

Al Cav. Colla  
Il Prof. G. Botta  
L. Lombr. Autogr.

# NUOVA TEORIA

DEGLI

# STROMENTI OTTICI

DI

O. F. MOSSOTTI

*Professore di Meccanica Celeste, Fisica Matematica e Geodesia  
nell'I. e R. Università Toscana.*

—••—

PISA

TIPOGRAFIA NISTRI

1859

Al Cav. Colla  
Il Prof. G. Botta  
L. Lombr. Autogr.

(Estr. dagli Annali della Università Toscana Tomo IV, e V)

# INDICE

Preliminare . . . . . pag. 1

## PARTE PRIMA

ANALISI DEL CORSO DI UN RAGGIO DI LUCE CHE ATTRAVERSA UNO STROMENTO OTTICO.

CAP. I. Equazioni generali.	
1. <i>Idea degli stromenti ottici, ed esposizione del problema dalla cui risoluzione dipende la loro teorica . . . . .</i>	» 9
2. <i>Incontro del raggio di luce colla prima superficie, e dimostrazione analitica delle formole del Sig. Biot . . . . .</i>	» 10
3. <i>Incontri del raggio luminoso colle successive superficie rifrangenti . . . . .</i>	» 15
CAP. II. Riduzione delle formole precedenti ad una forma conveniente per la loro risoluzione.	
1. <i>Riflessioni sullo scopo delle ricerche da farsi . . . . .</i>	» 15
2. <i>Distinzione degli ordini di grandezza delle quantità comprese nelle formole precedenti . . . . .</i>	» 16
3. <i>Espressioni approssimate delle coordinate dei punti in cui il raggio incontra le superficie rifrangenti . . . . .</i>	» 17
4. <i>Espressioni approssimate dei coseni degli angoli che il raggio luminoso fa cogli assi delle coordinate all'uscire da ciascuna delle superficie rifrangenti . . . . .</i>	» 20
CAP. III. Risoluzione delle equazioni che somministrano i valori tanto delle coordinate $y_n, z_n$ , quanto dei coseni degli angoli $Y_n$ e $Z_n$ , in funzione delle rispettive coordinate $y_0, z_0, y_1$ e $z_1$ del punto radiante e del punto d'incidenza del raggio luminoso sulla prima superficie rifrangente.	
1. <i>Indicazione del metodo di risoluzione ed ordinamento delle equazioni . . . . .</i>	» 21
2. <i>Risoluzione delle premesse equazioni . . . . .</i>	» 22
3. <i>Valori delle coordinate del punto d'incontro d'un raggio luminoso con una superficie rifrangente qualunque del sistema, e dei coseni degli angoli che ne assegnano la direzione all'uscire dalla medesima . . . . .</i>	» 24
4. <i>Trasformazione delle equazioni precedenti introducendo le coordinate del punto radiante dell'oggetto in luogo degli angoli, che la direzione del raggio emanato dal medesimo punto fa coi tre assi delle coordinate . . . . .</i>	» 25

## CAP. IV. Digressione sulla forma e sulle proprietà delle funzioni $P_\lambda^{(1)}, P_\lambda^{(2)}$ .

1. <i>Regola pratica per la composizione delle funzioni <math>P_\lambda^{(1)}, P_\lambda^{(2)}</math> corrispondenti ad un indice qualunque <math>\lambda</math> . . . . .</i>	pag. 26
2. <i>Deduzione dei coefficienti, con indici sottoposti minori di <math>\lambda</math>, da quelli già formati e completi di <math>P_\lambda^{(1)}, P_\lambda^{(2)}</math> . . . . .</i>	» 28
3. <i>Relazione notevole fra i quattro coefficienti <math>P_{\lambda-1}^{(1)}, P_{\lambda-1}^{(2)}, P_\lambda^{(1)}, P_\lambda^{(2)}</math> . . . . .</i>	» 29
4. <i>Notazione più generale delle funzioni <math>P</math>, e loro decomposizione . . . . .</i>	» ivi
5. <i>Usi delle formole dell'articolo precedente, ed espressioni delle derivate <math>P_\lambda^{(1)}</math> e <math>P_\lambda^{(2)}</math>, rispetto ad un'elemento <math>p_i</math> qualunque . . . . .</i>	» 32
6. <i>Invariabilità delle funzioni <math>P</math> invertendo gli indici degli elementi <math>p</math> . . . . .</i>	» ivi
7. <i>Proprietà delle funzioni <math>Q_\lambda</math> dedotte da quelle delle <math>P_\lambda^{(1)}</math> . . . . .</i>	» 34

## PARTE SECONDA

PRIMA APPROSSIMAZIONE.

CAP. I. Proprietà generali degli stromenti ottici.	
1. <i>Motivi di premettere questa seconda parte . . . . .</i>	» 36
2. <i>Equazioni che rappresentano il corso del raggio luminoso emergente dallo stromento . . . . .</i>	» 37
3. <i>Fuochi coniugati dei raggi emanati da un punto dell'oggetto, e formazione dell'immagine di questo . . . . .</i>	» 38
4. <i>Circolo anulare del Sig. Biot . . . . .</i>	» 40
5. <i>Condizione generale a cui deve soddisfare uno stromento ottico per dare la visione distinta delle immagini degli oggetti, e posizioni delle medesime . . . . .</i>	» 41
6. <i>Amplificazione . . . . .</i>	» 43
7. <i>Legge ottica del Lagrange, e sua applicazione alla misura dell'amplificazione . . . . .</i>	» 44
8. <i>Principio su cui si fonda il dinametro, o misuratore dell'amplificazione degli stromenti ottici . . . . .</i>	» 47
9. <i>Dinometro . . . . .</i>	» 51
10. <i>Chiarezza . . . . .</i>	» 54
11. <i>Campo . . . . .</i>	» 55
CAP. II. Applicazioni.	
1. <i>Una sola superficie <math>n=1</math> . . . . .</i>	» 62
2. <i>Due superficie <math>n=2</math> . . . . .</i>	» 65
3. <i>Assi dei pennelli luminosi; centro ottico di una lente . . . . .</i>	» 68
4. <i>Microscopio semplice . . . . .</i>	» 73
5. <i>Occhiali . . . . .</i>	» 79
6. <i>Riduzioni di cui sono suscettibili le funzioni <math>P_\mu^{(i)}</math> nel caso che si trascurino le grossezze delle lenti . . . . .</i>	» 82
7. <i><math>n=4</math> Telescopii di Galileo e di Kepler . . . . .</i>	» 84
8. <i>Formola, che dà la relazione fra la distanza delle due semilenti e la dimensione lineare d'un oggetto, misurata col dinametro di Dollond . . . . .</i>	» 88

CAP. III. Analisi degli stromenti composti, ed analogie delle loro proprietà con quelle degli stromenti semplici precedentemente considerate.	
1. Formole esprimenti le coordinate del fuoco conjugato d'uno stromento qualunque . . . . .	pag. 92
2. Aggiustamento dell'oculare negli stromenti ottici. . . . .	» 94
3. Decomposizione degli stromenti ottici in due sistemi. Espressione generale dell'amplificazione d'uno stromento ottico aggiustato alla vista d'un osservatore qualunque. . . . .	» 98
4. Modificazioni da farsi alle formole esprimenti gli effetti degli stromenti ottici valutati per un'osservatore di vista normale per tradurle in quelle relative ad un'osservatore di vista qualunque . . . . .	» 101

PARTE TERZA

SECONDA APPROSSIMAZIONE.

CAP. I. Equazioni di condizione acciò siano distrutte le aberrazioni in uno stromento ottico qualunque.	
1. Causa delle aberrazioni. Mezzo che somministra l'Analisi per eliminare il loro effetto negli stromenti ottici. . . . .	» 106
2. Equazioni generali da soddisfarsi per elidere gli effetti delle aberrazioni . . . . .	» 108
3. Distinzione delle variabili indipendenti rispetto a ciascuna delle quali le premesse equazioni devono essere soddisfatte. . . . .	» 111
4. Forma comune delle equazioni parziali in cui si spezzano le equazioni generali (8). . . . .	» 113
CAP. II. Espressioni delle derivate delle quantità contenute nelle equazioni generali (12) applicabili al calcolo d'una aberrazione qualsivoglia.	
1. Derivate delle quantità $\Delta_0$ , $\cos X_v$ , $\alpha_v$ , $\beta_v$ , $\gamma_v$ , $\Delta$ , e $v_v$ rispetto alle variabili $\xi$ , $\zeta$ , e $\theta$ . . . . .	» 115
2. Formole esprimenti le derivate delle $p$ per mezzo di quelle ottenute nell'articolo precedente . . . . .	» 118
CAP. III. Equazioni che devono essere soddisfatte rispettivamente per ciascuna specie d'aberrazione acciò uno stromento ottico sia esente da essa.	
1. Equazioni per l'annichilamento dell'aberrazione d'apertura . . . . .	» 120
2. Equazioni per correggere l'aberrazione diedra. . . . .	» 122
3. Equazioni per la distruzione d'aberrazione di campo . . . . .	» 124
4. Equazioni per le correzioni d'aberrazione cromatica . . . . .	» 126

PARTE QUARTA

ESEMPII DI CALCOLO DI LENTI APLANATICHE

CAP. I. Calcolo d'un obiettivo aplanatico a due lenti.	
1. Considerazioni preliminari . . . . .	» 129
2. Equazioni particolari al caso propostoci, dedotte da quelle generali date nella Parte precedente . . . . .	» 130
3. Risoluzione delle precedenti equazioni. . . . .	» 134
4. Ordinamento della trovata equazione (5) per le potenze del suddetto rapporto dei poteri dispersivi. . . . .	» 137

CAP. II. Applicazione delle formole dell'articolo precedente al calcolo numerico di un obiettivo a due lenti a contatto.	
1. Calcolo dei valori di $a_0$ , $a_1$ , $b_0$ , $b_1$ , $b_2$ , $c_0$ ec. . . . .	pag. 141
2. Calcolo delle quantità $g$ secondo le formole (15), (15)', (15)'' . . . . .	» 146
3. Radici dell'ottenuta equazione, e valori dei raggi di curvatura delle superficie delle due lenti. . . . .	» 154
CAP. III. Calcolo d'un obiettivo aplanatico fatto da tre lenti in contatto tra loro.	
1. Equazioni d'aberrazione proprie al caso propostoci. . . . .	» 158
2. Riduzione di quattro delle precedenti equazioni ad una sola contenente una sola incognita . . . . .	» 160
3. Formazione dell'equazione che da il valore di $\frac{F}{f_3}$ . . . . .	» 164
CAP. IV. Applicazione delle formole generali precedenti, al calcolo numerico di un obiettivo aplanatico a tre lenti a contatto.	
1. Calcolo dei valori di $a_0$ , $a_1$ , $b_0$ , $b_1$ , $b_2$ , $c_0$ ec. . . . .	» 165
2. Calcolo delle quantità $g_0$ , $g'_0$ , $g''_0$ ec. . . . .	» 188
3. Radici dell'ottenuta equazione, e valore dei raggi di curvatura delle superficie delle tre lenti . . . . .	» 189
CAP. V. Rappresentazione degli effetti delle aberrazioni.	
1. Formole generali . . . . .	» 192
2. Grandezza e forma delle curve che limitano i luoghi geocentrici delle aberrazioni nei due casi, che la prima equazione d'aberrazione di campo, o la seconda d'aberrazione diedra non siano soddisfatte. . . . .	» 195
3. Equazioni delle curve che circoscrivono le altre specie d'aberrazioni non ancora considerate . . . . .	» 198
4. Equazione rappresentante l'effetto congiunto di tutte le specie d'aberrazioni sofferte dai raggi d'un pennello luminoso partiti da un punto dell'oggetto, e passanti per un sottile anello circolare tracciato sull'obiettivo. . . . .	» 200

APPENDICE

PROPRIETÀ DEI CENTRI CONIUGATI PRINCIPALI E DEI PIANI CONIUGATI PRINCIPALI DEDOTTE DALLA CONSIDERAZIONE DEGLI ASSI DEI PENNELLI LUMINOSI, ED APPLICAZIONE DI ESSE AL CALCOLO DEGLI STROMENTI OTTICI COMPOSTI DI PIU LENTI DELLE CUI GROSSEZZE SI DEBBA TENER CONTO.

1. Preliminare . . . . .	» 202
2. Deduzione dei centri coniugati principali . . . . .	» 205
3. Piani coniugati . . . . .	» 209
4. Determinazione della lunghezza focale di una lente fittizia, da sostituirsi alla reale, mediante la quale si riduce più semplice il calcolo degli effetti d'uno stromento ottico. . . . .	» 210
5. Calcolo degli effetti d'uno stromento ottico impiegando le distanze dei centri coniugati principali, e le relative lunghezze focali delle lenti fittizie. . . . .	» 213

ERRORI		CORREZIONI ED AGGIUNTE	
Pag.	44 linea 8	$x_2$	$x_2$
»	17 » 23	$\left(1 + \frac{y^2 + z^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(1 - \frac{y^2 + z^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
»	20 » 9	$\alpha$	$\alpha_v$
»	ivi » 44	$\cos V_{v-1}$	$\cos V_v$
»	23 » 9	(7)	(6) <sub>1</sub>
»	24 » 9	Q	$P_{\mu-1}$
»	42 » 17	$(\Delta_0, y_0, z_0)$	$(\Delta_0, y_0, z_0)$
»	49 » 40	$\delta =$	(5) <sub>1</sub> $\delta =$
»	ivi » 44	(k)	(k) <sub>1</sub>
»	54 » 2	$P_{2n-2}$	(24) $P_{2n-1}$
»	57 » 22	(25)	(24)
»	ivi » 26	(26)	(25)
»	63 » 27	$(\Delta_0, y_0, z_0)$	$(\Delta, y, z)$
»	64 » 20	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{1}{\rho_1}$
»	ivi » 24	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{1}{\rho_1}$
»	65 » 46	$\frac{v_2}{v_0}$	$\frac{v_2}{v_0}$
»	68 » 26	che attraversa.	atraversa la lente come asse del pennello.
»	70 » 46	asse centrale	asse del pennello
»	73 » 4	3	4
»	74 » 44	ed $F_1$	ed F
»	77 » 2	(24)	(7) <sub>1</sub>
»	78 » 4	dell'oggetto	dall'oggetto
»	79 » 9	k	5
»	83 » 34	$P_\lambda$	$P_\mu$
»	85 » 4	articolo 4	articolo 5
»	93 » 44	$P_2 \Delta_0$	$P_{2n-2} \Delta_0$
»	84 »	Nelle prime quattro equazioni dimmuisasi d'una unità l'indice v.	
»	94 » 4	$P_2^{(n)}$	$P_2^{(n)}$
»	96 » 7	$Q_{2v+1}^{(n-1)}$	(9) $Q_{2v+1}^{(n-1)}$
»	97 » 46	$C_{v+1}^{(n)}$	$C_{v+1}^{(n)}$
»	98 » 4	$P_2^{(n-1)}$ e $P_1^{(n-1)}$ si sostituiscia $P_1$ $P_2$	$P_1^{(n-1)}$ $P_2^{(n-1)}$
»	400 » 46	$X_n$	$X_n$
»	406 » 9	eludere	elidere
»	409 » 20	$+(P_{2n-2} + v_n \Delta P_{2n-1})^{(n)}$	$-(P_{2n-2} + v_n \Delta P_{2n-1})^{(n)}$
»	440 » 48	$y_1$ e $z_1$	$y$ e $z$
»	ivi » 20	dell'asse	dall'asse

ERRORI		CORREZIONI ED AGGIUNTE	
Pag.	440 linea 27	$-\frac{\partial(v_0 \Delta_0)}{v_0 \Delta_0}$	$+\frac{\partial(v_0 \Delta_0)}{v_0 \Delta_0}$
»	444 » 25	$\xi =$	$\zeta =$
»	444 » 22	$-\frac{1}{\Delta_0} \frac{d \Delta_0}{d \varphi} - \frac{1}{v_0} \frac{d v_0}{d \varphi}$	$+\frac{1}{\Delta_0} \frac{d \Delta_0}{d \varphi} + \frac{1}{v_0} \frac{d v_0}{d \varphi}$
»	445 » 26	$\left(1 - \frac{H_0}{\rho_1}\right)$	$\left(1 - \frac{\rho_1}{H_0}\right)$
»	447 » 7	$(P_{2v-1})^{(n)}$	$(P_{2v-1})^{(n)}$
»	ivi » 48	(46)	(45)
»	448 » 4	$(P_{2n-1})^{(n)}$	$(P_{2n-1})^{(n)}$
»	ivi » 44	$\frac{d}{d \theta} \frac{1}{v}$	$\frac{d}{d \theta} \frac{1}{v_v}$
»	ivi » 20	$\frac{d v}{d \theta}$	$\frac{d v_v}{d \theta}$
»	449 » 5	$\rho_{2v-1} =$	$\rho_{2v-1} =$
»	ivi » 46	$\frac{d \beta}{d \zeta}$	$\frac{d \beta_v}{d \zeta}$
»	424 » 46	$+\frac{1}{\rho_1 H_0} \left(1 + \frac{\rho_1}{H_0}\right)$	$-\frac{1}{\rho_1 H_0} \left(1 - \frac{\rho_1}{H_0}\right)$
»	424 » 8	$-\frac{1}{\alpha_0 H_0}$	$+\frac{\alpha_0}{H_0}$
»	434 » 9, 40, 44, 42	$\frac{a_1}{H_0}$	$\frac{a_0}{H_0}$
»	432 » 47	in principio di linea pongasi $(F)_1$	$(F)_1$
»	ivi » 48	$-\frac{1}{F} \left(\frac{2}{\rho_1} + \frac{1}{F}\right)$	$-\frac{1}{F} \left(\frac{2}{\rho_1} + \frac{1}{F}\right)$
»	454 » 24, 25	alle espressioni di $\psi^m$ e $\psi^m$ aggiungasi + 0,95849	
»	459 » 20	$\frac{m_2}{\rho_2}$	$\frac{m_2}{\rho_2}$
»	462 » 45	$-\frac{3 m_2}{a_2}$	$-\frac{2 m_2}{a_2}$
»	ivi » 47	$-\frac{k m_1}{a_1} r s$	$-\frac{k m_1 m_2}{a_1} r s$
»	ivi » 48	$3 m_2 r s^2$	$3 m_2 s^2$
»	ivi » 48	$-\frac{k m_2}{a_2} s$	$-\frac{k m_2}{a_2 m_2} s$
»	ivi » 49	$-\frac{6 m_2}{a_1} h r + 3 m_2 (k-i) s$	$-6 m_2 h r - 3 m_2 (k-i) s + \frac{3 m_2}{m_2} s$
»	ivi » 24	$+\frac{3 m_2}{m_2} k$	$-\frac{3 m_2}{m_2} k$
»	464 » 3	$\frac{m_2}{a_2 m_2} k$	$\frac{m_2}{a_2 m_2} k$



# NUOVA TEORIA DEGLI STROMENTI OTTICI

PRELIMINARE

1.

La teoria degli stromenti ottici, della quale maggiormente si valgono tutt'ora i Matematici, è quella dell'Eulero, le cui meditazioni furono, durante la sua lunga e luminosa carriera, spesso rivolte a quest'importante argomento. Ciò non pertanto il celebre Dott. Young, nel suo sunto sulla storia dell'Ottica, non esitò a pronunciare sui lavori risguardanti la luce, pubblicati da quell'Autore, un giudizio poco favorevole. « È però necessario » diss' egli « convènire che « questo gran Geometra fu meno fortunato nelle sue ottiche teorie che in molti « altri rami di scienza, e che le sue ricerche matematiche sugli effetti delle « lenti sono molto più intricate e prolisse di quello che il soggetto realmente « lo richieda » (\*).

Non è facile di congetturare quali considerazioni intendesse lo Young di sostituire a quelle dell'Eulero, ma si può osservare che Lagrange, pochi anni dopo la pubblicazione delle principali dottrine dell'Eulero, avendo preso a trattare la teoria dei telescopii e dei microscopii (\*\*), pervenne a delle formole suscettibili d'un' applicazione più generale, e che si prestano a dare in un modo più diretto le condizioni a cui deve soddisfare un sistema di lenti per la distinta visione, ed a determinarne gli effetti.

(\*) It must be allowed that this great mathematician was less fortunate in his optical theories, than in many others departments of sciences, his mathematical investigations of the effects of lenses are much more intricate and prolix than the subject actually requires. *Course of Lectures on Natural Philosophy*. Lecture XL.

(\*\*) Sur la Théorie de Lunettes. *Mémoires de l'Académie de Berlin*. An. 1778 et 1805.

2

2.

Una notevole restrizione, limita però tanto le formole di Lagrange, quanto quelle degli Autori che trattarono fino a questi ultimi tempi lo stesso argomento, e rende imperfette le deduzioni che, dall'applicazione di esse, si trassero rispetto agli effetti degli stromenti ottici. Tali formole sono tutte direttamente od indirettamente fondate sull'equazione nota, che dà la relazione fra la distanza focale principale di una lente e le due distanze conjugate (\*). Ora quest'equazione essendo dedotta unicamente dalla considerazione dei raggi luminosi che si propagano in piani passanti per l'asse della lente, le conseguenze, che se ne sono tratte, sussistono per questi raggi soli, e si trova per tal modo tacitamente esclusa l'influenza di que' raggi, ancor più numerosi, che si propagano in piani secanti l'asse medesimo.

Dopo che la Geometria analitica è divenuta uno stromento familiare ed universale d'applicazioni, Malus, Sturm, il sig. Dupin diedero maggiore generalità alle formole che rappresentano il corso dei raggi luminosi, che si rifrangono o si riflettono all'incontro di superficie rifrangenti o riflettenti, e dalle medesime si sarebbero potute dedurre le equazioni da sostituirsi a quella troppo limitata, di cui avevano fatto uso Lagrange ed altri. Tale deduzione però non era stata fatta, quando il celebre fisico sig. Biot, nel primo volume della terza edizione della sua *Astronomie Physique*, pag. 359 e seg., fece vedere direttamente, con una elementare costruzione geometrica, che due equazioni, simili a quella sussistente pei raggi che si propagano in piani passanti per l'asse della lente, si verificano anche per le proiezioni, che si possono fare di raggi comunque diretti, sui due piani coordinati condotti per l'asse stesso. Per mezzo di queste proiezioni, il corso di un raggio luminoso si trova decomposto in un modo simile a quello con cui nella Meccanica si considerano decomposti i movimenti; e come nella Meccanica un movimento curvilineo qualunque è sempre rappresentabile da tre movimenti rettilinei paralleli agli assi coordinati, così nell'Ottica il corso di un raggio, in qualunque modo diretto, che incontra lenti o specchi, è sempre rappresentabile da quelli di due raggi fittizii che ne siano le proiezioni, e per amendue dei quali sussista la

(\*) L'equazione a cui si allude è quella rappresentata da

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

nella quale  $a$  e  $b$  sono le due distanze conjugate, ed  $f$  la distanza focale principale.

legge espressa dalla citata equazione fondamentale. Colle ritrovate equazioni il sig. Biot rese pertanto applicabili, anche ai raggi poco divergenti dall'asse centrale e diretti in piani non passanti per esso, le formole che Lagrange aveva dato per soli raggi che vi passano.

## 3.

Per trattare il problema del corso di un raggio luminoso che attraversa un sistema di lenti collocate su di uno stesso asse centrale, Lagrange associa alla sopra citata equazione fondamentale l'altra, puramente geometrica, che esprime essere la somma della seconda distanza coniugata di una lente e della prima distanza coniugata della lente seguente eguale alla distanza reciproca delle due lenti (\*). Stabilite altrettante equazioni quante sono le lenti e le loro distanze reciproche, introduce, in luogo delle distanze coniugate delle medesime, l'angolo che il raggio luminoso fa coll'asse all'entrare in ciascuna lente, e la distanza dall'asse del punto per cui vi entra, ed eliminando successivamente quelle, fra queste incognite, che si riferiscono agli incontri colle lenti interne del sistema, e che si trovano tutte al primo grado, perviene a due equazioni, le quali rappresentano, sotto la forma più semplice, in funzione delle distanze focali principali delle lenti e delle loro distanze reciproche, le relazioni che devono sussistere fra la direzione con cui un raggio entra nella prima lente e la distanza dall'asse del suo punto d'incidenza, e la direzione con cui lo stesso raggio esce dall'ultima lente e la distanza dall'asse del punto d'emergenza. Allorchè si prendono le distanze focali principali delle lenti come costanti (\*\*), ciò che suppone trascurabili le grossezze delle lenti ed i quadrati

(\*) Tale equazione è rappresentata da

$$b + a' = h,$$

in cui  $h$  dinota la distanza fra due lenti consecutive,  $b$  la seconda distanza coniugata della lente precedente ed  $a'$  la prima distanza coniugata della seguente.

(\*\*) La formola, che esprime il valore esatto e completo della distanza coniugata di un raggio situato in piano passante per l'asse centrale di una lente, non trovandosi comunemente dimostrata in modo elementare, penso far cosa grata al lettore, e facilitare l'intelligenza di quanto vien detto in appresso, riferendo quella che ho dato nella Nota II alla xxxviii delle mie *Lezioni elementari di Fisica Matematica*:

Sia  $D$  la prima distanza coniugata, o la distanza del punto sull'asse da cui si può supporre che parta il raggio luminoso al polo del segmento sferico la cui superficie forma la faccia anteriore della lente;

$\rho$  il raggio della superficie medesima;

$e$  l'angolo che il raggio  $\rho$  condotto dal centro al punto d'incidenza del raggio luminoso fa coll'asse.

m.

delle loro aperture in confronto dei raggi di curvatura e delle distanze coniugate delle medesime, non che le variazioni che i poteri dispersivi delle loro sostanze producono sulla lunghezza delle dette distanze focali, le equazioni ottenute dal Lagrange sono così convenevolmente preparate, che si prestano con mirabile facilità e generalità a mettere in evidenza per ogni sistema di lenti le principali proprietà relative all'ingrandimento, al campo ed alla chiarezza.

$d$  la distanza dal polo del segmento su nominato al punto in cui il raggio rifratto prolungato incontra l'asse;

$g$  la grossezza della lente;

$n$  l'indice di rifrazione del raggio luminoso al penetrare dall'aria nella sostanza della lente;

e siano in ordine inverso,  $d'$ ,  $e'$ ,  $\rho'$ ,  $D'$  le quantità relative alla seconda superficie della lente, analoghe a quelle indicate colle stesse lettere senz'apice spettanti alla prima.

Posto

$$\omega = n \frac{\left\{ 1 + \frac{1}{D} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{D} \right) 4 \rho^2 \sin^2 \frac{1}{2} e \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ 1 + \frac{1}{d} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{d} \right) 4 \rho^2 \sin^2 \frac{1}{2} e \right\}^{\frac{1}{2}}},$$

nella qual' espressione l'incognita  $d$  è tale che si ha

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{D} = \omega \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{d} \right);$$

indi preso

$$\omega' = n \frac{\left\{ 1 + \frac{1}{D'} \left( \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{D'} \right) 4 \rho'^2 \sin^2 \frac{1}{2} e' \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ 1 - \frac{1}{d'} \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{d'} \right) 4 \rho'^2 \sin^2 \frac{1}{2} e' \right\}^{\frac{1}{2}}},$$

in cui  $d'$  è dato da

$$d' = d + g,$$

si trova che la seconda distanza coniugata  $D'$  soddisfa all'equazione

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{D'} = \frac{1}{f},$$

in cui la distanza  $f$  è espressa da

$$\frac{1}{f} = (\omega - 1) \frac{1}{\rho} + (\omega' - 1) \frac{1}{\rho'} + \frac{\omega}{d} - \frac{\omega'}{d'}.$$

Queste due ultime formole, nelle quali nulla è trascurato, sono analoghe a quelle approssimate già note, ma il valore di  $f$ , dato dalla seconda, è variabile col punto d'incidenza del raggio luminoso. Quando si omettono i quadrati di  $2\rho \sin \frac{1}{2} e$ ,  $2\rho' \sin \frac{1}{2} e'$ , cioè i quadrati delle corde che

## 4.

Considerando ciascuna superficie rifrangente in particolare, ed applicando il processo di calcolo del Lagrange ai due sistemi d'equazioni trovate dal sig. Biot per rappresentare le due proiezioni del corso del raggio luminoso dopo l'incontro con ciascuna di esse, si giunge parimente a quattro equazioni, due per ognuna delle proiezioni, le quali danno a conoscere le relazioni che devono esistere fra le direzioni e posizioni rispettive del raggio luminoso, comunque diretto, all'entrare nella prima superficie rifrangente del sistema ed all'uscire dall'ultima; e le quali ci palesano in un modo egualmente semplice le principali proprietà di cui godrebbero gli istromenti ottici, nella supposizione che siano trascurabili le quantità sopra accennate. Queste proprietà sono tali che, se i detti stromenti potessero essere realmente costrutti nelle condizioni dalla detta supposizione richieste, non lascerebbero più nulla a desiderare rispetto alla loro perfezione; ma, si fatte condizioni non sono comunemente conseguibili nell'atto pratico. L'applicazione delle formole stesse ci fa vedere, che non è possibile dare agli stromenti ottici un forte ingrandimento ed un campo esteso, conservando nello stesso tempo una convenevole chiarezza e nitidezza delle immagini, senza supporre le dimensioni delle lenti e degli altri congegni aumentate ad un punto che gli artisti non saprebbero raggiungere. Spingendo le approssimazioni più oltre, coll'intento di conciliare gli stessi effetti con dimensioni minori, si dà in un'altro scoglio, poichè si trova che i coefficienti, i quali moltiplicano le coordinate dei punti radianti dell'oggetto, e quelle dei punti d'ingresso

uniscono i poli dei rispettivi segmenti coi punti d'incidenza ed emergenza del raggio luminoso, non che la grossezza delle lenti, e si considera  $n$  costante per raggi d'ogni colore, si ha  $\omega = \omega' = n$ ,  $d' = d$ , e quindi

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right),$$

valor costante per una medesima lente.

Queste formole suppongono che la lente sia convesso-convessa, e quindi che la prima superficie della medesima sia convessa verso l'origine, od il punto sull'asse da cui parte il raggio luminoso, e la seconda sia concava verso la stessa parte. Se la prima superficie della lente fosse concava verso la detta origine si cambierebbe in tutte le formole  $p$  in  $-p$ , e se la seconda fosse convessa  $p'$  in  $-p'$ .

Il punto sull'asse corrispondente alla distanza  $d$  è supposto cadere dalla parte della lente verso l'origine, ed il punto corrispondente alla distanza  $d'$  dalla parte opposta. Se il valore dell'una o dell'altra di queste distanze risultasse negativo, ciò vorrebbe dire, che il punto corrispondente si trova situato nella parte contraria della lente a quella che suppongono le formole.

del raggio luminoso nel sistema, che nella prima approssimazione risultavano costanti, acquistano dei termini contenenti i quadrati o i prodotti delle coordinate medesime, ed i poteri dispersivi delle sostanze delle lenti, i quali termini col loro intervento fanno sì che le belle proprietà, di cui furono prima riconosciuti dotati gli stromenti ottici, cessano di sussistere nei limiti di questa seconda approssimazione. Per restituire ai detti stromenti le proprietà mancate e distruggere i difetti attinenti ai termini nuovamente introdotti, altro mezzo non si scorge che quello di farli sparire, annullando in essi i fattori che moltiplicano le dette variabili o le loro potenze, mediante un'opportuna scelta dei valori degli elementi costanti da cui gli stromenti stessi sono costituiti, vale a dire, delle lunghezze dei raggi di curvatura delle superficie delle lenti, delle loro distanze reciproche, e dei rapporti dei poteri dispersivi delle sostanze diafane colle quali le lenti possano essere composte. La determinazione di un assortimento d'elementi confacenti a questo scopo costituisce, come è noto, il principal problema della teorica dell'aberrazione sferica e cromatica, teorica assai complicata per la molteplicità dei termini che appariscono nelle espressioni dei suddetti fattori, e per la difficoltà d'impedire che le incognite destinate a soddisfare all'annullamento dei medesimi, non si elevino in essi al di là del minor grado possibile. Nulladimeno, considerando la semplicità e simmetria delle formole conseguite, ebbi il presentimento che, guidando il calcolo con qualche sagacità, si potrebbe ancora conservare nelle espressioni dei fattori summentovati una palese regolarità di composizione, e quindi concepì la speranza di poter giungere a tradurre in equazioni ancor trattabili le condizioni volute per l'annichilamento degli effetti di aberrazione.

## 5.

Condotto da queste riflessioni mi provai pertanto a comporre una nuova teorica degli stromenti ottici, della quale potessi servirmi di testo nelle lezioni di Fisica Matematica, che sono incaricato di dare in questa Università, partitamente in varii corsi annuali. Il mio tentativo non riuscì vano. Sarebbe difficile di far comprendere a chi non ha letto queste lezioni l'essenza dei processi impiegati, nel condurre il calcolo, per attingere lo scopo propostomi; ma una breve annunciazione dei risultati ottenuti servirà a dare almeno un'idea della generalità e novità della nuova teoria.

Le ricerche fatte mi hanno condotto a riconoscere, che un sistema di lenti non può essere atto a riunire i raggi partiti da ciascun punto dell'oggetto nel punto corrispondente dell'immagine ed a formare di questa una rappresentazione simile all'oggetto, se non sussistono fra i suoi elementi otto equa-

zioni di condizione. Due di queste equazioni sono richieste, acciò i raggi emanati da un sol punto dell'oggetto, e caduti su tutti i punti della prima superficie del sistema, convengano in un sol fuoco o siano tutti paralleli all'uscire dall'ultima, e queste equazioni potrebbero chiamarsi equazioni di condizione per l'*aberrazione d'apertura*. Due altre equazioni devono essere soddisfatte acciò le dette proprietà sussistano indipendentemente dalla distanza del punto radiante dall'asse centrale del sistema, le quali potrebbero dirsi equazioni dovute alla distruzione d'*aberrazione di campo*. Due equazioni ancora devono essere verificate pel concentramento dei raggi che non stanno in uno stesso piano coll'asse centrale, e come l'errore, che nascerebbe senza la loro verificaione, sarebbe dipendente dall'angolo fatto dai due piani condotti per l'asse, uno passante pel punto radiante e l'altro pel punto d'incidenza del raggio sulla prima superficie obbiettiva, potremo brevemente indicarle col nome di equazioni per la distruzione d'*aberrazione diedra*. Finalmente le due ultime equazioni sono quelle volute per la compenetrazione dei raggi dei vari colori provenienti dalla dispersione o variabilità dei loro indici di rifrazione, le quali sono conosciute col nome d'*aberrazione cromatica*. Rispetto a queste faremo osservare che, quando si volessero annichilare anche gli spettri detti secondarii, esse monterebbero a quattro.

Comunemente gli stromenti ottici non offriranno, senza complicare di troppo la loro costruzione, tanti elementi arbitrarii da soddisfare a tutte le accennate equazioni, ed il calcolatore si troverà obbligato a preferire la verificaione di quelle la cui omissione lascerebbe sussistere gli errori più nocivi alla bontà dello stromento, riserbando le altre a dargli soltanto un criterio sulla grandezza degli errori a cui il medesimo potrebbe ancora rimanere soggetto.

## 6.

Già aveva esposto due o tre volte nei varii corsi delle mie lezioni questa nuova teoria, quando un giovine zelante per questi studii, il Dott. Forti, mi palesò il desiderio, qualora volessi prestargli consiglio e direzione, d'accingersi a fare un'applicazione numerica di essa alla determinazione dei raggi di curvatura della superficie di tre lenti atte a comporre un'obbiettivo esente, per quanto fosse possibile, dagli errori d'aberrazione cromatica e sferica. Questo esperto calcolatore corrispose pienamente al suo assunto; egli condusse a buon termine il suo calcolo, supponendo le tre lenti a contatto, e ne pubblicò i risultati in una Memoria, che lesse all'Accademia Valdarnese il cinque di Settembre 1852. I valori ottenuti dei raggi di curvatura avendo attratto l'attenzione di un ottimo giudice, l'esimio ottico Cav. Amici, il medesimo si mostrò

propenso a costruire un'obbiettivo sulla norma di essi. Tale proposizione venne accolta con alacrità dal Dott. Forti, che intraprese tosto, per maggior sicurezza a ripetere il suo calcolo. Dal canto mio, volendo pur concorrere a sì nobile oggetto, ripresi a rivedere le formole, coll'intendimento di renderle più comprensive e più facilmente traducibili in numeri, poichè sotto la forma in cui erano, quando il Dott. Forti fece la sua prima applicazione, esigevano un calcolo alquanto prolisso. I nuovi studii mi condussero a scoprire alcune proprietà delle funzioni, che entrano nella composizione delle suddette formole, per mezzo delle quali il calcolo fu ridotto ad esigere un minor numero d'operazioni. Scortato da tali mezzi, il Dott. Forti potè ottenere più prontamente i nuovi valori dei raggi di curvatura delle lenti, che risultarono poco differenti dai primi, e che trasmise immediatamente al Cav. Amici. Il saggio fatto da questo Ottico riuscì favorevole quanto si poteva sperare, poichè costruì un obbiettivo di sei pollici d'apertura con soli cinquantadue pollici di distanza focale, che produce un'effetto di cui egli stesso fu grandemente soddisfatto.

A quest'applicazione il Dott. Forti ne fece tener dietro un'altra. Calcolò un'oculare, composto di due lenti a contatto, per uso dei cannocchiali di teatro o galileani, lasciando indeterminato il rapporto della dispersione dei due vetri, per poi servirsene a soddisfare ad una delle equazioni di condizione dell'acromatismo. Il Prof. Amici ebbe la compiacenza di costruire quest'oculare per farne dono all'abile calcolatore, ed avendolo accoppiato ad un'obbiettivo acromatico di Lerebours, vidde che produceva un effetto migliore degli oculari comuni.

## 7.

Animato dal buon successo degli esperimenti eseguiti mi sono determinato a rendere pubblica la teoria che somministrò le formole impiegate pel calcolo di quelle lenti, ed ho creduto opportuno di non dover sopprimere parte alcuna del testo delle mie lezioni, benchè talvolta vi siano inserite alcune semplici applicazioni che conducono a risultati già noti, non volendo perdere il vantaggio di rendere più familiare al lettore l'uso e l'interpretazione delle formole trovate, e d'aver occasione di correggere qualche errore frequente nei Trattati d'Ottica. Ho anche pregato il Dott. Forti a volermi comunicare un quadro degli sviluppi e dei calcoli numerici da lui eseguiti per pubblicarlo assieme, onde coloro che volessero intraprendere delle nuove applicazioni avessero sott'occhio un'esempio da seguire, al che egli ha liberalmente acconsentito.

## PARTE PRIMA

ANALISI DEL CORSO DI UN RAGGIO DI LUCE  
CHE ATTRAVERSA UNO STROMENTO OTTICO.

### CAPITOLO I.

EQUAZIONI GENERALI.

1.

*Idea degli stromenti ottici, ed esposizione del problema  
dalla cui risoluzione dipende la loro teoria.*

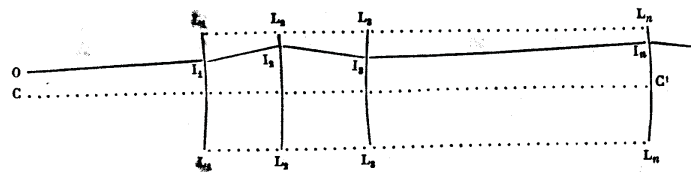
Gli stromenti ottici, comunemente adoperati per aiutare la visione degli oggetti lontani, come i telescopii, o quella degli oggetti molto piccoli, che non potrebbero divenire percettibili senza avvicinarli all'occhio oltre il limite della visione distinta, come i microscopii, sono composti di due o più lenti o specchii, limitati da porzioni di superficie sferiche aventi i loro centri disposti sopra una stessa retta od asse, che si chiama l'asse centrale dello stromento. Affinchè un tal sistema di lenti o specchii sia atto a produrre gli effetti su accennati, e costituisca uno stromento ottico, è necessario che goda di due proprietà principali. Primieramente si esige che i raggi, emanati da uno stesso punto dell'oggetto e penetrati nello stromento, vengano da esso modificati nelle loro direzioni in guisa che escano dal medesimo formando un pennello di raggi paralleli, acciò l'occhio dell'osservatore possa riunirli sulla retina e ricevere una percezione chiara e distinta del punto da cui sono partiti. Secondariamente si richiede, per ben giudicare della forma dell'oggetto da quella dell'immagine veduta nello stromento, che questa sia simile alla prospettiva di quello, e perciò che gli assi dei pennelli di luce emanata dai vari punti dell'oggetto abbiano direzioni tali, all'uscire dall'istromento, che facciano fra loro degli angoli, maggiori sì, ma proporzionali a quelli che sarebbero compresi dalle rette visuali condotte ai punti medesimi.

2

10

Per tradurre in equazioni queste due condizioni, indispensabili in ogni istromento ottico, si esige che risolviamo preventivamente il seguente problema fondamentale.

Siano  $L_1, L_2, \dots, L_n$  nell'apposta figura



tante porzioni di superficie sferiche che dividono vari mezzi rifrangenti o riflettenti, i centri delle quali siano tutti situati su di un medesimo asse centrale C C'. Supponendo che tali porzioni siano piccole zone a base unica delle superficie totali, vale a dire che i raggi delle basi di dette zone siano piccole frazioni di quelli delle superficie sferiche di cui fan parte, e che un raggio di luce O I cada, con piccola obliquità coll'asse centrale, sulla prima superficie  $L_1, L_2$ , indi rifrangendosi o riflettendosi, secondo le leggi ottiche, passi successivamente per tutte le altre, si tratta di determinare il corso che il medesimo seguirà nel percorrere l'intero sistema dei vari mezzi rifrangenti.

2.

*Incontro del raggio di luce colla prima superficie, e dimostrazione analitica  
delle formole del Sig. Biot.*

Per rappresentare il corso del raggio luminoso lo riferiremo, seguendo i metodi della Geometria analitica divenuti ormai tanto comuni, a delle coordinate rettangolo. Assumeremo per asse delle  $x$  lo stesso asse centrale, e per assi delle  $y$  e delle  $z$  due altri assi ortogonali passanti per un punto del primo. Il raggio di luce sarà determinato nel suo corso, se, date le coordinate  $x_0, y_0, z_0$  del punto d'onde parte, e gli angoli  $X_0, Y_0, Z_0$  che la sua direzione fa coi tre assi, determineremo le coordinate  $x_1, y_1, z_1$  del punto per cui entra nella prima superficie, e gli angoli  $X_1, Y_1, Z_1$  che forma cogli assi delle coordinate all'uscire dalla medesima, penetrando nel secondo mezzo.

Per tal fine sinottiamo con  $\Delta_0$  la distanza del punto  $(x_0, y_0, z_0)$  dell'oggetto, da cui parte il raggio luminoso, al punto  $(x_1, y_1, z_1)$ , in cui incontra



la prima superficie rifrangente, le proiezioni di questa distanza sui tre assi saranno rappresentate, come è noto, dalle formole

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 - x_0 = \Delta_0 \cos X_0, \\ y_1 - y_0 = \Delta_0 \cos Y_0, \\ z_1 - z_0 = \Delta_0 \cos Z_0. \end{cases}$$

Senza limitarci per ora alla supposizione, che la detta superficie sia sferica, consideriamo, per maggiore generalità, una superficie qualunque di rivoluzione intorno all'asse centrale e rappresentiamo con

$$(2) \quad u = y^2 + z^2 - \varphi(x) = 0$$

la sua equazione, dinotando  $\varphi(x)$  una funzione qualunque reale della  $x$ .

Dalla Geometria analitica si sa che, posto

$$U^2 = \frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2},$$

i coseni  $k_1, l_1, m_1$  degli angoli, che la normale alla superficie medesima fa coi tre assi, sono dati da

$$(3) \quad k_1 = \frac{1}{U} \frac{du}{dx}, \quad l_1 = \frac{1}{U} \frac{du}{dy}, \quad m_1 = \frac{1}{U} \frac{du}{dz}$$

valori che soddisfanno alla relazione

$$k_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = 1.$$

Ora, le leggi dell'Ottica c'insegnano, 1.° che, quando un raggio di luce incontra una superficie unirifrangente o riflettente, questo raggio dopo la rifrazione o riflessione si trova nello stesso piano in cui stava colla perpendicolare alla superficie nel punto d'incidenza avanti d'essere rifratto o riflesso, 2.° che il seno dell'angolo, che esso faceva, prima della sua incidenza colla detta perpendicolare, stà al seno dell'angolo, che fa colla medesima penetrando nel secondo mezzo, in un rapporto costante, che è quello delle velocità con cui si propaga rispettivamente la luce nei due mezzi separati dalla detta superficie. Questo rapporto è costante per tutti gli angoli d'incidenza e rifrazione, se la sostanza rifrangente e la specie di luce rimane la stessa, ma varia nella rifrazione, secondo la natura della sostanza ed il colore della luce, e nella riflessione è sempre indipendente da questi elementi ed eguale a  $-1$ .

Il coseno dell'angolo  $V_1$ , che il raggio luminoso fa colla normale alla superficie della lente nel punto d'incidenza, è espresso, usando delle denominazioni precedenti, da

$$(4) \quad \cos V_1 = k_1 \cos X_0 + l_1 \cos Y_0 + m_1 \cos Z_0;$$

ed i coseni degli angoli, che fa cogli assi delle coordinate  $x, y, z$ , la perpendicolare al piano, in cui il raggio luminoso e la normale suddetta si trovano situati, sono dati rispettivamente da

$$(5) \quad \frac{l_1 \cos Z_0 - m_1 \cos Y_0}{\sin V_1}, \quad \frac{m_1 \cos X_0 - k_1 \cos Z_0}{\sin V_1}, \quad \frac{k_1 \cos Y_0 - l_1 \cos X_0}{\sin V_1}.$$

Parimente il coseno dell'angolo  $V'_1$ , fatto dal raggio luminoso colla normale alla superficie rifrangente nel punto d'emergenza, dopo la rifrazione, è espresso da

$$(6) \quad \cos V'_1 = k_1 \cos X_1 + l_1 \cos Y_1 + m_1 \cos Z_1;$$

ed i coseni degli angoli fatti cogli assi delle coordinate  $x, y, z$ , dalla perpendicolare al piano, in cui stanno le due sunnominate rette, sono rispettivamente dati da

$$(7) \quad \frac{l_1 \cos Z_1 - m_1 \cos Y_1}{\sin V'_1}, \quad \frac{m_1 \cos X_1 - k_1 \cos Z_1}{\sin V'_1}, \quad \frac{k_1 \cos Y_1 - l_1 \cos X_1}{\sin V'_1}.$$

Dunque, poichè i due piani suddetti devono coincidere per la prima legge d'Ottica, e poichè, per la seconda legge, chiamando  $v_0$  e  $v_1$  le velocità di propagazione della luce nel primo e secondo mezzo, si deve avere

$$(8) \quad \frac{1}{v_0} \sin V_1 = \frac{1}{v_1} \sin V'_1,$$

confrontando i valori dei coseni datici dalle (5) e (7), che devono essere eguali fra loro, ed eliminando  $\sin V_1$  e  $\sin V'_1$  col mezzo di quest'ultima relazione, dovranno sussistere le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} (l_1 \cos Z_1 - m_1 \cos Y_1) &= \frac{1}{v_0} (l_1 \cos Z_0 - m_1 \cos Y_0), \\ \frac{1}{v_1} (m_1 \cos X_1 - k_1 \cos Z_1) &= \frac{1}{v_0} (m_1 \cos X_0 - k_1 \cos Z_0), \\ \frac{1}{v_1} (k_1 \cos Y_1 - l_1 \cos X_1) &= \frac{1}{v_0} (k_1 \cos Y_0 - l_1 \cos X_0). \end{aligned}$$

Dalla seconda di queste equazioni, moltiplicata per  $m_1$ , sottraggiamo la terza moltiplicata per  $l_1$ , indi aggiungiamo e togliamo alla differenza le quantità

$$k^2 \cos X_1, \quad k^2 \cos X_0,$$

e ripetiamo un calcolo analogo colle equazioni terza e prima, e poi colla prima e seconda, con ciò e coll'uso delle (4) e (6), le tre precedenti equazioni verranno trasformate nelle seguenti

$$(9) \quad \begin{cases} \cos X_1 = \frac{v_1}{v_0} \cos X_0 + k_1 \left( \cos V_1 - \frac{v_1}{v_0} \cos V_1 \right), \\ \cos Y_1 = \frac{v_1}{v_0} \cos Y_0 + l_1 \left( \cos V_1 - \frac{v_1}{v_0} \cos V_1 \right), \\ \cos Z_1 = \frac{v_1}{v_0} \cos Z_0 + m_1 \left( \cos V_1 - \frac{v_1}{v_0} \cos V_1 \right). \end{cases}$$

Queste equazioni sono quelle, che furono dimostrate primieramente dal sig. Biot, e costituiscono l'importante innovazione introdotta dal medesimo nella teoria delle lenti, di cui abbiamo tenuto parola nel preliminare.

Le equazioni (1), (2), (4), (6), (9) contengono le relazioni necessarie fra gli elementi del calcolo per determinare il corso del raggio luminoso dopo il suo incontro colla prima superficie rifrangente, dato che fosse il punto di partenza del raggio e la direzione del medesimo. Infatti, sostituendo nell'equazione (2) per  $x_1, y_1, z_1$  le espressioni date dalla (1), potremo avere un'equazione che non conterrà altra incognita che  $\Delta_0$ . Determinata questa incognita colla risoluzione della detta equazione, risalendo alle (1) avremo i valori delle coordinate del punto d'incontro  $(x_1, y_1, z_1)$  del raggio luminoso colla superficie rifrangente, indi si otterranno dalle (3) i valori  $k_1, l_1, m_1$  dei coseni degli angoli che la normale alla superficie fa coi tre assi delle coordinate, e dalla (4) quello dell'angolo d'incidenza  $V_1$ . Dalla (8) si potrà in seguito dedurre l'angolo di rifrazione  $V'_1$ , e con questi valori si avranno finalmente dalle (9) gli angoli  $X_1, Y_1, Z_1$  che il raggio luminoso fa cogli assi delle coordinate al di là della prima superficie.

## 3.

*Incontri del raggio luminoso colle successive superficie rifrangenti.*

Se ora risguardiamo il punto  $(x_1, y_1, z_1)$  come un nuovo punto di partenza del raggio, la cui direzione sia data dagli angoli  $X_1, Y_1, Z_1$  e vogliamo trovare

il punto ove incontrerà la seconda superficie e la direzione con cui uscirà da essa, basterà dinotare con  $\Delta_1$  la parte del raggio intercetta fra le due superficie e con  $x_2, y_2, z_2$  ed  $X_2, Y_2, Z_2$  rispettivamente le coordinate del punto cercato e gli angoli che la direzione dimandata fa coi tre assi di queste, che le stesse considerazioni, le quali ci hanno fornito le equazioni (1), (2), (8), (9), ci condurranno alle seguenti, in cui tutti gli indici posti sotto le lettere sono aumentati d'un unità,

$$\begin{aligned} z_2 - x_1 &= \Delta_1 \cos X_1, \\ y_2 - y_1 &= \Delta_1 \cos Y_1, \\ z_2 - x_1 &= \Delta_1 \cos Z_1, \\ y_2^2 + z_2^2 - \varphi_2(x) &= u_2 = 0, \\ \sin V'_2 &= \frac{v_1}{v_2} \sin V_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos X_2 &= \frac{v_2}{v_1} \cos X_1 + k_2 \left( \cos V'_2 - \frac{v_2}{v_1} \cos V_2 \right), \\ \cos Y_2 &= \frac{v_2}{v_1} \cos Y_1 + l_2 \left( \cos V'_2 - \frac{v_2}{v_1} \cos V_2 \right), \\ \cos Z_2 &= \frac{v_2}{v_1} \cos Z_1 + m_2 \left( \cos V'_2 - \frac{v_2}{v_1} \cos V_2 \right). \end{aligned}$$

Proseguendo nello stesso modo da superficie in superficie è evidente che, per la rifrazione o riflessione corrispondente alla superficie  $v^{\text{esima}}$ , avremo le equazioni

$$(10) \quad \begin{cases} x_v - x_{v-1} = \Delta_{v-1} \cos X_{v-1} \\ y_v - y_{v-1} = \Delta_{v-1} \cos Y_{v-1} \\ z_v - z_{v-1} = \Delta_{v-1} \cos Z_{v-1} \\ y_v^2 + z_v^2 = \varphi_v(x) = u_v = 0 \\ \sin V'_v = \frac{v_{v-1}}{v_v} \sin V_{v-1} \\ \cos X_v = \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos X_{v-1} + k_v \left( \cos V'_v - \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos V_{v-1} \right) \\ \cos Y_v = \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos Y_{v-1} + l_v \left( \cos V'_v - \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos V_{v-1} \right) \\ \cos Z_v = \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos Z_{v-1} + m_v \left( \cos V'_v - \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos V_{v-1} \right) \end{cases}$$

Queste otto equazioni danno i valori delle incognite

$$\Delta, x, y, z, V, X, Y, Z,$$

per mezzo delle quantità analoghe corrispondenti all'incontro del raggio colla superficie precedente, dei parametri contenuti nell'equazione della superficie  $v^{\text{esima}}$  che si considera e dell'indice di rifrazione del nuovo mezzo.

Si potrà dunque, dalla cognizione del luogo del punto da cui parte il raggio luminoso e degli angoli che esso fa cogli assi delle coordinate, prima d'entrare nel sistema dei mezzi rifrangenti in considerazione, passare con un calcolo successivo a quelle del luogo del punto d'emergenza e degli angoli che danno la direzione del detto raggio appena uscito dal sistema medesimo.

## CAPITOLO II.

RIDUZIONE DELLE FORMOLE PRECEDENTI AD UNA FORMA CONVENIENTE  
PER LA LORO RISOLUZIONE.

### 1.

*Riflessioni sullo scopo delle ricerche da farsi.*

Secondo ciò che abbiamo esposto alla fine del capitolo precedente il corso di un raggio di luce, che attraversa un sistema di mezzi diversamente rifrangenti separati da superficie di rivoluzione intorno all'asse centrale, sarebbe successivamente determinabile colle formole (10), che ci offrono il modo di assegnare la posizione e la direzione di esso dopo l'incontro con una superficie qualunque del sistema, quando la posizione e la direzione del raggio all'uscire dalla superficie precedente sono conosciute, ed i parametri di questa superficie e la velocità della luce nel nuovo mezzo sono date. Ma, una tale determinazione, particolare a ciascun caso, non soddisferebbe al nostro oggetto, perchè, oltre all'essere impraticabile per un gran numero di raggi, sarebbe insufficiente per farci conoscere le relazioni che passano fra i cammini seguiti dai diversi raggi e gli elementi componenti il sistema ottico, relazioni le quali sono necessarie per costituire una teoria e porgerci i fondamenti su cui poter stabilire un giudizio completo degli effetti che il detto sistema può produrre.

Per ottenere siffatte relazioni bisogna eseguire la risoluzione algebrica delle equazioni generali segnate (10), dare, cioè, a  $v$  successivamente tutti i valori in numeri interi da  $v = 1$  sino a  $v = n$  essendo  $n$  il numero delle super-

ficie rifrangenti, eliminare dalle medesime tutte le incognite intermedie, e trovare le formole analitiche che danno le coordinate del punto per cui esce un raggio qualunque dall'ultima superficie, ed i coseni degli angoli che la sua direzione fa cogli assi delle coordinate uscito dalla medesima, in funzione delle quantità analoghe che rappresentano il suo corso all'entrare nel sistema e di quelle che esprimono i valori degli elementi di cui questo si compone.

Volendo eseguire la risoluzione di dette equazioni direttamente, coi metodi d'eliminazione conosciuti, ci troveremmo ben presto ingolfati in calcoli inestricabili, per causa dei radicali che le medesime contengono, e l'artificio per evitare quest'inconveniente sta nel sfruttare della piccolezza di cui i valori di alcune funzioni di quantità incognite differiscono da valori conosciuti, per semplicizzare le equazioni in discorso, risguardando da principio queste funzioni come date, e risolvere il problema per successive approssimazioni.

### 2.

*Distinzione degli ordini di grandezza delle quantità  
comprese nelle formole precedenti.*

Le quantità, che, come abbiamo già detto, hanno un tenue valore nel problema che trattiamo, sono quelle dipendenti dalle aperture delle porzioni di superficie che limitano i mezzi rifrangenti, che sono comunemente piccole in confronto dei parametri delle superficie medesime, e quelle relative alla poca inclinazione del raggio luminoso all'asse centrale.

Per considerare le prime, noteremo che la funzione indeterminata  $\varphi_v(x)$ , compresa nella quarta delle equazioni (10), prende la forma  $\rho_v^2 - (x - a_v)^2$ , quando questa superficie è, come ne' casi comuni, una porzione di superficie sferica, il cui centro corrisponda all'ascissa  $a_v$ , ed il cui raggio sia  $\rho_v$ . Sostituendo quest'espressione di  $\varphi_v(x)$ , la detta equazione verrà rimpiazzata dalla seguente

$$(1) \quad u = (x - a_v)^2 + y^2 + z^2 - \rho_v^2 = 0.$$

Ora, affinchè l'apertura della superficie  $v^{\text{esima}}$  sia piccola in confronto del raggio  $\rho_v$ , bisognerà che i rapporti

$$\frac{y}{\rho_v}, \quad \frac{z}{\rho_v}$$

siano tuttavia piccoli dando ad  $y$  e  $z$  il massimo valore che queste variabili



ottengono ai bordi delle superficie rifrangenti. Considerando questi rapporti, come quantità di prim' ordine, la frazione

$$\frac{y^2 + z^2}{\rho_v^2}$$

sarà pertanto una quantità di second' ordine.

La seconda condizione, che il raggio luminoso sia poco inclinato all'asse centrale, esige che l'angolo  $X_v$  sia sempre piccolo, in tutti gli incontri che il medesimo raggio ha colle superficie rifrangenti, e che invece gli angoli  $Y_v$  e  $Z_v$  differiscano sempre poco da un angolo retto. Siccome fra i coseni di questi angoli esiste la relazione

$$(2) \quad \cos^2 X_v + \cos^2 Y_v + \cos^2 Z_v = 1$$

dalla quale si deduce

$$(2)' \quad \cos^2 Y_v + \cos^2 Z_v = \sin^2 X_v$$

Considereremo  $\sin X_v$ ,  $\cos Y_v$ ,  $\cos Z_v$  come quantità piccole di prim' ordine, e quindi i termini che compongono quest'equazione come quantità di second'ordine.

### 5.

*Espressioni approssimate delle coordinate dei punti in cui il raggio incontra le superficie rifrangenti.*

Osservato l'ordine di piccolezza delle quantità od elementi di cui si compongono le equazioni (10), occupiamoci della riduzione delle medesime alla forma più conveniente per la loro risoluzione.

L'equazione (1) risolta rispetto ad  $x$  ci dà primieramente

$$x = a_v \pm \rho_v \left( 1 + \frac{y^2 + z^2}{\rho_v^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Il doppio segno corrisponde ai due casi in cui sia

$$x > a_v, \text{ o viceversa } x < a_v;$$

nel primo caso il centro della sfera, rappresentata dalla (1), si trova più vicino

all'origine delle coordinate che non il punto d'incontro del raggio luminoso, e la porzione della superficie sferica, che limita il mezzo rifrangente, volge la sua concavità verso l'origine, ossia verso la parte da cui abbiamo supposto che provenga il raggio luminoso; nel secondo caso, per lo contrario, il centro della sfera si trova a maggior distanza del detto punto d'incontro, e la superficie rifrangente volge la sua convessità verso l'origine.

Senza far uso del doppio segno potremo quindi considerare il valore di  $\rho_v$  come positivo o negativo secondo che la superficie rifrangente volge la sua concavità o convessità verso l'origine delle coordinate, e con questa convenzione sarà sempre

$$(3) \quad x - a_v = \rho_v \left( 1 - \frac{y^2 + z^2}{\rho_v^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

È facile di riconoscere che  $a_v + \rho_v$  è la distanza, dall'origine delle coordinate, del punto della superficie  $v^{\text{esima}}$  situato sull'asse centrale, o come si dice comunemente, del centro di figura di detta superficie; rappresentando con  $H_v$  questa distanza, volgendo il radicale in serie e trascurando le quantità di quart'ordine, dalla precedente ricaveremo

$$(4) \quad x_v = H_v - \frac{1}{2} \frac{y_v^2 + z_v^2}{\rho_v};$$

quindi, ponendo

$$(5) \quad \alpha_v = 1 - \frac{1}{2} \frac{y_v^2 + z_v^2}{H_v \rho_v},$$

potremo dare al valore di  $x_v$  la forma

$$(6) \quad x_v = \alpha_v H_v;$$

nelle formole precedenti abbiamo sottoposto alle coordinate  $x, y, z$  l'indice  $v$ , per distinguere che i loro valori appartengono soltanto alla superficie  $v^{\text{esima}}$ .

Quando si trascurassero anche le quantità di second'ordine, dalla (5) si avrebbe  $\alpha = 1$ , e si potrebbe considerare il valore di  $x_v$  come dato semplicemente dalla costante  $H_v$ .

Cambiamo nella (4)  $v$  in  $v - 1$ , e poi prendiamo la differenza fra la medesima e l'equazione dedotta, avremo

$$x_v - x_{v-1} = H_v - H_{v-1} - \frac{1}{2} \frac{y_v^2 + z_v^2}{\rho_v} + \frac{1}{2} \frac{y_{v-1}^2 + z_{v-1}^2}{\rho_{v-1}}$$

La quantità  $H_v - H_{v-1}$  rappresenta evidentemente la distanza dei due centri di figura delle due superficie successive ( $v-1$ )<sup>esima</sup> e  $v$ <sup>esima</sup>, dinotandola con  $h_v$ , sarà quindi

$$x_v - x_{v-1} = h_v \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{y_v^2 + z_v^2}{h_v \rho_v} + \frac{1}{2} \frac{y_{v-1}^2 + z_{v-1}^2}{h_v \rho_{v-1}} \right\};$$

e trasportando questo valore di  $x_v - x_{v-1}$  nella prima delle equazioni (10) dedurremo

$$\Delta_{v-1} \cos X_{v-1} = h_v \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{y_v^2 + z_v^2}{h_v \rho_v} + \frac{1}{2} \frac{y_{v-1}^2 + z_{v-1}^2}{h_v \rho_{v-1}} \right\},$$

ovvero, poichè dalla formola (2) si ha prossimamente

$$(7) \quad \cos X_{v-1} = 1 - \frac{1}{2} (\cos^2 Y_{v-1} + \cos^2 Z_{v-1}),$$

dividendo per questa la premessa equazione e sviluppando il denominatore in serie,

$$\Delta_{v-1} = h_v \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{y_v^2 + z_v^2}{h_v \rho_v} + \frac{1}{2} \frac{y_{v-1}^2 + z_{v-1}^2}{h_v \rho_{v-1}} + \frac{1}{2} (\cos^2 Y_{v-1} + \cos^2 Z_{v-1}) \right\}.$$

Se poniamo

$$(8) \quad \beta_v = 1 - \frac{1}{2} \frac{y_v^2 + z_v^2}{h_v \rho_v} + \frac{1}{2} \frac{y_{v-1}^2 + z_{v-1}^2}{h_v \rho_{v-1}} + \frac{1}{2} (\cos^2 Y_{v-1} + \cos^2 Z_{v-1}),$$

sarà

$$(9) \quad \Delta_{v-1} = \beta_v h_v,$$

e facendo la sostituzione di questa espressione di  $\Delta_{v-1}$  nella seconda e terza delle equazioni (10) del capitolo precedente, avremo

$$(10) \quad \begin{cases} y_v - y_{v-1} = \beta_v h_v \cos Y_{v-1} \\ z_v - z_{v-1} = \beta_v h_v \cos Z_{v-1} \end{cases}$$

La quantità  $\beta_v$ , dataci dalla (8) è pure, come quella che rappresenta la  $\alpha_v$ , tale che si riduce all'unità quando si trascurano le quantità di second'ordine, per cui, entro questo grado d'approssimazione, può considerarsi come conosciuta.

*Espressioni approssimate dei coseni degli angoli che il raggio luminoso fa cogli assi delle coordinate all'uscire da ciascuna delle superficie rifrangenti.*

Passiamo ad eseguire delle riduzioni analoghe sulle tre ultime equazioni (10) date nel capitolo anteriore. Sostituendo nella prima di queste tre equazioni per  $k_v$  il valore che si ricava impiegando, nella prima delle (3) del detto capitolo, l'espressione di  $u$  che ci vien data dalla (1), risulta

$$\cos X_v = \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos X_{v-1} + \frac{x_v - a_v}{\rho_v} \left( \cos V_v - \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos V_v \right),$$

la quale equazione, coll'eliminazione di

$$\frac{x_v - a_v}{\rho_v}, \quad \cos X_v \quad \text{e} \quad \cos X_{v-1},$$

per mezzo delle (2) (3) (7), ci somministra

$$\cos V_v - \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos V_{v-1} = \frac{1 - \frac{v_v}{v_{v-1}} - \frac{1}{2} (\cos^2 Y_v + \cos^2 Z_v) + \frac{v_v}{v_{v-1}} (\cos^2 Y_{v-1} + \cos^2 Z_{v-1})}{1 - \frac{y_v^2 + z_v^2}{2 \rho_v^2}}.$$

Ponendo

$$(11) \quad \gamma_v = 1 + \frac{1}{2} \frac{y_v^2 + z_v^2}{\rho_v^2} - \frac{1}{2} (\cos^2 Y_v + \cos^2 Z_v - \frac{v_v}{v_{v-1}} (\cos^2 Y_{v-1} + \cos^2 Z_{v-1})) \left( 1 - \frac{v_v}{v_{v-1}} \right)^{-1}$$

ed introducendo nelle altre due delle citate equazioni (10) per  $l_v$  ed  $m_v$  le loro espressioni dedotte dalle (3) del primo capitolo e dalla (1), si otterrà

$$(12) \quad \begin{cases} \cos Y_v = \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos Y_{v-1} + \gamma_v \left( 1 - \frac{v_v}{v_{v-1}} \right) \frac{y_v}{\rho_v}, \\ \cos Z_v = \frac{v_v}{v_{v-1}} \cos Z_{v-1} + \gamma_v \left( 1 - \frac{v_v}{v_{v-1}} \right) \frac{z_v}{\rho_v}. \end{cases}$$

Se, per mezzo di queste formole, si eliminano  $\cos Y_v$  e  $\cos Z_v$  da quella segnata (11), esprime il valore del coefficiente  $\gamma_v$ , e si trascurano le quantità di quart'ordine, si riconoscerà con facili riduzioni che quel coefficiente prende

una forma più semplice, e vien dato da

$$(15) \quad \gamma_v = 1 + \frac{1}{2} \frac{v_v}{v_{v-1}} \left\{ \left( \frac{y_v}{\rho_v} - \cos Y_{v-1} \right)^2 + \left( \frac{z_v}{\rho_v} - \cos Z_{v-1} \right)^2 \right\} :$$

e si potrà parimente, come è stato detto dei coefficienti precedenti  $\alpha_v$  e  $\beta_v$ , prendere

$$\gamma_v = 1$$

quando si omettano le quantità di second'ordine.

### CAPITOLO III.

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI CHE SOMMINISTRANO I VALORI TANTO DELLE COORDINATE  $y_n$ ,  $z_n$ , QUANTO DEI COSENI DEGLI ANGOLI  $Y_n$  e  $Z_n$ , IN FUNZIONE DELLE RISPETTIVE COORDINATE  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $y_1$  e  $z_1$  DEL PUNTO RADIANE E DEL PUNTO D'INCIDENZA DEL RAGGIO LUMINOSO SULLA PRIMA SUPERFICIE RIFRANGENTE.

#### 1.

*Indicazione del metodo di risoluzione ed ordinamento delle equazioni.*

Le formole generali (10) (12) del capitolo precedente sono così preparate, che, considerando in esse  $\beta_v$  e  $\gamma_v$  come quantità cognite e dando a  $v$  tutti i valori da 1 ad  $n$ , somministrano una serie di equazioni di primo grado, analoghe a quelle a cui i Geometri hanno dato il nome di serie ricorrenti a scala variabile. Sebbene le  $\beta_v$  e  $\gamma_v$  non siano esattamente conosciute, tuttavia abbiamo visto che si possono, per approssimazione, prendere eguali all'unità. Risolveremo quindi le dette equazioni ritenendo come conosciuta la scala di relazione, e dedurremo le espressioni analitiche delle incognite  $y_\lambda$ ,  $\cos Y_\lambda$  e  $z_\lambda$ ,  $\cos Z_\lambda$  per un'indice qualunque  $\lambda$ , in funzione di  $y_0$ ,  $\cos Y_0$  e,  $z_0$ ,  $\cos Z_0$ . Facendo in seguito nelle formole ottenute le quantità  $\beta_v$  e  $\gamma_v$  eguali all'unità avremo dei primi valori approssimati dalle dette incognite, che saranno sufficientemente esatti per poter essere impiegati a calcolare i termini di second'ordine nelle espressioni di  $\beta_v$  e  $\gamma_v$ , dati dalle espressioni (8) (15), e quindi a poter conseguire dei valori più esatti di questi coefficienti. Mettendo per ultimo i nuovi valori corretti di questi coefficienti nelle formole analitiche (10) e (12) dedurremo, come si vedrà nella Parte III, quelli delle incognite  $y_v$ ,  $\cos Y_v$ ;  $z_v$ ,  $\cos Z_v$  approssimati sino al *terzo* ordine inclusive, quando si considerano le incognite medesime come di prim'ordine.

Per effettuare con più semplicità l'indicato processo di calcolo diamo alle equazioni (10) (12) la forma

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_v = v_{v-1} \beta_v h_v \frac{\cos Y_{v-1}}{v_{v-1}} + y_{v-1} , \\ \frac{1}{v_v} \cos Y_v = \frac{\gamma_v}{\rho_v} \left( \frac{1}{v_v} - \frac{1}{v_{v-1}} \right) y_v + \frac{1}{v_{v-1}} \cos Y_{v-1} ; \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_v = v_{v-1} \beta_v h_v \frac{\cos Z_{v-1}}{v_{v-1}} + z_{v-1} , \\ \frac{1}{v_v} \cos Z_v = \frac{\gamma_v}{\rho_v} \left( \frac{1}{v_v} - \frac{1}{v_{v-1}} \right) z_v + \frac{1}{v_{v-1}} \cos Z_{v-1} ; \end{array} \right.$$

Siccome il primo sistema (1) di queste equazioni è affatto simile al secondo (2), nessun'altra differenza essendovi, se non che le  $y$  ed  $Y$  sono surrogate da  $z$  e  $Z$ , basterà risolvere quelle del primo sistema che, facendo nelle equazioni risultanti il detto surrogamento, le stesse formole serviranno per la risoluzione delle seconde.

#### 2.

*Risoluzione delle premesse equazioni.*

Per risolvere le suddette equazioni (1) poniamo generalmente

$$(3) \quad y_v = \xi_{2v-1} , \quad \frac{1}{v_v} \cos Y_v = \xi_{2v} ,$$

$$(4) \quad p_{2v-2} = v_{v-1} \beta_v h_v , \quad p_{2v-1} = \frac{\gamma_v}{\rho_v} \left( \frac{1}{v_v} - \frac{1}{v_{v-1}} \right) ,$$

indi cominciando dalla seconda, ponendo in essa  $v = 1$ , e prendendo come dati

$$(3)_1 \quad \frac{1}{v_0} \cos Y_0 = \xi_0 , \quad y_1 = \xi_1 ,$$

facciamo crescere successivamente  $v$  di un'unità, passando dalla seconda alla prima, ed alternativamente dall'una all'altra equazione, con che si otterrà il

seguinte sistema

$$(5) \quad \begin{cases} \xi_2 = p_1 \xi_1 + \xi_0, \\ \xi_3 = p_2 \xi_2 + \xi_1, \\ \xi_4 = p_3 \xi_3 + \xi_2, \\ \vdots \\ \xi_{2n-1} = p_{2n-2} \xi_{2n-2} + \xi_{2n-3}, \\ \xi_{2n} = p_{2n-1} \xi_{2n-1} + \xi_{2n-2}; \end{cases}$$

nelle quali i valori di  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2n-2}, p_{2n-1}$ , saranno espressi da

$$(6) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{\gamma_1}{\rho_1} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right), \\ p_3 = \frac{\gamma_2}{\rho_2} \left( \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right), \\ \vdots \\ p_{2n-1} = \frac{\gamma_n}{\rho_n} \left( \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}} \right), \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} p_2 = v_1 h_2 \beta_2, \\ p_4 = v_2 h_3 \beta_3, \\ \vdots \\ p_{2n-2} = v_{n-1} h_n \beta_n. \end{cases}$$

Ora è chiaro che colla successiva sostituzione dei valori precedentemente ottenuti da ciascuna delle equazioni (5) nella seguente si potrà ridurre una qualunque delle incognite  $\xi_\mu$  ad essere espressa dalle due quantità  $\xi_1$  e  $\xi_0$ , che possono considerarsi come date, e come quelle equazioni sono tutte lineari, quando si prescinda dalla variabilità di  $\beta$ , e  $\gamma$ , il risultato sarà della forma

$$(7) \quad \xi_\mu = P_{\mu-1}^{(1)} \xi_1 + P_{\mu-1}^{(2)} \xi_0,$$

nel quale i coefficienti  $P_{\mu-1}^{(1)}$  e  $P_{\mu-1}^{(2)}$  saranno delle funzioni di  $p_1, p_2, \dots, p_{\mu-1}$ .

Per trovare queste funzioni osserveremo che, essendo le due parti moltiplicate per le variabili  $\xi_1$  e  $\xi_0$  indipendenti fra loro, potremo cercare i coefficienti  $P_{\mu-1}^{(1)}$  e  $P_{\mu-1}^{(2)}$  a parte, facendo nell'equazione (5), prima  $\xi_0 = 0$ , e poi  $\xi_1 = 0$ .

Quando si fa  $\xi_0 = 0$ , il coefficiente  $P_{\mu-1}^{(1)}$  nell'equazione (7) prende successivamente i valori

$$(I) \quad \begin{cases} P_0^{(1)} = 1 \\ P_1^{(1)} = p_1 \\ P_2^{(1)} = p_1 p_2 + 1 \\ P_3^{(1)} = p_1 p_2 p_3 + p_1 + p_3 \\ P_4^{(1)} = p_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 + p_1 p_4 + p_3 p_4 + 1 \\ P_5^{(1)} = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_5 + p_1 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5 + p_1 + p_3 + p_5 \\ \text{ec.} \end{cases} \quad \text{ec.}$$

Se invece si fa  $\xi_1 = 0$ , e si sostituiscono successivamente i valori risultanti delle  $\xi$  nell'equazione seguente, si troveranno per esprimere i coefficienti  $Q$  le eguaglianze

$$(II) \quad \begin{cases} P_0^{(2)} = 0 \\ P_1^{(2)} = 1 \\ P_2^{(2)} = p_2 \\ P_3^{(2)} = p_2 p_3 + 1 \\ P_4^{(2)} = p_2 p_3 p_4 + p_2 + p_4 \\ P_5^{(2)} = p_2 p_3 p_4 p_5 + p_2 p_3 + p_2 p_5 + p_4 p_5 + 1 \\ \text{ec.} \end{cases} \quad \text{ec.}$$

3.

*Valori delle coordinate del punto d'incontro d'un raggio luminoso con una superficie rifrangente qualunque del sistema, e dei coseni degli angoli che ne assegnano la direzione all'uscire dalla medesima.*

Supposti determinati i coefficienti  $P_\lambda^{(1)}$  e  $P_\lambda^{(2)}$  per un numero qualunque  $\lambda$ , ciò che mostreremo a fare in un modo generale nel capitolo seguente, possia-

mo passare ad esprimere le coordinate del punto in cui il raggio luminoso incontra la superficie  $\nu^{\text{esima}}$  del sistema, non che gli angoli che esso fa cogli assi delle coordinate  $y$  e  $z$ , dopo essere stato da questa rifratto.

Prendendo infatti nell'equazione (7) successivamente  $\mu = 2\nu - 1$ , e  $\mu = 2\nu$ , e riponendo pei  $\xi_{2\nu-1}$  e  $\xi_{2\nu}$ , e per  $\xi_1$  e  $\xi_0$  le loro espressioni forniteci dalle posizioni (3) e (4), avremo le due equazioni

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_\nu = P_{2\nu-2}^{(1)} y_1 + \frac{1}{v_0} P_{2\nu-2}^{(2)} \cos Y_0, \\ \cos Y_\nu = v_\nu P_{2\nu-1}^{(1)} y_1 + \frac{v_\nu}{v_0} P_{2\nu-1}^{(2)} \cos Y_0; \end{array} \right.$$

ed in conseguenza, poichè, come abbiamo sopra notato, le espressioni di  $z$ , e  $\cos Z_\nu$ , si ottengono col solo cambiare in queste  $y$ , e  $Y_\nu$  in  $z$ , e  $Z_\nu$ , come pure  $y_0$  ed  $Y_0$  in  $z_0$  e  $Z_0$ . si avrà anche

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_\nu = P_{2\nu-2}^{(1)} z_1 + \frac{1}{v_0} P_{2\nu-2}^{(2)} \cos Z_0, \\ \cos Z_\nu = v_\nu P_{2\nu-1}^{(1)} z_1 + \frac{v_\nu}{v_0} P_{2\nu-1}^{(2)} \cos Z_0; \end{array} \right.$$

per mezzo delle quali, e di quelle segnate (5) e (6) nel Capitolo II, tanto la posizione quanto la direzione del raggio rifratto, dopo aver attraversato una superficie qualunque, potranno essere completamente determinate, quando sia dato il punto d'incidenza e la direzione del raggio luminoso all'entrare nello stromento.

## 4.

*Trasformazione delle equazioni precedenti introducendo le coordinate del punto radiante dell'oggetto in luogo degli angoli, che la direzione del raggio emanato dal medesimo punto fa coi tre assi delle coordinate.*

Possiamo mettere le precedenti equazioni sotto una forma più comoda per le applicazioni, escludendo da esse  $\cos Y_0$  e  $\cos Z_0$  ed ammettendo, in loro vece le coordinate  $y_0$  e  $z_0$  del punto dell'oggetto, da cui il raggio incidente sulla prima superficie rifrangente ha emanato. Perciò si osserverà che giusta le formole (1) del Capitolo I, si ha

$$(10) \quad \cos Y_0 = \frac{y_1 - y_0}{\Delta_0}, \quad \cos Z_0 = \frac{z_1 - z_0}{\Delta_0};$$

e che, sostituendo questi valori nelle formole (8) (9), e ponendo per brevità

$$(11) \quad Q_{2\nu-2}^{(1)} = P_{2\nu-2}^{(1)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-2}^{(2)}, \quad Q_{2\nu-1}^{(1)} = P_{2\nu-1}^{(1)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-1}^{(2)},$$

risulta

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_\nu = Q_{2\nu-2}^{(1)} y_1 - \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-2}^{(2)} y_0, \quad z_\nu = Q_{2\nu-2}^{(1)} z_1 - \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-2}^{(2)} z_0, \\ \cos Y_\nu = v_\nu Q_{2\nu-1}^{(1)} y_1 - \frac{v_\nu}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-1}^{(2)} y_0, \quad \cos Z_\nu = v_\nu Q_{2\nu-1}^{(1)} z_1 - \frac{v_\nu}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-1}^{(2)} z_0, \end{array} \right.$$

le quali formole sono appunto quelle che ci eravamo proposti di trovare.

## CAPITOLO IV.

DIGRESSIONE SULLA FORMA E SULLE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI  $P_\lambda^{(1)}$ ,  $P_\lambda^{(2)}$ .

## 1.

*Regola pratica per la composizione delle funzioni  $P_\lambda^{(1)}$ ,  $P_\lambda^{(2)}$  corrispondenti ad un indice qualunque  $\lambda$ .*

Se si getta uno sguardo sulle espressioni delle funzioni  $P_\lambda^{(1)}$ ,  $P_\lambda^{(2)}$ , che abbiamo dato nell'articolo 2 del Capitolo precedente, si riconosce direttamente che queste due funzioni sono rispettivamente il numeratore ed il denominatore delle frazioni che esprimerebbero i valori della frazione continua

$$p_1 + \frac{1}{p_2 + \frac{1}{p_3 + \frac{1}{p_4 + \text{ec.}}}}$$

allorchè si tenesse successivamente conto soltanto di uno, di due, di tre, ... di  $\lambda$  termini della medesima (\*).

La legge con cui sono formati i coefficienti  $P_\lambda^{(1)}$  può enunciarsi nel seguente modo.

Il primo termine di questi coefficienti deve essere il prodotto di tutte le  $p$  cogli indici da 1 sino a  $\lambda$ , e per conseguenza deve constare di  $\lambda$  fattori, che si scriveranno uno dopo l'altro coi loro indici nella progressione dei numeri naturali.

(\*) EULER. *Introductio in Analysin infinitorum*. Lib. I, Cap. XVIII, art. 558.

Con questo termine si formeranno tutti quelli composti di  $\lambda - 2$  fattori, cambiando successivamente nell'unità tutti i prodotti binarii contenuti in esso, e fatti da due delle  $p$  che abbiano indici consecutivi nella suddetta progressione.

Da questi termini si passerà ai termini di  $\lambda - 4$  fattori cambiando ancora in essi successivamente nell'unità i prodotti di due qualunque delle  $p$  che abbiano indici consecutivi, cioè il sèguito di una unità maggiore del precedente, e sopprimendo ciascun termine che sia già apparso una volta.

Si proseguirà nello stesso modo sino a che si arriverà ai termini che non conterranno che una sola delle  $p$ , oppure ad un solo termine che sia l'unità. Il primo caso si offrirà quando l'indice  $\lambda$  è dispari, ed il secondo quando è pari.

Il quadro annesso mostra il processo con cui si possono formare i coefficienti  $P_6^{(1)}$  e  $P_7^{(1)}$ .

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} P_6^{(1)} = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 \\ + p_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 p_6 + p_1 p_2 p_5 p_6 + p_1 p_4 p_5 p_6 + p_3 p_4 p_5 p_6 \\ + p_1 p_2 + p_1 p_4 + p_3 p_4 + p_1 p_6 + p_3 p_6 + p_5 p_6 + 1 . \end{array} \right.$$

$$(I)' \left\{ \begin{array}{l} P_7^{(1)} = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 \\ + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_7 + p_1 p_2 p_3 p_6 p_7 \\ + p_1 p_2 p_3 p_6 p_7 + p_1 p_4 p_5 p_6 p_7 + p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 \\ + p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_5 + p_1 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_7 \\ + p_1 p_4 p_7 + p_3 p_4 p_7 + p_1 p_6 p_7 + p_3 p_6 p_7 + p_5 p_6 p_7 \\ + p_1 + p_3 + p_5 + p_7 . \end{array} \right.$$

Sopprimendo nel primo termine di  $P_7^{(1)}$  successivamente i prodotti binarii  $p_6 p_7$ ,  $p_5 p_6$ ,  $p_4 p_5$ ,  $p_3 p_4$ ,  $p_2 p_3$ ,  $p_1 p_2$  si hanno i sei termini del grado  $7 - 2$ , e continuando a sopprimere i detti binarii compresi in ciascuno di questi ultimi sei termini si ottengono successivamente quelli del grado  $7 - 4$ , e così di seguito.

Conoscendo la legge colla quale si può comporre l'espressione del coefficiente  $P_\lambda^{(1)}$  con un'indice qualunque  $\lambda$ , possiamo valerci di essa per formare anche il coefficiente  $P_\lambda^{(2)}$ . Risulta infatti, dal modo con cui le equazioni (5) del Capitolo precedente sono risolte per successive sostituzioni, che la legge di composizione della funzione  $P_\lambda^{(2)}$  deve risultare la stessa di quella con cui si compone la  $P_\lambda^{(1)}$ , colla sola differenza che l'elemento  $p_1$  si trova escluso, e si deve

cominciare nel formare il primo termine di questo coefficiente dal fattore  $p_2$ . Basterà quindi comporre colla stessa regola, ma impiegando degli elementi  $p$ , i cui indici siano tutti aumentati d'un'unità, un'espressione simile a quella di  $P_{\lambda-1}^{(1)}$ , per avere la richiesta funzione  $P_\lambda^{(2)}$ .

## 2.

*Deduzione dei coefficienti, con indici sottoposti minori di  $\lambda$ , da quelli già formati e completi di  $P_\lambda^{(1)}$ ,  $P_\lambda^{(2)}$ .*

Dalle espressioni dei coefficienti  $P_\lambda^{(1)}$ ,  $P_\lambda^{(2)}$  si può successivamente discendere a quelle dei coefficienti, in cui l'indice sottoposto è minore di  $\lambda$ , col mezzo di semplici derivazioni. Per provarlo, sostituiamo, nell'equazione d'indice indeterminato

$$\xi_{\lambda+1} = p_\lambda \xi_\lambda + \xi_{\lambda-1} ,$$

per  $\xi_{\lambda+1}$ ,  $\xi_\lambda$ ,  $\xi_{\lambda-1}$  le loro espressioni risultanti dal porre successivamente  $\mu = \lambda + 1$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda - 1$  nell'equazione (7) del Capitolo precedente, e si avrà

$$P_\lambda^{(1)} \xi_1 + P_\lambda^{(2)} \xi_0 = p_\lambda (P_{\lambda-1}^{(1)} \xi_1 + P_{\lambda-1}^{(2)} \xi_0) + P_{\lambda-2}^{(1)} \xi_1 + P_{\lambda-2}^{(2)} \xi_0 .$$

Acciò quest'equazione sia verificata per tutti i valori di  $\xi$ , e  $\xi_0$ , che sono due variabili indipendenti, bisogna che i coefficienti di ciascuna di esse siano eguali in un membro e l'altro, per cui si avranno le identità

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_\lambda^{(1)} = p_\lambda P_{\lambda-1}^{(1)} + P_{\lambda-2}^{(1)} , \\ P_\lambda^{(2)} = p_\lambda P_{\lambda-1}^{(2)} + P_{\lambda-2}^{(2)} . \end{array} \right.$$

Ora, siccome  $p_\lambda$  non è mai contenuto nei valori di  $P_\mu^{(1)}$ ,  $P_\mu^{(2)}$  in cui  $\mu$  sia minore di  $\lambda$ , prendendo le derivate rispetto a  $p_\lambda$  delle identità precedenti, si otterrà

$$(2) \quad P_{\lambda-1}^{(1)} = \frac{dP_\lambda^{(1)}}{dp_\lambda} , \quad P_{\lambda-1}^{(2)} = \frac{dP_\lambda^{(2)}}{dp_\lambda} ;$$

ed i valori dei coefficienti in discorso con un dato indice saranno deducibili da quelli che hanno un'indice maggiore di un'unità, eseguendo una semplice derivazione.

## 3.

Relazione notevole fra i quattro coefficienti  $P_{\lambda-1}^{(1)} P_{\lambda-1}^{(2)}$ ,  $P_{\lambda}^{(1)}$ ,  $P_{\lambda}^{(2)}$ .

Eliminiamo fra le due equazioni segnate (1) l'elemento  $p_{\lambda}$ , contenuto esplicitamente in esse, ed otterremo

$$P_{\lambda}^{(1)} P_{\lambda-1}^{(2)} - P_{\lambda}^{(2)} P_{\lambda-1}^{(1)} = - (P_{\lambda-1}^{(1)} P_{\lambda-2}^{(2)} - P_{\lambda-2}^{(1)} P_{\lambda-1}^{(2)}).$$

Diminuendo in questa formola successivamente di un'unità l'indice  $\lambda$ , e surrogando sempre i secondi membri coi valori di essi che si ottengono discendendo dall'una all'altra delle equazioni risultanti, si arriva alla seguente

$$P_{\lambda}^{(1)} P_{\lambda-1}^{(2)} - P_{\lambda-1}^{(1)} P_{\lambda}^{(2)} = \pm (P_1^{(1)} P_0^{(2)} - P_0^{(1)} P_1^{(2)});$$

il segno superiore valendo per  $\lambda$  dispari, e l'inferiore per  $\lambda$  pari.

Ora, usando dei valori di  $P_0^{(1)}$ ,  $P_1^{(1)}$ ,  $P_0^{(2)}$ ,  $P_1^{(2)}$  datici delle formole (I) e (II) del Capitolo precedente, si ha

$$P_1^{(1)} P_0^{(2)} - P_0^{(1)} P_1^{(2)} = -1;$$

dunque risulterà qualunque sia  $\lambda$

$$(3) \quad P_{\lambda}^{(1)} P_{\lambda-1}^{(2)} - P_{\lambda-1}^{(1)} P_{\lambda}^{(2)} = \pm 1,$$

il segno superiore corrispondendo a  $\lambda$  pari, e l'inferiore a  $\lambda$  dispari.

## 4.

Notazione più generale delle funzioni  $P$ , e loro decomposizione.

Alle due precedenti proprietà delle funzioni  $P_{\lambda}^{(1)}$ ,  $P_{\lambda}^{(2)}$ , esposte dal Lagrange nella citata Memoria, e già anteriormente dimostrate dall'Eulero, ne aggiungeremo altre, che quest'Autore ha fatto conoscere (\*), per mezzo delle quali potremo rendere più facili le trasformazioni da eseguirsi nel seguito.

(\*) La Teoria di queste funzioni può essere compresa in quella più generale conosciuta sotto il nome, introdotto dal Sig. Cauchy, di *Teoria dei determinanti*. Non abbiamo creduto opportuno di tradurre le dimostrazioni date nel testo, in corollari di quest'ultima Teoria, perchè le dimostrazioni date sono tanto semplici e dirette che, pensiamo, non

Abbiamo fin'ora considerato le funzioni  $P$  provenienti dalla risoluzione del sistema delle dette equazioni (5) cominciando dalla prima: se si partisse invece da una qualunque delle medesime, per esempio da quella in cui l'incognita del primo membro è  $\xi_{i+1}$ , e si discendesse determinando successivamente i valori di  $\xi_{i+2}$ ,  $\xi_{i+3}$  ec., impiegando soltanto la porzione seguente del sistema in discorso,

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_{i+1} = p_i \xi_i + \xi_{i-1}, \\ \xi_{i+2} = p_{i+1} \xi_{i+1} + \xi_i, \\ \vdots \\ \xi_{\lambda} = p_{\lambda-1} \xi_{\lambda-1} + \xi_{\lambda-2}, \\ \xi_{\lambda+1} = p_{\lambda} \xi_{\lambda} + \xi_{\lambda-1}, \end{cases}$$

è chiaro che i coefficienti di  $\xi_i$  e  $\xi_{i-1}$  risulterebbero ancora formati colla stessa legge con cui lo furono precedentemente quelli di  $\xi_i$  e  $\xi_0$ , colla sola differenza che gli indici dei fattori, componenti il primo termine del coefficiente di  $\xi_i$ , comincerebbero da  $i$ , e quelli dei coefficienti di  $\xi_{i-1}$  da  $i+1$ , e terminerebbero amendue con  $\lambda$ .

Siccome abbiamo già posto a destra, ed in alto delle funzioni  $P_{\lambda}^{(1)}$  e  $P_{\lambda}^{(2)}$  la cifra 1 ovvero 2, compresa fra parentesi, per indicare che il primo fattore del primo termine delle medesime funzioni è rispettivamente  $p_1$  ovvero  $p_2$ , ed abbiamo impiegato l'indice  $\lambda$  in basso per indicare che l'ultimo fattore è  $p_{\lambda}$ , così, generalizzando questa notazione, scriveremo  $P_{\lambda}^{(i)}$  e  $P_{\lambda}^{(i+1)}$  per dinotare le funzioni fatte colla stessa legge, ma nelle quali il primo fattore del primo termine sia  $p_i$  per la prima, e  $p_{i+1}$  per la seconda, l'ultimo termine rimanendo  $p_{\lambda}$  per ambedue. La differenza fra l'indice inferiore e superiore, aumentata dell'unità, corrisponderà come precedentemente al numero dei fattori con cui il detto primo termine è composto, e, scritto questo primo ter-

riuscirà discaro al lettore di trovarle incorporate in questo Capitolo, senza bisogno di ricorrere ad altre fonti.

Le funzioni di cui si tratta sono state considerate primieramente dall'Eulero in una Memoria, inserita fra quelle del Tomo IX, anno 1764, dell'Accademia di Pietroburgo, ed è intitolata *Specimen algorithmi singularis*: dipoi hanno fatto il soggetto d'una Memoria del Sig. Terquem, compresa nel Tomo IV del Giornale di Matematiche ec. del Sig. Liouville, col titolo *Sur un symbole combinatoire d'Euler, et son utilité dans l'Analyse*.

Rispetto alla Teoria generale dei determinanti non vogliamo omettere d'indicare, a prò di quelli che bramassero instruirsi in questo ramo d'Analisi, il commendevole Opuscolo intitolato *La Teoria dei determinanti e le sue principali applicazioni* del Prof. Francesco Brioschi. Pavia 1851.



mine, si dedurranno gli altri seguendo le stesse regole che abbiamo esposte all'articolo (1).

Adottando queste notazioni il valore di  $\xi_{\lambda+1}$  sarà quindi espresso da

$$(5) \quad \xi_{\lambda+1} = P_{\lambda}^{(i)} \xi_i + P_{\lambda}^{(i+1)} \xi_{i-1}.$$

Si ricavano dalle (7) del Capitolo III i valori di  $\xi_{\lambda+1}$ ,  $\xi_i$ ,  $\xi_{i-1}$ , cambiando successivamente  $\mu$  in  $\lambda + 1$ , in  $i$ , ed in  $i - 1$ , e poi si sostituiscono le espressioni risultanti in quest'equazione; la medesima, non potendo più sussistere se i coefficienti delle due variabili indipendenti  $\xi_i$  e  $\xi_{i-1}$  non sono eguali nel primo e secondo membro, ci farà vedere che esistono le due seguenti

$$(6) \quad \begin{cases} P_{\lambda}^{(i)} = P_{\lambda}^{(i)} P_{i-1}^{(i)} + P_{\lambda}^{(i+1)} P_{i-2}^{(i)} \\ P_{\lambda}^{(i)} = P_{\lambda}^{(i)} P_{i-1}^{(i)} + P_{\lambda}^{(i+1)} P_{i-2}^{(i)} \end{cases}$$

dalle quali e dalla (5) si ricaverà viceversa

$$(7) \quad P_{\lambda}^{(i)} = \pm (P_{\lambda}^{(i)} P_{i-2}^{(i)} - P_{\lambda}^{(i+1)} P_{i-2}^{(i)}) ,$$

valendo il segno superiore od inferiore, secondo che  $i$  sarà dispari, o pari.

Cambiamo  $\lambda$  in  $\lambda - 1$  in quest'ultima equazione, ed avremo

$$P_{\lambda-1}^{(i)} = \pm (P_{\lambda-1}^{(i)} P_{i-2}^{(i)} - P_{\lambda-1}^{(i+1)} P_{i-2}^{(i)})$$

e poi eliminiamo fra questa e la precedente, successivamente  $P_{i-2}^{(i)}$  e  $P_{i-2}^{(i)}$ ; attendendo alla (5), troveremo

$$(8)_i \quad \begin{cases} P_{\lambda}^{(i)} P_{\lambda-1}^{(i)} - P_{\lambda-1}^{(i)} P_{\lambda}^{(i)} = \pm P_{i-2}^{(i)} \\ P_{\lambda}^{(i)} P_{\lambda-1}^{(i)} - P_{\lambda-1}^{(i)} P_{\lambda}^{(i)} = \pm P_{i-2}^{(i)} \end{cases}$$

le quali sono una generalizzazione della formola (5): il segno superiore sta per  $\lambda - i$  pari, e l'inferiore per  $\lambda - i$  dispari.

Usi delle formole dell'articolo precedente, ed espressioni delle derivate  $P_{\lambda}^{(i)}$  e  $P_{\lambda}^{(i)}$ , rispetto ad un'elemento  $p_i$  qualunque.

Distinguendo le funzioni  $P$  in diversi ordini secondo il numero dei fattori componenti il primo termine, le due equazioni (6) ci offrono il modo d'esprimere le funzioni  $P_{\lambda}^{(i)}$ ,  $P_{\lambda}^{(i)}$ , dell'ordine  $\lambda$ , che risultano formate d'una molteplicità di termini, quando  $\lambda$  è un numero un po' grande, per mezzo di due prodotti binarii di funzioni più semplici d'ordine non maggiore di  $\lambda - i + 1$ , ed  $i - 1$ .

Un altro vantaggio delle formole (6) è quello di poterci somministrare con semplicità le derivate di  $P_{\lambda}^{(i)}$  e  $P_{\lambda}^{(i)}$  rispetto ad uno qualunque degli elementi  $p$ .

Infatti, osservando che l'elemento  $p_{i-1}$  è soltanto compreso in  $P_{i-1}^{(i)}$  e  $P_{i-1}^{(i)}$ , e non si trova nelle funzioni  $P$  che hanno l'indice superiore  $> i - 1$ , o l'inferiore  $< i - 1$ , eseguendo la derivazione delle (6) rispetto a  $p_{i-1}$ , ponendo mente alle formole (2), e cambiando in seguito per semplicità l'indice  $i - 1$  nell'indice  $i$ , ricaveremo

$$(8) \quad \frac{dP_{\lambda}^{(i)}}{dp_i} = P_{\lambda}^{(i+1)} P_{i-1}^{(i)} \quad , \quad \frac{dP_{\lambda}^{(i)}}{dp_i} = P_{\lambda}^{(i+1)} P_{i-1}^{(i)} .$$

Le altre due equazioni, segnate (7) e (5)<sub>i</sub>, ci somministreranno il mezzo di fare delle utili riduzioni nelle ricerche che istituiremo in appresso.

Invariabilità delle funzioni  $P$  invertendo gli indici degli elementi  $p$ .

Se si scrivessero le equazioni dell'articolo 4 in ordine inverso, come segue

$$(9) \quad \begin{cases} \xi_{\lambda-1} = -p_{\lambda} \xi_{\lambda} + \xi_{\lambda+1} \\ \xi_{\lambda-2} = -p_{\lambda-1} \xi_{\lambda-1} + \xi_{\lambda} \\ \vdots \\ \xi_i = -p_{i+1} \xi_{i+1} + \xi_{i+2} \\ \xi_{i-1} = -p_i \xi_i + \xi_{i+1} \end{cases}$$



e se ne ricavassero i valori successivi di  $\xi_{\lambda-2}$ ,  $\xi_{\lambda-3}$ , ...,  $\xi_i$ ,  $\xi_{i-1}$  in funzione di  $\xi_\lambda$  e  $\xi_{\lambda+1}$ , è chiaro che i coefficienti di queste due variabili risulterebbero ancora formati colla stessa legge esposta all'articolo 4, soltanto gli elementi dati dalla serie  $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{\lambda-1}, p_\lambda$  si troverebbero surrogati da quelli negativi della serie, con indici complementari a  $\lambda+i$ , cioè da  $-p_\lambda, -p_{\lambda-1}, \dots, -p_{i+1}, -p_i$ . Potremo quindi continuare a rappresentare questi coefficienti colla notazione che abbiamo già impiegata, ponendo in alto delle P, fra parentesi, l'indice  $\lambda$  del primo elemento della nuova serie, ed in basso l'indice  $i$  dell'ultimo elemento, intendendo con ciò che gli indici delle  $p$ , nell'espressione del primo

termine della funzione  $P_i^{(\lambda)}$ , vadano diminuendo successivamente d'un unità sino a passare dal numero  $\lambda$  al numero  $i$ , e prendendo negativamente il valore di questa funzione allorchè è d'ordine dispari. Impiegando queste notazioni, si avrebbe, colla risoluzione delle (9),

$$(10) \quad \begin{cases} \xi_i = \pm \left( P_{i+1}^{(\lambda)} \xi_\lambda - P_{i+1}^{(\lambda-1)} \xi_{\lambda+1} \right), \\ \xi_{i-1} = \mp \left( P_i^{(\lambda)} \xi_\lambda - P_i^{(\lambda-1)} \xi_{\lambda+1} \right), \end{cases}$$

il segno superiore valendo per  $\lambda-i$  pari, e l'inferiore per  $\lambda-i$  dispari. Ma, accoppiando all'equazione (5) quella che si ottiene cambiandovi  $\lambda$  in  $\lambda-1$ , si hanno le due

$$(11) \quad \begin{cases} \xi_{\lambda+1} = P_\lambda^{(i)} \xi_i + P_\lambda^{(i+1)} \xi_{i-1}, \\ \xi_\lambda = P_{\lambda-1}^{(i)} \xi_i + P_{\lambda-1}^{(i+1)} \xi_{i-1}; \end{cases}$$

e, ricavando da queste i valori di  $\xi_i$  e  $\xi_{i-1}$ , coll'attendere alla relazione

$$(12) \quad P_\lambda^{(i)} P_{\lambda-1}^{(i+1)} - P_{\lambda-1}^{(i)} P_\lambda^{(i+1)} = \mp 1,$$

analoga alla (3), e per la quale il segno superiore vale per  $\lambda-i$  pari, e l'inferiore per  $\lambda-i$  dispari, si hanno le seguenti espressioni

$$(13) \quad \begin{cases} \xi_i = \pm \left( P_\lambda^{(i+1)} \xi_\lambda - P_{\lambda-1}^{(i+1)} \xi_{\lambda+1} \right), \\ \xi_{i-1} = \mp \left( P_\lambda^{(i)} \xi_\lambda - P_{\lambda-1}^{(i)} \xi_{\lambda+1} \right); \end{cases}$$

quindi, queste dovendo coincidere con quelle segnate (10), sussisteranno le identità

$$(14) \quad P_{i+1}^{(\lambda)} = P_\lambda^{(i+1)}, \quad P_{i+1}^{(\lambda-1)} = P_{\lambda-1}^{(i+1)}, \quad P_i^{(\lambda)} = P_\lambda^{(i)}, \quad P_i^{(\lambda-1)} = P_{\lambda-1}^{(i)}$$

vale a dire, le funzioni P non devono cambiare di composizione, sia che, nel formare i loro primi termini, secondo la legge data all'articolo 1, si cominci dall'elemento  $p$  coll'indice minimo, e si salga, d'unità in unità, sino a quello coll'indice massimo, o viceversa si cominci dall'elemento  $p$  coll'indice massimo, e si discenda sino a quello coll'indice minimo, surrogando a tutti gli indici i loro complementi a  $\lambda+i$ .

Questa proprietà corrisponde al principio, già adottato nell'Ottica, che un raggio di luce, il quale ha percorso un sistema ottico od una sua porzione, ritornerebbe a seguire lo stesso cammino in ordine inverso, se retrocedesse rientrando nel sistema per lo stesso punto da cui è uscito, e con direzione eguale ma contraria. Infatti ponendo  $i = 2i + 1$  e  $\lambda = 2\nu - 1$ , nel sistema delle equazioni (4), questo rappresenterebbe il corso del raggio diretto, le variabili  $\xi_{i-1}$  e  $\xi_i$  appartenendo alla direzione del raggio incidente ed alle coordinate del suo punto d'incontro colla superficie  $v^{esima}$ , e le variabili  $\xi_{\lambda+1}$  e  $\xi_\lambda$  alle quantità corrispondenti del raggio emergente dalla superficie  $v^{esima}$ . Invece lo stesso sistema scritto in ordine inverso, come è dato dalle (9), rappresenterebbe il corso del raggio retrogrado. Per riconoscere come ciò sia si noti, che le equazioni del corso di questo raggio si possono dedurre direttamente dalle (10) del Capitolo I, cambiando in esse il segno a tutti i coseni, e permutando gli indici alle coordinate ed ai coseni attinenti alle due superficie successive, ciò che non introdurrebbe altre variazioni nelle equazioni (5), date nel Capitolo III, se non quelle, che le  $\xi$  aventi per coefficiente l'unità avrebbero permutato di posto, e le  $\xi$  con indice pari prenderebbero il segno negativo. Basterà quindi rendere positivi tutti i primi membri delle ottenute equazioni, quando non lo sono, cambiando il segno a tutti i termini, per vedere che esse vengono a coincidere con quelle del sistema (9). Pertanto i valori di  $\xi_i$  e  $\xi_{i-1}$ , fornitici dalle (10) e (13), dovendo in un caso e l'altro essere eguali, come risultanti dallo stesso sistema d'equazioni scritto prima direttamente colle (4), e poi inversamente colle (9), ne segue che le identità (14), le quali verificano queste eguaglianze, concordano coll'enunciato principio, e lo esprimono analiticamente.

Gli indici  $i$  e  $\lambda$ , nelle identità (14), potendo essere qualsivoglia, riterremo come una proprietà generale delle funzioni P, che i loro indici superiori ed inferiori sono permutabili fra loro, senza che esse cambino nè di valore, nè di composizione.

## 7.

Proprietà delle funzioni  $Q_\lambda^{(i)}$  dedotte da quelle delle  $P_\lambda^{(i)}$ .

Termineremo questo Capitolo coll'osservazione che le quantità Q, intro-

dotte per compendio colle posizioni segnate (11) nel Capitolo III, essendo funzioni lineari delle P, godono pure di proprietà che discendono come corollarii da quelle che abbiamo dimostrato per queste. Così si ha per quelle funzioni la relazione generale

$$(15) \quad Q_{\lambda}^{(4)} = p_{\lambda} Q_{\lambda-1}^{(4)} + Q_{\lambda-2}^{(4)},$$

che si ottiene moltiplicando la seconda delle equazioni (1) per  $\frac{1}{v_0 \Delta_0}$ , e sommandola colla prima.

Eliminando  $p_{\lambda}$  fra questa e ciascuna delle due dette equazioni, sostituendo nei secondi membri per  $Q_{\lambda-1}^{(4)}$  e  $Q_{\lambda-2}^{(4)}$  le loro espressioni dedotte dalle (11) del Capitolo III, e riducendo colla (3), si ottengono le due relazioni

$$(16) \quad Q_{\lambda}^{(4)} P_{\lambda-1}^{(4)} - Q_{\lambda-1}^{(4)} P_{\lambda}^{(4)} = \pm \frac{1}{v_0 \Delta_0}, \quad (17) \quad Q_{\lambda}^{(4)} P_{\lambda-1}^{(4)} - Q_{\lambda-1}^{(4)} P_{\lambda}^{(4)} = \mp 1$$

nelle quali il segno superiore vale per  $\lambda$  dispari, e l'inferiore per  $\lambda$  pari.

Sommando la seconda delle (6) moltiplicata per  $\frac{1}{v_0 \Delta_0}$  colla prima, si ha pure

$$(18) \quad Q_{\lambda}^{(4)} = P_{\lambda}^{(4)} Q_{i-1}^{(4)} + P_{\lambda}^{(i+1)} Q_{i-2}^{(4)}.$$

Cambiando in questa  $i$  in  $i+1$ , e poi prendendo le derivate rispetto a  $p_i$ , si trova facilmente, facendo uso delle formole (11) del Capitolo III, dei ragionamenti fatti nell'articolo 5, non che delle equazioni (8) riferite nello stesso articolo, che si ha

$$\frac{d Q_{\lambda}^{(4)}}{d p_i} = P_{\lambda}^{(i+1)} Q_{i-1}^{(4)}$$

Parimenti si moltiplichino la seconda delle equazioni (3), per  $\frac{1}{v_0 \Delta_0}$ , e si sommi colla prima, e si conseguirà

$$(3)_2 \quad Q_{\lambda}^{(4)} P_{\lambda-1}^{(i)} - Q_{\lambda-1}^{(4)} P_{\lambda}^{(i)} = \pm Q_{i-2}^{(4)}$$

il segno superiore valendo per  $\lambda-i$  pari, e l'inferiore per  $\lambda-i$  dispari.

Noteremo in fine che, giusta l'osservazione fatta nell'articolo (4), si può, nelle formole precedenti aumentare contemporaneamente d'un numero intero qualunque l'indice superiore delle funzioni P e Q, purchè non venga a superare di più d'un'unità alcuno degli indici inferiori già applicati alle medesime, senza che quelle formole cessino di sussistere.

## PARTE SECONDA

### PRIMA APPROSSIMAZIONE.

#### CAPITOLO I.

##### PROPRIETÀ GENERALI DEGLI STROMENTI OTTICI.

##### 1.

*Motivi di premettere questa seconda parte.*

Quando le aperture delle superficie rifrangenti o riflettenti che compongono uno stromento ottico sono così piccole, comparativamente ai loro raggi di curvatura, e la distanza dall'asse centrale del punto radiante è tanto piccola, comparativamente alla sua distanza dall'obbiettivo, che i quadrati dei rapporti di queste quantità sono trascurabili, la teoria, così bene che l'esperienza, provano che le aberrazioni sono tenui, e si possono facilmente ottenere dallo stromento effetti abbastanza soddisfacenti alle condizioni d'una visione distinta. Questo risultamento fu riconosciuto poco dopo l'invenzione del telescopio, talchè i costruttori che succedettero ad essa, come il Campani, l'Huyghens ed altri, furono indotti a formare degli obbiettivi semplici di alcuni pollici d'apertura e d'una distanza focale maggiore di 100 piedi, i quali, accoppiati ad oculari positivi, componevano dei telescopii d'un effetto mirabile (\*). Malgrado questo successo, que' telescopii di dimensioni cotanto smisurate sono caduti presto in disuso, per gl'ingombri che s'incontrano nel maneggiarli, e per la difficoltà di dirigerli ai varii punti del cielo o dell'orizzonte, e gli Ottici furono costretti ad indagare nuovi mezzi con cui costruire degli istromenti di dimensioni più moderate, e tuttavia capaci di produrre effetti eguali o superiori, tanto rispetto all'ingrandimento, quanto rispetto alla chiarezza e nitidezza delle immagini.

(\*) Vedasi il secondo volume delle Opere di HUYGHENS. art. III. intitolato *Astroscopia compendiaris tubi optici molimine liberata*, non che l'*Histoire des Mathématiques* di MONTUCLA Parte IV, lib. IX. pag. 553.

Riserveremo alla terza Parte di questa Teoria, l'esposizione di quanto ci venne fatto di trovare a questo proposito; frattanto metteremo in chiaro, in questa seconda Parte, le cospicue proprietà di cui sarebbero dotati gli stromenti ottici costruiti nelle summentovate condizioni. È indispensabile di conoscere queste importanti proprietà che costituiscono, in quanto alla distinta visione, il tipo di un istromento quasi perfetto, perchè esse saranno prese come punti di mira cui ci proporremo d'attingere, allorchè tratteremo il problema in condizioni più generali.

## 2.

*Equazioni che rappresentano il corso del raggio luminoso emergente dallo stromento.*

Il raggio luminoso, appena uscito dall'ultima superficie rifrangente o riflettente dello stromento, trovandosi in un mezzo indefinito di densità uniforme, qual è l'ambiente, si propagherà in esso in linea retta; e, come passa pel punto  $(x_n, y_n, z_n)$  della detta superficie (\*), e fa cogli assi delle coordinate gli angoli che abbiamo dinotato con  $X_n, Y_n, Z_n$ , le equazioni della retta, secondo cui si propaga, saranno date da

$$\frac{x - x_n}{\cos X_n} = \frac{y - y_n}{\cos Y_n} = \frac{z - z_n}{\cos Z_n}.$$

Ponendo in queste equazioni per  $x_n, y_n, z_n$  e per  $\cos Y_n$  e  $\cos Z_n$  le loro espressioni offerteci dalle formole (6) del Capitolo II, e (12) del Capitolo III della prima Parte, le medesime potranno essere messe sotto la forma

$$(1) \begin{cases} y = \left\{ Q_{2n-2}^{(4)} + \frac{v_n}{\cos X_n} Q_{2n-1}^{(4)} (x - \alpha_n H_n) \right\} y_1 - \frac{1}{v_0 \Delta_0} \left\{ P_{2n-2}^{(2)} + \frac{v_n}{\cos X_n} P_{2n-1}^{(2)} (x - \alpha_n H_n) \right\} y_0, \\ z = \left\{ Q_{2n-2}^{(4)} + \frac{v_n}{\cos X_n} Q_{2n-1}^{(4)} (x - \alpha_n H_n) \right\} z_1 - \frac{1}{v_0 \Delta_0} \left\{ P_{2n-2}^{(2)} + \frac{v_n}{\cos X_n} P_{2n-1}^{(2)} (x - \alpha_n H_n) \right\} z_0. \end{cases}$$

Uno sguardo gettato sulle posizioni (7), (8) ed (11) del Capitolo I, e (6), (6)<sub>1</sub>, (8) ed (11) del Capitolo II, Parte I, basta a palesarci che le quantità le quali entrano come costanti in queste due equazioni, rappresentanti la retta percorsa dal raggio emergente, si compongono 1.° degli elementi del sistema che riman-

(\*) Si rammenterà che  $n$  dinota il numero delle superficie di cui il sistema è composto.

gono invariabili per tutti i raggi; 2.° delle coordinate del punto  $(x_0, y_0, z_0)$  da cui il raggio in considerazione ha emanato; 3.° di quelle del punto  $(x_1, y_1, z_1)$  in cui ha incontrato la prima superficie rifrangente o riflettente; 4.° delle velocità  $v$ , con cui il medesimo si propaga nei vari mezzi compresi fra le stesse superficie. Le posizioni e direzioni dei vari raggi, che escono dallo stromento nell'ambiente, saranno quindi variabili a seconda della situazione del punto radiante, di quella del punto incidente sulla prima superficie del sistema, e delle lunghezze rispettive delle ondulazioni, da cui essi sono costituiti.

Negli articoli 2, 3 e 4 del Capitolo II abbiamo visto, che, se si trascurano le quantità di second'ordine  $y^2, z^2, \cos^2 Y$  e  $\cos^2 Z$ , rispetto a quelle d'ordine nullo, i valori di  $\cos X, \alpha, \beta, \gamma$ , si riducono all'unità. Se inoltre si assumono per approssimazione, come eguali le velocità  $v$ , con cui i raggi luminosi di diverse lunghezze d'ondulazioni si propagano in uno stesso mezzo, si rileva facilmente dalle espressioni (6) e (6)<sub>1</sub> che i valori di tutte le  $p$  divengono, per ogni sistema ottico, costanti per tutti i raggi, e che perciò tali verranno pure ad essere quelli delle funzioni  $P, P'$ , formati colle sole  $p$ , secondo la legge esposta all'articolo I del Capitolo IV.

Nel detto grado d'approssimazione i parametri delle due equazioni (1), rappresentanti il corso del raggio luminoso, non conterranno quindi di variabili, passando da un raggio all'altro, che le coordinate  $y_0, z_0$  ed  $y_1, z_1$ , e queste soltanto esplicitamente sotto la forma lineare sotto cui appariscono nelle equazioni medesime, talchè sarà facile di ricavare da esse le relazioni che legano fra loro le direzioni e situazioni dei vari raggi luminosi, che, partiti da tutti i punti  $(x_0, y_0, z_0)$  dell'oggetto, e caduti su tutti i punti  $(x_1, y_1, z_1)$  della prima superficie del sistema, escono dall'ultima e si propagano nel mezzo ambiente.

## 3.

*Fuochi conjugati dei raggi emanati da un punto dell'oggetto, e formazione dell'immagine di questo.*

L'ascissa  $x$ , nelle equazioni (1), essendo variabile, diamo alla medesima il valore che è atto ad annullare il coefficiente di  $y$ , o quello di  $z$ , che gli è identico, prendiamo cioè quest'ascissa di tal grandezza che, nei limiti d'approssimazione nei quali ci siamo ristretti, si abbia

$$(2) \quad Q_{2n-2}^{(4)} + v_n Q_{2n-1}^{(4)} (x - H_n) = 0.$$

Alla distanza  $x - H_n$ , presa sull'asse, dal centro dell'ultima superficie rifran-

gente del sistema, data da quest'equazione, i valori di  $y$  e  $z$  diverranno indipendenti da quelli di  $y_1$  e  $z_1$ , lo che significa che, in qualunque punto  $(x_1, y_1, z_1)$  della prima superficie caschino i raggi luminosi, partiti dal punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , andranno tutti a passare pel punto  $(x, y, z)$  le cui coordinate saranno, in virtù della precedente, e delle riduzioni che somministra la (17) del Capitolo IV, Parte I, espressi da

$$(3) \quad x - H_n = - \frac{1}{v_n} \frac{Q_{2n-2}^{(4)}}{Q_{2n-1}^{(4)}}$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{v_0} \frac{Q_{2n-1}^{(4)}}{Q_{2n-1}^{(4)}} \frac{y_0}{\Delta_0}, \quad z = \frac{1}{v_0} \frac{Q_{2n-1}^{(4)}}{Q_{2n-1}^{(4)}} \frac{z_0}{\Delta_0},$$

e perciò che, tutti i suddetti raggi torneranno a riunirsi realmente, o virtualmente, cioè sul prolungamento in verso contrario a quello della loro propagazione, nel punto determinato da queste coordinate.

In questo punto d'incontro essi formeranno un'immagine reale o virtuale del punto luminoso  $(x_0, y_0, z_0)$ , perchè un'osservatore, il cui occhio fosse situato ad una certa distanza sul corso successivo di questi raggi, giudicherebbe che tutti emanano dal medesimo punto, come se in esso vi fosse realmente un punto radiante.

Quando il punto radiante  $(x_0, y_0, z_0)$  è sull'asse centrale si ha  $y_0=0, z_0=0$ , e, per questi valori, risultando dalle (4) anche  $y=0, z=0$ , si vede che i raggi partiti da esso, e caduti sulla prima superficie del sistema, vanno tutti, dopo aver attraversato l'istromento, a riunirsi ed a formare un'immagine del medesimo sull'asse centrale ad una distanza  $\Delta$ , dal centro di figura dell'ultima superficie, data da

$$(5) \quad \frac{1}{\Delta} = - v_n \frac{Q_{2n-1}^{(4)}}{Q_{2n-2}^{(4)}};$$

le distanze  $\Delta_0$  e  $\Delta$  si chiamano le *distanze focali conjugate* dello stromento.

Introduciamo questo valore della distanza conjugata  $\Delta$  nelle equazioni (4), e, moltiplicandole membro per membro per quelli della precedente, otterremo

$$(6) \quad \frac{y}{\Delta} = - \frac{v_n}{v_0} \frac{1}{Q_{2n-2}^{(4)}} \frac{y_0}{\Delta_0}, \quad \frac{z}{\Delta} = - \frac{v_n}{v_0} \frac{1}{Q_{2n-2}^{(4)}} \frac{z_0}{\Delta_0}.$$

Il punto determinato da questi valori delle coordinate  $\Delta, y, z$ , in cui vanno a

riunirsi realmente, o virtualmente sul loro prolungamento retroverso, tutti i raggi partiti dal punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , si chiama parimente il *fuoco conjugato* di quest'ultimo punto. Le formule ora trovate, mostrandoci che i valori di  $\frac{y}{\Delta}$  e  $\frac{z}{\Delta}$

sono rispettivamente proporzionali a quelli di  $\frac{y_0}{\Delta_0}$  e  $\frac{z_0}{\Delta_0}$ , ci danno a dividere che se, ad una distanza  $\Delta_0$  dal centro di figura della prima superficie, vi sono tanti punti radianti che costituiscano la forma d'un oggetto, i fuochi conjugati di questi punti si trovano situati su di un piano perpendicolare all'asse centrale, posto alla distanza focale conjugata  $\Delta$  dal centro di figura dell'ultima superficie del sistema, e formano su di esso un'immagine simile alla prospettiva dell'oggetto. A questo piano, che è pur quello in cui l'immagine stessa sarebbe veduta da un occhio convenevolmente situato, si è applicato per analogia l'epiteto di *focale*.

4.

*Circolo anulare del sig. Biot.*

Se invece di dare, nelle equazioni (1), all'ascissa  $x$  il valore che annulla il coefficiente di  $y_1$  e  $z_1$ , le diamo quello che rende nullo il coefficiente di  $y_0$  e  $z_0$ , se si prende cioè, negli adottati limiti d'approssimazione,

$$(3)_0 \quad x - H_n = - \frac{1}{v_n} \frac{P_{2n-2}^{(2)}}{P_{2n-1}^{(2)}},$$

dalle medesime si ricava, attendendo alle (17) del Capitolo IV,

$$(4)_0 \quad y = \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} y_1, \quad z = \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} z_1.$$

Queste tre coordinate, essendo risultate costanti per uno stesso punto  $(y_1, z_1)$  della prima superficie, ci mostrano che tutti i raggi luminosi che incidono su di esso, provenienti dai vari punti dello spazio, purchè siano ammissibili (\*), vanno tutti a concentrarsi realmente o virtualmente in un'altro punto  $(y, z)$  d'un piano, condotto perpendicolarmente all'asse centrale, alla distanza, dal centro di figura dell'ultima superficie, espressa dal secondo membro dell'equazione (3)<sub>0</sub>.

(\*) Si dicono raggi ammissibili quelli pei quali le inclinazioni coll'asse centrale, e le distanze da esso dei loro punti d'incidenza sulle varie superficie rifrangenti o riflettenti, stanno nei limiti di piccolezza che le adottate approssimazioni richiedono.

Il valore di questa distanza essendo altresì indipendente dalle coordinate  $y_1, z_1$ ; ne segue ancora, che i punti omologhi di concentrazione di tutti raggi, passanti per ognuno dei varii punti della superficie obbiettiva, sono tutti situati in uno stesso piano. Il sig. Biot, che primo avvertì queste proprietà, diede il nome di *punto oculare* al punto dell'asse centrale per cui passa il piano in discorso, e quello di *piano oculare* al piano medesimo.

Giusta le equazioni (4), l'aggregato di tutti i detti punti di concentrazione dei raggi luminosi forma sul piano oculare un cerchio, il cui raggio stà a quello dell'apertura della superficie obbiettiva nella ragione di  $1 : P_{2n-1}^{(2)}$ . Notando il sig. Biot, che l'area di questo cerchio è quella entro cui si scorgono raccolti, come in un'anello, tutti i raggi ammissibili che, incidendo sull'obbiettiva, escono dallo stromento, diede al cerchio medesimo il nome di *circolo anulare*. Avremo occasione nel seguito di fare ancora parola di questo circolo.

## 5.

*Condizione generale a cui deve soddisfare uno stromento ottico per dare la visione distinta delle immagini degli oggetti, e posizioni delle medesime.*

Riprendiamo le equazioni (5) e (4) dell'articolo 3, e consideriamo il sistema ottico sotto il punto di vista d'un istromento destinato ad estendere i limiti della visione naturale, come sarebbe un telescopio o microscopio. Acciò l'immagine dell'oggetto, che si forma nel piano focale, sia distintamente percepita da occhi ben conformati, è necessario, come già è stato notato altrove, che i raggi, emanati da ciascun punto della medesima, escano sensibilmente paralleli dallo stromento, lo che esige, che la distanza conjugata  $\Delta$ , o la distanza del loro punto di concorso dall'ultima superficie del sistema sia infinita. Affinchè questa condizione sia verificata dall'equazione (5) bisogna che sia

$$(7) \quad Q_{2n-1}^{(4)} = 0.$$

Tale è la condizione alla quale deve soddisfare ogni sistema di lenti o specchi per costituire uno stromento ottico destinato alla visione distinta d'oggetti. All'effetto di dare praticamente alle parti dello stromento una situazione o disposizione che sia atta a verificarla, senza che sia d'uopo avvicinare o scostare l'oggetto, lo che spesso può essere impossibile, si rende comunemente variabile una delle distanze  $h$ , fra le lenti, facendo mobili una relativamente all'altra le due porzioni dello stromento che questa distanza separa, e che, coll'approssimarle od allontanarle fra loro, si possono portare a quel punto, in cui il valore

della loro distanza reciproca verifica la condizione (7), e la visione risulta distinta. Questo mezzo serve anche per adattare l'istromento alla vista d'un osservatore, il quale per vedere distintamente avesse bisogno che i raggi dei pennelli luminosi giungessero a' suoi occhi convergenti o divergenti, nel qual caso non avrebbe che ad aggiustare la parte mobile dello stromento nel punto ove percepisce più chiaramente l'immagine: ma di questo caso, in cui il valore di  $h$ , non soddisferebbe più all'equazione (7), tratteremo altrove.

Per introdurre nelle nostre formole la suddetta condizione, poniamo  $\lambda = 2n - 1$  nell'equazione (17) del Capitolo IV, Parte I, ed operando la riduzione che la stessa (7) ci somministra, dedurremo

$$(8) \quad Q_{2n-2}^{(4)} = \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}}.$$

col mezzo della quale, le formole (12) del Capitolo III, Parte I, si convertiranno nelle seguenti

$$(9) \quad \begin{cases} y_n = \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} y_1 - \frac{1}{v_0} P_{2n-2}^{(2)} \frac{y_0}{\Delta_0}, & z_n = \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} z_1 - \frac{1}{v_0} P_{2n-2}^{(2)} \frac{z_0}{\Delta_0} \\ \cos Y_n = -\frac{v_n}{v_0} P_{2n-1}^{(2)} \frac{y_0}{\Delta_0}, & \cos Z_n = -\frac{v_n}{v_0} P_{2n-1}^{(2)} \frac{z_0}{\Delta_0}. \end{cases}$$

Queste due ultime equazioni non solo ci confermano, che i raggi partiti da uno stesso punto luminoso  $(\Delta_0, y_0, z_0)$  escano tutti paralleli dallo stromento, poichè ci danno per  $\cos Y_n$  e  $\cos Z_n$  dei valori che sono indipendenti dalle coordinate  $y_1$  e  $z_1$  dei varii punti in cui essi incontrano la prima superficie, ma ci porgono eziandio un carattere importante per giudicare delle posizioni in cui le immagini degli oggetti sono scorte. Infatti, un punto essendo visto in generale nella direzione opposta a quella colla quale si propagano i raggi emanati dal medesimo, l'immagine del punto luminoso  $(\Delta_0, y_0, z_0)$  sarà, nel nostro caso, percepita in direzione contraria a quella dataci da  $\cos Y_n$  e  $\cos Z_n$ , colla quale i suoi raggi escano dallo stromento. Quest'immagine apparirà quindi dallo stesso lato dell'asse centrale, o dal lato opposto, secondo che i valori di  $\cos Y_n$  e  $\cos Z_n$ , dati dalle due precedenti equazioni, risulteranno di segno contrario, o dello stesso segno di quelli delle coordinate  $y_0$  e  $z_0$ , cioè secondo che  $\frac{v_n}{v_0} P_{2n-1}^{(2)}$

sarà positivo o negativo. Nel primo caso, tutti i punti dell'immagine trovandosi situati dallo stesso lato del detto asse, dove sono quelli dell'oggetto, la medesima sarà veduta diritta nella stessa posizione di questo; nel secondo caso,



i punti dell'oggetto a destra ed in alto dell'asse centrale essendo rispettivamente veduti a sinistra ed in basso di quest'asse, o viceversa, l'immagine sarà bensì simile all'oggetto, ma verrà scorta a rovescio. Dal segno del valore di  $P_{2n-1}^{(1)}$  potremo dunque giudicare della posizione diritta o rovescia che avrà l'immagine relativamente all'oggetto.

## 6.

*Amplificazione.*

Proponiamoci di mettere in evidenza gli effetti più notevoli che possono essere prodotti dagli stromenti ottici impiegati ad accrescere la visione, il significato dei quali trovasi incluso nelle precedenti equazioni.

Lo scopo principale degli stromenti ottici essendo quello di procurarci delle immagini per le quali gli oggetti ci appaiano ingranditi, cominceremo dal determinare l'amplificazione, cioè la ragione in cui gli angoli visuali, sottesi dalle dimensioni lineari dell'oggetto viste direttamente, sarebbero aumentati osservandole nell'istromento. Per tal fine si noterà primieramente, che i quozienti  $\frac{y_0}{\Delta_0}$ ,  $\frac{z_0}{\Delta_0}$  eguagliano, entro i limiti in cui stiamo, i coseni degli angoli che la retta, condotta dal centro di figura della prima superficie al punto radiante  $(x_0, y_0, z_0)$ , fa rispettivamente cogli assi delle  $y$  e delle  $z$ . Ora, chiamando  $L$  l'angolo che il piano passante per la detta retta e per l'asse centrale fa col piano  $xy$ , ed  $O$  quello che la medesima retta fa coll'asse centrale dalla parte dell'oggetto, si ha, come è noto,

$$(10) \quad \frac{y_0}{\Delta_0} = \sin O \cos L, \quad \frac{z_0}{\Delta_0} = \sin O \sin L.$$

Parimente, chiamando  $E$  l'angolo che il piano, passante per la direzione del raggio emergente dallo stromento e per l'asse centrale, fa con quello delle coordinate  $x$  ed  $y$ , si ha

$$(11) \quad \cos Y_n = \sin X_n \cos E, \quad \cos Z_n = \sin X_n \sin E.$$

Sostituendo questi valori nelle due ultime equazioni (9), sommando i loro quadrati, e ponendo gli angoli  $O$  ed  $X_n$  in luogo dei loro seni, lo che è lecito nel grado d'approssimazione in cui stiamo, si avrà

$$X_n^2 = \left( \frac{v_n}{v_0} P_{2n-1}^{(1)} \right)^2 O^2,$$

ovvero, estraendo la radice, ed attendendo soltanto al valore assoluto di  $P_{2n-1}^{(1)}$ ,

$$X_n = \frac{v_n}{v_0} P_{2n-1}^{(1)} O.$$

Ora  $O$  esprime l'angolo, che il raggio visuale condotto dal centro di figura della prima superficie al punto radiante  $(x_0, y_0, z_0)$  fa coll'asse centrale, ed  $X_n$  rappresenta l'angolo, che i vari raggi partiti dal punto  $(x_0, y_0, z_0)$  all'uscire paralleli dallo stromento fanno collo stesso asse, e per conseguenza rappresenta la distanza angolare dall'asse centrale, secondo cui l'osservatore vedrebbe lo stesso punto luminoso attraverso l'istromento: la ragione di questi due angoli costituisce, come abbiamo detto sopra, l'amplificazione, che sarà perciò espressa dall'equazione

$$(12) \quad \frac{X_n}{O} = \frac{v_n}{v_0} P_{2n-1}^{(1)},$$

la quale ci mostra, che si ottiene l'amplificazione prendendo il valore assoluto della funzione  $P_{2n-1}^{(1)}$  e moltiplicandolo pel rapporto della velocità  $v_n$  alla velocità  $v_0$ , rapporto che si riduce all'unità ogniqualvolta l'istromento è immerso nello stesso mezzo.

Attendendo poi al segno del valore di  $P_{2n-1}^{(1)}$  giudicheremo, giusta l'osservazione dell'articolo precedente, se l'immagine amplificata è veduta diritta e capovolta.

## 7.

*Legge ottica del Lagrange, e sua applicazione alla misura dell'amplificazione.*

Risaliemo alle due prime delle equazioni (9), e consideriamo un solo punto radiante, cioè risguardiamo i valori di  $\Delta_0, y_0, z_0$  come costanti. Dalle equazioni medesime si ricaverà

$$(13) \quad \left( y_n + \frac{1}{v_0} P_{2n-2}^{(1)} \frac{y_0}{\Delta_0} \right)^2 + \left( z_n + \frac{1}{v_0} P_{2n-2}^{(1)} \frac{z_0}{\Delta_0} \right)^2 = \frac{r_1^2}{(P_{2n-1}^{(1)})^2},$$

essendo

$$(14) \quad r_1^2 = y_1^2 + z_1^2.$$

Quando si dia parimenti ad  $r_1$  un valor costante, l'equazione (13) può considerarsi come quella di un cerchio di raggio eguale ad  $\frac{r_1}{P_{2n-1}^{(1)}}$ , situato in un

piano perpendicolare all'asse centrale, ed avente il suo centro nel punto di questo piano le cui coordinate siano

$$-\frac{1}{v_0} P_{2n-1}^{(2)} \frac{y_0}{\Delta_0}, \quad -\frac{1}{v_0} P_{2n-1}^{(2)} \frac{z_0}{\Delta_0}.$$

Da ciò concluderemo che i raggi luminosi, i quali, partiti dal punto radiante  $(\Delta_0, y_0, z_0)$ , vanno ad attraversare la prima superficie dello stromento sulla circonferenza data dall'equazione (14), arrivati all'ultima superficie, escono dalla circonferenza rappresentata dall'equazione (15) paralleli fra loro, e formano in seguito, propagandosi nell'ambiente, una superficie cilindrica luminosa, la cui base ha per raggio  $\frac{r_1}{P_{2n-1}^{(2)}}$ , adottando in quest'espressione per la funzione  $P_{2n-1}^{(2)}$

il suo valore assoluto, vale a dire senza riguardo al suo segno.

Se diamo ad  $r_1$  tutti i valori da 0 sino ad  $a$ , cioè sino al raggio del circolo la cui periferia circoscrive l'apertura della prima superficie obbiettiva, la (15) rappresenterà successivamente quella delle circonferenze formanti le basi di altrettante superficie cilindriche secondo cui si propagheranno, al di là dello stromento, i raggi partiti dal punto radiante  $(\Delta_0, y_0, z_0)$ ; ed è evidente, che queste superficie avendo tutte un asse comune nella direzione degli angoli  $Y_n, Z_n$ , dati dalle due ultime equazioni (9) (\*), il loro assieme formerà un cilindro luminoso il cui raggio avrà per valore la radice del secondo membro della (15), quando vi si ponga  $r_1 = a$ . Chiamando quindi  $c$  questo raggio, il suo valore sarà dato dall'equazione

$$(15) \quad c = \frac{a}{P_{2n-1}^{(2)}},$$

colla quale eliminando  $P_{2n-1}^{(2)}$  dalla (12), si ottiene

$$(15) \quad \frac{X_n}{O} = \frac{v_n}{v_0} \frac{a}{c},$$

e ci fa vedere, che si ha il valore dell'amplificazione moltiplicando la ragione delle due velocità  $v_n$  e  $v_0$  per quella del raggio dell'apertura della prima superficie obbiettiva al raggio del cilindro di luce che esce dall'ultima superficie

(\*) I circoli rappresentati dalle (15), che abbiamo preso per basi delle dette superficie cilindriche, sarebbero a tutto rigore oblique al loro asse, ma come i coseni degli angoli  $Y_n$  e  $Z_n$ , che danno la direzione dell'asse medesimo, sono piccoli, ed i loro quadrati trascurabili, nel grado d'approssimazione in cui stiamo, le proiezioni di tali circoli, sul piano perpendicolare al loro asse, differiscono insensibilmente dai circoli stessi.

oculare, quantità che possono conseguirsi direttamente con delle misure prese esteriormente, senza conoscere per nulla la costruzione interna dello stromento.

« Si può dunque, dice il Lagrange, che il primo notò tale proprietà (\*), « stabilire questa conclusione generale che, in qualsivoglia telescopio o microscopio, qualunque sia il numero, l'ordine e la forza delle lenti o spere di cui è composto, l'amplificazione prodotta dallo stromento è sempre nella ragione del diametro dell'apertura dell'obbiettivo al diametro dell'apertura dell'oculare, prendendo per quest'apertura la sezione del cilindro luminoso che esce dall'oculare, e supponendo che il pennello di luce, inviato dal punto luminoso all'obbiettivo, non sia intercettato in nessun luogo del suo tragitto, e possa uscire tutt'intero dall'oculare.

« Nello stesso modo che vi è in Meccanica la legge generale delle velocità « virtuali, colla quale si può conoscere l'aumento di forza prodotto da una macchina, senza conoscere la sua natura o costruzione, ma colla semplice ragione delle velocità simultanee del punto a cui è applicata la potenza, e del punto al quale questa potenza è trasmessa dalla macchina; così si può dire che vi è in Ottica una legge analoga colla quale, senza conoscere la disposizione interna d'un telescopio o d'un microscopio, si può giudicare della sua forza, col semplice rapporto del diametro dell'apertura dell'obbiettivo al diametro dell'apertura dell'oculare ».

Il Lagrange indica pure il metodo e le avvertenze con cui il diametro dell'apertura dell'oculare potrebbe essere misurato sperimentalmente. Ignoro se questo metodo sia mai stato messo alla prova con misure esattamente prese (\*\*). Passerò invece ad esporre nel seguente articolo il principio su cui si fonda quello che gli artisti avevano già messo in pratica, prima che Lagrange esponesse il suo.

(\*) Sur un loi générale d'Optique. *Mémoires de l'Académie de Berlin* ann. 1805.

(\*\*) Non sarà inutile di rimarcare a questo proposito, che, per applicare il principio lagrangiano alla determinazione dell'amplificazione, il migliore mezzo sarebbe forse quello d'introdurre i raggi del sole da un foro in una camera buia, e di raccogliarli in un punto con una lente di fuoco alquanto corto, e quindi misurare il diametro del cilindro di luce che i raggi, partiti da questo punto, caduti sulla prima ed usciti dall'ultima superficie, formano al di là dello stromento. L'aggiustamento dell'oculare, per la visione distinta o pel parallelismo dei raggi che formano il detto cilindro, non sarebbe più lo stesso nei punti situati ad altre distanze, per esempio per quella dei corpi celesti, e quindi nei telescopii l'amplificazione ottenuta sarebbe un po' maggiore, ma si potrebbe eliminare la differenza anche sperimentalmente, rendendo paralleli i raggi che vanno dal punto luminoso all'obbiettivo, col porre dirimpetto a questa una lente convergente, collocata ad una distanza, dal detto punto, eguale alla lunghezza focale della medesima.

## 8.

Principio su cui si fonda il dinametro, o misuratore dell'amplificazione degli stromenti ottici.

Quando si rivolge uno stromento ottico ad una superficie luminosa indefinita, come, per esempio, al cielo in tempo di giorno, ed allontanando l'occhio si guarda esteriormente l'oculare, vi si scorge proiettato sopra un piccolo disco chiaro, che è l'immagine della prima superficie obbiettiva, la quale tien luogo di un corpo illuminato osservato attraverso la parte rimanente dello stromento.

Gli artisti già avevano notato da molto tempo, che il rapporto del diametro di questo disco a quello dell'apertura dell'obbiettivo corrisponde all'amplificazione dello stromento, e per poter prendere la misura di un tal diametro più esattamente immaginarono un'apparecchio al quale diedero il nome di *dinametro*.

Per dimostrare che i raggi, partiti dalla superficie obbiettiva, considerata come un corpo radiante, ed usciti dall'ultima superficie oculare, formano un'immagine dell'apparenza di un disco luminoso del diametro sopra detto, non abbiamo a far altro che applicare le formole generali al caso presente, riguardando la prima superficie obbiettiva come l'oggetto, e le superficie successive come formanti l'istromento. In questo caso, ritenendo le stesse denominazioni, la quantità  $v_0 \Delta_0$  sarà supplita da  $v_1 \Delta_1$ , cioè dal prodotto della distanza di un punto della prima superficie da uno della seconda, per la velocità di propagazione del raggio luminoso nel mezzo compreso fra queste due superficie. Di più gli indici degli elementi  $p$  con cui sono formate le funzioni  $P$  e  $Q$  dovranno essere aumentati di due unità, acciò l'istromento cominci dalla seconda superficie, cosicchè alle funzioni  $P^{(4)}, P^{(3)}$ , qualunque sia il loro indice inferiore, dovranno essere sostituite le funzioni  $P^{(2)}, P^{(1)}$ , collo stesso indice al disotto. Ciò notato si vedrà che le relazioni, fra le coordinate del punto radiante e quello della sua immagine nel fuoco conjugato, dateci dalle (4), si cambieranno nelle seguenti

$$(4)_1 \quad y = \frac{1}{v_1} \frac{1}{Q^{(2)}_{2n-1}} \frac{y_0}{\Delta_1}, \quad z = \frac{1}{v_1} \frac{1}{Q^{(1)}_{2n-1}} \frac{z_0}{\Delta_1},$$

dinotando sempre con  $y_0$  e  $z_0$  le coordinate del punto radiante e con  $y$  e  $z$  quelle del suo fuoco conjugato.

Sommandò i quadrati di queste due equazioni, estraendo dalla somma la radice seconda, ed osservando che per le formole (9) del Capitolo II, e (6), del

Capitolo III, Parte I, si ha  $v_1 \Delta_1 = v_1 \beta_1 h_2 = p_2$ , ricaveremo

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{1}{p_2 Q^{(2)}_{2n-1}} \sqrt{y_0^2 + z_0^2}.$$

Se prendiamo per  $\sqrt{y_0^2 + z_0^2}$  il valore  $a$  del raggio d'apertura della prima superficie obbiettiva, divenuta corpo radiante,  $\sqrt{y^2 + z^2}$  sarà quello del raggio del disco che rappresenta l'immagine, formata dai raggi che sono partiti dalla detta superficie ed hanno attraversata la parte successiva dello stromento, per cui, indicato con  $c$  questo secondo raggio, dovrà essere soddisfatta l'equazione

$$(16) \quad c = \frac{a}{p_2 Q^{(2)}_{2n-1}}.$$

Ora le formole (11) del Capitolo III Parte I ci danno nel caso che consideriamo

$$p_2 Q^{(2)}_{2n-1} = p_2 \left( P^{(2)}_{2n-1} + \frac{1}{p_2} P^{(4)}_{2n-1} \right),$$

ovvero, sostituendo a  $P^{(2)}_{2n-1}$  e  $P^{(4)}_{2n-1}$  le loro espressioni somministrategli dalla (7) del Capitolo IV della stessa Parte I,

$$p_2 Q^{(2)}_{2n-1} = p_2 \left( P^{(1)}_{2n-1} P_1^{(2)} - P^{(2)}_{2n-1} P_1^{(1)} \right) - \left( P^{(1)}_{2n-1} P_2^{(2)} - P^{(2)}_{2n-1} P_2^{(1)} \right),$$

alla quale equazione si può dare la forma

$$p_2 Q^{(2)}_{2n-1} = -P^{(1)}_{2n-1} (P_2 - p_2 P_1) + P^{(2)}_{2n-1} (P_2 - p_2 P_1),$$

che può ridursi, col mezzo delle formole (1) dello stesso Capitolo, a

$$p_2 Q^{(2)}_{2n-1} = -P^{(1)}_{2n-1} P_0 + P^{(2)}_{2n-1} P_0;$$

e quindi, osservando che, per le formole date all'articolo 2 del Capitolo III Parte I, si ha  $P_0^{(1)} = 1$ ,  $P_0^{(2)} = 0$ , alla seguente

$$(17) \quad p_2 Q^{(2)}_{2n-1} = P^{(2)}_{2n-1},$$

per cui, portando il valore di questo primo membro nella precedente equazione (16), risulterà, indipendentemente dal segno

$$(18) \quad P^{(2)}_{2n-1} = \frac{a}{c},$$



è questo valore di  $P_{2n-1}^{(1)}$  sostituito nella (12) ci darà

$$(19) \quad \frac{X_n}{O} = \frac{r_n \cdot a}{v_n \cdot c}$$

La ragione del raggio dell'apertura della superficie obbiettiva d'uno stromento a quella della sua immagine, moltiplicata pel rapporto di  $r_n$  a  $v_n$ , darà dunque una nuova espressione dell'amplificazione del medesimo, come ci eravamo proposti di dimostrare.

Il disco, che presenta l'immagine dell'apertura della superficie obbiettiva, sarà disegnato in un piano perpendicolare all'asse centrale, ed alla distanza  $\delta$  dal centro di figura dell'ultima superficie oculare, data da

$$\delta = - \frac{1}{v_n} \frac{Q_{2n-2}^{(1)}}{Q_{2n-1}^{(1)}},$$

la quale rimpiazza in questo caso la (5), a cui è analoga.

Ma, collo stesso processo con cui si è ottenuto la (17), si trova anche

$$p_2 Q_{2n-2}^{(1)} = P_{2n-2}^{(1)},$$

quindi, eliminando dall'equazione precedente, e dalla (4) tanto  $Q_{2n-1}^{(1)}$  quanto  $Q_{2n-2}^{(1)}$  per mezzo della (17) e di quest'ultima, si otterrà

$$(20) \quad \delta = - \frac{1}{v_n} \frac{P_{2n-2}^{(1)}}{P_{2n-1}^{(1)}}$$

$$(4)_2 \quad y = \frac{1}{P_{2n-1}^{(1)}} y_0, \quad z = \frac{1}{P_{2n-1}^{(1)}} z_0.$$

I secondi membri di queste equazioni essendo identici con quelli delle equazioni segnate (3)<sub>0</sub> e (4)<sub>0</sub> nel Capitolo I, ci fanno vedere che il cerchio, rappresentante l'immagine dell'obbiettiva, è situato nel piano detto dal sig. Biot oculare, e che i varii punti della stessa immagine coincidono con quelli in cui vanno a concentrarsi i raggi provenienti dallo spazio dopo essersi intersecati nei punti omologhi della superficie obbiettiva.

Questo risultato era facile a prevedersi, perchè è indifferente per la formazione della detta immagine che si consideri ciascun punto illuminato dell'obbiettiva come un centro d'emanazione di raggi, o che que' raggi siano inviati dai varii punti dello spazio e s'incrocino in esso: in un caso e nell'altro deve risultare una medesima immagine.

Euler ha chiamato raggio principale d'un pennello luminoso, che investe l'obbiettivo, quello che passa pel centro di questo. Se facciamo  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = 0$  nelle due prime delle equazioni (9), per considerare il corso del raggio principale, si vede che all'uscir dall'oculare la sua situazione soddisfa alle equazioni

$$y_n = - \frac{1}{v_n} P_{2n-2}^{(1)} \frac{y_0}{\Delta_0}, \quad z_n = - \frac{1}{v_n} P_{2n-2}^{(1)} \frac{z_0}{\Delta_0},$$

le quali ci mostrano che il raggio principale, partito dal punto  $(\Delta_0, y_0, z_0)$ , interseca la superficie oculare in un punto  $(y_n, z_n)$ , che starà dalla stessa parte, o dalla parte opposta dell'asse centrale a quella in cui è situato il punto radiante,

secondo che sarà  $P_{2n-2}^{(1)}$  negativo o positivo. Coprendo quindi la superficie obbiettiva, ad eccezione di un piccol foro nel centro, e dirigendo lo stromento ad un oggetto luminoso, per esempio al sole, si osserverà se, elevando od abbassando un poco l'asse centrale dello stromento, l'immaginetta del foro visibile sulla superficie oculare si eleva o s'abbassa contemporaneamente, o se succede il contrario, e con questo dato si giudicherà, secondo l'esposto, del segno positivo o negativo del valore di  $P_{2n-2}^{(1)}$ , senza conoscere l'interno dello stromento.

Avendosi per mezzo di tale esperimento determinato il segno di  $P_{2n-2}^{(1)}$ , e quello di  $P_{2n-1}^{(1)}$  essendoci indicato dal vedersi le immagini degli oggetti diritte, o capovolte, potremo riconoscere se il valore della distanza  $\delta$ , datoci dalla (20) deve essere positivo o negativo. Nel primo caso, il piano oculare sarà esterno allo stromento, e nel secondo sarà interno.

L'osservatore potrà anche determinare il valore di  $\delta$ , senza scomporre l'istromento, valendosi del dinametro a doppia immagine, che descriveremo nell'articolo seguente. Per quest'oggetto, applicando il dinametro all'oculare dello stromento, bisogna che determini anche a qual distanza dal centro di figura della superficie esterna dell'oculare medesimo stà il piano tangente ai due centri di figura delle due semilenti del dinametro, quando vede l'immagine dell'obbiettivo nel miglior punto di distinzione. Chiamando K questa distanza, ed F la lunghezza focale del dinametro (\*) dedurrà

$$\delta = K - F,$$

valore che sarà negativo, quando risultasse  $K < F$ .

(\*) Diceasi lunghezza focale d'uno stromento la distanza dal centro di figura dall'ultima superficie al piano focale su cui vanno a riunirsi i raggi paralleli entrati per la prima: o viceversa, supponendo che i raggi invertano il loro cammino, la distanza del punto situato sull'asse centrale da cui essi dovrebbero partire, od a cui dovrebbero concorrere per rientrare nello stromento ed uscire paralleli dalla prima superficie di esso.

Pongasi per omogeneità

$$P_{m-1}^{(1)} = v_0 l ;$$

da questa e dalle espressioni (15) e (20) si ricava l'equazione

$$l = - \frac{v_n}{v_0} \frac{a}{c} \delta ,$$

che ci dà il valore di  $l$ , e compie di provarci che le quantità, dalle quali dipende il calcolo degli effetti dello stromento, sono tutte determinabili sperimentalmente operando all'esterno, senza bisogno di conoscere l'intima sua struttura.

## 9.

### Dinometro.

Ogni qualvolta l'amplificazione d'uno stromento ottico è assai grande, il valore del semidiametro del disco, indicato con  $c$  nell'equazione (19), deve risultare assai piccolo in confronto della semiapertura  $a$  dell'obbiettivo, ed è evidente che, in questo caso, è necessario di conoscerlo con esattezza, senza di che un piccolo errore, di cui potesse essere intaccato, influirebbe grandemente su quello del rapporto  $\frac{a}{c}$ , e quindi sulla giusta determinazione del poter amplificante dello stromento. Questa considerazione indusse il celebre Ramsden, ed in seguito Dollond, a trovare la costruzione di un micrometro che fosse adattato a prendere con ogni esattezza la misura del disco suddetto, al quale, come già accennammo, posero il nome particolare di dinometro (\*).

Due sono le costruzioni proposte da quegli ottici per quest'oggetto. L'uno fa uso d'un micrometro ad immagine semplice, l'altro di un micrometro a doppia immagine.

Il primo è semplicemente fatto di una lastrina di madre-perla o di talco; sulla quale è tracciata una scala molto accuratamente e finamente divisa. Questa scala è posta nel tubo di un oculare positivo, semplice o composto, ed alla distanza focale principale del medesimo, di modo che le divisioni della scala siano chiaramente e distintamente vedute attraverso l'oculare. Si applica quest'apparecchio al tubo dell'oculare proprio dello stromento di cui si vuole misurare il poter amplificante, e si fa avanzare o retrocedere sino a tanto che si vede,

(\*) Delle voci δυναμις forza, potere, e μετρον misurare, vale a dire *misuratore del poter amplificante*.

nell'interno del dinometro, l'immagine dell'obbiettivo bene definita e dipinta sulla scala suddetta. Leggendo allora le parti di questa scala sottese dal diametro del disco, che rappresenta la detta immagine, si ha il valore di  $2c$ . Questa specie di dinometro è dovuta a Ramsden, ma ha l'inconveniente che non è applicabile alla misura dell'amplificazione di quegli istromenti per i quali, come abbiamo visto nella discussione fatta nell'articolo precedente, il valore di  $\delta$  risultasse negativo, perchè in questi l'immagine del disco si trova nell'interno dello stromento, dove non si può introdurre il dinometro.

A tale inconveniente non è soggetta la seconda specie di dinometro a doppia immagine, quando la distanza focale principale di esso è maggiore di  $\delta$ . Questo dinometro può paragonarsi ad un oculare composto di due lenti, delle quali l'anteriore, quella verso l'immagine da misurarsi, è divisa in due, secondo un suo diametro, e le due metà sono congegnate in modo che possono scorrere contemporaneamente nella direzione dello stesso diametro, allontanandosi egualmente da una parte e dall'altra dell'asse centrale, comune ad amendue, quando i loro centri sono uniti. La descrizione del meccanismo per ottenere questo movimento è superflua al nostro scopo teorico (\*); qui basta il dire, che da un lato di questo piccolo stromento sporge una vite, girando la quale si comunica il detto movimento opposto alle due semilenti. Sulla testa della vite medesima è fermato un cerchietto metallico, nel cui contorno sono tracciate le divisioni che misurano le rivoluzioni e loro frazioni fattesi fare alla vite, e che sono proporzionali alla separazione o distanza reciproca dei centri delle due semilenti. L'apparecchio componente il dinometro è applicato al tubo dell'oculare dello stromento, di cui si vuol misurare l'amplificazione, in modo che può scorrere lungheggiando, e farsi avanzare o retrocedere sino al punto nel quale il disco, immagine dell'obbiettivo, è percepito colla maggior chiarezza e distinzione: situato che sia l'istromento in questo punto, è ben preparato per eseguire la misura richiesta. A tale effetto si gira la vite che trasmette il movimento di separazione alle due semilenti, e nell'atto si vedono comparire due immagini del disco, che si allontanano sempre più fra loro, nella direzione del detto diametro, a misura che procede il movimento della vite, e si prosegue a farle allontanare fino a tanto, che l'estremità destra del diametro dell'immagine a sinistra coincida coll'estremità sinistra del diametro dell'immagine a destra. In questo stato la distanza reciproca  $2c$  dei centri delle due semilenti, proporzionale alle divisioni trascorse dal cerchietto metallico in testa della vite del dinometro, è vincolata colla grandezza del diametro  $2c$  del disco in modo che, detta  $f_1$  la distanza focale

(\*) Può vedersi nel secondo volume dell'opera intitolata *Practical Astronomy* del D. PEARSON a pagina 47 e seguenti.

principale delle due semilenti,  $f_2$  quelle della seconda lente ed  $h_2$  l'intervallo fra esse, si ha

$$2e = 2e \left\{ 1 - \frac{f_1}{f_1 + f_2 - h_2} \right\} \quad (*) ;$$

dalla qual formola si scorge, che basterà moltiplicare la distanza  $2e$  dei centri delle due semilenti pel rapporto rappresentato dal fattore fra le parentesi per ottenere il valore  $2c$  del disco.

Tale rapporto sarebbe difficile a calcolarsi colla necessaria esattezza pei varii dati che richiede, e perciò gli artisti se ne servono soltanto per determinare le lunghezze delle divisioni tracciate sul circolo in testa della vite del dinametro, acciò queste corrispondano prossimamente a qualche parte del movimento delle immagini del disco, che sia una frazione decimale dell'unità di misura adottata, per esempio del millimetro. Tracciate queste divisioni, presentano dalla parte opposta all'osservatore ed alla distanza focale principale del dinametro isolato, una scala d'avorio o di cristallo diligentemente e minutamente divisa, indi, facendo separare le due immagini di questa scala, osservano se le divisioni segnate sul detto circolo corrispondono bene a quel numero di parti della scala che si voleva dalla medesima espresso, se no, rimuovendo la seconda lente del dinametro la accostano o la allontanano dalla prima, o per meglio dire dalle semilenti, secondo che queste divisioni segnano un numero minore o maggiore di parti, e l'aggiustano in modo che la corrispondenza sia perfetta. Si vede infatti dalla formola precedente, che il valore di  $2c$  crescerà o diminuirà al diminuire o crescere di  $h_2$ . Così aggiustata la scala, applicando il dinametro ad uno stromento qualunque, ed eseguendo la su descritta operazione, si ha la misura dell'immagine del suo obbiettivo espressa in millimetri e frazioni decimali di esso, osservando quale, delle divisioni tracciate sul cerchietto girevole colla testa della vite, corrisponde all'indice fisso.

Questo processo di misura suppone, che tutta la superficie obbiettiva sia efficace, cioè che i raggi che partono dai varii suoi punti, possano attraversare l'istromento, senza essere intercettati in alcun luogo del loro cammino. La necessità che vi è d'evitare l'ammissione di raggi luminosi molto obliqui, che priverebbero l'istromento delle proprietà che sussistono pei soli raggi poco inclinati all'asse centrale, fa sì che si escludono a bella posta quei raggi, ponendo nell'interno dei tubi dei diaframmi anulari che li intercettano, ma i quali possono talvolta anche circoscrivere l'immagine della superficie obbiettiva e ridurla soltanto ad una porzione di essa. Per iscoprire se questa circostanza sussiste,

(\*) Se ne vedrà la dimostrazione nel Capitolo seguente.

si restringe l'apertura della superficie obbiettiva, applicandovi esteriormente dei capelletti anulari, che coprano successivamente porzioni più grandi dei bordi di essa, e, guardando la sua immagine nel dinametro, si osserva se la grandezza di questa diminuisce in proporzione di quella. Quando ciò non avvenga, si dovrà concludere che le porzioni, sui bordi della superficie obbiettiva, coperte da quei capelletti sono rese inefficaci dal tubo dello stromento o dai diaframmi esistenti in esso, e si valuterà l'apertura della stessa superficie da quella del capelletto, pel quale l'immagine comincia a diminuire.

## 10.

### Chiarezza.

L'osservazione del Lagrange, che la luce emanata da ciascun punto dell'oggetto esce dall'oculare in forma di un cilindro del diametro che abbiamo indicato con  $2c$  nell'articolo 7, ci porge un mezzo facile di valutare la chiarezza con cui le immagini formate dagli stromenti ottici sono vedute da un'osservatore.

A quest'oggetto conviene premettere, che il grado di chiarezza, colla quale si vede una piccola porzione od elemento di un'oggetto, sta nella ragione diretta della quantità di luce che riceve la pupilla dal medesimo elemento, ed inversa della grandezza apparente sotto la quale questo è veduto. Per confrontare la chiarezza colla quale si vedrebbe il detto elemento ad occhio nudo, con quella con cui si vede attraverso l'istromento, osserveremo primieramente che, se l'occhio fosse situato al centro della prima superficie obbiettiva, la quantità di luce che riceverebbe dall'elemento in considerazione, e quella che cadrebbe sull'obbiettivo potrebbero essere rappresentate rispettivamente da  $\pi p^2$  e  $\pi a^2$ , indicando con  $\pi$  il rapporto del raggio alla semicirconferenza, con  $p$  il semidiametro della pupilla, con  $a$  la semiapertura dell'obbiettivo, e supponendo la densità od intensità della luce, inviata dall'elemento luminoso, espressa dall'unità nel luogo ove l'obbiettivo è situata.

La luce inviata dall'elemento dell'oggetto che si osserva, e che cade sulla prima superficie obbiettiva, esce dall'ultima superficie oculare, articolo 7, condensata nella base di un piccolo cilindro, il cui semidiametro abbiamo dinotato con  $c$ , quindi la densità della luce, dal cadere sulla prima superficie obbiettiva all'uscire dall'ultima superficie oculare, sarà aumentata nella proporzione di 1 ad  $\frac{a^2}{c^2}$ , per lo che la quantità di luce inviata dall'elemento, che entra nella pupilla posta dietro l'oculare, sarà espressa da  $\pi p^2 \frac{a^2}{c^2}$ . Ma la grandezza appa-

rente dell'elemento visto ad occhio nudo sta a quella osservata a traverso lo stromento, nella ragione di 1 a  $\frac{v_n^2 a^2}{v_0^2 c^2}$ , dunque dividendo la quantità di luce che entrerebbe nella pupilla ad occhio nudo, espressa da  $\pi p^2$ , pel primo termine di questa ragione, e dividendo quella surriferita che entrerebbe nella pupilla attraverso lo stromento pel secondo termine della ragione medesima, si avrà che le chiarezze, le quali, come abbiamo premesso, sono proporzionali a questi quozienti, stanno fra loro nella ragione di 1 a  $\frac{v_0^2}{v_n^2}$ . Questa ragione è quella d'eguaglianza, quando la prima e l'ultima delle superficie rifrangenti o riflettenti sono in contatto con uno stesso mezzo, nel qual caso si ha  $v_0^2 = v_n^2$ : per lo che concluderemo che, quando gli stromenti sono immersi nell'aria atmosferica, come avviene comunemente, la chiarezza degli oggetti, visti ad occhio nudo, non è cambiata dagli stromenti ottici.

In questo ragionamento s'includano due supposizioni: l'una che il cerchietto  $\pi c^2$ , pel quale esce dall'ultima superficie il pennello cilindrico di luce inviata dall'elemento, sia di un diametro almeno grande come quello della pupilla, acciò questa sia tutta investita dalla detta luce; l'altra che nessuna luce sia riflessa od assorbita dalle lenti o spere di cui è composto l'istromento. La prima supposizione si verifica comunemente nei telescopii, impiegando degli oculari di un' amplificazione non troppo forte, ma quasi non mai nei microscopii, i cui obbiettivi hanno per lo più delle aperture molto piccole, ed allora la chiarezza viene a diminuire, anche per quegli elementi degli oggetti i cui pennelli giungono per intero nella pupilla, nella ragione del quadrato del diametro del detto cerchietto, a quella del quadrato del diametro della pupilla. La seconda supposizione non sussiste mai in natura, perchè nessuna sostanza è perfettamente diafana o riflettente.

Gli Ottici valutano, all'incirca, ad  $\frac{1}{10}$  del totale la perdita di luce nell'attraversare una lente di piccola grossezza, e ad  $\frac{1}{3}$  quella nell'essere riflessa da uno specchio.

11.

*Campo.*

Si chiama *campo* d'uno stromento ottico la porzione dell'oggetto o degli oggetti che è visibile contemporaneamente attraverso l'istromento, e la grandezza del campo si misura coll'angolo compreso dai raggi visuali condotti dal centro di figura della prima superficie obbiettiva ai punti estremi degli oggetti ancor visibili sui confini di esso.

Per conoscere l'estensione del campo bisogna riassumere le equazioni (1) del corso di un raggio di luce, dopo che è uscito dalla superficie oculare. Quando si limita l'approssimazione alle quantità di second'ordine, e si fa uso delle riduzioni che somministra la condizione necessaria per la visione distinta, come ci viene espressa dalle formole (7) od (8), le dette equazioni divengono

$$y = \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} y_1 - \frac{1}{v_0} \left\{ P_{2n-2}^{(2)} + (x - H_n) v_n P_{2n-1}^{(2)} \right\} \frac{y_0}{\Delta_0},$$

$$z = \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} z_1 - \frac{1}{v_0} \left\{ P_{2n-2}^{(2)} + (x - H_n) v_n P_{2n-1}^{(2)} \right\} \frac{z_0}{\Delta_0}.$$

La differenza  $x - H_n$  dinota la distanza del punto  $(x, y, z)$  da un piano condotto pel centro di figura della superficie oculare perpendicolarmente all'asse centrale. Sia la pupilla situata sull'asse medesimo alla distanza  $h$  dal detto centro: sostituendo  $h$  ad  $x - H_n$ , le coordinate  $y$  e  $z$  diverranno quelle del punto d'intersezione del raggio luminoso che si considera col piano passante per la pupilla e perpendicolare all'asse centrale, le quali saranno perciò espresse da

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} y_1 - \frac{1}{v_0} \left\{ P_{2n-2}^{(2)} + h v_n P_{2n-1}^{(2)} \right\} \frac{y_0}{\Delta_0}, \\ z = \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} z_1 - \frac{1}{v_0} \left\{ P_{2n-2}^{(2)} + h v_n P_{2n-1}^{(2)} \right\} \frac{z_0}{\Delta_0}. \end{array} \right.$$

Ciò osservato, poniamo per semplicità

$$y = r \cos \Omega, \quad z = r \sin \Omega,$$

ciò che dà

$$(24) \quad \sqrt{y^2 + z^2} = r.$$

Poniamo parimente

$$\frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} y_1 = r_1 \cos \Omega_1, \quad \frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} z_1 = r_1 \sin \Omega_1,$$

d'onde risulta

$$\frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}} \sqrt{y_1^2 + z_1^2} = r_1,$$

ovvero, sostituendo a  $P_{2n-1}^{(2)}$  il valore equivalente, datoci dalla (15),

$$(25) \quad \frac{c}{a} \sqrt{y_1^2 + z_1^2} = r_1.$$

Sia per ultimo

$$\frac{P^{(n)}}{v_0} \left( 1 + v_n \frac{P^{(n)}}{P^{(n-2)}} h \right) \sin O = \rho ,$$

avendo  $O$  il significato assegnatogli nell'articolo 6, cioè indicando l'angolo che il raggio visuale, condotto dal centro di figura della superficie obbiettiva al punto radiante  $(x_0, y_0, z_0)$  da cui è partito il raggio luminoso in considerazione, fa coll'asse centrale dello stromento. Sostituendo pure, nel primo membro di

questa ultima posizione, a  $v_n \frac{P^{(n)}}{P^{(n-2)}} h$  e  $P^{(n)}$  i loro equivalenti, che risultano dalle equazioni (20) e (21), sarà

$$(27) \quad l \left( 1 - \frac{h}{\delta} \right) \sin O = \rho ,$$

e, ritenute le altre denominazioni dell'articolo citato, le due precedenti equazioni prenderanno la forma

$$\begin{aligned} r_1 \cos \Omega_1 - r \cos \Omega &= \rho \cos L , \\ r_1 \sin \Omega_1 - r \sin \Omega &= \rho \sin L ; \end{aligned}$$

dalle quali si ricava

$$(28) \quad \sqrt{r_1^2 - 2 r r_1 \cos(\Omega_1 - \Omega) + r^2} = \rho .$$

Il maggior valore, che possa ricevere il primo membro di quest'equazione, sarà quello che risulterà, quando sia

$$\Omega_1 - \Omega = \pi ,$$

nel mentre che i valori di  $r$  ed  $r_1$  sono massimi.

Ora  $y$  e  $z$  essendo le coordinate di un punto qualunque della pupilla, il valore  $\sqrt{y^2 + z^2}$  non potrà essere più grande della semiapertura  $p$  di essa, e dall'equazione (25) si avrà, pel massimo valore di  $r$ ,

$$r = p .$$

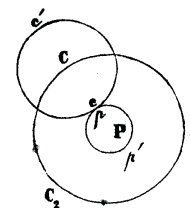
Parimenti  $y_1$  e  $z_1$  essendo le coordinate di un punto qualunque della superficie obbiettiva, il valore  $\sqrt{y_1^2 + z_1^2}$  non potrà eccedere la semiapertura  $a$  della superficie medesima, ed il massimo valore di  $r_1$ , datoci dall'equazione (26), sarà

$$r_1 = c .$$

Sostituendo, per  $r$ ,  $r_1$  e  $\Omega - \Omega_1$ , i su indicati valori nell'equazione (28), risulta che il massimo di  $\rho$  verrà espresso da

$$(29) \quad \rho = p + c .$$

Per dare una rappresentazione geometrica del significato di questa equazione, supponiamo che il piano dell'annessa figura



sia quello sunnominato, che passa pel centro  $P$  della pupilla, ed è perpendicolare all'asse centrale, che i circoletti  $pp'$  e  $cc'$  dinotino rispettivamente la apertura della pupilla, e della sezione di uno dei cilindretti luminosi del Lagrange, nel quale, come si è veduto, sono compresi tutti i raggi emanati da uno stesso punto dell'oggetto: è chiaro, che la pupilla potrà cominciare a ricevere uno dei raggi compresi in questo cilindro, quando il circoletto  $cc'$  sarà tangente a quello  $pp'$  da cui essa è rappresentata, vale a dire, quando il centro  $C$  della sezione  $cc'$  sarà così distante da quello  $P$  della pupilla che si abbia  $PC = c + p$ ; e che tutti i cilindri di luce, che avranno i loro centri sulla circonferenza  $CC, C_2$ , concentrica colla pupilla e descritta col raggio  $PC$ , saranno nello stesso caso. Da ciò conchiuderemo che tutti i punti luminosi degli oggetti che potranno inviare dei raggi per tal modo diretti, che i fasci cilindrici, da essi formati all'uscire dallo stromento, abbiano i loro assi situati sulla detta circonferenza  $CC, C_2$ , tali punti saranno quelli che cominceranno ad essere visibili sul confine del campo.

Ora la direzione di questi punti è appunto quella che ci viene porta dall'equazione (27), quando si metta per  $\rho$  il precedente valore (29), e si ricavi da essa l'espressione di  $\sin O$ , vale a dire, è quella per la quale si ha

$$\sin O = \frac{c + p}{l \left( 1 - \frac{h}{\delta} \right)} ;$$

da cui, ponendo l'angolo in luogo del seno, lo che è lecito per la sua picco-



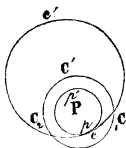
lezza, e raddoppiandone il valore, si ottiene, per esprimere il campo, la formola

$$(30) \quad 2 O = \frac{\delta}{l} \frac{2c + 2p}{\delta - h} R'' ,$$

dinotando con  $R''$  il raggio del circolo espresso in secondi d'arco.

Se quindi s'immagina un cono il cui vertice sia nel centro della superficie obbiettiva, il cui asse sia l'asse centrale, e la cui apotema faccia con quest'asse un angolo della grandezza del premesso valore di  $O$ , gli oggetti compresi in questo cono staranno nel campo dello stromento.

Il campo così determinato è però quello in cui termina ogni barlume e comincia l'oscurità completa, perchè al limite di esso la pupilla riceve soltanto, da ciascuno dei cilindri luminosi, que' raggi che radono un'elemento del suo contorno, e la percezione del punto radiante corrispondente viene ad essere minima, e molto poco sensibile. Acciò la pupilla riceva una quantità di raggi sufficienti a produrre la visione d'un punto degli oggetti colla chiarezza completa, si esige che sia tutta investita dai raggi partiti da esso, e quindi che si trovi tutta immersa nel cilindro luminoso, formato, all'uscire dall'istromento, dalla luce emanata dal medesimo punto. Questa condizione cominciasi ad ottenere, quando la sezione sensibilmente circolare del detto cilindro col piano passante per la pupilla le è tangente nel punto più lontano, come vedesi nella seguente figura,



nella quale gli stessi circoli sono indicati colle stesse lettere come nella figura precedente; e si esprime analiticamente prendendo nella formola (28)

$$\Omega_1 - \Omega = 0 ,$$

i raggi vettori di  $r$  ed  $r_1$  rimanendo i massimi, cioè stando sempre  $r = p$  ed  $r_1 = c$ , coi quali valori la medesima somministra

$$p = c - p .$$

Sostituendo quest'espressione di  $p$  nella (27), si troverà che l'angolo, fatto

coll'asse centrale dall'apotema del cono, in cui sono contenuti gli oggetti visibili coll'intera chiarezza, è dato da

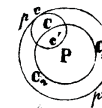
$$\sin O_c = \frac{c - p}{l \left(1 - \frac{h}{\delta}\right)} ,$$

e quindi, col processo seguito dianzi, che il campo corrispondente è espresso da

$$(30)' \quad 2 O_c = \frac{\delta}{l} \frac{2c - 2p}{\delta - h} R'' .$$

Gli oggetti, compresi nello spazio fra i due coni considerati, avranno le loro immagini situate fra i due detti limiti del campo, e la chiarezza delle medesime anderà successivamente diminuendo dal limite del campo dotato della chiarezza completa sino a quello del campo della visibilità possibile.

L'ultima formola (30) suppone  $c > p$ , cioè che la sezione del cilindro luminoso, sotto la cui forma esce la luce inviata da un punto dell'oggetto, sia più grande della pupilla, ciò che, come abbiamo visto nell'articolo 10, deve essere, affinché la chiarezza del punto osservato sia completa. Se fosse  $c < p$ , allora bisogna assumere il radicale del primo membro dell'equazione (28) con segno contrario, cioè prendere pel suo valore  $p - c$ ; ed in questo caso sarà la detta sezione che dovrà essere tangente internamente alla pupilla, come vedesi nell'annessa figura



correlativa colle precedenti, acciò la chiarezza sia possibilmente la massima, e, cambiando il segno a  $c - p$  nella premessa formola (30), il campo in questo caso sarà espresso da

$$(30)'' \quad 2 O_c = \frac{\delta}{l} \frac{2p - 2c}{\delta - h} R'' ,$$

ma la chiarezza massima in esso sarà, come già abbiamo osservato nell'articolo precedente, minore di quella che si ha osservando ad occhio nudo l'oggetto.

Il caso di  $c < p$  è il più comune nei microscopii, coi quali, illuminando fortemente gli oggetti, si può sacrificare buona parte della chiarezza per ottenere una maggiore amplificazione.

Abbiamo per semplicità supposto il centro della pupilla situato sull'asse centrale; se ne fosse un po' discosto, basterebbe considerare l'asse secondario che unirebbe il detto centro con quello della superficie obbiettiva, e proiettare tanto il contorno della sezione del cilindro luminoso del Lagrange, quanto le altre linee delle figure sul piano perpendicolare a quest'asse. Le nuove proiezioni, differendo soltanto di quantità di second'ordine da quelle considerate prima, conserveranno fra loro, nello stesso grado d'approssimazione, le medesime relazioni che abbiamo visto sussistere per queste, e quindi le stesse formole saranno anche applicabili al caso di una situazione poco eccentrica della pupilla, purchè il cerchio  $c C c'$  non esca dall'apertura dell'oculare, e l'angolo visuale  $O$  dai limiti di quello in cui i diafraggi dello stromento permettono d'osservare gli oggetti.

Fin'ora non è stato considerato che il massimo valore relativo del campo, cioè quello corrispondente ad un dato valore di  $h$ . Si può anche domandare qual'è il valore di  $h$  a cui corrisponde un campo più esteso, vale a dire, a che distanza dalla superficie oculare si deve applicare l'occhio per iscoprire il massimo campo assoluto.

Il valore di  $h$ , che darà questo massimo, sarà quello che renderà minimo, nelle su esposte formole, il denominatore  $\delta - h$ . Ora il valore di  $h$  non potendo essere che positivo, perchè i valori negativi di  $h$  corrispondono a punti situati nell'interno dello stromento, ove non può essere portato l'occhio, si vede direttamente che, se l'istromento presenta l'immagine dell'obbiettivo nell'interno dello stromento, nel qual caso, secondo fu detto nell'articolo (8),  $\delta$  sarà negativo, il valore di  $h$  il quale rende minimo il detto denominatore è  $h=0$ , ciò che ci dice, che si dovrà applicare l'occhio aderente all'oculare.

Facendo  $h=0$  nelle formole (30) (30)' e (30)'' , e sostituendo per  $l$  il suo valore datoci dalla (21), la grandezza del campo risulta, rispettivamente secondo i tre casi, data da

$$(31) \quad 2O = \frac{2v_0(c+p)}{P_{2n-2}^{(3)}} R^n, \quad 2O_c = \frac{2v_0(c-p)}{P_{2n-2}^{(3)}} R^n, \quad 2O_c = \frac{2v_0(p-c)}{P_{2n-2}^{(3)}} R^n.$$

Se l'istromento presenta l'immagine dell'obbiettivo all'esterno dell'oculare,  $\delta$  sarà positivo, ed, il denominatore divenendo nullo per  $h=\delta$ , ogni campo sarebbe visibile a questa distanza. Ma ciò è contrario alle supposizioni con cui furono stabilite le formole, che sono fondate sulla condizione che tanto  $y_0$  che  $x_0$  siano piccoli in confronto di  $\Delta_0$ , quindi è che, per verificare questa condizione, si escludono i raggi troppo obliqui all'asse centrale con dei diafraggi, posti

nell'interno dei tubi degli istromenti, affinchè questi raggi non arrechino confusione. D'altronde si può notare che, avendosi dalla equazione (20),

$$\delta = \frac{1}{v_0} \frac{O}{X} P_{2n-2}^{(3)},$$

il valore di  $\delta$  sarà assai piccolo se l'amplificazione è grande, cosichè basterà allontanare l'occhio di poco dalla superficie oculare per avere  $h=\delta$ , e quindi per iscoprire tutto il campo che i diafraggi introdotti nello stromento lasciano libero di vedere.

Speriamo che al lettore non sarà riuscito discaro d'aver trovato dimostrato in questo Capitolo, in modo diretto, generale e comprensivo, le principali proprietà di cui sono forniti i buoni istromenti ottici, nella condizione che le aperture efficaci delle lenti e le inclinazioni dei raggi luminosi all'asse centrale possano riguardarsi come quantità di second'ordine, e siano trascurabili rispetto a quelle d'ordine nullo.

## CAPITOLO II.

### APPLICAZIONI.

#### 1.

*Una sola superficie.*

$$n = 1$$

Per rendere più familiare l'uso delle formole, esposte nel precedente Capitolo, ci tratteremo in questo ad applicarle alla discussione delle proprietà degli stromenti più semplici, lo che ci porgerà anche occasione di accennare alcune rettificazioni di cui abbisognano certe proposizioni avanzate in varii Trattati d'Optica.

Consideriamo dapprima una sola superficie, che supporremo riflettente e rappresentante uno specchio sferico. In questo caso, come è stato avvertito nell'articolo 2 del Capitolo I, Parte I, bisognerà porre  $v_1 = -v_0$ , e quindi, assumendo per unità di velocità della luce quella colla quale essa si propaga nel mezzo in cui trovasi situato lo specchio, si dovrà avere  $v_1 = -1$ . Le formole (6) e (6)' del Capitolo III, Parte I, ci daranno pertanto, nel grado d'approssimazione in cui stiamo,

$$p_1 = -\frac{2}{p_1}, \quad p_2 = 0;$$

e, dalle formole (I) e (II), avremo

$$P_0^{(4)} = 1, \quad P_1^{(4)} = -\frac{2}{\rho_1}, \quad P_0^{(2)}, \quad P_1^{(2)} = 1.$$

Componendo con questi valori le espressioni di  $Q_0^{(4)}$ ,  $Q_1^{(4)}$ , dateci dalle (11) del citato Capitolo, si troverà

$$Q_0^{(4)} = 1, \quad Q_1^{(4)} = -\frac{2}{\rho_1} + \frac{1}{\Delta_0}.$$

Preparate così le funzioni, particolari al caso, che occorrono pel calcolo delle formole della seconda Parte, esprimenti i valori generali dei varii elementi d'uno strumento, introduciamole nelle medesime.

La distanza del fuoco conjugato del punto  $(\Delta_0, y_0, z_0)$  sarà data, giusta la formola (5) del Capitolo precedente, da

$$(1) \quad \frac{1}{\Delta} = -\frac{2}{\rho_1} + \frac{1}{\Delta_0};$$

e le coordinate  $y$  e  $z$  dello stesso fuoco, forniteci dalle (6), saranno espresse da

$$(2) \quad y = \frac{\Delta}{\Delta_0} y_0, \quad z = \frac{\Delta}{\Delta_0} z_0.$$

Discutendo l'equazione (1) nel caso di uno specchio concavo pel quale  $\rho_1$  è positivo, e dando a  $\Delta_0$  i diversi valori sott'indicati, si vedrà che quelli di  $\Delta$  avranno i segni e le relazioni seguenti.

$$\text{fra } \begin{cases} \Delta_0 = 0 \\ \Delta_0 = \frac{1}{2}\rho_1 \end{cases} \begin{cases} \Delta = + \\ \Delta > \Delta_0 \end{cases}; \text{ fra } \begin{cases} \Delta_0 = \frac{1}{2}\rho_1 \\ \Delta_0 = \rho_1 \end{cases} \begin{cases} \Delta = - \\ \Delta > \Delta_0 \end{cases}; \text{ fra } \begin{cases} \Delta_0 = \rho_1 \\ \Delta_0 = \infty \end{cases} \begin{cases} \Delta = - \\ \Delta < \Delta_0 \end{cases}.$$

Il fuoco conjugato apparirà dietro lo specchio, quando il valore di  $\Delta$  ha il segno positivo, e vi starà davanti quando ha il segno negativo. Nel primo caso l'immagine del punto  $(\Delta_0, y_0, z_0)$  sarà virtuale e nel secondo reale. Siccome il valore di  $\Delta$  rimane lo stesso per tutti i punti situati prossimamente alla stessa distanza  $\Delta_0$ , così se vi è un oggetto a questa distanza avanti lo specchio, l'immagine del medesimo si formerà dietro od avanti lo specchio, secondo che sarà  $\Delta$  positivo o negativo.

Le equazioni (2) ci fanno poi vedere che i punti  $(\Delta_0, y_0, z_0)$  della detta immagine saranno collocati dalla stessa parte dell'asse centrale o dalla parte opposta, a quella in cui sono i punti corrispondenti  $(\Delta_0, y_0, z_0)$  dell'oggetto, secondo

che  $\Delta$  avrà segno positivo o negativo, per cui l'immagine sarà diritta e virtuale sussistendo il primo segno, e capovolta e reale sussistendo il secondo. L'immagine stessa si presenterà in fine più grande o più piccola dell'oggetto, secondo che i valori di  $y$  e  $z$  saranno rispettivamente maggiori o minori di  $y_0$  e  $z_0$ , cioè secondo che sarà  $\Delta >$  ovvero  $<$   $\Delta_0$ .

Se lo specchio fosse convesso, e quindi il valore di  $\rho$  fosse negativo, quello di  $\Delta$  risultante dall'equazione (1) sarebbe costantemente positivo e minore di  $\Delta_0$ . In questo caso l'immagine sarà sempre diritta, virtuale e minore dell'oggetto.

Le proprietà degli specchi sferici si trovano abbastanza sviluppate nei Trattati di Fisica, e non ci distenderemo maggiormente su quest'argomento, il nostro scopo essendo stato quello di dare un' esempio del come devono essere interpretati i segni che prendono i valori delle quantità impiegate, o forniteci dalle nostre formole analitiche.

In generale, la superficie essendo unica, sia essa riflettente o ben rifrangente, dalle formole del Capitolo III, Parte I, posto  $n = 1$ , si avrà

$$p_1 = \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right)$$

$$P_1^{(4)} = p_1, \quad P_1^{(2)} = 1,$$

$$Q_1^{(4)} = p_1 + \frac{1}{v_0 \Delta_0}, \quad Q_1^{(2)} = 1;$$

e la formola (3) del Capitolo I ci darà

$$\frac{1}{\Delta} = - \left( 1 - \frac{v_1}{v_0} \right) \frac{1}{\rho} - \frac{v_1}{v_0} \frac{1}{\Delta_0}.$$

Quando i raggi incidenti giungessero paralleli alla superficie si avrebbe  $\Delta_0 = \infty$ , e la distanza conjugata  $\Delta$  diverrebbe quella che gli Ottici chiamano la distanza focale principale. Dinotandola con  $F$  si avrebbe quindi

$$(3) \quad \frac{1}{F} = - \left( 1 - \frac{v_1}{v_0} \right) \frac{1}{\rho} = -v_1 p_1$$

e la precedente prenderebbe la forma

$$(4) \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F} - \frac{v_1}{v_0} \frac{1}{\Delta_0}$$

Parimente si avrebbe

$$Q_1^{(4)} = -\frac{1}{v_1 F} + \frac{1}{v_0 \Delta_0}$$



per cui le (4) ci darebbero

$$(5) \quad y = \frac{v_1 F}{v_1 F - v_0 \Delta_0} y_0, \quad z = \frac{v_1 F}{v_1 F - v_0 \Delta_0} z_0.$$

2.

Due superficie

$$n = 2$$

Passiamo ora al caso di due superficie, supponiamo cioè  $n = 2$ . Sostituendo nell'equazione (5) del Capitolo I per  $Q_2, Q_3$  le loro espressioni, dateci dalle (11) del Capitolo III, Parte I, ed aggiungendo e sottraendo dal secondo membro la quantità  $\frac{P_3^{(4)}}{P_2^{(4)}}$ , si troverà, colle riduzioni che somministra la (5) del Capitolo IV della detta Parte,

$$\frac{1}{\Delta} = -v_2 \frac{P_3^{(4)}}{P_2^{(4)}} - \frac{v_2}{v_0} \frac{1}{P_2^{(4)}} \frac{1}{Q_2^{(4)}} \frac{1}{\Delta_0}.$$

La distanza conjugata  $\Delta$ , corrispondente a  $\Delta_0 = \infty$ , cioè la distanza focale principale, detta anche più brevemente *lunghezza focale*, sarà data da

$$(6) \quad \frac{1}{F} = -v_2 \frac{P_3^{(4)}}{P_2^{(4)}}$$

e quindi, risalendo alla precedente, avremo

$$(7) \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F} - \frac{v_2}{v_0} \frac{1}{P_2^{(4)}} \frac{1}{Q_2^{(4)}} \frac{1}{\Delta_0}.$$

Osservando per ultimo, che, coll'eliminare, per mezzo della precedente,  $P_3^{(4)}$  dall'espressione sopra citata di  $Q_3$ , si ha

$$Q_3^{(4)} = -\frac{P_2^{(4)}}{v_2 F} + \frac{P_3^{(4)}}{v_0 \Delta_0},$$

dalle (4) dell'antecedente Capitolo si ricaverà

$$(8) \quad y = \frac{v_2 F}{v_2 P_2^{(4)} F - v_0 P_2^{(4)} \Delta_0} y_0, \quad z = \frac{v_2 F}{v_2 P_2^{(4)} F - v_0 P_2^{(4)} \Delta_0} z_0.$$

9

Applichiamo queste formole al caso che le due superficie racchiudano un mezzo dotato d'un poter rifrangente maggiore di quello dell'ambiente, come avviene quando si fa uso d'una lente di cristallo immersa nell'aria atmosferica. La velocità  $v_0$  di propagazione della luce nell'ambiente essendo presa per unità, e quella del mezzo fra le due superficie essendo stata indicata con  $v_1$ , nelle formole generali, la velocità  $v$ , rappresenterà, giusta l'equazione (8) del Capitolo I, Parte I, il valore inverso di ciò che i Fisici chiamano, l'indice di rifrazione. Di più, il raggio luminoso, all'uscire dalla lente, rientrando nell'aria atmosferica, si avrà di nuovo  $v_2 = 1$ , e, colla sostituzione di questi tre valori, le formole (6) e (6)<sub>1</sub> del Capitolo III, Parte I, in cui si sia fatto  $\beta = \gamma = 1$ , ci daranno

$$p_1 = \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{1}{v_1} - 1 \right), \quad p_2 = v_1 h_2, \quad p_3 = \frac{1}{\rho_2} \left( 1 - \frac{1}{v_1} \right).$$

Per mettere queste espressioni sotto una forma, che dipenda da quantità le quali già hanno ricevuto una denominazione nell'Ottica, poniamo

$$(9) \quad \varphi_1 = -\frac{1}{\rho_1} \left( 1 - \frac{v_1}{v_0} \right), \quad \varphi_2 = -\frac{1}{\rho_2} \left( 1 - \frac{v_1}{v_2} \right);$$

$\varphi_1$  e  $\varphi_2$  dinotando, come si rileva dalla formola (3), i valori inversi delle distanze focali principali rispettive delle due superficie, nel caso che un raggio di luce passasse dal mezzo, con cui la rispettiva superficie è in contatto, nella sostanza della lente; valori, ai quali si è dato il nome di *poteri rifrattivi delle superficie* (\*). Con queste posizioni si avrà quindi

$$(10) \quad \begin{cases} p_1 = -\frac{1}{v_1} \varphi_1, & p_3 = \frac{1}{v_1} \varphi_2 \\ p_1 p_2 = -\varphi_1 h_2, & p_2 p_3 = \varphi_2 h_2 \\ p_1 + p_3 = -\frac{1}{v_1} (\varphi_1 - \varphi_2); \end{cases}$$

colle quali espressioni, componendo le funzioni P e Q, dateci dalle formole (I) (II), ed (11) del citato Capitolo, si troverà facilmente

$$P_3^{(4)} = 1 - \varphi_1 h_2, \quad P_2^{(4)} = v_1 h_2, \quad P_1^{(4)} = 1 + \varphi_2 h_2, \\ Q_2^{(4)} = 1 - \varphi_1 h_2 + v_1 h_2 \frac{1}{\Delta_0}.$$

(\*) HERSCHEL, *Treatise on light*, Art. 242, 243.

Osservando di più che si ha

$$\frac{P_2^{(4)}}{P_2^{(1)}} = \frac{p_1 + p_3 + p_1 p_2 p_3}{1 + p_1 p_2 p_3} = p_1 + p_3 - \frac{p_1^2 p_3}{1 + p_1 p_2}$$

sostituendo per le  $p$  e per i loro prodotti le surriferite espressioni, da questa e dalle (6) risulterà

$$(6)' \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{v_1} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\varphi_1^2 h_2}{1 - \varphi_1 h_2}$$

indi, introducendo nelle formole (7) ed (8) questo valore di  $F$ , e quelli di  $P_2$ ,  $Q_2$ ,  $P_3$  dati sopra, avremo, per determinare le coordinate del fuoco conjugato della lente, le tre espressioni

$$(7)' \quad \frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{F} - \frac{1}{(1 - \varphi_1 h_2) (1 - \varphi_1 h_2 + v_1 \frac{h_2}{\Delta_0}) \Delta_0}$$

$$(8)' \quad y = \frac{F}{(1 + \varphi_2 h_2) F - (1 - \varphi_1 h_2) \Delta_0} y_0, \quad z = \frac{F}{(1 + \varphi_2 h_2) F - (1 - \varphi_1 h_2) \Delta_0} z_0$$

Queste formole tengono conto della grossezza  $h_2$  della lente, ciò che può essere utile in vari casi: se si trascurasse questa grossezza come piccola di second'ordine, esse si ridurrebbero a

$$(6)'' \quad \frac{1}{F} = \left( \frac{1}{v_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right),$$

$$(7)'' \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F} - \frac{1}{\Delta_0},$$

$$(8)'' \quad y = \frac{F}{F - \Delta_0} y_0 = - \frac{\Delta}{\Delta_0} y_0, \quad z = \frac{F}{F - \Delta_0} z_0 = - \frac{\Delta}{\Delta_0} z_0,$$

che sono quelle comunemente usate.

Discutendo la formola (7)'', in modo analogo a quello, che abbiamo seguito rispetto alla formola (1) appartenente agli specchii, si deduce facilmente, che, se il valore di  $F$  è positivo, nel qual caso la lente dicesi *convergente*, e si distingue pel carattere geometrico d'essere più grossa nel mezzo che verso i bordi, l'immagine di un punto luminoso da essa formata è virtuale, situata dalla stessa parte della lente e dell'asse centrale, ma più lungi dall'una e dall'altro del detto punto, fintanto che la distanza  $\Delta_0$  di questo è minore di  $F$ ; che essa è reale, e situata dalla parte della lente e dell'asse centrale opposta a

quella in cui sta il punto luminoso, e più discosta, se la distanza  $\Delta_0$  di questo è compresa fra  $F$  e  $2F$ ; e finalmente che essa si mantiene pure reale, e dalla parte opposta della lente e dell'asse centrale in cui è situato il punto, ma si forma a minore distanza, se quella  $\Delta_0$ , a cui sta il medesimo, è maggiore di  $2F$ .

Se poi la lunghezza focale  $F$  è negativa, la lente prende il nome di *divergente*, e si distingue pel carattere geometrico d'essere più sottile nel mezzo che ai bordi. L'immagine di un punto luminoso, formata da una tal lente, è sempre virtuale, e situata dallo stesso lato di essa e dell'asse centrale in cui sta il punto, ed è sempre più accosta all'una ed all'altro che non è questo.

Conoscendo la situazione dell'immagine di un punto qualunque, è facile di riconoscere quale sarà la specie, la situazione e grandezza dell'immagine totale d'un oggetto.

## 3.

*Assi dei pennelli luminosi; centro ottico di una lente.*

Giova ora che portiamo la nostra considerazione sopra alcune particolarità che gli Ottici hanno notato per semplificare la teoria delle lenti.

Chiameremo *asse del pennello dei raggi luminosi*, che, emanati da un punto radiante, investono una lente, la linea percorsa dal raggio, che, propagandosi in un piano passante per l'asse centrale della medesima, entra ed esce da essa parallelo a se stesso, se la lente è immersa in uno stesso mezzo, ovvero, se le sue superficie anteriore e posteriore sono in contatto con due mezzi diversi, dal raggio, che esce dalla lente parallelo alla direzione che avrebbe, se passasse immediatamente da uno all'altro degli stessi mezzi, separati da un piano perpendicolare al detto asse centrale.

Ciò posto, assumiamo le prime tre equazioni del sistema (8), dato nel Capitolo III, Parte I, ed applichiamo a rappresentare le proiezioni del raggio, che attraversa una lente.

L'asse del pennello luminoso essendo, come il raggio che lo percorre, situato in un piano passante per l'asse centrale, potremo prendere l'asse delle  $y$ , la cui direzione è rimasta arbitraria, in questo piano. In tal caso i valori di tutte le coordinate  $z$ , e dei coseni degli angoli  $Z$  saranno nulli, e le equazioni, appartenenti alla proiezione del raggio sul piano  $xz$ , fra queste coordinate ed i rispettivi coseni, spariranno per l'anichillamento di tutti i termini, e non rimarranno che quelle spettanti alla proiezione sul piano delle coordinate  $x, y$ , che sono

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\cos Y_1}{v_1} = p_1 y_2 + \frac{\cos Y_0}{v_0}, \\ y_2 = p_2 \frac{\cos Y_1}{v_1} + y_1, \\ \frac{\cos Y_2}{v_2} = p_3 y_2 + \frac{\cos Y_1}{v_1}. \end{cases}$$

Eliminando, per mezzo della prima,  $\frac{\cos Y_1}{v_1}$  dalle due seguenti, si ricava

$$(12) \quad \begin{cases} y_2 = (p_2 p_1 + 1) y_1 + p_2 \frac{\cos Y_0}{v_0}, \\ \frac{\cos Y_2}{v_2} = p_3 y_2 + p_1 y_1 + \frac{\cos Y_0}{v_0}. \end{cases}$$

Secondo la definizione dell'asse del pennello luminoso data sopra, il cammino del raggio, che determina quest'asse, sarà dato dalla condizione che si abbia

$$(13) \quad \frac{\cos Y_2}{v_2} = \frac{\cos Y_0}{v_0}.$$

Infatti, essendo il piano delle  $x, y$  quello in cui tale raggio è situato, avremo in generale, giusta le equazioni (11) poste nel Capitolo I,  $\cos E = 1$ ,

$$\cos Y_2 = \sin X_2, \quad \cos Y_0 = \sin X_0,$$

e quindi, sostituendo questi valori nella precedente, risulterà questa relazione

$$(14) \quad \frac{\sin X_2}{\sin X_0} = \frac{v_2}{v_0},$$

che esprime appunto la condizione, secondo cui deve rifrangersi il raggio, per essere quello che determina l'asse del pennello luminoso.

L'equazione (13) esige, che nella seconda delle (12) sia

$$p_3 y_2 + p_1 y_1 = 0,$$

ed a questa aggiungendo la prima, da cui siasi eliminata  $\cos Y_0$  colla

$$\cos Y_0 = \frac{y_1 - y_2}{\Delta_0},$$

si hanno due equazioni fra  $y_1$  ed  $y_2$ , spettanti all'asse del pennello luminoso, dalle quali si ricavano per le coordinate dei punti, in cui esso incontra le due superficie della lente, i seguenti valori

$$y_1 = \frac{v_1 y_0}{v_0 \Delta_0} \frac{p_3}{p_1 + Q_2^{(1)} p_2} h_2, \quad y_2 = - \frac{v_1 y_0}{v_0 \Delta_0} \frac{p_1}{p_1 + Q_2^{(1)} p_2} h_2;$$

ovvero, introducendo per  $\frac{y_0}{\Delta_0}$ , per  $p_1$ ,  $p_3$ , e per  $h_2$ , rispettivamente il seno dell'angolo  $O$  definito coll'equazione (10) del Capitolo I, i poteri refrattivi delle superficie della lente espressi dalle (10), ed il valore di  $p_2$  dato nel principio dell'articolo 2,

$$(15) \quad y_1 = - \frac{v_1}{v_0} \frac{p_2 \sin O}{\varphi_1 - Q_2^{(1)} \varphi_2} h_2, \quad y_2 = - \frac{v_1}{v_0} \frac{\varphi_1 \sin O}{\varphi_1 - Q_2^{(1)} \varphi_2} h_2.$$

Le quantità  $\sin O$  ed  $h_2$  essendo, nelle condizioni dei sistemi ottici che consideriamo, rispettivamente di primo e second'ordine, le precedenti formole ci mostrano, che i valori delle coordinate  $y_1$  ed  $y_2$  sono piccoli di terz'ordine, lo che ci fa vedere, che gli assi dei pennelli luminosi traversano la lente in grande vicinanza dell'asse centrale.

Se dinotiamo con  $x_1$  ed  $x_2$  le ascisse corrispondenti alle coordinate  $y_1$  ed  $y_2$ , dalle formole dell'articolo 3 del Capitolo I, Parte I si rileva, che, trascurando soltanto delle quantità di sest'ordine, si ha

$$(16) \quad x_2 - x_1 = h_2.$$

Con valori delle coordinate  $y_1$  ed  $y_2$  di questa differenza è facile d'esprimere l'equazione, che rappresenta la porzione dell'asse centrale compresa nell'interno della lente, poichè, prendendo l'origine delle coordinate nel centro di figura della prima superficie di essa, tale equazione è data da

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1.$$

Se si pone in questa  $y = 0$ , l'ascissa  $x$  nel secondo membro corrisponderà a quella del punto, in cui l'asse del pennello luminoso taglia l'asse delle  $x$ , cioè l'asse centrale. Dinotandola con  $x'$ , il suo valore ci sarà dato da

$$x' = - \frac{y_1}{y_2 - y_1} (x_2 - x_1),$$

ovvero, sostituendovi per  $y_1, y_2$  ed  $x_2 - x_1$  quelli sopra riferiti, da

$$(17) \quad x' = - \frac{\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} h_2.$$

Questo valore di  $x'$ , essendo risultato indipendente dalle coordinate  $y_0, z_0$  del punto raggiante, ci prova, che, se la lente è investita da più pennelli luminosi, emanati da punti diversi, tutti gli assi di questi pennelli intersecano l'asse cen-

trale in uno stesso punto. Ad un tal punto si è quindi dato il nome di *centro ottico* della lente.

Volendo avere l'ascissa del centro ottico partendo da quello di figura della seconda superficie della lente, chiameremo  $x''$  quest'ascissa; ed osservando, che essa è data da  $x' - h_2$ , si troverà, colla sostituzione del precedente valore di  $x'$ , che si ha

$$(18) \quad x'' = -\frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2} h_2.$$

I valori delle coordinate  $x', y_1, x'', y_2$ , e dei due angoli  $X_0$  ed  $X_2$ , il primo dei quali può ottenersi dalla formola

$$\tan X_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1},$$

ed il secondo da quella segnata (14), sono sufficienti per farci conoscere l'andamento dell'asse del pennello luminoso, che parte da un punto radiante corrispondente alle coordinate  $x_0$  ed  $y_0$ , poichè offrono gli elementi necessari per formare le tre equazioni corrispondenti alle tre parti della linea spezzata, che compongono il detto asse. Queste tre equazioni, riferite al centro ottico della lente, prese per origine delle coordinate, sono come rilevasi facilmente, espresse dalle seguenti

$$(19) \quad \frac{y - y_1}{\sin X_0} = \frac{x + x'}{\cos X_0}, \quad \frac{y}{y_2 - y_1} = \frac{x}{x' - x''}, \quad \frac{y - y_2}{\sin X_2} = \frac{x + x''}{\cos X_2};$$

la prima delle quali appartiene alla porzione dell'asse del pennello incidente, la seconda alla porzione compresa fra le due superficie della lente, e la terza alla porzione dell'asse del pennello emergente. Le presenti tre equazioni, essendo dedotte dalle (11), col solo omettere delle quantità del sest'ordine di grandezza, affatto trascurabili, sussistono nello stesso grado di esattezza di queste, così che, se la lente fosse rigorosamente rappresentata ne' suoi effetti dalle (11), anche l'asse ottico lo sarebbe dalle precedenti (19).

Gli Ottici sostituiscono, per l'uso comune, una costruzione assai semplice, che è molto atta a fornirci, con una discreta approssimazione, tanto il corso dell'asse del pennello luminoso, quanto il luogo del fuoco conjugato del punto radiante, e la quale si può pure facilmente dedurre dalle nostre equazioni.

Le due formole (17) e (18) conducono primieramente alla proporzione

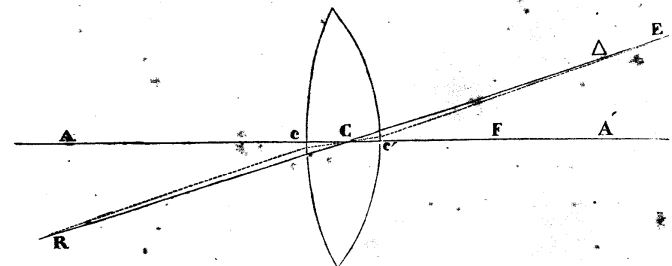
$$\varphi_2 : \varphi_1 :: x' : x''$$

ovvero, sostituendo nei poteri refrattivi delle superficie della lente i loro re-

spettivi valori segnati (9), alla seguente

$$\rho_1 : \rho_2 :: x' : -x'',$$

per cui, in virtù di questa e dell'equazione (15), ottengono le distanze rispettive del centro ottico C dalle due superficie della lente, tagliando la sua grossezza  $c' = h_2$ , nelle parti e C, e C c', direttamente proporzionali ai raggi di curvatura delle medesime.



Costruito per tal modo il centro ottico, ed osservato, che le porzioni dell'asse del pennello incidente ed emergente, prolungate nell'interno della lente, passano a delle distanze dallo stesso centro, che sono del terz'ordine di grandezza (\*), e trascurabili, suppongono che queste due porzioni s'incontrino in esso. Unendo quindi il punto radiante R al centro ottico per mezzo della retta RC, e prolungandola indefinitamente, prendono l'unica retta RE per l'asse totale del pennello luminoso, nel caso che la lente sia immersa in un solo fluido. Se poi i mezzi, in contatto da una parte e dall'altra delle due superficie della lente, fossero diversi, bisognerebbe, per avere la porzione dell'asse del pennello emergente, far partire, dal detto centro C, la retta CE in modo, che faccia coll'asse centrale C A' un angolo  $X_2$ , il cui seno sia dato dalla proporzione che somministra la formola (14). Supponendo in fine, che CF dinoti la distanza focale principale della lente, e tagliando sulla CE una porzione C Delta, data dalla

$$RC - CF : CF :: RC : C \Delta,$$

che deducesi dalla formola (7)"; il punto Delta sarà il fuoco conjugato del punto radiante R.

(\*) Chiamando  $d''$  e  $d'$  queste distanze, esse sono date dalle formole

$$d' = x' \sin X_0 - y_1 \cos X_0, \quad d'' = x'' \sin X_2 - y_2 \cos X_2.$$

5.

*Microscopio semplice.*

Le lenti, per le quali il valore di  $F$  è positivo, che, come abbiamo già notato, si distinguono per carattere geometrico, facile a dimostrarsi colla formola (6)<sup>m</sup>, d'essere più grosse nel mezzo che ai loro bordi, e per carattere fisico di far concorrere in un fuoco reale i raggi, che cadono paralleli su di essa, godono delle proprietà di poter servire a farci vedere gli oggetti amplificati.

Per dedurre dalle formole esposte la quantità, di cui ci parrebbero ingrandite le dimensioni lineari degli oggetti osservati colle dette lenti, fa duopo che premettiamo alcuni principii sulla visione.

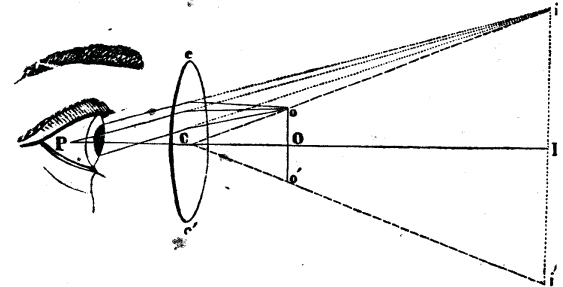
L'occhio è l'organo di un senso, che propriamente ci rende soltanto avvertiti della direzione in cui stanno i punti o fuochi, dai quali ci pervengono i pennelli dei raggi luminosi, e della maggiore o minore quantità, e divergenza, con cui i raggi di ciascun pennello penetrano per la pupilla. Col primo effetto siamo fatti consapevoli dell'angolo visuale, che sottende una dimensione lineare qualunque dell'oggetto, col secondo apprezziamo la sua chiarezza e distinzione. Associando, colla riflessione e coll'esercizio, a questi dati quelli, che ci porge il senso del tatto, impariamo a giudicare della grandezza delle dimensioni lineari degli oggetti, stimandole in ragion composta dell'ampiezza dell'angolo visuale che sottendono, e della distanza che attribuiamo all'oggetto. L'abitudine ci addestra così bene a questo giudizio, che in seguito lo formiamo, sugli oggetti posti in distanza, per intuizione, senza più riflettere sulla natura dei dati con cui lo pronunciamo.

Se si tratta d'oggetti poco discosti, la cui distanza ci sia conosciuta, o se abbiamo una prenozione di ciò che si guarda, il giudizio, che formiamo delle grandezze lineari osservate, è esatto. Se le distanze degli oggetti sono semplicemente arguite col senso, pel grado maggiore o minore di convergenza, con cui dirigiamo su di essi gli assi ottici de' nostri occhi, e pel effetto concomitante di contrazione, in cui alcune delle parti interne di questi organi soglionsi porre, per rendersi atte a concentrare sulla retina i pennelli più o meno divergenti dei raggi luminosi; o bene, se sono congetture dalla vista contemporanea di oggetti interposti, o dall'effetto della prospettiva aerea, la quale fa sì, che la chiarezza degli oggetti diminuisce col crescere delle loro distanze, allora il giudizio diviene incerto. Se poi le distanze degli oggetti escono dagli stretti limiti in cui è compresa la porzione di superficie terrestre soggetta alla nostra vista, il giudizio è per lo più erroneo, massime se si tratta di corpi luminosi. Il diametro del sole è giudicato di diverse lunghezze da diverse persone, ma sempre nei

limiti di pochi decimetri, eppure in realtà ascende a circa 1431 milioni di metri.

Posti questi principii, possiamo facilmente calcolare le grandezze lineari, che diamo agli oggetti veduti, per mezzo delle loro immagini, attraversate ad una lente, di cui la distanza focale principale positiva sia conosciuta. Per fissare le idee, supponiamo che la lente sia tenuta davanti la pagina di un libro, o davanti ad un piccolo oggetto posto sopra una tavola, o retto coll'altra mano. Acciò in queste circostanze succeda l'effetto dell'ingrandimento, e si veda l'immagine diritta, bisogna, giusta la formola (7)<sup>m</sup>, che il valore di  $\Delta$  sia negativo e maggiore di  $\Delta_0$ . A queste due condizioni soddisfanno, come già abbiamo osservato, tutti i valori di  $\Delta$ , compresi fra  $o$  ed  $F_1$ .

Sia nella figura annessa rappresentata con  $oo'$  la dimensione lineare dell'oggetto, incontrata nel punto  $O$  dall'asse centrale  $OC$  della lente  $cC'$ ,



e consideriamo il punto raggiante, che trovasi nell'estremità  $o$ : quello, che diremo di questo punto, sarà egualmente applicabile anche al punto  $o'$  all'altra estremità della linea  $oo'$ . Alla distanza  $CI$ , presa dal centro ottico  $C$  della lente, e conjugata a quella  $CO$  dell'oggetto, conduciamo la perpendicolare  $iI$  all'asse centrale, e dal detto centro la retta  $Co i$ , che incontri la delineata perpendicolare nel punto  $i$ ; questo punto sarà, giusta le formole (8)<sup>m</sup>, il fuoco conjugato del punto luminoso  $o$ , poichè abbiamo per costruzione

$$Ii = \frac{IC}{OC} \cdot oo',$$

e le rette  $Ii$ ,  $IC$ ,  $OC$  ed  $Oo$  rappresentano rispettivamente le quantità  $y$ ,  $-\Delta$ ,  $\Delta_0$  ed  $y_0$  nella citata formola.

Da questa costruzione rilevasi pertanto, che i raggi luminosi, i quali, par-



titi dal punto  $o$ , indi rifratti dalla lente, formano un pennello di luce, il cui asse passa pel punto  $P$ , ove trovasi il centro ottico del cristallino, o centro ottico dell'occhio (\*), e si concentrano poi sulla retina, sono quelli, che si propagano in direzioni tali, che, se venissero prolungati per indietro dopo essere usciti dalla lente, andrebbero a riunirsi nel fuoco virtuale  $i$ , e quindi, che l'occhio percepirà il punto  $o$  nella direzione in cui lo vedrebbe, se i suoi raggi procedessero dal detto fuoco.

La tangente dell'angolo  $IPi$ , compreso fra l'asse centrale e la visuale  $Pi$ , sarà data da

$$\tan IPi = \frac{Ii}{IP},$$

ovvero, sostituendo i valori precedentemente citati di  $Ii$  ed  $IP$ , ed impiegando il valore dell'angolo, espresso in parti del raggio, per quello della sua tangente, ciò che può farsi per la sua piccolezza, da

$$IPi = -\frac{\Delta}{\Delta_0} \frac{y_0}{d-\Delta};$$

dove abbiamo messo  $-\Delta + d$  in luogo di  $IP$ , perchè si ha  $CI = -\Delta$ ,  $CP = d$ , dinotando con  $d$  la distanza del centro ottico dell'occhio dalla lente, ed è  $IP = CP + CI$ .

Lo stesso discorso, ripetuto rispetto al punto  $o'$ , ci condurrà all'equazione simile

$$IPi' = \frac{\Delta}{\Delta_0} \frac{y_0'}{d-\Delta},$$

essendo  $Ii' = \frac{y_0'}{d-\Delta}$ .

La somma di questi due angoli ci darà l'angolo visuale sotteso dall'oggetto, la cui lunghezza  $oo' = y_0 - y_0'$  indicheremo con  $\lambda$ , e si avrà pel valore dell'angolo visuale l'espressione

$$iPi' = -\frac{\Delta}{\Delta_0} \frac{\lambda}{d-\Delta}.$$

(\*) L'asse d'un pennello di luce, che investe la cornea, è segnato dal raggio, che la traversa irrefratto, e quindi da quello, che vi cade perpendicolarmente, e va a passare pel centro della superficie, supposta sferica, di cui la cornea è una zona. È notevole che, nella costruzione dell'occhio umano, questo centro coincide, o sia molto prossimo al centro ottico del cristallino, per cui lo stesso raggio segna pure l'asse del pennello nell'interno del cristallino, ed arriva precisamente, o quasi, in linea retta sulla retina; per questo motivo abbiamo qualificato il centro ottico del cristallino come centro ottico dell'occhio. Dalla superficie esteriore della cornea al centro ottico del cristallino vi sono poco più di 7<sup>m</sup>, e da questo alla retina circa 17<sup>m</sup>, che costituiscono presso a poco la lunghezza focale dell'occhio umano.

Ora possiamo notare che, l'osservatore avendo l'intimo sentimento, che le lettere o l'oggetto guardato, stanno sulla pagina del libro o sulla tavola, ed i bordi, sporgenti dell'una o dell'altra di queste superficie, tenendolo costantemente avvertito a qual distanza esse stanno dal suo occhio, il medesimo riterrà tuttavia l'immagine nel luogo dell'oggetto, alla distanza  $PO = d + \Delta_0$ , e quindi, giusta il premesso principio, con cui sono stimate le dimensioni lineari, giudicherà la grandezza reale dell'oggetto espressa da

$$(20) \quad l = -\frac{\Delta}{\Delta_0} \frac{d+\Delta_0}{d-\Delta} \lambda.$$

Acciò la pupilla dell'osservatore riceva il pennello dei raggi luminosi, emanati dal punto  $o$ , colla divergenza convenevole per ben percepirne l'immagine, bisogna che la distanza  $PI = -\Delta + d$  sia quella, che corrisponde alla sua visione distinta, quella cioè, a cui il medesimo vede gli oggetti di piccola grandezza ben definiti. Chiamando  $D$  questa distanza, che è differente per differenti osservatori (\*), si dovrà avere

$$(21) \quad d - \Delta = D$$

(\*) La distanza per la visione distinta non solo è diversa per diversi osservatori, ma è variabile per lo stesso osservatore secondo il grado di contrazione o distensione dell'uvea, e quindi secondo il grado di luce che domina, come pure lo può essere da un giorno all'altro secondo lo stato degli umori del suo occhio.

Il Dott. Porterfield nella sua opera *On the eye* vol. 2, an. 1759, ed il Dott. Young, Lezione xxxviii, hanno proposto ciascuno uno strumento, simile nel principio, per determinare la detta distanza, al quale hanno dato il nome di *Optometro*. Un altro strumento, diretto allo stesso scopo, si trova descritto negli *Annales des sciences d'observation*, Juin 1829, dal sig. Lehot, sotto il nome di *Opsiometro*. In mancanza di uno di questi strumenti, si può determinare con sufficiente precisione tale distanza, facendo con uno spillo due piccoli fori in un cartoncino, per esempio in una carta da visita, ad una distanza reciproca minore del diametro della pupilla, come sarebbe quella di un millimetro e mezzo, e poi guardando attraverso di essi lo spillo medesimo, o qualche altro corpo sottile e oblungo, perpendicolare alla linea che congiunge i due fori, e che luca su di un campo oscuro a piccola distanza dalla parte opposta. In questo modo si vedranno due piccoli dischi luminosi, che si sovrapporranno in parte, e nella parte comune si scorderanno due immagini dello spillo o dell'oggetto, ed allontanandosi per gradi dal corpo osservato, si noterà, che le due immagini andranno avvicinandosi fra loro. Quando si sia pervenuti ad una distanza alla quale esse si compenetreranno, la medesima sarà quella della visione distinta. L'osservatore, che è dotato di un occhio ben conformato, o che è semplicemente di vista lunga, continuerà a vedere le immagini compenstrate, ancorchè passi a distanze maggiori, soltanto, a più grandi distanze, esse cominceranno a divenire indistinte, e poi spariranno per la successiva diminuzione degli angoli visuali sottesi dall'oggetto. Se poi l'osservatore è di vista corta, tornerà ad incontrare un'altra distanza, alla quale cominceranno a comparire due immagini dell'oggetto, e questa distanza gli darà il suo secondo limite di visione distinta, ma vi sarà questa differenza nelle osservazioni ai due limiti, che, nella prima, l'immagine a diritta corrisponderà alla luce che passa pel foro a sinistra, e l'immagine alla sinistra a quella che passa pel



e quindi, eliminando dalla precedente equazione  $d$  con questa, e  $\Delta$  con quella segnata (24), si otterrà

$$(22) \quad l = \left\{ 1 - \frac{\Delta_0}{D} \frac{\Delta_0}{F - \Delta_0} \right\} \frac{F \lambda}{F - \Delta_0},$$

dalla qual formola si vede, che la grandezza apparente  $l$  delle dimensioni lineari degli oggetti è variabile colla distanza di essi dalla lente.

Questa formola è suscettibile di un massimo, rispetto a  $\Delta_0$ , e si può di-

foro alla dritta, e nella seconda osservazione le due immagini corrisponderanno rispettivamente alla luce passante poi fori dello stesso lato, lo che si potrà verificare con facilità, coprendo alternativamente l'uno o l'altro dei due fori.

Per comprendere come ciò avvenga, noteremo primieramente, che si può rendere la visione di un piccolo oggetto sensibilmente chiara e definita, ancorchè esso si trovi ad una distanza minore o maggiore di quella della visione distinta, guardando il piccolo oggetto per un tenuissimo foro. Se si guarda uno spillo a pochi pollici di distanza, e si trova, che la visione è confusa, basta guardarlo attraverso ad un piccolo foro praticato in un cartoncino, che si vedrà distintamente. Ciò dipende da che, i pennelli lucidi, che partono dai diversi punti dell'oggetto, essendo ridotti molto sottili, per la piccolezza del foro, che ammette il loro passaggio, ancorchè cadano sulla retina un po' dispersi, sono tuttavia sufficientemente raccolti per produrre sulla medesima delle immagini non troppo diffuse, ed atte a produrre ancora una percezione apprezzabile e definita dei punti da cui sono partiti.

Ciò posto immaginiamo un osservatore, che diriga l'asse ottico d'un suo occhio ad un punto dello spillo, e consideriamo i due pennelli lucidi, che partono da esso, ed attraversando rispettivamente i due fori praticati nel cartoncino, investono due piccole porzioni della sua pupilla. Se l'oggetto fosse alla distanza della visione distinta, i due pennelli andrebbero ad incontrarsi sulla retina nello stesso punto in cui essa è incontrata dall'asse ottico dell'occhio: se l'oggetto è ad una distanza minore, i due pennelli avrebbero i loro fuochi conjugati al di là della retina, e quindi il pennello a destra dell'asse ottico la incontrerebbe in un luogo a destra dello stesso asse, e quello a sinistra in un luogo a sinistra: se poi l'oggetto è ad una distanza maggiore, i fuochi conjugati dei due pennelli si formerebbero avanti ch'essi arrivino sulla retina, e s'incrocicchierebbero nell'interno sull'asse ottico, quello proveniente dal foro a destra incontrerà la retina in un luogo a sinistra di quest'asse, ed il proveniente dal foro a sinistra la incontrerà in un luogo a destra. In tutti e tre i casi però, la poca espansione dei pennelli farà sì, che i medesimi desteranno sulla retina, come abbiamo precedentemente notato, l'immagine di un punto; ma nel primo caso le due immagini saranno compenstrate, e l'osservatore non avrà che la percezione di un solo punto, e negli altri due casi, le immagini essendo separate, scorderà due punti, uno per ciascun lato dell'asse ottico dell'occhio. Siccome noi riferiamo le immagini, che sono dipinte sulla retina a destra del detto asse, a punti radianti situati nello spazio alla sinistra di esso, e viceversa, quelle, che sono dipinte sulla retina alla sinistra, a punti radianti situati alla destra; così, nel secondo caso, la situazione dello spillo, veduto coi pennelli luminosi che passano pel foro a destra, sarà alla sinistra di quella rappresentata dai pennelli luminosi passanti pel foro a sinistra: per lo contrario, nel terzo caso, le due immagini avendo le loro posizioni invertite sulla retina, anche la situazione dello spillo, veduto coi raggi che attraversano il foro a destra, starà a destra di quella in cui esso è scorto coi raggi passanti pel foro a sinistra.

mandare a quale distanza deve porsi la lente dell'oggetto, acciò l'amplificazione lineare risulti la massima. Cercando questo valore colle note regole si trova

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{F} + \frac{2}{D},$$

e, sostituendolo nelle formole (7) e (21), dalle medesime si ricava

$$(23) \quad \Delta = -\frac{1}{2} D, \quad d = \frac{1}{2} D:$$

d'onde conchiuderemo, che, per ottenere l'effetto del massimo ingrandimento combinato colla massima distinzione della visione, la lente deve essere situata alla distanza

$$(24) \quad \Delta_0 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{D}{2F} \right) D$$

dall'oggetto, e l'occhio deve stare al di là della lente alla metà della distanza della visione distinta.

In questo caso l'ingrandimento massimo lineare sarà dato da

$$(25) \quad \frac{l}{\lambda} = 1 + \frac{D}{4F}.$$

Una lente, impiegata a produrre un'ingrandimento delle dimensioni lineari apparenti degli oggetti vicini, dicesi un *microscopio semplice*, ed i risultati precedenti ci mostrano come quest'istromento può impiegarsi col massimo vantaggio, ciò, che, per quanto io sappia, non era ancora stato indicato colla dovuta precisione.

Le formole precedenti sono vevolevoli nel caso, che l'osservatore sia conscio della distanza a cui sta l'oggetto, che vede attraverso la lente, e che conservi durante l'osservazione questo sentimento. Se la distanza dell'oggetto, distintamente veduto, gli è sconosciuta, il medesimo ha naturalmente una tendenza a risguardarlo per lo meno alla distanza della visione distinta. In questo caso si dovrà sostituire nella formola (20)  $D$  a  $d + \Delta_0$ , e l'ingrandimento lineare non potrà essere minore di quello dato dall'espressione

$$(26) \quad \frac{l}{\lambda} = \frac{\Delta}{\Delta_0}.$$

Se l'oggetto, che si guarda attraverso la lente, è un dipinto, la cui distanza ci sia occulta, e se gli effetti di prospettiva geometrica ed aerea sono stati bene con-

servati, protraendo l'osservazione un po' a lungo, talchè l'occhio si adatti alla percezione di quegli effetti, ed il sentimento della distanza, a cui poteva sospettarsi il dipinto, sia come delegato, si giunge perfino ad immaginare, che gli oggetti, che si vedono rappresentati, siano della grandezza naturale. Questo è ciò che avviene particolarmente cogli stereoscopi, nei quali l'effetto, dei ritratti fotografici, che è già notevole per la loro grande esattezza, viene di più aiutato dall'impiego di due di essi, nei quali è tenuto conto della piccola variazione di prospettiva geometrica, proveniente dalla distanza fra i due occhi.

## 4.

## Occhiali.

L'uso più comune e più utile, che si fa delle lenti semplici, è quello di sussidiare la visione delle persone, che, per vedere bene gli oggetti, abbisognano di allontanarli od avvicinarli più di quello, che sarebbe comodo o possibile di tenerli. Le persone, che sono nel primo caso, son dette presbite, o di vista lunga, quelle nel secondo miopi, o di vista corta.

È noto dalla Fisiologia, che le parti trasparenti dei nostri occhi, come l'umor acqueo, il cristallino e l'umor vitreo, cogli integumenti che li racchiudono, costituiscono un sistema diottrico, che fa le funzioni di una lente convergente rappresentante sulla retina, distesa sulla coroide nel fondo interno dell'occhio, e sede della percezione, le immagini degli oggetti che ci stanno davanti. Quando un'osservatore, i cui occhi son ben conformati, guarda naturalmente nello spazio, avendo gli assi ottici presso che paralleli, le immagini degli oggetti lontani cascano sulle sue retine, il che vuol dire, che la distanza focale principale nei due sistemi diottrici, costituenti i suoi occhi, arriva giusto sino ad esse. Se il medesimo osservatore avesse poi a rivolgere lo sguardo ad un oggetto piccolo, soltanto visibile a poca distanza, tenendo gli occhi nello stato di prima, proverebbe il disagio d'una visione confusa, perchè i fuochi conjugati dei pennelli luminosi, partiti dai varii punti di esso, formandosi a maggiore distanza, la sua immagine risulterebbe situata al di là della retina in ciascun occhio, ed imperfettamente percettibile dal senso. La natura ha provveduto a quest'inconveniente, dotando gli occhi della facoltà di poter variare le loro distanze focali principali. Tosto che, nel guardare un oggetto vicino, facciamo concorrere su di esso i due assi ottici, per una certa connessione d'azione, che opera indipendentemente dal concorso della nostra volontà, gli occhi accorciano la loro distanza focale principale, in rapporto all'angolo fatto dagli assi medesimi, e la aggiustano alla lunghezza necessaria per portare sulle retine le immagini del-

l'oggetto (\*). Tale facoltà si estende, per degli occhi ben conformati, dalla visione di oggetti situati alla distanza di 27 centimetri, che è il limite corrispondente della visione distinta, sino a quella d'oggetti posti ad una distanza presso che infinita (\*\*).

Se invece di considerare un osservatore con occhi ben conformati, ne supponiamo uno, che, per deficienza nei poteri rifrattivi delle superficie limitanti i mezzi rifrangenti de' suoi occhi, non riesca a ridurre sulle retine le immagini d'oggetti posti alla distanza di 27 centimetri, o ciò che torna allo stesso, non possa ridurre il limite della sua visione distinta a questa distanza, è chiaro che esso si troverà costretto d'allontanare gli oggetti sino al proprio limite, per poterli vedere con distinzione. Per lo contrario se l'osservatore, per esuberanza dei poteri refrattivi delle dette superficie, non può allungare la distanza focale de' suoi occhi, sino a divenire la conjugata di quella d'oggetti posti alla distanza di 27 centimetri, a tanto non estendendosi il secondo limite della sua visione distinta, il medesimo sarebbe obbligato, per vederli chiaramente, d'approssimarli di più, lo che può divenire incomodo, e spesso impraticabile rispetto ad oggetti molto lontani. Le lenti semplici offrono a questi osservatori il mezzo d'esimersi da tali trasporti, e d'ottenere non di meno una visione distinta, per la proprietà, che hanno, di rendere i raggi dei pennelli luminosi, emanati dai varii punti degli oggetti, più o meno divergenti, come se partissero da luoghi più vicini o più lontani; e, quando le medesime sono destinate a quest'ufficio, prendono il nome di occhiali.

Abbiamo visto infatti che le lenti convergenti, poste avanti gli oggetti ad una distanza minore della loro distanza focale principale, producono l'effetto

(\*) Che l'occhio abbia la facoltà di cambiare la sua distanza focale, adattandola alla visione distinta d'oggetti posti a differenti distanze, è una verità, che pare incontrastabilmente provata dagli esperimenti, descritti alle pag. 411—415 del 1.º volume della citata opera del Dott. Porterfield; i quali sono stati concepiti sul modello di quello fondamentale, riferito dal Dott. Motte in una raccolta intitolata *Versuche und Abhandlungen der Gesellschaft in Danzig*. 5 volumi, Danzica an. 1747, che è quello stesso, di cui abbiamo esposto i principii nella nota all'articolo precedente. Per quali mezzi poi l'occhio ottenga il detto adattamento non è ancor ben determinato. Il cangiamento di convessità della cornea, quello del cristallino, il trasporto di questo per avanti, la contrazione della pupilla, sono tanti mezzi, che furono messi in campo, come cause, per ottenere il detto effetto. Probabilmente tutte vi hanno qualche parte, ed è sperabile, che le nuove scoperte dei sigg. Brücke e Bauman sull'esistenza del muscolo ciliare, o tendine della coroide, confermate ed estese dai sigg. Müller e Rouget, saranno illustrate da altre, e si arriverà presto a mettere in chiaro il meccanismo, di cui il portentoso organo della vista si vale, per conformarsi a dare una sensazione distinta degli oggetti veduti a diverse distanze.

(\*\*) Si noterà, che i nostri occhi, per conseguire gli aggiustamenti della loro distanza focale corrispondenti a questi due lontanissimi estremi di posizione degli oggetti, non hanno bisogno d'accorciarla, che d'un millimetro e mezzo.

di far arrivare agli occhii i pennelli dei raggi luminosi, emanati da ciascuno dei punti dell'oggetto, colla divergenza, che avrebbero se provenissero da un punto più lontano, e le divergenti quello di farli pervenire colla divergenza, che loro competerebbe se provenissero da punti più vicini. Per assegnare la forma delle lenti confacente alla visione distinta d'un dato osservatore, riteniamo le denominazioni degli articoli precedenti, e dinotiamo di più con  $h$  la distanza dell'oggetto dal centro ottico dell'occhio, così che sia

$$(27) \quad h = \Delta_0 + d ;$$

sostituendo nella (7)<sup>a</sup> per  $\Delta_0$  e  $\Delta$  i valori, che si ricavano da questa e da quella segnata (21), avremo

$$(28) \quad -\frac{1}{D-d} + \frac{1}{h-d} = \frac{1}{F} ;$$

dalla quale equazione apparisce che, dati  $D$ ,  $h$  e  $d$ , si può calcolare la distanza focale principale  $F$  di una lente, acciò i pennelli luminosi, partiti dalla distanza  $h$ , arrivino agli occhii dell'osservatore come se partissero dalla distanza  $D$  alla quale il medesimo vede gli oggetti distintamente.

La distanza  $h$ , a cui torna comodo di tenere gli oggetti piccoli, come, per esempio, i caratteri ordinarii d'un libro, è appunto quella che compete al limite della visione distinta d'un occhio regolare, o di 27 centimetri. Nell'atto pratico gli occhiali soglionsi applicare assai vicini agli occhii, lo che è bene di fare, ma come non possono, senz'incomodo, tenersi in contatto con essi, e d'altronde la distanza  $d$  deve essere presa dal centro ottico dell'occhio, la medesima non sarà mai nulla; prenderemo per valor medio di essa quella di 25 millimetri. La distanza  $D$  della visione distinta varia colla persona alla quale gli occhiali sono destinati, e deve essere ottenuta coll'esperimento, che abbiamo indicato nella nota dell'articolo precedente, od, ancor meglio, con un optometro. Ponendo, nella premessa equazione (28), per  $h$  e  $d$  i corrispondenti valori, e ricavando da essa quello della lunghezza focale  $F$  della lente, la medesima sarà data in millimetri dalla formola

$$F = 245 \frac{D-25}{D-270} ,$$

colla quale si potrà calcolare, per ogni osservatore, di cui la distanza  $D$  della visione distinta sia conosciuta, la forza delle lenti, cioè la lunghezza focale delle medesime più conveniente alla sua vista.

Varii Autori soggiungono la riflessione, che gli occhiali convergenti aumentano, ed i divergenti diminuiscono le dimensioni lineari apparenti degli oggetti,

e danno la formola

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{D}{h} ,$$

per calcolare quest'effetto. Ma ciò è contrario al fatto: l'accrescimento o decremento delle dimensioni lineari apparenti varia colla distanza dell'occhio della lente, ed è minore di quello che somministra questa formola. Quando, per difetto di vista regolare, si fa uso d'occhiali, come, per esempio, quando leggiamo con essi, non ci vien fatto di spogliarci della prevenzione, che i caratteri sono sulla pagina del libro che teniamo davanti, e bisogna ricorrere alla formola (20), da noi proposta nell'articolo precedente, per calcolare l'effetto in discorso. Eliminando da essa  $\Delta$  e  $\Delta_0$ , colle (21) e (27), ed impiegando i valori numerici su riferiti, quella formola ci dà, per esprimere la ragione della grandezza delle dimensioni lineari apparenti alle vere, la seguente

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{270}{245} \left(1 - \frac{25}{D}\right) .$$

Una persona presbita, che distinguesse bene i caratteri ordinarii di stampa alla distanza di un metro, vedrebbe, secondo questa formola, le loro dimensioni lineari ingrandite di circa  $\frac{1}{13}$ . Quest'accrescimento sarebbe più grande, se la distanza delle lenti dagli occhii fosse maggiore di quella supposta di 25 millimetri.

## 6.

*Riduzioni di cui sono suscettibili le funzioni  $P_\mu$  nel caso che si trascurino le grossezze delle lenti.*

Avanti d'accingerci ad applicare le formole generali a dei sistemi ottici, formati da lenti, le grossezze delle quali possono frequentemente considerarsi come piccole di second'ordine e trascurabili, giova che premettiam un'osservazione, che ci mostra come, in questi casi, si effettui una riduzione notevole di termini nella formazione delle funzioni  $P_\mu$ .

Siavi, nella composizione d'un sistema ottico, una lente, limitata da due superficie, che supporremo corrispondenti agli indici  $\lambda$ , e  $\lambda + 1$ , i centri delle quali distino della quantità  $h_{\lambda+1}$ . Se questa distanza è trascurabile, l'elemento,  $p_{2\lambda}$ , che, giusta le (4) del Capitolo III, Parte I, ci vien dato per mezzo della formola

$$p_{2\lambda} = v_\lambda h_{\lambda+1} \beta_{\lambda+1} ,$$

sarà nullo. Ora, l'espressione di  $P_\mu$  risultando, secondo la legge esposta all'ar-

ticolo 1 del Capitolo IV, Parte I, dal sopprimere nel primo termine

$$(I) \quad p_i p_{i+1} \cdots p_{2\lambda-2} p_{2\lambda-1} p_{2\lambda} p_{2\lambda+1} p_{2\lambda+2} \cdots p_{\mu-1} p_{\mu},$$

ed in quelli che da esso derivano, l'una per volta, ciascuna coppia dei fattori  $p$ , i cui indici corrispondano a due termini successivi nella serie de' numeri naturali, e col sostituirvi in sua vece l'unità, è chiaro, che quei termini, nei quali rimarranno ancora sussistenti l'una o l'altra delle due coppie  $p_{2\lambda-1} p_{2\lambda}$ , o  $p_{2\lambda} p_{2\lambda+1}$ , saranno superflui, come contenenti il fattore  $p_{2\lambda}$  che li annulla. Vo-

lendo escludere direttamente tali termini nella formazione della funzione  $P_{\mu}$  basterà, come è facile di riconoscerne l'esattezza, impiegare per il primo termine della medesima il prodotto

$$(II) \quad p_i p_{i+1} \cdots p_{2\lambda-2} (p_{2\lambda-1} + p_{2\lambda+1}) p_{2\lambda+2} \cdots p_{\mu-1} p_{\mu},$$

e dedurre i termini seguenti, colla legge sopra citata, considerando la somma  $p_{2\lambda-1} + p_{2\lambda+1}$  come il fattore intermedio fra i due  $p_{2\lambda-2}$  e  $p_{2\lambda+2}$ .

Si osserverà, che, se l'elemento  $p_{2\lambda}$  corrispondesse al primo od ultimo fattore del prodotto (I), quello segnato (II) comincerebbe col fattore  $p_{2\lambda+2}$ , o terminerebbe col fattore  $p_{2\lambda-2}$ , o con qualche altro fattore d'indice pari  $> 2\lambda + 2$  nel primo caso, e  $< 2\lambda - 2$  nel secondo; e che, quando nella (I) non esistesse altra coppia di fattori, il prodotto (II) si ridurrebbe all'unità.

Il primo termine (I) contenendo due fattori di più di quello segnato (II), si vede, che la sostituzione di questo al precedente fa abbassare di due unità l'ordine della funzione  $P_{\mu}$ , rendendone più semplice l'espressione.

Se, nella serie degli elementi  $p$ , se ne trovasse un'altro  $p_{2\nu}$ , che corrispondesse parimenti ad una lente, in cui la distanza  $h_{\nu+1}$  compresa fra i due centri di figura delle sue superficie fosse trascurabile, si proverebbe, col ragionamento precedente, che, per ottenere la funzione  $P_{\mu}$  ridotta ai soli termini

non trascurabili, bisognerebbe sopprimere nell'espressione del primo termine (II) il prodotto  $p_{2\nu-1} p_{2\nu} p_{2\nu+1}$ , e sostituirvi la somma  $p_{2\nu-1} + p_{2\nu+1}$ ; e così, per quante lenti sottili fossero comprese nel sistema ottico che si considera.

Quando il sistema fosse formato di sole lenti di poca grossezza, separate fra loro da certe distanze, le sostituzioni suddette ridurrebbero alla metà il numero de' fattori componenti il primo termine della funzione  $P_{\lambda}$ , e quindi anche l'ordine di questa funzione, ciò che arrecherebbe una semplificazione notevole, stante il gran numero di termini, di cui constano le funzioni  $P$  d'un ordine superiore.

Noteremo in fine che, generalizzando le formole date nell'articolo 2, si ha

$$v_{\nu+1} (p_{2\nu-1} + p_{2\nu+1}) = - \frac{v_{\nu+1}}{v_{\nu}} (\varphi_{\nu} - \varphi_{\nu+1}) = - \frac{1}{f_{\nu+1}},$$

essendo

$$\varphi_{\nu} = - \frac{1}{\rho_{\nu}} \left( 1 - \frac{v_{\nu}}{v_{\nu-1}} \right), \quad \varphi_{\nu+1} = - \frac{1}{\rho_{\nu+1}} \left( 1 - \frac{v_{\nu}}{v_{\nu+1}} \right);$$

d'onde si vede, che  $-v_{\nu+1} (p_{2\nu-1} + p_{2\nu+1})$  rappresenta il prodotto della somma dei due poteri refrattivi della lente pel rapporto delle velocità di propagazione della luce, passando dal secondo mezzo in essa, ossia equivale al valore inverso della lunghezza focale della lente, la cui grossezza trascurabile è  $h_{\nu+1}$ .

7.

$$n = 4$$

*Telescopii di Galileo e di Kepler.*

Premesse queste norme per la riduzione delle funzioni  $P_{\mu}$ , che sono generali per qualunque sistema ottico, applichiamo a quelle, che servono, alla composizione delle funzioni  $P$ , nella teoria dei telescopii di Galileo e Kepler.

Il cannocchiale detto di Galileo, del quale si è fatto fin ora, quasi esclusivamente, uso nei teatri, è composto di una prima lente obbiettiva convesso-concava, e di una lente oculare concavo-concava. Il cannocchiale di Kepler conserva per l'obbiettivo una lente simile a quella del precedente, ma sostituisce all'oculare una lente convesso-concava.

Questi due telescopii essendo quindi composti, ciascuno di quattro superficie rifrangenti, a due a due assai prossime, o di due lenti immerse in uno stesso mezzo ad una certa distanza fra loro, avremo per amendue, ponendo al solito eguale all'unità la velocità di propagazione della luce nell'ambiente,

$$p_1 + p_3 = - \frac{1}{f_1}, \quad p_5 + p_7 = - \frac{1}{f_2},$$

$$p_2 = h_2 = 0, \quad p_4 = h_5, \quad p_6 = h_4 = 0;$$

e quindi attendendo alle riduzioni su accennate

$$P_7 = (p_1 + p_3) p_4 (p_5 + p_7) + p_1 + p_3 + p_5 + p_7 = - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{h_5}{f_1 f_2},$$

$$P_6 = (p_1 + p_3) p_4 + 1 = 1 - \frac{h_5}{f_1},$$

$$P_7 = p_4 (p_5 + p_7) + 1 = 1 - \frac{h_5}{f_2}, \quad P_6 = p_4 = h_5.$$

La condizione, data all'articolo 1 del Capitolo I, che il sistema delle lenti formi un istromento ottico, preparato per la visione distinta, esige che si abbia

$$Q_7 = P_7 + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_7^{(6)} = 0 .$$

L'uso dei telescopii essendo, come lo indica il suo nome (\*), quello di farci vedere distinti ed ingranditi gli oggetti posti a grandissime distanze, potremo trascurare il termine diviso per  $v_0 \Delta_0$ , ed impiegando il dato valore di  $P_7^{(4)}$ , esprimere più semplicemente la detta condizione, coll'equazione

$$-\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{h_3}{f_1 f_2} = 0$$

dalla quale si deduce

$$(29) \quad h_3 = f_1 + f_2 .$$

Se si nota, che  $f_1$  è la distanza, dal centro ottico dell'obbiettivo, del piano focale principale, in cui si forma l'immagine dell'oggetto, e che  $f_2$  è parimente la distanza, dal centro ottico dell'oculare, del suo piano focale principale, si riconosce che la condizione espressa dall'equazione precedente esige, che l'oculare sia collocato in modo, che il suo piano focale principale coincida con quello dell'immagine dell'oggetto formata dall'obbiettivo.

Nel telescopio Galileano, la prima lente essendo convergente, e la seconda divergente, si avranno, articolo 2, pei segni delle due lunghezze focali

$$f_1 = + , \quad f_2 = - ,$$

e la distanza, a cui dovranno stare queste due lenti per la visione distinta, sarà data da

$$h_3 = f_1 - f_2 ,$$

cioè sarà la differenza delle due lunghezze focali, prendendo il valore assoluto di esse senza riguardo al segno.

Nel telescopio di Kepler le due lenti essendo amendue convergenti, la distanza, a cui dovranno stare l'una dall'altra, sarà la somma delle dette lunghezze, come lo indica la formola (29).

Vediamo quali saranno gli effetti rispettivi di questi due stromenti. L'amplificazione essendo data dalla formola (12) senza aver riguardo al segno, sarà

(\*) Deriva da  $\tau\eta\lambda\varsigma$  lungi, e  $\epsilon\kappa\omicron\mu\omicron\nu$  vedere.

per amendue espressa da

$$\frac{X_1}{O} = 1 - \frac{h_3}{f_2} ,$$

ovvero, sostituendo per  $h_3$  il suo valore, da

$$(30) \quad \frac{X_1}{O} = \frac{f_1}{f_2} ,$$

che ci mostra essere l'amplificazione nella ragione della lunghezza focale dell'obbiettivo a quella dell'oculare.

La funzione  $P_7^{(6)}$  riducendosi per mezzo della (29) a

$$P_7^{(6)} = - \frac{f_1}{f_2} ,$$

il valore della medesima sarà positivo pel cannocchiale di Galileo, pel quale  $f_2$  è negativo, e le immagini saranno viste in esso diritte, giusta quanto fu detto nell'articolo 5 del Capitolo I; viceversa  $f_2$  essendo positivo nel cannocchiale di Kepler, le immagini presentate da questo stromento saranno capo-volte.

Le combinazioni di due lenti, che abbiamo esaminate, sono le sole, le quali possono somministrare un telescopio atto ad amplificare le immagini degli oggetti. Infatti l'equazione (30) ci mostra, che l'amplificazione si effettua quando  $f_1 > f_2$ , e, come il valore di  $h_3$  non può essere che positivo, dalla (29) ci vien fatto manifesto, che  $f_1$  deve parimente essere positivo: quindi non vi sono altri casi a considerare, che quelli di  $f_2$  positivo o negativo, come abbiamo fatto.

La distanza  $\delta$ , a cui si formerà l'immagine dell'obbiettivo, o cerchio anulare del sig. Biot, data dalla (20) dell'articolo 8 del Capitolo I, risulta, colla sostituzione dei precedenti valori di  $P_6^{(6)}$  e  $P_7^{(6)}$ , espressa da

$$\delta = h_3 \frac{f_2}{f_1} ,$$

ed ha per conseguente un valor negativo nel caso del cannocchiale di Galileo, in cui  $f_2$  è negativo, ed un valor positivo in quello del cannocchiale di Kepler.

Nel primo caso determineremo dunque, secondo l'esposto all'articolo 11 del Capitolo I, la grandezza del campo colla formola (31), ed avremo

$$2O = 2 \frac{c-p}{h_3} R'' .$$



Quindi, osservando che dalla (15) del Capitolo I e dalla precedente (30) si ricava

$$c = \frac{f_2}{f_1} a ,$$

senza riguardo al segno di  $f_2$ , conseguiremo

$$(31) \quad 2O = \frac{2}{h_2} \left( \frac{f_2}{f_1} a - p \right) R'' .$$

Da questa formola si vede essere la grandezza del campo, che gode della chiarezza completa, dipendente anche dall'apertura dell'obbiettivo, contro l'opinione d'Euler, seguita dalla maggior parte degli Autori d'Ottica, che la fanno soltanto dipendere dall'apertura della pupilla (\*). Supponiamo che l'apertura dell'obbiettivo sia di 48 millimetri, quella della pupilla di 5, che la lunghezza focale dell'obbiettivo eguagli 16 centimetri, e quella dell'oculare 4, che sono all'incirca le dimensioni usate nella costruzione dei cannocchiali da teatro. Impiegando questi valori avremo

$$2a = 48^{\text{mm}} , \quad 2p = 5^{\text{mm}} , \quad f_1 = 160^{\text{mm}} , \quad f_2 = -40^{\text{mm}} ,$$

e quindi dalla (29)

$$h_2 = 120^{\text{mm}} ,$$

e colle (30) e (31) si troverà

$$\text{Ampl.} = \frac{f_1}{f_2} = 4 ,$$

$$\text{Camp.} = \frac{1}{120} \left( \frac{48}{4} - 5 \right) R'' = \frac{7}{120} R'' = 0,05833 R'' = 3,020' \frac{1}{2} .$$

La formola (31) vale pel cannocchiale di Galileo, pel quale il massimo campo si ottiene applicando l'occhio aderente all'oculare. Nel caso del cannoc-

(\*) Euler ha reso più intrigata, ed in questo caso erronea, la sua teoria degli stromenti ottici, per aver assunto, come base de' suoi ragionamenti, la considerazione dei raggi dei pennelli luminosi, che passano pel centro ottico dell'obbiettivo, che chiamò raggi principali, ed aver seguito il loro corso lungo tutto l'istromento. Il metodo diretto e semplice è invece quello di costruire solamente, sul cammino di questo raggio, il fuoco conjugato del pennello rifratto dall'obbiettivo, art. 5; di considerare in seguito questo fuoco come punto raggianti, e di condurre da esso un raggio principale al centro ottico della seconda lente, e costruire su questo raggio il fuoco conjugato corrispondente, e così di seguito per quante lenti vi sono. Vedansi degli esempi nella XI delle già citate *Lezioni elementari di Fisica Matematica* e sue rispettive note.

chiale di Kepler, in cui il valore di  $\delta$  è positivo, si può scostare un poco l'occhio per vedere tutto il campo, che i diaframmi permettono di scoprire, come fu notato nell'articolo testè citato.

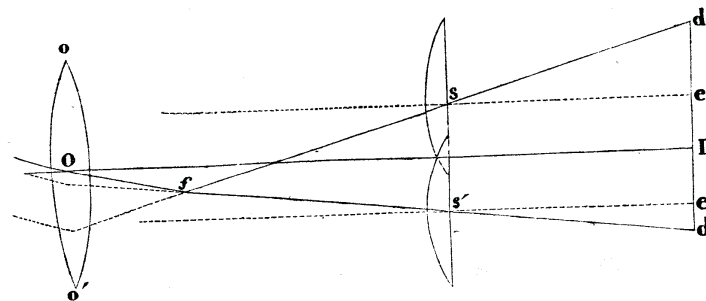
## 8.

Formola, che dà la relazione fra la distanza delle due semilenti e la dimensione lineare d'un oggetto, misurata col dinametro di Dollond.

Termineremo queste applicazioni col dare la dimostrazione della formola, citata all'articolo 9 del Capitolo I, per esprimere la proporzione fra la grandezza del diametro dell'immagine dell'obbiettivo d'un telescopio e la distanza fra le due semilenti nel dinametro a doppia immagine di Dollond.

Prendasi l'asse centrale delle due semilenti, allorchè i loro centri sono riuniti, per asse delle ascisse  $x$ , e siano  $y_0$ , ed  $y_0'$ , vedi la figura annessa,

(\*)



le due coordinate corrispondenti alle estremità del diametro del disco lucido, rappresentante l'immagine dell'obbiettivo. Supponiamo in seguito separate le due semilenti, e sia  $2e$  la distanza dei loro centri, ed immaginiamo i due assi

(\*) I punti  $d$  e  $d'$  corrispondono alle estremità dell'immagine dell'obbiettivo,  $e$  ed  $e'$  ai centri delle due semilenti separate. Le rette  $dsf$ ,  $d's'f$  rappresentano gli assi dei pennelli che partono dalle dette estremità, e  $s'$  incontrano nel fuoco comune conjugato  $f$ . Il punto  $O$  è il centro ottico dell'oculare del dinametro, e quindi  $fO$  è l'asse del pennello di tutti i raggi, che partono dal fuoco  $f$ , ed escono paralleli dall'oculare. Nella pratica delle osservazioni è bene, che il fuoco  $f$  caschi quanto più prossimo si può all'asse  $DO$ ; nella detta formola sussiste, nei limiti dell'approssimazione adottata, ancorchè il contatto delle due immagini sia fatto un poco fuori dall'asse centrale.



centrali corrispondenti a ciascuna di esse, paralleli fra loro, ed all'asse delle  $x$ . Considerando ciascuna semilente come appartenente ad un sistema ottico parziale,

$$y_0 - e \quad \text{ed} \quad y'_0 + e$$

saranno le ordinate delle estremità del diametro del disco suddetto; la prima, essendo quella corrispondente all'estremità situata dalla parte verso cui si è scostata la semilente, che si muove nel verso delle ordinate positive, e riferita all'asse centrale di essa; e la seconda, quella che corrisponde all'estremità del disco dalla parte opposta, ma riferita all'asse centrale della semilente, che si è mossa verso la parte delle ordinate negative. Dinotiamo di più con  $y$  la ordinata comune del fuoco coniugato delle due estremità in discorso, allorché le due immagini del disco sono state separate di tanto, che appaiano in contatto esterno fra loro. Secondo la formola (4) del Capitolo I, questa coordinata sarà, rispettivamente a ciascuna semilente, espressa da una delle due equazioni

$$y - e = \frac{1}{v_0 Q_3^{(4)}} \frac{y_0 - e}{\Delta_0}, \quad y + e = \frac{1}{v_0 Q_3^{(4)}} \frac{y'_0 + e}{\Delta_0};$$

essendo  $\Delta_0$  la distanza delle estremità suddette ai centri rispettivi delle due semilenti, le quali, nei limiti d'approssimazione in cui stiamo, possono prendersi per eguali fra loro, ed a quella, che separa il piano, in cui è posta l'immagine dell'obbiettivo, da quello, in cui stanno i centri ottici delle semilenti medesime.

Ora, chiamando  $2c$  il diametro dell'immagine dell'obbiettivo, si deve avere

$$y_0 - y'_0 = 2e,$$

per cui, sottraendo la seconda dalla prima delle due precedenti equazioni, si conseguirà anche la seguente

$$-2e = \frac{2}{v_0 Q_3^{(4)}} \frac{c - e}{\Delta_0};$$

dalla quale si ricava

$$(52) \quad 2c = 2e(1 - v_0 \Delta_0 Q_3^{(4)}),$$

che ci mostra ottenersi il valore del diametro dell'immagine dell'obbiettivo, moltiplicando la distanza dei due centri ottici delle semilenti pel fattore  $1 - v_0 \Delta_0 Q_3^{(4)}$ .

Per esprimere questo fattore in funzione delle lunghezze focali delle lenti componenti l'istrumento, e delle loro distanze reciproche, osserveremo primie-

ramente, che, giusta la formola (11) del Capitolo III, Parte I, si ha

$$(53) \quad v_0 \Delta_0 Q_3^{(4)} = P_3^{(4)} + v_0 \Delta_0 P_3^{(4)},$$

e che, acciò le immagini del disco, e quindi quelle delle sue estremità, siano vedute in contatto distintamente traverso la seconda lente oculare del diametro, deve essere, per la formola (7) del Capitolo I,

$$(54) \quad Q_7^{(4)} = P_7^{(4)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_7^{(4)} = 0.$$

Da quest'ultima equazione si deduce

$$v_0 \Delta_0 = -\frac{P_7^{(4)}}{P_7^{(4)}},$$

e, sostituendo questo valore nel secondo membro della precedente (53), la medesima si converte in

$$v_0 \Delta_0 Q_3^{(4)} = \frac{P_7^{(4)} P_3^{(4)} - P_7^{(4)} P_3^{(4)}}{P_7^{(4)}},$$

dalla quale, riducendo il numeratore per mezzo della formola (7) del Capitolo IV, Parte I, che dà

$$P_7^{(4)} = P_7^{(4)} P_3^{(4)} - P_7^{(4)} P_3^{(4)},$$

si ottiene quest'espressione più semplice

$$v_0 \Delta_0 Q_3^{(4)} = \frac{P_7^{(4)}}{P_7^{(4)}}.$$

Se si formano, colle regole date nel precedente articolo, i valori di  $P_7^{(4)}$ ,  $P_7^{(4)}$ , trascurando le grossezze di ciascuna delle semilenti, e della lente oculare, e ponendo  $v_0 = v_2 = v_1 = 1$ , si trova

$$P_7^{(4)} = p_3 + p_5 = -\frac{1}{f_2},$$

$$P_7^{(4)} = p_1 + p_3 + p_5 + p_7 + p_1(p_3 + p_5)(p_5 + p_7) = -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{h_2}{f_1 f_2};$$

si avrà dunque, sostituendo questi valori nella precedente, e passando alla (52)

$$(55) \quad 2c = 2e \left(1 - \frac{f_1}{f_1 + f_2 - h_2}\right),$$

che è la formola data nel citato articolo.

Osserveremo non pertanto che la distanza  $h_3$ , a cui l'artefice avrebbe posto l'oculare dalle due semilenti, a norma di questa formola, sarebbe quella che converrebbe soltanto ad un'osservatore d'occhio ben conformato, ed anche che fosse alquanto presbita. In generale però è bene, che ciascun osservatore adatti alla sua vista, per mezzo dell'esperimento descritto all'articolo 9 del Capitolo precedente, la posizione dell'oculare del dinametro, perchè, se, al fine di procurarsi più distinta la visione delle due immagini dell'obbiettivo, avesse, per esempio, bisogno di spingere più addentro il dinametro nel tubo del cannocchiale, che non farebbe uno dotato d'occhio perfetto, le parti della scala non corrisponderebbero più alle stesse dimensioni delle immagini. Per provarlo analiticamente supponiamo, che l'osservatore esiga per la sua visione distinta, che i raggi dei pennelli luminosi, emanati da ciascun punto dell'immagine dell'obbiettivo, non escano paralleli dall'oculare, ma bensì convergenti virtualmente verso un punto posto alla distanza  $C$  dal centro di figura della superficie oculare. In questo caso, nella formola (5) del Capitolo precedente, non dovrà più essere  $\Delta = \infty$ , ma bensì  $\Delta = C$ , ed i raggi, uscenti dall'oculare, dovranno soddisfare all'equazione

$$(34)_1 \quad Q_7 + \frac{1}{v_1 C} Q_6 = 0,$$

in luogo della precedente equazione (34).

Ricavando dalla nuova equazione il valore di  $v_1 \Delta_0$ , come si fece colla (34), ed osservando che si ha  $v_1 = 1$ , si trova

$$v_1 \Delta_0 = - \frac{P_7^{(4)} + \frac{1}{C} P_6^{(4)}}{P_7^{(4)} + \frac{1}{C} P_6^{(4)}},$$

valore, che sostituito nella (33), conduce, per mezzo di riduzioni analoghe a quelle già indicate, alla seguente espressione

$$v_1 \Delta_0 Q_3 = \frac{P_7^{(4)} + \frac{1}{C} P_6^{(4)}}{P_7^{(4)} + \frac{1}{C} P_6^{(4)}},$$

ovvero, impiegando i valori di  $P_7$  e  $P_7$  su riferiti, e quelli di  $P_6$  e  $P_6$ , che sono

$$P_6^{(4)} = (p_1 + p_2) p_1 + 1 = 1 - \frac{h_3}{f_1}, \quad P_6^{(4)} = 1,$$

a quest'altra

$$(35)_1 \quad v_1 \Delta_0 Q_3 = \frac{f_1}{f_1 + f_2 - h_3 + \frac{f_2^2}{C - f_2}}.$$

Quando si facesse  $C = \infty$ , questo valore di  $v_1 \Delta_0 Q_3$  coinciderebbe con quello (35) riferito sopra, ma, quando  $C$  avesse valori diversi, anche quelli di  $v_1 \Delta_0 Q_3$  risulterebbero differenti; e quindi, introdotti nella formola (32), farebbero cambiare la ragione fra  $2e$  e  $2e$ , mostrandoci così, che le parti della scala non starebbero più nella stessa ragione colle dimensioni osservate degli oggetti.

L'osservatore potrebbe correggere col calcolo il valore letto delle parti della scala, qualora, oltre le lunghezze focali delle semilenti, quella della lente oculare, e la distanza  $h_3$  che separa le une dall'altra, conoscesse anche il secondo limite  $D_1$  della sua visione distinta, non che la distanza  $d$  del centro ottico del suo occhio dall'oculare, poichè sarebbe

$$(36) \quad C = -D_1 + d,$$

e non avrebbe che ad aumentare nella formola (35) il valore di  $h_3$  della quantità  $\frac{f_2^2}{D_1 - d + f_2}$  (\*). Ma sarà sempre, come fu detto anteriormente, più sicuro e più comodo, che rettifichi la posizione dell'oculare, per mezzo dell'esperimento accennato all'articolo 9 del Capitolo I.

### CAPITOLO III.

ANALISI DEGLI STROMENTI COMPOSTI, ED ANALOGIE DELLE LORO PROPRIETÀ  
CON QUELLE DEGLI STROMENTI SEMPLICI PRECEDENTEMENTE CONSIDERATE.

#### 1.

Formole esprimenti le coordinate del fuoco conjugato  
d'uno stromento qualunque.

Il processo di calcolo che abbiamo impiegato nell'articolo 2 del Capitolo precedente, per dare più esplicitamente i valori delle coordinate del fuoco

(\*) Il valore di  $D_1$ , che è positivo per un miope, cambierebbe di segno per un'osservatore che fosse tanto presbita da esigere, che i raggi dei pennelli luminosi giungessero al suo occhio convergenti fra loro.

conjugato di una lente, è egualmente applicabile al calcolo di quelle del fuoco-conjugato d'un sistema qualunque, e conduce parimente a delle formole simili.

Ripresa l'equazione generale (3), dimostrata nel Capitolo I, e posto

$$(1) \quad \frac{1}{F} = -v_n \frac{P_{2n-1}^{(4)}}{P_{2n-2}^{(4)}},$$

sottraggiamo questa dalla citata equazione: sarà facile il vedere, che alla differenza potremo dare, colle riduzioni che somministra la (3) del Capitolo IV, Parte I, la forma

$$(2) \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{F} - \frac{v_n}{v_0} \frac{1}{P_{2n-2}^{(4)} Q_{2n-2}^{(4)} \Delta_0},$$

lo che ci mostra essere la F il valore della distanza coniugata  $\Delta$  quando  $\Delta_0 = \infty$ , vale a dire, essere dessa la lunghezza focale dello stromento.

Risalendo ora alle (4) del detto Capitolo, sostituendo per  $Q_{2n-1}^{(4)}$  la sua espressione, tolta dalle (11) del Capitolo III, Parte I, ed eliminando  $P_{2n-1}^{(4)}$  colla precedente (1), dedurremo

$$(3) \quad y = \frac{v_n F}{v_n P_{2n-1}^{(4)} F - v_0 P_2^{(4)} \Delta_0} y_0, \quad z = \frac{v_n F}{v_n P_{2n-1}^{(4)} F - v_0 P_2^{(4)} \Delta_0} z_0;$$

le quali formole sono in tutto simili a quelle segnate (6), (7), (8), ottenute nell'articolo citato sopra, relativo al caso di  $n = 2$ .

Se eliminiamo  $P_{2n-1}^{(4)}$  dalla (1), facendo uso della relazione segnata (5) nel Capitolo IV della Parte I, ed attendiamo all'espressione della distanza  $\delta$ , fornitaci dalla (5), del già citato Capitolo I, la quale ci dà la posizione del circolo anulare del sig. Biot, si trova

$$(4) \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{\delta} + \frac{v_n}{P_{2n-2}^{(4)} P_{2n-2}^{(4)}}.$$

Quindi introducendo questo valore nell'espressione (2), risulterà

$$(5) \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\delta} + \frac{v_n}{P_{2n-2}^{(4)} Q_{2n-2}^{(4)}},$$

per la deduzione della quale si osserverà essere

$$v_0 \Delta_0 Q_{2n-2}^{(4)} = v_0 \Delta_0 P_{2n-2}^{(4)} + P_{2n-2}^{(4)}.$$

Quando nelle (4) e (5) si facesse  $n=2$ , per riferirci al caso di due sole superficie, le medesime danno

$$(6) \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{\delta} + \frac{v_2}{P_2^{(4)} P_2^{(4)}}, \quad (7) \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\delta} + \frac{v_2}{P_2^{(4)} Q_2^{(4)}}.$$

Confrontando le formole segnate (7) ed (8) nel Capitolo anteriore, e queste due ultime colle (2), (3), (4), (5), scritte qui sopra, ed attendendo alla formola generale (5), del Capitolo primo, si vede che mentre nel sistema di due superficie le quantità  $\delta$ ,  $F$ ,  $\Delta$ ,  $y$  e  $z$  dipendono soltanto dai valori di  $P_2$ ,  $P_2$ ,  $P_2^{(4)}$ , e delle coordinate  $\Delta_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  del punto radiante, le medesime quantità nel sistema composto dipendono nello stesso modo dai soli valori di  $P_{2n-2}$ ,  $P_{2n-1}$ ,  $P_{2n-2}^{(4)}$ , e da quelli delle coordinate medesime.

Se quindi si suppone, che, in un caso e nell'altro sia  $v_0 = v_0$ ,  $v_n = v_n$ , e si pone

$$P_2 = P_{2n-1}^{(4)}, \quad P_2 = P_{2n-1}^{(4)}, \quad P_2 = P_{2n-2}^{(4)},$$

determinando con queste, e colle formole dell'articolo 2 del precedente Capitolo, i valori corrispondenti di  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  ed  $h_2$ , il sistema delle due superficie così determinato, produrrà su le posizioni e direzioni finali dei raggi emanati dal punto  $(\Delta_0, y_0, z_0)$  gli stessi effetti del sistema composto, che si vuol discutere. Troveremo pertanto, nella considerazione degli effetti, più semplici a perdersi, d'un sistema fatto di due sole superficie, una rappresentazione astratta ma fedele di quelli, che sarebbero realmente prodotti da un sistema composto d'un numero qualunque di superficie rifrangenti o riflettenti.

Le formole ottenute in quest'articolo sono appropriate al calcolo degli effetti di quei sistemi ottici, lo scopo de' quali è di progettare le immagini d'oggetti in proporzioni diverse da quelle, in cui questi sarebbero veduti direttamente, come sarebbero il microscopio solare, la lanterna magica, gli apparecchi fantasmagorj ec.

## 2.

#### Aggiustamento dell'oculare negli stromenti ottici.

Passiamo ora alla considerazione dei sistemi ottici, che sono destinati ad estendere oltre i limiti naturali la visione degli oggetti osservati attraverso i

medesimi. Trattando di questi stromenti nei Capitoli precedenti, ci siamo comunemente limitati alla supposizione, che essi siano aggiustati alla vista d'osservatori d'occhi ben conformati, per la quale si esige, che i raggi, componenti il pennello luminoso partito da un punto qualunque dell'oggetto, escano paralleli dallo stromento. Se l'osservatore, per essere miope, avesse bisogno, che i detti raggi divergessero fra loro, ovvero, se per essere molto presbita, che convergessero, l'equazione (7), che abbiamo posto nel Capitolo I, non sarebbe più quella che dovrebbe essere verificata in questi casi. Chiamandò, come nel precedente Capitolo, equazione (56), C la distanza del punto verso cui i detti raggi dovrebbero convergere virtualmente o realmente, per dare all'osservatore la visione distinta degli oggetti, l'equazione che dovrà rimpiazzare la (7), sarà quella che risulta dalla (5) del Capitolo I, nella quale si sia posto  $\Delta = C$ , sarà cioè l'equazione

$$(8) \quad Q_{2n-1}^{(4)} + \frac{1}{v_n C} Q_{2n-2}^{(4)} = 0$$

ovvero, impiegando per le Q le loro espressioni, la seguente

$$P_{2n-2}^{(4)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2n-1}^{(4)} + \frac{1}{v_n C} (P_{2n-2}^{(4)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2n-2}^{(4)}) = 0$$

La quantità disponibile, per soddisfare a quest'equazione, ci vien fornita, come fu detto nell'articolo 4 del Capitolo I, dall'essere una parte dello stromento mobile rispetto all'altra, e quindi variabile la distanza fra due superficie del sistema. Supponiamo che le due superficie, che separano le due parti rispettivamente mobili del sistema, corrispondano agli indici  $\nu$  e  $\nu+1$ , talechè la distanza, che dobbiamo considerare come variabile, sia quella che, nelle nostre formole, è dinotata da  $h_{\nu+1}$ , e mettiamo in evidenza quest'incognita nell'equazione precedente. Per tale scopo si osservi, che essa corrisponde, nella composizione delle funzioni P, al fattore  $p_{2\nu}$ , e pertanto, decomponendo queste funzioni per mezzo delle formole (6) del Capitolo IV, Parte I, nelle quali si sia fatto  $i = 2\nu + 1$ , cambiamo primieramente la nostra equazione nella seguente

$$(P_{2n-1}^{(2\nu+4)} + \frac{1}{v_n C} P_{2n-2}^{(2\nu+4)}) (P_{2\nu}^{(4)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu}^{(4)}) + (P_{2n-1}^{(2\nu+2)} + \frac{1}{v_n C} P_{2n-2}^{(2\nu+2)}) (P_{2\nu-1}^{(4)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-1}^{(4)}) = 0$$

indi notando, che, per la legge con cui sono formate le funzioni P, le sole di esse, contenenti il fattore  $p_{2\nu}$ , sono la  $P_{2\nu}^{(4)}$  e  $P_{2\nu-1}^{(4)}$ , rendiamo esplicito questo fattore, sostituendo per le medesime i loro valori, che ci vengono porti dalle formole (1) dell'or citato Capitolo, ed avremo così l'equazione

$$(P_{2n-1}^{(2\nu+4)} + \frac{1}{v_n C} P_{2n-2}^{(2\nu+4)}) \left\{ p_{2\nu} (P_{2\nu-1}^{(4)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-1}^{(4)}) + P_{2\nu-2}^{(4)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-2}^{(4)} \right\} + (P_{2n-1}^{(2\nu+2)} + \frac{1}{v_n C} P_{2n-2}^{(2\nu+2)}) (P_{2\nu-1}^{(4)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2\nu-1}^{(4)}) = 0$$

Se si attende al significato assegnato alle Q colle formole (11) del Capitolo III, Parte I, e si osserva che, prendendo il punto di partenza del raggio alla distanza coniugata C dall'oculare, ed invertendo gli indici sopra e sotto alle P per riferirle al corso del raggio retrogradante, si ha analogamente

$$Q_{2\nu+1}^{(2n-1)} = P_{2\nu+1}^{(2n-1)} + \frac{1}{v_n C} P_{2\nu+1}^{(2n-2)}, \quad Q_{2\nu+2}^{(2n-1)} = P_{2\nu+2}^{(2n-1)} + \frac{1}{v_n C} P_{2\nu+2}^{(2n-2)}$$

si vedrà, che la premessa equazione può essere scritta più compendiosamente nel seguente modo

$$Q_{2\nu+1}^{(2n-1)} Q_{2\nu-1}^{(4)} p_{2\nu} + Q_{2\nu+1}^{(2n-1)} Q_{2\nu-2}^{(4)} + Q_{2\nu+2}^{(2n-1)} Q_{2\nu-1}^{(4)} = 0$$

e che da questa si ricava

$$(10) \quad p_{2\nu} = - \frac{Q_{2\nu-2}^{(4)}}{Q_{2\nu-1}^{(4)}} - \frac{Q_{2\nu+2}^{(2n-1)}}{Q_{2\nu-1}^{(4)}}$$

ovvero, sostituendo a  $p_{2\nu}$  il suo valore  $v_\nu h_{\nu+1} \beta_{\nu+1}$ , e tenendo presente che  $\beta_{\nu+1}$  eguaglia l'unità nei limiti d'approssimazione in cui stiamo,

$$(10)' \quad h_{\nu+1} = - \frac{1}{v_\nu} \frac{Q_{2\nu-2}^{(4)}}{Q_{2\nu-1}^{(4)}} - \frac{1}{v_\nu} \frac{Q_{2\nu+2}^{(2n-1)}}{Q_{2\nu-1}^{(4)}}$$

Ora il primo termine del secondo membro rappresenta la distanza, coniugata a  $\Delta_0$ , della parte dello stromento che rimane immobile coll'obbiettivo, la quale denominata  $C_\nu$  è data, giusta la formola (5) del Capitolo I, da

$$(11) \quad C_\nu = - \frac{1}{v_\nu} \frac{Q_{2\nu-2}^{(4)}}{Q_{2\nu-1}^{(4)}}$$

ed il secondo termine dinota la distanza coniugata a C dell'altra parte mobile coll'oculare, nella supposizione che il raggio luminoso parta alla distanza C dal centro ottico del medesimo, entri per esso, e percorra in ordine inverso questa

seconda parte, perchè, chiamando  $C_{\nu+1}^{(n)}$  questa distanza, essa sarebbe data, secondo la formola (5) del Capitolo I, e le notazioni precedenti, da

$$(12) \quad C_{\nu+1}^{(n)} = - \frac{1}{v_{\nu}} \frac{Q_{2\nu+2}^{(n-1)}}{Q_{2\nu+1}^{(n-1)}},$$

intendendo, che debba essere presa andando dalla superficie  $(\nu+1^{\text{ma}})$  verso l'obbiettivo, quando il suo valore è positivo, ed in direzione contraria quando è negativa.

Si avrà pertanto, usando di queste espressioni, la formola

$$(15) \quad h_{\nu+1} = C_{\nu} + C_{\nu+1}^{(n)},$$

la quale ci dice, che la distanza  $h_{\nu+1}$  di separazione delle due parti obbiettiva ed oculare dello stromento, deve eguagliare la somma delle due distanze, rispettivamente coniugate a  $\Delta_0$  ed a C, delle parti medesime.

Questo risultamento è abbastanza semplice per poter essere preveduto con ovvie considerazioni, ciò non ostante abbiamo preferito, per dedurlo, d'impiegare l'equazione fondamentale (8), coll'oggetto di mostrare che la medesima lo racchiude, che introduce direttamente la considerazione delle due distanze conjugate  $C_{\nu}^{(1)}$  e  $C_{\nu+1}^{(2)}$ , e che ci apre la via a delle formole che ci saranno utili nel seguito.

Alcune di tali formole che si deducono direttamente dalla stessa equazione (8) sono le seguenti. Se in questa equazione si pongono per  $Q_{2n-1}^{(1)}$  e  $Q_{2n-2}^{(1)}$  le loro espressioni forniteci dalle (11) del Capitolo III, Parte I, si ha

$$(14) \quad \frac{1}{v_n C} = - \frac{P_{2n-1}^{(1)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2n-1}^{(2)}}{P_{2n-2}^{(1)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} P_{2n-2}^{(2)}},$$

e, se da questa si ricava viceversa il valore di  $\frac{1}{v_0 \Delta_0}$  dato per  $v_n C$ , si trova

$$\frac{1}{v_0 \Delta_0} = - \frac{P_{2n-1}^{(1)} + \frac{1}{v_n C} P_{2n-1}^{(2)}}{P_{2n-2}^{(1)} + \frac{1}{v_n C} P_{2n-2}^{(2)}},$$

ovvero, permutando gli indici sopra e sotto alla P,

$$(15) \quad \frac{1}{v_0 \Delta_0} = - \frac{P_2^{(2n-1)} + \frac{1}{v_n C} P_1^{(2n-1)}}{P_1^{(2n-1)} + \frac{1}{v_n C} P_2^{(2n-1)}} = - \frac{Q_1^{(2n-1)}}{Q_2^{(2n-1)}}.$$

Il precedente valore di  $\frac{1}{v_0 \Delta_0}$ , sostituito nelle espressioni testè citate di  $Q_{2n-1}^{(1)}$  e  $Q_{2n-2}^{(1)}$ , ci conduce, per mezzo di alcune riduzioni, che risultano dalle (5) del Capitolo IV, Parte I, e dalle premesse notazioni (9), alle seguenti eguaglianze

$$(16) \quad Q_{2n-1}^{(1)} = - \frac{1}{v_n C} \frac{1}{Q_2^{(2n-1)}}, \quad Q_{2n-2}^{(1)} = \frac{1}{Q_2^{(2n-1)}}.$$

Ripetendo un calcolo analogo sulle formole (11) del Capitolo III, Parte I, e prendendo  $\nu > 1$  e  $< n$ , dalla precedente (15), e dalle riduzioni che somministrano le (7) del Capitolo IV, Parte I, si dedurrà

$$(17) \quad Q_{2\nu-2}^{(1)} = \frac{Q_{2\nu}^{(2n-1)}}{Q_2^{(2n-1)}}, \quad Q_{2\nu-1}^{(1)} = - \frac{Q_{2\nu+1}^{(2n-1)}}{Q_2^{(2n-1)}},$$

o viceversa

$$(18) \quad Q_{2\nu}^{(2n-1)} = \frac{Q_{2\nu-2}^{(1)}}{Q_{2n-2}^{(1)}}, \quad Q_{2\nu+1}^{(2n-1)} = - \frac{Q_{2\nu-1}^{(1)}}{Q_{2n-2}^{(1)}};$$

le quali formole ci offrono il modo di esprimere le funzioni Q, appartenenti al corso diretto del raggio, per quelle che vi corrispondono, quando si prende in esame il suo corso retrogrado, o viceversa; e completano relativamente a queste funzioni, quanto è stato osservato d'analogo rispetto alle P nell'articolo 6 del Capitolo IV, Parte I.

## 3.

*Espressione generale dell'amplificazione d'uno stromento ottico, aggiustato alla vista d'un osservatore qualunque.*

Le due parti, in cui l'istromento trovasi decomposto dalla distanza variabile  $h_{\nu+1}$ , si possono considerare come due sistemi ottici distinti, ai quali applicheremo rispettivamente gli epiteti, già impiegati in Ottica, di sistema *obbiettivo* e sistema *oculare*. Per ciascuno di questi due sistemi varranno le equazioni (5) del Capitolo I, quindi le coordinate  $y', z'$  del punto dell'immagine corrispondente al punto  $(\Delta_0, y_0, z_0)$  dell'oggetto soddisferanno, pel sistema



obbiettivo alle equazioni

$$(19) \quad \frac{y'}{C_v^{(4)}} = -\frac{v_v}{v_0} \frac{1}{Q_{2v-2}^{(4)}} \frac{y_0}{\Delta_0}, \quad \frac{z'}{C_v^{(4)}} = -\frac{v_v}{v_0} \frac{1}{Q_{2v-2}^{(4)}} \frac{z_0}{\Delta_0};$$

e pel sistema oculare, supponendo che i raggi componenti il pennello partano dal fuoco conjugato  $(C, y, z)$  dello stromento, e retrocedendo rifacciano per indietro gli stessi cammini che hanno percorso prima d'uscire, da

$$(20) \quad \frac{y'}{C_{v+1}^{(n)}} = -\frac{v_v}{v_n} \frac{1}{Q_{2v+2}^{(n-1)}} \frac{y}{\Delta}, \quad \frac{z'}{C_{v+1}^{(n)}} = -\frac{v_v}{v_n} \frac{1}{Q_{2v+2}^{(n-1)}} \frac{z}{\Delta}.$$

Quindi osservando, che, per l'articolo precedente, queste due immagini devono coincidere in un sistema e nell'altro, confrontando fra loro i valori di  $y'$  e  $z'$ , datici dalle due coppie d'equazioni, dedurremo

$$(21) \quad \frac{y}{\Delta} = \frac{v_n}{v_0} \frac{Q_{2v+2}^{(n-1)} C_v^{(4)} y_0}{Q_{2v-2}^{(4)} C_{v+1}^{(n)} \Delta_0}, \quad \frac{z}{\Delta} = \frac{v_n}{v_0} \frac{Q_{2v+2}^{(n-1)} C_v^{(4)} z_0}{Q_{2v-2}^{(4)} C_{v+1}^{(n)} \Delta_0}.$$

Ora, se richiamiamo le formole (10) del Capitolo I, e riflettiamo inoltre che, nello stesso grado d'approssimazione, si possono analogamente porre le equazioni

$$(22) \quad \frac{y}{\Delta} = \sin X_n \cos L_n, \quad \frac{z}{\Delta} = \sin X_n \sin L_n,$$

e che  $X_n$  dinota l'angolo fatto coll'asse centrale, dalla retta condotta dal fuoco dei raggi uscenti dell'oculare al centro ottico del medesimo, la qual retta da la direzione in cui l'osservatore vede il punto dell'immagine corrispondente al punto  $(\Delta_0, y_0, z_0)$  dell'oggetto, si otterrà, collo stesso processo di calcolo usato nel citato articolo, il valore dell'amplificazione così espresso

$$(23) \quad \frac{X_n}{O} = \frac{v_n}{v_0} \frac{Q_{2v+2}^{(n-1)} C_v^{(4)}}{Q_{2v-2}^{(4)} C_{v+1}^{(n)}}.$$

È ovvio di provare, cogli stessi ragionamenti ora addotti, che il coefficiente di  $\frac{y_0}{\Delta_0}$  e  $\frac{z_0}{\Delta_0}$  nelle equazioni (19) rappresenta la ragione dell'angolo, fatto dall'asse del pennello luminoso emergente dall'ultima lente del sistema obbiettivo coll'asse centrale, all'angolo, che fa con quest'asse quello del pennello dei raggi incidenti

sulla prima; ragione, che può chiamarsi l'ingrandimento angolare del sistema obbiettivo. Parimente, il coefficiente di  $\frac{y}{\Delta}$  e  $\frac{z}{\Delta}$  nelle (20) esprime il valore dell'ingrandimento angolare del sistema oculare, che deve essere preso inversamente nel caso che i raggi dai quali vien formata l'immagine del sistema obbiettivo, procedano, come di fatto, verso il sistema oculare. Da ciò concluderemo che l'amplificazione totale dell'istromento, indicata dal primo membro della precedente equazione, si ottiene moltiplicando il prodotto dei due ingrandimenti parziali operati dal sistema obbiettivo e dal sistema oculare, per la ragione della distanza conjugata dal primo a quella del secondo dei sistemi medesimi.

Nel caso semplice, che il sistema obbiettivo ed il sistema oculare sieno costituiti ciascuno da una sola lente, immersa nell'ambiente, come nei telescopii di Galileo e Kepler, si ha  $v_n = v_2 = v_0 = 1$ , e

$$Q_{2v-2}^{(4)} = Q_2^{(4)} = 1, \quad Q_{2v+2}^{(n-1)} = Q_6^{(7)} = 1,$$

per cui l'amplificazione sarà semplicemente espressa dalla formola

$$(24) \quad \frac{X_n}{O} = \frac{C_2^{(4)}}{C_5^{(6)}},$$

la quale ci palesa che, quando l'oggetto non può considerarsi posto a distanza infinita, e l'occhio dell'osservatore non è nelle condizioni normali, bisogna sostituire, nell'equazione (30) del Capitolo precedente, alle lunghezze focali  $f_1$  ed  $f_2$ , le distanze conjugate  $C_2$  e  $C_5$ , date da

$$\frac{1}{C_2^{(4)}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{\Delta_0}, \quad \frac{1}{C_5^{(6)}} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{C}.$$

In generale le equazioni (19), (20) e (23) ci danno a dividere, che ogni istromento composto, destinato a dilatare i limiti della visione, può sempre paragonarsi astrattamente ad uno stromento semplice, fatto da due sole lenti, considerando il sistema obbiettivo, che rimane immobile, come una lente obbiettiva, ed il sistema oculare mobile, come una lente oculare; queste due lenti avendo le loro grossezze e le loro lunghezze focali determinate in modo da rappresentare rispettivamente gli effetti prodotti dai due sistemi obbiettivi ed oculare, lo che può sempre farsi in virtù di quanto abbiamo notato nell'articolo 1. Si dà alle lenti fittizie che soddisfanno a questa sostituzione l'epiteto *d'equivalenti*.



## 4.

Modificazioni da farsi alle formole esprimenti gli effetti degli stromenti ottici valutati per un'osservatore di vista normale per tradurle in quelle relative ad un'osservatore di vista qualunque.

Proponiamoci ora di trovare quali modificazioni bisogna fare alle formole, che abbiamo dimostrato nel Capitolo I, valutando gli effetti degli stromenti ottici, aggiustati alla visione distinta d'un'osservatore di vista normale, per trasportarle a quelle corrispondenti ad un'osservatore che non lo sia. A tale effetto torna vantaggioso di determinare prima i valori delle funzioni P, quando il fattore  $p_{2v}$  è quello che compete ad una data vista, e soddisfa all'equazione (8).

Cominciando dalla funzione  $P_{2n-1}^{(t)}$ , diamo ad essa la forma che ci porge la (6) del Capitolo IV, Parte I, prendendo in essa  $i = 2v + 1$ , assumiamo cioè la formola

$$P_{2n-1}^{(t)} = P_{2n-1}^{(2v+1)} P_{2v}^{(t)} + P_{2n-1}^{(2v+2)} P_{2v-1}^{(t)},$$

dalla quale, eliminando  $P_{2v}^{(t)}$  col mezzo della sua espressione segnata (1) nello stesso Capitolo, si deduce la seguente

$$P_{2n-1}^{(t)} = P_{2n-1}^{(2v+1)} (P_{2v} P_{2v-1}^{(t)} + P_{2v-2}^{(t)}) + P_{2n-1}^{(2v+2)} P_{2v-1}^{(t)}.$$

che, colla sostituzione del valore di  $p_{2v}$  datoci dalla (10), diviene

$$P_{2n-1}^{(t)} = P_{2v-1}^{(t)} P_{2n-1}^{(2v+1)} \left\{ - \frac{Q_{2v-2}^{(t)}}{Q_{2v-1}^{(t)}} - \frac{Q_{2v+2}^{(2n-1)}}{Q_{2v+1}^{(2n-1)}} + \frac{P_{2v-2}^{(t)}}{P_{2v-1}^{(t)}} + \frac{P_{2v+2}^{(2n-1)}}{P_{2n-1}^{(2v+1)}} \right\}.$$

Riflettendo a ciò che, giusta le formole (1), (11), (12), rappresentano i coefficienti compresi nelle parentesi, a questo valore di  $P_{2n-1}^{(t)}$  potremo dare la forma

$$(25) \quad P_{2n-1}^{(t)} = \frac{1}{v_v} P_{2v-1}^{(t)} P_{2v+1}^{(2n-1)} \left\{ C_v^{(t)} + C_{v+1}^{(n)} - F_v^{(t)} - F_{v+1}^{(n)} \right\}.$$

Con un calcolo analogo si trova

$$(25)_1 \quad P_{2n-1}^{(n)} = \frac{1}{v_v} P_{2v-1}^{(n)} P_{2v+1}^{(2n-1)} \left\{ C_v^{(t)} + C_{v+1}^{(n)} - \delta_v^{(t)} - F_{v+1}^{(n)} \right\},$$

$$(25)_2 \quad P_{2n-2}^{(t)} = \frac{1}{v_v} P_{2v-2}^{(t)} P_{2v+1}^{(2n-2)} \left\{ C_v^{(t)} + C_{v+1}^{(n)} - F_v^{(t)} - \delta_{v+1}^{(n)} \right\},$$

$$(25)_3 \quad P_{2n-2}^{(n)} = \frac{1}{v_v} P_{2v-1}^{(n)} P_{2v+1}^{(2n-2)} \left\{ C_v^{(t)} + C_{v+1}^{(n)} - \delta_v^{(t)} - \delta_{v+1}^{(n)} \right\};$$

nelle quali abbiamo posto coerentemente a quanto è stato detto sopra

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_v^{(t)} = - \frac{1}{v_v} \frac{P_{2v-2}^{(t)}}{P_{2v-1}^{(t)}}, \quad F_{v+1}^{(n)} = - \frac{1}{v_v} \frac{P_{2v+2}^{(2n-2)}}{P_{2v+1}^{(2n-2)}}, \\ \delta_v^{(t)} = - \frac{1}{v_v} \frac{P_{2v-2}^{(2n-2)}}{P_{2v-1}^{(t)}}, \quad \delta_{v+1}^{(n)} = - \frac{1}{v_v} \frac{P_{2v+2}^{(2n-2)}}{P_{2v+1}^{(n)}} \end{array} \right.$$

intendendo, che  $F_v$ ,  $F_{v+1}$ , e  $\delta_v$ ,  $\delta_{v+1}$  siano rispettivamente le lunghezze focali, e le distanze dei cerchi anulari del sig. Biot, corrispondenti al sistema obbiettivo ed al sistema oculare, percorsi da un pennello di luce, il primo direttamente, andando cioè dall'obbiettivo verso l'oculare, ed il secondo inversamente, procedendo dall'oculare verso l'obbiettivo.

Le formole (25) sono generali, e servono tanto nel caso che l'oggetto sia posto ad una distanza infinita dall'obbiettivo, nel quale sarà  $C_v = F_v$ , quanto in quello in cui l'osservatore sia dotato di vista normale, nel quale si prenderà  $C_{v+1} = F_{v+1}$ . Il vantaggio principale di queste formole si è, che le funzioni P, corrispondenti all'istromento totale, sono espresse in funzioni dei soli elementi appartenenti in particolare al sistema obbiettivo, od al sistema oculare.

Noteremo per ultimo che, se dalle espressioni di  $Q_{2n-1}^{(t)}$ ,  $Q_{2n-2}^{(t)}$  datoci dalle (11) del Capitolo III, Parte I, si elimina  $\frac{1}{v_0 \Delta_0}$  col mezzo dell'equazione (15), e si fa uso della (5) del Capitolo I, Parte II, e della (3) del Capitolo IV Parte I, si ottiene

$$(26) \quad Q_{2n-1}^{(t)} = - \frac{1}{v_n P_{2n-1}^{(t)}} \frac{1}{C-\delta}, \quad Q_{2n-2}^{(t)} = \frac{1}{P_{2n-1}^{(t)}} \frac{C}{C-\delta}.$$

Veduto quali sono le formole atte a darci i valori delle P e Q nel caso generale, passiamo alla ricerca che si siamo proposti in testa di quest'articolo:

*Amplificazione.* Quando la visione distinta dell'osservatore esige che i raggi dei pennelli luminosi non escano dall'oculare paralleli fra loro, le equazioni (7),

ed (8) del Capitolo I, Parte II, cessano di sussistere, ed alle formole conseguenti (9) bisogna sostituire quelle più generali segnate (6). Ponendo in queste pei rapporti  $\frac{y_0}{\Delta_0}$ ,  $\frac{z_0}{\Delta_0}$  ed  $\frac{y}{\Delta}$ ,  $\frac{z}{\Delta}$  le espressioni (10) del Capitolo I, e quelle segnate (22) nell'articolo precedente, e ripetendo gli stessi ragionamenti in questo addotti, ricaveremo per valutare l'amplificazione la formula

$$(27) \quad \frac{X_n}{O} = - \frac{v_n}{v_0} \frac{1}{Q_{2n-2}^{(4)}},$$

ovvero, sostituendo a  $Q_{2n-2}^{(4)}$  il precedente valore (26),

$$(28) \quad \frac{X_n}{O} = - \frac{v_n}{v_0} P_{2n-1}^{(2)} \left(1 - \frac{\delta}{C}\right),$$

dalla quale risulta, che si otterrà l'amplificazione, moltiplicando il valore di  $P_{2n-1}^{(2)}$ , datoci dalla (25)<sub>2</sub>, pel fattore  $\frac{v_n}{v_0} \left(1 - \frac{\delta}{C}\right)$ .

La ragione dell'apertura dell'obbiettivo a quella del circolo oculare del Lagrange, di cui abbiamo trattato nell'articolo 7 del Capitolo I, si può conseguire collo stesso processo impiegato in detto articolo, ma facendo uso dei valori generali di  $y_n$  e  $z_n$ , dati dalle formole (11) del Capitolo III, Parte I, in luogo di quelli segnati (9) nel Capitolo I, ciò che ci conduce a cambiare nel secondo membro dell'equazione (15) del citato articolo 7, la quantità  $\frac{1}{P_{2n-1}^{(2)}}$  in  $Q_{2n-2}^{(4)}$ , con che si avrà

$$(29) \quad \frac{a}{c} = \frac{1}{Q_{2n-2}^{(4)}},$$

e quindi, eliminando  $Q_{2n-2}^{(4)}$  fra questa e la (27), sarà

$$(30) \quad \frac{X_n}{O} = - \frac{v_n}{v_0} \frac{a}{c},$$

talchè il rapporto di  $a$  a  $c$  moltiplicato per quello di  $v_n$  a  $v_0$  ci darà la misura dell'amplificazione, corrispondente alla vista dell'osservatore, qualunque essa sia, avvertendo che il diametro del circolo oculare, o della sezione normale del pennello luminoso che esce dallo stromento, deve essere misurato sull'ultima superficie dell'oculare, perchè i raggi del medesimo non escono paralleli fra loro, quando l'osservatore non è di vista normale.

In quanto alla ragione del diametro dell'immagine dell'obbiettivo, o circolo anulare del sig. Biot, sussisterà ancora l'analisi dell'articolo 8 del Capitolo I, e con essa l'equazione (18): eliminando fra queste e la precedente (28) la funzione  $P_{2n-1}^{(2)}$ , si otterrà

$$(31) \quad \frac{X_n}{O} = - \frac{v_n}{v_0} \frac{a}{c} \left(1 - \frac{\delta}{C}\right):$$

dal che si vede, che il valore del raggio  $c$  dell'immagine dell'obbiettivo, o del circolo anulare del sig. Biot, non concorda in generale con quello del circolo oculare del Lagrange, col quale alcuni autori l'hanno confuso.

Avendo ottenuto due espressioni differenti dell'amplificazione, una data dalla formola (25), l'altra dalla precedente (27), può nascere la curiosità di vedere come queste due formole s'accordano. Questa verificaione è assai facile ad ottenersi: basta sostituire nella (27) per  $Q_{2n-2}^{(4)}$  il suo valore, che si trae dalla seconda delle (18), e si avrà questa nuova espressione dell'amplificazione

$$(32) \quad \frac{X_n}{O} = \frac{v_n}{v_0} \frac{Q_{2n-1}^{(2n-1)}}{Q_{2n-1}^{(4)}},$$

dalla quale, eliminando  $Q_{2n-1}^{(4)}$  e  $Q_{2n-1}^{(2n-1)}$  per mezzo della (11) e (12), si ricadrà nella dimandata espressione (25).

*Chiarezza.* I ragionamenti fatti nell'articolo 10 del Capitolo I, per assegnare la ragione della chiarezza dell'immagine a quella dell'oggetto visto naturalmente, appoggiandosi alla proprietà dell'equazione (15) del Capitolo I che è identica colla precedente (30), le stesse conclusioni sussisteranno anche nel caso che l'istromento sia aggiustato per una vista qualunque.

*Campo.* Per riconoscere le modificazioni che riceve la grandezza del campo, quando l'oculare non è aggiustato per la visione normale, bisogna ricorrere alle seguenti equazioni

$$y = Q_{2n-2}^{(4)} \left(1 - \frac{h}{C}\right) y_1 - \frac{1}{v_0} \left(P_{2n-2}^{(2)} + v_n h P_{2n-1}^{(2)}\right) \frac{y_0}{\Delta_0},$$

$$z = Q_{2n-2}^{(4)} \left(1 - \frac{h}{C}\right) z_1 - \frac{1}{v_0} \left(P_{2n-2}^{(2)} + v_n h P_{2n-1}^{(2)}\right) \frac{z_0}{\Delta_0},$$

le quali non sono che le (1) del Capitolo I, in cui si è posto

$$\frac{x - \alpha_n H}{\cos X_n} = h$$

e si è eliminato  $Q_{2n-1}^{(4)}$  per mezzo della formola (8).

Queste equazioni, confrontate colle (23) dello stesso Capitolo I, ci mostrano, che non avremo ad introdurre altro cambiamento nelle formole da queste dedotte, se non che quello di rimpiazzare nell'espressione di  $r_1$  il valore inverso di  $P_{2m-1}^{(4)}$  col prodotto  $Q_{2m-2}^{(4)} \left(1 - \frac{h}{C}\right)$ . Sarà pertanto

$$r_1 = Q_{2m-2}^{(4)} \left(1 - \frac{h}{C}\right) \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$$

ovvero, eliminando  $Q_{2m-2}^{(4)}$  colla (29),

$$r_1 = \frac{c}{a} \left(1 - \frac{h}{C}\right) \sqrt{y_1^2 + z_1^2}.$$

Dal che concluderemo, che bisognerà moltiplicare in tutte le formole successive il valore di  $c$ , corrispondente al raggio del circolo oculare, pel fattore  $1 - \frac{h}{C}$ , che comunemente differirà pochissimo dall'unità.

Rispetto al valor massimo assoluto del campo osserveremo, che la formola (30) del Capitolo I si troverebbe, colla moltiplicazione suddetta, convertita nella

$$2O = \frac{\delta}{l} \frac{2c \left(1 - \frac{h}{C}\right) + 2p}{\delta - h} R'';$$

alla quale si può dare la forma

$$2O = \frac{2}{l} \left( \frac{c+p - \frac{hc}{C}}{1 - \frac{h}{\delta}} \right) R''$$

mostranteci, che quando  $\delta$  è di valor negativo, ed  $\frac{h}{C} < 1$ , ciò che ordinariamente avviene, il campo consegue il suo valor massimo per  $h=0$ .

Delle riflessioni simili si potrebbero fare negli altri due casi espressi dalle formole (31).

Noteremo in fine che la distanza coniugata  $C$ , la quale entra nelle premesse formole, è sempre determinabile, per ciascun osservatore, col mezzo dell'equazione (36) del Capitolo precedente, quando il limite della sua visione distinta, e la situazione del suo occhio sono dati.

## PARTE TERZA

### SECONDA APPROSSIMAZIONE.

#### CAPITOLO I.

##### EQUAZIONI DI CONDIZIONE ACCIÒ SIANO DISTRUTTE LE ABERRAZIONI IN UNO STROMENTO OTTICO QUALUNQUE.

###### 1.

*Causa delle aberrazioni. Mezzo che somministra l'Analisi per eludere il loro effetto negli stromenti ottici.*

Siamo ora giunti alla Parte in cui dobbiamo occuparci della forma e della situazione da darsi alle lenti ed agli specchii, acciò la distinzione, l'amplificazione e la chiarezza siano accoppiate nel modo più efficace in un'istromento ottico destinato ad estendere i limiti della nostra visione.

Le formole ottenute nella Parte precedente ci hanno fatto vedere, che gli stromenti godrebbero delle doti accennate, se i raggi di diverso colore si rifrangessero egualmente, e se le aperture delle superficie rifrangenti o riflettenti divise nei raggi di curvatura delle medesime (\*) dassero per quozienti frazioni tali, che i loro quadrati fossero trascurabili in confronto dell'unità. La prima supposizione è contraria al fatto, perchè i raggi di diverso colore, passando obliquamente ne' mezzi rifrangenti, si rompono diversamente, o come si usa dire, si disperdono. La seconda rende incompatibile, per le leggi esposte agli articoli 6 e 10 del Capitolo I, Parte II, l'accoppiare una forte amplificazione ad una sufficiente chiarezza, a meno d'ingrandire soverchiamente le dimensioni dello stromento se gli oggetti sono lontani, e la luce che c'inviano è determi-

(\*) Il vocabolo *apertura* è impiegato in diversi sensi nell'Ottica: per esso noi qui intendiamo il diametro della base della zona sferica rappresentante la superficie rifrangente o riflettente, e per raggio della sua corrispondente curvatura, quello della sfera di cui questa superficie è una zona.

nata, o d'aumentare eccessivamente l'illuminazione degli oggetti, se questi sono vicini, e l'obbiettivo debba avere una piccola apertura per evitare i raggi troppo obliqui. Col lasciar sussistere incorrette le influenze di queste due cause, che le dette supposizioni preteriscono, l'istromento viene a perdere la distinzione delle sue immagini. Infatti, i raggi, partiti da un punto luminoso, decomponendosi colla rifrazione in altri di vari colori che si disperdono diversamente, non concorrono più in un sol fuoco coniugato, e formano un'immagine del punto dilatata, e colorata nei contorni. Parimenti, se per ottenere una sufficiente chiarezza, s'impiegano, senza gli opportuni criterii, delle superficie di aperture maggiori del suddetto limite, avviene che i raggi d'un pennello luminoso incidenti in luoghi vicini al centro di figura della superficie, e quelli discosti da esso, non s'incontrano più in uno stesso fuoco, e formano un'immagine confusa e trasfigurata del punto da cui il pennello è emanato. Huyghens ha chiamato *aberrazione* la quantità di cui i raggi, partiti da uno stesso punto, e passanti vicini ai bordi dell'apertura di una lente o specchio, deviano dal fuoco coniugato in cui andrebbero a riunirsi quelli passanti vicini al centro della medesima. Questa stessa denominazione è stata in seguito estesa anco a denotare la quantità di cui il fuoco dei raggi colorati, soggetti alle dispersioni estreme, devia da quello dei raggi di rifrazione media; e per distinguere fra loro queste due specie di aberrazioni, si è chiamata la prima aberrazione *sferica*, e la seconda aberrazione *cromatica*. Blair ha applicato ad uno stromento che sia corretto d'amendue queste aberrazioni l'epiteto di *aplanatico*.

Analiticamente parlando la prima supposizione, che la luce d'ogni colore sia tutta egualmente refrangibile, è stata introdotta implicitamente, nelle formole della seconda Parte, per aver considerato i valori  $v$ , delle velocità di propagazione della luce in ciascun mezzo, come costanti, od indipendenti dalle lunghezze delle onde che costituiscono i vari colori: e la seconda supposizione, quella cioè, che i quadrati dei quozienti delle aperture delle superficie divise per rispettivi raggi di curvatura, siano trascurabili, si trova inclusa, per aver assunto i valori di  $\cos X$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , eguali all'unità, omettendo i termini che nelle loro espressioni, date al Capitolo II della Parte I, salgono a due dimensioni, tanto in  $y$ , e  $z$ , quanto in  $\cos Y$ , e  $\cos Z$ . Se si danno delle variazioni alle velocità  $v$ , e s'impiegano le espressioni complete di  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$ , per valutare gli elementi  $p$  fornitici dalle (6) del Capitolo III della detta Parte, anche le funzioni  $P$  nelle equazioni fondamentali (1) del Capitolo I, Parte II, perdono la proprietà d'essere costanti, ed acquistano dei piccoli termini, che sono funzioni delle diverse lunghezze delle onde costituenti i raggi di diverso colore, e delle coordinate  $y_0$ ,  $z_0$ , e  $y_1$ ,  $z_1$  del punto radiante, e del punto d'incidenza del raggio luminoso sulla superficie obbiettiva. Coll'introduzione di questi termini i

valori delle coordinate  $x, y, z$  del fuoco coniugato al punto radiante ( $\Delta_0, y_0, z_0$ ), che sarebbero dedotte dalle equazioni (3) e (4) del citato Capitolo, risulterebbero variabili colle lunghezze di dette ondulazioni, e colle coordinate dei due detti punti, mostrandoci con ciò che non esiste più un fuoco coniugato per ciascun pennello luminoso, e che le immagini non sarebbero più simili agli oggetti osservati, e quindi che le proprietà degli stromenti ottici, esposte nella Parte precedente, le quali tutte avevano il loro fondamento nell'esistenza di tali fuochi, e nella similitudine della loro coordinazione con quella dei punti dell'oggetto, cessano di sussistere in generale. Il mezzo, che suggerisce l'Analisi per conservare loro le dette proprietà, è di far sparire nelle equazioni (1) i nuovi termini, introdotti dalle variazioni delle velocità  $v$ , e delle superiori potenze di  $y_1, z_1, y_0$ , e  $z_0$ , annullando i loro coefficienti con un'opportuno assegnamento di valore alle quantità costanti di cui sono composti, di modo che le medesime, ancorchè spinte a questa seconda approssimazione, si riducano di nuovo a quelle stesse che hanno servito per la prima.

2.

*Equazioni generali da soddisfarsi per elidere gli effetti delle aberrazioni.*

Richiamate le due prime equazioni del Capitolo I, Parte II, dinotiamo con  $R$  il valore comune dei loro tre membri, e sostituendo in essi per  $x_n, y_n, z_n$  e  $\cos Y_n, \cos Z_n$  le loro espressioni, date dalle formole (6) del Capitolo II, Parte I, e dalle (12) del Capitolo III, eguagliamo ciascun membro al rapporto medesimo, avremo le tre equazioni

$$(1) \quad \begin{cases} x = H_n \alpha_n + R \cos X_n, \\ y = (Q_{2n-2}^{(1)} + v_n R Q_{2n-1}^{(1)}) y_1 - \frac{1}{v_0 \Delta_0} (P_{2n-2}^{(2)} + v_n R P_{2n-1}^{(2)}) y_0, \\ z = (Q_{2n-2}^{(1)} + v_n R Q_{2n-1}^{(1)}) z_1 - \frac{1}{v_0 \Delta_0} (P_{2n-2}^{(2)} + v_n R P_{2n-1}^{(2)}) z_0. \end{cases}$$

Concepriamo il valore di  $R$  diviso in due parti, la prima delle quali sia la distanza coniugata,

$$(2) \quad \Delta = - \frac{1}{v_n} \frac{Q_{2n-2}^{(1)}}{Q_{2n-1}^{(1)}},$$

data dall'equazione (5) del Capitolo I, Parte II, e calcolata facendo uso dei valori

di  $Q_{2n-1}^{(4)}$  e  $Q_{2n-2}^{(4)}$  corrispondenti alla prima approssimazione, e la seconda sia denotata da  $\delta \Delta$ , così che si abbia

$$R = \Delta + \delta \Delta,$$

la variazione  $\delta \Delta$  essendo dell'ordine delle quantità trascurate, vale a dire del second'ordine.

Ciò posto sostituiamo questo valore di  $R$  nella prima delle equazioni (1), e prendiamo  $x$  in modo che sia

$$(3) \quad x = H_n + \Delta,$$

in tal caso bisognerà, acciò la medesima sia soddisfatta, che rimanga

$$(4) \quad \delta \Delta = H_n (1 - \alpha_n) + \Delta (1 - \cos X_n),$$

trascurando le quantità di quart'ordine.

Ritenendo che tutte le quantità  $P$ ,  $Q$ ,  $v_0 \Delta_0$  e  $v_n \Delta$  conservino i valori della prima approssimazione, e dinotando con  $\delta P$ ,  $\delta Q$ ,  $\delta(v_r \Delta)$  e  $\delta(v_0 \Delta_0)$  le variazioni delle medesime, allorchè si tien conto nelle loro espressioni anche dei termini di second'ordine, si troverà che le due ultime delle tre equazioni (1) si ridurranno ancora, come nella prima approssimazione, ad

$$(5) \quad y = \frac{1}{v_0 Q_{2n-1}^{(4)}} \frac{y_0}{\Delta_0}, \quad z = \frac{1}{v_0 Q_{2n-1}^{(4)}} \frac{z_0}{\Delta_0},$$

purchè si prenda

$$(6) \quad \begin{cases} \delta P_{2n-2}^{(4)} + v_n \Delta \delta P_{2n-1}^{(4)} + P_{2n-1}^{(4)} \delta(v_n \Delta) = 0, \\ \frac{1}{v_0 \Delta_0} \left( \delta P_{2n-2}^{(2)} + v_n \Delta \delta P_{2n-1}^{(2)} + P_{2n-1}^{(2)} \delta(v_n \Delta) \right) + \left( P_{2n-2}^{(2)} + v_n \Delta P_{2n-1}^{(2)} \right) \frac{\delta(v_0 \Delta_0)}{v_0 \Delta_0} = 0 : \end{cases}$$

e si noti che, sostituendo nella variazione

$$(7) \quad \delta Q_{2n-2}^{(4)} + v_n \Delta \delta Q_{2n-1}^{(4)} + Q_{2n-1}^{(4)} \delta(v_n \Delta),$$

le espressioni delle  $Q$ , forniteci dalle (11) del Capitolo III, Parte I, essa si riduce al primo membro della prima delle precedenti equazioni (6), in virtù della seconda delle medesime.

Al proposito di queste equazioni vi è un'importante osservazione a fare. Se si suppone che la seconda delle (6) non sia verificata, per non essere nullo il suo fattore racchiuso fra parentesi, la riduzione, testè fatta, della variazione (7) al primo membro della prima delle (6) sussisterebbe tuttavia pei telescopj; perchè

questi essendo destinati ad osservare oggetti lontani, si potrebbe considerare, per approssimazione  $\Delta_0 = \infty$ , e la parte di detta variazione soppressa precedentemente, svanirebbe ancora in questo secondo caso, in virtù del divisore  $\Delta_0$ . Ciò ci prova che, pei telescopj, la verificaione della prima delle (6) basta a rendere costante il coefficiente delle coordinate  $y_1$  e  $z_1$  nelle equazioni (1), e quindi ad assicurare l'esistenza dei fuochi coniugati forniteci di posizione dalle (3) e (5). Non così avverrebbe pei microscopj destinati ad osservare oggetti vicini; per questi, la piccolezza del divisore  $\Delta_0$  farebbe anzi aumentare l'influenza della quantità compresa fra le parentesi, già variabile, per rendere tale il coefficiente delle coordinate  $y_1$  e  $z_1$  nelle equazioni (1), di modo che i raggi partiti da un punto dell'oggetto e caduti sui vari punti dell'obbiettivo, non concorrendo più in uno stesso luogo, i fuochi coniugati verrebbero a mancare, e con essi la distinzione dell'immagine.

La seconda delle equazioni (6), presa isolatamente, è richiesta dalla similitudine dell'immagine coll'oggetto, ed acciò questa sussista, deve essere verificata tanto pei telescopj, quanto pei microscopj. Se il fattore compreso fra le parentesi avesse un valore, questo essendo variabile produrrebbe su quelli delle coordinate  $y_1$  e  $z_1$  del fuoco coniugato date dalle (5), una variazione, che sarebbe crescente coi rapporti  $\frac{y_0}{\Delta_0}$  e  $\frac{z_0}{\Delta_0}$ , vale a dire, colle proiezioni della distanza angolare a cui starebbe il punto radiante dell'asse centrale dello stromento.

Ritornando alle riduzioni delle (6) osserviamo che si ha

$$\delta(v_n \Delta) = v_n \delta \Delta + \Delta \delta v_n,$$

quindi eliminando dalle dette equazioni il valore di  $\Delta$  colla (2), e riducendo l'ultimo termine della seconda, col mezzo della (3) del Capitolo I, Parte II, diamo alle medesime la forma

$$(8) \quad \begin{cases} Q_{2n-1}^{(4)} \delta P_{2n-2}^{(4)} - Q_{2n-2}^{(4)} \delta P_{2n-1}^{(4)} + P_{2n-1}^{(4)} \left( v_n Q_{2n-1}^{(4)} \delta \Delta - Q_{2n-2}^{(4)} \frac{\delta v_n}{v_n} \right) = 0 \\ Q_{2n-1}^{(2)} \delta P_{2n-2}^{(2)} - Q_{2n-2}^{(2)} \delta P_{2n-1}^{(2)} + P_{2n-1}^{(2)} \left( v_n Q_{2n-1}^{(2)} \delta \Delta - Q_{2n-2}^{(2)} \frac{\delta v_n}{v_n} \right) - \frac{\delta(v_0 \Delta_0)}{v_0 \Delta_0} = 0. \end{cases}$$

Se potremo soddisfare a queste due equazioni, qualunque sia il punto raggiante dell'oggetto, qualunque sia il punto dell'obbiettivo su cui incida il raggio del pennello luminoso, e qualunque siano le lunghezze delle ondulazioni del raggio medesimo, anche le equazioni (2) e (5) saranno verificate: e siccome dalla sussistenza di queste dipende l'esistenza dei fuochi coniugati, elemento fondamentale di tutte le proprietà degli stromenti ottici, notate nella Parte precedente, così tali proprietà saranno pure conservate a quegli stromenti, che saranno costruiti nelle condizioni volute dalla verificaione delle precedenti (8).



## 5.

*Distinzione delle variabili indipendenti rispetto a ciascuna delle quali le premesse equazioni devono essere soddisfatte.*

Già abbiamo notato che le supposizioni fatte per conseguire le equazioni fondamentali, rappresentanti gli effetti degli stromenti ottici nella prima approssimazione, consistono nell'aver ridotto all'unità i valori di  $\cos X_n$  e dei coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ , e dall'aver considerato le velocità  $v$ , di propagazione della luce indipendenti dalle lunghezze d'ondulazione dei raggi di diverso colore da cui è composta. Se, per introdurre i valori completi delle dette quantità, portiamo lo sguardo sulle loro espressioni segnate (2), (6), (8) ed (11) nel Capitolo II, Parte I, si vede che i termini trascurati contengono tutti per fattore una delle due somme

$$y^2 + z^2, \quad \cos^2 Y, + \cos^2 Z,$$

l'indice  $\nu$  corrispondendo a quello d'una superficie qualunque.

Ora è chiaro che queste somme, essendo del second'ordine di grandezza, potranno essere calcolate facendo uso dei valori di  $y, z, \cos Y, \cos Z$ , che ci sono dati dalle formole (12) del Capitolo III, Parte I, che non verremo a trascurare in esse se non delle quantità del quart'ordine. Se s'immagina soltanto d'aver fatto la sostituzione di questi valori nei termini omissi nelle dette espressioni di  $\cos X_n, \alpha, \beta, \gamma, \nu$ , si rileva facilmente, anche senza eseguire il calcolo, che i risultati conterranno in tutti i loro termini una delle tre quantità

$$y_1^2 + z_1^2, \quad y_1 y_0 + z_1 z_0, \quad y_0^2 + z_0^2,$$

moltiplicate per coefficienti che si potranno riguardare come costanti.

Per omogenità e semplicità di formole poniamo

$$(9) \quad \xi = \frac{y_1^2 + z_1^2}{\rho_1^2}, \quad \epsilon = \frac{y_1 y_0 + z_1 z_0}{\rho_1 H_0}, \quad \zeta = \frac{y_0^2 + z_0^2}{H_0^2} :$$

dove  $H_0$  denota la distanza del punto raggiante dal centro di figura della superficie obbiettiva. I valori di queste tre variabili saranno dipendenti dalla direzione del punto raggiante dell'oggetto, e dalla situazione del punto d'incidenza del raggio luminoso sulla superficie obbiettiva, ed, essendo di second'ordine, potremo trascurare le loro potenze ed i loro prodotti nel calcolare le variazioni delle funzioni  $P, Q, \Delta, e \Delta$ .

Rispetto alle variazioni delle velocità  $v$ , rammenteremo, che i valori inversi di queste velocità sono proporzionali a quelli, che gli ottici chiamano gli indici

di rifrazione, i quali, essendo variabili colle varie lunghezze delle ondulazioni dei raggi luminosi, si connettono, come è noto, al fenomeno della dispersione. In una comunicazione fatta al Congresso scientifico di Firenze, nell'anno 1841, partendo dalle idee sulla costituzione dei corpi, che aveva pubblicato cinqu'anni prima, giusta le quali è d'uopo ammettere che i corpi formano un tutto composto d'etere e di molecole ponderabili, in cui queste sono circondate da atmosfere eteree d'una densità grandissima in confronto di quella dell'etere dello spazio, ma così rapidamente decrescente che, a distanze affatto insensibili dalle molecole, torna a confondersi con questa, ho esposto una spiegazione semplice e naturale della dispersione (\*). Questa spiegazione si fonda sulle rapide alternative di densità dell'etere nei corpi ponderabili, provenienti dall'esistenza delle dette atmosfere, le quali fanno sì che le velocità di propagazione delle onde luminose non solo sono tutte ritardate, ma lo sono tanto più quanto le onde sono più corte. La formola che somministra la Meccanica razionale pel calcolo di questa diminuzione è data, per una prima approssimazione, da

$$\frac{1}{v} = a + b \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2,$$

e spingendo più oltre le approssimazioni da una serie della forma

$$\frac{1}{v} = a + b \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 + c \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 + \text{ec.}, (**)$$

nella quale  $\lambda_0$  denota la lunghezza media delle ondulazioni dei varii raggi luminosi dello spettro,  $\lambda$  quella del raggio che si considera, ed  $a, b, c$  sono dei coefficienti costanti, i cui valori numerici non possono determinarsi, nello stato attuale delle nostre cognizioni, che sperimentalmente per ciascuna sostanza, osservando gli indici di rifrazione corrispondenti alle varie parti dello spettro formato dalla medesima. L'esperienza prova, giusta l'assunto della teoria, che i valori di  $b, c$  ec. sono piccoli e vanno diminuendo di grandezza, talchè, nella pluralità de' casi, basta tener conto del solo secondo termine, il quale con-

(\*) *Giornale Toscano di Scienze mediche, fisiche e naturali*. Tomo I N.° 4. pag. 557. Pisa 1845. In quest'estratto ho fatto menzione dell'inerzia delle molecole materiali, che devono necessariamente risentirsi del disturbo d'equilibrio generale al passaggio delle onde. Se però si riflette che le vibrazioni luminose dell'etere sono tanto rapide, che se ne fanno per lo meno 480,000,000,000 per secondo, e che le masse degli atomi d'etere sono estremamente piccole comparativamente a quelle delle molecole ponderabili, ben s'intende, che queste parteciperanno scarsamente al movimento generale, ma non impediranno che esso si trasmetta, pel mezzo delle loro pressioni e velocità presso che virtuali, alle parti contigue.

(\*\*) Vedasi la Memoria *Sulle proprietà degli spettri formati dai reticoli ed analisi della luce che somministrano*, nel Tomo I di questi Annali, Pisa 1846.



tiene il quadrato del rapporto  $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ , variabile a seconda delle diverse lunghezze  $\lambda$  delle ondulazioni dei vari raggi di cui si compone la luce.

Pel calcolo delle aberrazioni giova di trasformare la formola precedente, ponendo

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{\lambda_0^2 - \lambda^2}{\lambda^2}, \\ a = a + b + c + \text{ec.}, \quad b = b + 2c + \text{ec.}, \quad c = c + \text{ec.}, \end{array} \right.$$

e prendendo

$$(11) \quad \frac{1}{v} = a + b\theta + c\theta^2 + \text{ec.}$$

considerare  $\theta$  come la variabile indipendente. Basterà tener conto soltanto del primo e secondo termine di quest'espressione quando non si aspiri a distruggere anche gli spettri detti secondarii.

Da quanto abbiamo ora esposto risulta, che passando a questa seconda approssimazione, potremo calcolare i valori di  $\cos X_n$  e dei coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma$ , e quindi quelli degli elementi  $p$ , dati dalle (6) e (6)' del Capitolo III, Parte I, sviluppando le loro espressioni per le potenze di  $\xi, \epsilon, \zeta$  e  $\theta$ , e fermandoci alle prime potenze di queste variabili. Ottenuti tali valori, sarà facile d'avere le variazioni delle funzioni  $P$ , in cui gli elementi  $p$  entrano soltanto alla prima potenza, e di formare così le due equazioni generali (8), ognuna delle quali si spezzerà in quattro equazioni parziali, quante appunto sono le variabili indipendenti ch'esse racchiudono.

4.

*Forma comune delle equazioni parziali in cui si spezzano le equazioni generali (8).*

Senza particolarizzare quale delle dette quattro variabili vogliamo prendere in considerazione, possiamo determinare la forma che deve avere l'equazione parziale relativa ad una qualunque di esse, risultante dallo spezzamento delle (8). Per quest'oggetto denotiamo con  $\varphi$  una qualunque delle variabili  $\xi, \epsilon, \zeta$  o  $\theta$ , e quindi con  $\frac{dp_i}{d\varphi}$  il coefficiente differenziale della variazione dell'elemento  $p_i$ . Il termine che introdurrà la variazione di quest'elemento in quelle delle funzioni  $P_{2n-2}^{(1)}, P_{2n-1}^{(1)}, P_{2n-2}^{(2)}, P_{2n-1}^{(2)}$  sarà rispettivamente espresso da

$$\frac{dP_{2n-2}^{(1)}}{dp_i} \frac{dp_i}{d\varphi} \varphi, \quad \frac{dP_{2n-1}^{(1)}}{dp_i} \frac{dp_i}{d\varphi} \varphi, \quad \frac{dP_{2n-2}^{(2)}}{dp_i} \frac{dp_i}{d\varphi} \varphi, \quad \frac{dP_{2n-1}^{(2)}}{dp_i} \frac{dp_i}{d\varphi} \varphi;$$

e dando ad  $i$  tutti i valori da  $i = 1$  sino ad  $i = 2n - 1$ , le variazioni  $\delta P$  saranno rispettivamente rappresentate da

$$\delta P_{2n-2}^{(1)} = \varphi \sum_1^{2n-1} \frac{dP_{2n-2}^{(1)}}{dp_i} \frac{dp_i}{d\varphi}, \quad \delta P_{2n-1}^{(1)} = \varphi \sum_1^{2n-1} \frac{dP_{2n-1}^{(1)}}{dp_i} \frac{dp_i}{d\varphi}, \\ \delta P_{2n-2}^{(2)} = \varphi \sum_1^{2n-1} \frac{dP_{2n-2}^{(2)}}{dp_i} \frac{dp_i}{d\varphi}, \quad \delta P_{2n-1}^{(2)} = \varphi \sum_1^{2n-1} \frac{dP_{2n-1}^{(2)}}{dp_i} \frac{dp_i}{d\varphi}.$$

Sostituiamo questi valori nei due primi termini di ciascuna delle due equazioni (8), impieghiamo per le derivate delle  $P$  le loro espressioni, date dalle formole (8) del Capitolo IV, Parte I, e riduciamo colle formole (3), dello stesso Capitolo; avremo

$$Q_{2n-1}^{(1)} \delta P_{2n-2}^{(1)} - Q_{2n-2}^{(1)} \delta P_{2n-1}^{(1)} = \varphi \sum_1^{2n-1} \pm Q_{i-1}^{(1)} P_{i-1}^{(1)} \frac{dp_i}{d\varphi}, \\ Q_{2n-1}^{(2)} \delta P_{2n-2}^{(2)} - Q_{2n-2}^{(2)} \delta P_{2n-1}^{(2)} = \varphi \sum_1^{2n-1} \pm Q_{i-1}^{(2)} P_{i-1}^{(2)} \frac{dp_i}{d\varphi};$$

nelle quali si prenderà il segno superiore quando  $i$  è pari, e l'inferiore quando è dispari.

Denotiamo inoltre rispettivamente con  $\frac{d\Delta_0}{d\varphi}, \frac{d\Delta}{d\varphi}, \frac{dv_n}{d\varphi}$  il coefficiente di  $\varphi$  nelle espressioni di  $\Delta_0, \Delta, v_n$ , svolte in serie per le potenze di questa variabile; l'ultimo di questi coefficienti essendo nullo, fuorchè nel caso che  $\varphi$  rappresenti la variabile  $\theta$ , ed i due primi essendolo quando  $\varphi$  rappresenta questa stessa variabile. Colla sostituzione di tutte queste quantità, le due equazioni corrispondenti alla variabile  $\varphi$ , che devono esistere in virtù delle (8), risulteranno espresse da

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^{2n-1} \pm Q_{i-1}^{(1)} P_{i-1}^{(1)} \frac{dp_i}{d\varphi} + P_{2n-1}^{(1)} \left( v_n Q_{2n-1}^{(1)} \frac{d\Delta}{d\varphi} - \frac{1}{v_n} Q_{2n-2}^{(1)} \frac{dv_n}{d\varphi} \right) = 0, \\ \sum_1^{2n-1} \pm Q_{i-1}^{(2)} P_{i-1}^{(2)} \frac{dp_i}{d\varphi} + P_{2n-1}^{(2)} \left( v_n Q_{2n-1}^{(2)} \frac{d\Delta}{d\varphi} - \frac{1}{v_n} Q_{2n-2}^{(2)} \frac{dv_n}{d\varphi} \right) - \frac{1}{\Delta_0} \frac{d\Delta_0}{d\varphi} - \frac{1}{v_0} \frac{dv_0}{d\varphi} = 0; \end{array} \right.$$

dalle quali abbiamo tolto il fattore  $\varphi$  comune a tutti i termini, che non può essere nullo nei casi che contempliamo.

Per comporre con queste formole le equazioni corrispondenti alle quattro variabili  $\xi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ , e  $\theta$  non resteranno quindi a determinarsi che le derivate di  $\Delta_0$ ,  $\cos X_v$ ,  $\alpha_v$ ,  $\beta_v$ ,  $\gamma_v$ , e  $\Delta$  rispetto a ciascuna di esse, per poi passare a quelle degli elementi  $p$ ; ciò che farà il soggetto del seguente Capitolo.

## CAPITOLO II.

ESPRESSIONI DELLE DERIVATE DELLE QUANTITÀ CONTENUTE  
NELLE EQUAZIONI GENERALI (12).

### 1.

*Derivate delle quantità  $\Delta_0$ ,  $\cos X_v$ ,  $\alpha_v$ ,  $\beta_v$ ,  $\gamma_v$ ,  $\Delta$ , e  $v$ ,  
rispetto alle variabili  $\xi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\zeta$ , e  $\theta$ .*

Progredendo nell'ordine con cui le soprascritte quantità sono poste, cominceremo dal cercare l'espressione di  $\Delta_0$  in funzione delle variabili  $\xi$ ,  $\varepsilon$ , e  $\zeta$  per poi dedurne le sue derivate rispetto alle medesime. Per quest'oggetto sommiamo le tre equazioni (1) del Capitolo I, Parte I, elevate al quadrato, ciò che ci dà

$$\Delta_0^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2,$$

e quindi, assumendo il valore di  $x_1$  offertoci dalla (4) del Capitolo II di detta Parte, ed osservando che, giusta le denominazioni introdotte nell'articolo precedente, si ha

$$H_0 = H_1 - x_0,$$

poniamo questo valore di  $\Delta_0^2$  sotto la forma

$$\Delta_0^2 = \left( H_0 - \frac{1}{2} \frac{y_1^2 + z_1^2}{\rho_1} \right)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x_1 - z_0)^2,$$

dalla quale, sviluppando i quadrati, eliminando le coordinate per mezzo delle variabili  $\xi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\zeta$  dateci dalle (9), e riducendo il risultato in serie col tener conto soltanto delle prime potenze di esse, si deduce

$$(15) \quad \Delta_0 = H_0 - \frac{1}{2} \rho_1 \left( 1 - \frac{H_0}{\rho_1} \right) \xi - \rho_1 \varepsilon + \frac{1}{2} H_0 \zeta;$$

ed in seguito

$$(15)_1 \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta_0} \frac{d\Delta_0}{d\xi} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_1}{H_0} \left( 1 - \frac{\rho_1}{H_0} \right), \\ \frac{1}{\Delta_0} \frac{d\Delta_0}{d\varepsilon} = -\frac{\rho_1}{H_0}, \\ \frac{1}{\Delta_0} \frac{d\Delta_0}{d\zeta} = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

che saranno i valori da sostituirsi nel penultimo termine della seconda delle (12).

Le variabili  $\xi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\zeta$  e  $\theta$  essendo di second'ordine, basterà nei termini moltiplicati per esse fare uso semplicemente dei valori di  $y_v$ ,  $z_v$ ,  $\cos Y_v$ , e  $\cos Z_v$ , datici dalle (12) del Capitolo III, Parte I, nelle quali le  $P$ ,  $Q$  e  $v$  abbiano gli stessi valori impiegati nella prima approssimazione, e  $\Delta_0$  sia rimpiazzato da  $H_0$ , che le quantità trascurate non saranno che di quart'ordine. Secondo quest'osservazione, facciamo nella formola (7) del Capitolo II, Parte I, la sostituzione dei valori di  $\cos Y_v$  e  $\cos Z_v$  che si hanno dalle dette equazioni (12), e, rappresentando il valore di  $\cos X_v$ , simbolicamente colla formola

$$(14) \quad \cos X_v = 1 + \frac{d \cos X_v}{d\xi} \xi + \frac{d \cos X_v}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{d \cos X_v}{d\zeta} \zeta,$$

si riconoscerà facilmente, che si ha

$$(14)_1 \quad \begin{cases} \frac{d \cos X_v}{d\xi} = -\frac{1}{2} v_v^2 \rho_1^2 \left( Q_{2v-1}^{(4)} \right)^2, \\ \frac{d \cos X_v}{d\varepsilon} = \frac{v_v^2 \rho_1}{v_0} Q_{2v-1}^{(4)} P_{2v-1}^{(4)}, \\ \frac{d \cos X_v}{d\zeta} = -\frac{1}{2} \frac{v_v^2}{v_0^2} \left( P_{2v-1}^{(4)} \right)^2. \end{cases}$$

Nello stesso modo la formola (5) del detto Capitolo II ci darà nell'espressione

$$(15) \quad \alpha_v = 1 + \frac{d\alpha_v}{d\xi} \xi + \frac{d\alpha_v}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{d\alpha_v}{d\zeta} \zeta$$

i seguenti valori delle sue derivate

$$(15)_1 \quad \begin{cases} \frac{d\alpha_v}{d\xi} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_1^2}{H_v \rho_v} \left( Q_{2v-2}^{(4)} \right)^2, \\ \frac{d\alpha_v}{d\varepsilon} = \frac{1}{v_0} \frac{\rho_1}{H_v \rho_v} Q_{2v-2}^{(4)} P_{2v-2}^{(4)}, \\ \frac{d\alpha_v}{d\zeta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{v_0^2} \frac{1}{H_v \rho_v} \left( P_{2v-2}^{(4)} \right)^2. \end{cases}$$

Passando a fare le medesime sostituzioni nelle formole (8) ed (11) del Capitolo II, Parte I, che rappresentano rispettivamente i valori di  $\beta_v$  e  $\gamma_v$ , si avrà

$$\beta_v = 1 + \frac{d\beta_v}{d\xi} \xi + \frac{d\beta_v}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{d\beta_v}{d\zeta} \zeta,$$

essendo

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d\beta_v}{d\xi} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_1^2}{h_v \rho_v} (Q_{2v-2})^2 + \frac{1}{2} \frac{f_1^2}{h_v \rho_{v-1}} (Q_{2v-4})^2 + \frac{1}{2} \rho_1^2 v_{v-1}^2 (Q_{2v-3})^2, \\ \frac{d\beta_v}{d\varepsilon} = \frac{1}{v_0} \frac{\rho_1}{h_v \rho_v} Q_{2v-2} P_{2v-2} - \frac{1}{v_0} \frac{\rho_1}{h_v \rho_{v-1}} Q_{2v-4} P_{2v-4} - \frac{v_{v-1}^2}{v_0} \rho_1 Q_{2v-3} P_{2v-3}, \\ \frac{d\beta_v}{d\zeta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{v_0^2} \frac{1}{h_v \rho_v} (P_{2v-2})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{v_0^2} \frac{1}{h_v \rho_{v-1}} (P_{2v-4})^2 + \frac{1}{2} \frac{v_{v-1}^2}{v_0^2} (P_{2v-3})^2. \end{cases}$$

Parimente, posto

$$\gamma_v = 1 + \frac{d\gamma_v}{d\xi} \xi + \frac{d\gamma_v}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{d\gamma_v}{d\zeta} \zeta,$$

si troverà

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{d\gamma_v}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{\rho_1^2}{\rho_v^2} (Q_{2v-2})^2 - \frac{1}{2} v_v \left( \frac{1}{v_v} - \frac{1}{v_{v-1}} \right)^{-1} \rho_1^2 (Q_{2v-1})^2 + \frac{1}{2} v_{v-1} \left( \frac{1}{v_v} - \frac{1}{v_{v-1}} \right)^{-1} \rho_1^2 (Q_{2v-3})^2, \\ \frac{d\gamma_v}{d\varepsilon} = -\frac{1}{v_0} \frac{\rho_1}{\rho_v^2} Q_{2v-2} P_{2v-2} + \frac{v_v}{v_0} \left( \frac{1}{v_v} - \frac{1}{v_{v-1}} \right)^{-1} \rho_1 Q_{2v-1} P_{2v-1} - \frac{v_{v-1}}{v_0} \left( \frac{1}{v_v} - \frac{1}{v_{v-1}} \right)^{-1} \rho_1 Q_{2v-3} P_{2v-3}, \\ \frac{d\gamma_v}{d\zeta} = \frac{1}{2} \frac{1}{v_0^2} \frac{1}{\rho_v^2} (P_{2v-2})^2 - \frac{1}{2} \frac{v_v}{v_0^2} \left( \frac{1}{v_v} - \frac{1}{v_{v-1}} \right)^{-1} (P_{2v-1})^2 + \frac{1}{2} \frac{v_{v-1}}{v_0^2} \left( \frac{1}{v_v} - \frac{1}{v_{v-1}} \right)^{-1} (P_{2v-3})^2. \end{cases}$$

Per avere i coefficienti delle variabili  $\xi, \varepsilon, \zeta$  della variazione  $\delta \Delta$ , diamo ad essa la forma

$$\delta \Delta = \frac{d\Delta}{d\xi} \xi + \frac{d\Delta}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{d\Delta}{d\zeta} \zeta;$$

indi sostituiamo nella (4) per  $(1 - \cos X_n)$ , e per  $(1 - \alpha_n)$  i loro equivalenti segnati (14) e (16), col confronto delle due espressioni di  $\delta \Delta$  si dedurrà

$$\frac{d\Delta}{d\xi} = -\Delta \frac{d \cos X_n}{d\xi} - H_n \frac{d\alpha_n}{d\xi},$$

$$\frac{d\Delta}{d\varepsilon} = -\Delta \frac{d \cos X_n}{d\varepsilon} - H_n \frac{d\alpha_n}{d\varepsilon},$$

$$\frac{d\Delta}{d\zeta} = -\Delta \frac{d \cos X_n}{d\zeta} - H_n \frac{d\alpha_n}{d\zeta}.$$

Ponendo ora per le derivate comprese nei secondi membri i loro valori dati

dalle (14)<sub>1</sub> e (15)<sub>1</sub>, ed eliminando  $v_n \Delta$  colla (2), troveremo

$$(18) \quad \begin{cases} Q_{2n-1} \frac{d\Delta}{d\xi} = \frac{1}{2} \rho_1^2 \left\{ \frac{1}{\rho_n} (Q_{2n-2})^2 Q_{2n-1} - v_n (Q_{2n-1})^2 Q_{2n-3} \right\}, \\ Q_{2n-1} \frac{d\Delta}{d\varepsilon} = -\frac{\rho_1}{v_0} \left\{ \frac{1}{\rho_n} P_{2n-2} Q_{2n-2} - v_n P_{2n-1} Q_{2n-2} \right\} Q_{2n-1}, \\ Q_{2n-1} \frac{d\Delta}{d\zeta} = \frac{1}{2} \frac{1}{v_0^2} \left\{ \frac{1}{\rho_n} (P_{2n-1})^2 Q_{2n-1} - v_n (P_{2n-1})^2 Q_{2n-3} \right\}. \end{cases}$$

L'ultima derivata, che rimane a determinarsi, è quella della velocità  $v_v$  di propagazione della luce, o del suo valore inverso. Distinguendo con l'indice  $v$ , posto sotto le lettere  $a, b, c$  dell'espressione generale (10), i valori delle medesime appartenenti al mezzo compreso fra le due superficie a cui competono gli indici  $v$  e  $v+1$ , e prendendo le derivate dell'espressione risultante rispetto a  $\theta$ , si avrà

$$(19) \quad \frac{d \frac{1}{v}}{d\theta} = b_v + 2c_v \theta,$$

e quindi

$$(20) \quad \frac{dv_v}{d\theta} = -\frac{1}{a_v} \frac{b_v}{a_v} + \frac{2}{a_v} \left( \frac{b_v^2}{a_v^2} - \frac{c_v}{a_v} \right) \theta.$$

Il secondo termine di queste espressioni potrebbe servire, come già è stato osservato, se si volesse tener conto degli spettri secondarii, ed in questo caso ciascuna delle (12) darebbe due equazioni da verificarsi, perchè bisognerebbe porre eguale o zero separatamente le due parti, quella che contiene il fattore variabile  $\theta$ , e quella che non lo contiene. Comunemente però potremo limitarci al solo primo termine, e prendere semplicemente

$$(21) \quad \frac{d \frac{1}{v_v}}{d\theta} = b_v, \quad (22) \quad \frac{dv}{d\theta} = -\frac{b_v}{a_v^2}.$$

2.

*Formole esprimenti le derivate delle  $p$  per mezzo di quelle ottenute nell'articolo precedente.*

Le quantità  $p$ , che abbiamo chiamato gli elementi delle  $P$ , perchè queste sono formate puramente con quelle, essendo soggette a cambiar di forma, se-

condo che appartengono alla prima, o seconda colonna delle due serie segnate (6) e (6)<sub>1</sub>, nel Capitolo III della Parte I, forniscono due specie di quantità, che abbisognano d'essere trattate a parte.

La forma generale delle  $p$  con indici dispari essendo

$$(25) \quad p_{2\nu-1} = \frac{\gamma_\nu}{\rho_\nu} \left( \frac{1}{v_\nu} - \frac{1}{v_{\nu-1}} \right),$$

e non contenendo di variabile che  $\gamma_\nu$ ,  $v_\nu$ , e  $v_{\nu-1}$  ci darà colle derivazioni

$$\frac{dp_{2\nu-1}}{d\xi} = \frac{1}{\rho_\nu} \left( \frac{1}{v_\nu} - \frac{1}{v_{\nu-1}} \right) \frac{d\gamma_\nu}{d\xi},$$

$$\frac{dp_{2\nu-1}}{d\varepsilon} = \frac{1}{\rho_\nu} \left( \frac{1}{v_\nu} - \frac{1}{v_{\nu-1}} \right) \frac{d\gamma_\nu}{d\varepsilon},$$

$$\frac{dp_{2\nu-1}}{d\zeta} = \frac{1}{\rho_\nu} \left( \frac{1}{v_\nu} - \frac{1}{v_{\nu-1}} \right) \frac{d\gamma_\nu}{d\zeta},$$

$$\frac{dp_{2\nu-1}}{d\theta} = \frac{1}{\rho_\nu} (b_\nu - b_{\nu-1}).$$

Parimente la forma generale delle  $p$  con indice pari essendo

$$p_{2\nu-2} = v_{\nu-1} \beta_\nu h_\nu,$$

nella quale le variabili sono  $\beta_\nu$  e  $v_{\nu-1}$ , dalla medesima si ricaverà

$$\frac{dp_{2\nu-2}}{d\xi} = v_{\nu-1} h_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\xi},$$

$$\frac{dp_{2\nu-2}}{d\varepsilon} = v_{\nu-1} h_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\varepsilon},$$

$$\frac{dp_{2\nu-2}}{d\zeta} = v_{\nu-1} h_\nu \frac{d\beta_\nu}{d\zeta},$$

$$\frac{dp_{2\nu-2}}{d\theta} = -\frac{h_\nu b_{\nu-1}}{a_{\nu-1}^2}.$$

Preparate le espressioni delle varie derivate che occorrono per applicare le equazioni (12) alla composizione di quelle che risultano prendendo per  $\varphi$  una delle quattro variabili  $\xi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\zeta$  e  $\theta$ , passiamo alla formazione di esse.

### CAPITOLO III.

EQUAZIONI CHE DEVONO ESSERE SODDISFATTE RESPETTIVAMENTE PER CIASCUNA SPECIE D'ABERRAZIONE ACCIÒ UNO STROMENTO OTTICO SIA ESENTE DA ESSA.

#### 1.

*Equazioni per l'annichilamento dell'aberrazione d'apertura.*

Abbiamo dato il nome d'*aberrazione d'apertura* a quella parte d'aberrazione, che nelle (12) sarebbe rappresentata dai termini moltiplicati per la variabile  $\xi$ , qualora la somma di tutti i suoi coefficienti non fosse nulla, perchè questa variabile essendo espressa da

$$\xi = \frac{y_1^2 + z_1^2}{\rho_1},$$

la parte d'aberrazione, relativa ai detti termini sarebbe dipendente dalla quantità  $y_1^2 + z_1^2$ , vale a dire, dalla grandezza dell'apertura della superficie obbiettiva che si considera.

Per ottenere le due equazioni relative a questa specie d'aberrazione, altro non abbiamo a fare, che porre nelle formole (12),  $\varphi = \xi$ , prendere sotto i segni sommatorii  $i = 2\nu - 1$ , e poi  $i = 2\nu - 2$ , e dare a  $\nu$  successivamente tutti i valori in numeri interi da  $\nu = 1$  sino a  $\nu = n$ .

Eseguendo queste operazioni, indi sostituendo per le varie derivate rispetto a  $\xi$  le loro espressioni forniteci dal Capitolo precedente, ed impiegando, ciò che è lecito nel grado adottato d'approssimazione, per  $\frac{1}{v_\nu}$  e  $v_\nu$  i loro valori

medii  $a$ , ed  $\frac{1}{a_\nu}$ , si troverà

1.<sup>ma</sup> Equazione.

$$\begin{aligned}
& Q_0 P_0 \left\{ \frac{1}{a_1 \rho_1} (Q_1)^2 - \frac{a_1 - a_0}{\rho_1^3} (Q_0)^2 \right\}, \\
& + Q_2 P_2 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_2} (Q_3)^2 - \frac{a_2 - a_1}{\rho_2^3} (Q_2)^2 - \frac{1}{a_1 \rho_1} (Q_1)^2 \right\} \\
& + Q_4 P_4 \left\{ \frac{1}{a_3 \rho_3} (Q_5)^2 - \frac{a_3 - a_2}{\rho_3^3} (Q_4)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_2} (Q_3)^2 \right\} \\
& \vdots \\
& + Q_{2n-2} P_{2n-2} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} (Q_{2n-1})^2 - \frac{a_n - a_{n-1}}{\rho_n^3} (Q_{2n-2})^2 - \frac{1}{a_{n-1} \rho_{n-1}} (Q_{2n-3})^2 \right\} \\
& - Q_1 P_1 \left\{ \frac{1}{a_1 \rho_2} (Q_2)^2 - \frac{h_2 - a_1}{a_1^3} (Q_1)^2 - \frac{1}{a_1 \rho_1} (Q_0)^2 \right\} \\
& - Q_3 P_3 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_3} (Q_4)^2 - \frac{h_3 - a_2}{a_2^3} (Q_3)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_2} (Q_2)^2 \right\} \\
& \vdots \\
& - Q_{2n-5} P_{2n-5} \left\{ \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} (Q_{2n-4})^2 - \frac{h_n - a_{n-1}}{a_{n-1}^3} (Q_{2n-5})^2 - \frac{1}{a_{n-1} \rho_{n-1}} (Q_{2n-6})^2 \right\} \\
& + Q_{2n-1} P_{2n-1} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} (Q_{2n-2})^2 - \frac{1}{a_n^2} Q_{2n-1} Q_{2n-2} \right\} = 0
\end{aligned}$$

2.<sup>da</sup> Equazione.

$$\begin{aligned}
& Q_2 P_2 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_2} (Q_3)^2 - \frac{a_2 - a_1}{\rho_2^3} (Q_2)^2 - \frac{1}{a_1 \rho_1} (Q_1)^2 \right\} \\
& + Q_4 P_4 \left\{ \frac{1}{a_3 \rho_3} (Q_5)^2 - \frac{a_3 - a_2}{\rho_3^3} (Q_4)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_2} (Q_3)^2 \right\} \\
& \vdots \\
& + Q_{2n-2} P_{2n-2} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} (Q_{2n-1})^2 - \frac{a_n - a_{n-1}}{\rho_n^3} (Q_{2n-2})^2 - \frac{1}{a_{n-1} \rho_{n-1}} (Q_{2n-3})^2 \right\} \\
& - Q_1 P_1 \left\{ \frac{1}{a_1 \rho_2} (Q_2)^2 - \frac{h_2 - a_1}{a_1^3} (Q_1)^2 - \frac{1}{a_1 \rho_1} (Q_0)^2 \right\} \\
& - Q_3 P_3 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_3} (Q_4)^2 - \frac{h_3 - a_2}{a_2^3} (Q_3)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_2} (Q_2)^2 \right\} \\
& \vdots \\
& - Q_{2n-5} P_{2n-5} \left\{ \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} (Q_{2n-4})^2 - \frac{h_n - a_{n-1}}{a_{n-1}^3} (Q_{2n-5})^2 - \frac{1}{a_{n-1} \rho_{n-1}} (Q_{2n-6})^2 \right\} \\
& + Q_{2n-1} P_{2n-1} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} (Q_{2n-2})^2 - \frac{1}{a_n^2} Q_{2n-1} Q_{2n-2} \right\} + \frac{1}{\rho_1 H_0} \left( 1 + \frac{\rho_1}{H_0} \right) = 0
\end{aligned}$$

nelle quali equazioni abbiamo tolto il fattore  $\frac{1}{2} \rho_1^2$  comune a tutti i termini, e nella seconda di esse abbiamo ommesso il primo termine, perchè, giusta la formula (II) del Capitolo III, Parte I, si ha  $P_0 = 0$ . Si osserverà che la seconda equazione risulta dalla prima cambiando alle P, poste fuori delle parentesi, l'indice superiore (4) nell'indice (3), ed aggiungendovi un'ultimo termine.

## 2.

## Equazioni per correggere l'aberrazione diedra.

Se per l'asse centrale si conducono due piani, l'uno passante pel punto raggiante e l'altro pel punto d'incidenza del raggio luminoso sull'obbiettivo, e si denotano con L ed l gli angoli che questi due piani fanno con quello delle x, y, si vede che la variabile  $\epsilon$ , la quale ci vien data dalla seconda delle formole (9) del Capitolo I, può mettersi sotto la forma

$$\epsilon = \text{tang } O \sin o \cos (L-l),$$

rappresentando con O ed o gli angoli che la retta, condotta dal centro di figura della superficie obbiettiva al punto raggiante, e quella, condotta dal centro della stessa superficie al punto d'incidenza, fanno rispettivamente coll'asse centrale.

Quando la somma dei coefficienti, nei quali questa variabile trovasi moltiplicata nelle equazioni (8), non fosse nulla, l'errore proveniente in esse corrisponderebbe ad un'aberrazione di una specie propria, che, nei raggi partiti da uno stesso punto luminoso posto fuori dell'asse centrale, ed incidenti ad egual distanza da esso sull'obbiettivo, sarebbe massima nel piano azzimutale l, che soddisficesse alle relazioni  $L - l = 0$ , ovvero  $L - l = \pi$ , e sarebbe nulla in quello soddisfacente alle relazioni  $L - l = \frac{1}{2} \pi$  ovvero  $L - l = \frac{3}{2} \pi$ , e nei valori intermedi dell'angolo  $L - l$  diminuirebbe o crescerebbe proporzionalmente al coseno di quest'angolo diedro, motivo per cui abbiamo qualificato tale aberrazione coll'epiteto di *diedra*. È poi facile di riconoscere che, eccettuando fra i detti raggi quelli nei quali l'aberrazione è massima, tutti gli altri si propagano in direzioni comprese in piani che non potrebbero mai passare per l'asse centrale (\*).

(\*) Aggiungeremo qui un'osservazione che servirà a schiarire quanto abbiamo detto nel Preliminare circa all'essersi fin qui limitata la Teoria degli stromenti ottici alla considerazione dei soli raggi che si propagano in piani passanti per l'asse centrale, omettendo quella di tutti i raggi diretti in piani secanti l'asse medesimo.

Fin a tanto che si trascurano le quantità di second'ordine in confronto dell'unità, la distinzione di queste due classi di raggi risulta superflua, perchè le proiezioni si degli uni che degli altri sull'asse centrale differendo dalle loro obbiettive di quantità di secon-



Per esprimere le condizioni d'annullamento di quest'aberrazione pongasi  $\epsilon$  invece della variabile  $p$ , nelle equazioni (12), e sostituiscansi per le derivate delle  $p$  prese rispetto ad  $\epsilon$  i loro valori già dati, indi posto  $i = 2\nu - 1$  e poi  $i = 2\nu - 2$ , si estendano le sommazioni da  $\nu = 1$  a  $\nu = n$ , con chè si perverrà alle due equazioni.

1.ª Equazione.

$$\begin{aligned} & Q_0 P_0 \left\{ \frac{1}{a_1 \rho_1} Q_1 P_1 \right. \\ & + Q_2 P_2 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_2} Q_3 P_3 - \frac{a_2 - a_1}{\rho_2^3} Q_2 P_2 - \frac{1}{a_1 \rho_2} Q_1 P_1 \right\} \\ & + Q_4 P_4 \left\{ \frac{1}{a_3 \rho_3} Q_5 P_5 - \frac{a_3 - a_2}{\rho_3^3} Q_4 P_4 - \frac{1}{a_2 \rho_3} Q_3 P_3 \right\} \\ & \vdots \\ & + Q_{2n-2} P_{2n-2} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} Q_{2n-1} P_{2n-1} - \frac{a_n - a_{n-1}}{\rho_n^3} Q_{2n-2} P_{2n-2} - \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} Q_{2n-3} P_{2n-3} \right\} \\ & - Q_1 P_1 \left\{ \frac{1}{a_1 \rho_2} Q_2 P_2 - \frac{h_2}{a_1^3} Q_1 P_1 \right\} \\ & - Q_3 P_3 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_3} Q_4 P_4 - \frac{h_3}{a_2^3} Q_3 P_3 - \frac{1}{a_2 \rho_2} Q_2 P_2 \right\} \\ & \vdots \\ & - Q_{2n-3} P_{2n-3} \left\{ \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} Q_{2n-2} P_{2n-2} - \frac{h_n}{a_{n-1}^3} Q_{2n-3} P_{2n-3} - \frac{1}{a_{n-1} \rho_{n-1}} Q_{2n-4} P_{2n-4} \right\} \\ & + Q_{2n-1} P_{2n-1} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} Q_{2n-2} P_{2n-2} - \frac{1}{a_n^2} Q_{2n-2} P_{2n-1} \right\} = 0. \end{aligned}$$

d'ordine, i fuochi coniugati dei varii raggi componenti un pennello luminoso si possono considerare, entro questi limiti d'approssimazione, come coincidenti in un sol punto: ma non è più lo stesso quando si debba tener conto delle quantità di terz'ordine in confronto di quelle di primo, come è d'uopo di fare pel calcolo delle aberrazioni. Questo è il motivo per cui le formole, fondate sopra un'equazione generale nella quale l'influenza dei raggi situati in piani secanti l'asse centrale è stata preterita, come in quella assunta dal Lagrange, o sopra equazioni dalle quali la detta influenza è stata esclusa dal bel principio, come in quelle del Gauss, non possono applicarsi ad una valutazione completa degli effetti degli stromenti ottici.

I due soli Autori venuti a mia cognizione, che, trattando la Teoria degli stromenti ottici, hanno rappresentato il corso d'un raggio luminoso con due equazioni, vale a dire non in un piano, ma nello spazio, sono il sig. Biot nell'opera già citata, ed il celebre Gauss in una Memoria fra quelle del Tomo I (*nuova serie*) della R. Società di Gottinga, e della quale il dotto Prof. Bravais ha pubblicato recentemente una traduzione francese; ma nè l'uno, nè l'altro di questi Autori hanno condotto abbastanza avanti l'approssimazione delle loro formole da far emergere la necessità d'aver riguardo ad ambedue le dette classi di raggi.

2.ª Equazione.

$$\begin{aligned} & Q_2 P_2 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_2} Q_3 P_3 - \frac{a_2 - a_1}{\rho_2^3} Q_2 P_2 - \frac{1}{a_1 \rho_2} Q_1 P_1 \right\} \\ & + Q_4 P_4 \left\{ \frac{1}{a_3 \rho_3} Q_5 P_5 - \frac{a_3 - a_2}{\rho_3^3} Q_4 P_4 - \frac{1}{a_2 \rho_3} Q_3 P_3 \right\} \\ & \vdots \\ & + Q_{2n-2} P_{2n-2} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} Q_{2n-1} P_{2n-1} - \frac{a_n - a_{n-1}}{\rho_n^3} Q_{2n-2} P_{2n-2} - \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} Q_{2n-3} P_{2n-3} \right\} \\ & - Q_1 P_1 \left\{ \frac{1}{a_1 \rho_2} Q_2 P_2 - \frac{h_2}{a_1^3} Q_1 P_1 \right\} \\ & - Q_3 P_3 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_3} Q_4 P_4 - \frac{h_3}{a_2^3} Q_3 P_3 - \frac{1}{a_2 \rho_2} Q_2 P_2 \right\} \\ & \vdots \\ & - Q_{2n-3} P_{2n-3} \left\{ \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} Q_{2n-2} P_{2n-2} - \frac{h_n}{a_{n-1}^3} Q_{2n-3} P_{2n-3} - \frac{1}{a_{n-1} \rho_{n-1}} Q_{2n-4} P_{2n-4} \right\} \\ & + Q_{2n-1} P_{2n-1} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} Q_{2n-2} P_{2n-2} - \frac{1}{a_n^2} Q_{2n-2} P_{2n-1} \right\} - \frac{1}{a_0 H_0} = 0 \end{aligned}$$

Per semplicità si è tolto a tutti i termini di queste equazioni il fattore  $a_0 \rho_1$ .

3.

Equazioni per la distruzione d'aberrazione di campo.

La terza variabile  $\zeta$ , la quale, secondo le denominazioni introdotte colle formole (9) del Capitolo I, ci è data da

$$\zeta = \frac{y_0^2 + z_0^2}{H_0^2},$$

rappresenta evidentemente il quadrato della tangente dell'angolo che il raggio visuale, condotto dal centro di figura della superficie obbiettiva al punto raggiante, fa coll'asse centrale. Se il coefficiente di questa variabile nelle equazioni (8) non fosse nullo ne risulterebbe in esse un'errore corrispondente ad un'aberrazione, che sarebbe nulla se il detto punto fosse situato sull'asse centrale, e quindi veduto nel centro del campo dello stromento; ma comincerebbe ad esistere ed andrebbe aumentando di mano in mano che il punto medesimo si scostasse dall'asse centrale, e fosse veduto più lontano dal detto

centro. Chiameremo quindi quest'aberrazione, dipendente dal luogo che occupa nel campo dello stromento l'immagine del punto radiante, *aberrazione di campo*.

Per ottenere le equazioni esprimenti che il coefficiente delle  $\zeta$  è nullo nelle equazioni (8), bisogna porre  $\varphi = \zeta$  nelle (12), e dopo aver estese le somministrazioni nei limiti sopra indicati, sostituire per le derivate relative a questa variabile i valori che abbiamo riferiti nel Capitolo precedente. Si conseguiranno in questo modo le due seguenti equazioni.

1.<sup>ma</sup> Equazione.

$$\begin{aligned} & Q_0 P_0 \left\{ \frac{1}{a_1 \rho_1} (P_1)^2 \right. \\ & + Q_2 P_2 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_2} (P_3)^2 - \frac{a_2 - a_1}{\rho_2^3} (P_2)^2 - \frac{1}{a_1 \rho_2} (P_1)^2 \right\} \\ & + Q_4 P_4 \left\{ \frac{1}{a_3 \rho_3} (P_5)^2 - \frac{a_3 - a_2}{\rho_3^3} (P_4)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_3} (P_3)^2 \right\} \\ & \dots \\ & + Q_{2n-2} P_{2n-2} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} (P_{2n-1})^2 - \frac{a_n - a_{n-1}}{\rho_n^3} (P_{2n-2})^2 - \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} (P_{2n-3})^2 \right\} \\ & - Q_1 P_1 \left\{ \frac{1}{a_1 \rho_2} (P_2)^2 - \frac{h_2^2}{a_1^3} (P_1)^2 \right\} \\ & - Q_3 P_3 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_3} (P_4)^2 - \frac{h_3^2}{a_2^3} (P_3)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_2} (P_2)^2 \right\} \\ & \dots \\ & - Q_{2n-5} P_{2n-5} \left\{ \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} (P_{2n-2})^2 - \frac{h_n^2}{a_{n-1}^3} (P_{2n-3})^2 - \frac{1}{a_{n-1} \rho_{n-1}} (P_{2n-4})^2 \right\} \\ & + P_{2n-1} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} Q_{2n-1} (P_{2n-2})^2 - \frac{1}{a_n^3} Q_{2n-2} (P_{2n-1})^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

2.<sup>da</sup> Equazione.

$$\begin{aligned} & Q_3 P_3 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_2} (P_5)^2 - \frac{a_2 - a_1}{\rho_2^3} (P_4)^2 - \frac{1}{a_1 \rho_2} (P_3)^2 \right\} \\ & + Q_4 P_4 \left\{ \frac{1}{a_3 \rho_3} (P_5)^2 - \frac{a_3 - a_2}{\rho_3^3} (P_4)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_3} (P_3)^2 \right\} \\ & \dots \\ & + Q_{2n-2} P_{2n-2} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} (P_{2n-1})^2 - \frac{a_n - a_{n-1}}{\rho_n^3} (P_{2n-2})^2 - \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} (P_{2n-3})^2 \right\} \\ & - Q_1 P_1 \left\{ \frac{1}{a_1 \rho_2} (P_2)^2 - \frac{h_2^2}{a_1^3} (P_1)^2 \right\} \\ & - Q_3 P_3 \left\{ \frac{1}{a_2 \rho_3} (P_4)^2 - \frac{h_3^2}{a_2^3} (P_3)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_2} (P_2)^2 \right\} \\ & \dots \\ & - Q_{2n-5} P_{2n-5} \left\{ \frac{1}{a_{n-1} \rho_n} (P_{2n-2})^2 - \frac{h_n^2}{a_{n-1}^3} (P_{2n-3})^2 - \frac{1}{a_{n-1} \rho_{n-1}} (P_{2n-4})^2 \right\} \\ & + P_{2n-1} \left\{ \frac{1}{a_n \rho_n} Q_{2n-1} (P_{2n-2})^2 - \frac{1}{a_n^3} Q_{2n-2} (P_{2n-1})^2 \right\} + \frac{1}{a_0^2} = 0 \end{aligned}$$

In queste due equazioni è stato tolto il fattore  $\frac{1}{2} a^2$ .

4.

Equazioni per le correzioni d'aberrazione cromatica.

L'aberrazione cromatica dipende dai termini delle equazioni (8), che contengono la variabile  $\theta$ . Acciò quest'aberrazione manchi, la somma di questi termini deve essere nulla. Bisognerà pertanto che, cambiando  $\varphi$  in  $\theta$  nelle equazioni (12), indi sostituendo per le derivate rispetto a quest'ultima variabile i loro valori precedentemente dati, ed estendendo le somministrazioni, come si è fatto rispetto alle altre variabili, sussistano le equazioni:

1.<sup>ma</sup> Equazione.

$$\begin{aligned} & Q_0 P_0 \frac{b_1 - b_2}{\rho_1} + Q_2 P_2 \frac{b_2 - b_1}{\rho_2} \dots \dots \dots + Q_{2n-2} P_{2n-2} \frac{b_n - b_{n-1}}{\rho_n} \\ & + Q_1 P_1 h_2 \frac{b_1}{a_1^2} + Q_3 P_3 h_3 \frac{b_2}{a_2^2} \dots \dots + Q_{2n-5} P_{2n-5} h_n \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}^2} - Q_{2n-2} P_{2n-1} \frac{b_n}{a_n} = 0 \end{aligned}$$

2.<sup>da</sup> Equazione.

$$\begin{aligned}
 & Q_2 P_2 \frac{b_2 - b_1}{\rho_2} + Q_4 P_4 \frac{b_4 - b_3}{\rho_4} \dots \dots \dots + Q_{2n-2} P_{2n-2} \frac{b_n - b_{n-1}}{\rho_n} \\
 & + Q_1 P_1 h_2 \frac{b_1}{a_1^2} + Q_3 P_3 h_3 \frac{b_2}{a_2^2} \dots \dots \dots + Q_{2n-3} P_{2n-3} h_n \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}^2} - Q_{2n-2} P_{2n-2} \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_0}{a_0} = 0
 \end{aligned}$$

Le otto equazioni che abbiamo formato per le quattro specie d'aberrazione sono abbastanza esplicite per essere facilmente applicabili ad ogni caso. Infatti non rimane più altro a fare che sostituire, per ogni dato valore di  $n$ , in luogo delle  $P$  e  $Q$  le loro corrispondenti espressioni composte colle regole spiegate nel Capitolo IV, Parte I, e nell'articolo 6 del Capitolo II, Parte II, e si vedrà colle seguenti applicazioni che, omettendo nelle dette espressioni le quantità che si considerano come di second'ordine, i loro valori risultano in varii casi assai semplici.

## PARTE QUARTA

ESEMPI DI CALCOLO DI LENTI APLANATICHE.

### CAPITOLO I.

CALCOLO D'UN OGGETTIVO APLANATICO A DUE LENTI.

#### 1.

*Considerazioni preliminari.*

Già abbiamo osservato che un sistema ottico destinato ad aggrandire la visione degli oggetti è sempre decomponibile in due sistemi parziali, il primo dei quali, stando dalla parte dell'oggetto, è chiamato sistema obbiettivo, ed il secondo, stando dalla parte a cui viene applicato l'occhio dell'osservatore, vien detto sistema oculare. Questi due sistemi, essendo destinati ad essere mobili uno rispettivamente all'altro, secondo la distanza degli oggetti e secondo la vista dell'osservatore, devono formare uno stromento che si mantenga aplanatico indipendentemente dalla loro distanza reciproca. Per ottenere un tale intento, nel modo più conveniente per la costruzione dei telescopii e dei microscopii, si è preso il partito di rendere separatamente aplanatici gli obbiettivi, formandoli di due o più lenti semplici a contatto fra loro, aventi le loro curvature ed i poteri dispersivi combinati di sorta, che gli effetti delle aberrazioni siano nella più gran parte distrutti. A noi pare che, stante la maggior facilità con cui ora si sa dar forma e pulimento alle lenti, sarebbe conveniente di generalizzare un tale ripiego, e costruire gli stromenti ottici di sole lenti composte, ciascuna delle quali fosse, per quanto è possibile conseguirlo, aplanatica per se stessa. Per tal modo un'istromento qualunque, riuscendo in gran parte esente d'aberrazioni, indipendentemente dalle situazioni rispettive delle lenti,

presenterebbe minore difficoltà al compimento di una perfetta costruzione, ed una maggiore suscettibilità d'applicazioni. L'inconveniente, a cui ci esporrebbe questo modo di composizione, sarebbe unicamente quello d'una maggior perdita di luce, ma, scegliendo dei cristalli ben puri, facendo le lenti semplici sottili quanto si può, lavorandole con precisione e ponendo tutte le loro superficie interne a perfetto contatto, tale perdita non sarebbe gran che nociva. Preferiremo quindi fra le applicazioni, che, a modo d'esempio, possiamo fare delle formole date nella Parte precedente, quelle relative alla costruzione di lenti composte che risultino aplanatiche nel miglior grado possibile; e cominciando dal caso più semplice, ci occuperemo nei prossimi articoli della costruzione di una lente obbiettiva, composta di due sole lenti a contatto, i cristalli delle quali abbiano indici di rifrazione e poteri dispersivi diversi.

#### 2.

*Equazioni particolari al caso propostoci, dedotte da quelle generali date nella Parte precedente.*

Per applicare le otto equazioni generali, date nel Capitolo III della Parte precedente, al caso di due lenti al contatto bisognerà prendere il numero delle superficie  $n = 4$ . Inoltre, trattandosi di calcolare delle equazioni, alle quali è sufficiente di soddisfare approssimativamente, poichè l'influenza dei loro errori sarebbe di gran lunga diminuita dalle piccolezze dei fattori per cui dovrebbero in seguito essere moltiplicati, potremo considerare i valori di tutte le distanze  $h$ , qualunque sia il loro indice, come nulli. Ponendo quindi per brevità

$$a_1 - a_0 = m_1, \quad a_2 - a_1 = m_2, \quad a_3 - a_2 = m_3, \quad a_4 - a_3 = m_4,$$

dalle formole (6) e (6)<sub>1</sub> del Capitolo III, Parte I, avremo, omettendo sempre le quantità di second'ordine, le seguenti espressioni delle  $p$

$$p_1 = \frac{m_1}{\rho_1}, \quad p_3 = \frac{m_2}{\rho_2}, \quad p_5 = \frac{m_3}{\rho_3}, \quad p_7 = \frac{m_4}{\rho_4},$$
$$p_2 = \frac{h_2}{a_1} = 0, \quad p_4 = \frac{h_3}{a_2} = 0, \quad p_6 = \frac{h_4}{a_3}.$$

Con questi valori delle  $p$  componendo colla legge data all'articolo 1 del Capitolo IV, Parte I, quelli di P e Q si troverà

$$\begin{aligned}
P_1^{(4)} &= \frac{m_1}{\rho_1}, & P_0^{(4)} &= 1, \\
P_3^{(4)} &= \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}, & P_2^{(4)} &= 1, \\
P_5^{(4)} &= \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3}, & P_4^{(4)} &= 1, \\
P_7^{(4)} &= \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \frac{m_4}{\rho_4}, & P_6^{(4)} &= 1, \\
P_1^{(2)} &= 1, & P_0^{(2)} &= 0, \\
P_3^{(2)} &= 1, & P_2^{(2)} &= 0, \\
P_5^{(2)} &= 1, & P_4^{(2)} &= 0, \\
P_7^{(2)} &= 1, & P_6^{(2)} &= 0, \\
Q_1^{(4)} &= \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{a_1}{H_0}, & Q_0^{(4)} &= 1, \\
Q_3^{(4)} &= \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{a_1}{H_0}, & Q_2^{(4)} &= 1, \\
Q_5^{(4)} &= \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \frac{a_1}{H_0}, & Q_4^{(4)} &= 1, \\
Q_7^{(4)} &= \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \frac{m_4}{\rho_4} + \frac{a_1}{H_0}, & Q_6^{(4)} &= 1.
\end{aligned}$$

Si osserverà che nei telescopii, potendosi prendere senza errore sensibile  $\Delta_0 = H_0 = \infty$ , i valori delle Q, aventi l'unità per indice superiore, diverranno identici con quelli delle P.

Ora non ci rimane altro a fare che sostituire nelle citate otto equazioni per le P e le Q i valori surriferiti, ma per dare all'equazione risultante una forma più regolare giova fare le sostituzioni per colonne invece che per linee. Noi eseguiremo questo calcolo per intero rispetto alla prima equazione dell'aberrazione d'apertura, che è la più complicata, e riferiremo soltanto i risultati rispetto alle altre che sono più semplici, e si ottengono in un modo simile.

Prima equazione d'aberrazione d'apertura.

Eseguendo le dette sostituzioni si ha primieramente

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a_1 \rho_1} \left( \frac{m_1}{\rho_1} \right)^2 + \frac{1}{a_2 \rho_2} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)^2 + \frac{1}{a_3 \rho_3} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} \right)^2 \\
& + \frac{1}{a_4 \rho_4} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \frac{m_4}{\rho_4} \right)^2 \\
& - \frac{m_1}{\rho_1^3} - \frac{m_2}{\rho_2^3} - \frac{m_3}{\rho_3^3} - \frac{m_4}{\rho_4^3} \\
& - \frac{1}{a_1 \rho_2} \left( \frac{m_1}{\rho_1} \right)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_3} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)^2 - \frac{1}{a_3 \rho_4} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} \right)^2 \\
& - \frac{1}{a_1 \rho_2} \left( \frac{m_1}{\rho_1} \right)^2 - \frac{1}{a_2 \rho_3} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)^2 - \frac{1}{a_3 \rho_4} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} \right)^2 \\
& + \frac{1}{a_1 \rho_1} \left( \frac{m_1}{\rho_1} \right)^2 + \frac{1}{a_2 \rho_2} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)^2 + \frac{1}{a_3 \rho_3} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} \right)^2 \\
& + \frac{1}{a_4 \rho_4} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \frac{m_4}{\rho_4} \right)^2 - \frac{1}{a_4^2} \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \frac{m_4}{\rho_4} \right)^2 = 0
\end{aligned}$$

indi raccogliendo i termini simili, e notando che, presa per unità la velocità della luce nell'aria atmosferica, si ha  $a_0 = a_2 = a_4 = 1$ , per cui risulta

$$m_2 = -m_1, \quad m_4 = -m_3;$$

e che per essere le due lenti semplici a perfetto contatto si ha

$$\rho_2 = \rho_3,$$

si vedrà che alla precedente equazione si può dare la forma

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{a_1} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \left( \frac{m_1}{\rho_1} \right)^2 + \frac{2}{a_3} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_4} \right) \left\{ m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + m_3 \frac{1}{\rho_2} \right\}^2 \\
& - m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \left( \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1 \rho_2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) - m_3 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_4} \right) \left( \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_2 \rho_4} + \frac{1}{\rho_4^2} \right) \\
& - \frac{1}{F} \left( \frac{2}{\rho_1} + \frac{1}{F} \right) \left\{ m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + m_3 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_4} \right) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

nella quale l'apparizione della distanza focale F è dovuta a che, giusta le formole (1) del Capitolo III, Parte II, ed i surriferiti valori di P<sub>7</sub> e P<sub>6</sub>, si ha

$$(\varphi) \quad \frac{1}{F} = -\frac{1}{a_4} \left\{ m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + m_3 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_4} \right) \right\}.$$



*Seconda equazione d'aberrazione d'apertura.*

Con un processo simile, ma assai più breve, si troverà che questa seconda equazione è data da

$$(\xi)_2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{a_1} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{1}{a_3} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_4} \right) \left\{ m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + m_3 \frac{1}{\rho_2} \right\} \\ & + \left( \frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{F} \right) \left\{ m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + m_3 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_4} \right) \right\} = 0 . \end{aligned} \right.$$

*Prima equazione d'aberrazione diedra.*

La richiesta equazione risulta, nel caso che consideriamo, identica colla precedente, si ha cioè

$$(\epsilon)_1 = (\xi)_2$$

*Seconda equazione d'aberrazione diedra.*

Si ricava per quest'equazione

$$(\epsilon)_2 \quad \frac{1}{F} = 0 .$$

*Prima equazione d'aberrazione di campo.*

L'equazione da verificarsi è

$$(\zeta) \quad \frac{1}{a_1} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{1}{a_3} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_4} \right) + \frac{1}{a_4} \left( \frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{F} \right) = 0 .$$

*Seconda equazione d'aberrazione di campo.*

Risulta per detta equazione la seguente

$$-\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} = 0$$

che è verificata per se stessa, poichè  $a_0 = a_4 = 1$ .

*Prima equazione d'aberrazione cromatica.*

Per questa equazione si trova

$$\frac{b_1 - b_0}{\rho_1} + \frac{b_2 - b_1}{\rho_2} + \frac{b_3 - b_2}{\rho_3} + \frac{b_4 - b_3}{\rho_4} + \frac{b_4}{F} = 0 .$$

Il potere dispersivo nel vuoto o nell'aria potendosi avere per nullo, sarà  $b_0 = b_2 = b_4 = 0$ , e quest'equazione si ridurrà a

$$(\theta)_1 \quad b_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + b_3 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_4} \right) = 0 .$$

*Seconda equazione d'aberrazione cromatica.*

Si riconoscerà per ultimo che la seconda equazione cromatica è nulla come composta di termini tutti trascurabili, e che si ha prossimamente

$$(\theta)_2 = 0 .$$

Avanti di por termine a quest'articolo faremo notare una incompatibilità che ci presenta la seconda equazione diedra. Qualunque sia il numero delle lenti delle quali si compone l'obbiettivo, e qualunque sia la distanza  $H_0$ , a cui l'oggetto stà dal centro di figura della prima superficie di esso, quell'equazione si riduce costantemente, negli assunti limiti d'approssimazione, ad

$$\frac{1}{F} = 0 .$$

Ora  $F$  rappresentando la lunghezza focale dell'obbiettivo la quale non potrebbe mai farsi infinita senza distruggere l'effetto diottrico della lente, quest'equazione ci fa vedere che, con lenti di piccola grossezza poste a contatto, non è mai possibile di comporre un'obbiettivo il quale sia esente della specie d'aberrazione che essa sarebbe destinata a distruggere.

3.

*Risoluzione delle precedenti equazioni.*

Le quantità indeterminate che sono contenute nelle premesse equazioni essendo le sole lunghezze dei tre raggi di curvatura  $\rho_1, \rho_2, \rho_4$ ; queste non sono sufficienti per soddisfare alle quattro equazioni segnate  $(\xi)_1, (\xi)_2 = (\epsilon)_1, (\xi)_1$  e  $(\theta)_1$ , ed alla relazione indispensabile dataci dalla formola  $(\varphi)$ , in cui  $F$  deve essere considerata come data di valore. Per diminuire quanto è possibile il numero delle equazioni che rimangono inverificate, risguarderemo il rapporto di  $b_1$  a  $b_3$ , dei due poteri dispersivi dei cristalli di cui le rispettive lenti semplici sono formate, come indeterminato, poichè si sa che, coll'accrescere o diminuire la quantità di piombo nella fusione delle materie componenti i cristalli, si può far variare i loro poteri dispersivi, e con alcuni tentativi ben diretti con-

seguire che abbiano il rapporto voluto. In tal modo potremo soddisfare a quattro delle citate equazioni, e non rimarrà inverificata che la sola ( $\xi$ ) oltre quella segnata ( $\epsilon$ )<sub>2</sub>, che abbiamo già osservato essere incompatibile con un obbiettivo formato di lenti semplici in contatto.

Per dar esecuzione alla risoluzione delle nostre equazioni nelle condizioni ora esposte, osserveremo primieramente che per mezzo dell'equazione ( $\theta$ )<sub>1</sub>, la quale è molto semplice, possiamo abbassare di un'unità il grado delle equazioni ( $\xi$ )<sub>1</sub> e ( $\xi$ )<sub>2</sub>, che sono state a bella posta preparate sotto una forma che si presta facilmente a tale riduzione. Basta a tale oggetto moltiplicare le due dette equazioni per  $b_3$ , e poi sostituire a

$$b_3 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_4} \right)$$

il valore che si trae dalla ( $\theta$ )<sub>1</sub>, che con ciò si ottiene che tutti i termini di quelle due equazioni sono divisibili per  $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$  e divengono

$$(\xi)_1' \left\{ \begin{aligned} & 2 \frac{b_3}{a_1} \left( \frac{m_1}{\rho_1} \right)^2 - 2 \frac{b_1}{a_3} \left\{ m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + m_3 \frac{1}{\rho_2} \right\}^2 - \frac{2}{F} \left( \frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{2F} \right) (m_1 b_3 - m_3 b_1) \\ & - b_3 m_1 \left( \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1 \rho_2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) + b_1 m_3 \left( \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_2 \rho_4} + \frac{1}{\rho_4^2} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(\xi)_2' \quad \frac{b_3 m_1}{a_1 \rho_1} - \frac{b_1}{a_3} \left\{ m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + m_3 \frac{1}{\rho_2} \right\} + \left( \frac{1}{\rho_4} + \frac{1}{F} \right) (m_1 b_3 - m_3 b_1) = 0 .$$

Ciò premesso ricaviamo ora dalle due equazioni ( $\varphi$ ) e ( $\theta$ )<sub>1</sub> i valori di  $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$  ed  $\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_4}$ ; ponendo per brevità

$$(1) \quad D = m_1 b_3 - m_3 b_1, \quad k_1 D = b_3, \quad k_3 D = b_1$$

troveremo

$$(2) \quad \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = -\frac{k_1}{F}, \quad \frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_4} = -\frac{k_3}{F};$$

nella prima delle citate equazioni abbiamo sostituito  $\rho_2$  a  $\rho_3$ , questi due raggi di curvatura essendo eguali quando le due lenti sono al contatto.

Poniamo ora nelle equazioni ( $\xi$ )<sub>1</sub>' e ( $\xi$ )<sub>2</sub>' per  $\frac{1}{\rho_1}$  ed  $\frac{1}{\rho_4}$  i loro valori che si

ricavano dalle due ultime, e per  $b_1$  e  $b_3$  quelli che somministrano le precedenti posizioni, ed avremo

$$(\xi)_1'' \left\{ \begin{aligned} & \frac{k_1}{a_1} m_1^2 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{k_1}{F} \right)^2 - \frac{k_3}{a_3} \left( m_3 \frac{1}{\rho_2} - m_1 \frac{k_1}{F} \right)^2 - \frac{1}{F} \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{2F} - \frac{k_3}{F} \right) \\ & - \frac{1}{2} k_1 m_1 \left\{ \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{k_1}{F} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{k_1}{F} \right) \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right\} + \frac{1}{2} k_3 m_3 \left\{ \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{k_3}{F} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{k_3}{F} \right) \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(\xi)_2'' \quad \frac{k_1}{a_1} m_1 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{k_1}{F} \right) - \frac{k_3}{a_3} \left( m_3 \frac{1}{\rho_2} - m_1 \frac{k_1}{F} \right) + \left( \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{F} - \frac{k_3}{F} \right) = 0 ,$$

equazioni che ordinate per le potenze di  $\frac{F}{\rho_2}$  si riducono, per mezzo delle posizioni

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= k_1 m_1 \left( \frac{m_1}{a_1} - \frac{1}{2} \right) - k_3 m_3 \left( \frac{m_3}{a_3} - \frac{1}{2} \right), \\ B &= -1 - k_1 m_1 \left( \frac{2 k_1}{a_1} m_1 - \frac{1}{2} k_1 \right) + k_3 m_3 \left( \frac{2 k_3}{a_3} m_3 - \frac{1}{2} k_3 \right), \\ C &= -\frac{1}{2} + k_3 + k_1^2 \left( \frac{k_1}{a_1} m_1^2 - \frac{1}{2} k_1 m_1 \right) - k_3 \left( \frac{k_3}{a_3} m_3^2 - \frac{1}{2} k_3 m_3 \right); \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} A' &= 0, \\ B' &= 1 + \frac{k_1}{a_1} m_1 - \frac{k_3}{a_3} m_3, \\ C' &= 1 - k_3 - k_1 m_1 \left( \frac{k_1}{a_1} - \frac{k_3}{a_3} \right), \end{aligned} \right.$$

alle seguenti

$$(\xi)_1''' \quad A \left( \frac{F}{\rho_2} \right)^2 + B \left( \frac{F}{\rho_2} \right) + C = 0 ,$$

$$(\xi)_2''' \quad B' \left( \frac{F}{\rho_2} \right) + C' = 0 .$$

L'eliminazione di  $\frac{F}{\rho_2}$  da queste due equazioni conduce, come è noto, alla

$$(5) \quad A C'^2 + B'(B' C - B C') = 0$$

la quale non può essere verificata che da valori convenienti dei coefficienti  $A, B, C; B', C'$ .

I detti coefficienti essendo funzioni di  $k_1$  e  $k_2$ , e queste quantità contenendo il rapporto di  $b_1$  a  $b_2$ , rappresentante quello dei poteri dispersivi dei due cristalli di cui l'obbiettivo è supposto formato, considereremo, secondo fu annunciato sopra, questo rapporto come indeterminato, e lo determineremo in modo che verifichi la trovata equazione (5).

## 4.

*Ordinamento della trovata equazione (5) per le potenze del suddetto rapporto dei poteri dispersivi.*

A questo scopo osserveremo che dinotato con  $\varphi$  il richiesto rapporto, posto cioè

$$(6) \quad \psi = \frac{b_1}{b_2},$$

i valori di  $k_1$  e  $k_2$ , datici dalle posizioni (1), divengono appunto semplici funzioni dell'incognita  $\psi$ , espresse da

$$(7) \quad k_1 = \frac{1}{m_1 - m_2 \psi}, \quad k_2 = \frac{\psi}{m_1 - m_2 \psi}$$

e che sostituendo queste loro espressioni nelle formole (3) e (4), i coefficienti A, B, C; B', C' risultano pure funzioni della sola  $\psi$ , date dalle seguenti relazioni

$$(8) \quad \begin{cases} (m_1 - m_2 \psi) A = m_1 \left( \frac{m_1}{a_1} - \frac{2}{3} \right) - m_2 \left( \frac{m_2}{a_2} - \frac{2}{3} \right) \psi \\ (m_1 - m_2 \psi)^2 B = - (m_1 - m_2 \psi)^2 - m_1 \left( 2 \frac{m_1}{a_1} - \frac{2}{3} \right) + m_2 \left( 2 \frac{m_2}{a_2} - \frac{2}{3} \right) \psi \\ (m_1 - m_2 \psi)^3 C = - \frac{1}{3} (m_1 - m_2 \psi)^3 + (m_1 - m_2 \psi)^2 \psi + \left( \frac{m_1^2}{a_1} - \frac{1}{3} m_1 \right) - \left( \frac{m_2^2}{a_2} - \frac{1}{3} m_2 \psi^2 \right) \psi \end{cases}$$

$$A'_0 = 0$$

$$(9) \quad \begin{cases} (m_1 - m_2 \psi) B' = (m_1 - m_2 \psi) + \frac{m_1}{a_1} - \frac{m_2}{a_2} \psi, \\ (m_1 - m_2 \psi)^2 C' = (m_1 - m_2 \psi)^2 - (m_1 - m_2 \psi) \psi - \frac{m_1}{a_1} + \frac{m_2}{a_2} \psi. \end{cases}$$

Se sviluppiamo nei secondi membri le potenze di  $m_1 - m_2 \psi$ , eseguiamo i prodotti ed ordiniamo i termini per le potenze di  $\psi$ , indi poniamo

$$(10)_a \quad \begin{cases} a_0 = m_1 \left( \frac{m_1}{a_1} - \frac{2}{3} \right), \\ a_1 = - m_2 \left( \frac{m_2}{a_2} - \frac{2}{3} \right); \end{cases}$$

$$(10)_b \quad \begin{cases} b_0 = - m_1 \left( m_1 + 2 \frac{m_1}{a_1} - \frac{2}{3} \right), \\ b_1 = 2 m_1 m_2 \left( 1 + \frac{1}{a_2} \right), \\ b_2 = - m_2 \left( m_2 + \frac{2}{3} \right); \end{cases}$$

$$(10)_c \quad \begin{cases} c_0 = - m_1 \left( \frac{1}{3} m_1^2 - \frac{m_1}{a_1} + \frac{1}{3} \right), \\ c_1 = m_1^2 \left( \frac{2}{3} m_2 + 1 - \frac{1}{a_2} \right), \\ c_2 = - m_1 m_2 \left( \frac{2}{3} m_2 + 2 \right), \\ c_3 = m_2 \left( \frac{1}{3} m_2^2 + m_2 + \frac{1}{3} \right); \end{cases}$$

$$(11)_b \quad \begin{cases} b'_0 = m_1 \left( 1 + \frac{1}{a_1} \right), \\ b'_1 = - m_2 \left( 1 + \frac{1}{a_2} \right); \end{cases}$$

$$(11)_c \quad \begin{cases} c'_0 = m_1 \left( m_1 - \frac{1}{a_1} \right), \\ c'_1 = - m_1 \left( 2 m_2 + 1 - \frac{1}{a_2} \right), \\ c'_2 = m_2 \left( m_2 + 1 \right); \end{cases}$$

si avrà

$$(15) \quad \begin{cases} (m_1 - m_2 \psi) A = a_0 + a_1 \psi, \\ (m_1 - m_2 \psi)^2 B = b_0 + b_1 \psi + b_2 \psi^2, \\ (m_1 - m_2 \psi)^3 C = c_0 + c_1 \psi + c_2 \psi^2 + c_3 \psi^3; \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} (m_1 - m_3 \psi) B^1 = b'_0 + b'_1 \psi, \\ (m_1 - m_3 \psi)^2 C^1 = c'_0 + c'_1 \psi + c'_2 \psi^2. \end{cases}$$

Non rimane ora che sostituire queste espressioni dei coefficienti A, B, ec. nell'equazione (5) per ottenere quella che ci deve dare il valore di  $\psi$ .

Supponendo d'aver calcolato in numeri le quantità  $a_0, a_1, \text{ec.}$ ;  $b_0, b_1, \text{ec.}$  precedute dal loro rispettivo segno +, o -, potremo facilmente formare l'equazione proveniente dalla detta sostituzione. A questo scopo premetteremo l'osservazione, che il fattore  $(m_1 - m_3 \psi)$ , trovandosi alla quinta potenza come divisore in tutti i termini dell'equazione risultante, potrà essere ommesso. Con tale omissione daremo ai prodotti A C<sup>2</sup>, C B<sup>2</sup>, B B' C semplicemente le forme

$$\begin{aligned} A C^2 &= g_0 + g_1 \psi + g_2 \psi^2 + g_3 \psi^3 + g_4 \psi^4 + g_5 \psi^5, \\ B^2 C &= g'_0 + g'_1 \psi + g'_2 \psi^2 + g'_3 \psi^3 + g'_4 \psi^4 + g'_5 \psi^5, \\ B B' C &= g''_0 + g''_1 \psi + g''_2 \psi^2 + g''_3 \psi^3 + g''_4 \psi^4 + g''_5 \psi^5; \end{aligned}$$

nelle quali sarà

$$(15) \quad \begin{cases} g_0 = a_0 c_0'^2, \\ g_1 = 2 a_0 c'_0 c'_1 + a_1 c_0'^2, \\ g_2 = a_0 (c_1'^2 + 2 c'_0 c'_2) + 2 a_1 c'_0 c'_1, \\ g_3 = 2 a_0 c'_1 c'_2 + a_1 (c_1'^2 + 2 c'_0 c'_2), \\ g_4 = a_0 c_2'^2 + 2 a_1 c'_1 c'_2, \\ g_5 = a_1 c_2'^2; \end{cases}$$

$$(15)' \quad \begin{cases} g'_0 = c_0 b_0'^2, \\ g'_1 = 2 c_0 b'_0 b'_1 + c_1 b_0'^2, \\ g'_2 = c_0 b_1'^2 + 2 c_1 b'_0 b'_1 + c_2 b_0'^2, \\ g'_3 = c_1 b_1'^2 + 2 c_2 b'_0 b'_1 + c_3 b_0'^2, \\ g'_4 = c_2 b_1'^2 + 2 c_3 b'_0 b'_1, \\ g'_5 = c_3 b_1'^2; \end{cases}$$

$$(15)'' \quad \begin{cases} g''_0 = b_0 b'_0 c'_0, \\ g''_1 = b_0 (b'_0 c'_1 + b'_1 c'_0) + b_1 b'_0 c'_0, \\ g''_2 = b_0 (b'_0 c'_2 + b'_1 c'_1) + b_1 (b'_0 c'_1 + b'_1 c'_0) + b_2 b'_0 c'_0, \\ g''_3 = b_0 b'_1 c'_2 + b_1 (b'_0 c'_2 + b'_1 c'_1) + b_2 (b'_0 c'_1 + b'_1 c'_0), \\ g''_4 = b_1 b'_1 c'_2 + b_2 (b'_0 c'_2 + b'_1 c'_1), \\ g''_5 = b_2 b'_1 c'_2. \end{cases}$$

Posto quindi

$$(16) \quad \begin{cases} G_0 = g_0 + g'_0 - g''_0, \\ G_1 = g_1 + g'_1 - g''_1, \\ G_2 = g_2 + g'_2 - g''_2, \end{cases} \quad (16) \quad \begin{cases} G_3 = g_3 + g'_3 - g''_3, \\ G_4 = g_4 + g'_4 - g''_4, \\ G_5 = g_5 + g'_5 - g''_5; \end{cases}$$

si avrà per la richiesta equazione in numeri

$$(17) \quad G_0 + G_1 \psi + G_2 \psi^2 + G_3 \psi^3 + G_4 \psi^4 + G_5 \psi^5 = 0,$$

che dovrà risolversi coi noti metodi della risoluzione delle equazioni numeriche.

Quest'equazione dovrà dare almeno un valore reale e positivo di  $\psi$ , acciò i coefficienti  $b_1$  e  $b_3$  possano, giusta l'equazione (6), avere amendue valori positivi, come gli hanno in natura, senza di che la costruzione dell'oggettivo non sarebbe più realizzabile.

Trovati i valori positivi di  $\psi$  che soddisfanno all'equazione (17); dalla (6), prendendo  $b_3$  come dato, potremo ricavare altrettanti valori di  $b_1$ , e dalla (5)'' si conseguiranno quelli di  $\rho_1$  e  $\rho_4$ , talchè la determinazione di tutte le incognite si troverà compiuta.

## CAPITOLO II.

APPLICAZIONE DELLE FORMOLE DELL'ARTICOLO PRECEDENTE AL CALCOLO NUMERICO  
DI UN OBIETTIVO A DUE LENTI A CONTATTO (\*).

## 1.

Calcolo dei valori di  $a_0$ ,  $a_1$ ;  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ;  $c_0$  ec.

Per mettere sotto gli occhi del lettore i calcoli da eseguirsi per fare un'applicazione delle formole dell'articolo precedente, esporremo in questo Capitolo con qualche estensione un'esempio dei medesimi.

A tale oggetto assumeremo che gl'indici di *refrazione* delle sostanze della prima lente di *Crown* e seconda lente di *Flint*, di cui si compone l'obbiettivo, sieno rispettivamente espressi da

$$a_1 = 1,54083 \quad , \quad a_2 = 1,63166 \quad ,$$

che sono i valori medii fra quelli degli indici di rifrazione delle varie specie di *Crown* e di *Flint* determinati da Fraunhofer.

Quindi, notando che si ha

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_2 = 1 \quad ,$$

dalle prime formole del Capitolo I, si dedurrà

$$m_1 = 0,54083 \quad , \quad m_2 = 0,63166 \quad .$$

Con questi soli valori, di  $m_1$ ,  $a_1$  e di  $m_2$ ,  $a_2$ , possiamo passare a valutare numericamente quelli di  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  ec. espressi generalmente dalle formole (10)<sub>a</sub>, (10)<sub>b</sub> ec. dell'articolo (4), Capitolo I.

I calcoli che danno questi valori si possono eseguire come segue.

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
	$a_0 = \frac{m_1^2}{a_1} - \frac{1}{2} m_1$		
$m_1 =$	0,54083	$\log m_1 =$	9,7330608
$a_1 =$	1,54083	$2 \log m_1 =$	9,4661216
		$\text{Clog } a_1 =$	9,8122537
		$\log \frac{m_1^2}{a_1} =$	9,2783753
$\frac{m_1^2}{a_1} =$	0,18983	$\log \frac{1}{2} =$	0,1760913
		$\log \frac{1}{2} m_1 =$	9,9091521
$\frac{1}{2} m_1 =$	0,81125		
$\frac{m_1^2}{a_1} - \frac{1}{2} m_1 = a_0 =$	-0,62142		
		$a_1 = -\frac{m_2^2}{a_2} + \frac{1}{2} m_2$	
$m_2 =$	0,63166	$\log m_2 =$	9,8004834
$a_2 =$	1,63166	$2 \log m_2 =$	9,6009668
		$\text{Clog } a_2 =$	9,7873597
		$\log \frac{m_2^2}{a_2} =$	9,3883265
$\frac{m_2^2}{a_2} =$	0,24453	$\log \frac{1}{2} =$	0,1760913
		$\log \frac{1}{2} m_2 =$	9,9765747
$\frac{1}{2} m_2 =$	0,94749		
$-\frac{m_2^2}{a_2} + \frac{1}{2} m_2 = a_1 =$	0,70296		

(\*) Il contenuto di quest'articolo è stato gentilmente comunicato all'Autore dal Dottor Angiolo Forti, dotato di singolare perizia per questa specie di calcoli.



Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
	$b_0 = -m_1^2 - 2\frac{m_1^2}{a_1} + \frac{1}{2}m_1$		
$m_1 =$	0,54083	$2 \log m_1 =$	9,4661216
$m_1^2 =$	0,29250	$\log 2 =$	0,3010300
		$\text{Clog } a_1 =$	9,8122537
$2\frac{m_1^2}{a_1} =$	0,37967	$\log 2\frac{m_1^2}{a_1} =$	9,5794053
$m_1^2 + 2\frac{m_1^2}{a_1} =$	0,67217		
$\frac{1}{2}m_1 =$	0,81125		
$-m_1^2 - 2\frac{m_1^2}{a_1} + \frac{1}{2}m_1 = b_0 =$	0,13908		
	$b_1 = 2m_1m_5\left(1 + \frac{1}{a_5}\right)$		
$m_1 =$	0,54083	$\log m_1 =$	9,7330608
$m_5 =$	0,63166	$\log m_5 =$	9,8004834
$\left(1 + \frac{1}{a_5}\right) =$	1,61285	$\log\left(1 + \frac{1}{a_5}\right) =$	0,2075805
		$\log 2 =$	0,3010300
$2m_1m_5\left(1 + \frac{1}{a_5}\right) = b_1 =$	1,10190	$\log 2m_1m_5\left(1 + \frac{1}{a_5}\right) =$	0,0421547
	$b_2 = -m_5^2 - \frac{1}{2}m_5$		
$m_5^2 =$	0,39899	$2 \log m_5 =$	9,6009668
		$\log \frac{1}{2} =$	0,1760913
		$\log m_5 =$	9,8004834
$\frac{1}{2}m_5 =$	0,94749	$\log \frac{1}{2}m_5 =$	9,9765747
$-m_5^2 - \frac{1}{2}m_5 = b_2 =$	-1,34648		

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi	
	$c_0 = -\frac{1}{2}m_1^2 + \frac{m_1^2}{a_1} - \frac{1}{2}m_1$			
		$3 \log m_1 =$	9,1991824	
		$\text{Clog } 2 =$	9,6989700	
	$-\frac{1}{2}m_1^2 =$	-0,07910	$\log \frac{1}{2}m_1^2 =$	8,8981524
	$\frac{m_1^2}{a_1} =$	0,18983		
	$-\frac{1}{2}m_1 =$	-0,27041		
	$-\frac{1}{2}m_1^2 + \frac{m_1^2}{a_1} - \frac{1}{2}m_1 = c_0 =$	-0,15968		
	$c_1 = \frac{1}{2}m_1^2m_5 + m_1^2\left(1 - \frac{1}{a_5}\right)$			
		$\log m_1^2 =$	9,4661216	
		$\log \frac{1}{2}m_5 =$	9,9765747	
	$1 - \frac{1}{a_5} =$	0,38715	$\log\left(1 - \frac{1}{a_5}\right) =$	9,5878793
	$\frac{1}{2}m_1^2m_5 =$	0,27714	$\log \frac{1}{2}m_1^2m_5 =$	9,4426963
	$m_1^2\left(1 - \frac{1}{a_5}\right) =$	0,11324	$\log m_1^2\left(1 - \frac{1}{a_5}\right) =$	9,0540009
	$\frac{1}{2}m_1^2m_5 + m_1^2\left(1 - \frac{1}{a_5}\right) = c_1 =$	0,39038		
	$c_2 = -\frac{1}{2}m_1m_5^2 - 2m_1m_5$			
		$\log m_1 =$	9,7330608	
		$\log m_5 =$	9,8004834	
		$\log m_1m_5 =$	9,5335442	
	$\frac{1}{2}m_1m_5^2 =$	0,32368	$\log \frac{1}{2}m_1m_5^2 =$	9,5101189
	$2m_1m_5 =$	0,68324	$\log 2m_1m_5 =$	9,8345742
	$-\frac{1}{2}m_1m_5^2 - 2m_1m_5 = c_2 =$	-1,00692		

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
	$c_s = \frac{1}{2} m_s^2 + m_s^2 + \frac{1}{2} m_s$		
$m_s =$	0,63166	$\log m_s^2 =$	9,4014502
$m_s^2 =$	0,25203		
$m_s + m_s^2 =$	0,88369		
$\frac{1}{2} (m_s + m_s^2) =$	0,44185		
$m_s^2 =$	0,39829		
$\frac{1}{2} m_s^2 + m_s^2 + \frac{1}{2} m_s = c_s =$	0,84014		
<hr/>			
	$b'_0 = m_1 + \frac{m_1}{a_1}$		
$m_1 =$	0,54083	$\log m_1 =$	9,7330608
		$\text{Clog } a_1 =$	9,8122537
$\frac{m_1}{a_1} =$	0,35101	$\log \frac{m_1}{a_1} =$	9,5453145
$m_1 + \frac{m_1}{a_1} = b'_0 =$	0,89184		
<hr/>			
	$b'_1 = -m_s - \frac{m_s}{a_s}$		
$-m_s =$	-0,63166	$\log m_s =$	9,8004834
		$\text{Clog } a_s =$	9,7873597
$-\frac{m_s}{a_s} =$	-0,38708	$\log \frac{m_s}{a_s} =$	9,5878431
$-m_s - \frac{m_s}{a_s} = b'_1 =$	-1,01874		
<hr/>			
	$c'_0 = m_1^2 - \frac{m_1}{a_1}$		
$m_1^2 =$	0,29250		
$-\frac{m_1}{a_1} =$	-0,35101		
$m_1^2 - \frac{m_1}{a_1} = c'_0 =$	-0,05851		

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
	$c'_1 = -2 m_1 m_s - m_1 \left(1 - \frac{1}{a_s}\right)$		
		$\log 2 =$	0,3010300
		$\log m_1 m_s =$	9,5335442
$-2 m_1 m_s =$	-0,68324	$\log 2 m_1 m_s =$	9,8345742
		$\log m_1 =$	9,7330608
$1 - \frac{1}{a_s} =$	0,38715	$\log \left(1 - \frac{1}{a_s}\right) =$	9,5878793
$-m_1 \left(1 - \frac{1}{a_s}\right) =$	-0,20938	$\log m_1 \left(1 - \frac{1}{a_s}\right) =$	9,3209401
$-2 m_1 m_s - m_1 \left(1 - \frac{1}{a_s}\right) = c'_1 =$	-0,89262		
<hr/>			
	$c'_2 = m_s^2 + m_s$		
$m_s^2 =$	0,39899		
$m_s =$	0,63166		
$m_s^2 + m_s = c'_2 =$	1,03065		
<hr/>			
2.			
Calcolo delle quantità g secondo le formole (15), (15)', (15)".			
	$g_0 = a_0 c'_0{}^2$		
$a_0 =$	-0,62142	$\log a_0 =$	9,7933852
$c'_0 =$	-0,05851	$2 \log c'_0 =$	7,5344602
$a_0 c'_0{}^2 = g_0 =$	-0,00213	$\log a_0 c'_0{}^2 =$	7,3278454
<hr/>			
	$g_1 = 2 a_0 c'_0 c'_1 + a_1 c'_0{}^2$		
		$\log 2 =$	0,3010300
		$\log a_0 =$	9,7933852
		$\log c'_0 =$	8,7672301
$c'_1 =$	-0,89262	$\log c'_1 =$	9,9506666
$2 a_0 c'_0 c'_1 =$		$\log 2 a_0 c'_0 c'_1 =$	8,8123119

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
$2 a_0 c'_0 c'_1 = -0,06491$			
$a_1 = 0,70296$		$\log a_1 = 9,8469306$	
$a_1 c'_0{}^2 = 0,00241$		$\log c'_0{}^2 = 7,5344602$	
$2 a_0 c'_0 c'_1 + a_1 c'_0{}^2 = g_1 = -0,06250$		$\log a_1 c'_0{}^2 = 7,3813908$	
<hr/>			
$g_2 = a_0 c'_1{}^2 + 2 a_0 c'_0 c'_2 + 2 a_1 c'_0 c'_1$		$\log a_0 = 9,7933852$	
		$\log c'_1{}^2 = 9,9013332$	
		$\log a_0 c'_1{}^2 = 9,6947184$	
$a_0 c'_1{}^2 = -0,49513$		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log a_0 = 9,7933852$	
$c'_2 = 1,03065$		$\log c'_0 = 8,7672301$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
		$\log 2 a_0 c'_0 c'_2 = 8,8747354$	
$2 a_0 c'_0 c'_2 = 0,07494$		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log a_1 = 9,8469306$	
		$\log c'_0 = 8,7672301$	
$2 a_1 c'_0 c'_1 = 0,07343$		$\log c'_1 = 9,9506666$	
$a_0 c'_1{}^2 + 2 a_0 c'_0 c'_2 + 2 a_1 c'_0 c'_1 = g_2 = -0,34676$		$\log 2 a_1 c'_0 c'_1 = 8,8658573$	
<hr/>			
$g_3 = 2 a_0 c'_1 c'_2 + a_1 c'_1{}^2 + 2 a_1 c'_0 c'_2$		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log a_0 = 9,7933852$	
		$\log c'_1 = 9,9506666$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
		$\log 2 a_0 c'_1 c'_2 = 0,0581719$	
$2 a_0 c'_1 c'_2 = 1,14330$		$\log a_1 = 9,8469306$	
		$\log c'_1{}^2 = 9,9013332$	
		$\log a_1 c'_1{}^2 = 9,7482638$	

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
	$a_1 c'_1{}^2 = 0,56010$		
		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log a_1 = 9,8469306$	
		$\log c'_0 = 8,7672301$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
		$\log 2 a_1 c'_0 c'_2 = 8,9282808$	
<hr/>			
$2 a_1 c'_0 c'_2 = -0,08478$			
$2 a_0 c'_1 c'_2 + a_1 c'_1{}^2 + 2 a_1 c'_0 c'_2 = g_3 = 1,61862$			
<hr/>			
	$g_4 = a_0 c'_2{}^2 + 2 a_1 c'_1 c'_2$		
		$\log a_0 = 9,7933852$	
		$\log c'_2{}^2 = 0,0261802$	
		$\log a_0 c'_2{}^2 = 9,8195654$	
$a_0 c'_2{}^2 = -0,66003$		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log a_1 = 9,8469306$	
		$\log c'_1 = 9,9506666$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
		$\log 2 a_1 c'_1 c'_2 = 0,1117173$	
<hr/>			
$2 a_1 c'_1 c'_2 = -1,29335$			
$a_0 c'_2{}^2 + 2 a_1 c'_1 c'_2 = g_4 = -1,95338$			
<hr/>			
	$g_5 = a_1 c'_2{}^2$		
		$\log a_1 = 9,8469306$	
		$\log c'_2{}^2 = 0,0261802$	
		$\log a_1 c'_2{}^2 = 9,8731108$	
$a_1 c'_2{}^2 = g_5 = 0,74664$			
<hr/>			
	$g'_0 = c_0 b'_0{}^2$		
		$\log c_0 = 9,2032505$	
		$2 \log b'_0 = 9,9005738$	
		$\log c_0 b'_0{}^2 = 9,1038243$	
$c_0 = -0,15968$			
$b'_0 = 0,89184$			
$c_0 b'_0{}^2 = g'_0 = -0,12701$			

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
	$g'_1 = 2c_0 b'_0 b'_1 + c_1 b'_0{}^2$		
		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log c_0 = 9,2032505$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
	$b'_1 = -1,01874$	$\log b'_1 = 0,0080639$	
		$\log 2c_0 b'_0 b'_1 = 9,4626313$	
$2c_0 b'_0 b'_1 = 0,29046$		$\log c_1 = 9,5914876$	
$c_1 = 0,39038$		$\log b'_0{}^2 = 9,9005738$	
	$c_1 b'_0{}^2 = 0,31050$	$\log c_1 b'_0{}^2 = 9,4920614$	
$2c_0 b'_0 b'_1 + c_1 b'_0{}^2 = g'_1 = 0,60066$			
	$g'_2 = c_0 b'_1{}^2 + 2c_1 b'_0 b'_1 + c_2 b'_0{}^2$		
		$\log c_0 = 9,2032505$	
		$\log b'_1{}^2 = 0,0161278$	
		$\log c_0 b'_1{}^2 = 9,2193783$	
$c_0 b'_1{}^2 = -0,16572$		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log c_1 = 9,5914876$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
$2c_1 b'_0 b'_1 = -0,70936$		$\log 2c_1 b'_0 b'_1 = 9,8508684$	
$c_2 = -1,00692$		$\log c_2 = 0,0029950$	
		$\log b'_0{}^2 = 9,9005738$	
		$\log c_2 b'_0{}^2 = 9,9035688$	
$c_2 b'_0{}^2 = -0,80088$			
$c_0 b'_1{}^2 + 2c_1 b'_0 b'_1 + c_2 b'_0{}^2 = g'_2 = -1,67596$			

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
	$g'_3 = c_1 b'_1{}^2 + 2c_2 b'_0 b'_1 + c_3 b'_0{}^2$		
		$\log c_1 = 9,5914876$	
		$\log b'_1{}^2 = 0,0161278$	
	$c_1 b'_1{}^2 = 0,40515$	$\log c_1 b'_1{}^2 = 9,6076154$	
		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log c_2 = 0,0029950$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
$2c_2 b'_0 b'_1 = 1,82970$		$\log 2c_2 b'_0 b'_1 = 0,2623758$	
$c_3 = 0,84084$		$\log c_3 = 9,9247134$	
		$\log b'_0{}^2 = 9,9005738$	
$c_3 b'_0{}^2 = 0,66879$		$\log c_3 b'_0{}^2 = 9,8252872$	
$c_1 b'_1{}^2 + 2c_2 b'_0 b'_1 + c_3 b'_0{}^2 = g'_3 = 2,90364$			
	$g'_4 = c_2 b'_1{}^2 + 2c_3 b'_0 b'_1$		
		$\log c_2 = 0,0029950$	
		$\log b'_1{}^2 = 0,0161278$	
		$\log c_2 b'_1{}^2 = 0,0191228$	
$c_2 b'_1{}^2 = -1,04503$		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log c_3 = 9,9247134$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
$2c_3 b'_0 b'_1 = -1,52790$		$\log 2c_3 b'_0 b'_1 = 0,1840942$	
$c_2 b'_1{}^2 + 2c_3 b'_0 b'_1 = g'_4 = -2,57293$			
	$g'_5 = c_3 b'_1{}^2$		
		$\log c_3 = 9,9247134$	
		$\log b'_1{}^2 = 0,0161278$	
$c_3 b'_1{}^2 = g'_5 = 0,87265$		$\log c_3 b'_1{}^2 = 9,9408412$	

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
	$g'' = b_0 b'_0 c'_0$		
		$\log b_0 = 9,1432647$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log c'_0 = 8,7672301$	
		$\log b_0 b'_0 c'_0 = 7,8607817$	
$b_0 b'_0 c'_0 = g''_0 = -0,00726$			
	$g''_1 = b_0 b'_0 c'_1 + b_0 b'_1 c'_0 + b_1 b'_0 c'_0$	$\log b_0 = 9,1432647$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log c'_1 = 9,9506666$	
		$\log b_0 b'_0 c'_1 = 9,0442182$	
$b_0 b'_0 c'_1 = -0,11072$		$\log b_0 = 9,1432647$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
		$\log c'_0 = 8,7672301$	
		$\log b_0 b'_1 c'_0 = 7,9185587$	
$b_0 b'_1 c'_0 = 0,00829$		$\log b_1 = 0,0421422$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log c'_0 = 8,7672301$	
		$\log b_1 b'_0 c'_0 = 8,7596592$	
$b_1 b'_0 c'_0 = -0,05750$			
$b_0 b'_0 c'_1 + b_0 b'_1 c'_0 + b_1 b'_0 c'_0 = g''_1 = -0,15993$			
	$g''_2 = b_0 b'_0 c'_2 + b_0 b'_1 c'_1 + b_1 b'_0 c'_1 + b_1 b'_1 c'_0 + b_2 b'_0 c'_0$	$\log b_0 = 9,1432647$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
		$\log b_0 b'_0 c'_2 = 9,1066417$	
$b_0 b'_0 c'_2 = 0,12783$			

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$\log b_0 = 9,1432647$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
		$\log c'_1 = 9,9506666$	
		$\log b_0 b'_1 c'_1 = 9,1019952$	
$b_0 b'_1 c'_1 = 0,12647$		$\log b_1 = 0,0421422$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log c'_1 = 9,9506666$	
		$\log b_1 b'_0 c'_1 = 9,9430957$	
$b_1 b'_0 c'_1 = -0,87719$		$\log b_1 = 0,0421422$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
		$\log c'_0 = 8,7672301$	
		$\log b_1 b'_1 c'_0 = 8,8174362$	
$b_1 b'_1 c'_0 = 0,06568$		$\log b_0 = 0,1292064$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log c'_0 = 8,7672301$	
		$\log b_2 b'_0 c'_0 = 8,8467234$	
$b_2 b'_0 c'_0 = 0,07026$			
$b_0 b'_0 c'_2 + b_0 b'_1 c'_1 + b_1 b'_0 c'_1 + b_1 b'_1 c'_0 + b_2 b'_0 c'_0 = g''_2 = -0,48695$			
		$g''_3 = b_0 b'_1 c'_2 + b_1 b'_0 c'_2 + b_1 b'_1 c'_1 + b_2 b'_0 c'_1 + b_2 b'_1 c'_0$	
		$\log b_0 = 9,1432647$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
		$\log b_0 b'_1 c'_2 = 9,1644187$	
$b_0 b'_1 c'_2 = -0,14602$		$\log b_1 = 0,0421422$	
		$\log b'_0 = 9,9502869$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
		$\log b_1 b'_0 c'_2 = 0,0055192$	
$b_1 b'_0 c'_2 = 1,01279$			



Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$\log b_1 = 0,0421422$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
		$\log c'_1 = 9,9506666$	
$b_1 b'_1 c'_1 = 1,00201$		$\log b_1 b'_1 c'_1 = 0,0008727$	
		$\log b_2 = 0,1292064$	
		$\log b'_2 = 9,9502869$	
		$\log c'_2 = 9,9506666$	
$b_2 b'_2 c'_2 = 1,07190$		$\log b_2 b'_2 c'_2 = 0,0301599$	
		$\log b_3 = 0,1292064$	
		$\log b'_3 = 0,0080639$	
		$\log c'_3 = 8,7672301$	
$b_3 b'_3 c'_3 = -0,08026$		$\log b_3 b'_3 c'_3 = 8,9045004$	
$b_0 b'_1 c'_2 + b_1 b'_0 c'_2 + b_1 b'_1 c'_1$ $+ b_2 b'_0 c'_1 + b_2 b'_1 c'_0 = g''_5 = 2,86042$			
		$\log b_1 = 0,0421422$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
$b_1 b'_1 c'_2 = -1,15690$		$\log b_1 b'_1 c'_2 = 0,0632962$	
		$\log b_2 = 0,1292064$	
		$\log b'_2 = 9,9502869$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
$b_2 b'_2 c'_2 = -1,23761$		$\log b_2 b'_2 c'_2 = 0,0925834$	
		$\log b_3 = 0,1292064$	
		$\log b'_3 = 0,0080639$	
		$\log c'_1 = 9,9506666$	
$b_3 b'_3 c'_1 = -1,22444$		$\log b_3 b'_3 c'_1 = 0,0879369$	
$b_1 b'_1 c'_2 + b_2 b'_0 c'_2 + b_2 b'_1 c'_1$ $+ b_3 b'_0 c'_1 + b_3 b'_1 c'_0 = g''_4 = -3,61895$			

$$g''_4 = b_1 b'_1 c'_2 + b_2 b'_0 c'_2 + b_2 b'_1 c'_1$$

$$\log b_1 = 0,0421422$$

$$\log b'_1 = 0,0080639$$

$$\log c'_2 = 0,0130901$$

$$\log b_1 b'_1 c'_2 = 0,0632962$$

$$\log b_2 = 0,1292064$$

$$\log b'_2 = 9,9502869$$

$$\log c'_2 = 0,0130901$$

$$\log b_2 b'_2 c'_2 = 0,0925834$$

$$\log b_3 = 0,1292064$$

$$\log b'_3 = 0,0080639$$

$$\log c'_1 = 9,9506666$$

$$\log b_3 b'_3 c'_1 = 0,0879369$$

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$g''_5 = b_2 b'_1 c'_2$	
		$\log b_2 = 0,1292064$	
		$\log b'_1 = 0,0080639$	
		$\log c'_2 = 0,0130901$	
$b_2 b'_1 c'_2 = g''_5 = 1,41371$		$\log b_2 b'_1 c'_2 = 0,1503604$	

Avremo quindi giusta le (16)

$$G_0 = g_0 + g'_0 - g''_0 = -0,00213 - 0,12701 + 0,00726 = -0,12188$$

$$G_1 = g_1 + g'_1 - g''_1 = -0,06250 + 0,60066 + 0,15993 = +0,69809$$

$$G_2 = g_2 + g'_2 - g''_2 = -0,34676 - 1,67596 + 0,48695 = -1,53577$$

$$G_3 = g_3 + g'_3 - g''_3 = 1,61862 + 2,90364 - 2,86042 = +1,66184$$

$$G_4 = g_4 + g'_4 - g''_4 = -1,95338 - 2,57293 + 3,61895 = -0,90736$$

$$G_5 = g_5 + g'_5 - g''_5 = 0,74664 + 0,87265 - 1,41371 = +0,20558$$

e l'equazione risultante dalle (17) sarà

$$-0,12188 + 0,69809 \psi - 1,53577 \psi^2 + 1,66184 \psi^3 - 0,90736 \psi^4 + 0,20558 \psi^5 = 0.$$

3.

*Radici dell'ottenuta equazione, e valori dei raggi di curvatura delle superficie delle due lenti.*

La precedente equazione, divisa pel coefficiente di  $\psi^5$ , prende la forma

$$\psi^5 - 4,41366 \psi^4 + 8,08367 \psi^3 - 7,47042 \psi^2 + 3,39571 \psi - 0,59697 = 0$$

e, cercando le sue radici coi noti metodi della risoluzione delle equazioni numeriche, si trova, che esse hanno i seguenti valori

$$\psi = 0,51002 \quad , \quad \psi^I = 0,71522 \quad , \quad \psi^{II} = 1,02816$$

$$\psi^{III} = -0,71195 \sin h(0,33459 - 2,09439 \sqrt{-1}) \quad ,$$

$$\psi^{IV} = -0,71195 \sin h(0,33459 + 2,09439 \sqrt{-1}) \quad ,$$

la lettera  $h$  posta in seguito alla sillaba  $\sin$  indicando un seno iperbolico.

Proseguendo quest'esempio condurremo a termine soltanto il calcolo relativo al primo degli ottenuti valori di  $\psi$ , avvertendo che i due seguenti somministrerebbero dei raggi di curvatura troppo piccoli per essere impiegati utilmente, e gli ultimi due essendo immaginari darebbero dei risultati che non sarebbero effettuabili.

Adottiamo per valore di  $b_s$  quello corrispondente al Flint designato da Fraunhofer col numero 30, cioè

$$b_s = 0,030448 \quad (*),$$

e dalla formola (6) dell'articolo 4 del Capitolo I deduciamo quello di  $b_1$ : avremo

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$b_1 = b_s \psi$	
$b_s$	0,03045	$\log b_s$	8,4835588
$\psi$	0,51002	$\log \psi$	9,7075872
$b_1$	0,01553	$\log b_1$	8,1911460

Questo valore di  $b_1$  differisce assai poco dal coefficiente di dispersione del Crown glass denotato da Fraunhofer col numero 9 (\*\*), di modo che i due citati cristalli sarebbero atti alla costruzione dell'obbiettivo che ci proponiamo di determinare.

Il nostro calcolo è ora ridotto ad assegnare i valori numerici dei raggi di curvatura  $\rho_1, \rho_2 = \rho_s, \rho_4$  delle superficie delle lenti che devono comporre l'obbiettivo in discorso, e che ci sono forniti dalle formole (5)<sup>m</sup> e (2) dell'articolo 5 del Capitolo I. A tale effetto bisognerà che calcoliamo prima i valori dei coefficienti B' e C' datici dalle equazioni (14), e poi quelli di  $k_1$  e  $k_2$  somministrati dalle (7) del detto articolo.

Dalle equazioni (14) si ricavano le formole

$$B' = \frac{b'_0 + b'_1 \psi}{m_1 - m_s \psi} \quad C' = \frac{c'_0 + c'_1 \psi + c'_2 \psi^2}{(m_1 - m_s \psi)^2}$$

i secondi membri delle quali si calcolano come segue

(\*) Vedi Nuovo Cimento. T. IV, pag. 418.

(\*\*) Idem pag. 419.

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		<b>B'</b>	
	$b'_0 = 0,89184$	$\log b'_0$	0,9080634
	$b'_1 = -1,01874$	$\log \psi$	9,7075872
	$b'_1 \psi = -0,51958$	$\log b'_1 \psi$	9,7156506
	$b'_0 + b'_1 \psi = 0,37226$	$\log (b'_0 + b'_1 \psi)$	9,5708464
	$m_1 = 0,54083$	$\log m_s$	9,8004834
	$m_s = 0,63166$	$\log \psi$	9,7075872
	$m_s \psi = 0,32216$	$\log m_s \psi$	9,5080706
	$m_1 - m_s \psi = 0,21867$	$C \log (m_1 - m_s \psi)$	0,6602108
	$B' = 1,70239$	$\log B'$	0,2310572
		<b>C'</b>	
	$c'_0 = -0,05851$	$\log c'_1$	9,9506666
	$c'_1 = -0,89262$	$\log \psi$	9,7075872
	$c'_1 \psi = -0,45525$	$\log c'_1 \psi$	9,6582538
	$c'_2 = 1,03065$	$\log c'_2$	0,0131112
		$\log \psi^2$	9,4151744
	$c'_2 \psi^2 = 0,26809$	$\log c'_2 \psi^2$	9,4282856
	$c'_0 + c'_1 \psi + c'_2 \psi^2 = -0,24567$	$\log (c'_0 + c'_1 \psi + c'_2 \psi^2)$	9,3903521
		$2 C \log (m_1 - m_s \psi)$	1,3204216
	$C' = -5,13780$	$\log C'$	0,7107737
		$C \log B'$	9,7689428
		$\log \frac{F}{\rho_2} = \log - \frac{C'}{B'}$	0,4797169

quindi, assumendo la distanza focale principale F dello strumento per unità,

e passando ai numeri si avrà

$$\frac{1}{\rho_2} = 3,01799 .$$

I valori di  $k_1$  e  $k_2$  si conseguono con breve calcolo dalle (7) dell'articolo 4 del Capitolo precedente, poichè dalla prima si ha

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
---------------	--------	---------------	-----------

$$k_1 = \frac{1}{m_1 - m_2 \psi}$$

$$\log k_1 = C \log (m_1 - m_2 \psi) = 0,6602108$$

$$k_1 = 4,57310 ,$$

e dalla seconda si ottiene

$$k_2 = \frac{\psi}{m_1 - m_2 \psi}$$

$$\log \psi = 9,7075872$$

$$\log k_2 = \log \frac{\psi}{m_1 - m_2 \psi} = 0,3677980$$

$$k_2 = 2,33237 .$$

Possiamo ora colle formole (2) assegnare gli altri due raggi di curvatura. Infatti ricavandosi dalle medesime, quando F è presa eguale all'unità, le seguenti

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} - k_1 , \quad \frac{1}{\rho_4} = \frac{1}{\rho_2} - k_2 ;$$

colla sostituzione dei precedenti valori di  $\frac{1}{\rho_2}$ ,  $k_1$  e  $k_2$  risulta

$$\frac{1}{\rho_1} = 3,01799$$

$$\frac{1}{\rho_4} = 3,01799$$

$$k_1 = 4,57310$$

$$k_2 = 2,33237$$

$$\frac{1}{\rho_1} = -1,55511$$

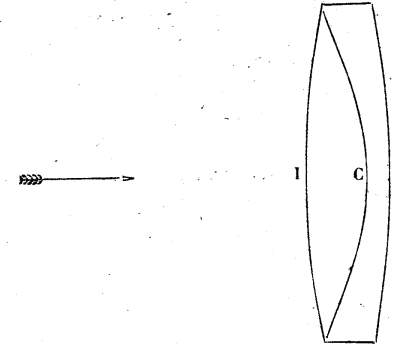
$$\frac{1}{\rho_4} = 0,68562 .$$

I raggi di curvatura delle superficie delle lenti dell'obiettivo cercato, espressi

dalle  $\rho$ , saranno quindi dati da

$$\rho_1 = -0,64304 , \quad \rho_2 = \rho_3 = 0,33195 , \quad \rho_4 = 1,45854 .$$

Costrutta con questi raggi di curvatura una sezione dell'obiettivo fatta da un piano passante per l'asse focale, essa ha la forma che viene rappresentata dal qui annesso diagramma



nel quale è supposto che i raggi emanati dall'oggetto si propaghino nella direzione della freccia, e perciò che la curva I, il cui raggio di curvatura è  $\rho_1$ , segni il profilo della superficie d'incidenza; la curva C, avente per raggio  $\rho_2$  quello delle superficie di contatto delle due lenti; e la curva E, il cui raggio è  $\rho_4$ , quello della superficie d'emergenza.

### CAPITOLO III.

CALCOLO D'UN OGGETTIVO APLANATICO FATTO DA TRE LENTI IN CONTATTO FRA LORO.

#### 1.

*Equazioni d'aberrazione proprie al caso propostoci.*

Per dedurre dalle formole generali d'aberrazione date nell'ultimo Capitolo della Parte precedente, a quelle che spettano in particolare all'obiettivo che ci proponiamo di calcolare, seguiremo lo stesso processo percorso nel Capitolo I trattando di quello composto di due sole lenti, e pertanto conservando le stesse denominazioni impiegate nell'articolo 2 del detto Capitolo, aggiungeremo ad esse, per causa della terza lente che compone l'obiettivo in con-

siderazione, le altre analoghe

$$a_5 - a_4 = m_5 \quad a_6 - a_5 = m_6$$

$$p_5 = \frac{h_5}{a_4} = 0, \quad p_{10} = \frac{h_4}{a_5} = 0 \quad ; \quad p_9 = \frac{m_5}{\rho_5}, \quad p_{11} = \frac{m_6}{\rho_6} :$$

$$P_5^{(4)} = 1, \quad P_9^{(4)} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \frac{m_4}{\rho_4} + \frac{m_5}{\rho_5}$$

$$P_{10}^{(4)} = 1, \quad P_{11}^{(4)} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} + \frac{m_4}{\rho_4} + \frac{m_5}{\rho_5} + \frac{m_6}{\rho_6}$$

$$Q_5^{(4)} = P_5^{(4)}, \quad Q_{11}^{(4)} = P_{11}^{(4)}$$

Quindi, osservando che nel caso presente si ha similmente

$$m_6 = -m_5, \quad \rho_4 = \rho_5,$$

colle sostituzioni delle riferite espressioni delle P e Q nelle otto equazioni generali d'aberrazione, e con riduzioni da farsi simili a quelle praticate nel caso precedente, si perverrà alle seguenti:

Prima equazione d'aberrazione d'apertura.

$$(\xi)_1 \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{a_4} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \left( \frac{m_1}{\rho_1} \right)^2 + \frac{2}{a_5} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) \left( \frac{m_5}{\rho_2} + m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right)^2 \\ & + \frac{2}{a_5} \left( \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6} \right) \left( \frac{m_5}{\rho_5} + m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + m_5 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) \right)^2 \\ & - m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \left( \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1 \rho_2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) - m_5 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) \left( \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_2 \rho_5} + \frac{1}{\rho_5^2} \right) \\ & - m_5 \left( \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6} \right) \left( \frac{1}{\rho_5^2} + \frac{1}{\rho_5 \rho_6} + \frac{1}{\rho_6^2} \right) + \frac{1}{F^2} \left( \frac{2}{\rho_6} + \frac{1}{F} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

dove è

$$(\varphi) \quad \frac{1}{F} = -m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) - m_5 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) - m_5 \left( \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6} \right)$$

Seconda equazione d'aberrazione d'apertura.

$$(\xi)_2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{a_4} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{1}{a_5} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) \left( \frac{m_5}{\rho_2} + m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right) \\ & + \frac{1}{a_5} \left( \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6} \right) \left( \frac{m_5}{\rho_5} + m_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + m_5 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_5} \right) \right) - \frac{1}{F} \left( \frac{1}{\rho_6} + \frac{1}{F} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Prima equazione d'aberrazione di edra.

Quest'equazione risulta identica alla  $(\xi)_2$ , si ha cioè  $(\epsilon)_1 = (\xi)_2$ .

Seconda equazione d'aberrazione di edra.

$$(\epsilon)_2 \quad \frac{1}{F} = 0.$$

Prima equazione d'aberrazione di campo.

$$(\zeta)_1 \quad \frac{1}{a_1} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{1}{a_3} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3} \right) + \frac{1}{a_5} \left( \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6} \right) + \frac{1}{\rho_6} + \frac{1}{F} = 0.$$

Seconda equazione d'aberrazione di campo.

$$(\zeta) \quad -\frac{1}{a_5^2} + \frac{1}{a_6^2} = 0,$$

che è verificata da se stessa per essere  $a_5 = a_6$ .

Prima equazione d'aberrazione cromatica.

$$(\theta)_1 \quad b_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + b_3 \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3} \right) + b_5 \left( \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6} \right) = 0.$$

Seconda equazione d'aberrazione cromatica.

$$(\theta)_2 \quad \frac{0}{1} + \frac{0}{1} = 0,$$

che si verifica come composta di termini tutti nulli.

2.

Riduzione di quattro delle precedenti equazioni ad una sola contenente una sola incognita.

Le equazioni trovate nell'articolo precedente contengono soltanto quattro raggi di curvatura delle cui lunghezze possiamo disporre, e noi avendo cinque equazioni a soddisfare, cioè le  $(\varphi)$ ,  $(\xi)_1$ ,  $(\xi)_2$ ,  $(\zeta)_1$  e  $(\theta)_1$ , bisognerà che omettiamo d'aver riguardo ad una di esse, al qual oggetto escluderemo la penultima.

Cominciando dal far uso delle due più semplici, che sono la (5) e la (6), ricaveremo dalle medesime i valori di  $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$  e di  $\frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6}$  in funzione  $\frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_2}$ . Perciò porremo

$$(1) \quad \frac{m_5 b_3 - m_2 b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = p, \quad \frac{b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = r,$$

$$(2) \quad \frac{m_2 b_1 - m_1 b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = q, \quad \frac{b_1}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = s,$$

e coll'eliminazione si otterrà dalle citate equazioni

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = p \left( \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{r}{F},$$

$$\frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6} = q \left( \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_2} \right) - \frac{s}{F}.$$

Ora, dinotando con  $f_2$  la lunghezza focale della lente di mezzo, dalla formula (6)<sup>a</sup> dell'articolo 2, Capitolo II, Parte II, applicata al caso presente, si deduce

$$(3) \quad \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{v_5}{1 - v_5} \frac{1}{f_2} = \frac{1}{m_5 f_2},$$

ovvero

$$(4) \quad \frac{1}{\rho_5} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{m_5 f_2};$$

ponendo quindi per semplicità

$$(5) \quad \frac{p}{m_5} = h, \quad \frac{q}{m_5} = k,$$

dalle precedenti si ricaverà

$$(6) \quad \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{h}{f_2} + \frac{r}{F}, \quad \frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6} = \frac{k}{f_2} - \frac{s}{F},$$

dalle quali si traggono le due

$$(7) \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{h}{f_2} + \frac{r}{F}, \quad \frac{1}{\rho_6} = \frac{1}{\rho_5} - \frac{k}{f_2} + \frac{s}{F}.$$

A quest'ultima equazione, coll'aggiungere e levare nel suo secondo membro la quantità  $\frac{1}{\rho_2}$ , e col prendere

$$(8) \quad i = \frac{1 - q}{m_5},$$

si può dare la forma

$$(9) \quad \frac{1}{\rho_6} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{i}{f_2} + \frac{s}{F}.$$

Le formole (3), (6), (4), (7) e (9) ci somministrano i valori rispettivi di  $\frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_2}$ ,  $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$ ,  $\frac{1}{\rho_5} - \frac{1}{\rho_6}$ ,  $\frac{1}{\rho_5}$ ,  $\frac{1}{\rho_1}$ ,  $\frac{1}{\rho_6}$  in funzione lineare di  $\frac{1}{\rho_2}$  ed  $\frac{1}{f_2}$ , per cui potremo colla sostituzione di essi ridurre le due altre equazioni segnate ( $\xi$ )<sub>1</sub> e ( $\xi$ )<sub>2</sub> a non contenere più che queste due incognite.

Eseguendo le dette sostituzioni nelle equazioni ( $\xi$ )<sub>1</sub> e ( $\xi$ )<sub>2</sub>, ordinando le medesime per le potenze di  $\frac{F}{\rho_2}$ , ed i loro coefficienti per quelle di  $\frac{F}{f_2}$  si arriva ai seguenti risultati.

Rispetto all'equazione ( $\xi$ )<sub>1</sub>, posto

$$(10)_a \quad \begin{cases} a_0 = \frac{2m_1^2}{a_1} r - \frac{2m_5^2}{a_5} s - 3m_1 r + 3m_5 s \\ a_1 = \frac{2m_1^2}{a_1} h - \frac{3m_5}{a_5} + \frac{2m_5^2}{a_5} k - 3m_1 h + 3 - 3m_5 k \end{cases}$$

$$(11)_a \quad A = a_0 + a_1 \frac{F}{f_2}$$

$$(10)_b \quad \begin{cases} b_0 = \frac{4m_1^2}{a_1} r^2 - \frac{4m_1}{a_5} r s - 3m_1 r^2 + 3m_5 r s^2 + 2 \\ b_1 = \frac{8m_1^2}{a_1} h r - \frac{4m_1}{a_5} r - \frac{4m_5}{a_5 m_5} s + \frac{4m_1 m_5}{a_5} (k r - h s) + \frac{4m_5}{a_5} s \\ \quad - \frac{6m_1}{a_1} h r + 3m_5 (k - i) s \\ b_2 = \frac{4m_1^2}{a_1} h^2 - \frac{4m_1}{a_5} h + \frac{4m_5^2}{a_5 m_5} k + \frac{4m_1 m_5}{a_5} h k - \frac{4m_5}{a_5} k \\ \quad - 3m_1 h^2 + \frac{3}{m_5} + - \frac{3m_5}{m_5} k - 3m_5 k i \end{cases}$$

$$(11)_b \quad B = b_0 + b_1 \frac{F}{f_2} + b_2 \frac{F^2}{f_2^2}$$

$$(10)_c \left\{ \begin{aligned} c_0 &= \frac{2m_1^2}{a_1} r^5 - \frac{2m_1^2}{a_5} r^2 s - m_1 r^5 + m_5 s^5 + 2s + 1 \\ c_1 &= \frac{6m_1^2}{a_1} h r^2 - \frac{2m_1^2}{a_5 m_5} r^2 - \frac{4m_1^2}{a_5} h r s + \frac{2m_1^2}{a_5} k r^2 + 2i \\ &\quad - \frac{4m_1 m_5}{a_5 m_5} r s + \frac{4m_1}{a_5} r s - 3m_1 h r^2 + \frac{m_5}{m_5} s^2 - m_5 k s^2 + 2m_5 i s^2 \\ c_2 &= \frac{6m_1^2}{a_1} h^2 r - \frac{4m_1^2}{a_5 m_5} h r - \frac{2m_5^2}{a_5 m_5^2} s - \frac{2m_1^2}{a_5} h^2 s + \frac{4m_1^2}{a_5} h k r \\ &\quad - \frac{2}{a_5} s + \frac{4m_1 m_5}{a_5 m_5} (k r - h s) + \frac{4m_5}{a_5 m_5} s - \frac{4m_1}{a_5} (k r - h s) \\ &\quad - 3m_1 h^2 r + \frac{m_5}{m_5^2} s - \frac{m_5}{m_5} (k-i) s - 2m_5 k i s + m_5 s i^2, \\ c_3 &= \frac{2m_1^2 h^5}{a_1} - \frac{2m_1^2}{a_5 m_5} h^2 + \frac{2m_5^2}{a_5 m_5^2} k + \frac{2m_1^2}{a_5} k h^2 + \frac{2}{a_5} k \\ &\quad + \frac{4m_1 m_5}{a_5 m_5} h k - \frac{4m_5}{a_5 m_5} k - \frac{4m_1}{a_5} h k - m_1 h^5 + \frac{1}{m_5^2} - \frac{m_5}{m_5} k i, \\ &\quad - m_5 k i^2 - \frac{m_5}{m_5^2} k; \end{aligned} \right.$$

$$(11)_c \quad C = c_0 + c_1 \frac{F}{f_2} + c_2 \frac{F^2}{f_2^2} + c_3 \frac{F^3}{f_2^3}$$

si troverà

$$(12) \quad A \left( \frac{F}{f_2} \right)^2 + B \left( \frac{F}{f_2} \right) + C = 0$$

Parimente rispetto all'equazione  $(\xi)_2$ , posto

$$(15)_a \left\{ \begin{aligned} b'_0 &= \frac{m_1}{a_1} r - \frac{m_5}{a_5} s - 1 \\ b'_1 &= \frac{m_1}{a_1} h - \frac{1}{a_5} + \frac{m_5}{a_5} k \end{aligned} \right.$$

$$(14)_b \quad B' = b'_0 + b'_1 \frac{F}{f_2}$$

$$(13)_b \left\{ \begin{aligned} c'_0 &= \frac{m_1}{a_1} r^2 - \frac{m_1}{a_5} r s - s - 1 \\ c'_1 &= 2 \frac{m_1}{a_1} h r - \frac{m_1}{a_5 m_5} r - \frac{m_5}{a_5 m_5} s - \frac{m_1}{a_5} h s + \frac{m_1}{a_5} k r + \frac{1}{a_5} s - i \\ c'_2 &= \frac{m_1}{a_1} h^2 - \frac{m_1}{a_5 m_5} h + \frac{m_5}{a_5 m_5} k + \frac{m_1}{a_5} h k - \frac{1}{a_5} k \end{aligned} \right.$$

$$(14)_c \quad C' = c'_0 + c'_1 \left( \frac{F}{f_2} \right) + c'_2 \left( \frac{F}{f_2} \right)^2$$

troveremo

$$(15) \quad B' \left( \frac{F}{f_2} \right) + C' = 0$$

L'eliminazione di  $\frac{F}{f_2}$  da questa e dall'equazione (12) somministra come già abbiamo notato la seguente

$$(16) \quad A C'^2 + B' (B' C - B C') = 0$$

la quale non conterrà più che l'incognita  $\frac{F}{f_2}$ .

5.

Formazione dell'equazione che da il valore di  $\frac{F}{f_2}$ .

Le equazioni (12) (15) e (16) sono affatto simili a quelle segnate  $(\xi)_1$ ,  $(\xi)_2$  e (5) nell'articolo 3 del Capitolo I, colla sola differenza che i valori delle quantità  $a_0, a_1; b_0, b_1, ec.; c_0, c_1, ec.; b', b'_1; c', c'_1, ec.$ , dati dalle formole (10) e (11) dell'articolo 4 dello stesso Capitolo, sono ora rimpiazzati dai nuovi valori che hanno le stesse lettere nell'articolo precedente. Impiegando quindi i nuovi valori di queste lettere potremo calcolare le quantità  $g_0, g_1, ec.; g'_0, g'_1, ec.; g_0'', g_1'', ec.$ , non che le quantità  $G_0, G_1, ec.$ , colle stesse formole (15), (15)', (15)'' e (16) riferite nel luogo citato, e dedurne un'equazione simile alla (17), in cui l'incognita  $\psi$  sarà ora rimpiazzata da  $\frac{F}{f_2}$ . Facendo pertanto uso dei valori che ci saranno risultati per le  $G$  nel caso presente, avremo parimente per determinare il rapporto incognito  $\frac{F}{f_2}$  l'equazione di quinto grado

$$(17) \quad G_0 + G_1 \left( \frac{F}{f_2} \right) + G_2 \left( \frac{F}{f_2} \right)^2 + G_3 \left( \frac{F}{f_2} \right)^3 + G_4 \left( \frac{F}{f_2} \right)^4 + G_5 \left( \frac{F}{f_2} \right)^5 = 0$$



Trovato il valore di  $\frac{F}{f_2}$  colla risoluzione numerica di questa equazione, i coefficienti A, B, C, B', C' delle equazioni (12) e (15) non conterranno più che quantità cognite, e potremo da una di esse ricavare il valore di  $\frac{F}{\rho_2}$  comune ad amendue. Dopo sarà facile di dedurre con breve calcolo dalle (4), (6) e (9) quelli dei rapporti  $\frac{F}{\rho_5}$ ,  $\frac{F}{\rho_1}$ ,  $\frac{F}{\rho_6}$ , che presi inversamente faranno conoscere i raggi di curvatura delle tre lenti in parti della lunghezza focale, che si vuol dare all'obbiettivo; con che il problema sarà interamente risoluto.

#### CAPITOLO IV.

APPLICAZIONE DELLE FORMULE GENERALI PRECEDENTI, AL CALCOLO NUMERICO  
DI UN OBBIEITIVO APLANATICO A TRE LENTI A CONTATTO (\*).

##### 1.

Calcolo dei valori di  $a_0, a_1; b_0, b_1, b_2; c_0$  ec.

Nel calcolare quest'obbiettivo, l'abbiamo supposto formato di una lente di *Flint* interposta a due di *Crown*. Abbiamo assunto pel *Crown* della prima lente quello che Fraunhofer ha rappresentato col n.° 9; pel *Flint* della lente di mezzo il n.° 13, e pel *Crown* dell'ultima lente il *Crown litt. M* dello stesso Autore.

Gl'indici di *refrazione media* e i *poteri dispersivi* di queste sostanze che abbiamo calcolati partendo dai dati sperimentali dello stesso Fraunhofer (\*\*) sono i seguenti:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1,53140 & a_3 = 1,63870 & a_5 = 1,56120 \\ b_1 = 0,01559 & b_3 = 0,03144 & b_5 = 0,01828 \end{array}$$

Ciò posto, rammentando che

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 1,$$

le formole

$$m_1 = a_1 - a_2; \quad m_3 = a_3 - a_2; \quad m_5 = a_5 - a_4$$

(\*) Questo Capitolo è dovuto, come fu avvertito nel Preliminare, al Dott. Angiolo Forti.

(\*\*) Vedi *Nuovo Cimento* Vol. VI, Dicembre 1857.

ci daranno:

$$m_1 = 0,53140; \quad m_3 = 0,67870; \quad m_5 = 0,56120.$$

Determineremo il valore dei soli quattro raggi di curvatura  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_6$  della prima, seconda, quinta e sesta superficie, essendo  $\rho_3 = \rho_2; \rho_4 = \rho_5$  a motivo del contatto della seconda superficie colla terza e della quarta colla quinta.

Intanto con gli anzidetti valori di  $m_1, a_1; m_3, a_3; m_5, a_5$ , noi passeremo a valutare numericamente quelli di  $p, q, r, s, h, k, i$  e quindi di  $a_0, a_1; b_0, b_1$  ec. che sono espressi in generale dalle formule segnate (1) (2) (b) (8) (10)<sub>a</sub> (10)<sub>b</sub> (10)<sub>c</sub> ec. del capitolo precedente §. 2.

Ecco i calcoli che ci danno questi valori.

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
	$p = \frac{m_3 b_5 - m_5 b_3}{m_5 b_1 - m_1 b_5}$		
$m_5 =$	0,56120	$\log m_5 =$	9,7491177
$b_3 =$	0,03144	$\log b_3 =$	8,4974549
$m_5 b_3 =$	0,01764	$\log m_5 b_3 =$	8,2465726
$m_3 =$	0,63870	$\log m_3 =$	9,8052969
$b_5 =$	0,01828	$\log b_5 =$	8,2620712
$m_3 b_5 =$	0,01168	$\log m_3 b_5 =$	8,0673681
$m_5 b_3 - m_3 b_5 =$	0,00596		
$b_1 =$	0,01559	$\log b_1 =$	8,1929297
$m_5 b_1 =$	0,00875	$\log m_5 b_1 =$	7,9420474
$m_1 =$	0,53140	$\log m_1 =$	9,7254216
$m_1 b_5 =$	0,00972	$\log m_1 b_5 =$	7,9874928
$m_5 b_1 - m_1 b_5 =$	-0,00097		

		167	
Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$\log (m_5 b_5 - m_5 b_5) = 7,7752463$	
		$\text{Clog } (m_5 b_1 - m_1 b_5) = 3,0132283$	
		$\log \left( \frac{m_5 b_5 - m_5 b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5} \right) = 0,7884746$	
$\frac{m_5 b_5 - m_5 b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = p = -6,14433$			
	$q = \frac{m_5 b_1 - m_1 b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5}$		
		$\log m_5 = 9,8052969$	
		$\log b_1 = 8,1929297$	
		$\log m_5 b_1 = 7,9982266$	
$m_5 b_1 = 0,00996$			
		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$\log b_5 = 8,4974549$	
		$\log m_1 b_5 = 8,2228765$	
$m_1 b_5 = 0,01671$			
$m_5 b_1 - m_1 b_5 = -0,00675$		$\log (m_5 b_1 - m_1 b_5) = 7,8293038$	
		$\log \left( \frac{m_5 b_1 - m_1 b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5} \right) = 0,8425321$	
$\frac{m_5 b_1 - m_1 b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = q = 6,95877$			
	$r = \frac{b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5}$		
		$\log b_5 = 8,2620712$	
		$\log \frac{b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = 1,2752995$	
$\frac{b_5}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = r = -18,84949$			

168			
Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
	$s = \frac{b_1}{m_5 b_1 - m_1 b_5}$		
		$\log b_1 = 8,1929297$	
		$\text{Clog } (m_5 b_1 - m_1 b_5) = 3,0132283$	
		$\log \frac{b_1}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = 1,2061580$	
$\frac{b_1}{m_5 b_1 - m_1 b_5} = s = -16,07526$			
	$h = \frac{p}{m_5}$		
	$p = -6,14443$		
		$\log p = 0,7884746$	
		$\text{Clog } m_5 = 0,1947031$	
		$\log \frac{p}{m_5} = 0,9831777$	
$\frac{p}{m_5} = h = -9,62006$			
	$k = \frac{q}{m_5}$		
	$q = 6,95877$		
		$\log q = 0,8425321$	
		$\log \frac{q}{m_5} = 1,0372352$	
$\frac{q}{m_5} = k = 10,89520$			
	$i = \frac{1-q}{m_5}$		
	$1-q = -5,95877$		
		$\log (1-q) = 0,7751566$	
		$\log \left( \frac{1-q}{m_5} \right) = 0,9698597$	
$\frac{1-q}{m_5} = i = -9,32953$			

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
			169
			<u>Logaritmi</u>
	$a_0 = \frac{2m_1^2}{a_1}r - \frac{2m_5^2}{a_5}s - 3m_1r + 3m_5s$		$\log 2 = 0,3010300$
			$2 \log m_1 = 9,4508432$
			$\log r = 1,2752995$
			$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$
			$\log \frac{2m_1^2}{a_1}r = 0,8420841$
	$\frac{2m_1^2}{a_1}r = -6,95160$		
			$2 \log m_5 = 9,4982354$
			$\log s = 1,2061580$
			$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$
			$\log \frac{2m_5^2}{a_5}s = 0,8119649$
	$\frac{2m_5^2}{a_5}s = -6,48582$		
			$\log 3 = 0,4771213$
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log 3m_1r = 1,4778424$
	$3m_1r = -30,04986$		
			$\log m_5 = 9,7491177$
			$\log 3m_5s = 1,4323970$
	$3m_5s = -27,06431$		
	$\frac{2m_1^2}{a_1}r - \frac{2m_5^2}{a_5}s - 3m_1r$		
	$+ 3m_5s = a_0 = 2,51977$		
	$a_1 = \frac{2m_1^2}{a_1}h - \frac{2m_5}{a_5} + \frac{2m_5^2}{a_5}k - 3m_1h + 3 - 3m_5k$		
			$\log h = 0,9831777$
			$\log \frac{2m_1^2}{a_1}h = 0,5499623$

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
			170
			<u>Logaritmi</u>
	$\frac{2m_1^2}{a_1}h = -3,54783$		
			$\log 2 = 0,3010300$
			$\log m_5 = 9,8052969$
			$\text{Clog } a_5 = 9,7855005$
			$\log \frac{2m_5}{a_5} = 9,8918274$
	$\frac{2m_5}{a_5} = 0,77952$		
			$2 \log m_5 = 9,4982354$
			$\log k = 1,0372352$
			$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$
			$\log \frac{2m_5^2}{a_5}k = 0,6430421$
	$\frac{2m_5^2}{a_5}k = 4,39584$		
			$\log 3 = 0,4771213$
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log h = 0,9831777$
			$\log 3m_1h = 1,1857206$
	$3m_1h = -15,33630$		
			$\log m_5 = 9,7491177$
			$\log 3m_5k = 1,2634742$
	$3m_5k = 18,34316$		
	$\frac{2m_1^2}{a_1}h - \frac{2m_5}{a_5} + \frac{2m_5^2}{a_5}k$		
	$- 3m_1h + 3 - 3m_5k = a_1 = 0,06163$		
	$b_0 = \frac{4m_1^2}{a_1}r^2 - \frac{4m_1m_5}{a_5}rs - 3m_1r^2 + 3m_5s^2 + 2$		
			$\log 4 = 0,6020600$
			$2 \log m_1 = 9,4508432$
			$2 \log r = 2,5505990$

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	171 Logaritmi
			2,6035022
			Clog $a_1 = 9,8149114$
			$\log \frac{4 m_1^2}{a_1} r^2 = 2,4184136$
	$\frac{4 m_1^2}{a_1} r^2 = 262,06779$		$\log 4 = 0,6020600$
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log m_5 = 9,7491177$
			$\log r = 1,2752995$
			$\log s = 1,2061580$
			Clog $a_5 = 9,8065415$
			$\log \frac{4 m_1 m_5}{a_5} r s = 2,3645983$
	$-\frac{4 m_1 m_5}{a_5} r s = -231,52521$		$\log 3 = 0,4771213$
			$2 \log r^2 = 2,5505990$
			$\log 3 m_1 r^2 = 2,7531419$
	$-3 m_1 r^2 = -566,42427$		$2 \log s = 2,4123160$
			$\log 3 m_5 s^2 = 2,6385550$
			$3 m_5 s^2 = 435,06580$
			$2,00000$
			$b_0 = -98,81589$
			$b_1 = \frac{8 m_1^2}{a_1} h r - \frac{4 m_1}{a_5} r + \frac{4 m_1 m_5}{a_5} (k r - h s) - \frac{4 m_5^2}{a_5 m_5} s$
			$+ \frac{4 m_5}{a_5} s - 6 m_1 h r - 3 m_5 s (k - i) + \frac{3 m_5}{m_5} s$
			$\log 8 = 0,9030900$
			$2 \log m_1 = 9,4508432$
			$\log h = 0,9831777$
			$\log \frac{8 m_1^2}{a_1} h r = 2,4273218$

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
			$\log 4 = 0,6020600$
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log r = 1,2752995$
			Clog $a_5 = 9,7855005$
			$\log \frac{4 m_1}{a_5} r = 1,3882816$
	$\frac{8 m_1^2}{a_1} h r = 267,49874$		$\log k = 1,0372352$
			$\log k r = 2,3125347$
	$-\frac{4 m_1}{a_5} r = 24,45015$		$\log h = 0,9831777$
			$\log s = 1,2061580$
			$\log h s = 2,1893357$
			$\log m_5 = 9,7491177$
			$\log (k r - h s) = 2,5563192$
			Clog $a_5 = 9,8065415$
			$\log \frac{4 m_1 m_5}{a_5} (k r - h s) = 2,4394600$
			$\log 4 = 0,6020600$
			$\log s = 1,2061580$
			$\log \frac{4 m_5}{a_5} s = 1,3638772$
			$2 \log m_5 = 9,4982354$
			Clog $m_5 = 0,1947031$
			$\log \frac{4 m_5^2}{a_5 m_5} s = 1,3076980$
			$k r = -205,36885$
			$h s = 154,64496$
			$k r - h s = -360,01381$
			$\frac{4 m_1 m_5}{a_5} (k r - h s) = -275,08063$
			$\frac{4 m_5}{a_5} s = -23,11411$

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	173 Logaritmi
$-\frac{4 m_5^2}{a_5 m_5} s =$	20,30944		
			$\log 6 = 0,7781513$
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log h = 0,9831777$
			$\log r = 1,2752995$
$-6 m_1 h r =$	-578,16280		$\log 6 m_1 h r = 2,7620501$
$k =$	10,89520		$\log 3 = 0,4771213$
$i =$	9,32953		$\log m_5 = 9,7491177$
$k - i =$	20,22473		$\log(k - i) = 1,3058887$
			$\log s = 1,2061580$
$-3 m_5(k - i) s =$	547,37588		$\log 3 m_5(k - i) s = 2,7382857$
			$\text{Clog } m_5 = 0,1947031$
			$\log \frac{3 m_5}{m_5} s = 1,6271001$
$\frac{3 m_5}{m_5} s =$	-42,37406		
$b_1 =$	-59,09739		
<hr/>			
$b_2 = \frac{4 m_1^2}{a_1} h^2 - \frac{4 m_1}{a_5} h + \frac{4 m_5^2}{a_5 m_5} k + \frac{4 m_1 m_5}{a_5} h k$			
$-\frac{4 m_5}{a_5} k - 3 m_1 h^2 + \frac{3}{m_5} - \frac{3 m_5}{m_5} k - 3 m_5 k i$			
			$\log 4 = 0,6020600$
			$2 \log m_1 = 9,4508432$
			$2 \log h = 1,9663554$
			$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$
			$\log \frac{4 m_1^2}{a_1} h^2 = 1,8341700$
$\frac{4 m_1^2}{a_1} h^2 =$	68,26060		

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
			$\log 4 = 0,6020600$
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log h = 0,9831777$
			$\text{Clog } a_5 = 9,7855005$
			$\log \frac{4 m_1}{a_5} h = 1,0961598$
$-\frac{4 m_1}{a_5} h =$	12,47842		
			$2 \log m_5 = 9,4982354$
			$\log k = 1,0372352$
			$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$
			$\text{Clog } m_5 = 0,1947031$
			$\log \frac{4 m_5^2}{a_5 m_5} k = 1,1387752$
$\frac{4 m_5^2}{a_5 m_5} k =$	13,76496		
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log m_5 = 9,7491177$
			$\log \frac{4 m_1 m_5}{a_5} h k = 1,9035537$
$\frac{4 m_1 m_5}{a_5} h k =$	-80,08545		
			$\log k = 1,0372352$
			$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$
			$\log \frac{4 m_5}{a_5} k = 1,1949544$
$-\frac{4 m_5}{a_5} k =$	-15,66587		
			$\log 3 = 0,4771213$
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$2 \log h = 1,9663554$
$-3 m_1 h^2 =$	-147,53610		$\log 3 m_1 h^2 = 2,1688983$

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>175</u> <u>Logaritmi</u>
			$\log 3 = 0,4771213$
			$\text{Clog } m_s = 0,1947031$
			$\log \frac{3}{m_s} = 0,6718244$
$\frac{3}{m_s} =$	4,69704		
			$\log m_s = 9,7491177$
			$\log k = 1,0372352$
			$\log \frac{3 m_s}{m_s} k = 1,4581773$
$-\frac{3 m_s}{m_s} k =$	- 28,71953		
			$\log i = 0,9698597$
$- 3 m_s k i =$	171,13300		$\log 3 m_s k i = 2,2333339$
	$b_2 = - 1,67293$		
			$\log 2 = 0,3010300$
			$2 \log m_1 = 9,4508432$
			$3 \log r = 3,8258985$
			$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$
			$\log \frac{2 m_1^2}{a_1} r^3 = 3,3926831$
$\frac{2 m_1^2}{a_1} r^3 =$	- 2469,92111		
			$2 \log r = 2,5505990$
			$\log s = 1,2061580$
			$\text{Clog } a_s = 9,8065415$
			$\log \frac{2 m_1^2}{a_s} r^2 s = 3,3151717$
$-\frac{2 m_1^2}{a_s} r^2 s =$	2066,19663		

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$3 \log r = 3,8258985$
			$\log m_1 r^3 = 3,5513201$
$- m_1 r^3 =$	3558,93490		
			$\log m_s = 9,7491177$
			$3 \log s = 3,6184740$
			$\log m_s s^3 = 3,3675917$
$m_s s^3 =$	- 2331,26532		
			$\log 2 = 0,3010300$
			$\log s = 1,2061580$
			$\log 2 s = 1,5071880$
$2 s =$	- 32,15051		
$1 =$	1,00000		
$e_0 =$	792,79459		
			$\log 6 = 0,7781513$
			$2 \log m_1 = 9,4508432$
			$\log h = 0,9831777$
			$2 \log r = 2,5505990$
			$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$
			$\log \frac{6 m_1^2}{a_1} h r^2 = 3,5776826$
$\frac{6 m_1^2}{a_1} h r^2 =$	- 3781,66170		
			$\text{Clog } a_s = 9,7855005$
			$\text{Clog } m_s = 0,1947031$
			$\log \frac{2 m_1^2}{a_s m_s} r^2 = 2,2826758$
$-\frac{2 m_1^2}{a_s m_s} r^2 =$	- 191,72370		



		177	
Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$\log 4 = 0,6020600$	
		$2 \log m_1 = 9,4508432$	
		$\log h = 0,9831777$	
		$\log r = 1,2752995$	
		$\log s = 1,2061580$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\log \frac{4 m_1^2}{a_5} h r s = 3,3240799$	
$-\frac{4 m_1^2}{a_5} h r s =$	2109,01577		
		$\log k = 1,0372352$	
		$2 \log r = 2,5505990$	
		$\log \frac{2 m_1^2}{a_5} k r^2 = 3,1462489$	
$\frac{2 m_1^2}{a_5} k r^2 =$	1400,38932		
		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log i = 0,9698597$	
		$\log 2i = 1,2708897$	
$2i = -$	18,65905		
		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$\log m_5 = 9,7491177$	
		$\text{Clog } m_5 = 0,1947031$	
		$\log \frac{4 m_1 m_5}{a_5 m_5} r s = 2,5593014$	
$-\frac{4 m_1 m_5}{a_5 m_5} r s = -$	362,49450		
		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$\log r = 1,2752995$	
		$\log s = 1,2061580$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\log \frac{4 m_1}{a_5} r s = 2,6154806$	
$\frac{4 m_1}{a_5} r s =$	412,55376		

		178	
Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$\log 3 = 0,4771213$	
		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$\log h = 0,9831777$	
		$2 \log r = 2,5505990$	
		$\log 3 m_1 h r^2 = 3,7363196$	
$- 3 m_1 h r^2 =$	5449,03500		
		$\log m_5 = 9,7491177$	
		$2 \log s = 2,4123160$	
		$\text{Clog } m_5 = 0,1947031$	
		$\log \frac{m_5}{m_5} s^2 = 2,3561368$	
		$\frac{m_5}{m_5} s^2 = 227,05799$	
		$\log k = 1,0372352$	
		$\log m_5 k s^2 = 3,1986689$	
$- m_5 k s^2 = -$	1580,04290		
		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log i = 0,9698597$	
		$\log 2 m_5 i s^2 = 3,4323234$	
$2 m_5 i s^2 = -$	2705,97250		
		$c_1 = 957,49749$	
		$c_2 = \frac{6 m_1^2}{a_1} h^2 r - \frac{4 m_1^2}{a_5 m_5} h r - \frac{2 m_5^2}{a_5 m_5^2} s - \frac{2 m_1^2}{a_5} h k r - \frac{2}{a_5} s$	
		$+ \frac{4 m_1 m_5}{a_5 m_5} (k r - h s) + \frac{4 m_5}{a_5 m_5} s - \frac{4 m_1}{a_5} (k r - h s)$	
		$- 3 m_1 h^2 r + \frac{m_5}{m_5^2} s - \frac{m_5}{m_5} (k - i) s - 2 m_5 k i s + m_5 s i^2$	
		$\log 6 = 0,7781513$	
		$2 \log m_1 = 9,4508432$	
		$2 \log h = 1,9663554$	
		$\log r = 1,2752995$	
		$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$	
		$\log \frac{6 m_1^2}{a_1} h^2 r = 3,2855608$	

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	179 Logaritmi
$\frac{6 m_1^2}{a_1} h^2 r =$	- 1930,01531		$\log 4 = 0,6020600$
			$2 \log m_1 = 9,4508432$
			$\log h = 0,9831777$
			$\log r = 1,2752995$
			$\text{Clog } a_3 = 9,7855005$
			$\text{Clog } m_3 = 0,1947031$
			$\log \frac{4 m_1^2}{a_3 m_3} h r = 2,2915840$
$-\frac{4 m_1^2}{a_3 m_3} h r =$	- 195,69700		$\log 2 = 0,3010300$
			$2 \log m_3 = 9,4982354$
			$\log s = 1,2061580$
			$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$
			$\text{C} 2 \log m_5 = 0,3894062$
			$\log \frac{2 m_5^2}{a_5 m_5^2} s = 1,2013711$
$-\frac{2 m_5^2}{a_5 m_5^2} s =$	15,89905		$2 \log h = 1,9663554$
			$\log \frac{2 m_1^2}{a_5} h^2 s = 2,7309281$
$-\frac{2 m_1^2}{a_5} h^2 s =$	538,18061		$\log k = 1,0372352$
			$\log \frac{4 m_1^2}{a_5} h k r = 3,1551571$
$\frac{4 m_1^2}{a_5} h k r =$	1429,41065		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$
			$\log \frac{2}{a_5} s = 1,3137295$

180 Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
$-\frac{2}{a_5} s =$	20,59347		$\log 4 = 0,6020600$
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log m_3 = 9,7491177$
			$\log (kr - hs) = 2,5563192$
			$\text{Clog } a_3 = 9,8065415$
			$\text{Clog } m_3 = 0,1947031$
			$\log \frac{4 m_1 m_3}{a_3 m_3} (kr - hs) = 2,6341631$
$\frac{4 m_1 m_3}{a_3 m_3} (kr - hs) =$	- 430,68830		$\log s = 1,2061580$
			$\log \frac{4 m_5}{a_5 m_5} s = 1,5585803$
$\frac{4 m_5}{a_5 m_5} s =$	36,18931		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$
			$\log \frac{4 m_1}{a_5} (kr - hs) = 2,6903423$
$-\frac{4 m_1}{a_5} (kr - hs) =$	490,16490		$\log 3 = 0,4771213$
			$2 \log h = 1,9663554$
			$\log r = 1,2752995$
			$\log 3 m_1 h^2 r = 3,4441978$
$- 3 m_1 h^2 r =$	- 2780,97889		$\text{C} 2 \log m_5 = 0,3894062$
			$\log \frac{m_5}{m_5^2} s = 1,3446819$
$\frac{m_5}{m_5^2} s =$	22,11474		$\log (k - i) = 1,3058887$
			$\log \frac{m_5}{m_5} (k - i) s = 2,4558675$

		181	
Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
$-\frac{m_5}{m_5}(k-i)s =$	285,67192		
		$\log 2 =$	0,3010300
		$\log m_5 =$	9,7491177
		$\log k =$	1,0372352
		$\log i =$	0,9698597
		$\log s =$	1,2061580
$-2m_5kis =$	-1834,00546	$\log 2m_5kis =$	3,2634006
		$\log m_5 =$	9,7491177
		$2 \log i =$	1,9397194
		$\log m_5i^2s =$	2,8949951
$m_5i^2s =$	785,22654		
$c_2 =$	326,96283		
<hr/>			
$c_5 =$	$\frac{2m_1^2}{a_1}h^5 - \frac{2m_1^2}{a_5m_5}h^2 + \frac{2m_5^2}{a_5m_5^2}k + \frac{2m_1^2}{a_5}h^2k + \frac{2}{a_5}k$		
	$+ \frac{4m_1m_5}{a_5m_5}hk - \frac{4m_5}{a_5m_5}k - \frac{4m_1}{a_5}hk - m_1h^5 + \frac{1}{m_5^2} - \frac{m_5}{m_5}ki$		
	$- m_5ki^2 - \frac{m_5}{m_5^2}k$		
		$\log 2 =$	0,3010300
		$2 \log m_1 =$	9,4508432
		$3 \log h =$	2,9495331
		$\text{Clog } a_1 =$	9,8149114
		$\log \frac{2m_1^2}{a_1}h^5 =$	2,5163177
$\frac{2m_1^2}{a_1}h^5 =$	-328,33530	$2 \log h =$	1,9663554
		$\text{Clog } a_5 =$	9,7855005
		$\text{Clog } m_5 =$	0,4947031
		$\log \frac{2m_1^2}{a_5m_5}h^2 =$	1,6984322

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
$-\frac{2m_1^2}{a_5m_5}h^2 =$	49,93812		
		$\log 2 =$	0,3010300
		$2 \log m_5 =$	9,4982354
		$\log k =$	1,0372352
		$\text{Clog } a_5 =$	9,8065415
		$2 \log m_5 =$	0,3894062
		$\log \frac{2m_5^2}{a_5m_5^2}k =$	1,0324483
$\frac{2m_5^2}{a_5m_5^2}k =$	10,77576		
		$2 \log m_1 =$	9,4508432
		$2 \log h =$	1,9663554
		$\text{Clog } a_5 =$	9,8065415
		$\log \frac{2m_1^2}{a_5}h^2k =$	2,5620053
$\frac{2m_1^2}{a_5}h^2k =$	364,75842		
		$\log 2 =$	0,3010300
		$\log \frac{2}{a_5}k =$	1,1448067
$\frac{2}{a_5}k =$	13,95747		
		$\log 4 =$	0,6020600
		$\log m_1 =$	9,7254216
		$\log m_5 =$	9,7491177
		$\log h =$	0,9831777
		$\text{Clog } m_5 =$	0,1947031
		$\log \frac{4m_1m_5}{a_5m_5}hk =$	2,0982568
$\frac{4m_1m_5}{a_5m_5}hk =$	-125,38820		
		$\log k =$	1,0372352
		$\log \frac{4m_5}{a_5m_5}k =$	1,3896575

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	183 Logaritmi
$-\frac{4 m_5}{a_5 m_3} k =$	24,52773		$\log 4 = 0,6020600$
			$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log h = 0,9831777$
			$\log k = 1,0372352$
			$\text{Clog } a_3 = 9,8065415$
			$\log \frac{4 m_1}{a_5} h k = 2,1544360$
$\frac{4 m_1}{a_5} h k =$	142,70391		$\log m_1 = 9,7254216$
			$3 \log h = 2,9495331$
			$\log m_1 h^3 = 2,6749547$
$- m_1 h^3 =$	473,10200		$\text{C } 2 \log m_3 = 0,3894062$
$\frac{1}{m_3^2} =$	2,45135		$\log m_5 = 9,7491177$
			$\log i = 0,9698597$
			$\text{Clog } m_3 = 0,1947031$
			$\log \frac{m_5}{m_3} k i = 1,9509157$
$-\frac{m_5}{m_3} k i =$	89,31320		$2 \log i = 1,9397194$
			$\log m_3 k i^2 = 2,7260723$
$- m_3 k i^2 =$	532,19685		$\text{C } 2 \log m_3 = 0,3894062$
			$\log \frac{m_5}{m_3^2} k = 1,1757591$
$-\frac{m_5}{m_3^2} k =$	14,98852		
$c_3 =$	21,68739		

184 Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$b'_0 = \frac{m_1}{a_1} r - \frac{m_5}{a_5} s - 1$	$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log r = 1,2752995$
			$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$
			$\log \frac{m_1}{a_1} r = 0,8156325$
		$\frac{m_1}{a_1} r =$	6,54083
			$\log m_5 = 9,7491177$
			$\log s = 1,2061580$
			$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$
			$\log \frac{m_5}{a_5} s = 0,7618172$
$-\frac{m_5}{a_5} s =$	5,77853		
$- 1 =$	1,00000		
$b'_0 =$	1,76230		
		$b'_1 = \frac{m_1}{a_1} h - \frac{1}{a_3} + \frac{m_5}{a_5} k$	$\log m_1 = 9,7254216$
			$\log h = 0,9831777$
			$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$
			$\log \frac{m_1}{a_1} h = 0,5235107$
		$\frac{m_1}{a_1} h =$	3,33819
		$-\frac{1}{a_3} =$	0,61024
			$\text{Clog } a_3 = 9,7855005$

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
		$\log m_5 = 9,7491177$	
		$\log k = 1,0372352$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\log \frac{m_5}{a_5} k = 0,5928944$	
$\frac{m_5}{a_5} k =$	<u>3,91647</u>		
$b'_1 = -$	<u>0,03196</u>		
$c'_0 = \frac{m_1}{a_1} r^2 - \frac{m_1}{a_5} r s - s - 1$		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$2 \log r = 2,5505990$	
		$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$	
		$\log \frac{m_1}{a_1} r^2 = 2,0909320$	
$\frac{m_1}{a_1} r^2 =$	<u>123,29117</u>		
		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$\log r = 1,2752995$	
		$\log s = 1,2061580$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\log \frac{m_1}{a_5} r s = 2,0134206$	
$-\frac{m_1}{a_5} r s = -$	<u>103,13842</u>		
$s = -$	<u>16,07526</u>		
$-1 = -$	<u>1,00000</u>		
$c'_0 =$	<u>35,22801</u>		

$$c'_1 = \frac{2m_1}{a_1} hr - \frac{m_1}{a_5 m_5} r - \frac{m_5}{a_5 m_5} s - \frac{m_1}{a_5} hs + \frac{m_1}{a_5} kr + \frac{1}{a_5} s - i$$

<u>Denominazioni</u>	<u>Numeri</u>	<u>Denominazioni</u>	<u>Logaritmi</u>
		$\log 2 = 0,3010300$	
		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$\log h = 0,9831777$	
		$\log r = 1,2752995$	
		$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$	
		$\log \frac{2m_1}{a_1} hr = 2,0998402$	
$\frac{2m_1}{a_1} hr =$	<u>125,84620</u>		
$-\frac{m_1}{a_5 m_5} r =$	<u>9,57028</u>		
		$\log m_5 = 9,7491177$	
		$\log s = 1,2061580$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\log \frac{m_1}{a_5 m_5} r = 0,9809247$	
		$\log m_5 = 9,7491177$	
		$\log s = 1,2061580$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\log \frac{m_5}{a_5 m_5} s = 0,9565203$	
$-\frac{m_5}{a_5 m_5} s =$	<u>9,04733</u>		
		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$\log h = 0,9831777$	
		$\log \frac{m_1}{a_5} hs = 1,7212988$	
$-\frac{m_1}{a_5} hs = -$	<u>52,63792</u>		
		$\log k = 1,0372352$	
		$\log r = 1,2752995$	
		$\log \frac{m_1}{a_5} kr = 1,8444978$	
$\frac{m_1}{a_5} kr = -$	<u>69,90331</u>		

		187	
Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$\log s = \overline{1,2061580}$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\log \frac{1}{a_5} s = \overline{1,0126995}$	
$\frac{1}{a_5} s =$	$10,29673$		
$- i =$	$9,32953$		
$c'_1 =$	$20,95538$		
<hr/>			
$c'_2 = \frac{m_1}{a_1} h^2 - \frac{m_1}{a_5 m_5} h + \frac{m_5}{a_5 m_5} k + \frac{m_1}{a_5} h k - \frac{1}{a_5} k$		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$2 \log h = 1,9663554$	
		$\text{Clog } a_1 = 9,8149114$	
		$\log \frac{m_1}{a_1} h^2 = 1,5066884$	
$\frac{m_1}{a_1} h^2 =$	$32,11355$		
		$\log h = \overline{0,9831777}$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,7855005$	
		$\text{Clog } m_5 = 0,1947031$	
		$\log \frac{m_1}{a_5 m_5} h = \overline{0,6888029}$	
$-\frac{m_1}{a_5 m_5} h =$	$4,88431$		
		$\log m_5 = 9,7491177$	
		$\log k = 1,0872352$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\text{Clog } m_5 = 0,1947031$	
		$\log \frac{m_5}{a_5 m_5} k = 0,7875975$	
$\frac{m_5}{a_5 m_5} k =$	$6,13193$		

Denominazioni	Numeri	Denominazioni	Logaritmi
		$\log m_1 = 9,7254216$	
		$\log h = \overline{0,9831777}$	
		$\log k = 1,0372352$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\log \frac{m_1}{a_5} h k = \overline{1,5523760}$	
$\frac{m_1}{a_5} h k =$	$35,67598$		
		$\log k = 1,0372352$	
		$\text{Clog } a_5 = 9,8065415$	
		$\log \frac{1}{a_5} k = 0,8437767$	
$-\frac{1}{a_5} k =$	$6,97874$		
$c'_2 =$	$0,47507$		

2.

*Calcolo delle quantità  $g_0, g'_0, g''_0$  ec.*

Ora dobbiamo passare a sostituire i valori ottenuti superiormente nelle espressioni generali di  $g_0, g'_0, g''_0, g_1, g'_1$  ec. date dalle equazioni (15) (15') (15'') del §. 4 Capitolo I. Noi peraltro non istaremo ad esporre per queste quantità il prospetto dei calcoli, giacchè il lettore ne ha veduto i particolari che abbiamo dato trattando di un obbiettivo a due lenti. Le formule essendo le stesse di quelle di allora, la differenza non consisterà che nei valori numerici di  $a_0, a_1, b_0, b_1$  ec. Sicchè ci limiteremo a darne qui i risultati finali che sono i seguenti:

$g_0 = a_0 c'_0{}^2$	$= 3127,06650$
$g_1 = 2a_0 c'_0 c'_1 + a_1 c'_0{}^2$	$= 3796,75532$
$g_2 = a_0 (c'_1{}^2 + 2c'_0 c'_2) + 2a_1 c'_0 c'_1$	$= 1281,83495$
$g_3 = 2a_0 c'_1 c'_2 + a_1 (c'_1{}^2 + 2c'_0 c'_2)$	$= 79,29632$
$g_4 = a_0 c'_2{}^2 + 2a_1 c'_1 c'_2$	$= 1,79577$
$g_5 = a_1 c'_2{}^2$	$= 0,01391$



Cercando le radici di questa equazione, coi noti metodi di risoluzione delle equazioni numeriche per mezzo delle funzioni circolari ed iperboliche (\*), si trova che queste radici hanno i seguenti valori

$$\left(\frac{F}{f_2}\right)^I = -1,53322$$

$$\left(\frac{F}{f_2}\right)^{II} = 5,71010$$

$$\left(\frac{F}{f_2}\right)^{III} = -1,88107$$

$$\left(\frac{F}{f_2}\right)^{IV} = -55,29578 + 7,03950\sqrt{-1}$$

$$\left(\frac{F}{f_2}\right)^V = -55,29578 - 7,03950\sqrt{-1}$$

Trascurando le due ultime radici che sono immaginarie, e quindi estranee al problema, condurrò a termine lo sviluppo del calcolo per la prima delle reali, citando il risultato delle altre due.

Per essa le (14)<sub>b</sub> (14)<sub>c</sub> diverranno:

$$B' = -1,71330 \quad C' = 4,21558$$

e però la (15) risulterà

$$-1,71330 \left(\frac{F}{f_2}\right)^I + 4,21558 = 0$$

Ora da questa e dalle (7), (4), (9) si ricaverà facilmente

$$\left(\frac{F}{\rho_2}\right)^I = 2,46050$$

$$\left(\frac{F}{\rho_1}\right)^I = \left(\frac{F}{\rho_2}\right)^I + h \left(\frac{F}{f_2}\right)^I + r = -1,63933$$

$$\left(\frac{F}{\rho_5}\right)^I = \left(\frac{F}{\rho_2}\right)^I + \frac{1}{m_5} \left(\frac{F}{f_2}\right)^I = 0,05997$$

$$\left(\frac{F}{\rho_6}\right)^I = \left(\frac{F}{\rho_2}\right)^I + i \left(\frac{F}{f_2}\right)^I + s = 0,68946$$

(\*) Ho fatto uso a quest' uopo di *Tavole di funzioni iperboliche*, che ho costruito già da qualche tempo colla scorta di formule generali del ch. sig. Prof. MOSSOTTI. In queste *Tavole* si trovano calcolati l'angolo trascendente, il seno, la secante e la tangente di esso, il seno, il coseno e il doppio settore iperboliche, corrispondenti ad ogni angolo comune preso per argomento, ed esteso da 0 a  $\frac{\pi}{4}$ .

$$\begin{aligned} g'_0 &= c_0 b'_0{}^2 &= 2462,18230 \\ g'_1 &= 2c_0 b'_0 b'_1 + c_1 b'_0{}^2 &= 3063,00530 \\ g'_2 &= c_0 b'_1{}^2 + 2c_1 b'_0 b'_1 + c_2 b'_0{}^2 &= 1124,11693 \\ g'_3 &= c_1 b'_1{}^2 + 2c_2 b'_0 b'_1 + c_3 b'_0{}^2 &= 105,16368 \\ g'_4 &= c_2 b'_1{}^2 + 2c_3 b'_0 b'_1 &= 2,77697 \\ g'_5 &= c_3 b'_1{}^2 &= 0,02215 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''_0 &= b_0 b'_0 c'_0 &= 6134,72000 \\ g''_1 &= b_0 (b'_0 c'_1 + b'_1 c'_0) + b_1 b'_0 c'_0 &= 7429,39564 \\ g''_2 &= b_0 (b'_0 c'_2 + b'_1 c'_1) + b_1 (b'_0 c'_1 + b'_1 c'_0) + b_2 b'_0 c'_0 &= 2501,75344 \\ g''_3 &= b_0 b'_1 c'_2 + b_1 (b'_0 c'_2 + b'_1 c'_1) + b_2 (b'_0 c'_1 + b'_1 c'_0) &= 154,22144 \\ g''_4 &= b_1 b'_1 c'_2 + b_2 (b'_0 c'_2 + b'_1 c'_1) &= 3,41831 \\ g''_5 &= b_2 b'_1 c'_2 &= 0,02540 \end{aligned}$$

Per mezzo di questi valori noi possiamo ora determinare quelli di  $G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$  dati dalle equazioni (16) ed avremo:

$$\begin{aligned} G_0 &= g_0 + g'_0 - g''_0 = 3127,06650 + 2462,18230 - 6134,72000 = -545,47120 \\ G_1 &= g_1 + g'_1 - g''_1 = 3796,75532 + 3063,00530 - 7429,39564 = -569,63502 \\ G_2 &= g_2 + g'_2 - g''_2 = 1281,83495 + 1124,11693 - 2501,75344 = -95,80156 \\ G_3 &= g_3 + g'_3 - g''_3 = 79,29632 + 105,16368 - 154,22144 = 30,23856 \\ G_4 &= g_4 + g'_4 - g''_4 = 1,79577 + 2,77697 - 3,41831 = 1,15443 \\ G_5 &= g_5 + g'_5 - g''_5 = 0,01391 + 0,02215 - 0,02540 = 0,01066 \end{aligned}$$

Finalmente l'equazione risultante sarà

$$-545,47120 - 569,63502 \left(\frac{F}{f_2}\right) - 95,80156 \left(\frac{F}{f_2}\right)^2 + 30,23856 \left(\frac{F}{f_2}\right)^3 + 1,15443 \left(\frac{F}{f_2}\right)^4 + 0,01066 \left(\frac{F}{f_2}\right)^5$$

3.

Radici dell'ottenuta equazione, e valori dei raggi di curvatura delle superficie delle tre lenti.

Dividendo la precedente equazione pel coefficiente di  $\left(\frac{F}{f_2}\right)^5$ , essa diviene

$$\left(\frac{F}{f_2}\right)^5 + 108,29547 \left(\frac{F}{f_2}\right)^4 + 2836,63852 \left(\frac{F}{f_2}\right)^3 - 8987,01400 \left(\frac{F}{f_2}\right)^2 - 53436,70000 \left(\frac{F}{f_2}\right) - 51169,89350 = 0$$

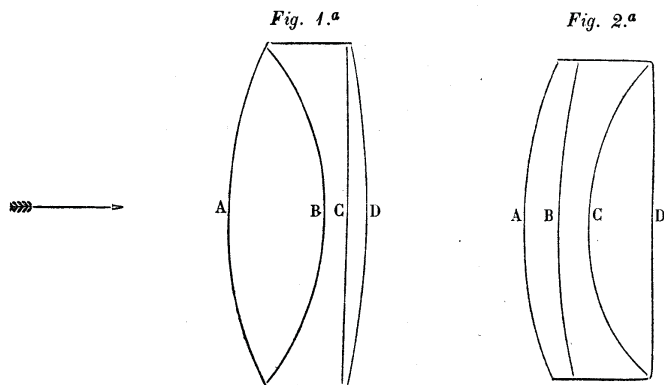
Assumendo per unità la distanza focale F dello strumento, e facendo un calcolo analogo per le altre due radici, ricaveremo questi tre sistemi di soluzione del problema.

$$\begin{array}{lll}
 \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^I = -1,63933 & \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{II} = 13,82492 & \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{III} = -2,22775 \\
 \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^I = \left(\frac{1}{\rho_3}\right)^I = 2,46050 & \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{II} = \left(\frac{1}{\rho_3}\right)^{II} = 87,60590 & \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^{III} = \left(\frac{1}{\rho_3}\right)^{III} = -1,47430 \\
 \left(\frac{1}{\rho_4}\right)^I = \left(\frac{1}{\rho_5}\right)^I = 0,05997 & \left(\frac{1}{\rho_4}\right)^{II} = \left(\frac{1}{\rho_5}\right)^{II} = 96,54609 & \left(\frac{1}{\rho_4}\right)^{III} = \left(\frac{1}{\rho_5}\right)^{III} = -4,41946 \\
 \left(\frac{1}{\rho_6}\right)^I = 0,68946 & \left(\frac{1}{\rho_6}\right)^{II} = 18,25810 & \left(\frac{1}{\rho_6}\right)^{III} = -0,00006
 \end{array}$$

e prendendone i valori inversi:

$$\begin{array}{lll}
 (\rho_1)^I = -0,61001 & (\rho_1)^{II} = 0,07233 & (\rho_1)^{III} = -0,44888 \\
 (\rho_2)^I = (\rho_3)^I = 0,40642 & (\rho_2)^{II} = (\rho_3)^{II} = 0,01141 & (\rho_2)^{III} = (\rho_3)^{III} = -0,67829 \\
 (\rho_4)^I = (\rho_5)^I = 16,67508 & (\rho_4)^{II} = (\rho_5)^{II} = 0,01036 & (\rho_4)^{III} = (\rho_5)^{III} = -0,22627 \\
 (\rho_6)^I = 1,45041 & (\rho_6)^{II} = 0,05477 & (\rho_6)^{III} = -16666,66666
 \end{array}$$

Il secondo sistema non è idoneo alla costruzione, perchè i raggi di curvatura  $(\rho_3)^{III}, (\rho_4)^{III}$  sono troppo piccoli. Una sezione degli altri due obbiettivi eseguita da un piano passante per l'asse centrale, avrà presso a poco, la forma che viene rappresentata dai seguenti diagrammi:



Il raggio incidente va nella direzione della freccia, A è il profilo della prima superficie d'incidenza il cui raggio è  $\rho_1$ ; B quello della seconda e terza; C quello della quarta e quinta, e D quello della superficie di emergenza.

La superficie di emergenza, specialmente della Fig. 2, è sensibilmente piana. È questo l'obbiettivo che il ch. sig. Prof. Amici ci ha con felice successo costruito. I valori dei raggi che gli abbiamo esibito differiscono pochissimo dagli attuali (\*), e questa differenza proviene dall'aver noi allora assunto per indice di refrazione,  $n = \frac{n_g + n_c}{2}$  e per potere dispersivo,  $s = \frac{n_g - n_c}{n - 1}$ , dove  $n_g$  ed  $n_c$  rappresentano gli indici di refrazione delle linee G e C dello spettro, nel mentre che attualmente si è fatto uso della formula dell'articolo 3, Capitolo I, Parte III, omettendo l'ultimo termine, cioè della formola

$$\frac{1}{r_u} = a + b \theta \quad (**)$$

in cui a esprime l'indice di refrazione corrispondente al raggio di refrazione media dello spettro reticolare e b il potere dispersivo.

### CAPITOLO V.

#### RAPPRESENTAZIONE DEGLI EFFETTI DELLE ABERRAZIONI.

##### 1.

##### Formole generali.

Ogniquale volta una o più delle otto equazioni, trovate nel Capitolo ultimo della Parte III, non sono verificate per un dato sistema ottico, il medesimo non

(\*) Ecco i valori dei raggi di curvatura inviati al Cav. Amici. La distanza focale dell'obbiettivo è al solito presa per unità; le curvature cominciano dalla parte dell'oggetto; il segno + indica una concavità verso l'oggetto e il segno - una convessità.

$$\begin{array}{l}
 1.^{\circ} \text{ Lente, Crown N.}^{\circ} 9. \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,45076 \\ \rho_2 = -0,66000 \end{array} \right. \\
 2.^{\circ} \text{ Lente, Flint N.}^{\circ} 15. \left\{ \begin{array}{l} \rho_3 = -0,66000 \\ \rho_4 = -0,22954 \end{array} \right. \\
 3.^{\circ} \text{ Lente, Crown Litt. M.} \left\{ \begin{array}{l} \rho_5 = -0,22954 \\ \rho_6 = -188,52595 \end{array} \right.
 \end{array}$$

È notevole la differenza del valore di  $\rho_6$  cioè di quello che dà la curvatura della superficie di emergenza, rispetto a  $(\rho_6)^{III}$ , ma è facile vedere che anche qui essa rappresenta una superficie sensibilmente piana. L'apertura ch' Egli ha dato a questo obbiettivo è di sei pollici con cinquantadue di distanza focale.

(\*\*) Vedasi la nota (\*\*) dell'articolo 1.

è più esente da tutti gli effetti d'aberrazione, vale a dire, i vari raggi partiti da un elemento dell'oggetto non hanno più il loro fuoco conjugato in un punto situato similmente nell'immagine, come l'elemento medesimo lo è nell'oggetto. Può in vari casi divenire soggetto non solo di curiosità, ma di necessità, il riconoscere preventivamente sino a qual grado i detti effetti possono estendersi in uno stromento progettato, per poter giudicare della sua buona o cattiva riuscita, perciò daremo in questo Capitolo un'idea del modo con cui si può procedere in tale ricerca.

Ci saremo fatto un concetto sufficientemente esatto degli effetti delle aberrazioni se determineremo, per un dato pennello luminoso emanato da un'elemento dell'oggetto, il luogo geometrico dei punti nei quali i raggi componenti il pennello stesso, e caduti sull'obbiettivo, intersecano il piano focale del sistema ottico (\*). Le formole trovate per un pennello qualsivoglia essendo applicabili a tutti i pennelli luminosi emanati dai diversi elementi dell'oggetto, potremo col loro mezzo arguire l'esattezza con cui sarà formata l'immagine dall'estensione più o men grande, che avranno le aberrazioni in quei pennelli pei quali le medesime saranno massime.

Per trovare le formole, che esprimono le aberrazioni in un dato sistema di lenti, denotiamo con  $\delta y$  e  $\delta z$  le coordinate del punto d'intersezione d'un raggio qualsivoglia col piano focale, le medesime essendo prese in questo piano, e misurate partendo dal punto corrispondente alle coordinate  $y$  e  $z$ , cioè dal fuoco conjugato determinato dalle equazioni (4) dell'articolo 3 nel Capitolo I, della Parte II, di modo che le  $\delta y$  e  $\delta z$  possano considerarsi, per la loro piccolezza, come variazioni delle stesse coordinate  $y$ ,  $z$ . Rappresentiamo inoltre con

$$(1) \quad \begin{cases} (\xi)_1 & , & (\varepsilon)_1 & , & (\zeta)_1 & , & (v)_1 \\ (\xi)_2 & , & (\varepsilon)_2 & , & (\zeta)_2 & , & (v)_2 \end{cases}$$

i valori che acquistano i primi membri delle suddette otto equazioni, quando le medesime non possono essere soddisfatte, e poniamo

$$(2) \quad \begin{cases} (\xi) = (\xi)_1 + \frac{1}{v_0 H_0} (\xi)_2 & , & (\varepsilon) = (\varepsilon)_1 + \frac{1}{v_0 H_0} (\varepsilon)_2 & , \\ (\zeta) = (\zeta)_1 + \frac{1}{v_0 H_0} (\zeta)_2 & , & (v) = (v)_1 + \frac{1}{v_0 H_0} (v)_2 & : \end{cases}$$

Indi avvertendo, che nel passare dalle equazioni (6) a quelle segnate (8) del-

(\*) Il piano focale, la cui situazione ci vien data dal valore di  $x$  risultante dall'equazione (4) dell'articolo 2, Capitolo II, Parte III, rimane il medesimo tanto nella prima che nella seconda approssimazione.

l'articolo 2, nel Capitolo I, è stato soppresso il divisore  $Q_{2n-1}$  comune a tutti i termini; e che nel passare dalle (12) del detto Capitolo alle equazioni corrispondenti alle aberrazioni parziali date negli articoli seguenti sono stati soppressi rispettivamente a ciascuna specie di esse i fattori  $\frac{1}{2} \rho_1^2$ ,  $a_1 \rho_1$ ,  $\frac{1}{2} a_1^2$ , e sono stati cambiati i segni di tutti i termini nelle equazioni spettanti alle due aberrazioni diedre, si troverà con facile calcolo, che le variazioni  $\delta y$  e  $\delta z$  risultanti dal sostituire i suddetti valori nelle due ultime equazioni segnate (2) nell'articolo 2 del Capitolo I, Parte III, saranno espresse da

$$(3) \quad \begin{cases} \delta y = \frac{1}{Q_{2n-1}^{(1)}} \left\{ \frac{1}{2} \rho_1^2 (\xi) \xi - a_0 \rho_1 (\varepsilon) \varepsilon + \frac{1}{2} a_0^2 (\zeta) \zeta + (v)_1 \theta \right\} y_1 \\ \quad - \frac{1}{Q_{2n-1}^{(1)}} \left\{ \frac{1}{2} \rho_1^2 (\xi)_2 \xi - a_0 \rho_1 (\varepsilon)_2 \varepsilon + \frac{1}{2} a_0^2 (\zeta)_2 \zeta + (v)_1 \theta \right\} \frac{y_0}{v_0 H_0} , \\ \delta z = \frac{1}{Q_{2n-1}^{(1)}} \left\{ \frac{1}{2} \rho_1^2 (\xi) \xi - a_0 \rho_1 (\varepsilon) \varepsilon + \frac{1}{2} a_0^2 (\zeta) \zeta + (v)_1 \theta \right\} z_1 \\ \quad - \frac{1}{Q_{2n-1}^{(1)}} \left\{ \frac{1}{2} \rho_1^2 (\xi)_2 \xi - a_0 \rho_1 (\varepsilon)_2 \varepsilon + \frac{1}{2} a_0^2 (\zeta)_2 \zeta + (v)_1 \theta \right\} \frac{z_0}{v_0 H_0} . \end{cases}$$

Le quantità  $\xi$  ed  $\varepsilon$  contenute in queste formole sono espresse da quelle segnate (9) nell'articolo 3 del Capitolo I, in funzioni delle coordinate  $y_1$  e  $z_1$  del punto d'incidenza del raggio luminoso sulla prima superficie dell'obbiettivo. Supponiamo che queste coordinate siano legate fra loro per mezzo dell'equazione

$$(4) \quad y_1^2 + z_1^2 = \omega^2 ,$$

e rappresentino conseguentemente quelle appartenenti alla proiezione sul piano ( $y z$ ) d'un circolo tracciato sulla superficie obbiettiva, intorno al centro di figura di essa. Dando al parametro  $\omega^2$  dei valori successivamente crescenti o decrescenti potremo ottenere le equazioni di altrettanti circoli spettanti alle proiezioni dei limiti di un grandissimo numero d'anelli infinitamente sottili, nei quali la superficie obbiettiva potrà essere considerata come divisa. Se quindi elimineremo le coordinate  $y_1$  e  $z_1$  fra le due precedenti equazioni (3), e quella testè assunta, segnata (4), l'equazione in  $\delta y$  e  $\delta z$ , risultante da tale eliminazione, apparterrà corrispondentemente a ciascun valore di  $\omega$ , al luogo geometrico dei punti in cui i raggi partiti dal centro luminoso ( $x_0, y_0, z_0$ ), e penetrati nell'obbiettivo per uno degli anelli, in cui si è considerato divisa la sua prima superficie, intersecheranno il piano focale; e col mezzo della cogni-

zione del detto luogo potremo formarci un'idea dell'estensione e della forma delle aberrazioni a cui sono stati soggetti i raggi passati per quell'anello.

Tratteremo dell'applicazione di questo processo in generale in un articolo seguente, dopo aver mostrato per maggior chiarezza come deve essere impiegato nei varii casi particolari.

## 2.

*Grandezza e forma delle curve che limitano i luoghi geocentrici delle aberrazioni nei due casi, che la prima equazione d'aberrazione di campo, o la seconda d'aberrazione diedra non siano soddisfatte.*

Nelle applicazioni, che abbiamo fatto precedentemente, si è visto che la prima delle equazioni di campo, segnata ( $\zeta$ ), nell'articolo 2 del Capitolo I, non ha potuto essere soddisfatta per mancanza di quantità arbitrarie, e che la seconda delle aberrazioni diedre, segnata ( $\epsilon$ ), nel citato articolo, è incompatibile per un'obbiettivo formato con lenti al contatto; proponiamoci quindi di riconoscere quali aberrazioni provengono in questi due casi dall'omissione di dette equazioni.

Supponiamo da principio che la sola equazione ( $\zeta$ )<sub>1</sub> sia quella rimasta insussistente, di modo che sia

$$\begin{aligned} (\zeta) = 0 & \quad , \quad (\epsilon) = 0 & \quad , \quad (\zeta) = (\zeta)_1 & \quad , \quad (v_\lambda) = 0 & \quad , \\ (\zeta)_2 = 0 & \quad , \quad (\epsilon)_2 = 0 & \quad , \quad (\zeta)_2 = 0 & \quad , \quad (v_\lambda)_2 = 0 & \quad ; \end{aligned}$$

le espressioni (5) di  $\delta y$  e  $\delta z$  si ridurranno in questo caso a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta y &= \frac{1}{2} a^2 \frac{1}{Q_{2n-1}^{(4)}} (\zeta)_1 \zeta y_1 , \\ \delta z &= \frac{1}{2} a^2 \frac{1}{Q_{2n-1}^{(4)}} (\zeta)_1 \zeta z_1 . \end{aligned} \right.$$

La direzione degli assi coordinati essendo rimasta arbitraria in queste equazioni, prendiamola in modo che il piano ( $xy$ ) passi pel punto raggiante, così che sia

$$y_0 = x \quad , \quad z_0 = 0 ;$$

$x$  dinotando la distanza del detto punto dall'asse centrale.

Attendendo a questi valori di  $y_0$  e  $z_0$ , dalla terza delle posizioni (9), fatta all'articolo 3 del Capitolo I, Parte III, si ottiene

$$\zeta = \frac{x^2}{H_0^2} ,$$

e quindi, sommando membro per membro i quadrati delle due equazioni (5), riducendo colle (4), e ponendo per brevità

$$t = \frac{a_0^2}{2} \frac{(\zeta)_1}{Q_{2n-1}^{(4)}} \frac{1}{H_0^2} ,$$

si ricaverà la seguente equazione

$$\delta y^2 + \delta z^2 = \omega^2 x^2 t^2 ,$$

la quale ci mostra, che il luogo geometrico dei punti, in cui i raggi luminosi passanti per un anello dell'obbiettivo di raggio  $\omega$ , incontrano il piano focale, è un circolo avente  $\omega x^2 t$  per raggio, e che perciò l'aberrazione, che si considera, cresce nella ragione composta dall'apertura  $\omega$ , e della grandezza superficiale del campo espressa da  $\pi x^2$ . Questa aberrazione diviene massima quando  $\omega = a$  e  $\frac{x}{H_0} = \sin O$ , rappresentando  $a$  l'intera apertura dell'obbiettivo, ed  $O$  il massimo campo visibile collo stromento, ed a questi limiti essa si estende ad un circolo che ha per raggio

$$\frac{a_0^2 a \sin O}{2} \frac{1}{Q_{2n-1}^{(4)}} (\zeta)_1 .$$

Passiamo al caso in cui la seconda equazione diedra sia quella che manchi d'essere verificata. Conservando le denominazioni già adottate, le equazioni (5) danno per questo caso

$$\begin{aligned} \delta y &= - \frac{a_0 \rho_1 (\epsilon)_2}{Q_{2n-1}^{(4)} v_0} \left( \frac{y_1}{H_0} - \frac{y_0}{H_0} \right) \epsilon , \\ \delta z &= - \frac{a_0 \rho_1 (\epsilon)_2}{Q_{2n-1}^{(4)} v_0} \left( \frac{z_1}{H_0} - \frac{z_0}{H_0} \right) \epsilon ; \end{aligned}$$

le quali, colla supposizione che l'asse delle  $y$  abbia la direzione datagli precedentemente, e colla posizione

$$u = \frac{a_0}{Q_{2n-1}^{(4)}} \frac{(\epsilon)_2}{v_0} \frac{1}{H_0^2}$$

si riducono a

$$(6) \quad \begin{cases} \delta y = -u x y_1^2 + u x^2 y_1, \\ \delta z = -u x y_1 z_1. \end{cases}$$

Si noterà che i fattori  $(\xi)_1$ ,  $(\epsilon)_2$  e  $Q_{2m-1}^{(4)}$  essendo tutti e tre di una dimensione lineare negativa, le quantità  $t$  ed  $u$  date dalle formole precedenti risulteranno di due dimensioni negative per causa del divisore  $H_0^2$ .

Per avere il luogo geometrico dei punti d'aberrazione eliminiamo  $x_1$ , fra l'ultima delle precedenti equazioni (6) e la (4), ciò che ci dà

$$u^2 x^2 y_1^4 = u^2 x^2 \omega^2 y_1^2 - \delta z^2;$$

e come dalla prima delle equazioni premesse elevata al quadrato si ricava

$$u^2 x^2 y_1^4 = (u x^2 y_1 - \delta y)^2,$$

col confronto dei secondi membri di queste due equazioni dedurremo la seguente

$$(7) \quad u^2 x^2 (x^2 - \omega^2) y_1^2 - 2 u x^2 y_1 \delta y + \delta y^2 + \delta z^2 = 0.$$

Eliminando  $y_1$ , coi noti metodi, fra quest'equazione e la prima delle (6), si avrà quella del luogo geometrico richiesto espresso da

$$(8) \quad \{\delta y^2 + \delta z^2 - u x (x^2 - \omega^2)\}^2 + u x^5 \{u x (x^2 - \omega^2) - 2 \delta y\} (\delta y^2 - \delta z^2) = 0$$

che rappresenta in generale una curva rientrante del quart'ordine.

Pei telescopj  $\omega$  è molto piccolo in confronto di  $x$ , trascurando quindi  $\omega^2$  in confronto di  $x^2$  l'equazione (7) prende la forma

$$(u x^2 y_1 - \delta y)^2 + \delta z^2 = 0$$

che si decompone nelle due

$$\delta y = u x^2 y_1, \quad \delta z = 0;$$

e ci dimostra, che in questo caso l'aberrazione consiste in un allungamento dell'immagine del punto luminoso nella direzione dell'asse delle  $y$ , limitato superiormente ed inferiormente dai due punti d'intersezione in cui un circolo, descritto intorno al fuoco conjugato del punto  $(y_0, 0)$  con un raggio eguale ad  $u x^2 y_1$ , segherebbe il detto asse.

Viceversa nei microscopj, il campo essendo comunemente molto piccolo in confronto dell'apertura dell'obbiettivo, si può considerare  $x^2$  trascurabile in

confronto di  $\omega^2$ , per tutti i raggi che passano per l'obbiettivo a poca distanza dal suo contorno, e l'equazione (8) si riduce in questo caso a

$$\{\delta y^2 + \delta z^2 + u x \omega^2 \delta y\}^2 - (u^2 x^4 \omega^2 + 2 u x^2 \delta y) (\delta y^2 + \delta z^2) = 0.$$

Quindi, osservando che i coefficienti di  $\delta y^2$ ,  $\delta y \delta z^2$ ,  $\delta y^2$  e  $\delta z^2$  nello sviluppo del secondo termine sono tutti trascurabili in confronto degli analoghi del primo, come contenenti la  $x$  ad una potenza maggiore di due unità, concluderemo dover essere

$$\delta y^2 + \delta z^2 + u x \omega^2 \delta y = 0.$$

Quest'equazione che può anche mettersi sotto la forma

$$(\delta y + \frac{1}{2} u x \omega^2)^2 + \delta z^2 = \frac{1}{4} u^2 x^2 \omega^4,$$

appartiene ad un circolo passante pel punto  $(y, z)$  origine delle coordinate  $\delta y$ ,  $\delta z$ , ed avente il suo centro sull'asse delle  $y$  ad una distanza  $-\frac{1}{2} u x \omega^2$  da essa. I raggi luminosi, partiti dal punto  $(x, 0)$  ed entrati nell'obbiettivo per l'anello il cui semidiametro è  $\omega$ , andranno quindi a distribuirsi sul detto cerchio, che rappresenterà il luogo geometrico delle loro aberrazioni, le quali diverranno massime quando  $\omega = a$ .

### 3.

*Equazioni delle curve che circoscrivono le altre specie d'aberrazioni non ancora considerate.*

Gli esempj, che abbiamo esposto, bastano per indicarci in generale il modo con cui le equazioni (3) e (4) devono essere trattate per dedurre da esse quella rappresentante il luogo geometrico dei punti d'intersezione col piano focale dei raggi partiti da un elemento luminoso dell'oggetto, e corrispondente ad una specie d'aberrazione qualunque. Noi ci limiteremo quindi a riferire per le varie specie d'aberrazioni, non ancora considerate, le equazioni delle curve che limitano i loro luoghi geometrici.

Per le due equazioni d'apertura queste equazioni sono

$$\begin{aligned} \delta y^2 + \delta z^2 &= r_1^2 \omega^2, \\ (\delta y + r_2 x)^2 + \delta z^2 &= r_2^2 \omega^2, \end{aligned}$$

essendo

$$r_1 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 (\xi)_1}{Q_{2m-1}^{(4)}}, \quad r_2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_2 (\xi)_2}{Q_{2m-1}^{(4)}} \frac{1}{v_0 H_0},$$

dal che si vede, che le aberrazioni dei raggi, passanti per uno degli anelli in cui è supposto diviso l'obbiettivo, sono rappresentate da due cerchi, il primo avente il suo centro nel fuoco coniugato  $(y, z)$ , ed il suo raggio eguale ad  $r_1 \omega$ ; il secondo, passante pel detto fuoco origine delle coordinate, avente un raggio eguale ad  $r_2 \omega$ , ed il suo centro sull'asse delle  $y$  alla distanza  $-r_2 x$  dell'origine.

Per la prima aberrazione diedra, l'equazione rappresentante il suo luogo geometrico è

$$(\partial y - s_1 \omega^2)^2 + \partial z^2 = s_1^2 \omega^4,$$

nella quale si è posto

$$s_1 = \frac{a_0^2 (\epsilon)_1 x}{2 Q_{2n-1}^{(1)} H_0};$$

ed è quindi data da un cerchio passante per l'origine delle coordinate, ed avente il suo centro sull'asse ad una distanza eguale ad  $s_1 \omega^2$ .

La seconda aberrazione di campo si conforma secondo una curva rappresentata dall'equazione

$$(\partial y + t_1 x)^2 + \partial z^2 = t_1^2 \omega^2,$$

dove è

$$t_1 = \frac{a_0^2 (\zeta)_2 x^2}{2 Q_{2n-1}^{(1)} H_0^3}.$$

Questa curva sarà dunque un cerchio che ha il centro sull'asse delle  $y$  alla distanza  $-\frac{1}{2} t_1 x$  dall'origine delle coordinate, ed ha per raggio  $t_1 \omega$ .

Finalmente per i contorni delle due aberrazioni cromatiche trovansi le equazioni

$$\begin{aligned} \partial y^2 + \partial z^2 &= w_1^2 \omega^2, \\ (\partial y + w_2 x)^2 + \partial z^2 &= w_2^2 \omega^2; \end{aligned}$$

nelle quali si è posto

$$w_1 = \frac{(v_\nu)_1 \theta}{Q_{2n-1}^{(1)}}, \quad w_2 = \frac{(v_\nu)_2 \theta x}{Q_{2n-1}^{(1)} H_0}.$$

Queste equazioni rappresentano i due cerchi nei quali i raggi, passanti per l'anello tracciato col semidiametro  $\omega$ , e corrispondenti all'ondulazione  $\lambda$ , vanno a distribuirsi sul piano focale. Il primo ha il suo centro nel fuoco coniugato  $(y, z)$  ed ha per raggio  $w_1 \omega$ ; ed il secondo ha il suo centro sull'asse delle  $y$  alla distanza  $-w_2 x$  dal detto fuoco e per raggio  $w_2 \omega$ .

Avendosi formata un'idea delle diverse specie d'aberrazione per mezzo della costruzione di que' cerchi o linee che le rappresentano in un dato istro-

mento, potremo colla loro sovrapposizione giudicare dell'aberrazione totale a cui il medesimo andrà soggetto. Si può anche conseguire un'equazione di quarto grado esprimente la curva rientrante che rappresenta l'effetto totale delle aberrazioni dei raggi partiti da un dato punto luminoso e passanti per un anello dell'obbiettivo, e che noi esporremo qui sotto per compimento della nostra disquisizione, ancorchè il suo uso non presenti grande utilità.

## 4.

*Equazione rappresentante l'effetto congiunto di tutte le specie d'aberrazioni sofferte dai raggi d'un pennello luminoso partiti da un punto dell'oggetto, e passanti per un sottile anello circolare tracciato sull'obbiettivo.*

Se si suppone che nessuna delle quantità segnate (1) nel primo articolo sia nulla, e si sostituiscono nelle equazioni (3) per  $\xi, \epsilon, \zeta$  i loro valori espressi dalle posizioni (9) fatte nell'articolo 5 del Capitolo I, Parte III, nella supposizione che l'asse delle  $y$  sia nel piano passante per l'asse centrale e pel punto luminoso, cosicchè si abbia  $y_0 = x, z_0 = 0$ , le citate equazioni si convertono nelle seguenti

$$(6) \quad \begin{cases} \partial y = g_0 y_1^2 + g_1 y_1 + g_2, \\ \partial z = g_0 y_1 z_1 + g_1^1 z_1, \end{cases}$$

nelle quali si è posto

$$g_0 = -\frac{a_0}{Q_{2n-1}^{(1)}} \left\{ (\epsilon)_1 + \frac{a_0 x}{H_0} (\epsilon)_2 \frac{x}{H_0} \right\},$$

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{Q_{2n-1}^{(1)}} \left\{ \frac{1}{2} (\xi)_1 \omega^2 + \frac{1}{2} a_0^2 (\zeta)_1 \frac{x^2}{H_0^2} + (v_\lambda)_1 \theta \right\} \\ &\quad - \frac{a_0}{Q_{2n-1}^{(1)}} \left\{ \frac{1}{2} (\xi)_1 \omega^2 - a_0^2 (\epsilon)_2 \frac{x}{H_0} + \frac{1}{2} a_0^2 (\zeta)_1 \frac{x^2}{H_0^2} + (v_\lambda)_1 \theta \right\} \frac{x}{H_0}, \end{aligned}$$

$$g_1^1 = g_1 - \frac{a_0^2 (\epsilon)_2 x^2}{Q_{2n-1}^{(1)} H_0^2}$$

$$g_2 = -\frac{a_0}{Q_{2n-1}^{(1)}} \left\{ \frac{1}{2} (\zeta)_2 \omega^2 + \frac{1}{2} a_0^2 (\zeta)_2 \frac{x^2}{H_0^2} + (v_\lambda)_2 \theta \right\}.$$

Prendiamo dalla seconda delle (6) il valore di  $z_1$ , e sostituiamolo nell'equazione dell'anello

$$y_1^2 = \omega^2 - z_1^2$$



e otterremo la seguente

$$y_1^2 (g_0 y_1 + g_1')^2 = \omega^2 (g_0 y_1 + g_1')^2 - \delta z^2 .$$

Ma, posto per semplicità

$$\delta y' = \delta y - g_2 ,$$

la prima delle (6) si può mettere sotto la forma

$$y_1 (g_0 y_1 + g_1') = \delta y' - (g_1 - g_1') y_1 ;$$

quindi, confrontando il quadrato del primo membro di questa col primo membro della precedente, dedurremo la seguente

$$\omega^2 (g_0 y + g_1')^2 - \delta z^2 = [\delta y - (g_1 - g_1') y]^2$$

che, ordinata per le potenze di  $y_1$ , dà

$$\{g_0^2 \omega^2 - (g_1 - g_1')^2\} y_1^2 + 2\{g_0 g_1' \omega^2 + (g_1 - g_1') \delta y\} y_1 + g_1'^2 \omega^2 - \delta y'^2 - \delta z^2 .$$

Se si elimina  $y_1^2$ , fra questa e la prima delle (6), si ottiene

$$0 = \{g_0 (g_1'^2 \omega^2 - \delta y'^2 - \delta z^2) + [g_0^2 \omega^2 - (g_1 - g_1')] \delta y\}^2$$

$$+ \{g_1 [g_0^2 \omega^2 - (g_1 - g_1')^2] + 2[g_0 g_1' + (g_1 - g_1') \delta y] g_0\} \{2 \delta y [g_0 g_1' \omega^2 + (g_1 - g_1') \delta y] + g_1 (g_1'^2 \omega^2 - \delta y'^2 - \delta z^2)\} ,$$

che è l'equazione richiesta, dalla quale si potrebbero dedurre parzialmente tutte quelle che abbiamo dato negli articoli precedenti.

## APPENDICE

PROPRIETÀ DEI CENTRI CONJUGATI PRINCIPALI E DEI PIANI CONJUGATI PRINCIPALI  
DEDOTTE DALLA CONSIDERAZIONE DEGLI ASSI DEI PENNELLI LUMINOSI, ED  
APPLICAZIONE DI ESSE AL CALCOLO DEGLI STROMENTI OTTICI COMPOSTI DI  
PIÙ LENTI DELLE CUI GROSSEZZE SI DEBBA TENER CONTO.

### 1.

La presente Appendice è stata scritta per dar maggior compimento alla precedente Teoria, assecondando un fondato desiderio del Prof. F. Cattaneo, il quale, nel dar conto delle due prime Parti di essa in un estratto critico pubblicato nei fascicoli 1, 2, 5, degli *Annali di Matematiche pure ed applicate*, così si esprime. « Queste applicazioni » cioè quelle fatte per la spiegazione degli effetti ottici d'alcuni degli stromenti più in uso « lasciano però desiderare che, come, sulle prime, nella teoria delle lenti semplici aveva l'A. preso a calcolo anche la grossezza delle medesime, così, anzi che trascurarle di poi, avesse cercato quale influenza essa abbia e ne' microscopi, e nei cannocchiali e nei micrometri a doppia immagine ». In seguito il dotto Estensore ha indicato come l'impiego dei punti principali considerati da Gauss servirebbe all'oggetto, ed ha arricchito le sue osservazioni col notare delle nuove proprietà dei punti medesimi, e col l'indicare altre coppie di punti che godono di proprietà analoghe.

L'esistenza in un sistema ottico dei punti, che il celebre Gauss ha chiamato *principali*, può dedursi in un modo semplice e diretto dalle proprietà degli assi dei pennelli luminosi, che hanno fatto il soggetto dell'articolo 5 del Capitolo II, Parte II. Approfittando quindi dell'opportunità, che mi porge la pubblicazione di questa Parte IV della mia Teoria degli stromenti ottici, esporrò l'accennata deduzione dell'esistenza dei detti punti, dando un'interpretazione più esplicita della loro natura, e mostrerò in seguito, battendo le tracce del citato autore, l'uso che se ne può fare per tener conto, con poca complicità di calcolo, degli effetti della grossezza delle lenti in un sistema ottico.

## 2.

## Deduzione dei centri coniugati.

La proprietà che serve a definire il raggio costituente l'asse d'un pennello luminoso, che attraversa una lente, è espressa (\*) da

$$(1) \quad \frac{\cos Y_2}{v_2} = \frac{\cos Y_0}{v_0}, \quad \text{e} \quad \frac{\cos Z_2}{v_2} = \frac{\cos Z_0}{v_0} :$$

cioè, è quel raggio che entra ed esce dalla lente parallelamente a se stesso, se la lente è immersa in uno stesso mezzo, ovvero si rifrange come se passasse da uno ad un altro mezzo attraverso una superficie piana perpendicolare all'asse centrale, se la lente è interposta fra questi due mezzi.

Eliminando colle premesse equazioni  $\cos Y_2$  e  $\cos Z_2$  dalla seconda delle equazioni (8) e (9) date all'articolo 3 del Capitolo III, Parte I, avremo per la determinazione dell'asse del pennello le seguenti

$$(2) \quad 0 = P_s^{(1)} y_1 + (P_s^{(2)} - 1) \frac{\cos Y_0}{v_0}, \quad 0 = P_s^{(1)} z_1 + (P_s^{(2)} - 1) \frac{\cos Z_0}{v_0},$$

ovvero, ponendo per  $\cos Y_0$  e  $\cos Z_0$  i loro valori, che, nella condizione di far passare il piano delle coordinate  $x, y$  pel punto radiante, sono dati da

$$\cos Y_0 = \frac{y_1 - y_0}{\Delta_0}, \quad \cos Z_0 = \frac{z_1}{\Delta_0},$$

quest'altre due

$$\left\{ P_s^{(1)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} (P_s^{(2)} - 1) \right\} y_1 = \frac{1}{v_0 \Delta_0} (P_s^{(2)} - 1) y_0, \quad \left\{ P_s^{(1)} + \frac{1}{v_0 \Delta_0} (P_s^{(2)} - 1) \right\} z_1 = 0.$$

La seconda di queste equazioni, eccettuando il caso che il valore di  $\Delta_0$  annulli il coefficiente di  $z_1$ , esige che sia  $z_1 = 0$ ; e ci mostra che l'asse del pennello sta nel piano passante per l'asse centrale, e pel punto raggiante: ponendo poi

$$(3) \quad l_0 = \frac{P_s^{(2)} - 1}{v_0 P_s^{(1)}},$$

la prima prende la forma

$$\left( 1 + \frac{l_0}{\Delta_0} \right) y_1 = \frac{l_0}{\Delta_0} y_0,$$

(\*) Vedi l'articolo 3 del Capitolo II, Parte II.

dalla quale si ricava

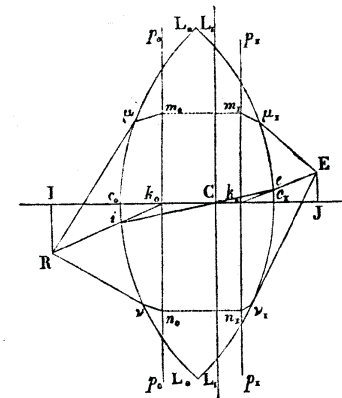
$$(4) \quad y_1 = \frac{l_0}{\Delta_0 + l_0} y_0.$$

Nella figura 1.<sup>a</sup>, simile a quella data nell'articolo 3 del Capitolo II, Parte II, conduciamo dal punto raggiante R al punto  $i$ , pel quale l'asse del pennello penetra nella lente, la retta Ri, che prolungata incontra l'asse centrale IJ nel punto  $k_0$ . La similitudine dei triangoli  $I k_0 R, c_0 k_0 i$  ci darà la proporzione

$$IR : c_0 i = I k_0 : c_0 k_0,$$

tal che essendo  $IR = y_0, c_0 i = y_1$ , almeno nei limiti d'approssimazione entro cui sono rinchiusi le formole (2), ed  $I k_0 = \Delta_0 + c_0 k_0$ , dal confronto del valore di  $c_0 k_0$ , che si ricava da questa proporzione, con quello di  $l_0$ , che si deduce dalla precedente equazione, rileveremo dover essere  $c_0 k_0 = l_0$ .

Fig. 1.<sup>a</sup>



Il raggio, rappresentante l'asse del pennello che parte dal punto raggiante R, ha dunque la sua prima parte incidente così diretta, che taglia l'asse centrale in un punto  $k_0$  distante dal centro di figura della superficie anteriore della lente di una quantità eguale ad  $l_0$ . Siccome questa quantità, dataci dalla formola (3), è soltanto funzione degli elementi fisici e geometrici della lente, e dei mezzi con cui è in contatto, ed è indipendente dalla posizione del punto raggiante, perciò concluderemo che, qualunque sia la posizione di questo

punto, quello d'intersezione della porzione incidente dell'asse del pennello luminoso coll'asse centrale della lente cadrà sempre nel luogo  $k_0$ , vale a dire, le parti incidenti degli assi dei pennelli luminosi, che partono dai vari elementi dell'oggetto, prolungate, passeranno tutte per lo stesso punto  $k_0$ .

Consideriamo ora il raggio rappresentante l'asse del pennello luminoso dopo essere uscito dalla lente, ma supponiamolo dotato d'un corso retrogrado, di modo che questo raggio parta dal fuoco F, coniugato di R, corrispondente alle coordinate  $y$ , 0 e  $\Delta_1$ , ed entri nella lente pel punto della superficie opposta  $L_1$ ,  $c_1$ ,  $L_1$ , segnato e nella figura, e le cui coordinate indicheremo con  $y_2$  e  $z_2$ . Pel corso di questo raggio le equazioni corrispondenti alle (2) saranno, giusta quanto fu detto all'articolo 6 del Capitolo IV, Parte I,

$$0 = -P_1^{(1)} y_2 + (P_1 - 1) \frac{\cos Y_2}{v_2}, \quad 0 = -P_1^{(2)} z_2 + (P_1 - 1) \frac{\cos Z_2}{v_2}$$

dalle quali eliminando  $\cos Y_2$  e  $\cos Z_2$  colle formole

$$\cos Y_2 = \frac{y - y_2}{\Delta_1}, \quad \cos Z_2 = -\frac{z_2}{\Delta_1},$$

ed invertendo gli indici superiori ed inferiori delle P, ciò che è lecito per quello che fu detto nell'or citato articolo, dedurremo

$$\left\{ P_3^{(1)} + \frac{1}{v_2 \Delta_1} (P_2 - 1) \right\} y_2 = \frac{1}{v_2 \Delta_1} (P_2 - 1) y, \quad \left\{ P_3^{(2)} + \frac{1}{v_2 \Delta_1} (P_2 - 1) \right\} z_2 = 0,$$

La seconda di queste equazioni ci dice, che il raggio rappresentante l'asse della porzione emergente del pennello incontra la seconda superficie della lente in un punto situato nel piano delle coordinate  $x$ ,  $y$ , e la prima, che, posto

$$(5) \quad l_1 = \frac{P_2 - 1}{v_2 P_2^{(1)}},$$

l'ordinata  $y_2$  del suo punto d'incontro colla detta superficie è data dalla formola

$$(6) \quad y_2 = \frac{l_1}{\Delta_1 + l_1} y.$$

Questa formola è simile alla precedente (4), e confrontandola col valore di  $c_1 k_1$ , che si deduce dalla proporzione

$$J E : c_1 e = J k_1 : c_1 k_1,$$

risultante dalla similitudine dei due triangoli  $E k_1 J$ ,  $e k_1 c_1$ , ottenuti col

prolungare per indietro la porzione emergente dell'asse del pennello sino ad incontrare l'asse centrale in  $k_1$ , ci mostra essere  $c_1 k_1 = l_1$ , e che, risultando dalla (5)  $l_1$  indipendente dalle quantità relative alla situazione del punto raggiante R, tutte le porzioni emergenti degli assi dei pennelli partiti dai diversi punti dell'oggetto concorrono virtualmente nel punto  $k_1$ .

Se col mezzo d'una lente sussidiaria concentriamo in un punto  $k_0$  i raggi emanati da un elemento luminoso situato sull'asse centrale della medesima, indi collochiamo la lente che serve alle nostre considerazioni, Fig. 1, in modo che il suo asse centrale coincida con quello della prima lente, e che il suo punto  $k_0$  si sovrapponga al punto  $k_0$  di riunione di detti raggi, si riconosce da quanto è stato detto nell'articolo 3 del Capitolo II, Parte II, sul centro ottico (\*), e da quanto

(\*) La determinazione del centro ottico di una lente, che forma il soggetto del citato articolo, può conseguirsi in un modo più conciso, e conforme alle considerazioni su cui s'aggira questa Appendice, partendo direttamente dalle equazioni (8) del Capitolo III, Parte I, omettendo quelle relative al piano delle  $x$ ,  $z$  che spariscono per essere  $x_1$  e  $\cos Z_0$  nulli. Quelle equazioni nel caso dell'asse d'un pennello pel quale deve sussistere la condizione (1), prendono la forma

$$y_2 = P_2^{(1)} y_1 + P_2^{(2)} \frac{\cos Y_0}{v_0}, \quad 0 = P_3^{(1)} y_1 + (P_3 - 1) \frac{\cos Y_0}{v_0},$$

Si elimini da esse  $\cos Y_0$ , e si riduca il coefficiente di  $y_1$  col mezzo della (3) del Capitolo IV, Parte I, e si otterrà

$$y_2 = -\frac{P_2^{(1)} - 1}{P_3 - 1} y_1 = -\frac{v_1 l_1}{v_0 l_0} y_1.$$

Se ora nell'equazione rappresentante il corso della porzione interna dell'asse del pennello, che è

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1,$$

poniamo  $y = 0$ , per avere il valore  $x'$  dell'ascissa  $x$  in cui esso interseca l'asse centrale, ed osserviamo che,  $x_1$  ed  $x_2$  dinotando le ascisse corrispondenti alle ordinate  $y_1$  ed  $y_2$ , si può prendere, entro il grado d'approssimazione in cui stiamo,  $x_2 - x_1 = h_2$ , troveremo

$$(b) \quad x' = \frac{v_0 l_0}{v_0 l_0 + v_1 l_1} h_2,$$

la qual formola, con denominazioni diverse, coincide con quella segnata (17) nell'articolo citato.

Questo valore di  $x'$ , essendo indipendente dalle coordinate  $\Delta_0$  ed  $y_0$  del punto raggiante, ci prova che, se la lente è investita da più pennelli procedenti da punti luminosi diversi, tutti gli assi di questi pennelli intersecano l'asse centrale in uno stesso punto che è il centro ottico della lente.

Il valore di  $x'$  ci dà l'ascissa del centro ottico preso dal centro di figura della super-

è stato testè dimostrato, che i suddetti raggi, penetrati che siano nella lente in considerazione, andranno tutti a passare pel centro ottico della medesima, ed usciti dalla superficie opposta s'inclineranno in modo d'aver per fuoco virtuale il punto  $k_1$ , vale a dire, il centro ottico  $C$  sarà il fuoco coniugato del punto  $k_0$  rispetto alla superficie rifrangente  $L_0, c_0, L_0$ , attraversata dai raggi incidenti; ed il punto  $k_1$  il fuoco virtuale di  $C$  rispetto alla superficie rifrangente  $L_1, c_1, L_1$  attraversata dai raggi emergenti. Un effetto simile, ma in ordine inverso, si otterrebbe se i raggi emanati dal punto luminoso si fossero prima fatti convergere nel punto  $k_1$ , per mezzo della lente sussidiaria interposta sul loro cammino, avanti di penetrare nella lente che consideriamo: l'immagine del detto punto sarebbe prima formata nel centro ottico  $C$ , indi virtualmente nel fuoco coniugato  $k_0$ . Per evitare d'estendere al di là dei giusti confini queste analogie degli effetti prodotti dall'azione della lente sui raggi partiti da un punto luminoso, ed in seguito concentrati in  $k_0$  ovvero  $k_1$ , con quelli che la stessa azione produce sui raggi rappresentanti gli assi dei pennelli luminosi provenienti dai vari elementi d'un oggetto, giova tener presente che, quantunque questi ultimi raggi siano riuniti realmente e poi virtualmente nei punti  $C$  e  $k_1$  ovvero  $C$  e  $k_0$ , pure non produrrebbero, come quelli emanati dal punto luminoso considerato sopra, un'immagine, perchè i raggi costituenti gli assi dei pennelli luminosi avendo, ciascuno, un'origine diversa, come originati in punti diversi dell'oggetto, apparterebbero a sistemi d'ondulazioni eterogenee, che interferirebbero in gran parte fra loro, e non genererebbero tutt'al più che qualche luce confusa (\*).

I ragionamenti fatti fin qui suppongono, come viene rappresentato nella

ficie anteriore della lente. Volendo avere l'ascissa  $x''$  presa dal centro di figura della superficie posteriore si osserverà che è  $x'' = x' - h_2$ , e quindi si troverà

$$x'' = -\frac{v_2 l_1}{v_0 l_0 + v_2 l_1} h_2$$

Quando la lente fosse immersa in uno stesso mezzo, e si avesse  $v_2 = v_0$ , i due corrispondenti valori di  $x'$  ed  $x''$  si ridurrebbero ad

$$x' = \frac{l_0}{l_0 + l_1} h_2, \quad x'' = -\frac{l_1}{l_0 + l_1} h_2.$$

(\*) Il considerare separatamente i raggi emanati da ciascun elemento dell'oggetto come componenti dei pennelli distinti, ed esaminare il corso dei loro assi successivi è cosa assai importante nelle teorie dell'ottica, come lo comprova la semplicità con cui abbiamo dedotto le proprietà degli stromenti ottici dalle equazioni segnate (1) nel Capitolo I della Parte II, nelle quali appariscono come variabili se non le coordinate del punto d'emana- zione dei raggi e quelle del punto d'incidenza. I primi scrittori d'ottica, che impiegavano invece le coordinate di quest'ultimo punto e le direzioni dei raggi, sono caduti talvolta in dimostrazioni confuse, e deduzioni erronee. Vedasi anche la nota dell'articolo 7, Capito- lo II, Parte II.

Fig. 1.<sup>a</sup>, che la lente sia convesso-convessa o sottile, vale a dire, parlando algebricamente, che si abbia

$$(r) \quad p_1 < 0, \quad p_2 < 0, \quad P_3^{(4)} < 0$$

ossia

$$h_2 < -\frac{1}{v_1} \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} \right);$$

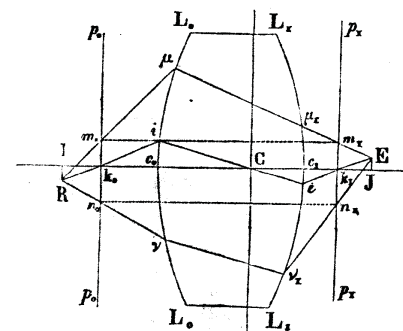
nel qual caso le distanze  $l_0$  ed  $l_1$  ottengono valori positivi, ed i punti  $k_0$  e  $k_1$  sono situati nell'interno della lente. Le posizioni dei punti  $k_0$  e  $k_1$  risulterebbero però diverse a seconda che una o due delle tre relazioni (r) non fossero soddisfatte. Senza discutere i vari casi che si possono presentare, ciò che ci devierebbe troppo dal nostro scopo, sceglieremo per esempio quello in cui le

quantità  $p_1$  e  $p_2$  rimanendo negative, la funzione  $P_3^{(4)}$  sia di valore positivo, cioè che la lente sia sufficientemente grossa da avere

$$h_2 > -\frac{1}{v_1} \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} \right).$$

In questo caso i valori di  $l_0$  ed  $l_1$  risulteranno negativi, ed i punti  $k_0$  e  $k_1$  saranno situati al di fuori della lente, come nella Figura 2.<sup>a</sup>, nella quale le linee correlative sono marcate colle stesse lettere che nella Figura 1.<sup>a</sup>.

Fig. 2.<sup>a</sup>



Da questa Figura si rileva, che, se esistesse in uno dei due punti  $k_0$  o  $k_1$ , un elemento luminoso per se stesso, si produrrebbe tanto nel centro ottico  $C$ , quanto nell'altro punto un'immagine reale del medesimo.

Da quanto abbiamo esposto chiaro apparisce che i punti  $k_0$ ,  $C$ ,  $k_1$  oltre alla particolarità di poter divenire, secondo i casi, fuochi coniugati reali o virtuali d'un elemento luminoso situato in uno di essi, o d'un'immagine dello stesso elemento penetrata nella lente dal di fuori, godono in ogni caso, la proprietà caratteristica d'essere i punti di reale o virtuale concorso delle tre parti degli assi dei pennelli, che, partiti dai vari elementi d'un oggetto, posto ad una lontananza qualunque, ma ad una distanza dall'asse comparativamente molto più piccola, investono una lente. Il punto  $k_0$  è il luogo di concorso delle parti incidenti degli assi dei pennelli, il punto  $C$  quello delle parti interne, ed il punto  $k_1$  quello delle parti emergenti: per tale motivo dando a questi punti il nome di centri, conserveremo al punto  $C$  il nome comunemente usato di *centro ottico*, ed indicheremo i punti  $k_0$  e  $k_1$  con quelli di *centri coniugati principali* (\*).

## 3.

*Piani coniugati.*

Un'altra proprietà notevole dei centri coniugati principali si è, che, condotti per essi due piani  $p_0 k_0 p_0$ ,  $p_1 k_1 p_1$ , Figure 1.<sup>a</sup> e 2.<sup>a</sup>, perpendicolarmente all'asse centrale, la porzione incidente  $R\mu$  d'un raggio qualunque, e quella emergente  $\mu E$  dello stesso raggio incontrano rispettivamente questi piani in due punti situati sopra una retta parallela all'asse centrale.

In fatti le due equazioni della porzione incidente del raggio passante pel punto d'incidenza, essendo, nei limiti adottati d'approssimazione, in cui si può prendere  $\cos X_0 = 1$ , date da

$$y - y_1 = (x - x_1) \cos Y_0, \quad z - z_1 = (x - x_1) \cos Z_0,$$

(\*) Questa denominazione ci sembra più espressiva di quella di punti principali introdotta da Gauss, la quale non enuncia alcuna proprietà dei centri suddetti.

A questo proposito osserveremo che la proprietà d'intersecarsi, realmente o virtualmente sull'asse centrale in tre punti consecutivi, è comune, ciò che forse non è stato ancora avvertito, a tutti i sistemi di raggi per quali  $\cos Y_2 : \cos Y_0$  e  $\cos Z_2 : \cos Z_0$  hanno un rapporto eguale e costante; e che al sistema, in cui questo rapporto eguaglia  $v_2 : v_0$  va unita un'altra proprietà caratteristica, ed è, che i piani perpendicolari all'asse centrale e passanti pel primo ed ultimo dei tre luoghi d'intersezione tagliano un raggio qualunque d'un pennello in due punti situati sopra una stessa parallela al detto asse: proprietà notevole scoperta dal Gauss, che dimostreremo nell'articolo seguente, e che è tanto utile nelle applicazioni. Il nome di *centri coniugati*, dato dal sig. Biot, ai due punti d'intersezione coll'asse delle porzioni incidenti ed emergenti dei raggi, nel sistema da lui considerato, nel quale il detto rapporto eguaglia l'unità, non s'addice quindi esclusivamente ai due punti del sistema medesimo, ma è applicabile ai punti analoghi di tutti i sopra indicati sistemi di raggi, e l'epiteto *principali*, da noi aggiunto, serve a distinguere i due punti spettanti al sistema considerato da Gauss, che godono di maggiori e più utili proprietà.

otterremo le coordinate del punto d'incontro della detta porzione col primo piano  $p_0 k_0 p_0$  ponendo in esse  $x - x = l_0$ ; quindi eliminando  $\cos Y_0$ ,  $\cos Z_0$  coi loro valori più volte citati, avremo per le coordinate  $y'$  e  $z'$  di questo punto

$$y' = y_1 + \frac{l_0}{\Delta_0} (y_1 - y_0) \quad ; \quad z' = z_1 + \frac{l_0}{\Delta_0} (z_1 - z_0).$$

Ora le due equazioni del raggio emergente, rappresentate in generale da quelle segnate (1) nel Capitolo I, Parte II, ci danno, quando si fa  $n = 2$ , e si pone  $x - H_2 = -l_1$ , pei valori delle coordinate  $y''$  e  $z''$  del punto d'incontro della porzione del raggio emergente col secondo piano  $p_1 k_1 p_1$

$$y'' = (Q_2 - v_2 l_1 Q_2^{(1)}) y_1 - \frac{1}{v_0 \Delta_0} (P_2 - v_2 l_1 P_2^{(1)}) y_0,$$

$$z'' = (Q_2 - v_2 l_1 Q_2^{(1)}) z_1 - \frac{1}{v_0 \Delta_0} (P_2 - v_2 l_1 P_2^{(1)}) z_0$$

le quali, ridotte colla sostituzione dei rispettivi valori di  $Q_2^{(1)}$  e  $Q_2^{(2)}$  somministrati dalle (11) del Capitolo III, Parte I, e col mezzo delle due precedenti segnate (3) e (5), non che della (3) del Capitolo IV, Parte I, prendono pure la forma

$$y'' = y_1 + \frac{l_0}{\Delta_0} (y_1 - y_0) \quad , \quad z'' = z_1 + \frac{l_0}{\Delta_0} (z_1 - z_0),$$

che ci palesa essere

$$y'' = y' \quad , \quad z'' = z' ;$$

e quindi, che i due punti determinati appartengono ad una retta parallela all'asse delle  $x$ , ossia all'asse centrale.

Nelle Figure 1.<sup>a</sup> e 2.<sup>a</sup> le rette punteggiate  $m, m_1$  ed  $n, n_1$  marcano rispettivamente le parallele su cui stanno le intersezioni dei raggi  $R\mu\mu_1 E$ ,  $R\nu\nu_1 E$  laterali all'asse del pennello  $RiCeE$ .

Ai due detti piani  $p_0 k_0 p_0$ ,  $p_1 k_1 p_1$ , condotti, perpendicolarmente all'asse centrale, pei due centri coniugati principali  $k_0$ ,  $k_1$ , che sono rispettivamente intersecati da un raggio qualunque del pennello luminoso in punti egualmente situati su di essi, daremo, il nome di *piani coniugati principali*, o semplicemente di *piani coniugati*.

## 4.

*Determinazione della lunghezza focale di una lente fittizia, da sostituirsi alla reale, mediante la quale si riduce più semplice il calcolo degli effetti d'uno strumento ottico.*

Se s'immagina che spariscono tutte le parti della Figura 1.<sup>a</sup> o 2.<sup>a</sup> spet-

tanti alla forma della lente, e che i due piani coniugati  $p_0 k_0 p_0$ ,  $p_1 k_1 p_1$  dopo essersi riuniti col piano  $cCc$  condotto pel centro ottico, perpendicolarmente all'asse centrale, passino assieme alla distanza del punto raggiante  $R$  a cui sta il piano  $p_0 k_0 p_0$  nel caso reale, e si suppone inoltre che, nel luogo ove è venuto a collocarsi il piano  $p_0 C p_0$ , esista una lente di grossezza trascurabile, dotata d'una lunghezza focale  $\varphi$ , che soddisfaccia all'equazione

$$(7) \quad \frac{1}{v_2(\Delta_1 + l_1)} = \frac{1}{v_2\varphi} - \frac{1}{v_0(\Delta_0 + l_0)}$$

simile a quella segnata (7)<sup>11</sup> nell'articolo 2 del Capitolo II, Parte II, che vale rigorosamente per una lente infinitamente sottile (\*), è chiaro, che in tale ipotesi l'asse del pennello luminoso entrerà ed uscirà da questa lente percorrendo una linea retta, se la lente è immersa in uno stesso mezzo omogeneo, ovvero, spezzata secondo la legge data dall'equazione (1), se il mezzo anteriore e quello posteriore alla lente sono differentemente rifrangenti, e che tanto le direzioni di tutti i raggi del pennello luminoso, quanto le posizioni dei punti in cui essi intersecano i piani coniugati rimarranno eguali come nel caso della lente reale; solo la distanza reciproca dei due fuochi coniugati  $R$  ed  $E$  sarà diminuita dell'intervallo  $k_0 k_1$ . Da ciò ne segue, che se, col mezzo delle formole (7)<sup>11</sup> ed (8)<sup>11</sup> date nel luogo sopra citato, calcoleremo la distanza coniugata  $\Delta_1 + l_1$ , e le coordinate del fuoco coniugato corrispondenti alla lente fittizia, impiegando in quelle la distanza focale  $\varphi$  in luogo di  $F$ , e la distanza coniugata  $\Delta_0 + l_0$  del punto raggiante in luogo di  $\Delta_0$ , indi partendo dal secondo piano coniugato applicheremo all'asse centrale un ascissa eguale al valore calcolato di  $\Delta_1 + l_1$ , ed all'estremità di quest'ascissa due coordinate eguali agli ottenuti valori di  $y$  e  $z$ , avremo segnato la posizione del fuoco coniugato spettante alla lente reale. Per eseguire questo calcolo non ci rimarrà altro a conoscere se non se il valore della lunghezza focale  $\varphi$  da cui l'equazione (7) sia soddisfatta.

Per procacciarsi questo valore assumiamo l'equazione (5) del Capitolo I, Parte II, in cui si sia fatto  $n = 2$ , e siansi poste per le  $Q$  le loro espressioni segnate (11) nel Capitolo III, Parte (1), e, per introdurre le distanze focali coniugate  $\Delta_0 + l_0$ , e  $\Delta_1 + l_1$ , scriviamo in essa  $\Delta_0 + l_0 - l_0$  in luogo di  $\Delta_0$ , e  $\Delta_1 + l_1 - l_1$  in luogo di  $\Delta_1$ ; la citata equazione ci darà

(\*) L'equazione citata suppone che la lente sia immersa in uno stesso mezzo, per cui si abbia  $v_2 = v_0$ : se la lente separasse due mezzi differenti, è facile di vedere che prenderebbe la forma

$$\frac{1}{v_2 \Delta_1} = \frac{1}{v_2 F} - \frac{1}{v_0 \Delta_0}$$

$$\Delta_1 + l_1 = - \frac{1}{v_2} \frac{v_0(\Delta_0 + l_0) P_2^{(4)} + P_2^{(4)} - v_0 l_0 P_2^{(4)}}{v_0(\Delta_0 + l_0) P_2^{(4)} + P_2^{(4)} - v_0 l_0 P_2^{(4)}} + l_1,$$

e riducendo il secondo membro alla stessa denominazione, ed osservando che, colla sostituzione dei rispettivi valori di  $l_0$  ed  $l_1$  datici dalle (3) e (5), e colle riduzioni somministrateci dalla (3) del Capitolo IV, Parte I, la quantità

$$v_2 l_1 P_2^{(4)} - P_2^{(4)} - v_0 l_0 (v_2 l_1 P_2^{(4)} - P_2^{(4)})$$

risulta identicamente nulla, si troverà

$$\Delta_1 + l_1 = - \frac{v_0(P_2^{(4)} - v_2 l_1 P_2^{(4)})(\Delta_0 + l_0)}{v_2 v_0(\Delta_0 + l_0) P_2^{(4)} + v_2(P_2^{(4)} - v_0 l_0 P_2^{(4)})},$$

ovvero rovesciando un membro e l'altro

$$(8) \quad \frac{1}{\Delta_1 + l_1} = - \frac{v_2 P_2^{(4)}}{P_2^{(4)} - v_2 l_1 P_2^{(4)}} - \frac{v_2 P_2^{(4)} - v_0 l_0 P_2^{(4)}}{v_0 P_2^{(4)} - v_2 l_1 P_2^{(4)}} \frac{1}{\Delta_0 + l_0}.$$

Ora si può osservare che le quantità  $P_2^{(4)} - v_2 l_1 P_2^{(4)}$ , e  $P_2^{(4)} - v_0 l_0 P_2^{(4)}$  sono suscettibili d'essere trasformate in due modi. Primieramente mettendo per  $l_0$  ed  $l_1$  i loro valori, e secondariamente facendo uso delle espressioni delle lunghezze focali

$$F_2^{(4)} = - \frac{P_2^{(4)}}{v_2 P_2^{(4)}}, \quad F_1^{(4)} = - \frac{P_2^{(4)}}{v_0 P_2^{(4)}},$$

risultanti dalle prime due formole segnate (25) nel Capitolo III, Parte II.

Per mezzo della duplice sostituzione ora accennata si trova

$$P_2^{(4)} - v_2 l_1 P_2^{(4)} = 1 = - v_2 P_2^{(4)} (F_2^{(4)} + l_1), \quad P_2^{(4)} - v_0 l_0 P_2^{(4)} = 1 = - v_0 P_2^{(4)} (F_1^{(4)} + l_0),$$

donde ricavasi

$$(9) \quad v_2 (F_2^{(4)} + l_1) = v_0 (F_1^{(4)} + l_0) = - \frac{1}{P_2^{(4)}}.$$

La precedente equazione (8) diverrà quindi coll'uso di questi valori

$$(10) \quad \frac{1}{v_2(\Delta_1 + l_1)} = - P_2^{(4)} - \frac{1}{v_0(\Delta_0 + l_0)}.$$



la quale confrontata colla supposta precedentemente, segnata (7), ci mostra che la dimandata lunghezza focale  $\varphi$ , è data da

$$(11) \quad \varphi = -\frac{1}{v_2 P_2^{(2)}}$$

e perciò, che, in virtù delle (9), l'equazione (10) si può anche mettere sotto una delle due forme

$$(12) \quad \frac{1}{v_2(\Delta_1 + l_1)} + \frac{1}{v_0(\Delta_0 + l_0)} = \frac{1}{v_2(F_2^{(1)} + l_1)} = \frac{1}{v_0(F_1^{(2)} + l_0)}$$

Nel dedurre l'esistenza e le proprietà dei centri coniugati principali, dei piani coniugati e della lunghezza focale della lente fittizia non abbiamo preso in considerazione che una sola lente, perchè ciò basta al nostro oggetto. Non ometteremo però di osservare che le stesse proprietà si estendono ad un sistema qualunque di lenti. Infatti, se invece di dare all'indice  $n$  delle  $P$  il valore 2 che abbiamo usato, si fosse conservato quest'indice generale, è facile di riconoscere, che tutte le formole precedentemente trovate, e quelle che hanno servito alle loro riduzioni sussisterebbero ancora, e condurrebbero a dimostrarci altrettante proprietà simili spettanti ad un sistema composto di un numero qualunque di lenti. Vedasi anche l'articolo 1 del Capitolo III, Parte II.

5.

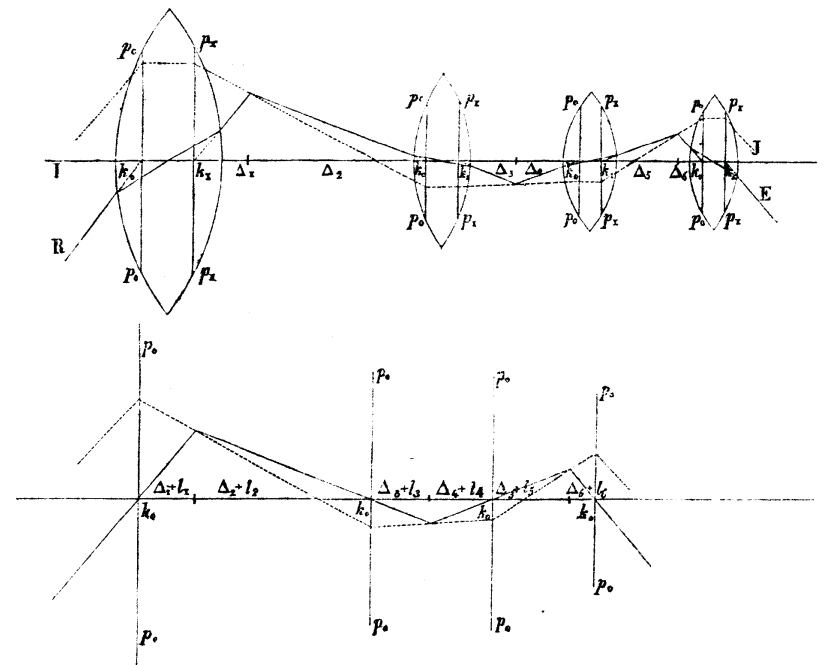
*Calcolo degli effetti d'uno stromento ottico impiegando le distanze dei centri coniugati principali, e le relative lunghezze focali delle lenti fittizie.*

Il vantaggio che porge la considerazione dei centri coniugati principali, e della lunghezza focale della lente fittizia, consiste principalmente nel fornirci il mezzo di tener conto della grossezza delle lenti nel calcolo del corso di un raggio luminoso qualunque in un'istromento ottico, calcolando prima il corso dello stesso raggio come se le dette grossezze fossero trascurabili, e poi surrogando alle lunghezze focali delle lenti ed alle loro distanze reciproche quelle che competono alle lenti fittizie date ne' precedenti articoli. Per tal modo si viene ad abbassare, come abbiamo visto nell'articolo 6 del Capitolo II, Parte II, della metà l'indice delle funzioni  $P$ , il cui numero di termini va elevandosi così rapidamente col crescere del loro indice da renderne presto il calcolo impraticabile, e vi si sostituisce un processo comparitivamente molto più semplice.

Per vedere come ciò succeda, noteremo primieramente che basta gettar l'occhio sulla parte inferiore della Fig. 3.<sup>a</sup>, nella quale si suppone che il

secondo piano coniugato di ciascuna lente dello stromento, movendosi parallelamente a se stesso, sia andato a compenetrarsi col primo, e confrontare questa parte inferiore della figura colla superiore in cui il sistema è rappresentato colle sue lenti, per iscorgere che le direzioni, nelle quali si piega successivamente un raggio qualunque d'un pennello luminoso, ed i punti in cui questo raggio interseca i piani coniugati riuniti per coppie, saranno i medesimi di quando esistono le lenti di grossezze finite. Se quindi, impiegando i dati appartenenti alle lenti fittizie, determineremo colle formole (5) e (6) del Capitolo II, Parte II, il valore delle coordinate  $y, z$  del fuoco coniugato dell'intero sistema, questi valori coincideranno con quelli che si otterrebbero dalle stesse equazioni per le coordinate del fuoco del sistema reale, colla sola eccezione che le prime vanno applicate ad un punto alla distanza  $\Delta + l$ , preso partendo dal piano coniugato posteriore dell'ultima lente.

Fig. 3.<sup>a</sup>



Per eseguire il calcolo delle coordinate del fuoco coniugato nel sistema delle lenti fittizie, per mezzo delle citate equazioni (5) e (6), bisogna conoscere quali valori debbano sostituirsi in luogo delle coordinate  $\Delta_0, y_0, z_0$  del punto radiante, ed in luogo degli elementi  $p_1, p_2, p_3$  ec., componenti le funzioni Q, al quale oggetto serviranno le seguenti rimarche.

1.° Le coordinate  $y_0$  e  $z_0$  rimangono eguali a quelle del sistema reale, la sola distanza  $\Delta_0$  deve essere cambiata in  $\Delta_0 + l_0$  pel sistema fittizio.

2.° Le  $p$  con indice pari, multiplo dispari di 2, contenute nella serie

$$(13) \quad p_2, p_4, p_6, \dots, p_{2n-2},$$

essendo, giusta le formole (6), del Capitolo III, Parte I, proporzionali alle grossezze delle lenti, che sono nulle nel caso delle lenti fittizie, le dette  $p$  saranno pure tutte nulle.

3.° Le  $p$  con un indice multiplo di 4 sono date, giusta le citate formole, dal prodotto della velocità della luce nel mezzo che separa due lenti successive moltiplicata per la loro distanza reciproca. Se indichiamo con  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-2}$  le distanze dei fuochi coniugati principali dai centri di figura delle rispettive superficie delle lenti nel sistema reale, e con  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{n-2}$  quelle dei corrispondenti piani coniugati, le prime essendo prese verso l'esterno della rispettiva superficie della lente quando i loro valori sono positivi, e verso l'interno quando sono negativi, e le seconde viceversa; è facile di vedere, che le distanze reciproche dei detti piani saranno date da

$$\Delta_1 + l_1 + \Delta_2 + l_2, \quad \Delta_2 + l_2 + \Delta_3 + l_3, \dots, \Delta_{n-3} + l_{n-3} + \Delta_{n-2} + l_{n-2} :$$

ma nel caso reale si ha

$$\Delta_1 + \Delta_2 = h_3, \quad \Delta_2 + \Delta_3 = h_5, \dots, \Delta_{n-3} + \Delta_{n-2} = h_{n-1},$$

quindi introducendo questi valori, quelli delle  $p$  con indici multipli di 4 componenti la serie

$$(14) \quad p_4, p_8, \dots, p_{2n-4},$$

saranno dati da

$$(15) \quad v_2(h_3 + l_1 + l_2), \quad v_4(h_5 + l_3 + l_4), \dots, v_{n-2}(h_{n-1} + l_{n-3} + l_{n-2}).$$

In quanto alle  $p$  con indice dispari, queste, secondo le osservazioni fatte nell'articolo 6 del Capitolo II, Parte II, non entreranno nelle nostre formole che sommate per coppie, cioè non avremo a considerare che i termini delle serie

$$(16) \quad p_1 + p_3, \quad p_5 + p_7, \dots, p_{2n-5} + p_{2n-1},$$

i quali, giusta l'articolo testè citato, eguagliano, ciascuno, il rispettivo valore inverso del prodotto della velocità della luce nel mezzo in cui passa il raggio uscendo dalla lente per la lunghezza focale della medesima, ossia rappresentano i successivi valori di

$$\frac{1}{v_2 \varphi_1}, \quad \frac{1}{v_4 \varphi_2}, \dots, \frac{1}{v_n \varphi_{\frac{n}{2}}},$$

che, giusta le formole (9) e le prime date alla pagina 84 (\*), sono espressi da

$$(17) \quad \frac{1}{v_2(f_1 + l_1)}, \quad \frac{1}{v_4(f_2 + l_2)}, \dots, \frac{1}{v_n(f_{\frac{n}{2}} + l_{2n-1})}.$$

Ma se noi supponiamo di fare colle citate formole (5) e (6), il calcolo approssimativo del fuoco coniugato del sistema reale, trascurando le grossezze delle lenti, dobbiamo, come è stato notato nell'articolo 6 testè menzionato, fare le  $p$  della serie (15) tutte nulle, sostituire alle  $p$  comprese nella serie (14) rispettivamente le quantità

$$(15)' \quad v_2 h_3, \quad v_4 h_5, \dots, v_{n-2} h_{n-1}$$

ed alle coppie delle  $p$  con indici dispari, componenti la serie (16), le quantità

$$(17)' \quad \frac{1}{v_2 f_1}, \quad \frac{1}{v_4 f_2}, \dots, \frac{1}{v_n f_{\frac{n}{2}}} :$$

dunque se nelle formole ottenute col calcolo approssimativo, in cui siano state trascurate le grossezze delle lenti, cambiamo le quantità della serie (15)' in quelle della serie (15), e le quantità della serie (17)' in quelle della (17), otterremo dalle medesime le formole corrispondenti al sistema fittizio, che risolvono il problema nel caso che si voglia tener conto della grossezza delle lenti.

Facendo pertanto le indicate sostituzioni nelle formole, ritrovate negli articoli 4, 7 ed 8 del Capitolo II, Parte II, spettanti al microscopio semplice, ai telescopi di Kepler e Galileo, ed al dinametro, e prendendo per  $\Delta_0$  la distanza dell'oggetto dal primo piano coniugato del sistema, espressa da  $\Delta_0 + l_0$ ; e per  $\Delta$  la distanza dell'immagine presa dall'ultimo piano coniugato, espressa da  $\Delta + l$ , si otterranno le rispettive formole, pel caso che le grossezze delle lenti non debbano essere trascurate.

Noteremo che i valori di  $l_0$  ed  $l_1$ , espressi per mezzo dei raggi di curvatura della lente, della sua grossezza, e delle velocità della luce nel mezzo che la compone, ed in quelli che le sono in contatto, si ottengono ponendo nelle formole (3) e (5)

(\*) Vedasi la tavola delle correzioni.

$$1 - \frac{v_1}{v_0} = u_1 \quad , \quad 1 - \frac{v_1}{v_2} = u_2 ;$$

e poi prendendo

$$l_0 = \frac{(1-u_1)u_1\rho_1 h_2}{u_1\rho_1 - u_2\rho_2 - u_1 u_2 h_2} \quad , \quad l_1 = - \frac{(1-u_2)u_2\rho_2 h_2}{u_1\rho_1 - u_2\rho_2 - u_1 u_2 h_2} .$$

Quando la lente è immersa nello stesso mezzo si ha  $v_0 = v_2$  ed  $u_1 = u_2$ , e quindi le due formole precedenti danno

$$l_0 = \frac{(1-u_1)\rho_1 h_2}{\rho_1 - \rho_2 - u_1 h_2} \quad , \quad l_1 = - \frac{(1-u_1)\rho_2 h_2}{\rho_1 - \rho_2 - u_1 h_2} .$$

Terminerò quest'Appendice col ringraziare il Prof. Cattaneo d'avermi offerto l'occasione di supplire ad un'omissione nella mia Teoria degli Strumenti Ottici, ciò che parmi di aver conseguito non senza qualche novità.

-----