, onde $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Sia ora costante la y, e sarà $dV = Pdx + Rdz$, e $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$. Pongasi finalmente costante la x, e sarà $dV = Qdy + Rdz$, onde $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Dunque per rapporto alle tre variabili insieme, dovrà essere $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Verificandosi questi criteri, $Pdx + Qdy + Rdz$ sarà un differenzial completo, e quindi integrabile giusta la regola del §. 71. Se per es. $dV = 3y^4z^2x^2dx + 4x^3z^2y^3dy + 2x^3y^4zdz$; sarà $P = 3y^4z^2x^2$, $Q = 4x^3z^2y^3$, $R = 2x^3y^4z$. Si ha pure $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = 3.4y^3z^2x^2$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx} = 2.3x^2y^4z$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy} = 2.4x^3y^3z$. Dunque il proposto differenziale è completo, e quindi $V = x^3y^4z^2$, come insegna la regola citata.

CAPO XVII.

Delle Equazioni Differenziali.

77. Se un' equazione differenziale non comprenda che due sole variabili x, ed y; e in un membro di lei non siavi che x e dx, y e dy nell' altro, l' integrazione di ciascun membro dipende in tutto dalle regole date sull' integrazione de' differenziali a una sola variabile.

Data pertanto $ax^my^n\,dx = by^qx^r\,dy$, con cui si può generalmente esprimere un' equazion differenziale di due termini, si divida prima per y^n, indi per x^r, e si otterrà $ax^{m-r}dx = by^{q-n}dy$, il cui integrale è $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C$.

78. Ma siccome può accadere, che o l' uno, o l' altro, o nissuno dei due membri dell' equazion differenziale, ne' quali sono separate le variabili, siano integrabili algebricamente, e che non ostante l' equazione sia algebrica, o almeno riducibile ad una forma algebrica, perciò è necessario di saper distinguere con accuratezza què casi, che sono i più frequenti. Se per es. fosse nella precedente equazione differenziale $m - r = -1$, $q - n = -1$, essa si cangierebbe in $\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$, da cui si avrebbe $a \log. x = b \log. y + \log. C$, giacchè è in

nostra basta il prendere un logaritmo per la costante. Tal' equazione è riducibile ad una forma algebrica, scrivendo log. $x^a =$ log. $y^b +$ log. C $=$ log. Cy^b, da cui si ha $x^a = Cy^b$, equazione puramente algebrica.

79. Ma se il solo esponente $q - n$ fosse $= -1$, sarebbe $ax^{m-r}dx = \frac{bdy}{y}$, e $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = b \log. y$ $+ \log. C$. Codesta equazione si può ridurre ad una forma algebrica (sebbene si riduca in realtà a essere un' equazione della classe delle esponenziali), moltiplicando il primo membro per log. e, essendo e quel numero, il cui logaritmo $= 1$. Perciò $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} \log. e = b \log. y + \log. C$,

ovvero facendo $m - r + 1 = p$, $\log. e^{\frac{ax^p}{p}} =$ log. Cy^b, e finalmente $e^{\frac{ax^p}{p}} = Cy^b$.

80. Prendiamo per secondo esempio ndx $= \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$, ove il secondo membro esprime il differenziale d'un arco circolare di raggio $= 1$, e di seno $= z$. Dunque z è il seno dell' arco $\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$, ossia dell' arco $\int ndx$, cioè dell' arco $nx + C$. Si ha pertanto $z =$ sen. $(nx + C)$. Similmente dall' equazione $ndx =$ $- \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$ s' inferirebbe $z = \cos. (nx + C)$.

81. Poichè $\frac{dz}{1 + z^2}$ è il differenziale d'un

arco circolare, la cui tangente $= z$, il raggio $= 1$, dall' equazione $ndx = \frac{dz}{1 + z^2}$, si trova essere $z =$ tang. $(nx + C)$.

Ma se fosse data $ndx = \frac{bdz}{a + fz^2}$, e si dovesse ridurre alla forma delle precedenti, pongasi $z = mu$, ove m è una costante. L' espressione di prima si cangia perciò in $\frac{bmdu}{a + fm^2u^2}$; pongasi di nuovo $fm^2 = a$, ossia $m = \sqrt{\frac{a}{f}}$, e si avrà $ndx = \frac{b\sqrt{\frac{a}{f}} . du}{a + au^2}$, e $\frac{du}{1 + u^2} = \frac{n}{b} dx \sqrt{af}$, e però $u = \frac{z}{m} = z\sqrt{\frac{f}{a}} =$ tang. $(\frac{n}{b} x \sqrt{af} + C)$, e finalmente $z = \sqrt{\frac{a}{f}}$. tang. $(\frac{n}{b} x \sqrt{af} + C)$.

82. Nelle espressioni sen. $(nx + C)$, tang. $(nx + C)$, che noi abbiam trovato, $nx + C$ esprime la lunghezza assoluta dell' arco in parti del raggio. Ma perchè è più commodo di esprimer l' arco pel numero de' gradi, che contiene, piuttosto che per la sua assoluta lunghezza, perciò fa d' uopo di saper determinare simili espressioni pel numero de' gradi, che l' arco contiene; e ciò si conseguisce facilmente, o dividendo la data lunghezza dell' arco pel numero delle parti del raggio contenute in un grado, cioè per 0,0174533, o, ciò che torna al medesimo, moltiplicandola per 57,2974166. In tal guisa il seno d' un arco di lunghezza $= b$, e il seno d' un arco, il cui numero de' gradi $=$ $b \times 57{,}2974166$, sono espressioni sinonime.

83. Qualora fosse $\frac{ndx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$; ove ambidue i membri esprimono i differenziali di due archi circolari, che sono fra loro come $n:1$, ed i seni de' quali sono x, ed y; bisogna render razionale ciascuno di questi differenziali, affine di poter integrarli; e ciò si ottiene ponendo $\sqrt{(1-x^2)} = -z + x\sqrt{-1}$, e $\sqrt{(1-y^2)} = -t + y\sqrt{-1}$. Con ciò l'equazione si trasforma in $\frac{ndz}{z} = \frac{dt}{t}$. Imperciocchè $x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-x^2)} = z$, e però $dx\sqrt{-1} + \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}} = dz$, ossia $\frac{dx[x+\sqrt{(x^2-1)}]}{\sqrt{(1-x^2)}} = dz$, e finalmente $\frac{ndx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{ndz}{x+\sqrt{(x^2-1)}}$. Nella stessa maniera si trova $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{dt}{y+\sqrt{(y^2-1)}}$. Perciò $\frac{ndz}{x+\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{dt}{y+y\sqrt{(y^2-1)}}$, e $ndz[y+\sqrt{(y^2-1)}] = dt[x+\sqrt{(x^2-1)}]$, ovvero $ndz[y\sqrt{-1}-\sqrt{(1-y^2)}] = dt[x\sqrt{-1}-\sqrt{(1-x^2)}]$, cioè $ndz.t = dt.z$, e finalmente $\frac{ndz}{z} = \frac{dt}{t}$, il cui integrale è $n \log. z = \log. t + \log. C$, ossia $Ct = z^n$, ove sostituendo i valori di t e di z si ottiene $C[y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-y^2)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-x^2)}]^n$, la qual' equazione esprime generalmente il rapporto del seno x al seno y di due archi l'un multiplo dell'altro. Ma per far uso di questa equazione bisogna

determinare la costante C. Ora possiamo supporre, che i due archi abbiano la loro origine al medesimo punto; per lo che x, ed y s'annulleranno nello stesso tempo; in tal' ipotesi l'equazione si converte in $-C\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^n$, ossia $-C = (-1)^n$. Ma $(-1)^n$ è un numero positivo o negativo, secondo che n è pari o dispari; si ha pertanto $-C = \pm 1$, ossia $C = \mp 1$, ove il segno superiore vale nel caso di n pari, l'inferiore nel caso di n dispari. Perciò otteniamo finalmente

$$\mp[(y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-y^2)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-x^2)}]^n.$$

84. Egli è facile in ciascun caso particolare di togliere gli immaginarj: il mezzo più semplice si è di trasportar tutti i termini dell' equazione in un sol membro, poi di porre $=0$ la somma di tutte le quantità reali; allora i termini residui sono tutti divisibili per $\sqrt{-1}$, e la loro somma sarà la stessa, che quella de' termini reali, dopo che si è fatta uguale a zero. Sia per es. $n = 2$, sarà pure $-y\sqrt{-1} + \sqrt{(1-y^2)} = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-x^2)}]^2 = -x^2 - 2x\sqrt{-1}.\sqrt{(1-x^2)} + 1 - x^2$, ovvero $\sqrt{(1-y^2)} + 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{-1}.\sqrt{(1-x^2)} - y\sqrt{-1} = 0$. Facciasi ora $=0$ la somma delle quantità reali, cioè $\sqrt{(1-y^2)} + 2x^2 - 1 = 0$, e l'equazion precedente si cangierà in $2x\sqrt{-1}.\sqrt{(1-x^2)} - y\sqrt{-1} = 0$, la qual divisa per $\sqrt{-1}$ dà $2x\sqrt{(1-x^2)} - y = 0$, ovvero $y = 2x\sqrt{(1-x^2)}$. Si alzi al quadrato sì questa che la precedente equazione $\sqrt{(1-y^2)} + 2x^2 - 1 = 0$, o piuttosto $\sqrt{(1-y^2)} = 1 - 2x^2$, e si avrà lo stesso risultato.

85. Nella stessa maniera si possono trovare i coseni, e le tangenti degli archi multipli. Per

risguardo a quest' ultime si avrebbe ad integrare $\frac{ndx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$, spezzando $1+x^2$ nei fattori $(1+x\sqrt{-1})(1-x\sqrt{-1})$, ed $1+y^2$ nei fattori $(1+y\sqrt{-1})(1-y\sqrt{-1})$, e facendo $\frac{ndx}{1+x^2} = \frac{Adx}{1+x\sqrt{-1}} + \frac{Bdx}{1-x\sqrt{-1}}$
$= \frac{Adx+Bdx-Axdx\sqrt{-1}+Bxdx\sqrt{-1}}{1+x^2}$,
ovvero $ndx = \left\{ \begin{array}{l} Adx - Axdx\sqrt{-1} \\ +Bdx + Bxdx\sqrt{-1} \end{array} \right.$, onde si ricava $A = B = \frac{n}{2}$. Quindi $\frac{ndx}{1+x^2} =$ $\frac{\frac{n}{2}dx}{1+x\sqrt{-1}} + \frac{\frac{n}{2}dx}{1-x\sqrt{-1}}$. Dunque $n\int\frac{dx}{1+x^2}$ $= \frac{n}{2\sqrt{-1}}\log.\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)$. Si trova parimenti $\int\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}\right)$, e finalmente $n\log.\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right) =$ $\log.\left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}\right) + \log. C$, ossia $\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)^n = C\left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}\right)$, o piuttosto $\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)^n = \frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}$; poichè annullandosi le tangenti x e y cogli archi, C diventa $=1$.

86. Giacchè abbiamo fra mano questa materia, mostriamo il modo di esprimere i seni e coseni in una maniera alquanto singolare. Sia

pertanto $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$, ciò che esprime il rapporto fra l' arco x ed il suo seno. Si ponga $\sqrt{(1-y^2)} = -z + y\sqrt{-1}$, e sarà $dx =$ $-\frac{dz}{z\sqrt{-1}}$, ovvero $\frac{dz}{z} = -dx\sqrt{-1}$, il cui integrale è $\log. z = \log. C - x\sqrt{-1}$, ossia $\log. z = \log. C - x\sqrt{-1}.\log. e$. Finalmente $z = Ce^{-x\sqrt{-1}}$, e sostituendo a z il suo valore: $y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-y^2)} = Ce^{-x\sqrt{-1}}$. La costante C si può determinare, osservando, che sì l' arco che il seno debbono svanire nel medesimo tempo. Onde si ha $-\sqrt{1} = C$, e perciò $y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-y^2)} = -e^{-x\sqrt{-1}}$. Laonde $\sqrt{(1-y^2)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$.

Inoltre quadrando e riducendo $y = \frac{1-e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}.e^{-x\sqrt{-1}}}$
$= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Ora per essere $y =$ sen. x, si ha sen. $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Si ponga nel secondo membro dell' equazione $\sqrt{(1-y^2)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$ in luogo di y il suo valor già ritrovato, e sarà $\sqrt{(1-y^2)} = \cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} +$ $e^{-x\sqrt{-1}} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$.

Ritorniamo ormai all' integrazione delle equazioni differenziali.

87. Se in un' equazion differenziale le variabili non sono peranco separate l' une dalle

altre, conviene prima tentare d'integrarla nello stato in cui ella si trova. Imperciocchè può essere, che sia $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, se la data equazione differenziale è $Adx + Bdy = 0$. Se questa condizione ha luogo, si proceda all'integrazione come s'è insegnato al §. 71.

88. Può accadere però, che anche senza cotesta condizione l'equazione sia tuttavia integrabile; ma lo è allora solamente, che essa vien moltiplicata per un certo fattore, che è una funzione di x, e di y. Sia P un tal fattore. Ciò posto $APdx + BPdy = 0$ dee essere un differenzial completo, e perciò $\frac{d.AP}{dy} = \frac{d.BP}{dx}$.

Tutto dunque si riduce a trovare per P una funzione idonea in x, e y. Ma per essere quest'indagine troppo vasta, noi ci limiteremo unicamente a que' casi, in cui P è una funzione della sola x, o della sola y. Stiamo al primo caso: sarà $P.\frac{dA}{dy} = B.\frac{dP}{dx} + P.\frac{dB}{dx}$, onde ne siegue $\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx}{B}$. È dunque facile di trovare P, se l'espressione $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$ è una funzione della x, come deve essere necessariamente, per esser P una funzione di x.

89. Con ciò noi siamo al caso d'integrare in una maniera generale qualunque equazione di questa forma: $Xy^q dy + X'y^{q+1}dx + X''y^r dx = 0$, in cui X, X', X'' esprimono funzioni qualunque di x, ma q, r sono esponenti arbitrarj.

Divisa quest'equazione per X e per y^r, e posto $\frac{X'}{X} = F$, $\frac{X''}{X} = F'$, si avrà $y^{q-r}dy + Fy^{q-r+1}dx + F'dx = 0$. Per rendere integrabile quest'equazione, si moltiplichi per P, che è una funzione di x, e si avrà $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx + F'Pdx = 0$. Essendo pertanto P una funzione di x, sarà pure funzione di x anche $F'P$, onde colle regole superiori si potrà facilmente trovare $\int F'Pdx$. Altro non si richiede pertanto, se non che $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx$ sia un differenzial completo, cioè si richiede, che sia $\frac{d(Py^{q-r})}{dx} = \frac{d(FPy^{q-r+1})}{dy}$, ossia $y^{q-r}\frac{dP}{dx} = (q-r+1)y^{q-r}FP$, onde si ricava $\frac{dP}{P} = (q-r+1)Fdx$, ed in conseguenza $\log. P = \int(q-r+1)Fdx . \log. e$, e $P = e^{(q-r+1)\int Fdx}$. Sostituito questo valore di P nell'equazione $Py^{q-r}dy + \&c$, e fatta l'integrazione si ottiene (*) $\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}e^{(q-r+1)\int Fdx} + \int F'dx\, e^{(q-r+1)\int Fdx} + C = 0$.

(*) Sostituito il valor di P nell'equazione accennata, questa si cangia prima dell'integrazione nella seguente $y^{q-r}dy\, e^{(q-r+1)\int Fdx} + e^{(q-r+1)\int Fdx}Fy^{q-r+1}dx + F'dx\, e^{(q-r+1)\int Fdx} = 0$. Questa s'integri per rapporto a y, e si proceda in tutto secondo il §. 71.

Nell' integrazione dell' equazione, che ci ha dato il valor di P non abbiamo aggiunta costante, per non esservi alcuna condizione, con cui determinarla, ed è in nostro arbitrio di supporla $= 0$.

90. Sia per es. proposta da integrare $dy + \frac{ay\,dx}{x} + (bx^2 + cx + f)\,dx = 0$. Moltiplicata questa pel fattore P diventa $Pdy + \frac{ayPdx}{x} + (bx^2 + cx + f)\,Pdx = 0$. Deve dunque essere $\frac{dP}{dx} = \frac{d\left(\frac{ayP}{x}\right)}{dy} = \frac{aP}{x}$. Perciò $\frac{dP}{P} = \frac{adx}{x}$, e log. $P = a$ log. x, ovvero $P = x^a$. L' equazion precedente diventa pertanto $x^a dy + ax^{a-1}ydx + bx^{a+2}dx + cx^{a+1}dx + fx^a dx = 0$, il cui integrale è $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1} + C = 0$.

91. L' equazion generale di prima, che abbiamo integrata, occorre frequentemente, e il metodo da noi usato per quella, si può applicare all' integrazione di alcune equazioni a tre variabili. Siano date le due equazioni $dx + ady + (bx + cy)\,Tdt = 0$, $kdx + a'dy + (b'x + c'y)\,Tdt = 0$, nelle quali T è una funzione di t; l' integrale di entrambe le equazioni si trova mediante il metodo precedente nel modo che segue.

Si moltiplichi l' una di esse, per es. la pri-

ma, per una costante indeterminata g, e si aggiunga alla seconda. Si moltiplichi la somma di queste due equazioni pel fattore P, che sia una funzione di t, e si avrà $(gP + kP)\,dx + (gaP + a'P)\,dy + [(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]\,Tdt = 0$. Supponiamo che quest' equazione sia un differenzial completo; per cui si abbia

I°. $\frac{d(gP + kP)}{dt} = \frac{d[((gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y)T]}{dx}$

II°. $\frac{d(gaP + a'P)}{dt} = \frac{d[((gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y)T]}{dy}$

III°. $\frac{d(gP + kP)}{dy} = \frac{d(gaP + a'P)}{dx}$.

Ora perchè P è una funzione della sola t, l' ultima equazione si risolve in $0 = 0$. Ma dalle due prime si ha $(g + k)\frac{dP}{dt} = (gb + b')\,PT$, ovvero $\frac{dP}{P} = \frac{(gb + b')\,Tdt}{g + k}$, e $(ga + a')\frac{dP}{dt} = (gc + c')\,PT$, ossia $\frac{dP}{P} = \frac{(gc + c')\,Tdt}{ga + a'}$. Dunque $\frac{(gc + c')\,Tdt}{ga + a'} = \frac{(gb + b')\,Tdt}{g + k}$, ovvero $\frac{gc + c'}{ga + a'} = \frac{gb + b'}{g + k}$ equazione di secondo grado, onde si ricaveranno due valori di g.

Conosciuta così g è facile il trovare P; poichè dall' equazione $\frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g + k}\,Tdt$ si ha log. $P = \frac{gb + b'}{g + k}\int Tdt$, e $P = e^{\frac{gb + b'}{g + k}\int Tdt}$.

Essendo per ip. l'equazione $(gP + kP)\,dx + (gaP + a'P)\,dy + [(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]\,Tdt = 0$ un differenzial completo, sarà l'integrale di lei $(gP + kP)x + (gaP + a'P)y + C = 0$. Se il primo de' valori di g trovati dall' equazione precedente di secondo grado si indichi con g, il secondo con g', indi con P' il valore di P, che nasce dal sostituirvi g' invece di g, si otterrà la seguente equazione: $(g'P' + kP')x + (g'aP' + a'P')y + C' = 0$ in cui C' è una nuova costante. Da queste due equazioni si potranno determinare le quantità x, ed y in funzioni di t, e reciprocamente t in funzioni di x, ed y. Quindi è manifesta la via, per cui giungere all'integrazione delle due equazioni proposte, che contengono tre variabili.

92. Qualora la data equazione differenziale non venga compresa nel caso, da noi fin quì considerato, bisogna adoprare i tentativi, per poter separare le variabili l' une dalle altre. Spesso per ciò non si richiede, che l' applicazione delle regole ordinarie dell' Algebra. In altri casi è d' uopo ricorrere alle trasformazioni. Contuttociò v' ha un gran numero di siffatte equazioni, per le quali non si sa qual' esser possa la trasformazione idonea, con cui ottenere la separazione delle variabili.

93. Nell' equazione $ax^n dx + by^q x^n dx = y^k dy (e + fx^h)^r$ si separeranno le variabili scrivendo prima $(a + by^q) x^n dx = y^k dy (e + fx^h)^r$, onde $\dfrac{x^n dx}{(e + fx^h)^r} = \dfrac{y^k dy}{a + by^q}$, la cui integrazione dipende da quella de' differenziali binomj ad una sola variabile.

94. Ma se si avesse $gxdx = ax^4 ydy + 2abx^2y^3dy + ab^2y^5dy$, ben si vede, che si può scrivere quest' equazione come segue: $gxdx = (x^4 + 2bx^2y^2 + b^2y^4)\,aydy = (x^2 + by^2)^2\,aydy$. Con un poco d' attenzione si vedrà, che la separazione è possibile, ponendo $x^2 + by^2 = z$, e però $x^2 = z - by^2$, e $xdx = \frac{1}{2}dz - bydy$. Sostituiti questi valori si ha $\frac{1}{2}gdz - gbydy = az^2ydy$, e finalmente $\dfrac{\frac{1}{2}gdz}{bg + az^2} = ydy$, equazione facile ad integrarsi.

95. Passiamo ormai a trattare delle equazioni omogenee, che formano una parte delle più interessanti del Calcolo Integrale, e in cui i primi Geometri si sono occupati. Si dicono funzioni, o equazioni omogenee quelle funzioni, o equazioni, nelle quali le variabili o isolate o moltiplicate assieme hanno in ciascun termine un egual numero di dimensioni. Ma prima di parlar delle equazioni di questa classe vogliamo esporre un celebre teorema di M. Fontaine circa l' integrazione delle funzioni differenziali omogenee, ed è il seguente. Se $Pdx + Qdy$ è un differenzial completo, e P, Q funzioni omogenee di x e y, e n il numero delle dimensioni delle variabili in P, e Q, sarà $\int (Pdx + Qdy) = \dfrac{Px + Qy}{n + 1}$. In fatti se in P, e Q si faccia $y = xz$, nasceranno in ciascun termine di P, e di Q tante nuove potenze della x, quante prima erano le potenze della y, e siccome in ciascun termine le dimensioni di y, e x prese assieme sono di numero n, quindi x avrà ora n dimensioni, e P

potrà esser espresso da Hx^n, Q da Gx^n, ove G, H sono funzioni di z. Sarà dunque $Pdx + Qdy = Hx^n dx + Gx^n(xdz + zdx) = x^n dx(H + Gz) + x^{n+1}Gdz$. Se si integra quest' ultima equazione per rapporto alla variazione della sola x, si avrà $\int(Pdx + Qdy) = \frac{x^{n+1}(H + Gz)}{n+1} + C$ per integral completo, senza aggiunta d' altra qualunque funzione di z. Poichè se si differenziasse di nuovo quest' integrale, non si troverebbe alcun termine, che contenesse x^{n+1}, e per conseguenza il differenziale non coinciderebbe colla funzione $x^n dx(H + Gz) + x^{n+1}Gdz$. Prendansi ora dalle equazioni $P = Hx^n$, $Q = Gx^n$ i valori di H, e di G, e si sostituiscano in quest' integral trovato, con che si avrà $\int(Pdx + Qdy) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{P}{x^n} + \frac{Qz}{x^n}\right) = \frac{Px + Qy}{n+1}$, giacchè $xz = y$. Questo teorema si estende altresì a quelle funzioni differenziali omogenee, che comprendono un maggior numero di variabili. Ma passiamo alle equazioni.

In qualunque equazione omogenea è sempre praticabile la separazione delle variabili. Imperciocchè sia $Adx + Bdy = 0$ un' equazione di tal natura. Questa si divida per una potenza di x, il cui esponente sia uguale al numero delle dimensioni dell' equazione; dopo di che non vi saranno nelle funzioni A, e B che potenze di $\frac{y}{x}$, e delle quantità costanti, e l' equazione di prima si potrà acconciamente rappresentare con $Fdx + F'dy = 0$, ove F, F' sono funzioni di $\frac{y}{x}$, e di costanti. Ora per essere $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$, si ha $dx = \frac{x}{y}dy - \frac{x^2}{y}d\left(\frac{y}{x}\right)$. Facciasi $\frac{y}{x} = z$, e sarà $dx = \frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2}$. Se si sostituiscano questi valori nell' equazione precedente, si otterrà $\frac{Fdy}{z} - \frac{Fydz}{z^2} + F'dy = 0$, in cui F, ed F' non sono più che funzioni di z e di costanti. Ma da quest' equazione se ne ricava un' altra $\frac{dy}{y} = \frac{Fdz}{Fz + F'z^2}$, in cui le variabili sono totalmente separate, poichè F, F' non comprendono altra variabile, fuorchè z.

Prendasi ad integrare per es. l' equazione omogenea $y^3dx + y^2xdy + bx^3dy = 0$, in cui il numero delle dimensioni si trova $= 3$. Se si divide per x^3, si ha $\frac{y^3dx}{x^3} + \frac{y^2dy}{x^2} + bdy = 0$. Pongasi $\frac{y}{x} = z$, ossia $x = \frac{y}{z}$, e sarà $dx = \frac{zdy - ydz}{z^2}$. Quindi la precedente equazione si trasforma in $z^2dy - yzdz + z^2dy + bdy = 0$, onde ne viene $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{2z^2 + b}$, il cui integrale si è $\log. y = \frac{1}{4}\log.(2z^2 + b) + \log. C$, ossia $y = C(2z^2 + b)^{\frac{1}{4}}$, o ancora $y^4 = C^4(2z^2 + b) = C^4\left(\frac{2y^2}{x^2} + b\right)$.

96. Sarebbe dunque di gran vantaggio, se si potesse rendere omogenee tutte le equazioni. Non si hanno su di ciò regole generali, ma è d' uopo ricorrere alle trasformazioni. Quelle, da cui possiamo prometterci qualche successo, consistono nell' uguagliare una delle variabili, o una funzione di essa, o anche una funzione di entrambe ad una funzione d' una nuova variabile, che sia elevata ad una potenza di esponente indeterminato. Un tal esponente allora si determina dalla condizione, che l' equazione trasformata debba essere omogenea.

Se si volessero per es. indagare i casi, ne' quali l' equazione $ax^m dx + by^n x^q dy + cy^k dy = 0$ (a cui si ponno ridurre tutte l' equazioni a tre termini) si può render omogenea, si faccia $x = z^h$, e si avrà $ahz^{mh+h-1}dz + bz^{qh}y^n dy + cy^k dy = 0$.

Ora se questa equazione dee essere omogenea, dee pur essere $k = mh + h - 1$, e $k = qh + n$, e perciò $h = \frac{n+1}{m-q+1}$, e $k = \frac{mn+q+n}{m-q+1}$.

Quando adunque gli esponenti k, q, m, ed n sono di tal natura, che si verifichi quest' ultima condizione, l' equazione diventerà omogenea, e si potranno separare l' una dall' altra le variabili.

CAPO XVIII.

Delle Equazioni Differenziali di ordine secondo, terzo, ec.

97. L' assumere per costante un differenzial qualunque nella differenziazione ulteriore d' un equazion differenziale, serve spesse volte a facilitar l' integrazione. Ma perchè accade talvolta, che nella differenziazione si prenda per costante un tal differenziale, che rende l' integrazione più difficile, è quindi necessario di cominciare a dichiarare il metodo, con cui trasformar si possa un' equazion differenziale, in cui una certa differenza è stata supposta costante, in un' altra, in cui tutte le differenze siano supposte variabili. Se ciò riesce, allora potremo assumere per costante quel differenzial che ci sembrerà più opportuno. Sia pertanto $Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 + Dddy = 0$, un' equazione differenziale di second' ordine a due variabili, in cui dx si è presa costante. Divisa l' equazione per dx, si avrà $Adx + Bdy + C.\frac{dy^2}{dx} + D.d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, la quale è identica colla precedente, poichè dx persevera ad essere costante, e perciò è $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ddy}{dx}$. Ma se ora si volesse far variare dx, sarebbe $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$. Perciò l' equazio-

ne di prima si cangia in $Adx + Bdy + C\frac{dy^2}{dx} + D\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = 0$; in cui ogni differenziale è variabile.

Sia data inoltre un'equazione di terz'ordine, come $Adx^3 + Bdx^2dy + Cdy^2dx + Ddy^3 + Edxddy + Fdyddy + Gd^3y = 0$, in cui dx è supposta costante. Essa si divida per dx^2, con che si ha $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + \frac{Eddy}{dx} + F\frac{dy}{dx}.\frac{ddy}{dx} + G\frac{d^3y}{dx^2} = 0$, che si può ancora scrivere: $Adx + Bdy + C\frac{dy^2}{dx} + D\frac{dy^3}{dx^2} + Ed\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\frac{dy}{dx}.d\left(\frac{dy}{dx}\right) + Gd\left[\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$, in cui se i differenziali saranno presi per rapporto a dy e dx, si avrà una nuova equazione, in cui non ci sarà più alcun differenzial costante.

98. Sia data l'equazione $dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, in cui dx è costante. Al primo sguardo non si saprebbe come integrar quest' equazione. Ma se si fa dx variabile, scrivendo $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx)\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, allora si potrà nel differenziale indicato supporre costante dy, nella qual' ipotesi si avrà $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = -(adx + xdx)\frac{dyddx}{dx^2}$, ovvero $dx^2 + xddx + addx - dy^2 = 0$, il cui integrale è $xdx + adx - ydy + Cdy = 0$, ove

si è aggiunta una costante omogenea all' integral medesimo. Integrata di nuovo quest' equazione dà $\frac{x^2}{2} + ax - \frac{y^2}{2} + Cy + C' = 0$.

99. Affinchè il metodo usato sia legittimo, fa di mestieri, che si dimostri, che l'equazione $dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, in cui si è presa dx costante, non si altera punto facendo variare dx, e dy, o solo dx, ritenendo costante dy. A tal fine si rifletta, che tra x e y v'ha sempre una certa relazione, che si potrà sempre rappresentare coll' equazione $dy = pdx$. Sia ora dx costante; sarà $ddy = dpdx$, con che l'equazione precedente si convertirà in $pdx^3 - p^3dx^3 = adpdx^2 + xdpdx^2$, ovvero in $p - p^3 = (a + x)\frac{dp}{dx}$. Facciasi ora variare dx, e sarà come nel §. precedente $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (a + x)\,dx.d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ovvero $dx^2dy - dy^3 = adxddy - adyddx + xdxddy - xdyddx$; ma per essere $ddy = pddx + dpdx$, sarà pure $(p - p^3)dx^3 = (a + x)dpdx^2$, ossia $p - p^3 = (a + x)\frac{dp}{dx}$ come sopra. Si ponga finalmente costante dy, e si avrà $dx^2dy - dy^3 = -(adyddx + xdyddx)$, ovvero $dx^2 + addx + xddx = dy^2$, cioè (per essere $ddy = 0 = pddx + dpdx$, e $ddx = -\frac{dpdx}{p}$), $dx^2 - \frac{adpdx}{p} - \frac{xdpdx}{p} = p^2dx^2$, da cui finalmente si ha $(p - p^3) = (a + x)\frac{dp}{dx}$, appunto come ne' due casi precedenti:

100. Il metodo d'integrare i differenziali a più variabili, che abbiamo insegnato nel Capo precedente, si applica opportunamente alle funzioni differenziali di qualsisia ordine, purchè i differenziali ddx, ddy, d^3x, d^3y &c si trattino come altrettante variabili.

Se dunque si avesse ad integrare $x^3y^2ddy + 2x^3ydy^2 + (2x^2y + 3y^2x^2)\,dxdy + 2y^2xdx^2$, ove dx è stata supposta costante; si comincerebbe ad integrare, come se la sola ddy fosse variabile, con che si avrebbe x^3y^2dy. Differenziato quest' integrale dà $3x^2y^2dxdy + 2x^3ydy^2 + x^3y^2ddy$, ciò che sottratto dal differenzial proposto lascia $2y^2xdx^2 + 2x^2ydxdy$ per residuo. Ora si integri questo residuo, come se y sola variasse, e si avrà x^2y^2dx. Preso di nuovo il differenziale di questo termine e sottratto dal residuo precedente non ci resta più nulla, onde conchiudo, che l'integrale della nostra funzione differenziale è $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx$, poichè la costante, che si deve aggiugnere, dee essere omogenea agli altri termini.

101. Si integra similmente un' equazione differenziale, quand' essa sia suscettibile d'una forma simile alla precedente, di che ci potremo accorgere, se l'ultimo residuo sarà uguale a zero, come si è accennato.

Se cotesto residuo non è zero, non si deve tuttavia disperare, che la data equazione differenziale possa esser integrabile. Imperciocchè potendosi i due membri d'un' equazione moltiplicare o dividere per una stessa quantità, può benissimo darsi un tal fattore, per cui moltiplicata l'equazione riesca integrabile.

Il determinar generalmente l'indole d'un

tal fattore, è una ricerca, che per la sua estensione oltrepassa le nostre mire. Ci basti di esporre il metodo, che a questo fine usar dobbiamo in un caso, che può occorrere più di frequente ne' problemi fisico-matematici. L'equazioni, di cui si parla, sono della specie seguente: $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$, ovvero $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, o generalmente $d^ny + ad^{n-1}ydx + bd^{n-2}ydx^2 + \ldots + mydx^n + Xdx^n = 0$, ove dx è costante, e costanti pure i coefficienti a, b, c &c, ma X una funzione della x.

Le equazioni di tal natura diventano integrabili mediante il moltiplicarle per un fattore, che sia una funzione di x, e tal fattore si trova, come siegue. Sia data la prima delle due equazioni $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$. Si spezzi il termine $adydx$ in due altri $Kdydx$, e $(a - K)\,dydx$, con che si avrà la nuova equazione $ddy + Kdydx + (a - K)\,dydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$, in cui K è bensì una costante, ma tuttavia ignota quantità. Si supponga ora, che quest' equazione divenga integrabile, col moltiplicarla per un fattore P, che sia funzione della x. Dunque l'equazione $Pddy + KPdydx + [(a - K)Pdy + bPydx + PXdx]\,dx = 0$ deve in virtù dell' ipotesi essere un differenzial completo, e quindi aver luogo l'equazioni seguenti I°. $\frac{dP}{dy} = \frac{d(KPdx)}{ddy}$

II°. $$\frac{dP}{dx} = \frac{d[(a - K)Pdy + bPydx + PXdx]}{ddy}$$

III°. $$\frac{d(KPdx)}{dx} = \frac{d[(a - K)Pdy + bPydx + PXdx]}{dy}$$

Dalla prima equazione non si ha niente, perchè P, e K non sono funzioni nè di y, nè di dy. Dalla seconda si ha in vigore dell' ipotesi assunta $\frac{dP}{dx} = (a - K)P$, e dalla terza $K\frac{dP}{dx} = bP$. Da queste equazioni si prenda il valore di $\frac{dP}{P}$, che dalla prima sarà $\frac{dP}{P} = (a - K)\,dx$, e dalla seconda $\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{K}$. Uguagliati fra loro questi valori risulta l'equazione $K^2 - aK + b = 0$; due valori pertanto di K si hanno da quest' equazione di secondo grado, e li dinoteremo con m, ed m'. Quindi è $\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{m}$, e però log. $P = \frac{bx}{m}$, onde $P = e^{\frac{bx}{m}}$. Laonde l' equazione di prima $Pddy$ + &c si cangia in $ddye^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + mdydxe^{\frac{bx}{m}} + (a-m)dydxe^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}} = 0$.

102. Quest' equazione s' integra come segue. Si cerca da prima l' integrale del termine $ddye^{\frac{bx}{m}}$, nell' ipotesi che non varii che ddy, e questo è $dye^{\frac{bx}{m}}$. Indi si differenzi quest' integrale, e si sottragga il risultato dalla superiore equazione, e si avrà il residuo $(m + a - \frac{b}{m} - m)\,dydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} +$

$Xdx^2.e^{\frac{bx}{m}} = 0$. Dall' equazione $K^2 - aK + b = 0$, ovvero $m^2 - am + b = 0$ si trova $m - a + \frac{b}{m} = 0$, ossia $a - \frac{b}{m} - m = 0$. Pertanto $mdydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}} = 0$ è l'equazione, che ci resta ad integrare. S' integri il termine $mdydxe^{\frac{bx}{m}}$, come se variasse solamente y, e si avrà $mydxe^{\frac{bx}{m}}$ per secondo termine dell' integral, che si cerca. Differenziata quest' ultima quantità, e sottratta dal residuo precedente, non rimane che $Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$, il cui integrale si può generalmente esprimere per $dx\int Xdxe^{\frac{bx}{m}}$, e che si può facilmente trovare, atteso che non comprende che una sola variabile.

L' integral completo è dunque $dye^{\frac{bx}{m}} + mydxe^{\frac{bx}{m}} + dx\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = Cdx$, ovvero $dy + mydx + dxe^{\frac{-bx}{m}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = Ce^{\frac{-bx}{m}}dx$. Ma siccome non v' ha ragione, perchè abbiamo a scegliere dei due valori di K piuttosto m che m', perciò sarà vera anche l'equazione $dy + m'ydx + dxe^{\frac{-bx}{m'}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m'}} =$

$C'e^{\frac{-bx}{m'}}dx$, e si ha finalmente da entrambe $y =$

$$\frac{Ce^{\frac{-bx}{m}} - C'e^{\frac{-bx}{m'}} + e^{\frac{-bx}{m'}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m'}} - e^{\frac{-bx}{m}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m}}}{m - m'}$$

APPENDICE

DEL P. D. GREGORIO FONTANA.

Vi sono molti Problemi di Fisica, i quali trattati con tutta l'accuratezza e profondità, di cui sono suscettibili, ci presentano delle equazioni differenziali di second' ordine da doversi integrare. Così nel Problema della resistenza de' solidi al loro spezzamento, quando si cercano nelle varie figure i così detti *Punti di rottura*, s' incontrano inaspettatamente le due equazioni differenziali di second' ordine $ydx^2 = 2dy^2 + 2yddy$, e $\frac{ydx^2}{c} = 6dy^2 + 3yddy$. Sarà dunque opportuno l' esporre quì il modo d' integrare siffatte equazioni, e molto più l' equazione generale $Ydx^2 = mdy^2 + nyddy$, di cui sono quelle un caso particolare, essendo in questa la Y una funzione arbitraria della y, ed m, n costanti qualunque. A tal effetto pertanto io procedo così.

I. Sia l' equazione $ydx^2 = 2dy^2 + 2yddy$, e si prenda $dx = pydy$, onde differenziando (posta dx costante) sarà $pdy^2 + pyddy + ydydp = 0$, ovvero $yddy = -dy^2 - \frac{ydydp}{p}$, e $2yddy$

$= -2dy^2 - \frac{2ydydp}{p}$. Dunque $ydx^2 = p^2y^3dy^2 = 2dy^2 - 2dy^2 - \frac{2ydydp}{p} = -\frac{2ydydp}{p}$, e però $y^2dy = -\frac{2dp}{p^3}$; ed integrando $\frac{1}{3}y^3 + C = \frac{1}{p^2} = \frac{y^2dy^2}{dx^2}$, cioè $dx = \frac{ydy}{\sqrt{(C + \frac{1}{3}y^3)}}$. Se la costante C non è zero, la formola dell' omogeneo si integra colla rettificazione dell' Ellissi, e dell' Iperbola: ma se C è zero, allora l' integrale dell' equazione $dx = \frac{ydy\sqrt{3}}{\sqrt{y^3}}$ diventa $x + A = 2\sqrt{3y}$, e quindi $\frac{(x+A)^2}{12} = y$.

II. Sia ora l' altra equazione $\frac{ydx^2}{c} = 6dy^2 + 3yddy$. Per integrar questa non è più al caso la precedente sostituzione, dalla quale si otterrebbe $\frac{p^2y^3dy^2}{c} = 3dy^2 - \frac{3ydydp}{p}$, sussistendo il termine $3dy^2$, che impedisce l' integrazione. Ciò accade perchè nell' equazione proposta i coefficienti 6 e 3 de' termini dell' omogeneo non sono eguali, come nella prima equazione. Di quì è facile accorgersi, che ad effetto di fare sparire il termine $6dy^2$, sarà idonea la sostituzione $dx = py^2dy$, dove y sia alzata alla 2.a podestà. Infatti differenziando avremo $py^2ddy + 2pydy^2 + y^2dydp = 0$, e di quì $yddy = -2dy^2 - \frac{ydydp}{p}$, ovvero $3yddy = -$

$6dy^2 - \frac{3ydydp}{p}$. Dunque $\frac{ydx^2}{c} = \frac{p^2y^5dy^2}{c} =$

$6dy^2 - 6dy^2 - \frac{3ydydp}{p} = -\frac{3ydydp}{p}$, cioè

$y^4dy = -\frac{3cdp}{p^3}$, ed integrando $\frac{1}{5}y^5 + C =$

$\frac{3c}{2p^2} = \frac{3cy^4dy^2}{2dx^2}$, ovvero $dx = \frac{y^2dy\sqrt{\frac{3}{2}c}}{\sqrt{(C+\frac{1}{5}y^5)}}$;

facendo $C = 0$ si ha $dx = \frac{y^2dy\sqrt{\frac{3}{2}c}}{\sqrt{\frac{1}{5}y^5}}$, ed integrando $x + A = \frac{2\sqrt{\frac{3}{2}cy}}{\sqrt{\frac{1}{5}}} = \sqrt{30cy}$, e perfine

$y = \frac{(x+A)^2}{30c}$.

III. Propongasi ora l'equazione più generale di 2.° ordine $Ydx^2 = mdy^2 + nyddy$, nella quale Y è una funzione qualunque della y. Non è difficile accorgersi, ricorrendo su i passi precedenti, che ciò si otterrà mediante la sostituzione $dx = py^{\frac{m}{n}}dy$, il cui differenziale è

$\frac{m}{n}py^{\frac{m}{n}-1}dy^2 + py^{\frac{m}{n}}ddy + y^{\frac{m}{n}}dydp = 0$, ovvero $py^{\frac{m}{n}}ddy = -\frac{m}{n}py^{\frac{m}{n}-1}dy^2 - y^{\frac{m}{n}}dydp$, e

dividendo per $\frac{py^{\frac{m}{n}-1}}{n}$ nasce $nyddy = -mdy^2$

$-\frac{nydydp}{p}$. Sicchè $Ydx^2 = Yp^2y^{\frac{2m}{n}}dy^2 =$

$mdy^2 - mdy^2 - \frac{nydydp}{p} = -\frac{nydydp}{p}$, cioè

$Yy^{\frac{2m}{n}-1}dy = -\frac{ndp}{p^3}$, ed integrando

$\int Yy^{\frac{2m}{n}-1}dy + C = \frac{n}{2p^2} = \frac{ny^{\frac{2m}{n}}dy^2}{2dx^2}$, onde

$dx^2 = \frac{\frac{n}{2}y^{\frac{2m}{n}}dy^2}{\int Yy^{\frac{2m}{n}-1}dy + C}$, e $dx =$

$\frac{y^{\frac{m}{n}}dy\sqrt{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(\int Yy^{\frac{2m}{n}-1}dy + C\right)}}$; e finalmente

$$x = \int \frac{y^{\frac{m}{n}}dy\sqrt{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(\int Yy^{\frac{2m}{n}-1}dy + C\right)}} + A.$$

103. D' una maniera simile a quella del §. prec. si procederebbe, se data fosse un' equazion differenziale di terz' ordine, come la seguente $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$. Questa si scriva così: $dy^3 + Kddydx + (a - K)ddydx + K'dydx^2 + (b - K')dydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, dove K, K' son quantità indeterminate ma costanti. Se si vuole, che questa equazione diventi integrabile, moltiplicandola per un fattore P, che sia funzione di x, cioè se si vuole, che l' equazione $Pd^3y + KPddydx + (a - K)Pddydx + K'Pdydx^2 + (b - K')Pdydx^2$

$+ cPydx^3 + PXdx^3 = 0$ sia integrabile, le si dia la seguente forma $Pd^3y + KPddydx + [(a - K)Pddy + K'Pdydx]dx + [(b - K')Pdydx + cPydx^2 + PXdx^2]dx = 0$. Quindi dalle condizioni d'integrabilità si avrebbero sei diverse equazioni, le quali per essere K, e K' costanti, e per essere P funzione della sola x, si possono ridurre a tre solamente. Dall'ultima equazione si ricaveranno tre valori per K, e tre per K' e per P, e perciò risulteranno tre equazioni date per y, x, dx, dy, e ddy. Eliminando pertanto ddy, e dy da queste equazioni, si troverà il valore di y espresso per x, e per costanti. Fin quì il Bézout. Veggasi ora su di ciò la seguente

APPENDICE

DEL P. D. GREGORIO FONTANA.

L'equazione differenziale di terz'ordine, che il Bézout propone da integrare nel Tomo III° del suo *Corso di Matematica ad uso del Corpo Reale dell'Artiglieria* §. 146, finchè si lascia sotto la forma datale da questo celebre ed altronde esattissimo Scrittore, non ci guiderebbe mai allo scopo prefisso; ond'è, che la predetta equazione dee presentarsi sotto una forma, la quale contenga quattro parti, la prima delle quali sia moltiplicata per d^3y, la seconda per ddy, la terza per dy, e la quarta per dx. Perciò l'equazione si dovrà presentare così: $Pd^3y + PKdxddy + P(b - K')dx^2dy + [P(a - K)ddy + PK'dxdy + PXdx^2 + Pcydx^2]dx = 0$.

Quindi le sei equazioni di condizione sa-

ranno le seguenti: I° $\frac{dP}{ddy} = \frac{d.PKdx}{d^3y}$; II° $\frac{dP}{dy} = \frac{d.P(b - K')dx^2}{d^3y}$; III° $\frac{dP}{dx} = \frac{d[P(a - K)ddy + PK'dxdy + PXdx^2 + Pcydx^2]}{d^3y}$

IV° $\frac{d.PKdx}{dy} = \frac{d.P(b - K')dx^2}{ddy}$; V° $\frac{d.PKdx}{dx} = \frac{d.[P(a - K)ddy + PK'dxdy + PXdx^2 + Pcydx^2]}{ddy}$

VI° $\frac{d.P(b - K')dx^2}{dx} = \frac{d.[P(a - K)ddy + PK'dxdy + PXdx^2 + Pcydx^2]}{dy}$.

Siccome poi di queste sei equazioni la I.a, II.a, e IV.a si riducono visibilmente a $0 = 0$; perciò restano le tre altre, le quali colle debite riduzioni diventano come segue: I° $\frac{dP}{dx} = (a - K)P$; II° $\frac{KdP}{dx} = K'P$; III° $\frac{(b - K')dP}{dx} = cP$. Da queste si deduce $\frac{dP}{P} = (a - K)dx = \frac{K'dx}{K} = \frac{cdx}{b - K'}$; e quindi $aK - K^2 = K'$, e $bK' - K'^2 = cK$; e conseguentemente $K' = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - cK)}$. Con ciò sarà $aK - K^2 = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - cK)}$; la qual' equazione si riduce alla cubica seguente: $K^3 - 2aK^2 + (a^2 + b)K + c - ba = 0$. Chiamo m, m', m'' i tre valori di K, ed n, n', n'' i tre corrispondenti di K'. Prendo e per la base de' logaritmi iperbolici, e dall' equazione differenziale $\frac{dP}{P} = (a - K)\,dx$ ritraggo integrando $P = e^{(a-K)x} = e^{(a-m)x}$. Ciò fatto la proposta diventa $e^{(a-m)x}d^3y + me^{(a-m)x}dxddy + (b-n)e^{(a-m)x}dx^2dy + (a-m)e^{(a-m)x}dxddy + ne^{(a-m)x}dydx^2 + e^{(a-m)x}Xdx^3 + ce^{(a-m)x}ydx^3 = 0$. Per integrarla, suppongo variabile la sola d^3y, ed ottengo $e^{(a-m)x}ddy$ per primo termine dell' integrale. Prendo di questo termine il differenziale completo $e^{(a-m)x}d^3y + (a-m)e^{(a-m)x}ddydx$, lo sottraggo dall' equazione proposta, ed ho per residuo $me^{(a-m)x}ddydx + (b-n)e^{(a-m)x}dydx^2 + ne^{(a-m)x}dydx^2 + e^{(a-m)x}Xdx^3 + ce^{(a-m)x}ydx^3$. Opero su questo residuo, come prima; cioè riguardo per variabile la sola ddy, e ritrovo per secondo termine dell' integrale $me^{(a-m)x}dydx$. Prendo di questo il differenziale intero $me^{(a-m)x}ddydx + m(a-m)e^{(a-m)x}dydx^2$, e sottraendolo dal detto primo residuo ritrovo per secondo residuo $(b-n)e^{(a-m)x}dydx^2 + (n-am+m^2)e^{(a-m)x}dydx^2 + e^{(a-m)x}Xdx^3 + ce^{(a-m)x}ydx^3$; il quale per essere $aK - K^2 = K'$, cioè $K' - aK + K^2 = 0$, ovvero $n - am + m^2 = 0$, si riduce a $(b-n)e^{(a-m)x}dydx^2 + e^{(a-m)x}Xdx^3 + ce^{(a-m)x}ydx^3$. Assumo di bel nuovo in

questo secondo residuo per variabile la sola dy, e ricavo per terzo termine dell' integral cercato $(b-n)e^{(a-m)x}ydx^2$, il cui differenziale completo $(b-n)e^{(a-m)x}dydx^2 + (b-n)(a-m)e^{(a-m)x}ydx^3$ sottratto dal predetto residuo lascia per terzo residuo $[c+(b-n)(m-a)]\,e^{(a-m)x}ydx^3 + e^{(a-m)x}Xdx^3$. E siccome le equazioni $cm = bn - n^2$, e $n = am - m^2$ danno $c = \frac{bn - n^2}{m}$, ed $m - a = -\frac{n}{m}$; quindi è che il coefficiente $[c + (b-n)(m-a)]$ diventa $\frac{bn - n^2}{m} - \frac{n(b-n)}{m} = 0$, e però il terzo residuo si riduce al solo termine $e^{(a-m)x}Xdx^3$, il cui integrale si esprimerà con $dx^2\int e^{(a-m)x}Xdx$. Perlocchè l' integral totale della proposta equazione, prendendo C per una costante arbitraria, sarà di questa forma: $e^{(a-m)x}ddy + me^{(a-m)x}dxdy + (b-n)e^{(a-m)x}ydx^2 + dx^2\int e^{(a-m)x}Xdx = Cdx^2$; ovvero $ddy + mdxdy + (b-n)ydx^2 + e^{(m-a)x}dx^2\int e^{(a-m)x}Xdx - Ce^{(m-a)x}dx^2 = 0$. Laonde facendo uso degli altri due valori m', m'', e de' corrispondenti n', n'', e di due nuove costanti arbitrarie C', C'' avremo le tre equazioni

I. $ddy + mdxdy + (b-n)ydx^2 + e^{(m-a)x}dx^2\int e^{(a-m)x}Xdx - Ce^{(m-a)x}dx^2 = 0$;

II. $ddy + m'dxdy + (b-n')ydx^2 + e^{(m'-a)x}dx^2\int e^{(a-m')x}Xdx - C'e^{(m'-a)x}dx^2 = 0$;

III. $ddy + m''dxdy + (b - n'')ydx^2 + e^{(m''-a)x}dx^2\int e^{(a-m'')x}Xdx - C''e^{(m''-a)x}dx^2 = 0$

Quindi eliminando ddy, e poscia dividendo per dx risultano le due equazioni seguenti

$(m - m')dy + (n' - n)ydx + e^{(m-a)x}dx\int e^{(a-m)x}Xdx - e^{(m'-a)x}dx\int e^{(a-m')x}Xdx + C'e^{(m'-a)x}dx - Ce^{(m-a)x}dx = 0$; $(m - m'')dy + (n'' - n)ydx + e^{(m-a)x}dx\int e^{(a-m)x}Xdx - e^{(m''-a)x}dx\int e^{(a-m'')x}Xdx + C''e^{(m''-a)x}dx - Ce^{(m-a)x}dx = 0$, ovvero

$$\text{I. } dy + \frac{n'-n}{m-m'}ydx + \frac{e^{(m-a)x}dx}{m-m'}\int e^{(a-m)x}Xdx - \frac{e^{(m'-a)x}dx}{m-m'}\int e^{(a-m')x}Xdx + \frac{C'e^{(m'-a)x}dx}{m-m'} - \frac{Ce^{(m-a)x}dx}{m-m'} = 0$$

$$\text{II. } dy + \frac{n''-n}{m-m''}ydx + \frac{e^{(m-a)x}dx}{m-m''}\int e^{(a-m)x}Xdx - \frac{e^{(m''-a)x}dx}{m-m''}\int e^{(a-m'')x}Xdx + \frac{C''e^{(m''-a)x}dx}{m-m''} - \frac{Ce^{(m-a)x}dx}{m-m''} = 0.$$

Eliminando per ultimo dy, e dividendo per dx, nasce l' equazione

$$\frac{n'-n}{m-m'}y + \frac{e^{(m-a)x}}{m-m'}\int e^{(a-m)x}Xdx - \frac{e^{(m'-a)x}}{m-m'}\int e^{(a-m')x}Xdx + \frac{C'e^{(m'-a)x}}{m-m'} - \frac{Ce^{(m-a)x}}{m-m'}$$

$$= \frac{(n''-n)}{m-m''}y + \frac{e^{(m-a)x}}{m-m''}\int e^{(a-m)x}Xdx - \frac{e^{(m''-a)x}}{m-m''}\int e^{(a-m'')x}Xdx + \frac{C''e^{(m''-a)x}}{m-m''} - \frac{Ce^{(m-a)x}}{m-m''}$$; e da questa si ottiene finalmente

$$y = \frac{(m-m'')Ce^{(m-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')} - \frac{(m-m')Ce^{(m-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')} + \frac{(m-m')C''e^{(m''-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')} - \frac{(m-m'')C'e^{(m'-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')} + \frac{(m-m')e^{(m-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')}\int e^{(a-m)x}Xdx$$
$$- \frac{(m-m'')e^{(m-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')}\int e^{(a-m)x}Xdx + \frac{e(m-m'')^{(m'-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')}\int e^{(a-m')x}Xdx - \frac{(m-m')e^{(m''-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')}\int e^{(a-m'')x}Xdx$$

cioè $$y = \frac{(m'-m'')Ce^{(m-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')} + \frac{(m-m')C''e^{(m''-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')} - \frac{(m-m'')C'e^{(m'-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')} +$$

$$\frac{(m''-m')e^{(m-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')}\int e^{(a-m)x}Xdx+$$
$$\frac{(m-m'')e^{(m'-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')}\int e^{(a-m')x}Xdx$$
$$\frac{-(m-m')e^{(m''-a)x}}{(n'-n)(m-m'')-(n''-n)(m-m')}\int e^{(a-m'')x}Xdx.$$

Non può dubitarsi, che quest' ultima equazione sia l'integrale completo della proposta, giacchè essa contiene tante costanti arbitrarie C, C', C'', quanto è il numero esprimente il grado della data differenziale.

104. Di quì apparisce, come trattar si debbano le equazioni differenziali de' gradi superiori.

Lo stesso metodo è applicabile ancora, quando vi sia un maggior numero di variabili, delle quali però nissuna sia alzata ad una potenza maggiore del primo grado, e che moltiplicate non siano nè fra di loro, nè per un differenziale di tali variabili, toltone il costante.

Se per es. sono date le due equazioni $addy+bddz+cdydx+edzdx+fydx^2+gzdx^2+Xdx^2=0$, e $a'ddy+b'ddz+c'dydx+e'dzdx+f'ydx^2+g'zdx^2+X'dx^2=0$, s'incominci dal moltiplicar la prima per una costante indeterminata, ed aggiungerla alla seconda; indi que' termini dell' equazione, che ne risulta, ne' quali si trova dy, e dz, si spezzino in due parti, come abbiam fatto vedere, e si moltiplichi l'equazione per un fattore, che sia una funzione di x.

105. Quando in un' equazion differenziale, dove debbono entrare due variabili, ne mancasse una, allora si può trasformar l'equazione in un' altra di ordine prossimamente inferiore, ponendo il differenziale d'una variabile uguale al differenziale dell' altra, moltiplicato in una nuova variabile.

Debbasi per esempio integrare $\frac{ddy}{dy}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=(ay+b)dx$, dove dx è supposta costante, e manca la variabile x. Si faccia $dy=pdx$, onde $ddy=dpdx$, e $\frac{dp}{p}\sqrt{(1+p^2)}=(ay+b)\frac{dy}{p}$, ovvero $dp\sqrt{(1+p^2)}=(ay+b)dy$. Il secondo membro è integrabile algebricamente, il primo in parte algebricamente, in parte per logaritmi.

TEOREMA DI TAYLOR

ESTESO DAL P. D. GREGORIO FONTANA

alla funzione di qualsisia numero di variabili.

Sia Funz. $(x, y, z, \&c.) = V$, dico che sarà Funz. $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \&c.) = V + dV + \frac{ddV}{2} + \frac{d^3V}{2.3} + \frac{d^4V}{2.3.4} + \frac{d^5V}{2.3.4.5} + \&c$, sostituendo in questi differenziali di V a dx, dy, dz le $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

DIMOSTRAZIONE

$$\text{Funz.}(x + \Delta x, y, z, \&c.) = V + \frac{dV}{dx}\Delta x + \frac{ddV}{2dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3V}{2.3dx^3}\Delta x^3 + \frac{d^4V}{2.3.4dx^4}\Delta x^4 + \frac{d^5V}{2.3.4.5dx^5}\Delta x^5 + \&c = P$$

$$\text{Funz.}(x + \Delta x, y + \Delta y, z\ \&c.) = P + \frac{dP}{dy}\Delta y + \frac{ddP}{2dy^2}\Delta y^2 + \frac{d^3P}{2.3dy^3}\Delta y^3 + \frac{d^4P}{2.3.4dy^4}\Delta y^4 + \frac{d^5P}{2.3.4.5dy^5}\Delta y^5 + \&c. =$$

$$\left.\begin{array}{llllll}
V + \frac{dV}{dx}\Delta x & + \frac{ddV}{2dx^2}\Delta x^2 & + \frac{d^3V}{2.3dx^3}\Delta x^3 & + \frac{d^4V}{2.3.4dx^4}\Delta x^4 & + \frac{d^5V}{2.3.4.5dx^5}\Delta x^5 & + \&c. \\
+ \frac{dV}{dy}\Delta y & + \frac{ddV}{dxdy}\Delta x\Delta y & + \frac{d^3V}{2dx^2dy}\Delta x^2\Delta y & + \frac{d^4V}{2.3dx^3dy^2}\Delta x^3\Delta y^2 & + \frac{d^5V}{2.3.4dx^4dy}\Delta x^4\Delta y & + \&c. \\
 & + \frac{ddV}{2dy^2}\Delta y^2 & + \frac{d^3V}{2dxdy^2}\Delta x\Delta y^2 & + \frac{d^4V}{2.2dx^2dy^2}\Delta x^2\Delta y^2 & + \frac{d^5V}{2.2.3dx^3dy^2}\Delta x^3\Delta y^2 & + \&c. \\
 & & + \frac{d^3V}{2.3dy^3}\Delta y^3 & + \frac{d^4V}{2.3.4dxdy^3}\Delta x\Delta y^3 & + \frac{d^5V}{2.2.3dx^2dy^3}\Delta x^2\Delta y^3 & + \&c. \\
 & & & + \frac{d^4V}{2.3.4dy^4}\Delta y^4 & + \frac{d^5V}{2.3.4dxdy^4}\Delta x\Delta y^4 & + \&c. \\
 & & & & + \frac{d^5V}{2.3.4.5dy^5}\Delta y^5 & + \&c.
\end{array}\right\} = Q$$

$$\text{Funz.}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \&c.) = Q + \frac{dQ}{dz}\Delta z + \frac{ddQ}{2dz^2}\Delta z^2 + \frac{d^3Q}{2.3dz^3}\Delta z^3 + \frac{d^4Q}{2.3.4dz^4}\Delta z^4 + \frac{d^5Q}{2.3.4.5dz^5}\Delta z^5 + \&c. =$$

$$\begin{array}{llllll}
V + \frac{dV}{dx}\Delta x & + \frac{ddV}{2dx^2}\Delta x^2 & + \frac{d^3V}{2.3dx^3}\Delta x^3 & + \frac{d^4V}{2.3.4dx^4}\Delta x^4 & + \frac{d^5V}{2.3.4.5dx^5}\Delta x^5 & + \&c. \\
+ \frac{dV}{dy}\Delta y & + \frac{ddV}{dxdy}\Delta x\Delta y & + \frac{d^3V}{2dx^2dy}\Delta x^2\Delta y & + \frac{d^4V}{2.3.dx^3dy}\Delta x^3\Delta y & + \frac{d^5V}{2.3.4dx^4dy}\Delta x^4\Delta y & + \&c. \\
 & + \frac{ddV}{2dy^2}\Delta y^2 & + \frac{d^3V}{2dxdy^2}\Delta x\Delta y^2 & + \frac{d^4V}{2.2dx^2dy^2}\Delta x^2\Delta y^2 & + \frac{d^5V}{2.2.3dx^3dy^2}\Delta x^3\Delta y^2 & + \&c. \\
 & & + \frac{d^3V}{2.3dy^3}\Delta y^3 & + \frac{d^4V}{2.3dxdy^3}\Delta x\Delta y^3 & + \frac{d^5V}{2.2.3dx^2dy^3}\Delta x^2\Delta y^3 & + \&c. \\
 & & & + \frac{d^4V}{2.3.4dy^4}\Delta y^4 & + \frac{d^5V}{2.3.4dxdy^4}\Delta x\Delta y^4 & + \&c. \\
 & & & & + \frac{d^5V}{2.3.4.5dy^5}\Delta y^5 & + \&c. \\
 & & & & & \\
+ \frac{dV}{dz}\Delta z & + \frac{ddV}{dxdz}\Delta x\Delta z & + \frac{d^3V}{2dx^2dz}\Delta x^2\Delta z & + \frac{d^4V}{2.3dx^3dz}\Delta x^3\Delta z & + \frac{d^5V}{2.3.4dx^4dz}\Delta x^4\Delta z & + \&c. \\
 & + \frac{ddV}{dydz}\Delta y\Delta z & + \frac{d^3V}{dxdydz}\Delta x\Delta y\Delta z & + \frac{d^4V}{2dx^2dydz}\Delta x^2\Delta y\Delta z & + \frac{d^5V}{2.3dx^3dydz}\Delta x^3\Delta y\Delta z & + \&c. \\
 & & + \frac{d^3V}{2dy^2dz}\Delta y^2\Delta z & + \frac{d^4V}{2dxdy^2dz}\Delta x\Delta y^2\Delta z & + \frac{d^5V}{2.2dx^2dy^2dz}\Delta x^2\Delta y^2\Delta z & + \&c. \\
 & & & + \frac{d^4V}{2.3dy^3dz}\Delta y^3\Delta z & + \frac{d^5V}{2.3dxdy^3dz}\Delta x\Delta y^3\Delta z & + \&c. \\
 & & & & + \frac{d^5V}{2.3.4dy^4dz}\Delta y^4\Delta z & + \&c. \\
 & & & & & \\
 & + \frac{ddV}{2dz^2}\Delta z^2 & + \frac{d^3V}{2dxdz^2}\Delta x\Delta z^2 & + \frac{d^4V}{2.2dx^2dz^2}\Delta x^2\Delta z^2 & + \frac{d^5V}{2.2.3dx^3dz^2}\Delta x^3\Delta z^2 & + \&c. \\
 & & + \frac{d^3V}{2dydz^2}\Delta y\Delta z^2 & + \frac{d^4V}{2dxdydz^2}\Delta x\Delta y\Delta z^2 & + \frac{d^5V}{2.2.dx^2dydz^2}\Delta x^2\Delta y\Delta z^2 & + \&c. \\
 & & & + \frac{d^4V}{2.2dy^2dz^2}\Delta y^2\Delta z^2 & + \frac{d^5V}{2.2dxdy^2dz^2}\Delta x\Delta y^2\Delta z^2 & + \&c. \\
 & & & & + \frac{d^5V}{2.2.3dy^3dz^2}\Delta y^3\Delta z^2 & + \&c. \\
 & & & & & \\
 & & + \frac{d^3V}{2.3dz^3}\Delta z^3 & + \frac{d^4V}{2.3dxdz^3}\Delta x\Delta z^3 & + \frac{d^5V}{2.2.3dx^2dz^3}\Delta x^2\Delta z^3 & + \&c. \\
 & & & + \frac{d^4V}{2.3dydz^3}\Delta y\Delta z^3 & + \frac{d^5V}{2.3dxdydz^3}\Delta x\Delta y\Delta z^3 & + \&c. \\
 & & & & + \frac{d^5V}{2.2.3dy^2dz^3}\Delta y^2\Delta z^3 & + \&c. \\
 & & & & & \\
 & & & + \frac{d^4V}{2.3.4dz^4}\Delta z^4 & + \frac{d^5V}{2.3.4dxdz^4}\Delta x\Delta z^4 & + \&c. \\
 & & & & + \frac{d^5V}{2.3.4dydz^4}\Delta y\Delta z^4 & + \&c. \\
 & & & & + \frac{d^5V}{2.3.4.5dz^5}\Delta z^5 & + \&c. \\
 & & & & \&c. &
\end{array}$$

Consi-

Considerando questo valore di Funz. $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \&c)$ si conosce di leggieri, che la seconda fila verticale non è altro che dV, in cui siasi sostituito $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ a dx, dy, dz; la terza fila verticale è $\frac{ddV}{2}$, dove siasi fatta la medesima sostituzione; la quarta fila verticale è $\frac{d^3V}{2.3}$ fatta la predetta sostituzione; la quinta è $\frac{d^4V}{2.3.4}$; la sesta è $\frac{d^5V}{2.3.4.5}$; e così discorrendo dell'altre. Dunque Funz. $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \&c) = V' = V + dV + \frac{ddV}{2} + \frac{d^3V}{2.3} + \frac{d^4V}{2.3.4} + \frac{d^5V}{2.3.4.5} + \&c$ facendo sempre in tutti questi differenziali di V la mentovata sostituzione. Ciò che era ec.

SCOLIO.

Per dilucidare la precedente dimostrazione si dee riflettere, che essendo dV (fatta sempre la sostituzione di $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ in luogo di dx, dy, dz) $= \frac{dV}{dx}\Delta x + \frac{dV}{dy}\Delta y + \frac{dV}{dz}\Delta z$, nasce evidentemente $ddV = \frac{ddV}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{ddV}{dxdy}\Delta x\Delta y + \frac{ddV}{dxdz}\Delta x\Delta z + \frac{ddV}{dydx}\Delta y\Delta x + \frac{ddV}{dy^2}\Delta y^2 + \frac{ddV}{dydz}\Delta y\Delta z + \frac{ddV}{dzdx}\Delta z\Delta x +$

$\frac{ddV}{dzdy}\Delta z\Delta y + \frac{ddV}{dz^2}\Delta z^2 = \frac{ddV}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{ddV}{dy^2}\Delta y^2 + \frac{ddV}{dz^2}\Delta z^2 + \frac{2ddV}{dxdy}\Delta x\Delta y + \frac{2ddV}{dxdz}\Delta x\Delta z + \frac{2ddV}{dydz}\Delta y\Delta z$. Dunque $\frac{ddV}{2} = \frac{ddV}{2dx^2}\Delta x^2 + \frac{ddV}{2dy^2}\Delta y^2 + \frac{ddV}{2dz^2}\Delta z^2 + \frac{ddV}{dxdy}\Delta x\Delta y + \frac{ddV}{dxdz}\Delta x\Delta z + \frac{ddV}{dydz}\Delta y\Delta z$, che è per l'appunto la terza fila verticale. Parimente $\frac{d^3V}{2} =$

$$\frac{d^3V}{2dx^3}\Delta x^3 + \frac{d^3V}{2dx^2dy}\Delta x^2\Delta y + \frac{d^3V}{2dx^2dz}\Delta x^2\Delta z + \frac{d^3V}{2dy^2dx}\Delta y^2\Delta z + \frac{d^3V}{2dy^3}\Delta y^3 + \frac{d^3V}{2dy^2dz}\Delta y^2\Delta z + \frac{d^3V}{2dz^2dx}\Delta z^2\Delta x + \frac{d^3V}{2dz^2dy}\Delta z^2\Delta y + \frac{d^3V}{2dz^3}\Delta z^3 + \frac{d^3V}{dx^2dy}\Delta x^2\Delta y + \frac{d^3V}{dxdy^2}\Delta x\Delta y^2 + \frac{d^3V}{dxdydz}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{d^3V}{dx^2dz}\Delta x^2\Delta z + \frac{d^3V}{dxdzdy}\Delta x\Delta z\Delta y + \frac{d^3V}{dxdz^2}\Delta x\Delta z^2 + \frac{d^3V}{dxdydz}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{d^3V}{dy^2dz}\Delta y^2\Delta z + \frac{d^3V}{dydz^2}\Delta y\Delta z^2 = \frac{d^3V}{2dx^3}\Delta x^3 + \frac{d^3V}{2dy^3}\Delta y^3 +$$

$$\frac{d^3V}{2dz^3}\Delta z^3 + \frac{3d^3V}{2dx^2dy}\Delta x^2\Delta y + \frac{3d^3V}{2dx^2dz}\Delta x^2\Delta z + \frac{3d^3V}{2dy^2dx}\Delta y^2\Delta x + \frac{3d^3V}{2dy^2dz}\Delta y^2\Delta z + \frac{3d^3V}{2dz^2dx}\Delta z^2\Delta x + \frac{3d^3V}{2dz^2dy}\Delta z^2\Delta y + \frac{3d^3V}{dxdydz}\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Laonde dividendo per 3 avremo $\frac{d^3V}{2.3} = \frac{d^3V}{2.3dx^3}\Delta x^3 + \frac{d^3V}{2.3dy^3}\Delta y^3 + \frac{d^3V}{2.3dz^3}\Delta z^3 + \frac{d^3V}{2dx^2dy}\Delta x^2\Delta y + \frac{d^3V}{2dx^2dz}\Delta x^2\Delta z + \frac{d^3V}{2dy^2dx}\Delta y^2\Delta x + \frac{d^3V}{2dy^2dz}\Delta y^2\Delta z + \frac{d^3V}{2dz^2dx}\Delta z^2\Delta x + \frac{d^3V}{2dz^2dy}\Delta z^2\Delta y + \frac{d^3V}{dxdydz}\Delta x\Delta y\Delta z$, che sono precisamente i termini della quarta fila verticale. Così si prova degli altri

F I N E.

Pag.	lin.	Errori	Correzioni
4	2	X e Z	X e Y
6	25	PT	PS
8	5	$a^2 \pm a\Delta x$ &c.	$a^2 \pm ax \pm a\Delta x$ &c.
44	12	*dopo le parole* colla perpendicolare Mq *si aggiunga* che dal punto M cade sopra la Np	
61	10	AC	AD
64	14	*dopo le parole* Quindi ritrovo $ay - 2xy - y^2$ *si ponga* $= 0$, onde $x = \frac{1}{2}(a-y)$, e quindi $axy - x^2y - xy^2 = \frac{1}{4}y(a-y)^2$	
71	10	il segmento stesso	l' ascissa stessa
90	2	$\frac{\frac{1}{n+1}}{n}$	$\frac{\frac{1}{m+1}}{n}$
92	5	nb $x^n dx$	nb $x^n dx$
105	1	*in margine si ponga* Fig. 14	
106	12	$\frac{cb^2}{2ra^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$	$\frac{cb^2}{2ra^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$
108	1	*in margine si ponga*	Fig. 15.
113	17	§. 38.	§. 37.
121	*penult.*	per quest' altro	per quest' istesso
124	7	*in alcune copie* alteranti	alternanti
126	3	$\int \frac{-d\varphi \text{ sen. } m\varphi}{-m}$	$\int \frac{-md\varphi \text{ sen. } m\varphi}{-m}$
136	6	$x^3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$	$\frac{x^3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}$
	penult.	$m-n$	$m-u$
137	*penult.*	$\frac{-x^5(a^4x^{-4}-1)^{\frac{3}{2}}}{7a^4}$	$\frac{-x^{-5}(a^4x^{-4}-1)^{\frac{3}{2}}}{7a^4}$
	ult.	$(a^4x^{-4}-1)^{\frac{3}{2}}$	$(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{3}{2}}$
143	4	$\frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{dx}{a^2-x^2}$

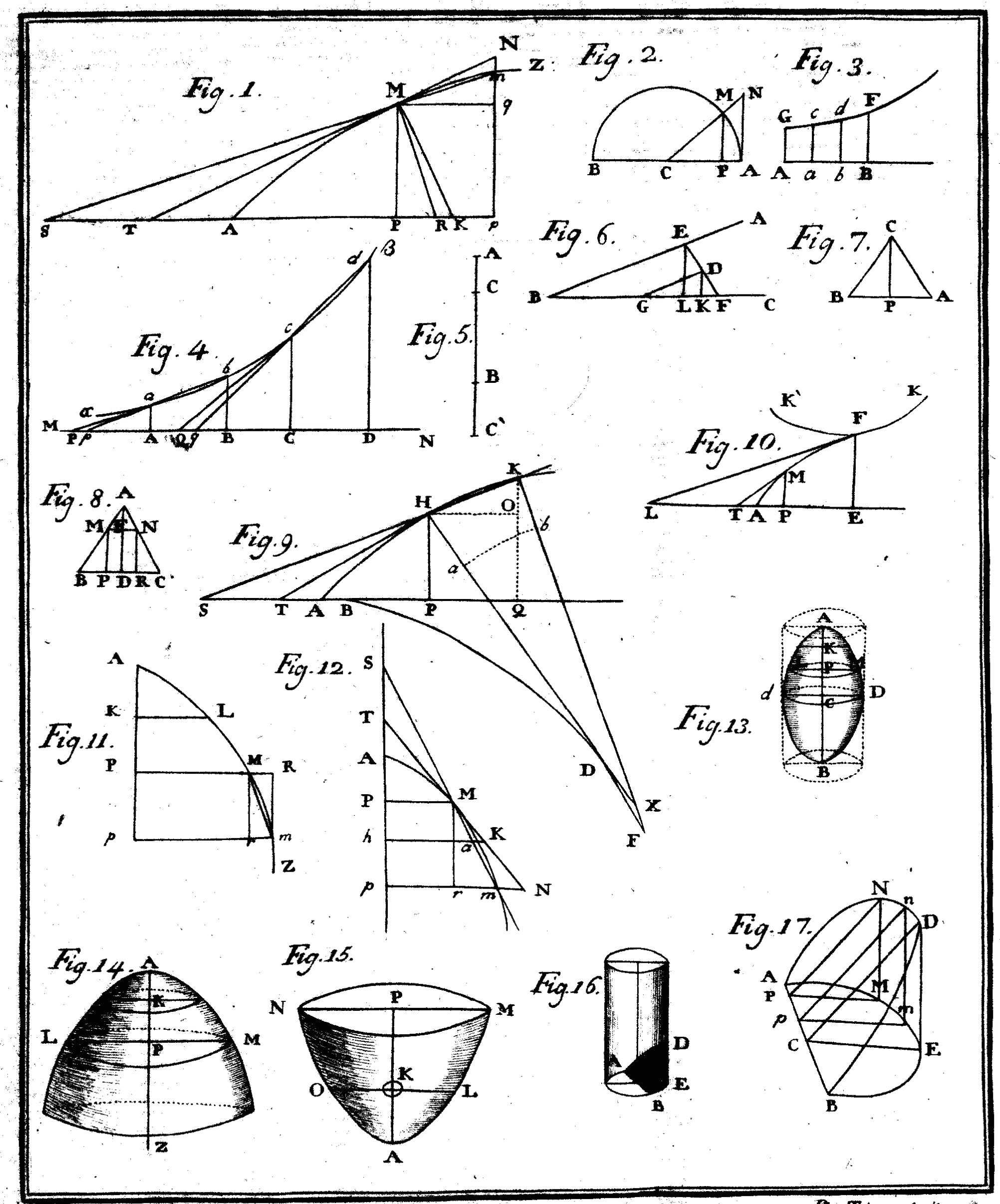
pag.	lin.	Errori	Correzioni
147	16	*in luogo di* C *si ponga* A	
148	15	§. 43, 44	§. 44, 45
152	14	k	k'
161	15	$\frac{dt}{y + y\sqrt{(y^2-1)}}$	$\frac{dt}{y + \sqrt{(y^2-1)}}$
190	10	$e(m-m')^{(m'-a)x}$	$(m-m')\,e^{(m'-a)x}$

Nella tavola che contiene il Teorema di Taylor

	lin.	Errori	Correzioni
	10	$\frac{d^4V}{2.3.dx^3dy^2}\Delta x^3 \Delta y^2$	$\frac{d^4V}{2.3dx^3dy}\Delta x^3 \Delta y$
	12	$\frac{d^4V}{2.3.4dxdy^3}$	$\frac{d^4V}{2.3dxdy^3}$
194	8	$\frac{d^3V}{2dy^2dx}\Delta y^2 \Delta z$	$\frac{d^3V}{2dy^2dx}\Delta y^2 \Delta x$

Nella tavola delle figure

Fig. 9. *ove la HX taglia la SQ si ponga la lettera V*



Pier Tola sculpsit