TRACTATVS XXI.

De Logarithmis.

MIro, & perutili inuento iungere Geometricis proportionalibus Arithmeticos cogitauit primus Ioannes Neperus Schotus, vt facilior calculus astronomicus per solam subtractionem, & additionem prodiret, quod inuentum licet ab Henrico Briggio aliter, deinde ordinatum sit; quia tamen eadem proportionum basi nititur, ideo hìc cùm (vt moris nostri est) fundamenta rerum tradere cupiamus, Neperi inuentionem ne dum; sed & ordinem, qui nobis magis arridet, explanabimus.

EXPENSIO I.

Cur Arithmetici proportionales Geometricis vniantur.

ARithmetici quatenus Geometricis proportionalibus vniti vocantur Logarithmi.

Vt sunt Geometrici	1	3	9	27	81	243	729
Arithmetici	0	2	4	6	8	10	12
Arithmetici	19	17	15	13	11	9	7

Seu simul cum Geometricis decrescant, vel crescant, seu hi deficiant, dum illi augentur.

Annalogia verò, & similitudo, quam habent inuicem proportionales Arithmetici, & Geometrici in causa fuit, cur simul vnirentur, quàm hic diuersis propositionibus explicabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo numeri Geometrici inuicem multiplicati componunt tertium, eorum Logarithmorum aggregatum erit tertij Logarithmus.

SInt tres Geometrici proportionales,

10	100	1000
3	6	9

Dico, *quòd, si* 10. *multiplicatus per* 100. *facit* 1000. *quod item primus Arithmeticus vnitus secundo facit tertium.* sic 3. vnitus cum 6. facit 9.

Probatur. Nam extenduntur in maius, ex propos. 17. tract. 14. de proport. part. 1. proportionales Geometrici per multiplicationem denominatoris proportionis: at verò ex propos. 10. par. 2. Tract. 14. Arithmetici per additionem differentiæ. Si ergo in Geometricis primus terminus sit denominator, vt hìc 10. & in Arithmeticis primus terminus sit differentia, necessariò sicut 10. multiplicando secundùm 100. facit 1000. ita 3. additus 6. faciet ~~10.~~ tertium terminum. 9

THEOR. II. PROPOS. II.

Proportio Geometrica applicata proportioni Arithmeticæ incipit à Zifra 0. *vel à millione, vel simili numero* 10. *qui vnitate additus zifris constet.*

SI sit proportio Geometrica continua proportionalitate, vt 10. 100. 1000. 10000. & Arithmetica, quę à 0. incipiat, vt 0. 4. 8. 12. 16.

Arithmetica	10.	12.	14.	16.	18.	20.
Geomerrica	1.	10.	100.	1000.	10000.	10000.
Arithmetica	0.	4.	8.	12.	16.	20.

Dico, quod hæc Series Arithmeticorum infra positorum benè demonstrat Geometricos, ex eo quòd reperto arithmetico bene reperiatur correspondens Geometricus. *Atque ideo eis series Arithmetica bene addita sit.*

Probatur. In eo enim similitudine correspondent, quòd si duo Geometrici inuicem multiplicati producant tertium. Arithmetici quoq; additi, & simul positi producunt tertium. Sic quia 10. & 1000. se multiplicando producunt 10000. ita 4. Aritmeticus sub positus vnitus arithmetico 12. producit 16: At si progressio inciperet à 4. tunc primus additus secundo non faceret tertium, vt hęc.

4. 7. 10. 13. 16. 19.

Nam nec 4. radicalis additus numero 10. producit 13. nec 10. & 13. producunt 16. Ergo numerus radicalis zifra esse debet, vel vnitas iuncta zifris, vt expeditè proportio Arithmetica deseruiat geometricę. Sic si numero 14. addatur 16.

faciet 30. à quo ablatus 10. vel vnitas secundi loci ad sinistram dat 20. sicut 1000 per 100. multiplicatus dat 100000.

Non interest autem; an retrograda sit, & crescentibus Geometricis, Arithmetici decrescant, vt hic

1	2	4	8	16	32	64	128
31	28	25	22	19	16	13	10
100	94	88	82	76	70	64	58

Nam pari modo in ostendendo tertio proportinali se gerunt; sed crescentes per additionem ostendunt tertium proportionalem maiorem; decrescentes verò minorem. Si tamen numerus radicalis sit ad maximum appositus, vt in prima serie; secùs si sit ad minimum Geometricum, nam; & decrescentes maiorem quoque ostendunt.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si numerus Geometricus per numerum diuisus producit tertium proportionalem, sic & Arithmeticus à primo subductus relinquit tertium.

Vt	1	3	9	27	81	243	729
	0	4	8	12	16	20	24

QVia ergo 27. diuisus per 3. producit 9. ita 4. subductus à 12. relinquit 8. & quia 9 diuidendo 243. producet 27. sic, & 8. subductus à 20. relinquit 12. Logarithmum numeri 27.

Ratio eadem quę propositionis primæ adhibita cautela antecedentis propositionis, quoad Arithmeticos nempe à zifra, vel vnitate additis zifris progressionem debere incipere.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Sicut trium Sinuum proportione Geometrica continuatorum quadratum medij est æquale quadrato ex extremis inuicem multiplicatis effecto. Ita Arithmeticorum appositorum duplum medij æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81
4	8	12	16

SIc multiplicatus 9. in se facit 81. vt 3. per 27. at Arithmeticus 8. duplicatus facit 16. quem numerum faciunt 4. & 12 iuncti. De Geometricis patet ex propos. 5. tract. 14 part. 1. De Arithmeticis constat ex propos. 2. part. 2. tract. 14.

THEOR. V. PROPOS. V.

Quatuor Geometricè proportionalium, sicut factum ex ductu mediorum æquatur facto ex ductu extremorum: Ita suorum Logarithmorum aggregatum mediorum, æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81	243	Geometrici
5	10	15	20	25	Arithmetici.

ITa duo extremi Geometrici 3. & 81. faciunt 243. quem faciunt 9. & 27. medij inuicem multiplicati; sicut Arithmetici iuncti 5. & 20. extremi faciunt 25. quem faciunt 10. & 15. medij simul aggregati.

Patet de Geometricis ex propos. 6. part. 1. tractat. 14. de Arith. quoque ex propos. 1. part. 2. tractat. 14.

THEOR. VI. PROP. VI.

Sicut ex numero in se semel ducto producitur quadratus, & iterum in productum ducto efficitur cubus, & rursus in cubum ducto efficitur supersolidus; sic Arithmeticus duplatus quadrati efficit Logarithmum, triplatus cubi quituplatus supersolidi.

Geomet.	1	2	4	8	16	32	64	128	256
Arithmet.	0	3	6	9	12	15	18	21	24

* NAm ex propos. 24. lib. 8. Elem. qui ab vnitate continuè proportionales Geometrici tertium quemque habent quadratum. Quartum verò cubum, & duobus intermissis quemlibet sequentem. Septimum autem cubi quadratum, & quinque intermissis quemlibet sequentem, & cæt.

Sed si ab vnitate continuè proportionalibus Geometricis sui quique applicentur proportionales Arithmetici incipientes à zifra, secundus erit duplex primi, & quartus triplex secundi. Cùm enim primus radicalis numerus sit 0. & idem numerus semper addatur, sequitur necessariò, quòd secundus sit duplus primi, & quartus duplex secundi. Sed ex propos. 9. Element. lib. 8. quot inter vnum numerum V. g. 8. ab vnitate continuè proportionalium Geometricorum, & vnitatem cadunt proportionales Geometrici, tot, & inter illum, & alium in eadem ratione existentem vt 64. necesse est cadere. Ergo quot inter eorum proportionales Arithmeticos, & zifram cadunt partes eædem, tot etiam inter ipsum V. g. 8 & alium vtpote 64. necesse est replicare. Tot enim replicantur partes ternæ, quot proportionales Geometrici sunt. Quia itaque inter 1. & 8. duo proportionales Geometrici reperiuntur, & tres computato ipso 8. etiam trina vice replicabitur 3. & fient 9. At quia idem numerus proportionalium mediat inter 8. & 64. tricies insuper idem 3. replicabitur; Vnde fient cum primo 18. Quia ergo inter quodlibet quadratum, & radicem medius proportionalis cadit numerus, hinc est, quòd duplicatus proportionalis arithmeticus sit numerus quadrati: at quia inter radicem, & cubum duo proportionales cadunt, hinc est quod debeat triplicari; & quia inter radicem, & quadrati quadratum; vel supersolidū quinque proportionales mediant hinc est, quòd quinquies replicatus exprimat supersolidum, & cęt.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

Numeri dati Geometrici, si radix Quadrata, Cuba, Superſolida extrahatur. Eius Logarithmus bipartitus, tripartitus, vel in quinque ſecatus erit Logarithmus radicis.

PRobatur, quia Logarithmus radicis efficitur Logarithmus quadrati, ſi dupletur; cubi, ſi tripletur, ſuperſolidi, ſi quinquies ſumatur; Ergo Logharithmus quadrati bipartitus efficietur quadratæ radicis numerus, cubicæ tripartitus, ſuperſolidæ per quinque ſecatus.

COROLLARIVM.

HInc ergo euidenter patet. Quod multiplicationi Geometricę correſpondet additio in Arithmeticis ex 1. h. propoſ. & diuiſioni ſubductio ex 2. huius propoſ. Extractioni radicis quadratæ bipartitio, ſicut quadrationi duplatio ex propoſ. 7. & 4.

Regulæ aureæ additio, & deinde ſubductio ex propoſ. 5. Extractioni Radicis cubæ tripartitio. Superſolidæ per quinque partitio, ſicut quintuplicatio reſpondet ſuperſolidæ multiplicationi, & triplicatio Cubicationi.

Si ergo Arithmetici Geometricis applicentur, patet, quòd inuentis Arithmeticis, inuenientur quoque Geometrici. Cumque Arithmetici per additionem, bipartionem, triplationem, ſubductionem inueniantur, ſequitur, quòd etiam Geometrici correſpondentes eodem quoque modo inuenientur. Sint itaque Geometrici cum applicatis Arithmeticis.

Arith.	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Geom.	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
Arith.	0	5	10	15	20	25	30	35	40

Sitque datis 3. & 27. reperiendus tertius proportionalis. Tabellam inſpicio, & Arithmeticos 5. Geometrici 3. & 15. Geometrici 27. colligo; duplicoque 15. & fiunt 30. ſubduco deinde 5. & fiunt 25. Concludo itaque quod 25. eſt tertius proportionalis Arithmeticus. Video itaque quinam Geometricus illi reſpondeat, & ille eſt 243. concludo itaque, quod 243. eſt tertius proportionalis Geometricus, & quòd ita ſit 3. à 27. vt 27. ad 243.

Sic datis tribus proportionalibus, quęritur quartus V. 3. & 27. 81. Aſſumo Arith. correſpond. 5. 15. 20. Addo 15. ad 20. fiunt 35. ſubduco 5. relinquitur 30. Logarith. numeri 729. qui ſe habet ad 81. vt 27. ad 3. Sic, ſi quæras quadratum Geometrici 9. duplabis Arithmeticum ipſius 10. & erit 20. Logarithmus quadrati 81. vel, ſi cupias numeri 6165. ſcire radicem; 40. Logarithmum bipartire, & habebis 20. Logarithmum radicis 81. Vel ſi quæras radicem cubam numeri 729. tripartire 30 & habebis 10. indicans Geometricum 9. radicem cubam ipſius: Et idem aſſerendum licet numeri ſint contrario modo, & dum Geometrici augentur Arithmetici decreſcant, vt monui.

COROLLARIVM II.

ELicies quoque id, quod ferè fundamentum eſt operis. Similiter proportionatorum Geometricorum æquidifferentes eſſe Arithmeticos, ſeu illi parui ſint, ſeu magni. Nempe eam differentiam Arithmeticam mediare inter duos Arithmeticos duorum Geometricorum, ac inter alios duos Arithmeticos, qui ſint aliorũ Geometricorũ, ſeu maiorum, ſeu minorum, ſed eandem proportionem habentium: Ita vides, quòd eadem differentia mediat inter 5. & 20. Logarithmos proportionalium Geometricorum 3. & 81; quæ mediat inter Logarithmos 25. & 40. Geometricorum 243. & 6561. nimirum 10. Ratio euidens ex dictis, Nam quot ſunt proportionales intermedij Geometrici tot additiones ſunt in Arithmeticis; cum itaque ſimiliter proportionati Geometrici habeant, vel eandem proportionem; vel duplicatam, vel triplicatam, vel quadruplicatam, vel certe vno intermedio, vel duobus, vel tribus ſic, & Arithmetici habebunt, vel eandem differentiam, vel duplam, vel triplam, vel quintuplam, & cæt. Vnde ſimiliter proportionalium Geometricorum erunt æquales ſemper differentiæ in Arithmeticis.

EXPENSIO II.

De ſerie facili Geometricorum reperienda, cui Arithmetica ſeries deſeruiat.

PRogreſſio Geometrica admodum difficilis maximè ſi de prolixa ſerie agatur: vnde ad difficultatem leniendam ijs in numeris ea progreſſio eligenda eſt, quæ fiat per ſubtractionem, vel additionem. Iam enim ſupra 1. par. Tr. 14. pr. 19. innuimus, multas eſſe progreſſiones Geometricas, quæ additione, & ſubtractione obtinentur.

Sed neque hoc quidem ad facilitatem nanciſſendàm ſufficit; ſed & fractiones vitandæ, & ſummũ numerorũ augmentum. Sic modus, quem Tract. 19 part. 1. propoſ. 17. innuimus fractiones non vitat, & proportio dupla fit per additionem. Sed in infinitum prope numerum augetur.

Præaſſumpt. 1. Ad hoc, vt progreſſioni Geometricę poſſit applicari ꝓgreſſio Arithmetica debet eſſe continua, ſaltem ſecundum aliquam maiorem partem; alioquin ſi Geometrica non per eandem proportionem progrederetur, Arithmetica continua, quæ sẽper per æqualia ſpatia progreditur, ei applicari nequaquam poſſet, & fruſtra applicaretur, quia ſilicet ſimiliter proportionatorum non eſſet æquidifferens, vt debet eſſe ex Coroll. 2. expenſ. præced. Logarithmus.

Præaſſ. 2. Duplex progreſſio eſt autem alia continua, & abſoluta; quæ ſilicet nullis tabulis alligatur, alia eſt interrupta, & relatiua, quæ ſinubus apponitur, vt innoteſcant eorũ proportiones: Hæc verò non potuit fieri ſine illâ, cùm enim proportionales ſinus non ſint in eadem proportione continua, ideo ex præaſſumpto 1. huius expenſ. non potuit ei progreſſio Arithmetica continua applicari: Quare priùs debuit conſtrui tabula quædam continua, ex quâ deinde proportionales numeri Arithmetici applicandi proportionalibus ſinuum decerperentur ſecundùm, quòd illi continui Geometri iſtis diſcontinuis occurrebant, & ijſdem

ijſdem numeris, vel ſaltem valde proximis reſpondebant. Sint V. g. continui

32	64	128	256	512	Geometrici
5	10	15	20	25	Arithmetici

Sitque alia proportio non continua 32. & 64. & 255. 511. quia hic 32. eſt eiuſdem quantitatis, ac 32 in continua Geometricorum ſerie repertus; dico eius logarith. eſſe 5. ſic quia 64. in non continua eſt eiuſdem quantitatis ac 64. in continua, dico eius logarith. eſſe 10. Sic Geometrici 255. quia accedit ad 256. eſſe 20. & 511. eſſe 25. quia accedit ad 512. & licet vnitas in iſtis paruis numeris generet differentiam ſenſibilem, in magnis tamen numeris vnitas eſt ſpernenda, vt inſenſibilis, quid enim eſt 1. reſpectu 100000. centum millium?

Præaſſumptum 3. Et hinc eſt, quòd magnus numerus elligendus ſit, tum quia differentia, ſi qua eſt, reddatur inſenſibilis in multitudine partium, tum quia, vt propoſ. 7. Tr. 14. par. 1. in magno numero plurimæ latent proportiones, & ideo in lõgam ſeriem in magno numero proportiones diſtendi poſſunt.

Præaſſumprum 4. Tabula quoque, vel ſeries numerorum abſoluta ſecundum duplicem finem, ob quem ſit duplex eſt; alia enim ſit ob computos vulgares, vt proportionalibus quibuſcunque reperiendis deſeruiat, & de hac infra breuiter loquemur; alia, vt ex ea deinde excerpantur numeri Arithmetici, qui ſinibus deſeruire debent, & de hac modo loquimur.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

In prolixam ſeriem Geometricos faciliter, & ſine fractionibus, quæ negotium faciant, in ordine ad tabulas ſinuum Logarithmis exornandas extendere.

PRæceptum primum. Ex 10000000. ſinu toto triginta ſex proportionales ſubtractione partis centeſimæ educantur, quæ eſt 100000. ideſt reſpectu decem millionum centum millia, ita enim eſt 1. ad 100. vt eſt 100000. ad 10000000. Hoc autem fit ſubtrahendo primo partem centeſimam à decem millionibus, & à reſiduo eiuſdem reſidui partem centeſimam, & à reſiduo hoc poſteriori centeſimam quoque eiuſdem reſidui partem, & ſic ſucceſſiuè, vt in exemplo.

Quia enim centeſima pars reſidui 9900000. eſt 99000. ideo ſubducitur rurſùs eadem figura 99. cũ omnibus zifris poſthabitis duabus à primo reſiduo, & remanet 9801000. cuius etiam centeſima pars eſt idem numerus duabus zifris reiectis, ideo rurſus ſubducitur 98010. à 9801000. Vides itaq; facilitatem operis iam, atque etiam ſecuritatem; facilis enim computus, non adeo faciliter errorem admittit.

Habemus itaque 36. proportionales, qui ſe inuicem excedunt proportione, quæ eſt inter 1. & 100. inter quos omnes aut centum millia, aut ferè millia centum intercedunt.

Cur autem non reperiantur plures eſt in cauſa quod reliqui minores non ſunt neceſſarij eò, quòd ſeries proportionalium Geometricorum ſatis ſit, quæ perueniat vſque ad Sinum 45. Graduum, qui eſt 7071068. Nam iſtis habitis proportionalibus, à quibus decerpi poſſint proportionales Arithmetici; qui applicentur ſinubus, qui ſucceſſiuè ſubtendunt Gradus à 90. vſque ad 45. & reliqui deinde omnes ex iſtis, vt patebit innoteſcent.

Prob. autem propoſ. licet res per ſe clara ſit. Nam cum à quolibet numero ſemper decima pars illius auferatur, fit, vt quilibet remanens ſe habeat ad integrum, vt 9. ad 10. quare omnes numeri à quibus decima pars ablata ſit, erunt ad numerum ſe immediatè maiorem tanquam 9. ad 10. proptereaque ſemper in eadem proportione reperientur.

Præceptum 2. Sed quia incipiunt in proſequendo aliquę fractiones ſuboriri; cum nequaquam ſpernendæ ſint, ideo additis zifris totus numerus in fractiones redigendus; Sic ſi ex 1000. partem 100. auferre volo illa erit 10. & reſiduum erit 990. Cuius pars centeſima erit 9. & $\frac{90}{100}$.

Quare ſi reducas totum integrum 90. in fractiones multiplicando per denominatorem 100. habebis 99000. & 9 $\frac{90}{100}$ huius 99000 numeri comprehendet partes 990. Et hinc eſt, quod additis duabus zifris ad dextram ſit numerus augendus, vt capiat fractiones, & conſequenter hæc ab altera, vt integri ipſi, ſucceſſiuè poſſit extrahi, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. primi Ordinis.

Geometri.		Arithmetici.	
10000000	00		
100000	00		
9900000	00	100543	7632988
99000	00		
9801000	00	201087	5265976
98010	00		
9702990	00	301631	2898958
97029	90		
9605960	10	402175	0531946
96059	60		
9509900	50	502718	8164934
95099	00		
9414801	50	603262	5797922
94148	01		
9320653	49	703806	3430900
93206	53		
9227446	96	804350	1063888
92274	46		
9135172	50	904893	8696876
91351	72		
9043820	78	1005437	6329864
90438	20		
8953382	58	1105981	3962852
89533	82		
8863848	76	1206525	1595840
88638	48		

8775210	28	1307068	9228828
87752	10		
8687458	18	1407611	6861816
86874	58		
8600583	60	1508155	4694804
86005	83		
8514577	77	1608699	2327792
85145	77		
8429432	00	1709242	9960780
84294	32		
8345137	68	1809786	7593768
83451	37		
8261686	31	1910330	5226756
82616	86		
8179069	45	2010874	2859744
81790	69		
8097278	76	2111418	0492732
80972	78		
8016305	98	2211963	8125720
80163	05		
7936142	93	2312505	5758708
79361	42		
7856781	51	2413049	3391696
78567	81		
7778213	70	2513593	1024684
77782	13		
7700431	57	2614136	8657672
77004	31		
7623427	26	2714680	6290680
76234	27		
7547192	99	2815226	3923668
75481	92		
7471721	07	2915770	1556656
74717	21		
7397003	86	3016313	9189644
73970	03		
7323033	83	3116857	6822632
73230	33		
7249803	50	3217401	4455620
72498	03		
7177305	47	3317945	1088608
71773	05		
7105532	42	3418488	8721596
71055	32		
7034477	10	3519032	6354584

Præceptum 3. Quia verò isti proportionales multò minores numero sũt sinubus, qui subtẽdunt omnes arcus à Gradu Nonagesimo vsque ad 45. Ideo inter quoscumque istorum proportionalium alij reperiendi sunt, qui inuicem dicant proportionem, vt vnum ad mille, ita vt sinus totus excedat primum proportionale solùm 10. millibus, & quia fractiones adhuc minutiores suboriuntur; ideo per adiectionem zifrarum effugienda earum difficultas: tot autem addendæ sunt ad dextram, quot reliquuntur ad sinistram ratione iam præcepto 2. tacta, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. Ordinis 2. interposita inter 10000000. & 990000. præc. tabulæ.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	000		
10000	000		
9990000	000	10009	0438435
9990	000		
9980010	000	20018	0876870
9980	010		
9970029	990	30027	1315305
9970	029		
9960059	961	40036	1753740
9960	059		
9950099	902	50045	2192175
9950	099		
9940149	803	60054	2630610
9940	149		
9930209	654	70063	3069045
9930	209		
9620279	445	80072	3507480
9920	279		
9910359	166	90081	3945915
9910	359		
9900448	807	100090	4354360

Tabula 2. Ordinis secundi interposita inter 7177305. & 7105532. præcedentis Tabulæ.

Geometrici.		Arithmetici.	
7177305	470	3317945	1088608
7177	305		
7170128	165	3327954	1527043
7270	128		
7162958	037	3337963	1965478
7162	958		
7155795	079	3347972	2403913
7155	795		
7148639	284	3357981	2842348
7148	639		
7141490	645	3367990	3280783
7141	490		
7134349	155	3377999	3719218
7134	349		
7127214	806	3398008	4157653
7127	214		
7120087	592	3398017	4596088
7120	087		
7112967	505	3408026	5034523
7182	967		
7105854	538	3418035	5472958
7105	854		

Quia ergo 7177 cum fractis $\frac{305}{1000}$ millesima pars proportionalis 7177305. ideo hæc ipsa subducitur, & ad hoc, vt etiam fracti capiant in ea, & subtrahi consequenter possint tres zifræ addendę, sic enim septem milliones centum septuaginta septem millia, & trecentum quinque vnitates multiplicantur per mille, & septem fiunt milliones millionum, respectu cuius numerus $\frac{305}{1000}$ qui erat fractio iam euadit integer.

Si verò quis vellet hunc secundum tabullarum ordinem minutiorem reddere posset auferre à singulis quingentesimam partem nempe primo auferendo 5000. quæ est quingentesima pars numeri 10000000. & diuidendo residuum per 200. continuè, & quotum, qui prouenit; auferendo ab antecedenti.

10000000	00000
5000	00000
9995000	00000
4997	50000
9990002	50000
4995	00125
9985007	49875

Præceptum 4. Confectis omnibus istis tabulis, quia neque proportionales sufficiunt: ideo inter quoscumque proportionales eodem modo alij interserendi, & cõponendæ minutiores tabulæ, quę secundùm decem millesimam partem altera alteri accrescat, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima tertij ordinis inter 10000000 & 9999000. interposita.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	0000		
1000	0000		
9999000	0000	1000	4550242
999	9000		
9998000	1000	3001	9100484
999	8000		
9997000	3000	3001	3650726
999	7000		
9996000	6000	4001	8200958
999	6000		
9995001	0000	5002	2751210
999	5001		
9994001	4999	6002	7201452
999	4001		
9993002	0998	7003	1751694
999	3002		
9992002	7996	8003	6301936
999	2002		
9991003	5994	9004	0852178
999	1003		
9990004	4991	10004	5402420

Tabula vltima tertij ordinis interposita inter 7112967. & inter 7105854.

Geometrici.		Arithmetici.	
7112967	5050	3408026	5034523
711	2967		
7112256	2083	3409026	9584765
711	2256		
7111544	9827	3410027	4135007
711	1544		
7110833	8283	3411027	8685249
711	0833		
8110122	7450	3412028	3235491
711	0122		
7109411	7328	3413028	7785733
710	9411		
7108700	7917	3414029	2335975
710	8700		
7107989	9217	3415029	6886217
710	7989		
7107279	1228	3416030	1436459
710	7279		
7106568	3949	3417030	5986701
710	6568		
7105857	7381	3418031	0536943

Præceptum 5. Cum autem iam proportionales inuicem accrescant, vt sinuum, quorum differentię sunt maiores, vel eumdem numerum exequent, vel proximè accedant: ideo (nisi maior sedullitas, quam par sit adhibere quis vellit) iam non inter omnes proportionales Tabularum ordinis quarti nouos proportionales Geometricos proijciemus; sed tantum inter aliquos, qui nimirum sinui toto viciniores in numeris sunt. Cum enim tabulam non absolutam; sed quæ sinibus deseruiat cõdamus; inde est, quòd illi solùm proportionales sint inueniendi, qui proximè accedunt ad propor-

tiones finuum, & quia finus; quò magis appropinquant finui toto, eò minoribus diſcrepāt differentijs; inde etiam proportionales inueniendi, quorum proportiones ſint minores inter illos proportionales Geometricos, qui magis accedant ad ſinum totum: Si autem tabulæ abſolutæ conderentur, meliùs eſſet etiam inter omnes interſerere, quo enim minutiores differentiæ, eo exactiores tabulæ abſolutæ, Itaque inter hos poſtremos quarti ordinis proportionales, alios iterum interſeremus, qui iuxta centum milleſimam partem, & ſecundùm vnam ex iſtis partibus ſinguli proportionales maiores exiſtāt, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima ordinis quarti interpoſita inter 10000000. & 9999000. præced. Tabula.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	00000		
100			
9999900	00000	100	0005024
99	99900		
9999800	00100	200	0010048
99	99800		
9999700	00300	300	0015072
99	99700		
9999600	00600	400	0020096
99	99600		
9999500	01000	500	0025120
99	99500		
9999400	01500	600	0030144
99	99500		
9999300	02100	700	0035168
99	99300		
9999200	02800	800	0040192
99	99200		
9999100	03600	900	0045216
99	99100		
9999000	04500	1000	0050240

Tabula vltima Ordinis quarti interpoſita inter 710656. & 7105857. præcedentis Tabulæ ordinis tertij.

Geometrici.		Arithmetici.	
7106568	39490	3417030	5986701
71	06568		
7106497	32922	3417130	6036725
71	06497		
7106426	25425	3417230	6041749
71	06426		
7106355	18999	3417330	6046773
71	06355		
7106284	12644	3417430	6051797
71	06284		
7106213	06360	3417530	6056821
71	06213		
7106142	00147	3417630	6061469
71	06142		
7106070	94005	3417730	6066869
71	06070		
7105999	88035	3417830	6071893
71	05999		
7105928	72036	3417930	6076917
71	05928		
7105857	66108	348030	6081944

Præceptum 6. Inter autem ſingulos proportionales huius, proportionales alij interponendi, qui dicant proportionem, vt vnum ad millionem, vt in hoc exemplo.

Tabulà prima ordinis quinti interpoſita inter 1000000. & 9999900.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	000000		
10	000000		
9999990	000000	10	0000010
9	999990		
9999980	000010	20	0000020
9	999980		
9999970	000030	30	0000030
9	999970		
9999960	000060	40	0000040
9	999960		
9999950	000100	50	0000050
9	999950		
9999940	000150	60	0000060
9	999940		
9999930	000210	70	0000070
9	999930		
9999920	000280	80	0000080
9	999920		
9999910	000360	90	0000090
9	999910		
9999900	000450	10	0000100

Tandem pro vltimo præcepto inter huius poſterioris ordinis proportionales adhuc interſerēdi ſunt alij numeri, qui ſe habeant, vt vnum ad decem milliones, & quia minutiæ ſunt minimæ potes ſequi, ita vt ſint 100. proportionales interpoſiti

ſiti inter primum, & ſecundum tabulæ quarti ordinis; quibus omnibus creatis deinde Arithmetici apponendi ſunt, vt ſequenti expenſione docebimus.

Et licet inter primum, & ſecundum quartæ tabulæ 10. proportionales interſeri ſit neceſſe; quia In fine, cum appropinquant ſinui toti, ſinus vix creſcunt, inter tamen alias ſufficiet vſque ad quartum ordinem incluſiuè, vel vſque, ſi cupias exactiſſimè operari, ad proportionem, quam habent 1. ad millionem, vt præcepto ſexto.

Tabula extenſa ſexti ordinis.

Geometrici.		Arithmetici.		Geometri.		Arithmetici.	
10000000			00000000				
9999999	0000000	1	00000 10				
				9999949	0001254	51	0000051
9999998	0000001	2	0000002	9999948	0001305	52	0000052
9999997	0000003	3	0000003	9999947	0001357	53	0000053
9999996	0000005	4	0000004	9999946	0001410	54	0000054
9999995	0000009	5	0000005	9999945	0001464	55	0000055
9999994	0000014	6	0000006	9999944	0001519	56	0000056
9999993	0000020	7	0000007	9999943	0001575	57	0000057
9999992	0000027	8	0000008	9999942	0001632	58	0000058
9999991	0000035	9	0000009	0999941	0001690	59	0000059
9999960	0000044	10	0000010	9999940	0001749	60	0000060
9999989	0000054	11	0000011	9999939	0001800	61	0000061
9999988	0000065	12	0000012	9999938	0001870	62	0000062
9999987	0000077	13	0000013	9999937	0001932	63	0000063
9999986	0000090	14	0000014	9999936	0001995	64	0000064
9999985	0000104	15	0000015	9999935	0002059	65	0000065
9999984	0000119	16	0000016	9999934	0002124	66	0000066
9999983	0000135	17	0000017	9 90933	0002190	67	0000067
9999982	0000152	18	0000018	9999932	0002257	68	0000068
9999981	0000170	19	0000019	9999931	0002325	69	0000069
9999980	0000189	20	0000020	9999910	0002394	70	0000070
9999979	0000209	21	0000021	9999929	0002464	71	0000071
9999978	0000230	22	0000022	9999928	0002535	72	0000072
9999977	0000252	23	0000023	9999927	0002607	73	0000073
9999976	0000275	24	0000024	9999926	0002680	74	0000074
9999975	0000299	25	0000025	9999925	0002754	75	0000075
9999974	0000314	26	0000026	9999924	0002829	76	0000076
9999973	0000340	27	0000027	9999923	0002905	77	0000077
9999972	0000367	28	0000028	9959922	0002982	78	0000078
9999971	0000395	29	0000029	9999921	0003060	79	0000079
9999970	0000424	30	0000030	9999920	0003139	80	0000080
9999969	0000454	31	0000031	9999919	0003219	81	0000081
9999968	0000485	32	0000032	9999918	0003300	82	0000082
9999967	0000517	33	0000033	9999917	0003382	83	0000083
9999966	0000550	34	0000034	9999916	0003465	84	0000084
9999965	0000584	35	0000035	9999915	0003549	85	0000085
9999964	0000619	36	0000036	9999914	0003634	89	0000086
9999963	0000645	37	0000037	9999913	0003720	87	0000087
9999962	0000682	38	0000038	9999912	0003807	88	0000088
9999961	0000720	39	0000039	9999911	0003895	89	0000089
9999960	0000759	40	0000040	9999910	0003984	90	0000090
9999959	0000799	41	0000041	9999909	0004074	91	0000091
9999958	0000840	42	0000042	9999908	0004165	92	0000092
9959957	0000882	43	0000043	9999907	0004257	93	0000093
9999956	0000925	44	0000044	9999906	0004350	94	0000094
9999955	0000969	45	0000045	9999905	0004444	95	0000095
9999954	0001014	46	0000046	9999904	0004539	96	0000096
9999953	0001060	47	0000047	9999903	0004634	97	0000097
9999952	0001107	48	0000048	9999902	0004732	98	0000098
9999951	0001155	49	0000049	9999901	0004830	99	0000099
9999950	0001204	50	0000050	9999900	0004929	100	0000100

EXPENSIO III.

De Arithmeticis proportionalibus repertæ Geometricorum seriei copulandis.

PRæassumptum 1. Numeris Geometricis post confectas omnes series Arithmetici copulandi sunt, in quo considerandum est nullius laboris esse; si numerorum series altera alteri continua proportione copularetur; sed quia ita non est: at quælibet, & proportionem mutat, & ob fractos in eundem numerum non incidit, hinc est, quod industria ludendum sit, & ingenio.

Præassumptum 2. Obseruandum quoque, quòd alicuius quantitatis incommensurabilis tunc explicatur sufficienter mensura, cùm inter terminos parùm distantes maiorem, & minorem clauditur, ita quòd nec maiore maior sit, nec minore minor. Termini verò tunc parum distant, cùm illi sunt magni numeri, & parua differentia dissentiunt, vt 10000010. & 10000040. Si ergo demonstretur aliquam quantitatis mensuram inter illos limites contineri, sufficienter expressa dicitur, vt si dicatur aliquam quantitatem esse inter 10000025. & 10000030. Ratio est; quia differentia 5. vnitatum respectum magni numeri 10. millionum nullius pretij est, nullius sensus, & ideo quidquid inter illos numeros adeo parum differentes clauditur, vt æquale putatur, cùm nec ea quidem differentia 5. vnitatum illos à sensibili æqualitate eliminet, licet quoad intellectum verè sint inæquales.

THEOR. I. PROPOS. IX.

In progressione Arithmeticâ deseruiente Geometricæ à quocumque numero, prout libet, possumus incipere.

PRobatur. Quia nulla naturali connexione connectuntur Arithmetici, & Geometrici. Dum enim quidpiam V. g. se mouens deorsum facit 10. passus, & secundo æquali tempore faciat centum passus augendo Geometricè velocitatem multi alij mouentes se progressiuè possunt facere qui quatuor, qui quinque, qui septem passus, vt secũdo eodem tempore, eosdem quatuor, vel quinque, vel septem efficiant. Sic alterans, qui producit 3. gradus caloris in primo instanti, & in secundo 9. comitem, potest habere alium debilem calefacientem, qui non nisi vnum gradum caloris ijs singulis instantibus efficiat.

Præassumptum Elligatur itaque numerus aliquis V. g. vnitas, qui post zifram addendam finui toti, addatur, secundo proportionali. Incipimus autem à zifra iuxta documenta propositionis 2. huius partis. Vnitati quoque multas zifras addimus, vt fiat 1 [illegible], vt in illa intercapedine, quæ est inter 1. & [illegible] nempe vnitatem, & decem millionum particulam, in quam vnitas præsuponitur diuisa, multę fractiones capiant, quæ fortè incidunt, vt experientiâ docebit.

PROBL. I. PROPOS. X.

Tabulæ totius sexti ordinis numeros Arithmeticos inscribere.

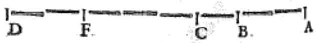
HOc faciliter fit. Nam electo primo numero, qui addatur primo proportionali post sinũ totum, cui zifra additur; idem semper deinde addendum; sic si primo post sinum totum 9999999 10000000. addatur 1 [illegible], secundo 9999998.0000001. addendũ erit 2 [illegible], & tertio Geometrico 9999997 0000003. Arithmeticus subiungendus 3 [illegible]. Verum expeditiùs loco denominatoris 10000000. adduntur numero 3. tot zifræ, quot intermediant inter eam minutiam 3. & vnitatem sinus totius. Vnde semper denominator decem millionum subintelligendus est.

Probatur autem ex 2. propos. expens. 1. Nam in progressione Arithmetica; quæ incipit à zifra aggregatum duorum generat tertium; sicut duo Geometrici inuicem multiplicati tertium generat: itaque si primo idem primus addatur, generabitur secundus, & si secundus addatur primo generabitur tertius, & sic consequenter.

Probatur secundo omnes Geometrici proportionales sextæ tabulæ expansæ eandem proportionem habent, ergo ex Coroll. 2. expens. 1. huius. Omnes Arithmetici eandem differentiam habebunt. Vnde additus primus Arithmeticus, qui est differentia, quâ ipse discrepat à o habebitur secundus, & sic successiuè, donec perseuerant Geometrici in illa continuâ proportione, quam protraximus vsque ad 100. proportionales, vt vides in superiori exemplo Tabulæ 6. ordinis.

THEOR. II. PROPOS. XI.

Eodem augmento, vel diminutione augetur, vel decrescit Arithmeticus proportionalis duorum datorum proportionalium Geometricorum quorumcumque, quo Arithmeticus sinus totius, & alterius Geometrici proportionalis, ad quem simili proportione referatur, ac datus Geometricus ad datum alium Geometricum.



SInt dati Geometrici expressi linea AB, & AC, & sinus totus linea AD, qui sit ad AF, vt AC proportionalis maior ad AB minorem. Dico, quod proportionalis Arithmetici differentia, seu decrementũ, qua decrescit Arithmeticus proportionalis Geometrici AC, vt possit applicari Geometrico AB eadem est, ac quæ mediat inter sinum totum AD & proportionale Geometricum AF.

Probatur. Quia similiter proportionatorum Geometricorum est eadem differentia, augmentum, seu decrementum ex Coroll. 2. propos 7 huius. Sed eadem est proportio ex Hypthesi inter Geometricos AC, & AB, quæ est inter sinum totum AD, & proportionale Geometricum FA, ergo etiã eadem differentia Arithmeticorum, seu (quod idem est) augmentum, seu decrementum ex Coroll. 2. Expens. 1.

COROLLARIVM I.

HInc deduces quomodo datis duobus proportionalibus, & sinu toto ellicias per regulam Auream quartũ proportionale in eadem proportione V. g. sit datus proportionalis minor secundus quarti ordinis 9999900. & quinti ordinis vltimus 9999900. [illegible], & sinus totus 10000000. Sitque reperiendus proportionalis numerus, ad quem se habeat sinus totus, vt datus maior 9999900. [illegible] ad 9999900. Multiplicetur hic per sinum totum, & diuidatur per 9999900. [illegible], & prodibit quartus proportionalis 9999999 [illegible]. Verùm, quia hic computus ob magnitudinem numerorum, & fractionum euadit prolixior infra alium modum in hac ipsa expensione trademus: Siquidem in hoc computo oportet sinum totum multiplicare in 9999900. & deinde ob diuisionem faciliorem proijcere in fractiones illud multiplicatum, ita vt sint post quinque 9. viginti tres zifræ, & deinde diuidere totum illum numerum per 9999900. 0004929.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Cuiuslibet proportionalis Geometrici in tabulis non reperti Arithmeticus est inter Arithmeticum maioris proportionalis, & minoris.

QVia dantur aliqui proportionales Geometrici, qui in continuam seriem non sequuntur, & de ipsis iam visum est, quòd eandem habent differentiam Arithmeticorum, quæ est inter sinum totum, & aliud quoddam proportionale minus, quod in eadem proportione, sit. Ideo inuento illo proportionali ex Coroll. eiusdem propositionis potest euenire, vt euenit sæpius, vt in aliquem numerum Tabulæ sexti ordinis, vel etiam aliarum, cum omnes confectæ fuerunt, & de tabulâ sinuum Arithmeticis, Logarithmisque exornanda agatur; non incidat, ideo oportet ex secunda huius expens. praxi videre quinam sint termini proximi, inter quos includatur. V. g. inuentũ est pportionale 9999 99 [illegible] ad quem se habet sinus totus, vt ad 9999900. proportionalis 9999900 [illegible]. Sed nullus est proportionalis in tabula sexta iam logarithmis exornata, quæ talis quantitas sit; sed 9999999 [illegible] est minor; at sinus ipse totus immediatus est maior. Dico ergo quod Arithmeticus proportionalis inuenti includitur inter Arithmeticum sinus totius, & Arithmeticum proportionalis 9999999 [illegible], & ideo quòd est inter o. & 1. 0000001 qui termini propinquissimi sunt, cum non differant, nisi solâ vnitate; quæ quidem est pars minima respectu omnium proportionalium Arithmeticorum, qui tabulam totalem intexturi sunt.

Probatur autem. Quia non potest esse æqualis Arithmetico 10000001. esset enim Arithmeticus proportionalis Geometrici minoris 9999999 [illegible] non potest esse o. esset enim terminus radicalis ipsius sinus totius: Ergo erit aliquis medius inter o. & 1. 0000001. sicut, & ipse radicalis Geometricus est aliquid medium inter sinum totum, & 999999 [illegible].

COROLLARIVM.

HInc igitur emergit, quod si accipias aliquid medium inter o. & 1 [illegible] hoc quodcumque illud sit erit proportionalis Arithmeticus Geometrici inuenti; quia cum sint termini propinquissimi ex præassumpt. 2. non differunt sensibiliter à vero; ideoque pro termino Arithmetico proportionalis Geometrici superius inuenti 9999999 [illegible]. potes accipere ipsam differentiam, quâ differt sinus totus à proportionali inuento, quę est [illegible] Igitur Arithmeticus inuenti proportionalis erit o. [illegible], vel aliquid tale, quæ differentia addita Arithmetico 100. 0000100. fiet 100. [illegible], vel 100 [illegible].

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Differentia, quâ augescit quodlibet proportionale Arithmeticum à sinu toto est ipse Arithmeticus, si series incipiat à zifra.

PAtet ex dictis. Nam cum aufertur terminus radicalis à quocumque termino Arithmetico remanet differentia, quâ differt ipse à termino radicali; sed hic terminus radicalis, nempe à quo incipit progressio ponitur o. ex Hypothesi; ergo ablato eo remanet ipse numerus, vt erat: Quare ipse erit terminus, & differentia, quâ differt à termino radicali o. qui est proportionalis Arithmeticus sinus totius.

COROLLARIVM I.

HInc autem resultat, quod cum idem sit Arithmeticus cuiuscumque Geometrici inter sinum totum, & illum ipsum Geometricum, cui ita est sinus totus, vt alius Geometricus ad alium. Si habeamus illam differentiam Arithmeticam ex præced. Coroll. habeamus quoque differentiam Arithmeticorum quibuscumque Geometricis in simili proportione existentibus applicatorum, Nam ex Coroll. 2. expen. 1. huius, vbi est eadem proportio geometricorum, ibi etiam est eadem differentia Arithmeticorum. Quare cum ex Coroll. prop. 11. huius ita sit 999,900. ad 9999900. 0004500. vt 9999999. 9995499. ad 10000000. eademque quoque erit differentia Arithmeticorum.

At quia eadem est hæc differentia cum Arithmetico ipso ex hac propos. & iam nouimus ex Coroll. propos. 11. Arithmeticum ipsum esse .0004924.5. hinc est, quod hic ipse quoque sit differentia, quæ deseruiet etiam pro differentia inter 9999900. 9999900. 0004500. Geometricos eiusdem proportionis cùmque huius habeamus Aritmeticum 100. 0000100. si hanc differentiam ei addamus fiet 100. 0005024. Arithmeticus sinus 9999900. qui cum minor sit suo comproportionali, eius Arithmeticus

cus debet augeri, cum elegerimus feriem Arithmeticam, quæ augetur dum decrescit Geometrica.

COROLLARIVM II.

HInc obtinebis modum, quo alij omnes proportionales Arithmetici quarti ordini addantur; siquidem, cùm secundus Geometricus sit in proportione ad sinum totum, vt tertius ad secundum, & ita consequenter, & iam habeamus logarithmum secundi ex præc. Coroll. respectu sinus totius nempe 100. 0005024. habebimus quoque logarithmum tertij per additionem eiusdem quantitatis, vt fiat 200. 0010048. & sic successiuè addendo semper eandem quantitatem. Ratio euidens est ex dictis, quia ita 9999900. secundus est sinui toti, vt tertius 9999800. 00100. est ipsi secundo 9999900. Appositis verò omnibus logarithmis, vltimus illius tabulæ primæ 4. ordinis, qui est 99990000. 045000. habebit pro logarithmo 1000. 0050240. Dato verò hoc proportionali, & proportionali primo tertij ordinis 9999000 ——, & sinu toto queremus proportionale quartum ex Coroll. propos.11. h., quod erit 999999. 9559955., quod se habeat ad sinum totum, vt proportionale Geometricum 9999000 se habet ad 9999000. 045c0. . Quo reperto ex Coroll.I. propos.12. ipsa differentia, quâ differt à sinu toto, erit quoque differentia Arithmetica addenda logarithmo noto 1000. 0050240. Geometrici 9999000. 0450., vt fiat Arithmeticus Geometrici 9999000. hæc autem est 4400042. quare Arithmeticus erit ferè 1000. 0005024. & quia proportionales quarti ordinis, qui interponuntur inter 9999000. & inter 9998000. 0001400 quilibet se habet ad suum sequentem, vt 9999900. ad 10000000. hinc per adiectionem eiusdem quãtitatis 100. 0005024. possunt omnes formari, habito proportionali Arithmetico primi Geometrici 9999000. & sic de alijs interpositis inter quoscumque Geometricos ne dum primæ tabulæ quarti ordinis; sed & omnium tabularum eiusdem ordinis. Ipsos autem proportionales Arithmeticos apponendos Geometricis quinti ordinis habebis, si sibi addas repertum Arithmeticum 100. 4550242. Ratio est toties tacta, quia Geometricus quilibet se habet ad suum antecedentem V. g. 9998000. 1000. ad 9999000 vt ipse 9999000. se habet ad sinum totum. Idem quoque ages in exquirendo primo Arithmetico secũdi ordinis dato vltimo primæ tabulæ ordinis tertij Geometrico 9990004. 4991. primo secundi 9990000. & sinu toto acquirendo quartum proportionale, & ex illo differentiam Arithmeticam addendam Arithmetico iam dato vltimo tabulæ primæ tertij ordinis 10004. 5402420., quo habito ceteri omnes innotescunt. Vnde totus labor consistit in primis solum Aritmeticis cuiuslibet tabulæ primæ inueniendis ceteri enim omnes illis datis habentur. Aduerte autem numeros post punctum esse fractos, & subintelligi lineam subductam, & sub linea tot zifræ, quot sunt figuræ, & insuper vnitas ad sinistram, quod & in sequentibus obseruabimus.

THEOR. V. PROP. XIV.

Ita est maius proportionale ad sinum totum, vt differentia duorum proportionalium est ad differentiam sinus totius, & alterius ad quod eandem proportionem dicat.

D F C B A

SIt vt priùs datus Geometricus CA, qui sit ad AB, vt AD sinus totus ad AF. Dico quoque, quòd ita est CB differentia ad DF differentiam, vt est CA sinus ad totum sinum AD.

Nam si est totum ad totum, vt ablatum ad ablatum. Ergo, & reliquum ad reliquum tale erit, vt est totum ad totum ex propos. 19. lib. 5. Element. Cum ergo sit totus CA ad ablatum AB, vt totus sinus AD ad ablatum AF, ergo, & reliquum nempe differentia BC est ad differentiam reliquam DF, vt est CA ad totum AD.

THEOR. VI. PROPOS. XV.

Ita est maior Geometricus proportionalis ad differentiam inter ipsum, & minorem, vt est sinus totus ad differentiam inter ipsum, & proportionalem alterum simili proportione Geometrica affectum.

MAneat eadem constructio, vt priùs, Dico, *quod ita est proportionalis maior* AC ad differentiam CB, vt est sinus totus AD ad differentiam DF.

Probatur ita est in proportione differentia AC ad differentiam DF, vt proportionale AC est ad totum sinum DA, & *vicissim* ita erit proportionata BC differentia ad AC, vt differentia DF ad sinum totum AD; vnde, & *conuertendo* AD erit ad DF; vt AC ad BC.

COROLLARIVM.

HInc deduces modum, quo datis duobus proportionalibus, & sinu toto elicias quartũ proportionale, ad quod se habeat sinus totus, vt proportionalis datus maior se habet ad minorem. Quoniam ita se habet maior Geometricus datus ad differentiam, quæ intercedit inter ipsum, ac minorem datum, sicut sinus totus ad differentiam, quæ intercedit inter se, & alium simili proportione sibi respondentem, vt Geometrici dati. Ideo dato Geometrico maiori V. g. vltimo primæ tabulæ tertij ordinis 9990004. 4991000. & primo tabulæ primæ secundi ordinis 9990000. habebis differentiam 4. 4991000. Itaque proportionali 9990000. & differentia 4.4991000. & sinu toto exquires quartum proportionale; nempe differentiam inter sinum totum, & sinum eo minorem, sed in consimili proportione, quæ erit 4.5036015. quam demes à sinu toto, & habebis proportionale 9999995. 4963985. quod ita se habebit ad sinum totum, vt 9990000. ad 9990003. 4991000. Iuxta itaque documenta propositionis 11. huius, quære hoc proportionale in sexta tabula, & non

reperies

reperies, sed aliquid maius nimirum 9999996. 0000005. & quid minus 9999995. 0000009. Inter itaque hos terminos consistet Geometricus repertus 9999995. 4963985. & consequenter etiam Arithmeticus, nempe quid medium inter Arithmeticum 40000004. & 5. 0000005. Geometricis terminis applicatos sola vnitate distantibus, quare poterit esse 4. 5036015. ipsa nempe differentia Geometrica. Cum verò Arithmeticus, quo differt Geometricus à sinu toto sit etiã differentia iuxta propositionem 12. & differentia eadem Arithmetica sit similiter geometricè proportionatorum ex Coroll. vltimo expens. 1. huius sequitur, vt Arithmeticus repertus sit quoq; differentia addenda Arithmetico noto 10004. 5402420. vt fiat 10009. 0438435. Arithmeticus Geometrici mininoris 9990000. Quo habito omnes habentur eiusdem ordinis tertij addendo eandem quantitatem antecedenti termino. Sicut, & intermedij omnes, qui pertinent ad quarti ordinis tabulas addendo ijsdem Arithmeticis tertij ordinis, à quibus incipit intersitio, primum quarti ordinis Arithmeticum, & sequendo eandem additionem, donec omnes interpositi sint arithmeticis exornati.

Sic, si cupias Arithmeticum primæ tabulæ primi ordinis, eodem modo poteris inuenire. Datur enim 9900448. 8070000. Geometricus secundi ordinis, & 9900000. Geometricus primus tabulæ primæ primi ordinis, quorum differentia est 448. 807000. quæ dat adhibitâ regulâ proportionum differentiam geometricam quarti proportionalis à sinu toto 453. 3198532. quæ differentia subducta à sinu toto dat quartum proportionale 9999546. 6801468. quòd in tabula prima ordinis quarti reperitur cadere inter 9999500. 0100000. & inter 9999600. 0060000. & hoc est minus quidem repertũ proportionale, sed maius illo: itaque Arithmeticus numerus quoque erit maior, quam 400. 0020096. & minor, quam 500. 0025120. Vnde differentia Geometrica addita minori Arithmetico dabit proximè Arithmeticum proportionalẽ inter vtrumque medium paucissimis vnitatibus à verò distantem. Quia ergo quartus proportionalis differt à maiori 9999600. 0060000. & differentia est 53. 3258532. Si hanc differentiam, vel quid minus addamus Arithmetico minori 400. 0020096. fiet Arithmeticus 453. 3278528. differentiaque inter Arithmeticos Geometrici 9900448. 8070000. & 9900000. 0000000. Cum autem sciamus Arithmeticum Geometrici 9900448. & cæt. qui est 100090. 4357360. si hac differentiam addamus fiet 100543. 7632988. vnde cum sit vltimus secundæ tabulæ ad sinum totum, vt quilibet primæ ad suum antecedentem erit quoque hæc differentia inter quoscumque Arithmeticos primæ tabulæ.

THEOR. VII. PROPOS. XVI.

Sicut decrescit, vel augescit quodlibet continuâ progressione Geometrica procedens quoad partes assignatas maiores; ita quoad singulas partes in infinitum minores augetur, vel decrescit.

PRobatur. Eo, quia cum se continuè eadem progressione moueat necessariò assignata quælibet pars motus, quæ mensuretur æquali portione temporis augescet, vel decrescet respectu alterius eodem æquali tempore mensurata, quod si quælibet alia pars Geometricè procedens mensuretur alia minori parte temporis, adhuc tamen in eadem proportione erit cum alia parte geometrica, quę eodẽ tempore mẽsuretur, quia cum totum Geometrica proportione semper eadem crescendo, vel decrescendo continuè se moueat singulæ eius partes assignabiles eadem proportionę inuicem correspondere debebunt cum sint omnes eiusdem rationis, & essentiæ. Ita si sit linea

V M T S X

A I C H D B

AB, quæ crescat continuè, & Geometricè, & augmẽtum mensuretur, à linea XV. æqualiter crescente, & Arithmetica, ita quod dum crescit Geometrica ab A in C illa Arithmetica crescat, ab V in T, & dum hæc se auget à C in D illa moueatur à T in S. Si sumatur VM in geometrica. eiq; correspondeat AI; secundę MT æquali correspondebit IH, quæ in proportione Geometrica erit cum AI, vt CD cum AC.

COROLLARIVM I.

HInc eruitur alius modus Arithmeticos reperiendi qui Geometricis applicari possint V. g. detur numerus Geometricus præcedens 9900448. 807. cuius notum habeamus Arithmeticum 10009. 4354360. cupimusque scire Arithmeticum 9900000. Iam scimus quot proportionales cadunt inter 9900448. & cæt. & proportionale eo immediatè minus 9890548. 359. nempe tot ex 12. prop. 8. Element. quot inter 10000000. & 9990000. nempe 10 tertij ordinis inter quos cadunt 10. quarti, & inter hos quoslibet 10 quinti ordinis, ita quod erunt 1000. proportionales. Quot ergo sunt proportionales Geometrici minores assignatij inter dictos Geometricos maiores, tot erunt partes æquales in differentia applicatorum ipsis Arithmeticorum, & quia illa differentia est 10009. 0438435. ideo si diuidatur per 1000. habebimus 10. &. 0090438. partem æqualem, qua semper augetur Arithmeticus, dũ Geometrici 1000. accrescunt inter vnum 9900448. & cæt. & inter 9890548 & cæt. Geometricos maiores.

Incipiamus itaque distribuere in suos proportionales progressionem. Sic; donec occurrat Geometricus, vel de quo quærimus, vel ei propinquus.

9900448 8070
990 0448

9890058 7522

Quia ergo iste primo eductus iam est minor eo, de quo quæritur, ideo non progrediemur amplius, sed cum debeat esse inter istos maiorem, & minorem, ideo ad hoc, vt illum inueniamus minutiorem instituemus progressionem sic.

7				
900448	80700 A		9900052	79650
99	00448		9	90005
9900349	80252	I	9900042	89645
99	00349		9	90004

9900050.

9900240	79903
99	00240
9900151	79650
99	00151
9900052	79509 B
99	00052
9899953	79457 C

2	9900032	99641
	9	90003
3	9900023	09638
	9	90002
4	9900013	19636
	9	90001
	9900003	29635

Erit itaque inter hos duos B, & C postremos cùm vnus sit maior alius minor 9900000. de quo quærimus, quare opporteret adhuc inter istos alios proportionales vltimos inuenire in eo ordine, in quo sunt proportionales quinti ordinis, sed isti non possunt esse plures, quam 52. iuxta numerum vnitatum, quę super 9900000. accrescunt in Geometrico E 9900052. vt patet ex quinta tabula. Quia, ergo inter A, & illum, de quo quærimus quatuor Geometrici intercluduntur, ideo quater accipiuntur partes Arithmeticæ superius inuentæ 10. 90438. & fient 40. 361752. qui si rursus multiplicetur per 10. ob proportionales interceptos inter quoslibet eorum minores eiusdem speciei, vt in quinto ordine fient 400. 3617520. cui si etiam addantur 52. vnitates, fient 452. cū fractis suis addendi Arith. 10009. & cęt.

Vel etiam meliùs accipiantur Arithmeticæ differentiæ iuxta singulos Geometricorum ordines, quia ergo inter primum Geometricum A, & de quo quæritur 9900000. nullus intercipitur Geometricus tertij ordinis, ideo nullus accipitur illius ordinis Arithmeticus, quia verò intercipiuntur 4. quarti, ideo quater accipitur Arithmetica differentia quarti 100 0005024. vt fiant 400 0020096. cui addimus Arithmeticum Geometrici 52. quinti ordinis 52. 0000052. & fit Arithmeticus quæsitus 452. 0020148. addendus Arith. 10009. &c. vt fiat Geometrici 9900000. de quo quærebatur.

COROLLARIVM I.

Notabis nostros numeros extremarum tabularum exijsse paulò maiores in Arithmeticis differentia proximè 2500. quàm quas composuit ipse Neperus. Ratio verò huius rei est, quia ipsi est primus tabulę primæ 100483. & cæt. nobis vero 100543. & cæt. quia ipse sumpsit aliquid minùs, quàm quòd differentia Geometrici dabat, nos quid maius ipsa eadem differentia sumpsimus, vtpote ad libitum, vt patet ex Coroll. propos. 15.

COROLLARIVM II.

Aduerte quoque Arithmeticos, non solùm crescere per numeros integros, sed etiam per fractiones, quòd in reperiendis illis, qui primis tabularum Geometricis applicantur necessariò fractiones essent admittendæ, quæ per continuam additionem deinde crescebāt in immensum. Vnde, spretæ ab initio, deinde magnum errorem poterant causare, incepit ergo crescere series Arithmetica, ne dum simplici vnitate, sed addita fractione 0000001. vt in illa fractione daretur locus, quo possint successiuè, & allæ, fractiones recipi, & continuè addi. Verùm hæ fractiones in tabula sinuum, seu absoluta Logarithmica contemnendæ, quò solùm deseruiant ad continuam earum additionem, ob quam successiuè in integros transeuut, quum singulę singulis in progrediendo adduntur.

EXPENSIO V.

De Logarithmis in tabulas sinuum transferendis.

Confectis omnibus tabulis, & ijs Logarithmorum serie instructis, vltimus labor postulat, vt illos in tabulas sinuum transferámus vnde fit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Logarithmos tabulis sinuum applicare vsq; ad sinum gr. 45. à sinu toto.

Datum sinum per tabulas supra positas logarithmis instructas quære, vel enim occurret prorsùs idem, vel non pluribus, quam 10. vnitatibus distans, si perduxisti tabulas vsque ad ordinem quintum; quòd, si vsque ad ordinem quartum differet 100. vnitatibus. Quære ergo in tabula sexta, quid vnitates illæ, quibus differūt isti duo Geometri exhibeāt in Arithmeticis, & hoc adde Arithmetico reperti proportionalis si fit minor subducito, si fit maior eo, qui in tabulis logarithmicis inuenitur, eritq; logarith. dati sinus.

V. g. datur sinus 7107995. requiro illum in tabulis proportionalibus, reperioque in tabula vltima tertij ordinis numerum proximum minorem 7107989. cuius logarithmus est 3415020. differtque Geometricus à dato 6. vnitatibus. Reperio itaque has vnitates in tabula sexti ordinis Geometrica, & dant mihi 4. vnitates correspondentes pro Arithmetico competente, quas addo logarithmo 3415029. fitque logarithmus 3415014. Sinus dati 7107995. fracti verò posthabendi, quia illi ad solam continuationem tabularum requirebantur.

Veritas verò huius operationis ostenditur ex propos. 15. Posset etiam reperiri ex Coroll. prop. 12. & ex Coroll. propos. 15. sed faciliùs per hanc, atque certiùs.

COROLLARIVM I.

Hinc omnes sinus vsque ad centum facillimè dantur per solam inspectionem Tabulę ordinis sexti. Nam cùm ibi proportionales sola vnitate decrescant quilibet occurret cum logarithmo addendo spretis fractis, vt modo non amplius necessarijs, cùm solùm ad condendas tabulas requirantur: sic sinus 9999995. reperies logarith. 7. Sic 9999905. reperies logarithmum 95. cum fracto 0000095. qui spernendus est.

COROLLARIVM II.

Reperies quoque sinuum aliorum logarithmos, qui cadunt in tabulam quinti ordinis, vel quarti sic. Dati sinus 9999105. reperitur proximus proportionalis in tabula prima quarti ordinis 9999100. quia ergo ille sinus est maior 5. vnitatibus, logarithmus 900. diminuendus vnitatibus 5. ex tabula sexti ordinis, sed quia adsunt fracti satis sensibiles vltra integros, ideo accipiendæ sunt 4. eritque logarithmus 896. vel 895. sinus 9999105. Eidemque logarithmo 35. vnitates ex tabula sexti ordinis addendæ, vt fiat logarithmus sinus sequentis 9999065. Sicque erit 930. logarithmus ipsius sequentis, & sic de omnibus alijs, vt vsus ipse ostendet.

Ita quoque fecimus in reperiendo logarithmo applicando sinui Gr.45. qui necessarius est ad reliquorum sinuum logarithmos inueniendos. Namque, cum sit sinus ille 7071068. erit inter proportionales primi ordinis 7105532. &c. & 7034477. & cæt. incepimus itaque proportionales secundi ordinis interponere, vt vides hic.

7105532	420	Logarith. 3418488
7105	532	
7098426	888	1
7091328	462	2
7084237	134	3
7077152	897	4
7070075	745	

Est ergo sinus quæsitus inter hunc vltimum, & penultimum: quare inter iaciemus proportiona- tertij ordinis. sic

7077152	8970	
707	7152	
7076445	1818	1
7075737	5373	2
7075029	95,6	3
7074322	4607	4
7073615	0285	5
7072907	6670	6
7072200	3763	7
7071493	1563	8

Deinde alij proportionales quarti ordinis interponendi quales sunt.

7071493	15630	
70	71493	
7071422	44137	1
7071351	72715	2
7071281	01364	3
7071210	30083	4
7071139	58873	5
7071068	87734	6

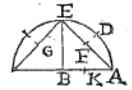
Hic ergo vltimus est valdè propinquus, & differt solum fractis à sinu dato. Accipiamus ergo logarithmos conuenientes ordinis primi proportionali, qui est 3418488. 8721596. deinde ex prima tabula secundi ordinis accipiemus quarti proportionalis logarithmum 40036. 1753740. deinde ex prima tertij accipiemus octaui Geometrici logarithmum 8003. 6301936. tandem ex prima tabula quarti ordinis accipiemus sexti Geometrici logarithmū iuxta.n. interpositorū log. 597. 0029847. & omnes in vnam summam redigemus, eritque logarith. sinus Gr. 45. nimirum 3467125 $\frac{1}{2}$. abiectis omnibus fractis.

Præassumptum. Quia vsque ad dimidium tabulę sinuū tabulas proportionales logarithmicasq; ordinauimus. Modo quomodo reliquis sinubus logarithmi applicandi inueniantur docendum est; & hoc non, quia vsque ad vltimum sinum deduci non possent, sed solum ad laborem leuandum. Ad id verò est necessarius logarithmus dimidij sinus totius. Vnde quomodo reperiatur, tradendum est.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Sinus 45. Graduum est medium proportionale inter sinum totum, & dimidium sinus totius.

Supra probauimus propos. 18. expens. 3. cùm ageremus de sinibus inueniendis; quòd dimidium sinus totius AK se habet ad sinum dimidij alicuius arcus EA, vt sinus complementi illius dimidij EG ad sinum totius arcus BE; sed sinus 45. Grad. est æqualis suo complemento, & sinus arcus dupli ipsius est sinus totus; ergo ita se habet AK



dimidium sinus totius ad EF sinum 45. Grad. vt eius, & illi æquale complementum EG ad sinum dupli arcus EB, qui est sinus totus, & consequenter EF, & EG æquales sunt medium inter AK dimidium sinus totius, & BE sinum totum, & ideo si ex eis fiat quadratum illud erit æquale rectangulo ex sinu toto, & dimidio eius facto ex propos. 19. lib. 6. element.

COROLLARIVM.

Hinc est, quòd cùm exp. 1. huius tract. propos. 6. & 4. duplatio Arith. æquiualeat quadrationi, & propos. 3. subductio diuisioni. Si logarithmus sinus 45. gr. dupletur, & ab eo duplato subducatur logarith. sinus totius, qui est 0. relinquetur dimidij sinus totius Arithmeticus, & quia supra reperimus Arithmeticum 45. Grad esse 3467125 $\frac{1}{2}$, si dupletur erit 6934251. & subducatur 0. silicet nihil ab eo auferatur, erit idem logarithmus sinus dimidij nempe sinus 5000000.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Dato logarithmo dimidij ſinus totius, & ſinus maioris arcus, quam Gr.45. cum complemento eius dimidij, reperire dimidij arcus, vel ſinus logarithmum.

PRæſupponitur, quòd ſint appoſiti omnibus ſinibus ſui logarithmi à 90. vſque ad grad.45. & ſint alij, quærendi minores dimidio, & conſequenter minores, quám ſinus Gr. 45. Vnde, & eorum complementum erit cognitum, cùm arcus, qui quæritur ſit minor, quam gr.45. eius complementum erit ſinus arcus maioris, quam Gr. 45. & conſequenter eius logarithmus erit notus. Addantur itaque ſimul arcus dati logarithmus, & dimidij ſinus totius, & à ſumma auferatur logarithmus ſinus complementi dimidij ipſius arcus, & reſiduum erit logarithmus ipſius dimidij.

Probatur autem ex propoſ.15. Expenſ.8. de ſinubus. Nam dimidium ſinus totius ſe habet ad ſinum alicuius arcus, vt ſinus complementi ſe habet ad ſinum dupli arcus. Vnde rectangulum ex medijs ex propoſ.18. Elem. erit æquale rectangulo ex extremis, & ſic in geometricis ſi multiplicentur ſimul extrema, nempe dimidium ſinus, & ſinus dupli arcus, & diuidantur per complementi ſinum, dabit reſiduum ſinum dimidij arcus. vt ibi diximus; ſed vt propoſ.1. expenſ.1. h. diximus in Arithmeticis aggregatio æquiualet multiplicationi, & ex prop.3. ſubductio diuiſioni, ergo aggregatus logarithmus dimidij ſinus, cum logarithmo totius arcus æquiualebit eorundem Geometricæ multiplicationi, & ſubductus logarithmus complementi æquiualebit diuiſioni factæ per eiuſdem ſinum, & conſequenter reſiduum ex ſubtractione logarithmica erit logarithmus dimidij arcus. Exemplum verò tale eſt.

Sit Logarithmus Gr. 45. m. 15. ex tabula tertij ordinis 3415023. complementum dimidij huius arcus eſt Gr. 67. m. 22 $\frac{1}{2}$ cuius logarith. ex tabula prima per regulas proximè traditas repertus eſt 801930. logarithmus verò dimidij ſinus totius eſt, vt ſupra 6934251. Addo itaque hunc dimidij ſinus totius logarithmum logarithmo ſinus arcus dati 3515023. fitque ſumma 10349274. à quo ſubduco logarithmum complementi, remanetque logarith. 9547344. ſinus dimidij arcus 22. 37 $\frac{1}{2}$.

COROLLARIVM.

HInc datis omnibus logarithmis ſinuum arcuum maiorum, quam grad. 45. obtinere poteris omnes logarithmos ſinuum arcuum vſque ad 22 $\frac{1}{2}$ Gr decreſcentium, & iſtis datis obtinebis logarith. arcuum vſque ad 11. Gr. & m. 15. & ex iſtis rurſus omnium arcuum logarithmos vſque ad gr.5. m.38. & tandem vſq; ad primum prorſùs minutum.

EXPENSIO VI.

De Tabulis ordinandis, & Logarithmis tangentium addendis.

PRæceptum 1. In qualibet paginæ faciæ 9. columnæ, ſeu arulæ oblongæ diſtinguantur lineis tali, tum longitudine, tùm latitudine, vt commodè numeros capere poſſint inſcribendos, ita quod 61. verſus, ſeu lineas numerorum ſecundum longitudinem ſingulæ comprehendant, & latæ, vt 8. numeros capere poſſint, & ſi de tangentibus agitur vſque ad 11. exceptis prima ſiniſtra, & vltima dextra, quæ duos tantum numeros ſua latitudine capere debent, lineamentiſque tranſuerſis decem ad maiorem diſtinctionem decuſſentur.

Præceptum 2. Primæ columnæ ſiniſtrę G. cum numero graduum, & m. pro indicio minutorum ſuper ſcribendus; perque totam longitudinē incipiendo à 0. & deſcendendo vſque ad 60 numeri incluſiuè excreſcētes notādi. Nonę verò columnæ dextræ nihil ſupra ſcribendum, ſed incipiendum à 60. & decreſcentibus numeris perueniendum vſque ad 0. incluſiuè, & tandem numerus 89. & hæc de prima, & ſecunda facie paginæ primæ; cæteræ verò ſucceſſiuè habebunt Gr.1. & 88. ſic Gr.2. & 87. & in reliquis hoc ordine eſt procedendum.

Præceptum 3. Secunda verò columna ſiniſtra continebit ſinus illorum minutorum, qui in prima continentur, ſicut, & dextra octaua ſinus illorum, qui nona columna extenduntur, & conſequenter Graduum, qui ſupra ſcripti ſunt primæ, & infraſcripti nonæ. Hos autē ſinus, vel repertos habebis ex tractatu de ſinubus, vel deduces ex tabulis ſinuum vulgaribus, vt Reinholdi, &c.

Iſtis autem ſinibus dextris applicabis logarithmos repertos vt ſupra ex Coroll. propoſ.16. primo, & ſecundo, & hi occupabunt 7. dextram columnam. Siniſtris verò ſinibus applicabis logarithmos repertos ex propoſ.19. & iſti extendentur per totam columnā ſiniſtram tertiam, ſexta verò, & 4. inſcribendæ ſunt tangentes, & tandem 5. & media remanente differentiales numeri ſcribendi ſunt, qui pro tangentibus apponuntur, Oriūtur autem iſti à ſubductione logarithmorum ſextæ columnæ, à logarithmis tertiæ, & id quod remanet à ſubtractione inter vtraſque tangentes hac media columna ſcribendum.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Primæ Nonæque columnæ Gradus, & minuta ſibi ſunt inuicem arcus, & complementa.

PRobatur. Nam cum illa prima incipiat à 0. creſcendo iſta à 60. minutis ſuper 89. fit, vt quantùm creſcit illa prima, tantùm decreſcat nona, & conſequenter, quòd huic tot minuta, ſeu gradus defficiant, quot primę aucti ſunt, & è contra. Quare ſimul additi alter alterius complebit numerum, vt fiant 90. Gr. & ſic erunt ſibi inuicem complementa.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

In prima columna continetur angulus acutus rectanguli minor; in nona dextra angulus acutus eiuſdem maior.

PRobatur. Nam ex propoſ.17. lib.1. element. omnis rectanguli anguli omnes duobus rectis ſunt æquales, qui cū ſit vnus in rectāgulo rectus, alij duo ſimul erunt vni recto æquales; Vnde alter angulus alterius complementum erit, vt ſunt arcus, qui prima, nonaque columna continentur, vt dictum eſt propoſ.20.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Secunda Columna continentur crura minonora minores angulos ſubtendentia: in octaua verò crura maiora maiores angulos ſubtendentia.

PAtet, quia in ſecunda minorum angulorum, & arcuum ſinus continentur, ſicut in ſexta ſinus arcuum maiorum, & angulorum.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quod ex ſinu dextro octauæ columnæ, & ſiniſtro ſecundæ, & ſinu toto rectangulum triangulum componatur.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Logarithmi tertiæ columnæ ſunt Logarithmi proportionis cruris minoris rectanguli ad eius baſim, ſeu Hypothenuſam, ſicut, & logarithmi ſeptimæ ſunt logarithmi proportionis cruris maioris ad eandem Hypothenuſam. Suntque ſibi inuicem antilogarithmi nempe complementorum logarithmi.

PRobatur prima pars. Nam proportio quam habent crura cum baſi tunc innoteſcit cum baſis per crura diuiditur, ita proportio 5000000. ſinus Gr. 30 eſt ad ſinum totum 1000000. vt 1. ad 2. quia diuiſus ſinus totus per crus 5000000. dat 2. Sed ex dictis propoſ. ſubductio in logarithmis ęquiualet diuiſioni: Ergo logarithmus cruris ſubductus à logarithmo ſinus totius dabit logarithmum proportionis cruris cum ſinu toto: Sed logarithmus ſinus totius eſt 0. Ergo ſubductus relinquit numerū, vt erat, & ita ne dum eſt logarithmus ſinus: ſed etiam proportionis eiuſdem ſinus cum ſinu toto.

Probatur ſecunda pars. Quia ſinus, quibus applicati ſunt, ſibi dextrorſum, & læuorſum correſpondentes ſunt ſibi inuicem complementa. Ergo, & logarithmi ipſorum ſibi inuicem ſunt antilogarithmi.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Tangentium, & ſecantium, quæ ſupra ſinum totum excreſcunt logarithmi infra 0. intelligendi; ita quod ſint minores nihilo tot vnitatibus, quot ſunt in ipſo logarithmo.

PRobatur. Nam cum à 0. creſcant logarithmi noſtri, dum à ſinu toto ipſi ſinus decreſcunt neceſſe eſt, quòd ſi dentur aliquæ lineæ, vt ſunt Tangentes arcuum maiorum, quam 45. Gr. & omnes ſecantes, quę creſcunt vltra ſinum totum, quòd illarum logarithmi vltra 0. decreſcant.

COROLLARIVM.

VNde logarithmi poſſunt ſumi, & vt defectiui, & vt abūdantes. Abundantes erunt, ſi intelligantur creſcere ſupra 0. vt vſque nunc fecimus: defectiui verò ſi infra 0. decreſcere intelligantur, & taliter aliquos intelligere erit neceſſe, ſi tangentibus, & ſecantibus eos applicare voluerimus, quæ vltra ſinum totum excreſcunt.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si Logarithmos tertiæ columnæ ſiniſtræ, & ſeptimæ dextræ, vt defectiuos conſiderauerimus erunt logarithmi Hypothenuſarum, ſeu ſecantium Arcuum, quibus ſunt complementa, & Anthilogarithmi.

Sic logarithmi ſinuum arcuum dextrorum fient logarithmi ſecantium ſiniſtrorum arcuum, & è contra.

PRobatur. Nam propoſ.18 Tr.20. de ſinubus probauimus ſinum totum eſſe medium proportionale inter complementum arcus, & ſecantem eiuſdem arcus, & ideo, quòd multiplicatus in ſe, & diuiſus per complementum daret arcus illius ſecantem: ſed quia in logarithmis additio ęquiualet multiplicationi, & ſubductio diuiſioni, ideo ſi 0. logarithmus; ſinus totius addatur ipſi 0 & ab hac ſumma ſubducatur logarithmus complementi arcus V. g. logarithmus arcus dexteri, relinquetur idem logarithmus minus, quam 0. ſecans arcus ſiniſtri; cui arcus dexter eſt complementum. Erunt verò logarithmi conſiderandi, vt infra 0. deficientes; quòd omnis ſecans ſuper ſinum totum excreſcat, vt modò diximus.

THEOR. IX. PROPOS. XXVI.

Differentiales mediæ columnæ ſunt logarithmi proportionis cruris maioris reſpectu minoris, & logarithmi ſæcundarum, ſeu tangentium, tum arcuum dextrorum, tum ſiniſtrorum, ſub diuerſa tamen conſideratione. Nam vt abundantes ſunt differentiales, logarithmique tangentium arcuum ſiniſtrorum minorum Gr 45. at vt defectiui ſunt logarithmi tangentium arcuum dextrorum maiorum gr. 45.

PRob. ſecunda pars. Nam ex prop. 16. tract. 20. habemus, quòd eadem proportio eſt ſinus cõplementi ad ſinum arcus; quam ſinus totius ad tangentem. & ideo, quod multiplicatus ſinus totus per ſinum arcus, & diuiſus per ſinum complementi, exhibeat tangentem arcus; vel è contra multiplicatus per ſinum complementi, & diuiſus per ſinum arcus exhibeat tangentem complementi. Sed in Arithmeticis ex propoſ. 1. & 3. huius, additio ęquiualet multiplicationi, & ſubtractio diuiſioni; Ergo ſi logarithmus ſinus alicuius arcus addatur logarithmo ſinus totius, qui eſt o. & ideo remaneat, vt erat ante, & ſubducatur ab eo logarithmus ſinus complementi dabitur tangens arcus, & ſi ſubducatur ab eo ſinus arcus dabitur tangens complementi, ideo eædem differentiæ erunt, & logarithmi arcuum, & logarithmi complementorum, arcuum quidem, vt abundantes, & quatenùs logarithmi ſinuum maiorum, quam Gr. 45. ſubducuntur à ſinuum minorum maioribus logarithmis, vt relinquatur tangentis logarithmus; complementorum verò quatenus defectiuæ, & logarithmi maiores ſinuum minorum, quam 45. Gr. ſubducuntur à minoribus logarithmis maiorum ſinuum, vt relinquatur tangẽtis logarithmus. Maiores verò numeri à minoribus ſubducuntur per intellectum; quatenus intelligitur minori tot vnitates deficere, quot ſufficiunt ad hoc, vt ſubduci poſſit; ita 15. ſubducitur à 4. cum intelligitur illi 4. vnitates 11. deficere, quas ſi haberet 4. à 15. poſſet ſubtrahi, cùm tunc eſſet iunctus cum 11; & 4. & 11. faciunt 15. numerus verò 15. à 15. ſubduci poteſt, & ideo differentię logarithmicæ ſumptæ, vt deficiẽtes. & vt à minoribus logarith licet maiores poſſunt ſubduci; ſunt illæ ipſæ, quas dant minores logarithmi à maioribus ſubducti. Sicut 11. eſt eadem differentia, quam dat numerus 4 ſubductus à 15. & quam dat 15. ſubductus per intellectum à numero 4.

Probatur prima pars, quod differentiales ſint quoque logarithmi proportionis crurum: Nam tunc proportio vnius cruris ad aliud obtinetur, cùm crus minus diuidit maius. Quotiens enim eſt denominator proportionis: Sed in logarithmis deductio æquiualet diuiſioni, & differentiales numeri ſunt orti à ſubductione logarithmorum minoris cruris à maioris cruris logarithmis. Ergo ſunt logarithmi illi numeri differentiales proportionis vnius cruris ad aliud.

COROLLARIVM.

COllige, quod ſi tangentium logarithmis vtaris in exercenda regula proportionum, & iubeat, tãgentis logarithmũ debere demi, vel addi, ſi addit ſignũ † hoc, quod ſignificat logarithmum tangentis debere ſumi, vt abundãtem, tunc obediendum eſt; & cum præcipit regula, quòd ſubducatur logaritmus tangentis; vel addatur; ſi ſigno defectiuo hoc – in tabulis notetur, è contra faciendum.

Logarith.

1 Sinuum G. 45. vſq; ad 90.	2 Tangentium	3 Sinuum G. ab 1. vſq; ad 45.
0	80	90
4	72	76
8	64	68
12	56	68
16	48	64
20	40	60
24	32	59
28	24	52
32	19	48
39	8	44
40	0	40

Quod concipies à ſerie numerorum logarithmicorum hic appoſita, qui imitantur logarithmos ſinuum, atque tangentium in ſuo progreſſu.

Series itaque prima cogitetur, tanquam ſi eſſent logarithmi minores ſinuum arcuum maiorum, quàm 45. Graduum; Secunda ſint differentiæ, & tanquam tangentium logarithmi habeantur; Tertia putentur tanquam logarithmi ſinuum arcuum minorum, quàm 45. gr. quia ſunt maiores Arithmeticis primæ ſeriei.

Quia itaq; tangens eſt ad ſinum totum, vt ſinus arcus ad ſinum complementi: differentialis tangentis maiorum arcuum, quàm 45. Gr. & conſequenter maior ſinu toto, diuidet logarithmum ſinus totius o. & logarithmum arcus maioris, quam 45. Grad. aggregatos, & prodet logarithmum arcus minoris, quam 45. Gr. V. g. arcus logarith. 24. diuiſus per differentialem 40. daret logarithmum deſideratum; ſed quia differentialis 40. eſt defectiua reſpectu logarith. 24. ideo addenda eſt, & fiet 64. logarithmus arcus minoris, quàm Gr. 45.

At ſi tangens ſit minor ſinu toto; etiã ſinus quæſitus erit minor dato; Vnde logarithmus V. g. 94. additus ſinui toti, & minutus differentiali 32. dat logarithmum arcus maioris pariter 32. quia ſ. hic differentialis 32. conſideratur, vt abundans. Vides itaque, quod quando deſideratur logarith. ſinus minoris arcus, quam Gr. 45. differentialis, quæ debebat addi ſubducitur, at quando deſideratur ſinus arcus maioris, quàm gr. 45. logarithmus differentialis, quę debebat addi, etiam additur. Quia ſi 24. cum differentiali 32. minorem nihilo, facit 56. qui æquat ipſum 56. maiorem nihilo. Ergo 28. cum 32. facit 60. ob additam differentiam 4. quam addit 28. numero 24. & ſic 32. cum 32. facit 64. & ſic 36. cum 32. facit 68. & cæt. quare additã differentialis logarithmo minori conſtituet maiorem, ſicut ablata minorem logarithmum cum tamen iuxta regulam ſemper deberet ſubduci, niſi differentiales deficerent, & inciperent contrario

trario modo à o. creſcendo dum ſinus deficiunt.

Itaque collige regulam Generalem, quod in defectiuis addendis cum abundãtibus, ſeu logarithmis ſinuum, qui omnes ſunt abundantes, cum differentialibus, ſeu in logaritgmis ſinuum. ſed vt ſecantium ſumptis, & ideo omnibus defectiuis, addere idem eſt, ac ſubducere.

In defectiuis verò ab abundantibus ſubducendis, vel è contra, ſubducere idem eſt, quod addere. Quia ſilicet ſubducendo acquiritur id, quod addendo eſſet conſequendum, vel addendo id inuenitur, quod ſubtrahendo debuiſſet reperiri.

EXPENSIO VII.

De Logarithmis numerorum abſolutorum.

CVm ex applicatione logarithmorum ſinubus arcuum facilitas ſingularis in regula proportionum tractanda emerſerit, cùm ad inuẽtionem ipſorum ſinuum adhiberetur. Excogitauerè Authores numeris quoque abſolutis, & naturali propagatione creſcentibus logarithmos addere, vt ipſa regula aurea ſimili facilitate conſtaret in numeris abſolutis aſſumpta; quod etiam inuentum ab ipſo Nepero innuitur, ſed obſcuriſſimè, expoſuit tamen, vtcumque Henricus Briggius; ſed fęliciùs operi mandauit in ſuis Chiliadibus, quæ ab 1. vſq; ad 100000. excreſcunt naturali augmento.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

In ſerie numerorum ab vnitate continuè proportionalium, ſi numerus quilibet alterum multiplicet. Eius logarithmus erit aggregatum logorithmorum ipſis multiplicantibus ſe inuicem, applicatorum naturali ordine progredientium.

SInt proportionales ab vnitate numeri in ſeriẽ diſpoſiti 1. 2. 4. 8. & cæt. & eorum logarithmi naturali ordine propagati 1. 2. 3. 4. & cæt. Dico, quòd ſi aliquis V. g. 2. multiplicet aliquẽ alium nempe 16. & faciat 32. huius facti logarithmum eſſe aggregatum logarithmi duorum numerorum ſe multiplicantiũ idest, logar. 1. & 4. nimirum 5. Sic ſi 4. multiplicet 32. & faciat 128 logarithmus huius numeri 128 erit aggregatũ logarithmi 2. & logarithmi 5. applicatorũ numero 4. & 32. quod aggregatum eſt 7.

Propor.	Log.
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

Probatur ex dictis prop. 1. huius.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Si aliquoties numerus aliquis in ſe, & in productum multiplicetur, & vltimum productum diuidatur, genitos excedent quoti ipſi ſolâ vnitate; addito verò primo termino æquabuntur.

PRobatur. Sit 1204. factus ex multiplicatione 1024
2. in ſe, & in productos ſucceſſiuè, erunt geniti 9. at ſi diuidatur ſucceſſiuè per 2. Quoti erunt ijdem vtique V. g. 512. poſtea 256. & cæt. vſque ad 2. ſed 2. inſuper capit in ſe ſemel; Ergo Quoti vnica vnitate vices multiplicationum excedent: at ſi genitis addamus latus, & primam radicem 2. erunt æquales.

Mult.		Quot.
2		1
4	1	2
8	2	3
16	3	4
32	4	5
64	5	6
128	6	7
256	7	8
512	8	9
1024	9	10

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

Numeri diuiſi per 10. quoties fieri poteſt, quoti tot erunt numero, quot ipſæ figuræ vna dempta ad dextram.

SIt numerus quilibet 1679087. diuidendus per numerum 10. primus quotus erit 167908. ſecundus erit 16790. tertius erit 1679. quartus erit 167. quintus erit 16. ſextus erit 1. ipſæ verò figuræ vna dempta ſex reſtant.

* Probatur. Quià tot erunt decimæ, & decimę decimarum, & cæt. ex propoſ. 1. tract. 8. quot ſunt loca excepto vltimo loco ad dextram, qui eſt vnitatum locus: Si ergo quilibet numerus V. g. millio per 10. diuidatur habebimus centeſimas millium, vel vnam, vel 2. vel 4. & cæt. vſque ad 9. quæ ſi diuidentur per 10. vel duas, vel tres vſq; ad 9. dabũt decimas millium, quæ ſi diuidentur per 10. dabunt vnitates millium, ideſt decimas centeſimarum, vel 1. vel 2. vel 3. vſque ad nouem; & ſi rurſus diuidantur, exhibebunt decimas decimarum, & tandem vnitatum decimas. Itaque diuiſio per 10. reddit eundem numerum ad locum inferiorem proportionẽ ſignificantẽ per decimas ab vnitate creſcẽtẽ: Quare cũ vltima figura ad dextram, iam decimas non ſignificet, diuidi nequit: Vnde quotus ex diuiſione 10. in vltima figura haberi non poterit: Quadere tot erunt quoti ſi diuidatur numerus aliquis per 10. quot erunt figurę vltima dempta.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Quot ſunt notæ in vno quoque factore, tot erunt in facto, & aliquando vna minus.

SInt multiplicatores 234. & 845. qui inuicem ſe multiplicent, factus erit 197730. nempe totidem figuris, quot ſunt in multiplicatoribus vnitates; at 234. multiplicet 145 genitus erit 24930. nempe minutus vnica figura, ex eo numero figurarum, quo vterque multiplicatus, & generans conſtat.

Pro-

* Probatur ex regula multiplicationum tradita prop.14.& 15.tract.8. Nam vltimã sinistra figura B multiplicãs possint numerũ productum vnitates significantem tertio loco, vt in A. Vel ergo genitus ex dextro vltimæ figuræ sinistræ B facit 3. aut ad summùm 4. figuras, vt diximus; si tres facit additis duobus locis CD faciũt quinque; si quatuor additis duobus locis CD, sunt sex: Ergo tot figuræ erunt in genito, quot in vtroque generante, vel tantùm minùs vna.

	234
B	145
	1170
	936
ACD	234
	0

THEOR. V. PROPOS. XXXI.

Si series aliqua producatur numerorum duorum ab vnitate continuè proportionalium donec logarithmum vltimus terminus consequatur, qui ab vtriusque logarithmorum multiplicatione gignitur; Is terminus erit, tum vnius, tum alterius datorum ab vnitate continuè proportionalium terminus.

D	A	B	C	K
0	1	0	0	0
	2	1		3
	4	2		6
	D 8	3	1	9
	16	4		12
1	E 32	5		15
	L 64	6	2	18
	128	7		21
	256	8		24
	512	9	3	27
2	1024	10		30
	2048	11		33
	4096	12	4	36
	8192	13		39
	16384	14		42
P 3	32768	15	5	45

Sit series numerorum A in qua dati sint duo numeri 8.& 32. quorum logarithmi 3.& 5. multiplicentur inuicem,& fiant 15. producatur verò series vsq; ad 15. terminos ab vnitate.

Dico, quod vltimus terminus 32768. est terminus communis proportionalium datorum numerorũ; si ab vnitate excrescant. V.g. si statuatur primus D 8 ab vnitate, & ratio 1. ad 8. in seriem cõtinuetur terminus erit prædictus 32768. & si statuatur qnoque primus terminus ab vnitate E 32. & secundùm eam proportionem, quam possidet 1. ad 32. series continuetur, illius seriei quoque terminus erit prædictus 32768. cuius logarithmus 15.

* Probatur. Inter D, & vnitates tres mediant proportionales: Ergo, si 1. ponatur ad 8. ita 8. ad aliud L64. inter 8. & 64. tres proportionales interferentur ex prop. 9. lib. 8. & sic de alijs. Ergo si proportio quinquies repetatur, & producatur vltimus terminus erũt hunc inter vltimũ,& vnitatem 15. termini virtualiter interpositi, idest poterunt interponi, & numeris exarari eiusdem proportionis, quæ est 1. ad 2. cùm proportio 1. ad 8. quæ quinquies repetitur, sit proportio 1. ad 2. ter repetita; Ergo vltimus terminus erit idem, ac prædictus 32768. siquidẽ est iste decimus quintus terminus progressionis proportionis 1. ad 2.

Rursus sit alter terminus primus ab vnitate E 32. & fiat, vt 1. ad 32. ita 32. ad aliud P, & proportio producatur, & extendatur in seriem, quia ergo inter 1. & 32. quinque termini mediant, etiam inter 32. & tertium P quinque termini interponentur, si ergo fiant ex istis tres termini virtualiter erunt 15. quia inter 1, & 32. est proportio 1. ad 2. quinquies repetita; vnde inter vnitatem, & tertium terminum inuentum erit proportio 1. ad 2. quindecies repetita: sed etiam 32768. habet proportionem 1. ad 2. quindecies repetitam, ergo iste erit tertius terminus proportionis 1. ad 32. sed etiam erat quintus terminus proportionis 1. ad 8. ergo est terminus communis harum proportionum.

COROLLARIVM.

Hinc enascitur, quòd duorum numerorum in aliqua serie eiusdem proportionis, sed tamen diuersimodè repetitæ existentium, enascitur inquam, quod quotorum numerus reciprocè sit proportionalis numero logarithmorum; ita numerus E 32. quoti, quibus diuidit 32786. sunt 3, logarithmi verò 5. at numeri D logarithmus est 3. numerus verò quotorum; quibus diuidit eundem numerum 32786. est 5. Quare in numero E 32. vt est quotorum numerus ad logarithmorum numerum, idest vt 3. ad 5. sic in numero D 8. est logarithmorum numerus ad quotos; nempe vt 3. ad 5. quod si adhibeas alios logarithmus vt K, idem erit nempe, vt 9. ad 15. idest vt 3. ad 5.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Datis duobus numeris in eadem continuè proportionalium serie positis vnà cum logarithmo naturali vnius, exquirere logarithmum naturalem alterius.

Vocamus logarithmos naturales, qui naturali augmento per vnitates propagantur, vt 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. & cæt.

Sint itaque in præcedenti serie dati duo numeri V.g. 8. & 32. deturque huius logarithmus 5. sitq; exquirendus logarithmus numeri 8. fiat per multiplicationem numeri 8. in se, & in productum toties aliquis numerus, donec geniti in numero æquent logarithmum 5. & sint 5. Sitque vltimus productus 32768. ex prop. præc. hic numerus erit æqualis numero illi, qui fieret ex multiplicatione 32. in se, & in factos, qui tot erunt, quot logarithmi naturales numero 8. ascribendi; quia ita est est Coroll. numerus quotorum termini 32. quibus diuidit vltimum genitum ad logarithmos naturales suos, vt logarithmi numeri 8. ad quotos suos, quibus eũdem vltimum genitum diuidit. Si ergo reperiamus quotos, quibus 32. diuidit vltimum terminũ suum 32768. qui erunt tres habebimus quoque logarithmum ipsius 8. nempe 3, qui debet ascribi in serie prima in qua etiam est logarithmus exhibitus numeri 32. quæ est præced. propositionis series.

1	0	1	0
32	1	8	1
		64	2
1024	2	512	3
		4096	4
32768	3	32768	5

PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duobus numeris, quibuscumque, & alterius logarithmo ad libitum ei applicato alterius logarithmum exquirere.

Sint numeri dati 2. & 10. & huius logarithmus statuatur 100. quæraturq; logarithmus ipsius 2. Primus 2. itaq; se ipsum multiplicet, & genitũ successiuè, vt multiplicationum numerus deficiat solùm vnica vnitate à dato secundi 10. logarithmo, qui logarithmus est 100. ideo sint 99. se cum ipso sint 100. Diuidaturq; rursùs quoties fieri potest, & ex propos. 28. quoti erunt 100. quia numerus in se ipsum ductus, si rursus diuidatur faciet numerum quotorum æqualem numero genitorum & vnum quotum supra adiunget, vel æqualem genitis addito primo generante. Numerus itaque vltimo genitus, cuius quoti æquãt logarithmũ 100. n 10. est ille, qui si per 10. diuidatur, quoties fieri potest, ex præc. quoti eius dabũt logarithmum n. 2.

Sed, quia ille numerus ob maximam suam multitudinem haberi laboriosè potest. Siquidem cresceit vltra omnem existimationem, poterimus absque eius cognitione habere numerum quotorum, quem quærimus, abque eo, quod eum noscamus, & successiuè diuidamus. Nam cùm numerus quotorum, quando diuisor est 10. sit idem, ac figurarum multitudo vnâ solum demptâ ad dextram ex propos. 32. hinc est, quòd satis erit noscere figurarum numerum, quæ terminum vltimum ex 100. multiplicationibus numeri 2. genitũ componunt, quod ad hoc, vt consequamur breuiùs, & faciliùs, quam fieri possit fit.

PROBL. III. PROPOS. XXXIV.

Numerum notarum, & figurarum in vnaquaque multiplicatione obtinere, abq; totali omnium figurarum multiplicatione.

Fiet id multiplicando solùm tres, aut quatuor, aut quinque figuras ad sinistram, quę nec cum toto numero multiplicentur; sed solum cum duabus, vel tribus V.g. sit numerus 2345. multiplicandus in se ad cognoscẽdum numerum ipsum, vt docuimus tract. 8. propos. 17. ita stabit multiplicatio.

$$
\begin{array}{r}
2345 \\
2345 \\
\hline
11725 \\
9380 \\
7035 \\
4690 \\
\hline
5499025
\end{array}
$$

Figuræque singulæ cum singulis numeri diuidendi erunt multiplicatæ.

Sed ad agnoscendum tantùm loca sufficiet multiplicare in hoc numero duas extremas figuras, quia ex propos. 27. huius, quot sunt notæ in vno quoque factore, tot erunt notæ, & figuræ in genito aliquando vna dempta. Vnde, vt sciamus, quando ea demenda est, vel addenda vltimę figurę vel duarũ tantùm multiplicatio erit necessaria, aut ad summũ quinq; Siquidẽ aliç differentię, quæ ex aliarũ figurarũ versùs dextrã multiplicatione exoriũtur vltimũ numerum non augent, cùm ex propos. 14 tract. 8. non nisi decimæ possint transferi, vel vna, vel duæ vsque ad nouem. Quare oportebit ad summum habere cognitionem quinq; vltimorum numerorum ad hoc vt cognoscamus, an translatio ad summam 9. decimarum in magnis ad sinistram numeris vltimam notam possit augere; ideoque in prædicto numero sufficiet multiplicatio numeri sinistri 2. & 3. & quia ex prop. 15. tract. 8. scimus numeros harum notarum ad tertium locum, & quartum pertinere, idest sic, vt vides in exemplo stabit multiplicatio.

$$
\begin{array}{r}
2345 \\
2345 \\
\hline
6900 \\
4690 \\
\hline
5380000
\end{array}
$$

Vbi 3. neque per totum numerum, eiusque omnes notas multiplicauimus, sed solum duas extremas, & licet non præbeant eundem numerum, sed minorem; præbent tamen eundem numerum notarum, vt priùs, quæ sunt 7. Et licet in numerorũ tessera, vbi notæ significãt minores numeros, neque multiplicatio vlla esset adhibenda, oportet tamen multiplicare saltem duas, vel tres vltimas, vt deinde successiuè numerus aliarum figurarum possit haberi, quæ continua duplicatione inueniendæ sunt.

PROBL. III. PROPOS. XXXV.

Notarum numerum multis intermissis proportionalibus inuenire.

Sit numerus 2. cuius notæ inueniendæ sint, quæ in vltimo per centum multiplicationes propagato termino inueniuntur, si id fiat continua multiplicatione laboriosa res est, quare ita instituemus multiplicationem.

Ducatur binarius in se; & fiant 4 deinde 4. in se, & fiant 16. deinde 16. in se, & fiant 256. erunt autem horũ logarithmi, ipsius binarij 1. & quia 4. est ipsius quadratum ex propos. 6. huius, eius logarithmus erit 2. Sic, quia 16. est quadratum ipsius 4 eius logarithmus erit duplum ipsius 2. nempe 4. & quia 256. est quadratum numeri 16. ideo eius logarithmus erit 8. sed, si volumus peruenire ad 10. multiplicetur primus numerus 4. cum hoc vltimo 256. & producetur numerus 1024. cuius logarithmus naturalis erit aggregatum logarithmi 2. applicati proportionali 4. & logarithmi 8 applicati proportionali 256. Vnde logarithmus erit 10 ostendens iam virtualiter per has 4. multicationes esse completas multiplicationes decem virtualiter, & licet inter 2. & 1024. nõ sint interpositæ actu, intermediant, tamen virtualiter, & potuissent describi. Sic autem instituendus alius ordo; nam numerus 1024. in se multiplicatus dabit numerum primum, cuius logarithmus naturalis erit 20. & hic primus in se multiplicatus numerum

merum ſecundum, cuius logarithmus erit 40. & hic ſecundus in ſe multiplicatus dabit alium numerum tertium, cuius logarithmus erit 80. & tandem hic cum primo multiplicatus exhibebit numerum, cuius index erit conflatus ex ſumma logarithmi primo, & tertio applicati, nempe 20. & 80. Vnde erit 100. ſignificabitque vltimum numerum productum continere multiplicationes 100. numeri 2. Veruntamen iuxta præced. prop. non quærimus hic ipſum numerum; ſed ſolum notarum, vnde non erit neceſſe ſingulas figuras multiplicare, cum ſingulis omnibus; ſed ſolùm aliquas ad ſiniſtram.

			Proport.	Logar.	Fig. num.
			1	0	
			2	1	
			4	2	1
			16	4	2
			256	8	3
			1024	10	4
			1048576	20	7
		10	995,11627776	40	13
	12089	2581961463	00000. 00000	80	25
1	2676506002	2823000000	00000. 00000	100	31

THEOR. VI. PROPOS. XXXVI.

Licet numeri naturali ordine progredientes proportionales continuè non ſint, adhuc tamen in aliqua magna ſerie; vbi differentiæ ſint paruæ poterunt proximè, vt continuè proportionales vſurpari.

CErtum eſt, quod minimi numeri in ſerie continua proportionalium non ſunt, & ideo, quod logarithmi illis applicari nequeũt, ex præaſſ. 3. Expenſ. 2. huius: at ſi ſtatuantur, & conſiderentur in aliqua magna progreſſione exiſtentes, vt in ſerie ſucceſſiua proportionatorum Tabulæ primæ primi ordinis exp. 2. huius, tunc poterunt reperiri proportionales, qui propinquiſſimi ſint numerorum naturalium proportionibus: quia ſilicet, cùm illæ numeroſiſſimæ progreſſiones interualla inſenſibilia reſpectu totius termini habeant, incidet aliquis proximè V. g. vt numerus naturalis 9. ad 10. ſic in præcitata tabula 1. præcit. proportionalis 9043820. ad 10000000. ſe habent proximè, vt 9. ad 10. ſpretis diferentijs 43820. ſic 8016305. ſe habet ad 10000000. vt 8. ad 10. & ſi minores differentiæ eſſent electæ in maiori numero adhuc proportio V. g. 8016305. ad 10000000. magis accederet ad proportionem 8. ad 10. quia partes adhærentes 16305. minores eſſent: Quare patet, quòd numeri naturales in aliqua magna ſerie continua reperiri poterunt, vel ijdem aliqui, vel ſaltem proximè.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Numerorum ab 1. vſque ad 10. logarithmos reperire.

STatuatur logarithmus numeri 1. zifra, & numeri 10. maximus aliquis numerus ſit logarithmus 1.00000. 00000. ſi iſti extremi 1. & 10. in aliqua magna ſerie numerorum proportionalium intelligantur, & imaginentur deſcripti, vtpote oportet concipere ob logarithmum maximum denarij, quem elegimus 100000. 00000. Oportebit fateri in illa ſerie adeò magna reperiri tales proportionales, & inſenſibili differentia diſſideant ab ea proportione; quam habent numeri naturales ad denarium (erit numerus aliquis proportionalis ex præc. qui ſe habebit proximè ſaltem, vt 8. ad 10. item alius, qui ſe habebit, vt 9. ad 10. item, qui ſe habebit, vt 5. ad 10. parua diferentia, & inſenſibili interueniente. Horum itaque proportionalium perquirendi ſunt logarithmi, licet ipſi proportionales, nobis noti non ſint.

Quoniam iam nouimus datis duobus numeris, & alterius logarithmo, alterum inuenire, abſque alia cognitione proportionalium; cui reſpondent ipſi logarithmi ex propoſ. 33. ideo ex eius documentis primo multiplicabimus ipſum numerum in ſe, & in productum donec geniti habeant illum logarithmum iam cognitum. Verùm, quia illa multiplicatio, quæ eſſet 100000. 00000. cum ipſo primo termino, nempe tot, quot vnitates in logarithmo dato inueniuntur eſt moraliter impoſſibilis. Ideo ſcias, quòd cum continuata diuiſio, quoad fieri poſſit, deinde ſit inſtituenda per denarium, ad reperiendum numerum proportionalium, & denarius ex 29. prop. h. toties diuidat, quot ſunt ipſę notę in ipſo numero, vnâ demptâ; ideo ſolus numerus notarum nobis eſt neceſſarius, numerus inquam notarum, ſeu figurarum, quę vltimum numerum proportionalem correſpondentem logarithmo denarij integrant, & deſcribunt. Id verò conſequemur ex propoſ. 35. huius, & quia qua-

quatuor proportionalibus peruenimus ad denarium logarithmicum, & alijs quatuor ad centenarium; quatuor quoque ad millenarium, & ſic conſequenter, ideo 41. proportionalibus perueniemus ad logarithmum 100000. 00000. ipſo primo numero 2. comprehenſo.

Igitur, cum illius vltimi per 33. propoſ. huius neſciamus quidem numerũ, ſed ſolùm notarũ, quę ipſum conficiunt, quas (ſi conficias progreſſionem modo ibi tradito) inuenires eſſe 30102. *99956. 63*. Ideo, ſi ille vltimus ignotus diuideretur per 10. quoties fieri poſſet, eſſent quoti, & proportionales eiuſdem numeri, minùs vna cuius notæ, & figuræ ſunt, nempe 30102. *99956. 62*.

Sed ex propoſ. 30. iſta diuiſio per proportionalem datum 10. quæ ſit vltimi termini ex 2. toties geniti, donec obtineat eundem logarithmum denario aſſignatum, iſta inquam diuiſio per 10. dat logarithmum ipſius numeri dati 2. cuius quęrimus logarithmum; Ergo logarithmus eius erit inuentus 30102. *99956. 62*. & ſic faciendum ad inueniendum logaritmum numeri 3. & cęterorum ſimplicium vſque ad 10. relictis tamen, qui duplam, vel triplam proportionem dicunt ad 2. & 3. vt 4. 8. *6. 9.* de quibus infra.

Exemplum ſeptenarij.

1	0	
7	1	1
49	2	2
2401	4	4
4764901	8	7
282475249	10	9
79792266297612 00	20	17
636980576 09000. &c.	40	34
4053621 559000. &c. vſq; ad 68. n.	80	68
32344765o. & cęt. vſque ad 85. notas	100	85

Et ſic proſequere vſque ad logarithmum denarij.

Aduerte verò plurimas notas maximè in primis numeris eſſe multiplicandas, imo omnes in primis vſque ſaltem ad logarithmum 20. nam error, qui in principio eſt vnius notæ fit notarum plurimarum; Sic in iſtis proportionalibus à numero 2. exortis vnitas prætermiſſa in numero 1023. cauſabit in notis logarithmicis 1000. defectum vnius vnitatis, qui defectus excreſcet in immenſum, vnde in principio multa adhibita diligentia agendũ eſt, vt præciſus notarum numerus poſſit obtineri.

Tabula falſa:		A
1023	10	4
1046529	20	7
1095223	40	13
1199513	80	25
1255332	100	31
1575870	200	61
2483363	400	121
6167075	800	241
9718508	1000	301

Hac itaque ratione inuenientur numeri 2. 3. 5. 7. logarithmi, quod ſatis erit ad alios inueniendos, eruntque, vt in ſequenti tabella.

Logarithmi numerorum ordine naturali progredientium intermiſſo 4. 6. 8. & 9. numero.

1	000000. 00000
2	030102. 99957
3	047712. 12547
5	069897. 00043
7	084509. 80400
10	100000. 00000

PROB. VI. PROPOS. XXXVIII.

Numerorum, qui ex datorum ſimplicium multiplicatione prodeunt, logarithmos inuenire.

INuentis primorum numerorum poſitorum ab 1. vſque ad 10. logarithmis facile eſt compoſitorum logarithmos inuenire ex propoſ. 25. Nam quia numeri, qui ex multiplicatione duorum numerorum reſultat, logarithmus eſt ille, qui ex eorum logarithmorum additione prouenit; ſi ergo deſideras logarithmum numeri 4. qui reſultat ex multiplicatione 2. & 2. adde logarithmum numeri 2. ipſi logarithmo, ideſt duplica illum, & erit 6020599913. logarithmus numeri 4. Sic ſi addas logarithmum numeri 2. logarithmo numeri 3. erit numeri 6. logarithmus 7781512504. Ita ſi cupias logarithmum numeri 8. addes logarithmum numeri 4. numero 2. & erit 9030899870. & tandem duplicando logarithmum numeri 3. habebis logarithmũ numeri 9. qui eſt 9542425094. & ne dum iſtos; ſed omnium etiã, qui ex multiplicatione horum proueniunt addendo ſimul multiplicatorum logarithmos, vt numeri 12. 14. 15. 16. 18. 20. & cęt.

PROBL. VII. PROPOS. XXXIX.

Alios numeros quoſcumque primos ſuper denarium inuenire.

NOn alio modo inuenientur, quàm eo, quo duenari, vel ternarij, vel ſimplicium in compoſitorum logarithmos inuenimus.

Sit ergo inueniendus logarithmus, vndenarij dato logarithmo denarij. Multiplicetur in ſe, & in productum ter; & deinde primum productum multiplicetur cum vltimo producto, & fiet ordo, cuius logarithmus eſt 10. & numeri notarum 11. erunt. Sicque fiat conſequenter donec denarij conſequaris logarithmum 100000. 00000. & numerum figurarum illius vltimi termini, quem num. fig. diuides continuè per datum numerum denarij, quod fit auferendo vnam tantum vnitatem, & ille erit logarithmus vndenarij, nimirum 1.0413926852.

Et hic habes exemplum, in quo solummodo quatuor notas multiplicauimus sinistras; quamuis quinque, vel sex ad obtinendum numerum notarum, certum, & exactum essent multiplicandæ ad minus in principio.

Numeri multipl.	Logarith.	Num. fig.
I	0	
II	I	2
121	2	3
14641	4	5
214358881	8	6
25637424601	10	11
672727969. & cęt.	20	21
4525521984	40	42
2048015025	80	84
1377730560	100	105
189805729	200	209
360240400	400	415
1297008196	800	834
246170600	1000	1042

Et sic prosequere vsque ad 41. multiplicationes singulis multiplicationibus figurarum numerum apponendo, & suos logarithmos; donec logarith. 100000. 00000. qui est denarij consequaris.

TRACTATVS XXII.

De Intersectionibus Planorum.

LIneas vsque adhuc in plano existentes considerauimus: modo eas in corporibus ipsis, tanquam eorum sectiones animaduertimus vt in sphæricis Theodosij, Conicisque Apollonij concipiendæ sunt. Vnde in primis sectiones planorum: quæ lineæ rectæ sunt in hoc Tractatu oportet speculari; de quibus agit Euclides ad initium 11. Sed eorum animaduersio nobis hoc loco est necessaria.

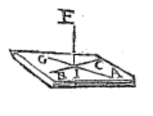
EXPENSIO I.

Principia exhibentur.

QVosdam ante omnia declarare terminos oportet, vt ritè concipiantur. Vnde sit.

DEFINITIO I.

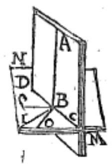
Linea recta plano orthogonalis est: cum omnibus lineis eam tangentibus, & in eodem dato plano existentibus perpendicularis est.



Sic si linea IE cum omnibus AI, & IB, IG, & IC, & cæt. eam tangentibus in I perpendicularis est, etiam plano CABG, in quo illæ ductæ sunt, perpendicularis erit.

DEFINITIO II.

Planum ad planum rectum est; cum quælibet linea recta in vno plano existens, & orthogonalis sectioni, omnibus lineis eam contingentibus, quæ in altero duci possunt, perpendicularis est.

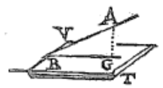


Sic, si linea AB perpendicularis sectioni CD in plano CDA existens sit perpendicularis lineis OB, IB, & BQ. Planum CDA erit perpendiculare plano MN, in quo illæ ductæ sunt.

DEFINITIO III.

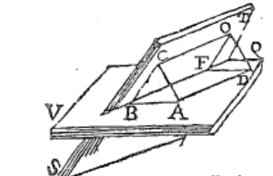
Rectæ lineæ ad planum inclinatio est angulus acutus, quem illa facit cum rectâ in plano illo existente in perpendicularem illâ terminante, quæ ab aliquo suplimi puncto inclinantis lineæ cadat.

Sic angulus ABG est angulus inclinationis lineę BA ad planum VT, quòd BG angulum claudens nectatur in G, cum perpendiculari GA, quæ ab aliquo sublimi puncto; nempe ab A lineę inclinantis BA cadit.



DEFINITIO IV.

Plani ad planum inclinatio est angulus acutus rectis contentus, quæ in vtroque plano ad idem sectionis punctum ducta, rectos cum sectione angulos efficiunt.



Si itaque AB, & AC sint perpendiculares sectioni BF, & conueniant in punctum B angulus earum ABC dicetur inclinationis angulus planorum VQ & ST.

DEFINITIO V.

Planum ad planum, & linea ad lineam similiter inclinata dicitur, cum prædicti inclinationum anguli sunt æquales.

EXPENSIO II.

De linearum cum planis habitudine.

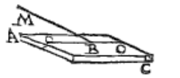
CVm sectiones planorum sint rectæ quædam lineæ, operæ pretium videre priùs est, quomodo rectæ cum planis se gerant, ad hoc, vt deinde meliùs planorum sectiones cognoscamus.

 THEOR.

THEOR. I. PROPOS. I.

Rectæ eiusdem lineæ pars non est in sublimi; altera super planum extensa.

SI plano AC aliquis cogitet ducere lineam, quæ partem extensam habeat in eo, quæ BO; & altera BM eleuetur ab ipso, is fallitur. Nam producta in ipso plano parte BO, versus Q, duæ rectæ MB, & QB idem haberent segmentum BO, quod absurdum

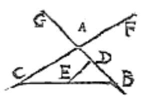


est, & contra pronunciatum 10. lib. 1. elem.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si duæ lineæ se mutuò secent, in vno plano sunt, & omne triangulum rectis constitutum in vno plano est.

SIt triangulum ABC quoddam lineis rectis conflatum, & concipiatur, tanquam si nullo plano inhæreret, Dico; *quod si plano superponatur ipsi superextendetur ita*, vt secundùm se totum illi insit, & tangat. Nam si non secundùm se totum tangeret, pars quædam V. g. BDE eleuaretur à plano; Ergo, & lineæ AB rectæ pars AD esset in subiecto plano, pars altera DB ab eo eleuaretur, contra præcedentem propos. & sic dicas de linea BC, quæ parte CE tangeret planum, parte BE in sublime fereretur.



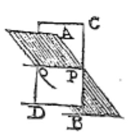
Probatur altera pars, quæ priùs proposita est. Nam in quo plano est triangulum sunt eius latera AB, & AC; in quo verò sunt latera sunt ea quoq; latera ipsa etiam si producantur in F, & G; alioquin lineæ rectæ pars CA esset in plano, pars AF esset in sublimi, quod impossibile est: Quare totæ in plano extendentur, quod vult propositio.

THEOR. III. PROPOS. III.

Omnis planorum mutua intersectio linea recta est.

SEcent se mutuò duo plana AB, & CD in PQ. Dico *hanc sectionem PQ esse lineam rectam*.

Quòd si recta non credatur erit curua: quia verò sectio à superficie amborum planorum secantium suboritur, hæc curuitas orietur à plano AB, vel à plano CD, & sic alterũ eorum curuum erit, vel ab vtroque, & sic ambo curua erunt. Nam curua erit ea superficies, in quo vndiq; recta extendi nequit. In situ verò sectionis duo

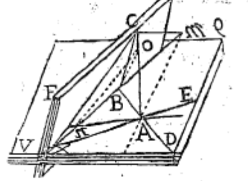


puncta necti possunt recta PQ, quæ non tangeret superficies illas, cum in loco sectionis curuentur cum ipsa sectione in eis existente, vt aduersarij volunt.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si recta perpendicularis alteri lateri angulo inclinationis alicuius plani substernatur ea erit perpendicularis illi lineæ, & alteri, cuicumque in eodem plano existenti.

SIt angulus inclinationis CBA, & illi substernatur AC perpendicularis lateri AB; Dico, & hanc esse perpendicularem lineæ cuicumque in eodem plano QY existenti.



Assumatur in sectione BX æqualis CA, & ducatur AX ad sectionem, & CX.

Probatur itaq; primò AC etiam esse perpendicularem lineæ AX. Nam angulus CBX, vtpote sectionis rectus est definit. 4. sicut, & BAC angulus ex hypothesi; latus verò AC est æquale ex constructione cruri BX, at crus AB est commune; ergo duo triangula ABC, & ABX erunt æqualia. Vnde, & bases AX, & BC erunt æquales ex 22. primi Elem. Et ideo duo alia triangula ACX, & BCX erunt quoque æqualia; Habent enim ex præced. argumento crura AX, & CB æqualia; crura verò AC, & BX ex Hypothesi sunt æqualia; basis vero CX communis; vnde ex 23. primi Element. anguli CAX, & XBC erunt æquales; sed angulus XBC rectus est, vtpote sectionis BX cum linea inclinationis BC ex definit. Ergo angulus quoque XAC rectus erit.

Probatur autem etiam de lineis quibuscumque. Nam certum est primò esse quoque perpendicularem lineis AD, & AE productis; cum enim XAC angulus sit rectus, ex 10. primi, etiam EAC rectus erit; & eadem ratione cum BAC sit rectus etiã CAD rectus erit; Idẽ quoq; argumẽtũ poterit fieri de triãgulo AMC; si fiat, vt superiùs BM æquale crus perpendiculari AC, & deinde eodem modo probando MAC triangulum esse æquale triangulo BMC, & ideo, quòd angulus MAC sit rectus, vt est MBC.

At si manentibus iisdem omnibus angulus inclinationis plani intelligatur deprimi, vel ipsum planum, & secare eandem perpendicularem in O; si lineæ AO fiat æqualis BN, & ducatur AN, idem argumentum valebit. Nam adhuc rectangula triangula ABN, & ABO erunt æqualia ob idem latus AB, & duo æqualia crura AO, & BN: Propterea triangula quoque OBN, & AON erunt æqualia. Namq; ob basim communem ON, crus AN cruri BO ostensum æquale, & crus AO, & BN ex hypothesi æquale, æqualia quoque erunt triangula OBN, & AON. Vnde cum NBO sit rectus angulus, etiam NAO erit angulus rectus, & sic poterit ostendi de qualibet aliã lineã.

CO-

COROLLARIVM.

HInc elici potest: Quod, si linea aliqua recta sit perpendicularis duabus rectis angulum facientibus in aliquo plano, vt AC lineis BA, & AX hęc eidẽ plano sit perpendicularis; siquidẽ ostensum est, talẽ esse omnibus alijs lineis in eo plano existentibus, & eam in A contingentbus. Vnde ex defin. 1. plano quoque VQ erit perpendicularis.

COROLLARIVM II.

DEducitur quoq; eadem ratione lineã CA lateri BA anguli inclinationis perpendicularem, etiam esse perpendicularem plano, in quo latus, triangulumque ABC, perpendiculariter inexistit, & extend.tur. Planumque trianguli CAB inclinationis esse quoque plano FB, & QV vtrique perpendiculare.

COROLLARIVM III.

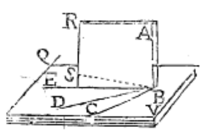
LIneam in plano inclinato, plano, cui inciinat parallelam, esse quoque parallelam sectioni eorundẽ planorũ colligo si V. g. linea CF sit plano QV parallela; esse quoque parallelam ipsi sectioni mx. Ratio est, quia illa CF erit rectangula perpendiculari CA, & plano trianguli CAB: Ergo etiam lineæ CB, & ideo æquidistans lineæ BX; quę eidem CB est perpendicularis.

THEOR. X. PROPOS. V.

Si linea recta tribus rectis se mutuò tangentibus perpendicularis sit, illæ tres rectæ in eodem plano erunt.

SIt linea AB perpendicularis tribus BC, & BD, & BE. Dico *eas esse in eodem plano* VQ.

Probatur. Nam, si aliqua ex ipsis non esset V. g. BE; sed eleuaretur à plano, vt est punctata BS: ducatur per AB, & punctatã ES planum BR. (quod potest esse ex prop. 2. cum productæ se secent in B) quod secabit planum VQ infra punctatam, quæ ab aduersarijs asseritur ab illo plano VQ eleuata; & sectio erit BE; cui BA erit perpendicularis; cum duabus BC, & BD perpendicularis ponatur, & ideo ex Coroll. 1. anteced. propos. etiam plano per eas ducto VQ, & consequenter ex defin. 1. etiam lineæ BE. Quare esset angulus quoque ABE rectus, vt est angulus ABS ex hypothesi, & ideo pars anguli ABS esset æqualis toti ABE; quod est absurdum.



THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ lineæ ab eodem puncto sectionis incipiant, in perpendicularemque plano terminent; si vna erit orthogonalis sectioni, & altera talis erit.

SIt AB in eadem figura propos. 4. perpendicularis sectioni BX in plano QV, & à puncto B sectionis BX in ipsam terminent duæ rectæ; nimirum AB in A, & BC in C. Dico, *quòd, si vna V. g.* AB *erit perpendicularis sectioni* BX, etiam altera CB *eidem sectioni* BX *orthogonalis sit*.

Assumatur itaque in sectione portio BX æqualis perpendiculari AC, & ducatur à puncto C recta CX, & à puncto A recta AX, quo facto, sic.

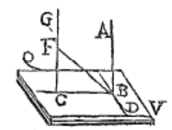
Probatur. Et progressu 1. Triangulum ABC est æquale triangulo ABX: Nam angulus ad A rectus est ob perpendicularem, & angulus ad B ex Hypothesi, crus AB commune; crus verò AC ex constructione æquale cruri BX. Vnde ex 22. primi Element erunt æqualia hæc triangula ABC, & ABX, & basis quoque AX erit æqualis basi CB.

Progress. 2. Hinc autem rursus arguitur triangula CBX, & CAX esse æqualia: Nam basis AX est communis, BC crus in primo progressu cruri AX ostensum est æquale, crus verò AC ex constructione cruri BX. Vnde cum omnia latera; quodlibet suo correspondenti, sint æqualia: triangula ipsa CAX, & CBX erunt æqualia: quare habebunt quoque angulos æquales; sed angulus CAX ob perpendicularem rectus est: ergo, & angulus CBX; quare recta quoque CB incidit in sectionem XB orthogonaliter.

THEOR. VII. PROP. VII.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano perpendiculares sint, Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SInt duæ rectæ lineæ AB, & CG eidem plano QV perpendiculares. Dico *eas esse quoque parallelas*. Puncta B, & C connectantur, cui fiat perpendicularis alicuius plani sectio DB; hæc etiam erit perpendicularis lineæ ductæ BF à puncto B ad perpendicularem DC ex præc. hinc autem



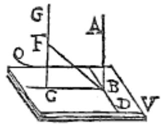
Probatur propos. Linea DB est perpendicularis tribus AB, & BF, & BC; ergo tres istæ ex propos. 5. sunt in eodẽ plano; sed etiam ex pr. 2. in eodem est GC, in quo reperitur BC, & BF: Ergo omnes quatuor sunt in eodem plano: Sed anguli ABC, & BCG ex def. perpendicularium sunt recti. Ergo ex 28. primi duæ AB, & CG sunt parallelæ, cum faciant ipsi BC angulos rectos, & in eodemq; plano existere sit ostensum.

THEOR.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

Si duæ parallelæ rectæ lineæ insistunt eidem plano, quarum vna sit perpendicularis, altera quoque talis erit.

SInt rectæ BA, & GC parallelæ ex def. parallelarum erunt in eodem plano extensæ si sit vna normalis V.g. GC. Dico itaque, quòd etiam BA talis erit. Connectatur B, C linea BC, cui fiat perpendicularis DB; ducaturque BF, & EF ex præc. BE erit etiam rectangula lineæ DB.

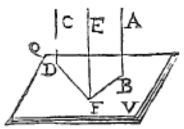


Vnde Probatur linea DB est ad angulos rectos lineis BC, & FB, quæ ex 2. huius sunt in eodem plano; ac linea CG; at hæc est in eodem plano ob parallelismum præsuppositum, ac linea AB: Ergo linea AB est in eodem plano, ac duæ BF, & BC; sed linea DB est perpendicularis duabus FB, & BC angulum in B facientibus. Ergo, & plano, in quo sunt ex Coroll. 1. prop. 4. huius: Ergo ex defin. etiam lineæ BA, cui etiam ad angulos rectos est BC, siquidem GCB est angulus rectus, quòd GC sit perpendicularis, quare ex 32. primi etiam ABC erit angulus rectus: Cum ergo linea BA insistat duabus DB, & BC ad angulos rectos erit quoque ad angulos rectos toti plano QV ex propos. 4. huius, Coroll. 1.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, licet non in eodem cum illâ plano, etiam inter se sunt parallelæ.

SInt duæ AB, & CD eidem lineæ FE parallelæ, dico illas quoque inuicem esse parallelas.

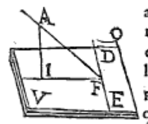


Nam ducantur à puncto F duæ perpendiculares FD, & FB ipsi EF ad lineas CD, & BA hæ perpendiculares erunt in eodem plano VQ ex Coroll. 1. propos. 4. h. Quare ex propos. præced, eidem erunt perpendiculares BA, & CD, quod sint parallelæ perperdiculari FE: quare ex propos. 7. inuicem quoque erunt parallelæ.

PROBL. I. PROP. X.

A dato puncto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

DVcatur AF à puncto dato A in subiectum planum, vtcumque, & per F ducatur ED ipsi AF perpendicularis, & huic à puncto F ducatur perpendicularis FI ex 8. primi, cui ducatur perpendicularis AI ex 9. propos. 1. à puncto A. Dico *hanc esse perpendicularem plano* QV.



Probatur. Nam AFI est angulus inclinationis planorum, in quibus sint, hinc crus AF, inde FI, & DE erit linea sectionis. Quòd AF, & FI perpendiculares ipsi sint: quare ex Coroll. 2. propos. 4. erit quoque perpendicularis ipsi plano; cùm ducta sit perpendicularis lineæ FI.

PROBL. II. PROPOS. XI.

A dato puncto in plano ad idem planum rectam excitare perpendicularem.

FIat angulus inclinationis in præced. fig. plani AFI ducto priùs à puncto I crure FI: deinde ei ducta sectione perpendiculari ED, cui excitetur à puncto F perpendicularis FA, ex 8. primi, eruntq; FA, & FI in eodem plano: In hoc igitur plano ducatur ab I perpendicularis IA, & hanc dico esse quoque perpedicularem plano QV.

Probatur. Quia est perpedicularis FI cruri anguli inclinationis AFI: vnde ex Coroll. 2. prop. 4. erit etiam perpendicularis plano QV.

EXPENSIO II.

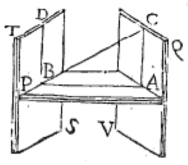
De Planorum intersectionibus.

VIsis correspondentijs linearum non in eodem plano existentium restat, vt modo ipsas planorum intersectiones intueamur.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Quæ plana eandem rectam perpendicularem habent, illa parallela erunt.

SIt linea AB perpendicularis vtrique plano QV, & TS. Dico *plana esse parallela*, idest in infinitum producta nunquam se secare.



Nam si dicatur inclinare inuicem, ad eam partem, in qua inclinant, ducatur in plano vtrolibet V.g. ST recta BD à puncto verò B ipsi BD ducatur normalis BP, & huic

BP normalis BC, & tandem connectatur AC. Istæ AC, & BD lineæ etiam rectæ AB erunt normales ex 7. huius. Sed sunt in eodem plano. Ergo etiã erunt parallelæ.

Quod verò sint in eodem plano ostenditur, nam linea AC ex propos. 2. est in eodem plano, ac triangulum ACB: Tres verò AB, & BC, & BD sunt in eodem plano ex propos. 5. quòd sint lineæ BP perpendiculares: Vnde, & AC, & BD in eodem plano erunt, quare

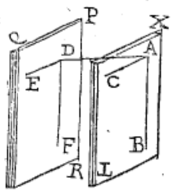
Probatur propos. AC, & BD sunt parallelæ in eodem plano, ergo nunquam conuenient, quare nec plana QV, & TS; in quibus sunt.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Si duæ rectæ se mutuò tangentes ad duas se mutuò tangentes sint parallelæ, & non in eodem plano; plana etiam in quibus sunt, erunt parallela.

SInt duæ AB, & PL parallelæ, quæ tangant duas AC, & PQ parallelas item inuicem: dico *plana, in quibus sunt* QR, & XL *esse parallela*. Quod, vt ostendatur; ducatur AD, plano XL perpendicularis, quæ inpingat in planum RQ; vel enim cadet in P, vel extra, vt in D. A puncto D ducatur parallela DF ipsi RP. & ab eodem puncto D alia parallela DE lineæ PQ, quo facto sic.

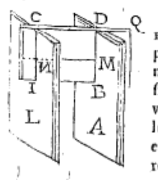
Stat demonstratio, quoniam DF lineæ PR ex constructione, & eidem ex hypothesi est parallela BA, erunt duę AB, & DF inuicem parallelę; sic quia DE ex constructione est parallela lineæ PQ, cui ex hyp. AC parallela est ex 9. h. inuicem quoq; AC, & DE parallelæ erunt: Quoniam itaq; BAD, & CAD rectus est, erit etiam rectus ex prop. 19. primi angulus ADF, & ADE: Quare AD plano PQ ex Coroll. propos 4. huius erit perpendicularis: Vnde ex anteced. plana erunt inuicem parallela.



THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si duo plana parallela plano quopiam secentur, communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SInt duo plana parallela A, & L, quæ plano QI secentur. Dico *sectiones* BD, & CI *esse parallelas*.



Ducatur enim sectioni BD perpendicularis MN in plano QI, incidet in sectionem plani QI; quæ est CI, si opus sit, producti, vel ergo MNC erit angulus rectus, & sic DB, & CI erunt parallelę, vel minor recto, & sic planum LC ad partes C alteri plano BA vicinius erit; ergo non parallelum contra hypothesim, vel maior recto, & sic MNI erit acutus angulus. Vnde contra rursùs hypothesim ad partes L planum LD alteri AB magis appropinquabit: Quare necessariò MNC rectus angulus erit. Vnde cum alterni anguli BMN, & MNC sint æquales ex 28. primi erunt parallelæ BD, & CI.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Si recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, & omniaque per ipsam plana ad rectos angulos erunt eidem plano.

SIt recta AB plano cuipiam QV orthogonalis. Dico, *quòd omnia plana, quæ per ipsam ducuntur eidem plano ad rectos angulos sint.* Ducatur itaq; per ipsam planum HIBA, & in ipso parallela HI, vel alia quælibet parallela.

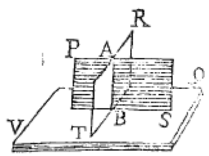
Probatur. Quio HI est in eodem plano, & parallela AB erit quoque plano QV perpendicularis ex 8. huius, & sic de quacunque alia: quare planum AIBH plano QV erit orthogonale. Quod si ducas per AB, aliud quodcumque planum eadem demonstratio erit.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

Si duo plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos angulos erit eidem plano.

*SInt in plano QV duo plana SP, & BT ad angulos rectos; quę se secent in AB. Dico *sectionem* AB *plano* QV *perpendicularem esse*.

Probatur. Nam SB, & BT sectionibus perpendicularis est BA.



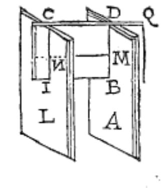
Ergo ex Coroll. propos. 4. perpendicularis est ad planum QV. Quòd sit perpẽdicularis duabus SB, & BT: sic ostenditur. Nam planum RT rectum est ad planum QV. Ergo omnis eius vbique superficies talis erit. Ergo talis erit in sectione BA, quare eius sectio BA, nec inclinabit versus S; neque ad alteram partem, sed rectangula super SB consistet.

Quod autem talis sit respectu BT etiam ostenditur eodem modo, quia planum SP rectum est: ergo eius sectio non inclinabit versus T, sed recta super BT consistet.

THEOR. VI. PROP. XVII.

Duo plana ad i..em planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas parallela sunt.

SInt plana in schemate propos. 14. AD, & LC recti ad planum QI, & sectiones DB, & CI parallelæ. Dico *plana quoque esse parallela*.



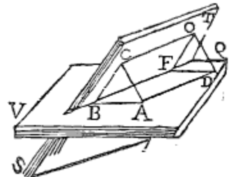
In plano enim QI ducatur MN perpendicularis ad DB, quæ quoque erit recta ad planum AB, ex def. 2. huius, & eadem erit perpendicularis ad IC; & ideo ex eadem defin. ad planum alterum LD recta erit: Cum ergo NM ad vtrumque planum recta sit ex propos. 12. plana ipsa parallela erunt.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Planum ad planum inclinans eundem angulum secundum omnem suam superficiem cum alterius superficie facit.

SIt planum TS, quòd inclinet ad aliud planum QV. Dico, quòd eius superficies cum alterius superficie vbique eundem angulum facit.

Sit itaque angulus aliquis inclinationis sicubi ABC, & alter ad quamcumque elegeris partem DFO. ostendendum est hos angulos esse æquales: Sumatur igitur partes æquales de cruribus angulorū BC, & OF, item AB, & FD, & ducantur DA, OC.

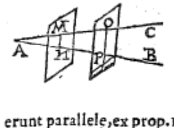


Probatur. Rectæ OF, & CB sunt perpendiculares sectioni ex def. 3. Ergo inuicem parallelæ erunt; sed sunt etiam æquales: Ergo ex 33. primi rectæ quoque OC, & FB parallelæ sunt, & æquales. Idem argumentum conficias de lineis DF, & AB; quia enim sunt perpendiculares sectioni ex defin. 4. ideo sunt parallelæ, & æquales sunt ex constructione; vnde fit, quòd DA, & FB parallelæ sint, & æquales. Et ideo ex propos. 9. huius; quòd CC, & AD sint quoque inuicem parallelæ, & hinc ex prop. 33. primi; quòd DO, & AC parallelæ quoque sint, & æquales; cum ergo triangula DOF, & ACB sint æquicrura erunt, & æquiangula: Vnde angulus ABC erit æqualis angulo DFO: & ita probabitur de quocumque alio angulo: vnde vbique superficies TS faciet eundem angulum cum superficie QV.

THEOR. VIII. PROPOS. XIX.

Si duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; in easdem rationes secabuntur.

SIt linea AB, & AC; quę vel conueniunt in A, vel producantur donec conueniant, siquidem si non conueniant erunt parallelę, vnde in partes ęquales secarentur.

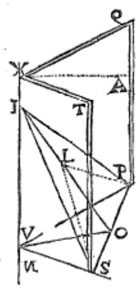


Istę ex prop. 2. erunt in eodem plano; quare si planis parallelis secentur sectiones MN, & OP erunt parallelę, ex prop. 14. quare ex 2. sexti erunt, vt AM ad MO ita AN ad NP.

THEOR. IX. PROPOS. XX.

Omnis angulus super eandem basim est minor in plano obliquiùs secante, quàm in minus obliquo; anguli verò reliqui maiores.

*SInt duo plana QV, TV, quę faciant angulum quemcumque SVP in plano PVS sectionis vt. Dico, quòd, si aliud planū PIS obliquiùs secet, plana inclinantia QV, & TV illud secando facient suis sectionibus PI, & SI angulum PIS acutiorem, & minorem; quàm PVS; quòd vt probetur, ducātur OV, & OI perpendiculares basi PS; eritque maior OI basis subtensa angulo obtuso, vel recto, qualis est ex hypothesi OVI cum OVN sit acutus, vel rectus, quam crus OV; ideoque sumatur OL ęqualis OV, in perpendiculari OI coniungaturque PL, & LS; eritque triangulum PLS ęquale triangulo PSV, vt 17. lib. 1. Elem. Vnde probatur propos. ex 21. propos. lib. 1. elem. Quia ab extremis P, & S duę PL, & LS lineę interiùs constitutę sunt, nempe intra triangulum PIS; Ergo maiorem angulum PLS continebunt, licet ipsę longitudine minores sint quare erit maior angulus PVS ęqualis angulo PLS, quàm angulus PIS.



Probatur quoque 2. pars; quia cuiusque trianguli anguli sunt ęquales duobus rectis; quare si angulus I sit acutus angulus P obtusus erit, vel maior in triangulo PIO, quam LPO, vel VPO.

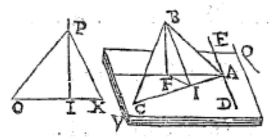
PROBL. III. PROPOS. XXI.

* *Crus non perpendiculare plano trianguli eidem plano non perpendicularis, & in data sectione positi, ita constituere, vt in eodem plano alicui sectioni, vel lineæ existenti perpendiculare sit.*

SIt crus AB trianguli ABC collocandum in plano QV tali modo; vt non existens, nec ipsum crus,

crus, nec planum, in quo est perpendiculare triangulo; cum sectione tamen, seu recta DE sit ad angulos rectos.

Trahatur AF in plano QV perpendicularis sectioni DE. Deinde basi XO deducatur perpendicularis à vertice P, & cadat in I; sumptâ ergo distantiâ XI, transferatur super planum in AIC lineâ, super quam triangulum debet collocari, & ex puncto I educatur linea eidem sectioni AC perpendicularis, quæ sit IF, & ab F vbi secat AF educatur



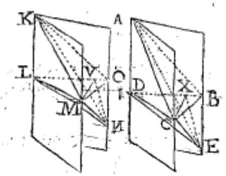
perpendicularis ad planum, quæ sit BF; sumpto tandem interuallo IP posito circini pede in I signetur portione circuli perpendicularis FB; & à puncto B ad I recta ducatur BI, & altera AB; deinde ad interuallum XO signetur AC, & ducatur BC. Dico *triangulum esse collocatum tali modo, vt crus AB sit perpendiculare sectioni DE.*

Probatur. Nam crus IB est æquale cruri PI; sic AI cruri XI; angulus verò AIB, vt ex propos. 6. huius, est rectus, vt est angulus XIP. Ergo ex 22. primi, basis quoque AB æqualis basi XP; sed hæc est ex 9. huius propos. recta sectioni DE. Ergo fecimus propositum.

THEOR. XII. PROPOS. XXII.

Si duo triangula æqualia inter duo plana intercipiantur rectangulè, quò magis ad sectionem planorum alter accedit, eò angulum planorum facit altero maiorem. Et quo minùs obliquè incidit, eô eundem angulum facit maiorem.

*SInt duo triangula BCA, & OMK æqualia tum angulis tū lateribus, & duobus planis singula includantur ad angulos æquales A, & K, quę tangant sectiones AD, & KL planorum intercipientium. Sintque latera BC, & OM, ad ipsa latera NO, & BE recta. Et triangulum OMK ad sectionem LK magis accedat sua basi OM, quam triangulum BCA dico angulum planorum OLM esse maiorem angulo planorum BDC.



Probatur. Quoniam triangulum OMK magis accedit ad sectionem, quàm triangulum BCA, ductis perpendicularibus ad sectionem LK, quæ sint OL, & ML; nec non, & ad sectionem AD ductis perpendicularibus BD, & DC, erunt triangula BCD, & OLM inclinationis planorum, latusque OL ex hypothesi maioris inclinationis erit minus, quam BD, & ML minus, quàm CD super æqualem OM, & BC, basim, seu eadem, si mente superponantur super eandem basim; quare ex prop. 21. l. 1. El. maior erit angulus OLM, quàm BDC.

Sit triangulum æquicrurum EAC magis obliquum, quam triangulum NMK, ducantur XC, & MV perpendiculares plano OX, & BA, quę omnibus lineis ex def. 1. h. in eo plano existentibus erunt perpendiculares, & consequenter CX, erit normalis lineis XD, & EX, & MV lineæ VL, & VN; Vnde anguli apud V, & X erūt recti, cùmq; bases EC, & NM sint æquales ex Thesi circuli illis basibus EC, & NM pro diametro inseruientibus erunt æquales, & quia sunt rectāgula transibunt per NVM, & per EXC puncta ex 28. l. 3. Et quia maior ponitur inclinatio plani ECA, quā NKM erit āgulus XEC minor, quam VNM; quare arcus quoque, qui pertingeret ab X vsque ad C minor, quam arcus pertingens ab V vsque ad M ex 36. lib. 6. ideoque subtensa minor XC arcui minori erit minor, quàm VM. Crus verò CD ostensum est maius, quam ML, & consequenter eius quadratum erit maius; si ergo auferatur quadratum CX minus, quam MV quadratum: Ablatum hoc CX quadratum à maiori quadrato CD relinquet residuum maius, quam MV quadratum sublatum à quadrato ML minori: Quarè XD quadratum; quod ex 11. lib. 2. Elem, est æquale illi residuo erit maius, quàm quadratum residuum VL: Vnde erit maius XD latus, quam VL. Cum itaque XD, & CD latera sint maiora, quam VL, & ML, dicent maiorem proportionem ad VM, quam VL, & ML: quare multò maiorem, quam ML & LV dicent ad XC basim minorem: Ideoque ex propos. 6. Tract. 19. minor erit angulus XDC angulo VML.

COROLLARIVM.

HInc facilè argumentaberis, quod si angulus VLM sit maior angulo XDC, & planū NML æqualē inclinationē, vel obliquitatē consequatur, ac planum EDC, quod erit maior angulus quoque NLM, quàm ECD. Ratio est, quia cum ponatur VMN æqualis angulo ECX, & anguli apud X, & V sint recti, erunt æquiangula triangula, & quia ponitur VM maius, quàm XC, vtpote sinus perpendicularis anguli maioris existentibus ęqualibus ML, & CD tanquàm radijs circulorum, qui ducerentur centro L, & D. Ideo erit quoque NM basis maior, quam EC, cum ergo crura NL, & ED ponantur æqualia sicut, & ML, & CD patet ex 26. lib. 1. angulum MLN esse maiorem angulo EDC.

Aduerte autem, quod etiam si imagineris crus ML commune triangulis OLM, & NLM disiunctum, & depressius nihil interest; valet .n. eadem prop. eo quòd semper posset fieri angulus OLM immediatus; si placeret, ita vt in latere ML communicaret.

TRACTATVS XXIII.

SPHAERICORVM PARS PRIMA.

De Sphæra contactibus, & ſectionibus in genere.

SPhæricorum Tractatus ferè abſolutè eſt neceſſarius ad triangula ſphærica ſine errore ſoluenda: Vnde antequam ad eorum notitiam transferamus animum, quæ magis neceſſaria ſunt breui ſphæricorum compendio complecti opus fuit.

EXPENSIO I.

De principijs.

QVædam principia huic tractatui deſeruientia primò proponenda ſunt, & præcipuè definitiones eorum, quæ in ſuperficie ſpęræ puncta imprimi, & circuli deſcribi poſſunt.

DEFINITIO I.

SPhæra eſt figura ſolida vna ſuperficie comprehenſa circulis æqualibus vbique circumſcriptibilis, ad cuius extimam ſuperficiem à puncto medio lineæ terminantes, æquales ſunt.

DEFINITIO II.

CEntrum verò ſpheræ eſt prædictum punctum.

DEFIITNIO III.

AXis ſphæræ eſt recta quędam, quæ per centrum tranſit, & in ſuperficiem ſphæræ terminat.

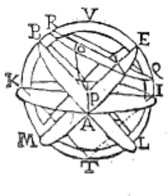
DEFINITIO IV.

POli ſun: extrema puncta ipſius axis.

DEFINITIO V

POlus circuli eſt punctum in ſphæræ ſuperficie, à quo omnes lineæ ab eo deſcendentes, & in ipſum circulum terminantes, æquales ſunt.

Itaque centrum ſphęræ erit P Poli I, K terminantes axem ſilicet lineam KI, ſeu veram, ſeu mente conceptam per P centrum ſphęræ tranſeuntem. Poli verò circuli IAK ſunt T, & V, quia omnes lineę, VE IT, & IK terminantes in marginem circuli IAK erunt ęquales;



ſphęra verò ſuper axem KI volui imaginatur, ſi quando in orbem volui concipitur.

DEFINITIO VI.

CIrculus maximus ad maximum inclinat cum arcus minor quadrante circuli vtrique perpendicularis eorum inclinationem menſurat.

Minorum verò inclinatio eſt angulus acutus inclinationis ipſorum planorum.

DEFINITIO VII.

SImiliter verò, & æquè inclinant circuli, cum arcus angulum inclinationis menſurantes fuerint æquales.

Itaque circulus maximus EAM inclinat ad circulum maximum IAK; quia acutus angulus inclinationis iuxta defin. 4. Tract. 22. IPE menſuratur circuli maximi IVKT perpendicularis vtriſque arcu IQE: huic verò inclinationi circulorum EAM, & IAK eſt ſimilis inclinatio circulorum BAL, & IAK; quia arcus KB eſt ęqualis arcui IQE.

At in circulo minori QR angulus inclinationis menſuratur arcu OP in plano perpendiculari vtrique deſcriptus VITK, centro communi trium eorum interſectione.

DEFINITIO VIII.

CIrculus circulum tangere dicitur, qui tantùm vnico puncto alterum contingit.

Quoniam ſi ſecat iam duobus punctis alterum attingit ex propoſ. 8. lib. 3. Elem. Sic QR circulus ſecat circulum VITK; quoniam duobus punctis Q & R illum attingit.

DEFINITIO IX.

CIrculi intelliguntur tanquàm planæ ſuperficies quædam ſphæram interſecantes, & in eius ſuperficiem terminantes.

DEFINITIO X.

ÆQualiter verò diſtant à centro, cùm perpendiculares in illos à centro cadentes æquales fuerint, & ille magis, vel minus diſtare dicitur, cuius perpendicularis fuerit maior, vel minor.

EXPENSIO II.

De ſitu Sphæræ.

ANtequam ad contemplationem ipſius ſphęræ accedamus quædam de eius ſitu, ſeu collocatione ſunt conſideranda, quæ ad ipſam ſphęræ conſiderationem viam ſternunt.

THEOR. I. PROPOS. I.

Sphæra planum, vel lineam, in eo, à quâ non ſecatur, non tangit in pluribus punctis, quam vno.

*PRobatur. Nam ſphęra componitur ex circulo circùm acto, aut certè circulus poteſt duci, quàquà verſum per punctum contactus in ipſius ſphęræ ſuperficie ex def. 1. Sed circulus non tangit lineam in pluribus punctis, quàm vno, ergo neque circuli in ſphęra deſcripti tangent vllam lineam in plano deſcriptam, & per contactum tranſeuntem in pluribus punctis. Ergo neque ſphęra ipſum planum, non niſi in vnico puncto continget; alioquin linea in plano duci poſſet, quæ duos contactus coniungeret, & circulus in ſphęra, & ſic circulus contingeret lineam in duobus punctis.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si Sphæra planum, vel in eo lineam tangit, recta linea à centro ſphæræ ducta ad contactum, ipſi plano, vel lineæ in eo perpendicularis erit.

*PRobatur. Quoniam, ſi intelligantur per contactum, circuli tales ducti, qui per centrum ſphęræ tranſeant, vt OD, iſti cum centro E ſphęræ commune centrum conſequentur; cùm tùm ſphęræ, tùm circuli centrum ab ambitu ipſorum æquidiſtet ex def. 15. lib. 1. Elem. & def. 2. huius: Sed omnis linea à centro circuli ducta ad cōtactū alicuius lineæ, ipſi pr 20. l 3. lineæ perpendicularis eſt; Ergo omnis circuli per contactum ducibilis, lineę rectę, vt BA in plano exiſtenti, & per eius contactum tranſeunti EO perpendicularis erit: Quapropter etiā ipſa linea EO ipſi plano BA perpendicularis erit ex def. 1. Tract. pręced. cùm omnibus lineis rectis in ipſo ducibilibus rectâ incidat.

COROLLARIVM.

HInc ſi ſphęrâ tangit planum, & à contactu erigatur perpendicularis, hęc in centrum ſphęrę producta incidet: Quòd id eueniat ex 21. lib. 3. Elem. lineę EO perpendiculariter à puncto contactus circuli ſuper lineam tangentem AB erectę.

COROLLARIVM.

HInc excipies veram eſſe quoque propoſitionem conuerſam, nempe lineam rectam EO à centro circuli E in contactum O ductam eſſe plano normalem.

EXPENSIO III.

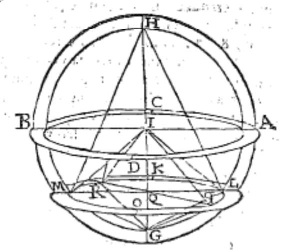
De Polis, Axe, Diametris, Centroque Sphæræ.

ACcedimus ad ea, quæ maiorem cum ipſa ſphęra cognationem habent, & ei intrinſeca ſunt; cum ſphęra ſine eorum conceptu aſſertiuè nequeat cognoſci.

THEOR. I. PROPOS. III.

Omnis ſectio ſphæræ circulus eſt.

*PRobatur. Nam aut ſecans planum per centrum tranſit, vel non: Si per centrum trāſit ducantur AI, & IB, nec non, & IH, & IG ad extimas partes in ſuperficie ſphęrę, quas planum ſecat, quę omnes erunt ęquales; ſiquidem pertingunt à centro ſphęrę ad eius ſuperficiem, verum, & pertingunt ad extimum ambitum plani ſecantis (ſiquidem extra ſphęram planū eā non ſecat) ergo ex defin. circuli planum ſphęram per centrum ſecans circulus eſt.

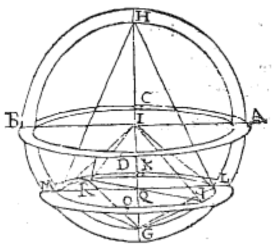


At ſi non tranſeat per centrum, vt LKMO ducatur ſaltem intellectu ad planum ſecans perpendicularis IQ, & ad extremos margines IR, & IM, & IP & IL, & omnes erunt ęquales, vtpote pertingentes à centro ad ſphęrę ſuperficiem, & triangulorum QIR, QIM, QIP, & QIL, & cęt. erit commune crus IQ anguluſque Q vbique rectus. Quare poterunt collocari in ęqualibus ſemicirculis, quorum diametri ęquales IR, & LM ex prop. 28. lib. 3. quibus eadem ſubtenſa erit IQ: quare ęquales arcus in ſemicirculis ęqualibus auferet ex prop. 23. lib 3. elem. quare, & reſidui arcus eſſent ęquales, qui ſubtenderentur à QR, & QM, QP, & QL, Proptereaque etiam ex prop. 33. lib 3. ipſę ſubtenſę RQ & QM, ſic QP, & QL erunt ęquales; & cùm de omnibus idem argumentum valeat, itaque omnes ad ambitum plani ſecantis ductę erunt ęquales, quamobrem KMOL circulus erit ex def. 21. el.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Si in sphæra sit circulus, & centrum circuli cum centro sphæræ recta connectatur, hæc erit plano circulari perpendicularis.

SIt circulus LKMO, cuius centrum Q nectat linea QI cum centro sphæræ I. Dico *hanc esse ei perpendicularem.*



Probatur. Nam ex def. I. tract. preced. tunc erit perpendicularis aliqua alicui plano, cùm omnibus lineis, quæ in ipsa trahi possunt, erit perpendicularis. Sit igitur linea FQR, connectanturque eius extrema PR centro sphæræ I. Demonstrabitur itaque IQ lineæ RQP esse perpendicularem. Certum est IP, & IR esse equales. Nam à centro sphæræ in circumferentiam desinunt; sic quoque QP, & QR. Nam à centro circuli in peripheriam ipsius terminantur. Linea verò IQ est latus idem ambobus triangulis. Ergo triangula IQP, & IQR erunt æqualia. Ergo, & anguli æqualibus basibus subtensi, erunt æquales; quarè angulus FQI angulo RQI æqualis erit; & ideo vterque rectus ex 23. primi Elem. Idem argumentum valet de linea LM, & de omni alia. Ergo omnibus lineis ducibilibus in plano LKOM erit perpendicularis, quare, & ipsi plano.

COROLLARIVM.

HInc educes veram esse quoque propositionem conuersam; nempe lineam rectam perpendicularem à centro circuli eductam in sphæræ centrum cadere: Nam, cùm anguli ad Q sint recti, & QI communis, & QR, & QM, & cęt. vt pote radij æquales, erunt ex propos. 22. lib. I. Elem. æquales bases IM, & IR, & cæt. Vnde I erit sphæræ centrũ, cùm omnes, quæ ab eo puncto in sphæræ superficiem cadunt, sint æquales.

PROBL. I. PROPOS. V.

Datæ Sphæræ centrum inuenire.

SEcetur sphęra plano quodam, quod circuli erit superficies ex 3. propos. huius, vt LKMO, & ab eius centro perpendicularis erigatur QI, quæ ex præced. Coroll. cadet in centrum: prolungetur vsque ad peripheriam sphęræ, & sit GH; diuidaturque bifariam in I, & punctum I centrum erit sphęræ.

* Probatur: Nam iam ostensum est Coroll. preced. propos. QI in centrum sphęræ impingere; cùm ergo pertingat ad peripheriam sphęræ in G, & H, patet, quòd bifariam diuisa dabit centrum sphęrę, cùm centrum sphęrę ab eius superficie æqualiter distare debeat.

THEOR. III. PROPOS. VI.

Si in Sphæra sit circulus, & à centro sphæræ in circulum ducatur perpendicularis; hæc producta in polos circuli cadet.

SIt perpendicularis IQ producatur vsque ad circumferentiam sphęræ G. Dico G *esse polum circuli.* Connectatur GP, & GR.

Prob. In triãgulis GPQ & GQR ãgulus ad Q tũ huius, tũ alius triãguli rectus est, licet id figura nõ exprimat, & ideo ambo æquales; latus verò QG commune. At latera QP, & QR æqualia, vtpote radij: Ergo ex 4. primi, bases erunt equales; nempe GR, & GP. Ergo ex def. 5. huius G est polus circuli; idem dicas de puncto H, in quo desinit perpendicularis GIH, si intelligas connecti cum M, L extremis lineę ML, vel cum quibuslibet alijs.

THEOR. IV. PROPOS. VII.

Si à polo circuli ducatur perpendicularis ad planum circuli; hæc cadet in centrum eius, & producta cadet in alterum polum.

SIt linea GQ, quę à puncto G cadat in Q perpendiculariter. Assero *punctum Q esse circuli centrum.*

Transeant per Q quęlibet lineę, vt RP, & alię plurimę; sed hęc pro reliquis sufficiat; connectaturque GR, & GP, cum G sit polus circuli ex definitione GR, & GP erunt equales, & consequenter perpendicularis ex G super linea QP cadens ex 9. Elementorum diuidet RGP angulum bifariam. Quare, & basim, vnde equalis erit lineã RQP lineę QR. Propterea que Q erit circuli centrum; cùm, & eodem modo possit probari de omnibus alijs lineis.

Probatur 2. pars, quòd transeat quoque per alium polum. Quoniam per centrum circuli transit, estque perpendicularis plano circuli transibit quoque per centrum sphęrę; quare ex propos. 6. huius & per alium polum transibit.

THEOR. V. PROPOS. VIII.

Si in Sphæra ducatur recta per polos alicuius circuli; hæc per circuli, & sphæræ centrum transibit.

PRobatur rectę HL, & HM sunt equales, sicut, & GL, & GM; quia ducuntur à polis ad circũferentiam circuli ex def. 5. huius; latus verò HG est commune; ergo triangula HMG, & HLG equalia; quamobrem erunt quoque equiangula, vnde bases QM, QL ex prop. 23. l. I. in triangulis HQM, & HQL erunt equales, & ideo Radij circuli erunt.

Anguli etiam ad Q equales, & ideo recti. Quare HG erit perpendicularis quapropter ex Coroll. prop. 4. huius, sphęrę per centrum, linea HG coniungens polos transibit.

COROLLARIVM.

EX omnibus istis propos. euidens fit: polos duos circuli, centrum eius, & sphęrę esse in eâdem rectâque lineâ ad planum circuli perpendiculari; quæ est sphęrę diameter, cum transeat per eius centrum. Vnde si perpendicularis transeat per vnum ex dictis punctis transibit etiam per reliqua omnia; sicut, & quę transit per duo quęque erit perpendicularis, & per alia transibit.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Dati circuli in sphæra diametrum inuenire.

IN circulo super superficiem sphęrę descripto tria puncta signentur, & acceptâ circino eorum distantia vnius cuiusque à duobus alijs, notetur AB puncti A à B, & AC puncti A à C, & BC puncti B à C; ductisque lineis AB, AC, BC; lineis BC, & AB, vtpote minoribus, duę perpendiculares CD, AD; à punctis A, & C, in quibus AC basis, & maior distantia terminat, exeant, & à pũcto D, in quod concurrunt ad B ducatur linea, quam affirmo esse circuli diametrum in sphęra descripti.

Probatur. Quia angulus apud C, & A rectus est, erunt reliqui tum huius BCD, tum alterius BAD duobus rectis equales. Vnde, & compositi simul omnes duobus rectis sunt equales: Ergo ex prop. 25 tertij quatuor pũcta ABCD erunt in circumferentia circuli. Ducatur itaque circulus, quia angulus est rectus ad C, & alter ad A. Ergo ex 28. tertij erit in semicirculo; quare BCD erit semicirculus. Ergo BD diameter. Erit autem diameter circuli, illi, qui in sphęrâ est, ęqualis, quòd triangulum ABC illi triangulo, qui in circulo sphęrico fieret sit ęqualis ob ęquales AB, & BC, & AC distantias, ęqualia verò triangula in ęqualibus peripherijs ęqualium circulorum necesse est esse, cum ob ęquales angulos, similes, nempe ęqualium numero graduum, arcus sint ęquales ex prop. 26. tertij.

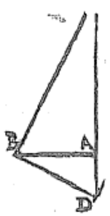
COROLLARIVM.

HInc centrum circuli nullo negotio inueniemus; diuisus enim diameter bifariam ipsum dabit ex prop. I. tertij.

PROBL. II. PROP. X.

Diametro sphæræ æqualem lineam inuenire.

CIrculus quicumq; in sphęra describatur polo G ad placitum electo in fig. pr. 4. & ex prop. 9. eius radius reperiatur QM, qui sit AB, & erigatur perpendicularis AD, assumpta verò distantia poli G à circuli peripheria GM centro B interuallo GM describator portio circuli, quę secet AD in D, & ducatur BD; deinde ipsi BD erigatur à puncto B perpendicularis BC; producaturque DA in C, & erit DC diametro sphęrę equalis.



Probatur triangulum CBD est equale triangulo GMH; Ergo basis DC erit equalis diametro HG: Quod verò CBD sit equale triãgulo GHM patet. Nam AB est equalis ipsi QM, & BD ipsi GM angulus verò apud A rectus, vt ãgulus ad Q: Ergo vt pr. seq. p. 2. arguam triangulum ex II. pr. l. I. el. ABD triangulo CQM est equale; Angulus verò totus CBD rectus est; Ergo equalis recto M toti: Vnde, & pars ABC residua residuo QMH erit equalis cum QMG, & alia pars anguli B ostensę sint equales ex equalitate totius trianguli BAD, triangulo QGM. Anguli verò apud A, & Q recti sunt, & basis QM basi AB equalis ex effectione: Vnde triangulum quoq; ABC ex prop 27. primi triangulo QHM erit equale; ideoque totum triangulum DCB toti CHM erit equale, cũ partes vnius partibus alterius ostensę sint equales. Vnde, & basis CD basi, & diametro sphęrę GH equalis erit.

EXPENSIO III.

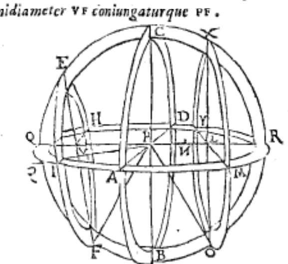
De circulis maximis, & minoribus.

CVm præcipuus scopus huius tractatus sit de circulorum intersectionibus agere; vtpote, quia earũ cognitio ad Trigonometriam sit omninò necessaria; priùs de ipsis circulis agendum est, & eorum natura scrutanda, vt inde ipsorum sectiones inuicem agnoscamus.

THEOR. I. PROP. XI.

Circulorum, qui in sphæra fiunt illi maximi sunt, qui per sphæræ centrum ducuntur; Æquales, qui æqualiter distant à centro, Minores, qui longiùs remouentur.

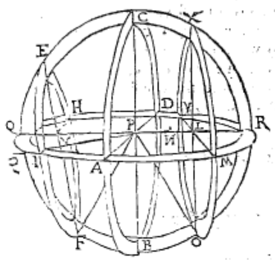
PRobatur prima pars: Nam sit circulus ABCD per centrum ductus, & EPIH non per centrum ductus. Dico *ductum per centrum esse maiorem, coniunctis enim eorum centris PV, ducatur semidiameter VF coniungaturque PF.*



Probatur

Probatur. Quoniam triangulum PFV est rectangulum, maior erit basis PF, quolibet latere, vt VF, qui semidiameter est, vtpote opposita lateri maiori ex propos. 18. primi: Sed basis est æqualis lineæ PB, vtpote semidiametri: Ergo semidiameter BP est maior semidiametro VF. Ergo, & circulus maior; & sic potest fieri demonstratio de quolibet alio.

Si verò distent à centro sphęræ æqualiter dico circulos fore æquales, quæ est secunda pars. Nam cum PVF, & LOP sint rectagula ex II. secundi habebunt quadrata basis æqualia duobus quadratis laterum: Sed bases sunt æquales, vtpote radij. Ergo, & ipsarum quadrata. Quare, & quadrata laterum nimirum laterũ OL, & LP simul quadratis laterum PV, & VF simul: sed perpendiculares LP, & PV præsupponuntur æquales: Ergo, & eorum quadrata: vnde, & residua quadrata OL, & VF remanebunt æqualia: Verum quadrata æqualia habent latera æqualia. Ergo latera, & simul radij OL, & VF erunt æquales. Ergo, & circuli quorum sunt radij erunt æquales.



Prob. tertia pars, quòd ille circulus sit minor, qui magis remouetur à centro sphęrę. Nam cùm semper, vt semidiametri sphęræ, bases sint æquales quadrata basium ipsarum, & ideo laterum simul sumptorum, vt priùs erunt æqualia: sed modo ponitur maius V. g. PV, quam PL. Ergo, & quadratum PV erit maius, quam lateris PL, & consequenter quadratum VF minus, quam OL lateris: Quare, & latus ipsum, radiusque VF, erit minus, quam latus OL, simulque radius: Ergo, vt circulus eius radij VF minoris, minor erit.

COROLLARIVM

HInc potes deducere propositionem esse intelligendam inuerso modo, nempe maximos circulos etiam per sphęræ centrum transire; ęquales ęqualiter distare à centro, & minores magis ab eo remoueri: Nam si istę propositiones inuersæ non essent veræ, nec illę directæ veræ forent; vt patet consideranti.

THEOR. II. PROPOS. XII.

In circulo maximi circuli mutuò se secant bifariam.

SInt duo circuli maximi in sphęra CBAD, & RAQD. Dico *eos se secare in duas partes æquales*.

Probatur. Nam transeunt ambo, cùm sint maximi ex ante ced. per sphęrę centrum, quare sphęræ centrum erit centrum vtriusque circuli; non autem esset centrum vtriusque, nisi sit in communi eorum concursu, seu sectione DA: quare DA transibit per centrum vtriusque circuli. Ergo erit diameter: ergo ea sectio circulos maximos ambos, vt diametri proprium est ex def. 17. l. I. el. tract. 4. bifariam secabit.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Circuli se mutuò ex æquo partientes sunt maximi.

PRobatur. Nam ex præced. eorum sectio AD transibit, cum sit diameter, per vtriusque centra. Ergo centra erunt in vtroque eadem: quare, & eadem, quod centrum sphęræ in P: alioquin, si essent extra P in N; linea, quæ per ambo transiret puncta N, & P, & pertingeret vsque ad circumferentiam, tum sphęræ, tum circuli, quæ est eadem, aut esset æqualiter diuisa in N. Ergo non esset in P, & sic superficies sphęræ non æquidistaret à suo centro, aut esset æqualiter diuisa in P: Ergo non in N centro circuli, vt fingitur, & sic RN, & NQ, qui finguntur semidiametri non essent verè tales, cum non essent æquales: ideoque maximi ex II. h. cum eorum centrum sit idem, ac sphęrę.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si in sphæra maximus circulus circulum quemlibet secet ad angulos rectos; etiam bifariam illum secat, & per polos.

SIt circulus maximus in sphęra RDAQ, qui secet quemcumque OX orthogonaliter, dico, *quod per polos eum secat, & bifariam.*

Ducatur in eo plano orthogonali RADQ à cētro P sphęræ perpendicularis LP plano OXMY; hęc transibit ex Coroll. propos. 4. per centrum L circuli OX, siue maximi, siue non maximi, & per polos RQ. Ergo etiam planum, in quo perpendicularis est; nempe superficies circuli maximi RDQA per polos, & per centrum transibit, quare planorum maximi, & alterius circulo concursus, & sectio YM fiet in centro L, linea itaque sectionis YM per alterius cuiuscumque centrum transibit. Ergo erit diameter eius; ergo diuidet ipsum quemcumque bifariam ex def. 17. lib. I. el.

COROLLARIVM.

HInc est, quod etiam inuersè propositio intelligenda sit. Nempe circulum maximum per polos cuiuslibet alterius transeuntem bifariam, & orthogonaliter illum secare; quòd tunc linea RQ in maximo per polos R, & Q ducta sit perpendicularis, & per centrum alterius transeat ex Coroll. propos. 8. quare, & superficies RAQD perpendicularis erit ex 15. propos. tract. 21. & sectionem efficiet radium.

Item per polos, & orthogonaliter, & bifariam non maximum OX secantem, maximum circulum esse; Quia diameter, vel orthogonaliter, vel bifariam secantis RDQA ductus per polos alterius non maximi OX, vel per centrum L; etiam per centrum sphęræ transibit ex Coroll. propos. 8. huius, & consequenter erit diameter circuli maximi ex prop. II. huius.

CO-

COROLLARIVM II.

HInc etiam est, quòd poli alicuius circuli maximi ab eo quadrante distent. Nam sit circulus DCBA, qui secetur bifariam à circulo RCQB, & per polos QR; igitur CQB erit semicirculus. At polus æqualiter distat à circulo, cuius est polus defin. poli. Ergo dimidio semicirculo idest quadrāte QB, vel QC distabit, & sic de quocũq; alio circulo dicetur, qui per polum Q transeat. Quamobrem vndequaque peripheria CABD à polo Q quadrante distabit. Vnde vera etiam erit conuersa propos. quòd si peripheria alicuius circuli à polis suis quadrante distet, illa sit peripheria maximi circuli. Nam si CABD circulus secat RCQB circulum secantem per polum suum in distantiam quadrantis CQ, & QB erunt duo quadrantes CQ, & QB, semicirculus. Vnde bifariam quoque circulum maximum RCQB secabit; quare, cum & ipse ABDC secetur bifariam, quòd secetur orthogonaliter ex 8. huius. Ergo erit circulus maximus ex 13. huius circulus ABDC.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Maximus circulus, si per polos alterius maximi transeat, & iste per polos illius transibit.

SIt circulus maximus CBDA, qui transeat circuli maximi RAQD per polos B, C. Dico, & hunc RADQ per polos illius R, Q transire.

Probatur. Nam, si DBAC per polos circuli RAQD transit. Ergo rectus est ex Coroll. propos. præced. Ergo, & iste RADQ rectus erit: Vnde per polos eius transibit ex propos. 14.

COROLLARIVM.

COllige. Quod si duo maximi circuli habeant in eodem circulo maximo polos, quòd inuicem se secabunt, & sectio mutua à circulo, in quo polos habent distabit quadrante. Nam etiam circulus V. g. RCQB habebit polum in circulis CABD, & RAQD, qui in ipso in RQ & CB polos habent, ideoque habebit in loco communi vtrisq; quæ est sectio A, & D, cumque poli distent per quadrante à sectione, ideo C, & R, B, Q circuli RCQB puncta à sectione A quadrante distabunt; sicut, & à D.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Puncto dato in sphærica superficie ex dato diametro sphæræ circulum describere maximum.

CIrca diametrum datum describatur circulus seorsim, qui erit æqualis circulo maximo in sphęra describendo, quem diuidemus in quatuor quadrantes, & vnius quadrantis assumpto interuallo RC dato puncto R describemus circulum ABCD, quem *aio esse maximum*.

Ille est circulus maximus, qui à polis suis per quadrantem vndique distat ex Coroll. 2. prop. 43. sed hunc duximus quadrante circuli distantem. Ergo est circulus maximus.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Per duo puncta data circulum maximum describere dato circulo aliquo maximo.

FActo polo in ipsis punctis V. g. R, & C interuallo circuli maximi alicuius dati à suo polo, ducantur duo circuli, vt RAQD, & CBAD illi enim erunt maximi, eo quia omnes maximi sint æquales, quòd habeant pro diametro ipsum sphęræ diametrum: deinde facto polo in communi eorum interlectione V. g. in A eodem interuallo ducatur circulus. Nam hic transibit per R & C puncta data, & erit maximus.

Probatur. Nam quod sit maximus patet. Interuallo enim circuli maximi ductus est, quòd verò transeat per duo puncta data.

Probatur. Quia circulorum primo ductorum RAQD, CBAD cōmune punctum est A in quo se secant. Ergo ibi facto polo ex prop. 15. circulus ductus transibit per polos amborum, sed puncta data R, & C sunt amborum poli. Ergo per ea cirlus transibit.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Cuiuslibet circuli in sphæra dati polum inuenire.

ELectis in circulo EIHF duobus punctis H, I diuidatur bifariam ex 34. tertij vterque arcus HEI, & HFI in E, & F, perq; ex præc. agatur circulus maximus RCQB. Diuidatur autem intercepta circumferentia inter E, & F bifariam in Z; *& erit in diuisione circuli polus Z.*

Probatur. Quia circulus ductus RCQB secat datum HEIF ec constructione bifariam. Ergo ex propos. 13. trānsit per eius polos, & poli sunt in ipso; sed polus æquidistat à circumferentia sui circuli. Ergo erit in meditulio Z, sic enim ęquè distabit ab E, & F.

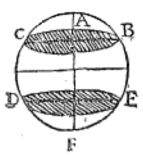
EXPENSIO III.

De circulis minoribus parallelis.

SPecialem merentur expensionem circuli paralleli, vtpote illi, qui diurni motus in Cœlo quædam quoad sensum vestigia sunt, & eorum cognitio, tum sphęricę cęlesti doctrinæ, tum sciantherice præcipuè inseruiat.

THEOR. I. PROPOS. XIX.

In sphærâ paralleli circuli circa eosdem polos sunt.



SInt in sphęra ABCDEF paralleli BC, & DE. Dico *eos esse circa eosdem polos.*

Sint enim poli circuli BC punctum A, & F, connectantur linea AF, quæ transi-

transibit per centrum sphæræ ex huius propos. 8. cum ergo circuli præsupponantur paralleli erit perpendicularis ad circulum DE. Vnde per eius polos transibit ex Coroll. expens. 2.

THEOR. II. PROPOS. XX.

In sphæra circuli, qui sunt circa eosdem polos, sunt paralleli.

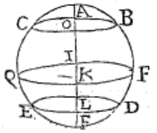
SIt eadem sphæra ABEFCD, circaque eosdem polos A, & F sint duo circuli BC, & DE. Dico *esse parallelos*.

Probatur. Nam ex Coroll. propos. 8. per centrum amborum transibit linea AF eosdem polos communes connectens; quare erit ad vtrosque perpendicularis. Vnde erunt illi circuli paralleli.

THEOR. III. PROPOS. XXI.

In sphæra non sunt plures circuli æquales, & paralleli, quàm duo.

SInt in sphæra, si fieri potest, plures circuli æquales, & paralleli, quam duo CB, QF, ED, connectanturque eorum poli recta AF; quæ transibit pee I centrum sphæræ, & per O, K, L, centra circulorũ ex 19. h. & quia æquales ponũtur, æqualiter distabunt à centro ex propos. 11. Vnde ex def. 7. perpendiculares erunt æquales. Æqualis igitur erit perpendicularis XI perpendiculari LI, quod esse nequit, pars enim toti æquaretur.



TRACTATVS XXIII.

PARS SECVNDA.

De intersectionibus maximorum circulorum inuicem.

TRigonometriæ ad euitandas fallacias penitùs necessarium est agnoscere genericas triangulorum sphæricorum proprietates, tùm quoad latera, tùm quoad angulos, de quibus primò egit Menelaus, & post ipsum Gebrus Maurolycus, Copernicus Regiomontanus, & alij, quàm plurimi: sed nos, quæ doctrinæ trigonometricæ sphæricæ deseruiunt, tantummodò adferemus.

EXPENSIO I.

De principijs.

INtersectiones maximorum circulorum in superficie sphæræ omnimoda efformant triangula, & prorsus eorundem generum, quæ lineæ rectæ, se inuicem secando efficiunt; vnde hic, & Scalena triangula, & Isoscella, & Amblygonia, & Oxigonia, & Rectangula admittuntur, quorum definitiones iam exhibitæ sunt, vnde reliquas adferemus.

DEFINITIO I.

TRiangulum sphæricum est quòd tribus arcubus maximorum circulorum se intersecantibus continetur.

DEFINITIO II.

ANguli sphærici mensura est arcus maximi circuli, cuius polus est in ipso angulo duorum arcuum, quos secat.

DEFINITIO III.

ANgulus sphæricus est, quem in sphæræ superficie duo arcus maximorum circulorum se mutuò secantes continent.

DEFINITIO IV.

ANgulus verò rectus, quem duo arcus circulorum maximorum orthogonaliter se secantium continent.

DEFINITIO V.

ACutus verò, qui minor, obtusus, qui maior recto est.

LEMMA I. PROP. I.

Datis duobus arcubus maximorum circulorum, quorum neuter semicirculo maior sit, de maiori æqualem minori portionem abscindere.

HOc fit assumendo subtensam AB æqualem subtensæ arcui minoris, & applicando il-

aml

lam arcui maiori ACD, vt sit AC; arcus enim, quem subtendit, erit æqualis minori arcus AB.

Probatur. Omnes enim circuli maximi sunt æquales; Vnde ex 2. lib. 3. auferent subtensæ inuicem æquales arcus æquales AB, & AC.

EXPENSIO II.

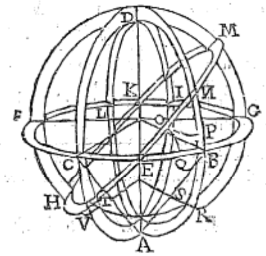
De angulis triangulorum sphæricorum.

ANtequam de totis triangulis pertractemus angulos ipsos seorsim breuiter opus est considerare.

THEOR. I. PROPOS. II.

Duo circuli maximi mutuò se secantes continent duos angulos inter se æquales.

SInt circuli maximi ACDI, & ABDL, qui se intersecent in D, & A, ducaturque polo D, vel A, circulus maximus BCFGIL. Dico *angulum* BAC *esse æqualem angulo* BDC.



Prabatur. Quia eodem arcu BC ex defin. 2. mensurantur, qui est arcus circuli maximi in angulis A, & D polos habentis.

PROBL. II. PROPOS. III.

Si duo arcus maximorum circulorum se mutuò secuerint; angulos ad verticem æquales inter se efficient.

DIco *angulos ad verticem* E *nimirum* GEM, & HEF *æquales esse inuicem*, sicut, & FEM, & GEH pariter ad verticem E esse æquales.

Probatur. De primis GEM, & HEF, arcus enim qui polo E mensurant illos HF, & GM sunt equales, ergo, & prædictl anguli erunt æquales.

Probatur autem arcus esse æquales; nam MFH est semicirculus, sicut, & GMF, Ergo sunt æquales istę portiones, vtpote semicirculi: Aufer MF portionem communem; Remanebuntque æquales GM, & FH. Sic de alijs duobus argumentum texitur; sunt enim semicirculi FMO, & HGM: Aufer GM arcum communem, & remanebunt arcus GH, & FM, quibus mensurantur anguli GEH, & MEF, æquuales: Quare, & anguli erunt æquales, cum eorum mensura, qui sunt arcus maximi ex eorum intersectione ductl ex def. 2. sint æquales.

THEOR. III. PROPOS. IV.

Arcus super arcum insistens angulos, aut rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

SVper GEF arcum insistat arcus ENM. Dico *facere aut duos angulos rectos, aut duobus rectis æquales.*

Probatur. Nam sit perpendicularis; certum duos rectos angulos efficere. Si verò non sit, vt datus arcus; tunc GMF erit semicirculus nimirum æquiualens duobus rectis, estque mensura angulorum, quos insistens in E facit ex def. 2., vtpote ductus à polo E. Ergo, & anguli GEM, & FEM æquiualebunt duobus rectis.

THEOR. IV. PROP. V.

Cuiuscumque trianguli sphærici tres anguli sunt duobus rectis maiores.

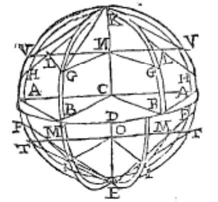
*PRobatur. Tres anguli cuiuscumque trianguli rectilinei sunt duobus rectis æquales: Quare si tribus arcubus se intersecantibus AB, & BC, & CA subtendamus tres lineas ille efficient tres angulos duobus rectis æquales; sed arcus supertensi magis deiscunt ad inuicem, & maiorem angulum efficiunt. Ergo tres arcus efficient tres angulos duobus rectis maiores.

Quod autem arcus faciat maiorem angulum in sphæra. Quam linea subtensa patet: Quia quodlibet planũ circuli maximi transit per axem sphæræ. Ergo quodlibet in eius superficie signatum punctum quantò magis remouetur ab axe, tantò magis remouetur ab alio in peripheria similiter signato alterius circuli. Ergo punctum S alicuius subtensæ AB minus remouebitur à T puncto alterius subtensæ CA, quam R, & V in peripherijs puncta signata, quæ magis remouentur ab axe DA, quam S, & T.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Angulus quicumque sphæricus est angulus inclinationis planorum.

SIt angulus sphæricus AKB. Dico *illum esse eundem, ac angulus inclinationis planorum.*



Probatur. Quia angulus AKB sphæricus mensuratur arcu AB circuli ABD, ad vtrosque perpendicularis: sed angulus ACB inclinationis planorũ ex Cor. 2. prop 4. Tract. 22. mensuratur eodem arcu. Ergo est idem angulus.

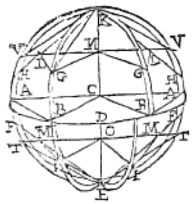
THEOR.

THEOR. VI. PROP. VII.

Si anguli sphærici sint æquales, etiam anguli subtensarum erunt æquales: si maiores, & anguli subtensarum erunt maiores: Si minores tales, & anguli subtensarum erunt.

SInt anguli FEI, & HKG spherici æquales, dico subtensas HK, & KG facere angulos apud K subtensis arcubus prædictis æqualibus FE, & EI apud E æquales in fig. parte sinistra.

Prob. Nam, si anguli spherici sunt equales, ex 6 h. & anguli inclinationis planorum erũt equales. Ducantur ergo perpendiculares ab I ad intersectionem planorum in O, & ab hoc pũcto O, alia normalis MO. Sic ducatur normalis GN ab arcu GK; qui æquatur arcui IE & rursus alia normalis NV, & ducantur GL, & MI facientes triangula LNG, & MOI.



Progress. 1. Anguli itaque inclinationis planorum erunt LNG, & MOI, sic TE, & VK erunt arcus æquales, cum sinus versi EO, & NK, vtpote arcubus æqualibus GK, & EI subtensi equẽtur; Cùm ergo etiam KH arcus sit æqualis arcui FE, vt supponitur, remanebunt TF, & HV arcus æquales, & propterea VKH, & TEF anguli ad peripheriam æqualibus arcubus VH, & FT insistentes erunt æquales.

Progress. 2. Cùm autem, & angulus VKN equetur angulo TEO, quòd sinus recti VN, & TO æqualiũ arcuum TE, & VK sint æquales & KN, & OE sint quoque æquales; anguli verò ad N, & O ex effectione recti, totum triangulum VKN toti TEO æquabitur & ideo anguli VKN, & TEO æquabuntur: Aufer itaque ab æqualibus VKN, & TEO angulos iam ostensos æquales VKH, & FET, & reliqui æquales restabunt LKN, & MEO.

Progress. 3. Quamobrem cùm EOT, & KNV sint anguli recti, & anguli prædicti apud K, & E æquales, & KN, & OE bases æquales; etiam ex prop. 27. lib. 1. Elem. triangula erunt æqualia MOE, & LKN erunt æqualia, & ideo crus NL cruri MO. Sed etiã NG æquatur cruri OI, & anguli MOI, & LNG ostensi sunt æquales, vtpote inclinationis planorum, igitur basis quoq; GL æquatur basi MI ex 22. l. 1. el.

Progr. 4. Sed iam EM æquatur cruri LK ex progr. 3. & GK ipsi EI, vt subtense æqualibus arcubus, ex hypothesi. Ergo triangula MEI, & LKG erunt æqualia, cùm habeant latera æqualia quodlibet suo correspondenti; quare etiam anguli subtensarum HKG, & FEI æquales erunt.

Probatur secunda pars. Nam, si angulus sphericus LKG, & ideo inclinationis planorum LNG est maior angulo spherico MEI, vel MOI planorum, & tamen sit æqualis arcus IE arcui GK, & HK arcui EF, erit sinus versus KN æqualis sinui OE, & NG rectę OI, sic VN rectę TO æqualis, & arcus VK arcui TE, vnde angulus HKV angulo TEF æqualis.

Eodemq; modo VKN erit æquale triangulo TEO ob angulos rectos ad N, & O, & æqualia crura EO, & NK, & angulos ad K, & E æquales. Quare rursùs LN æquabitur cruri MO; sed crus IO æquatur cruri GN angulus verò TOI est maior angulo VNG ex hypothesi, ergo, & basis MI basi LG ex propos. 15. lib. 1. Elem. ideoq; angulus FEI angulo HKG.

Et idem dicas si sit minor inclinationis planorum angulus.

COROLLARIVM.

PRopos. etiã intelligitur conuersa, nempe angulos subtensarum æquales equaliũ facere angulos inclinationis planorum, & sphericos æquales.

Sic suppositis HKG, & FEI æqualibus facta eadem constructione triangula VKN, & TOE erunt æqualia ratione prædicta, sicut, & triangula GKN, & EOI. Et ideo crura KG, & EI, nec non, & crura KH, & FE sicut, & anguli NKV, & OET, à quibus ablati æquales anguli VKH, & FET restarent æquales anguli NKL, & OEM, & æquales quoque recti apud O, & N, & crura NK; OE æqualia: Vnde ex prop. 27. l. 1. Elem. equalia quoque triangula NKL, & OEM propterea que, & crura ipsorum KL, & EM; & hinc triangula LGK, & EIM ob crura KG, & EI; sicut KL, & EM æqualia, & angulos LKG, & MEI ex thesi æquales. Quare etiam bases GL, & IM æquales. Et ideo quoque triangula NLG, & MIO ob tria crura tribus equalia, siquidem NL, & OM ob triangulorum NLK, & EOM æqualitatẽ equalia sunt sicut, & ob eandem OEI, & NKG triangulorũ æqualitatem æquantur OI, & NG, & bases GL, & IM ostensæ sunt æquales. Ideo triangulorum OIM, & GNL æqualitatem equales erunt anguli LNG, & MOI inclinationis planorum, & ideo spherici. Et idem dicas si sint, vel maiores, vel minores inuicem anguli subtensarum, nam tales erunt, & spherici.

EXPENSIO III.

De lateribus triangulorum sphæricorum, & eorum subtensis.

LAtera triangulorum sphericorum singulares quasdam proprietates obtinent, quas latera rectilineorum non habent; aut saltem non eodem modo; quare oportet agnoscere, in quibus conueniant, aut ab eis disconueniant.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

In omni triangulo sphærico latus quodcumq; minus est semicirculo.

PRob. In fig. pr. 2. duo latera DC, & DB cuiuscumque trianguli V. g. BDC, producta tandem conueniunt in semicirculo apud A, cùm sint arcus maximorum circulorum; qui in sphęra ex prop. 11. præced. partis se bifariam secant: Ergo latera trianguli seorsim sumpta minora erunt semicirculo.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. IX.

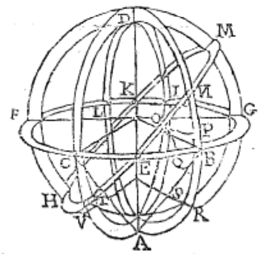
In omni triangulo sphærico duo latera tertio sunt maiora quomodocumque sumpta.

*NAm si maiora nõ sunt, mẽsurata super latus EN, quòd V·g. ponitur maius in triangulo NBE, ipsum æquabunt; ita vt pars ipsius lateris EN, quę V. g. sit ON equet latus NB, altera EO equet latus EB, ducantur circuli arcus minoris OP centro ipso angulo N, interuallo verò latere ON, & deinde alter OQ centro B interuallo crure EO, isti circuli se deberent tangere in O; & rursus in B cum sint mensurę laterum BN, & BE: quòd est impossibile ex propos. 5. tertij Euclid.

THEOR. III. PROPOS. X.

In omni triangulo sphærico tria latera simul, minora sunt integro circulo maximo.

*PRobatur. Sint latera KMN, & KGB conuenientia in K, & latere BN terminata, & faciant triangulum KNB, si producantur coibunt in E, & facient semicirculos KME, & KGE; & triangulum reliquum EBN. Sed huius trianguli latera duo EN, & EB sunt maiora crure BN ex prec. Ergo si addamus reliquis cruribus alterius trianguli, nempe



cruri KMN, & cruri KGB erunt simul hęc quatuor tribus KMN, & KGB, & NB trianguli propositi KNB cruribus maiora: Sed hęc crura quatuor faciunt duos semicirculos: Ergo tria crura cuiuslibet triãguli sunt minora duobus semicirculis, idest integro circulo.

EXPENSIO IV.

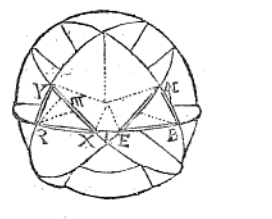
De angulorum, laterumque mutua dependentia, & relatione generica.

VIsis proprietatibus aliquot, tum laterum, tum angulorum secundum se, incipimus angulos lateribus conferre genericè, vt deinde in sequentibus eorum specificam dependentiam agnoscamus.

THEOR. I. PROP. XI.

Si duo triangula sphærica angulum angulo æqualem obtineant, crusq; vnum vni, alterum alteri æquale, etiam basem æquali subtensam angulo æqualem obtinebunt, eruntq; æqualia inuicem.

*SInt duo triangula spherica BNE, & ZYX, quę angulum E angulo X ęqualem habeant, crusq; EN cruri YX, & BE cruri ZX æquale. Dico *etiam basim* BN *basi* ZY *fore æqualem, & ideo triangula inuicem esse æqualia.*



Probatur. Nam subtensę eandem angulum rectilineum habebunt ex propos. 7. huius, & subtensa BE, ex propos. 33. tertij erit ęqualis subtensę ZX, NE subtensę YX. Ergo ex propos 12. lib. 1. element. etiam basis recta subtensa BN, erit equalis rectę subtensę ZY: Quare ex 32. lib. 3. & arcus BN ęquabitur arcui ZY.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Si duo triangula sphærica crus cruri, & aliud crus alteri cruri æquale obtineant, & angulus comprehensus sit maior altero; etiam basis opposita erit maior altera.

*PRobatur. Quia ponitur angulus sphericus BEN maior; quàm ZXY, erit ex prop. 7. h. & angulus subtensarum BEN maior subtensarum ZXY; quia verò arcus BE ponitur ęqualis arcui ZX etiam subtensa BE ęquabitur subtensę ZX, sic quia arcus NE ponitur ęqualis arcui YX talis erit, & subtensa NE ęqualis subtensę YX. Quia itaque triangulum subtensarum rectilineum habet crus cruri, & aliud crus alteri cruri ęquale, angulum autem comprehensum apud E maiorem, quàm angulus apud X erit, & basis recta subtensa BN maior, quam subtensa ZY; ex 24. lib. 1 el. quare ex prop. 22. lib. 3. & arcus BN maior erit arcu ZY.

 THEOR.

THEOR. III. PROP. XIII.

Si duo triangula sphærica habeant basim basi maiorē; crus verò vnum vni alterum alteri æquale, & angulum maiorem comprehensum obtinebunt.

ADsit maior basis BN basi ZY, & latera singula singulis æqualia, dico, & angulum E fore maiorem angulo X.

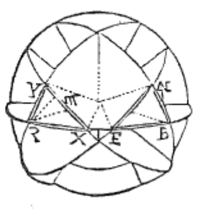
Probatur. Si enim talis non est, erit aut ęqualis, aut minor. Nam poteſt autem eſſe æqualis. Nam ſi angulus E eſſet æqualis angulo X, baſis quoque NB æquaretur baſi YZ ex 11. h. contra hyp. Non poteſt eſſe minor, quia ex pręced. maior angulus tunc eſſet angulus X; quare haberet quoque maiorem baſem ZY, quàm BN, & tamen è contrà BN ponitur maior, quam ZY ex hypotheſi.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si tria trianguli sphærici latera alterius trianguli tribus lateribus, ſingula ſingulis correſpondentibus ſint æqualia, habebunt etiam angulos correſpondentes, & æqualibus arcubus oppoſitos æquales.

SInt arcus BN arcui ZY, & BE alteri ZX, & tandem NE tertio YX ęqualis. Dico, *& angulos omnes quilibet ſuo correſpondenti, qui nimirum angulis æqualibus ſubtenduntur, eſſe æquales.*

Probatur. Nam cum arcus ponantur æquales etiam ſubtenſę ſingulę ſingulis erũt ęquales. Quare ex propoſ. 23. lib. I. erunt anguli rectilinei ſubtenſarum æquales: Ergo etiã anguli ſphęrici ex Coroll. propoſ. 7. huius, cum ſi angulus rectilineus ſubtenſarum ſit ęqualis, etiã anguli ſphęrici arcuum ſubtendentium ſiãt ęquales



THEOR. V. PROP. XV.

Si duorum triangulorum anguli duo quilibet ſuo correſpondenti, ſint æquales, & baſis adiacens æqualis alteri, arcus quoque, & latera ſunt æqualia.

DEntur E angulus ęqualis angulo X, & B angulo Z, & baſis BE baſi ZY in triangulis BNE, & YZX. Dico, *eſſe æqualia crura* NB *ipſi* ZY, *&* EN *ipſi* YX.

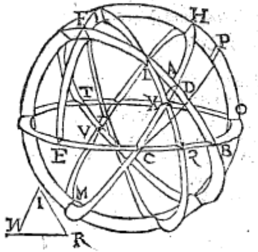
Quòd ſi non ſunt detruncetur XM ęquale crus cruri EN, & ducatur ZM.

Probatur. Quia ergo XM ęquat crus EN ex aduerſarijs, & ZX latus EB, angulus autem comprehenſus X ęquatur angulo E ex hypotheſi erit etiam angulus apud XZM ex huius prop. 11. ęqualis angulo B, cum, & ipſa tota triangula æqualia ſint. Ergo, & angulo XZY ipſi NBE ęquali; quòd eſt abſurdum, eſſet enim pars MZX ęqualis toti angulo apud Z in triangulo XZY, & ſic dicas de alio latere, vnde ſi anguli ad baſim ſinguli ſingulis in duobus triangulis ſphęricis ſint ęquales, & crura in ijs correſpondentia angulis ęqualibus erunt ęqualia.

THEOR. VI. PROPOS. XVI.

Si trianguli sphærici duo anguli æquales inter ſe fuerint, habebunt quoque latera ſubtenſa æqualia.

EXhibeatur triangulum BAC, angulique inuicem æquales ſint C, & B. Dico *latera quoque ſubtenſa* BA, *&* AC *eſſe æqualia.*



Nam ſi AB maius eſt, detruncetur id, in quo maius eſt arcu maximi circuli CDP, ergo æquale latus CA eſt lateri BD. At ex hypoth. angulus B angulo BCA eſt ęqualis, & arcus BC communis. Ergo triangulum BDC æquabitur triangulo BAC ex 10. huius, pars toti,, quod eſt impoſſibile.

THEOR. VII. PROPOS. XVII.

Si trianguli sphærici duo crura inter ſe æqualia ſint, etiam anguli oppoſiti inter ſe æquales erunt.

TRianguli ſphęrici BAC ſubtenſa latera ſint BA, & CA inter ſe æqualia. Dico, *& angulos fore æquales.*

Producantur enim latera æqualia BC, & CA vſque ad quadrantem in O, E, & H ſicut, & latus BA in F. Circulique maximi polis B, & C vtroſque quadrantes BE, & BF nectant EF ſicut CO, & CH arcu HO Aut ergo arcus OH, & EF conceduntur ęquales. Ergo etiam anguli B & C erunt æquales ob ipſorum menſuras æquales, quæ ſunt arcus FE, & HO, vel alter eſt maior altero, & tunc detrũcetur id, in quo maior eſt, & ſit HP; ducaturque arcus maximi circuli CDP, vel ergo tranſibit per A; ſed etiam tranſibit per C, ergo ſecat circulum maximum CH circulus maximus PC in duobus punctis, quæ ſemicirculo non diſtant contra prop. 12. p. 1. h. vel non tranſibit per A, ſed alibi V. g. in D. Ergo triangulum BDC aliud, quam CAB de quo eſt quęſtio, enaſceretur, vnde à propoſito exiremus.

THEOR.

THEOR. IX. PROPOS. XVIII.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur, & maius latus maiorem angulum ſubtendit.

ADſit triangulum ABC, in quo angulus BCA ſit maior angulo B. Dico *latus* AB *maius eſſe latere* AC. Fiat angulus BCD æqualis angulo B tunc

Probatur propoſ. Quia BCD, & DBC anguli ęquales ſunt, ex prop. 16. arcus quoque BD, & AC erunt æquales. Quapropter addito arcu DA arcui BD duo arcus DA, & BD ſunt maiores arcu DB. Ergo, & arcus BA totus oppoſitus maiori angulo ACB maior erit arcu CA.

Probatur ſecunda pars. Nam ſi ſit arcus BA maior arcu AC, angulum quoque oppoſitum BCA maiorem conſequetur angulo CBA.

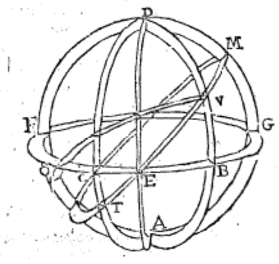
Nam ſi maior angulus ACB angulo B non eſt, erit aut æqualis, aut minor: Verùm æqualis eſſe nequit ACB angulo B. Nam ex 16. h. Latus quoque oppoſitum BA eſſet æquale lateri AC contra hypotheſim. Sed nec ACB angulo B minor eſſe poteſt; Quòd iuxta primam partem huius cum angulus B eſſet maior ſubtenderet quoque AC maius latus, quam BA, quod eſt contra præſuppoſitum, cùm dixerimus BA eſſe maiorem arcum, quam arcus AC.

THEOR. X. PROPOS. XIX.

Cuiuſcumque trianguli sphærici duo anguli ſunt æquales, ſi vnicus arcus productus vſque ad ſemicirculum, & alterius crus oppoſitum ſimul ſumpta ſemicirculo ſunt æqualia.

At ſi ſemicirculo ſint maiora, angulus oppoſitus lateri non producto erit maius, ſi minora minus alio angulo.

SIt triangulũ VDT, & VA cruris VD producti vſq; ad ſemicirculum in A, & crus oppoſitum TV angulo D ſint æqualia ſemicirculo DVA. Dico *etiam angulos* VDT *producto lateri* DV, *&* DTV *non producto* TV *oppoſitos eſſe æquales.*



Probatur. Nam quia VA, & VT ſunt ęqualia ſemicirculo DVA, dempto communi VA remanebunt latera VD, & VT æqualia. Quare etiam oppoſiti anguli apud D, & apud T erunt ęquales ex propoſ. 16. huius.

Si verò crus productum VA, & non productum VT. Sint maiora ſemicirculo DVA, dematur communis arcus VA, & remanebit crus productum DV minus, quam crus non productum VT. Quare, & angulus oppoſitus T minor erit angulo D ex propoſ. 19. huius. E contra dicendum eſt, ſi crura ſint minora productum AV, & non productum VT ſemicirculo DVA: Nam dempto communi VA remanebit maius crus DV, quàm VT: vnde maior quoque erit angulus T angulo D ex 19. huius.

THEOR. X. PROPOS. XX.

* *Si duo anguli alicuius trianguli ſint æquales, crus adiacens extra ſumptum vſque ad ſemicirculum æquabitur cum crure oppoſito alteri angulo, toti ſemicirculo; Si verò angulus adiacens cruri producto ſit maior altero, latus productum, & non productum erunt maiora ſemicirculo: Si verò angulus adiacens cruri producto ſit minor, latus productum, & non productum erunt minora ſemicirculo.*

SIt præcedens figura, & producatur crus VD trianguli VDT, & ob ęqualitatem angulorum apud D, & apud T in triangulo DTV arcui VT, arcus VD eſt æqualis: addatur arcus VA cruri VD erit ſemicirculus. Ergo, & additus arcus VA cruri ęquali VT efficiet ſemicirculum.

Probatur 2. pars. Si VD ſit minus crus, & VT ſit maius, eo, quod angulus oppoſitus T cruri VD ſit minor, quàm angulus D cruri VT oppoſitus, addita pars AV, quę iuncta parti VD faciebat ſemicirculum iuncta cruri VT maiori faciet magis ſemicirculo.

Probatnr 3. pars. Nam ſi VD ſit maius crure VT ob angulum VTD ei oppoſitum maiorem angulo D: addita pars VA ipſi VT minori ipſâ VD faciet ſemicirculo minus, quę iuncta cruri VD maiori faciebat ſemicirculum:

THEOR. XI. PROPOS. XXI.

Duo triangula sphærica æquiangula ſingulis angulis æqualitate reſpondentibus habebunt etiam latera illis ſubtenſa æqualia.

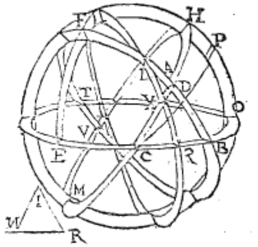
SIt triangulum RNI in fig. pr. 16. æquiangulum triangulo ZCX, ita vt Z angulo R, & X angulo I, & C angulo N ſit æqualis, dico, & eſſe ęquilaterum ſingulaque latera ſingulis lateribus ęqualibus angulis ſubtenſa ęquari.

Et quidem ſi concedatur ſaltem vnicũ latus ZC ęquale lateri RN, cùm anguli ad baſim ſint quoque ęquales, iam clarum eſt ex prop. 15. huius, cętera quoque latera ęquari, & totum triangulum toti eſſe ęquale.

Quęſtio itaque remanet, ſi omnia latera dicantur eſſe inęqualia, & tunc ſi ZC nõ ęquat RN ęquet illud maius CB, ita ſi CX non ęquat RI, ęquet illud maius CA, & ducatur BA, & ita triangulum BAC, ex 11. h. erit ęquiangulum triangulo ZXC, proptereaq; apud B angulus ęquabitur angulo apud Z, & X ipſi A interni, vnde, & externi LXC, & LAX. Sed ex

propoſ.

propof.2. huius angulus B ęquat etiam angulum T duorum femicirculorũ BAT, & BET: quare trian-



gulum ZLT habet duos angulos ęquales Z, & T ad bafim ZET. Vnde ex preced arcus productus BL, & oppofitus ZXL equabũtur femicirculo. Rurfus, quia externus X ęquatur angulo A externus verò A ęquatur angulo V, erunt anguli LXC, & V comprehenfus ab arcu XMV, & LFTV ęquales. Quare etiam ex prec. arcus AL productus, & LX oppofitus non productus erunt ęquales femicirculo; hoc autem eft abfurdum; quia funt partes crurum BL & ZL, quę vt fupra oftenfum eft, ęquant femicirculum.

EXPENSIO IV.

De laterum, & angulorum fpecifica dependentia.

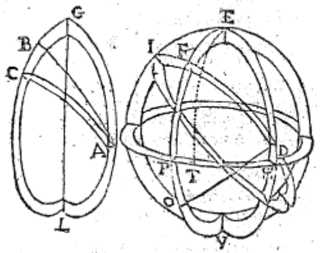
SPecies angulorum erit; fi fciamus; an fint acuti, vel obtufi, vel recti, & laterum an fint illa ęqualia quadranti, vel inęqualia, aut an polus fit in angulo oppofito, vel non fit, quem fubtendunt.

THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si detur aliquod triangulum, cuius duo anguli noti quantitate, & crus fubtenfum vni ex ipfis fit notum in quantitate; reliqua verò latera fint nota, nempe quòd fint, vel maiora, vel minora quadrante feorfim fumpta, non dabitur aliud triangulum, quod habeat angulum, aut crura reliqua in quantitate, aut maiora, aut minora dato.

SIt datum triangulum DFE, cuius duo anguli quantitate noti fint E, & F, & crus DF angulũ aliquem notum fubtendens; fit verò cognitum V.g. DE latus reliquum effe quadrante minus. Dico *non poffe dari aliud triangulum in eadem quantitate vel lateris*, & duorum angulorum, quòd deinde habeat reliquum angulum, feu crus aliquod dato, vel maius, vel minus.

Quod fi detur; fit illud CAG; cuius crus CG afferatur ab aduerfarijs maius crure FE, & ponatur nihilominus angulum G effe ęqualem angulo E, & C ãgulo F, & AC notũ quãtitate effe ęquale cruri DF; reliquaq; latera DE, & AG fint cognita in fpecie; nempe, quod ambo fint quadrante minora.



Affero non poffe hoc effe fine abfurdo, fiquidem crus CG ponitur ab aduerfarijs maius, quàm EF detruncetur crus ęquale CB. Quia igitur angulus C ex hypothefi ęquatur angulo F, & latus AC lateri DF & crus CB factum eft ęquale cruri FE; triangulum totum DFE ęquabitur triangulo ABC, & fic etiam angulus in eo B ęquabitur angulo E, cui ęquabatur ex hypoth. angulus G, erunt ergo ęquales angulus G, & B trianguli ABC; ideoque etiam angulus L ad femicirculos ęqualis ipfi G ęquabitur ipfi B; quare AB & AL latera oppofita cũ fint anguli ęquales ad bafim BL erũt ęqualia; Cũ ergo AL, & AB fint ęqualia, fi ipfi cruri AG addatur crus AB, ęquabitur femicirculo, vt ęquabatur priùs AG iunctum ipfi AL: Ergo crura AG, & AB funt femicirculo ęqualia ex 20. propof. huius; fed BA ęquat ED quadrante minus, ergo AG quadrante eft maius contra thefim. Quare aliud triangulum exhiberi nõ poterit ęqualium oppofitorum angulorum, & lateris, alijs lateribus fpecie notis, & deinde habeat crus aliquod minus altero dato.

Quòd fi detur triangulum, cuius DE crus notũ fpecie fit quadrante maius, & contendant aduerfari dari aliud non ei ęqualium laterum fit datum DEF, & ab aduerfarijs exhibitum ABC, cuius BA fit quadrante maius, & habeat crus CB minus, quam FE, dicaturque C ęqualis angulo F, & B, angulo E, & FD lateri AC: tunc prolungetur latus CB, vfque ad ęquationem lateris FE in G, eritq; triangulũ ACC ęquale triãgulo DEF ex prop. 11. h. ob C ęqualem angulo F, & crura ambientia correfpondenter AC ad DF, & CG ad EF ęqualia: quare angulus G ęquabitur angulo E, & ideo angulo B. Sed angulus G ęquatur angulo L, ergo LBA, & L ęquabuntur, ideoque & latera AB, & AL angulis oppofita ęquaiibus; Si ergo addas AG ipfi AB faciet duo crura ęqualia femicirculo: ex propof. 20. huius, fed AG ęquat DE maius quadrante. Ergo AB erit contra thefim minus quadrante.

Quare patet cur crura fpecie nota debeant effe; quia; fi non fit nota, tunc poteft dari triangulum quod habeat C angulum ęqualem angulo F, & G angulo E, & crus CA cruri FD; quod tamen habeat aliud crus angulo C noto oppofitum, nempe BA minus quadrante, quia tunc etiam angulus B ęquatur in CBA triangulo angulo G, & ideo angulo E, cum fcilicet BA eft minus quadrante; GA verò maius, vt fimul ęquent quadrantem: Vnde pro latere GA, de quo nefcimus, an fit, vel maius, vel minus quadrante, poffet inueniri crus BA, cum tamen velemus reperire crus AG.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XXIII.

Si triangulum fphæricum, cuius noti fint quantitate duo anguli, & nota quoque crura angulum incognitum claudentia, in quorum reliquo nõ fit lateris polus nullum aliud triangulum tale dabitur, quod reliquum angulum ignotum, aut crus habeat quantitate diuerfum.

COgnafcantur trianguli DFE duo anguli F, & E quoad quantitatem, & item quoad quantitatem, fint pariter nota duo latera claudentia angulum ignotum DE, & DF, in quo angulo ignoto polus lateris FE non fit. Dico, *quod omne aliud triangulum in cognitis æquale erit huic æquale*, etiam in illis, quæ cognita non funt angulo, & latere. Quod fi non eft verum; detur aliquod aliud, & fit CAG, cuius angulus C fit æqualis angulo E, & C angulo F trianguli noti, latera quoque fingula fuo correfpondenti CA lateri DF, & AG lateri DE, & in A non fit polus lateris GC; & tamen nec angulus A fit æqualis angulo D, nec crus CG cruri EF. Fiat itaque crus GC æquale FE detruncando, vel addendo, & fit CB, trahaturque arcus maximus qui fit AB. Crura itaque AB, & AC erunt æqualia; quòd fint æqualia ambo cruri DE crus AG quidem ex hypothefi; AB verò ex propof. 8. propter æqualitatem triangulorum eft enim angulus C, ęqualis F angulo, cuius latus CB ambiens, ex dicto aduerfariorum æquatur lateri FE, & latus aliud ambiens CA lateri FD ex hypothefi, & ideo AB bafi DE erit æqualis: Ergo latera prędicta AB, & AG remanebunt ęqualia, & confequenter anguli ABG, & AGB erunt æquales inuicem, vtpote æqualibus lateribus fubiecti in eodem triangulo ex prop. 16. huius.

Ex hypothefi autem angulus etiam G eft æqualis angulo E, & angulus quoque ABC ab aduerfarijs angulo eidem G debet æqualis fateri, cùm fit æqualis angulo ipfi E ex ea ratione, quòd latus CB lateri FE fecerimus æquale, & latus AB probatũ fit ęquale cruri ED, & CA, & FD æqualia. Sunt autẽ duo anguli hinc, & inde ABC ABG æquales duobus rectis ex prop. 3. rurfus funt æquales inuicem, cum ABG fit æqualis angulo G ex primo progreff. & eidem ex fecundo fit æqualis angulus alter ABC. Quare erunt æquales inuicem, & duobus rectis; Ergo recti. Vnde, & angulus G æqualis ipfis rectus erit; Quare ex prop. 14. primæ partis h. latus AG, & AB tranfibit per polos cruris, & lateris CG in A contra hypoth. quòd eft abfurdum. Si verò polus fit in angulo à duobus lateribus cognitis comprehenfo E, & anguli fint ambo recti ad bafim patet, quod alij angulí ad verticem E, & bafis HP poffit effe diuerfa. Vnde ex illa cognitione nihil certi colligitur, cum multa alia triangula poffint dari ita cognita; quæ tamen in bafi, & angulo cognito fint diuerfa ab eo, de quo quæritur, cum crura EH, & EP poffint claudi, vt ET, & angulũ minorem E bafimq; HT comprendere manendo in eadem quantitate, nempe quadrantium, & faciendo eundem angulum nimirum rectum cum bafi HP, feu HT.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si cognitionem habeamus quantitatis vnius, anguli, & duorum laterum ambientium alium angulum tertium, quem cognofcamus, vel acutum, vel obtufum, nullum autem rectum. Nullum aliud dabitur triangulum eandem quantitatem, tum laterum, tum angulorum habens, quòd non fit huic æquale.

SIt triangulum FDE habens duo latera DF, & DE notæ quantitatis ambientia angulum D: fit etiam angulus F quantitate notus, alius autem angulus conftet folum fpecie nimirum angulus E, quod fit, vel obtufus, vel acutus, dico, quod nullum aliud triangulum habens latus lateri, & aliud latus alteri lateri æquale, & angulum angulo æqualem dabitur, quod cognito non fit omninò æquale in omnibus alijs, dummodo angulum reliquum eiufdem fpeciei habeat, qui à lateribus cognitis nõ ambiatur. Quod fi datur fit illud CAG, & fit AG æquale crus DE, & AC æquale DF ambientia angulum A quantitate ignotum, angulufque C angulo F, & reliquus G eiufdem fpeciei, nimirum acutus prout eft angulus E, & tamen crus CG fit maius, quam FE; detruncetur, itaque crus æquale CB, & ducatur arcus circuli maximi AB.

Nunc Probatur fequi contra hypothefim, angulos fpecie cognitos ambo acutos effe æquales duobus rectis. Latus AC, cùm fit æquale lateri DF, & latus CB lateri EF, comprehendantque anangulum C æqualem angulo F ex propof. 11. huius efficient angulos ad bafim B, & A in triangulo CBA æquales angulis D, & E vnufquifque fuo correfpondenti in triangũlo FED, & bafim AB ęqualem bafi DF. Sed etiam bafis AG ex hypothefi ponitur ęqualis bafi DE; Ergo funt ęquales AB bafis, & AG bafis, quare anguli oppofiti erunt ęquales nempe G, & ABG. Hic verò angulus ABG cum fuo collaterali ABC eft ęqualis duobus rectis; quare, fi loco eius ponatur angulus G, ifte, & ABC erunt ęquales duobus rectis, fed angulus ABC iam probatus eft ęqualis angulo E. Ergo angulus G, & angulus E, quorum ex hipothefi quilibet recto minor dictus eft, effent ęquales duobus rectis.

Si verò angulus non fit fpecie notus, non valet propofitio; quia poterit dari aliud triangulum notę eiufdem quantitatis, tum anguli vni ex lateribus oppofiti, tum crurum, & tamen in cęteris diffentiens; quia fcilicet crus ambiens angulum acutum poteft ambire etiam angulum obtufum cęteris manentibus, & angulum rectum. Sic crus DF ambiens obtufum angulum DFE poteft transferri in O tranfacto angulo recto P, & ambire acutum DOE, & fic erunt duo triangula DFE, & DOE, quę habebunt angulum E communem, & latus DE idem, & crus DF cruri DO ęquale, & tamen in cęteris differentia erunt. Item fi angulus non fit notus fpecie poterit effe rectus, & fic bafis poterit effe maior, & minor manentibus cęteris angulis; fit E angulus cognitus quantitate rectus, cęteri verò non cognofcantur tunc P poterit effe rectus, & H rectus, & tamen bafis HP à P in T, & angulus E variari.

THEOR.

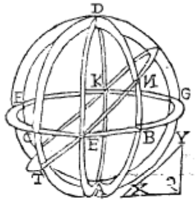
THEOR. IV. PROPOS. XXV.

Si rectanguli sphærici trianguli notam habeam basim specie, & crus & angulum non rectum quantitate non dabitur aliud triangulum, de quo eadem cognoscam; nisi prædicto cognito æquale.

Triangulum rectangulum ZYX expositum sit; cuius latus YX oppositum angulo recto sit notum specie, & quantitate crus XZ, & angulus X. Dico, quòd, *si detur aliud rectangulum eadem specie* notum, habens latus adiacens angulo recto æquale dato, & angulum æqualem, in alijs omnibus erit triangulo ZYX æquale.

Sit ergo tale triangulum; cuius crus EB sit cruri XZ, & angulus E angulo X æqualis.

Probo in cæteris quoq; æquari. Abscindatur BC æqualis arcui ZX, vel EB; productoque arcu NB æquali YZ in T ducatur à T normalis TCD, & fiet triangulum ETC; quod ex constructione erit æquale triangulo ZYX. Siquidem angulus TEC est æqualis angulo BEN, qui ex hypothesi æquatur angulo X. Latera verò, facta sunt æqualia. Vnde ex propos. II. huius, & crus TC erit æquale cruri YZ: sed hoc triangulum est æquale triangulo NEB, ergo triangulum NEB erit æquale triangulo YXZ.



Intelligamus DEA maximum esse circulum tractum per duo puncta A, D, quò se secant ADB, & ACD arcus maximi, & per E, tunc sic arguo.

Arcus CE ex hypothesi est æqualis arcui EB, vel XZ, & ideo angulus CAE æqualis angulo EDB, cum arcus CB sit normalis; arcus EA æqualis arcui ED, cum sit quarta circuli angulus NEB æqualis angulo TEC: quare, & residuum angulorum NED residuo TEA quadrãtium GED, & FEA erit æquale, qui angulus residuus à prædictis cruribus clauditur; quamobrem ex propos. 15. totum triangulum residuum NED erit æquale toti TEA, & basis ND basi TA. Ablatis ergo basibus æqualibus illis, à quartis circuli AC, & BD remanebunt crura æqualia NB, & TC.

Probatur etiam de cruribus TE, & NE: Nam cum triangula NDE, & TAE sint æqualia, vt ostendi Ergo, & bases erunt æquales ET, & EN in triangulis æqualibus TAE, & NDE.

Oportet autem scire crus oppositum angulo recto. Nam illo cognito omnia alia necessario cõsistũt in triangulum idem, at illo non cognito, sed alio crure non erit idem triangulum necessariò, cum cognito angulo, & crure possit esse basis diuersæ quantitatis.

Nam ponamus triangulum NAE esse talis naturæ, quam descripsimus propos. 20. quòd eius complementum ND esset cum crure NE æquale semicirculo; tunc angulus N esset æqualis angulo A, & consequenter huic æquali angulo D ex prop. 2. Ita angulus D, & angulus N erunt ijdem, & crus BE idem, & tamen triangula BEN, & BDE erunt diuersa; Sic BN in triangulo ENB, & BNE est eadem tamen basis EN, & crus EGB non est idem cum NE, & EN. Oportet ergo scire basis saltem specie cum alio angulo, nempe si sint, seu arcus maiores semicirculo, vel minores, ne generent fallacias in argumentando, quòd teste Clauio, lib. primo reuolutionum, Copernicus, & Regiomontanus agentes de triangulis sphæricis in assignatis casibus non aduertentes mirè hallucinati sunt.

EXPENSIO V.

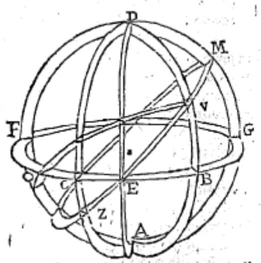
De specie laterum, & angulorum cognoscenda.

Licet multoties ipsum triangulum propositum, de quo tria in quantitate innotescant, seu latera, seu anguli, vt cetere partes, deinde reperiantur, vt plurimùm offerat speciem quoque partium incognitarum quantitate; aliquandò tamen, euenit, quòd propositum triangulum, seu suo situ, seu alia ratione nullam partium incognitarum specificam notionem exhibeat: vnde operę pretium tunc erit aliquas hic assignare rationes, vnde specifica cognitio desumatur.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Cuiuscumque trianguli sphærici duo anguli super eandem basim erunt æquales duobus rectis simul sumpti: si reliqua latera simul sumpta erunt æqualia semicirculo, at si sint maiores, maiora, si verò sint minores duobus rectis, crura quoque erunt minora semicirculo.

Triangulum AZV exhibeatur, cuius duo anguli dati VAZ, & AZV super eandem basim AZ duplici recto æquiualeant. Dico, *& latera subtensa* AV, *& VZ fore semicirculo æqualia.*



Probatur. Cum enim collaterales anguli AZV, & DZV sint æquales duplici recto ex prop. 3. sicut ex thesi VAZ, & AZV; si auferatur communis AZV erunt æquales VZD, & VAZ ad inuicem; quòd cum ablato communi AZV ex hypothesi, essent æquales duplici recto, & ideo ex 2. propos. huius VZD, & D erunt inuicem æquales. Quare ex propos. 19. erũt æqualia semicirculo trianguli DVZ cruris DV complementum AV, & basis VZ, nempe reliqua crura trianguli propositi AVZ.

Quòd

& quod si A angulus AZV sit maior quilibet recto, cũ AZV, & collateralis DZV angulus sit sẽper æqualis angulo duplici recto, sequitur, quòd ablato AZV, qui cum DZV est ęqualis duobus rectis, remaneant angulus A, & ideo D angulus, angulo DZV maior quoque. Et hinc ex propos. 20. quòd existente minori VZD angulo D, quod complementum VA, & basis VZ sint maiora crura semicirculo.

At si angulus A esset minor, cum angulo AZV quilibet recto; esset collaterali DZV, angulus D æqualis angulo A pariter minor, vnde ex prop. 20. eadem complementum VA, & basis VZ remanerent minora semicirculo crura dati trianguli AVZ.

COROLLARIVM I.

Hinc est. Quod si habes specificam cognitionem trium angulorum V. g. angulorum A, & AZV, & AVZ potes deuenirę in cognitionem specificam laterum. Nam si duo ex istis angulis erunt super latus aliquod assumptum V. g. AZ; videbis an tertius, cum altero ipsorum faciat duos rectos. Nam latera ambientia tertium tunc erunt æqualia semicirculo, si faciant magis, quàm duos rectos, latera tertium angulum ambientia erunt maiora semicirculo, quòd si minores simul sumpti sint duobus rectis erunt minora tertium angulum claudentia latera semicirculo.

COROLLARIVM II.

Quod si duorum angulorum ad basim AZ, & vnius lateris habeas notitiam specificam, reliquorum quoque laterum specificam notitiam habebis. Nam si latus AZ oppositum minori angulo AZV erit quadrans certum est ex Coroll. propos. 18. quòd aliud crus AV angulo maiori pppositum AZV erit maius, ideo; quòd simul erunt maiora semicirculo. Sic si latus AV oppositum maiori angulo non excedet quadrantem latus oppositum minori AZ minus erit quadrante. Vnde duo latera tertium angulum ambientia erunt minora semicirculo.

THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Si sint in vnoquoque triangulo duo latera quadrantibus æqualibus singula æqualia in angulo verticali erit polus.

Patet, quia polus circulorum maximorum distat quadrante à circulis, quorum est polus. Si ergo singula duo latera BD, & DC in triangulo BDC, sint quadrantes erit in angulo D polus.

COROLLARIVM

Hinc facilè fallaciam propos. 22. vitabis, si latera cognita erunt, vel maiora, vel minora quadrante.

THEOR. III. PROPOS. XXVII.

Cuiuscumque trianguli sphærici duo anguli super eandem basim erunt æquales duobus rectis simul sumpti, si latera reliqua simul sumpta sint æqualia semicirculo, & si sint maiora maiores; si minora, minores erunt duobus rectis.

Probatur. Quia VBA, & ZV latera in triangulo VAZ sunt ex pręsupposito ęqualia semicirculo, producto latere VA vsque ad semicirculum in D, erunt in triangulo VZD angulus VZD, & D ęquales ex propos. 19. huius. Sed collaterales ad Z nimirum VZD, & VZA sunt æquales duobus rectis. Ergo ablato VZD ęquali angulis æqualibus A, & D (tales enim sunt ex propos. 1.) remanebunt VZA, & VAZ super eandem basim AZ æquales duobus rectis.

Si verò sint duo crura AV, & VZ maiora semicirculo maiores erũt ãguli A, & Z simul, duobus rectis Nam ex propos. 19. maior erit angulus D, & consequenter ęqualis A, quam VZD, qui cum collaterali est ęqualis duobus rectis: illo VZD, itaque ablato minori angulo, remanent A, & collateralis VZA maiores duobus rectis super eandem basim ZA: si enim quando ęquales erant D, & VZD ęquabantur duobus rectis VZA, & A, modo quia D est maior ob augmentum laterum VA, & AZ vltra semicirculum, erunt quoque illi minores, & è contra angulus A, & angulus AZV maiores duobus rectis.

Si verò crura ZV, AV sint minora semicirculo, erit D minor angulus, quàm alter in eodem triangulo VZD, qui erit maior, ex propos. 19 & consequenter angulo A. Ablato itaque VZD maiori, & cum collaterali VZA ęquali duobus rectis remanent VZA, & A: anguli minores duobus rectis.

COROLLARIVM.

Hinc est. Quòd si duorum laterum habeamus cognitionem specificam, & anguli inueniemus, & cognoscemus specificè reliquos angulos, an sint ambo, vel maiores, vel minores duobus rectis ad effugiendam fallaciam propos. 14.

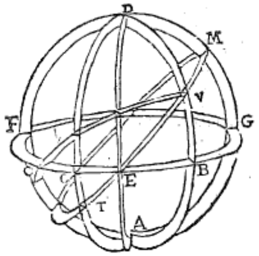
Nam quia scio crura VZ, & AV esse maiora semicirculo, cognosco quoque duos angulos A, & Z in triangulo VZA esse maiores duobus rectis, quod si deinde per cognitionem quantitatiuam agnoscam VZA angulum esse minorem recto, angulus A erit obtusus.

At si latera VZ, & AV essent minora semicirculo, essent quoque anguli Z, & A in triangulo VAZ minores duobus rectis; sed si habeo cognitionem, quod Z, aut rectus, aut maior recto sit, ideo A minor erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXVIII.

In omni triangulo sphærico rectangulo, cuius duo perpendiculares arcus sint quadrante minores, anguli reliqui erunt acuti, & si reliqui anguli sunt acuti, erunt omnes arcus quadrante minores.

SIt triangulum rectangulum EVB, & sint arcus VB, & EB quadrante minores. Dico *angulos apud* E, *&* V *esse acutos*.



Producatur crus EB,& BV vsque ad quadrantem in O,& D. Atque per E ducatur circulus AED à puncto D.

Probatur DEA est circulus maximus. Ergo puncta D,& E absunt quadrãte ab eius polo G, ergo GD est quadrans sicut. & GE: quare angulus GED est rectus, & hinc GEM minor recto.

Sic quia arcus OB cadit perpendiculariter ob angulum rectum B super circulum DBA, poli eius in ipso erũt circulo BO,& OV;sed poli absunt quadrante à circulo maximo:ergo erit in O polus circuli ABD: quare OV erit quadrans, & BVO angulus rectus, ergo BVE erit acutus.

Probatur secunda pars, & sint anguli BVE, & BEV acuti: fiant recti. Quia poli circuli maximi absunt quadrante ab eo, ideo poli circuli maximi DBA, erunt in O, ergo BE minor erit quadrante. Sic,quia poli circuli maximi FEG erunt in D, ideo crus BV minus erit quadrante: At quia poli circuli maximi GMD erunt in E,ideo crus EV erit minus quadrante alioquin, & EB esset quadrans.

COROLLARIVM I.

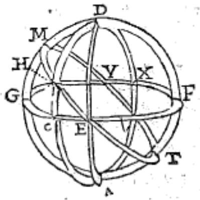
HInc est, quod si rectangulum triangulum omnes reliquos acutos habeat angulos, quòd certò affirmari possit latera esse quadrante minora ad effugiendam fallaciam propos. 14.

COROLLARIVM II.

HInc etiam sequitur, quod si alicuius trianguli sphærici rectanguli duo arcus perpendiculares sint quadrante maiores, vt IDX,& CEFX. vel etiam anguli ab basim I, & E obtusi, quod ipsa basis sit quadrante minor. Quoniam si crura IDX & CEFX sunt quadrante maiora CI, & CE residua erunt minora. Vnde anguli ad basim I,& E in triangulo ICE erunt acuti ex præc. Ergo reliqui externi obtusi, qui pertinent ad triangulum,cuius crus IDX, & alterum CEFX. Vnde basis erit IE eadem quadrante minor.Et idem dicas de angulis conuertendo propos.

COROLLARIVM III.

SIt verò in triangulo rectangulo perpendiculare crus sit maius, quàm quadrans, at alterum sit minus, vt in triãgulo YIC, crus CI,& crus YGC, basis YMI erit maior quadrante & anguli reliqui vnus quidem maior recto, alter verò minor. Nam angulus GYM erit æqualis angulo CEI ex prop.2. angulus MIC externus obtusus,eòquòd internus CIE pertinens ad triangulum CIE sit ostensus acutus ex propof.18.basis verò erit maior quadrante. Nam basis IE residua ostensa est quadrante minor.



COROLLARIVM IV.

QVòd si anguli reliqui alter acutus sit, alter obtusus,crura,vnum erit maius,alterum minus quadrante, sed basis quadrante maior.

Nam angulus apud Y acutus in triangulo YCI æquatur angulo apud E in triangulo CEB; ideo angulus E erit acutus; angulus quoq; I reliquus obtusi externi erit acutus in eodem triangulo CIE: Vnde duo crura, & basis erit minor quadrante. Ergo residuum basis IMY, & cruris CGY erunt maiora quadrante, crus verò CI remanet idem minus quadrante.

COROLLARIVM V.

SI angulus in sphærico rectangulo est acutus, vt Y, & arcus adiacens erit maior quadrante,vt YGC; etiam angulus oppositus MIC erit obtusus; alioquin si esset rectus, sequeretur, quod arcus quoque YGC esset quadrans, contra hypothesim, quia tunc polus esset in circulo DCAX & GCFX, idest in X communi puncto ex propos.4. 1.part. Si verò esset acutus iam essent duo acuti; Vnde arcus YGC esset quadrante minor ex propos.18.

Quod si angulus est acutus, & adiacẽs crus perpendiculare est minus quadrante, erit quoque angulus alter acutus ei cruri oppositus. Patet, quia si esset maior,crus oppositum esset maius quadrante ex præc.Cor.

COROLLARIVM VI.

SI angulus est acutus oppositum crus perpendiculare est quadrante minus, quod si est obtusus vnus angulus, perpendiculare crus erit maius quadrante. Nam si esset minus etiam angulus esset acutus contra thesim.

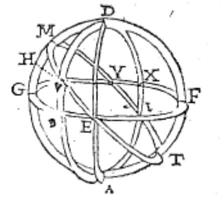
Nam vel erunt duo anguli obtusi, & sic ex Coroll.2.duo crura perpendicularia erunt quadrante maiora, quod si obtusus, & alter acutus, adhuc ex Coroll.3. erit crus oppositum angulo maiori maius quadrante.

Et idem dicas de acuto. Nam duo anguli acuti faciũt crura minora quadrante,& vnicus acutus V dat crus ei oppositum minus quadrante velut CI, vt patet consideranti.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXIX.

In omni triangulo sphærico Isoscele, si duo crura æqualia sint quadrante minora erit angulus vterque ad basim acutus; si maiora obtusus; si æqualia quadranti rectus. At è contrà de angulis, si anguli æquales ad basim sint acuti, arcus erunt minores quadrante, si obtusi maiores, si recti quadranti æquales.



SInt enim primo GD,& DB ęqualia crura quadrãti,angulus sit ad verticem D quicumque, semper anguli ad basim B, & C erunt recti. Siquidem facto polo in D, quia GD, & DB sunt quadrantes GB ductus circulus erit idem ac basis, nempe circulus maximus, & ideo ex Coroll.1. prop.14. part.1. huius,anguli apud G, & B recti erunt.

Quod si sint in triangulo Isoscele BVE minora crura quadrante BE, & BV. Dico *angulos ad* E, *&* V *esse acutos*.

Probatur. Quoniam enim crura ponuntur minora quadrante producto latere BE vsque ad semicirculum in Y erit BGY maius quadrante, & BV minus, vt priùs. Vnde angulus apud V, scilicet MVB maior angulo MYG, vtpote oppositus maiori lateri ex propos.18. huius. Sed angulus Y æquatur angulo E ex I. huius. & V internus ex Thesi æquatur angulo E trianguli VEB: Quare ãgulus externus MVB superabit internũ VEB. Vnde internus erit acutus; cùm simul ambo sint æquales anguli duobus rectis ex propos.3.h.& ideo E acutus erit.

Et hinc patet quoque latera maiora quadrante habere oppositos angulos obtusos; siquidem EFX, & VDX crura residua maiora quadrante habebunt angulos oppositos obtusos DVE, & VEF, vtpote residuos ab angulis VEB, & EVB.

Patet quoque secundam partem oppositam esse veram. Nam in triangulo Isoscelle GBD si anguli G, & B sint recti, GD, & BD crura erunt quadrantes eo quod in arcu GBEF sit polus.

Si verò anguli sint acuti in Isoscele triangulo EVB arcus BV, & BE erunt minores quadrante. Nam ex propos.20.si duo anguli sint æquales crus BGY, & crus BV æquabuntur semicirculo. Sed crus BGI, vtpote angulo oppositum obtuso, quod sit residuum anguli EVB, est maius crure BV oppositum angulo Y minori, vel B ex propos.18.huius. Ergo est maius YGB quadrante, cum si ęquaret quadrantem etiam ęquaret BV,quia duos quadrantes, idest semicirculum æquarent. Quadere cum YGB sit crus maius quadrante crus BV erit minus, & BE quoq; vt eius residuum.

Quare patet angulos quoque obtusos obtinere latera opposita quadrante maiora, nam triangulo cuius crura sint EET, & XDV, & basis VE, quia E, & V anguli in triangulo EVB ostensi sunt rectis minores,erunt reliqui externi obtusi, & quia BE, & BV crura trianguli EVB sunt ostensa minora quadrante reliqua EFX, & VDX erunt maiora; Quadere si aliquis Isoscelles habeat angulos ad basim obtusos, vt DVE, FVE; crura, vt EFX, & VDX erunt quadrante maiora.

COROLLARIVM I.

HInc euenit, quòd, in omni triangulo sphærico,cuius omnes arcus sint quadrante maiores. vel vnus quadrans, omnes anguli sint obtusi. Nam in triangulo EID, cuius duo crura DXI, & DE sint maiora quadrante,basis autem ETI. Detruncetur DI in X, ita vt DX æquet crus minus. & ducatur EFX arcus. Angulus itaque FED æquabitur angulo FXD, sed cum sint maiora crura quadrante,vel quadrantes,anguli erunt obtusi,vel recti, ergo tanto magis addito angulo FET angulus DET obtusus erit, & sic de quocumque alio asseras.

COROLLARIVM II.

HInc quoque educitur omnes arcus esse quadrante minores, si omnes anguli sint acuti. Nam si VMD trianguli omnes anguli sunt acuti maiori angulo DMV fiat ãgulus æqualis HVD. Erũt itaq; duo oppositi æquales;acutus verò est angulus M ergo, & angulus æqualis DVH: quare, & crura subtensa erunt minora quadrante ex præced.DH,& MV, ergo tantò magis MD.

Aduerte tamen, quod hæc duo Corollaria non conuertuntur:ex eo enim quod omnes anguli sint obtusi non infertur omnia latera esse quadrante maiora. Nec ex eo, quod omnia crura sint quadrãte minora infertur omnes angulos esse acutos: In triangulo enim cuius crura VDX, & XFE basis EV est minor quadrante, tamen anguli omnes obtusi sunt, vel vnus rectus tantum. Et sic in triangulo EBV omnia crura sunt minora quadrante: tamen angulus B erit, vel rectus,vel obtusus, vt patet consideranti.

EXPENSIO VI.

De casu perpendicularis in triangulis sphæricis.

QVoniam ad sollutionem triãgulorũ obliquãgulorũ inter alias regulas illa est expedita, & facillima, per quam triangula obliquangula ad duo rectangula reuocantur ducendo perpendicularem. Ideo hic de casu perpendicularis breuiter agendum, vt omnis postea in sphæricorum solutione triangulorum relegetur difficultas.

THEOR I. PROP. XXX.

In omni triangulo sphærico, si anguli ad basim sint, aut obtusi ambo, aut acuti, normalis arcus intra triangulum cadit.

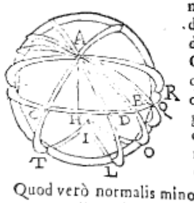
SIt triangulum DAC, & duo anguli D, & C ad basim CD sint acuti. Dico *perpendicularem intra triangulum* DAC *cadere*.

Probatur ex Coroll. 5. propos. 28. Nam cadat extra. & sit AB, & sequetur absurde simul esse AB maiorem, & minorem quadrante. Quoniam enim C ponitur angulus acutus, erit crus ei oppositum AB perpendiculare minus quadrante. Rursus, quia D trianguli ADC est acutus, externus ADB erit obtusus. Quare crus normale AB ei oppositum erit quadrante maius ex eodem Coroll. minus inquam. & maius quadrante, quod esse nequit. Idem demõstrabis in triãgulo DCLT, in quo obtusi anguli sunt DCT, & CDL ad basim. Nam si IOB sit crus normale extra cadens DCT obtusus requiret illud maius quadrante, & BDL acutus collateralis anguli CDL requiret illud DOI minus quadrante.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

In omni triangulo obliquangulo, cuius duo anguli ad basim sint vnus acutus, alter obtusus; perpendicularis minor quadrante extra triangulum cadit ad partes anguli acuti.

SIt triangulum QAD, angulusque Q in illo sit acutus alter D obtusus, & AB perpendicularis dicatur intra triangulum cadere, & sequetur idem absurdum præced. propos. Nam quia Q ponitur angulus acutus normale crus AB intra cadens erit minus quadrante ex propos. 28. Coroll. 6. h. Rursùs quia QDA ponitur obtusus, crus orthogonale AB erit maius quadrante, maius, & minus, quod esse nequit.



Quod verò normalis minor quadrante cadat ad partes anguli acuti patet ex prop. 28. h. Coroll. 4. quia acutus angulus in rectangulo subtendit crus minus quadrante.

THEOR. III. PROPOS. XXXII.

* *In trianguli sphærici basim, cuius duo crura sint minora quadrante, aut maiora duo crura perpendicularia cadere nequeunt.*

PRob. Nam cadant in CAQ triãgulo, & sint AB, & AD. Itaq; ex Coroll. 2. prop. 13. h. tract. part. 1. in CDQ circulo basis, polos habebunt.

Sed ex Coroll. propos. 18. huius par. 1. intersectiones maximorum circulorum mutuæ quadrante distant à circulo, in quo polos habent, ergo intersectio A à circulo maximo CDQ quadrante distabit. Quapropter AB, & AD putatę normales quadrantes sunt. Quia ergo punctum A distat quadrante à circulo QDC, etiam AC, & AQ quadrantes erunt contra thesim, & idem dicas, si anguli sint obtusi ob eandem rationem. Vnde si duæ perpendiculares in basim cadunt etiam crura perpendicularia erunt, & anguli duo ad basim recti.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIII.

* *In nullo triangulo sphærico, cuius angulus ad basim sit obtusus, vel rectus: alter verò acutus, duo arcus æquales etiam si non normales cadere possunt.*

SIt triangulum RAD, & angulus in eo D ponatur obtusus, angulus vero QRA apud R acutus; deinde si cõtendat aliquis, posse cadere intra triangulum arcus ęqualis arcui AB, sit ille QA.

Quoniam itaque AQ, & AB arcus sunt æquales, erunt quoque æquales anguli apud Q & B in ipso ideo normalis arcus ab A ductus intra triangulum QAB cadet, & ideo intra triangulum RAD; sed intra triangulum RAD cadere nequit ex prop. 31. huius, sed extra; cum ponãtur anguli ad basim R acutus, & D obtusus in triangulo RAD, ergo caderet, & non caderet intra, quod esse nequit.

THEOR. V. PROPOS. XXXIV.

Duo arcus æquales extra triangulum, cuius anguli ad basim vnus sit acutus, alter obtusus in basim productam cadere nequeunt è regione anguli acuti intra perpendicularem.

SIt triangulum RAQ à cuius vertice A cadat arcus normalis in H, contendatque aliquis, quod è regione anguli R acuti ab A duo arcus æquales cadere possint inter puncta H, & R, quæ sint AB, & AD.

Probatur. Quia ergo AB, & AD ponuntur æquales, erunt anguli ad basim B, & D æquales, & ideo perpendicularis intra triangulum BAD caderet: crus, ergo AD esset vltra perpendicularem non citra, vt ponitur in Thesi, quod caderet intra D, & Q, & ideo non in H.

TRACTATVS XXIII.

PARS TERTIA.

De maximorum circulorum in sphæra, minorumque intersectionibus, contactibusque mutuis.

VIsã mutuã maximorum circulorum intersectione, vltimus labor subit, in consideranda natura tactuum, & intersectionum, quas faciunt maximi circuli, cum minoribus.

EXPENSIO I.

De Contactibus minorum circulorum.

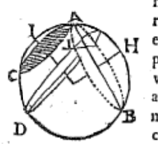
MAximi circuli tangere se nequeunt; cum vt probatum est, se solùm secare possint bifariam; contactus itaque est circulorum minorum, vel cum maximis, vel inuicem.

THEOR. I. PROP. I.

Si in sphæra duo circuli secent in eodem puncto circumferentiam eius maximi circuli, in quo polos habent, se mutuò tangent illi circuli.

SIt circulus AB, & AC, qui in eodem puncto A secent maximum circulum BHAIC, in quo polos H, & I obtinent. Dico *se contingere in eodem puncto* A.

* Probatur. Nam in eodem puncto, & non alibi secant ABC. Ergo ibi se contingunt; neque enim possunt in eodem puncto secare; nisi in eodem puncto conueniant, & vniantur circuli AB & AC. Quod autem non alibi possint conuenire, patet. Nam in eodem puncto deberent circulum maximum alium cõtingere, vel ergo illũ circulum maximum secarent bifariam, polis suis I, & H; & sic essent circuli maximi ex prop. 12. contra Thesim, vel non bifariam. Ergo arcus IAH, & alterius maximi essẽt minores semicirculo quare BDA, & alius non esset circulus maximus contra hypothesim, cùm arcu HI distarent minori semicirculo eorum sectiones.



Quod autem esset circulus maximus, qui per alium contactum transiret, patet. Nam ductis ad illum contactum diametris planum eius per illos transibit ex propos. 2. Tract. 22. vnde ex Coroll. 1. propos. 14. h. esset maximus, cum bifariam circulos CA, & AB diuideret, & per polos I, & H transiret.

THEOR. II. PROPOS. II.

In sphæra, si duo circuli se mutuò tangant, maximus circulus per eorum polos descriptus per eorum contactum transibit.

*PRobatur. Nam si circulus maximus BAG transiens in eadem fig. per polos H, & I minorum circulorum non transibit per contactum A transibit alibi in L, vel ergo erit ad idem interuallum à polo H, & sic non erit ad idem interuallum à polo I; alioquin esset idem circulus: quòd si non esset ad idem interuallum à polo I; sed V. g. ad maius IL; Ergo circulus DL interuallo IL descriptus erit maior se cotingentibus in A circulis, & consequenter secabit alterum in L: Sed ex præced. propos. debet tangere, quòd circulus maximus transeat quoque per eorum polos, & per L, in quo ipsum secant AB, & DL. Ergo secabit, & tanget, quòd est absurdum.

Aliter. Ductis diametris CA, & AB ad contactũ A; cùm se tangant in A, erunt in eodem plano ex prop. 2. Tract. 22. Ergo planum circuli per AC, & AB diametros transibit. Eritque circulus maximus, cùm eos diuidat bifariam, & transibit per polos I, & H ex propos. 14. Coroll. 1. part. h. 1.

THEOR. III. PROP. III.

Si in sphæra duo circuli se mutuò tangant, circulus maximus per vnius polos, & per contactum amborum deductus, per alterius quoque polum transibit.

TRanseat circulus maximus ABC in eadem fig. per polum I, & per contactum A. Dico *transire quoque per polum* H.

* Probatur. Nam, si CAHD transiens per I, & A non transit per polum H, ducatur aliquis alius, qui transeat per vtrosque polos: Vel ergo erit idem circulus, & sic habemus intentum, vel non idem, & si duo maximi circuli se secant in contactu A, & in polo I. Quare distantia IA esset semicirculus ex propos. 12. par. 1. Sed nec potest esse quadrans, cùm sit distantia AI circuli minoris

ñoris à ſuo polo, quæ non eſt quadrans, cum ſphæram mediam non diuidant, vt maximi ex propoſ.10. Ergo neque poteſt eſſe geminus circulus maximus, quare erit idem. qui per contactum, & per amborum polos tranſibit.

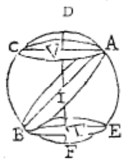
THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si in ſphæra maximus circulus aliquem circulum minorem tangat, tanget ei æqualem, & parallelum.

TAngat circulus AB maximus, minorem AC; Dico, *quòd, & alterum tanget parallelum, & æqualem circulo minori* AC. Deſcripto circulo maximo ACB per contactum, & per polum circuli AC; qui tranſibit, & per polum circuli AB ex 3.h.

Inueniantur poli circuli AC, qui ſint F, & D; circaque alterum polum F à plano circuli AC remotiorem deſcribatur circulus ad interuallum BF. Dico *hunc tangere circulum maximum* AB, *eſſeque alteri* AC *parallelum, necnon, & æqualem.*

* Probatur primò. Quod ſit æqualis; ductis enim diametris AC, & AB, EB, & FD. Angulus AID erit æqualis angulo FIB, vtpote ad verticem: anguli verò apud V & T recti ſunt, crus IA verò eſt æquale cruri IB. Ergo ex propoſ.27. elem.1. totum triãgulum AIV toti BIT erit æquale. Quare, & crura AV, & BT erunt æqualia, quæ ſunt ſemidiametri circulorum AC, BE



Probatur quoque ſecunda pars. Quod ſint paralleli, quia recta DF per eorum polos trãſit; Ergò perpendicularis ipſis eſt; igitur circuli quoque AC, & EB ſunt paralleli.

Probatur tertia pars. Quòd tangat circulus EB circulum AB: quia ex conſtructione in eodem puncto ſecat circumferentiam ACBE in B.

COROLLARIVM.

HInc manifeſtum eſt puncta contactuum eſſe per diametrum oppoſita. Nam tangunt, vbi duo circuli maximi in B, & A, ſe interſecant, quorum interſectiones ſemper ſemicirculo diſtant, ex propoſ.12.par.1.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si ſint in ſphæra duo circuli æquales, & paralleli; maximus circulus, qui eorum alterum tetigerit, reliquum quoque tanget.

SInt in eadem figura, quæ ſupra duo circuli paralleli & æquales AC, & EB, tangatque BA circulus maximus, alterum eorum in A. Dico, *& reliquum tangere in* B.

* Probatur. Nam ſectiones maximorum ACBE, & AB diſtant ſemicirculo ADB, ſicut etiam contactus minorum EB, & AC diſtant ſemicirculo ex Coroll. præced. & diametraliter ſunt oppoſiti.

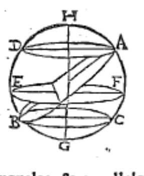
Ergo ſemicirculus idem inter A contactum, & alterum B, & interſectiones maximorum ACBE, & AIB mediabit, ergo punctum terminans contactum B, & ſectionem B, erit idem, vtpote extremum ſemicirculi ACB, tum contactus, tum ſectiones menſurantis.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si in ſphæra aliquis circulus ad aliquem ſphæræ circulum maximum obliquus ſit, tanget is maximus duos circulos æquales quidem inter ſe, parallelos autem illi circulo, ad quem obliquus eſt.

SIt in ſphæra circulus quicumque AB obliquus ad aliquem maximum EF. Dico, *quòd hic maximus tanget duos circulos* deſcriptibiles parallelos dato EF, & æquales inuicem AD, & BC.

Sint H, & G poli circuli dati EF, per quos, & per polos quoque circuli AB circulus maximus deſcribatur ADCB: Deinde centro H interuallo HA circulus minor ducatur AD tangens AB maximum in A; quare ex præcedenti tanget, & alterum ei æqualem, & parallelum CB. Ergo iam habemus AD, & CB eſſe inuicem æquales, & parallelos.



Probo etiam eſſe parallelos circulo FE. Nam cum AD ſit deſcriptus ſuper eiuſdem FE polos erit ei parallelus ex 19. propoſ. primæ partis. Vnde omnes erunt paralleli AD: EF, & BC.

EXPENSIO II.

De circulorum minorum, & maiorum interſectionibus proportionalibus, & æqualibus.

POſt circulorum minorum tactus communes, oportet eos comparare, & componere cum maximis, & ſectiones eorum mutuas conſiderare.

THEOR. I. PROPOS. VII.

* *Si maximus circulus maximum ſecet ſectio diameter ſphæræ, circulique eſt.*

PRobatur, vt in fig. prop. 4.h. Nam ex 10. primæ partis tranſeunt per centrum ſphæræ, & ambo. V. g. ACBE, & AIB habent illud pro communi centro; ſed non poſſunt habere pro communi centro centrum ſphæræ, niſi in communi eorum ſectione cum in alijs partibus inuicem nõ concurrant; Ergo communis, eorum ſectio tranſibit per centrum. Sed quæ linea tranſit per centrum ſphęrę, circulorumque, eorum diameter eſt. Omnis ergo ſectio maximorum circulorum ſphęrę, & ipſorum diameter erit.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

* *Si circulus maximus per polos minorem ſecet, ſectio chorda eſt reſpectu maximi, & diameter eſt reſpectu minoris; quòd ſi non ſecet per polos ſectio vtrique chorda eſt.*

SEcet maximus BOAQ per polos B, & A minorem HIFS. Dico *ſectionem in minori eſſe diametrum, in maximo eſſe chordam* in fig. ſeq. prop.

Probatur. Quia chorda eſt linea in circulo dirimens illum in duo ſegmenta, & vtrumque pariter ſubtendens: ſed ſectio FH diuidit maximum BOAQ in duo ſegmenta FOAH, & FBH, & ſubtendit ea, ergo chorda eſt.

Patet verò ex dictis prop.16.par.1.huius FH eſſe diametrum reſpectu minoris.

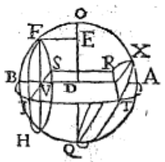
Si verò non ſecet per polos maximus BRAI minorem XRQT in vtroque circulo ſectio chorda eſt, per ſe patet cum diuidat vtrumque circulum in duo ſegmenta circulum quidem maximum in RAT, & RBT; minorem verò in RXT, & RQT ſegmenta, & omnia ſubtendat.

THEOR. III. PROPOS. IX.

* *Circulus minor ſecans duos maximos polos in eorum normali ſectione habens. Sectionem illam maximorum diuidit in ſinum verſum, & ſinum complementi. Ipſa verò ſectio in duos ſinus rectos ſecatur, etiamſi ſolum in altero maximo tantùm ſuum polum obtineat.*

SIt circulus AFBQ maximus, qui ſecet normalẽ maximum SBIAR ſectione AB, & polo B, ſeu alibi dummodo in AFBQ circulo, ducatur minor circulus FHIS, ſectioque eius cum maximo AFBQ ſit HF. Dico *ſectionem* AB *dirimere* FH *in duos ſinus rectos* VF, *&* VH, ſicut, & chordam IS, ſeu in alio circulo chordam RT.

Probatur. Nam ſinus rectus eſt dimidiata chorda; ſed AB ſectio diuidit ſectionem FH, vel SI, vel TR bifariam, quæ ex præc. eſt chorda; ergo diuidit in duos ſinus; Diuidit autẽ bifariã, quia AOBQ, ex pr.14.p.1.h. circulus maximus diuidit circulum totum HF, ſeu XQ bifariam: Vnde tranſibit per centrum. Ergo maximi, & minoris communis ſectio QX, vel FH per centrum tranſibit, cùm eorum vtraque ſuperficies per centrum feratur, & inſiſtet perpẽdiculariter chordę FN, TR, vel SI. Vnde eam bifariam diuidet ex propoſ.27.lib.3. Coroll.6.



Probatur quoque, quòd ſectio FH dirimat ſemidiametrum, & ſectionem BD in duas partes, quarum vna DV ſit ſinus complementi.

Nam ſinus complementi eſt ſinus arcus reſidui vſque ad quadrantem, vt EF, ſed DV eſt ęqualis ipſi EF. Ergo DV erit quoque ſinus complementi; Quòd autem ſint æquales DV, & EF patet; quòd, vt ſinus debeat eſſe perpendicularis ſectioni, duorum maximorum orthogonaliter ſe ſecantium, eo quia OFB debeat eſſe quadrans, vt FE ſinus ſit arcus FO, complentis arcum BF, vſque ad quadrantem terminantem in O. Sectio quoque FV ad ſectionẽ DV perpendicularis eſt ex cit. pr 14. cor.1. Vnde DVFE, erit rectangulum, & conſequenter latus EF, erit æquale lateri VD.

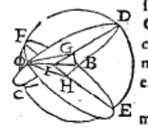
Probatur tertia pars. Nam ſinus verſus, & pars diametri orthogonalis inter ſinum rectum, & circumferentiam intercepta; ſed talis eſt pars ſectionis VB. Ergo eſt ſinus verſus.

THEOR. IV. PROP. X.

Si in ſphæra duo circuli ſe mutuò ſecent, maximus circulus per eorum polos ductus ſecabit bifariam, ſegmenta eorum circulorum.

DEntur duo circuli in ſphæra CD, & EF, qui ſe mutuò ſecent in OB. Dico, *quod maximus circulus* DFE, *per eorum polos ductus bifariam ſecabit eorum ſegmenta* BFO, *&* BCO, *ſicut* BDO, *&* BEO.

* Probatur. Nam ex prop.14. par.1.h. cor.1. bifariam circuli DC, & EF ſecti ſunt à maximo circulo EDF. Quare vtraque ſuperficies circulorũ EF, & DC circulo maximo EDF perpendicularis erit ex 14. propoſ. primæ partis.



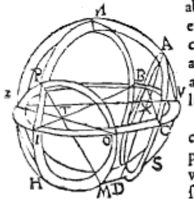
Proptereaque eorum communis ſectio ex 9.h. quę linea recta erit, cum planæ ſuperficies ſint, bifariã ſecta erit à diametro EF DC per cẽtra G, & H trãſeunte. Cũ ergo IO ſit æquale cruri IB, & IH crus commune, angulique ad I hinc inde recti; triangulum totum HIO, toti HBI erit ęquale: Quamobrem, & angulus BHI angulo IHO erit ęqualis, proptereaque BF quoque arcus arcui OF, qui angulum menſurant, erit æqualis; & hinc OE arcus reſiduus de ſemicirculo EOF erit æqualis reliquo reſiduo BE ſemicirculi FBE. Idem oſtendi poterit de triangulis BGI, & IGO, quòd ſint æqualia, & hinc, quod anguli BGI, & IGO ſint ęquales, vnde, & arcus eos mẽſurantes BC, & OC, & hinc ſegmenta, vt OIC, & ICB, & cæt. erunt æqualia.

THEOR. V. PROP. XI.

Si in ſphæra duo circuli æquales, ſiue maximi, ſiue non maximi ſecent eundem circulum aliquem, & intercipiant circuli maximi per eorum polos tranſeuntis arcus æquales; eorum ſegmenta erunt æqualia.

DVplici ſchemate vtemur, quorum alterum circulos maximos exprimat alterum minores.

Sit ergo circulus ABCD, & alter POZM, qui ſecent eundem circulum VBCZ, & à circuli maximi per polos ſecti VBCZ, & ſecantis PZOM tranſeuntis intercitercipiat arcum PI æqualem arcui VA alterius circuli maximi, seu etiam eiusdem, dummodo transeat per polos ipsius secti VCBZ, & alterius secantis ACBD; ideoque vtrique plano recti sint isti circuli per polos transeuntes.

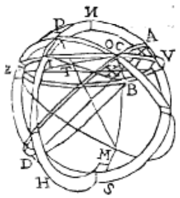


Dico arcus, quos abscindunt se secando esse æquales; nẽpe arcum CVB esse æqualem arcui OIZ; nec non, & arcum CAB esse æqualem arcui OPZ.

Probatur. Quia arcus VA descendit perpendiculariter super vtrumq; planum, quod secat, VX, & XA sectiones erunt perpendiculares sectioni BC, tales quoque erunt sectioni OZ, ob eandem rationem arcus perpendicularis PI, sectiones TP, & TI; & ideo ex propos. 9. sinus arcuum, quibus subtenduntur V. g. AC sinus erit XA, & XC arcus VC, & cęt. & arcus ipsi erunt ex 14. pr. p. 1. h. diuisi bifariam in V, & A, & in P, & I, quibus positis.

Si itaque ostendemus VX sinum esse æqualem sinui TI erit quoq; arcus VC ęqualis arcui IZ, vel VB arcui IO. Sic si ostendemus XA esse æqualem sinui TP ostendemus similiter arcus subtensos esse æquales AC ipsi OP, vel AB ipsi PZ, & ideo arcus integros CVB esse ęquales arcubus OIZ, & CAB ipsi OPZ.

Hoc autem ita est, quia triangula rectilinea VAX, & TPI sunt æqualia, vnde, & latera erunt ęqualia.



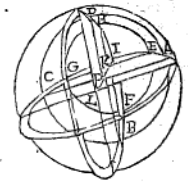
Id verò sic demonstratur VA recta subtensa ob æqualitatem arcuum perpendicularium ex thesi æquatur subtẽsę arcui PI, sic arcus MHIP, & AVSD ęquãtur ob æqualitatem diametrorũ AD, & PM cum circuli ex thesi ponantur æquales, ablato ergo VA ab AVSD, & PI à PIHM restabũt DSV, & IHM æquales arcus quibus ex 26. lib 3. insistent anguli æquales rectilinei VAD, & MPI apud A, & P. Sic, quia VZ sectio, & BI est eiusdem circuli VCZ diameter subtendet æqualem arcum circuli perpendicularis BNI, & VNZ, à quibus ablatis æqualibus arcubus ex thesi VA, & PI restabunt æquales arcus BNP, & ANZ, quibus insistunt anguli rectilinei BIP, & AVZ, triangula itaque rectilinea AVX, & TPI duos angulos æquales habent apud A, & V ijs, qui sunt apud P, & I super basim æqualem VA, & PI, vnde erunt triangula æqualia; & ideo TP æquabitur ipsi XA, sicuti, & TI ipsi XV: ex 27. l. 1. el. quare arcus OPZ, & CAB æquabuntur inuicem, sicut etiam arcus BVC, & ZIO.

THEOR. V. PROPOS. XII.

Si in sphæra maximi circuli à polis parallelorum describantur, truncant eos in patet proportionales, ipsi verò truncantur ab eis in partes æquales.

Sint in sphęra circuli paralleli ABCD, & EFHG, à quorum polis describantur circuli maximi BFHD, & AEGC. Dico circumferentias parellelorum interceptas inter circulos maximos, vt AD vel EH esse similes, arcus verò maximorum intercepti inter superficies parallelorum, vt AE, & DH esse æquales.

Sint enim eorum communes sectiones AC, & EG, sic HF, & DB istę erunt parallelæ cum circulorum superficies ipsæ sint parallelæ, rursùs se intersecabunt in communi puncto EG, & HF quidem in K, at AC, & BD in P facient autem æqualem angulũ apud K, & apud P, eò quòd sint ex 14. p. 1 planorũ AIL, & IDL sectioni LI perpendiculares. Vnde, & arcus EH, & AD erunt similes, nempe eundem angulum subtendentes, vel eundem numerum graduum comprehendentes; quorum circulus 360. ennumeret.

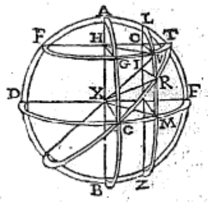


Probatur quoque secunda pars. Quia enim arcus ex definitione poli sunt æquales à polo I demissi in circulum, vt IE, & IH, sic eadem ratione IA, & ID, si illi minores IE, & IH ab istis maioribus IA, & ID auferantur reliqui AE, & HD erunt æquales arcus.

THEOR. VI. PROPOS. XIII.

* *Si in sphæra duo circuli maximi se mutuò orthogonaliter secent; circulus verò obliquus tangat vnius parallelum. Parallelus alteri secabit, tum parallelum, tum circulum obliquum in partes similes.*

* Proponantur circuli maximi DCE, cui parallelus sit FGT. Deinde orthogonalis illi sit BCA; cui obliquus sit CRT; quem, & parallelum FGT,



quem

quem, & parallelum FGT secet, parallelus LRMZ maximo æquidistans BCA. Dico ita esse arcum TV ad TR arcum, vt est circulus ad circulum, idest TV, & TR eundem numerum gr. continere.

Probatur. Nam triangulum XHT est æquiangulum triangulo OIT, Vnde ex 4. propos. 6. elem. ita est XT diameter ad HT diametrum, vt TI ad TO. Ergo ex 19. lib. 5. elem, & reliquum XI ad reliquum OH, vt totum XT ad totum HT, se habebit. Sed HT est æqualis HV, vtpote semidiametri, & XR ad XT, vt pariter semidiametri. Ergo ita se habet XI ad HO, vt XR ad HV, & permutando, ita se habet XI ad XR, vt HO ad HV. Quare in triangulis HOV, & XIR, habemus duo latera proportionalia, in quibus notus est angulus, tũ apud O, tũ apud I, quòd sit rectus. Angulus verò reliquus apud X in triãgulo XIR, & reliquus apud H in triãgulo HOV sunt minores recto, eo quod quadrãtũ CRT, & GVT partes sint, ergo ex propos. 7. lib. 6. elem. erunt triangula ęquiangula, & angulus apud H erit ęqualis angulo apud X. Quare, & arcus eos subtendentes erunt similes; nimirum RT, & VT, vnde, & residui EG, & VG.

THEOR. VII. PROPOS. XIV.

Si in sphæra duo paralleli circuli, & maximus ipsorum secent aliquem maximum, in arcus æquales inuicem secabunt, & omnes alios in arcus æquales inuicem.

Si in sphęra sit circulus ABCD, in quâ etiam paralleli AB, & CD, & maximus ipsorũ FE reperiãtur, secetq; circulum illum in arcus æquales FA, & FC. Dico, & quemlibet alium V. g. GHIT in arcus æquales LH, & HI secare:

Probatur. Nam transeat iste circulus ACBD per polos parallelorum MN secabit bifariam, & etiam segmenta ipsorum ex propos. 14. p. 1 h. eruntque diametri AB sectiones, & CD, sic GT, & MN. Vnde se inuicem intercipient, facientq; triangulum OPQ, & QRS. Quia ergo FA, & CF ponuntur ęquales erũt portiones diametri, sinusq; æquales PQ, & QR, vtpote æqualibus arcubus subtensę, vt est videre ex prop. 9. h. Anguli verò ad P, & R recti; anguli autem ad verticem Q æquales: vnde duo triangula rectangula OPQ & QRS erunt æqualia: Ea propter bases quoque erunt æquales QS, & QO: quamobrem arcus quoque HL, & HI, quibus sinus sunt, erunt æquales.

Quòd si datus circulus non transiret per polos, & esset V. g. GLHIT: Fiat aliquis, qui transeat, & tunc ob angulos rectos, & angulos ad verticem æquales; basimque æqualem QO, & QS, vtpote arcubus æqualibus ex hypothesi HL, & HI subtensa; erunt triangula rectangula OPQ, & QRS æqualia. Vnde, & arcus QP curri QR, & ex eo arcus AF arcui FC; hinc verò ad quemlibet alium circulum obliquum priori argumento inferes.

THEOR. VIII. PROPOS. XV.

In sphæra paralleli circuli, inter quos, & maximum parallelorum æquales arcus circuli alicuius maximi intercipiuntur, sunt æquales; illi verò inter quos, & maximum parallelorum maiores arcus intercidunt circuli alicuius maximi, sunt minores.

Dvplicem casum habet hæc propositio; quia potest aliquis circulus maximus transire per polos parallelorum, vel non transire: Sed quocumque modo, transeat, siue non transeat, sint itaque paralleli in fig. anteced. AB, & CD minores, FE maximus. Aliquis verò circulus maximus, vt GLHIT non transeat per polos parallelorum NM. At ita secet eos, vt tamen arcus HI, & HL à maximo, & minoribus intercepti sint æquales. Dico, & minores ALB, & DIC fore inuicem circulos æquales.

Probatur. Nam ducto per polos parallelorum M, N circulo maximo AFNEB, faciet sectiones in quolibet AB, & CD, necnon EF, & TG circulos bifariam secantes ex 14. prop. 3. par. 1. diametrique erunt, & quia arcus HI, & HL ponuntur æquales, erunt arcus FA, & FC æquales ex præcedenti, sicut est EB, & DE. Ablatis igitur arcubus æqualibus FC, & DE à semicirculo FCNDE, & item arcubus æqualibus FA, & EB à semicirculo FAMBE, remanebunt arcus AMB, & CND æquales: Quare, & subtẽsæ, diametriq; CD, & BA erũt equales, vnde, & ipsi circuli paralleli CID, & ALB. Et hinc patet secũda pars eodem argumento, nempe, quod paralleli sint inæquales illi, qui arcus inæquales inter ipsos, & maximum parallelorum intercipiunt.

THEOR. IX. PROPOS. XVI.

Si in sphæra circulus transeat per vnum polum vnius, & per aduersum polum alterius circulorum inclinatorum inuicem, ille circulus ab illis abscindet æquales arcus.

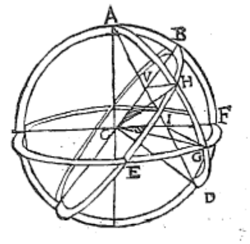
Sit circulus AHGD, qui circulorum inclinatorum inuicem FGE, & BHE per polos transeat per vnum vnius nimirum D circuli BHE, & per alterum A alterius FGE, & secet eosdem inclinatos circulos in G, & H. Dico, *quod arcus intercepti* FG, *&* HB *erunt æquales.*

Probatur. Arcus GHA æquatur arcui DGH, quòd quilibet circulus subtensas à suo polo ex defin. 6. habeat æquales. Quare anguli, GDA, & HAD, qui fierent ductis rectis AH, GD, vtpote peripherijs æqualibus insistentes HGD, & GHA essent æquales.

Progress. 2. in triangulo quoque DCA anguli ad D, & A sunt æquales ob æquales semidiametros, quibus subtenduntur ex propos. 14. elem. 1. Trianguli verò DCV angulus rectus est cum DFB sit quadrans ex Coroll. 2. prop. 14. p 1. sic in triangulo CIA angulus C rectus est eadẽ ratione. Quare reliquus apud V reliquo apud I, triangulaque IAC, & & DVC erunt æqualia. Vnde etiam bases IA, & VD erunt æquales; Ablatâ itaque parte intermedia

dia

ia IV communi residuum VA residuo ID erit æquale.



Progreff. 3. Chorda autem HA æquatur chordę DG, quas imaginatione suple, vtpote æquali peripheriæ DG, & AH subtensæ. Quia enim GA, & HD sunt æquales, ablata communi portione HG, reliqui arcus HA, & GD restabunt æquales.

Progreff. 4. Cum itaque triangulis HAV, & GDI angulus D ex 1. progr. angulo A, & ex 2. latus VA lateri DI, & ex 3. latus AH lateri GD sit æquale. Ergo ex prop. 22. el. 1. erunt æqualia, & basis HV basi GI æquabitur. In triangulis tandem HVC, & GIC habemus IC, & CV crura æqualia ex 2. progr. & HV, & GI ex 4. & HC, & GC sunt radij. Ergo angulus niger angulo nigro æqualis. Et ideo arcus BH arcui FG æquabitur, sicut EG, & EH residui.

THEOR. X. PROPOS. XVII.

Si in sphæra sint paralleli circuli, & describantur maximi circuli, qui vnum quidem parallelorum tangant; reliquos verò secent, circumferentiæ parallelorum interceptæ inter eos maximorum circulorum semicirculos, qui non concurrunt, similes erunt; maximorum verò circulorum circumferentiæ inter duos quoscumque parallelos interceptæ erunt æquales.

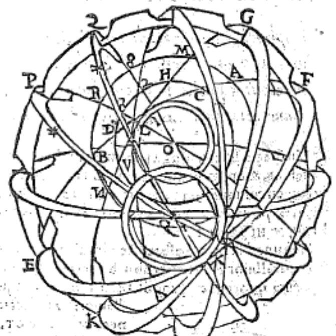
IN sphæra paralleli circuli descripti sint AB.B, & CHD, & IL, qui eundem polum habeant O; describanturque maximi circuli AFXE, & MGXK, qui tangant parallelum IL in punctis L, & I; & reliquos parallelos secent in punctis A, C, D, B, & M, H, V, N; se verò inuicem apud I, & X, in duos semicirculos more maximorum circulorum.

Dico arcus IC, & ID, sicut LH, & LV esse æquales; necnon, & arcus CA, & BD; sic, & HM, & VN arcus maximorum circulorum inter parallelos interceptos esse æquales. Arcus verò parallelorum inter circulos maximos interceptos, vt CH, & AM, sic, & DV NB esse similes.

Ducantur ad iucundam probationem circuli maximi OLP, & OIZ transeuntes per puncta contactuum I, & L, & transeuntes per polum O, & Q parallelorum, & per polos maximorum tangentium ⁎ ⁎ ex propos. 3. huius. Quare ex propo. 10. bifariam secabunt segmenta ipsorum maximorum, & minorum: Vnde segmentum MLN V. g. maximi, & minoris MRN erunt bifariam secti in R, & L, sic; & AIB maximi, & A8B erunt bifariam secti in I, & 8, & eadem dicas de segmentis circuli angustioris CHDV: Quarè erunt æquales prædicti arcus, vtpote bifariam secti. Erit ergo æqualis arcus IC, maximi arcui ID eiusdem, & IA arcui IB. Vnde ablato communi arcu CID; remanebit quoque arcus AC arcui DB maximi circuli FIE inter pararallelos intercepti æqualis; idem probabitur de arcubus MH, & VN, quòd sint æquales LM, & LN à quibus ablatus arcus communis HV, æquales restituet HM, & VN.

COROLLARIVM.

IMò arcus quoque AC, & HM; sicut VN, & DB erunt æquales, quòd ostenditur: Nam arcus ACDB, & MHVN sunt æquales ex propos. 11. Quia secant eũdem circulum minorem AMBN duo maximi FCE, & GHK, & maximi OIZX, & ORPX per eorum polos ⁎ ⁎ transeuntium, intercipiunt arcus æquales LR, & I 8, & ob eandem rationem arcus quoque CID, & HLV æquabuntur: Cùm ergo AC DB, & MH, VN sint arcus æquales ablatis æqualibus CID, & HLV restabunt AC, & MH, sicut, VN, & DB æquales.



Probatur quoque secunda pars. Quod circumferentiæ minorum, vt CH, & H 2 sint similes circumferentijs AM, & M 8. Quoniam circuli maximi IZQ, & LPQ per polum O parallelorum transeunt, erunt arcus 2 3. & 8 R parallelorum polo O descriptorum ex propos. 12. similes; ideo, & HC, & AM erunt similes. Quia HC æquatur ipsi 23. & AM ipsi 8 R. Probandum est, itaque CH, & 23 esse arcus æquales, & item AM, & 8 R. Demonstratur autem eò, quia ex propos. 11. CHD, & HLV sint æquales; vtpote duo maximi eundem parallelum secãtes, & æqualem arcum L 3, & I 2 circuli maximi OIZQ, & OLPQ transeuntiũ per eorum polum O intercipientes. Quare, & semiarcus illorum (tales enim sunt ex propos. 10. huius C 2, & H 3) erunt æquales. Ablato ergo communi arcu H 2 erant æquales CH, & 23. Sed 23 est similis arcui R 8 ex propos. 12. huius; Ergo etiam CH erit similis arcui AM.

Idem poterit probari de arcubus DV, & NB. Quòd sint inuicem similes; siquidem VD, & 32 sunt æquales, eò quia semiarcus 2 D, & 3 V sint æquales. Vnde ablato communi arcu 3 D remanebunt 23. & DV æquales: sed 2 3 est similis arcui R 8. Ergo, & VD similis erit arcui BN. Maximè, quia eodem argumento AM, & BN probantur æquales arcui 8 R. Siquidem A 8, & MR semiarcus sunt æquales: Ablato ergo communi arcu M 8 remanent AM, & 8 R æquales, & ita dicas de arcu NB; quòd sit æqualis eadem ratione arcui 8 R.

THEOR. XI. PROPOS. XVIII.

Circuli, qui tangunt eundem parallellum æqualiter sunt inclinati ad maximum parallelorum, & poli eorum æqualem à polo maximi paralleli habent distantiam.

SIt figura præcedens, & omnia in ea disposita, vt priùs. Quia ex def. 6. par. primæ circulus ad circulum inclinat æquè, cùm maximi circuli perpendicularis ad ipsos ambos arcus angulum, quem faciunt eorum plana in se secando, mensurat: Ideo videndum est; an inter circumferentias tangentium eundem parallelum, vt FADE GHVK, & maximum parallelorum FZEK, æquales circumferentię perpẽdiculariũ vtrisque maximorũ circulorũ intercipiãtur: circuli autẽ OZQ, & OPQ sunt perpendiculares, vtpote transeuntes, vt in præced. probatione fecimus, per eorum contactus IL, & per eorum polos ⁎ ⁎, & per polos etiam Q. & O paralleli maximi FZPEK. Quia itaq; OP, & OZ sunt quadrantes maximorum, quòd transeat maximus FZPEK. per eorum polos ex Coroll. propos. 14. primę partis huius, ideo erunt inuicem æquales. Arcus verò OI, & OL ex prop. 18. par. 1. h. sunt æquales, quibus ablatis à quadrantibus OZ, & OP residua supererunt IZ, & LP æqualia, quæ intercipiuntur inter circulos FADE, & GHVK tangentes eundem parallelum, & ad maximum parallelorum FZEK inclinati. Cum itaque sint æqualia residua maximorum, tum tangentibus, tum maximo parallelo perpendicularium. Ergo tangentes eundem parallelum æqualiter sunt inclinati.

Probatur secunda pars, quod habeant polum æquè distantem à polo maximi parallelorum. Polus distat à circumferentia maximorum quadrante. Ergo inter FADE, & KNVG tangentes eundem parallelum, & polum ⁎ ⁎ ipsorum quadrans interest IZ ⁎, & LP ⁎; sed etiam inter polum maximi parallelorum, & circumferentiam parallelorum, quem tangunt, intermediant arcus æquales OI, & OL, additis ergo istis arcubus æqualibus illis quadrantibus IZ ⁎, & LP ⁎ remanabunt arcus æquales OIZ ⁎, & OLP ⁎. Vnde, & æqualiter distabunt à polo Q, vel O, vt patet.

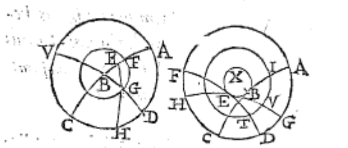
COROLLARIVM.

HInc est quòd cum distent æqualiter à polo parallelorum,, poli eundem parallelum tangentium, quod possint vniri circulo aliquo parallelo, qui per eorum puncta ⁎ ⁎ transibit, cum æqualiter distent à polo O, & consequenter à polo Q.

THEOR. XII. PROPOS. XIX.

Maximi circuli qui similes circumferentias parallelorum circulorum in sphæra auferunt isti; aut per parallelorum polos transeunt, aut eundem vnum parallelum tangunt.

IN Sphæra maximi circuli ABC, DBV auferant circumferentias similes AD, & DC ex parallelis ADV, & FG. Dico, quòd si alter ex maximis circulis transeat per polos parallelorum, quod etiam alius transibit; quòd si alter tangat, & alter quoq; tanget; quòd si vnus non tangat, nec per polum transeat, nec alter continget, vel per polum transibit parallelorum. Sed ambo parallelum minorem contingent; Transeat ergo primo ABC per polum B parallelorum. Dico, & maximum DBV per eundem polum B transire, & erit polus in communi sectione, quod si id negetur, & dicatur punctum B quo se intersecant non esse polum, sed aliud punctum E. Ducatur ex polo E per punctum G arcus circuli maximi HE: Iste ex prop. 12. auferet circumferentias parallelorum similes HA, & GF. Ergo inuicem erunt similes AD, & AH, vtpote eidem arcui FG similes. Ergo cum sint eiusdem circuli erunt quoque æquales, totus inquam AH arcus cum sua parte AD. Non potest itaque euenire, quòd AD, & FG sint arcus similes, & transeunte per polum ABC maximo non transeat quoq; per polum B, et in eo non se intersecet DBV.



Tangat secundo maximus ABC parallelum BE. Dico, & alium maximum DEF eundem tangere; si enim non tangit, sed secet, ducatur maximus aliquis, qui tangat in puncto E, & secet maximum ABC, & sit GH. Quia ergo GH tangit ex propos. 17. EXE, ideo AG, & IV, & BE erunt arcus similes, sed ex hypothesi similes quoque sunt AD, & IT, & BE. Ergo, & inuicem erunt similes IV, & IT, sicut, & AG, & GD; & ideo cum sint in ijsdem circulis, erunt æquales AG, & AD sicut inuicem IV, & IT erunt æquales pars toti, quod esse nequit.

Non tangat tertio ABC parallelum IVT, sed secet: Nec transeat per polum parallelorum X. Dico alterũ quoq; DEF secare, nec transire per polum X. Sed ambos maximos contingere circulum parallelum minorem, si tamen auferant circumferentias de parallelis similes.

Probatur. Nam ex prop. 6. cum obliquus sit, siquidem si rectus esset transiret per polos ex Cor. propos. 13. quod non ponitur. Is continget parallelos inuicem, & etiam circulis alligatis minoribus ADC, & IVT, & æquales inuicem, quorum alter est BE, qui minor erit prędictis parallelis cũ eos secet ABC; hũc autem tangat: Probo etiam DEF ipsos minores parallelos tangere, quorum alter est BE.

DE. Si enim non tangit; alter GEH circulus maximus tangat. Secetq; maximū ABC. Quia ergo GEH tangit eundem parallelum EB ex propoſ.17. erunt arcus AG, IV, & BE ſimiles, ſed tales ex theſi ſunt arcus AD, & IT, & BE. Quare cum ſint ſimiles vni tertio EB arcus IV, & IT erant inuicē ſimiles, cumque ſint eiuſdem circuli, erunt quoque ęquales pars toti, quod eſſe nequit, ſic, & AD, & AG erunt ſimiles, & eadem ratione æquales, quod eſt abſurdum, pars enim eſſet ęqualis toti.

EXPENSIO III.

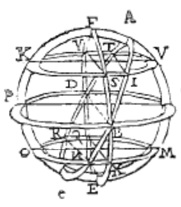
De ſectionibus maximorum cum minoribus inæqualibus, & non ſimilibus.

QVia circulum obliquum alteri, vt Zodiacus Æquatori in ſphæra cęleſti, circulus perpendicularis eorum alteri, qualis eſt Horizon Æquatori, non ſecat æqualiter, vt experimentū docet; ſed dum æquales partes Æquatoris perorïūtur; non tamen æquales partes Zodiaci emergunt; ideo ad tractatum de ſphæra funditùs intelligendum, hæc vltima Expenſio percurrenda eſt, in qua de iſtis ſectionibus peragitur.

THEOR. I. PROPOS. XX.

Si in ſphæra maximus aliquis circulus aliquos minores in eadem deſcriptos ſecet, & non per polos in partes inæquales eos ſecabit, & ſegmenta erunt æqualium parallelorum ad eaſdem partes huius hemiſpherij ſegmentis parallelorum alterius hemiſphærij inæqualia, & hinc ſemicirculo maiora, inde minora.

SIt ABCD circulus maximus, qui ſecet parallelos VIKT, & MXNOZ, & non per polos. Dico eos minores ſecare in partes inæquales: nempe eſſe partem maiorem IKT parte IVT, & ſic NMR parte RON. Deſcribatur ex circumferentia maximi parallelorum PBQD maximus FBED, qui per Q eius polum tranſeat, & per ſectiones BD, & ſit ei perpendicularis: diuidet is parallelos bifariam in XZ, & SY ex pr.14.Cor.h.par.I.



Quare patet, quod NMR erit maior, quam NOR, & IKT, quam IVT.

Dico ſecundò. Quòd ad eaſdem partes ſegmenta erunt inuicem inæqualia. Nam minor eſt RON, quàm IKT ex probatione præcedenti.

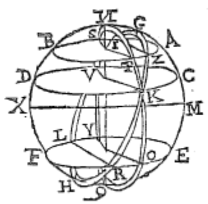
Dico tertio. Quòd ducto maximo parallelorum ad eaſdem partes ABCD hinc ab illo ſegmenta ſunt ſemicirculo minora, vt RON, inde maiora IKT; Vt probatum eſt, cùm SKY, & XOZ ſint ſemicirculi; quibus additur IT VS, vt ſit maior, aufertur XZNR, & fit minor arcus ſemicirculo.

THEOR. II. PROP. XXI.

Si in ſphæra circulus maximus parallelos aliquos circulos ſecet, & non per polos parallelorum arcus ad eaſdem partes in dimidio hemiſphærio ſunt maiores, quàm, vt ſint ſimiles arcubus in altero hemiſphærio exiſtentibus, vel è contrà.

SEcet in ſphera parallelos AB, & CD, & EF, & non per polos maximus circulus GH. Dico arcus IBZ in hemisferio MNX eſſe maiores; quam vt ſint ſimiles arcubus RFL alterius hemiſphærij MQX.

Per puncta KV, & per polos N, & Q duo circuli, ſeu ſemicirculi maximi NYQ deſcribātur, & NKQ. Iſti ex prop.12.h. arcus ſimiles intercipient KDV, & SBT, ergo ZBI erit maior; quam quod ſit ſimilis arcui KDV; ſic OFY erit arcus ſimilis arcui KDV. Ergo KDV erit maior, quàm, quòd ſit ſimilis arcui RFL, & ideo quoque ZBI erit maior, quam, quod ſit ſimilis arcui RFL.



THEOR. III. PROPOS. XXII.

Si in ſphæræ ſuperficie intra circuli cuiuſque peripheriam punctum aliud à polo ſignetur, & per illud arcus plurimorum maximorum circulorum agantur, qui per polum prædicti circuli tranſit arcus, erit maior omnibus alijs, & reſiduus minor.

Reliquorum verò propinquior maximo remotiore ſemper maior erit.

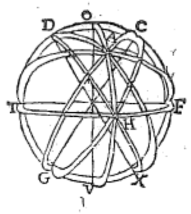
Et æqualiter diſtantes æquales erunt.

SIt punctum A ſignatum in ſuperficie ſphæræ intra circuli, ſiue maximi, ſiue non, peripheriam CDGX, perque punctum A plurimi maximorum circulorum arcus agantur, vt CA, & AG, & FA, & AD, & vnus tranſeat per polū H prędicti circuli CDGX, & ſit AV, cuius reſiduus arcus ſit AO. Dico maximum eſſe arcum AV, qui per polum H tranſit, & reſiduum eius AO minimum; cæteros verò propinquiores, vt AG remotioribus, vt AD eſſe maiores, & æqualiter diſtantes, vt AF, AT æquales.

Trahantur per polum H, & per puncta circumferentię circuli CFGD arcus maximorum circulorum HG, & HD, puncta inquam per quæ tranſeunt arcus primo ducti. Sic TH, HE, & cęt. Tunc ſic.

* Probo primam partem propoſitionis, ex propoſ.9.partis huius ſecundæ. Cuiuſcumque trianguli ſphærici duo crura reliquo ſunt maiora. Ergo in triangulo AHG erunt maiora crura AH, & HG crure AG. Sed duo crura VH, & HG ex prop.18.huius part.I. ſunt æqualia. Nam arcus HG, & HV ducti ſunt à polo H arcus AH idē. Ergo arcus AV maior eſt, quam AG, & eadem ratio eſt de crure AT, & TH, vt patet, & de omnibus alijs.

Probatur ſecunda pars de reſiduo arcu, quòd ſit minimus. Nam duo crura HA, & AC reliquo HC ſunt maiora ex cit. propoſ.9. ſecundę partis huius: Sed arcus HO eſt æqualis cruri HC ex prop. 18. huius part.I. Si ergo auferatur cōmunis arcus HA, remanet AC reſiduo AO maius.



Probatur quoq; tertia pars. Quod AG ſit maior arcu AD. Nam crus HA eſt commune, & duo crura HG, & HD æqualia: angulus verò AHG maior angulo AHD. Vnde ex propoſ.12. ſecundæ partis huius, baſis AG ſubtenſa angulo maiori maior erit baſi AD.

Probatur tandem vltima pars, quod AF, & AT ſint æquales ex prop.11.p.I. Nam AH latus eſt cōmune; crura HF, & HT æqualia; angulus ab illis comprehenſus FHA ob hypotheſim æqualis diſtantiæ ab arcu OAV, neceſſariò eſt ęqualis angulo AHT: Ergo, & baſis AF baſi AT æqualis.

THEOR. IV. PROPOS. XXIII.

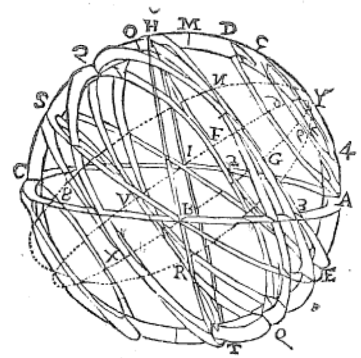
Si in ſphæra maximus circulus vnum quidem circulum tangat; alium autem ei parallelum ſecet poſitum inter ſphæræ centrum, & circulum, quem tangit; polus autem eius dicti maximi fuerit inter parallelum, quem tangit, & quem ſecat; circuli maximi tangentes parallelum, quem ſecat, erunt ad illum inclinati.

Rectiſſimus autem tangentium erit in eo puncto, in quo maius ſegmentum bifariam diuiditur; humillimus, in quo minus ſegmentum bifariam diuiditur.

Illi verò arcus, qui tangunt in punctis à prædictis contactuum æquè diſtantibus ſimiliter inclinati ſunt, qui verò magis accedunt ad contactum humillimi, magis inclinati ſunt, quàm, qui ab eo longiùs abſunt.

Poli verò tangentium ſunt in parallelo ipſi, qui tangitur, & ipſo minore.

SIt in ſphæra maximus circulus ABCI, qui tangat parallelum AD, ſecet verò parallelum EGHF poſitum inter ſphęrę centrum, & circulū AD, quem tangit. Polus autem circuli maximi prædicti ABCI ſit in M inter parallelos AD, & EF HG; circuli verò maximi contingant parallelum, quem ſecat in G, in N, in H, in F, in E nimirum HBTI, & SBEI, & FZXQ, & GZVP, & NORQ. Dico omnes eſſe ad circulum ABCI inclinantes. Secundo Rectiſſimum eſſe HBTI tangentem in puncto H, in quo maius ſegmentum 3 H 2 paralleli, qui tangitur, bifariam diuiditur à maximo per polum tranſeunte, qui eſt AMCT. Humillimum verò eſſe BSIE, qui tangit in oppoſito puncto E, vbi idem AMCT ſecat paralleli minorem arcum 2 E 3.



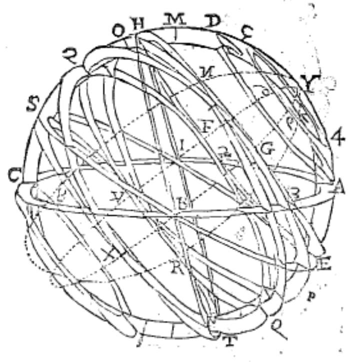
Tertiò æquidiſtanter ab iſtis punctis tangentes eſſe eodem modo inclinatos: ſed qui diſtat magis, in quo tangit humillimus illum eleuatiorem eſſe.

Quarto polos eſſe in parallelo 45. minore illo AD, qui tangitur, ſed tamen ei parallelo.

Probatur primo hæc vltima pars, vtpote fundamentum cęterarum. In circulo maximo AMCT ſecante, vtpote ei perpendiculari erit polus circuli tangentis AICB, & diſtabit ab eius ambitu quadrante. Quia ergo diſtantia MA eſt quadrans, & YH eſt quadrante minor, vtpote à parallelo EH ad eius polum Y: Si menſuretur ab H quadrans verſus A non perueniet ad A, vtpote, quod ſit maior quadrante, cum polus M debeat eſſe inter H, & Y ex theſi. Verùm excedet Y, quòd ſit HY minor quadrante; Vnde cadet in puncto 4. inter A, & Y, & polo Y interuallo Y 4. deſcriptus circulus 45. hic polos omnium tangentiū in ſe continebit. Deſcribantur enim per polum Y, & puncta contactuū N, F, G, E, & cæt. arcus maximorum circulorum punctati YN, & YF, & YG, & YE erunt omnes arcus à polo Y ad parallelum EH æquales. Nempe YE, & YG, & YN, & YH, & YF. Sunt quoque arcus reſidui vſque ad parallelum minorem 4 5 ęquales Y 9. Y 4. Y 6. Y 7. & Y 5. ob eorum paralleliſmum. Quare, ſi addātur prædictis erunt omnes æquales, ſic EY 5. & HY 4 ſic NY 7. & GY 6. & FY 9. erunt æquales: ſed HY 4. vnus eſt prædictis arcubus probatus eſt quadrans. Ergo omnes quoque alij erunt quadrantes, cùm ergo circumferentia circuli 4, 5. remoueatur quadrante à circumferentijs tangentium, vt remouetur H 4. & in 4. ſit polus, erit etiam in omnibus alijs punctis illius circuli 4. 5. polus aliorum circulorum tangentium.

Probatur prima pars, & ſecunda, quia intra ambitum circuli ABCI punctum Y electum eſt pręter eius polum M; à quo ducti ſunt arcus YMC, tranſiens per eius polum, & YA eius reſiduum, & YAE, & YN 8, & YFI, & YGB, qui etiam tranſeunt per

per cõtactus H,N,F,G,E,& polum 5.& 4.7.9..6.circulorũ maximorũ tangentiũ EBIS,& HBTI,& cęt.& ideo istis omnibus sunt perpendiculares. Vnde, & tangentium prędictorum ad secantem circulum ABCI inclinationem mensurant ex def.6.p.1.h. Quamobrem ex propos.22. huius arcus YHC erit maior, quàm Y N 8, & hic quam IFY, cui erit æqualis YGB, & hi maiores, quàm Y 4 A. Quia autem diximus in prima probatione YDH, & YN, & YF, & YG, & YE esse arcus æquales; Si hos arcus æquales à successiuè inæqualibus auferamus, remanebit maius residuum HC residuo N 8, & hęc residuis FI. & GB, & hæc residuo nullo arcus IE nihil enim remanet ablato arcu YE; Hi verò om-



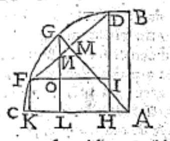
nes arcus inclinationem mensurant arcuum tangentium: Quare cum remaneant inæquales, & semper minor, qui magis remouetur ab arcu YMC transeunte per polum M, manifestè patet, diuersam continuè tangentium esse inclinationem, & semper maiorem eorum circulorum recedentium magis à polo M; minores enim arcus inter eos, & circulum ad quem inclinant ABCI intercipiuntur. Patet quoque tertia pars, quòd si arcus sint æquales, vt BY, & IY, qui sunt quadrantes inclinationem fore ęqualem, cum ablatis æqualibus arcubus GY, & FY reliqua debeant superesse æqualia BG, & FI.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. XXIV.

Portiones diametri subtensæ arcubus æqualibus, quò propinquiores sunt alteri diametro in quadrante, eò sunt maiores.

SIt ABC quadrans, in quo sumantur arcus ęquales DG, & GF ducanturque perpendiculares DH, & GL, & FK. Dico portiones diametri HL, & LK esse inęquales, & illam esse maiorem, quæ magis alteri diametro AE propinqua est, nempe HL maiorem esse, quam LK Ducatur diameter GA, & chorda DF, & IF parallela subtenso diametro AC:

Quia ergo DF secta est bifariam in M, vt satis constare potest ex 27.El.l.3 Cor.6. erit maior ND, quam FN. Quia verò in æquiangulis triangulis ita est DF ad IF, vt NF, ad OF ex 4.lib.6.elem. residuum quoque ex 22.l.5.el. DN ita erit ad IO, vt NF ad OF, sed DN est maius, quam NF, ergo etiam IO,



quam OF, ex propos.12.lib.5. & ideo etiam LH æquales, quàm LK.

COROLLARIVM.

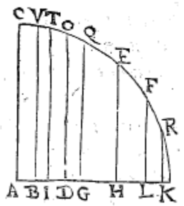
HInc manifestè patet, quod si transferatur LH propinquiùs ad AB minorem arcum subtensuram, sicut, & LK. Quia, si subtenderent æqualem arcum, iam ipsi arcus, quo viciniores alteri diametro eo segmenta diametri maiora non subtenderent; cum subtenderent ipsa eadem, quæ subtendebant sibi remotiores arcus.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. XXV.

Portiones diametri duobus arcubus inæqualibus subtensæ remotioribus ab altero diametro in quadrante; si illi diametro alteri viciniores arcus subtendant, illi arcus erunt inuicem inæquales, & remotior erit minor.

SInt arcuũ ęqualiũ, & diametri portiones LH, & LK, quæ trãsferãtur viciniores diametro alteri AC. Dico *eas subtendere duos arcus inuicem inæquales, maioremque esse* VO *propinquiorem diametro alteri* AC; *quam* OQ *remotiorem*.

Probatur. Sinus versus LK est minor, quàm LH sinus subtendẽtes arcus æquales ex præc. quia subtendit arcum remotiorem. Transferatur in DG, & DB manente eodem interuallo, eritque minor DG, quam DB: Mensuretur itaque à puncto D sinus DG, & sit DI: cadetque punctum I inter D, & B puncta. Quare arcus TO inter



parallelas IT, & OD comprehensus est minor; quã OV inter OB, & OD parallelas distantiores clausus; sed arcus TO est maior, quàm OQ, vtpote vicinior alteri diametro AC ex præced. Coroll. Ergo tantò maior erit VO ipsos TO arcus maior.

COROLLARIVM.

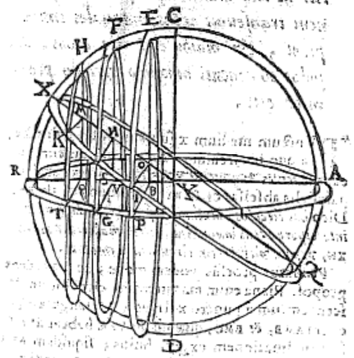
HInc etiam patet, quod etiam si portiones diametri prædictæ diminuantur, & fiant minores in eadem proportione, quòd adhuc translatę arcus inæquales subtendant, & quod maior arcus sit propior alteri diametro. Quoniam enim ponitur KL ad DG, vt HL ad BD, & LK est minor, quam HL; erit etiam DG minor, quam BD: Vnde, si DI fiat ęqualis ipsi DG, cadet inter B, & D: Quare arcus VD erit maior arcu TO, quod parallela inter D, & O tendat: Sed TO est maior, quàm OQ ex præced. Coroll. vtpote semidiametro AC vicinior: Ergo tantò magis VO erit maior, quàm OQ.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXVI.

Si in circumferentia maximi circuli sit polus parallelorum, qui per partes æquales quadrantis alicuius circuli maximi obliqui ad eosdem ducti sint; hi ex eo circulo, in quo polos habent inæquales circumferentias auferunt, quæ quarum proprior maximo parallelorum, remotiore maior erit.

*SIt circulus ACRD, & maximum parallelorum exprimat diameter CD, cui sint paralleli EIP, & FSG, & HKT abscindentes ab obliquo circulo ZX partes æquales IS, & SK, & habentes polos in R, & A maximorum circulorum communi puncto. Dico *eos à circulo, in quo polos habent, vel* APR, *vel* ACRD *arcus inæquales secare*, esseque EF maiorem, quam FH, & PG, quam GT.



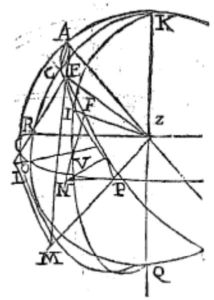
* Probatur ex prelibata propositione. Ductis enim parallelis sectionibus FO, & SN, & KM, parallelę enim sunt ob plana parallelorum inter se æquidistantia, & diametro YX perpendiculares, quòd sit sectio circuli ACRD transeuntis per polos parallelorum, & consequenter eorum planis perpendicularis ex Coroll. prop.8.p.1.h. Quare ON, & MN erunt portiones diametri interceptæ per quarum extrema puncta transibunt sectiones OB, NV, & MQ eiusdem circuli ACRD perpendiculariter cadentes super AR axem per polos parallelorum R, & A ductum ex propos.8. Cor.1. par.1. h. Quare facient triangulum rectangulum YMQ, cuius basis YM, in quo sunt triangula æquiangula YBO, & YVN. Quia ergo YO est basis portio diametri YO erit maior, quàm YB: quare aliæ portiones BV, & VQ viciniorem arcum diametro DC subtendent, vtpote quod sint illi viciniores. Rursus ob parallelas BO, & VN, & MQ: ita erit ON ad BV se minorem, vt MN ad VQ minorem se, quare ex præced. propos. & Coroll. arcus, quos subtendunt portiones BV, & VQ; ne dum erunt minores arcubus IS, & SK obliqui circuli; sed, & erunt inęquales, & maior erit FE, quam FH, vtpote diametro CD vicinior, & idem dicendum de arcubus PG, & GT; vicinior enim PG erit maior, quàm GT, quòd nimirum subtendantur à proportionibus diametri translatis VB, & VQ, & in eadem proportione minoribus, quàm ON, & MN.

THEOR. VI. PROPOS. XXVII.

* *Sectorum æqualium plana in circulo inclinante, quo circulo inclinationem mensuranti fiunt propinquiores, & eo circulis intercipientibus minus obliqui, seu inclinati sunt.*

*SInt sectores AZC, & CZI in circulo maximo inclinante ACP, angulo AZ R ad circulum ROP. Dico *sectorem* AZC *esse minus obliquum circulo intercipienti* KCQ, *quam sector* CZI *plano* KIQ *normalibus circulo* ROP.

Ducantur perpendiculares sectioni ZC, sectoris AZC, & sectioni ZI sectoris CZI, quæ sectiones sint AEM, & EFP, quæ producantur vsque ad sectionem circulorum productam ZM, & incidant in eam in M, & P, aganturque plana per has sectiones AM, & EP perpendicularia circulo ACP, eritq; sectio EL perpendicularis plano ex prop.4. Coroll.1. & 2. tract.22. & sectioni ZC rectangula, & angulus LEM erit angulus inclinationis planorũ idemq; dicendum de sectione FV, & LZ, & de angulo NFP. quod sit angulus inclinationis planorum. Quia itaque AEZ est angulus rectus, ZEM triangulum erit rectangulum, sicut, & ZFP, in quibus, quia angulus ad centrum EZM est maior, quàm angulus FZP; consequenter erit residuum ZME minus reliquo ZPF, cum duo quilibet in vno quoque triangulo recto sint ęquales ex Coroll. 9. prop.17. lib.1.el. Cum ergo ZME sit minor angulus, linea EM obliquius incidet in sectionem ZM, quàm li-



nea FP in eandem. Quia autem fecimus angulum LEM esse inclinationis ob latera sectioni EZ perpẽdicularia, planum ELM, ex Cor.2.cit. at LZM vt in plano ei normali POR, sunt normalia KCOQ plano; etiam ex 16. tract. 22. communis illorum sectio ML erit rectangula plano, & sectioni EL, & idem asseras de sectione PN. Quia ergo in rectangulo ZLM est maior angulus apud Z, quàm in rectangulo PZN residuus angulus apud M erit maior residuo apud P in rectangulo ZNP; Cum ergo duę sectiones EM, & LM cũ sectione ZM faciãt ãgulum acutiorẽ, & magis obliquũ, quã duæ sectiones

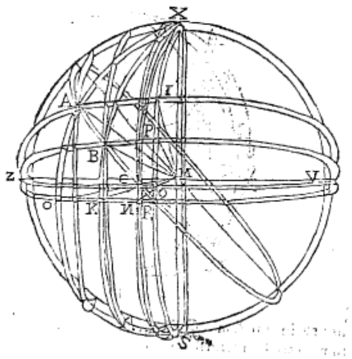
FP,

VP,& NP minor erit angulus apud M ex pr.20.tr.22 in rectãgulo MEL, quàm FPN in rectangulo FPN quare reſiduus angulus apud E in MEL rectangulo, erit maior, quàm NFP in rectangulo NFP; ſed anergulus apud E,& F eſt angulus inclinationis ſectorum, ergo minus inclinabit AZC ſector, vtpote cuius eſt maior angulus inclinationis ad KCQ, quàm ſector CZI ad KIQ circulum. Sector autem AZC vicinior eſt circulo KARQ inclinationẽ mẽſuranti.

THEOR. VII. PROPOS. XXVIII.

Si in circumferentia circuli maximi ſit polus parallelorum; huncque ad angulos rectos ſecent duo alij circuli maximi, quorum alter ſit vnus parallelorum: alter verò obliquus ad parallelos, & per obliqui circuli æquales arcus, & polum deſcribantur maximi circuli, hi circumferentias inæquales intercipient de maximo parallelorum; quarum propior maximo circulo primo poſito remotiore maior erit.

*SIt polus parallelorum Z in circumferentia maximi circuli XZSV; paralleli verò ſint circuli ducti per circumferentias æquales circuli obliqui RCBA. Quorum maximus ſit XRS; A polo verò Z per ea puncta terminantia æquales circumferentias CB, & AB circuli maximi educantur ZCQV, ZAIV, & ZBPV. Dico hos maximos circulos de maximo parallelorũ XRS æquales circumferẽtias non auferre: ſed eſſe maiores; quæ proximiores ſunt circulo primo poſito XZSV, nempe eſſe maiorem IP, quam PQ.



* Probatur ex præced. propoſ. 27. Nam, quia arcus AB æquatur arcui CB ex Hypoſi, & MC, & MB, & tandem MA radij ſunt; erunt triangula AMB, & BMC æquicrura. Et plana circulorum maximorum ZAIV, & ZBV claudunt angulum apud M trianguli AMB: ſic plana circulorum maximorum ZBPV, & ZCQV claudunt trianguli BMC angulum apud M. Inciduntque illi circuli in planum maximi parallelorum XQRS rectangulè, & quia proximior eſt maximo circulo XZS maximam planorum inclinationem menſuranti, ex theſi, arcus AB, arcu CB eius plani AMB inclinatio erit minor, ſeu minus obliquum, quam planũ CAMB; quaderè angulus IMP in maximo parallelorum XQR interceptus à planis maximorum circulorum rectangulè ei exiſtentiũ ex propoſ.22. Tract.22. erit maior angulo PMQ. Quadere ex propoſ. 39. lib.6. etiam arcus IP erit maior arcu PQ. Anguli autem LMP, & PMQ ſunt anguli inclinationis planorum ex 6. definit. primæ partis huius.

THEOR. VIII. PROPOS. XXVIIII.

Iiſdem poſitis, ſi in circulo polos continente parallelorum punctum medium inter eos eligatur, & ad circulũ maximũ per ſectionem obliqui, cum maximo parallelorum, & per eorum polos tranſeuntem ab illo puncto circuli maximi per arcus æquales in obliquo ſumptos ducantur, iſti de illo maximo per polos, & ſectionem tranſeunti arcus inæquales intercipient, & maior erit ille arcus, qui polos continenti maximo circulo proximior erit.

*PVnctum medium X ſumatur inter polos ZV, à quo in circulum VRZ circuli maximi ducantur XCNS, & XBKS, & XAOS per partes æquales à parallelis abſciſas CB, & BA in obliquo circulo RBA. Dico *hos circulos maximos à puncto X deſcendentes intercipere arcus inæquales, eſſeq; maiorem* KO, *quam* KN, *vtpote viciniorem circulo maximo* XZS.

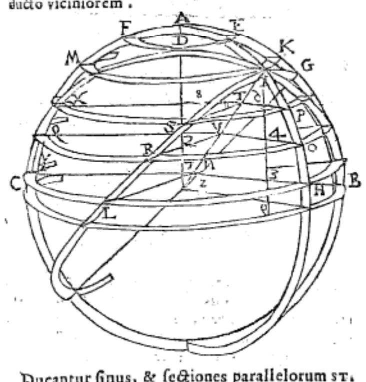
Probatur prorſus eodem modo, ac præcedens propoſ. Plana enim maximorum circulorum deſcendentium à puncto X ſtringunt triangula æquicrura AMB, & BMC, quæ plano VRZ habeat diuerſam inclinationem ex 27. huius; ſiquidem ABM triangulum, vtpote vicinius circulo XZS maximam inclinationem menſuranti, & ſectioni VZ planorum intercipientium ZIV, ZPV, & ZQV minorem obliquitatem, ſeu minorem inclinationem habet, quam BMC triangulum, & ſubtenſa arcui BA, quam ſubtenſa arcui BC, quare plana maximorum circulorum cadentium ex vertice X perpendiculariter ex 22.tr.22 intercipient triangula inæqualia in angulis, eritque triangulum OMK in angulo apud M maius, quam triangulum KMN, vtpote, quia illud OMK ſubiaceat triangulo AMB, quod habet minorem obliquitatem, & minorem inclinationem, quam BMC triangulum, cui ſubiacet triangulum conſequenter minus KMN, qui ſunt anguli inclinationis planorum CXS, & XKS, & XOS ex 5. propoſ. 1.par.h. Vnde ex prop.39.lib.6. etiam arcus OK erit maior arcu KN.

THEOR.

THEOR. IX. PROPOS. XXX.

Si in ſphæra maximus circulus tangat aliquem ſphæræ circulum; alius autem maximus circulus parallelis ipſorum contactorum circulorum obliquus tangat circulum maiorem eo, qui tangitur à primo maximo circulo eo in puncto, quo ſecatur primus ipſe: per partes æquales obliqui circuli maximi ducti paralleli auferent à circulo maximo per contactum hunc poſtremum, & per polum parallelorum ducto, & à primo poſito circumferentias inæquales, maiorque erit illa, quæ ad maximũ parallelorum propiùs accedit.

*SIt in ſphæra maximus circulus BDC, qui tangat parallelum EDF in D; ſitque alius obliquus maximus LIG: qui tangat parallelũ maiorem illo KIM in puncto I. Paralleli verò circuli XSP, QRO, & YLH ducantur per arcus æquales SR, & RL obliqui circuli LIG, & ſecent circulum maximum AIH per polos parallelorum A, & ſecundum contactum I ductum. Dico has ſectiones abſcindere ab hoc maximo per polos parallelorum ducto circumferentias inæquales HO, & OP; maioremque eſſe HO, vtpote maximo parallelorum BLC ducto viciniorem.



Ducantur ſinus, & ſectiones parallelorum ST, VR, & LN cum obliquo circulo maximo GIL vſque ad ſectionem, diametrumque IZ circuli maximi AIH perpendicularis planis parallelorum cum per eorum polum A tranſeat, & ipſi circulo obliquo GIL, cum per eius contactum tranſeat ex propoſ. 3. huius partis. Nam tria plana, nempe cuiuſlibet paralleli, & duorum circulorum maximorum in punctis ſectionũ V, N, T ſe inuicem ſolùm communicant; ideoque ea puncta erunt communia ſectioni paralleli cum obliquo LIG, & cum perpendiculari AIH. Hæ verò ſectiones ST, VR, & NL erunt quoque parallelę ex propoſ. 14. tract.22. eo, quia à planis parallelorum fiant, & occurrent ipſorum parallelorum ſectionibus cum maximo circulo BDC tranſeunte per pũctum contactus D, quę ſectiones ſunt TX; VQ, & NY, quæ, & erunt parallelę eadem ratione.

Quibus animaduerſis. Probatur propoſ. Nam ducto diametro DZ circuli primo tangentis BDC in triangulo rectangulo T8Z baſis eſt ZT, crus verò Z8. Ergo portio diametri ZT erit maior illâ Z8. Sic dicas de crure Z2. minus, quâm baſis ZV. ita de crure Z7 minùs, quàm baſis ZN. Cum ergo portiones diametri TV ad 82, & VN ad 27 ſint, vt NZ ad 7Z, & NZ ſit maior, quàm 7Z, etiam TV portio erit maior, quàm 82, & VN, quàm 27, vnde iuxta propoſ. 25. huius partis arcus QX, & QY, circuli CDB, quos ſubtendunt dictæ portiones 82. & 27, erunt inæquales, maiorque YQ, quàm QX.

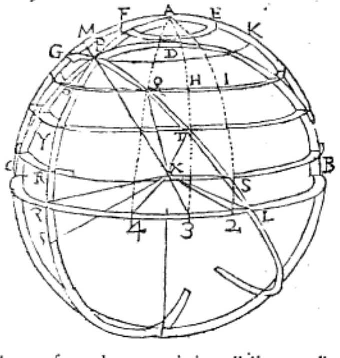
Dico ſecundò auferre quoque à maximo circulos AIH parallelos eoſdẽ, arcus inæquales, maiorẽque eſſe HO, quàm OP, vtpote parallelo maximo viciniorem. Ducatur parallela diametro AZ circuli AIH, & 16. & 64. & 43 exprimant ſectiones, quas faciunt ſinus TP, & OV, & HN. Sunt autem TP, & OV, & HN parallelæ, quia ſectiones ſunt parallelorum, & circuli ad eos recti, vtpote per eorum polos tranſeuntis AIH. Sunt quoque perpendiculares ſectioni AZ, quia ipſi ſectioni AZ plana parallelorum perpendiculariter inſiſtunt, vtpote ducti polo A, qui eſt maximi parallelorum. Ergo erunt ſinus circuli AIH, quare, & erunt perpendiculares lineæ 13 parallelæ ipſi AZ pro radio AZ ad vitandam confuſionem ſubſtitutæ. Vnde angulus apud 3. erit rectus, & IN erit baſis. Quadere eodem argumento concludemus 34 portionem eſſe minorem, quàm NV, & 46, quàm VT. Proptereaq; ſinus 34, & 46 eſſe magis propinquos maximo parallelorum BC, quàm TV, & VN, & ideo minores, & eſſe inæquales inuicem arcus, maioremque eſſe OH; quam OP.

THEOR X. PROP. XXXI.

Iiſdem poſitis omnibus, ſi per partes æquales circuli obliqui, per quas paralleli ducuntur; à polo circuli maximi parallelorum ducantur circuli maximi; Iſti ipſius paralleli maximi circumferentias inæquales intercipient, maiorque erit illa, quæ circulo per polum, & contactum tranſeunti propinquior erit.

*SIt circulus maximus in ſphæra BDC tangens parallelum EDF in D; Aliuſque circulus maximus LPG tangat alium parallelum illo prædicto maiorem MPK in puncto P; paralleli quoque alij, vt OQ, & YT, RS diuidant circulum maximũ ſecundò tangentem LPG in partes æquales ST, & QT, perque polum omnium parallelorum A, & contactum P tranſeat aliquis circulus, vt APZ; àque polo A deſcendant circuli maximi per partes æquales circuli ſecundò tangentis, & per puncta S, T, Q, in quibus obliquum paralleli ſecant, qui maximi ſint AI2, AH3, & AQ4. Dico, quod iſti circuli maximi abſcindent partes inæquales à circulo parallelorum maximo BLZC nempe 23, & 34; maior quæ erit pars 34, quæ circulo APZ per contactum tranſeunti propinquior eſt.

Probatur, vt præced. propoſ. 27. Quoniam plana circulorum maximorum punctis diſtinctorum à polo A perpendiculariter deſcendentia ſuper parallelum maximum BLZC lambunt latera triangulorum æquicrurum inuicem TXQ, & TXS ob radios QX, & TX, & SX æquales, & baſes ſubtenſas æquales ob arcus æquales QT, & TS deſcendunt-



dunque super planum maximi paralleli perpendiculariter. Insuper ipsa triangula habent diuersam inclinationẽ ad plana A 4, A 3, A 2 à polo A cadẽtia. Et quia APZ circulus, vtpote per contactum P à polo A descendens ex propos. 3. h. p. transit, & per polum 5 circuli obliqui secundò tangentis GPL; ideo ex prop. 14. Cor. h. par. 1. erit rectus ad ambos circulos maximi paralleli BLZ, & maximi obliqui LPG. Quare maximam inclinationem ipsorum mensurabit. Cum ergo triangulũ QXT magis approximet circulo maximam inclinationem ex ostensis mensuranti minus inclinabit, vel minus erit obliquus ex propos. 27. h. part. 3. ad plana à polo A cadentia; quam triangulum TXS, & magis accedet ad sectionem X A, quare trianguli inclinationis planorũ ex prop. 22 Tract. 22. à planis perpendiculariter descendentibus, & latera eorum QX, & XT, & XS lambentibus effecta, nempe 2 X 3, & 3 X 4 erunt inæqualia in angulis apud X bases 2 3, & 3 4 subtẽdẽtibus, & maior erit angulus 3 X 4 subiacens triangulo XT Q minoris inclinationis, quam angulus 2 X 3 subiacens triangulo S X T maioris inclinationis, & ideo maior erit angulus 3 X 4, & consequenter arcus 3 4 ex prop. 39. lib 6. elem. qui APZ circulo mensuranti maximam inclinationem magis appropinquat, quàm angulus 2 X 3, & consequenter arcu 2 3, qui ab eo circulo APZ maximam inclinationem mensuranti per polum A, & contactum P transeunti magis remotus.

COROLLARIVM.

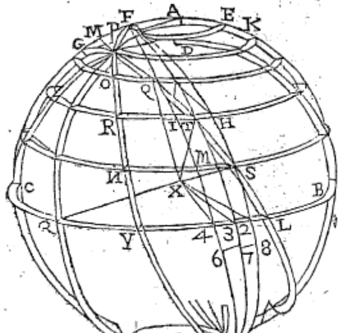
Hinc ellicies arcus quoque cuiuscumque paralleli esse inæquales; maioresque esse eos, qui circulo APZ propinquiores sunt, quia arcus parallelorum omnium à circulis maximis per eorum polos transeuntibus abscisi sunt similes, ex propos. 12. huius, & ideo tot gradus comprehendet 3. & 4. quot HQ, & tot 2 3 quot IH, sed plures gradus comprehendit 3 4, quam 2 3, ergo, & plures QH, quam H I gradus comprehendet, & sic dicas de alijs.

THEOR. X. PROPOS. XXXII.

Eodem posito maximorum circulorum primo paralleli minoris, & secundo maioris contactu, quo maiorem hunc parallelum secat maximus tangens minorem parallelum. Si circuli maximi per æquales partes circuli secundò tangentis ducantur, qui tangant minorem parallelum: hi circumferentias inæquales auferent de maximo parallelorum; quarum, quæ propior erit circulo ad easdem partes parallelum tangente à quibus partibus ipsi maximi ducuntur, & per contactum, descripto, remotiore erit maior.

Sit eadem prorsus constructio, quæ priùs, nempe circulus maximus BDC tangens parallelum minorem EDF, & alius circulus GPL obliquus ad parallelos tangat circulum parallelum maiorem MPK. partesque à parallelis insectæ eius maximi obliqui ęquales sint ST, & TQ. Dico, quod si ab E descendãt circuli maximi 2SF, & 3TF, & 4QF per puncta has partes terminantia S, & T, & Q, qui tangant parallelum EDF; abscindent à maximo parallelorum partes inæquales 2 3, & 3 4, maiorque erit pars 3 4, quæ circulo FRY vicinior est, qui ad easdem partes, nempe ad F tangit non sicut circulus BDC, qui tangit in D, & occurit ipsis maximis FSL, & per contactum P transit inter F Q 4, & APZ; Aduerte B X 7, & 7 X 6, vt triangula debere cõcipi 1. crura ad X ducta nõ sint.

Probatur; Nam triangula SXT, & XTQ sunt



æqualium inuicem crurum, basiumque æqualium ST, & TQ: Vicinius est autem triangulum TQX circulo maximo APZ per contactum P transeunti, ideo perpendiculari circulo obliquo LPG, & parallelorum maximo BLC; & ideo inclinationem maximam mensuranti. Quare circuli tangentes FQ 4, & FT 3, qui hoc triangulum efficiunt suis sectionibus TX, & QX imprimunt in plano normali, & inclinationis triangulum 6X7; quod erit maioris anguli apud X, quam trianguli remotioris 8 X 7 angulus apud X, quod triangulum substerneretur triangulo SXT remotiori. Siquidẽ triangula, quæ inter duo plana intercipiuntur quanto magis appropinquant suis basibus planorum intercipientium sectioni ex propos. 23. Tract. 22. eò maiorem angulum inclinat causant, & ex eadem quanto minus obliqua sunt; Quare cum ex propos. 27. huius subtensa arcui T Q sit minùs obliqua quam subtensa ST, quia vt dixi magis arcus ille TQ accedit ad circulum perpendicularem maximum APZ; & rursùs magis quoque sectionibus maximorum circulorum intercipientium accedit, nempe circulorum tangentium parallelum EDF; quæ apud illum circa F existunt. Quare ex 3. parte prædict. propos. 23. Tract. 22. angulus, qui fieret 6 X 7 esset maior, quam 7 X 8, vtpote subiectus angulo QXT minus obliquo, & ex dictis minorem inclinationem habenti. Intersectiones autem 2 X, 3 X, & 4 X incidunt inter circuli maximi planum, cui sunt perpendiculares, & inter plana obliqua triangulorum SXT, & TXQ, siquidem polus circuli maximi, normalis vtrique eorum debet esse in communi eorum intersectione, quæ contingit prope, simulque extra parallelum EDF, & quia circuli perpendicularis intersectio distat quadrante ab eius polo, & BYC parallelorum maximus distat à D, & F minus quadrante, ideo circulus maximus perpendicularis ad tangentes duos, V. g. ad F T 3, & F Q 4 infra ipsum BLY cadet, & arcus eius erunt V. g. 8 7, & 7 6. Facient autẽ circuli tangentes F Q 4, & F T 3, & alij cum maximo parallelorum LYZ æquales angulos 4, 3, 2 ob æqualem inclinationem ex 18. h. quia tãgunt ex hypothesi eundem parallelũ EDF. Cumq; anguli 4, 3, 2 tangentiũ FQ 6, &c. sint ęquales, quod sint æqualiter inclinati, anguli vero circuli duobus arcubus illis perpendiculariter incidenti sint recti, patet verificari Coroll. cit. propos. 23. maioremque esse angulum 4 X 3, quam 3 X 2, vtpote angulo maiori 6 X 7 subiectum, quam, quod sit angulus 7 X 8, non sunt autem ducta crura 6 X, & 7 X, vel 8 X ad vitandam confusionem, sed mente supplenda. Quamobrem arcus 4 3 quoque ex 39. lib. 6. Elem. erit maior, quam 3 2, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet idem dicendum de arcu TH, & arcu TI paralleli HL, quòd nempe TH sit minor, quam TI, qui remotior est à circulo FPZ, quia arcus 2 3 est similis arcui TH, & arcus 3 4 arcui TI, & idem dicendum de omnibus alijs parallelis; qui inter maximum BL TC, & parallelum MPK describi possunt.

THEOR. XI. PROPOS. XXXIII.

Si in sphæra maximus circulus aliquem circulum tangat; alius autem maximus circulus obliquus ad parallelos tangat parallelum maiorem illo, quem tangebat maximus circulus primo positus: Inæquales intercipient circumferentias parallelorum circulorum; quorum propiores vtrouis polorum ad eandem partem maiores erunt, quam vt similes sint remotioribus.

Sit schema præcedens; in quo sit maximus circulus FPY tangens parallelum minorem EDF; & alius circulus maximus GPL tangat parallelum maiorem MPK; feceritque duos parallelos quoscumque SN, & TR. Dico arcus TR, & SN inæquales esse; maioremque esse NS polo V propiorem, quã, quod sit similis arcui RT. Ad quòd ostendendum describantur maximi circuli apud F tangentes, vt F T 3 per sectionem T, quo facto.

Prob. propos. Nam prop. 16. huius ostendimus partes parallelorum interceptas inter maximos circulos eundem parallelum tangentes, vt sunt MN, & TR esse similes. Ergo NS inter maximos circulos tangentes comprehensus erit maior, quã quòd similis esse possit; quia erit maior, quam NM, qui est ille arcus, qui similis est arcui RT. Quod autem tangens FT3 abscindat arcum minorem NM, quam NS patet, quia isti arcus se decussant in T. Vnde GPS arcus remanet vltra m apud S.

EXPENSIO IV.

De partibus, quæ ab intersectionibus maximorum circulorum fiunt, nullam proportionem dicentibus, nec inuicem, nec cum diametris ipsorum circulorum.

Vidimus vsque adhuc aliquos circulos ab alijs posse ita secari, quòd eorum partes, aut similes sint, aut æquales, & de istis nullum dubium est, quod proportionem dicant cum similem rationem habeant.

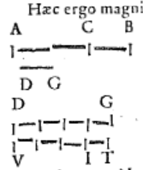
Deinde adesse alias intersectiones quibus in tales partes circuli diuidantur, vt inter eas nulla reperiatur, aut æqualitas, aut similitudo, modo videndum an inter ipsas aliqua proportio, nempe rationum similitudo inueniri possit, sed priùs quædam pro fundamento substernenda sunt.

PROBL. LEMMATICVM I. PROP. XXXIV.

Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus reperire aliam mediam, quæ datæ vtrique magnitudini commensurabilis sit.

Sint propositæ duæ magnitudines inæquales AB maior, & AC minor, & alia quæcumque DG, cui oporteat reperire commensurabilẽ magnitudinem talem, quæ sit media inter AB, & AC, nempe maior, quam AC, & minor quam AB.

Excessus, quã maior AB excedit minorem AC est BC, cui comparata data quæcumque DG, vel erit minor, vel maior; Si est maior bifariam diuidatur, & si neque sic sit minor, vna ex ipsis partibus bifariam diuidatur adhuc, & toties in dimidijs remanentibus id fiat; donec efficiatur minor, quàm excessus CB.



Hæc ergo magnitudo, vel data minor, quam excessus CB, vel diuidendo minor effecta toties replicetur; donec efficiatur proximè maior, quã AC, & sit V T, ita vt si auferatur tantùm vna ex partibus replicatis iam sit minor. Dico *hanc esse quantitatem quæsitam*.

Probatur. Nam, quòd sit commensurabilis datæ DG patet, quia eius multiplex est, aut aliqua ex dimidijs successiuè factis, & ideo pars aliqua lineæ datæ DG.

Quod verò sit media inter AB, & AC patet, quia est quidem maior, quam AC, ex hypothesi necessariò verò minor, quam AB: Nam si esset æqualis,

si

ſi detraheretur vnica pars V. g. TI; quia detraheretur pars minor, quam exceſſus CB, remaneret VI maior, quam AC, & ideo non fuiſſet proximè maior, vt præſupponebatur.

THEOR. II. PROPOS. XXXV.

Si polus parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli, quem duo alij maximi circuli ad angulos rectos ſecent, nempe maximus parallelorum, & obliquus alius ad parallelos, quos duos ad eaſdem partes ſecent alij duo maximi per polum parallelorum ducti; non erit pars maximi paralleli ad partem obliqui interceptam inter circulum primo poſitum, & poſtremum per polos ductum, vt pars eiuſdem maximi paralleli altera ad partem aliam obliqui, quæ vtroque maximo circulo per polos ducto intercipiantur.

SIt circulus ACB, in quo ſit polus A maximi paralleli EHD, & alius obliquus circuli CFD ei orthogonaliter inſiſtat, quos duo maximi circuli à polo A deſcendentes ſecent, nempe AFH, qui ſecet maximum parallelorum in H obliquum in F, ſicut, & AEG ſecet maximum parallelorum in G obliquum in E. Dico, quod ſicut eſt BH ad CF non erit HG ad FE; ſed ad aliquam circumferentiam minorem, quam FE, vt in fig. I.

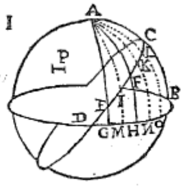
Probatur. Nam vel arcus obliqui circuli CF eſt commenſurabilis arcui FE, vel incommenſurabilis. Si commenſurabilis inueniatur eorum cōmunis menſura P, & ſecundùm eam diſtribuātur arcus CF, & FE. perque puncta diuiſionum à polo A maximi circuli ducantur LO, & NK, & MI. Eruntque æquales partes inuicem CL, & LK, KF, FI, & IE. Quare partes in maximo parallelorum ex propoſ. 28. huius erunt inæquales, maiorque erit BO, quam ON, & ON, quàm NH, & cæt. Quare ex propoſ. 8. lib. 5. Elem. maior erit proportio partis BO ad CL, quam ON ad LK, & ſic ſucceſſiuè: quia cum BO ſit maior, quam ON comprehendit plùs de arcu CL, vel æquali LK, quàm ON, & ſucceſſiuè de cæteris vſque ad G quapropter, cùm ſint tot partes in CF, quot in BH, & tot in FE, quot in HG, & quælibet pars in BH antecedens dicat maiorem proportionem, quam ſequens ad ſuam correſpondentem in CF, & idem dicas de HG ad FE, dicēt quoque omnes ſimul antecedentes partes BH ad correſpondentes partes ſequentes CF numero eaſdem maiorem proportionem, quam arcus HG partes ad ſuas in eodem numero correſpodentes FE: Quare vt dicant eandem proportionem arcus HG ad FE, quam BH, ad CF, deberet eſſe minor, ſic quia dicit maiorem proportionem 8. ad 4. quam 3. ad 2. quia 8. comprehendit 4. gemina vice, non autem 3 comprehendit 2. numerus 2. debebit eſſe minor, & fieri $1\frac{1}{2}$, & ſic ita eſt 8. ad 4. vt 3. ad $1\frac{1}{2}$.

Progreſſu 2. Quod ſi arcus CF, & FE ſint incommenſurabiles, tunc ſi non eſt, vt BH arcus ad arcum CF, ita HG ad arcum aliquem minorem, quam FE; ſaltem erit, vel ad arcum maiorem, quàm FE, vel ad eundem FE, vt in fig. 2.

Sit primum HG ad aliquem arcum maiorem, quam FE V. g. HG ad FT vt BH ad CF. Ex præc. propoſ. inueniatur arcus medius maior, quam FE minor, quam FT, & commenſurabilis ipſi CF, & ſit arcus FV. Ducaturque per polum A, & punctum V circulus maximus AVR, & quia FV ponitur maior, quam FE erit quoque HR maior, quàm HG, vt per ſe patet.

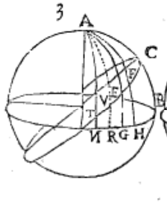
Ex præcedenti itaque argumento, ita erit BH ad CF, vt HR ad arcum aliquem arcu FV minorem: quia commenſurabiles ponuntur FV, & CF. Ex aduerſarijs verò ita quoque ponitur BH ad CF, vt HG ad TF. Ergo quoniam habēt eandem proportionem, quam BH ad CF; habebunt etiam eandem proportionem inter ſe; & ita erit arcus HG ad arcum FT, vt HR ad arcum aliquem minorē, quam FV, quia ſunt, vt BH, & CF ex aduerſarijs, ſic HG ad FT, ex probatis autem HR ad minorem, quam FV, vnde *permutando* erit HG ad HR antecedentes, vt FT ad arcum minorem, quam FV: Sed HG eſt minor, quā HR. Vnde, & arcus FT eſſet minor arcu minori, quàm FV, qui arcus FV ipſo FT minor eſt, ex 12. lib. 5. elem. quę res eſt omnino abſurda.

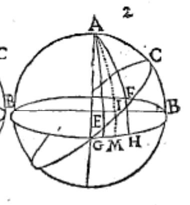
I



Progreſſ. 3. Quòd ſi in fig. 3. ita ſit BH ad CF, vt HG ad FE, & ponantur incommenſurabiles CF arcus, & FE; tunc FE diuidetur per medium in I, & ducetur circulus maximus à polo A, qui ſit AIM; Eritque maior HM arcus, quàm MG ex 26. huius, ideoque ex primi progr. probatione maior erit proportio HM ad FI; quàm dimidij totius HG ad FI dimidium arcus FE, ſed vt dimidium ad dimidium, ita totum ad totum, quare erit maior proportio HM ad FI, quam totius HG ad totum FE: ſed proportio HG ad FE, ex aduerſarijs eadem eſt, quæ BH ad CF. Ergo eſt maior proportio HM ad FI, quam BH ad CF.

Itaque quia HM habet maiorem proportionem ad FI, quam HB ad CF debebit eſſe maior arcus ad quem dicit eandem proportionem, quam ſit arcus





FI, quod tamen in ſecundo progreſſu oſtenſum eſt impoſſibile, nempe quod BH ad CF ita ſit, vt arcus HM ad arcum arcu FI maiorem. Itaque cum nec BH ſit ad CF, vt HG ad arcum arcu FE, maiorem, nec ad æqualem erit, vt ad minorem, & ſic propoſitio remanet vndequaque probata.

CO-

COROLLARIVM.

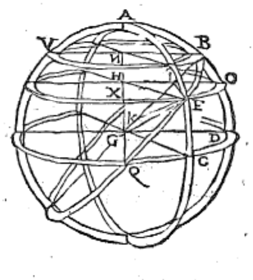
HInc fit maiorem eſſe rationem arcus BH ad arcum CF, quàm arcus HG ad arcum FE. Cùm enim ſit, vt BH ad CF, ita HG ad arcum arcu FE minorem: ſit autem maior proportio ex 8. propoſ. quinti elem. arcus HG ad arcum arcu FE minorem; quàm ad FE arcum maiorem: erit quoque maior proportio BH ad CF, quam HG ad FE; ita quia eſt eadem proportio 8. ad 4. quam 6. ad 3. eſt autem maior proportio 6. ad 3. quam ad 5. erit quoque maior proportio 8. ad 4. quam 6. ad 5. cùm 8. comprehendat gemina vice 4. non autem 6. comprehendat numerum 5.

THEOR. III. PROPOS. XXXVI.

Si polus parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli; quem duo alij circuli ad angulos rectos ſecent, nempe maximus parallelorum, & obliquus aliquis ad eoſdem, qui obliquus ſecetur à maximo circulo per polum ducto.

Semidiameter ſphæræ ad ſemidiametrum eius paralleli, quē obliquus circulus tāgit habet maiorē rationē, quàm circumferentia maximi parallelorū ad circumferētiā obliqui circuli, quæ inter circulos primò, & poſtremò aſſumptos per polum parallelorum tranſcuntes intercipiuntur.

SIt polus A in maximo circulo ABD, cui ſint perpendiculares maximus parallelorum DCQ, & obliquus ad parallelos BEQ: & hūc BEQ maximum circulum circulus alter à polo A deſcendens AEC ſecet alicubi V. g. in E inter B, & Q. Dico, quòd diameter ſphęrę BG habet maiorem proportionem ad diametrum BN paralleli, quem contingit obliquus in B, quàm circumferentia DC ad circumferentiam BE, quę intercipiuntur inter circulos ABD & AEC per polum A tranſeuntes, quod vt probetur.



Intelligendum eſt lineas EH, & EI eſſe ſectionem paralleli OEX per interſectionē E maximorū BEQ, & AEC tranſeuntis cum ijſdem; At EG, & CG eſſe ſectiones maximi AEC, cum obliquo BEQ, & maximo parallelorum DCQ. Et tandem DG, & OH, & BN, eſſe ſectiones circuli ABD, cum parallelis: Et hinc ex pr. 16. tr. 22. ſectionem EI eſſe perpendicularem ad OH, & ad BG, & angulos BNG, & IHG, & EIH eſſe rectos, & quia IHG angulus eſt rectus longior erit baſis IG, quam crus IH: vnde ſi totū illud crus ſuper baſim IG terminabit in K, ducaturque EK: ex 22. primi triāgulum EIK erit æquale triangulo EIH ob angulum rectum ad I in vtriſq; & EI latus commune, & IK, & IH æqualia crura.

Igitur ex Tr. 19. de angulis propoſ. 4. habebit maiorem rationem GI ad KI, vel ad æqualem IH crura, quam angulus EKI, vel ipſi equalis EHI ad angulū EGI, ſed angulus IHE eſt equalis angulo DGC. Ergo habebit maiorē proportionē GI ad IH, quā angulus DGC ad angulū IGE, quare, & idē verificabitur de circūferentijs mēſuratibus ex 39. ſexti el. nempe DC, & BE. Et obtinebit maiorem proportionem GI ad IH, quàm arcus DC relatus ad BE: Conſiderandum verò eſt, quod eadem proportio eſt GI baſis ad crus IH, quam GB ſemidiametri ſphæræ ad BN ſemidiametrum paralleli, quem tangit obliquus ex 4. ſexti. Quare ſemidiameter quoque ſphęrę ad ſemidiametrum paralleli DV maiorem rationem habebit, quam arcus DC ad arcum BE.

COROLLARIVM.

VNde cum iam cognoſcamus quinam circuli ita ſe interſecent, vt ſimiles ſint, vel equales, & ideo inuicem comparabiles, in proportione; quinam verò circuli non ſe interſecent in partes æquales, vel ſimiles, nec inuicem, nec cum diametro comparabiles, ſphęræ cognitionem talem nacti ſumus; vt in comparandis portionibus circulorum inuicem error, non facilè ſuboriri poſſit. Cognoſcimus quoque neceſſitatem recurrendi ad ſinuum, ſecantium, & tangentium Tabulas, vt arcuum habeamus cognitionem, cum arcus non dicant inuicem proportionem illam, quam ſinus arcubus ſubtenſi.

TRA-

TRACTATVS XXIV.

De Sectionibus Conicis.

POst Sectiones sphæricas ingredimur cognatas sectiones conicas, nec minus illis scientiæ cælesti necessarias, nec minus ingeniosas, aut mirabiles; suntq; quinque diuersæ omninò essentiæ, Triangulum, Circulus, Ellipsis, Hyperbola, & Parabola, sed triangulo posthabito, de quatuor sequentibus agemus, & de tribus quidem postremis ex instituto; de circulo verò obiter, quatenus in ijsdem proprietatibus multoties cum prædictis tribus sectionum generibus communicat. Huius verò mirabilis cognitionis promotor, & ampliator fuit Appollonius Pergęus, qu ob id Principis Geometræ nomen consecutus est.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANtequam sectiones ipsas cognitione attingamus, cuius corporis sint sectiones oportet noscere, sicut, & lineas, quę in ipsis trahi possunt, easque vel terminare, vel diuidere, nomine tenùs agnoscere, vt deinde earum quoque natura manifestior euadat, quæ ab harum appellationum intelligentia dependet.

DEFINITIO I.

COnus est corpus habens originem à circumducta lineæ à puncto in sublimi posito determinatæ longitudinis circa perimetrum circularem.

Conus propriè dicitur, vt Hyeronimus Vitalis de Mathematica optimè meritus in suo Lexico asserit. Nux pinea, quæ ex lato in acutum desinit; sed hæc appellatio à Mathematicis translata est ad significandam pyramidem rotundam, cuius basis circulus; Describitur verò, quòd manente puncto D linea, quædam DC recta circa circulũ CGHF feratur, donec à C per GFH in C iterũ redeat, vt fig. I.

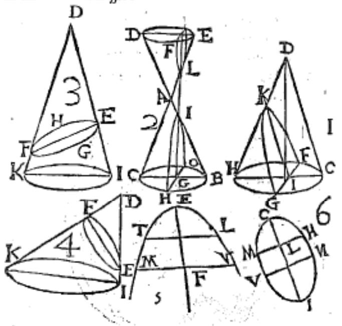
Vnde clarum est omnes lineas, quæ à peripheria circuli ducuntur ad verticem, vt CD, vel CH esse lineas rectas, quæ verò aliter curuas esse, aut certè si rectæ sint, solùm tangere, vel si secant intùs penetrare. Conus quoque posset describi ex ductu lineæ circa ellipsim. Verùm; quia ellipsis ex circulo ortum habet, & in quolibet cono etiam in basi elliptica inixo potest circulus duci, qui, & conum ipsum relinquat, & basim ei sternat, inde est; quod circulum cono pro basi substernant, vt qui certior, & magis determinatus; quàm ellipsis, quæ ab eo originem, & natalia ducit.

DEFINITIO II.

VErtex coni dicitur manens punctum, à quo educta linea superficiem conicam descripsit.

DEFIITNIO III.

AXis coni dicitur recta à vertice in centrum circuli immissa.



Vertex itaque coni est punctum D, & axis DI, & definitur; quòd cadat in centrum circuli non Ellypseos licet, & ipsa cono pro basi deseruire possit; Tum quia eius accidentia nondum manifesta sunt, vnde nec propter id pro basi vsurpatur; tum quia infinitæ diuersitatis sunt prorsùs ellipses, quę eidem cono substerni possunt, & quæ non idem centrum commune possident; vnde nullus axis determinatus assignari posset cum deberent multiplicari, prò vt infinitæ ellipses in cono assignari possunt, sicut; & earum centra.

DEFINITIO IV.

COnus rectus est, cuius linea circumducta efformatrix vbique æqualis est; Scalenus verò cuius ea linea inæqualis est.

Duplicem itaque conum distinguimus rectum, qui, & isoscellius, æquicrurisque appellatur, & Scelenum, qui obliquus quoque apellatur; hic imperfectior est, vtpote duplici axi obnoxius, ille perfectior, & vnius axis: Cæterum in vtroque omnes coni sectiones exhiberi possunt, non vt antiquitas ante Apollonium Pergęum putauit, quæ distinxit tria conorum genera iuxta tres angulorum species, quas à vertice D rectæ ad basim deductæ continere poterant, nempe Rectos ob angulum ad verticem rectum; Obtusiangulos ob angulum obtusum, Acutiangulos ob angulum acutum, in quibus singulis vnicam sectionem ponebant. In recto parallelam, quam apellabant coni recti sectionem in acutiangulo ellipsim, quam acutianguli, & in obtuso hiperbolem, quam obtusianguli sectionem nominabant.

DEFINITIO V

COni oppositi sunt ad verticem circa eundem axem existentes.

Tales sunt ABC, ADE in fig. 2. circa axem eundem positos.

DEFINITIO VI.

COni sectio est figura à plano diuidente conum in superficie coni effecta.

DEFINITIO VII.

SEctio coni per axem est cum planum secans per verticem, & per centrum circuli transit.

Sectio itaque per axem est DHC in fig. I. quæ per centrum I, axem ID. & per D verticem transit, estque triangul nm, vt suo loco ostendemùs.

DEFINITIO VIII.

COni sectio Parabola est cum planum secans parallelum vni lateri sectionis per axem adigitur.

Vt in I. fig. FGK planum est parallelum lineæ CD, quæ est crus trianguli, vel sectionis per axem CDH.

DEFINITIO IX.

COni sectio Ellipsis est, cùm planum secans vtrunque crus, sectionis per axem, secat, & angulos inæquales efficit illis, quas cum prædicta sectione basis circularis facit.

Sic sectio EGHF, quia angulus DFE, est inęqualis augulo DKI, vel alterno DIK; Sic, & angulus DEF est inæqualis angulo DIK, vel angulo DKI alterno, vt in fig. 3. vocatur ellipsis. Si autẽ angulus DEF angulo DKI, vel DFE angulo DIK alterno, vel sub contrario, vt in 4 fig. æquaretur, sectio esset circulus, ut suo loco ostendemus Tract. seq.

DEFINITIO X.

HYperbola est, cum sectionis planum alteri sectionis per axem cruri ad verticem producto occurrit.

Sic in fig. 2. si GI productum occurrat CA cruri producto vltra verticem in L, dicetur ea sectio Hyperbola qualis est OIN, & si planum secet vtrunque conum ad verticem erunt oppositę figuræ, seu Hyperbolæ.

DEFINITIO XI.

DIameter sectionum est recta diuidens lineas parallelas quaslibet, quæ ducuntur intra sectionem bifariam, & primarius quidem, seu axis, qui rectangulè diuidit, alij autem vocantur coniugati axes.

Sic CI in fig. 6. vocatur principalis, & ex generatione diameter primarius, seu axis, quia diuidit bifariam, & orthogonaliter rectas in sectione ductas, quæ dicuntur ordinatæ ad diametrum, seu applicatæ HM, & NV, si verò non ad angulos rectos erit diameter secundarius, seu coniungatus vt in fig. 5. EF, qui LT, & VM licet bifariam diuidat, non tamen ad rectos angulos.

DEFINITIO XII.

TRansuersa diameter est illa, quæ inter duo crura trianguli per axem intercipitur.

Talis est in Hyperbola IHL, quæ inter crura sectionis per axem BA, & AE intercipitur, & in hac sectione est diameter prolungata; At in ellipsi est ipse diameter absque vlla prolungatione, vt EF in fig. 3. qui si sit primarius, seu axis dicetur transuersus axis. At in parabola nullus est trasuersus diameter, cum enim eius sectio sit parallela vni cruri sectionis per axem, nunquam potest in aliud terminare, quare nec vlla linea in ea poterit in vtrumque crus sectionis per axem incidere.

DEFINITIO XIII.

VErtex sectionum est extremum diametri, cuiuscumque: at vertex supremus extremum axis.

DEFINITO XIII.

CEntrum est, quod transuersam diametrum bifariam diuidit.

Punctum, quod transuersum diametrum bifariam discepsit; vocatur centrum, quia in Hyperpesbola, vel Ellipsi omnes diametri ad illud punctum concurrunt, at Parabola nullum habet centrum, quod diametri omnes sint paralleli, vt ostendetur.

Pręter hęc essent Parametri, & Vmbelici definiendi: sed melius suo loco cum de ijs agemus, natura ipsorum inotescet.

DEFINITIO XVI.

DVæ similes figuræ sunt, quæ cum sint eiusdem speciei segmenta diametrorum ab applicatis facta vnius ad segmenta alterius sunt, vt applicatæ ad applicatas sub æquatibus angulis.

DE-

DEFINITIO XV

Æ*Quales sectiones sunt, quæ superpositæ inuicem consentiunt.*

THEOR. I. PROP. I.

Omnis sectio Coni per axem facta triangulum est.

PRobatur. Nam triangulum est illud, quod rectis clauditur, & tribus angulis constat. In cono autem omnes lineæ terminantes ad verticem rectæ sunt ex def. Cum verò basis sit plana superficies circularis erunt rectæ lineæ per illam extensæ, vnde AE, & BE, & BA tres rectæ erunt. Propterea que tres tantum angulos se tangendo poterunt efficere, ideoque AEB erit triangulum. in fig. propos. sequentis.

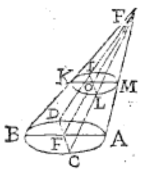
COROLLARIVM

HInceque est, quod si fiat alia sectio per axem efficietur aliud triangulum æqualis basis, vt primum. Nam altera sectio per axem EF incidet in centrum F, & rectæ CF, & FD radij erunt in circulo ACBD, vt sunt AF, & FB.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis sectio coni circularis parallela basi circulus est.

PRobatur. Nam cum plana sint equidistantia erit, vt FE ad OE, sic CD ad LI, & AB ad MK; quare CD ad LI, & AB ad MK erunt in eadem proportione. Ideoque permutando AB ad CD erunt, vt MK ad LI, & ideo dimidiæ AF ad FC vt MO ad OL dimidia: sed AF, & FC sunt æquales ex præced. Coroll. ergo etiam MO, & OL,, & ita dicas de reliquis: quare cùm omnes MO, & OL, & cæt. à puncto O ducibiles sint æquales; MIKL erit circulus.



EXPENSIO II.

De Diametro, & Applicatis.

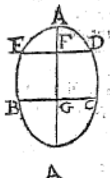
PRoprietates mirabiles sectionum ab ipso diametro, & applicatis incipiunt, vtpote illę, quę magis obuiam sunt, & faciliores intellectui se produnt, maximè quia ferè omnia, quæ de sectionibus dici possunt, in diametro, & applicatis fundantur.

PROBL. I. PROP. III.

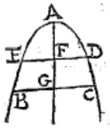
Data quacumque coni sectione eiusdem diametrum inuenire.

SIt data quæcumque coni sectio BAC. Oporteatque eiusdem diametrum exquirere.

Ducantur, vtcumque in sectione binæ rectæ parallelæ BC, & DE; quæ bifariam secentur in F, & G, ductaq; per puncta diuisionum linea FG occurrat sectioni in A. Dico *rectam* AFG *propositæ* BAC *sectionis esse diametrum*.



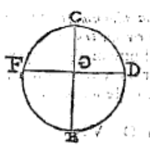
Ratio est. Quia æquidistant DE, & BC; easque bifariam diuidit in G, & F recta AGF. Vnde ex definitione II. erit diameter.



PROBL. II. PROPOS. IV.

Dato triangulo per verticem, & sectionis diametro Applicatæ longitudinem inuenire.

SIt ABC triangulum per axem coni ductum in fig. prop. seq. in quo detur diameter EG. Interuallo dimidiatæ ML diametri baseos, fiat circulus CF, BD. Accipiesq; LK, quam transferes in diametrum circuli CB à puncto G duces perpendicularè, quę sit DGF, & FD erit applicatę magnitudo; quam deinde applicabis diametro sectionis EG interuallo eodem KE in quacumque sectione, vel Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipsi, & erit applicata.



Probatur autem facilè. Quia applicata est illa, quæ diuiditur bifariam à diametro: sed punctum G est punctum diametri, illudque bifariam diuidit linea DF in G ex 13. lib. 3. el. cum ducta sit perpendicularis diametro CB circuli DCBF ex constructione. Quare erit applicata, cùm puncta F, D sint communia circulo BD, & sectionis DEF, & sint I, & V in circulo MILV.

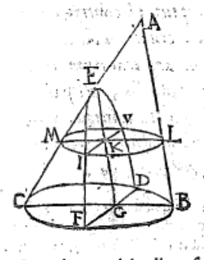
THEOR. I. PROPOS. V.

Si parabolæ cuiuscumque ad diametrum binæ rectæ lineæ sint ordinatim applicatæ, erunt quadrata ipsarum ad inuicem, vt interceptæ diametri portiones inter ipsas, & verticem.

SIt Conus ABC, in quo parabola DEF, cuius diameter parabolica EG; applicatæ verò GF, & IK ad diametrum EG, trahaturque LM. Dico, *ita est quadratum factum ex* GF *ad quadratum factum ex* KI, *vt* GE *ad* KE portiones diametri inter verticem E, & ordinatim applicatas interceptæ.

Reminiscenda est 35. propos. Eucl. 3. hæc enim in illa fundatur.

Nam in circulis ex 2. h. LVIML, & CDBF parallelis se secent mutuò diametri LM, & CB cum chordis VI, & FD, & ad angulos rectos in K (angulus enim K rectus est, licet id fig. non exprimat) vt ex dictis propos. 4. huius. Quare, ex segmentis LK, & KM constituatur rectangulum, & segmentis æqualibus VK, & KI constituatur quadratum, erunt æqualia: Sic si ex, segmentis BG, GC rectangulum, & æqualibus DG, & GF quadratum constituatur, & hęc erunt inter se equalia. Vnde ita erit rectangulum constitutum ex CG, & GB segmentis diametri maioris circuli ad rectangulū ex segmentis LK, & KM minoris, vt quadratum ex segmētis chordæ GD, & GF ad quadratum ex segmentis chordę IK, & KV. Sed istorum duorum rectangulorum altitudines sunt eædem: siquidem segmenta LK, & BG; quia sunt parallela, & inter parallelas BA, GE sunt æqualia ex prop. 33. primi. Ergo se habebunt inuicem, vt bases GC, & KM ex propos. 1. lib. 6. Eucl. Quo supposito sic probo propositionem ex propos. 4. Coroll. lib. 6. sicut est GC ad KM, quæ sunt parallelæ in triangulo EGC, ita est EG ad EK. Sed, vt est latus CG ad MK, ita est rectangulum ex segmentis BG, & GC ad rectangulum ex segmentis LK, & KM; & æqualem proportionem dicit hoc rectangulum ex segmentis diametri BG, & CG ad rectangulum ex segmentis LK, & KM, quam quadratum ex segmentis chordæ DG, & GF ad quadratum ex chordæ KV, & KI, vt diximus. Ergo ex 16. lib. 5. Elem. quam proportionem dicit quadratum hoc GF ex segmentis chordæ maioris circuli GF, & GD ad quadratum ex segmentis IK, KV chordæ minoris circuli, eandem dicit GE ad KE portiones diametri parabolici à vertice inter applicatas interceptæ; quòd erat probandum.



THEOR. II. PROPOS. VI.

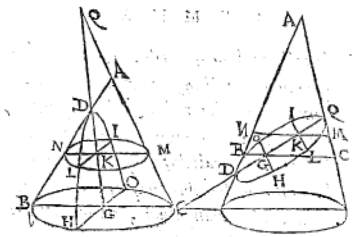
In omni Ellipsi, & Hyperbola quadrata duarum ordinatim applicatarum eam proportionem dicent ad inuicem, quam rectangula portionum diametri interceptarum inter ipsas, & vertices.

SIt conus ABC, siue obliquus, siue rectus. Hyperbola ODH, vel Ellipsis ODHLIQ, in quibus sint ordinatim applicatæ HGO, & LKI: diametri autem intercepti portiones sint in ellipsi GD, & GQ, vel QK, & KD intra ipsam. In Hyperbola autem extra eam, donec diameter occurrat lateri trianguli CA producto in Q, vt est GQ, ita quod GQ, & DC sint portiones interceptæ, vel QK, & KD.

Dicit itaque propositio, *quòd si fiat rectangulum ex* QK, & DK *hoc erit ad rectangulum factum ex* QG, & GD *interceptis portionibus tamquam ex duobus lateribus, vt quadratum* KL *ad quadratum erectum super* GH.

Aduertendum verò est primo progress. id quòd prænotauimus in preced. expens. rectangulum factum ex portionibus MK, & KN esse æquale quadrato ex KL constituto. Sicut, & rectangulum ex lateribus CG, & GB quadrato ex GH confecto, vt probat Eucl. propos. 35. lib. 3. & ideo esse rectangulum ex MK, & KN lateribus ad rectangulum ex GC, & BG, vt quadratum KL ad quadratum ex GH.

Aduerte, quòd in cono Ellipsis non sunt descripti circuli circa diametros NM, & BC ad vitandam confusionem; sed sunt subintelligendi basi coni paralleli per L, H, O, I transeuntes.



Progr. 2. Nota quoq; proportionem laterum MK ad CG in triangulo CQ esse eandem ex Cor. prop. 4. lib. 6. Eucl. quæ portionis diametri, crurisque QK ad crus Q. Sicut ex eadem proportionem lateris KN ad GB latus esse eandem, quæ DK ad DG. Quare si componatur rectangulum ex QK, & KD lateribus, quæ dicunt eam proportionem, quam latera rectanguli MK, & KN; sicut, & rectangulum ex QG, & GD lateribus, quæ habent eandē proportionem, quam latera CG, & GB erit composita proportione ex tr. 17. pr. 13. rectangulū ex QK; & KD ad rectangulum QG, GD; sicut rectangulum ex MK; & KN ad rectangulum ex CG, & GB.

Quo posito, ecce patet propositio. Quadratum ex applicata KL refertur proportione ad quadratum applicatæ GH, vt rectangulum ex lateribus MK, & KN ad rectangulum ex CG, & GB ex primo progress. Sed hęc proportio rectanguli MK, & KN minoris ad rectangulum maius, ex CG, & GB lateribus est eadem, quâ refertur rectangulum ex diametri Hyperbolici, vel Elliptici portionibus QK, & KD ad rectangulum QG, & GD segmentis ex 2. progress. Ergo proportio quadrati applicatæ KL, qua refertur ad quadratum applicatę GH est eadem quâ rectangulum ex segmentis diametri Hyperbolici, vel Elliptici QK, & KD ad rectangulum ex eiusdem QG, & GD. Quę de Ellipsi dicuntur etiam de circulo debent intelligi.

COROLLARIVM.

PRopositio vniuersaliter intelligenda est de quocunq; cono, siue obliquo, siue recto, seu applicatę sint ad angulos rectos diametro, vt in recto, seu ad angulos obliquos, vt in obliquo contingit: Vnde colliges duplex genus diametrorum dari vnum, in quo applicatæ sunt ad angulos rectos, alterum ad angulos obliquos, seu in Parabola, seu Hyperbola, seu Ellipsi.

EXPENSIO III.

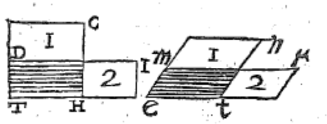
De Parametro.

PArameter est linea quędam assumpta extra sectionem: quæ est extrema proportionalis diametri interceptæ, & applicatę in parabola. At in Hyperbola, & Ellipsi est quoque tertia proportionalis inter diametrum interceptam, & applicatam: sed additâ ei, vel demptâ quędam portione lineæ, quam etiam ostendemus, cuius rationis sit.

LEMMA.

Si sit rectangulum quodlibet, & parallelogrammum rectangulo æquilaterum. Sintque duo alia rectangulum nimirum, & parallelogrammum ei æquilaterum, sed primo parallelogrammo æquiangulum; ita se habebit proportione rectangulum ad rectangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum.

SIt primum rectangulum TC, & aliud secundum TI, quæ posita vnum super aliud occupabunt spatium commune DH. Item sit parallelogrammum primum, quodcumque, vt en, sed primo rectangulo TC æquilaterum, & secundum er aliud secundo TI rectangulo item equilaterum; sed quæ sint inuicem æquiangula, ita quod vnum super aliud positum, qua parte conueniunt in angulis æqualibus occupent commune spatium tm dicit propositio, quod primum rectangulum TC primo parallelogrammo en dicet eam proportionem; quam secundum rectangulum TI dicit secundo parallelogrammo er.



Probatur. Nam TC rectangulum primum se habet proportione ad en parallelogrammum primum, vt sua pars DH ad suam partem mt, quòd sint super æquales bases TH, & Et ex prop. 1. lib. 6. Eucl. Coroll.

Sed pars hæc DH rectanguli primi, quæ etiam est communis secundo eadem proportione refertur ad partem mt parallelogrammi item primi, quæ etiam est communis secundo parallelogrammo, vt rectangulum secundum TI ad rectangulum secundum er propter eandem rationem ęqualium basium DT, & em.

Ergo arguendo ex 16 lib. 5. ita se habet proportione primum rectangulum TC ad primum parallelogrammum en, vt secundum rectangulum TI ad secuudum parallelogrammum er, quod est propositum.

Hoc autem Lemma assumitur, vt quando loquimur de rectangulis, idem intelligatur de parallelogrammis illis æquilateribus, dummodo sicut illa omnia conueniant in rectitudine angulorum, sic hæc parallelogramma inuicem referantur similibus angulis; & æquiangula sint, quod in posterum semper erit obseruandum.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si in omni sectione parabolica, quadratum alicuius ordinatim applicatæ, se habeat ad quadratum diametri parabolici intercepti ab eâ, & à vertice, vt idem diameter interceptus ad contiguam aliquam verticis; erunt quadrata, vel rhombi omnium applicatarum ordinatim æqualia rectangulis, vel parallelogrammis factis à dicta contigua verticis, & intercepto parabolico diametro inter eas applicatas, & verticem.

DEtur Parabola, in quâ diameter AC, applicata ordinatim CB, cuius quadratum sit CI dicit propositio. Quòd si se habeat hoc quadratū CI in proportione ad quadratum CL, quod est factum super diametrum parabolicum interceptum inter CB ordinatim applicatam, & verticem parabolæ A. Si inquam CI quadratum, seu rhombus sit ad CL quadratum, seu rhombum in proportione, vt ipsa contigua verticis AP ad diametrum interceptum AC. Tunc cuiuslibet alius applicatæ, vt DH quadratum, seu rhombus, quale est DR æquale erit rectangulo, seu parallelogrammo, quod comprehenditur ab ipsa contigua PA, & intercepta diametri portione inter verticem, & alteram applicatam AD, quale est rectangulum, seu parallelogrammum PD.

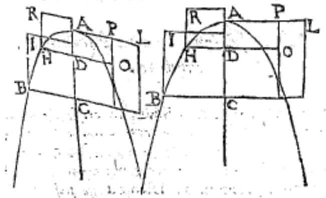
Progress. 1. Aduertendum est ex propos. 11 lib. 6. Eucl. & ex eius Coroll. figuras similes esse in duplicata ratione laterum homologorum, ita quòd quadratum V. g. CI, sit ad quadratum CL, non vt latus BC ad latus CA; sed proportio debet esse duplicata; nempe gemina vice repetita, quare debet reperiri tertia proportionalis ex 14 prop 6. Eucl. qualem hic ex ea propositione reperuimus PA; sic enim proportio est repetita: nam ita se habet PA ad CB, vt CB ad CA; quare PA ad CA habebit eandem proportionem, quam quadratum CI ad quadratum CL, nempe geminatam laterum.

Progress. 2. Reminiscendum est propos. 1. lib. 6. Eucl. nempe ita esse propter eandem basim CA rectāgulum CP ad quadratū CL, vt altitudines PA, ad AL; & ideo, quòd quadratum CI sit æquale rectangulo PC; siquidem eidem quadrato LC eandem dicunt proportionem; nempe eam ipsam, quam dicit PA ad AC, quadratum quidem CB; quia talem inuenimus PA, rectāgulum verò PC propter basim eandem AC: Quare ex Eucl. prop. 7. lib. 5. erunt rectangulum PC, & quadratum CI æqualia, quòd, & de Rhombo CI, & parallelogrammo CP intelligendum est ob lemma antepositum, quo supposito.

Progress. 3. Rectangulum PC habet eandem proportionem ad rectangulum DP; quam altitudo eius AC ad altitudinem AD propter basim

AP eandem 1. propos. Euclid. & è contrà.

Quare Probatur propos. Nam propos. 5. demonstratum est quadratum CI esse ad quadratum DR; vt altitudo CA ad altitudinem DA; sed etiam ex 3. progress. quam dicit proportionem AC ad AD altitudines eandem dicunt, & rectangula PC ad PD adiacētia eis, ergo ita erit in proportione CI ad DR quadrata, quam PC ad PD rectangula. Ergo, vti



poterimus *permutatione*, & comparare quadratum maius, rectangulo maiori, sicut minus quadratum, minori rectangulo, & ideo ita se habebit quadratum IC maius ad rectangulum PC maius, vt quadratum minus DR ad rectangulum DP minus.

Sed in 2. progressu vidimus maius rectangulum PC, & maius quadratum CI esse æqualia, ergo erit etiam æquale quadratum DR minus rectangulo PD minori, quod cōprehenditur à contigua verticis PA, & diametri parabolici portione intercepta AD, & ita dicas de alijs.

COROLLARIVM.

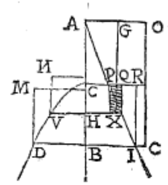
HInc colliges. Quod cum contigua PA habeat hanc specialem proprietatem, vt rectangula ab ea comprehensa, & diametri portione interceptâ sint æqualia quadratis effectis super ordinatim applicatas speciali nomine insignitur, & vocatur Parameter, quòd sit mensura omnium rectangulorum, quæ æquantur quadratis cuiuscumque applicatæ ordinatìm, quæ in parabola trahatur.

THEOR. II. PROP. VIII.

In omni sectione Hyperbolica, vel Elliptica, si quadratum alicuius ordinatìm applicatæ se habeat ad rectangulum, quod sub diametro transuerso, & intercepto comprehenditur, vt diameter transuersa ad contiguam lineam verticis; Alia quadrata aliarum applicatarum erunt rectangulo, quod sub hac contigua, & intercepta diametri portione inter applicatas, & verticem comprehenditur, æqualia, si tamen figuram similem similiterque positam in Hyperbola addas, in Ellipsi subducas.

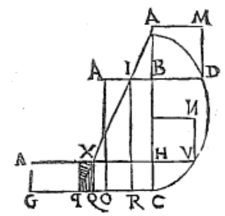
SIt Hyperbola, vel Ellipsis DVC, sitque ordinatim applicata DB, cuius quadratum BM, sit ad rectangulum BO, quod sub portionibus, nempe transuersa AB, & intercepta CB, vel portionibus interceptis. Si ergo quadratum BM sit ad rectangulum BO, vt diameter transuersa AC ad aliquam, quæ sit verticis C contiguam, nempe CP; idest sit duabus BC, & DB tertia proportionalis.

Dicit propositio, quod si sit aliud, cuiuslibet applicatæ VH quadratum HN hoc erit æquale rectangulo, quod fit ab intercepta CH inter applicatam, & verticem pro vno latere, & contigua verticis pro alio CP; sed cum hac cautella; quòd in Hyperbola insuper abundat figura XP similis, similiterq; posita, vt totum rect. AH, GX: in Ellipsi verò deficit.



Progr. 1. Rectangulum BO ad rectangulum BR dicit eadem proportionem, quam AC ad CP. Ratio est; quia sunt super eandem basim BC; ex constructione, vnde sunt inuicem, vt altitudines BA ad BI. Istę vnrò altitudines correspōdent proportione, & ita est BA ad BI, vt CA ad CP. Ratio est, ex Euclid. propos. 4. lib. 6. in Coroll. quia sunt in eodem triangulo parallelæ CP, & BI, Ideoq; rectangulū BO ex BA erit ad BR ex BI, vt CA ad PC; quòd istæ lineæ sint, vt BA ad BI altitudines.

Progr. 2. Prorsùs idem dicendum de parallelogrammis HG, & HQ. Sunt enim super eandem basim CH ex constructione: siquidem debet comprehendi rectangulum HG à lateribus AH, & HC, & rectangulum HQ à lateribus HC, & HX. Vnde erunt inuicem, vt altitudines XH, & HA. Altitudo verò HA ad altitudinem HX dicit eam proportionē, quam AC ad CP cum CP sit ei CX parallela in eodem triangulo ACP, & ideo AC erit ad CP, vt HG rectangulum ad HQ.



Progress. 3. Quadratum BM est æquale rectangulo BR. Ratio est; quia eidem proportionem eandem dicunt; quæ verò eidem proportionem eandem dicunt ex 7. lib. 5. Eucl. sunt æqualia. Dicunt autem eandē rationem eidem. Nam ita se habet quadratum BM applicatæ ad rectangulum comprehensum sub BC, & BA, quam AC diameter ad CP contingentem ex pręsuppositione. At in progress. 1. probatum est, quod huic eidem CA ad CP dicit eandem proportionem rectangulum BO ad rectangulum BR. Quare, cùm quadratum applicatæ DB, & BR rectangulum eidem rectangulo BO eandem proportionem dicant, quam AC ad CP; necesse est DB, quadratum, & BR rectangulum esse æqualia.

Progress. 4. Probatur Itaque ex præmissis principijs propos. Ita est AC diameter ad CP contiguam verticis, vt HA ad HX ob ſimilitudinem triangulorum ACP, & AHX, & ex eadem ratione HA ad HX eſt in proportione, vt BA ad BI. Ergo etiam parallelogramma ſuper eis conſtituta, & quæ cum eis eandem proportionem habent ex 1. & 2. progr. inter ſe proportionalia erunt, & ita erit BO ad BR, ſicut HG ad HQ; quia lineę BI, & BA ſicut, & HA, & HX ſunt eorum altitudines. Cum ergo ſit rectangulum BO ad BR, vt HG ad HQ, poterimus vti permutatione, & Inferre, quòd etiam BO rectangulum ad HG rectangulum ſit, vt BR rectangulum ad HQ rectangulum.

Sed ex propoſ. 2. Hæc rectangula BO, ad HG dicunt eandem proportionem, ac quadrata applicatarum nimirum BM ad HN. Ergo etiam eadem proportionem fruetur BR rectangulum relatum ad rectangulum HQ.

Progreſſ. 5. Sed rectangulum BR ex 3. progr. eſt æquale quadrato BM; Ergo etiam rectangulum HQ erit æquale quadrato HN. Quod oportebat oſtendere. Vides autem, quòd in Ellipſi rectangulum CX continetur ſub CP contigua, & CH diametro intercepta, deſſiciente tamen figura PX, & in Hyperbole abundante.

COROLLARIVM.

REcta itaque CP contigua vertici vocabitur Parameter, ſeu latus rectum, ſeu coeficiens, eo quod iuxta eam menſurentur cæteræ applicatæ diametro, quòd eorum quadrata, vt HN, & BM ſint æqualia parallelogrammo ſub ipſa, & diametri portione intercepta inter applicatam, vt HQ, & BR, & verticem C; figura tamen PX, vel PI, in Ellipſi deficiente illi parallelogrammo, & abundante in Hyperbola. Et inde iſtæ figuræ nomen ſortitæ ſunt: quia .n. in parabola quadrata applicatarũ æquãtur rectangulo ſub Parametro, & intercepta diametri portione, vocatur Parabola, ideſt æqualis. Quæ verò aliquid deficit in Ellipſi ad æqualitatem, eo nòmine, quod ſignificat defectum, inſignitur: at quia abundat in Hyperbola dicitur talis, quod nomen eſt idem ac exceſſus.

COROLLARIVM II.

HInc etiam colliges illam Hyperbolam, ſeu Ellipſim eſſe ſpecie notam, cuius diametri tranſuerſi proportio ad contiguam Parametrum ſit, vt rectangulum ſub AB, & BC compreheſum ad quadratum BM vel è contra, Siquidem AC eſt ad CP, vt AB ad BI, ideſt vt rectangulum eiuſdem baſis CA ad CI, ideſt vt CA ad quadratum BM applicatę, æquale ipſi CI. Vnde ex præc. & omnia alia rectangula à diametro tranſuerſa, & intercépta ſimul pro vno latere, & intercepta tantùm pro alio dicent eam proportionem, ad quadratum applicatæ, quam diameter tranſuerſa ad Parametrum; Quoniam enim quadratum BM oſtenſum eſt æquale in 3. progr. rectangulo BR, & hoc ſit ad rectangulum B O ex AB, & BC diametro intercepta; vt PC ad CA ex 4. progreſſ. *conuertendo* etiam quadratum ex DB erit ad BO ex BC, & BA; vt CP Parameter ad CA diametrum interceptam;

Sic dicas de quadrato HN, quòd eſt oſtenſum progreſſ. 5. ęquale rectangulo HQ, quod eſt ad HG rectangulum, vt HA ad HX altitudines, at CQ, ideſt HX eſt ad HA, vt CP ad CA, & ſic de alijs.

COROLLARIVM III.

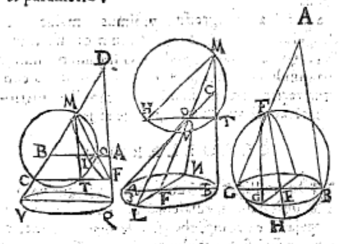
HÆc verò, quæ dicta ſunt de Ellipſi etiam de circuli circumferentia prorſùs militant, vt ſi pro Ellipſi ſubſtituas circulum, eadem oſtenſione intelligere poteris.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Cuiuſque ſectionis in cono Parametrum exhibere.

SIt conus ABC, & exhibita in eo ſectio parabola; cuius diameter EF, & BE perpendicularis ad eius applicatam EG. Per tria puncta B, C, F tranſeat circulus BCF, & prolungetur diameter FE ad circumferentiam in H. Dico EH *eſſe ſectionis Parametrum*.

Progreſſ. 1. Obſeruandum eſt BGC eſſe circulum, vtpote baſis coni; Ideoque ex 35 lib. 3. quadratum EG eſſe æquale rectangulo ex BE, & EC: & quòd ex 3. huius quadratum lineę EG quoque æquale ſit rectangulo ex diametro ſectionis EF, & parametro.



Progſeſſ. 2. Vnde oſtenditur propoſ. Rectangulo BEC, & ideo æquali quadrato eſt EG eſt æquale rectangulum ex FE diametro, & FH. Ergo EH erit Parameter, vtpote efficiens cum FE diametro æquale rectangulum quadrato ex EG ex 8. h. Cor.

Sit pro ſecundo caſu exhibita Hyperbola in cono ACB; cuius diameter tranſuerſa MF; ducanturque AB perpendicularis ſectioni LN; & ideo, vt diameter baſis circuli dirimet NL in duo ſegmenta æqualia ex prop. 17. l. 3. Cor. Vnde FL erit applicata. Deinde lateri trianguli conici CA per A tranſeuntis ducatur à vertice M diametri tranſuerſæ parallela MH, & per O verticem ſectionis TH parallela baſi AB, perque tria puncta T, M, H tranſeat circulus, hic abſcindet VO, quam dico *eſſe Parametrum*.

Progreſſ. 3. Ppænotandum eſt FL eſſe applicatam, cuius quadratum ex 35. lib. 3. æquatur rectangulo ex AF, & FB. Rurſuſque ex propoſ. 8. h. Coroll. 2. eſſe quadratum applicatæ FL ad rectangulum diametri tranſuerſæ ex MF, & OF; vt Parameter ad tranſuerſam diametrum MO, & ideo etiam rectangulum ex AF, & FB ad rectangulum ex FM, & FO, erit, vt Parameter ad OM diametrum. Ideoque oſtendendum eſt rectangulum ex AF, & FB, & ideo FL quadratum eſſe ad rectangulum MF, & FO; vt VO, ad OM, vt ſic oſtendetur VO eſſe Parametrum.

Progr. 4. Sic verò oſtenditur. Vt BF eſt ad MF; ita TO eſt ad MO ob parallelas TO, & BF ex propoſ.

propoſ. 4. lib. 6. & AF ad FO, vt HO ad OM ob ſimilia triangula, & æquiangula MOH, & FOA: cùm ſint parallelæ OH, & FA; nec non, MH, & OA ex conſtructione; Quare rectangulum ex AF, & FB, & ideo quadratum FL ei æquale erit ad rectangulum ex MF, & FO; vt rectangulum ex TO, & OH ad rectangulum OM, & OM cum ex ijſdem proportionibus componatur earum ratio BF ad FM eadem, quæ TO ad OM, & FA ad FO eadem, quæ OH ad OM, vt hic eſt videre.

BF, vt TO		&	FA, vt OH	
eſt ad ad			ad ad	
FM OM			OF OM	
Ergo Compoſitum,			vt Compoſitum	
ex BF, & FA ſ. LF			TO, & OH	
ad		erit	ad	
FM, & OF			OM, & OM	

At rectangulum TO, & OH eſt æquale rectangulo MO, & OV. Ergo rectangulum MO, OV erit ad quadratum æqualis altitudinis OM, & ideo, vt baſis OV ad baſim OM, vt Rectang AF, & FB, ideſt FL quadratum ad rectangulum ex FM, & OF. Quaderè; Cùm parameter ponatur ad OM ex Cor. propoſ. 6. h. vt FL quadratum ad rectangulum ex FM, & FO, & OV talis ſit rationis ad OM; erit OV Parameter.

Sit tandem data ellipſis, cuius diameter FM. & ſectio plani ACI per axẽ FCD in ipſo cono, cuius baſis QV circulus, cuius diameter QV ſit ſectio quoq; plani DQV, cui agatur ab F extremo diametri parallela FC, & ab altero extremo diametro M parallela lateri DF, ſit MT, perq; tria puncta MCT tranſeat circulus. Dico rectam FO eſſe parametro æqualem.

Præaſſumptum. Agatur itaque oſtenſionis gratia per O parallela baſis AB; & à puncto O applicata OI, Igitur ex AO, & OB rectangulum erit æquale quadrato applicatæ OI, ex 35. lib. 3. elem.

Sic etiam ex 6. Coroll. huius quadratum OI, & ideo rectangulum ex AO, & OB erit ad rectangugulum ex diametri ſegmentis OM, & FO, vt parameter ad diametrum FM,

Probatur propoſ. ob parallelas FA, & TM, necnon, & AO, & FT triangulum FAO eſt æquiangulum triangulo FMT; ideoque vt AO ad FO; ſic FT ad FM: Rurſùſque eadem rationem ob parallelas CB, & FC in triangulo FMC erit OB ad OM, vt FC ad FM, vt hic vides.

AO vt FT		&	OB vt FC	
ad ad			ad ad	
FO FM			OM FM	
Ergo Compoſitum,			vt Compoſitum.	
AO & OB			FT & FC	
ad		erit	ad	
FO & OM			MF & MF	

Quadere rectanguli AO, & OB ratio ad rectangulum, FO; & OM erit compoſita ex ijſdem rationibus rectanguli ex FT, & FC ad quadratum MF; & ideo componendo rationes erit rectangulum ex AO, & OB ad rectangulum FO, & OM, vt FT, & FC rectangulum ad quadratum MF.

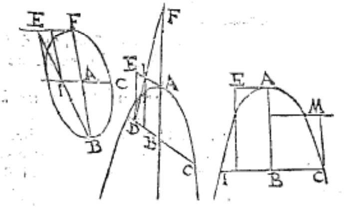
Vnde Quadratum ex OI; quod æquatur rectangulo ex AO, & OB, erit quoque ad rectangulum FO, & OM, vt rectangulum ex FT, & FC ad quadratũ FM. Sed rectangulum ex FT, & FC eſt æquale rectangulo FM, & FO, ex Coroll 1. propoſ 26 lib 3 elem. quod incidant in circulum CMO. Ergo ex OI quadratum erit ad rectangulum FO, & MO, vt ex FM, & OF rectangulum ad quadratum FM. Rectangulum verò FM, & FO eſt æqualis altitudinis quadrati FM. Ergo erit baſis FO ad diametrum tranſuerſam FM, vt quadratum OI ad FO, & OM rectangulum, & ideo FO erit æqualis Parametro.

PROBL. II. PROP. X.

Datæ cuiuſcumque ſectionis contiguam Parametrum inuenire dato diametro, & applicata.

SIt primum Coni ſectio Parabola CAI, eiuſque diameter AB, cui applicata ſit CB; factoque quadrato BM fiat rectangulum ex BA ei equale, reperiendo applicatæ BA, & BC ex Euc. prop. 14 l. 6. tertiam proportionalem EA. Nam ex propoſ. 19. Eucl. 6. parallelogrammum ex BA, & AE conſtitutum erit æquale quadrato BM, Porrò ex propoſ. 7. vidimus quadratum CB eſſe ęquale rectangulo ſub diametro intercepta, & parametro contigua. Vnde AE Parameter erit,

Si verò daretur applicata, quæ BM Rhombum faceret, quod angulus B non eſſet rectus eſſet reperiendum parallelogrammum Rhombo æquiangulum, at æquilaterum ipſi BE.



Caſus 2. At detur ſectio Hyperbola CAD, cuius diameter FAB tranſuerſa, & intercepta; applicata verò CB data. Portioni BA diametri intercepti, & CB applicatæ reperiatur tertia proportionalis BD, eritque ducta AE æquali BD, & parallela, repertum rectangulum, vel parallelogrammum DABE: deinde ab extremo datę diametri F ducatur FD ad D, quę ſecabit AE in I. Dico AI *eſſe Parametrũ*.

Probatur. Quòd ex propoſ 8. rectangulum contentũ ab ipſa AI, ſit æquale quadrato applicatæ abundans tamen figura ID ſimili, ſimiliterque poſita ac eſſet rectangulum ex BF, & FD.

Caſus 3. Si poſtremò ſit Ellipſis FCB, cuius diameter FAB, & applicata AC diametro interceptæ AF, & applicatæ AC inueniatur tertia proportionalis, prout ſupradictum eſt, quæ ſit AI, & ex vertice B per I ducatur recta, & ab F vbi terminat diameter, agatur parallela applicatæ CA, quę ſit EF. Dico *rectam* FE *eſſe parametrum*. Nam continet FI rectangulum ęquale quadrato ex CA, ſi tamen deficiat figura IE ſimilis, ſimiliterque poſita ex propoſ. 8. ac EF, & BF rectangulum,

EX-

EXPENSIO III.

De tangentibus.

SIcuti circulus suas tangentes habet, ex quibus mirabiles circuli passiones prodeũt, ita, & conicæ tangentes; nec minoris vtilitatis sunt, maximè ad descriptionem sectionum.

THEOR. I. PROP. XI.

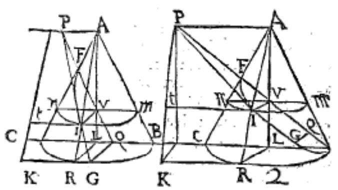
Si conus per axem plano aliquo, sectus sit, & alia sectione ex tribus coni ad angulos rectos ei sectioni, denuò secetur, & electo in sectionis posterioris circumferentia puncto à vertice coni per illud ad circulũ basim eiusdem coni, planum aliquod agatur.

Hoc planum conum secundum lineam rectam tangit.

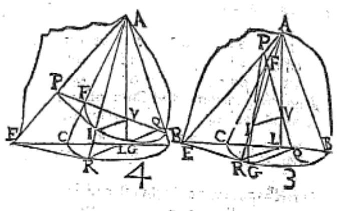
Et diametrum figurarum secabit, & à puncto, quo secat illum recta ducta ad punctum electum, hæc linea sectionem conicam non secabit, sed tantum tanget.

TRes partes habet hæc propositio, sed facilis est probatio; penèque à sola explicatione propositionis habetur.

Sit ergo medietas coni ABC, qui sit per axem à plano aliquo BAC sectus, cui sectioni, alia sectio, seu Elliptica, seu Hyperbolica, seu Parabolica fiat FIG, deinde electo in circumferentia sectionum posteriorum puncto I, per quod, & verticem coni A planum ARP adaptetur. Dico *primò hoc planum tangere totum conum à vertice A vsque ad basim circularem* BRC *secundùm lineam rectam* AIR.



Probatur. Quia tangit secundùm altitudinem AR, quæ est linea recta, siquidem conus à rectâ efficitur. Ergo potest cum sit planum totam lineam AR continuo tactu tangere, sed conus ex definitione secundùm crassitudinem est circulare; planum verò in puncto circulum tangit, ergo ille tactus secundum latitudinem non erit amplior puncto, quæ est linea secundùm latitudinem accepta. Dico secundò. Quod si diameter sectionũ, quæ producatur in plano ABC, in quo est, quòd ab hoc posteriori plano PAR secabitur. Nam, vel planum, vt in primâ, vt secundâ figurâ æquidistat; ita vt LR faciat cum AK & LC lineis angulos rectos, & totum planum PARK cum plano LAR. Quare ex 16 Tract. 21. sectio AP erit ad AL ad rectos ãgulos. Fiet autẽ hæc sectio, quia cum propter angulũ acutum R planum AP feratur versùs verticem coni A, & inclinet ad planum BAC, secabit in vertice A secundùm sectionem AP planum per verticem ductum BAC.



Quod, si non æquidistet, vt in 3. & 4. fig. sed faciat angulum acutum ERL, tunc clarum est, quod versùs E tandem occurret plano per verticem coni ducto EAB, & faciet in eo sectionem AE. Vnde clarum euadit, quod si versùs eam partem, versùs, quam inclinant inuicem plana; vt F producatur diameter FQ necessario impinget in hanc sectionem AE in P.

Dico tertio, quod si ab hoc puncto P ducatur in plano tangente RPA ad punctum electum I recta PI; quòd continget sectionem, & non secabit. Quod patet. Nam est in plano, quod sectionem in I tangit. Ergo & linea per punctum I ducta; etiam si prolungaretur, non secaret, sed cum ipso plano contingeret.

COROLLARIVM.

FElicies hinc in figura 1, & 2, cum plana secans ABC, & tangens AK parallelè se habeant applicatam VI esse semidiametrum, cum enim ea sit diameter, patet ex 2. probatione, quòd si contingens IT facit angulum rectum, cum VI, & VI facit angulum rectum cum MN, quod necessario V est centrum circuli M I N ex 21. propos. 3. lib. Elem.

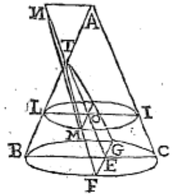
THEOR. II. PROPOS. XI.

Si parabolam recta contingat linea producta diametro occurrens, & à tactu ad diametrum recta sit ordinatim applicata, erunt interceptæ diametri portiones, vtrinque partes æquales; nempe inter occurrentem, & verticem, & inter applicatam, & verticem,

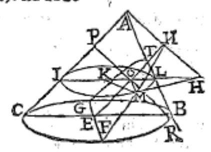
SIt parabola GTF in cono ACB, cuius diameter ET, cuius vertex T; recta verò contingat sectionem in M, vbi, & applicata OM terminat, & occurrat diametro producta in N, & pro primo Casu AN sit parallela diametro IL. Dico *primò, quod portio diametri inter verticem parabolicum* OT, *& portio* TN *diametri à vertice vsque ad punctum* N *tangentis sunt æquales.*

Probatur facilitèr in isto casu. Nam O I, & AN sunt

sun parallelæ, & æquales, quod sint inter parallelas CA crus, & EN diametrum; sed cum ex Coroll. propos. 11. h. O sit centrũ circuli, IO erit æqualis lineæ OL; Ergo etiam AN erit æqualis OL. Quare, & OT erit æqualis TN: Cùm enim anguli inter parallelas in triangulis OTL, & ATN sint æquales, & bases æquales omnia latera singula singulis erunt æqualia, ex 27. propos. lib 1. elem.



At si linea AN non sit æquidistans; quòd planũ, super quod contingens deducta est non sit æquidistans, vt ex prop. 11. huius, & in altera fig. patet, tunc in circulo IML ex propos 21 lib 3. elem. contingens MH erit perpendicularis ad diametrum KM, & ad IL applicata OM, & MK ducta à contactu M ad centrum K. Quare ex propos. 23. progr. 3. Tract 15. erit HI ad OI, vt HL ad LO: ducta igitur parallela ad AH lineam sectionis planorum tangentis, & secantis per punctum O, quæ sit PR. ostendendum est, quod PO, & OR sunt æquales, & ideo etiam OT, & TN. Sic verò ostenditur. Crus HI est ad OI, vt AH ad OP in triangulo AHI, ex Coroll. prop. 4. l. 6. Eucl ob parallelas AH, & RP. Sed, quę est proportio HI ad IO, eadem est ex propos. 23. Tract. 15. HL ad LO.



Ergo in duobus triangulis ad verticem ęquiangulis ALH, & OLR ob parallelas basium, erit etiam eadem proportio AH basis ad OR basim ex 4. lib. 6. Elem. vt est HL ad LO, & ideo, vt HI ad IO, & HA ad OP. Quare cum eisdem PO, & OR crus AH eandem dicant proportionem, quam HL ad LO, erunt æquales ex propos. 7. lib. 5.

Et quia ON est parallela lateri PA in triangulo PRA, erunt quoque æquales AT, & TR, sicut sunt RO, & OP; Quod si tales sunt, in triangulis æquiangulis ATN, & OTR ob bases parallelas ex prop. 30. & 17. lib. 1. elem. OR, & AN, erunt quoque ęqualia crura OT, & TN sicut sunt RT, & TA: quod est propositum. Nam sic TO est pars diametri interior, ęqualis exteriori TN.

COROLLARIVM.

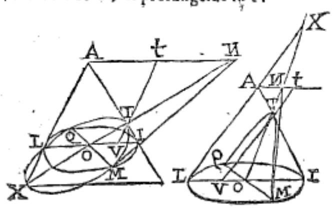
COllige itaque, quod cùm sit ęqualis TN ad NO quadratum ex OM, quod propos. 7. expens. 2. Probatũ est æquale rectangulo ab OT portione diametri intercepta inter verticẽ, & applicatã, & parametro comprehenso erit, etiam æquale rectangulo comprehenso ab eodem parametro, & æquali TN inter verticem, & contingentem.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Si in Hyperbola, vel Ellipsi contingens ducta sit, & à contactu ordinatim applicata. Diametri portio inter terminum transuersi diametri, & applicatam erit ad portionem eiusdem à vertice sectionis ad applicatam, vt portio à termino transuersi diametri vsque ad contingentem ad portionem, quæ est inter contingentem, & verticem sectionis.

DVos casus hæc propositio possidet, primus est, si planum contingens sit parallelum plano secanti per verticem, vt in prop. 12. est dictum, alter si non sit.

Sit ergo pro primo casu Hyperbola, vel Ellipsis QTM diameter transuersa TX, quæ transeat per centrum O, vt euenit cum plana tangens, & secans per axem sunt parallela, vt dictum est Coroll. 1. propos. 11. & AN æquidistans diametro coni LOI, à cuius puncto N originem ducit contingens MN, quæ tangat in M, à quo contactu applicata enascatur MO ad angulos rectos ipsi OI. Dico, *quod portio diametri transuersi* XO *inter terminum eius* X, & applicatam OM est in proportione ad portionem OT inter applicatum OM, & verticem sectionis T, quemadmodum XN inter terminum X, & punctum N, à quo oritur contingens, ad portionem NM. Ducatur cruri XL parallela TV à vertice T, & prolungetur in t.

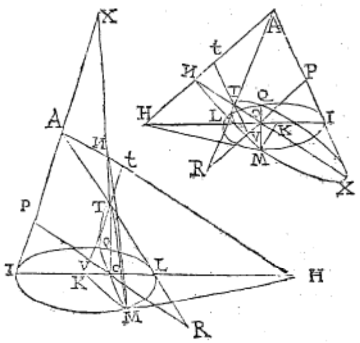


Prob. In triangulo Hyperbolæ LXO, & OTV, sicut est XO ad TO ita est ob parallelam VT Radius LO, vel OI ad suam portionem VO ex Coroll. prop. 4. l 6. Eucl. Sed vt est OI ad VO ita est AN ad N t ob bases parallelas in triangulis ad verticem AtF, & VTI, & æquiangulis ex propos. 4. lib. 6. Eucl.

Eademque ratione prorsùs XN ad NT, vt AN ad Nt in triangulis ad verticem ANX, & TNt, quorum parallelæ sunt bases t T, & AX. Ergo ex prop. 16. lib. 5. Elem. vt est NX ad NT, ita est XO, ad TO.

In Ellipsi verò ferè idem argumentum. Nam in Ellipsi, quòd sint XL, & VT parallelæ in triangulis ad verticem OXL, & TOV; ita proportionabitur XO ad OT, vt LO ad OV, vel æqualis OI. Sed ob triangula ad verticẽ OTI, ATN inter bases parallelas AN, & OI; ita est OI ad OV, vt AN ad t N: sed in triangulo XAN ob parallelas XA, & T t, vt est AN ad tN, ita est XN ad TN: Ergo ita etiam erit XO ad O T ex prop. 16. lib. 5. argumentando, vt est XN ad TN, quòd sit eadem, ac proportio AN ad tN, & hæc eadem, ac OI ad VO, & hæc eadem, vt XO ad OT;

Sed iam sit secundus casus, in quo planum contingens non sit parallelum plano secanti, & ideo, quòd AN non sit parallela IL diametro coni. Tūc animaduertendum est ex progr. 2 prop. 23. tract. 15. Quòd HI se habet ad OI, vt HL ad LO; ducaturque per O equidistans PR ad AH, & equidistans TV per T lateri IX trianguli per verticem IAL. In triangulo itaque POX Hyperbole, ita est ob parallelas VT, & PX portio XO ad TO, vt OP ad OV: Supponatur itaque æqualis PO ad OR, quod infra ostendetur, ita itaque erit OP, vel RO ad OV, vt AN ad Nt ob triangula inter parallelas opposita ad verticem ATt, & VTR: Sed ob rationem triangulorum ad verticem inter parallelas ANX, & TNt erit quoq; vt AN proportione ad Nt, sic correspondebit XN ad NT, ergo XN ad NT, ita erit, vt XO ad OT ob identitatem rationis, cum duabus AN, ad Nt, & harum cum OR, vel OP ad OV, & harum cum XO ad OT.



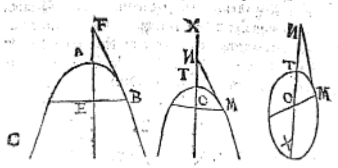
In Ellipsi verò XO est ad TO, vt OP ad OV ob triangula ad verticem TVO, & POX inter parallelas TV, & PX, & ob eandem rationem æqualis vt ostendam RO eidem OP erit ad VO, vt AN ad Nt, in triangulo autem NAX ob parallelas Tt, & AX, ita est XN ad NT, vt AN ad Nt: Vnde ex 16. lib. 5. Elem. ita quoque XO ad OT, vt XN ad TN. Remanet solum probandum, quòd OR, & OP sint æquales. Probatur autem prorsus eadem ratione in Theor. anteced. in 2. Casu. Nam ex prop. 4. lib. 6. proportio PO ad AH est ea, quæ IO ad IH: sed hęc est eadem ex propos. 23. tract. 15. *conuertendo*, ac LO ad HL, & hęc, quę OR ad AH ob triangula ęquiangula ORL, & ALH, ex 21. lib. 6. Propterea que AH est illa, cui PO, & RO eandem dicunt proportionem. Ergo sunt ęquales ex 7. l. 5. elem.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Lineas tangentes in sectionibus conicis ducere.

SIt data parabola BAC, & in ea punctum B, & oporteat ducere contingentem illius puncti Ducatur diameter AE ex 1. huius, & ei à puncto B ducatur applicata EB: ęqualis autem fiat AE ipsi AF productæ diametro, & à puncto B ad F ducatur recta FB, hęc enim erit contingens.

Probatur; quia ex pr. 13. h. tangens linea Parabolę intersecat diametrum EF productam in parte F à vertice distante intervallo AF ęquali' intervallo AE applicatę, & vertici interposito.



Sit deinde data Hyperbola, seu Ellipsis MT, & eius applicata OM, & diameter trāsuersa XT prolūgata in Ellipsi quantùm oportet, si fiat ex prop. 9. tract. 15. de lineis secandis, vt XT tota ad segmentum OT, ita XN tota cum addita TN ad additam TN in Ellipsi erit punctum N, à quo ducta NM tanget Ellipsim.

At in Hyperbola fiat ex propos. 23. tract. 15. de lineis secand, vt segmentum OX ad segmentum OT ita segmentum aliquod NX in TX parte ad compartem TN, & erit punctum N, à quo ad M ducta MN tanget Hyperbolam.

Probatur ex pręced. Quia iam ostensum est, quod in Ellipsi TN à vertice, & tangentem intercepta, sit quarta proportionalis trium XO, & OT segmentorum, & totius XN.

At in Hyperbola. Quod TN sit quarta proportionalis trium totius diametri transuersę simul, & interceptę OX interceptę OT, & transuersę segmenti NX.

EXPENSIO IV.

De interceptis diametri portionibus inter contingentem, & alia puncta in ipso impressa.

QVe sunt puncta in diametro ea efficiuntur ab eius mediate nimirum centro, à vertice sectionis, ab applicata, ab eius extremo, & à contingente, quę omnia puncta diuersas partes constituunt in diametro, quę potentia, seu longitudine inuicem comparantur, & cum contingentibus analogiam habent.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens, si ad ipsam recta ducatur æquidistans ordinatim applicatæ, quadratum eius erit æquale rectanguli quartæ parti contento à diametri portione producta ad tangentem, & parametro contigua.

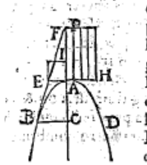
SIt sectio parabolica BAD, quam contingat BF occurrens diametro in F, ad quam à vertice A ducatur linea EA equidistans applicatę BC. Dico *quod quadratum ex* EA *erit æquale quartæ parti rectanguli ex* AH *parametro, &* AF *diametro producta vsque*

vsque ad contingentem comprehensi.

Progr. 1. Obseruandum est quadratum ex ordinatim applicatis, vt BC ex dictis propos. 7. esse æquale rectangulo, quod fieret ex AH Parametro, & diametro intercepta AC, & quod diximus supra prop. 12. Rectam AE propter contingentem BF esse ęqualem rectæ AC; quare, & rectangulum ex AF, & AH parametro, rectangulo, quod fieret ex AC æquali, & parametro AH eodem esset æquale, vnde, & æquale quadrato ex BC, quo supposito.

Progress. 2. Probatur. Assumptum quadratum EAI est quarta pars quadrati ex BC. Ergo, & rectangulo FH ei ęqualis ex progr. 1. nimirum rectangulo AP ęquabitur.

Prob Antecedens in triangulo BFC crus FC est duplum suæ portionis FA ex progr. 1. Propterea, & BC linea est dupla lineæ EA. Ergo cum figuræ similes, similiterque positæ sint in duplicata ratione laterum homologorum ex prop. 20. lib. 6. Elem. quadratum BC erit quadruplum quadrati EA; nam proportio sic gemina vice repetitur, sic est 1. ad 2. sicut 2. ad 4. & ideo si est latus 1. ad 2. quadrata debebunt esse, vt 1. ad 4. Quare quadratum EI quarta pars quadrati ex BC erit etiam quarta pars rectanguli HF nimirum ęquale rectangulo AP.



THEOR. II. PROPOS. XVII.

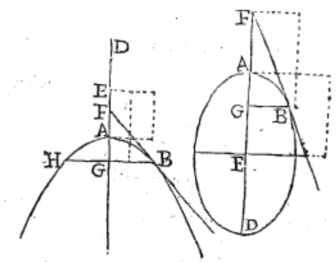
Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, cum diametro conueniens, & à tacta ad diametrum recta ordinatim sit applicata, erit quadrato dimidiæ transuersæ diametri æquale rectangulum sub intercepta ab ordinatim ducta, & centro diametri portione, & sub alia portione inter centrum, & contingentem comprehensum.

SIt primum Hyperbola BAH, cuius vertex A transuersa diameter AD, & centrum E, quod habetur diuiso AD bifariam. Sectionem verò contingat in B recta BF, cum diametro producta in F conueniens, & ad diametrum ordinatim applicata BG. Dico *quadrato* AE *æquale esse rectangulum factum ex* EG, *& ex* EF.

Iam ex propos. 11. huius habemus esse eam proportionem GD ad GA; quæ est FD ad FA. Ergo componendo simul DG, & GA erit ad GA, vt DF, & FA simul ad FA, diuisis autem lineis DG, & GA, vt vna linea per medium in E erit medietas GE nempe ipsa medietas lineæ DA, quæ est EA, cum GA, siquidem ED cum ipsa AG denuo assumpta complent alteram medietatem.

Diuisis quoque lineis, DF, & FA medietas est ipsa EA: Quare cum ponatur totum GD cum AG ad GA, vt totum DA ad FA erit etiam ex 18. lib. 5. elem. medietas EG ad GA, vt medietas EA ad FA, & *diuidendo* erit quoque medietas EG ad residuum EA, sublata consequenti GA, vt EA ad FE subducta consequente FA. Qua de rè AE est media proportionalis. Vnde si iuxta prop. 17. Elem. fiat ex hac AE quadratum: ex duabus verò extremis GE, & FE rectangulum, hæc duo erunt æqualia.

Probatur quoque de Ellipsi ferè eodem modo. Namcùm dictum sit prop. 11. quòd proportio GD ad GA sit qualis est proportio FD ad FA. Erit quoque



componendo simul antecedens, & consequens DG, & GA ad solam consequentem GA, vt antecedens, & consequens FD, & FA ad solam consequentem FA, & si dimidiemus has compositas antecedentes, erit pariter proportio AE dimidiatæ ad AG eandem consequentem, vt EF dimidiata lineæ FD cum AF, ad FA eandem consequentem. Quare per conuersionem rationis sumendo excessus GE, & AE, quibus antecedentes EA, & FE superant consequentes suas GA, FA, respondebit proportione excessus GE antecedentis EA ad ipsam antecedentem EA, vt excessus AE antecedentis EF ad antecedentem EF. Quare ex Elem. prop. 17. lib. 6. ex AE poterit componi quadratum, tamquam ex media proportionali, quòd erit ęquale rectangulo ex duabus extremis constituto GE, & EF.

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Posito diametro transuersa, vt superiori propos. contingenti, centro, & applicata: Rectangulum ex portione à termino transuersæ diametri vsque ad applicatam, & portione ab applicata vsque ad verticem sectionis comprehensum est æquale rectangulo comprehenso ex eiusdem diametri partibus interceptis inter centrum, & applicatam, & inter applicatam, & contingentem.

SIt eadem figura; quę superius. Dico *rectangulum ex* DG, *&* GA *esse æquale rectangulo ex* EG, *&* FG *lineis comprehensum*.

Probatur. Nam in Hyperbola ex anteced. prop. contextu medietas EG est ad AG, vt AE ad FA. Quare *Permutando* erit fundamentum EG ad fundamentum AE, vt terminus AG ad terminum FA. Quapropter cōponendo EG erit ad AE cū EG, vt AG ad FA cum AG: Linea verò AE cum GE est diameter GD, & FA cum AG est FG. Vnde si fiat rectangulum ex extremis EG, & FG hoc erit æquale rectangulo facto ex medijs DG, & GA. Ex prop. 18. lib. 6. Elem.

Idem dicas de Ellipsi. Nam AE dimidia est ad AG, vt EF ad FA, ergo diuidendo GE compars erit ad GA compartem, vt AE pars ad AF compartem, & permutando antecedens GE ad antecedentem AE, vt sequens GA ad sequentem AF. Quare componendo GE erit ad AE, & EG, idest GD, vt GA est ad GA, & AF, idest GF. Quare rectangulum ex extremis GF, & GE æquale erit rectangulo ex medijs GD, & GA.

COROLLARIVM.

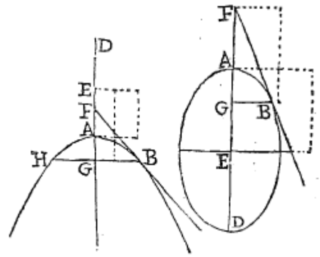
CVm rectangulum ex GD, & GA sit illud idem propos.8. contextu, & Coroll.2. quod demonstratum fuit esse ad quadratum applicatæ, vt transuersa diameter ad Parametrum. Hinc est, quod etiam rectangulum GE, & GF in vtraque sectione equale rectangulo ex interceptis diametri portionibus GD, & GA erit ad quadratũ applicatæ, vt transuersa diameter ad parametrum.

THEOR. IV. PROPOS. XVIIII.

Iisdem positis, erit rectangulum comprehensum à portione inter applicatam, & contingentem, & inter contingentem, & centrum mensurata æquale rectangulo facto ex portione diametri inter contingentem, & terminum, & inter verticem sectionis, & contingentem intercepta.

POsitis illis ipsis, quæ priùs. Dico *rectangulum* GF, *&* FE *esse æquale rectangulo ex portionibus* DF, *&* FA *confecto.*

Probatur ex propos.17. (cum argumentati fuimus diuidendo) habemus; ita esse in proportione GE ad EA, vt AE ad EF. Quare si componamus eas erit GE simul cum AE, vel æquali ED, vt fiat tota GD ad EA, vel æquali ED tantùm, vt AE, vel æqualis ED simul cum EF, vt fiat tota DF ad EF tantum.



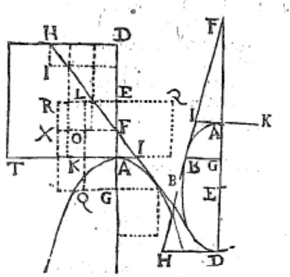
Quare vtendo *permutatione* erit antecedens DG composita, vt priùs ad antecedentem DF compositam. Veluti priùs consequens simplex AE ad consequentem simplicem EF.

Accipiamus itaque excessũ FG super DF sequẽtẽ antecedẽtis DG, & excessum FA super sequentẽ EF antecedentis AE, vel è cõtrà. Et *diuidendo* erit compars FG ad compartem DF, vt compars FA ad compartem EF. Vnde si fiat rectangulum ex medijs DF, & FA hoc erit æquale rectangulo ex extremis FE, & FG in Hyperbola, sed in Ellipsi idem sequetur: sed *conuertendo*.

THEOR. V. PROPOS. XIX.

Si Ellipsim, vel Hyperbolam recta contingat, rectangulum factum à linea, quæ à vertice sectionis discedit, & alia, quæ à vertice diametri discedit, & ambæ in contingentem terminant est æquale quartæ parti rectanguli diametro transuersa, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AB, cuius vertex A diameter transuersa DA parameter AK tangens BF, discedatque à vertice sectionis A linea, & terminet in contingentem, quæ sit AI, aliaque DH ambæ rectangulę diametro discedãt à termino diametri D, & in contingentẽ productam terminẽt in H, & I. Dico, quod rectangulum istis DH, & AI duabus constitutum est quarta pars rectanguli sub transuersa diametro DA, & parametro constituti.



Probatio ob multas comparationes est parùm laboriosa; ideo eam clariùs, quàm fieri poterit trademus.

Progr. 1. Primo itaque ex præced. propos. rectangulũ ex DF, & FA est rectangulo GO ex GF & FE æquale. Quare si ex GF fiat quadratum GX, cum sit super eandem basim FG, ac rectangulum ex GF, & FE erit ipsum rectangulum DF, & FA ad hoc quadratum GX, vt ad ipsum hoc quadratum GX rectangulum OG ex GF, & FE, quæ est eadem, ac altitudinum FE ad FG. Ratio est, quia cum DF, & FA rectangulum, & GF, & FE rectangulum sint ęqualia habebunt ex 7. lib.5. Eucl. eidem quadrato GX eandem rationem, quæ est altitudinum FE ad GF ob eandem basim GF.

Progr. 2. Quo posito obseruandum est, quòd hæc proportio ad quadratum GX rectanguli DF, & FA; componitur ex proportione lateris FD rectanguli ad GF lateris quadrati, quę est eadem DH ad GB ob triangula BFG, & DFH ad verticem inter parallelas bases BG, & DH ex propos.15. lib.6 Eucl.

Componitur quoque ex proportione AF lateris rectanguli ad GF lateris quadrati, quę est eadem, ac AI ad GB ob parallelas BG, & IA in triangulo BGF ex Coroll. prop.4.l.6. Eucl.

Ergo si componantur, vt hic vides.

FD	vt	DH	&	AF	vt	AI
ad		ad		ad		ad
GF		GB		GF		GB

Ergo compositum, vt compositum.

DF	&	AF	DH	&	AI	idest HI
	ad			ad		
GF	&	GF	GB	&	GB	

Vnde DF, & FA rectangulum erit ad quadratum GX, vt ex DH, & AI, idest DI rectangulum ad quadratum GB.

Progr.3. At ex primo progr. rectangulum ex DF, & FA erat ad quadratum GX, vt EF ad FG ob æqualitatem, quam dicebat cum rectangulo OG illis lineis constituto. Quare si super EG fiant duo rectangula, vnum ex EG, & EF, vt est rectangulum EQ erit ad alterum ex GE, & GF rectangulum GR cum sint super eandem basim GE, vt altitudines EF ad GF supradictę lineę; Rectangulum verò GE, & EF est ęquale quadrato AEZ ex AE ex 17. huius. Quare quadratum AEZ æquale ipsi EQ erit ad rectangulum GR, vt EF ad FG, quę est eadem, ac ex progr.1 rectanguli GO ex GF, & FE ad quadratum GX, & ex prog.2. rectãguli ID ex HD, AI ad quadratum applicatę GB; quare ex 16. lib.5. quadratum AEZ erit ad rectangulum GR, vt rectangulum ID ad quadratum applicatę GB.

Progr. 5. Itaque *permutando* erit antecedens quadratum AEZ ad antecedens rectangulum ID, vt sequens GR rectangulum ad sequens applicatæ GB quadratum.

Progr. 6. Reminiscendam verò est ex propos. 18. Coroll. quod rectangulum GR ex GE, & GF est ad quadratum BG, vt transuersa diameter AD ad contiguam parametrum AK: Quare talis etiam proportio AEZ quadrati ad DI rectangulum cum 5. progr. sit eadem, ac GR rectanguli ad quadratum BG.

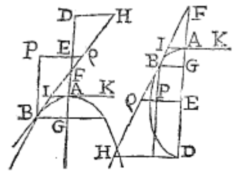
Progr. 7. Si ergo super DA constituamus quadratum DT, & ex DA, & AK constituamus rectangulum; Quadratum constitutum DAT, cùm sit super eandem basim erit, vt altitudo DA, vel AT ad AK: Vnde dicet eandem proportionem ad suum rectangulum, quam DA ad AK, quæ ex 6. progress. est eadem quadrati AEZ ad rectangulum DHI. Sed quadratum AEZ est quarta pars quadrati DAT, cùm sit super dimidiam AD, quę est distãtia centri à vertice ex 6. lib.2. Ergo, & etiam rectangulum DHI est quarta pars rectanguli DAK parametro, diametroq; transuersa comprehensi.

THEOR. VI. PROPOS. XXI.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, occurratque lineæ æquidistanti alicui ex applicatis, & à contactu ad hanc lineam æquidistantem recta parallela diametro ducatur, quæ eam terminet, hæc linea inquam æquidistans à diametro erit secata in duas partes, ex quibus compositum rectangulum erit æquale quartæ parti rectanguli sub transuersa diametro, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis, cuius vertex A transuersa diameter AD, & centrum E, quam contingat linea BF productam in H, à centro verò E ducatur parallela alicui applicatæ BG in vtrasque partes, vt PQ vsque ad Q tangentem, quam parallela BP diametro AD educta à cõtactu B terminet ad aliam partem, dico PQ lineam eductam à centro in tales partes secari à diametro AD, vt *illæ componant rectangulum quartæ parti rectanguli sub transuersa diametro* AD, *& parametro* AK *contenti.*

Probatur. Nam ex pr.19. h. rectangulum sub DF, & FA contentum est æquale rectangulo sub EF, & FG cõtento: Quare erunt latera proportionalia reciprocè ex 14.l.6 & ita DF ad FG, vt EF ad FA. Sed vt DF ad FG, ita assimilatur in proportione DH ad BG parallelæ in triangulis æquiangulis, & vt EF ad AF, ita EQ parallelę ad AI ob triangula æquiangula BFG & DFH, ideoq; ex 16.l.5. erit DH ad BG, sic EQ ad IA, ergo si cõponãtur rectãgula vnũ ex duobus DH, & AI, aliud ex BG, & EQ sumẽdo eas lineas reciprocè scilicet consequentem cum antecedenti pro vno; sicut consequentẽ, & antecedentem pro alio iuxta propos.22. Eucl.6. erit rectangulum DH, & AI æquale rectangulo BG, seu ęquali PE, & EQ. Sed ex præced. rectangulum DH, & AI est æquale quartę parti rectanguli DA intercepta, & parametro AK. Ergo, & rectangulum PE, & EQ.



COROLLARIVM.

PRæallegatę propositiones de Ellipsi, etiam de Circulo intelliguntur, & sufficit loco Ellipsis circulum substituere, nam eædem rationes militabunt.

EXPENSIO V.

De Vmbelicis.

VMbelicus est quoddam punctum intra sectionem, quod insignes proprietates obtinet, maximè ad ipsarum sectionum descriptionem. Vocatur autem Focus, & Polus, qui in Hyperbola, & in Ellipsi gemini sunt, in Parabola verò vnicus.

PROBL. I. PROPOS. XXII.

Parabolæ Vmbelicum assignare.

INueniatur Parameter, & illius quarta pars assumatur, & mensuretur in ipso diametro à vertice sectionis, & illud punctum erit Focus, seu Vmbelicus.

Ostenditur ipsa definitione. Nam definitur, quod sit quarta pars parametri in ipso axe à vertice sectionis assumpta.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Hyperbolarum, & Ellipsium Vmbelicos inuenire, data Axe transuersa, & Parametro.

QVoniam Vmbelicus Hyperbolæ non est tantùm quarta pars Parametri à vertice mensurata. Sed latus rectãguli illius quartę parti ęqualis, cuius alterum latus sit trãsuersa diameter addito ei latere ipso, quo clauditur V.g. rectangulo ex diametro trãsuersa MA addito ei MX ęquali XP; In Ellipsi verò dẽpto V.g. rectãgulũ ex CD dẽpto CL.

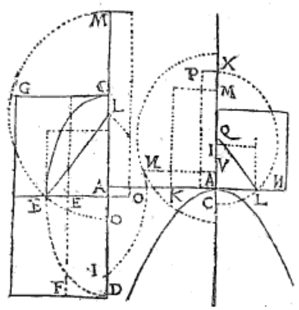
Reperto itaq; Parametro ex 10. propos. & 18. AX: sicut, & diametro transuersa AM; rectangulo ab illis comprehenso MX inueniatur quadratum ęquale NA ex 16. lib. 2. Eucl. vt vides factum mediante media proportionali NV ex 16. lib. 6, cuius latus diuidatur bifariam in L, coniungaturque LQ, & centro Q medietate transuersę diametri, interuallo QL describatur circulus CLX: Dico puncta X, & C Vmbelicos esse Hyperbolę.

Id verò ostendetur, si demonstretur habere conditiones à definitione requisitas, s. quod MX, vel ęqualis CA sit latus rectanguli talis; cuius vnum latus sit, nedum transuersa diameter AM.

Sed insuper distantia XM, vel CA, & aliud ipsa distantia MX, vel CA, quod tamen sit æquale quartæ parti figuræ, & rectanguli contenti à diametro transuersâ, & parametro.

Probatur verò. Nam quadratum NA ex VN est ex constructione æquale rectangulo MK. Sed huius quadrati quarta pars ex 6. lib. 2. Elem. Cor. cum sit ex medietate laterum est quadratum LI. Ergo erit quarta pars rectanguli KM, sed huic quadrato paruo LI est ęquale rectangulum AP, ex propos. 16. Eucl. lib. 2. Ergo rectangulum AP est ęquale quartę parti rectanguli KM. Rursus comprehenditur diametro transuersa MA, & XM, & aliud latus est ęqualę MX, vt patet ex eadem 16. propos. lib. 2. Eucl. Ergo habet conditiones requisitas. Vnde distantiæ ab extremis A, & M diametri transuersę, nempe puncta X, & C erunt Vmbelici.

Si verò sit Ellipsis, cuius Vmbelici sint inueniendi.



Primo pręsupponendum est quadratum ex AB applicata ad centrum esse æquale quartæ parti rectanguli sub diametro transuersa CD, & parametro AE; nimirum CF. Nam ex propos 8. Expens. 2. Coroll. 2. ita est diameter CD ad Parametrum AE, vt est ad quadratũ applicatæ AB ad rectangulũ cõprehensum sub portionibus diametri CA, & AD, quæ hic sunt æquales, quãobrẽ hoc rectangulũ erit quadratũ AC Sed ita se habet quadratũ magnũ ex toto diametro CD, ad rectãgulũ ex eodẽ CD & AE Parametro, vt ipse diameter CD ad parametrum, quod sit super eandem basim CD. Vnde erit, vt altitudo CD ad AE. Ergo ex 16. lib. 5. elem. quadratum AG ad quadratum ex applicata AB dicit eam proportionem, quam dicit quadratum magnum ex diametro CD ad rectangulum CF; cum sit eadem ac proportio diametri ad parametrum. Sed quadratum AC est quarta pars, quadrati magni ex diametro DC ex 6. lib. 2. Ergo, & quadratum ex applicata AB erit quarta pars rectanguli CF.

Cum itaque sit quadratũ ex AB quarta pars rectãguli CF ex diametro DC, & parametro AE, reperiatur huic ęquale rectangulum, comprehensum à diametro DC, defficiente tamen longitudine alterius lateris, vel ex 30. lib. 6. vel ex 36. lib. 10. & aliud latus erit vmbelicus.

Hęc enim est conditio, quæ exposcitur ad Vmbelicos Ellipsis ex definitione, vel sic: Accipiatur distantia AC, & facto centro in B describatur portio circuli; quæ secabit diametrum in L, & I. Dico LI *puncta esse Vmbelicos*, quod, vt probetur.

Facto centro in L interuallo CA describatur circulus, qui secet axem, in M, & O, & latere AM, & alio AO fiat rectangulum OM; iam manifestum est ex 16. lib. 2. Eucl. hoc rectangulum esse æquale quadrato ex AB. Ideo quartæ parti rectanguli CF, ex prædictis, sed hoc rectangulum continetur à diametro OM æqualis CD minus latere OA. Ergo est rectangulum, quod requiritur, & AO distantia requisita ad vmbelicum. Sed LO est æqualis LB, at LB est æqualis AC, ergo etiam ablata communi LA distantia OA est æqualis distantiæ LC. Vnde L erit Vmbelicus, & I alius Vmbelicus.

EXPENSIO VI.

De inclinatis rectis à contactibus ad focos.

PVncta contactuum, & foci lineis connectuntur, quæ inuicem quibusdam analogijs insignibus referuntur, & ad transuersum diametrum; de quibus quidem speculatio ardua; sed, & singulari vtilitate fęcunda.

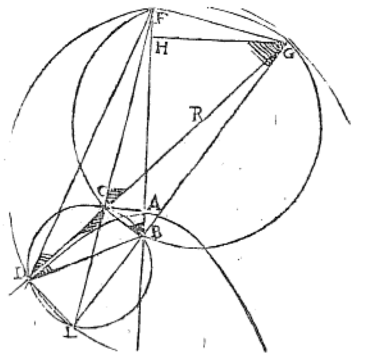
THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, quæ à tactu ad vtrumque sectionis Vmbelicum rectæ ducentur lineæ æquales hinc, inde cum contingente angulos efficient.

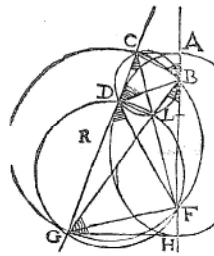
SIt Hyperbola, vel Ellipsis AD; in qua Diameter transuersa AH; repertique Vmbelici B, & F, tangat verò sectionem recta DG, à cuius tactu ad vtrumque vmbelicum ducantur rectæ BD, & & DF. Dico *angulos* BDC, *&* GDF *esse æquales*.

Probatur verò per tres præcipuos progressus. Primus intendit ostendere circulum GF BC super diametrum CG transire per puncta B, & F; quod sic demonstratur.

Rectangulum factum ex AC, & GH ex prop. 19. est æquale quartæ parti rectanguli comprehensi à Parametro, & Diametro transuersa, cui etiam quartæ parti fecimus æquale rectangulum ex BH, & BA comprehẽsum ex prop. 22. h. Quare cum sint æqualia habebunt latera proportionalia reciprocè ex 10. lib. 6. Eucl. Vnde HG erit ad HB, vt AB ad AC: Iunctis ergo B, & C linea BC, & G, & B linea GB, erunt triangula BAC, & GHB similia; siquidem secundùm propos 5. lib. 6. Eucl. habent latera proportionalia circa æquales angulos rectos H, & A, & ideo angulus niger G angulo B nigro æqualis; vnde, & reliquus GBH reliquo BCA; Cum ergo angulus B niger, & angulus ACB sint æquales vni recto ex 17. lib. 1. Eucl. fit, vt angulo B nigro additus GBH ęqualis angulo ACB in Hyperbola fiat totus GBC rectus; at in Ellipsi ablatis CBA, & GBH nigris remaneat CBG angulus rectus. Deinde idem probabitur dè angulo GFC, quòd sit rectus. Nam iunctis recta G, & F, sicut F, & C triangulum GHF erit similis triangulo FAC. Nam *permutando* sicut se habet GH ad HF, æquali BA (cum F sit alter vmbelicus) ita FA æqualis HB ad AC, cum ergo latera sint proportionalia circa angulos rectos H, & A triangula erunt similia, & reliquos angulos reliquis æquales obtinebunt. Vnde angulus HGF angulo AFC erit æqualis, qui additus angulo GFH conficiet totum angulum GFC rectum ob dictam rationem, quòd CFA æquetur angulo HGF, qui cum HFG æquat rectum in hyperbola, at in Ellipsi relinquet GFC rectũ ablato CFH, & CFA: Quare ex 32. lib. 4. Eucl. facto super GC centro in B, circumferentia transibit per puncta F, & B; quod anguli recti probati sint, & ideo necessariò in semicirculo debeant esse.



Progressus 2. Intendit probare; quòd erecta in puncto contactus D perpendiculari LD vsque ad lineam FC prolungatam in L, si opus sit, & producta GB; tres lineæ LC, & DL, & GL in idem punctum conspirent in L. Considerandum est itaque GFC triangulum rectangulum triangulo LCD rectangulo esse ad verticem in Hiperbola, in Ellipsi vnum contineri in alio, & angulum C nigrum hic esse eundem, ibi æqualem: quare, & reliquus angulus reliquo æqualis, & latera erunt proportionalia ex Coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Elem.



Sunt autem triangula GBH, & GFC æquiangula. Ex eo, quod rectangula habeant angulum GCF angulo GBF æqualem, quòd sit super eandem circumferentiæ portionẽ circuli GFCB. Quare, & triangulum GFC erit triangulo BAC simile, cui simile in primo progr. probatum est triangulum GBH. Quare erit quoque simile ei BAC triangulo LCD; quod probatum est simile triangulo GFC, vnde & latera proportionalia erũt. Deinde producatur GB vsq; quò occurrat rectæ FL si opus sit, erit triangulum BLC triangulo GLF simile; siquidem in primo progress. anguli GFC, & CBG probati sunt ęquales, & recti, & angulus L est communis in Hyperbola in Ellipsi ad verticem.

Cum itaque triangula sint similia BAC, & LCD, erit AC ad CB, vt CD ad CL, & *permutando*, vt AC ad CD; ita BC ad CL. Et propter triangula similia GFL, & BCL, vt BC ad CL, ita est GF ad GL; Quare erit commune latus CL triangulo CDL, & GLF, aut BCL; & latus GL conueniet cum CL, & DL in L.

Progress. 3. Cum ergo angulus GFL in progr. 1. probatus sit rectus. Angulus verò LDG talis factus sit; si diametro GL fiat circulus erunt anguli recti vertices F, & D ex propos. 28. lib. 3. Eucl. in circuli circumferentiã.

Rursus. Cùm angulus CBL, vel quod idem GBC in I. progr. probatus sit rectus, & CDL factus talis si diametro CL circumferentia ducatur, hæc transibit per D, & B puncta & vertices angulorum rectorum ex 28. lib.3. Elem.

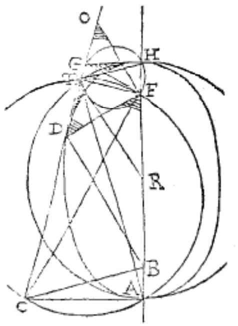
Cum itaque angulus BLC sit in eadem circuli circumferentia, ac angulus BDC, & angulus idem BLC, vel GLF (in Ellipsi ad verticem) sit in eadem circuli circūferentia GF, ac angulus GDF, erunt anguli BDC, & GDF ad contactum D æquales, vtpote æquales vni tertio BLC.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Si Hyperbolam vel Ellipsim recta linea contingat, & ab vtroque vmbelico ad tactum binæ inclinentur lineæ: Illa linea, quæ parallela alterutri à centro ducetur ad contingentem erit æqualis dimidio transuersi axis.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AD, quam contingat OD in D; & ad contactum D ab vmbelicis B, & F binæ lineæ inclinentur BD, & FD, deinde à centro R ducatur TR parallela alterutri, aut FD, aut BD, vt est exemplum, donec contingentem secet in T. Dico RT *esse æqualem axis transuersæ dimid.* RA, vel RH.

Iungatur punctum T cum punctis F, H, & A, & vt in antecedenti figura sit ducta GH perpendicularis ad axem, & coniunctum punctum C, vbi secat tangentem, cum vmbelico F, sitque ducta OF parallela TR vel BD.

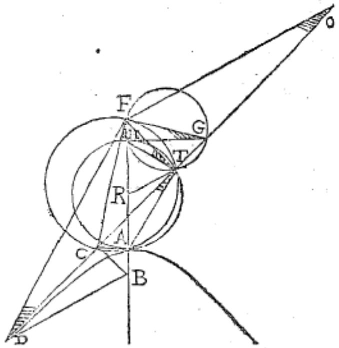


Progress. I. Probatur itaq; Angulus T (vt ostendam) in triāgulo GTF rectus est, & ideo cum H angulus in triangulo GHF ex constructione sit rectus, poterit ex prop.28. Cor.l.3 El. diametro GF describi circulus, qui transeat per puncta, & vertices angulorum rectorum T, & H, & sic angulus apud G in triangulo FGH, & T in triangulo FTH, vtpote anguli ad circumferentiam, & super eandem peripheriam FH erunt æquales ex 27. lib.3. elem.

Progress. 2. Itaque ostenditur angulus T in triangulo GTF rectus. Quoniam triangulum magnum OFD est æquicrurum, & OT medietas basis; Ergo FT est perpendicularis.

Est autem æquicrurum: Quia anguli O, & D nigri sunt æquales, angulus enim alternus niger O factus ab incidente OD in parallelas OF & BD alteri alterno BDC æqualis, qui BDC probatus est æqualis in antec. propos. angulo nigro D, vtpote ab inclinatis ad contactum effecti, ergo O, & D æquantur.

Quod autem OT sit medietas basis OD probatur. Nam BR incidens est æqualis RF ob æqualem distantiam vmbelicorum à verticibus H, & A, & centri R ab ijsdem. Ergo etiam OT est æqualis TD cum secetur in easdem partes ex 13. propos. lib.6. Elem. à parallela TR ipsa OD, quæ parallelas ad extrema coniungit; Quare cum in triangulo OFD æquicruro OT sit æqualis DT, angulus OTF erit rectus, & TF perpendicularis. Vnde verificabitur, quod per T, & H transeat circulus assumpto pro diametro GF.



Progress. 3. Ostendendum est deinde angulum ATC nigrum angulo FTH esse æqualem.

Angulus CTF est rectus, ex progr. I. angulus quoque CAF est rectus ex constructione præcedentis figuræ; Ergo diametro CF circumferentia transibit per C, F, A, & T; Anguli ergo nigri C T A, & C F A, inixi super eandem peripheriam A C, & vertices T; & F in peripherijs erunt æquales; sed angulus niger CFA probatus est ęqualis angulo nigro HGF in præced. propos. in fine progr. I. & hic angulus G niger in progr. I. & 2. huius propos. angulo T in triangulo FTH; Ergo hic angulus FTH est ęqualis angulo T nigro trianguli ATC.

Progr. 4. Duo anguli nigri ad T sunt æquales, & angulus CTF rectus ex 2. progr. ergo, & angulus HTA erit rectus. Idem enim vtrisque additur angulus HTC in Hyperbola, & in Ellipsi FTA. Si ergo fiat circulus diametro HA centro R transibit per T anguli recti verticem ex 28. lib.3. Eucl. Vnde TR erit radius est semidiameter æqualis semiaxi transuersæ AR, seu æquali RH.

THEOR. III. PROPOS. XXV.

Si in Hyperbola, aut Ellipsi ab eodem sectionis puncto binæ inclinentur rectæ lineæ ad vmbelicos; in Hyperbola maior minorem quantitate transuersi axis superabit, & in Ellipsi erunt simul transuerso axi æquales.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AC in quibus à puncto circumferentiæ C binæ lineæ inclinentur ad vmbelicos vnam adhunc K altera ad illum B. Dicit, quod in Hyperbola linea maior KC superabit minorem BC portione æquali diametro transuersæ AH, in Ellipsi verò simul sumptæ KC, & BC diametro HA erunt æquales, ducatur GD parallela

CF

GF per centrum F in vtraque sectione.

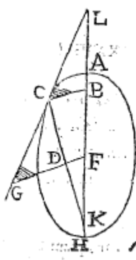
Progress. I. Primo ostendendum GD in Hyperbola esse æqualē DC, quod demonstratur. Nā trianguli GDC anguli nigri ad basim G C sunt æquales, siquidem GC in parallelas incidens GD, & BC ex 30. lib.I. Eucl. facit angulos alternos BCG, & G nigrum æquales; sed BCG est æqualis angulo nigro C ex prop.23.h. Ergo G, & C niger sunt æquales, quare GD crus est ęquale DC ex 17. lib. I. Elem.

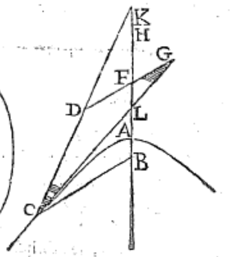
Progr. 2. Prob. quoq; CD esse æqualem portioni DK: In triāgulo enim BKC ob parallelam FD ad basim BC, quia KB est dupla KF etiā KC erit dupla portionis KD ex 2. lib.6. quare KD, & DC erunt ęquales, & tota CK erit dupla CD, quæ est æqualis suæ dimidię DC, necnon in eodem triangulo, & BC erit dupla FD ob eandem rationem.

Progr. 3. Cum ergo DG sit æqualis CD: ergo FD, FG eius medietates duplatæ æquabunt CK, sed BC est dupla FD, & AH est dupla GF præc. propos. Ergo BC, & AH æquabunt totam CK; quod erat probandum.

Idem ostendetur in Ellipsi cum LG in parallelas BC, & FG incidat angulus C niger est ęqualis angulo nigro G internus, & ad easdem partes externo ex propos.30. lib.I. Elem. sed angulus C niger est æqualis, vtpote ad contactum ex propos.23. huius angulo DCG. Ergo est æqualis angulo G, & triangulum GDC æquicrurum: Ergo CD, & DG crura æqualia.

Progr. 2. Probatur quoque in triangulo KBC ob parallelas FD, & BC crus KC esse duplum cruris KD, & BC cruris FD; sicut est KB duplum cruris FX.





Progr. 3. Igitur DG est æqualis DC. Ergo si DG dupletur erit æqualis CK; sic FD, si dupletur, erit æqualis BC. Vnde duplicata GF ęquabit CB, & CK; sed FG simplex ex pręced. propos. est æqualis dimidio diametro transuerso FH. Ergo duplicata erit ęqualis toti AH. Vnde, & BC, & CK erunt æquales toti diametro AH.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

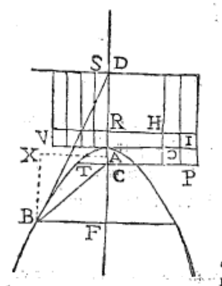
Si parabolem recta contingat linea, quæ à tactu ad sectionis vmbelicum recta linea ducetur, æqualis erit axis portioni, quæ intercipitur inter contingentem prædictam, & Vmbelicum.

SIt Parabola AB, in qua vertex apud A, contingensque DB Vmbilicus C signatus à vertice nempe quarta pars parametri, applicata ad tactum FB, iungaturque CB. Dico, quòd hæc linea CB erit æqualis axi CD, qui intercipitur inter Vmbelicum C, & punctum D, quo diametrum secat tangens BD in puncto D.

Progress. I. Aduertendum ex propos.12. huius diametri portiones inter applicatam, & verticem FA, & inter verticem, & contingentē DA esse ęquales.

Secundò. Ex propos.11. lib.2. Elem. quadratum ex CB esse ęquale quadratis ex CF, & FB, quòd angulus ad F rectus sit. Vnde erit æquale quadrato FX facto ex FB, & quadrato HD facto ex CF: quadratum verò FX est ęquale rectangulo VD sub DA axis portione, & AV Parametro comprehenso ex Coroll. propos.12. huius. Quare sit quadratum CB sit ęquale quadrato DH facto ex CF, & rectangulo DV, quod comprehenditur à portione diametri DA, & Parametro AV quadruplo lineę CA ex hypothesi.

Progr. 2. Prob. propos. Quadratum CD quale est DP æquale est quadrato ex CF, quod fecimus DH, & quatuor rectangulis, quibus vnum latus est linea ipsa D R æqualis lineę CF, & aliud linea AC, vel ęqualis A R; siquidem ex ęqualibus DA, & AF ablatis æqualibus DR, & CF residua sunt equalia. Insuper est quoque ęquale idē DP quatuor paruis quadratis ex CA qualia sūt P, I, O, H. Nam hæc omnia nempe quadratum maius DH, quatuor quadrata parua T, I, O, H, & rectangula quatuor, vt RO concluduntur in ipso DP.



Progress. 3. Sed hęc omnia quatuor rectangula, & quatuor quadrata complent, & æquantur rectangulo sub DA intercepta diametro, & AV parametro comprehensum: Nam parameter est quater CA, vnde sub AR ęquali, & AV quadruplici rectangulum quatuor parua quadrata cōprehēdet, & rectangulum sub DR æquali CF, & quadruplici RV quatuor rectangula quale vnum ex illis est SR.

Progr. 4. Ergo quadratum magnum DCP est æquale quadrato ex CF, quale est DH, & rectangulo DV ex parametro, & axe AD.

Progr. 5. Sed hoc rectangulum DV ex parametro, & axe intercepta, vt ex I. progr. est æquale quadrato ex BF; Ergo quadratum magnum DCP est æquale quadrato ex CF, quale est DH, & quadrato ex FB.

Sed quadratum ex linea CB à contactu B ad parametrum ducta ex progr. I. est æquale duobus quadratis ex CF, & FB. Ergo etiam est æquale quale quadrato magno DCP. Cùm ergo hęc duo quadrata sint æqualia; etiam latera erunt ęqualia, & CB erit ęqualis lineę CD, quòd erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HInc ellicies CB esse ęqualem FA, & AC simul positis, quia probata est ęqualis lineę DC, cuius vna pars AD est ęqualis ipsi AF altera CA ipsa eadem. Quod si CB sit vna quoque ex applicatis, & cadat in punctum T ad diametrum perpendiculariter, vt CT; tunc CT dupla erit CA; quia eodem

modo

modo erit æqualis CA inter se applicatam, & verticem intercepta, & eidem CA, vt quartæ parti Parametri.

Alia quoque ratio esset, quod tangens secabit in R, vtpote æquali CA: At CT à tactu ad Vmbilicum probata est equalis CR diametro inter vmbilicum, & punctum R intercepto.

EXPENSIO VII.

De Diametris secundis.

NOn vnus diameter sectionibus conicis inest: siquidem preter illum, qui oritur à generatione, & in ipsa sectione coni est, quę per verticem coni ducitur; aliæ etiam lineę, quę illi diametro æquidistantes in Parabola, vel in Ellipsi, & Hyperbola ad centrum ducuntur, diametri dignitatem obtinere possunt; siquidem, & omnes applicatas, quę intra sectionem ducuntur bifariam diuidere possunt; vt ergo id demonstretur.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

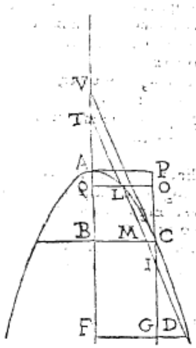
Si Parabolam recta contingat linea, quæ per tactum diametro parallela ducetur, omnes alias tangenti æquidistantes intra sectionem existentes bifariam secabit.

IN parabola ACD, sit tangens CV, diameter VF, & ipsi parallela PG per tactum C ducta; tangenti verò parallela DL intra sectionem, ita vt eius extrema terminentur in D, & L puncta sectionis.

Dico hanc DL bifariam à linea PG transeunte per tactum C secari in I.

Progr. I. Priùs Triangulum TLQ ostendendum est æquale rectangulo QAP; sicut, & triangulum DTF parallelogrammo, seu rectangulo FP.

Quod vt ostendatur, reminiscendum est id, quod diximus propos. I.I. huius portionem diametri BA esse equalem AV ob contingentem CV; quare ex Euc. lib. I; propos. 39. rectangulum PB erit æquale triágulo BCV; ob eandem altitudinem CB, & basim duplicatam BV.



Progr. 2. Reminiscendum quoque quadratum CB, & LQ applicatarum esse ad inuicem, vt BA ad AQ ex prop. 5. huius Exp. I. sed vt quadratum ex CB, ad quadratum ex LQ, ita est triangulum CVB ad triangulum LTQ, cum ob parallelas CV, & LT sint equiangula, & similia, ex prop. 22. lib. 6. Eucl. Ergo etiam erunt, vt BA ad AQ, quę est proportio quadratorum ex applicatis.

Progr. 3. Vt autem BA ad QA, ita est rectangulum BP ad rectangulum QB ob eandem altitudinem ex I. lib. 6. Eucl. Ergo, & triangulum CVB ad triangulum LTQ erit; vt rectangulum BP ad rectangulum PQ; & *permutando*, Itaquoque est triangulum CBV ad rectangulum BP ex BA, quod ei probatum est æquale, vt triangulum LTQ rectangulo QP: Ergo quoque LQT triangulum erit æquale rectangulo QP ex prop. 12. lib. 5. Elem.

Progr. 4 Eadem prorsus est probatio de triangulo DTF; quòd sit æquale rectangulo FP. Vnde non deseruit eam repetere, quibus positis.

Progr. 5. Auferendum est triangulum LQT, & æquale rectangulum QP, & remanebit ablatis æqualibus quadrilatera figura LQFD rectangulo residuo FOGQ æquale, quæ prius erant æqualia, ex progr. preced. 4. & 3.

Progr. 6. Quod si auferatur quinquelaterum commune, & occupans idem spatium EGILQ remanebunt duo triangula æqualia, & similia DIG, & IOL; Quare basis IL erit æqualis basi ID; quod erat probandum. Similia autem sunt, quod anguli apud I sint æquales, vtpote ad verticem, & apud G, & O recti: vnde, & reliquus D reliquo L, equalis erit ideo ex def. I. lib. 6. Elem. erunt similia.

COROLLARIVM.

COlligitur itaque omnes parallelas diametro principali, siue ex generatione in Parabola diametri quoque vices, & naturam obtinere. Nam diameter est ille ex definitione, qui per medium diuidit omnes rectas, quæ intra sectionem parallelę inuicem ducuntur.

THEOR. II. PROPOS. XXVIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, quæ ei parallela ducitur intra sectionem, diuiditur per medium à lineâ, quæ à centro procedit, & per contactum deducitur.

SIt Hyperbola, seu Ellipsis ABD, quam tangat recta BC, cui parallela agatur DF, discedatq; à centro E recta ad contactum B. Dico, quod hęc diuidit portionem parallelæ intra sectionem remanentis, scilicet LD in duas partes æquales. Ducantur ad punctum contactus B applicata BP, & ad extrema L, & D applicatæ LO & DI, & tandem à vertice sectionis AS, quæ terminet in S puncto lineę EB, à centro ad contactum ductæ.

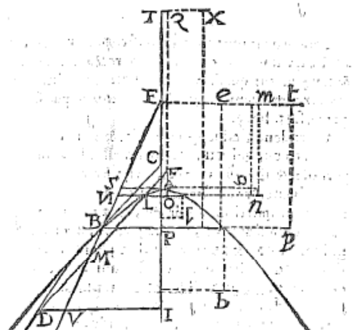
Progr. I. Iam ex propos. 17. Expens. 4. huius nosti rectangulum PE, & CE esse equale quadrato EA ex AE, ideoq; proportionalia esse latera ex 17. lib. 6. & vt PE ad AE, ita esse AE ad EC, & ideo PE ad EC duplicata esse proportione. Ex hoc itaq; demonstrandum est in primis EBC triangulum esse æquale triangulo SEA cum eidem triágulo BEP eandem dicant proportionem, quam rectangulum CE, EP æquale, quadrato AE dicit.

Prob. Dicit eandem proportionem triangulum SEA triangulo BEP, sicut quadratum EA ad quadratũ ex PE, eò, quòd SEA, & BEP triangula sint super eandem, basim, ac quadrata EA, & PE: Vnde, tum triangula, tum quadrata erunt in duplicata ratione laterum suorum, nempe eâ quam latus CE tertia proportionalis, vt dixi habet ad EP.

Item rectangulum EP ex PE, & EC est ad quadratum PE, vt altitudo EC ad altitudinem PF ob eandem basim PE; Idest triangulum BEC ad triangulum BEP ob eandem altitudinem PB. Cum ergo triangulum AES sit ad triangulum BEP, vt EC ad EP. Rursùsque triangulum BEC sit ad triangulum idem BEP, vt eędem lineę EC ad EP triangula EBC, & ESA ex prop. 7. lib. 5. Elem. erunt æqualia, cum eidem eandem dicant proportionem.

Progr. 2. Quapropter ab eodem triangulo BEP in Hyperbola, si auferatur SEA, & BEC æqualia inuicem, residua remanebunt ęqualia quadrilaterum SBAP, & triangulum BCP.

Pariter si in Ellipsi auferatur à triangulo ASE, & CBE ęqualibus triangulum commune PBE remanebunt residua ęqualia triangulum PCB, & quadrilaterum APSB.



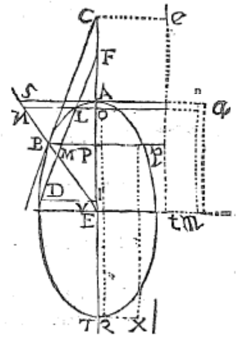
Progress. 3. Considerandum autem est rectanlum OZ esse ęquale gnomoni o a m, nam EZ ęquatur parti a m, & EO ęquali reliquo gnomonis AN. Et idem dicas de gnomone p a t eadem ratione, quod æquatur px rectangulo. Rectangulum verò ZO esse ad rectangulum Px ex diametro transuersa, & intercepta pro vno latere, & intercepta solùm pro alio ex prop. 6. huius, vt quadratum LO ad quadratum BP.

Quoniam itaque I. progr. diximus, ita esse quadratum ex EA ad quadratum ex EP, vt SEA triangulum ad EPB triangulum; erit etiam ex prop. 20. lib. 5. reliquus gnomon P a t, idest Px rectangulum ad quadratum ex EA, vt reliquum quadrilaterum SBAP ad triangulum SEA.

Progr. 4. Et ex eadem ratione erit ex EA quadratum ad quadratum ex EO, vt triangulum ESA ad triangulum ENO ob rationem duplicatam suorum laterum, quę sunt eadem in quadratis, & triangulis, vt dictum est progr. I. Quare, & reliquus gnomon o a m, idest OZ rectangulum erit ad quadratum ex EA, vt reliquum quadrilaterum SANO ad triangulum SEA, *permutando* itaque OZ rectangulum erit ad ASNO quadrilaterũ, vt quadratum ex EA ad triangulum SEA. Itemq; *permutando* progr. 3. proportiones, ita erit rectangulum Px ad quadrilaterum SAPB, vt quadratum ex EA ad triangulum SEA.

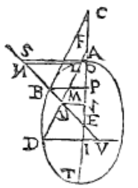
Quapropter erit eadem proportio quadrati EA ad triangulum SEA hoc est OZ rectanguli ad AOSN quadrilaterum, quam Px rectanguli ad SPBA quadrilaterum. Vnde *permutando* erit OZ rectangulum ad PX rectangulum, quam SANO quadrilateri ad SABP quarilaterum.

Progress. 5. Proportio verò OZ rectanguli ad PX rectangulum est eadem, quæ quadrati LO ad quadratũ BP, & ideo eadem, quæ trianguli LFO ad triangulũ BCP 26. l. 6. ob parallelas & easdẽ bases, ob quę sunt similia triangula inuicem, & ideo in duplicata ratione suorum laterum communium quadratis. Ideo quadrilaterum SNAO erit ad quadrilaterum SABP, vt LFO triangulum ad BCP triangulum; Et *permutando* Quadrilaterum SNAO erit ad triangulum LFO, vt Quadrilaterum SABP ad triangulum BCP. Sed hæc sunt æqualia triangulum BCP, & quadrilaterum BSAO ex progr. 2. Ergo etiam illa SNAO quadrilaterũ, & LFO triangulũ, pr. 6. Idem probabis de quadrilatero IVSA, quod sit æquale triangulo DFI. Nam supposita eadem consideratione, quæ progr. 3. Ita erit quadratum ex EA ad quadratum EI, vt triangulum ESA ad triangulum EVI ratione eadem: Quare, & reliquus gnomon, idest gnomoni æquale rectangulum ex IT, & IA erit ad quadratum EA, vt reliquum quadrilaterum SAVI, seu in altera ellipsi ASUI ad triangulum SEA, & ideo erit rectanguli TI, & IA ad ASIV quadrilaterum quam PX rectanguli ad SPBA quadrilaterum; cum sit etiam horum eadem ratio, quæ EA quadrati ad triangulum SEA ex progr. 3.



Quare *permutando* erit rectangulum ex TI, & TA ad PX rectangulum, velut ASIV quadrilateri ad SPAB quadrilaterum. Proportio autem rectanguli ex TI, & TA ad rectangulum PX ex TP, & PA est eadem ex 6. huius, quæ quadrati DI ad quadratum BP, & ideo eadem, quæ trianguli DFI ad triangulum BCP æquiangulorum ex 26. lib. 6. elem. sunt enim figuræ similes super easdem quadratorum bases. Ideo quadrilaterum ASIV erit ad quadrilaterum SPBA; vt triangulum DFI ad triangulum BCP: ideo *permutando* quadrilaterum ASIV erit ad triangulum DFI, vt quadrilaterum SBPA ad triangulum BCP; sed quadrilaterum SBPA æquatur triangulo BCP, vt I. progr. ostensum est. Ergo etiã Quadrilaterũ ASVI æquabitur triãgulo DFI.

Progr. 7. Vnde, si ab æqualibus SAVI quadrilatero auferas NSAO quadrilaterum æquale triangulo LOF, quod auferatur à triangulo DFI quod est ęquale ipsi ASVI, reliquum NOVI quadrilaterum restabit *æquale* reliquo LODI trapezio. Si verò ab vtroque auferas commune spatium quinquelaterum LMVIO, remanebunt duo triangula NML, & DMV æqualia; & ob parallelas, & angulos M æquales ad verticem similia, vnde basis LM erit æqualis basi MD.



Obſeruandum verò eſt in Ellipſi aliquando FD cadere infra E centrum verſus T. Sed tunc idem erit argumentum: niſi quòd à triangulo ASE auferendũ eſt triangulum EU I. lineã ui in ſerie probationis, prog.6. quod ſit æquale triangulo EVI; quod tunc ſit infra centrum E verſus T. Et tandem pro vltimo progr. cum ſit æquale IDF triangulum quadrilatero ASIU, & triangulũ OFL quadrilatero ASON ablatis iſtis reſtat ON iu quadrilaterum æquale quadrilatero OLID; adde vtriſq; EVI, & UIE efficietur ęqualia triangulum ONE, & figura irregularis OLIDVS, à quibus ablato cõmuni ſpatio MELO erũt æqualia MNL, & MVD triangula inſuper, & ſimilia ob æquales angulos alternos V, & N inter parallelas poſitos, & angulos ad M ad verticem.

COROLLARIVM I.

Hinc deduces omnes protractas à centro in Ellipſi, vel Hyperbola poſſe habere proprietates diametri; Quod omnes in ſectione cõprehenſas æqualiter diuidant. Vnde præter diametrum ex generatione tot erunt diametri in ſectionibus Hyperbolicis, vel Ellipticis, quot erunt lineæ intra ſectionem à centro ductæ, & circumferentiam ſecantes.

COROLLARIVM II.

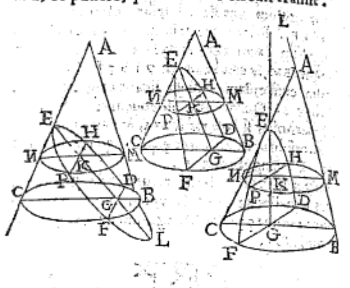
Hinc cognoſces, quod quę dicta ſunt de ellipſi etiam de circuli circumferentia debeant cognoſci, vt quilibet pro ellipſi ſubſtituto circulo intelliget.

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

Quælibet ſectio poteſt in alio cono collocari, cui aliqua ex diametris coniungatis ſit axis.

Sit diameter cõiungata GE, EL in ſectione DEF, cui ſint applicatę GF, & KP parallelę, & ęquales ipſis ex prec. DG, & HK. Dico *hanc ſectionem poſſe in cono collocari aliquo, cui diameter hæc coniungata ſit axis.*

Applicatę FG duę extremę proportionales inueniantur CG, & GB ex propoſ.16. tract.15. quę ad punctum G perpendiculares applicatis FG, & GD conſtituantur, & per eas circulus actus intelligatur diametro CE, & tranſibit per F mediã proportionalẽ, & D ex eadem propoſ.16. tract.15. A puncto itaq; C per verticem E in plano per EGL tranſeunte ducatur CA, & à B in eodem ducatur ad verticem diametri tranſuerſę BA, in L in parabola verò parallela GE diametro, in quo etiam per punctũ K parallela ipſi CB ducatur NKM, & per PH, NM ducatur planum, quod ex propoſ.13. tract.22. erit parallelũ plano BDCF, in quo diametro NM deſcribatur circulus NPM. Dico, quod iſte circulus tranſibit per P, & H puncta: Vnde ſuperficies conica circumueſtiens hos duos circulos ſectionem quoque FEHD circumueſtiet, eo quia ſicut probabitur de punctis P, & H applicatarum, quòd per eas tranſeat circulus MHNP: ſic par ratio militet de omni alio circulo, qui diametrum aliam aliquam parallelam diametro CB obtineat, nam tranſibit per extremum punctum applicatę diametro ſectionum, eo puncto, quo diameter circuli tranſit.



Probatur itaque NPMH tranſire per puncta P, H applicatarum KP, & KH. Nam rectangulum NK, & KM ęquatur quadrato PK, vel KH, ergo diametro MN circumferentia tranſibit per NPMH puncta ex propoſ.35. lib.3.

Oſtendendũ eſt itaq; rect. NK, & KM eſſe ęquale quadrato PK, vel KH. Nam CG eſt ad NK in Hyperbola, & Ellipſi, vt GE ad KE; ſic GB eſt ad KM, vt GL diameter tranſuerſa ad KL. Ergo ſi componantur proportiones erit CG, & GB rectangulum ad rectangulum NK, & KM; vt GE, & GL rectangulum ad KE, & KL rectangulum; & ideo, vt quadratum FG applicatę ad quadratum applicatę PK, ex prop. 6. huius, & Theſi; quia GL, GE facimus diametrum. Ergo CG, & GB rectangulum erit ad rectangulum NK, & KM, vt FG quadratum ad quadratum PK: Ideoque *permutando* CG, & GB rectangulum erit ad FG quadratum, vt NK, & KM rectangulum ad PK quadratum. Sed CG, & GB rectangulum eſt ęquale ex effectione quadrato FG: Ergo etiam ex propoſ.7. lib.5. Elem. NK, & KM rectangulum quadrato PK; & KH. Vnde circumferentia NPKM tranſibit per P, & H, & ita dicas de alijs applicatis.

In Parabola quoque idem argumentũ militabit. Nam rectangulũ CG, & GB eſt ad rectangulũ NK, & KM ob eandem altitudinem GB, vel KM, vt CG ad NK, ſcilicet, vt GE ad KE. Verũ, vt GE ad KE, ita eſt quadratũ FG ad quadratum PK ex 5. huius. Vnde vt rectãgulũ CG, & GB ad rectangulum NK, & KM, ita quadratum FG ad quadratum PK, & *permutando* rectangulum CG, & GB erit ad quadratum FG, vt rectangulum NK, & KM ad quadratum PK: ſed rectangulum CG, & GB æquatur ex effectione quadrato FG, ergo etiam ex propoſ.7. lib.5. NK, & KM rectangulum æquabitur quadrato PK.

COROLLARIVM I.

Hinc eſt diametros ſecundarias eſſe propriè axes, qui licet non deſeruiant conicis ſectionibus, quatenùs in hoc aſſignato cono exiſtunt; ſunt tamen axes poſſibiles; quia hæc coni ſectio, quæ aſſignato cono applicata eſt, aut in eo effecta poteſt, & in alio cono Scaleno reperiri, & in eo diameter coniugata axis erit, licet non præcipua, eo quod normalis non ſit ſuis applicatis: Propterea etiam proprietates axis obtinebit.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque fit euidens; quod ſi FG duæ proportionales extremæ inueniantur ex 16. prop.tr.15. CG, & GB, & collocata Hyperbola, & Ellipſi ſectione ad punctum G ad quęcumque angulum, ita tamen, vt FG ſit perpendicularis ipſi toti CB; ſi deinde per E ducatur recta CE, & ducta NK parallela CB, duabus NK, & PK extrema proportionalis MK inueniatur, & ducatur BM vſque dum occurrat diametro in L: quod detruncabit EL tali modo; vt rectangulum GE, & GL ſit ad rectangulum KE & KL, vt quadratnm FG ad quadratũ PK: Nã eodem argumento BG erit ad GL; vt KM ad KL, & CG erit ad GE, vt NK ad KE: vnde compoſitis proportionibus rectangulum CG, & GB erit ad rectangulum NK, & KM, ideſt æquale quadratum FG ad ęquale PK, vt rectangulum GL, & GE ad KL, & KE rectangulum, ideoque, vt quadratum FG ad quadratum PK.

In parabola verò, ſi FG duæ extremæ inueniantur, & collocentur vt ſupra ad angulos rectos cum applicata; deinde duabus KM æquali GB, & PK extrema proportionalis inueniatur NK, & parallelæ ad CB conſtituantur linea CN occurret vertici parabolæ E. Nam ob eandem altitudinem rectangulum CG, & GB erit NK, & KM, vt CG ad NK, ideſt vt EG ad KG, ideoque, vt CE ad NE. Vnde ex prop.9. lib.6. compoſita triangula GCE, NKE in vnam rectam cohibunt.

Quare linea diuidens bifariam rectas, & ideo ex pr.28. tranſiens per centrũ poterit eſſe diameter, ſi ei addatur in Hyperbola diameter tranſuerſa, ideſt talis pars extra ſectionem; donec occurrat alteri lateri BA trianguli per axem ducti; Talis verò diameter eſt duplus portionis, quę pertingit à vertice ſectionis ad centrum ex definitione centri.

COROLLARIVM III.

Praxi præced. Coroll. poteris quoque quamlibet ſectionem cono alicui inſerere in quo poſſibile eſt reperiri, vt per ſe patet.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Diametros coniungatas, centrumque in Hyperbola inuenire.

Ducantur FD, & GE parallelæ quomodocumque, & bifariam diuidantur; perque puncta illa medietatum ducatur KA. Nam erit diameter; rurſus ductis alijs quomodocumque ſibi parallelis HI, & BC diuidantur bifariam, & per puncta diſionum LA ducatur, & LA erit quoque diameter, quæ conueniet in centrum figuræ ex præc. Coroll. in A; Quare A erit centrum.

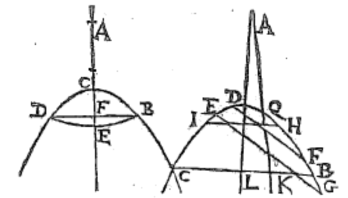
Prob. Diametri enim ſunt, quòd bifariam parallelas in ſectione diuidant, & A eſt centrum, quoniam rectæ in centrum procedentes ſunt diametri coniugatę, vt propoſ.28. huius.

Oportet tamen ex præced. 2. Coroll. eis LA, & KA addere portionem DA, & QA, ſcilicet diametrum tranſuerſam complere, vt omnimodam diametrorum rationem dignitatemque obtineant, quam prop. 6. huius oſtendimus.

PROBL. II. PROPOS. XXXI.

Dato Hyperbolæ centro Axem principalem inuenire.

Exhibeatur hyperbolę centrum A ex præc. & facto in eo centro ducatur intra ſectionem BCD arcus BED, diuiſaque peripheria bifariam à centro ducatur AE, *quam lineam aſſero eſſe diametrum principalem ſectionis, & axem.*



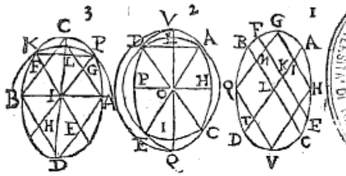
Probatur ducta BD illa à recta AE in F diuidetur bifariam, & ad angulos rectos ex propoſ.27. El. Cor.6. Cùm ergo BFD ſecta ſit bifariam, & normaliter à linea AE, quæ tranſeat per centrum A, hæc linea erit diameter principalis.

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

In Ellipſi diametrorum quamlibet coniungationem inuenire.

Sit Ellipſis ABCD fig. 1. in qua ducatur aliqua HG, & alia illi parallela EF, quæ diuidantur bifariam in I, & K, ducaturque per illa puncta recta AD, & erit vna diameter. Deinde diuidatur bifariam AD in L, & ducatur parallela CB eiſdem EF, vel GH, eritque CB altera diameter coniungata.

Ad quod oſtendendum interuallo LI ducatur applicata à puncto T, & ſit TQ, & TV; connectanturque GQ, & HV, & Dico NG, & NQ eſſe applicatas, & ęquales, & ideo CB tranſiens per centrum, & bifariam diuidens applicatas eſſe quoque diametrum.



Probatur. Quoniam AD eſt diameter, erit, vt AID rectangulum ad ATD rectangulum, ſic TQ quadratum ad IG quadratum, ſed rectangula ex effectione ſunt æqualia; quia fecimus LT æqualem LI; Vnde, & IA æquabitur TD: Ergo quadrata lateraq; IG, & TQ erunt æqualia; vnde QG erit parallela axi AD; ſed, & TQ, & IG ſunt parallelæ ex effectio-

effectione. Ergo NG, & NQ erunt æquales lineis LT, & LI æqualibus; Ergo, & inter se: quare erunt applicatæ, & CB diameter coniugata.

COROLLARIVM I.

HInc data diametro quacumque ei inuenies coniugatam diametrum, & applicatas: Sit enim data diameter CB; duc ei parallelam HG, quas diuides bifariam in I, & L, & per ea ages rectã AD, quę erit diameter coniugata, huic verò duc parallelas quascumq; vt GQ, & erunt applicatæ diametro CB.

COROLLARIVM II.

HInc eruitur, quomodo data Ellipsi in ea centrum inueniatur, ducatur enim vt cumque HG, & ei parallela FE, quas diuides bifariam, & ages per ea puncta lineam AD. Nam cum sit diameter, in illa erit centrum; diuidatur itaque bifariam in L, & DL erit Ellipsis centrum.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIII.

Diametros principales coniugatas in Ellipsi exquirere.

* DEtur Ellipsis VPQH in fig. 2. & centro ex superior. Cor. reperto O, ducatur circulus, qui eã secet in quatuor aliquibus pũctis, vt A, D, C, E. Diuidatur itaque AD circumferentia bifariam, & item CE, necnon, & ED, & AC; perque puncta diuisionum ducantur rectę, PH, & VQ, & erunt axes.

Probatur. Nam habent duas conditiones, quæ ad axes requiruntur prima; quòd sint sibi inuicem perpendiculares, secundà, quod vna sit maxima altera minima omnium diametrorum, quæ in Ellipsi duci possunt.

Quod autem sint sibi perpendiculares ducantur diametri AE, & CD, eritque ADE semicirculus, & DEC talis quoque, ablata itaque communi circumferentia DE, erunt æquales arcus AD, & CE, qui diuisi bifariam erunt semiarcus EQ, & LD æquales arcui AD, quibus additis arcui ED erit LDEQ semicirculus, & ideo LQ transibit per centrum. Et quia DE peripheria secta est per medium ex effectione; additis æqualibus erit quoque LDEI secta per medium. Vnde OP erit perpendicularis, vtpote à medio arcus DE, & ideo LDEI ducta. Patet autem, quod etiam AD, & CE sunt diuisæ bifariam, & ad angulos rectos ex Coroll. 6. prop. 27. lib. 3. Elem. Vnde erunt applicatæ orthogonales.

Quod verò VQ sit maxima patet. Nam CA, & DE puncta æqualiter distant à centro, vtpote puncta quoq; peripheriæ, ergo punctũ Q, & V mediũ inter ista, & extimum circulo, erit maximè remotum, & de punctis H, & P contrarium dicas.

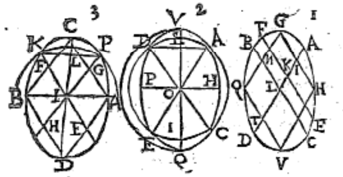
Quod autem punctũ medium V, & Q, sit maximè remotum, patet. Nam circulus per eorum extrema ductus non secat Ellipsim, sed comprehendit, & tangit in V, & Q; vnde omnes alij circuli eo minores secabunt, quare ad puncta sectionum ductæ semper minores erunt radio VQ circuli tangentis, vt sunt OD, & OA.

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

In Ellipsi diametros coniugatas æquales, inuenire.

REpertis axibus CD, & BA coniunguntur eorum extrema rectis AC, & CB; sicut, & AD, & DB in fig. 3. quæ diuidantur bifariam, & per ea puncta rectæ transeãt GH, EF. Dico *has lineas esse diametros coniungatas, & æquales.*

* Nam, quod sint æquales patet; Quoniã in triãgulis COI, & CIF ob cõmune latus CI, & æqualia crura CG, & CF, & angulos apud C æquales, vtpote rectangulorum quoque AIC, & CIB crus IB, & IA æquale, & IC commune habentium erunt ex 22. lib. I. Elem. æquales anguli PIC, & KIC, quare cũ angulos æquales cõprehẽdãt IK, & IP diametri, ęqualiter remouebũtur ab axe, & ideo erũt æquales. Nam si tales nõ sunt, sit minor IF, & producatur, vt sit æqualis IK, ducatur arcus PK, & subtensa PK, quia ergo angulus PIC ęquatur angulo CIK erit sinus PL æqualis sinui LK; sed PL est applicata, & ad eundem angulum rectum, cum P sit in ambitu ellipsis, ergo etiam KL, quare K erit etiam punctum Ellipsis, non ergo terminabit IK in Ellipsim in F infra K; quare non erit minor, quam IK, & ideo, nec minor, quàm IP.



Quod verò sint diametri coniugatę patet; Nam ob æqualia triangula CIA, & BID bases AC, & DB æquantur, & sunt parallelę: quare etiam medietates. Cum ergo BC, & AD, coniungant æquales, & parallelas, & ipsę parallelæ sunt, sunt autem AG, & GC æquales ex effectione sicut CF, & FB; Ergo etiam BH, & HD, necnon ED, & EA. Vnde cum bisecent GC, & GA & BH, HD, sic BF, FC, & AE, ED parallelas, & æquales, KE, & PH erunt diametri.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

Applicatarum ad diametros coniugas æquales quadrata sunt æqualia rectangulis ex diametri portionibus.

SIt diameter coniugata in fig. 1. BC ęqualis alteri AD. Dico *quadratum applicatæ* GN *esse æquale* rectangulo BN, & NC.

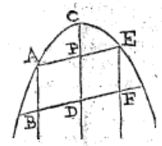
Probatur BL, & LC rectangulum, seu quadratum æquatur quadrato applicatæ LA, quę est dimidium alterius diametri, sed vt rectangulum BL, & LC ad rectangulum BN, & NC ex 6. huius, ita est quadratum LA ad quadratum GN; & ideo *permutando,* vt rectangulum BL, & LC ad quadratum LA, sic BN, & NC rectangulum ad quadratum GN, sed rectangulum BL, LC, vt dixi æquatur quadrato LA. Ergo etiam rectangulum BN, & NC æquabitur quadrato GN ex 12. lib. 5. elem.

PROB. VI. PROPOS. XXXVI.

* *Data diametro coniugata alteri in Parabola applicatas ponere, & à dato puncto in ea diametrum ducere.*

* SIt data diameter aliqua coniungata, vt DC, cui applicatas oporteat ponere: Ducatur ipsi CD parallela diameter AB, & altera æquidistãs EF, & in puncto E, quo secat Parabolam ab A ducatur AE dico esse applicatam diametro C.

Patet quia ob æquidistantiam diametrorũ AB, & EF à CD erunt æquales AP, & PE, vt patet. Sit deinde assignatum pũctũ A, à quo oporteat diametrum ducere; ducta ab eo puncto quauis AE, & ei parallela BF, diuidantur bifariam in D, & P, & ducatur diameter DC per P, D, cui ponatur æquidistans AB, quę ex prop. 27. huius diameter erit.



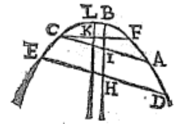
PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Diametrum coniugatam in Parabola, & axem inuenire.

DEtur Parabola ABC, & duæ parallelæ quæcumque ducantur AC, & DE; diuidanturque per medium, & ducatur HIB, & hæc erit diameter quæcumque ex defin. II. h.

Deinde huic BH perpendicularis ducatur FC à puncto C, diuidaturq; bifariam in K, & LK erit axis.

Nam quod sit diameter patet, eo quòd sit parallela diametro BI, quod autem sit axis constat; quia applicatæ FC, vtpote bifariam diuisæ incidit ad angulos rectos, qood sit æquidistans ipsi BI.



EXPENSIO VIII.

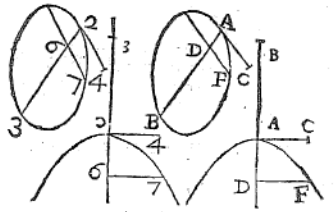
De sectionum æqualitate.

ANteqnam perueniamus ad sectionum descriptiones explicandas visnm est tractationem generalem, quæ omnibus sectionibus conuenit expedire, & simul quoque eas comparare, vt sciamus, quæ descriptio alteri deseruire possit, & quæ non possit.

THEOR. I. PROPOS. XXXVIII.

Si binæ Hyperbolæ, seu Ellipses, æqualet habeant Parametros axibus transuersis æqualibus applicatas, æquales erunt inuicem.

SInt binæ Hyperbolæ, vel binæ Ellipses IA, & 27, quarum æquales sint diametri transuersæ BA, & 23, & parametri eundem angulum cum diametro facientes, & æquales inuicem CA, & 24. Dico Hyperbolas, vel Ellipses esse inuicem ęquales.



Probatur. Nam sumantur æquales diametrorum portiones ad libitum, vt DB, & 3, 6, ex quibus ducantur applicatæ FD, & 6, 7. demonstrabitur enim has futuras ęquales, & pari ratione si alię; & alię portiones sumantur diametrorum, à quibus applicatę ducantur, semper ostendetur eas esse tum in vna, tum in altera æquales, ergo sectiones ipsæ ęquales erunt, cum superpositæ, quod vult definitio 15. h. vt conuenirent applicatæ applicatis, ita, & sectiones sectionibus.

Ostenditur verò assumptum, nempe FD, & 6.7. futuras æquales. Nam ex 8. h. Cor. 2. vt est BA transuersa diameter ad AC parametrum, ita est DF quadratũ ad rectangulum AD, DB. Item in alia sectione, vt est 2 3 trãsuersa diameter ad 2 4 parametrũ, ita est quadratũ applicatæ 6 7 ad rectãgulũ ex 6 2, & 3 6 effectum; sed vt est AB ad CA, ita est 2 3 ad 2 4 ob earũ æqualitatẽ ex Thesi. Ergo, vt est rectangulum AD, & DB ad rectangulum 2 6, & 6 3 ita est quadratum DF ad quadratum 6 7: sed rectangula sunt æqualia ob æqualia latera AD ad 6 2, & BD ad 6 3 ex Thesi ob ęquales axes transuersas. Ergo, & quadrata erunt ęqualia ex FD, & 6 7: quare, & latera eorum DF, & 6 7 erunt æqualia.

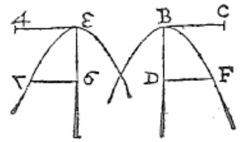
THEOR. II. PROPOS. XXXIX.

Si sint binæ parabolæ, quæ parametros æquales habeant, & in æqualibus angulis ad diametros applicatas Parabolæ erunt inuicem æquales.

SInt Parabolę BF, & 3 7. Dico, quod si parametri BC, & 34 sint æquales, & in ęquali angulo applicatæ, Parabolas futuras ęquales.

Sumantur ęquales diametrorum portiones ad libitum BD, & 3 6, à quibus applicatę ducantur DF, & 6 7, probabitur de istis, sicut, & de omnibus alijs, quod sint inuicem ęquales. Vnde necesse erit, quod linea parabolica per eadem puncta

cta in vtraque transeat. Ex Theor. I. exp. 2. constat quadratum FD, esse equale rectangulo diametro intercepta DB, & parametro contento.



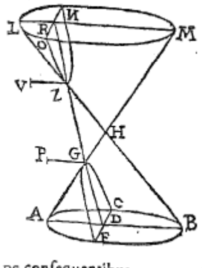
Rectangula autem, tum vnius, tum alterius parabolę sunt equalia ob equalem parametrum BC, & 3 4, & æqualem interceptam BD, & 3 6 ex constructione. Ergo, & quadrata equalia; nempe quadratum ex FD quadrato ex 6 7; quare, & ipsorum latera erunt equalia FD, & 6 7, & hinc Parabolę ipsę erunt equales, cum super positę, vt patet. vt conuenirent applicatę applicatis, ita, & parabolę parabolis. que per extrema applicatarum ducerentur, vt vult def. 15. h.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Hyperbolicæ sectiones, quæ fiunt in duobus conis ad verticem, quorum bases parallelæ, ab eodem plano, habent æqualem transuersam diametrum, & æquidistantem, & eandem parametrum.

SIt conus LHM positus ad verticem alteri AHB, transeatque per vtrosque idem planum ONFC, quod faciat in eo sectiones Hyperbolicas OZN, & FGC, sintque conorum bases inuicem parallelę; nempe LNMO, & ACBF, dico has Hyperbolas habere eandem transuersam diametrum CZ, & equalem parametrum, & equidistantem alteri parametro, & inuicem sectiones esse equales.

Probatur. Nam triangula AGD, & GMR sunt equiangula, cum sint ad verticem, & inter parallela LM, & AB sicut, & triangula DZB, & LZR. Vnde obtinebunt latera proportionalia, & propter hoc eam proportionem, quam dicet BD ad DZ, eandem dicent LR ad RZ, & in alijs triangulis BMG, & AGD eam proportionem, quā dicit AD ad DG eādem quoq; dicet MR ad RG. Quare ex eis poteris componere rectangulum accipiendo duas antecedentes pro vno parallelogrammo, & duas sequentes pro alio, vt ex propos. 22. lib. 6. Eucl. colligitur; Igitur ex BD, & AD antecedētibus componatur rectangulum dicet eam proportionem ad rectangulum cōpositum ex DZ, & DG consequentibus, quam rectangulum compositum ex MR, & RL antecedentibus ad rectangulum ex consequentibus RZ, & RG quemadmodum hic vides.



Crus	BD	ad	DZ	est vt	AD	ad	DG
Sic	RL	ad	RZ	vt	RM	ad	GR
Ergo, vt	compositum			ad compositum.			
	BD	&	AD		DZ	&	DG
Sic	RL,	&	RM	erit ad	RZ,	&	GR

Progr. 2. Sed rectangulum ex AD, DB est æquale quadrato ex applicata FD, & rectangulum ex MR, & RL quadrato applicatę RO: Ergo quadratum RO habet eam proportionem ipsam ad rectangulum ex GR, & RZ, quam quadratum FD habet ad rectangulum ex DZ, & DG.

Progr. 3. Sed horum quadratorum ad hęc rectangula proportio est illa, quā habet ad diametrū transuersam ZG parameter PG, ergo erit eadem proportio prorsus parametri VZ ad transuersam diametrum GZ, ac ad eandem diametrum GZ parametri PG, siquidem huius parametri PG est ex 8. h. Cor. 2. eadē quam habet quadratum FD ad rectāgulum ZD, & DG, quæ probata est eadem cum illa, quam possidet quadratum OR ad rectangulum GR, & RZ, quę est rursus ex prop. 8. h. Cor. 2. eadem, quam habet parameter VZ ad diametrum transuersam ZG.

Cum itaq; eidē diametro trāsuersę ZG eandē dicant proportionem parameter, PG, & VZ ex 7. lib. 5. Eucl. erunt equales parametri. Paralleli quoque sunt ob parallelas OR, & FD; cui parametri equidistant; siquidem sunt parallelę; quia sunt in basibus parallelis LNMO, & ACBF; Et eis parametri equidistant, quod sint contiguę diametri, vt habetur ex prop. 8. huius.

Probatur autem, quod vna sectio alteri sit eadem ex prec. quia habent parametros equales in equalibus angulis, vtpote perpendiculares diametro RD, & diametrum transuersam eandem.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc oppositarum Hyperbolarum idem esse commune centrum, & communes omnes transuersas diametros, axem quoque communem, communesque vmbelicos, quia erit ad axem transuersam factum rectangulum, (vt docuimus prop. 22. h.) equale quartę parti rectangulo sub axe transuersa, & parametro conclusi, tum vnius, tum alterius sectionis.

EXPENSIO IX.

De parallelis ad diametrum sectionis à vertice coni ductis.

PArabola diametro nulla potest esse parallela ducta à vertice coni, quia incidit in ipsam superficiem coni. Vnde cum non secet basim, nec rectangulum à segmentis diametri basis factum eius quadrato comparari potest.

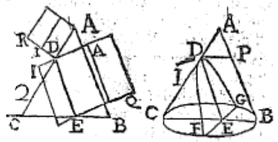
Quarè portione cruris trianguli per axem, & diametro parabolico rectangulum constitutum, rectangulo segmentorum, quę diameter parabolicus facit in diametro basis trianguli per axem, comparabimus.

THEOR. I. PROPOS. XLI.

Rectangulum ex basis portionibus est ad rectangulum ex diametro, et intercepta inter verticē coni, & verticē sectionis trianguli per axem, vt Parameter ad eā interceptam.

SIt Conus BAC idem in vtraque figura, in quo parabola GDF, cuius diameter ED, & applicata EF, intercepta portio cruris trianguli per axem AD, & parameter DI. Dico, *quòd rectangulum ex* EB, *&* EC *est ad rectangulum ex* ED, *&* DA, *vt* DI *ad* DA.

Quadrato ex FE applicatæ, ideo rectangulo BE, & EC ex 5. huius est æquale rectangulum ex ED, & DI, & ideo ex prop. 22. El. lib. 6. Cor. quadratum DQ ex ED prima erit ad quadratum ex EF secunda, vt ED prima ad tertiam proportionalem DI.



Sed rectangulum ex ED, & AD dicit eam proportionem ad rectangulum ex AD, & DI, quam ED ad DI ob eandem altitudinem AD. Ergo quadratum DQ ex DE dicit eam proportionē ad quadratum EF, vel rectangulum ei æquale BE, & EC; quam ADE rectangulum ad IDA rectangulum, quod sint, vt ED ad DI ex 16. lib. 5. Ergo *permutando* quadratum ex DE erit ad ADE rectangulum eiusdem basis DE, vt rectangulum BE, EC ad rectangulum ex DA, & DI.

Verùm, vt quadratum ex ED ad rectangulum ex AD, & DE, ita est idem rectangulum ex AD, & DE ad quadratum AR ex DA ob eandem altitudinem ED, & AD.

Rectangulum itaque ex BE, & EC erit ad rectangulum DA, & DI ex 16. lib. 5. vt ADDE rectangulum ad AR quadratū ex AD, & *permutando* Rectāgulū ex BE, & EC erit ad rectangulum AD, & DE, vt AD, & DI rectangulum ad DA quadratum, idest ob eandem altitudinem, vt ID ad AD.

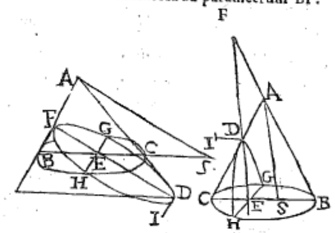
COROLLARIVM.

COlligitur esse quoque proportionem BC quadrati ad CA, & BA rectangulum, vt DI ad DA. Quoniam rectanguli BE, & EC proportio ad rectangulum DA, & DE est composita ex proportione BE, idest DP ad DA, eademque ob triangulorum similitudinem ex 4. lib. 6. CB ad CA, & ex proportione EC ad DE, idest CB ad BA; quare rursus componendo rectangulum CB, & CB, idest quadratum CB erit ad rectangulum CA, BA, vt ID ad DA.

THEOR. II. PROPOS. XLII.

Si Conus per axem sectus sit, & ei triangulari sectioni sit normalis Ellipsis, vel Hyperbola, quarum diametro acta sit parallela à vertice coni, quadratum huius parallelæ est ad rectangulū ex interceptis basis partibus factū, vt trāsuersæ diametri portio intercepta ad parametrū contiguū.

SIt Conus ABC sectus triangulo ABC per axem, sitque sectio Hyperbolica, vel Elliptica GDH normalis ipsi plano triangulari, cuius diametro FD ducta sit parallela AS. Dico, quod si fiat quadratum ex ipsa AS habebit eam proportionem ad rectangulum ex diametri baseos portionibus interceptis SC, & SB in hyperbola BC, & SC in Ellipsi, vt FD diameter transuersa ad parametrum DI.



Præassumpt. Aduertendum est Quadratum applicatæ EG ex 35. lib. 5. Elem. esse æquale quadrangulo ex segmentis diametri conici BE, & EC; Et transuersam diametrum FD esse ad Parametrum DI sicut rectangulum FE, ED ad quadratū EH applicatę ex prop. 8. h. Cor. 2. Tandem considerandę sunt lineæ in sectionibus, quæ proportionem dicunt. Nam vt FE ad EB ita AS ad SB ob parallelas AS, & FE in triangulo BFE, & BAS ex 4. lib. 6. Deinde vt ED ad EC, ita AS ad SC ob parallelas AS, & DE in triangulis ASC, & CED, in Ellipsi ad verticem.

Quare poterimus conficere duo rectangula ex istis proportionibus composita, vt vides.

FE	vt	AS	&	DE,	vt	AS
ad		ad		ad		ad
EB		SB		EC		CS
Ergo compositum erit, vt compositum.						
FE	&	DE		AS,	&	AS
	ad				ad	
EB	&	EC		SB,	&	CS

Assumendo simul fundamenta, quæ non referuntur FE, & DE, & comparando ad suos terminos simul, quæ proportio erit eadem, quæ AS ad AS suos terminos collata quo supposito.

Probatur. Rectangulum ex EF, & ED est ad rectangulum EB, & EC, vt quadratum ex AS ad rectangulum ex BS, & SC. Sed rectangulum FE, & ED ad quadratum HE, hoc est ad rectangulum equale ex prop. 35. lib. 3. Elem. CE, EB refertur, vt diameter transuersa ad parametrum FD ex Cor. prop. 8. huius. Ergo quadratum AS erit ad rectangulum BS, & SC, vt diameter transuersa FD ad parametrum ID.

EXPENSIO X.

De Asymptoto Hyperbolarum proprietate.

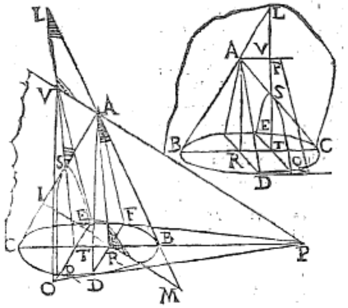
TRiangulum quoddam ambit Hyperbolam, cuius latera singularem ipsi analogiam possident, estque formatum à duorum planorum conum tangentium intersectione, quam cum Hyperbolæ plano extra conum extenso efficiunt, nec huius trianguli inutilis contemplatio, vt ea, quę descriptioni hyperbolarum optimè deseruit.

THEOR. I. PROP. XLIII.

Sint duo plana, alterum, quod conum tangat, alterum, quod illum secet in contactu, & per verticem etiam transeat, & huic secanti Hyperbola sit æquidistans diameter transuersa Hyperbolica à tangente plano in centro secabitur.

DVos casus hęc propositio habet, nam planum contingens conum potest secare planum per verticem secando rectangulè, vel non rectangulè.

Sit ergo primus casus, in quo planum tangens sit ADPQ, quod tangat conum BAC secundùm lineam AD; cui occurrat, secetque aliud planum ductum per verticem A, quod sit ADR, in ipsa linea contactus AD, huic plano FAD ęquidistet Hyperbola EQS. Dico, *quod eius diameter transuersa* TL *secabitur ab hoc plano tangente* DAPQ *in centro* V.



Probatur. Nam primo, quòd secet clarum est. Siquidem, si planum BLC interminatum per vtrosque axes AR coni, & TVL Hyperbolæ rectangulum ad eorum plana ducatur. Hoc vtique secabitur à plano tangente DAPQ. Ergo etiam secabit diametrum TVL in illo plano descriptum: Quod autem à plano tangente DAPQ secetur planum ductum per axes BLC patet; quia planum contingens ADPQ occurrit vertici coni in A, & eius axi, ergò necessariò secabit planum per eundem verticem ductum BLC; in quo est vertex etiam, & axis RA.

Quod verò punctum V, sit centrum in quo secat diametrum Hyperbolicum planum contingens ADQP.

Probatur. Nam cum planum ADQP sit rectangulè ad planum per verticem ductum RAD, ex hypothesi, cui etiam est rectangulum planum interminatum ductum per verticem; proptereaque plana hæc perpendicularia plano RAD; quare, & eorum communis sectio AP, cui etiam plano RAD perpendiculare est planum coni basis BFCD. Ergo ex propos. 16. tract. 22. & eius communis sectio RC cum interminato BLC est perpendicularis; Quare ex prop. 7. tract. 22. AP, & RC, cum sint eidem plano perpendiculares erunt parallelæ. Cum itaque AL crus incidat in parallelas AR, & LT angulus L internus angulo BAR externo erit æqualis ex 30. lib. 1. Eucl. Quare, cum sint rectangula BRA, & AVL triangula erunt quoque similia. Nam reliquus angulus reliquo erit æqualis, ita dicendum de triangulo AVS, cuius angulus ASV alterno SAR est ęqualis, & hinc est similis triãgulo RAC; Radius autem BR ęquatur RC ex cor. pr. 11. h.

Probatur itaque assumptum ostendendo SV, & VL eidem AV eandem dicere proportionem, & ideo ex 7. lib. 5. Eucl. esse inuicem ęquales.

Nam, vt BR ad RA, ita est ob similitudinem triangulorum AV ad VL. Item quam proportionẽ dicit BR, idest RC ad RA eandẽ dicit AV ad VS. Ergo LV, & SV ipsis AV eandem dicit proportionẽ, quam BR ad RA, & propter hoc erunt æquales; quaderè V erit centrum Hyperboles.

Sit iam secundus casus, In quo planum PADOV tangens conum secundùm lineam AD non se secat cum plano FAD rectangulè; dico *adhuc* V *centrum esse Hyperboles*.

Probatur. Nam tracta MI parallela PV, iam clarum est, quòd secabitur diameter Hyperbolicus à plano PVC, quod transit per AR coni, & axẽ TVL hyperboles, quod verò sesecet cum plano PVC patet, quia in P, & A cum illo concurrit.

Quod verò V sit centrum demonstratur, quòd sint æquales SV, & VL, eo quia eidem AV eandem dicant proportionem.

Siquidem MR, & RI sunt æquales, vt probabitur: Sed ob parallelas AR, & LT in triangulo LMT ita se habet MR ad AR, vt AV ad VL ob similitudinem triangulorum LAV, & MRA, vt infra ostendam. Rursus eadem VA se habet ad VS, vt RI, idest æqualis MR, vt ostendam, ad RA ob similia triangula AVS, & AIR. Vnde cum eadem VA eisdem SV, & LV eandem dicat proportionem RM ad RA ipsę SV, & LV erunt inuicem æquales.

Sunt autem similia triangula ARI, & SAV, quòd angulus S internus niger sit æqualis angulo SAR externo inter parallelas RA, LT, & angulus SVA alterno VAL sit æqualis, idest angulo ARI, & hinc reliquus reliquo. Sic, & triangula LAV, & MRA sunt similia; quòd angulus niger L sit æqualis angulo nigro A ob parallelas RA, & LT, & angulus V, & R nigri sunt æquales ob parallelas MI, & PV.

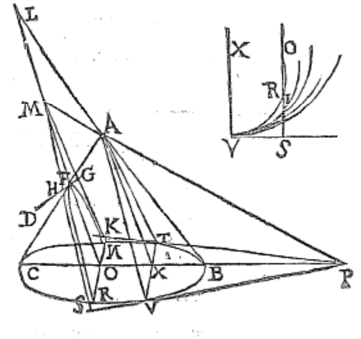
Probatur modò MR, & RI sint in linea MI æquales portiones. Nam ex propos. 23. Tract. 15. ita se habet CR ad BR, vt CP ad BP. Quamobrem etiam permutando, vt CR ad CP, ita erit BR ad BP; Sed in triangulo PAC, vt CR ad CP, ita RI ad PA ob parallelas PA, & RI, vt ex Coroll. propos. 4. lib. 6. Eucl. & vt BR ad BP; ita RM ad PA, cò quòd triangula sint ad verticem inter parallelas PA, & MR; Ergo eidem PA lineæ RI, & MR eandem dicunt proportionem, quam CR ad CB, vel quæ eadem BR ad PB: quare sunt æquales.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLIV.

Si planum aliquod contingat conum, & illud duo plana secent, alterum triangulare ductum per verticem coni in ipso contactu secans planum contingens, aliud Hyperbolicum æquidistans à triangulo; sectio hæc contingentis, & Hyperbolici plani accedet semper ad Hyperbolem, sed nunquam eam continget.

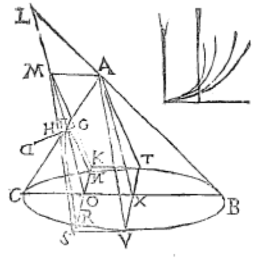
SIt ABC conus, & planum contingens AVMS in in linea VA, siue normaliter ad XV, siue non, quod secetur à duobus planis; primum ductum sit per verticem, vt TAV secans contingens illud VAMS in linea contactus AV; aliud æquidistans KMS, in quo Hyperbola NFR. Dico, quòd sectio huius plani Hyperbolici cum plano contingente AVMS facit sectionem MS, cui Hyperboles crus FR semper accedet; sed numquam tanget, quantumlibet producantur.



* Probatur primò, quòd nunquam tangat; sunt enim plana secantia triangulare TAV, & Hyperbolicum KMS æquidistantia: Ergo VA, & MS sectiones ipsorum in plano contingente AVMS æquidistabunt, quare nunquam conuenient: Sed planum contingens VAMS tangit in linea A V solummodo; ergo numquam tanget MS superficiem coni quantumlibet producantur, & planum contingens, & conus. Ergo neque tanget Hyperbolã RF, quæ in superficie coni reperitur, & idem dicendum de plano ad alteram partem contingente TAMK, vt patet.

* Quòd verò semper accedat ostenditur. Quia quælibet portio circuli inter duas parallelas intercepta, nempe VX ductam ad contactum V, & alteram parallelam OS in altera figura semper magis accedit ad contingentem VS, quò maior est circulus, & portiones SR parallelæ OS interceptę inter peripheriam, & tangentem sunt semper minores, vt est minor IS, quam RS.

Sed quò magis conus producitur, eò magis circulus basis fit maior, ergo minor erit distantia inter contingẽtem VS, & peripheriã VR illius inter plana parallela TAV, & KMS interceptã, qualis est RS; distantia enim sectionum TV, & KR semper



erit eadem productis planis TAV, & KMS parallelis sed circuli bases coni semper maiores; vnde, & distantia RS semper minor.

Dicentur verò sectio SM, & MK Asymptoti.

THEOR. III. PROPOS. XLV.

Quæ à vertice sectionis ad vnam, seu aliam Asymptotum recta ducetur linea parallela ordinatim applicatæ, hæc poterit describere quadratum æquale quartæ parti figuræ contentæ à diametro transuersa, & parametro.

SInt eadem fig. quę priùs, & ab F vertice Hyperboles ducatur FH, vsque ad Asymptotum MS, vel FG vsq; ad Asymptotum MK, parallela sectioni KS basis BKRC cum plano KMS. Sitque sectionis parameter. seu coefficiens latus FD.

Dico rectã FG, seu FH constituere quadratum æquale quartæ parti figuræ, quam constituit LF diameter transuersa, & paramater FD.

Progress. 1. Probatur. Quadratum constitutum ex MF est quarta pars quadrati constituti ex LF, cum sit latus eius FM, dimidium lateris LF. Ergo etiam quadratum ex FH quarta pars rectanguli ex LF diametro, transuersa, & FD Parametro.

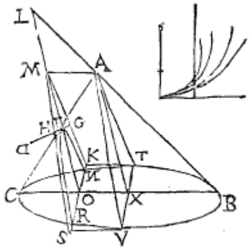
Progr. 2. Probatur conseq. Nam sicut se habet quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD ita se gerit quadratum M F, vt probabitur in 3. progress. ad FH quadratum, & sic se debet gerere quarta pars quadrati FL ad quartam partem rectãguli ex LF, & FD ex 18. lib. 5. Elem. Sed Quadra- ex FM est quarta pars quadrati ex FL descripti, vt dictum est. Ergo etiam quadratum ex FH erit quarta pars rectanguli ex LF diametro transuersa, & parametro FD descripti.

Progress. 3. Remanet itaque probandum quadratum MF esse ad quadratum HF, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD. Nam cum sint super eamdem basim FL, erunt vnum ad aliud, vt altitudines, nempe altitudo quadrati, quæ est LF ad altitudinem rectanguli, quæ est FD, nempe, vt diameter trãsuersa ad parametrum: Sed ex prop. 42. huius, vt est diameter transuersa ad parametrum, ita est quadratum ex AX ad rectangulum ex CX, & XB, vel quod ei æquale ex 35. lib. 3. Eucl. ad quadratum ex XV. Sed, vt quadratum AX ad quadratum XV, tale quoque ob similitudinem triangulorum XAV, & OMS, & MFH reperitur MO quadratum ad quadratum OS, & quadratum FM ad quadratũ FH. Ergo ex 16. l. 5. el. erit eadem proportio quadrati FL ad rectangulum LF, & FD diametri transuersæ, ad parametrum primo

 propo-

propoſita, ac quadrati FM ad quadratum FH.

Quod verò triangula ſint æquiangula patet, quia ex parallelis conſiciuntur. Nam AX, & MO exiſtentes in eodem plano ſunt parallelæ, ſic, & XV, & OR, ſicut, & VA, & SM; quia efficiuntur à planis parallelis ATV, & MXS ſecantibus planum BAC ſecans per axem, & planum BCTV baſim Coni, & planum AVMS contingens, vt patet pr.14. Tr.22.



COROLLARIVM.

Fllicitur quadratum MF dimidiæ tranſuerſæ diametri ad quadratum FH eſſe, vt diameter LF ad parametrum FD; quia ex prog.3. eſt, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF diametro, & FD parametro. Hoc autem quadratum ex LF eſt ad rectangulum ex LF, & FD ob eandem altitudinem FL, vt diameter ad parametrum, vnde etiam talis erit proportio quadrati MF ad quadratum FH.

THEOR. VI. PROPOS. XLVI.

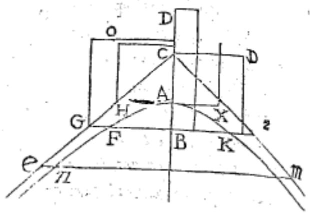
Si in Hyperbola applicata producatur vſq; ad Aſymptotum hinc, & inde, erit rectangulum factum ex vna portione inter figuram, & Aſymptotum intercepta, & ex tota reliqua vſque ad Aſymptotum æquale quartæ parti figuræ à tranſuerſa Diametro, & Parametro comprehenſæ.

SIt Hyperbola FAX, cuius aſymptoti CG, CZ, centrum C, cuius contingens verticem vſque ad Aſymptotum AH, ſitque applicata producta extra ſectionem vſque ad Aſymptotum in Z, & G. Dico, quòd ſi fiat rectangulum ex interclusa inter ſectionem, & Aſymptotum FG pro vno latere, & ex reliqua ZF pro alio; hoc erit æquale quartæ parti figuræ, quæ ſub tranſuerſa diametro AD, & parametro comprehendatur.

Probatur autem. Quia quadratum ex AH, vt ex præcedenti, eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ ex parametro, & diametro tranſuerſa comprehenditur. Sed huic quadrato eſt æquale rectangulum ex ZF, & FG, ergo hoc rectangulum eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ à diametro tranſuerſa, & parametro concluditur.

Sunt autem quadratum AH, & rectangulum ZF, & FG æqualia, quod eidem AC quadrato eandem dicant proportionem.

Nam ex prop.6.Cor.2.h.vt diameter tranſuerſa ad parametrum proportione reſpondet, ſic rectangulum ex DB, & BA ad quadratum ex BF proportionem dicit, & eandem proportionem dicit quoque ex præced Coroll. quadratum CA ad quadratum AH, & ex eadem prop. eius progr.3. quadratum CB ad quadratum BG.



Debes autem antequam progrediamur aduertere, rectangulum DB, & BA eſſe æquale BXD gnomoni, & rectangulum ZF, & FG gnomoni, quid remaneret ablato quadrato FB à quadrato GB, vt ex ſe patet. Aufer ergo duo proportionalia in eadem proportione nimirũ rectãgulũ DB, & BA à quadrato BCD, aut gnomon BXD æquale illi rectangulo, & remanebit quadratum CX ex CA. Aufer quoque quadratum BF à quadrato BG, & remanebit gnomon æqualis rectangulo ex ZF, & FG, quæ etiam vtpote reſidua rerum dicentium eandem proportionem, ac ſua tota, in quibus erant; erunt ex 22. prop.lib.5.Elem. in eadem proportione. Eritque ex AC quadratum reſiduum in ea proportione ad rectangulum ZF, FG, quam totum BC quadratum ad totum quadratum BG, quę eſt illa ipſa, quam habebat quadratum AC ad AH quadratum. Quamobrem CA quadratũ ad quadratum AH eandem progulũportionẽ dicit, quã idẽ CA quadratũ ad rectã. ZF, & FG, itaque erunt æqualia rectangulum ZF, & FG, & quadratum AH ex 7.lib.5. Elem. Vnde hoc rectangulum ZF, & FG quartæ parti figuræ, ex diametro tranſuerſa, & Parametro æquabitur, ſicut ex præc.prop. æquatur ei quadratum AH. Et idem probabitur de rectangulo GK, & KZ, cum militet eadem ratio, cùm æquentur KZ, & FG.

COROLLARIVM.

QVare colligas velim omnia rectangula ex ZF, & FG, & alijs parallelis, vt m n, & n e eſſe æqualia tum inter ſe, tum quadrato AH, vt patet, cùm ſingula ſint æqualia quadrato AH.

PROBL. I. PROPOS. XLVII.

Datæ cuiuſcumque Hyperbolæ Aſymptotos inuenire dato centro, & Parametro contigua.

*REctangulo DV Parametro, & DA tranſuerſa diametro reperiatur quadratum ęquale ex propoſ.14. lib.2. Eucl. & huius quadrati dimidium latus à vertice figuræ A ſuper parametrum menſuratum dabit punctum AH, per quod à centro C tranſibit Aſymptotus CG, & ſic producta in aliam partem, quę ſit etiam æqualis ipſi AH dabit aliud punctum, per quod à centro C Aſymptotus tranſibit CZ.

Probatur autem ex prop.45. Quia AH lineæ per quam à centro tranſit Aſymptotus ſubtendit quadratum æquale parti quartę rectanguli à parametro, & diametro tranſuerſa comprehenſi. Sed hoc

hoc quadratum ex AH, vel ei æquali ad alteram partem, vtpote ex dimidio eius latere eſt quarta pars quadrati, quod fecimus, ęquale dicto ex diametro tranſuerſa, & parametro rectangulo; Ergo etiam huius rectanguli quarta pars erit, & conſequenter erit linea, per cuius extremum à vertice ſectionis à centro tranſibit Aſymptotus, quod facere oportebat.

EXPENSIO VII.

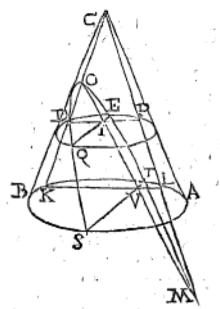
De lineis in ſectionibus, vtcumque ductis applicatas, ſeu parallelas ſecantibus.

NOs hanc doctrinam faciliter trademus, cùm alij, non niſi poſt multas præuias propoſitiones, à quibus dependet, tradant, & non de omnibus ſimul, ſed de ſingulis, vt videre eſt apud Ambroſium Vincentium virum in Mathematicis admirabilem, in quo quædam etiam deſumemus in ſequentibus.

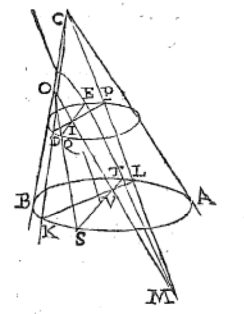
THEOR. I. PROP. XLVIII.

Si in ſectione Conica qualibet, quæcumq; ducta ſecet duas parallelas in ipſa ſectione, rectangulum ex ſegmentis illius interceptis ab vna erit ad rectangulum ex interceptis ab alia ſegmentis, vt rectangulum ex ſegmentis vnius ad rectangulum ex ſegmentis alterius parallelarum.

*SIt conus ABC, & triangulum LKC à vertice deſcendens; at non per axem, & in ſectione TOS faciat ſectionem MO, ſintque ſectiones effectę à circulis parallelis in illa parallelæ EQ, & TS. Dico rectangulum MV, VO lineę OM ſecantis conicam figuram in O, & M eſſe ad rectangulum MI, IO, vt rectangulum TV, VS ad rectangulum EI, IQ parallelarum.

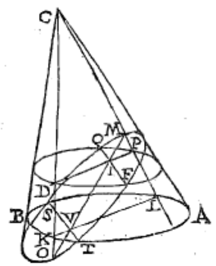


Probatur. Rectangulum LV, & VK ex propoſ. 35. lib.3.Eucl. eſt æquale rectangulo TV, & VS ob eundem circulum, in quo ſe interſecãt; & eadem ratione PI, & ID æquatur rectangulo EI, & IQ: Sed vt PI ad LV; ſic eſt IM ad VM, ob paralleliſmum in triangulo eodem IMP, & vt ID ad VK, ſic OI ad VO ob parallelas in triangulo eodẽ KOV, ergo ſi cõponãtur proportiones, & fiant rectangula, ita erit rectangulum ex PI, & ID ad rectangulum LV, & VK, vt IM, & OI rectangulum ad rectangulum ex MV, & VO, vt hic vides.



PI vt IM & ID vt OI
ad ad ad ad
LV MV VK VO
Ergo compoſitum, vt compoſitum.
PI & ID IM & OI
Erit ad compoſitum ad compoſitum.
LV & VK MV & VO

Quare etiam rectangulum EI, & IQ erit ad rectangulum TV, & VS, vt rectangulum MI, & OI ad rectangulum MV, & VO, quod erat probandum. Quod verò ſectio V.g. MTOS parabolę, & MO ſectio in ea, & latus trianguli MC conueniant in M patet. Nam cum ſit planum TOS parabolę, cruri AC parallelum non erit parallelum cruri CM. Vnde conueniet, cum eo crure CM; ſed illud eſt in ſuperficie conj. Ergo conueniet cum eo in ſuperficie coni. Sed puncta plani parabolici in ſuperficie coni ſunt ipſa linea flexa parabola. Ergo ipſa in M incidet; ſed ſectio MO eſt in plano parabolę, & in plano triãguli, cũ ſit eorũ communis ſectio. Ergo ibi debebit eſſe vbi planum parabolæ cruris trianguli coniungũtur in M ſcilicet in ipſa flexa SOTM.



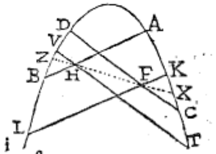
In Ellipſi patet; quia ſi ſecat latera trianguli CBA per axem; tantò magis, & reliquorum triangulorum minorum intra conum ductorum. In Hyperbola CM crus poteſt non conuenire cum ſectionis SOTM plano, ſed neque ſecabit Hyperbolam altero extremo M; quod requiritur in propoſ. Siquidem ſi ſectio OM conueniret cum Hyperbola etiam contra Theſim cum MC conueniret; quia totius trianguli KCL, cuius ſectio eſt, & plani Hyperbolici, tantùm crura, vtpote ſectiones ſuperficiei conicę in ſuperficie conica ſunt. Nota verò, quod ſectio OM poteſt etiam ſecare axem, vt dedimus exemplum in Hyperbola.

THEOR. II. PROPOS. XLIX.

Si duæ parallelæ duas alias parallelas in qualibet conica sectione intersecent erunt rectangula segmentorum proportionalia.

SIt Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis TADL parallelę in ea KL, & AB alias parallelas intersecantes TV, & CD, & per puncta intersectionum F, & H ducatur XZ. Dico quod rectangulum AH, & HB erit ad rectangulum ex KF, & FL, vt rectangulum TH, & VH ad rectangulum CF, & FD.

Probatur rectangulum AH, & HB ad rectangulum KF, & FL erit ex preced. vt rectangulum HZ, & HX ad rectangulũ ZF, & FX. Verùm vt ZH, & XH rectangulum ad ZF, & FX rectangulum



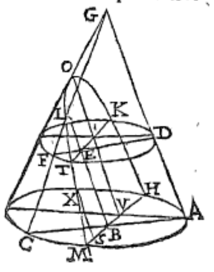
ta est quoque ex prec. TH HV rectangulum ad CF, & FD rectãgulũ, ergo cum sint eædẽ vni tertię proportioni istę proportiones rectanguli, nimirũ XH, & HZ ad XF, & FZ rectangulum, erit quoque AH, & BH rectangulum ad KF, & FL rectangulum, vt TH, & VH rectanguli ad CF, & FD rectangulum, quod erat probandum.

THEOR. III. PROPOS. L.

Si in parabolâ, quælibet parallelæ secent diametros, erit intercepta diameter ad interceptã diametrũ vt ex segmẽtis vnius parallelæ ad rectãgulũ ex aliús segmentis.

*EXponatur conus. In quo parabola HOLM, & triangulum, sed non per axem AGC secet eam in BL, & circulos basi parallelos in DF, & AC qui etiam circuli secent parabolam in KT, & HM, quæ sectiones erunt parallelæ, sicut etiam sectio BL lateri AG ex Coroll. 3. propos. 4. tract. 22. eo, quia totum planum parabolicum ei AG sit parallelum, & ideo etiam erit parallela diametro principali VO, ex propos. 9. eiusdem tract. & ideo LB erit diameter. Dico itaque KE, & ET rectangulum esse ad HB, & BM rectangulũ, vt EL ad LB.

Probatur. Nam rectangulum DE, & EF ad rectangulum AB. & BC ob æquales, vtpote inter parallelas, sunt ad inuicem, vt altitudines EF ad BC; sed EF, & BC ita est EL ad LB. Ergo rectangulum DE, & EF ad rectangulum AB, & BC est, vt LE ad LB: & ideo vt rectangulum KE, ET ex 35. lib. 3. equale DE & EF rectangulo ad HB, & BM æquale rectangulo AB, & BC.



COROLLARIVM I.

HInc habes BL esse ad LE, vt VO ad OI eo, quòd sint, vt parallelę eędem AG ad DG ex 16. l. 5. El. & ideo MB, BH esse ad TE, EK, vt MV, VH ad TI, IK rectangula; quòd sint ex prec. vt LB ad LE, vel VO ad OI. Ideo vt LB, BE ad LE, BE, vel OV, VI ad OI, IV rectangula ob eandem altitudinem in eadem proportione, ac linearum. Vnde *permutando* MB, BH erit ad MV, HV, vt LB, BE ad OV, IV rectangula, s. vt LB ad OV, & sic alias proportiones potes permutare.

COROLLARIVM II.

HInc haurire licet ea rectangula esse æqualia ex segmentis à diametro aliquo factis, quibus ipsi diametri insistunt æquales, quoniam HS, & SM rectangulum erit ad KB, & ET rectangulum ad SX ad EL, sed hæ lineæ SX, EL sunt æquales ex Thesi, ergo etiam rectangula KET, & HSM.

EXPENSIO VII.

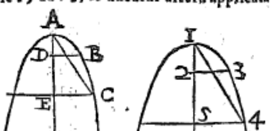
De similitudine Figurarum.

DEfinitio duarum figurarum similium ab Eutocio 3 æquiponderantium, & Apollonio Conici sexto allata est, quòd segmenta diametrorum inter verticem, & applicatas vnius ad applicatas suas, proportio sit, vt segmenta alterius ad suas applicatas, cui Mydorgius lib 4. con. eam conditionem addit, quam demonstrat omnino necessariam, quod applicatarum ad diametrum anguli sint ęquales in vtraque figura.

THEOR. I. PROPOS. LI.

Omnes parabolæ in quocũq; cono similes sunt.

SInt datæ parabolæ CBA, & 431, quæcumque, & data diameter in prima AE, applicatæque CE, & BD, repertoque in secunda diametro 15. fiat angulus 415 æqualis angulo CAB apud 1, & A, & ducatur 45 à puncto, in quo 41 Crus trianguli secat figuram iuxta eundem angulum, ac CE applicata facit cum diametro AE; Deinde fiat, vt AE ad AD sic 15 ad 12, & ducatur altera applicata 32.



Progr. 1. Probatur ex prop. 5. h. vt 12 ad 15, & ideo ex effectione, vt AD ad AE, ita quadratum 32 ad quadratum ex 45, & ideo, vt BD quadratum ad CE quadratum, & ideo ex 26. l. 6. El. erit etiam latus 32 ad latus 45, vt latus BD ad latus applicatæ CE.

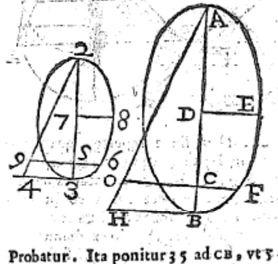
Progress. 2. Postea considerandum est ob duos angulos ex effectione æquales apud 1, & 5 ipsis E, & A triangula 145, & CAE esse ęquiangula ex Cor. prop. 17. lib. 1. Elem. Et ideo esse 45 ad 51, vt CE ad EA. Et vt 51 ad 21; Sic EA ad DA. Sed erat in 1. progr. 32 latus ad 45 latus, sic BD ad CE, & nunc vt 45 ad 51, sic CE ad EA, & vt 51 ad 21; sic EA ad DA. Ergo ex æquo, vt 32 ad 21; Sic BD ad DA; Et sic ostendetur de alijs, quæ possent trahi. Cum ergo sit 32 applicata ad segmentum diametri 12 in vna parabola interceptum, vt in

in altera applicata BD ad diametri interceptum segmentum DA, & idem argumentum sit de alijs angulique applicatarum sint æquales; Parabolæ erunt similes ex definitione 16. h.

THEOR. II. PROPOS. LII.

Si binæ Ellipses, seu Hyperbolæ, sint quarum vna, habeat segmenta intercepta inter verticem, & applicatas ad alterius segmenta, vt applicatæ sibi ad applicatas alterius in angulis æqualibus; illæ erunt figuræ similes.

*SIt figura 368. in qua sit segmentum 35 ad segmentum BC alterius, vt 56 applicata ad CF applicatam, & idem sit de alijs omnibus segmentis in angulis æqualibus ACF, & 256. Dico figuras esse similes.

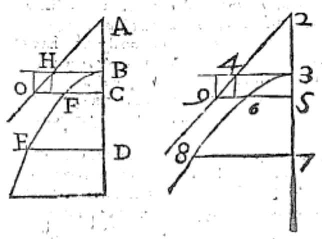


Probatur. Ita ponitur 35 ad CB, vt 56 ad CF. Ergo *permutando* erit quoque 35 ad 56, vt CB ad CF, vel *conuertendo* 56 ad 35, vt CF ad CB. Ergo cùm sint in angulis æqualibus, figuræ erunt similes ex def. 16. huius.

THEOR. III. PROP. LIII.

Hyperbolæ duæ, seu Ellipses, quarum diameter transuersa vnius ad contiguam parametrum sit, vt alterius intercepta diameter ad suam contiguam parametrum in angulis æqualibus, illæ figuræ erunt similes.

*SIt Hyperbola, seu Ellipsis 368, & DFE, & sit intercepta diameter 32 ad parametrum 34, vt AB intercepta alterius ad BH parametrum. Dico eas figuras esse similes.



Probatur. Fiat, vt 23 ad 35. Sic AB ad BC, & ducatur CO, & 59. Sicut etiam 29, & AO per extrema parametri; Triangula erunt ęquiangula ex 5. l. 6. cũ ponatur 23 ad 34, vt AB ad BH ex Thesi.

Quia itaque triangula sunt ęquiangula, erit 59 ad 34, vt CO ad BH, & vt 34 ad 32, sic BH ad BA, & vt 23 ad 35; sic ex effectione est BA ad BC Ergo ex æquo, vt 59 ad 35; sic est CO ad CB. Sed CO ad CB habet proportionem duplicatam CF ad CB, sicut etiam 59 ad 53 eius quę est 56 ad 53, quia ex propos. 8. huius BO rectangulum quadrato CF, & 39 rectangulum est æquale quadrato 56. Vnde ex 19. lib 6. sunt CO, & CF, & C B veluti etiam 59, 56, & 53 in continua proportione: Ergo erit 56 ad 53, vt CF ad CB vt tract. 16. propos. 2 & idem poterit ostendi de segmentis 37, & BD sicut de applicatis 78 & DE, & quibuscumq; alijs. Cum ergo sit 56 applicata ad interceptam diametri portionem 53, vt CF ad CB in æqualibus angulis C, & 5 cum applicatæ parallelæ sint parametris figuræ; ex defin. 16. similes erunt.

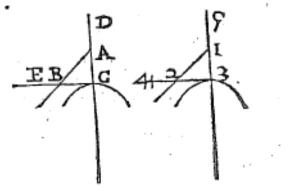
COROLLARIVM.

IDeò figuras eas esse similes iudicabis, cum rectangulum ex diametro intercepta & segmento V. g. 25, & 53 est ad quadratum applicatæ 56 vnius, vt rectangulum AC, & CB ad quadratum CF alterius. Quia enim est 25, & 53 rectangulum ad quadratum 56, vt diameter transuersa 32 ad parametrum 34, & rectangulum AC, & CB ad quadratum CF, vt AB ad BH erit diametri transuersæ 23 ad parametrum vnius 34, vt AB diameter transuersa ad BH parametrum alterius. Vnde figuræ similes erunt ex prop. prec.

THEOR. IV. PROPOS. LIV.

Si duæ hyperbolæ sint, quarum vna obtineat transuersam diametrum ad ductam à vertice ad Asymptotum, vt alterius diameter transuersa ad ductam similiter, illæ Hyperbolæ erunt similes.

SIt CA semidiameter transuersa in Hyperbola AB Asymptotus, & CE ducta à vertice. Sicut alterius 13 semidiameter 12 Asymptotus 32 ducta à vertice ad Asymptotum: Dico, quòd si sit 13 ad 32, vt CD ad CB eas Hyperbolas esse similes.



Probatur. Quadratum ex 32 ex propos. 45. h. æquatur rectangulo ex semidiametro 31, & ex dimidio parametri 34. Ergo cum ex Thesi ponatur 31 ad 32, vt AC ad CB erit etiam 31 semidiameter ad semiparametrum CE s. in duplicata ratione AC ad CB, vel 13 ad 32 ex Coroll, prop. 21. lib. 1.

lib.6. Elem. Quare, & tota diameter 35 ad totam parametrum suam eam habebit rationem, quam CD tota diameter ad parametrum suam CE ex prop.18. lib.5. Elem. quare ex præced. figuræ erunt similes.

COROLLARIVM I.

QVod si adsint duæ Hyperbolæ, quæ fiat in Asymptotis æquiangulis, & etiam 23, & CB sint applicatæ ad verticem in angulis æqualibus, tunc illæ Hyperbolæ erunt similes, quod ob æquiangula triangula, ita sit 31 ad 32, vt CA ad GB.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque eas figuras esse similes, quarum rectangula contenta sub parametro, & diametro transuersa sunt similia; quia etiam tunc erit diameter vnius ad suum parametrum, vt diameter transuersa alterius ad suum quoque parametrum ob similitudinem triangulorum sub ijs contentorum.

EXPENSIO XIII.

De descriptione vniuersali Sectionum.

EX principijs, proprietatibusque explicatis iam conuenit fructum excerpere, & descriptionem Sectionum, tum ad Specula Vstoria perpollienda, tum ad Parallelos Solis in Horologijs Solaribus describendos, tum etiam in motibus planetarũ per Ellipses explicandis deseruientẽ explicare; Secundùm itaque diuersa principia, quæ tradidimus, sic sunt diuersi modi Sectionum describendarum, & in hac Expensione modos docebimus vniuersales omnibus sectionibus deseruientes.

PROBL. I. PROPOS. LV.

Data basi sectionis alicuius, & diametro, & angulo ab illis facto sectionem describere per puncta.

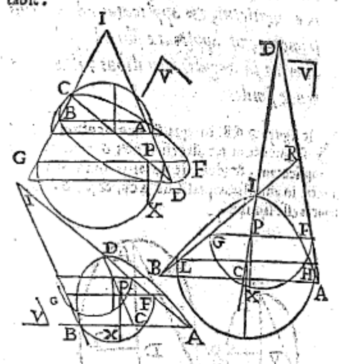
HOc prob. fundatur in secunda expensione de diametro.

Sit itaque primò data sectionis basis AB, quę erit etiam coni, nimirum applicata illa, quæ per centrum basis coni transit; ideoque cum transeat per centrum erit semidiameter, quòd verò pertingat ad sectionem erit applicata.

Hac AB itaque data, & diametro sectionis CD, & angulo V, quem facit applicata cum diametro, sic describetur quęlibet sectio.

Applicabitur diameter totus DC ipsi applicatæ, & basi PA secundùm angulum datum V, ad eius medietatem C, ita vt CA, & CB sint portiones ęquales; duceturque à puncto B, vel A, quæ pertingat ad verticẽ diametri D recta AD, & in parabola ab alio extremo B educetur diametro parallela BI. In hyperbola autem AB, quæ trãseat per verticẽ diametri intercepti I, & occurrat AD in E; in Ellipsi verò coniunges aliud extremum diametri C, & basis B, producesque quantùm placuerit.

Ductis deinde FG parallelis, & HL, & etiã pluribus ad exactiorẽ descriptionẽ inter FP, & PG reperies mediam proportionalem ex prop. 16. lib. 6. Eucl. qualis vna est PX; quas medias proportionales omnes applicabis diametro CP interceptæ à pũcto P secundùm angulum datum mensurando eas in lineis GF, productis vbi est opus, & per extrema earum puncta duces manu æquabili flexam lineam; illa enim sectionem requisitam representabit.



Probatur. Nam lineę repertę, quarum vna est PX sunt applicatæ, ergo per extrema earum transibit sectio. Consequentia patet ex definitione applicatarum. Antecedens verò propositio probatur, quia quadratum ex applicatis prop.5. & 6. huius, est æquale rectangulo ex diametris basium coni confecto, quæ à diametro sectionis intercipiuntur, quales ibi in fig. illarum prop. sunt LK, & KM, aut MK & KN. Sed HL in ista fig. FG, & cęt. sunt parallelæ diametro basis coni AB, conus verò est IAB, vel BRA, ergo, & etiam ipsæ diametri basium coni sunt; quare eorum rectangula ex segmentis FP, & PG, & cęt. facta erunt æqualia quadrato PX, & cęt. ex Probl.14. lib.2. Eucl. & ex prop.19. lib.6. Ergo erunt applicatæ.

PROBL. II. PROPOS. LVI.

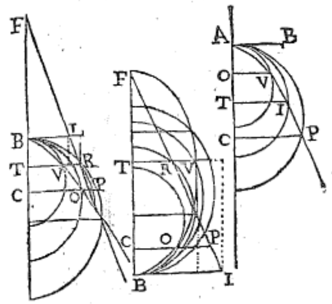
Dato parametro, & diametro intercepta, Sectiones conicas per puncta delineare.

HÆc descriptio fundatur in 3. Expensione. Detur ergo Parameter applicata AB alicuius parabolæ, & diameter, cuiuscumque longitudinis ad placitum AC. Eligantur in ipso quælibet puncta V. g. punctum C, inter AB, & AC inueniatur media proportionalis CP hæc erit applicata, sic si electo alio puncto T inter AT, & Parametrum AB inueniatur media proportionalis TI, hæc erit applicata, sic facias in puncto O, & reperias OV. Nam hę omnes, & quascumque alias inueneris, erunt applicatæ: quare si per extrema puncta manu æquabili ducas lineam, hæc erit parabolica sectio.

Quod vero CP, & TI, & cęt. sint applicatæ patet. Nam in parabola ex prop.6. h. rectangulum ex Parametro, & intercepta portione diametri inter verticem, & applicatam est æquale quadrato ipsius

ipsius applicatę, sed si super CP, & quamlibet aliam, ita inuentam fiat quadratum hoc erit æquale rectangulo ex CA diametro intercepta, & AB Parametro: Quoniam est media proportionalis inter vtrasque lineas AB, & AC ex constructione, vnde fit ex Prop. 19. lib.6. Euc. quòd quadratum mediæ sit æquale rectangulo extremarum. Ergo CP, & aliæ similes inuentę erunt applicatæ ex pr.7. h.

Si verò describenda sit aliqua Hyperbola, vel Ellipsis, & detur diameter transuersa FB. Parameter verò contigua in Hyperbola, & in Ellipsi BI. Ab extremo diametri BF per extremum Parametri I ducatur recta FI.



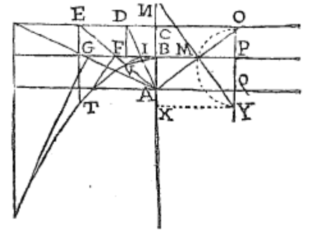
Deinde electis quibuslibet punctis C, & T ducantur in FI productã, si opus fuerit parallelę TV, & CP ipsi BL, interq; TB, & TR inueniatur media proportionalis TV, nã TV erit applicata. Sic si inter CB lineam, & CP inueniatur media proportionalis CO hæc erit applicata. Quare si inueniantur plurimę aliæ, habebimus puncta, per quæ suaui manu ducta linea Hyperbolicam sectionem, vel Ellipticam exprimet. Quod verò sint applicatæ patet. Cum sint medię proportionales V. g. TV inter TB, & & TR erit ex TV quadratum æquale rectangulo sub TR, & TB contento; Sed hoc rectangulum est æquale rectangulo TI, sub TB, intercepta diametro, & BI parametro, si addatur figura IR in Hyperbola auferatur in Ellipsi similis, similiterq; posita, ergo TV erit applicata, quia continet quadratum iuxta propos.8. huius æquale rectangulo sub Parametro BI, & intercepta diametro contento deficiente ei in Ellipsi fig. IR, vt ibi requiritur, vel abundante in Hyperbola, vt fiat rectangulum TI sub parametro BI. & intercepta TP contentum, & sic asseras de omnibus alijs similiter inuentis. Quapropter si per extrema puncta earum, cùm plurimæ inuentæ fuerint ducatur flexa, hæc erit Ellipsis, vel Hyperbola.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Datis Vmbelicis, & vertice, & positione sectionum, eas in eodem plano describere per puncta.

SIt datus vertex parabolæ B, & Vmbilicus A distantię BA fiat ęqualis BC, perq; puncta B, C ducantur in vtramque partem perpendiculares CE, & BG, & ab Vmbelico A ad D, & E pũcta, vt placet in OE rectæ ducantur AD, & AE; & alię ad libitum, quæ secabunt lineam BG in I, & F, à quibus punctis excitentur perpendiculares IV, & FT; à punctis verò D, & E perpendiculares ad CE educantur DV, & ET; Nam hæ se intersecabunt, cum prioribus orthogonalibus IV, & FT in Punctis V, & T, per quę à vertice B necessariò parabola ducta transibit.

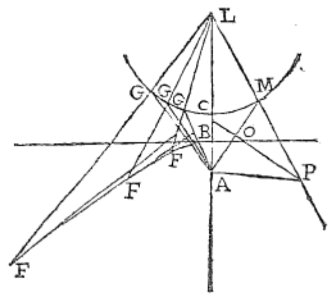
Hæc descriptio fundatur in propos.16. huius, pro cuius ostensione inspice dextram partem fig.



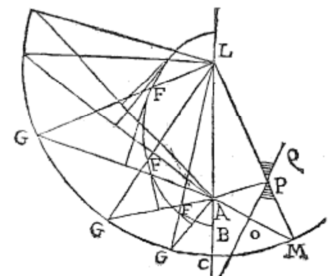
Ibi enim probatur, quod à vertice parabolæ ducta ad contingentem, quę est ibi EA, & hic BM sit æqualis quartæ parti figuræ sub diametro intercepto, & parametro cõtentæ, & in ipsius probationis progr. I. quod quadratum applicatæ, quæ ibi est CB hic XY sit æquale rectangulo, quod sub intercepta diametro inter contingentem, & sectionis verticem, vt ibi est AF hic BN, & Parametro continetur. Si ergo hic probetur, quod quadratum MB à vertice in MY perpendicularem ipsi AO ductæ sit ęquale quartæ parti quadrati, cuius latus XY, hęc erit applicata, & Y punctum, per quod parabola transit, & NY contingens. Id verò ita probatur MA est æqualis MO ob æquidistantes CO, & BP, & AQ. Vnde, & BM erit æqualis PM ob parallelas OY, & CA, & similia triangula POM, & MBA. Quamobrẽ quadratum ex dimidia MB, vel PM erit quarta pars quadrati totius BP, quale quadratum ex YX; Sed hoc quadratum PM est æquale rectangulo ex PY, & PO, vel PQ ęquali ob rectangulum triangulum OMY Ergo hoc rectãgulum erit quarta pars rectanguli contenti sub PY, & sub linea quadrupla ipsius PO, vel PQ æquali BA: verũ PY æquat BN; siquidẽ ex propos.12. BX, & BN æquantur. Vnde etiam PY, & BN, quod, & ab æquiangulis triangulis MBN, & MYP constat. Linea verò QP est æqualis ipsi BA, cuius quadrupla est parameter; Igitur quadratum ex XY erit rectangulo ex BN, & parametro, æquale: Vnde XY latus applicata erit, per cuius extremum Y transibit sectio parabolica.

Si verò sit Hyperbola, vel Ellipsis datis duobus Vmbelicis A, & L, sumatur BC æqualis AB, & centro L interuallo LC portio circuli describatur, quam eductæ à centro L, secent quæcumque rectę quomodocumque in punctis MCCGG; Et ad hæc puncta ab vmbelico A rectæ ducantur AM, & AG, & cęt. quibus bifariam sectis V. g. in O, à punctis medietatum perpendiculares excitentur, quæ lineas ab L vmbelico productas secent in FFFP. Dico puncta F, F, F, P esse in Hyperbolæ, vel Ellipsis ambitu.

Probatur. Nam LC est æqualis diametro transuersę; Vmbelici enim ęqualiter sunt remoti ab extremis diametri transuersę in hyperbola, quidem extra diametri transuersæ extrema, in Ellipsi verò intra eam: quare diameter transuersa in Hyperbola



perbola est minus linea AL distantia vmbelicorum gemina BA, qua distat vmbelici à vertice, in Ellipsi verò maior est. Sed in vtraque figura talis est LC, cum deficiat in Hyperbola AB, & BC æqualibus; in Ellipsi verò abundet. Ergo LC diameter transuersa est. Quo posito, si probetur angulos ad P esse æquales PO erit tangens ex propos. 23. huius, & propter hoc erit punctum P in Hyperbola, siquidem ibi ostenditur tangentem cum duabus emissis ab vmbelicis angulos efficere æquales.

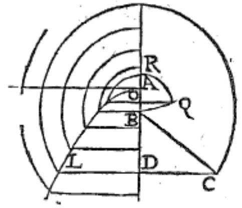


Sed id facilè ostenditur. Nam triangula MPO, & POA cum sint rectangula, & habeant PO latus commune, & MO, & OA crura æqualia, ex propos. 17. lib. 1. Eucl. habebunt etiam angulos apud P æquale APO, & OPM. Quare, & in Ellipsi QPL erit æqualis cum sit ad verticem angulo MPO, & consequenter angulo OPA. Et hinc cùm prouenientes ab vmbelicis LP, & PA faciant cum PO angulos æquales in Hyperbola MPO, & OPA in Ellipsi QPL, & APO, linea PO erit tangens, & punctum P punctum contactus. Vnde erit in ambitu Hyperbolæ, vel Ellipsis. Accedit, quod ob æqualitatem triangulorum PMO, & OPA, basis PM est æqualis basi PA: quare LP in Hyperbola superat diametrum transuersam LM, vel LC licea PA, In Ellipsi verò addita linea PA ipsi LP, vt fiat LM diametro transuersę æquatur LC iuxta id, quod exigit prop. 23. h.

PROBL. V. PROPOS. LVIII.

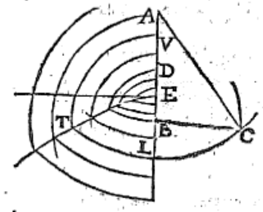
Datis Conicæ sectionis, Vmbelico, & vertice, eam per puncta promptiùs describere.

Sit primùm describenda Parabola, & datus sit Vmbelicus B, & vertex A. Extendatur diameter AB, quantum opus fuerit, & sumptis in eo RA æquali AB vltrà verticem, deinde plurima alia puncta, vt O, & D sumantur, & ab illis ducantur perpendiculares OQ, & DL, deinde interuallo DR, vel OR, nempe ea distantia, quâ vnaqueque educta DL, & OQ distat ab R, centro verò Vmbelico ipso B ducantur arcus, & vbi secant eductas in Q, & L, vel C, ibi transibit ambitus Parabolicus.



Probatur ex illis, quę diximus propos. 26. huius. Nam omnis linea, vt ibi probatum est, quę ducitur ab vmbelico ad applicatas, qualis est BC, vel BQ, est æqualis distantiæ eius à vertice in diametro sumpta; nimirum distantiæ DA, vel OA, & insuper distantiæ, quam vmbelicus habet à vertice AB, vel AR; quare BC, quæ est æqualis distantię DR, & BQ distantiæ OR, cum applicata CD, vel OQ conueniet necessariò in puncto Q, vel C ex prop. 26. huius Coroll.

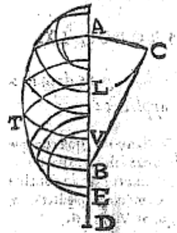
Si verò sit Hyperbola, vel Ellipsis, in qua dentur Vmbelici B, & A, vertex E. Lineæ EB accipiatur æqualis, quæ sit ED: deinde centro A ducantur plurimi gyri interuallo maiori, quam AE, in Hyperbola, quorum vnus sit LT. Et in Ellipsi non maiori, quam AE, sed maiori, quàm BE, quorum vnus TV. Rursusque interuallo D, & quolibet ex circulis ductis facto centro in vmbelico B alij circuli ducantur, quorum vnus sit TV in Hyperbola radio DL, in Ellipsi verò LT radio DV, vbi se interfecant in T, illud punctum T, & alia similia erunt in circũferentia sectionis conicę. Vnde linea per ea ducta Hyperbolam, vel Ellipsim imitabitur.



Probtur verò ex ijs, quæ ostendimus prop. 25. huius. Nam in Hyperbola. Linea, quæ ab vmbelico ad contactum ducitur, quæ ibi est, KC debet

debet esse maior, quàm alia, quæ ad eundem contactũ ab alio vmbelico ducta est, vt ibi est BC quantitate diametri transuersę, talis autẽ est AC in hac figura. Nam comprehendit diametrum transuersam DA, quæ remanet subductis duobus vmbelicis DE, & EB, & insuper cõprehendit totam DL, quæ est mensura lineę EC; Ergo AC est ęqualis lineę BC, & diametro transuersę AD.

Sed in Ellipsi ex eadem propos. duę lineæ ab vmbelicis ad ambitum eius inclinatę simul sumptę debent esse ęquales diametro transuersę tales verò sunt BC, & CA. Nam BC est æqualis diametro transuersæ BA, & CA lineę BD; Siquidem tota AD est diameter totus, & semper gyri accrescunt tali ratione, vt eâdem quantitate, quâ priùs ducti crescunt, eâdem posteriùs ducti decrescãt, quem modum etiam docuimus prop. 25. tract. 18. vnde patet, quod Ellipsis ibi descripta est ꝓpriè sectio coni Elliptica.



EXPENSIO XIV.

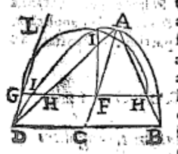
De circumscriptione figurarum conicarum.

Sicut agit Euclides de circumscriptione circuli circa figuras rectilineas, ita, & hic breuiter debemus agere de circumscriptione figurarum, saltem circa triangula; cùm illa sola omnibus figuris possint inscribi, quę à sectione coni deriuant.

PROBL. I. PROPOS. LIX.

Circa datum triangulum Parabolam circumscribere.

Sit datum triangulum BAD, cuius basis BD diuidatur per medium in C, & à vertice A ad diuisionem C recta ducatur, cui parallela DL excitetur, à puncto D. Electis verò in AC, quibuslibet punctis; vt F; ducatur basi parallela HG, inter autem eius portiones GF, & HF inueniatur media proportionalis ex Eucl. prop. 16. lib. 6. FI, & transferatur super FG, & sit FI. Dico, quòd per punctum I transit parabola, cuius ambitus per BAID transeat. Vnde si plurimæ, aliæ ducantur, vt FG, ab alijsque punctir in AC ad libitùm assumptis, & medię proportionales, vt FI inueniatur plurima puncta obtinebimus, per quę parabola ducatur.



Probatur. Nam quoniam FI est media proportionalis inter FH, & FG; quę est æqualis DC erunt tres ptoportionales; vnde ex Cor. prop. 22. lib. 6. Eucl. quadratum ex tertia CD, erit ad secunde quadratum FI, vt DC ad FH lineas.

Sed, quòd FH, & CD sint parallelę in triangulo CAD; ita erit CD, vel CB ad FH, velut respondet proportione AC, ad AF ex Cor. prop. 4. lib. 6. Euc. Ergo quadrata CD ad quadratum FI, ita erit proportione, vt AC ad AF: quare latera horum quadratorum erunt applicatę ex prop. 5. huius, & sic per extrema earum I, & D transibit ambitus parabolę, cuius vertex A.

PROBL. II. PROP. LX.

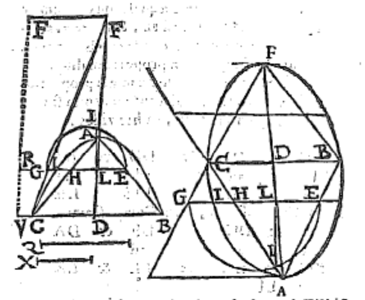
Circa datum triangulum describere Ellipsim, seu Hyperbolam etiam specie notam.

Sit triangulum quodcumque ABC, circa, quod describenda sit Hyperbola, vel Ellipsis, quę potest esse indeterminata, & quęcumque illa sit, & & tunc ducta DA, quę diuidat basim BC per medium à puncto C ducenda erit ad DA productam in F, quod libuerit punctum, recta CF.

Quod sit proponatur sectio conica specie nota, cuius diameter sit ad parametrum, vt Z linea ad X lineam.

Primo lineis DC semibasi, & AD reperiatur tertia proportionalis RV, vt exhibemus in hyperbola exemplum, rectangulumque DR erit ęquale quadrato ex media DC constituto, vtpote constitutum ab extremis, nempe DV ęquali DA, & VR.

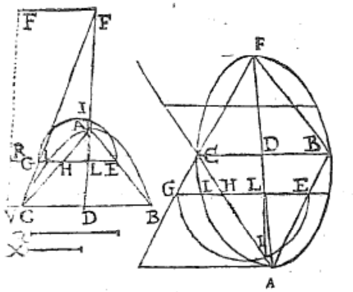
Secundo fiat, vt X ad Z, ita RV ad DF repetiendo nimirum quartã proportionalem FD. Dico, quod exhibebitur specie nota Hyperbola, vel Ellipsis, cuius diameter transuersa sit ad contiguam parametrum, vt Z ad X: quia nimirum rectangulum FV sub FD, & DA contentum dicit eam proportionem ad rectangulum DR super eandem basim DV constitutum, quam altitudo DF ad altitudinem VR ex I. lib. 6. Eu. ergo etiam rectangulum FV ita est ad ęquale quadratum ex DC; Sed VR ad DF se gerit ex constructione, vt X ad Z vel *conuertendo* DF ad VR, vt Z ad X. Ergo etiam rectangulum FV ad quadratum ex DC. Ergo etiam diameter transuersa FA talis erit ad Parametrum; qui semper est in quacumque figura conica, vt rectangulum sub FD, & DA ad quadratum ex DC, quę debet esse vna ex applicatis in Hyperbola, vel Ellipsi, quę circumscribatur circa tres vertices B, A, & C.



Sit ergo describenda Hyperbola, vel Ellipsis circa BAC, iam siue sit specie nota, siue non, siue CF ducta sit fortuitò ad DF, siue ad describendam specie notam sectionem, electa sit FD modo prędicto eodem pacto describetur.

A puncto quolibet V g. L ducatur basi BC parallela LH, quę pertingat vsque ad FC, vel CA in G, interque LG, & LH inueniatur media proportionalis LI, que hinc inde transferatur ab L versus E, & I, & fit LI. Dico, quod Ellipsis, vel Hyperbola transiens per B, A, C vertices, transibit quoque per I in linea EG punctum signatum, & sic de quibuscumque alijs, quæ à punctis in DA electis trahantur, & inuentis eodem modo proportionalibus erit dicendum. Vnde plura puncta poterimus venari, per quę Hyperbola, vel Ellipsis ducatur. In Ellipsi verò etiam in FD idem efficiemus, & Ellipsim completam consequemur, quę transeat per BFCA vertices.

Probatur autem. Quia tres sunt proportionales ex constructione LG, & LI, & LH. Ergo quadratum ex media est æquale rectangulo ex extremis ex Eucl. prop. 19. lib. 6. quo posito, si probetur rectangulum ex FD, & DA lateribus esse ad rectangulum ex FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum ex LI ostendetur ex propos. 6. h. DC, & LI esse applicatas, hoc autem sic ostenditur.



Nam in triangulo FDC ob parallelam GL ad basim DC, ita est DC ad LG, vt DF ad FL, & eadem DC ob eandem rationem in triangulo DAC ita est ad LH sicut DA ad LA. Si ergo ex antecedentibus in prima combinatione componatur quadratum; nimirum DC, & DC, & ex antecedentibus in secunda rectãgulum DF, & DA; quadratum DC, & CD erit ad rectangulum ex consequentibus in prima combinatione, & LG, LH, vel huic æquale quadratum ex LI, vt rectangulum DF, DA ad FL, & LA rectangulum ex consequentibus in secunda combinatione, vt est regula Rectãgulorum proportionalium Tr. 17. propos. 13. vt in parallelogrammis proportionalibus latera proportionalia antecedentia sint in vno, & consequentia in alio, vt hic vides.

DC	vt	DF	&	DC	vt	DA
ad		ad		ad		ad
LG		FL		LH		LA
Ergo Compositum,			vt	Compositum.		
DC	&	DC		DF	&	DA
erit		ad		ad		
LG	&	LH	vt	FL	&	LA
idest	LI					

Vnde patet, quod ita est rectangulum FD, & DA ad rectangulum FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum IL, vnde DC, & LI erunt applicatæ, & consequenter à vertice A per eorum extrema I, & C transibit Hyperbola, vel Ellipsis.

EXPENSIO XV.

De Parabolis specialiter describendis.

VIsis Sectionum conicarum vniuersalibus regulis, quę scilicet in omnibus tum Hyperbolis, tum Ellipsibus, tum Parabolis adhiberi possunt, oportet etiam aliquas speciales descriptiones docere, quæ à singularibus vnius cuiusque speciei proprietatibus ortum habent.

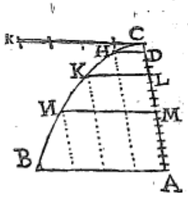
PROBL. I. PROPOS. LX.

Parabolam per puncta describere data diametro, & applicata.

SIt data applicata AB, & diameter quæcumque AC. Diuidatur AB, in quas libuerit partes æquales V. g. in quatuor, & diameter AC in tot alias æquales, quę quadratum numerum prędictarum applicatæ AC partium exequent V. g. 16.

Si ergo rectę ducantur ęquales applicatæ partibus, & parallelę à diametri partibus, quæ quadrato partium in applicata assumptarum respondeant V. g. vnam si assumpseris, quoniam quadratum vnius est vnum, duces à prima parte diametri D ęqualem DH vnicę parti applicatæ: Si duas à quarta parte diametri educes LK, ęqualem duabus partibus, quoniam quadratum duarum est quatuor; si tres à nona parte deduces MN, & cęt. Si ergo per puncta CHKNB ducas flexam, hęc erit Parabola.

Probatur. Nam ex propos. 2. huius, ita se habet AC intercepta ad CL interceptam, vt quadratum AB ad quadratum LK; sed quadratum AB est 16. & quadratum applicatę LK est 4. Linea verò CA est 16. & linea CL est 4. Ergo ita se habet AC ad CL, vt quadratum applicatę AB ad quadratum applicatę LK, & ita dicas de alijs.



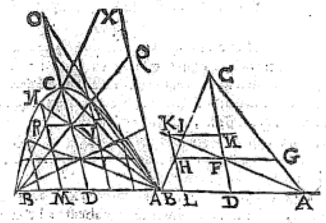
Possent etiam trahi à partibus applicatę AB, quę essent ęquales AD, vt AL, aut AM successiuè semper diminuendo dempto quadrato à singulis partium, à quibus deducitur, vt vides factum in punctatis H, K, & N: Nam à prima H ablatum est quadratum vnius; quòd à prima parte, & viciniori diametro deducatur, si à K quadratum duarum partium, quòd à gemina. Possent quoque trahi à CX contingente verticem, & parallelam applicatæ, quę secundum quadrata partium distantium à C crescerent.

PROBL. II. PROPOS. LXII.

Parabolam circa datum triangulum describere.

SIt triangulum ACB; circa quod oporteat Parabolam delineare. Diuisa per medium basi BA in D, ducatur CD, & in illa sumptis quibuslibet partibus

partibus V. g. 3. ducatur ab angulo A per F parallela ad basim AB, quæ sit GH, & vbi secat crus CB oppositum angulo ducatur ad CD, quę sit LK occurrens A ab angulo A ductæ in K. Dico K punctum esse Parabolę, quæ transit per A, C, B, vertices trianguli dati.



Probatur autem. Quia, si ducatur KN, hæc erit applicata. Quare punctum K, vtpote extremum applicatę erit in Parabola. Quod verò KN sit aplicata patet, quia est media proportionalis inter NI, & DB. Vnde iuxta doc. 59. huius erit applicata, quòd verò sit media proportionis ita patet. Nam in triangulis ADF, & FHK æquiangulis, quòd sint ad verticem inter parallelas DF, & HK, ita est AD, vel æqualis DB ad FH, quæ æquatur NK, & lineę DL, sicut DF, vel æqualis LH ad HK idest est DB ad DL, vt LH ad HK in triangulis quoque ad verticem, & inter parallelas IHK, & LHB, sicut est LH ad HK, ita LB ad IK, quamobrem, & reliqua DL, quę est æqualis lineæ NK; ad reliquam NI eodem pacto se habebit, vt LB ad IK, & LH ad HK, & DB ad FH, vel NK: Si ergo sicut se habet DB ad NK, ita se habet NK ad NI; patet. NK esse mediam proportionalem inter DB, & HI.

Nota idem sequi, seu parallelæ sint productę basi ęquidistanter, vt in fig. hac NK, seu ab ęquidistantibus ducantur diametro parallelę, vt HK ab HF quę occurrant lineę AK, seu in in altera fig. RN ab RV ad AN, seu æquidistantes diametro, vt MN, seu LK, sic nec interet, si ab angulo A, siue ab angulo C, vel B emitantur. Ita nec interet an partes, per quas transeunt, sint in ipso diametro DC, vt BV, quæ transit per V, seu in eius parallela intra partes in diametro producto assumptas, vt per R ducitur BR, seu extra, vt AX, ad quam ducitur BX, seu in partes in diametro producto assũptas, & ducitur AO, quę tamen partes in CO producto debent esse æquales ijs, quę intra diametrum CD sunt assumptæ.

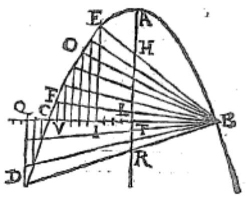
PROBL. III. PROPOS. LXIII.

Parabolnm producere, seu resarcire.

SIt Parabola BAC, quam oporteat restaurare ab E vsque ad F, seu producere à C vsque in D.

Resarciatur ergo primo reperiendo diametrum quemcumque AL, & applicatam quamcumque BC, à puncto itaque B, vbi applicata sectionem tangit, è regione partis restaurandæ ducantur ad E, & ad F extremas oras abruptæ partis rectę BE, & BF, secabunt diametrum in H, & L: Pars ergo diametri intercepta in quot libuerit partes æquales diuidatur V. g. in 5. & à B per eas rectæ ducantur, vt BO. Deinde ab ijsdem oris E, & F ducantur diametro parallelæ EI, & FV, parsque intercepta IV in totidem partes diuidatur V. g. rursus in 5. & ab istis parallelæ diametro ducantur; quæ primò ductis à B occurrant. Nam puncta in quibus occurrunt V. g. D erunt in eadem parabola. Vnde per eam ducta linea EOF partes in parabola abruptas coniunget.

Ostensio verò eadem, quæ antecedentis propos. vt patet ex ipsa constructione, sicut, & sequentis operationis.



Similiter, & partes extendentur. Diuisa enim TC in quaslibuerit partes, sicut, & diameter TA tot ex ijs partibus diametri V. g. 3 transferantur in productam diametrum TR; & tot ex partibus applicatę TC transferantur in ipsam productam CQ, à quibus diuisionibus parallelæ diametro educantur, vt QD quę occurrant lineis, quę à pũcto B per partes in diametro TR producta signatis transeant: Nã puncta mutui concursus, vt D linearũ QD, & DB erunt ea, per quæ parabola producenda transibit.

EXPENSIO XVI.

De Hyperbolarum particulari descriptione.

HYperbola ex Asymptoto, quã sola habet inter figuras, particulares sibi vendicat descriptiones, quarum plurium modos diuersis problematibus exponemus.

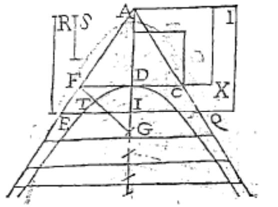
PROBL. I. PROPOS. LXIV.

Datis Hyperboles transuersa diametro, & eiusdem ratione ad contiguam parametrum in dato angulo Hyperbolem in plano per puncta describere.

SIt data AD dimidia transuersæ diametri, & proportio eius ad contiguam parametrum, quę sit vt R ad S. Angulus verò, si ita placet, detur rectus. Inter lineas R, & S reperiatur media proportionalis DC, & iam vt R ad S, ita erit ex Coroll. prop. 21. lib. 6 Eucl. quadratum ex AD ad quadratum ex CD; Talis autem etiam est ex prop. 44. h. progr. 3. & Coroll. portio diametri transuersæ ad parametrum, nempe quadrati AD ad quadr. CD; ideoque Coroll. prop. 8. huius hyperbola erit specie nota, & AC & AF erunt Asymptoti ex prop. 47. huius, quę sit describetur.

A punctis in diametro AD producta, quibuscumque placuerit, duces æquidistantes ad applicatam ad verticem DF, qualis est EI, Auferesque quadratum DF à quadrato IE; ita tamen, vt id, quod remanet quadrati latus existat, quod fiet ex prop. 32. l. 6 vel 11. l. 2, si ad id interuallũ IE ex puncto C, vel F ducas portionẽ circuli, quę secet diametrũ in G.

G. Nam recta DC erit latus quadrati tale, quod cum quadrato DF erit æquale quadrato IE. In triangulo enim rectangulo FGD quadrata crurum DF, & DG sunt æqualia quadrato basis FG æqualis IE. Quare GD est latus talis quadrati, cui deficit quadratum ex DF, ad hoc vt æquetur quadrato IE.



Si ergo DC transferatur in IE, vt sit IT, dico IT esse applicatam, per cuius extremum T à vertice D transeat Hyperbola in specie nota.

Probatur autem. Nam sicut est diameter transuersa ad Parametrum, ita est rectangulum ex AI, DA pro vno latere, & pro alio ID ad quadratum ex IT, ex 8. h.

Progress. I. Quoniam, si auferatur quadratum AD à quadrato ex AI remanebit rectangulum sub tota diametro transuersa, cuius dimidia est AD, & ID pro vno latere, & ID seorsim pro alio, qui est gnomon IXI, vt patet, & à quadrato IE quadratum DF ablatum fuit in praxi, & remansit IT.

Progr. 2. In triangulo autem AQI ob parallelas CD, & QI; vt est AD, & DC, & ideo etiam eorum quadrata ex AD ad illud ex DC. Ita ex 26. l. 6. simili proportione alludit quadratum ex AI ad quadratum ex QI. Aufer itaque proportionalia antecedens AD quadratum primæ combinationis ab antecedenti quadrato AI secundę combinationis; sicut, & consequens CD, vel DF quadratum à consequente QI, vel IE quadrato, vt fecimus prog. I. & remanebunt residua adhuc proportionalia. Nempe gnomon IXI, vel quod ęquale rectangulum ex AI, AD pro vno latere, & ID pro alio ad quadratum ex IT ex prop. 22. lib. 5. Elem.

Progr. 3. Sed quadratum AD ex constructione est ad quadratum ex DC, vt diameter transuersa ad parametrum: Ergo etiam rectangulum AI, & AD, nempe toto diametro pro vno latere, & DI tantùm pro alio refertur ad quadratum IT, vt diameter transuersa ad parametrum, & vt R ad S, ergo ex propos. 8. huius erit punctum T ad hyperbolam, quod erat ostendendum.

Si verò libeat Hyperbolem specie non notam describere; trahantur AD, & DC, cuius placet longitudinis nullo habito respectu ad datas S, & R, & cet. vt priùs exequantur.

PROB. II. PROPOS. LXV.

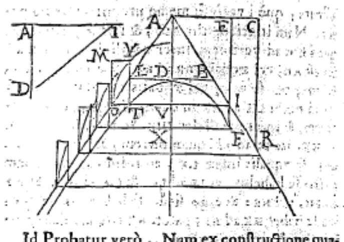
Dato Asymptoto, & dimidia transuersa diametro cum Angulo Hyperbolam per puncta delineare.

DVobus modis potest hoc in opus reduci, vel per lineas diametro transuersę parallelas, & iuxta proportionem datam. Vel per lineas ei perpendiculares.

Sit ergo primus modus. Et dentur Asymptoti AB, & AL, diametrique transuersę dimidium AD; sitque ad parametrum diametri transuersæ data proportio, vt quadratum CR ad quadratum CA.

Ducta AC parallela BD, & in ea electis quibuslibet punctis, vt E, ducantur parallelæ ad diametrum AD, vt EF; fiatque EF tantæ longitudinis, vt eius quadratum sit æquale duobus quadratis AI, & AD eas seorsim componendo rectangulę, & ducendo basim ID, quæ ęquet FE; nam ex pr. 11 l. 2. Euc. Quadratum basis in rectangulo est æquale duobus quadratis crurum. Et EF dabit punctum F, quod erit in Hyperbola, cuius vertex D, & proportio diametri ad contiguam Parametrum, quam quadrati ex RC ad quadratum ex AC. Et sic erit, si eodem artificio alias producas.

Ostendendum est autem, quòd FX sit applicata ex eo, quòd eius quadratum se habeat ad rectangulum AX, & DA, vt vno crure, & DX pro alio, vt transuersa diameter ad parametrum. Nam tunc sic constabit ex prop. 8. huius FX esse applicatam, & ideo extremum F lineę EF esse in Hyperbola.



Id Probatur verò. Nam ex constructione quadratum EF est æquale quadrato IE, & AD quadratum dratum verò idem EF est etiam ęquale quadrato eidē AD, & rectangulo AX, AD, & DX; quod sit ęquale hoc rectangulum residuo gnomoni quadrati ex AX; vel EF ablato quadrato AD. Ergo hoc rectangulum ex AX, AD pro vno crure, & DX pro alio erit ęquale quadrato ex linea IE.

Sed in triangulo CRA ob parallelas IE, & CR, vt est quadratum CR ad quadratum CA; ita est quadratum EI, & consequenter rectangulum AX, AD, & XD sibi ęquale ad quadratum ex EA linea, quę est ęqualis applicatę FX.

Vnde rectangulum ex AX, AD, & XD erit ad quadratum ex XF, vt diameter transuersa ad parametrum; cum tale sit quadratum CR ad quadratum CA ex præsupposito.

Secundus modus est, vt datis Asymptotis AB, & AL semidiametro transuersa AD, & angulo ADL ducantur ad diametrū transuersam perpendiculares, vt VO, & vbi occurrunt Asymptotis, vt in O erigantur perpendiculares æquales ipsi LD, qualis est OM; & vbi terminat in M ducatur rursùs perpendicularis MY, quantùm sufficit. Deinde centro V radio VI portio circuli ducatur OY, & vbi secat MY in Y demittatur perpendicularis YT. Nam punctum T erit in Hyperbola.

Probatur facilè. Nam ex Eucl. prop. 16. lib. YT est media proportionalis inter TI, & TO. Quare eius quadratum, nempe ex YT erit æquale rectangulo IT, & TO ex prop. 19. lib. 6. Eucl.

Sed rectangulum per cuius latera in lineam extensa transit hyperbola, vt IT, & TO ex propos. 42. Coroll. est ęquale quadrato ex TY, vel æquali DL ex constructione. Ergo inter IT, & TO in

in puncto T transibit Hyperbola, cuius vertex D.

PRORL. III. PROPOS. LXVI.

Datam Hyperbolam resarcire, etiam sit eius, non nisi vnicum punctum constaret, vel vlterius producere. Datis eius Asymptotis, & vnico eius puncto.

SInt dati Asymptoti AB, & AC, & punctum L, Ex puncto L ducantur plurimę lineę ad vtrũque Asymptotum, vt FH, & DI, & distantiæ minores ad vnum asymptotum, quàm ad aliud puncti L transferatur super eandem lineam ad alterum extremum, quo tangit aliud asymptotum. V. g. DL transferatur in EI, eo quod sit minor DL, quàm LI, sic FL in HN; Nam puncta Q, O, L, E, N, & si quę alia inuenta fuerint, erunt in eadem Hyperbola.

* Probatur verò ex eò, quòd in Hyperbola puncta ab vtroque Asymptoto ęqualiter remota, signata in eadem linea in Hyperbola reperiantur; Qualia sunt FL, & NH; sicuti EI, & DL, & cet.

Reperiuntur autem, quia quelibet ducta in sectione Hyperbolica, vt LN ex propos. 28. huius potest deseruire pro applica, cum in duas partes æquales ab aliquo diametro secundario diuidi possit ex propos. verò 46. Coroll. habemus, quòd rectangulum ex ambobus applicatis, quas diuidit diameter, vt tota LN cum intercepta inter sectionem, & vnum ex asymptotis, vt FL pro vno latere, nimirum tota NF, & intercepta inter sectionem, & alterum Asymptotum, vt NH est ęquale rectangulo facto ex LH, & LF: quare habebunt latera proportionalia ex Eucl. propos. 10. & erit in eadem proportione NF ad NH, sicut LH ad FL. Ergo componendo ita erit NH, & NF simul, nempe HF ad NH; vt LH, & LF simul, quę est eadem FH ad LF, cum ergo LF, & NH eidem FH eandem dicant proportionem erunt inuicem æquales ex 7. propos. lib. 5. Eucl. Quare cum quælibet hyperbola transeat per puncta æqualiter ab asymptotis remota, vt N, & L alicuius quomodocumque lineæ ductę, ista puncta L, & N, vel E, & L, vel O, & Q taliter signata erunt in Hyperbola.

COROLLARIVM.

HInc ergo patet quaslibet interceptas, vt FL, & NH, quascumque inter sectionem, & Asymptotos esse ęquales inuicem, vt ex ostens. propos.

EXPENSIO XVII.

De Descriptione particulari Ellipsium.

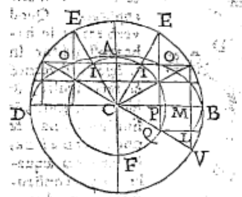
SIcut singulari descriptione Parabolas, & Hyperbolas prosecuti sumus, sic, & Ellipses, quę propter duos axes coniugatas, quos habent, diuersas descriptiones obtinere queunt.

PROBL. I. PROPOS. LXVII.

Datis Ellypsis extremis diametris, eandem in plano per puncta quotlibet describere.

CEntro C interuallo assumpto dimidio diametri maioris CD describatur circulus circa maiorem diametrum BD; rursùsque eodem centro C circa minorem AF, & à communi centro C radij exeant, qui transeuntes per circumferentiam minoris in I secent circulum maiorem in DE, vt sunt CE, à quibus punctis E perpendiculares EP ad diametrum BD descendant; quibus occurrant in O puncta I I rectę connectentes: Nam vbi secant perpendiculares EP ab ijsdem radijs dimissas, vt in O, ibi erit punctum Ellipsis, & per eam intesectionem O transibit.

Id verò ostendetur probando rectam OP, vel ML esse applicatam; eò quòd rectãgulum DM, MB ex interceptis diametri trãsuersę segmentis ex propos. 6. h. se habeat ad quadratum ML, vt quadratũ BC, quę est loco rectanguli ex interceptis diametri portionibus BC, & CD ad quadratum CF minoris diametri, quæ, & locum applicatę tenet. Vnde si per F transibit ambitus Ellipsis transibit quoque per L.



In triangulo rectangulo CMV ob parallelas MV, & PQ ex prop. 4. Coroll lib. 6. Eucl. ita est CV, seu CB ęqualis ad VM, vt CQ ad PQ, vel LM ęqualem. Ergo *permutando* ita erit CV, vel CB ad QC, vel æqualem CF, vt VM ad ML. Si ergo ex CB fiat quadratũ hoc se habebit quadratũ CQ: Vt quadratũ ex VM ad quadratũ ML ex 26. l. 6. El: sed hoc quadratum VM, eò quòd VM sit media proportionalis inter segmenta BM, & MD, vt patet ex 13. lib. 6. Eucl est ęquale rectangulo ex segmentis diametri BM & MD. Ergo rectangulum ex segmentis diametri DM, & MD se habet ad quadratum ML, vt rectangulum, quadratumque ex BC ad quadratum CQ vel CF, quod erat ostendendum.

PROBL.

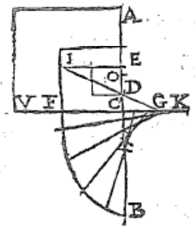
PROBL. II. PROPOS. LXVIII.

Datis Ellipseos extremis diametris Ellipsim per puncta describere.

SInt dati Ellipseos diametri extremi KF, & AB bifariam inuicem, & ad rectos angulos se secantes. Sumpta circino eorum semidifferentia CO, qua nimirum semidiameter CF minor est, quã semidiameter CA, accõmodetur à G puncto minoris semidiametri ad libitum electo versùs C, ducta arcus portione, qua secetur diameter maior in D; vt DG equet CO, ductaq; GDI fiat DI equalis semidiametro minori; Dico itaq; quod extremũ I erit in Ellipsi, cuius ambitus per extrema axiũ K, F, A, B, transeat. Vnde si plurimæ ex istis lineis, sic ducantur habebimus multa puncta, per quæ ambitum Ellipseos ducere poterimus, vt vides factum in ambitu FB.

Probatur autem ex eo, quòd ducta EI sit vna ex applicatis, quare I eius extremum erit in circumferentia Ellipsis.

Quòd autem sit applicata, ostenditur ex eo, quòd quadratum semidiametri minoris, simulque applicatæ CF se habeat ad rectangulum, simulque quadratum ex segmentis CB, CA diametri transuersæ AB, vt quadratum dictæ EI ad rectangulum ex segmentis BE, & EA diametri transuersæ AB. Vnde ex doctrina pr.6.h. erit applicata. Quod verò res ita se habeat ostenditur. In triãgulis ad verticẽ & rectangulis, & ideo æquiãgulis, & similibus IDE, & CDG, vt CD ad DE, ita erit GD æqualis ex constructione CO ad DI, quæ equatur lineæ



OA. Igitur vtendo argumento compositionis ita erit CDE simul ad suam partem ED. Velut AEC simul ad suam partem AO: Et ita quoque erunt eorum quadrata, nimirùm quadratum EC ad quadratum DE respondebit proportione; vt quadratum AC ad quadratũ AO, vel æqualis CF, aut DI ex 26.l.6.

Considera verò, quòd, si auferatur quadratum ex EC à quadrato CA remanebit gnomõ VIA equale rectangulo ex BE, & EA. Sicut si quadrato ex DI auferatur quadratum DE remanebit quadratum ex EI, (nam in triangulo rectangulo DEI duo quadrata crurum sunt æqualia quadrato basis ex BI, lib.2. Elem.) Ablatis ergo proportionalibus quadratis EC ab AC, & DE à DI, quæ item proportionalia sunt in eadem proportione, remanent rectangulum BE, & EA, vel gnomon VIA, & quadratum ex EI ex pr.22.l.5. proportionalia, ac sua tota. Erit ergo vt quadratũ AC, quod stat loco rectãguli ex segmentis diametri ad applicatæ, & semidiametri minoris CF quadratum, sic rectangulum ex BE, & EA segmentis ad quadratum lineę EI, & conuertendo; Vnde EI erit applicata.

EXPENSIO XVIII.

Sectiones omnes describere ope parallelogrammi.

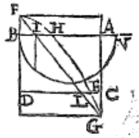
OPortet etiam docere modum descriptionis sectionum, quæ ex datis figuris eruuntur, inter quos non infimæ sortis est ea descriptio, que ex dato parallelogrammo in opus deducitur.

PROBL. I. PROPOS. LXIX.

Dato quocumque parallelogrammo ex illo Parabolam efformare.

DAtis parallelis AB, & CD vni laterum, & diametro FG inter AB, & IB ponatur BH, sicuti ter CD, & LD media proportionalis ED; puncta E, & H, G, F erunt ad parabolam.

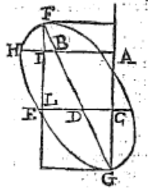
Probatur. Quoniam AB, & CD latera æqualia sunt, erit IB, & AB rectangulum ad CD, & LD rectangulum, idest quadratum HB ad quadratum ED rectangulis æqualia ex propos.19. lib.6. Elem. eò quod sint formata ex medijs proportionalibus, vt altitudo IB ad LD: Sed IB, & LD est vt FB ad FD ob parallelas ex 4. lib.6. Ergo HB quadratum erit ad ED quadratũ, vt FB ad FD, & ideo HB, & ED ex 5. huius erunt ad parabolam.



PROBL. II. PROPOS. LXX.

Ex parallelogrammo quocumque Ellipsim delineare.

SIt datum FG parallelogrammum, & in eo diameter GF, sintque ductæ parallelæ alteri laterum AH, & CE, & inter AB, & BI media fiat BH, & inter CD, & DL media DE. Dico GH, & E, F esse ad Ellipsim.



Probatur. Ita est AB ad CD, vt BG ad DG; rursus ita est BI ad DL, vt BF ad FD. Ergo rectangula composita ex ijsdem proportionibus AB, & BI ad rectangulum CD, & CL erit, vt BG, BF rectangulum ad GD, & DF rectangulum, vt hic vides.

AB vt BG & BI vt BF
ad ad ad ad
CD DG DL FD

Ergo compositum vt compositum.

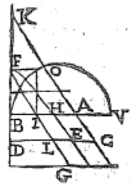
AB & BI erit BG & BF
ad ad
CD & DL DG & FD

Quare rectangulum AB, & BI erit ad CD, DL, idest equalia quadratum HB ad DE quadratum, vt rectangulum BG, & BF ad rectangulum DG, & FD: quare ex 6. h. puncta H, & E erunt ad Ellipsim.

PROBL. II. PROPOS. LXXI.

Dato Parallelogrammo quocumque Hyperbolam delineare.

SIt parallelogrammum OG, & producta CO in K ducatur per F linea KD, fiatq; triangulum CKD, & ductis AB, & CD parallelis lateri OF; inter lineas AB, & BI inueniatur media HB, & inter CD, & LD media ED, & puncta E, & H erunt ad hyperbolam.



Probatur ob similitudinem triangulorum KB est ad KD, vt AB ad CD, & vt BF ad DF sic IB ad LD. Componantur, itaque ex istis proportionibus rectangula.

KB vt AB & BF vt IB
ad ad ad ad
KD CD DF DL

Ideo compositum erit, vt compositum.

KB & BF AB & IB
ad ad
KD & DF CD & LD

Quare, & quadratum HB equale rectangulo AB, & IB erit ad quadratũ DE æquale rectangulo CD, & DL, vt rectangulum KB, & BF ad rectangulum KD, & DF: quare puncta H, & F ex 6. huius erunt ad Hyperbolam.

EXPENSIO XIX.

De transumptione figurarum conicarum ex circulo.

SIcut ex dato parallelogrammo sectiones deducimus, sic & ex dato circulo eas adipiscimur, & tantò potiori iure, quantò circulus sectionibus maiori accedit annalogia.

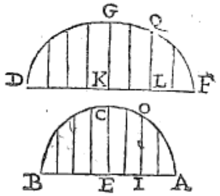
PROBL. I. PROPOS. LXXII.

Dato circulo quocumque Ellipsim quamcumque describere.

SIt datus circulus ABC, ex eo describemus quamcumque Ellipsim, si statuamus eius diametrum pro diametro Ellipseos minori, & ad libitum eligamus maiorem V. g. DF.

Diuidemus itaque AB, in quas placuerit equales partes, & trahemus perpendiculares ad diametrum, vt est OI, & EC. Diuidemus quoque FD in totidem partes, & erectis ad ea puncta diuisionum perpendicularibus, quę æquales sint prioribus in circulo tractis quælibet nimirum suæ correspondenti V. g. KG erit æqualis EC, & LQ correspondenti OI, & per extrema eorum ducemus æquabili manu lineam curuam, quæ erit ambitus Ellipseos.

Id verò ostendetur demonstrando LQ esse applicatam sicut KG, quòd ita se habeat rectangulum, & quadratum ex segmentis diametri FK, & & KD ad rectangulum ex segmentis DL, & LF, vt quadratum KG, se habet ad quadratum LQ. Nam ex prop.6. hæc est proprietas essentialis applicatarum ellipticarum.



Probatur autem. Nam cum AB, & DF sint diuisæ in partes numero equales erit tota ad medietatem suam, vt alia tota ad medietatẽ, sicut, & V.g. sex partes ad duas vnius nẽpe BI ad AI erunt quoq; vt partes sex ad duas alterius, vt DL ad LF. Igitur, & quadratum ex medietate EB, ita erit ad rectangulum ex BI, & IA, vt quadratum ex medietate KD, ad rectangulum ex DL, & LF, cum ex ijsdem proportionibus cõponãtur rectę BI, ad AI, & DL ad LF &c. Sed rectangulum BI, & AI est æquale quadrato IO, cum IO sit media proportionalis inter BI, & IA. Ergo, & quadrato LQ huic equali, sicut, & quadratum EC, vel EB est equale quadrato KG. Quare KD, DK, & KF rectangulum erit ad rectangulum ex LD & LF lineis, vt quadratum KG ad quadratum LQ.

COROLLARIVM.

HInc autem ellicies sufficere ad formandam ellipsim ex circulo, si lineam datam, vel maiorem, vel minorem ita seces proportionaliter, vt ab applicatis, seu sinubus in circulo secatur, vel vt ipsę applicatę, sinusque crescunt.

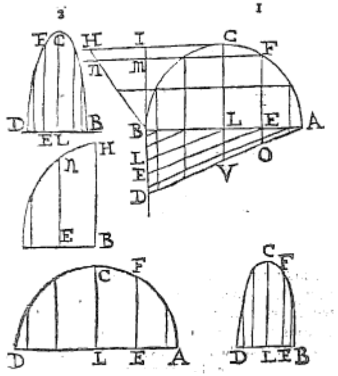
Sit semicirculus ABC, in quo diuiso in partes equales ducti sint sinus CL, & EF, & cęt. seceturq; BI primùm in partes æquales, iuxtà quas sinus ipsi sunt, ita, quod BI sit æqualis LC, & Bm sit æqualis EF, & cęt. deinde iuxtà partes lineę BI detruncetur BH in partes proportionales ex propos. 10. lib.6. ita quòd sit BH, ad BI, Bn ad Bm, & cęt. Dico sinus BH, & Bn, & alij similes sinubus predictis LC, EF, & alijs dispositi per puncta E, L, & alia in quibus prius erant suis extremis esse in ellipsi.

Probatur. Ita est Bn ad BH, vt EF ad LC: Ergo etiam quadratum ex Bn ad quadratũ ex HB erit, vt quadrtũ ex EF ad quadratũ ex LC ex 26.l.6. sed quadratũ EF est æquale rectangulo EB, & EA, itemq; quadratum LC est æquale rectangulo ex AL, & LB. Ergo rectangulum EB, & EA ad rectangulum AL, & LB habebit eandem proportionem, quam quadratum ex EF ad quadratum ex LC. Ergo etiam eandem, quam quadratum ex Bn ad quadratum ex BH;

cum

cum sint in eadem proportione cum prædictis ex B^{F}, & LC quadratis. Cùm ergo ex BO quadratum fit ex BH quadratum, vt rectangulum ex AE, & EB ad rectangulum AL,& LB; lineæ BO, & BH erunt ad diametrum AB applicatæ in punctis E,& L. Vnde earum extrema puncta erunt in Ellipsi ex 6. h.

Idem dicendum. Si iuxta diuisiones diametri AB diuidatur proportionaliter aliqua alia linea, seu maior, vt AD, seu minor, vt ED. Nam si illi lineæ, vt factum est seorsum applicentur sinus LC,& EF quilibet ad suum punctum correspondens, horum sinuum extrema puncta erunt in Ellipsi.



* Probatur. Nam quia AE ablatum est ad OA ablatum, vt AB totum est ad AD totum, erit etiam reliquum EB ad reliquum OD,vt AE est ad AO. Quare rectangulum AO, & OD erit compositum ex ijsdem proportionibus; quibus AE, & EB componitur. Sic quoque AL ad AV erit, vt AB est ad AD: Quare, & residuum LB ad residuum VD erit, vt AL ad AV: quare, & rectangulum ex AV, & VD, quod est quadratum componetur ex ijsdem proportionibus, quibus quadratum ex AL,& LB. Cum ergo rectangulum ex OA & OD sit compositum ex ijsdem proportionibus, quibus rectangulum ex AE, & EB erit ad rectangulum, seu quadratum AV, & VD compositum ex ijsdem proportionibus, quibus rectangulum, seu quadratum AL, & LB, vt rectangulum AE, & EB ad idem quadratum ex AL,& LB: Sed rectangulum ex AE, & EB ad quadratum ex AL, & LB est, vt quadratum ex EF ad quadratum ex CL. Ergo etiam rectangulum ex AO, & OD est ad rectangulum ex AV, & VD, vt quadratum ex EF ad quadratum ex LC. Quare EF,& LC erunt applicatę ad diametrum AD,& earum extrema puncta in Ellipsi reperientur.

COROLLARIVM I.

POssunt etiam Ellipses è circulo desumi, etiam, si diameter circuli, seu ei proportionalis sumatur pro secunda diametro in Ellipsi, & ei ad angulos obliquos eosdem applicentur, seu sinus, seu sinubus proportionales paralleli; dabunt enim puncta, per quę ducta Ellipsis circundabit diametrum secundariam.

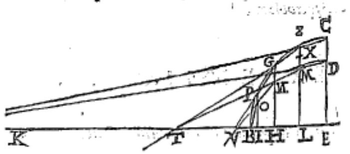
COROLLARIVM II.

QVin etiam describetur Ellipsis, si tùm Sinubus, tùm portionibus diametri proportionales sumantur, vt est videre in fig 2. Nam rectangulum BL, & LD est ad rectangulum BE, & ED in fig. 1. vt est AL, LB rectangulum ad BE, & EA rectangulum; quòd est vt quadratum ex LC ad quadratū ex EF; Quadratū verò LC ad quadratū EF est, vt quadratū BH,vel æqualis LC in fig.2.ad quadratum BN,vel æqualis EF. Quare ex æquo rectangulum BL, & LD erit ad rectangulum BE, ED erit, vt quadratum LC ad quadratum EF. Quare LC, & BN erunt applicatæ in fig. 2. ad diametrum DB.

PROBL. II. PROPOS. LXXII.

** Ellipsim dato circulo, & minori diametro per puncta describere.*

*SIt datus circulus, seu quadrans BC, & diameter minor Ellipsis ED; diuidaturque circulus in quaslibuerit partes CZ,ZG,GP, & tandem PB ducanturque rectæ CZK,ZGT, GPV,& ceteræ si adsint ad diametrum productum EK; ab ijsdem quoque punctis perpendiculares ducantur ZL, GH, PI, & deinde à vertice D diametri minoris ED ducatur ad punctum diametri K, in quod cadit CZK recta DK, & à puncto M,in quo secat ZL ducatur recta ad T; quę fit MT, in quod cadit ZGT rursusque à puncto N, vbi hæc postremo ducta secat perpendicularem GH ducatur recta NV ad punctum V, in quod cadit GPV, & sic agatur successiuè de alijs. Si ergo per puncta DMNOB flexa æquabili manu ducatur, hæc erit Ellipsis quarta pars, & puncta illa DMNOB erunt in Ellipsi.



Probatur Progr. 1. quia (vt ostendam) in Ellipsibus ita est EC ad ED, vt ZL ad ML,& è contra *conuertendo*. Ergo conuenient in vnicum punctum K. Alioquin si aliqua non transiret per punctum K, sed alibi V. g. per X, & perueniret ad punctum D ex Coroll. propos. 4. Element. esset EC ad ED, vt LZ ad XL, quia enim DXK recta esset, vt dicunt aduersarij, & perueniret ad punctum X per X lineę DE, & LX essent in eodem triangulo parallelæ, sed etiam CE esset ad DE, vt ZL ad LM, quia DE,LM sunt in Ellipsi, vt presupponimus quapropter cum XL,& ML eisdem LZ eãdem proportionem diceret, quam CE ad ED, essent inuicem æquales ex propos. 9. lib. 5. Elem. quòd est absurdum. Ergo DK transibit per punctum M, per quod transit Ellipsis.

Progress. 2. Quod verò CE in Ellipsibus sit ad DE, vt ZL ad ML, patet. Nam in circulo ita est quadratum EC ad quadratum ZL, vt rectangulum ex BE & EB ad rectangulum ex segmentis diametri LB,& residuo segmento LEB, quod ex propos. 35 lib. 3. Elem. quadratum ex EC, & rectangulum ex segmentis diametri BE,& residuo EB sint ęqualia sicut etiam ZL quadratum, & rectangulum ex LB, & reliquo LEB segmento eiusdẽ diametri, sed etiã quadratũ DB ad quad. ML, vt rectangulũ EB,EB ad rect. ex ijsdem BL, & LEB diametri portionibus circuli simulque Ellipsis ex prop. 6. h. cum ergo in eidem proportione rectangulorum referantur EC quadratum ad LZ quadratum, vt DE quadratum ad LM quadratum erunt ex propos. 16 Elem. 5. in eadem proportione. Quare, & latera erunt in eadem proportione ex 26. lib. 6. & erit EC ad LZ, vt ED ad ML; quare *permutando*, quoque erit EC ad ED, vt LZ ad ML.

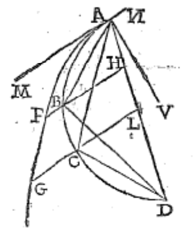
PROBL. III. PROPOS. LXXIV.

Dato circulo, seu circuli portione Parabolam describere.

FIant æquales lineis BA,& AC ductis à vertice A segmenti ABCD ad peripheriam ipsius applicatæ GL ad HF, quæ tamen debent esse æquidistantes tangenti circuli MA: Si deinde per puncta GF ducatur flexa, hęc erit *Parabola*.

Probatur. Nam vt est GL quadratum ad FH quadratum, sic intercepta LA est in proportione ad interceptam AH. Ergo ex 6. h. AFG est parabola.

Hoc autem ostenditur. Nam ex prop. 29. lib. 3. El. angulus NAH æquatur angulo ABD, & ob parallelas MN, & EH angulo AHB. Quaderè ABD angulus ãgulo BHA erit æqualis; angulus verò ad A est communis. Ergo triangula ABD,& BAH erũt equiãgula; ideoq; similia; ideoque AH erit ad AB, vt AB ad AD, quadere AB erit media proportionalis, & AH, & AD extremæ. Vnde rectangulum ex DA, & AH æquabitur ex progr. 19. lib. 6. quadrato BA, idest quadrato HF. Et idem concludes de quadrato CA idest LG, quòd sit æquale rectangulo ex DA, & AL. Ideoque quadratum CA erit ad quadratum BA, vt rectangulum ex AD, & AL ad rectangulum AD, & AH; sed hæc rectangula ob eandem altitudinem AD ex prop. 1. lib. 6. Elem. sunt vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum CA ad quadratum BA erit, vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum GL ad quadratum FH, quæ lineis CA, & BA æquantur erunt, vt LA ad HA. Vnde GFA ex 5. huius erit Parabola, & AD Parameter.



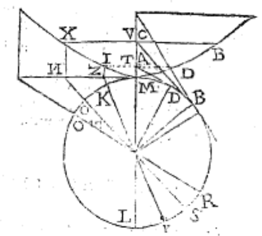
PROBL. IV. PROPOS. LXXV.

Dato Circulo Hyperbolam describere.

TAngentes, quæcumque AD, & CB pro applicatis cõstituantur à pũctis A, & C, quibus intersecant diametrum ML productum, quæ erunt AD, & CB, flexaque BDM per extrema applicatarum ducta erit Hyperbola.

Probatur. Quadratum CB tangentis est æquale rectangulo ex CL secantis, & CM ex propos. 36.

lib. 3. Eucl. sicut, & quadratum AD tangentis est æquale rectangulo AL secantis, & AM. Ergo vt est BC quadratum ad quadratum DA; sic rectangulum ex CM, & CL ad rectangulum LA, & AM. Quare ex 6. huius BC, & AD erunt applicatæ Hyperbolæ, cuius diameter transuersa ML.



Idem efficies; si vtaris tangentibus MZ, MN pro applicatis VX, & IT, & pro interceptis diametri portionibus parte exteriori secantium KZ, & ON, quas transferas in TM, & VM. Itaque eadem ratione quadratum tangentis IT, vel ZM æquabitur rectangulo YZ secantis, & exteriùs assumptæ KZ, idest rectangulo ex TL, & TM; sic tangentis quadratũ MN, idest ęqualis VX equabitur rectãgulo ex NS, & NO, vel VL, & VM, & ideo quad. VX erit ad quadratum TI est, vt rectangulum ex VL, & VM ad rectangulum ex TL, & TM. Quapropter erunt ex 6. huius VX, & TI applicatæ hyperbolæ; cuius diameter transuersa ML.

EXPENSIO XX.

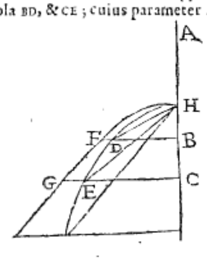
De mutua sectionum trasumptione.

DEductioni sectionum à circulo, & rectangulo debet iure succedere mutua earum transformatio, atque transumptio, & modus docendus est, quo data vna sectione, altera ex illa extrahatur.

PROBL. I. PROPOS. LXXVI.

Data Parabola ex ea Hyperbolam transcribere, vel è contra.

SIt HC diameter, & ordinatim applicatæ in parabola BD, & CE; cuius parameter AH; Qua-



dratis igitur DB, & BH fiat æquale quadratum ex FB; Iterum quadratis EC, & CH fiat æquale quadra-

tum

tum GC ex II. lib.2. & puncta G,F extrema erunt ad Hyperbolam.

Sit AH æquale Parametro Paraboiæ. Igitur BH, & HA rectangulum æquabitur quadrato DB,& ideo si addas quadratum BH; erit rectangulum ex AB,& BH quadratis DB, & BH æquale, & ideo quadrato BF ex Thesi æquale. Sic dicendum de quadrato EC æquale rectangulo AH, & HC; addito, ei quadrato HC quadrata ex EC, & CH, idest quadratum GC ex Thesi eis æquale, erit etiam æquale rectangulo AC, & CH. Quapropter ita erit FB quadratum ad quadratum CG, vt AB, & BH rectangulum ad rectangulum AC, CH, ideoque BF, & GC erunt applicatæ Hyperbolæ ex prop.6.huius, cuius diameter intercepta HA.

PROBL. II. PROPOS. LXXVII.

Data Hyperbola, in qua quadrata applicatarum sint æqualia rectangulis, ex interceptis diametri portionibus Parabolam describere.

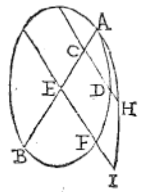
DEtrahatur in præced. fig. à quadratis applicatarum FB, & GC quadrata interceptarum diametri portionum EH.& CH ex 33.lib.6. & quadratorum residuorum latera erunt applicatæ Parabolicæ ad easdem diametri portiones BH, & HC.

Probatur. Nam quia ex Thesi GC quadratum æquatur rectangulo AC, & CH. Ergo ab eis vtrisque ablato quadrato CH erit quadratum CE æquale rectangulo AH,& HC. Rursus si à BF quadrato, & ab AB, & HB rectangulo dematur quadratum BH erit quadratum DB æquale rectangulo AH, HB; at quia ista rectangula conficiuntur ex eodem latere HA erunt inuicem, vt altitudines CH ad BH. Ergo etiam quadrata EC ad BD erunt vt CH ad HB: Ideoq; CE,& DB erunt applicatæ Parabolæ,cuius parameter HA.

PROBL. III. PROPOS. LXXVIII.

Data Ellipsi Parabolam describere.

SIt Ellipsis AB, & in ea diameter coniugata æqualis alteri AB, & applicatæ DC, & EF: Fiatque quadratum HC æquale quadratis ex EC & AC, & quadratum IE æquale quadratis FB & EA. Et CH, atque IE horum quadratorum latera erunt applicatæ in Parabola.



Probatur ex prop.35.Tr.24. cum AB sit diameter coniugata erit rectangulum AC, & CB æquale quadrato CD, & ita quoque AE, & EB æquale quadrato FE: Addito igitur quadrato AC rectãgulo AC, & CB fiet totum rectangulum ex AB, & AC æquale quadratis DC,& CA; sic addito quadrato AE rect. ex EA,& EB fiet totum rectangulum ex AB,& AE æquale quadratis BE,& EA eiusdem altitudinis AE; Ideo erũt inuicem, vt altitudines AC, & EB; sed quadratum HC rectangulo ex AB,& AC ex effectione æquatur; sic etiam EI quadratũ rectangulo ex AB, & AE. Ergo ita erit quadratum ex CH ad quad. EI, vt AC ad AE. Quare CH,& IE erunt applicatæ parabolicę.

PROBL. IV. PROPOS. LXXIX.

Data Parabola Ellipsim describere.

EX parabola describetur Ellipsis adhibita fig. prec. ex propos.33.lib.6. Auferatur quadratum AC portionis diametri à quadrato CH,& latus DC residui quadrati statuatur pro applicata diametri coniugatæ æqualis alteri.

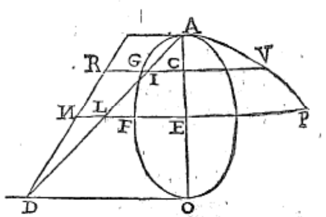
Probatur. Nam quia HC quadratum æquatur rectangulo AB parametri, & AC; si auferatur ab vtrisq; quadratum ex AC remanebunt æqualia quadratum DC, & CA, CB rectangulũ; sic dicas de rectangulo AB, & AE, & quadrato EI à quibus si auferatur quadratum AE remanebunt EF residuum quadrati,& AE,& EB rectãguli ęqualia. Quare erit vt quadratum DC ad quadratum FE; ita CA,& CB rectangulum ad rectangulum AE,& EB. Quare ex 6. huius DC,& FE erunt applicatę Ellipticæ.

Quod verò rectangula applicatarum quadratis æqualia sint eiusdem basis patet, quia habent eundem Parametrum, & AB Parabolæ datæ erit Parameter, at in Ellipsi erit diameter coniugata æqualis alteri, eo quod BEA rectangulum remanet æquale quadrato FE,& sic de alijs.

PROBL. V. PROPOS. LXXX.

Data Ellipsi Hyperbolam describere.

FIat rectangulum isoscelles AOD, deinde ductis in Ellipsi CG, & EF applicatis secabunt AD in I, & L, fiat quadrato CG æquale rectangulum CI, & IR, & quadrato ex FE æquale rectangulum EL, & LN. Erit ADR triangulum, & recta transibit



à puncto D per extrema N,& R. Nam cum sit CI, & RI rectangulum ad EL,& LN rectangulum, vt CG quadratum ad EF quadratum, idest vt CA, & CO rectangulum ad AE, & EO rectangulum habebunt ea rectangula proportionem ex lateribus compositam, sicque stabunt.

Compos.

Compos.			vt		Compos.		
CI	&	IR		CA	&	CO	
	ad				ad		
EL	&	LN		EA	&	EO	
Ergo	latera			latera			
CI	vt	CA		IR	vt	CO	
ad		ad		ad		ad	
EL		EA		LN		EO	

Sed CO,& EO, vt ID ad LD,& ideo erit, vt RD ad ND, quare ID, RD latera stipantia parallelas IR, EN erunt rectæ, quòd triangula sint similia RID, & NDL ex 5. lib. 6. & ideo posita vnum super aliud in angulo D conuenient, & eadem crura efficient.

Si rectangulo igitur CI, & CR fiat quadratum æquale VC, & EL, & EN rectangulo quadratum EP æquale, erunt VC inter CI, & CR, & PE mediæ proportionales inter EN, & LE. Quare ex prop.59. erunt VC, & PE applicatæ Hyperbolicæ, & P, & V puncta ad Hyperbolam.

PROBL V. PROPOS. LXXXI.

Datam Hyperbolam ad Ellipsim reuocare.

HOc fit auferendo quadratum CA ab VC in fig. preced. & EA ab EP, & cet. & latera, quæ residuorum quadratorum contexunt latera erunt applicatę in Ellipsi; cuius diameter transuersa est eadem, ac diameter Hyperbolica, quę potest etiam esse diameter secundaria, licet figura sit de solo axe.

TRACTATVS XXV.

De Sectionibus corporum sphæroicorum per planas superficies.

VIdimus Sectiones Sphere per planas superficies, relationes, proprietates, & dependentias; modo sectiones corporum, quæ aliquid sphærici possident per planas superficies contemplandæ, quæ deinde ad proiectiones, tum sphæræ, tum circulorum, seu orthographicè, seu stereometricè mirabiliter deseruiunt.

EXPENSIO I.

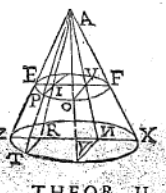
De sectione Coni, cuiuscumque per planas superficies.

SEctio coni post sphæram celebrior, vtpote, que tres mirabiles sectiones exhibeat Ellipsim, Hyperbolam, Parabolam, & insuper triangulum, & circulum, & licet iam de coni sectionibus egerimus, non tamen pro vt etiam pro basi Ellipsim posidet, de ijs tractauimus; quemadmodum nunc agere oportunum iudicamus.

THEOR. I. PROP. I.

Omnis sectio coni Elliptici parallela basi Ellipsis est.

* PRobatur, quod in cono AXZ, cuius basis XYZ sit Ellipsis, *quod, & si sectio parallela* FOPE *sit Ellipsis*. Nam vt NA ad VA, sic XN ad FV, & sic NZ ad VE, & NY ad VO, & *permutando*, ob parallelas in triangulis XAN, & NAY, & ANZ, quorum commune latus est NA. Vnde etiam rectangulum XNZ ad rectangulum FVE erit ex 26. lib. 6. vt NY quadratum ad VO quadratum, Eodemque modo concludes, quod XR sit ad FI, vt RZ ad IE, & RT ad IP: sint in eadem proportione, & *permutando*, ac RA ad IA, eo quòd in triangulis ob parallelas similibus ex 4. l. 6. existat. Quare pariter XR, & RZ rectangulū erit ad rectangulum FI, IE, vt quadratum RT ad quadratum IP. Itaque XN, & NZ rectangulum est ad FV, & VE rectangulum, vt quadratum NY ad quadratum VO, & *conuertendo* FV, & VE rectangulum est ad XN, & NZ rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum YN, & vt XN & NZ rectangulum ad XR, & RZ rectangulum, ita est quadratum YN ad quadratum RT cum XQZ ex Thesi sit Ellipsis, vt autem XR, & RZ rectangulum ad FI, & LE rectangulum, ita est quadratum RT ad quadratum



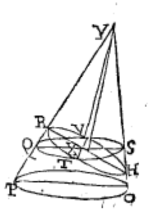
PI, ergo ex *æquo* erit FV, & VE rectangulum ad FI, & IE rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum IP: quare ex propos. 6. Tract. 24. FOE Ellipsis erit.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis sectio coni circularis scaleni, quæ angulos alternos efficiat æquales basi, & ipsa quaque circulus est.

SIt conus OYP, cuius basis circularis OP, & circulus æquidistans, & parallelus QVTS. Iam notum est ex præc. tr. pr. 2. quod si OP basis sit circulus, fore etiam circulum QSVT. Quo supposito ducatur alius circulus, qui cum isto QVST angulos alternos æquales efficiat, ita quod angulus H conclusus latere conico OT, & diametro HR, sit equalis angulo Q clausus latere coni QR, & diametro QS. Et superficies RTH, QTS supponantur perpendiculares triangulo per axem OYP, quare TX, & XV sectio, OYP plano perpendiculariter incumbet ex 16. tract. 22.

Reitaque ita concepta Probatur propos. Angulus apud R in triangulo RQX est æqualis angulo apud H in triangulo XHS. Anguli quoque ad verticem X sunt equales ex prop. 12. lib. 1. Ergo ex propos. 17. lib. 1. Coroll. 2. hæc duo triangula sunt equiangula: Quamobrem latera erunt proportionalia, quæ circum æquales angulos ex propos. 4. lib. 6. Propterea; ita erit crus XQ ad crus XR alterum, sicut crus XH ad crus XS alterius trianguli.



Sed

Sed ex propos. 18. lib. 6. si quatuor rectæ proportionales fuerint illud rectangulum, quòd constituitur à medijs V. g. ex cruribus XH, & RX est æquale rectangulo ex extremis constituto, nempe vt QX, & XS.

At ex propos. 35. lib. 3. rectangulum QX, & XS constitutum æquatur quadrato, ex planorum semisectione XT, aut XV constituto, quia sunt linee, quæ in circulo se intersecant. Ergo pari ratione Rectangulum ex XR, & XH erit eidem quadrato æquale ex semisectione cōstituto; Quare ex dictis pr. 35. l. 6 el. hec duo puncta erūt in circuli circūferentia. Quadropter RTHV circuli circūferentia erit, cùm idem argumentū valeat, etiā si sectio TV fiat aut superius, aut inferius, dummodo parallela sectioni iam factæ planorum RTVH, vel QTVS.

COROLLARIVM I.

* HInc est in Cono scaleno duos axes reperiri, Quia duo centra sunt circulorum, à quibus à vertice Y axis ad quemlibet duci potest, quæ non coincidunt in idem punctum, nempe basis rectæ, quæ fieret, qui, & esset axis coni propriè dictus, & basis obliquæ.

* Ponantur enim æquales RX, & XH: Dico XQ, & XS inequales esse, & ideo punctum X circuli QTSV centrum non esse. Quod si æquales dicantur, ostenditur sine absurdo id esse non posse.

Nam RXQ, & XHS sunt triangula ad verticem ex hypothesi, æqualia quoque crura ambientia æquales angulos ad verticem X, scilicet XS, & QX sicuti RX, & XH ex Thesi, ideo bases equales habebunt QR, & HS. Quare cum anguli apud Q, & H remaneant æquales etiam bases XS, & RX opposite illis angulis septis à cruribus æqualibus erunt æquales ex 22. lib. 1; sed XS ex equalis ex aduersarijs ipsi QX. Ergo QX, & XR erunt bases æquales. Quare ex 14. lib. 1. Elem. anguli R, & Q erunt æquales: Quadere R, & H, vtpote tertio Q æquales erunt æquales anguli alterni, & ideo ex 28. lib. 1. QR, & HS essent parallelæ: quod est absurdum.

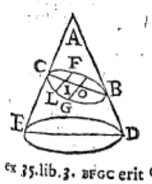
Cum igitur lineæ QX, & XS æquales esse nequeant axis basis QTVS nō poterit esse basis RTVH etiamsi has bases ponas esse Ellipses. Ideoque nullæ Ellipses, vel circuli in conis habebunt communem axem, nisi paralleli.

THEOR. III. PROP. III.

* *Omnis sectio Coni Elliptici, quæ secet vtrumque latus, in qua possit esse maior axis æqualis alteri axi circulus est.*

SIt in cono ADE sectio BC, cuius semiaxis BO maior possit esse æqualis axi alteri OG. Dico BFCG *esse circulum*.

Probatur. Nam BO, & OC, rectangulum ex radijs est ad quadratum OG, æqualis, vt BI, & IC rectangulum ad IL quadratum, & *permutando*; sed BO, & OC quadratum æquatur quadrato OG; Ergo, & BI, & IC rectangulum æquabitur quadrato IL; cùmque BOC axeis asseratur, Ergo ex 35. lib. 3. BFGC erit circulus.



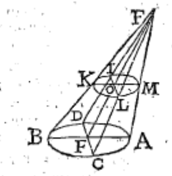
COROLLARIVM.

ILlum conum Ellipticum nullam basim posse habere, quæ sit circulus, si saltem BC axis qui deberet esse maior factus perpendicularis vni laterum trianguli per axem DAE sit maior adhuc, nā tunc axi minori FG etiam ceteræ omnes ex Cor. propos. 17. lib. 1. Elem. erunt maiores ipsa CB; Quod si accidat perpendicularem BC posse esse minorē, tunc aliqua alia longior erit æqualis. Vnde in eo cono poterit fieri aliqua sectio circulus.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

In Cono quocumque Ellipses parallelæ similes sunt.

SInt due Ellipses parallele in quocumque cono, siue elliptico, seu circulari AEB, nempe MLIK, & ADBC. Dico *eas esse similes*.



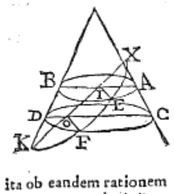
* Probatur. Quod sint similes, vt FE ad OE; sic AF ad MO, & ita CF ad LO ob parallelas MO & AF in triangulo MEF, & CF ad LO in triangulo CEF, sed CF, & LO sunt applicatæ, & MO, & AF portiones diametri, ergo ACDB, & MLIK erunt Ellipses similes ex def. 16. Tract. 24.

THEOR. V. PROPOS. V.

* *Omnis sectio coni Elliptici non parallela basi etiam Ellipsis, est si vtrumque latus secet trianguli per axem.*

SInt AEB, & CFD duæ Ellipses, & sit obliqua basi XEK. Dico eam esse Ellipsim.

* Probatur, Dictum est pr. 53, Cor. Tr. 24. AIB rectangulum esse ad COD rectangulum, vt quadratū EI ad quadratū OF ob ellipses parallelas, quę similes sūt ex prec. Sed vt AI ad CO; sic XI ad XO in triangulis æquiangulis ob parallelas AXI, & CXO. Pariterque vt IB ad OD ita ob eandem rationem IK ad KO.



Componendo igitur proportiones

cum	AI ad CO	vt	XI ad XO	& sit	IB ad OD	vt KI ad OK

Ergo compositum vt compositum.

AI & IB ad CO & OD	erit	XI & KI ad XO & OK

Quare etiam vt rectangulum XI, & KI ad rectangulum XO, & OK sic erit quadratum EI ad quadratum OF ex propos. 16. lib. 5. cum sit eadem proportio quadratorum, ac rectangulorum AI, & IB ad CO, & OD. Vnde ex 6. tract. 24. XEFK erit ellipsis.

THEOR.

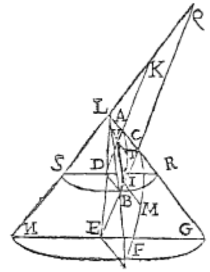
THEOR. VI. PROPOS. VI.

Hyperbolæ parallelæ in Cono ſimiles ſunt.

IN cono GLN ſecto triangulo per verticem ELF ab interſectionibus BD, & FE circulorum BES, & GFN duæ hyperbolæ parallelæ CMFE, & AT-ED diſcedant ei diametri tranſuerſæ protendantur vſque ad Q, & K. Sint autem hæ omnia plana perpendicularia triangulo ex generatione GLN. Dico has ſectiones parallelas eſſe Hyperbolas.

Intelligatur l non ſit ſatis expreſſa ab L vertice in aliquod punctum I productâ lineâ, & à puncto, quo ſecat diametrum vtrumque I, & V duę perpendiculares ad idem planum LNG erigantur IM, & VT; & ex prop. 8. Tract. 22. erunt parallelæ quoque.

Quo poſito probatur, cùm EQ, & DK ſint parallelæ, & ſegmenta ipſarum erit rectangulum ex KV, & VA ad rectangulum ex DA, & KD, vt rectangulum ex QI, & IC ad rectangulum ex QE, & EC; quòd latera obtineant proportionalia. Vt autem rectâ gulum ex EV, & AV ad rectangulum ex KD, & DA, ita eſt TV quadratum ad ED quadratum ex 6. h.



Et vt rectangulum CI, & QI ad rectangulum ex QE, & EC, ita eſt quadratum MI ad quadratum FE. Ergo erit etiam TV quadratum ad quadratũ ED velut MI quadratũ ad quadratũ FE ex 16. l. 5. Quare talia quoque erũt latera ex prop. 26. lib. 6. Elem. ſ. erit TV ad DB, vt IM ad EF; ſed eſt etiã AV ad AD, vt IC ad CE ob parallelismũ linearũ AD, & CE: Ergo hyperbolæ erũt ſimiles ATBD, & CMFE ex prop. 52. Tr. 24. de conicis.

De circulis, & Parabolis non eſt difficultas. Nam omnes parabolæ, & omnes circuli ſunt ſimiles, vt oſtendimus.

Et omnes quoque in cono circulari ſunt parallelæ figuræ, cùm circulus baſi ſit parallelus, at parabola lateri.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

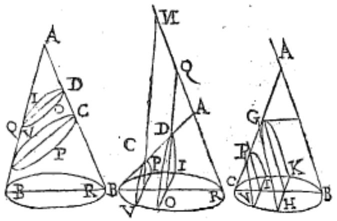
Æquidiſtantes in eodem cono ſectiones, non poſſunt eſſe eædem.

SIt primùm ſectio parabola in cono ABC per axem ſecto plano ABC, & parabolę KGH, & FIV æquidiſtantes.

Dico, quòd hæ ſectiones non ſunt vna alteri eadem.

Probatur. Quia obtinerent parametrum ex propoſ. 39. Tr. 24. æquale, ſi eſſent ſibi eędem, ſed nequeunt conſequi æquale parametrum. Ergo eędem eſſe non poſſunt.

Probatur minor de Parabola. Quoniam ex pr. 41. Cor. Tract. 24. ſi componatur rectangulum ex cruribus BA, & AC, id habebit eam proportionem ad quadratum BC, quam AQ, vel AF portio cruris à verticibus ſectionum, & coni intercepta ad parametrum contiguam; ſed portio AF eſt maior, quam AG; ergo etiam maior Parameter parabolæ IFV quã parab. KGH. Quare nõ ſunt eędẽ.



Sit deinde data ſectio Hyperbola, vel Ellipſis in conis ARB æquidiſtantes. Dico non eſſe eaſdem inter ſe.

Probatur. Nam ex 38. Tract. 24. conic. diametri tranſuerſæ eſſent inter ſe æquales; ſed CN, & DQ tales non ſunt. Ergo neque ſectiones ſunt eędem inter ſe; Aſſumptum verò oſtenditur. Nam AC maior eſt, quam AD. Ergo etiam tranſuerſa diameter CN maior eſt, quam DQ in ACN; ADQ triangulis ęquiangulis. Vnde Ellipſes, aut Hyperbolę non erunt inuicem æquales; ſi ſint parallelæ.

EXPENSIO II.

De Coni ſectionibus in lineam deſinentis.

SPecies eſt coni, qui cum baſim rotundam obtineat, non deſinit tamen in punctum, ſed in lineam, vt conus repreſentat ABCF, de hoc etiam aliqua dicere neceſſarium videtur.

THEOR. I. PROP. VIII.

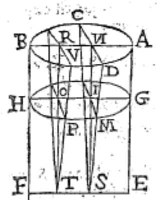
* *In Cono, qui deſinit in lineam rectam habente pro baſi circulum, vel Ellipſim reliquæ omnes parallelæ ſectiones, ſeu intra ſeu vltra baſim, ſi producatur illius coni ſuperficies, ſunt Ellipſes.*

SIt Conus, cuius baſis circulus ACBD, vel ellipſis deſinatq; in lineam EF. Dico, quod ſi in eo ſiat aliqua ſectio, vt GMPH parallela baſi illa ſectio exhibebit Ellipſim.

* Probatur ex ea proprietate Ellipſis, quòd conſequatur diametros inæquales, & quòd omnia applicatarum quadrata inuicem, ita ſe in proportione gerant, vt rectangula ſub interceptis diametri portionibus comprehenſa. Sint ergo applicatæ IM, & OP. Dico, quòd ita eſt quadratum IM ad quadratum OP, vt rectangulum ex GI, & IH ad rectannulum ex GO, & OH.

Probatur. Nam ita eſt MI ad DN, vt eſt SI ad SN, & ita eſt PO ad VR, vt TO ad RT. Lineę verò TO, & SI ſunt æquales, ſicut, & SN, & TR: Vnde poſſunt computari pro eadem: Quamobrem etiam erit

erit MI ad DN, vt PO ad VR, eo quòd ſint eædem proportiones vni tertiæ ex 16. lib. 5. nempe SI ad SN, vel TO ad TR. Cum ergo ſit MI ad DN, vt PO ad VR erit permutãdo MI ad PO, vt DN ad VR. Quare etiã quadrata ex 26. l. 6. ex illis lineis effecta. Sed vt ſe habet quadratum ex DN ad quadratum ex VR, ita eſt rectãgulum ex AN, & NB partibus diametri interceptis ab applicata DN, vt rectangulum ex AR, & RB partibus diametri interceptis ab applicata VR. ex 35. lib. 3. Elem. vel ex 6. Tr. 24. cum ſit baſis circulus, vel Ellipſis. Ergo etiam ita erit quadratum ex MI ad quadratum ex OP, vt rectangulum ex AN, & NB ad rectangulum ex AR, & RB: Sed rectangulum ex AN, & NB eſt æquale rectangulo ex GI, & IH ob parallelas EA, & FB, ob quas æqualia ſunt ſegmenta diametrorum equalium GI, & AN, ſicut, & IH, & NB. Et ita quoque rectangulum ex AR, & RB ex æquale rectangulo GO, & OH ob eandem rationem ſegmentorum æqualium. Ergo quadratum ex MI ad quadratum PO, eſt vt rectangulum ex GI, & IH ad rectangulum ex GO, & OH. Quare erit Ellipſis figura GMPH, cum circulus eſſe nequeat ob diametros inæquales, quia equidẽ eſt maior DN ſemidiameter, quàm MI; ſicut, & maior eſt SN, quam SI, cum quibus ij diametri eandem proportionem dicunt.



EXPENSIO III.

De ſectione ſphæroidis per planas ſuperficies.

AD inueſtigandum ſuperficies corporis ſphęroidis, & ſoliditatẽ, vtile eſt ſcire ſectiones, quæ in ipſo exhiberi poſſunt; ad quam expenſionem ineundam operæ pretium eſt definitiones agnoſcere.

DEFINITIO I.

SEmiellipſis in orbẽ circa ſuum diametrum voluta, donec redeat ad idem punctum, à quo diſceſſit ſphæroidem circumſcribit.

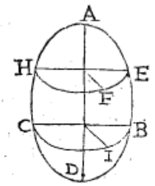
DEFINITIO II.

AXis eius eſt idem axis, circa quem Ellipſis efformatrix circumuoluta eſt, & punctum huius medium centrum ipſius eſt.

THEOR. I. PROP. IX.

Omnis ſectio recta ad axem ſphæroidis circulus eſt.

PRobatur id faciliter ab efformatione ſphæroidis, cũ enim Ellipſis ABCD ſe circũgyrando fecerit ſpęroidem, omne punctum eius circulum effecit. Quare punctum E ſe gyrando per F in H



circulum delineauit, ſed hic eſt parallelus baſi BIC, acte normaliter ad axem AD ſphęroidis eo, quòd ſe girando punctum E non mutet diſtãtiam à puncto B: Ergo axi circulus EFH erit normalis, alterique circulo BIC parallelus.

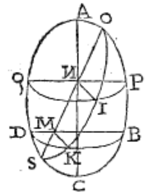
THEOR. II. PROPOS.

Omnis ſectio ſphæroidis axi obliqua Ellipſis eſt.

SIt ſecta ſphęroides ABCD plano obliquo OIKS ad axem. Dico illam eſſe veram Ellipſim.

Sectio ABCD primigenia ſphæroidem conſtituens, ſit plano OIKS recta, nempe tranſeat per aliquam illi plano perpendicularem; patet enim hoc fieri poſſe abſque alia probatione; Et eidem plano primigenio ABDC perpendiculare quoque planum PIQ, & BKD ſecet obliquum OIKS in N puncto: quo obliquum ſecat axem, & in M aliquo alio puncto; Sintque hæc duo plana recta ad axem AC. Sectiones itaque IN, & KM erunt perpendiculares ex propoſ. 16. Tract. 22. plano primigenio BADC, & eius ſectionibus lineis PQ, & BD, & plana PIQ, & BKD erunt circuli, & parallela, vt axi orthogonalia; quibus poſitis, ita.

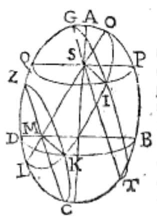
Probatur. Quod PIQ, & BKD plana circuli ſint, & KM, & IN perpendiculares diametris PQ, & BD erit rectangulum PN, & NQ equale quadrato IN. Sicut etiam rectangulum BM, DM erit æquale quadrato MK: Ideo rectangulum erit ad rectangulum, vt quadratum ad quadratum: Sed vt rectangulum ex PN, & NQ ad rectangulum ex BM, & MD. Sic



eſt rectangulum ex ON, & NS ex prop. 43. Tr. 24. ad rectangulum OM, & MS, eo quod BADC ſit Ellipſis. Ergo, vt quadratum IN ad quadratum MK, ita eſt rectangulum ex ON, & NS ad rectangulum ex OM, & MS. Ergo ex 6. Tr. 24. DIS eſt Ellipſis.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Omnes Ellipſes in ſphæroide ſunt ſimiles, ſi ſint parallelæ.



SIt conſtructio, vt præcedens. Sectioq; primigenia ſphæroidis ABCD, & plana circulorum perpendicularia eidem ſectioni primigenię ſint PIQ, BKD, & eidem quoque duæ Ellipſes parallelæ perpendiculares TIG, & CKZ erũt, & interſectiones IS, & KM perpendiculares ex prop. 15.

16. Tract. 22. per quas agatur planum OIKL.

Prob. Sectiones GIT, & ZKC esse similes rectangulũ ex OS, SL ad rectãgulũ ax OM, & ML ex pr. 68. præc. Tr. vt rectãgulũ GS, & ST ad rectãgulũ ex ZM, & MC: sed vt rectangulum ex OS, & SL ad rectangulum OM, & ML, ita est quadratum IS ad quadratũ MK ex prec. Ergo etiam rectangulũ ex TS, & SG ad rectangulum ex ZM, & MC, vt quadratum IS ad quadratum MK. Quare etiam ex 26. lib. 6. SG, & ST lineæ erunt ad MZ, & MC, vt IS ad KM; quare ex def. 16. Tr. 24. sectionum similium, erunt similes sectiones GIT, & CKZ parallelæ.

EXPENSIO IV.

De sectionibus Conoidis parabolici.

QVoniam egimus de præcipuorum corporum sectionibus, parabolicum Conoides inter corpora mathematica non infimum locum obtinens præterire non licet. Tres autem sectiones in ipso fieri possunt præter primigeniam, ex qua generatur, Circulus, Parabola, & Ellipsis.

DEFINITIO.

COnoides Parabolicum Parabola circa suum axem voluta formatur, & axis eius est axis etiam parabolæ genitricis.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Sit sit Conoides parabolicum, cuius basis circularis, & sectum sit plano basi parallelo, sectio circulus erit.

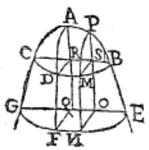
SIt EAG corpus Conoidale Parabolicũ, in fig. pr. seq. & planũ BDC intelligatur æquidistans basi, quæ sit circulus EFG. Dico *hoc planum esse circulũ.*

Probatur. Nam eius ambitus formabitur à puncto C per motum parabolæ circa axem AQ. Et cum illud punctum semper æquidistanter basi moueatur, cumque perimetrum parabolæ maneat semper inuariatum punctum illud C per D, M, B sẽper in æquali distãtia, à cẽtro R, & circulo GFNE pmouebitur, vt patet. Quare CDMB circulus erit.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Omnis sectio Parabolici Conoidis æquidistans axi Parabola est.

SIt Conoides Parabolicum EAG Axis AQ; sintq; parallelæ sectiones OPMN, & altera QADF per axem AQ. Sintque circuli paralleli BMDC, & ENFG, & perpendiculares Parabolę primigenię EACG. Dico OPMN *sectionem axi* QA *parallelam esse parabolam.*



Probatur OP est diameter coniugata in parabola primigenia EAG. Ideoque BS, & SC rectangulum est ad EO, & OG rectangulum, vt PS est ad OP ex propos. 50. Tract. 24. sed ex BS, & SC rectangulum est æquale quadrato SM, & rectangulum ex EO, & OG quadrato ON, Ergo quadratum SM ad quadratũ OM erit, vt SP ad OP, quę est ex prop. 5. Tract. 24. proprietas parabolæ.

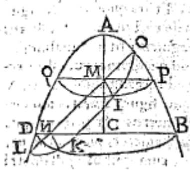
PROBL. III. PROPOS. XIV.

Omnis sectio Conoidis parabolici ad axem obliqua Ellipsim efformat.

DVcantur paralleli basi circuli BKD, & PIQ, qui secent OIKL planum sectioni primigeniæ BAD normale. Eruntq; MI, & KN intersectiones planorum perpendiculares intersectionibus BD, & PQ, & OL ex prop. 16. Tract. 22.

Dico *itaque* OIKL *obliquum planum axi* AC *esse Ellipsim.*

Probatur. Cum PM, & MQ rectangulum quadrato MI, & BN, & ND rectãgulum quadrato NK sit equale eo, quòd sint circuli vt ex pr. 35. El. l. 3. erit rectangulũ PM, & MQ ad rectangulum BN, & ND vt quadratum IM ad quadratum NK ex propos. 7. lib. 5. Vt

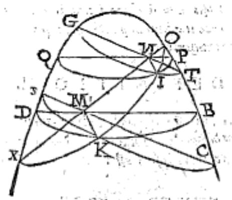


autem rectangulum PMQ ad rectangulum BND, ita ex propos. 48. Tract. 24. est rectangulum OML ad rectangulum ONL. Quadere rectangulum OML erit ad rectangulum ONL, vt quadratum MI ad quadratum NK, hæc autem ex propos. 6. Tract. 24. est proprietas Ellipsi prima, & essentialis.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Ellipses in Conoide Parabolico parallelæ sunt similes.

SInt duæ, GIT, & SMC parallelæ Ellipses. Dico *eas esse similes.*



Prob. Supposita eadẽ prorsùs constructione, quę propos. 11. cum, & sit ijsdẽ verbis eadẽ demonstratio. Rectangulũ ON, & NX est ad rectãgulum OM, & MX ex prop. 48. Tract. 24. vt rectãgulũ GN, & NT ad rectangulum ex SM, & MC; Sed vt rectangulum ON, & NX ad rectangulum OM, & MX, ita est quadratũ IN ad quadratũ MK ex 14. h. Ergo etiã rectangulum ex TN, & NG ad rectangulum ex SM, & MC, vt quadratum IN ad quadratum MK. Quare etiam

etiam ex propos. 26. lib. 6. Elem. ita erit NG, & NT lineæ ita erunt ad SM, & MC, vt IN ad KM: quare ex def. Ellipses GIT, & SKD erunt similes.

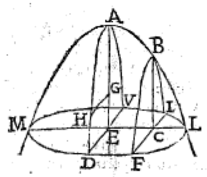
THEOR. IV. PROPOS. XVI.

In Conoide Parabolico Parabolæ axi æquidistantes similes, & æquales sunt.

PArabola IBF detur parallela axi AE, & parabolæ per axem VAD. Dico *eam esse similem, & æqualem ipsi* VAD.

Detruncetur AG ex axe æqualis BC diametro, & ducatur applicata GH, quæ erit parallela ED.

Probatur. Quia vt AG ad AE, ita est quadratum GH ad DE, & quia LAM parabola est; erit LCM rectangulum ex Cor. 1. prop. 50. Tr. 24. de Conicis ad LCM rectangulum, idest ex 35. lib. 3. illi CL, CM æquale FC quadratum ad quadratum DE ęquale LE, EM rectangulo, vt CB ad AE: sed GH quadratum est ad quadratum ED, vt AG ad A, idest BC ad EA. Ergo cum CF quadratum ad ED quadratũ eâdem proportione alludat, vt GH quadratum ad idem ED quadratum erunt æqualia GH, & CF quadrata. Ergo, & lineæ GH, & CF. Quare cũ diametri sint æquales, æqualesque applicatæ, parametri quoque, vtpote æqualium applicatarum quadratis, rectangulorum cum diametro latera erunt æqualia. Vndæ parabolæ erunt similes, & æquales, vt ex definitione.



EXPENSIO V.

De sectione Conoidis Hyperbolici per planas superficies.

COnoides Hyperbolicum recipit omnes sectiones planis diuersimodè illud secantibus; nempe circulum, Ellipsim, Parabolam, & Hyperbolam; de Circulo nihil dicemus, cùm pateat ex antecedentibus ostensionibus Circulum exhibere si planum secet Conoidem, Hyperbolicum parallelũ basi, & eâdem prorsùs demonstratio est, quam adhibuimus in Parabola. Vnde ad alias sectiones ostendendas accedimus.

DEFINITIO.

COnoides Hyperbolicum ab Hyperbola circa suum axem voluta formatur, & axis eius est idem, ac generantis Hyperbolæ.

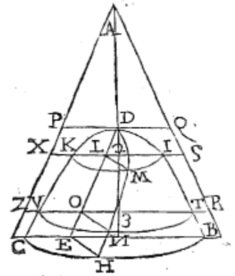
THEOR. I. PROPOS. XVII.

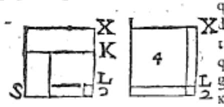
Si planum secet Conoidem Hyperbolicum parallelè ad asymptotum figuræ ex generatione; illa sectio est parabola.

SIt Conoides Hyperbolicum TDV. & figuræ ex generatione eidem TDV Asymptoti sint BA, & AC; sitque DE parallela Asymptoto AC; per quam agatur planũ DHE. Dico *figurãm* DHE *esse Parabolã.*

Ad quod ostendendum constituantur ordinatim applicatæ parallelæ basi 2 K, & 3 V hinc inde, & extendantur vsque ad Asymptotos in X, & Z, R, S, & quia sunt parallelæ basi plana IMK, & TNV circuli erunt, sitque QP tangens sectionem parallela ipsi XS. Quibus perfectis erunt omnes æquales, vtpote inter parallelas lineæ DP, LX, OZ.

Probatur igitur. Quoniam 2 X est secta, vtcumq; in L ex propos. 6. lib. 2. El. erit quadratum totius 2 X æquale duobus rectangulis ex segmentis 2 L, & LX, & quadratis ex ijsdẽ 2 L, & LX, vt in quad. 4. vides. Quadratum verò maius ex LX; quod sit æquale DP æquatur rectangulo ex KX, & KS, ex pr. 46. Tr. 24. quod facit gnomonem circa 2 K; siquidẽ 2S & KX integrat vnã portionẽ, & 2 K alteram sub altero latere KX, vt eodem modò rectangulũ ex LX, & LI faciet gnomonẽ conclusum predicto gnomone ambiens quadratum ex 2L, vt in quadrato XS est videre. Quare quadratum X2 æquabitur quoq; duobus rectãgulis vni ex SK, & KX, & alteri IL, & KL, vnâ cum quadrato 2 L, siquidem hæc omnia ambit quadratũ, cuius latus 2 S, vel 2 X. Si ergo auferatur quadratum paruum 2 L commune vtrisque, & gnomon, idest rectangulum XK, KS, & quadratum maius ex LX, quæ inuicem æquantur remanebit gnomon intermedius, nempe rectangulum ex LK, & LI æquale duobus rectangulis LX, & L2. Sed rectangulum IL, & LK æquat quadratum ML ex 35. lib. 3. Ergo etiam duo rectangula ex LX, & L2 æquabunt quadratum ML.





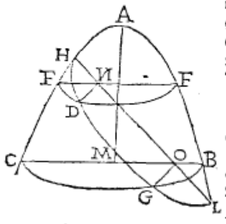
Idem dicas de rectãgulis duobus O 3, & OZ, quę æquabunt quadratũ ON. Et ideo erunt rectangula duo ex 2L, & LX ad rectangula duo ex 3 O, & OZ, vt LM quadratũ ad quadratũ NO. Ideoq; etiã erit medietas, nempe vnicum rectangulum ex 2 L, & LX ad medietatem rectangulum vnicum 3 O, & OZ, vt quadratum ML ad quadratum NO. Sed rectangulum ex 2 L, & LX ad aliud ex 3 O, & OZ est, vt basis 2 L ad 3 O basim ob eandem altitudinem ęqualium LX, & OZ: basis verò 2 L ad basim 3 O est, vt DL ad DO. Ergo quadratum ML erit ad quadratum NO, vt DL ad DO, quę ex prop. 5. Tract. 24. est proprietas parabolæ.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis sectio conoidis Hyperbolici ad axem obliqua Ellipsim exhibet si secet vtrumq; latus sectionis per axem.

Sit sectum Conoides Hyperbolicum BAC duobus planis parallelis ad basim Hyperboleque primitiuæ BAC normalibus FDE, & EGC, quę secent planum aliud obliquum axi AM, & eidem sectioni primitiuæ normale HDGL. Dico hoc planum Ellipsim exhibere.

Probatur. Nam cum plana normalia sint ad hyperbolem primitiuam BAC sectiones DN, & GO erunt quoque normales propos. 16. Tr.22. quare rectangulum ex FN, & NE erit æquale quadrato DN, & rectangulum ex BO, & OC quadrato OG: Sed rectangulum



LXFN, & NE est ad rectangulum BO, & OC, veluti rectangulum ex HN, & NL est ad rectangulum ex OH, & CL ex prop. 48. Tr.14. Conic. Ergo rectangulum ex HN, & NL est ad rectangulum ex HO, & OL, vt quadratum DN ad quadratum OG: quæ est proprietas Ellipsium ex 5. Tract.24. Conic.

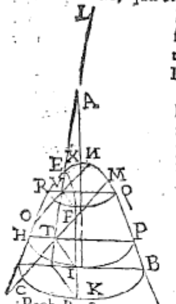
COROLLARIVM.

Ellipses parallelas in Conoide Hyperbolico, esse quoque similes eadem autem figura est, quæ in parabolico Conoide, & eadem ostensio.

THEOR. III. PROPOS. XIX.

Omnis sectio Conoideos, quæ transeat per centrum hyperbolæ primitiuæ Hyperbolam format.

Sit centrum hyperbolę primitiuæ A, & ipsa sectio EMNC, quæ etiam exprimat Conoidem hyperbolicum, sitque sectio TEFI, quę producta transeat per centrum A. Dico *hanc esse hyperbolã*.



Sint plano Hyperbolæ primitiuę BNC normalia, & basi circulari parallela plana QFR, & PIH, ipsaque sectio TEI. Sit quoq; ei BNC normalis, & FV, & TI sectiones erunt normales intersectionibus QR, & PH. Ducantur postea applicatę VN, & TM diametro TA ad puncta V, & T.

Prob. Rectangulũ ex VQ, & RV est ęquale quadrato V: Sic rectãgulũ ex PT, & TH est ęquale quadrato TI. Ergo, vt quadratũ ad quadratũ, ita rectãgulum ad rectangulum. Sed rectangulum ex QV, & VR est ad rectangulum NV, & VO, idest quadratum sunt enim ęquales, vtpote applicatę, veluti rectangulum ex PT, & TH ad rectangulum ex MT, & TC, idest quadratũ ex 49. Tr.24. Quadratũ verò NV ad quadratũ MT est, vt rectangulũ ex diametro transuersa LV, & VB ad rectangulũ ex TE, & LT ex pr.6. Tract.24. Ergo etiam ex 16. lib.5. quadratum VF ad quadratum TI, vt rectangulum LV, & VE ad rectangulum ex LT & TE, quę est proprietas Hyperbolarum ex prop.6. Tract.24. Conic.

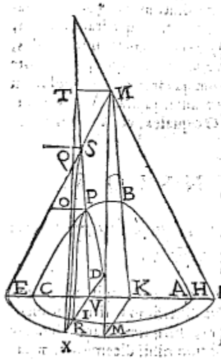
THEOR. IV. PROPOS. XX.

Asymptoti hyperbolæ in hyperbolico Conoide sunt ijdem; ac hyperbolæ in eodem plano existentis, & coni asymptotici sectione effectæ.

Sit Conoides hyperbolicum, atque adeo eius sectio per axem, & ex generatione ABC, cuius Asymptoti NE, NH; qui, & coni Asymptoticũ forment NERH, sitque sectus tum conus HNE, tum conoides ABC plano VSR, in quo formentur due ellipses, altera quidem SR sectione coni HNER effecta, altera DPI sectione Conoidis hyperbolici ABC producta. Asymptotus verò Hyperbolę conicę SR, sit TX.

Dico itaque TX asymptotum hyperbolę conicæ SR *esse quoque asymptotum hyperbolæ conoidalis* DPI.

Probatur. Nam superficies conoidis ABC semper quidem accedet ad superficiem coni HNE, numquam tamen illam assequetur, eò quòd formetur à circumgiratione trianguli ex HNE asymptotis cõstituti, quibus hyperbola semper accedit, licet numquã assequatur ex prop. 44. tract.24. Quamobrem Hyperbola conoidalis DPI, vtpote in superficie conoidis existens cum ipsa superficie conoidis sẽper quidem accedet, numquam tamen assequetur Hyperbolam SR conicam, & à superficie coni effectam, sed & SR semper accedit ad asymptotum suum TX, & numquam assequitur; Ergo etiam Hyperbola DPI accedet ad TX asymptotum, sed illum non assequetur. Quare etiam XT hyperbolæ conoidalis DPI erit Asymptotus, quod accedendo quidem ad SR accedentem ad TX accedat quoque ad TX, quam consequi non potest, cùm nec hyperbolam SR, quæ nec ipsa, acquirere potest XT numquam obtinere queat.



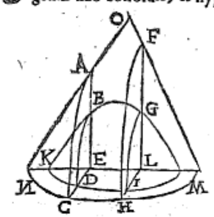
COROLLARIVM.

Hinc est Hyperbolas SR coni, & DPVI conoidis esse similes; quia cum habeant eosdem asymptotos ductis SQ, & PO erunt diametri rectę applicatę sub angulo recto ipsi axi VT; quare erit vt TS ad QS, sic TP ad PO. Vnde sectiones ex prop. 54. tract.24. similes erunt DPI conoidis, & SR coni asymptotici.

THEOR. V. PROPOS. XXI.

In Conoide omnes Hyperbolæ parallelæ sunt similes.

Sit conus asymptoticus MON hyperbolę primigeniæ KBG conoidis, & hyperbolæ in conoide LGI, & BDE, in cono autem FHL, & CAE. Dico DEB, & IGL *esse similes Hyperbolas*.



Probatur. Nam ex Coroll. prop.20 huius DBE Hyperbola Conoidis est similis Hyperbolę CEA coni ex prop. autem 6. h. CAE est similis HFL hyperbolæ, & hæc ex Coroll citato hyperbolæ LGI: Ergo Hyperbolę ILG, & DBE sunt similes.

EXPENSIO VI.

De sectionibus Cylindrorum per planas superficies.

Cylindri quoque sectiones considerandę sunt, & quidem si Cylindrus basim circulum possideat, patet, sectiones basi parallelas esse circulos basi equales, sic si sit Ellipsis, patet quoque, omnes sectiones basi parallelas æquales esse Ellipses, quod ne in apertis immoremur per se manifestum præsupponimus, sicut, & omnem sectionem axi parallelã esse Quadratũ, vel Rectãgulũ, vel Rhombum, vel Rhomboidem in manifestis est. Igitur ea solummodo de Cylindri sectione afferemus, quæ minus clara sunt.

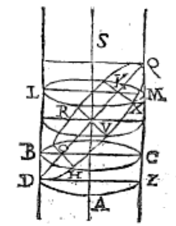
THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si sectio fiat in Cylindro, cuius bases sint circuli ab aliquo plano obliquo axi, sectio hæc Ellipsim representabit.

Probatur. Nam illam proprietatem Ellipsium consequitur, quod habeat diametros inæquales, quos circulus non obtinet, & tamen, quod quadrata applicatarum ad diametrum sint inuicem in proportione illa, qua rectangula sub contiguis diametri portionibus comprehensa.

Nam quod sint duo inæquales diametri, patet: Quod VR sit diameter idem, qui basis Cylindri DZ, qui est circulus: at verò diameter QD longior erit, vtpote basis in rectangulo QDZ diametro circuli ZD.

Quod autem quadrata applicatarum ad diametrum QD quales sunt XK, & OH, se habeant ad inuicem, vt interceptarum diametri QD portionũ rectangula, nempe ex QK, & KD ad rectangulum ex QO, & OD. Prob. Nam ex prop. 35. lib.3. quadratum XK est æquale rectangulo ex MK, & KL; cùm in circulo sint ductæ; & idem dicas de quadrato OH, quod erit æquale rectangulo ex CO, & OB eò quòd sint quoque in circulo. At rectangula habent inuicem eam proportionem, quę ex lateribus componitur ex prop.22. lib.6. quare proportio rectanguli ex CO, & OB ad rectangulum MK, & KL componetur ex proportione CO ad MK, & OB ad KL. At proportio CO ad MK est eadem, quę QO ad QK ob parallelas MK, & CO in triangulo CQO: Et proportio OB ad KL est eadem, ac proportio OD ad KD. Eadem ergo erit proportio ex CO, & OB rectangulum ad MK, & KL rectangulum: quæ est rectanguli OD, & OQ ad rectangulum KQ, & KD, vtpote, quia hæc rectangula ex lineis dicentibus inuicem eandem proportionem sint composita: Sed illa rectangula, nempe ex CO, & OB ad rectangulum MK, & KL dicunt eam proportionem, quam quadratum HO ad quadratum XK, cùm istis rectangulis ostensa sint ęqualia. Ergo etiam rectangulum ex OD, & OQ ad rectangulum ex QK, & KD, erit vt quadratum OH ad quadratum XK: quæ est proprietas Ellipsium ex propos.6. tract.24.



COROLLARIVM.

Omnes Ellipses parallelas in Cylindro esse æquales patet; quoniam habent æquales axes ob earum parallelismum.

Vnde etiam patet, quòd, & si bases cylindri sint ellipses, esse quoque sectionem obliquam axi Ellipsim, eò, quòd ex 6. Tract.24. sit Ellipsium æqualiũ, vtpote: quod prò eadem computari possint BO, & OC rectangulum ad KM, & KL rectangulum, vt quadratum HO ad quadratum KX; quare etiam rectangulum ex OD, & OQ prædict ratione erit ad rectangulum DK, & KQ, vt quadratum OH ad quadratum KX. Vnde ex 6. Tract.24. DHXQ Ellipsis erit.

TRACTATVS XXVI.

DE PROIECTVRIS PARS PRIMA.

De Orthographia.

PRoiectionum vsus amplissimus; tum horologijs, tum instrumentis mathematicis, V.g. Astrolabio, & Quadrantibus: tum Cosmographiæ in planum ad circulos longitudinis, & latitudinis proiciendos, & tandem, & maximè Architecturæ ad proicienda corporum, singularumque planicierum delineamenta perutilis. Et hinc prospectiuæ, cùm priùs illud, quòd iuxta diminutionem ocularis prospectus repræsentatur in planum extendere oporteat,& ipsa quoque corpora, superficiesque in planum proicere.

EXPENSIO I.

Quid, & quotuplex sit proiectio.

PRoiectionis nomen diuerso sensu vsurpatur. Nã apud Vitruuiũ,quidquid extra soliditatẽ, vel columnarum, vel parietum profertur; vt cornices Cymacia Coronides, basiumque crepidines proiectura appellatur,quòd extra soliditatem promineat,& quasi proiectum fuerit. At hic proiectionem dicimus figuram quandam in plano descriptam, quę rem, siue planam, siue solidam imitatur à plano, vel omnino,vel sui aliqua parte eleuatam. Aliqui verò, vt Aguilon lib.6. Optices existimãt proiectionem pertinere ad Opticam, & esse Opticę partem: quod minimè concedimus: quare hęc quęstio instituta est, vtpote huius per necessarię operationis naturam perspectam habeamus.

DEFINITIO.

P*Roiectio est superficiei aliam ambientis in planum impressio.*

Solet definiri proiectio, quod sit *rei solidæ in planum transcriptio*. Verùm si hæc definitio, pro vt verba sonant, intelligatur, omnino impossibilitatem inuoluit: siquidem res solida nunquam potest in planum transcribi; sed solùm illius singulæ superficies: quibus super planum descriptis; deinde res ipsa solida repræsentatur; & licet hoc sensu intellecta, vera euadat; aptiùs tamen videtur definienda. *Impressio, aut vestigium alicuius superficiei in plano impressum,quæ aliam superficiem ambiat, & ita illam aliquo modo repræsentet*; Nam quòd propriè transcriptio non sit patet,quia circulus à plano eleuatus in planũ proiectus per perpendiculares fit Ellipsis. Non potest autẽ dici per descriptionẽ Ellipsis trãscriptus circulus; qa alterius speciei figura est, quis enim affirmabit transcriptum hominem in figura, aut in effigie alicuius bruti?

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Duplex est proiectio, alia vocatur Orthographia. Alia Stereographia.

PRobat. auctoritate Mathematicorum, qui ita sufficienter diuisisse proiectionem arbitrati sunt,tum quia superficies,quę aliam ambit duplex solùm esse potest, nempe sibi, suisque partibus parallela, vt prisma, & Cylindrus. Aut non parallela, sed in vnum punctum contendens ad instar coni, aut Pyramidis; Si superficies illa sit parallela sibi, suisque partibus, dicitur eius impressio facta in plano orthographia: si verò sit ad modum pyramidis, vel coni in punctũque conueniat,dicitur Stereographia, Et hinc vtraque definietur.

DEFINITIO.

* O*Rthographia est superficiei in aliam incidentis in planum orthogonalis impressio.*

Per hoc enim dicitur orthographia, à verbo grę co ὀρθὸς; quod est recta, quod scilicet illa superficies directè in planum incidat, & in eam imprimatur.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

* *Orthographia non nascitur à distantia oculi infinita, quæ lineas visuales rem visam lambentes orthogonaliter in planum imprimat: Est con Franciscũ Aguilon lib.6. opticor. in præfat. ad prop.16.*

PRobatur. Nam lineæ visuales numquam sunt parallelæ, sed in oculum tandem coniunguntur. Dices. Quod data infinita distantia fierent parallelæ. Respond. negando. nam primò non est hæc distantia possibilis,& ideo frustratoria est suppositio, & absurda; secundò etiam si daretur nulla fieret visio, quę determinatos limites habet; quia si infinitè distaret oculus, etiam infinita rei visæ fieret diminutio; sed infinita diminutio in nihil terminat; Ergo nihil videretur. Tandem neque ea distantia data lineæ essent parallelę; quia semper essent lineę visuales; quę essentialiter in oculo conueniunt. Neque dicas esse parallelas putatiuè,& iuxta ęstimationem; Quia licet id esset verum quoad praxim, non tamen abstractè, & spectata linearum visualium naturâ: Mathematici verò de abstractis loquuntur, vt dictum est tract. 3. expens.2.

DEFIITNIO III.

* S*Tereographia est superficiei in punctum terminantis, & aliquam aliam superficiem ambientis impressio in plano.*

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Stereographia non nascitur ab intuitu oculi, cuius lineæ visuales transeuntes pèr corpus aliquod in subiecto aliquid describant. Est contra Aguil. lib. 6. Optic. passim Stereographiam oculo tribuentem.

PRobatur primò. Quia, vt ostendemus,si Deus dederit, cùm de prospectiua agemus, Oculus debet esse remotus à rebus, quas videt, cum ex Arist. sensus super sensibile non faciat sensũ. At verò Centrum Stereographum admittitur super ipsam speram: vnde illud punctum non potest presupponi pro pupilla, cum pupilla super sphæram nihil omnino videret.

Probatur secundò. Quia alio modo planum stereographum se habet, ac planum; quo res visę describuntur, nam hoc interponitur inter centrum concursus linearum coni, & rem describendam: illud verò in planum collocatur post rem describendam, vt sit priùs centrum, deinde res describenda, & tandem planum, in quo describenda est.

Probatur tertiò. Manente re visa, & oculo in eadem distantia,si planum mutetur res eodem modo oculis apparet,& tamen in ipso plano lineæ à puncto, in quo est oculus, ducę aliam descriptionem faciunt priori, quæ cum res erat immota, imprimebatur dissimilem. Ergo descriptio hæc non pendet ab oculo: sed à subiecto,& à puncto, quod,siue sit oculi, seu sit quodcumque aliud punctum, à quo proiectrices proueniant, & per tringentes corpus describendum in subiectum, in quo facienda est descriptio, se conferant.

Probatur quartò. Quia Stereographia repræsentat omnes superficies corporis,tum superiores, tum inferiores, & quascumque alias; quod non facit oculus. Nam solum extrinsecum ambitum rei,quem lineę visuales lambunt in subiecto retrò rem visam manente intuetur descriptum.

CONCLVSIO IV. PROPOS. IV.

Tria Proiectionem immutant, situs rei, situs plani, & eorum distantia.

PRobatur de situ, tum rei, tum plani. Quia,vt patebit, diuersimodè res situata, vel planum collocatum descriptionem variat superficierum;ita vt transferat, etiam, & in alteram speciem lineas superficies, angulosque commutet. Distantia quoq; totius subiecti, licet in Orthographia nihil immutet; in Stereógraphia tamen valdè figuras alterat, & in diuersam magnitudinem diducit.

DEFINITIO IV.

L*inea, vel planum primigenium est illud: quòd repræsentandum proponitur.*

DEFINITIO V.

L*ineæ proiectrices, vel superficies sunt à terminis lineæ,vel plani primigenij discedentes,& in subiectum planum, in quod proiectura cadit; terminantes.*

DEFINITIO VI.

P*lanum proiectorium,& illud: quod proiectionem recipit.*

EXPENSIO II.

De Orthographia Partium superficiei.

PRiùs agemus de orthographia, quam de stereographia,cùm sit facilior, & vt eius fternamus fundamenta,in primis de partibus superficiei agemus; nempe de puncto, lineis, & angulis.

Præassumptum. Licet orthographia, etiam lineis plano non perpendicularibus: sed cum eo certum, & semper æqualem angulum facientibus V.g. 30. Grad. posset operi demandari. Sic enim omnes lineę sub eodem angulo incidentes in planum essent parallelę posset colligi ex Tr.22.de sectionibus planorum.

Veruntamen hoc sensu orthographia non sumitur: nisi aliquando necessitas postulet. Sed sẽper intelligitur fieri ꝑ perpendiculares ipsi plano; tum quia certiores sunt, tùm quia finis orthographię est loca corporum, situationesque reperire,quę videntur esse illę,ad quæ corpora suo ipso pondere feruntur; pondus verò orthogonaliter in subiectum planum incidit.

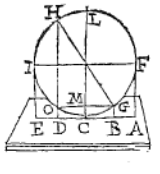
THEOR. I. PROP. V.

Linea parallela plano subiecto in lineam æqualem proicitur, non parallela, seu curua in lineam breuiorem; perpendicularis in punctum.

PArs 1. Probatur. Lineę proiectoriæ EI, & AF proicientes lineam AF incidunt in planum AE

AB ex hypothesi orthogonaliter; Ergo etiam ipsi lineę AB, & consequenter lineę plano parallelæ proiciendę FI; cùm linea proicienda parallela in prima parte propos. ponatur plano, & ideo lineę AB. Ideoq; angulos rectos efficiet ad F, & I. Vnde AIFE erit parallelogrammũ ex def. 25. tr. 3. siquidē in eodem plano lineę erunt ex propos. 2. tract. 22. Ergo ex propos. 33. lib. I. Elem. lineę FI, & AB erunt æquales.

Probatur secunda pars. Et sit linea proicienda GH obliqua plano EA. Cum GH, & GO, & OH, & BD se secent ex propos. 2. cit. erunt in eodem plano. Itaque ponatur; quòd GO faciat angulum rectum cùm Orthographicis V.g. OH; erit itaque GHO triangulum, cuius angulus O rectus, & ideo maior aliis; ideoque basis subtensa maiori angulo recto maior cruribus ex propos. 19. lib. I. Elem. Perinde GH proicienda linea obliqua erit maior crure GO, quod est æquale lineę proiectæ BD.

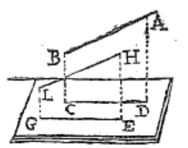


Tertia pars quoque patet. Quod proiciatur linea plano perpendicularis in punctum. Quia LM orthogonalis, sed etiam orthographica LC transiens per ipsam orthogonalis est. Ergo cum ipsa eadem est: sed omnis linea in planum incidens imprimit punctum: Ergo etiam LM in planum proiecta imprimet punctum C.

THEOR. II. PROPOS. VI.

Lineæ parallelæ, aut in eodem, aut in diuerso plano, licet obliquæ sint plano orthographo, in lineas parallelas proiectæ transeunt.

Sint lineæ AB, & HL, aut in eodem, aut diuerso plano. Dico eas in parallelas, proiectas profundi CD, & EG. Nam proiectrices AD, & HE, sicut, & CB & LG ex prop. 7. Tract. 22. sunt parallelę, & AB, & HL ex hypothesi. Ideoque ex propos. 13. eiusdem Tract. etiam superficies per eas ductæ AC, & HG erunt parallelæ: Ideoque ex propos. 14. eiusdem Tract. sectiones CD, & EG, vt à superficiebus æquidistantibus factæ erunt parallelæ.

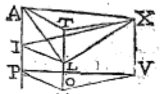


THEOR. III. PROP. VII.

* *Omnis angulus in triangulo omnibus cruribus parallelis plano orthographo proicitur in angulum æqualem: At cruribus non parallelis, & basi parallela obtusior proiectus erit.*

Ac cruribus non parallelis angulus proiectus erit acutior, qui lateri magis oblique opponitur.

Sit AXT angulus proiciendus, & sint crura omnia AX, & TX, & TA parallela plano POV. Dico angulum OVP proiectũ esse æqualem angulo AXT. Patet, quia cum sint superficies proiectrices VOXT, & XVAP ex Thesi perpendiculares plano orthographo POV, ideoq; etiā erunt plano parallelo AXT proiciēdi anguli, ideoque angulus AXT, & PVO ex propos. 4. Cor. 2. tract. 22. erunt anguli inclinationis, qui ex 18. Tr. 22. vbique sunt æquales quocumque loco inter plana inclinata accipiantur.



Probatur 2. pars, quia triangulum IXL habens basim IL parallelā plano VOP magis accedet ad sectionem XV superficierum proiectricum, ergo maiorē angulũ causabit, quam si non accederet, sed rectangulè se haberet, vt AXT ex prop. 22. tract. 22. sed rectangulè se habens cum sectione VX ex parte prima propos. h. angulum proiectum eundem efficit. Ergo IXL angulus basi parallela, & cruribus obliquis maiorem angulum OVP efficiet.

Probatur 3. pars. Quia quò minus oblique incidit angulus AXL eo maiorem angulum inclinationis causat ex prop. 22. tract. 22. Ergo quò magis obliquè intercipietur, idest quantò magis inclinabit ad proiectrices superficies, eò erit angulus inclinationis planorum PVO acutior; sed angulus inclinationis planorum est angulus proiectus, vt p. 1. h. pr. Ergo quò magis inclinabit eò faciet angulum proiectum acutiorem.

COROLLARIVM.

Elicies tamen, quod si alterum crus anguli recti sit parallelum plano etiam si obliquo altero crure; semper in angulum rectum proici. Eo quia si XAT parallelo plano existens ponatur angulus rectus linea XA incidet, ne dum in lineam TA normaliter. Verùm defin. 2. Tract. 22. in omnes ab A procedentes in superficie TAOP existentes, vt in AL: quare XAL angulus rectus sicut XAT, sed XAT facit angulũ rectũ proiectũ ex pr. 7. h. vtpote in plano parallelo ipsi plano orthographico, ergo, & XAL obliquuo crure proiectus fiet angulus rectus.

EXPENSIO III.

De proiectione superficierum in genere.

Visis partibus superficierum, nempe lateribus, & lineis; modo ipsarum figurarum proiectiones sunt inspiciendæ.

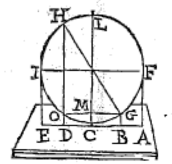
THEOR.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Omnis superficies plano perpendicularis in planum proiecta transformatur in lineam æqualem lineæ parallelæ plano, quæ inter lineas proiectorias intercipiatur.

Sit V. g. superficies circulus LFMI, lineęque extremæ proiectrices, quę lambant extremos margines superficiei sint, FA, & IE, interque eas intercipiatur linea FI. Dico, quod AE æqualis ipsi FI est proiectio circuli.

Probatur primò, quod proiectio superficiei perpendicularis, sit linea; Omnis superficiei sectio linea est, propos. 3. tract. 22. Quamobrem superficies proiectrix in plano Orthographico lineā imprimet. Sed cū superficie perpendiculari proicienda LFMI est eadem superficies proiectrix. Ergo lineā tantùm imprimet. Quòd verò sit eadem cum superficie proicienda proiectrix superficies, patet; quia cum ambæ sint perpendiculares, & per eius extrema FI transeat necessariò vna superficies sit; quòd si non esset vna superficies; super superficiem posita superficies faceret grassitudinem, quod contrà conceptum superficiei est.



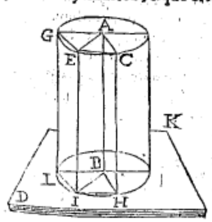
Probatur secunda pars. Nam illa erit longitudo lineę proiectæ AE, quæ latitudo superficiei rectangula. Neque enim potest esse longior, quia excederet superficiem proicientem; Ergo erit æqualis lineæ FI, quę inter proiectrices lineas AF, & EI orthogonaliter intercipitur.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Superficies parallela plano in æqualem, & eandem specie superficiem proicitur.

Probatur, & exemplum sit circulus, ex quo licebit argumentari ad quamcumque aliam figuram.

Sit itaque circulus CEG, cuius centrum A, perque eius circumferentiam CEG transeat superficies proiectrix, quæ circa illum curuabitur, vt superficies cylindrica, eique erit orthogonalis, cùm sit perpendicularis plano KD, cui circulus ponitur parallelus, & ideò EI, GL, CH, & axis BA plano KD ex hypothesi perpēdiculares, erũt parallelæ ex 7. Tr. 22. & æquales. Ergo lineæ coniungētes AE, & BI ex propos. 33. lib. 1. æquales erunt; sic CA, & BH, sic AG, BL, & sic quælibet aliæ: sed AG, AE, & AC suis extremis sunt in circumferentia circuli; ergo etiam BH, BI, & BL.



Et idem erit de qualibet alia figura, v.g. si in circulo descriptũ sit octangulum, aut triangulũ, aut etiam sine circulo; vt patet in figura ACEG, & ei æquali BHIL, proiectæ in planum KD.

THEOR. III. PROPOS. X.

Partes cuiuscumque superficiei, vel laterum eius, quæ in lineam proiecta fuerint, in ipsa linea proiectionis distinguere.

Sit proicienda pars FG V g. circuli FLMI fig. pr. 5. vel 8. in planum; ducantur, à punctis terminantibus perpendiculares FA, & GB, eritque factum, quod desideratur.

Patet, quia omnis linea, seu curua, seu recta orthogonalibus plano in lineam proicitur. Ergo etiam pars FG in lineam AB proiecta erit, cum FA, & GB proicientes sint perpendiculares.

De partibus verò lineæ orthographo plano parallelę non est difficultas vlla, cùm ex propos 9. demonstrauerimus OM, & CD esse æquales, vnde figura proiecta diuidenda erit iuxta æqualitatem partium figuræ primigeniæ.

EXPENSIO IV.

De superficiebus rectilineis proiciendis.

Vsque huc facilia tradidimus, & quasi principia exhibuimus; nunc autem ipsam artem tractamus; & de proiectione superficierum rectilinearum agimus; non quidem cum omnium eorum latera sunt parallela plano, neque, cum ipsa superficies est ei perpendicularis; satis enim de hoc vniuersaliter egimus antecedenti expens. sed modo, aut cum tantum vnicum, aut alterum latus superficiei est plano parallelum, aut nullum, sed omninò à parallelismo discrepat.

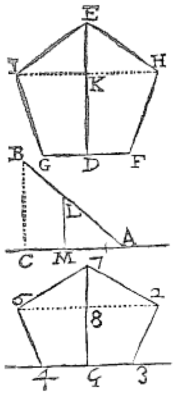
THEOR. I. PROPOS. XI.

* *Superficiem rectilineam, cuius vnum, vel alterum latus sit parallelum plano orthographo, in planum proicere dato angulo inclinationis.*

Iam notum est, quinam sit hic angulus inclinationis ex def. 4. tract. 22. nempe linearũ, quæ cùm sectione, quam imprimit in plano superficies ei inclinans, angulos rectos faciũt, & licet multoties planum proiciendum planum orthographum non secet; adhuc tamen si extenderetur, cum ad illud inclinet, tandem secaret, eique sectioni latus plano parallelum, parallelè se haberet ex Cor. 3. propos. 4. Tract. 22. Vel planum orthographicum accedere posset ad figuram proiciendam, & tangere secundùm latus parallelum. Huic ergo contactui, quem faceret, lineę perpendiculares

altera

altera in vno, alia verò in altero plano existentes, angulum inclinationis constituunt, quem angulum notum præsupponimus; Et sit angulus A, cuius latus AB insistat perpendiculariter lateri GF figuræ proiciendę FHEGI nimirum lateri plano orthographo, ex hypothesi parallelo, & propterea sectioni, vt ex Cor.3.prop.4.tr.22.de intersect. diximus. Ideoque perpendicularis DE in fig erit eadem, ac AB in angulo inclinationis. Transferantur itaque anguli pentagoni proiciendi I, & H, in lineam DE anguli inclinationis ope HK, & KI. Deinde interualla DK, & ED transferantur in latus AB inclinationis; nimirum DK, in AL, & DE in AB, & à punctis L, & B deducantur perpendiculares ad AC existenti in plano orthographo, quæ incident in M, & C. Quia itaque FG ponitur parallela plano ex prop.5. huius in plano delineata, & proiecta erit eiusdem mensuræ, nempe linea 34. & quia est quoq; 34. parallela lateri FG, ipsi linea AC anguli inclinationis erit perpendicularis, & omni lineę, quę sit parallela ipsi sectioni ex Coroll.3. prop.4. tract. 22. Linea verò 34. talis est, cùm sit, vt dixi parallela FC lateri proiciendo sectioni parallelo, & prop.9. Ideoque linea 57. erit eadem, ac AC. Puncta itaque M, & C in eam transferantur eodem interuallo ab A, & sint 8. & 7. & per 8. parallela agatur lateri 34. & sit 2.6. Et quia HK, & KI cùm sit paralla lateri FG, est etiā parallela plano ideo in figura proiecta, & genita erit ei ęqualis 28,& 86. Coniungantur itaque puncta 2. 7. 6. 3. 4. rectis, & iam erit pentagonum proiectum.



Quod patet ex ipsa operatione; simul enim operando ipsam operationem ostendimus. Nam puncta H, & I à media DB non sunt immutata, quo ad distantiam, quia distantia eorum mensuratur per parallelam KI sectioni DB, & plano, ideoque ex propos.5. huius manet eadem. At verò distantia à sectione FG, cum per DE mensuretur, quæ non est parallela plano, decurtata est iuxta prop.5. eo decremento, quod à perpendicularibus LM, & BC exhibitum est in linea AC plano orthographo ducta & pūcta 234, & 6 sunt illa ipsa, quę lineę orthographicè LM, & BC imprimerent, cùm tum quoad latitudinem, tum quoad longitudinem, ac puncta M, & C distent à lineis, & 34. & 75.

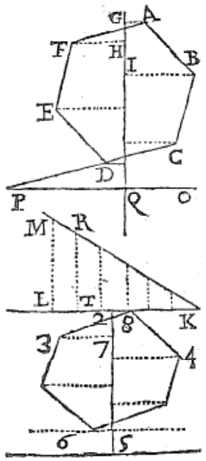
THEOR. II. PROPOS. XII.

* *Superficiem rectilineam, cuius nullum latus sit parallelum plano orthographo; dato angulo lateris figuræ cum sectione, & inclinationis plani proicere.*

SIt Sexagonum ABCD, & cęt. & angulus inclinationis datus K, & sectionis PO cum latere DC angulus, quò enim nullum latus sexagoni sit plano parallelum, neque erit ipsi sectioni. Quoniam, si esset aliquod latus sectioni, esset etiam parallelum plano, vt ex Coroll.2. prop.4. de intersect.

Ducatur GQ perpendicularis sectioni, eique à singulis angulis ducantur perpendiculares AG, & FH, & BI, & cęt. quę cum sint perpendiculares GQ, erunt parallelæ sectioni, quæ quoque illi orthogonalis est; ideoque eorum longitudines erunt æquales longitudinibus linearum proiectarum ipsas exprimentium ex prop.5. h.

Distantiæ verò angulorum normales in linea QG à sectione PO notentur punctis G, H, I, & cęt. Quia igitur QG, vtpote perpendicularis, sect est linea anguli inclinationis ex def.4.tr.22. Ideo stabit loco lineæ KM, & ideo in linea KM à K transferenda sunt omnia interualla QG & QH, & QI, & cęt. quæ erunt KM, & KR, & cęt. Ductis itaque perpendicularibus ML. & RT, & cęt. habebimus omnes prędictas distantias angulorum à sectione; sed in linea KL, quę est in plano orthographo, nimirum KL, & KT, & reliquas perpendicularibus translatas. Ideoque ducta rursùs sectione 56 perpēdicularem ei faciemus lineam 52, quæ exprimet alterum latus anguli sectionis KL, transferemusq; decurtatas angulorum distantias KL in 52, KT in 57, &c. perque puncta 2,7, & alia ducemus punctatas 28, & 73, & similes: quæ exprimunt in figura transferenda lineas AG, & HF, & reliquas, quæ vt diximus sunt eiusdem longitudinis, cum sit parallelę plano orthographo, ac ipsę in plano proiectæ ipsarum vicarię; ideoque linea vicaria 28 erit æqualis lineę AG, & linea 73 lineę HF, & sic de reliquis: Igitur per omnia puncta terminantia ducantur rectæ, & illæ latera sexagoni proiecti efficient.



Probatumque id est in ipsa serie proiectionis; dum singularum operationum ratio reddita est.

COROLLARIVM.

IN omnibus figuris proiectis plano non parallelis angulos, lateraque variari, obliquioraque latera magis decurtari, vt ex propos.5. huius potest colligi. Et angulos, quorum latera opposita magis obliqua sunt minores fieri; Quorum verò aliquod latus parallelum plano orthographico fieri maiores iuxta ostensa propos.7.

EXPENSIO V.

De proiectione superficierum circularium.

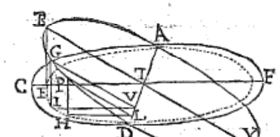
NVnc de curuilinearum superficierum proiectione sermo est, quæ immensos vsus habet, tum in Gnomonica, tum in Architectura, tum in Prospectiua. Ideoque sicut digna studio, sic non difficilis euadet, illis, qui pręcedentia legerint de sectionibus corporum, & maximè conorum.

THEOR. I. PROPOS. XIII.

Proiectus circulus obliquus plano orthographo Ellipsis est.

SIt circulus ABD inclinatus ad alium, seu circulum, seu quodcumque aliud planum ACD orthographum, & superficies proiectrix perpendicularis plano, quæ rectis BE, & GI, & PH exprimatur *hæc signabit in plano* ACD *Ellipsim* AED.

Trahantur ex punctis G, P perpendiculares diametro GV, & PL. Rursusque VI, & HL coniungentes puncta incidentię, tum proicientium, tum perpendicularium sectioni AD.



Probatur itaque propos. Linearum VI, ad LH applicatarum quadrata dicunt ad inuicem eam proportionem, quam ex AV, & VD rectangulum ad rectangulum ex AL, & LD.

Quoniam VG est applicata ad diametrum. Vnde ex propos.35. Elem. lib.3. erit eius quadratum æquale rectangulo ex AV, & VD; Et tale erit ob eandem rationem quadratum LP æquale rectangulo ex LA, & LD ex eadem propos.35. lib.3. Elem. Sed cum triangula VGI, & LHP sint æquiangula ob latera parallela, quibus ambiuntur ex propos.15. Tract. 22. & propos.18. ita erit VG ad LP, vt VI ad LH, & ita quadratum ex VG ad quadratum ex PL, vt quadratū ex VI ad quadratū ex LH ex 26.l.6. Ergo quadratum ex VI ad quadratū LH habebit eam proportionem, quam rectangulum ex AV, & VD ad AL, & LD rectang. quæ est proprietes, tum Ellipsium, tum circulorum ex pr.6.Tr.34. sed circulus esse nequit, cum semidiam. ET sit minor; quam semidiameter circuli TD; Ergo erit Ellipsis circumferentia, quæ per puncta H, & I transit, & sic dicas de quibuscumque alijs punctis.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Proiectura Ellipsis, aut circulus est, aut Ellipsis, si sit obliqua plano orthographo.*

SIt ABD Ellipsis in fig.prec. & supficies pięctrix ab ipsius ambitu decidat in planū subiectum; quæ exprimatur rectis GI, & PH, & quibuscumque similibus plano ACD perpendicularibus, ab eiusque incidentia formetur circumferentia AEID. Dico *hanc aut esse circulum, aut esse Ellipsim.*

* Probatur. Ductis, vt supra rectis VG, & LP, & perpendicularibus ad sectionem AD, quæ erunt parallelę, & VI, & LH coniungentes puncta incidentiæ V, I, & L, H simul, ob parallelismum triangulorum VGI, & LHP, quod in anteced. prop. ostensum est, VG est ad LP, vt VI ad LH. Sed quadratum ex VG ad quadratum ex LP, est vt rectangulum ex interceptis diametri portionibus AV, & VD ad rectangulum AL, & LD. Ergo etiam erit quadratum ex VI ad quadratum ex LH, vt rectangulum ex AV, & VD ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando*, quoque erit quadratum ex VI ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum AL, & LD. Vel igitur quadratum ex VI dicit proportionem ęqualitatis ad rectangulum ex AV, & VD, vel non. Si dicit proportionē ęqualitatis. Ergo etiā quadratū LH dicet proportionē ęqualitatis ad rectāgulū ex AL, & LD ex 12.l.5. Quare AED erit circulus ex propos.35. lib.3. Elem. Vel non dicunt, & sic erit Ellipsis, cùm vt Ellipsis in se se redeat, & cō sequantur eius diametro AD applicatarū quadrata eā proportionem, vt rectangula ex interceptis diametri portionibus, quam requirit propos.6. Tract.24 Si enim est VI quadratum ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando* erit VI quadratum ad LH quadratum, vt rectangulum AV, & VD ad rectangulum AL, & LD: quæ est conditio ad Ellipses requisita.

Intellige verò propos. etiam si sectio, quam facit cum plano non sit diameter, nec maximus, nec minimus, sed aliquis intermedius.

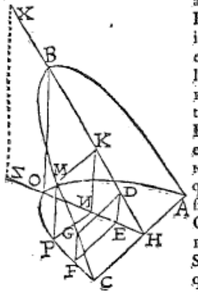
THEOR. III. PROPOS. XV.

* *Situs, seu proiectio parabolæ parabola est.*

DEtur ABC parabola, & eius proiectio AOC. Dico *hanc proiectā figurā esse quoq; parabolā.* Ducatur diameter BH orthogonalis sectioni AB, eiusq; pięctio OH facta à pięctrice superficie BOH, & ab eo applicatę DG, KM, & à punctis D, & G & K & M earum extremis proiectrices descendant DE, & GF, sicut, & KN, & MP, connectanturque puncta incidentiæ E, F, sicut P, N proicientium, rectis, quę sint FE, & PN, & rursus per puncta E, & O recta EO.

Probatur progr. 1. Nam applicatę EF, & DG, vtpote quod DO sit parallela plano ęquales sunt ex propos.5. huius. Sic etiam applicatæ KM, & PN ob eandem rationem: Sed vt est DB ad KB diametri portiones, ita ex 5.pr.tr.24.est quadratū applicatarum DG ad quadratum KM, ergo etiam erit portio DB ad portionem KB, vt quadratum EF ad quadratum NP. Quo supposito.

Progr. 2. vt est HB ad HO, ita est HD ad HE, quare etiam erit residuum DB ad EO, vt totum HB ad totum HO ad 22. l.5.



Et pariter, vt HB ad HO, ita est HK ad HN, vnde erit etiam ex prop. 22. lib. 5. Elem. residuum KB ad residuum NO, vt totum HB ad totū HO. Ergo ex 16. lib. 5 ita erit DB ad EO, vt KB ad NO, cùm eidem rationi, quę est inter HB, & HO sint eędem rationes. Quare *permutando* erit DB ad KB, vt EO ad NO; Sed vt DB ad KB, ita est quadratum ex DG ad quadratum ad KM, & quadratum ex EF ad quadratum ex NP ex progr. 1. Ergo vt EO ad NO interceptæ portiones, ita est quadratum EF ad quadratum NP, quæ est proprietas Parabolæ ex prop. 5. Tract. 24.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

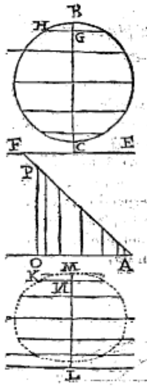
* *Proiectio Hyperbolæ Hyperbola est.*

SIt Hyperbola ABC in fig. superiori, cuius proiectura AOC. Diameter HB perpendicularis sectioni AC, transuersaq; XB. Applicatę verò DG, & KM. Deducanturque DE, & KN, & BO, nec non & MP, & GF proiectrices. & item XZ quæ extremum transuersæ diametri X proiciat in Z, ducaturque ZH, quę transibit per puncta O, N, E, vt ex propos. 10 huius constare potest, cum diameter tota, sit proiecta in HZ, eiusque partes sint in E, N, & O, cōnectantur tandem puncta FE, & PN. Cùm itaq; lineæ GD, & KM applicatæ sint parallelæ sectioni, erunt etiam parallelæ plano orthographo ex Coroll. prop. 4. Tract. 22. Ideoque ex propos. 5. h. EF, & NP erunt eis æquales.

Probatur. vt est rectangulum ex XD, & DB ad rectangulum ex XK, & KB, ita est quadratum DG ad quadratum KM: Sed superiori propos. argumentati sumus, vt est XH, ad HZ, ita est DH, ad HE, & HB ad HO, ablatis ergo proportionalibus HD, & HE; residua remanebunt proportionalia, ex prop. 22. lib. 5. Elem. ideoque erit DX ad EZ, ita DB ad EO, nempe in ea proportione, ac sua tota XH ad HZ, ideoque *permutando* erit DX ad DB, vt EZ ad EO, & eadem ratione, vt XK ad KB, sic ZN ad ON. Ergo etiam rectangula ex lateribus proportionalibus istis composita ex propos. 26. lib. 6. erunt proportionalia. Ideoque erit rectangulum XD, & DB ad rectangulum ZE, & OE, vt rectangulum XK, & KB ad rectangulum ZN, & NO: Quare *permutando*, vt rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK, & KB. Ita rectangulum ZE, & OB ad rectangulum ZN, & NO. Sed, vt est rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK, & KB, ita quadratum in Hyperbola ex applicatis DG ad quadratum KM, & ideo, vt quadratum ex EF æqualis, vt supra dictum est ipsi DG ad quadratum ex NP æquali ipsi KM. Igitur ex 16. lib. 5. erit, vt rectangulum ZE, & EO ad rectangulum ex ZN, & NO, tale quadratum EF ad quadratum PN, quæ est proprietas Hyperbolarum, vt ex propos. 6. Tract. 24.

COROLLARIVM I.

HInc elicies modum proiciendi omnes figuras flexas regulares: nempe Circulos, Ellipses, Parabolas, Hyperbolas. Sufficit enim proicere diametrum sectioni perpendicularem, & basim parallelam sectioni, seu ipsam sectionem V.g. in fig. pr. 13. h. AD, & TB, vel in fig. pr. 14. si sit parabola AC, & HB: Si sit hyperbola AC, & HB, & XB. Data enim basi, & angulo, & diametro iam pr. 55. Tract. 24. docuimus describere, quamlibet ex illis figuris. Sicut etiam propos. 57. data gemina diametro intercepta in Ellipsi sectionis describemus proiecturam, & poterimus quoque vti alijs modis prædictis, tum ex Tractat. 24. tum ijs, quibus functi sumus in describendo figuras rectilineas dummodò plura puncta inueniātur, & per extrema flexa æquali manu ducatur; vt potes videre in figura hic apposità, in quà dato angulò inclinationis OAP, & diametro ca perpendiculari sectioni FE ductis à partibus circumferentiæ, vtlibet V.g. 5. parallelis sectioni, & ideo plano orthographo, & eorum distantijs in AP translatis, & deinde proijcientibus lineis in AO ductis, quæ est in plano orthographo, & distantiis OA, & cet. in ML, & LN translatis ductisque perpendicularibus ipsi LN, vt NK, & cet. & tandē longitudinibus GH in NK, & aliarū applicatarum translatis in alias parallelas ipsi NK dabunt puncta, perque æquabili manu flexa linea deducta exhibebit Ellipsim, in quam transfunditur circulus, eo situ, quam exhibet angulus A, & plani AP, in quo est circulus super planum OA pendulus; plura verò de his agemus, cum de superficiebus corporum proiciendis, & in planitiem redigendis sermo erit.



COROLLARIVM II.

ELlicere hinc potes Cylindros parabolicos, & Hyperbolicos, qui superficie plana constant, & altera parabolica, seu Hyperbolica, vt figura ABCO pr. 15. h. satis representat sectiones esse hyperbolas, seu parabolas; quod euidens est ex præced, nam superficies proiectrix est eadem, quæ Cylindri Parabolici, seu Hyperbolici.

COROLLARIVM III.

HInc deducitur, quod quocumque situ planum Horthographum secet parabolicum, seu Hyperbolicum primigenium, semper figura eiusdem speciei describetur, quia illa sectio planorum poterit esse applicata in aliquo diametro secundaria: vnde semper omnes aliæ applicatæ ei erunt parallelæ, & eædem demonstrationes valebunt.

EXPENSIO VI.

De speciali proiectura circuli in ordine ad sphæram proiciendam.

IN proiectione circulorum sphærę scimus principalem aliquando diametrum proiciendi circuli, & punctum contactus alicuius paralleli cum illo, & Ellipsim illius circuli representatiuam volumus exarare. Quapropter hanc Expens. specialiter ordinamus ad id rectè peragendum.

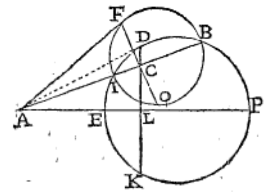
LEMMA PROPOS. XVII.

Si aliqua in circulo sit secta, vt pars maior sit ad minorem, vt tota cum adiecta aliqua ad adiectam extra circulum, etiam alia ab eius extremo in circulum cadens talis erit, si à puncto sectionis illius perpendicularis in hanc demittatur. Nam ita segmentum maius ab hac perpendiculari factum erit ad minus, vt tota cum adiuncta est ad adiunctam extra circulum remanentem.

SIt secans AB ita diuisa in C, vt BC ad CI pars maior ad minorem intra circulum existentes; sic tota BA ad partem exteriorem IA. Quod fiet ex tract. 15. propos. 23. si super BI fiat circulus, & ducatur AF tangens, & à contactu ducatur perpendicularis CF. Nam vt ibi demonstratur BC erit ad CI, vt BA ad IA. Si itaque secans BA talis sit, & ducatur AP per centrum, & à puncto C perpendicularis cadat in L. Dico, quod erit quoque PL maior ad LE minorem internæ partes, vt tota PA ad segmentum exterius EA.

Progress. 1. Probatur. Nam producta LC in D, & à D ducta punctata DA; hæc erit, vt ostēdam contingens. Vnde ex cit. Lemmate ita erit PL ad LE, vt PA ad EA.

Quod verò DA tangens sit ita probatur.



Quadratum ex CF, & CO æquale est rectangulo ex BC. & CI: Ideoque rectangulo sibi æquali ex 35. lib. 3. Eucl. DC, & CK. Huic ergo rectangulo ex CD, & CK comite ei quadrato CL æquatur CF, & CO quadratum cum eodem quadrato CL.

Progress. 2. Rectangulo verò ex CD, & CK addito quadrato CL æquatur quadratum LD ex 7. lib. 2. Elem. Ideoque CF, & CO quadratum cum quadrato CL erit æquale quadrato LD.

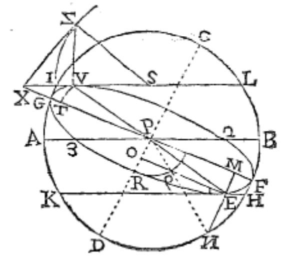
Progress. 3. Quadrata LA cum CL sunt æqualia quadrato CA ex 11. lib. 2. Elem. & hoc CA cum CF quadrato sunt æqualia quadrato AF. Ergo quadratum CF, & CO cum quadrato CL, & quadrato LA sunt æqualia quadrato FA.

Progress. 4. Pone loco duorum quadrati LC, & quadrati CF, & CO quadratū LD ex prog. 2. eis æquale, eritq; quadratum PA æquale quadratis LD, & LA. Sed ex 11. lib 2. Elem. istis eisdem est æquale quadratum DA. Ergo hæc duo quadrata inuicem erunt æqualia: Sed quadratum FA est æquale ex 36. lib. 3. Elem. rectangulo ex BA, & IA. Ergo erit etiam æquale quadratum DA: Quare ex prop. 37. lib. 7. DA tangens erit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Dato situ diametri, & puncto circumferentiæ protecto in aliqua proiectione sphæræ proiectionem circuli, qui per illud incedit inuenire.

DEtur proiectio alicuius sphæræ, vel circulorum in ea V.g. BCAD paralleli plano orthographo, BA perpendiculari maximo, LI, & FK perpendicularibus parallelis, & cęt. In hac autem proiectione sit notus diameter circuli maximi FG, & punctum E, in quo tangit parallelum HK, & huius circuli proiecturam inuenire oporteat.



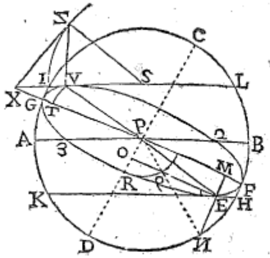
Ab E dato puncto descendat ad diametrum FG perpendicularis EM, & prolungetur in N circuli punctum, & à puncto N linea NP ad centrum tendat: Rursusque à puncto E parallela diametro FG ducatur EO, segabitque primo ductam in Q. Itaq; linea PQ erit æqualis semidiametro minori Ellipsis representantis circulum per punctum E incedentem.

Probatur. Nam Tr. 24. Conic Probl. 2. Prog. 2. propos. 71. Ita est in Ellipsi alicuius circuli diameter maior DP ad minorem RP, vt applicata circulo NM ad applicatam Ellipsis EM, sed vt NM ad NE: Ita ex 2. lib. 6. Eucl. NP ad QP, ideoque ablatis NE, & NQ ex 19. lib. 5. Eu. vel ex 2. lib. 6. erit NM ad EM, vt NP, vel æqualis DP ad QP, vel ęqualem RD. Cum itaque obtineamus DP diametrum maiorem, & RP minorem, Ellipsim poterimus describere, trāseuntem per E applicatę ME extremum ex dictis de Ellipsibus Exp. 19. Tract. 24. Conic. quæ per G, B, F quoque transeat.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis duobus diametris Ellipſim in plano circuli repreſentatiuam exhibere.

SInt dati duo diametri proiecti FG, & 23. Dico per illos duos diametros decurtatos Ellipſim nos poſſe deſcribere, & hoc docuimus propoſ. 55. Tract. 24. Nam hic datur baſis 23 diameter GF, & angulus ab iſtis factus 2 PM. Vnde Ellipſim juxta doctrinam illius Problem. delineabimus.



PROBL. III. PROPOS. XX.

Dato puncto tantùm in aliqua ſphæræ proiectura, per quod alicuius circuli tranſeat circumferentia, ipſam Ellipſim circuli expreſſiuam in plano conſignare.

SIt datum punctum V in parallelo proiecto LI, oporteatque reperire diametri maioris ſitum, ex quò deinde cetera conficiantur, vt priùs.

Fiat, vt LV ad VI ita tota LX ad IX adiunctam, quod fiet ex tract. 15. prop. 22. ſi erigatur perpendicularis VZ; quæ ſecet ſemicirculũ LZI, & ductâ ZS à Z, tangens ZX ei rectãgula ducatur, & LI producatur in X: Nam ex prop. 22. citati tractatus 15. Ita erit LX ad IX, vt LV ad VI. A puncto deinde X ducatur per centrum P recta FX. Nam FG erit axis maior Ellipſis.

Probatur ex prop. 13. Tract. 24. Nam ducta VT applicata habebit eam conditionem, quæ requiritur ad diametrum, & ad tangentem VX, erit enim FX ad GX, vt FT ad TG. Vnde FG erit diameter VX tangens; & VT applicata: Quod autem tota XF ſit ad partem exteriorem GX, vt pars interna maior FT eſt ad minorem TG interiorem.

Patet ex Lemmate 1. huius. Quod ſi LV ad VI, ſic vt LX tota ad adiunctam IX; quod etiam talis erit FT intercepta ad TG, vt FX tota diameter cum adiuncta ad GX adiunctam, quod TV cadat ab V vbi perpẽdicularis ZV cadit, & FX ab extremo X ducta, quod eſt lineæ diuiſæ, vt LV ſit ad VI, vt LX ad XI.

TRACTATVS XXVI.

PARS SECVNDA.

De Stereographia.

QVamuis Stereographia poſſit in opus redigi puncto concurſus linearum proicientium à re proiecta diſtante, ſicut, & ſupra Orthographia per lineas plano non rectangulas exerceri, nihilominùs, quia Stereographia ſpecialiter ſphæræ circulis proiciendis inſtituta eſt, & in hunc ſcopum præcipuum ante omnia collimat; ideo concurſus linearum proicientium in ſuperficie ipſius ſphæræ in primis ſumitur. Quamuis etiam remotum ab ipſa re proiecta ſumatur, cum de alijs rebus proiciendis, & etiam de ipſa ſphæra, non tamen in ordine ad cæleſtes motus, agitur.

EXPENSIO I.

De proiectura lineæ.

HIc itaque lineas in circulo præcipuè conſiderabimus, vtpote, quod Stereographia ſit ad proiectionem corporis ſphærici in ordine ad cæleſtem ſphæram deſtinata, & quia corpus cæleſte luminoſum circa ſphærã ſe voluens, eiuſq; circulos radijs incurrens tali modo vmbras eorũ in planum, profunderet; hinc Stereographia inuenta, & ad id deſtinata; vt cæleſtes corporum opacorum proiectiones à luce effectas imitetur, cuius hic prima principia iactamus.

PRIN-

PRINCIPIVM.

IBi vniuſcuiuſque rei proiectio eſt, vbi lineæ proiectrices à puncto proiectionis obuenientes, & margines rei lambentes in planum incidunt.

Sic CD eſt proiectio lineę AB, quia lineę CI, & DI proiectrices extrema B, & A lambentes in planum CD incidunt, & ibi eius ſitum determinant reſpectu puncti A, & B in fig. pr. 1. ſeq.

DEFINITIO I.

PVnctum proiectionis dicitur, ad quod omnes lineæ extrema rei projciendæ lambentes concurrunt.

DEFINITIO II.

LIneæ verò proiectrices dicuntur illæ, quæ ab hoc puncto diſcedentes, extremaque rei projciendæ lambentes in planum cadunt.

Taleſque ſunt IC, & ID.

DEFINITIO III.

PLanum Stereographum eſt illud, quod diuidens ſphæram bifariam omnes lineas proiectrices terminat.

Poterat quidem planum Stereographum ſupponi ſphæræ, ſed cum ſtereographia inſtituta ſit ad nobis exhibendas cæleſtium circulorum vmbras, & nos ſimus in centro, planaque, quæ apud nos ſunt, aut per centrum tranſeunt, aut ei proxima ſunt inſenſibiliter reſpectu immenſitatis ſphærarum, hinc eſt, quòd planum ſtereographum per centrum agatur, & in eo circulus maximus ſphæræ reperiatur.

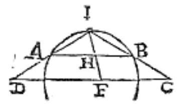
THEOR. I. PROP. I.

Linea plano Stereographo parallela in lineam maiorem proicitur, ſed partibus proportionalibus correſpondentem.

SIt linea in ſphæra AB, & à puncto I deſcendant lineæ proiectrices CI, & ID, quæ intercipiant lineam proiectam CFD in plano Stereographo exiſtentem.

Dico I hanc eſſe maiorem primigenia AB.

Patet. Quia eſt AB ad CD ob paralleliſmum linearum, vt BI ad CI. Sed CI eſt longior quam BI: Ergo etiam CD erit maior, quàm AB ex propoſ. 12. lib. 5. Elem.

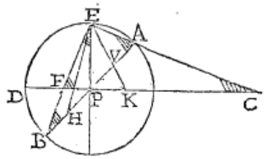


Probatur ſecunda pars. Nam ducta IF. Dico, quòd vt partes lineæ primigeniæ AH ad HB, ita ſe habebit, DF ad FC, quod probauimus propoſ. 4. Elem. in Coroll. 2.

THEOR. II. PROP. II.

Linea obliquata plano Stereographo in lineam proicitur maiorem.

*PRobatur. Nam Triangula CEF, & AEB ſunt æquiangula: ſiquidem in triangulis FPE, & EBA nigri apud E, & B anguli ęquantur ob radios ſubtenſos ęquales, angulus totus AEB apud E, & FPE apud P recti, & ideo æquales, quamobrem etiam reliqui A, & F. In triangulo ergo FEC habemus angulum F nigrum æqualem angulo A nigro trianguli BEA, angulus verò AEB rectus cõmunis, reliquus ergo C æquatur angulo B ex 17. l. 1. El. Cùm ergo triãgula ſint æquiangula erunt ſimilia, & latus EF trianguli FEC ſit maius latere EA trianguli BEA erit etiam baſis FC linea proiecta maior quam primigenia BA.



COROLLARIVM.

HInc dignoſcitur, quo pacto, ne dum diameter, ſed etiam ſingulæ eius partes in planum ſtereographum proiciantur: ſufficit enim dato angulo inclinationis APC deducere lineas proiectrices à centro E radioſo per partes A, V, P, H ipſius in ipſum planum. Nam ipſę ſuis extremitatibus notabunt partes C, K, P, in CF plano proiectas.

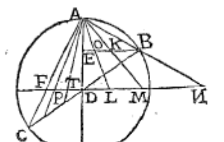
Sic, ſi dentur proiectæ partes ad partes primitiuas reuocare poteris lineas proiectrices deducendo ad centrum ipſarum.

THEOR. III. PROPOS. III.

* *Omnes Stereographicæ lineæ cuiuſcumque partes augentur muſicâ proportione.*

LOquimur de lineis. Ne dum ab aliquo puncto circuli per æquales partes diametri ductis: ſed quibuſcumque in qualibet diſtantia, & qualibet lineâ ductis; dummodo per illius partes æquales à puncto dato trahantur.

* Sit A punctum datum, & in lineâ BC partes ęquales quęcunque, & per eas ductæ AP, & AT, & cæt. Dico eas eſſe in proportione muſicâ, & DF eſſe ad DT, vt differentia PF ad differentiam TP.



* Probatur ex prop. 11. tract. 16. de progr. Nam DF incidit in triangula baſium æqualium quæ, ſunt partes in linea CD. Ergo incidentes FD partes FD, PD, & TD decreſcent in proportione muſicâ. Sic dicas de partibus ND, & DM, & LD. Nam BE parallela

ND

ND inci it in triangula basium æqualium lineę DB. Ergo in proportione Harmonicâ BE erit ad OE, vt differentia BK ad KO differentiam. Sed ob parallelas EB & DN ex 4 lib. 6. vt est ND ad LD, sic EB ad FO, & vt EF ad FO, sic est FK ad KO, vt autem BK ad KO, sic MN ad ML: Ergo ex 16. lib 5. Elem. vt ND ad ED; sic differentia NM ad differentiam ML.

EXPENSIO II.

De proiectura circuli.

POtest duobus modis proici circulus, vel in ordine ad sphæram proiciendam, de qua re multa apud Aguilonium reperies, vel in ordine ad quemcumque circulum proiciendum; de proiectione prima hic agemus de alia expens. sequenti.

THEOR. I. PROPOS. IV.

Circulus perpendicularis in rectam proicitur lineam indefinitam.

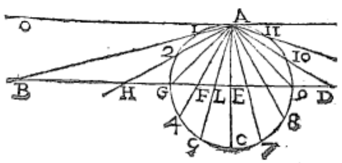
PRobatur. Nam, quòd sit linea, iam id demonstrauimus de omni proiectura perpendiculari. Sed quod sit linea nullis conclusa terminis ita ostenditur vtendo schemate prop. seq.

Sit centrum proiectionis A, & debeat deduci à puncto A linea proiectrix, & tangat extremum marginem circuli AGC9 ad hoc, vt totum circulũ exprimat, aut cum proiectrice AC faciet angulum rectum, aut minus recto. Si faciet minus recto, vt AB ex prop. 18. lib. 3. secabit ipsum circulum, & pars circuli AI, vel AII extra remanebit: Debebit itaque ipsi AC esse perpendicularem, & contingere circulum in A, vt AO; Ergo erit parallela plano orthographo. Quare numquam illud secabit. Ergo linea expressiua circuli in plano otthographo numquam a linea proiectrice terminabitur, cum ei parallela sit. Erit ergo indefinita.

PROBL. I. PROPOS. V.

Perpendicularem proiecturam circuli, & partium eius in plano transcribere.

DVcto plano DG transeũte per cẽtrum E circuli proiciendi AGC9, & situato puncto proiectionis A, vtlibet: sed consuetè ad extremum lineæ CA plano orthographo DB perpendicularis, diuidatur in 12. partes V. g. transeantque per singulas lineę proiectrices à puncto A. V. g. AB per partis primæ extremum I; sic AH per extremam partis 2. & sic de cæteris. Partes namque HB, & GH, & GF, & cæt. erunt in plano partes circuli perpendicularis ipsi plano proiectæ.



Probatur. Nam quoad ipsius circuli proiecturam iam ex præced. propos. visum est esse lineam indefinitam FB.

Quoad verò partes proiectas; ostenditur. Quoniam lineis rem proiciendam extrema stringentibus decernitur; Tales autem sunt partes proiectæ HB, & HG, & cæt. Siquidem lineæ proiectrices eas determinantes transeunt per extrema partium circuli I. 2. AI, & 2. G, & cęt. in quas dispescitur.

THEOR. II. PROPOS. VI.

Circuli partes æquales in partes inæquales proiciuntur, quarum illæ maiores, quæ ad perpendicularem magis accedunt.

DIco in partibus proiectis EL, & LF esse maiorem LF; quàm EL; quia magis à perpendiculari EA abscedat.

Probatur; Quia anguli, vtpote æqualibus peripherijs insistentes CA 5. & 5 A 4. sunt equales, erit angulus CA 4 diuisus in duas partes; Quaderè ex propos. 3. Eucl. vt est AF ad EA, ita erit LF ad LE: Sed AF est maior, quam AE, vtpote basis angulo recto subtensa: Ergo etiam FL maior erit, quàm LE, & ita de cæteris.

THEOR. III. PROP. VII.

* *Tres partes proiectæ circuli in lineam, quæ æquali numero partium interpositarum distant à quadrante proiecto dicunt proportionem Geometricam continuam, & diameter semper est media proportionalis.*

SIt quadrans proiectum in EB linea. Dico AG EF ad EG, ita esse vt EG ad EH.

* Probatur ex prop. 7. de angulis Tr. 19. Nam EG æqaatur EA; anguli verò FAG, & GAH sunt equales cum æqualibus peripherijs initantur. Ergo ita erit EF ad EG, vt EG ad EH, & eadem ratione EL erit ed EG, vt EG ad EB, Quare diameter EG erit semper media proportionalis.

COROLLARIVM.

*HInc patet omnia rectangula EL, & EB, sicut, & EF, & EH, & sic de alijs esse æqualia; quoniam æquantur quadrato EG, quod EG sit ex propos. 19. lib. 6. Elem. intereas semper eadem media proportionalis.

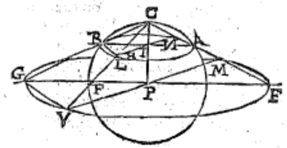
THEOR. IV. PROPOS. VIII.

Circulus parallelus plano Stereographo proiectus est circulus maior: centrumq; in eadem proiectrice linea, cùm vero centro est; Partes quoque maiores quidem; sed proportionales.

SIt in sphera ACB, circulus ALB parallelus Stereographo plano EG. Dico hunc circulum in circu-

circulum maiorem FVG profundi.

Quod patet ex dictis in Conicis, cum enim omnes lineæ à puncto proiectionis lambentes circuli circumferẽtiam conum constituant ex ijsdem, clarum est, quòd, si productæ alio plano parallelo, vt est Stereographum secentur in eo circulum descripturas. Coni enim, cuius basis circulus ex propos. 2. Tract. 24. omnis sectio parallela basi circulus est.



Dico 2. Centrum circuli proiecti P cum centro circuli proiciendi I in eandem lineam PC proiectricem incidere. Quot patet ex prop. 2. tract. 25. Cor. Nã solus conus scalenus habet duos axes hic verò conus rectus est, vnde habebit vnicum axem: axis autem ex def. per centra transit basium.

Probatur tertia pars, quod partes circuli proiecti sint quoque proportionales primitiuo.

Cum planum stereographum ponatur parallelum, plano circuli primitiui, si GCV planum illa secet sectiones BL, & GV erunt parallelæ ex prop. 16. tract. 22. Quare erit, vt CL ad LB; ita CV ad VG in triangulo CVG. Propterea que *permutando* erit, vt CL ad CV, sic LB ad VG. Sed CL ad CV, sic est IL ad PV: Ergo vt diameter IL ad diametrum PV, sic LB subtensa ad VG subtensam: quare etiam arcus eas subtendes toti circumferentiæ erunt proportionales ex propos. 39. lib. 6. Elem.

Patet verò esse maiores, quia CL est ad BL, vt CV ad VG, sed maior est CV, quam VG: ergo ex 12. lib. 5. etiam GV subtensa, quàm BL: Quare etiam maior erit ex propos. 6. lib. 36 peripheria GV, quam BL.

COROLLARIVM.

HInc facilè patebit modus, quò circulus parallelus plano stereographo imprimatur.

Nam ex prædictis Theor. I. expens. 6. sufficiet inuenisse diametri ipsius longitudinem, & inde centrum patebit, si diuidatur bifariam.

Partes quoque singulæ proicientur, si circulus proiectus in tot partes æquales diuidatur, in quot primigenius diuisus est, Aut eodem centro descripto circulo primitiuo, per singulas eius partes ad ambitum proiecti radij transeant; qui in circulo proiecto notent primigenij singulas partes.

THEOR. V. PROPOS. IX.

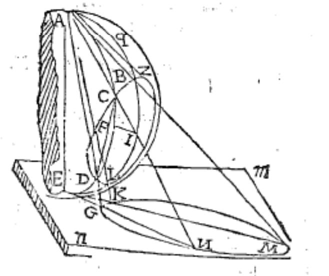
Circulus plano Stereographo obliquus proicitur in circulum maiorem; sed cuius centrum cum centro primitiui in eadem linea proiectrice non sit.

IAm supra dictum est Tract. præc. propos. 2. quòd si planum secet subcontrariè conum; cuius basis circulus sit; etiam sectio ipsa circulus erit.

Sit itaque circulus in sphera quicumque ZBCDL & lineę proiectrices eius peripheriam vndique lambentes, vt est BA, & CA, & LA, & DA, & cęt. conueniant in A centro proiectionis. Dico, quòd si continuentur vsque ad planum Stereographum mn, cui EA perpendicularis est: quod planum secabit superficiem conicam, quam integrant, subcontrariè, & ideò quod peripheria MNGK erit circuli ex propos. 2. tract. 25.

Probatur. Illa enim est sectio subcontraria, cum planum secans cum superficie coni facit angulos æquales angulis, quos facit cùm eadem superficie, basis primitiua coni: sed planum MN facit cum superficie protensa coni eosdem angulos, quos facit circulus planus ZBDL basis, cuius vertex A, ergo secat subcontrariè.

Ad id autem probandum elligantur duo puncta quæcumque. Erit enim par ratio de istis, & de omnibus alijs V. g. C, & D in circulo sphæræ, & à vertice A per D agatur linea vsque ad planum in G, & sit AG descripta super planum circuli ACDE, ideoque fiat de puncto C ab A vertice agendo lineam AC descriptam super semicirculum ACDE, & productum vsque dum tangat planum mn in N. Ita quod concipiatur superficies plana semicirculi ACDE prolungata, & peruenire vsque ad N, & imprimere suæ sectionis vestigium in plano lineam NE. Transibitque per G, cum sit ADG recta in eodem semicirculi extensi ACDE plano. Ducesque in eodem plano CD rectam communis sectio plani circuli ZCL minoris basis coni, & semicirculi ACDE.



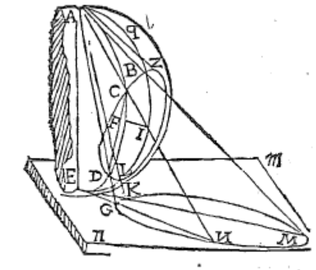
Probandum est itaque DC plano basis extensam eosdem angulos facere cum lineis coni NCA, & ADG, ac cum ijsdem facit NG linea plani stereographi.

Angulus itaque CAE apud A cum sit angulus ad circumferentiam insistit arcui CFDE: sic angulus apud D nimirum CDA pariter ad circumferentiam in D substernitur reliquo arcui CA. Quapropter erit anguli apud A complementum vsque ad semicirculum ECA, cumque anguli ad circumferentiam sint subdupli angulorum ad centrum, ideo semicirculus ECA. vt eorum mensura centralis quadrans erit: nam dimidium arcus EDC esset mensura anguli ęqualis ad centrum, & dimidium arcus CA esset anguli ad centrum mensura æqualis reliquo angulo apud D. Ideoque simul angulus CAE, & CDA æquant angulum quadrantis. Nempe rectum, & CDA est complementum alterius CAE.

Sed huius quoque anguli CAE est complementum angulus N rectilineus. Quoniam angulus NEA rectus est ex hypothesi in triangulo NAE.

Ergo

Ergo reliqui anguli erunt æquales vni recto, cùm omnes trianguli anguli ex propos.17. lib.1. Elem. tantùm duobus rectis æquales sint: Quare eiusdem anguli CAB erit angulus N complementum, vt CDA. Ergo erit æqualis angulo CDA. Quoniã verò angulus CAD in triangulo CAD deseruit etiam triangulus NAG, & angulus N ostensus est æqualis angulo CDA; reliquus quoque ACD erit æqualis reliquo NGA ex 17. lib.1. Cor.2.



Idem autem argumentum contexes de quibuscumque alijs angulis. Quare sectio plani stereographi erit subcontraria: vnde MNGK circulus erit.

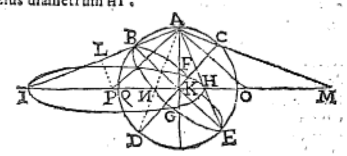
Probatur secunda pars. Quoniam subcontraria sectione circuli non se intersecant per centra ex Coroll. propos.2. Tract.25. nempe eorum sectio per centra vtriusque non transit. Vnde linea ab A transiens per centrum I non transibit per centrum circuli proiecti NMGK.

PROBL. II. PROPOS. X.

Circulum obliquum in planum Stereographicè proijcere, polosque eius, & centrum assignare.

INuenienda priùs est pars circuli centro A remotissima, parsque propinquissima, si non sit cognita. Id verò fiet ducendo per puncta C, & D polos circuli dati circulum maximum CABDE. Namq; ex prop.22. 3. partis spheris circulus arcum BA habebit, qui inter omnes, qui ad circumferentiam obliqui circuli FBGD duci possunt breuissimus erit, & ACE, qui erit maximus, & dessignabit distantiam maximam in E, & minimam in B à centro proiectionis A.

Transeant itaque per inuenta puncta E, & B lineæ proiectrices AE, & AB, & dabunt H, & I puncta, per quæ circulus proiectus debet incedere, & eius diametrum HI.



Secundo. Bifariam diuidatur HI, & centrum in P circuli proiecti obtinebimus.

Tertio. Transeant proiectrices per polos C, & D, & polos in plano proiectos cõsequemur M, & N. Itaq; seorsim circulus OQ ipsius sphęræ describatur; sẽper enim in omni piectione hic circulus presupponitur; cùm sit sectio ipsius sphæræ, cùm plano stereographo, eo quia planum stereographum ex definitione secet sphæram bifariam. Sitque I n 2 m; assumaturq; distãtia O H; & sit 1 3. deinde distantia PH, & sit 3 2, centro itaque 2 interuallo 2 3 describatur circulus 3 5; eritque circulus proiectus. Deinde OM ab 1 in 7, & distantia NH, & transferatur ab 3. in 6. eruntque poli 7. & 6. circuli proiecti 3 2. vt vides in fig.pr.12.h.

* Potest etiam reperiri centrum circuli independenter à lineis AH, & AI circuli proiectricibus si fiat angulus trianguli EAK ad A alteri angulo trianguli LAP ducendo AP ad A, æqualis. Nam P erit centrum circuli; Quia enim angulus E trianguli AEK æqualis est angulo ad A eiusdem trianguli ob æqualitatem laterum EK, & KA, & est etiam æqualis angulo I, quòd fit sectio subalterna, vt pr. 2. & 9. h si fiat alius angulus IAP ad A, erunt duo anguli quoque æquales I, & A in triangulo API: Quare etiam latera subtensa erunt æqualia AP, & PI.

Sed ob similitudinem triangulorum subcontrariorum etiam triangulum AKB est simile triangulo AHP. Siquidem angulus apud B, trianguli EAB est æqualis angulo apud H trianguli subalterni HAI, ex 2. vel 9. h. angulus verò KAB addito communi PAK vtrisque æqualibus HAK, & PAI angulis est æqualis angulo HAP: sed triangulum AKB est Isoscellum ob radios æquales; ergo etiam tale erit triangulum APH. Vnde crus AP erit æquale cruri PH, & cruri PI, vt supra ostensum est, hæ itaque portiones erunt, æquales HP, & IP, ideoque P centrum erit.

* Idem quoque consequi poteris, si diuisa bifariam AI in L ducas perpendicularem LP, quę secet planum stereographum in P, vt patet ob API ęquicrurum triangulum.

PROBL. III. PROPOS. XI.

Partes circuli obliqui in planum Stereographum proijcere.

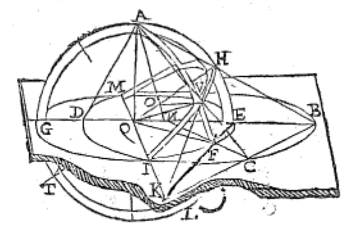
MVltis modis hoc Problema potest in opus deduci nos quatuor sceligemus, ad quos alij ferè reducuntur: Primus ope polorum; Secundus ope secantium: Tertius ope chordarum: Quartus ope sinuum.

THEOR. VI. PROPOS. XII.

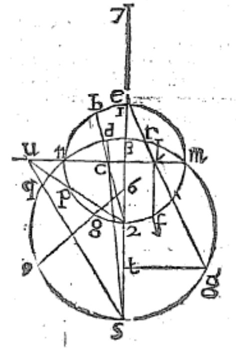
Quæ à centro poli circuli proiecti discedit, & per partem aliquam circuli sectionis sphæræ transit, eã in partem proiectam circuli proiecti incidit.

SIt sectio sphęrę EIGM, & circulus proiectus BCID. Polusque in eo proiectus N. Dico quod CN transiens per EF partem circuli sectionis sphęrę ęqualẽ parti HV circuli obliqui HVI proiciendi cadit in idem punctum C, ac linea proiectrix AC.

Iam ostẽsum est tr.23.pr.16.p.3. circulũ minorem



rem AVF transeuntem per polum superum circuli sectionis sphęrę A, & alium polũ L circuli obliqui, HVI, & sectione AL proicientem polum A in N, detruncare ab vtroque circumferẽtias ęquales HV, & EF: si ergo superficies huius circuli extendantur vsque ad C, & sit ANC superq; eã à puncto A centro proiectionis simul, polusque circuli sectionis EIG extendatur linea proiectrix recta transiens per V perueniet in C, & secabit NC, quæ est sectio eiusdem superficiei extensę circuli AVL cũ plano BD proiecto; pars ergo BC, quę à linea proiectrice transeunte per V decernitur, illa etiam determinatur per CN, quæ transit per F, & truncat partem EF, à circulo sectionis æqualem parti HV circuli obliqui proiciendi.



Dato itaque circulo sectionis 2 1, & circulo proiecto 3 5, & cognita parte circuli, quæ V. g. sit duodecima circuli proiciendi, dato quoque polo 6. Ducatur à polo 6. per 8. sextam partem recta 6. 8. Et hæc terminabit 5 9 partem duodecimam circuli primitiui exprimentem.

THEOR VII. PROP. XIII.

Linea in circulo sectionis à diametri extremo perpendiculari sectionis ducta ad sectionem per datam partem dat in sectione punctum, per quod, & extremum diametri eiusdem proiecti alia ducta partem à prima abscissam exprimit.

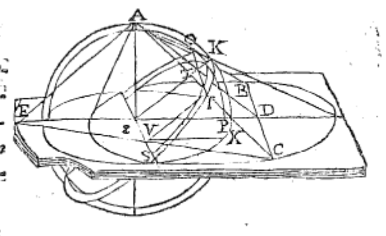
SEcundi modi fundamentum hoc est in eadem fig. quę superiori modo. Sit superficies BAC, quæ secet circulum obliquum in HV, & extendatur in BC; hęc imprimet sectionem BC, quæ erit chorda subtendens arcum exprimẽtem arcum HV, vtpote, quòd proiectricibus BA, & AC per extrema arcus primitiui H, & V transeuntibus determinetur, itaque planum circuli obliqui HVI, & HV sectio eius extendatur, donec occurrat cũ plano ABC plano orthographo. Sectioque MK eius cum plano primitiui circuli MVI occurret tandem, cum angulus OHV nõ sit rectus sectioni HK sicubi V.g. in K. Et etiam sectio CE ob angulum acutum HBC cõcurret cum HK; cùm ergo concursus iste sit plani BAC, & etiã plani primitiui HVI; atq; insuper plani orthographi BKG, ergo erit aliquod punctum sectionis KM; quæ erat plani orthographi, & primitiui. Sed etiam est plani proiectoris BAK; erit igitur punctum K in quod orthographum, & primitiuum, & proiectorium concurrent. Verùm etiam EF subtensa arcui EF æquali arcui HV concurret in K. Ergo æquo pacto, ac linea secans HV monstrabit punctum K. Quod autẽ EF in punctum K concurrat, patet; quia angulus ad Q tum trianguli HQK, tum trianguli EQK recti sunt: anguli autem ad E, & H sunt æquales; quia insunt peripherijs circulorum æqualibus FIG, & VIT. Ergo triangula ęqualia, & crus KQ eiusdem longitudinis, & ideo EF basis concurret ad punctum K. Vnde, cùm EF secans circulum sphæræ, & abscindens arcum æqualem arcui HV obliqui HVI, indicet idem punctum K, in quo debet concurrere BC subtendens eiusdem HV proiecturam, poterimus eius vice vti ad inueniendum punctum K.

Sit itaque circulus sphæræ 1, 2, & pars in eo 2 P comprehendens ex 24. partibus, in quibus diuisus est earum 5. Ducatur 2 P per P vsque ad intersectionem m n productam in u: Si igitur 5 u ducatur; hęc subtendet arcum 5 9 q, qui rapresentat arcum 2 P ęqualem circuli inclinati ex pręc. arcul fundamento. Sic ducta 2 b signabit punctum c, per quod 5 d ducta determinabit arcum 3 d proiectũ.

THEOR. VIII. PROPOS. XIV.

A puncto, in quod parallela plano proijciendo à puncto proiectionis cadit recta per sinus extremum circuli sectionis ducta, dat in proiecto circulo partes proiectas.

FVndamentum tertij modi est, si in obliquo circulo ducto sinu IV, & proiectrice AC, quæ transeat per I, per has duas lineas agatur pla-



num CIVEA, quod secet planum orthographum

in linea

n linea CVB, nam quę hoc planum incidet in planum AE linea expressum, parallelum plano circuli proiciendi KIS, & consequenter incidet in punctum E. Siquidem si planum AB ponatur parallelum plano circuli primitiui KIS, etiam sectiones plani CAE erunt parallelæ ex prop.15.Tract.22.de intersect. cumque IV sit parallela KZ etiam eidem erit parallela AE.

Si autem sit arcus PX æqualis arcui KI, etiam sinus XV,& TV æqualiū residuorū IS,XS erunt æquales,& ideo idem sinus versus VS erit: quare sinus versus SV circuli sectionis PXS exhibebit punctum idem V, per quod transit EC.

Sit ergo,vt priùs, circulus sectionis I 2,& proiectus 3 5, & e puncto O, quod parallela plano proiciendo OA,vt in fig. prop.10.h. à centro proiectionis A deducta in planū imprimit, & ducatur à parte f; circuli sectionis ad diametrū m n normalis,quę cadet in l. Ab e itaq; puncto per l ducatur e g,& hæc determinabit arcū 5 g, & representantę arcū f 2,& arcū 3 r represētātē eūdē f 2 ad eā partem, qua partes sunt minores in circulo proiecto.

THEOR. IX. PROPOS. XV.

Si per puncta proiecta primigenij circuli, quibus chordæ diametrum secant perpendiculares ducantur, hæ à circulo proiecto partes abscindent proiectas, eruntque chordæ proiectæ.

QVarti modi fundamentum est. In figura pr.14. Ducatur in circulo proiciendo chorda IO perpendicularis diametro; hæc secabit diametrum in T. Transeat ergo superficies, seu lineæ BA, & CA,& eam proiciant in CB: Sectio CB terminabit in puncta C, & B, in qua lineæ proiectrices arcuū KI,& KO terminant,ideo CB eosdem arcus in circulo proiecto dessignabit, transibitque per punctum D, quod cum superficies BAC transeat per T erit punctum T proiectū,eritque orthogonalis diametro DZ, sicut IO orthogonalis est ipsi diametro KZ circuli primitiui, cùm tota superficies CBA sit ei diametro, & plano circuli PKA orthogonalis.

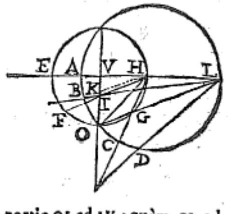
Si itaque ex propos.2.h. puncta quibus chordæ diametrum primitiui circuli secant, proiciantur, cum ipso circulo, & sit illorum aliquod punctum t, ducaturque t g; hęc signabit arcum 5 g circuli proiecti exprimentem arcū circuli primitiui.

THEOR. X. PROPOS. XVI.

Partes proiecti circuli, quo propinquiores perpendiculari à centro proiectionis prouenienti, eò minores sunt.

SInt iuxta secundum modum partes in circulo proiectæ ABOD, quæ in circulo originario, seu etiam sectionis, cum in vtroque, vt ostensum est, æqualitate consentiant, sint EF, FO, GO, HG omnes inuicem ęquales. Dico, quod istæ partes inuicem æquales proiectæ, efficiuntur inuicem inęquales,& quod minor est illa,quæ puncto V,quod imprimit perpendicularis V propiùs accedit,

Probatur, Ducta punctata HK parallela ipsi LO, maior est proportio OH ad HV, quam KH ad HV (vt dicam) quare etiam est maior,quàm OL ad LV,cum punctata sit parallela, ipsi LO,& ideo eadem sit proportio HK ad HV,quę LO ad LV: sed proportio OH ad HV est eadem, quæ OI, ad IV ob angulos æquales ad H ex prop.3. lib.6. Elem. Ergo maior erit proportio OI ad IV; quàm OL ad LV. Vnde, & ex propos.6. Tract.19,maior erit angulus OLI,quàm ILV, & sic ostendes de alijs.



Quod autem HO habeat maiorem rationem ad HV, quàm HK ad HV ipsam patet ex 8. lib.5. Nam est maior HO ob angulum maiorem externum HIQ, quem subtendit, quàm HK, quæ subtendit angulum internum minorem HVK minor est autem angulus internus externo ex pr.17. Cor.1. l.1.Elem.

COROLLARIVM I.

HInc est manifestum partes circuli, quæ in maxima medietate sunt LDC esse maiores partibus primitiui circuli: sicut totus arcus est maior, at verò, quæ sunt in altera medietate minores illis, quæ in circulo primitiuo sunt; quia etiam totus ille arcus est minor, & cum tot sint partes in medietate proiecta, quæ minor est medietate primitiua, quot sunt in ipsa,hac medietate necessariò erunt omnes minores,& hoc sufficiat ad rem per se claram confirmandam, licet alioquia non prorsùs ratio conuincat.

COROLLARIVM II.

ELicies quoque, illum esse maiorem radium in circulo proiecto, qui per vtraque centra transit, tum circuli primitiui, tum circuli proiecti,reliquos verò esse maiores, qui propinquiores sunt centro circuli proiecti. Ratio est, quia radij ducuntur à centro proiecto, qui non coincidit cum centro circuli proiecti, vt docuimus. Vnde cum hoc punctum sit extra centrum,euenit, vt docet Euc. lib.3. Elem. propos.15. maximum esse, qui per centrum transit, reliquos verò eò esse maiores, quò centro propinquiores.

EXPENSIO III.

De proiectura superficiei cuiuslibet independenter à sphæra.

PArtes alicuius lineæ proiectæ eam proportionem musicam dicunt, quam ostendimus propos.3. & ita proiciuntur, vt prop.2. Coroll. h. Possunt autem lineæ proiectæ esse maiores primigenijs, seu minores prout intercipitur planum,in quo sunt inter punctum proiectionis, & planum, proiectionem recipiens V. g. in fig. prop.3. TF est minor, quam PC, quia linea TF proiecta inter primigeniam TF, & punctum A interponitur, at ND proiecta maior, quam DE primigenia, quia hęc

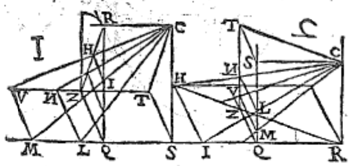
hęc interponitur inter ND, & A, & quæ dicuntur de lineis eadem intelligenda sunt quoque de superficiebus, vnde duplex genus proiectionis potest deduci;alterum dicetur rectum, cùm interponitur planū; in quod sit proiectio inter planum originarium, & proiectionis centrum;alterum inuersum, cum planum originarium interponitur inter centrum proiectionis, & planum proiectionem recipiens.

THEOR. I. PROP. XVI.

Omnes lineæ, quæ sunt perpendiculares plano Stereographo, seu in proiectione recta, seu inuersa proiectæ in punctum collimant à plano originario æquè remotum, ac centrum proiectionis; lineæ verò parallelæ plano Stereographo in parallelas originario transeunt.

PRæsupponendum est planum Stereographum, idest proiectionem recipiens esse plano originario ex instituto hominum rectangulum,ideoque etiam id præsupponimus.

Itaque sit punctum, seu centrum proiectionis C sit planum originarium STVM, in quo scilicet est figura proicienda LMNV. Planum recipiens proiectionem sit QHR, cui perpendicularis linea proicienda VN. Dico primò, quòd ista linea NV proiecta imprimit lineam ZH, quæ in punctum R producta terminat,quod punctum æquè remotum est à stereographo plano HRQ, in quod sit proiectio eadem distantia perpendiculari, qua remouetur punctum C centrum proiectionis.



Probatur. Nam quia NV ex thesi est normalis plano stereographo HRQ; erit etiam normalis eius sectioni QZ: & si plano stereographo HRQ ducatur planum CST parallelum per centrum C; erit quoque NV perpendicularis eius sectioni TS. Quare si intelligatur superficies proiciens NVC extensa vsque ad T; ita vt sint eius sectiones CT, & RZ, erit quoque prędicta TNV sectio superficiei proiectricis perpendicularis sectionibus RZ, & CT, vtpote in planis CTS, & RZQ ijsdem existentibus ex def.2. tract.22. Quare CTS, & ZRQ erunt anguli inclinationis planorum ex prop.4.Cor.2.tract.22. & ideo anguli æquales ex prop.18. tract.22.

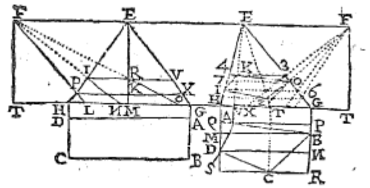
Transeat ergo per C planū CSM normale vtriq; plano CTS, & STVM; Sectiones itaque CS,& ST rectum angulū continebunt. Quoniā ex 16. tract. 22. sectio ST duorum planorum CTS, & TVMS erit ad rectos āgulos,plano CSM,& ideo sectioni CS,& SQ ex def 2. tr.22. in plano CSM existenti. Sed QZ est parallela lineę ST ex effect. ergo etiam perpendicularis plano CSM ex 8.tract.22. & ideo sectioni SQ,& RQ ex def.2. tract.22. Sunt ergo ęquiangula triangula CTS, & QRZ, vtpote, quòd sint rectangula, & angulos CTS & RZQ æquales obtineant: Sed etiam crura TS, & ZQ sunt æqualia: Siquidem lineæ TZ,& SQ parallelæ sunt,vtpote ostensæ normales sectioni QZ, ideoque ex 33. lib.1. Elem. æquabuntur inuicem crura parallela QZ, & ST. Cum ergo in triangulis æquiangulis ex 4. lib.6. sit ST ad SC,vt QZ ad QR,& TS & QZ sint ęquales,SC, & QR æquabuntur ex 11 l.5.Quamobrem sectio RZ plani proicientis CNV terminabit in R, quod habet eandem eleuationem à plano primigenio SV, ac punctum C mensuratam per rectas CS, & RQ æquales, & normales:hoc autem punctum R vocabitur centrum proiectum.

Probatur secunda pars, quæ est,quòd lineæ parallelæ plano stereographo, vt est LN in parallelas plano primigenio STVM transeant. Quoniā enim linea proicienda LN,vel MV est parallela plano HRQ erit etiam parallela cōmuni planorū sectioni ex 4. tract.22. Coroll.3. quæ est QZ, cùmque QZ sit perpendicularis plano SCQR perpendiculari planis CTS, & QRH,etiam ipsa eidem plano normalis erit: ideo planū HIC per illam ductū ex 15. tract. 22. plano CSRQ erit ad rectos angulos; quare, & eorum communis sectio IH eidem plano ex 16. tr. 22. ad rectos angulos erit: Propterea que HI, & QZ ex 7. tract.22. erunt parallelæ; ideoque, & plano STVM parallela erit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Superficiem rectangulam proijcere.

POtest hæc superficies proicienda obtinere aliquod latus parallelum plano,in quo facienda est proiectio; vel nullum parallelum.



Sit ergo primus casus,in quo sit parallelogrammo ABCD proiciendum. Determinetur centrum proiectionis F, & centrum proiectum E, & ad E centrum proiectum ab H, & G extremis lineæ GH, quæ intercipitur inter latera proicienda AB, & CD ducantur rectæ. Assumpta autem distantia HD transferatur ab H in L, & ducatur FL, quæ secabit EH in P. Ducetur que parallela PX sectioni HG. Rursùs assumpta distantia HC transferatur ab H in N, & ducatur FN, quæ secabit HE in I. Itaque si per I ducatur parallela IV sectioni HG, illa claudet rectangulum PIVX iam proiectum.

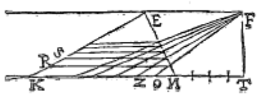
Id autem ostendetur, nam posito,quo HG sit sectio plaonrū primigenij, & orthographi,qualis in fig. 1 præced. est ZQ. Ducentur perpendiculares PT,& EM,& MT erit distantia duorū planorū,quę in fig. præced. propos. sunt QRZ, & SCT V. g. erunt lineæ CS, & RQ à centris primigenio C, & proiecto R descendentes. Igitur MO erit interuallum distantiæ, quâ linea proicienda distat à linea sectionis V. g. in præced. fig. I. interuallum QM. Vnde sicuti ibi I est punctum M proiectum,sic hic

R erit punctũ proiectum. Sed I punctũ ex pr. 10. par. 2. tract. 16. distat eodem interuallo, ac R à linea HG: quia triangula HIN, & MRO ob bases æquales HN, MO eandem altitudinem possident. Ergo ducta parallela per I habebit eandem distantiam, ac per R ab HG, linea sectionis planorum primigenij, & orthographi. Ergo IV erit CB linea proiecta, cum vt ostendimus debeat esse parallela lineæ sectionis HG. Sic dicas de linea PX, q erit linea DA proiecta. Latera verò DC, & AB exprimentur per lineas PI, & XV: quia tendunt ad centrum E proiectum, vt ostensum est præcedenti propos. part. I.

Si verò sit data superficies ABCD irregularis; vel nullum latus habens sectioni GH parallelum per A ducatur latus parallelum PQ. & per A latus AV, & normale TC per C. Item sectioni perpendicularia latera PR. per B, & SQ per D, & parallelas MB, & DN ab vno quoque angulo, quas omnes parallelas & normales proicies; normales, quidem in GE, & TE, & cęt. tendentes ad centrũ; parallelas verò in 3 4, & 7 0 & 1 6, & cæt. & puncta K, Z, & I, O, & cęt, representabunt intersectiones D, A, B, C, in quibus etiam anguli figuræ BACD terminant in suis descussationibus. Igitur per puncta KOZI rectæ ductæ facient KOIZ planum proiectum, cuius primigenium est ABCD.

COROLLARIVM.

[a] EX supradictis adisces propos. I. tract. 16 p. 2, quod si NO, & OZ sint æquales, & sic successiuè, etiam distantię, & interualla proiecta futura esse harmonicè proportionalia; nempe EK esse ad ES, vt KR ad RS differentię, & ex propos 3. eiusdem si NO erit pars aliqua V. g. $\frac{1}{4}$ lineę NT linea XE erit $\frac{1}{4}$ RE $\frac{1}{5}$ ES $\frac{1}{6}$, & cęt. in infinitum. Vnde altitudines superficierũ erunt EK ad ES, vt $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ sibi inuicem, & sic consequenter. Et quidem si institutum meum non esset me continere in principijs rerum, & doctrinarum; hanc quidem mi-



rabilem progressionem prospectiuæ praxibus subigerem, & quàm benè scenicis deseruiat ostenderem: sed id est alius voluminis, si Deus dederit.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis circulus, seu Ellipsis proiecta in planum, nec parallelum, nec basi subcontrarium in Ellipsim transformatur.

PRobatur. Est sectio coni à stereographo plano ad angulos rectos basi coni insistenti, seu etiam ad quemcumque angulum. Sed omnis sectio coni Ellipsis est, si planum non sit parallelum basi, vel subcontrarium, vt supra ostendimus, ergo etiam hæc sectio stereographa Ellipsis erit; Quod autem circulus proiectus, vel Ellipsis sit sectio coni, idest fiat in plano conum secante. Patet ex definitione stereographiæ factæ à superficie conica planum primigenium ambiente.

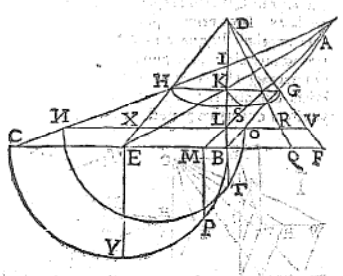
COROLLARIVM.

HInc patet centrum Ellipsis proiectæ non habere idem centrum cum centro circuli, vel Ellipsis primigeniæ: nisi accidat, quod sit parallelum planum stereographum plano proiciendo, vt constat ex Coroll. 1. propos. 2. tract. pręced. Nec vnquam circulum repræsentare, etiam si circulus sit primigenius, nisi sit, aut planum proiectionis parallelum ipsi, aut subcontrarium.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Quemcumque seu Circulum, seu Ellipsim plano Stereographo transcribere, eorumq; partes representare.

CVm circulus, seu Ellipsis proiecta, Ellipsis sit, potest eodem modo describi quò supra diximus Ellipses describi posse in tract. 24. Conic. Expens. 13. & propos. 8. & 9. & 10. huius, quæ verò reposcuntur ad descriptionem ex cognitione coni stereographi, & conus ipse à distantia data à plano, in qua fig. primigenia reperitur, facilè obtinetur, & à dato, aut axe, aut diametro aliquo ipsius primigeniæ figurę. Sed libet hic modum ordinarium ostendere, quo vtuntur artifices.



[b] Sit conus ABC, & sectio eius quęcumque BI, quæ producatur vsque ad eandem altitudinem coni ABC in D: Sit verò semibasis coni semicirculus BYC, in quo applicata EY, & MP, quarum puncta extrema sunt exprimenda in Ellipsi, cuius axis BI. Ducatur ab E, & M applicationum punctis ad verticem A lineę AE, & AM, & per L, & K, quibus punctis diametrum BI secant, ducantur parallelæ ON, & GH vsque ad crura trianguli conici per axem AC, & AB; mensuretur verò BE semidiameter in F, & per F, & D ducatur FD, quæ transibit per G, & ED, quæ transibit per H ob triangula FBG, & BKE, & EHC ęqualis altitudinis ex propos. 10. tractat. 16. part 2. Nam conuenient in H, & G, per quæ transit GH. Postea mensurata QB æquali PM alteri applicatæ, ducatur ad D linea QD, quæ in R secet ON productam in V. Et dico RL, & GK esse applica- in Ellipsi, cuius diameter, seu axis IB.

Probatur in triangulo GKB, ita est GK ad LO, vt KB ad LB. In triangulo autem ICB ita est KH ad NL, vt KI ad LI: quare poterimus componere proportiones, & rectangula constituere proportionalia, vt vides in hoc specimine.

HK

HK	vt	KI	&	KG	vt	KB	
ad		ad		ad		ad	
LN		IL		LO		LB	

Ergo compositum, vt compositum.

HK	&	KG	KI	&	BK
ad		ad	ad		ad
LN	&	LO	IL	&	BL

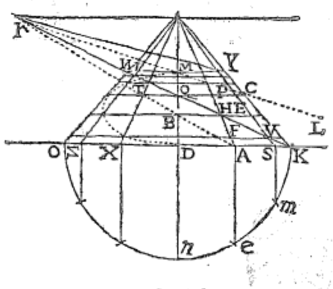
Sed GK, & KH rectangulum est æquale quadrato applicatæ diametro à puncto K scilicet KS sicut OL, & LN rectangulũ applicatę diametro NO ad angulos rectos, quæ est LT; ergo, vt BK, & IK rectangulum ad rectangulum IL, & LB. Sic quadratum KS ad quadratum LT: Sed KG æquatur rectæ KS, & LR rectæ LT. Ergo KG, & LR erunt applicatæ, vtpote quod sit GK quadratum ad quadratum ex RL, vt IK, & KB rectangulum ad IL, & LB rectangulum ex 6. tr. 24. Quare remanet ostendendum, quod OH sit ęqualis KS, & LR æquetur ipsi TL.

Id verò ostenditur. Nam, vt ON diameter ad BC diametrum, ex prop. 44. lib. 6. Elem. ita est sinus LT ad sinum similis arcus MP. Est enim ex Coroll 2. prop. 4. lib. 6. OL ad LN, vt BM ad MC, ideo OL erit quoque ad mediam proportionalem LT, vt BM ad suam mediam proportionalem MP. Ideoque etiam *permutando* OL erit ad BM, vt LT ad MP: quare etiam ON erit ad BC, vt TL ad MP, sed etiam RL se habet ex 2. Coroll. prop. 4. lib. 6. ad QB æqualem ipsi MP, vt VX æqualis ON ad æqualem FE ipsi BC ex constructione. Ergo LT, & LR æquales erunt ex 7. l. 5. quià æqualibus QB, & MP eandem dicunt proportionem ON, ad BC.

Eodem modo probabis de linea SK, quod sit æqualis lineæ KG; quadere KG, & LR erunt applicatæ.

COROLLARIVM I.

HInc elucet quomodo alia; & alia puncta poterimus reperire, donec tot sint, quæ sufficiant ad rectè trahendam Ellipsim vt vides ib fig. hic apposita.



Imo ex prop. 10. Tract. 16 de progr. armonicis part. 2. cum omnia triangula sint eiusdem altitudinis V. g. KHA, & ABD loco trianguli ABD deseruiet triangulum KHA, & loco trianguli LMD poterit deseruire triangulum KNO: Vnde vnica diagonalis KN sufficiet ad omnium triangulorum altitudinem exhibendam; quę sit eadem, ac ea, quæ in DM successiuè inueniretur, itaq; puncta D, F, E, C, P, & cęt. vsque ad M erunt in Ellipsi præbentibus successiuis altitudinibus triangulis KVS, KHA, & KQD. KTX, KEZ & tandem KNO, quæ altitudines deberent reperiri in perpendiculari DM. Et idem fiat super YN, ducta YF; si placeat aliam Ellipsim delineare.

COROLLARIVM II.

HInc etiam facilè aliquis quamlibet figuram circulo inscriptam delineabit, vt patet si puncta e, applicatarum A e V. g. intelligantur pro angulis alicuius figurę circulo inscriptæ, siquidem etiam applicata EE suo extremo E in Ellipsi angulum figuræ rectilineæ exprimet, & sic de alijs.

COROLLARIVM III.

HInc etiam patet: quomodo quęlibet figura, etiam si non possit circulo inscribi, proiciatur, quia saltem poterunt pluribus circulis illius anguli circumscribi, quorum puncta extrema si proiciantur, erunt quidem in plurium Ellipsium ambitu; sed tamen coniuncta figuram irregularem proiectam referent.

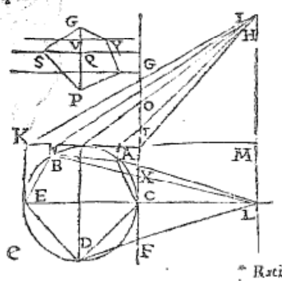
COROLLARIVM IV.

HInc quoque patet quomodo partes alicuius circuli proiciantur. Nam in fig Coroll ED, & FE, & EC, & cęt. exprimunt partes circuli n e, & e m, & mk, & patet etiam quomodo partes circuli primigenij ęquales; in Ellipsi tamen proiecta eius vicaria non sint æquales.

PROBL. III. PROPOS. XX.

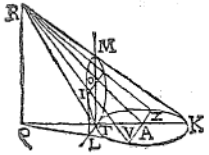
Circulum, seu figuram rectilineam in Ellipsim proiectam transfundere Stereographicè.

SItque iste circulus, seu figura proicienda orthographicè. Detur verò altitudo centri proiectionis MH, & sectio plani stereographi sit FG; & distantia à perpendiculari HM, quæ sit CL, & L sit punctum H proiectum, idest in quod ab H demissa perpendicularis caderet: A singulis punctis in peripheria signatis C, A, B, E, D perpendiculares ducantur, ad KA ab ijsque rectæ in centrum H conueniant, rursusque à punctis C; A, B, E, D, rectæ in L conspirent, deinde ducta seorsim PG in C à puncto P singula interualla ex linea IG desumpta trasferantur, vt IO translatum est in PQ, & OC in QG, perque singula puncta perpendiculares ad PG, ducantur, vt QS, & VY; quarum longitudines à C sumantur in vtramque partem ex FI sectione, quę scilicet correspondent in ijsdem punctis V. g. CF applicabitur QS, quia à puncto D, tum DL, tum OH tandem deriuant, & postremò per extrema puncta GYSP, & cęt. ducemus flexam, & erit Ellipsis, vel rectas, & erit figura rectilinea proiecta in Ellipsi inscripta.



[a] Ratio

* Ratio huius operationis est, quia PG est diameter, at VY, & SQ sunt applicatæ. Ergo per extrema earum puncta transibit Ellipsis. Quod vt capias inspice fig. hic appositam, in quà circulus basis coni stereographi KTR est KZTV, trianguli autem per axem KRT ducatur planum normale stereographum MILT: item triangulo per axem KRT ducatur planum normale ZVR, itaque TK erit diameter circuli, sicut TM erit Ellipsis; quia cùm plana MZTV, & ZRV sint normalia triangulo per axem KRT; etiã cõmunes illorũ sectiones AV, & OI ad rectos angulos erunt ex prop.16. tract.22. & ideo ex def.2. tr.22. sectionibus TK, & MT; vnde istæ sectiones diametri erunt, & OI, AV applicatæ, hæc quidem applicata primigenia, & OI applicata proiecta & punctum O erit illud, cui applicatio facienda est. Itaque sectio AR plani ZVR, & trianguli per axem

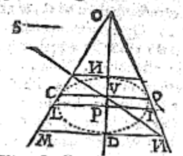


KRT erit illa, quæ decernet altitudinem TO, idest in præc. fig. OI. Hoc itaque triangulum AVR proiciatur orthographicè, planumque VRQ normale plano KTV imprimet sectionẽ VQ discedentẽ ab V puncto, & terminantẽ in punctum Q quod imprimit RQ sectio planorũ plano KTV normaliũ proiectoris VRQ, & triãguli per axem KTR producti in Q: Quare si IO applicata proiciatur quoq; ipsa proicietur in sibi parallelam LT. Siquidem superficies proiectrix eadem ex prop.8. h.p.1. ac superficies MILT, quod sit normalis plano KVLQ recipiens proiectionem, faciet sectionem TL ex 16. Tract.22. plano KTR normalem, vtpote à planis normalibus effectã KVQ, & MILT plano RKQ. Vnde ex 7. tr.22. parallelæ erunt, & ideo ex pr.8. h. par.1. æquales. Itaque cum in triangulo per axem KTR in sectione TM obtineamus punctum O applicationum ad axem TM, vt in orthographia AVQ longitudines applicatarum, nempe TL, vel in præc fig. IO, & CF poterimus Ellipsim proiectam delineare.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Dato diametro Ellipsis proiectæ, & diametro proiecto circuli, vel Ellipsis primigeniæ reperire diametrum alterum coniugatum.

SIt ductus diameter Ellipsis proiectæ ND, & diameter proiectus QC, & oporteat reperire diametrũ ellipsis alterũ cõiugatũ IL. Rectangulo NVD fiat æquale quadratum S ex 14. lib.2. Deinde fiat, vt latus quadrati S ad latus PN dimidij diametri; ita applicata VC ad aliud, & prodibit PL ex propos.15 lib.6. & dico IPL duplam LP alteram esse diametrum ellipsis coniugatam.



Probatur. Illa est diameter coniugata, quæ cum possit deseruire pro applicata per centrũ quoque transit, vt colligitur ex propos.32. tract.24. Sed PL talis conditionis est. Ergo erit diameter coniugata.

Probatur. Nam vt latus quadrati S ad latus quadrati NP semidiametri, ita fecimus VC ad PL, & ideo ex 26. lib.6. vt quadratũ S, idest rectangulum æquale NV, & VD ad quadratum, seu rectangulum NP, & PD, ita quadratum VC ad quadratum PL. Ergo PL erit applicata, sicut PI æqualis. Sed etiam transit per centrum P, cum sit ND datus diameter diuisus bifariam. Ergo erit diameter Ellipsis, quo habito poterimus duobus diametris datis omnibus modis tract.24 assignatis Ellipses proiectas describere: Vnde si habeas tantùm vnicum diametrum ellipsis proiectæ, seu parallelum, vt hic plano stereographo, seu obliquum, quæ ex dictis prop.17. huius venari poteris ellipsim proiectam circuli expressiuam delineabis faciliter axibus datis.

TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRIÆ PARS PRIMA.

De Trianguli plani cruribus dimetiendis.

TRigonometria pars est Mathematicæ adeo necessaria, vt sine illa vix alterum pedem in huius scientiæ progressu mouere quis possit. Duplex est autem; altera, quæ in mensuratione triangulorum planorum rectilineorum occupatur: altera, quæ sphærica triangula etiam mensuris subigere conatur; in hac 1. parte de triangulis rectilineis agemus.

EXPENSIO I.

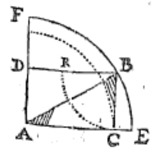
De triangulorum rectorum mensuratione per sinus, vel tangentes.

IN eo consistit trigonometria, vt exibitis duobus angulis, vel lateribus, vel angulo, & latere, cęterorum, tum angulorum, tum laterum cognoscamus mensuras; & quidem si agitur de lateribus tantùm; id independenter à Tabulis potest operi demandari ex ijs, quæ secundo libr. Elem. dicta sunt prop.12. at cum latus datur, & angulus ex quibus, vel angulus, vel latus aliquod perquiritur; vsus tabularum est necessarius. Hic autem omnimodam solutionem triangulorum docere animus fert, illã verò, quę solummodò laterum est, planimetriæ reseruabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

In omni triangulo rectangulo, si basis est radius; etiam duo crura sunt sinus arcus, & sinus complementi illius arcus.

SIt triangulum rectangulum ABC. Statuamusque basim AB esse radium alicuius circuli. Dico, quòd duo crura AC, & CB sint, vel sinus CB, vel complementum DB.



Probatur. Quoniam basis AB ponitur radius alicuius circuli, ille circulus, vt FBE circumscribatur cẽtro A, & ab A parallela AF ducatur cruri CB. Etenim quia CB est parallela radio AF, sinus erit: Quapropter DB erit sinus complementi: Sed AC, vtpote, quòd sit inter parallelas est ei æqualis; Ergo AC crus est quoque complementum. Quòd autem FBE arcus sit quadrans patet; quia angulus ACB ponitur rectus: Ergo & angulus CAD rectus erit ob parallelismum linearum CB, & AD ex propos.30. lib.1. Elem.

Potest etiã ostendi pr.17.l.1.Cor. ex eo, quod in rectãgulo triangulo anguli reliqui nigri sint ęquales vni recto, vnde alter alterius complementum erit, & ideo crura subtendentia sinus arcuum inuicem erunt arcus, & complementum.

THEOR. II. PROPOS. II.

In omni triangulo, rectangulo si crus quodcumque, vt radius sumatur; crus quidem alterum erit tangens; basis verò secans.

PRobatur. Nam ducto arcu punctato altero crurum pro radio deseruiente V. g. AC, crus CB tangens erit circuli punctati, & AB secans ex prop.20. lib 3. Sic sumpto arcu CB pro radio ducto quadrante punctato CR, crus AC tangens erit, & AB secans. Ergo si crus pro radio assumatur alterum crurum vices tangentis obit, & basis pro secante deseruiet.

COROLLARIVM.

HInc colligas, quod vt radius diuisus in 10000000. est ad sinum in partes æquales illis diuisum in tabulis repertũ in proportione, sic basis in qualibet alias partes diuisa erit ad crus in easdem partes distributum, quia partes sinuum explicant proportionem sinus totius ad quemlibet sinum: Quare possumus datis duobus tabularum numeris, & altero numero, cui quæratur eiusdem rationis quartus, id per regulam proportionum excerpere, & sic dicas de tangentibus respectu sinus totius. Vnde sequentia problemata prodeunt ad solutionem rectangulorum deseruientia.

PROBL. I. PROPOS. III.

Data basi, & angulo adiacente, latus oppositum angulo dato reperire.

SIt data basis AB 30. pedum, angulus verò adiacens niger A sit notus Gr. 15. & eius sinus primis tantùm notis ad sinistram expressus (id enim in istis sufficit) sit 258. & sinus totus 1000. Quia ergo habemus proportionē expressā basis ad sinum CE anguli; ideo dices si 1000. basis partes dant 30. partes in ipsa, quid 258. partes cruris dabunt ex ijs 30. basis. Multiplicatus itaque vltimus cum medio, & genitus per primum diuisus exhibebit pedes 7.$\frac{740}{1000}$ pro latere quæsito BC. Et aduerte, quòd non assumimus totum sinum, tùm quia in Trigonometria practica id non est necessarium, tum ob maiorem perspicuitatem exempli, cum minor numerus à Tyronibus faciliùs capi possit. Relinqui autem semper possunt quatuor figuræ ad dextram.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Data basi, & angulo adiacente quærere latus adiacens angulo dato.

SIt data basis AB 30. pedum, & angulus A G.15. niger, & quæratur latus adiacens AC. Accipiatur eius complementum Arcus G.75. cuius sinus 965. Postea vteris regula dicendo. Si 1000. basis partes dant 30. quid 965? & exhibebunt pedes 28 $\frac{950}{1000}$, idest $\frac{19}{20}$.

PROBL. III. PROPOS. V.

Dato angulo adiacente basi, vel opposito cruri alicui reperire angulum dato oppositum.

OFferatur angulus A 25. Grad. Quia duo anguli in rectangulo æquiualent vni recto ex Coroll 9. prop.17. lib 1. si subducatur angulus A ab angulo recto basi opposito 90. G. remanet angulus B niger 65. G.

PROBL IV. PROPOS. VI.

Data basi, & crure: quærere angulum, cui crus opponitur.

SIt data basis pedum 30. AB, & latus alterum BC pedum 25. volo agnoscere angulum A. Dices itaque,

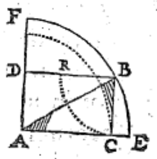
Si 30. dant 10000000. vtendo toto sinu si placet, quid 25?

Dabuntque partes 8333333. Quære itaque in tabulis sinum hunc, quem non inuenies quidem. Sed proximè minorem 8332431. Gr.56. m. 26. qui assumetur pro angulo quæsito, in mensuris rerum materialium tractandis.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Data basi, ac crure inuenire angulum, cui illud crus adhæret.

SIt data basis AB 42. pedum, & crus adiacens AC 39. & volo agnoscere angulum adiacentem nigrum A. Hoc itaque efficiam, quærendo prius sinum anguli B, vt in præced. dicendo.



Si 42. dant 10000000. quid 39? Et dabit sinum 9285714. quem requires in tabulis, & proximè minorem sinum consequeris 9284859. qui est sinus Gr.68. m.12. Cum ergo angulus B sit G.68. m.12. ex probl.5. inuenies alterum angulum adiacentem expetitum subtrahendo Gr.68. m.12. à Gr.90. vt efficiatur angulus adiacens requisitus A Gr.21. m. 48.

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Data basi, & crure reperire crus alterum.

SIt data basis AB 53. pedum, crus CB 43. & reposcat quis crus AC.

Primo inuestigabis sinum anguli A cruri dato oppositi ex prop.3. h. dicendo.

Si basis 53. dat sinum totum 10000000. quid crus pedum 43. & reperies proximum sinum 8113207. nempe Gr.54. m.13. & sinus eius complementi Gr.36. m.47. erit 5987907.

Dices itaque rursus si 8113207. sinus dat pedes 43. quid sinus complementi 5987907? Et regula proportionum offert pedes 31. & $\frac{7}{8}$ ferè pro crure quæsito.

PROBL. VII. PROPOS. IX.

Dato crure, & angulo adiacente, quærere basim.

SIt datum crus 59. AC, & angulus ei adiacens A niger 27. Gr. exquiraturque basis AB.

Primo inueniendus est angulus oppositus B ex 6. prop. huius, qui est 63. G. & eius complementum; assumendusque est sinus ipsius p.8910065.

Itaque regula proportionis exquires; si 8910065. dant pedes 59; quid 10000000. sinus totus? & exhibebit pedes 66 $\frac{1}{5}$ ferè, quę erit basis.

PROBL.

PROBL. VIII. PROPOS. X.

Dato crure, & angulo cruri opposito reperire basim.

SIt angulus datus A Gr.30. & crus oppositum BC pedum 15. & sit inuenienda basis AB.

Sinus Gr.30. est 5000000. Dices itaque adhibendo proportionis regulam. Si 5000000. dant pedes 15. quid sinus totus 10000000? & prouenient pedes 30. pro basi.

PROBL. IX. PROPOS. XI.

Dato crure, & angulo cruri opposito quærere latus alterum.

SIt datus angulus A G.32. cuius sinus 5299142. & cuius complementum est G G 58. & sinus 8480481. Crus verò oppositum angulo dato sit pedum 20. Dices itaque adhibendo regulam auream. Si sinus 5299142. dat pedes 20. quid 8480481? exhibebitque operatio pedes 32. & aliquid ampliùs pro crure altero.

At per tangentes id efficies faciliùs ob sinum totum, qui primo loco venit, & ita erit regula proportionum ordinanda, si sinus totus 10000000. dat pedes 20. quid tangens complementi Gr.58. dati, quæ est 16003347? & exerent pedes 32. & $\frac{0\,0\,0\,0\,0}{1\,0\,0\,0\,0}$. Quòd si detur angulus adiacens, potes tamen accipere angulum oppositum, cum alter alterius sit complementum ex Cor.9. propos.28. lib.1.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Datis cruribus duobus angulos reperire oppositos.

SIt datum crus AC 32. pedum, quod statues loco sinus totius, & aliud CB erit tangens oppositi anguli A, quod sit pedum 25. Dices ergo regula aurea, si crus pedum 32. dat 10000000. quid 25? & dabit tangentem 7812500. quæ proximè est tangens Gr.38. Subduces itaque hunc angulum inuentum à Gr.90. & residuum erit alter angulus B Gr.52. oppositus cruri AC, nam ex Coroll.9. propos.17. lib.1. Elem. alter angulus est complementum alterius.

PROBL. XI. PROP. XIII.

Datis duobus cruribus quærere basim.

HÆc propositio executioni demandatur dependenter ab antecedenti, nam datis cruribus priùs inueniemus angulum ex quo iuxta prop.9. & 10 reperiemus basim dato crure, & angulo acquisito, vel opposito cruri, vel adiacente.

Hæc autem omnia problemata à duobus propositionibus primis euidentiam desumunt. Omne enim crus in triangulo rectangulo potest esse, aut tangens, sinus, aut secans, hinc est quod possit diuidi, aut cogitari, vt diuisum in eas partes, in quas quilibet sinus diuisus est, seu tangens, seu secans, quæ sunt æquales illis, in quas sinus totus diuisus animaduertitur. Quare si habeam diuisum crus aliquod in alias partes V. g. in pedes possum deuenire in cognitionem alterius cruris, in pedes diuisi.

Cùm enim partes sinus AB sint æquales partibus sinus BC, & pedes item cruris AB sint æquales pedibus cruris BC; sit, vt partes sinus AB ad partes sinus BD sint in eadē ꝓportione, ac partes cruris eiusdē AB ad partes cruris BC. Quapropter permutando ita erunt partes sinus AB ad pedes cruris eiusdem AB, vt partes sinus BC ad pedes eiusdem cruris BC, vnde datis tribus partibus AB, & eiusdem pedibus, & partibus BC deuenięmus in cognitionem pedum BC eiusdem.

PROBL. XII. PROPOS. XIV.

Sinus in tabulis non repertos emendare.

QVoniam aliquando, imo ferè semper sinus, qui ex calculo exeunt, non sunt ijdem præcisè, qui in tabulis reperiuntur; hinc oportet regulam assignare, ob quam, quis in cognitionem proximioris sinus, quàm fieri possit, deueniat.

Sit datus sinus 8333333. qui non reperitur in tabulis; sed proximè minor 8332431. Gr.56. m.26. & maior proximè 8334039 Gr.56. m. 27. Subducatur minor à dato 8333333. & residuum erit 902. Item idem minor subducatur à maiori reperto 8334039. residuum erit 1608. Dices itaque regula proportionum, si 1608. dant 60. quot secunda dabunt partes 902? & exeret numerus secundorum 33. Itaque sinus ille datus 8333333. erit Gr.56. m.26. sec. 33.

Ratio petitur ex Cor.1. pr.15 tr. 20. de sin. Vbi sinum vnius Grad. vix à linea recta differre ostendimus, & tantò minùs arcus vnius minuti: vnde assumimus vnicum minutum, vt lineam rectam, & ideo datum arcum, vt lineā rectam vnius secundi, nempe pro ipsa portione sinus subtensa vsurpamus, tanquam notam in partibus arcuum, & in partibus sinus totius ex ratione propos. 13. huius & minorem subtēsam perquirimus, vt innotescat in partibus arcus, à quo sensibiliter non differt.

PROBL. XIII. PROPOS. XV.

Arcuum in tabulis non repertorum sinus cognitos proximè exhibere.

QVia sinus in tabulis, vt plurimùm vsq; ad minuta tantū calculata sunt, & aliquādo diligetior calculus exposcit, vt etiam secundorum sinus obtineatur. Inde est, quòd ex antec. prop. ratione possimus etiam sinum reperire: Nam sit datus arcus Gr.56. m.26. sec.33; Et differentia inter sinum Gr.56. m.27. sit 1608. Dices itaque regula proportionū; si sec.60 quibus differt arcus minor à maiore dant par. 1608. quid m.33.? & exhibebit operatio partes 884. quæ additæ sinui minori 8332431. facient sinum 8333315. parùm differentem à superiori.

EXPENSIO II.

De triangulorum rectangulorum mensuratione adhibitis logarithmis.

Oportet priùs noscere, quomodo ipsi logarithmi cuiuslibet dati numeri ex tabulis logarithmicis eruantur, antequam ipsorum logarithmorum sinubus annexorum calculum doceamus.

Si quis commodè vult vti logarithmis oportet numeros exibitos esse maiores, vel tribus saltem, vel quatuor notis expressos. Alioquin, si duabus tantùm notis exprimantur, superfluum erit ad logarithmos recurrere, cùm facilis se se offerat calculus sine ipsis, & minùs præcisè inuenti logarithmi, minùs quoque calculum præcisum dabunt.

Si verò numerus sit maior 7. figuris sc. quàm quòd ij, qui in tabulis, sinus exarati sunt illi per 10. aut 100. Sunt diuidendi abiectis duabus figuris ad dextram, vel tribus; vt ad eundem numerum redigantur, & tandem illo numero quærendus est sinus in tabulis, vel tangens, qui illi prorsùs conueniat, vel saltem ab eo parum differat, & illius sinus logarithmus erit, etiam logarithmus numeri dati.

Sit datus numerus 394. augeatur quatuor zifris & fit 3940000. & reperiemus similimum sinum 3942093. cuius logarithmus est 9308731. qui quæritur. Item sit datus numerus 439765294. maior, quàm, qui in tabulis reperiri solet, abijciātur duæ figuræ extremæ 94. & quæratur reliquo 4397652 sinus similimus 4396780, cuius logarithmus est, qui quæritur 8217124.

Regulæ quidem traduntur à Nepero, & alijs, quibus logarithmi non præcisi ad præcisos redigantur: sed istæ, iam ob additiones plures laboriosæ esse incipiunt; Vnde iam logarithmi instituti ad leuamen laboris, effecti grauioris operis, suo non minuere laborem, sed augere videntur, & propterea à nobis prætermittuntur, maximè, quia ad Geodesias ordinarias præcisio adeo exquisita, scrupulosaque superflua sit.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

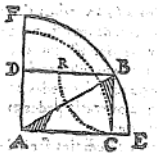
In rectangulo logarithmus cruris æquatur logarithmo anguli oppositi, & logarithmo Hypotenusæ.

Probatur. Nam basis AB rectanguli ABC deseruit pro radio, & crus BC pro sinu anguli oppositi, ex prop.1. huius. Vnde radius 1000000. partes se habebunt ad quascumque mensuras basis V. g. pedes, vt BC sinus anguli oppositi in ijsdem partibus sinus totius expressus ad pedes BC cruris ex prop.13. ostensione: Sed in quatuor proportionalibus logarithmus mediorum æquatur logarithmo extremorum. Quadere logarith. sinus totius erit logarith. primi proportionalis, secundi erit logarith. sinus totius, vt pedibus constantis tertij verò logarith. sinus B anguli oppositi, quartus ignotus; itaque aggregatum mediorum logarithmorum secundi, & tertij proportionalis æquabitur logarithmo quarti, & primi s. sinus totius, sed primi logarithmus ponitur in tabulis o. Ergo proportionalis quarti logarithmus. Cum additio zifre illum non augeat, æquabitur logarithmorum mediorum proportionalium sc. sinus anguli, & pedum datorum basis, seu sinus totius, vt in pedibus cogniti: vnde ille logarith. erit logarith. cruris BC in pedibus noti.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

In rectangulo logarithmus cruris est æqualis aggregato ex logarithmo tangentis oppositæ, & logarithmo reliqui cruris.

Quoniam si crus BC statuatur pro radio alterum crus AC est tangens, ideo crus, vt radius ad se, vt notum in alijs partibus, quæ sint V. g. pedes est, vt crus velut tangens ad se, vt notum quoad easdem partes s. pedes ex ostens. propos.13.



Cumque in quatuor proportionalibus aggregatum mediorum æquetur aggregato extremorum logaritmus tangentis AC, & logarithmus pedum cruris alterius CB aggregati erunt æquales aggregato logarithmico sinus totius CB, & pedum cruris AC. Sed logarithmus sinus totius est o. Ergo logarithmus pedum cruris AC erit aggregatum logarithmorum cruris AC, vt tangentis, & CB, vt pedibus mensurati cruris.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Hypothenusa cruris, & angulo, quem crus subtendit, duobus quibuslibet datis tertium reperire.

Detur basis AB pedum 30. idest vnciarum 360. & additis quatuor zifris 3600000. & angulus A Gr.15. & queratur crus. Sinus 2588190 G.15. cuius logarithmus est 13516255. Sinus verò simillimus basi 3600000. est 3602682, logarithmusque 10209063. Vniantur simul isti duo logarithmi, vt vides.

$$\begin{array}{r} 13516255 \\ 10209063 \\ \hline 23725318 \end{array}$$

Quæraturque hic logarithmus 23725318. & ei simillimus 23725832 inuenietur, qui dabit sinum 932395. aufer itaque quatuor figuras iuxta quatuor zifras, quas basi addidisti ab ipso sinu, & erunt vnciæ 93. idest pedes 7. & $\frac{9}{12}$, vel $\frac{3}{4}$ vt proximè inuenimus propos.3. Pro crure quæsito.

Aliud quoque exemplum erit. Si detur basis AB vnciarum 360. Angulus verò A Gr.15 & queratur crus adiacens AC. Accipe sinus complementi

menti logarithmum, nempe Gr.75. cuius logarithmus est 301544. Addeque logariahmo sinus basis quatuor zifris adauctæ supra inuentæ 10209063. & fiet logarithmus 10510607. qui quæsitus in tabulis non inuenitur quidem; sed ei simillimus 10515669, qui dat sinum 3493899. abiectis itaque quatuor figuris; quia quatuor zifras addidimus basis sinui, prodibunt 34. & 9. vnciæ, idest 29. pedes $\frac{1}{12}$, vt proximè inuenimus propos.4. pro crure.

Tertio pro casu, quo sinus totus venit tertio loco. Sit data basis 360 vnciarum, crusq; 300. vnciarum sc. 25. pedum. Auge vtrumque 4. zifris, vt sint basis quidem 3600000. at cruris 3000000. & deinde reperi ei simillimos sinus basis quidem, vt supra, cuius logarithmus est 10209063. at verò cruris sinus 3001510. cuius logarit. est 12034696. Auferatur itaque ab hoc logarithmo logarithmus basis, & remanebit 1825633, qui quæsitus in tabulis inuenietur ei simillimus 1824299 qui est Gr. 56. m. 26. vt reperimus pr.6. pro angulo quæsito.

Patet autem ex prob. præced. Nam sinus totus, crus sinus anguli oppositi, & basis sunt quatuor proportionalia, quorum quodlibet 4. loco potest venire, sed de sinu toto nunquam quæritur, tria ergo reliqua duo dantur, & tertium semper quæritur: Si ergo sinus totus veniat primo loco tunc aggregandi logarithmi sunt, vt fiat logarit. exoptatus, vt primo, & secundo exemplo; si verò secundo loco veniat; tunc logarithmus minor subducendus est à maiore, & residuum est logarithmus, qui desiderabatur, vt tertio exemplo. Quoniam tunc cùm alter mediorum proportionalium sit logarith. o. nempe sinus totus, alter erit æqualis se solum extremorum logarithmo, quare si ab eo auferatur logarithmus primus relinquetur logarithmus quartus quæsiti proportionalis.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis crure quocumque, & angulo alteri eorum opposito duobus quibuscumque tertium reperire.

Detur crus BC pedum 25. idest vnciarum 300. & crus aliud AC pedum 32. idest vnciarum 384. & quæratur angulus A oppositus primo cruri BC. Itaque sinui 3000000. quatuor zifris aucto, reperiatur sinus propinquissimus in tabulis 3001510. & assumatur eius logarithmus 1203 696. deinde sinus aucti quatuor zifris 3840000. sinus propinquissimus inuentus sit 3840267 cuius logarithmus 9570427. & quia in regula proportionum sinus totus caderet secundo loco, subducatur minor à maiore, & residuabitur logarithmus 2464269 tangentis. Quære ergo in tabulis hunc tangentis logorithmum, & inuenies 24682434. tangentis Gr 38. esse ei simillimum. Quare arcum Gr.38. assumes pro mensura anguli quæsiti, vt prop.12.

Alterum exemplum erit. Detur crus BC oppositum pedum 20. & angulus A ei oppositus A G.32. & queratur crus adiacens, cuius complementum est Gr.58. Reijcies itaque 20. pedes in vncias 240. & additis quatuor zifris, vt sit 2400000. inuenies sinum ei simillimum 2402280. cuius logarithmus est 14261662. Deinde inuenies tangentis differentialem anguli 58. desfectiuam 4702126. eo quod sit complementi ex Cor. prop.26. Tract.21 quā subduces à sinus illius logarithmo 14261662. & residuum erit logarithmus 9559536. cui logarithmus simillimus quæsitus in tabulis est 9556451. cuius sinus est 3845638. abiectis itaque quatuor figuris iuxta 4. zifras adiectas erit crus alterum vnciarum 384. nimirum pedum 32. vt supra propos.11. Vbi debes notare, quod tangentis logorithmus licet iuxta regulam esset addendus iuxta tam Coroll. prop. 26. Tract.21. subducendus est, eò quòd consideratus, vt complementi maioris, quam Gr.45. sit defectiuus.

At si queratur crus oppositum, & detur BC pedum 32. idest vnciarum 384. & B angulus Gr.58. oppositus, cuius complementum est angulus 32. cuius sinus 2599192. differentialisque 4702126. at verò cruris BC vnciarum cum additis zifris 3840000. est simillimus sinus 3840267. cuius logarithmus 9570427. Addantur itaque simul hic logarithmus, & differentialis ex Coroll. prop.26. tract.21. de logarith. eritque summa 14272553. qui quæsitus in tabulis non inuenietur: sed ei omninò similis 14261662. qui dat sinum 2402280. cruris quæsiti, idest vncias 240 reiectis quatuor figuris ob quatuor zifras additas; quæ sunt pedes 20. vt propos. 11. b.

EXPENSIO III.

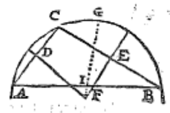
De triangulorum obliquangulorum resolutione.

Obliquangulorum resolutio, & mēsuratio parum difficilior; Vocamus autem crura duo latera angulum maiorem stipantia, & illum angulum verticalem, sicut latus, quod ei opponitur à nobis dicitur basis.

THEOR. I. PROPOS. XX.

In omni triangulo crura inter se eam rationem possident, quam sinus oppositorum angulorum.

Sit triangulum quodcumque, sed vt nobis videtur obliquangulum ACB, circùm quod ex doc. prop 5 lib.4. Elem. circumscribatur circulus ACGB: Ducanturque rectæ à centro F ad medietates crurum I, E, D, & Dico, quod crura eam proportionem possident ad inuicem, quam sinus oppositorum angulorum.



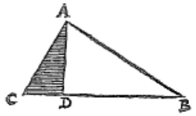
Probatur. Nam latera, vt vides sunt Chordæ, quarum medietates sinus sunt; sed vt totum se habet ad totum ita medietas ad medietatem ex prop.18. lib.5. Ergo si crus est, respectu alterius vt chorda AC ad chordam CB, erit etiam, vt sinus CD ad sinum CE.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

In omni triangulo ſicut medietas ſummæ ſinuum duorum laterum ad differentiæ eorum medietatem; ſic & tangens medietatis ſummæ angulorum oppoſitorum ad medietatis eorum differentiæ tangentem.

SIt triangulum ACB, cuius duo anguli A, & B ſcilicet arcus eos menſurantes ſuper arcum PNM in altera figura menſurentur, ita quod arcus OP ſit menſura anguli A, & arcus OM ſit menſura anguli B, & arcus O 2 ſit ſemidifferentia eorum, cuius tangens eſt ON, ſicut medietatis ſummæ tangens eſt QO.

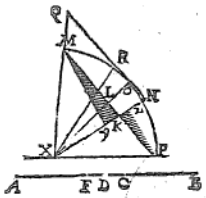
Rurſus latera AC, & AB in vnã ſummã redigãtur menſurando ea ſuper rectam AB, cuius medietas AD maiuſque crus ſit AC, & minus CB ſemidifferentiaq; inter ea ſit DC cum tota ſit FC. Dico



itaque, quòd ſicut eſt dimidia ſumma AD crurum ad dimidiam differentiam eorum DC, vel FD; Sic eſt tangens OQ dimidiatæ ſummæ angulorum ad dimidiatę eorum differentię tangentem ON.

Primò itaque ſciendum ducta ad baſim in quocumque triangulo perpendiculari ſegmenta eſſe tangentes ex prop 20. lib.3. Elem. vt patet in triangulo XQN, in quo centrum X diameter XO, cuius 2 O, & O M arcus N tangentes ſunt, vtpote ei orthogonales ON, & OQ.

Secundò ex anteced. latera triangulorum eſſe, vt ſinus ad ſinum, & ideo AC crus in linea AB eſſe ad crus CB, vt ſinus MK anguli MXK, cui ex hypotheſi opponitur crus AC ad ſinum P 2 anguli PXK, cui opponitur crus CB ducta itaque MP.



Probatur propoſ. Triangula nigra ſunt ęquiangula ex prop.17. lib.1. Coroll. cum anguli apud Y, & apud 2. ex def. ſinus ſint recti, & anguli apud K ad verticem æquales: Vnde MK eſt ad KP baſes, vt crura YM ad 2 P, & ideo ex dictis, vt AC ad CB: Ergo *componendo* MK cum KP erit ad KP, vt AC cum CB ad CB, & ex prop.18. lib.5. Elem. medietas ML priorũ erit ad KP, vt medietas AD poſteriorem ad CB: Quare *diuidendo* ML erit ad reſiduum LK ex KP, vt AD ad reſiduum DF, vel DC ex CB. Quamobrem medietas AD erit ad ſemidifferentiam DC, ſeu DF, vt LM ad KL; ſed ML ad KL eſt vt QO ad ON, ob parallelíſmum linearum QN, & MK in triangulo QXN. Ergo, vt AD ſemiaggregatum crurum ad eorum ſemidifferentiam FD, Sic tangens OQ ſemiaggregati angulorum ad tangentem ON ſemidifferentiæ eorum.

COROLLARIVM.

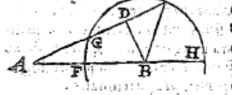
HInc eſt, quod etiam vt totum aggregatum ad totam differentiam crurum, ſic ex prop.18. tangens ſemiaggregati crurum ad tangentem ſemidifferentiæ eorum.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Im omnibus triangnlis inæqualium laterum; ſi facto centro in angulo verticali ducatur circulus ad interuallum minimi cruris. Segmentum cruris ad ſegmentum baſis extra circulum remanentis eſt, vt baſis ipſa ad aggregatum crurum.

SIt triangulum ſcalenum ACB, cuius baſis AC anguluſque verticalis B, & in B fiat centrum, interualloque BC minimo crure circulus deſcribatur FCH. Dico, quod AF ſegmentum cruris erit ad AG ſegmentum baſis; vt AC ad aggregatum AB, & & BC, ſcilicet AH.

Probatur. Nam prop 36. lib.3. Elem. rectangula, quę fiunt ex ſegmentis extra circulum remanẽtibus, & totis ſecantibus ab vno puncto demiſſis omnia ſunt æqua-



lia, & ideo AC, & AG rectangulum æquabitur rectangulo AF, & AH. At ex propoſ. 10. lib.6. rectangula æqualia habent latera reciprocè proportionalia. Ergo ita erit latus AF rectanguli ex AF, & AH ad latus AG rectanguli ex AC, & AC, vt latus AC ipſius rectanguli ad latus AH rectãguli prioris, quod eſt aggregatum cruris AB, & BC, cum BH, vtpote radius ſit ei BC ęqualis.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Datis angluis, & crure inuenire aliud, aut baſim.

IStud prob. fundatur in 20. propoſ. Quoniam enim ſunt latera inuicem, vt ſinus oppoſitorum angulorum, ſi primo loco ponatur ſinus anguli oppoſiti, ſecundo crus cognitum, tertio ſinus anguli oppoſiti lateri quæſito, inueniemus crus, vel baſim quæſitam.

Pro exemplo detur angulus A in fig.p.20. cognitus 25. G. cuius ſinus eſt 4226183. & crus oppoſitũ CB 35. pedũ, angulus quoq; alter acutus B cognitus ſit 20. Gr. cuius ſinus eſt 3420201. Dices itaq; ſi ſinus CE anguli A 4226183. dat pedes 35. quid dabit 3420201. ſinus DC anguli B, & adhibita regula proportionum exhibebit 28. & $\frac{1}{3}$ ferè.

Quod ſi velis reperire baſim, idem prorſùs efficies, ſed ſi ſit angulus obtuſus, cùm ſit maior quadrante habebit pro arcu arcum ipſum reliquorum angulorum ſimul aggregatorum ſc. arcuum ACB, & eorum ſinus AI, vel IB pro ſinu cruris ſumendus eſt.

PROBL.

PRORL. II. PROPOS. XXIV.

Duobus lateribus, & angulo datis vni eorum oppoſito inuenire angulum cruri cognito oppoſitum, & etiam angulum reliquum.

HÆc propoſitio ab eadem propoſ.20 naſcitur, vnde exemplo ſolo patebit. In fig.prop.20. Sint data duo latera BC 40. pedum, & AC 25. & angulus huic oppoſitus B Gr.18. Sicut itaque crus 25. pedum ſe habet ad ſinum DC anguli B, par. 3090170. ita pedes 40. ad ſinum CE anguli A & dabit 4944272. quam non reperies, ſed propinquiſſimum 4944476. Gr 29. m.22. quem vel pro vero recipies angulo A, vel rectificabis ex dictis prop. 14. huius.

PROB. III. PROPOS. XXV.

Duobus lateribus, & angulo verticali contento datis angulos alios reperire.

ISta propoſ. fundatur in prop.21. Detur itaque angulus Gr.27. cruſque 40. AB, & aliud 34. pedum, quæ illum claudant; quorum ſumma eſt 74. medietas 37. differentia verò 6. Cumque habeamus angulum Gr.27. & omnes cuiuſcumque trianguli anguli duobus rectis ſint æquales ex Coroll. prop.17. lib. 1. nempe Gr. 180. hinc ablatis Gr.27. à 180. habebimus aggregatum cæterorum Gr.53. quæritur itaque differentia.

Medietas ſummæ angulorum eſt Gr 75. m.30. cuius tangens eſt par. 41652974. medietas laterum 37. medietas differentię eorum eſt 3. Dices itaque regula proportionali ſi 37. pedes medietas crurum exhibet ſemidifferentiam eorum 3. quid medietatis angulorum tangens 41652974? & offeret tangentem 3377268. reperieſque tangentem proximam 3378331. Gr.18. m.40. qui arcus deducendus eſt à ſemiſumma angulorum Gr.76. m.30. & habebimus angulum minorem Gr.57. m.50. Addenduſque iterum, & obtinebimus angulum maiorem Gr 95. m.10.

Poteris etiam accipere differentiam totam laterum, & totã ſummã ipſorũ ex Cor. pr.21. quia ita eſt totum ad totum, vt dimidium ad dimidium.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Triangulum ſcalenum ad duo triangula rectangula reducere datis cruribus, & baſi.

SIt reducendum triangulum ACB ad duos rectos ADB, & DCB datis cruribus, hoc fit ope prop. 22. huius adhibita eius prop. fig.

Primo repertenda eſt portio CG per regulam auream, quæ diuiſa bifariam, vtpote chorda dabit ſinum CD, cui incidit perpendiculariter DB ex def. ſin. & ex prop.13. lib.3. Elem. ſic autem fit, detur baſis AC 9. Aggregatur priùs BC 4. & AB 7. & erit 11. pedum linea AH. Auferatur, deinde 4. à 7. nempe BC; vel BF ab AB, & erit reſiduum AF pedum 3 Dices itaque ſi 9. dant 11. quid 3? & enaſcetur ſegmentum baſis AG pedum $3\frac{6}{9}$, id eſt 3. & $\frac{6}{9}$. Quaderè reliquũ erit GC $5\frac{3}{9}$, cuius medietas DG, vel DC erit $2\frac{6}{9}$, & addito DG ipſi AG prodibit crus AD $6\frac{3}{9}$, eruntque duo triangula rectangula in cruribus duobus nota ABD, & DBC.

PROBL. V. PROP. XXVII.

Trianguli ſcaleni datis cruribus angulos reperire.

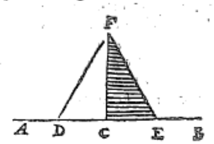
QVoniam iam nouimus ex antec. in duo triangula rectangula ſcalenum commutare, de quibus cognoſcimus crus AD, & $6\frac{3}{9}$, & DC pedum $2\frac{6}{9}$, ſicut baſim BA 7. pedum, & BC 4. & agentes de rectangulis diximus, ita eſſe baſim ad crus, vt ſinus totus ad ſinum anguli oppoſiti.

Si fiat per auream regulam, vt 7. ad $6\frac{3}{9}$, vel vt 21 ad 19. ita radius 10000000. ad aliud? dabit 9042857. ſinum, cui proximus eſt ſinus 9042008. Gr.64. & m.43. proximè anguli ABD, quem ſubtrahes à 90. & habebis angulum DAB Gr.25. m.17. Ita ages in triangulo DBC, conſequeris enim baſim BC pedum 3. & DC pedum $2\frac{6}{9}$, id eſt obtines proportionem, quæ eſt 18. ad 16. Dices itaque ſi 18. dant 16. quid 10000000? & ab operatione reſultabit 8888880. cui reperies proximũ ſinum 8888839. Gr.62. m.44. anguli DBC, quem ſubduces à 90. & reſiduus angulus erit DCB Gr. 64. m.43. ſi verò vnias angulos ad B repertos Gr. 64 m.43. & 62. m.44. obtinebis angulum totum Gr.127. m.27.

PROBL. VI. PROPOS. XXVIII.

Data baſi, & crure in iſoſcelibus triangulis angulos reperire.

QVoniam ex propoſ.19. lib.1. Elem perpendicularis CF in triangulo iſoſcele DFE facit angulos ad C rectos, & æquales, & totum triangulum album toti nigro æquatur; ſi detur crus, & dimidiata baſis, poterimus ex pręcedenti quęrere angulum oppoſitum nigrum F, & ideo lucrabimur



quoque angulum E nigrum, qui æquantur angulis albo F, & albo D. Quare, ſi coniungantur anguli albus, & niger ad F habebimus totum angulum ſeminigrum F. Vnde omnes anguli trianguli ęquicruris in palàm prodentur.

EXPENSIO IV.

De obliquangulorum dimenſione per logarithmos.

NOn minus euadit facilis logarithmica operatio in obliquangulis triangulis, quàm in rectangulis, inititurque tota in pręcedentibus tribus obliquangulorum Theorematibus.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

In omni triangulo aggregatum ex logarithmis anguli cuiusuis, & cruris eum ambientis æquatur aggregato crurum, & angulorum eis oppositorum.

QVoniam ex 20. propof. omnium crurum ad finus oppositorum angulorum eadem eſt ratio,& hinc genitus ex crure oppoſito, & ſinu ambiente æquatur producto per multiplicationem alterius ſinus oppoſiti,& cruris ambientis,& ideo productum diuiſum per ſinum alterum, vel per crus dat alterum crus, ſeu angulum ignotum; Ita etiam ex pr.5. tract.21. aggregatum logarithmorũ cruris, & ſinus aggregato alterius ſinus, & cruris logarithmico æquatur. Vnde ſubducto alterum ab altero,logarithmus eius,quod quæritur prodire neceſſe eſt; ſic in triãgulo ACB in fig.p.20 logarit. AC cruris oppoſiti, & logarithmus CE ſinus ambientis æquatur logarithmico aggregato ſinus DC, & cruris CB. Vnde ſi ab aggregato logarithmico AC,& CE auferatur logarithmus, vel DC ſinus prodibit crus CB logarithmicum,vel CB cruris logarithmus, & proferetur logarithmus ſinus DC.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

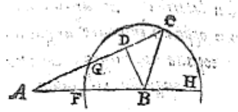
In obliquangulis logarithmus aggregati crurum ſubductus à ſumma logarithmi differentiæ crurum, & differentialis ſemiaggregati ſuorum oppoſitorum angulorum relinquit differentialem ſemidifferentiæ eorumdem angulorum.

HÆc propoſ. fundatur in propoſ.21. Coroll. Nam quia ita eſt ſumma crurum ad differentiam eorum, vt tangens ſemiaggregati angulorum ad tangentem ſemidifferentiæ eorum. Etiam logarithmus tangentis ſemiaggregati angulorum, & logarithmus differentiæ crurum, nempe mediorum terminorum æquabuntur logarithmo tangentis ſemidifferentiæ angulorum, & aggregato logarithmi crurum nempe terminorum extremorum iuxta propoſ.5. Tract.21.

THEOR. III. PROP. XXXI.

In obliquangulis ſumma logarithmorum aggregati crurum, & differentiæ eorum eſt æqualis ſummæ logarithmorum baſium veræ, & alternæ.

HÆc propoſ. inititur propoſ.22. huius, appellamus autem baſim alternam ſegmentum baſis veræ, quod extra circulum remanet, vt AG: Quoniam verò eſt AF differentia crurum ad AG baſim alternam, vt AC baſis vera ad AH aggregatum crurum, ideo logarithmi quoque mediorum AG baſis alternæ, & AC baſis veræ æquabuntur logarithmo differentiæ AF, & aggregati AH ex 5. prop.



tract.21. Vnde ſi ab aggregato AF, & AH logarithmico auferatur logarithmus baſis AC, eueniet logarithmus alternæ baſis AG.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Ex duobus angulis, quibuſcumque datæ ſpeciei, & ſuis cruribus, ſi tria dantur quartum quodcumque reperiemus.

DEtur angulus A Gr. 25. & logarithmus eius 8612856. & crus oppoſitum CB 35. pedum, ideſt vnciarũ 420. additis 4. zifris erunt 4200000. cuius proximus logarithmus eſt 8667192. Angulus autem alter B Gr.20. cuius logarithmus 10728852. Qui iunctus logarithmo cruris CB dabit aggregatum 19398044. à quo deductus logarithmus alterius anguli A Gr.25. remanebit logarithmus 10785188, cui in tabulis valdè ſimilis eſt 10784974. cuius ſinus eſt 3401060. nempe abiectis 4. figuris dextris vnciarum 340. vel pedum 28 $\frac{4}{12}$.

Quod ſi datis duobus cruribus, & angulo velis alium angulum reperire eodem modo rem perficies.

Patet autem operatio ex prop.28.

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis cruribus, & angulo comprehenſo alios angulos patefacere.

DEtur angulus comprehenſus Gr.27. crus AB pedum 40. ideſt vnciarum 480. & aliud pedum 34. ideſt vnciarum 408. Summa crurum erit 888. differentia 72. vnciæ, medietas verò ſummæ 153. reliquorum angulorum eſt 76. m.30.

Aggregati crurum 888. additis quatuor zifris, vt ſit ſinus 8880000. logarithmus proximus eſt 1188406. ideſt ſinus proximi minoris 8979491. Differentiæ eorumdem 720000. quatuor item zifris auctæ, ideſt ſinus ſimilis 720777. logarithmus proximus eſt 26300094. At differentialis, ſeu logarithmus tangentis ſemiaggregati angulorum Gr.76.m.30. logarithmus eſt 14267876. Deme itaque hunc logarithmum à logarithmo differentiæ crurum; quia differentialis eſt deffectiua, cùm eius arcus excedat Gr.45. vnde vice additionis ſubductione vtendum eſt ex propoſ.26. tract. 21. & remanebit 10843812. ideſt differentialis, & logarithmus tangentis Gr.18. m.40. quaſi m.41. Itaque ſi addas Gr.18. m.40. ſemiaggregato crurum erit major angulus 95. m.10. Si demas conſequeris angulum minorem Gr.57. m.50.

Patet propoſ. ex propoſ.29. ibi enim probatur aggregatum logarithmorum differentiæ crurum, &

& tangentis ſemiaggregati angulorum æquari ſummæ logarithmi aggregati crurum, & logarithmi tangentis ſemidifferentiæ angulorum.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIV.

Obliquangulum datorum crurum ad duo rectangula reducere.

SIt baſis 49. pedum; & latus 4. & aliud latus 7. Addatur logarithmus aggregati crurum pedum 11. vel vnciarum 132. differentiæ eorumdem pedum 3. vel vnciarum 36. additis quatuor zifris vt ſit 1320000. Itaque huius num. in tabulis ſinus proximus eſt 1319681. cuius logarithmus eſt 20230110. & ideo ſubſtituendus pro ipſo ſummæ crurũ logarith. Itẽ differentiæ 360000. ſinus proximus eſt in tabulis 360623. & ideo etiã logarith. eiuſdem differentiæ 33225056. Cõiunges igitur iſtos duos logarithmos ſimul, & erunt 53455176: Poſtea baſis pedum 9. ideſt vnciarum 108 quatuor zifris auctę, vt ſit 1080000. reperies ſinum ſimillimum in tabulis 1079994. cuius logarithmus eſt 22256290. Hunc itaque logarithmum à ſumma 53455176. ſubducito, & erit logarithmus 3118886. qui dabit ſinum 442006. à quo abiectis quatuor zifris reſtabunt vnciæ 44. ideſt pedes 3. & $\frac{8}{12}$, pro ſegmento baſis alternæ. Cętera autem exequeris, vt propoſ.26.

Patet hæc praxis ex propoſ.30. cùm ibi probatum ſit aggregatis crurum logarithmum, & differentiæ eorumdem in vnam ſummam redactum æquari ſummam logarithmorum baſis veræ, & alternæ. Quare ſubducto logarithmo baſis veræ remanebit logarithmus baſis alternæ.

Habitis autem duobus rectangulis, anguli eorum reperientur per logarithmos, vt Expenſ. 2. docuimus.

TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRICI PARS II.

De Triangulis Sphæricis ſoluendis.

TRiangulorum ſphæricorum doctrina aſtronomiæ, & aſtrologiæ baſis eſt, nulluſq; ſine ipſa in illis proficere, aut aliquid ritè cognoſcere poteſt: ſed ſicut præcipuæ vtilitatis referta eſt, ſic non minima difficultas in demonſtrationibus penitùs percipiendis dignoſcitur: vnde multi de hac cognitione haurienda diffiſi ſolis praxibus potiùs incubuere. Nos, vt tam præcipua Mathematicæ pars etiam imaginationibus minus viuacibus pateret clariùs, quàm fieri potuit, tum verbis, tum figuris cum difficultate decertauimus.

EXPENSIO I.

De rectangulis ſphæricis ſoluendis.

SOluere triangula ſphærica eſt ex datis aliquibus partibus alias manifeſtare, in quo negotio ritè peragendo videnda ſunt ea, quę diximus prop. 14. & 28. & Coroll. tract. 23. part. 2. vbi euitare fallacias, & amphibologias docemus; ne pro latere, aut angulo quæſito, alium inueniamus, & loco quæſiti adhibeamus; & vt ſecuriùs id fiat, ſatiùs erit vti ſemper triangulo, cuius duo anguli ad baſim ſint quadrante minores, & tales erunt ex cit. Coroll. ſi, & arcus, cruraque ſubtenſa ſint quadrante minora, non verò ſi vnus ſit acutus, alter obtuſus angulus, aut crus vnum quadrante minus, alterum verò maius. Quomodo verò poſſimus ſemper vti triangulo duos angulos acutos habente infrà docebimus, cum de ſubſtitutione.

Aduerte autem, baſis in iſtis triangulis ſibi nomen vſurpare crus angulo recto oppoſitum, crurum verò arcus, qui obliquis ſubtenduntur, angulus verò adiacens vocatur, qui adhæret cruri, quod efficitur à baſi, & altero crure.

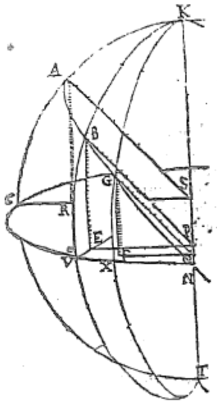
THEOR. I. PROP. I.

Triangula ſphærica duobus circulis inclinatis effecta, & tertio quocumque alteri ipſorum perpendiculari habent ſinum cruris ad ſinum baſis in eadem proportione.

SInt duo circuli inuicem inclinati AEN, & CVN, & alij circuli perpẽdiculares, vt KCT, KBVT, & KGXT alteri ipſorum, vt circulo CVN deſcendant, & cõpleant triãgula ſphærica rectãgula ACN, VBN, & XGN. Dico, quòd ita eſt ad ſinum FG cruris GX ſinus GO baſis GN, vt ad ſinum BE cruris BV ſinus BP baſis BN, & ad ſinum RA radius AS.

Pro-

Probatur. Sinus totus SA, & BP, & GO ſunt parallelì, ita ſinus RA, EB, & FG ſunt paralleli. Ergo triangula RAS, & EBP, & FGD ſunt æquiangula, cum parallelis claudātur. Quare ex propoſ. 4. lib. 6. Elem. ita eſt AS ad AR, vt BP ad BE, & OG ad GF.



Quod autē ſinus EB, & FG, & RA ſīt paralleli patet (& deſeruiat pro vniuerſali oſtenſione in alijs) nā debēt eſſe ex def. ſinus perpēdiculares radijs V. g. AR ſinus radio CS, vel ſinus EB ei, qui tranſiret ab V per E in S, & cæt. quibus omnibus, vtpote in eodem plano poſitis perpendicularis eſt SK ſectio planorum circulorum perpendicularium communis ex propoſ 16. tract. 22. de interſect. Cum ergo ſinguli ſinus AR, & EB, & GF ſint perpendiculares radijs: quibus, & perpendicularis eſt SK, & in eodem plano, vt SK ſinguli ſint; Ergo ipſi SK ſunt paralleli: quare ex prop 9. tract. 22. etiam inter ſe.

Idem oſtendetur de ſinubūs baſium AS, & BP, & GO cum ex def. ſinus ſint omnes perpendiculares ſinui toti NS, & in eodem plano ſint circuli ABN, quare omnes erunt paralleli.

COROLLARIVM.

OBſerua autem, quod AR menſurat angulum ANC. Quoniam KAT ductus eſt polo N; vnde circuli inclinati inuicem ABN, & CVN tranſeunt per polum N, quadere etiam circulus KAT per polos illorum tranſibit ex 15. tract. 21. part. 1. & hac ratione ex prop. 14. eiuſdem tract. erit KAT vtrique perpendicularis, ideoque arcus AC ex def. 6. tract 21. part. 1. angulum ANC menſurabit, & AR erit ſinus illius anguli ſc. arcus AC. Quamobrem erit ſinus totus AS ad ſinum anguli AR, vt ſinus baſis BP ad ſinum cruris BE illi oppoſiti.

THEOR. II. PROPOS. II.

Triangula ſphærica duobus circulis inuicem inclinatis effecta, & tertio quocumque alteri ipſorum perpendiculari habent ſinum anguli recti, ideſt ſinum totum ad ſinum baſis, vt ſinus anguli obliqui ad ſinum cruris.

QVoniam eadem figura vtendo AS ſinus totus eſt ad AR ſinum anguli, vt baſis BP ad ſinum BE cruris; erit etiam *permutando* ſinus totus AS ad ſinum baſis BP, vt ſinus anguli AR ad ſinum cruris BE.

PROBL. I. PROPOS. III.

Dato radio, ſinu anguli, & ſinu baſis latus oppoſitum angulo dato inuenire in rectangulis triangulis.

QVoniam ex anteced. 1. & 2. propoſ. AS eſt ad AR, vt PB ad BE, ideo ſi detur AS ſinus totus AR ſinus anguli PB ſinus baſis per regulam auream epiſcabitur ſinus BE cruris BV, qui debebit eſſe ſpecie cōformis dato angulo. Exēplū erit. Sit baſis data Gr. 50 cuius ſinus 7660445 angulus Gr. 30. m. 30. Sinus verò 5075384. & ſinus totus. Dicaturque, ſi ſinus totus dat ſinum anguli Gr. 30. m. 30. par. 5075384. quid ſinus baſis 7660445. & prodibit ſinus cruris angulo dato oppoſiti par. 3887969. Gr. 22. m. 52. & paulò magis. Debet autem hoc crus conformari ſpecie angulo oppoſito dato ex prop. 28. tract. 23. Cor. 5.

COROLLARIVM.

HInc educes poſſe alias comparationes fieri, ſed paulò in opere laborioſiores, quæ ſunt.

Dato ſinu baſis BP, & ſinu cruris BE, & ſinu toto AS reperire ſinum AR anguli oppoſiti N cruri dato EB.

Sic etiam dato CNA anguli ſinu RA, & ſinu toto AS, & ſinu cruris EB reperies baſim BP: ſed hæ operationes ob diuiſionem, quæ debet fieri cum ſinus totus 2. loco inueniatur, ſunt paulò operoſiores, & in his debet aliqua reliquarum partium cognoſci quadrante minor V. g. quod crus BV, minus quadrante, vel angulus VBN ſit acutus.

THEOR. III. PROPOS. IV.

In omni triangulo ſphærico rectangulo proportio ſinus anguli recti ad ſinum anguli non recti, eſt vt ſinus complementi cruris reliquum angulum ſubtendentis ad ſinum complementi ipſius anguli reliqui.

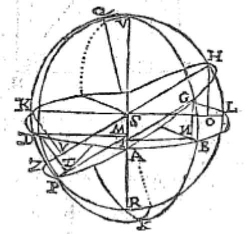
SIt triangulum GBA factum ex duobus circulis inclinatis HGAZ, & LBAK, claudatque alterum latus arcus deſcendens circuli VGBX perpendicularis ſuper circulum LBAK.

Sitque GN ſinus cruris GB, & GI ſinus baſis GA, ſicut HO ſinus arcus LH menſurantis angulum A. Numeratis autem à puncto G 90. Gr. & in G facto polo ducatur arcus QPX perpendicularis circulo HAZ; & circulo VGX ex Coroll. 1. propoſ. 13. Tr. 19. cum polus ſit in communi puncto. Quare GBX, & GAP erunt quadrantes ex prop. 13. eiuſdem Coroll. 2. Illud autem, quod in primis eſt oſtendendum BAD, & XPD eſſe quoque quadrantes.

Probatur autem. Nam VGX circulus ſecat XPQ circulum orthogonaliter, vt diximus, & biſariam cum ſint maximi; Ergo ex prop. 13. tract. 23. etiam per polos eius circulus QPX tranſibit. Pariter quoque LBAK circulus eundem VGX ſecat orthogonaliter ex dictis, & biſariam, cùm ſint maximi. Ergo ex prop. 13. cit. per polos eius circulus BAD tranſibit. Quapropter in eodem polo circuli VGX duo circuli LAK, & XPQ conuenient in D. Sed poli ex

ex Coroll. 3. prop. cit diſtant quadrante, à circulo, cuius ſunt poli. Ergo BAD, & XPD quadrantes ſunt cùm debeant diſtare ab X, & G punctis circuli VGX quadrante. Propterea AD erit complementum arcus BA, cruſque PD erit complementum arcus crurisque BA, & PD erit complementum arcus XP, qui menſurat angulum G cum circulis XBG & GAP ex effectione ſit perpendicularis. Quadere MD erit ſinus arcus AD complementi cruris BA, & DT ſinus arcus DP complementi anguli G.

Dico itaque ſinum totum HS ad ſinum HO anguli obliqui A dicere eam proportionem, quam ſinus DM complementi cruris adiacentis AB dicit ad ſinum TD complementi reliqui anguli G.



Probatur autem ex præhabitis. Nam propoſ. 1. oſtendimus, quod ſit, vt SK ad KY, ſic MD ad TD quod deſcendat ſuper alterum inclinatorum HGAP perpendicularis circulus XPQ. Sed SK æquatur SH, cùm ſit ſinus totus, & KY æquatur ſinui HO, cùm ſint ſinus angulorum æqualiū ex prop. 3. par. 2. tract. 23. cum ſint ad verticem A, & ideo arcus HL, & XK eos menſurantes erunt æquales: quare etiam ſinus HO, & KY ſubtenſi erunt æquales. Quadere ex 7. lib. 5. erit SH ad HO ſinus totus ad ſinum anguli HAL non recti, vt MD ſinus complementi AD cruris BA ad TD ſinum complementi anguli reliqui G.

PROBL. II. PROPOS. V.

Dato radio ſinu anguli, & ſinu complementi cruris angulo dato adiacentis inuenire angulum reliquum.

QVoniam radius eſt ad ſinum anguli OH, vt ad ſinum TD complemēti anguli reliqui G ſinus MD complementi cruris, ideoque. Si ſtatuatur 1. loco radius, 2. ſinus anguli A, ſc. HL arcus 3. ſinus complementi cruris adiacentis BA inuenietur ſinus DT complementi anguli reliqui, nempe arcus PD, qui ablatus à Gr. 90. relinquet arcum exoptatum PX menſuram anguli G.

Exemplum. Sit arcus Gr. 39. m. 25. anguli A, cuius ſinus 6349553. Crus AB Gr. 47. m. 30. cuius complementum ſit arcus Gr. 42. m. 30. & eius ſinus 6755902. qui multiplicabitur cum ſinu anguli A, & proferet diuiſus per ſinum totum. Sinum 4289695. DT Gr. 25. m. 24. & paulò magis, qui arcus deductus à Gr. 90. exibebit arcum XP Gr. 64. m. 36. Debent verò iſti arcus dati anguli, & cruris eſſe quadrante minores ad hoc, vt cruris, accipiamus complementum ex prop. 28. tract. 23.

Quòd, & obſeruandum eſt in reliquis praxibus, quando complementa interueniunt pro arcubus accipienda.

COROLLARIVM.

HInc quoque inuenies dato primò cruris BA complementi ſinu MD, ſecundò anguli G complemento, cuius ſinus DT, & radio, inuenies inquam ſinum anguli A dato cruri adiacentis.

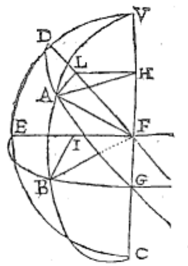
Sicut dato 1. ſinu HO anguli adiacentis cruri BA, & 2. Radio, & 3. anguli reliqui G cruri dato oppoſiti complementi ſinu DT, inuenies complementi AD cruris BA ſinum MD; ſed paulò maiori labore ob Radium, qui 2. loco incidit, & hic etiam aduertere oportet ad ſpeciem, nam crus, quòd expromitur debet ſpecie reſpondere angulo dato, vt ſint ambo quadrante minores.

THEOR. IV. PROPOS. VI.

In omni triangulo ſphærico rectangulo ſinus quadrantis ad ſinum complementi cruris eam obtinet proportionem, quam ſinus complementi reliqui cruris ad ſinum complementi baſis.

SIt ſphera, in qua ſit triangulum ABC ex circulis inclinatis inuicem DAG, & EBG, claudatque alterum latus arcus perpendicularis VABC. Eritque FB ſinus totus, & BAV quadrans, & VA arcus complens crus BA vſque ad quadrantem VB, & ſinus eius AH parallelus ſinui toti BF in ſuperficie circuli VABC deſcriptus. Arcus verò EB complentis crus BG ſinus BI in plano circuli EBG. Sicut etiam arcus DA baſim AG complentis ſinus AL in planitie circuli DAC deſcriptus.

Dico itaque, quòd ſicut ſe habet ſinus totus FB ad ſinum BI complementi cruris, ita in proportione aſſimilatur ſinus AH complementi reliqui cruris ad ſinum AL complementi baſis.



Probatur ex 1. propoſ. h. Nam VABC, VDEC sūt circuli inclinati inuicem, & arcus EB circuli EBG menſurat angulum inclinationis ad V cùm polus eius ſit in V. Vnde BV, & VE ſunt quadrantes. Alius autem circulus DAC perpendiculariter ſuper alterum ipſorum, nempe ſuper VEC deſcendit à puncto G, quòd eius polus in circuli VEC circumferentia exiſtat. Quare ea prop. 1. hic verificatur, eritque FB ad BI, vt AH ad LA, eo quod ſint parallelæ lineæ AL, & BI, vtpote ſinus perpendiculares ſemidiametris DF, & EF, & etiam BF, & AH eo quòd ſint perpendiculares, vtpote ſinus radio FV. Cum ergo lineę ſint parallelæ erunt triangula æquiangula ALH, & IBF, & ideo latera erunt proportionalia, & erit FB ad BI, vt AH ad AL.

PROBL. III. PROPOS. VII.

Dato radio, & sinu complementi cruris, & complementi cruris alterius basim inuenire.

QVoniam est radius BF ad BI sinum complementi cruris BG, vt AH sinus complementi alterius cruris BA ad sinũ AL complementi basis; adhibendo regulam proportionum ex radio, & ex ijs sinubus datis complementorum crurum prodibit sinus complementi basis.

Exemplum. Sit datum crus Gr.42. cuius complementum G.48. & sinus 7431448. complementi huius, & alterum crus Gr.33.m.15. cuius complementum Gr.56. m.45. & eius sinus 8457278. Multiplicentur simul, & productum per radium diuidatur, prodibitque sinus complementi basis 6284982. Gr.38. m.56. & paulò magis, erit autem minor quadrante basis, si crura specie concordauerint; si verò dissentiant specie, maior quadrante ex prop.18. Tract.23. Cor.4.

COROLLARIVM.

HInc etiam enascitur; quòd dato sinu BI complementi cruris BG, & sinu toto, & sinu AL complementi basis, inueniatur sinus AH complementi cruris reliqui AB; Vel etiam dato AH sinu cõplementi cruris BA, & sinu complemẽti basis AL, & radio BF, inueniatur sinus BI complementi alterius cruris; Verùm cùm radius non veniat primo loco paulò operosior est calculus.

EXPENSIO II.

De tangentibus.

QVoniam per solos sinus trigonometria non est perfecta, cùm non omnes possint inquiri rectangulorum partes secundùm omnia data, per quæ inquisitio placeat ordiri, & etiam quędam per solos sinus laboriosiùs acquirantur, ideo, vt illorum defectibus succurrant, tangentes adinuẽtæ sunt, & secantes. Sed priùs de tangentibus in hac expensione tractabimus, cum ipsæ cum sinubus ad soluendos omnes casus trigonometriæ sufficere possint. Sed præter ea, quæ diximus prop. 24. & 25. Tract.20. hic etiam aliæ preuię propositiones statuendæ sunt.

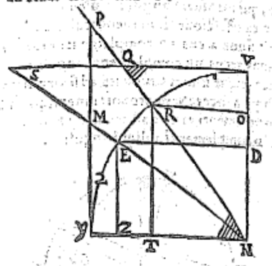
THEOR. I. PROPOS. VIII.

Si sint duo arcus, ita erit tangens primi ad tangentem complementi posterioris, vt tangens posterioris ad tangentem complementi prioris.

SInt duo arcus primus RV, & EY secundus. Dico quòd sicut tangens prioris QV est ad tangentem complementi posterioris VS, sic tangens postremi YM ad tangentem complementi prioris YP.

Probatur. Tangens QV est ad radium, vt radius ad tangentem YP complementi ex prop.25. Tract.20. Et tangens YM arcus posterioris refertur quoque ad radium, vt radius ad SV tangentem sui complementi: vnde etiam erit *inuertendo* Radius ad YM, vt SV ad radium: quamobrem dispositis ritè terminis est proportio perturbata.

vt QV ad Rad. Et vt Rad. ad YM,
Ita SV ad Rad. sic Rad. ad YP.



Quare ex *æquo* ex def.18. Tr 9. erit quoq; VQ ad YM tangentes arcuum, vt SV ad YP tangentes complementorum, sc. prioris, & posterioris, & *permutando* VQ ad SV, vt YM ad YP, nempe tangens primi QV ad tangentem complementi secundi SV, vt YM tangens huius ad YP tangentem complementi prioris.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Si sit arcus, cuius radius referatur ad sinum suum, sicut tangens alicuius secundi refertur ad tangentem alterius tertij. Sic quoque refertur tangens complementi huius tertij ad tangentem complementi illius secundi, vt radius primi ad suum sinum se habebat.

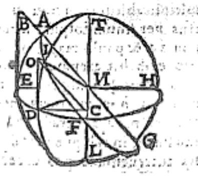
PRobatur ex propos. 16. lib.5. Nam eidem proportioni tertiæ arcuum tangentis VQ ad YM sunt duæ proportiones eædem radij RN V. g. ad sinum OR arcus alicuius ex Thesi; & ex præc. contextu YP ad VS, quare erit etiam eadem proportio RN ad RO, quam YP ad SV.

THEOR. III. PROPOS. X.

In triangulo sphærico rectangulo sinus cruris est ad tangentem alterius cruris reliqui, vt radius est ad tangentem anguli reliquo cruri oppositi.

SInt duo circuli inclinati AFG, & EFH, & huic circulus normalis TDL descendat, claudatque triangulum IDF. Dico quòd DC sinus cruris DF est ad DO tangentem alterius cruris DI secundi, vt EN radius est ad EB sinum anguli IFD.

Probatur. Nam tangentes EB, & OD, vtpote perpẽdiculares ex 30. lib.3. Elem. radijs DN, & IN, & ideo parallelæ radio NT erunt perpendiculares EFH plano, cui radius NT perpendicularis est, quare inuicem quoque erunt parallele, & insuper DO erit perpendicularis, sinui DC parallelæ radio EN. Quapropter triangula ENB, & ODC erunt æquiangula, tanquam parallelis constantia ex 4. lib.6. Elem. & ideo DC erit ad DO, vt radius EN ad EB tangetem anguli IFD.



PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato radio, & sinu cruris adiacentis angulo, & tangente ipsius anguli; cruris oppositi tangentem reperire dato angulo specie conformem.

QVoniam diximus DC sinum cruris esse ad DO tangentem cruris alterius, vt radius ad tangentẽ EB anguli F erit etiam *permutãdo* DC sinus ad EN radium, vt DO tangens cruris ad EB tangentem anguli, & *inuertendo* radius EN erit ad DC sinum, vt tangens EB anguli F ad tangentem DO cruris oppositi DI. Quare dato radio primo loco; deinde sinu cruris, postea tangente anguli adiacentis, prodibit tangens cruris oppositi conformis spetie dato angulo ex Cor.5. prop.28. Trac.23.

Exemplum. Sit crus Gr.29. m.20. cuius sinus 4898897. Anguli adiacentis tangens Gr.21. m.45. quæ est 3989596. Multiplicentur simul, & numerus genitus diuisus per radium proferet tangentem 1954461; quæ est Gr. 11. m.3. & paulò magis, anguli oppositi.

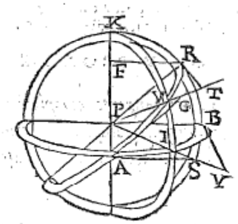
COROLLARIVM.

HInc etiam: Dato primò tangente EB anguli F, secundò radio EN; tertiò tangente cruris oppositi angulo dato poterit inueniri crus adiacẽs, vt preced. patet. Sicut etiam dato sinu DC cruris, & data tangente alterius cruris DO, & radio angulus F oppositus alteri crurum extrahi poterit: sed paulò laboriosiùs, quæ tamen inuenta datis debent esse esse spetię conformia ex prop.28. Tr.23. Cor. 5.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

In triangulo sphærico rectangulo radius est in proportione ad sinum complementi anguli non recti; vt tangens basis ad tangentem cruris dicto angulo adhærentis.

SIt sinus RF complementi arcus BR anguli A; Tangens autem cruris AI sit AS, at basis AV tangens sit AG. Ex præced. radius PB ad, sinum FR



adiacentis cruris angulo K dicit eam proportionem, quam tangens BY anguli K ad tangentem RT oppositi cruris. Verùm ex 8. huius, sicut est DY ad RT; ita est complementi posterioris arcus tangens AG ad tangentem SA complementi arcus prioris: Ergo etiam ex prop.16. lib.5. Elem. Radius BP erit ad sinum RF complementi KR arcus RB anguli A, vt AG tangens basis VA ad SA tangentem cruris IA angulo A adhærentis triang. AIV.

PROBL. II. PROPOS. XIII.

Dato radio, & sinu complementi anguli, & tangente basis inuenire crus adiacens angulo dato.

FAciliter id fit ex præced. per regulam auream. Nam cum sit radius ad sinum complementi anguli, vt tangens basis ad tangentem cruris. Sinus complementi ãguli multiplicetur cum tangente basis, & diuidatur per radium, prodibit tangens cruris quæsiti adiacentis.

Exemplũ. Sit arcus ãguli G.33. m.20. cuius cõplementũ G.56. m.40. & eius sinus 8354878. Sit verò basis Gr.42. cuius tangens 9004040. Multiplicentur simul, & genitus numerus per radium diuisus dabit tangentem 7522765. Gr.36. m.57. & paulò magis. Hoc autem crus debet esse spetie conforme angulo dato ad vitandas fallacias prop.28. Coroll.5. Tract. 23. p.2.

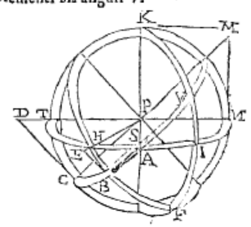
COROLLARIVM.

HInc etiam posset data tangente anguli AS, & radio, & tangente AG basis extrudi sinus RF complementi anguli A cruri dato adiacentis. Verũm operosiùs.

THEOR. V. PROP. XIV.

In rectangulo sphærico radius est ad tangentem anguli in eadem proportione, quam obtinet sinus complementi basis ad tangentem complementi alterius anguli.

SIt triangulum IAV, & basis VA complementum sit AB, mensura verò anguli V sit arcus FB ductus polo V, cuius complementum, vt ostendi prop.5. huius est arcus BH. Dico, quod radius PC est ad tangentem NM anguli A, quam sinus SB complementi basis possidet ad tangentem BE complementi BH anguli V.



Pr. Ex pr.10.h. ita est PC radius ad CD tãgentẽ anguli HAB, vt sinus cruris adiacentis SB ad tangentẽ BE cruris oppositi BH; Sed hoc crus BH est cõplemẽtũ anguli V, & CD æquatur tangenti MN, cũ sint tangẽtes æqualiũ angulorũ ad verticẽ A ex 3. tr.23. p.2. Ergo radius erit ad tangentẽ NM anguli A trianguli

SVA, vt ſinus SB complementi baſis ad tangentem BE complementi alterius anguli V.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Dato radio, & tangente anguli, & ſinu complementi baſis, tangentem compl. alterius anguli reperire.

QVoniam ex præced. radius eſt ad tangentem anguli, vt ſinus complementi baſis ad complementi reliqui anguli tangẽtem, adhibita regula proportionum poſtulatam exhibebit tangentem.

Exemplũ. Detur radius, & anguli G.45. m.19. tãgẽs 10111153. & baſis G.62. m.55. cõpl. G.27. m.5 ſinus ſit 5113589. qui numeri inuicem multiplicati exhibebũt 5170428 pro tãgẽte quęſita cõpl. anguli alterius G.27. m.20. Vnde ãgulus erit G.62. m.40. qui debet eſſe minor quadrãte, quòd data ãgulus, & baſis eſſe debeant quadrante minora, at ſi baſis ſit maior quadrante angulus eſſet obtuſus ex cit. propoſ.28. Tr.23. Cor.2. p.2.

COROLLARIVM.

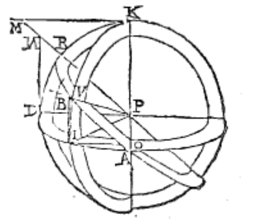
POſſent etiam alio pacto ordinari termini ſtatuto primo loco CD, vel MN tãgente anguli oppoſiti, 2. loco radio, 3. loco anguli alterius complemẽti tãgente, & prodiret ſinus BS compl. baſis.

Vel 1 ſinus SB cõplementi, 2. tangens complementi anguli, 3. radius, generaret anguli tang. CD, vel NM. Sed faciliùs hæc quæſita alio pacto venabimur. Debent autem data eſſe quadrante minora ob vſum complementorum ex propoſ.4. Tract. 27. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XVI.

Trianguli ſphærici rectanguli radius ad tangentem cruris eadem proportione potitur, quà tangens complementi baſis ad ſinum complementi anguli adiacentis.

IN triangulo ERV, cuius angulus rectus R; baſis verò VK; tangens verò IB eius complementi IV, & crus ſit KR, cuius tangens KM, & tangens eius complementi DN. Arcus, qui angulum K menſurat ſit DI, cuius complementum ſit IA, & eius ſinus IO. Dico, quod Radius KP eſt ad tangentem cruris KM in proportione illa, quam habet tangens complementi baſis IB ad ſinum IO complementi anguli K.



Probatur ex propoſ.10: Sinus IO, eſt ad tangentem IB, vt radius DP ad tãgentem DN anguli A.

Quare *inuertendo* DN tangens erit ad radium, vt IB tangens ad IO ſinum ex prop. autem 25. Tr.20. vt DN refertur ad DP, ita DP radius ad MK tangentem complementi eiuſdem arcus. Quapropter vt DP ad MK, ſic proportione correſpondebit IV ad IO tangentem. Radius itaque eſt ad KM cruris RK in rectangulo RKV, vt tangens IB complementi IV baſis VK, ad ſinum IO arcus IA complentis arcum DI menſuram anguli K.

PROBL. IV. PROPOS. XVIII.

Dato Radio, & tangente cruris adiacentis, & tangente complementi baſis ſinum complementi anguli dato cruri adiacentis inuenire.

QVoniam tangenti MK radius eà proportione refertur, quâ tangens complementi baſis IB ad ſinum complementi anguli IO adhibita regula proportionum ex tribus primis datis deſideratum ſinum IO exhibebit, vt exemplum docet.

Exemplum. Sit crus G.27. m.32. cuius tangens eſt 5213067. Baſis verò compl. ſit G.49. m.10. cuius tangens 11571494. Multiplicenturque ſimul, & productum per radium diuidatur, abiectis 7. ziffris ad dextram, vt moris eſt, & prodibit ſinus 6032297. qui eſt Gr.37. m.6. & paulò magis, qui ſubductus à Gr.90. efficietur angulus exoptatus Gr.42. m.54. Obſeruaque quòd ea, quæ dantur ſint ſpecie cognita quadrante minora ob vſum complementorum; vnde, & angulus, qui eruitur debet eſſe acutus ex prop.28. tract.23. Cor.3.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Radius eſt ad tangentem complementi anguli, vt tangens cruris dicto angulo oppoſiti ad ſinum cruris adiacentis.

SIt triangulum AVI in præced. fig. Deturque angulus A, cuius tangens eſt DN; complementi eius anguli tangens eſt KM; crus autem oppoſitum eſt IV, cuius tangens IB; ſinus verò lateris adiacentis AI eſt IO. Dico *itaque, quòd radius PK eſt ad MK, vt IB ad IO.*

Probatur DN eſt ad DP, vt IB ad IO *inuertendo* propoſ.10. huius; ſed vt tangens DN ad radium DP, ita ex propoſ.25. tract.20. eſt radius PK ad tangentem MK compl. Ergo vt radius PK ad tangentem MK complementi KR anguli A; ſic tangens IB cruris oppoſiti ad ſinum cruris adiacentis IO.

PROBL. V. PROP. XIX.

Dato radio, & tangente complementi anguli, & tangente complementi cruris, ſinum cruris adiacentis angulo dato inueſtigare.

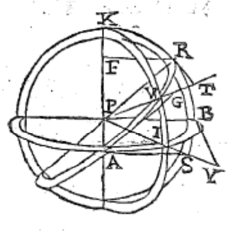
QVoniam hęc quatuor ſunt proportionalia radius ad tangentem complementi anguli. Sicut tangens cruris oppoſiti ad ſinum cruris adiacentis; ideo regula proportionum inſtitutum complebit. Exem-

Exemplum. Sit datus angulus Gr.62. m.28. cuius complementum eſt Gr.27. m.32. Tangenſque eius 5213067. crus verò Gr.18. m.26. cuius tangens eſt 3333020. multiplicati itaque iſti numeri ſimul, & diuiſi per radium dabunt ſinum 1737525. exoptatum; qui eſt Gr.10, & paulò ampliùs; Opus autem erit obſeruare, vt ſpecie ſit crus, quòd eruitur, & conforme datis, ex prop 18. tract.23. p.2. coroll. 5. & 6. quæ ſumenda erunt quadrante minora.

THEOR. VIII. PROP. XX.

Radius eſt ad ſinum complementi anguli, vt tangens complementi cruris adiacentis ei ad tangentem complementi baſis in ſphærico rectangulo.

IN præced. fig. prop.12. huius detur triangulum ſphęricum rectangulum AIV, & angulus RAB, cuius complementum RK, & ſinus eius RF. Baſis ſit AV, cuius complementum VR, & eius tangens TR, crus ſit AI, cuius complementũ IB, & tangens ipſius BY. Dico, *quòd PB radius eſt ad RF ſinum complementi anguli*, vt tangens BY complementi cruris eſt ad tangentem TR. complementi baſis.



Probatur. Nam, vt oſtendi propoſ.10. huius, vt BP ad BY, ſic FR. eſt ad TR; Ergo *permutando* radius BP erit ad FR ſinum, vt BY tangens ad TR. tangentem; ſed FR. eſt ſinus complementi RK arcus R. anguli A, at BY complementi BI cruris IA tangens, & TR complementi RV baſis AV tangens. Ergo patet propoſitum.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Dato Radio, & ſinu complementi anguli, & tangente complementi cruris, & ſpetie cruris, aut anguli reliqui inuenire tangentem complementi baſis, & inde baſim.

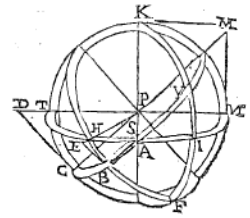
IVxta præced. propoſ. cum hæc propoſita ſine proportionalia regula proportionum ex poſtulata largietur.

Exemplum. Sit datus angulus 23. Gr. cuius complementum eſt Gr.77. & eius ſinus 9743700. ſit crus 37. Gr. cuius complementum eſt Gr.53. eiuſque tangens 13270448. qui numeri ſimul ducti, & per ſinum totum diuiſi dabunt tangentem 12930326. Gr.52. m.17. qui Gr. ſubducti à 90. exhibebunt arcum exoptatum baſis Gr.37. m.43. Si autem data cognita quantitate ſpetie conſonent baſis erit quadrante minor, ſi diſſonent maior ex Cor.4. prop.28. tract.23.

THEOR. VIII. PROPOS. XXII.

Radius eſt ad tangentem complementi anguli obliqui in rectangulo ſphærico, vt tangens complementi reliqui obliqui ad ſinum complementi baſis.

TRiangulum datum ſit AVI in fig. prop.14. h. tangens verò complementi anguli A, ſeu arcus eum menſurantis, ſit KM: Complementi verò baſis ſit AE, & ſinus SB, & alterius anguli V, quẽ arcus PB menſurat ſit complementum BH, tangens BE. Dico igitur, quòd radius PK ea proportione refertur ad MK, quà BE ad BS.



Probatur. Nam ex 10.h. ita eſt SB ad BE, vt PC ad CD: Ergo *inuertendo*, vt BE ad BS ſic dicent CD ad CP, ſed ob radi I nec non, & tangentis æqualitatem, vt CD ad CP radium, ita eſt NM ad NP: At vt NM ad NP, ſic ex propoſ.25. tract.20. eſt radius PK ad MK. Ergo vt eſt radius PK ad MK tangentem complementi anguli A, ſic eſt BE tangens complementi anguli reliqui ad BS ſinum complementi baſis.

PROBL. VII. PROPOS. XXIII.

Dato ſinu toto, & tangente complementi anguli, & tangente complementi alterius anguli inuenire tangentem complementi baſis.

PAtet operatio ex præced. quia cum data, & quæſitę tangens baſis ſint proportionalia, inuenietur per regulam proportionum.

Exemplum. Sit datus angulus Gr.36. cuius complementum eſt Gr.44. & tangens 9656888. Alterius verò anguli Gr.48. ſit complementum 32. & tangens ſit 6248693. qui numeri multiplicati ſimul exhibebunt pro tangente complementi baſis numerum, qui diuiſus per ſinum totum erit 6034192. Gr.31. m.6. ferè, qui ſubducti à 90. Gr. erunt Gr.58. m.54. baſis. Debent autem ſumi anguli quadrante minores ob vſum complementorum: vnde, & baſis erit quadrante minor ex prop.28. par.2. tract.23. Cor.4.

THEOR.

THEOR. X. PROP. XXIV.

Radius est ad sinum cruris, vt tangens complementi alterius cruris ad tangentem complementi anguli oppositi.

DEtur triangulum KRV in fig. propos. 12. & duo eius crura KR, & RV, quæ ambiant angulum rectum R, sinus autem cruris KR sit FR; tangens verò RV cruris sit RT, & eius cōplemēti AV sit AG, at arcus angulum K mensurantis tangens sit BY, & complementi sit AS: Dico igitur, quod sicuti PB radius est ad FR sinum cruris, ita AG tangens complementi cruris est ad AS tang. complementi anguli K oppositi.

Probatur. Nam ex prop. 10. huius, ita est sinus FR ad RT tangentem, vt PB radius ad tangentem BY; Ideoque *permutando* FR erit ad PB, vt RT ad BY, & *inuertendo* PB radius erit ad FR sinum, vt BY tangens ad RT tangentem: sed vt BY tangens ad RT tangentem sic ex propos. 8 huius tangens AG complementi arcus secūdi VR est ad SA tangentem complemēti primi BI: Ergo sicut est radius PB ad sinum FR, ita tangens AG complementi cruris ad tangentem AS complementi anguli K.

PROBL. VIII. PROPOS. XXV.

Radio dato, & sinu cruris, & tangente complementi cruris alterius tangentem complementi anguli obliqui inuenire.

IAm ex præc. patet, quòd cum hæc sint quatuor proportionalia datis tribus vltimum regula aurea inuenire possimus, vnde.

Exemplum erit. Sit arcus Gr. 37 m. 15. cuius sinus sit 6052940 & arcus alter, qui crura rectanguli conficiant Gr. 23. m. 47. cuius complementi Gr. 66. m. 13. tangens est 22690909. Multiplicentur simul, & radio genitum diuidatur, & generabunt 13734671. qui numerus erit tangens Gr. 53. m. 56. ferè complementi anguli quæsiti. Vnde arcus Gr. 36. m. 4 erit angulus quæsitus.

Porrò in omnibus istis obseruanda est regula generalis, vt si quando dantur crura quadrante maiora, vel basis, aut angulus assumatur vicarium eius triangulum residuum, vt infra docebimus. Et cum vtimur triangulo vicario: simul corollaria prop. 28. tract. 13. part. 2. vbi docemus quænam crura quosnam requirant angulos, vel quinam anguli crura sibi conuenientia reposcant, sunt obseruanda

EXPENSIO III.

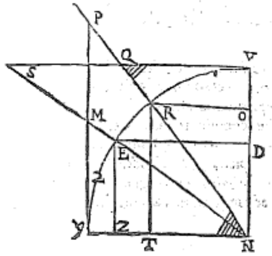
De secantibus.

QVamuis per solos sinus, & tangentes omnis trigonometria rectangulorum absoluta esset; qua tamen in tribus casibus, qui prop. 6. solui possunt. Sinus totus primo loco non venit, ideo tum ad abundantiam doctrinæ, tum etiam, vt in eis facilior calculus eueniat, etiam secantium tabulæ conditæ fuerunt; sed antequam ad problemata, quę rectangulorū docent solutionē, deueniamus; quædam secantium inter se, vel ad sinus exponende sunt habitudines.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Duorum arcuum sinus complementi primi ad secantem secundi est, vt sinus complementi posterioris ad secantem arcus prioris.

SInt duo arcus, primus VR, & EY secundus in fig. pr. 8. & eorum sinus complementorum RT, & ED, secantesque NQ, & NM, Dico, quòd ita est TR sinus complementi primi ad secantem secundi NM, veluti proportione respondet sinus complementi secundi ED ad secantem primi NQ.



Probatur. Ita est TR sinus, seu ON ad radium NR, vt radius NV, siue idem NR est secantem NQ, & vt est ED, seu NZ sinus complementi ad radium EN, ita radius NY ad secantem NM ex pr. 26. tr. 20. & ideo NM erit *inuertendo* ad radium, vt rad. ad ED. Quare est proportio perturbata, vt in dispositis terminis potes videre.

vt RT est ad R. At vt R. ad ED,
Ita NM est ad R. sic R. ad QN.

Vnde ex *æquo* arguere poterimus ita esse RT ad ED, vt NM ad NQ, & ideo *permutando* ita erit RT sinus complementi prioris arcus ad NM secantem arcus posterioris, vt ED sinus complementi arcus posterioris ad NQ secantem arcus prioris.

COROLLARIVM I.

HInc deducitur esse quoque *inuertendo* secantem prioris arcus NQ ad complementi sinū secundi ED, vt secans arcus posterioris MN ad sinum complementi arcus prioris RT.

Rursusque quòd vt sinus TR primi arcus VR ad secantē NM cōplementi secundi EV, sic sinus ED arcus EV huius ad secantē NQ complementi arcus prioris RY mutatis tantùm arcuū denominationibus, vt sinus dicatur arcus, qui erat complementi, & secans complementi, quæ arcus secans erat.

COROLLARIVM II.

IDeoque erit etiam *permutando* sinus primi ad sinum postremi, vt secans complementi posterioris ad secantem prioris complementi, vel etiam sinus complementi prioris ad sinum complementi posterioris, vt secans posterioris arcus ad secantem prioris.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Si sit arcus, cuius sinus ea ad radium proportione feratur, quā sinus complementi alius secundi ad sinum complementi alterius tertij; secans quoque tertij ad secatem secundi eam habebit proportionem, quam sinus primi arcus ad radium consequitur.

PRobatur. Quoniam ex prop. 16. lib. 5. Elem. quæ eidem rationi sunt eędem rationes, & inter se tales sunt. Ponitur verò id in ipsa propos. nam ex thesi sinus primi arcus ponitur ad radium & secans posterioris alius tertij ad secātem secundi, vt sinus complementi secundi ad sinum complementi tertij. Quapropter etiam inter se simili proportione gaudebunt secans tertij ad secantem secundi, quæ Sinus primi ad Radium.

COROLLARIVM.

IDem quoque erit si sinus sint arcuum, & secantes complementorum, vt per se patet.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII.

Vt Radius refertur ad sinum basis, sic se habet secans complementi cruris oppositi ad secantem anguli.

SIt triangulum sphæricum rectangulum ARD, cuius basis AK, & eius sinus FK, ad quem ex dictis de sinubus prop. 1. h. eandem proportionem gerit sinus totus NR, quam sinus RT anguli A ad sinum cruris KE, secans verò complementi KV arcus, nempe cruris DK est NO. Secans verò complementi VR arcus BR mensuræ anguli A est NQ. Dico itaque, quòd sicut est sinus totus NR ad sinum basis FK, ita se habet secans NO ad NQ secantem complem. anguli.

Probatur. Nam sinus TR tamquam primi arcus est ad sinum cruris ER tamquam secundi arcus, vt radius NR est ad sinum basis FK: sed ex propos. 26. huius, vt sinus primi arcus ad sinum secundi arcus, nempe RT ad KE, sic assimilatur in proportione secans NO cōplementi VK secundi arcus KD secanti NQ complementi primi arcus BR; Ergo ex 16. vt radius NR ad FK sinum basis, ita secans NO cruris complementi KV ad secantem NQ anguli A complementi RV.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Dato Radio, sinu basis, & secante complementi cruris inuenire secantem complementi anguli oppositi.

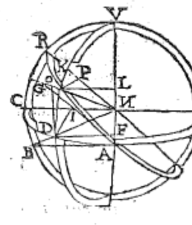
QVoniam data, & quæsitum sunt ex præced. quatuor proportionalia poterit ad quærendum quartum adhiberi regula proportionum, vnde stabit.

Exemplum. Sit datum triangulum rectangulum, cuius basis Gr. 43. & sinus eius 6819984. crus verò sit Gr. 37. & complementum Gr. 53. cuius secans est 16616401. Ducantur simul, & productus diuisus per sinum totum erit secans 11332358. Gr. 28. m. 4 paulo auctior complementi anguli, qui gr. subducti à 90. dant Gr. 61. m. 56. Debet verò angulus conformari spetie dato cruri ex prop. 28. tract. 23. Coroll. 5.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Radius est ad sinum complementi cruris, vt secans basis ad secantem reliqui cruris.

IN triangulo rectangulo AKD sit sinus LK complementi KV cruris DK, & PK sinus complementi KR basis AK, cuius secans est GN, & sinus ID complementi BC reliqui cruris DA, cuius secans est NB: Dico, quòd radius D est ad sinum ID, vt secans NG basis ad secantem reliqui cruris NB.



Dictum est supra prop. 5. huius, vt ND rad. ad DI, sic LK esse ad KP: Ergo *permutando* ND radius erit ad sinum LK complementi cruris, vt ID sinus arcus DC prioris ad PK arcus KR posterioris. Sed ex prop. 26. huius, vt ID ad PK, ita est NG secans arcus AK complementis KR posterioris ad NB secantem arcus AD complementi arcus prioris DC: Ergo ex 16. lib. 5. vt radius ND est ad sinum LK complementi cruris, sic secans NG basis, ad secantem NB reliqui cruris.

PROBL. II. PROPOS. XXXI.

Dato Radio, & sinus cruris, & secante basis inuenire secantem reliqui cruris.

PAtet prob. ex præc. qua ostendimus quatuor proposita esse proportionalia, vnde per regulam auream quęsiti cruris sinum cognoscemus.

Exemplum. Sit crus Gr. 39. m. 18. cuius complementum Gr. 50. m. 42. & sinus 7738402. Sic

quoque

quoque baſis Gr.44.m.36.cuius ſecans 14044431. quam cum numero ſinus multiplicabis, & diuides per radium, & exhibebit ſecantem 10868145 Gr. 23.m.4. ſed paulò minus reliqui cruris: obſerua verò Cor.2.& 3.prop.28. tract.23.

THEOR. V. PROPOS. XXXII.

Radius eſt ad ſecantem cruris, vt ſecans alterius ad ſecantem baſis.

TRiangulum in præc. fig. ſit AKD, ſecans baſis NG, ſecans cruris NO, ſecans alterius cruris NB. Dico itaque, quòd ea proportio militat radij ND ad ſecantem ON, quæ ſecantis NB ad ſecantem GN.

Probatur LK ſinus complementi cruris eſt ad radium ND, vt radius ND ad ſecantem NO ex prop. 26. Tract.20. qui ſunt in eadem ſuperficie circuli VKD: Sed vt eſt ſinus LK ad radium ND, ita eſt ſinus PK arcus KR primi complementi ad ID ſinum DC poſtremi complementi, & ideo ex præc. prop. 26.h. vt NB ſecans poſtremi arcus ad NG ſecantem primi arcus. Ergo, vt radius ND ad ſecantem NO, ita eſt ſecans NB ad ſecantem NG.

PROBL. III. PROPOS. XXXIII.

Dato radio, & ſecante cruris, & ſecante alterius cruris inuenire ſecantem baſis.

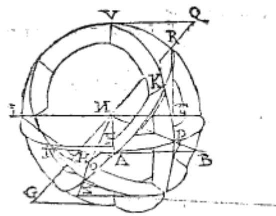
HOc regula aurea operi committitur, vt ex præc. patet ob proportionem quatuor terminorum in theſi propoſitorum.

Exemplum. Sit crus Gr.28. m.7. cuius ſecans 11337999. cruſque aliud G.87. m.18. cuius ſecans ſit 212294614. quę multiplicata per exhibitam ſecantem alterius cruris, & poſtea diuiſa per radium expromet ſecantem 240699612. Gr.87. m.37. & paulò minùs, erit itaque baſis minor quadrante: quia crura in hoc caſu ſpetie concordant, at ſi ſpetie diſſonent, baſis erit maior quadrante ex Cor. 4. prop.28. tract.23.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIV.

Radius eſt ad ſinum anguli obliqui, vt ſecans alterius ad ſecantem cruris oppoſiti.

SIt angulus A obliquus trianguli AKD, cuius ſinus RT, ſinus verò totus RN, ſecans NZ anguli K reliqui; ſecans verò cruris oppoſiti NB.



Dico, quòd radius RN, ita proportione correſpondet ad ſinum TR anguli A, vt ſecans NZ anguli K reliqui ad ſecantem NB cruris oppoſiti angulo K.

Probatur. Dictum eſt de ſinubus propoſ.4.h. ſinum FI complementi lateris AD, ita eſſe in proportione ad cōplementi ſinū IO, ſicut radius NL, ſeu NR ad ſinū LH, ſeu æqualē RT anguli A: ſed vt ſinus complementorum ſunt inuicem, ſic ſecantes arcuum inuerſè in eadem proportione ſunt: quare ſecans NZ anguli K ita erit ad ſecantem NB cruris oppoſiti AD, vt ſinus FI cōplementi cruris ad ſinum IO complementi anguli ex 26. prop. h. 6. Cor. 2. & ideo erit ex 16. lib.5. vt radius NR ad ſinum TR, ſic ſecans NZ ad ſecantem NB.

PROBL. IV. PROPOS. XXXV.

Dato radio, & ſinu anguli, & ſecante alterius anguli, ſecantem cruris inuenire huius alterius anguli oppoſiti.

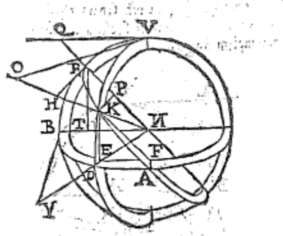
PAtet id regula aurea poſſe operi demandari, cum habeamus ex præced. quatuor proportionalia, quorum tria dantur, quartum inquiritur.

Detur angulus 37. Gr. & alter angulus Gr.58. ſinus primi ſit 6018150, ſecans ſecundi ſit 18870800. qui numeri ſimul multiplicati, abiectiſque ob diuiſionem ſinus totius 7. figuris dextris proferet ſecantem 11356730, quæ eſt G.28. m.17. proximè cruris oppoſiti, quod debet eſſe concors in ſpetie angulo oppoſito ex Coroll.2. propoſ.28. tract.23.

THEOR. VII. PROPOS. XXXVI.

Radius eſt ad ſinum anguli, vt ſecans complementi cruris ei oppoſiti ad ſecantem complementi baſis.

TOtus ſinus ſit NR; ſinus autem anguli A ſit RT, & ſecans complementi KR baſis KA ſit NH, & ſecans NO tandem complementi VK cruris DK. Dico, quòd ea proportione refertur ſinus totus NR ad ſinum RT anguli A: quā ſecans NO complementi cruris ad ſecantem NH complementi baſis.



Probatur. Nam ſimilem proportionem dicit ſinus NR totus ad ſinum RT anguli, quam ſinus FK baſis ad ſinum EK cruris anguli A oppoſiti, ex pr.1. Cor. de ſinubus; ſed hanc quoque proportionem dicunt ſecantes complementorum, & vt eſt ſinus primus baſis KF ad ſinum ſecundum cruris KE ita eſt ſecans NO complementi VK, huius ad ſecantem NH complementi RK primi arcus AK. Quapropter ex 16. lib.5. ita quoque radius NR erit ad ſinum RT anguli A, vt ſecans complementi cruris NO ad ſecantem complementi baſis NH; quòd tertiæ proportioni FK ad KE conſentiant.

PROBL. V. PROPOS. XXXVII.

Dato Radio, & ſinu anguli, & ſecante complementi cruris ei oppoſiti, baſis complementi ſecantem inuenire, ſi tamen reliquum crus, ſeu reliquus angulus ſpetie notus ſit.

QVoniam ex anteced. exhibita ſunt quatuor proportionalia, ideo regula aurea ad inquirendum quartum eſt adhibenda, & ſic erit.

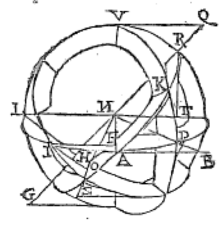
Exemplum. Sit angulus Gr. 50. cuius ſinus 7660445. Arcus cruris 41. m.48. cuius complementum Gr.48. m.12. & ſecans 15003020. qui numeri multiplicati inuicem, & per radium diuiſi dant 114980. Gr.29. m.31. proximè, qui ſubducti à Gr.90. dant Gr.60. & m.29. pro baſi.

Aduerte autem, quod ſi anguli, vel crura vnum quidem notum quantitate alterum ſpetie concordauerint, baſis erit quadrante minor, ſi non concordauerint maior ex Coroll. 3. & 4. propoſ.28. tract.23.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Radius eſt ad ſecantem cruris, vt ſecans complementi anguli adiacentis ad ſecantem anguli oppoſiti.

IN Schemate prop.34. ſit triangulum KAD, & ei ſinus totus NR, ſecans NQ complementi anguli A erit; at ſecans cruris angulo A adiacentis ſit NB; ſecans verò anguli K ſit NZ. Dico itaque, quòd NR radius eſt ad ſecantem NB, vt ſecans NQ eſt ad ſecantem NZ.



Probatur ex 4. huius, vt NL radius eſt ad ſinum LH æqualem ſinui RT anguli A; ſic IF complementi cruris ſinus eſt ad IO ſinum complementi alterius anguli K: Ergo *permutando*, vt LN ad IF, ſic LH ad IO; & *inuertendo*, vt IF ad LN, ſic IO ad HL: ſed vt IF ſinus complementi ad LN radium, ſic eſt radius ad illius arcus ſecantem; quæ eſt NB cruris ex Tract.20. propoſ.26. Ergo, vt eſt radius NL ad ſecantem NB cruris, ſic eſt ſinus IO complementi vnius anguli K ad ſinū HL, vel RT alterius A: ſed vt ſinus IO ad HL, ſic eſt ſecans NQ cōplementi huius HL, vel æqualem RT ad ſecantem complementi prioris NZ, qui eſt arcus anguli K ex Cor.2. prop.26. Ergo ex 16. lib.5. vt radius NR ad ſecantem NB cruris, ſic ſecans NQ complementi A anguli ad ſecantem NZ anguli K.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIX.

Dato radio, & ſecante cruris, & ſecante complementi anguli adiacentis ſecantem anguli oppoſiti reperire.

QVoniam propoſita ſunt quatuor proportionalia ex prędict. propoſ. regula proportionum, quartum, quòd expoſcitur, inuenietur.

Exemplum detur crus Gr.25. cuius ſecans ſit 11033783. & angulus Gr.32. m.55. cuius complementum eſt Gr.57. m.5. & ſecans 18402017. multiplicentur ſimul, prodibitque numerus, qui per radium diuiſus reſtabit 20304386. quæ eſt proximè ſecans Gr.60. m.29. angulus ipſe, qui deſideratur, qui debet eſſe ſpetie conformis dato cruri ex propoſ.28. Cor.6. Tr.33.

THEOR IX. PROP. XL.

Radius eſt ad ſinum complementi cruris, vt ſecans anguli obliqui oppoſiti ad ſecantem complementi anguli obliqui alterius, qui cruri adiacet.

RAdius NL in pręc. fig. ſinus cōplementi cruris AD triāguli KAD rectāguli eſt IF ſecans anguli K eſt NZ; & ſecans NQ cōplementi VR anguli obliqui alterius A. Dico itaque, quòd radius NL eſt ad IF ſinum complementi cruris, vt ſecans NZ anguli oppoſiti ad ſecantem NQ anguli adiacentis.

Probatur. Nam iam dictum eſt prop.4. ſinum NL eſſe ad LH, ſeu RT ſinum anguli A, vt IF ſinus complementi cruris AD ad ſinum IO complementi anguli K. Ideo *permutando* NL erit ad IF, vt LH ad IO: ſed vt ſinus LH anguli A ad IO ſinum; ſic ſecans huius complementi NZ, qui eſt arcus anguli K ad ſecantem prioris complementi NG, ſeu æqualem NQ. Ergo, vt eſt radius NL ad IF ſinum complementi cruris; ſic eſt NZ ſecans arcus anguli oppoſiti ad ſecantem NQ complementi alterius anguli adhęrentis cruri AD.

PROBL. VII. PROPOS. XLI.

Dato radio ſinu complementi cruris, & ſecante anguli obliqui oppoſiti ſecantem complementi anguli cruri adiacentis reperire.

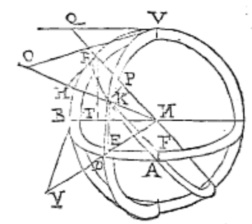
REgula proportionum habet in hac operatione locum, cum in antecedenti propoſ. oſtenſa ſint tria data, & quartum quæſitum proportionalia.

Exemplum. Sit crus 19. Grad. cuius complementum Gr.71. & ſinus eius 9455186. Anguli Gr.32. m.4. verò ſecans ſit 11800371. qui numeri ſimul multiplicati, & per radium diuiſi dabunt numerum 11157470. Gr.26. m.20. ferè, qui, vtpote complementum ſubductus à Gr.90. relinquit Gr. 63. m.40. anguli. Debet autem cognoſci ſpetie crus alterum ex dictis prop.28. tract.23. Cor.4. vt angulus inuentus ei conformetur.

THEOR. X. PROPOS. XLII.

Radius est ad secantem complementi basis, vt secans complementi anguli oppositi ad secantem complementi cruris angulo oppositi.

RAdius est NR, basis AK in triangulo AKD, cuius cōplementi sinus KP, secans verò eius cōplementi NH; compl. anguli A est VR, cuius secans est NQ: crus verò DK, cuius compl. KV secans est NO. Dico itaq; quòd ita refertur radius ad NH secantē complementi basis, vt NQ secans complementi anguli A ad secantem NO complementi VR cruris DK.



Probatur. Quoniam ex dictis propos. 6. huius Ita est basis FK ad sinum EK, vt NR radius ad RT sinum A anguli, & ideo *permutando*: Ita erit FK ad radium NR, vt sinus EK ad sinum TR, sed vt FK sinus basis refertur ad radium, ita radius ipse refertur ad secantem NH complementi basis ex pr. 26. tract. 20. cum sint in eodem plano RKA: Similiter vt EK sinus cruris refertur ad TR sinum anguli; sic NQ secans complementi huius posterioris ad secantem NO complementi illius prioris ex Coroll. prop. 26. h. Ergo ex prop. 16. lib. 5; vt NR radius est ad secantem complementi basis NH, sic NQ secans complementi anguli ad NO secantem complementi cruris.

PROBL. VIII. PROPOS. XLIII.

Dato radio, & secante complementi basis, & secante complementi anguli reperire secantem complementi cruris oppositi.

ID operi demadatur regula aurea cum tria exhibeantur proportionalia, & quartus quæratur, debet autem angulus repertus conformari speçie angulo opposito, vt ex prop. 18. tract. 23. Cor. 5. patet.

COROLLARIVM.

AB istis omnibus propositionibus eruitur modus, quò semper primo loco radium ponas, vt infra declarabimus.

EXPENSIO IV.

Regulæ facillimæ, & breuissimæ pro rectangulis adhibendæ præcipuè in logarithmis.

REgulæ quædam breues, & vniuersales remanent tradendæ; licet non adeo faciles in geometricis operationibus, eo quod sinus primo loco, non semper veniat; sed æquè faciles in logarithmicis, ideoqoe pro logarithmis à Nepero specialiter inuentæ, quarum fundamenta quatuor propos. exponemus quamuis ipse non explicet.

THEOR. I. PROPOS. XLIV.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt sinus totus ad sinum complementi oppositæ extremæ remotæ, sic sinus complementi alterius remotæ extremæ oppositæ ad sinum intermediæ.

NOn vsurpamus hic complementa in propria significatione, sed eo modo, quò declarabimus. Sciendum est itaque, quòd præciso angulo recto, & posthabito in triangulo sunt quinque partes, quæ ad modum pentagoni sunt disponendæ, nempe basis duo anguli, & duo crura angulos subtendentia, quas numeris prænotauimus 1. 2. 3. 4. 5. tamquam alicuius pentagoni lateribus, vt possimus intelligere quænam partes oppositæ extremæ, quænam adhęrentes, vel circumpositæ, queque intermediæ partes appellentur. Pro angulis verò, & basi eorum complementa debent vsurpari.

In hac ergo figura tribus complementis duorum angulorum, & basis, & duobus cruibus constante. Partes adhærentes sunt, quæ datæ intermediæ immediatè succedunt V. g. in triangulo ABC. Posito basis AC complemento pro parte media adhęrentes sunt partes complementa angulorum A, & C, sic posito crure 4. partes adhęrentes sunt, posthabito angulo B recto, crus 3, & complementum anguli 5. At verò remotę complementi 1 basis essent crura 3. & 4. & lateris pro parte intermedia vsurpati partes remotæ essent AC basis complementa, & anguli A. Complementa verò horum complementorum sunt sinus ipsi arcuum. Ita, quod complementa de angulis, & basi dicta intelligantur pro arcubus angulorum, & basis: at quando dicitur sinus basis, vel angulorum intelligatur de cōplementis. Verū de cruribus, sicut ipsa in propria significatione sumuntur, sic, & complementa.

Dicit itaque propositio sinum totum ad sinum complementi alterius extremæ oppositæ, sic sinus complementi alterius extremę oppositæ ad sinum intermediæ. Hoc verò Theor. probatur inductione numerando omnes casus, qui possunt accidere, qui ex dictis de sinibus ostenduntur: Sunt autem expressi.

Rad.	Extremæ datæ		Media quæsita	
0		4	1	Casus primus.
0	4	3	1	
0	5	4	2	Casus secundus.
0	4	5	2	
0	2	3	5	
0	3	2	5	
0	1	5	3	Casus tertius.
0	5	1	3	
0	1	2	4	
0	2	1	4	

Casus primus. Cum itaque duo latera dantur 3. & 4. & quæritur basis. Dico, quod sinus totus ad partes extremas, nempe ad complementa crurum V. g. ex 6. oropos. huius tract. se habet, vt alterum eorum V. g. complementum 4. se habet ad sinum basis, nempe ad sinum eius complementi, quod pro basi vsurpatur, quia in ea fig. ita est BF ad AH, vt BI ad AL, nimirum 0. ad 3. vt 4. ad 1. & *permutando* 0. ad 4. vt 3. ad 1. Vnde duo primi casus sunt ostensi.

Casus secundus. Cum crus, & angulus datur, & quæritur angulus alter. Dico eodem modo sinum totum esse ad sinum complementi extremæ remotæ V. g. 5. vt sinus complementi alterius extremæ remotæ V. g. 4. ad sinum intermediæ alterius anguli 2. nempe ad eius complementi sinum pro angulo vsurpati. Nam ex propos. 4. vt in illa figura, ita est sinus totus SH ad sinum anguli OH, nempe complementum complementi HV pro angulo ipso vsurpatum, vt sinus complementi lateris AB, quod est MD ad sinum DT, qui sinus est complementi pro angulo ipso vsurpati, nimirum 0 ad 5. vt 4. ad 2. & sic quatuor casus secundi generis remanent soluti, nam etiam *permutando* erit SH ad MD, nempe 0. ad 4. vt HO ad DT, nimirum 5. ad 2. Et sic dicas de altero angulo dato 2. latere altero dato 3. & angulo quæsito 5. quòd ita sit 0. ad 2. vt 3. ad 5. & *permutando*, quòd sit 0. ad 3. vt 2. ad 5.

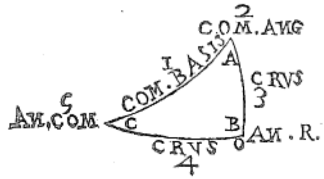
Casus tertius. Cum basis, & angulus datur, & crus quæritur. Dico rursus, quòd sit sinus totus 0. ad sinum complementi extremæ remotæ V. g. 1, vt sinus alterius extremæ remotæ 5. complementi ad sinum intermediæ 3.

Quod probatur ex 1. prop. Nam vt in illa figura sinus totus SA est ad sinum basis BP, nempe complementum sui complementi pro ipsa basi vsurpati, vt sinus AR anguli N, nimirum complementi arcus AK pro arcu ipsius anguli sumpti ad sinum EB ipsius lateris, nempe erit, vt 0. ad 1. sic 5. ad 3. vel *permutando*, sic erit 0. ad 5. vt 1. ad 3. Et pro alio angulo, si detur, idem argumentum valebit, & erit 0. ad 1. vt 2. ad 4. & *permutando* 0. ad 2. vt 1. ad 4. Propterea quatuor casus vltimi remanent ostensi. Vnde propositio tota remanet ostensa secundùm omnes casus.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt sinus complementi cuiuslibet extremæ remotæ ad sinum intermediæ, sic radius est ad sinum complementi reliquæ extremæ remotæ.

HÆc propositio eodem modo intelligitur, & præcedens, & eodem modo ostenditur ex dictis singulis casibus enumeratis.



Data Extr.		Media R.	quæsita extrema.	
3	1	0	4	Casus primus.
4	2	0	5	Casus secundus.
3	5	0	4	
5	3	0	1	Casus tertius.
2	4	0	1	

Prob. primus casus ex prop. 6. sinuum. Nam cum ex ea sit proportio, vt citauimus 0. ad 3. vt 4 ad 1. Erit etiam, *permutando* 0. ad 4. vt 3. ad 1. & etiam 3. ad 1. vt 0. ad 4. debet autem intermedia occupare secundum locum iuxta tenorem propositionis; vnde non dabitur casus, quod sit 1. ad 3. vt 0. ad 4.

Probatur quoque secundus casus ex propos. 4. supra citata; quia enim est 0. ad 4. vt 5. ad 2. erit etiam *permutando* 0. ad 5. vt 4. ad 2. Vnde etiam erit 4. ad 2. vt 0. ad 5. Quod & intelligitur de altera simili partium combinatione 3. ad 5. vt 0. ad 2. Porrò non poterit esse, vt in præcedenti casu dictum est 2. ad 4. neque 5. ad 3. quòd intermedię 2. & 5. debeant esse secundo loco.

Probatur quoque tertius casus. Quia enim ex 1. prop. h. iuxta dicta in pr. præc. 3. casu 0. ad 1. vt 5. ad 3. erit etiam 5. ad 3. vt 0. ad 1. & similiter 2. ad 4. vt 0. ad 1.

Intelliguntur autem sinus arcuum esse complementorum, vbi ipsa complementa in figura vsurpatur, & esse vera complementa, vbi arcus ipsi sumuntur: Sic erit sinus complementi anguli 5. ipse sinus anguli 5. quia complementum pro ipso anguli arcu in figura vsurpatur; at sinus cruris 3. erit sinus propriè dictus ipsius cruris; quia non complementum, sed ipsum crus in figura sumitur, & sic dicas de alijs.

THEOR: III. PROP. XLVI.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt radius ad tangentem extremæ proximæ; sic tangens reliquæ extremæ proximæ ad sinum intermediæ.

HÆ: propositio probatur per enumerationem casuum, vt præcedens; sed ex principijs positis Expens.2. de tangentibus.

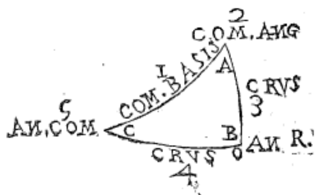
R. Extremæ datæ intermedia quæsita.

o	2	4	3	Casus primus.
o	4	2	3	
o	5	3	4	
o	3	5	4	
o	4	1	5	Casus secundus.
o	1	4	5	
o	3	1	2	
o	1	3	2	
o	5	2	1	Casus tertius.
o	2	5	1	

Probatur autẽ primus casus ex prop. ID tangentium, cùm angulus, & crus datur, & quæritur aliud crus. Nam vt illius propos. schemate apparet. Ita est radius EN ad tangentem EB, vt CD sinus ad OD tangentem: nimirum, vt O ad tang complementi anguli 2. sic tangens cruris 4. ad sinum cruris 3. Vnde etiam *permutando*, ita erit Radius o. ad 4. sic 2. ad 3. Et si detur alius angulus 5. & crus 3. eadem ratio erit, & respondebit proportione o. ad 5. vt 3. ad 4. & *permutando* o. ad 3. vt 5. ad 4.

Secundus casus cum datur basis, & crus, & quæritur angulus. Probatur quoque ex propos. 16. vt est radius PK ad tangentem KM cruris KB in triangulo RKV, Ita est tangens IB complementi arcus VI basis VK ad OI sinum complementi arcus ID anguli K. Itaque est vt PK ad KM, nempe o. ad 4. ita est IB ad OI, nempe 1. ad 5. Quare *permutando* quoque erit o. ab 1. vt 4. ad 5. & si detur latus 3. erit quoque o. ad 3. vt 1. ad 2. & *permutando* o. ad 1. vt 3. ad 2.

Tertius casus. Probatur quoque ex propos. 22. cum dantur duo anguli, & quæritur basis. Nam radius est ad tangentem complementi anguli V. g. in eo schemate KP radius ad KM tangentem, vt BE tang. ad sinum BS, idest complementi anguli V tangens ad sinum complementi basis AV, ideo o. erit ad 5. vt 2. ad 1. & *permutando* o. erit ad 2. vt 5. ad 1.



THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt tangens extremæ proximæ ad sinum intermediæ, ita radius ad tangentem reliquæ extremæ proximæ.

PRobatur ex dictis priùs enumeratis casibus prop. præced.

Extremæ datæ. R. Intermedia quæsita.

1	5	o	4	Casus primus.
3	2	o	1	
1	2	o	3	Casus secundus.
4	5	o	1	
2	3	o	4	Casus tertius.
5	4	o	3	
3	4	o	2	Casus quartus.
3	4	o	5	
5	1	o	2	Casus quintus.
2	1	o	5	

Probantur autem singuli casus, & Primus cùm datur basis, & angulus, & quæritur latus. Quia ex secundo casu propos. anteced. est o. ad 4. ita est 1. ad 5. Ergo erit, vt 1. ad 5. ita o. ad 4. Et quia est o. ad 3. vt 1. ad 2. erit etiam *permutando* o. ad 1. vt 3. ad 2. Ideoque etiam 3. ad 2. vt o. ad 1.

Secundus verò casus est cùm datur angulus, & latus, & quæritur basis. Quòd ex eodem secundo in præced. propos. ostenditur. Siquidem ibi est o. ad 3. vt 1. ad 2. Quare erit etiam 1. ad 2. vt o. ad 3. Eademque ratione ostendetur; quia est o. ad 4. vt 1. ad 5. quod *permutando* sit o. ad 1. vt 4. ad 5. & ideo 4. ad 5. vt o. ad 1.

Tertius casus est ex primo casu præced. propos. ostenditur. Nam ibi dictum est ita esse o. ad 4. vt 2. ad 3. Quare etiam erit 2. ad 3. vt o. ad 4. Et quia ibi est o. ad 3. vt 5. ad 4. Ergo 5. ad 4. vt o. ad 3. nempe crure, & angulo crus aliud habetur.

Quartus casus. Et quia ex eadem propos. præc. casu est o. ad 2. vt 4. ad 3. Erit etiam 3. ad 4. vt o. ad 2. Et eadem ratione 3. ad 4. vt o. ad 5. quòd in præcensed. primo casu ostensum fit esse o. ad 5. vt 3. ad 4. idest duobus cruribus obtinetur angulus.

Quintus probatur ex 3. casu præced. propos. quia enim est o. ad 5. vt 2. ad 1. Erit etiam 2. ad 1. vt o. ad 5. Et quia est è contra o. ad 2. vt 5. ad 1. erit etiam 5. ad 1. vt o. ad 2. nempe dato angulo, & basi crus inuenietur. Vnde omnes casus remanent ostensi.

COROLLARIVM.

EX præcedentibus itaque propositionibus colliguntur istæ quatuor praxes, quibus omnes casus soluuntur, tum Geometricè, tum Logarithmicè.

1. Arithmeticè.

AD inueniendam partem intermediam datis partibus oppositis, & remotis. Multiplica inuicem complementorum sinus remotarum extremarum partium, & diuide per sinum totum, & prodibit sinus intermediæ.

Sed aduertendum est, quod vbi ponitus *latus* ibi complementum intelligitur propriè sumptum, vbi verò complementũ ponitur in fig. impropriè sumitur in prop. pro complemento ipsius cõplementi; nempe pro sinu ipso basis, seu anguli.

Logarithmicè.

ADditi inuicem complementorum eodem sensu sumptorum logarithmi faciunt logarithmum intermediæ subducto o. vel 1. pro diuersitate tabularum.

2. Arithmeticè.

AD inuediendam extremam aliquam remotam data altera parte extrema remota, & intermedia. Multiplica sinum intermedium cum sinu toto, & diuide per extremum remotum sinum complementi, & prodibit sinus complementi reliquæ extremæ, quæ complementa debent intelligi, vt explicatum est.

Logarithmicè.

SVbducito logarithmum complementi extremę remotæ partis eodem sensu intellecti à logarithmo arcus intermediæ, & prodibit alterius extremæ remotæ logarithmus complementi, & hoc iuxta logarithmos Neperi: iuxta vero alios addendus est prius logarithmus sinus totius logarithmo intermediæ, & deinde subductio instituenda, vt prius.

3. Arithmeticè.

AD inueniendam intermediam partem datis extremis partibus proximis Tangentes proximarum partium, si in schemate sint notata *compl.* complementorum ipsorum, si sint notata *latera*, ipsorum laterum inuicem multiplicentur, & diuidantur per sinum totum, & prodibit sinus intermediæ: nempe sinus illius partis, prout in schemate notata est sinus lateris, vel sinus complementi anguli, vel basis.

Logarithmicè.

LOgarithmi tangentium simul addantur partium vicinarum, & subducatur o. secundùm tabulas Neperi; at 1. secundùm alias, & prodibit logarithmus intermediæ, & qui debet intelligi sensu supra explicato.

4. Arithmeticè.

AD Inueniendum extremam partem vicinam data altera vicina, & intermedia. Multiplicetur simul sinus intermediæ, vt supra intellectæ cum sinum toto, & diuidatur per tangentem alterius extremæ vicinæ datæ, & prodibit tangens extremæ proximæ quæsitæ.

Logarithmicè.

ASinus logarithmo intermediæ datæ eodem modo intellecto addito priùs o, seu logarithmo sinus totius secundùm diuersitatem tabularum subducatur logarithmus tangentis vicinæ partis cognitæ, & prodibit logarithmus tangentis lterius partis vicin æ.

Aduerte, quod Cauallerius istas regulas affert propos. 33. sed mutillatas, nec plenè explicatas.

EXPENSIO VI.

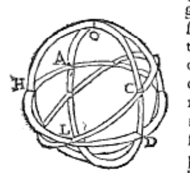
De substitutione figurarum, & laterum.

QVia Cum præcipit propos. vsum complementorum, si detur triangulum, cuius partes, pro quibus complementa sumenda sunt, sint quadrante maiores ad calculum ineundum substituere aliquando triangulum alteri, latusque alteri, prout res postulabit, oportet, & etiam commodiùs est, si calculus sit obscurus aliquando ob angulorum magnitudinem, vel parum securus ob exilitatem; ideoque cognoscere opus est tali casu, & quomodo substitutio ineunda sit.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

Dato triangulo obtuso pro illo acutum assumere.

VT securiùs, & intelligibiliùs opus trigonometricum exequatur, operę pretium est dato triangulo omnibus angulis obtusis, aut etiam duobus constante, illud in triangulum saltem duos acutos habens conuertere, quòd enim sinus quadrantis sint; hinc est quòd si latera sint longiora quadrante, vt talia sinus non habeant, nec tangentes, & per consequens, nec secantes, nec complementa, & ideo reddatur calculus obscurus, dùm debent assumi sinus alterius quadrantis pro dati trianguli, cuius latera omnia quadrantẽ superant, calculatione: Ideo satiùs erit datorum laterum complementa in obliquangulis, quæ claudunt angulum adiacentem, seu verticalem sumere; illius enim trianguli lateribus inuentis, vel angulis statim triãgulum datum secundùm omnes suas partes dignoscitur.



Prob. Nam sit triangulum scalenum, vel Isosceles, AOCHL, anguliq; omnes obtusi apud A, apud L, & apud C. Si assumas complementa lateris ad semicirculũ AOC V. g. & AHL, quæ sunt LD, & DC habebis angulos ad L, & C acutos eadem basi manente LC. Si ergo datis lateribus LHA, & AOC, & ideo complementis, & angulo eodem A æquali angulo D verticali quęratur basis LC: soluto triangulo LDC inuenta erit, cùm sit eadem. Si quærãtur anguli ad basim inuenientur acuti LCD, & CLD, vnde ablati à duobus rectis restituent obtusos.

Quod si angulus verticalis A notus non sit, sed angulus CLH adiacens lateri AHL, & notum sit latus oppositum COA auferatur arcus AHL adiacens à semicirculo, sicut & OAC, & remanebit CD, & LD, cum quo, & anguli CLH residuo CLD perficies operationẽ, & reperies V. g. angulũ DCL, cuius cõplementũ ad semicirculũ notum erit, OCL obtusus trianguli dati. Poteris etiã reperire basim, quæ erit crus adiacens angulo CLD in triangulo CLD, & adiacens quoque in triangulo CLA. Poteris quoque

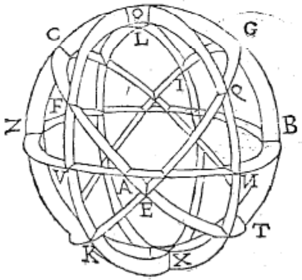
que inuenire angulum D verticalem qui æquabitur angulo A trianguli ACL, & eodem modo ages crure V g. AHL, & duobus angulis HLC, & OCL datis.

Si dentur tria crura maioribus à semicirculo deductis AHL, & COA habebis DL, & DC complementa cum basi LC iam nota. Quod si dentur tres anguli maioribus V. g. L, & C in triangulo ALC à duobus rectis detractis habebis DLC, & DCL cõplemẽta ad duos rectos acuta, cũ opposito apud D in triãgulo CLD. Vnde opposita latera DL, & DC prædictis angulis DLC, & LCD perquires, & erunt complementa laterum LHA, & COA ad semicirculũ.

THEOR. I. PROPOS. XLIX.

Trianguli anguli in latera, & in angulos latera permutari possunt complemento, maioris anguli pro latere sumpto.

SIt triangulum GOQ, & anguli O mensura sit arcus BN descriptus polo O; mensura anguli G sit arcus CFAE; mensura verò anguli Q sit arcus IL. Dico, *quod isti arcus* BN, *&* IL *constituunt triangulũ, quod pro tertio latere obtinet* cõplementũ arcus GE ad semicirculum mensurantis angulum maiorem G, quod complementum est TE. Hoc autem triangulum est AFV; quod habet latus AV æquale arcui BN, VF æquale arcui LI, & AF æquale arcui ET complemento arcus EC, quod sic probatur.



Prog. 1. Ex prop. 14. Cor. ex 1. sphæric. intersectio circulorum, qui habent polos in aliquo alio maximo circulo, quadrante distat à circulo, quo polos habent: igitur ENA, & TEA quadrans erit, quod poli horum circulorum sint in circulo TBGO in O, & G, & intersectio eorum in A existet; sic quia suos polos habent in Q. & G circuli ILFV, & CFAT; eorum intersectio F à circulo prædicto GQ EK quadrante distabit; vnde ILF erit quadrans, & EAF quadrans erit.

Pr 2 Item quia in circulo OQ polos habet CFET in Q, & BNAV in O eorum intersectio V distabit quadrante, & NAV quadrans erit, & LFV quadrans.

Pr. 3. Aufer itaq; NA cõmunis, à BNA, & NAV quadrantibus, & ideo æqualibus remanebunt BN mensura ãguli O, & AV æquales; sic aufer à quadrãtibus ILF, & LFV cõponentes arcum ILFV erit LF æqualis IL mensuræ anguli Q. Tandem quia arcus CFAE subtendit angulum maiorem G ostendam iuxta tenorem propositionis ET complemento esse æquale AF tertium crus trianguli AFV: Siquidem TA quadrans, & EAF ostẽsus est quadrans pr. 1. aufer itaq; EA communis, & remanebit AF æqualis ipsi TE complemento, cui ET adde CF, & EA, & erunt tres arcus æquales toti CFAE mensuræ anguli G.

Probatur secunda pars, quòd anguli in latera queant commutari.

Progress. 1. Circulus CAT in G ex prop. 1 polos habet, ergo circuli ZOB, GEK in ipso CAT polos habebunt ex prop. 15. tract. 21. sphæric. 1. p. vnde et ipsius Cor. COG, & GQE quadrans erit: Sic quia ZAB in O polos habet, etiam ONX, & ZOB in ZAB circulo in communi puncto A circulorum ZOB, & CAT polos habebit. Vnde ZCO, & OQN ex Cor. citat. quadrantes erunt, & CZ mensura anguli A, Quia ergo ZCO, & COG ostensi sunt quadrantes, ablato cõmuni arcu CO arcus ZC mensura anguli A æquabitur lateri OG.

Progress. 2. Circulus quoque OFK polo Q. ductus est, ergo in ipso ONX circuli, & GEK polos habebunt. Quare intersectio Q à circulo OFK distabit quadrante, & KEQ, & XNQ, & LOQ quadrantes erunt, sed iam GQE ostensus est quadrans, & nunc KEQ quadrans demostratur; ablato ergo communi arcu EQ remanent arcus KE, & GQ æquales, & quia GEK ostensus est in circulo CET, & OFK polos obtinere, ideo habebit in communi eorum puncto F, vnde, vtpote ductus polo F arcus KE mensura-bit angulum F, qui æquatur lateri GQ ex 1. p. par.

Progr. 3. Circulus quoque ONX in circulo OFK, & circulo ZVAB ostensus est habere polos, ergo obtinebit eos in communi eorum puncto V, ideoque anguli V arcus LOQN mensura erit. Verùm OQN p. 1. ostensus est quadrãs, talis quoq; est arcus XNQ, vt progr. 2. ablato ergo communi arcu QN remanebunt æquales OQ, & NX, est autem NX vsque ad semicirculum LONX mensure anguli V arcus LOQN complementum: quare arcus angulorum F, & A in latera OG, & GQ sunt mutata, sicut angulus FVA in latus æquale complemento NX.

PROBL. III. PROPOS. L.

Datis loteribus reperire angulos, & datis angulis latera inuenire.

QVoniam laboriosa est operatio illa, qua datis lateribus anguli reperiuntur, multisque praxibus impedita; ideo hæc fortè erit facilior; hoc autem fit angulos in latera cõmutando. Nam ex 1. par. pr. antec. dato triangulo GQO, cuius latus QO, sit G 80. QR G. 70. & QG G. 60. Igitur ex prec. trianguli AFV angulus F erit, cuius mensura EK, erit 70. angulus A cuius mensura CZ erit 60. & mensura anguli V; nempe arcus NOL erit 100. ex notis itaque angulis trianguli AFV reperiemus latera, quæ erunt anguli prioris propositi trianguli GQO, nempe AV erit æquale O anguli mensuræ NB, & VF anguli Q mensuræ IL, & tandem complementum CFAE lateris FA, vel æqualis ET erit mensura anguli G.

Sic ex secunda parte preced. propos. Si dentur anguli GQO, nempe arcus BN, at anguli OQG arcus IL, & complementum ad duos rectos anguli G constituetur triangulum AFV; cuius reperies angulos EK, & erit latus prioris GQ, & CZ, & erit latus GO, & complementum anguli V ad duos rectos, nempe NX, & erit QO.

PROBL.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Sinus loco primam sedem occupante substituere radium, qui secundoloco reperiatur in regula proportionum.

ADmodum facilis est diuisio, cum debemus diuidere numerum per radium; quia tot numeri ad dexteram abicienti, quot zifræ in radio inueniuntur V. g. si diuidamus 646789 per 100. diuisus erit numerus, si excludantur duo numeri extremi dextri 89. & 6467. erit quotiens, fractioque erit $\frac{8}{1}\frac{9}{0}\frac{}{0}$. Ideo prouidendum semper est, vt facilitatis gratia sinus totus, seu radius primum locum sibi assumat.

Loco igitur sinus pone radium primo loco, sed secundum occupet secans complementi arcus.

Probatur. Quia vt sinus alicuius arcus respicit proportione radium; sic radius respicit secantem complementi arcus, vt dictum est propos. 26. tract. 20.

Quod si sit sinus complementi arcus, seu anguli in primo loco, & radius in secundo Vice complementi radius in primo loco existat, sed loco secundo secans dicti arcus existat; Ratio est, quia ita est sinus complementi arcus ad sinum totum; vt sinus totus est ad secantem ipsius arcus ex propos. 26. tract. 20.

PROBL. V. PROP. LII.

Loco secantis alicuius arcus, seu complementi primum locum occupantis ponere radium.

LOco secantis primo loco radius collocetur secundo sinus complementi ipsius arcus, seu si secans sit complementi alicuius arcus; primo loco ponatur radius, secundo sinus ipsius arcus, & cætera fiant, vt regula aurea præcipit. Ratio est fundata in citatis propos. 26. tract. 20.

PROB. VI. PROPOS. LIII.

Si tangens alicuius arcus, seu complementi primo loco reperiatur radium vice eius ponere.

POnatur radius primo loco, secundo tangens complementi ipsius arcus; Quod si sit tangens complementi primo loco; ponatur radius; secundo verò tangens ipsius arcus.

Probatur ex propos. 24. tract. 20. Nam vt est tangens ad radium, ita radius ad complementi illius arcus tangentem, & viceuersa, vt tangens complementi ad radium, ita radius ad tangentem alicuius arcus. Vnde cum sit eadem proportio, alterum loco alterius substitui potest.

COROLLARIVM.

NE dum ob facilitatem anguli acuti aliquando obtusis substituendi; sed etiam ob securitatem, & anguli semper illi spernendi, nec adhibendi, quantùm fieri potest, qui sinus extremorum arcuum V. g. 1. aut m. 30. & cæt. exhibent; nam ob angulorum, & laterum exilitatem, & breuitatem veram deinde quantitatem quæsiti lateris, & anguli non tribuunt, sic si adhibenda sint complementa nimis breuia V. g. complementi arcus 89. m. 30. aut simile, & possit alia regula vti non adhibito complemento m 30. illius arcus 89. m. 30. debes non vti, & cùm datur electio adhibẽda sunt latera mediocra, quàm fieri possit, & anguli mediocres, & per illos exquirere, quod placet reliquorum.

EXPENSIO V.

De triangulis obliquangulis ad rectangula reducendis per tres operationes.

MOdus, quo triangula sphærica obliquangula soluuntur transfundendo illa in duo rectangula operosior, quidem; at captu facilior, nullaque præuia demostratione indiget: quare post rectangula soluta, cùm in illis propositionibus fundetur, subnectendus est.

PROBL. I. PROPOS. LIV.

Cognitis duobus trianguli obliquanguli cruribns, & angulo opposito, & altero specie noto; angulum reliquum reliquo cruri cognito oppositum reperire.

SIt triangulum obliquangulum GAB, in quo sit cognitũ crus AB, & crus AG, & angulus cruri AB oppositus G: docet propositio angulum B reliquo cruri oppositum reperire.

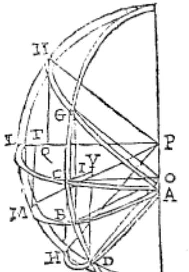
Quia ab angulo A super latus GB potest cadere arcus perpendicularis AC, seu cadat intra, cum anguli spetie conueniunt, vt in proposito triangulo BAG, seu extra, cum dissentiunt, vt triangulo DAB, hæc inueniatur: Datis itaque angulis specie concordibus sinum CO arcus normalis AC primò inuenies.

Datur enim basis AG, & angulus adiacens G: quare ex prop. 3. h. crus oppositum normale AC angulodato G inuenire poteris, quo obtento.

Dato crure AC, & basi AB deinde ex 28. huius poteris inuenire angulùm oppositum dato cruri AC, & ideo arcui AC: qui est B quæsitus. Quod si anguli specie dissonent, & cognitus sit obtusus V. g. ABD, assumatur eius complementum ABC, & inueniatur AC, quo obtento.

Data basi AD, & arcu AC inuenies angulũ oppositũ apud D, & deinde reliqua si placuerit reperies V. g. ex 17. h. data AB basi, & CA reperies angulum BAC, scilicet sinum MT, & arcum ML, & dato AG, & AC reperies angulum CAG, scilicet sinum QN, & hinc arcum NL, quæ inuenta copulabis, si anguli cogniti fuere ambo acuti, vel obtusi, vt in triangulo GAB. Deduces minorem à maiori, si fuere specie diuersi, vt in triangulo DAB. Et idem ages si quæras basim; nam inuenies duos sinus GI in triangulo GAC, & BI in triangulo BAC, cuius duo anguli specie conformes, & arcus eorum vnies, & fiet basis BG. At in triangulo DAB, in quo anguli

specie



ſpecie difformes inuertis ſinubus DY, & BI arcus eorum BC minorem à DBC maiori ſubduces, & reſtabit DB, & ita totum triangulum notum erit: Cur autem in concordibus angulis vniendi arcus in diſcordibus ſubducēdi ratio eſt, quia perpendicularis in concordibus intra cadit, in diſcordibus extra ex propoſ.30. & 31. Tract. 23.

PROBL. II. PROPOS. LV.

Duobus angulis, & crure oppoſito datis inuenire crus oppoſitum alteri eorum.

SIt datū triangulū obliquangulū GAB in prę.fig. & anguli G, & B concordes ſpecie, & crus AG, & oporteat reperire crus AB oppoſitum angulo G.

Quoniam poſſumus deducere arcum perpendicularem intra triangulum cadentem, vt AC; is inueniatur.

Datur enim baſis AG, & angulus G, vnde ex cit. propoſ.3. huius inuenies crus oppoſitum AC perquirendo ſinum eius CO. Deinde dato arcu, crureque oppoſito AC, & angulo B inuenies baſim AB ex propoſ. 21. huius; habita verò baſi AG, & crure AC inuenies reliqua, vt ſupra.

Detur deinde triangulum DAB, in quo anguli ſpetie diſſentiant, & ſit notū crus AB, & anguli, vt ADB, & ABD. Anguli complemento ABC, inueniatur arcus perpendicularis AC inueniendo ſinum OC, quo obtento crure AC perpendiculari, & angulo D inuenietur baſis AD ex cit. propoſ.21.

PROBL. III. PROPOS. LVI.

Duobus cruribus, & angulo datis altero ſpetie noto, baſim inuenire.

DEtur triangulum AGB, in quo anguli ſpecie conſentiant G, & B: At G angulus ſit quoque notus quoad quantitatem ſicut, & crura AB, & GA deſidereturque baſis BG.

Quoniam datur AG baſis, & angulus G; inueniatur perpendicularis arcus AC demiſſus ſuper incognitam baſim ex 3. huius.

Deinde arcu perpendiculari AC, & baſi AG ex propoſ.30. inuenies crus, & arcum GC.

Poſtea arcu eodem inuento normali AC, & arcu dato AB inuenies arcum BC ex prop.cit.30. & ſimul arcus inuentos BC, & CG copulabis, & fiet tota baſis, arcuſque BG.

Si verò anguli ſpecie diſſonent, vt in triangulo ADB pro obtuſo angulo ABD angulum complemēti CBA accipies, & inuenies arcum normalem AC, quo & baſi BA reperies ex cit. propoſ. BC, & rurſùs arcu AC, & baſi AD arcum DBC, à quo ſubduces baſim priùs inuentam BC, & habebis DB pro arcu reſiduo, & baſi quæſita.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Duobus angulis, & crure datis vni eorum oppoſito baſim interpoſitam angulis reperire.

DAto arcu GA, & anguli G, & BA noto ſpecie inueniatur, vt ſupra normalis arcus CA, vt propoſ.3.h. & deinde ſi anguli ſpecie conſentiant, vt in triangulo GAB. Dato crure AC, & angulo oppoſito G, inueniatur crus alterum GC adiacens angulo dato G ex 19. huius.

Sic dato crure normali AC, & angulo B, ex eadē inuenietur arcus BC, & ſimul vniātur CB, & CA. At ſi ſpecie diſcordēt vtendum eſt angulo vicario, & complemento ex eadem propoſ. V.g. in triangulo ADB dato crure AC, & angulo ABC inueniendus arcus BC; rurſùſque eodem crure normali dato, & angulo D inueniendus eſt arcus DBC, alterque minor ab altero ſubducendus, vt remaneat arcus, & baſis DB quęſita.

PROBL. V. PROPOS. LVIII.

Duobus cruribus, & angulo oppoſito vni eorum datis, & altero ſpecie noto angulum verticalem inuenire.

DEtur triangulum obliquangulum GAB, & angulus G, duoque crura quantitate nota AG, AB, anguluſq; B notus ſpecie, nempe alteri cōſonus Angulo G, & Crure CA crus normale AC reperiemus, vt ſupra. Deinde angulū CAB apud A ex pr.15. huius ſcilicet arcum NL. Deinde dato crure normali AC, & baſi BA inueniatur angulus BAC apud A ſcilicet arcus LM ex 17. huius, & anguli reperti BAG, & GAC, ideſt arcus NL, & LM ſimul vniantur, & fiet totus angulus BAG.

Quod, ſi anguli ſpecie diſſonent, vt in triangulo DAB; tunc reperiatur ex 15. huius angulus BAC ſcilicet arcus ML vtēdo complemento ABC pro dato angulo obtuſo ABD, & rurſùs crure AC, & baſi AD, quæratur angulus DAC, ſcilicet arcus HML ex 17. huius, ſubducaturque alter ab altero, & fiet angulus quæſitus DAB, videlicet arcus HM. Quod ſi notus quantitate ſit acutus angulus eodem modo efficies, ac ſupra, & angulo D, & crure AD reperies normale crus AC. Deinde crure AC, & angulo D angulum DAC, ideſt arcum HML ex 15. h. & hinc crure normali AC, & baſi AB angulū CAB, ideſt arcū ML extrahes, atq; angulum BAC minorem ſubduces à maiori, prodibitque arcus HM exoptatus.

PRORL. VI. PROPOS. LIX.

Duobus angulis, & crure oppoſito datis angulum verticalem conquirere.

IN triangulo obliquangulo GAB, in quo anguli dati G, & B ſpecie conueniunt, & quantitate innoteſcunt, detur crus AG.

Itaque ex 3. huius dato crure AG, & angulo G inuenies crus normale oppoſitum AC. Poſtea ex propoſ.15. inuenies angulum CAG, ideſt arcum NL apud A data baſi AG, & angulo G.

Deinde dato angulo B, & crure oppoſito AC inuenies angulum alterum ex propoſ.41. BAC hoc eſt arcum ML, quos ſimul copulabis, nempe angulum CAG, & CAB, & efficies totum angulum GAB hoc eſt arcum NLM.

Quod ſi anguli ſpecie ſint abſoni, dati anguli B obtuſi cōplemento vtere, & crure BA dato, anguloque complente ABC inuenies AC ex 15. huius.

Rurſuſque crure AC normali, & angulo D in triangulo DAC inuenies angulum DAC hoc eſt arcum HML maiorem, à quo ſubduces angulum BAC, ideſt arcum ML, & reſiduus erit exoptatus angulus DAB. Inuenies autem angulum CAB ſc. arcum ML dato anguli ABD complemento ABC, & crure oppoſito AC ex prop.48. huius.

THEOR. VII. PROPOS. LX.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus comprehendentibus baſim, & angulos inuenire altero angulo ſpecie cognito.

COgnitus detur angulus B quantitate, & duo crura BA, & BG comprehendentia ſint quoq; nota, & alter angulus G notus ſpecie, nempe quòd ſit quoque, vt B acutus.

Dato itaque angulo B, & baſi AB inueniatur crus normale CA ex 3. prop.h. & ex 15.h. angulus BAC.

Deinde crure, & baſi AB, & angulo eodem B inueniatur arcus BC ex propoſ.13. huius, quem ſubduces à noto crure BG, & habebis crus CG.

Hoc itaque crure CG, & AC normalibus inuenies baſim AG ex prop.7.h. & angulū G, & CAG ex 25.h.

Quod ſi anguli ſpecie differant; Ex dato angulo DBA, & crure AD, quòd datus angulus ſit obtuſus DBA, vtere complemento ABC, & baſi AB, inuenies crus AC normale, quod extra cadit.

Deinde angulo B obtuſo & crure, ſeu baſi AB ſi detur obtuſus angulus inueniatur crus BC ex pr. 13.h. quod addes noto cruri BD, & efficies arcū DBC.

Quo arcu DBC, & AC normalibus inuenies baſim quæſitam AD ex 7.h. & angulum D.

Quod ſi angulus ſit D acutus angulo D, & baſi DA inuenietur arcus DBC, à quo ſubduces crus notum BD, & obtinebis crus BC.

Hoc itaque crure BC, & crure AC normalibus inuenies AB quæſitam baſim ex 7.h. & angulū BAC, quem ſubduces ab angulo recto, & fiet ang. ABD.

PROBL. VIII. PROPOS. LXI.

Dato crure interiacente, ſeu baſi, & duobus angulis ad baſim angulum verticalem reperire.

IN triangulo obliquangulo ABG detur baſis AG, & anguli noti ſint G, & A. & perquiratur angulus B, cum anguli ſpecie concordant. Itaque data baſi AG, & angulo G perquiremus crus normale AC. Deinde ijſdem datis angulum GAC ex prop.15.h. quem ſubducemus à toto angulo dato GAB, & reſtabit angulus BAC.

Hoc itaque angulo CAB, & crure AC perquiremus reliquum angulum ABC ex propoſ.5. huius, qui erit angulus verticalis quæſitus B oppoſitus baſi AG.

Quod ſi detur triangulum BAD, in quo anguli B, & A ſpecie diſſonant, & baſis detur BA. Complemēto anguli CBA, & baſi BA inueniatur crus normale AC ex 3.h. & ijſdē datis āgulū BAC ex 15.h. quē addes angulo acuto noto DAB, & efficies ang. DAC.

Hoc itaque angulo acuto DAC, & crure AC perquires alium angulum verticalem apud D ex prop. 5. huius.

PROBL. XI. PROP. LXII.

Dato crure interpoſito, & angulis adnexis reliqua crura perquirere.

EXponatur triangulum obliquangulum GAB, cuius nota baſis AG, & anguli ad baſim A, & G, & perquiratur aliquod crurum AB, vel BG.

Dato itaque angulo G, & baſi AG ex 3. huius perquiretur crus normale AC.

Deinde baſi AG, & angulo G crus normale GC adhęrens angulo G ex prop 13. huius.

Poſtmodum angulum GAC ex propoſ.15. huius, quem ſubduces à toto noto GAB, & reſtabit angulus CAB, quo CAB, & crure inuento AC perquires reliquum crus oppoſitum BC ex 3. h. & crus adiacens AB ex 13. huius. Iunges tandem duo crura GC, & BC, & obtinebis GB, idem ages, ſi anguli dati ſint ſpecie diſſoni, ſed adhibita cautella ſubductionis vnius ab alio.

Itaq; omnes caſus obliquangulorum ſoluuntur per reductionem ad duo rectangula exceptis ſolùm duobus, nempe cùm dantur tres anguli, vel tres arcus. Nam per doctrinam pręcedentem iſti duo caſus ſolui nequeunt, cùm in rectangulo non detur, niſi vnica res, nempe vnicū crus, vel vnicus angulus, reliqua enim, quæ dantur non ſunt rectanguli, ſed obliquanguli cum in rectangulo reliqui anguli vnus ſit rectus, alter ſit ſemper aut maior, aut minor eo, qui datur in obliquangulo, & idem dices de cruribus V.g. in triangulo ABG crus BG, & AB eſt maius crure AC, vel crure GC, vel BC rectanguli. Sicut angulus CAB eſt maior an- CAB, vel CAG, angulus verò B, vel G minor, quam rectus ad C. Vnde cum non niſi vnica pars rectanguli, tunc detur ex præcedentibus doctrinis, in quibus duæ ſemper partes rectangulorum ad ea ſoluenda requiruntur, menſuris ſubijci nullo modo queunt.

EXPENSIO VI.

De obliquangulorum ſphæricorum ſolutione deducendo perpendicularem, ſed per duas operationes operi conſignata.

MOdi quos hìc trademus ex parte quidem prædictis faciliores; Nam non niſi duas operationes adhibent; ex parte verò difficiliores, quòd in ſecunda operatione ſinus totus non adhibeatur; quare ne dum multiplicatione, ſed etiam diuiſione opus ſit; præcepta tamen omnes caſus ſoluunt, & totam trigonometriam obliquangulorum ſphæricorum amplectuntur.

THEOR. I. PROPOS. LXIII.

In omni triangulo sphærico rectangulo sinus angulorum eandem proportionem seruant ad sinus crurum oppositorum.

SIt triangulum rectangulum VDC, & rectus angulus V, in quo anguli, siue æquales, seu inæquales D, & C sinus toti LB, & BT, & BI, & BG, sinus cruris VD sit DA, sinus verò cruris VC sit AC, sinus cruris DC sint CF, & DO. Sinus verò angulorum sint TH, & LN, quòd distent ab angulis C, & D quadrante ob sinus BT, & BL totos cum duo arcus TG, & DT ex defin. anguli præsupponantur quadrantes; sicut etiam CL, & CI; vt enim arcus LI, & GT sit angulorum mensura vtrique arcui perpendicularis esse debet. Vnde, & eorum poli debent esse in D, & C ex prop. 15. tract. 21. Coroll.

Probatur propos. arcus DT, & CL sunt equales, vtpote quadrantes, & DC arcus idē, vnde æquales erunt sinus toti BL, & BT; necnon, & DO, & CF, vt eiusdem arcus; Propterea que erit FC ad BT, & OD ad BL, vtpote æqualium eadem proportio: Verùm vt CF ad BT, ita est CA ad TH ex 1. huius Cor. & vt DO ad BL, sic est DA ad LN. Quare ex 16. l. 5. vt est CA ad HT sic erit DA ad LN.

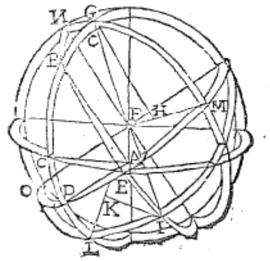
COROLLARIVM.

VNde colligitur quoque *permutando* ita esse sinus CA ad sinum AD crurum, vt angulorum sinus HT ad LN.

THEOR. II. PROPOS. LXIV.

In omni triangulo obliquangulo quoque sinus arcuum ad sinus angulorum sunt in eadem proportione.

SIt triangulum obliquangulum EBD, & ducatur perpendicularis arcus EC. Itaque sinus anguli B in rectangulo triangulo ECB erit IK, & cruris normalis sinus AC; sinus verò basis AB. Sic in triangulo rectangulo ECD sinus anguli erit GH sinus cruris oppositi normalis idem AC; sinus verò basis AD.



Igitur ex præced. vt est AB sinus basis ad FB sinum totum, sic AC sinus cruris ad IK sinum anguli B. Et pariter, vt DA sinus basis ad FO, seu FB sinum totum, sic AC cruris sinus ad GH sinum anguli D. Quare *inuertendo* FN erit ad DA, vt GH ad AC; Proportio itaque erit *perturbata*, vt vides.

Basis AB ad FN Rad. & FN ad AD;

vt GH ad crus AC ad IK angulum.

Vnde ex *æquo* AB erit ad AD, vt GH ad IK; & *permutando* AB erit ad GH, vt AD ad IK. Et idem sequetur, etiam si perpendicularis extra cadat, vt potes considerare si cogites ED arcum esse ad eandem partem, quā reperitur arcus EB.

PROBL. I. PROPOS. LXV.

Datis duobus cruribus, & angulo in obliquangulo sphærico angulum reliquum oppositum reperire.

CVm ex præced. hæc tria data, & quartum quæsitum sint proportionalia, datis tribus quartum regula trium reperire possumus, ponemusque primo loco sinum cruris dati AD, secundo anguli dati IK sinum, tertio cruris alius dati sinum AB, & prodibit sinus GH anguli quæsiti D oppositi.

PROBL. II. PROPOS. LXVI.

Datis duobus angulis, & vno crure reliquum crus oppositum reperire.

EX 64. propos. huius data, & quæsitum sunt quatuor proportionalia; Quamobrem Positis primo loco sinu anguli dati GH, secundo cruris dati sinu AE, tertio anguli dati sinu IK regula aurea exprimet quartum quæsitum sinum AD cruris oppositi ED.

THEOR. III. PROPOS. LXVII.

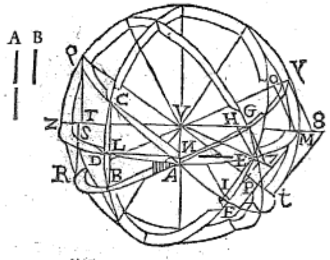
Si in triangulo obliquangulo sphærico perpendicularis intus cadit, sinus complementi anguli maioris apud basim ad sinum complementi alterius anguli minoris ad basim est, vt sinus anguli minoris ad sinum maioris, in quos verticalis angulus diuiditur ab arcu normali.

TRiangulo ACB obliquangulo super latus CB cadat perpendicularis arcus AD, & diuidat in duos arcus inæquales BD, & DC. Arcus verò EF. Sic complementum anguli C. At EG complementum anguli B; qui ponuntur ducti polo B, & C, vt ostendimus propos. 4. Tract. h.

Dico itaque, quod EG complementi sinus EH anguli B est ad sinum EI complementi FB anguli C, vt sinus RS anguli RAZ apud A ad sinum QT alterius anguli ZAQ apud A; quos perpendicularis intus

intus cadens facit, dum angulum verticalem apud A in duo diuidit.

Probatur. Iam ex dictis propos. 1. h. EN sinus complementi EA arcus normalis AD est ad radium MV, vt sinus EH cumplementi anguli B est ad MO



sinum anguli GAE, & ideo ZAR apud A, qui vtpote ad verticem æquantur, & ideo sinui RS: Sic idem EN sinus complementi arcus normalis AD, est ad sinum totum VM, vt sinus EI complementi anguli C ad sinum MP anguli apud A equali angulo ad verticem ZAQ, & ideo sinui QT. Cum ergo sint in eadem proportione, quæ est EN ad MV radium, tum EH ad RS tum EI ad TQ ex prop. 16. lib. 5. erit eadem proportio EH complementi anguli B ad RS sinum anguli ZAR, vt EI minoris C complementi sinus ad sinum TQ anguli maioris ZAQ apud A. Quare *permutando* EH erit ad EI, vt RS ad TQ.

Idem quoque sequitur etiam si perpendicularis extra cadat, vt quilibet cogitare poterit si imaginetur QAT arcum ad alteram partē esse arcus RAY.

THEOR. III. PROPOS. LXVIII.

Data summa duorum angulorum, & eorum proportione reperire casū arcus normalis.

HVius problem. fundamentum latiùs supra explicauimus pr. 21. h. in triangulis planis obliquangulis, vbi probauimus. Quod sic se habet summa duorum sinuum ad eorum differentiā, sicut tangens medietatis arcuum ad tangentem semidifferētię eorū. Quare etiā si adsit quęlibet alia proportio V. g. lineę A ad lineam B; quæ sit, vt summa duorum laterum ad eorum differentiam ex 16. l. 5. erit etiam linea A ad lineam B, sicut tāgens medietatis arcuum ad tangentem semidifferentię eorum.

Detur itaque quælibet linea V. g. EI in præsenti fig. quę sit ad quamlibet aliam EH, vt QT ad RS sinus. Erit itaque *diuidendo* EI ad differentiam quà differt ab EH, vt QT ad differentiam suam ab RS, & *inuertendo* quoque differentia EI ab EH ad EI, vt differentia QT ab RS ad ipsam QT.

Et quia ponitur EI ad EH: vt QT ad RS erit etiam *componendo* EI ad EI cum EH: vt QT ad QT cum RS. Quare ex *æquo* differentia, qua differt EI ab EH erit ad summam EI cum EH, vt differentia, qua discrepat QT ab RS ad summam QT, & RS.

Propterea que *inuertendo* summa EI cum EH erit ad differentiam earum; vt summa sinuum arcus QT & RS ad differentiam ipsorum. Sed vt summa sinuum QT, & RS ad ipsorum differentiam, ita est tangens medietatis arcuū QZ, & RZ, idest arcus RQ ad tangentē semidifferentiæ eorū QZ, & RZ arcuum. Ergo ex 16. lib. 5. vt summa sinuum EI, & EH complementorū ad semidifferentiam eorum, ita est tangens dimidij arcus QZ, & RZ, scilicet dimidiati arcus RQ ad tangentem semidifferentiæ ipsorum.

Primo itaque subducendus est sinus EI ab EH, vt habeatur differentia. Postea EI, & EH in vnam summam sunt redigendi; vt summam consequamur. Hinc arcus datus QR in duo partiendus, & medietatis tangens ex tabulis excerpenda.

Adhibita postea regula trium. Dices si summa linearum, seu sinuum proportionalium datorum dat differentiā eorū; quid dabit tangens semisummæ angulorū, & prodibit tangens semidifferentiæ eorum. Hæc itaque tangens quæsita in tabulis exhibebit arcum, qui additus medietati arcus QR dabit angulum maiorem ZAQ, subductus relinquet minorem ZAR, & punctum Z erit illud, in quod arcus normalis AZ cadit.

THEOR. IV. PROPOS. LXIX.

Obliquanguli trianguli tribus angulis datis eius latera reperire.

PRimo secundùm præc. doct. angulorum C, & B datorum complementis EI, & EH, & semisumma arcus QR anguli QAR inuenies singulos CAD, & BAD angulos, nimirum arcus QZ, & RS; siquidem ex propos. 67. ita est EH ad EI, vt SR ad TQ. Et si triangulum exhibitum habeat vnicum angulum obtusum, sumes pro angulis ad basim duos acutos, quod si obtineat duos obtusos, illos constitues pro angulis ad basim semper specie concordes. Vnde semper perpendicularis intra triangulum cadet. Quare in triangulo rectangulo CAD habentes duos angulos ad basim notos, nempe angulum C, & CAD ex propos. 23. huius inueniemus basim AC, & ex prop. 35. crus CD. Postea dato angulo B, & DAB ex propos. 23. basim AB inuenies, & ex prop. 35. crus DB, addesque cruri CD, quoniam anguli specie concordes assumpti fuere, & obtinebis tria latera nota AC, CB, & BA.

PROBL. V. PROPOS. LXX.

Dato crure opposito, & duobus angulis, & altero specie noto, angulum verticalem manifestare.

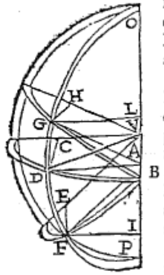
DEntur anguli B, & C, & crus oppositum CA ipsi B: Priùs itaque reperies angulum apud A in triangulo ACD dato pro basi crure AC, & angulo acuto C ex prop. 15. h. scilicet QZ arcum.

Secundo, quia ex prop. 67. ita est sinus EI complementi anguli dati C ad sinum PM, vel æqualem TQ, vt EH ad MO, vel æqualē SR ex dato EI complemento anguli C, & inuento sinus TQ, & EH complemento anguli B reperiemus MO, idest SR, & si anguli specie consentiant, simul arcus addendi, quod si specie differant, tunc pro angulo obtuso eius complementum assumendum est, & inuenti anguli, seu arcus minor à maiori est subducendus.

THEOR. IV. PROPOS. LXXI.

Sinus secundi arcuum in obliquangulo triangulo, in quos à perpendiculari diuiditur basis, sunt inuicem, vt sinus complementorum arcuum ipsis conterminalium.

SInt AG, & AF sinus arcuū conterminaliū FB, & GB & GH, & FE eorum complementorum; arcus verò



verò, in quos diuiditur basis FD, & DG, & sinus complemẽtorum LG, & IF. Dico, *quod ita se habet* LG ad IF, vt GH ad FE.

Probatur ex prop. 6. h. Nam, vt est HG ad GL; sic est CD ad radium VD ex propos. 6. huius; Item, vt FE ad FI; sic CD ad radium DV. Quare ex propos. 16. lib. 5. GH erit ad GL, vt FE ad FI; cum eidem proportioni CD ad DV consonent. Idem autem ostendetur si perpendicularis extra cadat, vt ex te videre potes.

PROBL. VI. PROPOS. LXXII.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus illum claudentibus basim inuenire.

OFferatur angulus G, & crus BG, & GF, alterq; angulus F specie angulo G consentiat.

Primo dato angulo G, & basi GB reperies crus GD adiacens ex propos. 13. huius, quòd à dato crure GF subduces, & consequeris DF.

Itaque primo sinu LG complementi cruris reperti DG, secundo loco sinu FI complementi DF residui cruris dati, & tertio sinu secundo HG arcus conterminalis EG reperies sinum EF complementi basis BF quæsitæ angulo G verticali oppositæ. Hoc autem docuimus alio modo propos. 60. h. Quod si alter angulus specie diuersus sit, vteris complemento, si angulus verticalis sit obtusus, arcumque inuentum minorem à maiori dato suduces, vel si sit acutus ab arcu inuento maiori minorem datum pro inuento primo, quo, & cęt. vt priùs.

PROBL. VII. PROPOS. LXXIII.

Datis duobus cruribus, & angulo opposito, reperire basim altero angulo specie noto.

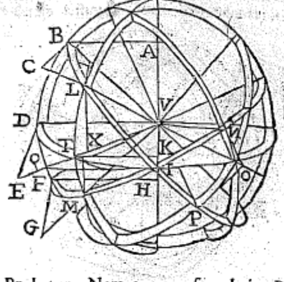
DOcuimus propos. 56. h. id alio modo. Dentur itaque duo crura BG, & BF, & angulus G, sed F sit tantùm specie notus. Primo angulo G, & crure GB reperiemus crus GD ex 13. h.

Deinde fiat, vt HG complementi cruris GD sinus ad FE sinum cõplemẽti alius cruris BF; sic sinus LG complementi arcus inuenti GD ad IF ignoti arcus complementum, & duo inuenti arcus simul addantur GD, & DF, & fiet GF basis, si anguli specie concordent: quod si dissonent alter ab altero subducatur, & residuum erit arcus quęsitus.

THEOR. V. PROP. LXXIV.

Tangentes secundæ laterum conterminalium arcui normalis sunt inuicem in proportione, vt angulorum sinus secundi, in quos triangulum à normali diuiditur.

TRiangulo LMI latera arcui ITD conterminalia sint IM, & IL; quorum complementorum tangentes sunt BC, & FG: Arcus verò angulorum sunt FD, & BD; quorum sinus secundi AB, & HF. Dico itaque, quod vt BC ad FG tangentes crurum secundæ; sic AB ad HF sinus secundi angulorum.



Probatur. Nam ex propos. 20. huius Radius, VD est ad sinum complementi anguli, nempe AB, vt tangens DE complementi cruris adiacentis IT ad tangentem BC complementi basis. Vnde, & *conuertendo* BC erit ad DE, vt AB sinus ad radiũ DV, sed ex eadem propos. 20. in altero triangulo, vt DE ad FG, sic VD radius ad sinum HF. Ergo ex *æquo* BC erit ad FG, vt AB ad HF.

PROBL. VIII. PROPOS. LXXV.

Datis duobus cruribus; & angulo verticali angulos reliquos obtinere; si alius angulus tertius specie sit cognitus.

SInt data crura MI, & LI, & angulus I verticalis. Quia est CB tangens secunda ad FG tangentem secundam, vt BA ad FH sinus complementorum angulorum datur itaque proportio BA complementi angulorum ad FH, in quos verticalis est diuisus in tangentibus CB, & FG; datur quoq; summa anguli FIB eorundem angulorum, ideoque ex 48. h. si fiat, vt CB, & FG summa tangentium 2, crurum ad ipsarum differentiam, sic semisummæ arcuũ DB, & DF tangens ad ipsorũ semidifferentiæ tãgentẽ reperies semdifferentiã arcuum DB, & FD, quam subtrahes, & consequeris minorem arcum DF addes, & obtinebis maiorem BD arcus angulos BID, & DIF mẽsurantes. Vnde dato angulo BID, & latere LI consequeris angulum L, sic dato angulo DIF, & latere MI consequeris angulum M, ex 13. h. Quosvnies angulis specie consentientibus: subduces alterum ab alio, si specie dissonent.

PROBL. IX. PROPOS. LXXV.

Datis duobus angulis, & basi exquirere angulum verticalem.

DEtur angulus L, & M, & basis LM, & in animo sit reperire angulum LIM. Ex complementorum angulorum tangentibus NO, & OP erit nota proportio MX ad XL sinus ex 77. h. vnde reperietur MX, & XL ex prop. 68. h. deinde angulo M, & sinu MX exquiretur angulus TIM ex prop. 5. h. rursusque angulo L, & LX; angulus TIL, & sic tótus angulus MIL notus erit, si simul vniantur, eo quod anguli ad basim specie consonent, vel subducatur alter ab alio, si dissonent.

PROBL.

PROBL. IX. PROPOS. LXXVI.

Datis duobus cruribus, & angulo opposito angulum verticalem consequi alio tertio angulo specie noto.

DEtur crus LI, & MI, & angulus L oppositus cruri MI. Primo data basi IL, & angulo L ex propos. 13. huius inuenietur angulus DIB.

Deinde fiet ex pr. 74. vt tangentes BC ad FG complementorum crurum, sic AB sinus complementi anguli reperti DIB ad aliud, & inuenietur FH sinus complementi anguli alterius DIF, quos iunges si concordent anguli, subduces minorem à maiori si anguli specie disconueniant. Hoc autem etiam docuimus alio modo propos. 58.

THEOR. VI. PROP. LXXVII.

In obliquangulo triangulo sinus segmentorum basis à perpendiculo factorum in ea sunt proportione; in qua tangentes complementorum angulorum segmentis adiacentium.

ANguli adiacentes segmentis TM, & LT à normali factis, sint L, & M, & tangentes complementorum ipsorum PO, & NO. Dico, quòd, vt sinus LX ad sinum MX; ita sit PO ad ON in proportione in pręced. schemate.

Probatur ex 24. huius. Quoniam radius LV est ad sinum LX cruris LT, vt tangens DE complementi alterius cruris IT ad tangentem OP complementi anguli ipsi cruri IT oppositi. Ergo *inuertendo* sinus LX erit ad radium, vt tangens PO ad tangentem DE. Et ex eadem propos. vt radius est ad MX, sic DE tangens ad ON tangentem: Ergo ex *æquo* vt sinus LX ad XM sinum, ita PO tangens ad NO tangentem complementorum, & ideo erit etiam PO ad LX *permutando*, vt NO ad MX.

PROBL. X. PROP. LXXVIII.

Dato crure, & angulis duobus basim interiacentem angulis expromere.

DEtur angulus L, & M, & crus IL, & in animo sit reperire crus, seu basim ML.

Dato angulo L, & crure IL inuenies in primis crus LT ex propos. 13. huius.

Secundò ex præced. facies, vt OP tangens complementi anguli ad sinum XL; sic tangens alterius anguli ON ad MX; habebisq; duos arcus LT, & MT; quos simul addes, si anguli dati sint speciei eiusdem; subduces si diuersi sint diuersæ speciei: Hoc autem docuimus supra propos. 61. Quòd autem sit PO ad LX, vt ON ad MX patet ex præced. Nam cum sit PO ad ON, vt LX ad XM erit etiam *permutando* OP ad LX, vt ON ad MX.

PROBL. XI. PROPOS. LXXIX.

Datis duobus angulis, & basi interiacente duo crura reperire.

QVoniam enim est ON ad OP, vt MX ad XL *inuertendo*: dentur verò basis LM, & anguli L, & M in triangulo obliquangulo LIM, & consequenter complementorum tangentes PO, & ON dabitur proportio, quam habet XL ad XM in duabus tangentibus PO, & ON, & dabitur summa arcus ML basis scilicet interiacentis.

Vnde ex dictis supra propos. 68. exquires sinus XL, & XM, & arcum TL, & TM; quo obtento.

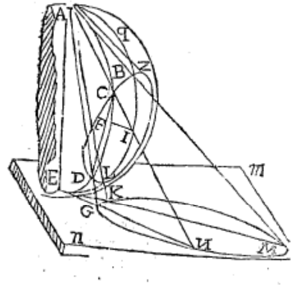
Secundo crure MT, & angulo M exquires basim IM. ex propos. 21. huius, & rursus dato crure LT, & L angulo ex eadem perquires crus, seu basim IL: quod & fecimus supra propos. 62.

Si verò anguli sint specie differentes pro angulo obtuso accipies eius complementum acutum ad ineundam operationem pro altero angulo, & eadem exequeris, vt priùs.

THEOR. VII. PROPOS. LXXX.

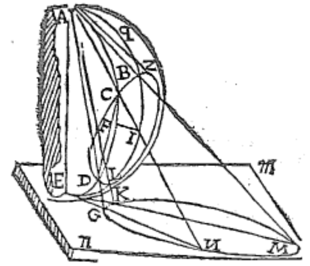
Dato in sphæra triangulo obliquangulo, si polo in angulo verticali maiori cruri opposito, interuallo minimi cruris circulus minor describatur, tangens dimidiæ basis est ad tangentem dimidij aggregati crurum, vt tangens dimidiæ differentiæ crurum refertur ad tangantem eius portionis basis, quæ extra circulum remanet.

SPhæra super aliquod planum locata sit, & punctum contactus sit vertex E trianguli obliquanguli ICE sphæra descripti, & polo I. qui opponit maiori lateri EDC describatur circulus ZBCD interuallo arcu CI minori. Itaque IC arcus erit æqualis arcui IB; Vnde totus arcus BILE erit aggregatùm ex cruribus IC, & ILE. Quia verò planum m n tangit sphęrã, omnes lineæ, seu sectiones



In eo delineatæ erunt tangentes sphęræ. Ergo si planũ AQILE circuli productũ intelligatur, & secet planũ m n faciet sectionẽ ME, & ducta per B linea AM efficietur ME tangens arcus BILE summę duorũ crurum. Rursus, quia IC æquatur IL arcui LE erit crurum differentia, & ductâ lineâ AK per L linea KE differentiæ EL crurum erit tangens. Sic arcus CDE est basis, & pducto plano circuli, ACDEA culus portio est secabit planum m n in EN, & per C ductâ rectâ AN efficietur NE eius tangens; Quod verò basis remanet extra circulum arcus DE vocatur

tur *basis alterna*, & ducta AG per D linea GE erit eius tangens.



Sunt autem tangentes non angulorum; sed semiangulorum, eo quod oporteret, vt essent tangentes angulorum integrorum; quod prouenirent à centro, at quia anguli MAE, & DAE sicut, & anguli KAE, & GAE sunt ad peripheriam hinc ex propos. 23. el. 3 sunt tang. non angulorum; sed semiangulorum.

Per ea autem, quæ diximus de proiectione circuli obliqui in sphæra prop. 9. tract 26. MNHC sunt puncta in peripheria circuli proiecti existentia, quòd sit basis radiosi coni scaleni; cuius basis subcontraria est circulus ZBCDL. Et hinc est, quòd illud idem, quòd supra pr. 22. de triangulis planis ostensum est, hìc verificetur, & ita sit tangens EN semibasis veræ ad tangentem ME semiaggregati crurum, vt tangens semidifferentiæ crurum KE est ad tangentem GE semiportionis baseos extra circulum remanentis: Omnia autem elliguntur dimidiata, quia secantes illæ, vt AG, AN, AM, & AK, quę terminant tangentes non proueniunt à centro sphæræ, vt dixi, vnde arcus mensurantes angulos ducti radio AE apud A sunt duplo minores, quàm ij qui in circumferentia sphæræ sunt, scilicet EDC, & ELB, & cæt.

PROBL. XII. PROPOS. LXXXI.

Datis tribus lateribus obliquanguli sphærici, illud ad duo rectangula reducere.

DEntur trianguli sphærici tria latera primùm 40. secundùm 35. tertiùm 60. Gr. Statuatur pro basi crus maius, cuius medietas est 30. Gr. & tangens grossioribus numeris tantum accepta est 577. reliqua verò duo latera in vnum aggregentur, & fient Gr. 75. qui bifariam diuisi erunt Gr. 37. m. 30. quorum tangens est 767. Rursus subducatur crus maius à minori, & Gr. 5. pro differentia remanebunt, & pro semidifferentia Gr. 2. m. 30. cuius tangens par. 43. Adhibeatur itaque regula proportionum, & ponatur primo loco tangens semibasis EN par. 577. secundo tangens semiaggregati crurum EM Par. 767. tertio tangens differentiæ crurum EK par. 43. & prodibit tangens 57. GE arcus DE Gr. 3. m. 16. semibasis alternæ, qui duplicati, vt sint Gr. 6. m. 32. & ablati à basi Gr. 60. remanebunt Gr. 53. m. 28. pro basi DC intra circulum remanente, cuius medietas DF erit Gr. 26. m. 44. in quam cadit arcus normalis IF, reliqua verò medietas addita basi alternæ 6. m. 32. dat reliquum arcum FDE Gr. 33. min. 16.

Ratio huius rei est ex præced. Quia ita est tangens EN ad tangentem EM, vt tangens EK ad tangentem GE; Vnde datis tribus primis regula proportionum quarta inuenietur.

PROBL. XIII. PROPOS. LXXXII.

Datis tribus lateribus angulos quoslibet reperire.

EX propos. anteced. id optimè fit. Nam cum iam consequti fuerimus notitiã partiũ basis, in quas arcus normalis cadit crure ILE dato pro basi, & crure EDF, iam reperto inuenies per propos. 18. huius angulum E adiacentem cruri dato ILE.

Secundo inuenies ex eadem propos. dato crure IC, & FC angulum C adherentem cruri FC.

Tertio eodem dato crure IC, & CF inuenies partem anguli verticalis CIF ex prop. 3. huius, & ex eadem dato crure FDE, & crure ILE pro basi inuenies partem alteram anguli apud I, quos angulos simul addes, & consequeris totum angulum CIL. Semper autem perpendicularis intus cadet, quia enim dantur tria latera possumus elligere duo, aut simul maiora quadrante, aut minora, quæ crura efficiant, vt tertium dissonum crus sit illud, in quod perpendicularis cadit.

Habes itaque in hac Expens. omnem doctrinam obliquangulorum penitùs explicatam, & omninò absolutam. Cætera verò, quæ ab alijs ad abundantiam doctrinę traduntur omnes casus non plenè adequant sine istis licet ingeniosissima sint. Vnde huic libro, qui necessaria complecti intendit, & sufficientia non omnia, propositiones prædictæ satis erunt.

TRACTATVS XXVIII.

De Progressionibus superficierum.

TRansactis tractatibus, quæ de lineis erant consideratis, vt in corporibus, vel circa corpora deductis, nunc de corporum superficiebus agendũ est. Et quia supra tractauimus de progressionibus in numeris, & in lineis, ratio postulat, vt eas propositiones, quæ veræ vniuersales sunt, ostendamus similiter de superficiebus quoque verificari, & simul specialia quædam de progress. Arithmetica superficierum attingamus, quæ cubandis sphæroidibus necessaria sunt.

EXPENSIO I.

De serie proportionis Geometricæ superficierũ

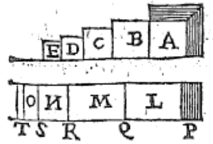
DVplex est series superficierum, quæ continuata in infinitum geometricè extendi potest; Alia est, quæ vnicam superficiem constituit: alia quę diuersas superficies inuicem similes componit, de hac pręcipuè hìc propositiones tãgemus: quas exhibuit nobis Ambrosius à S. Vincentio ab ipso singulari ingenio excogitatas.

THEOR. I. PROPOS. I.

Omnes propositiones, quas supra de lineis demonstrauimus de superficiebus geometricè continua progressione procedentibus verificantur.

SInt quadrata similia, seu quodcumque aliud genus figurarum A, B, C, D, & cæt. proportione geometricâ continuâ procedentia; Dico de illis omnia illa verificari, quæ supra tract. 16. part. 1. de lineis memorauimus.

Quod, vt ostendatur fiant rectangula ęqualia illis figuris A, B, C, D, & cæt. sed eiusdem altitudinis ex pr. 43. vel 44. l. 1. elem. quę sint L, M, N, O, quæ inuicē eam proportionem obtinebũt, quam bases ex prop. 1. lib. 6. Elem. eritque L ad M, vt PQ ad QR, & sic de alijs vnde



Probatur. Ita est figura A ad figuram B, vt rectangulum ipsi A æquale ad M rectangulum æquale figuræ B; sed ex lib. 6. prop. 1. vt rectangulum L ad M, ita est basis PQ ad basim QR: Ergo ex propos. 16. lib. 5. Elem. vt A ad B ita PQ ad QR, & ita dicas de alijs C, D, quæ se referent, vt bases RS, & ST minoribus in infinitum. Cum ergo spatia successiuè minora in proportione Geometrica conseruent semper eandem proportionem, ac lineæ, seu bases successiuè minores, omnia ei, quæ de lineis dicta sunt, etiam de spatijs similibus verificari poterunt.

COROLLARIVM I.

OMnia ea, quæ dicuntur de lineis supra tract. 16. verificari ne dum de spatijs similibus; sed etiam dissimilibus continuè proportionalibus, vt sunt rectangula L, M, N, O. Sicut etiam non tantùm de ijs, quæ diuersas similes figuras constituunt; sed de ijs, qui vnicam, quorum tamen singulę partes assignate decrescant continuâ proportione geometrica. Tale est totum spatium LO, cuius singulæ partes L, & M, & N, & cæt. se referunt, vt bases PQ, & QR, & RS.

COROLLARIVM II.

ELlicitur rursùs progressionem infinitam figurarum similium A, B, C, D, & cæt. seu dissimiliũ L, M, N, O producere determinatam spatij quantitatem; si simul omnia spatia sumantur; Nam etiam lineæ PQ, & QR, & RT determinatam longitudinem simul sumptæ, licet in infinitum multiplicatæ, producunt ex prop. 15. part. 1. tract. 16.

COROLLARIVM III.

DEducitur quoque omnia spatia antecedentia A, B, C, D esse ad omnia cõsequentia B, C, D, E, & cæt. vt vnũ antecedens A, ad suum consequens B, & similiter antecedentia L, M, N ad consequentia M, N, O, esse, vt L ad M: Quia ex Cor. 2. pr. 16. Tract. 16. sic sunt lineæ PQ, & QR, & RS, & cæt. ad lineas QR, & RS, & ST, vt PQ ad QR.

Vnde

Vnde,& *permutando* A,B,C,D V.g. antecedentia omnia erunt ad A,vt consequentia omnia B,C,D,E erunt ad B.

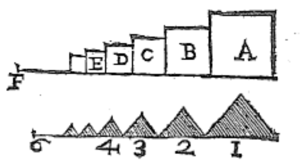
COROLLARIVM IV.

GNomonem nigrum nempe differentiam primi A à secundo termino B, & ipsum primum terminum totum A, & totam seriem terminorum infinitam esse in continua analogiâ eâdem. Sic & rectangulum nigrum differentiam primi L à secundo M, & ipsum primum L, & totam collectionem rectangulorum esse in continua proportione, quòd ex 3. Coroll. prop.15. ita lineæ se habeant.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si dentur duæ progressiones in eadem analogya procedentes planorum, seu quælibet figura vnius sit similis alterius figuræ correspondenti, seu dissimilis; dummodò singulæ vnius seriei inuicem similes sint, sicut, & alterius; Ita se habebit tota planorum series ad totam seriem, vt primum vnius ad primum planum alterius.

SInt ABCD, & 1,2,3,4. progressiones, quarum termini inuicem similes sint; licet diuersi ab alterius seriei terminis V.g. illa sint quadrata, hęc triangula, sintque in eadem proportione V.g. A ad B, vt 1 ad 2, & B ad C, vt 2 ad 3, & sic consequenter,& termini earũ sint F,& 6. Dico, *quòd tota series* ABC, & cæt. erit ad totam seriem 123, & cæt. vt primus terminus A, quadratum ad primum triangulum 1.

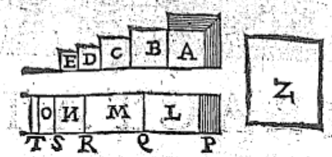


Probatur tota series antecedentium AF, & cæt. est vt consequentium seriem totã BF, sic A est ad B; sed vt A ad B ita est ex Hypothesi triangulum 1 ad 2, & sic ex Coroll. 3. huius omnia antecedentia, & series tota 16. ad consequentia 26. Ideoque ex 16. lib.5. antecedentia AF ad consequentia FB erunt, vt antecedentia 16. & 26. consequentia. Quare *conuertendo*, vt series tota FA ad A primum terminum, ita 1.6. series tota ad 1 primum terminum. Proptereaque *permutando*, vt AF series ad 16. seriem, sic A primus terminus ad 1 primum alterius seriei terminum.

PROBL. I. PROPOS. III.

Planitiem æqualem toti seriei Geometricæ continuæ superficierum exhibere.

FIat, vt gnomon niger redactus in quadratum ex 45. lib.1. quadrati A, quà differt à quadrato B, sic quadratum totum maius A ad Z. Dico Z planitiem toti seriei AF æqualem esse.



Patet ex propos.15. part.1. de progress. vbi id probauimus de lineis. Sed iam ostendimus eas propositiones esse vniuersales,& planitiebus conuenire. Ergo, si tertia proportionalis linea in ea proportione, quam habet differentia primæ lineæ à sequenti ad ipsam primam lineam, hæc inquam tertia proportionalis totam seriem equat linearum sic etiã superficies tertia proportionalis gnomoni nigro, & quadrato toti A æquabit totam seriem superficierum.

Et eodem modo operaberis de rectangulo P nigro, nam si fiat, vt P ad totum L in quadratum trãsfusa, sic L in quadratũ redactum ad aliud inuenies Z æqualem progressioni LO rectangulorum.

COROLLARIVM.

HInc est, quod si sint aliæ species figurarum, quòd possis reperiri similem figuram æqualem toti seriei, si differentiam in similem figuram redigas ex prop.45.lib.6.& ex tertiam proportionalem inuenias, vt tract. sequent.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Datis duobus planis similibus, cuius bases homologæ in continuum sint positæ reperire illorum planorum terminum.

IN prop.seq. fig. sint bases planorum homologæ similium AB, & BC indirectum positæ, & cupiat quis agnoscere vltimum terminum, ad quem progressio similium superficierum eis basibus infinitarum data perueniat.

Inueniatur ex prop.15. Tract.16.par.1. basium AB,& BC progressionis vltimus terminus, qui sit F. Dico F esse etiam vltimum terminum datorum planorũ, ad quem producta in infinitum eorum progressio peruentura sit.

Probatur, quia cum bases sint tot, quot plana, & in eadem proportione duplicata. Siquidem ex prop.27.lib.6. plana similia duplicatam habent basium proportionem, vnde patet suis basibus ad eum terminum æquali multiplicatione peruentura.

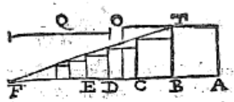
PROBL. III. PROPOS. V.

Datis duabus primis basibus reperire planorum seriei infinitæ æqualem superficiem.

DEntur bases quadratorum AB,& BC,& ex propos.14.lib.6. reperiatur eis tertia proportionalis CD: duarum verò AB, & CD datarum reperiatur seriei infinitæ linea æqualis Q ex propos. 16. tract.16. par.1. Fiatque super Q rectangulum AO æquale altitudini BT, & illud erit, quod postulatur, æquale toti seriei quadratorum.

Proba-

Probatur. Nam linea Q ex prop.11. tract 16. par.1. cùm sit æqualis toti seriei basium imparium ex effectione obtinet duplicatam rationem, ad primam basim AB eius, quam habet series basiũ AF ad primam basim eãdem AB.



Propterea que ex 1.lib.6. etiam rectangulum AO ex Q factum eiusdem altitudinis ad primum quadratum AT duplicatam habebit proportionẽ, quòd sit eadẽ, ac basis suæ Q ad basim AB quadrati AT, illius, quam habet series basium AF basim AB. Sed series quadratorum AF ad quadratum primum AT duplicatam obtinet proportionem seriei basium ad primam basim; siquidem singula ex prop.21.lib.6. duplicatam basium obtinẽt proportionẽ; quare ex 17.l.5.& omnia. Ergo eandem obtinent ad idem quadratum AT, quam rectangulum AO ex Q altitudinis BT, ad idem quadratum AT. Quare quadratorum series infinita,& rectangulum prædictum AO ex Q erunt ęqualia ex 9.lib. 5. cum eidem eadem dicant proportionem.

COROLLARIVM.

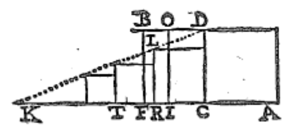
SI inter Q, & BT reperiatur media proportionalis quadratum ex ea erectum erit æquale rectangulo sub Q,& BT cõprehenso ex 19.l.6. Vnde erit quoq; æquale toti seriei infinitæ quadratorũ.

PROBL. IV. PROPOS. VI.

Dato quadrato, & eiusdem altitudinis rectangulo, seriem infinitam exhibere, quæ & à dato quadrato incipiat, & tota dato rectangulo sit æqualis.

FIat ex prop.15.lib.6. vt AF ad CF latus rectanguli, sic CA ad CI aliam inueniendam, & ex I erigatur parallela ad FB,& sit rectangulum CO: huic autem rectangulo fiat quadratum æquale CL.

Dico *seriem quadratorum* AD, & CL, & *cæt. rectangulo* AB, *æquari.*



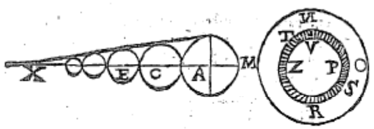
Probatur. Fecimus AF ad CF, vt CA ad CI. Ideoque cum sit CA sumptus, vt primus terminus ad CI, vt secundum velut AF totum cum primo ad CF residuum ex primo ex Coroll.1. prop.16. tract. 16. part.1. AF erit æqualis toti basium infinitæ seriei in ratione AC ad CI, procedentium.

Deinde quia quadratum CL æquatur rectangulo CO habebit eandem rationẽ ad illa quadratũ AD: Quare cum quadratum maximum AD sit ad quadratum CL, vt AC basis ad tertiam proportionalem RT, quia sunt in duplicata proportione basium; erit etiam talis proportio Quadrati eiusdem maximi AD ad rectangulum CO ob eandem altitudinem, vt basis AC ad CI basim; ergo bases CI, & RT sunt ęquales, quod eisdem basis AC eandẽ dicant proportionem quadrati AD ad quadratum CL, vel rectangulum æquale CO. Quare cum sit, vt fecimus AC ad CI, vt AF ad CF,& ideo (vt monuimus) AF æquetur seriei basium infinitæ in ratione AC ad CI, æquabitur etiam toti seriei infinitæ basium alternarum, & interruptarum in ratione AC ad RT quod CI, & RT sint æquales. Quare ex anteced. rectangulum ex FA, & CD, nempe rectangulum AB, seriei infinitæ quadratorum AD ad CL, & cæt. erit æquale, cum sit erectum super AF æqualis seriei basium alternarum AC,& RT,& altitudinis CD, vt docet prop.5. h. quod est promissum.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Planorum seriem exhibere, quæ à dato segmento simili toti alicui planitiei incipiat, & ipsa series sit toti planitiei datæ æqualis.

SIt datus V. g. circulus OMN, à quo auferatur portio VZP similis toti, & debeat constitui series, quæ incipiat à circulo PVZ, & tota sit æqualis planitiei toti ONM.



SI esset iam constituta series ista, & esset AX, ita esset series XA ad seriem XC, vt circulus A ad C ex propos. 15. tract,16. part 1. Coroll 1. Fiat itaque vt circulus OMN totus ad annulum residuum ONM, VPZ: ex prop.26. lib.6. vel etiã ex tr.29. sequenti, sic PVZ circulus ad aliud RTS annulũ nigrũ. Cõstituatẽ autẽ PVZ pro primo termino, & sit A, & fiat planũ C æquale ãnulo RTS nigro simile ex 23 l.6. circulo, & planitiei A, & ideo planitiei toti ONM, & producatur progressio vsque ad suum terminum X. Dico *seriem* AX *æqualem esse planitiei datæ* ONM.

Probatur. Nam ita est ex constructione tota planities OMN ad annulum suum seminigrum NOZP, vt PVZ circulus ad RTSZP annulum nigrum, & vt A ad C æquales ex effect. sed vt A ad C; ita est AX series ad CX seriem ex Cor.3.p.1.h. Ergo, vt OMN planities ad ONMZP residuũ annulũ: sic series AX ad seriem CX: quare *conuertendo* erit AX tota series ad residuum, compartemque seriei A primum terminum, vt OMN planities tota ad PVZ residuum ex annulo: Vnde *permutando* erit etiam AX series ad OMN planitiem totam, vt terminus A ad PVZ residuum; sed A, & PVZ ex effectione æquantur. Ergo etiam series AX, & planities ONMR tota æquabuntur ex prop. 1. lib.6. Elem.

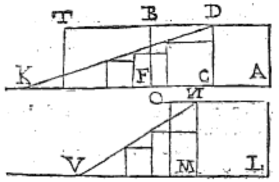
Fiet autem circulus C æqualis annulo nigro ex lib.6. vt infra docebimus Tract.30.

Rrr PROBL.

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Seriem à dato termino incipientem ; sed alteri æqualem instituere.

Fiat rectangulum AB in altitudine CD equale toti-seriei AK ex propos.5. h. Sitque datum quadratum LN minus, quam rectangulum AB (alioquin propositio est impossibilis) cui addatur talis pars MO, vt totum LO sit æquale prædicto rectangulo AB. Et ex propos.6. huius, fiat rectangulo LO series æqualis LV, quæ à quadrato NL incipiat, & erit factum, quod exposcitur.



Patet, quia ex constructione series LV æquatur rectangulo LO, quod est æquale rectangulo AB, quod æquatur seriei A K; quapropter series LA æquabitur seriei A K.

PROBL. VII. PROPOS. IX.

Seriem superficierum alteri datam proportionem obtinentem ordinare, quæ incipiat à dato quadrato.

Sit data proportio 7. ad 4. Fiat autem rectangulum A B adhibendo schema preced. equale progressioni K A ex h. prop.5. Deinde fiat, vt 7. ad 4. ita rectangulum A T ad rectangulum eiusdem altitudinis A B.

Sit autem quadratum datum L minus, quàm rectangulum A T, & ei addatur tale parallelogrammum ex 35. lib.1. elem. MO, cum quo faciat planum equale plano AT faciendo rectangulũ LO equalis MN altitudinis æquale ipsi A T; deinde ipsi fiat ex prop.6. h. æqualis series quadratorum LV; & erit factum, quod exigitur.

Patet ex constructione. Nam series LV æquatur rectangulo LO, quòd æquale est rectangulo AT; rectangulum verò TA se habet ad rectangulum AB; & ideo ad seriem A K ei rectangulo æqualem, vt 7. ad 4. Ergo etiam series LV ad seriem AK se habebit, vt 7. ad 4.

EXPENSIO II.

De planorum progressione Musica.

Visa progressione Geometrica restat, & Musicam planorum progressionem breuiter attingamus. Vnde sit.

PROBL. I. PROPOS. X.

* *Triangulum, seu parallelogrammum datum ita secare, vt partes proportionem musicam seruent.*

Sit triangulum ABC; quod oporteat ita secare, vt totum ABC planum sit ad planum FCA, vt differentia plana H B C ad planum differentiam HCF.

Diuidatur latus AB ex 25.pr. tr.15. vel 1. tr.16. in partes musicæ proportionales, ita vt sit AB ad FA vt B H ad HF Geometricâ proportione respondentes, ducanturque rectæ HC, & CF, eritque factum. Nam ABC totum triangulum erit ad AFC, vt differentia BCH ad differentiam HCF, vel si sit parallelogrammum ducantur normales ab F, & H ad basim AB, & partes erunt harmonicè proportionales.

Probatur, vt refertur AB ad AF bases, sic refertur BH ad HF basium differentiæ; sed triangula, vtpote eiusdem altitudinis ex 1. lib.6. eandem habet basium rationem. Ergo eiusdem rationis BH ad HF, quæ est eadem, quæ B A ad FA. Quare erit quoque triangulum BAC ad triangulum FCA in ea proportione, vt BHC ad HCF.

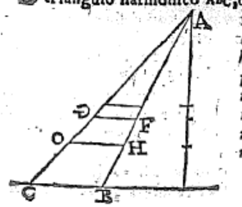
COROLLARIVM.

Hinc colligas de istis planis, omnes quoque propositiones, quas de lineis diximus verificari, cumque de istis nil ampliùs dicendum nobis sit ad ipsa spatia, quę ab harmonicis lineis efficiuntur accedendum.

PROBL. II. PROPOS. XI.

* *Trapezia harmonicis lineis intercepta in harmonico triangulo habent eam proportionem, quæ trianguli ad triangulum, nempe proportionem duplicatam basis ad basim.*

* Sint lineæ harmonicæ BH, HF, BC, & HO, & FC in triangulo harmonico ABC, quæ faciant spatia BO, & HG. Dico *ea spatia* BO *ad* HG *habere inuicem eam porportionem, quã trianguli* AC B *ad triangulum* AG F, *nempe proportione duplicatam* BH *ad* HF.



* Probatur Triangulum ACB ad triangulum simile AGF ob æquales angulos, à parallelis effectos est in duplicata ratione lateris AB ad latus AF; Trapezium quoque BO ad trapezium HG duplicatam habet lateris BH ad latus HF rationem ob similitudinem eorum cum angulis equalibus cõstent ob parallelas; sed vt crus AB ad crus FA, ita est ob proportionem musicam ex propos.1. tract.16. part.2. latus BH ad latus HF; ergo etiam ACB triangulum ad AGF triangulum erit, vt trapezium BO ad trapezium HG.

COROLLARIVM.

Hinc educitur omnes illas propositiones, quas posuimus de lineis agentes in seriem harmonicam progredientes, etiam superficiebus applicari debere, & veritatem eandem obtinere; quia earum omnium fundamentum est proportio Musica, secundùm quam in seriem continuam Musicè procedunt, vt facilè ex te ipso poteris considerare absque noua omnium earum propositionum repetitione.

EXPENSIO III.

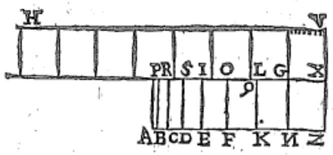
De progressione spatiorum Arithmetica.

Hæc Expensio quadrandis Ellipticis spatijs & spiralibus, & cubandis Conoidibus maximè deseruit; estque veluti fundamentum ad illas operationes præstandas.

THEOR. I. PROPOS. XII.

* *Rectangula Arithmeticè decrescentia, & eiusdem altitudinis æquiualent medietati rectanguli, ex eorum integrorum summa constantis vno excluso; dummodo partes secundùm quas decrescunt, tot sint quot ipsę.*

Sint rectangula ZG, & cætera vsque ad A, V.g. 8. & octaua sui parte decrescant alterũ respectu alterius. Dico, *quod omnia sic diminuta simul æquiualent medietati summæ, quæ ex eis integris constatur, nimirum rectanguli* HG medietati excluso GV vnico rectangulo, vt sint 7.



Probatur. Nam primum NL remansit tantùm, quantùm ablatum est ab vltimo AP, siquidem septem partes in NL remansere ablata vna septima, ibi in AP vna septima relicta est; cęterę septem ablatę. Ergo æquatur, quod remanet ei, quod ablatum est. Sic dicas de residuo OK, quod æquatur defectui BR; siquidem hinc ablatæ sunt 6. partes, ibi sex remansere, & sic de alijs, ergo defectus hinc, & residua inde æquabuntur: sed si sumantur simul augmenta, & defectus facient totum rectangulum. Ergo cum sint septem rectangula deficientia erunt simul defectus, & residua æqualia septem rectangulis integris. Ablatis itaq; æqualibus defectibus, residua remanebunt dimidia septem rectangulorum nempe dimidio HG excluso primo GV, sunt autem septem deficientia, quia à primo nihil aufertur.

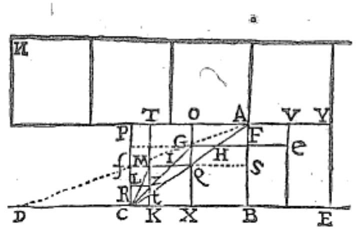
Id etiam diximus, cum ageremus de proportione Arith. summanda in Cor.prop.9.Tr.14. Siquidem ostendimus numeros datos continua diminutione Arithmetica deficientes in vnam summam redactos efficere dimidium numeri ipsius maximi in se ducti consurgentis, ipso tamen maximo excluso, vt videre in istis numeris. Namque maximus terminus est 10. qui multiplicatus in se facit 100. summa verò omnium est 45. nempe dimidium numeri quadrati ipso maximo 10. excluso, vt fiant 90. cuius dimidium est 45.

10	0
9	1
8	2
7	3
6	4
5	5
4	6
3	7
2	8
1	9
45	45

THEOR. II. PROPOS. XIII.

* *Rectangula prædicta iam arithmeticè deficientia; si adhuc secundùm aliud latus prædicto modo arithmeticè deficiant sunt maiora suis residuis.*

Sint rectangula Arithmeticè iam diminuta AX vsque ad KP; quæ adhuc eodem prædicto modo diminuantur, & primo auferatur rectangulum, cuius basis sit AF partis vnius, OQ duarum, ZT trium prout supra fecimus; Dico hæc residua rectangula, seu quadrata simul sumpta excedere partes omnes à se ablatas, nempe FO, & QT, & ZP;



Præassumptum. Et in primis notandum, quod omnis vnitas est ad latus alicuius quadrati, vt latus ipsum ad quadratum suum; quòd ex def.15. tract.8. ratione multiplicationis sui, ita vnitas metitur radicem, seu latus; vt latus, ipsum quadratum; sic 1. metitur 4. vt 4. metitur 16. Quare si à radice auferatur vnitas, & à quadrato dematur ipsa radix; ita quoque erit 1. ad 3. vt 4. ad 12. Nam si est 1. ad 4. vt 4. ad 16. erit etiam *diuidendo* 1. ad 3. vt 4. ad 12.

Quo posito insuper considerandum est, quòd BG est radix, seu latus EB ex hypothesi minutum vnica vnitate, & BD duplum BC est radix ipsa in se multiplicata ex præc. sed minuta ipsa radice B E. Nam diximus, quod omnia rectangula, idest BP arithmeticè decrescentia equant dimidum rectangulorum AN integrorum sumptorum toties, quot partes in ipso latere BA sunt, iuxta quas arithmeticè decrescunt, si tamen demàtur rectangulum ipsum maximum AE: sed rectangula inuicem sunt, cum sint eiusdem altitudinis, vt bases; quare bases quoque BC arithmeticè decrescentes æquabunt dimidium BD radicem BE in 4. part. diuisam, & per 4. scilicet in se, ductam; sed diminutâ ipsa radice EB.

Quare ex præced. præass. ita erit AF vnitas ad FG latus minutum vnitate, vt AB ad BD radicem in se ductam toties, quod in ipsa sunt partes sed ablata ipsa radice EB; Vnde FA erit ad FG, vt AB ad BD: Quare, & FA vnitas erit ad dimidium radicis FH, vt AB radix ad BC dimidium ipsius AB ex 18. lib. 5.

Cum ergo FH sit dimidium radicis vnitate diminutæ, & AFH triangulum æquale triangulo HGQ, ex altera vnitate QG, & dimidio HG effecto, erit trapezium BAQX æquale quadrato primo DG.

Vnde si etiam cætera trapezia QXTK, & cet. essent æqualia suis quadratis XM, & alijs correspondentibus, spatium occupatum à quadratis decrescentibus esset æquale triangulo BAC, ex BC latere omnium diminutorum rectangulorum, & BA radice. Vnde rectangula ablata eis essent æqualia. Verùm hoc non est. Siquidem vnitas FA est ad radicem dimidiatam, & diminutam FH, vt radix ipsa tota AB ad BC; erit etiã ex 18. l. 5. dualitas AS ad SQ radicem diminutam; vt radix tota BA ad BC. Si verò dematur dualitas à maximâ radice fit radix sequentis minoris quadrati XQ. Quare AC diagonalis transibit per Q. Vnde trapezium à diagonali efformatum in sequenti quadrato minus erit, quam ipsum quadratum; siquidem XQ vnũ latus quadrati est idẽ, ac trapezij QTXK alterũ verò latus minus KT non potest æquari, & sic dicas de reliquis, licet sufficiat probasse de vno. Quare verùm erit, quod rectangula, seu quadrata decrescentia, rursus Arithmeticâ diminutione, vt BG, & XM, & KR, maiora euadunt, quàm medietas BAC rectanguli BACP ex summâ omnium solâ primâ diminutione deficientium conflati.

COROLLARIVM.

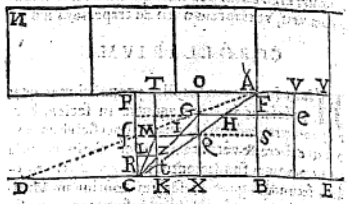
HInc est, id quod ostendimus de triangulis FHA, & HGQ, quod sint æqualia, id etiam ostendi de alijs, si XG assumatur tanquam latus maximi quadrati, vt sumitur BA; quare ducta diagonali CG secabit QM, dimidiam in I, & triangulum QGI erit æquale triangulo IZM, & triangulum ZML triangulo RCL; & ita si sint alia, siue quadrata, siue rectangula.

THEOR. III. PROP. XIV.

* *Summa rectangulorum, seu quadratorum duplici Arithmetico decremento minutorum est minor summâ ipsorum integrorum excluso vno; seque habet ad eam minus in proportione, quam 1. ad 3.*

SInt rectangula BG, & XM, & KR. deficientia Arithmeticè, ne dum quòad latus BX, & alia, sed etiam quoad latera BF eodem modo. Dico, *quòd eorum summa* BG, *&* XM, *&* KR, dicit ad AN integra quadrata per 3. multiplicata numerum partium successiui deffectus minorem proportionem, quàm 1. ad 3.

Probatur. Quoniam ex præced. Coroll. omnia triangula, in quibus trapezia, vt CXKZ, & cæt. excedunt quadrata sua, vt XM sunt æqualia triangulis, quibus exceduntur, nimirum QGI triangulum triangulo IMZ, & alia alijs. Posito itaque illo spatio triangulari vt IZM, & LRC, in quo quadrata excedũt triangula QGC, & ZMC pro illo QGI, & ZML, in quibus exceduntur cũ ZTIQ, & LZTC sit commu-



ne; spatium QGZT æquabitur spatio MTQ, & MCT spatio ZRCT: vnde omnia triangula GQC, MZC equalia erũt excessibus quadratorũ extra diagonalẽ AC excedentium, & remanentium; nempe spatio QMT, & RCZT, quo superant BAC triangulum; sed hæc triangula QCG, & MZC sunt æqualia dimidio rectangulorũ fG, & LM, vtpote eiusdẽ altitudinis. Ergo etiã excessus quadratorũ QMT, & ZCR extra CAB, triangulis QGC, & MZC æqualia sunt dimidio eorũdem rectangulorum fG, & RM. Si autem etiam BG quadratum primũ inter decrescentia excluso maximo excessu eodem excederet rectangulum FP, iam excessus omnium quadratorum super medietatem BAC æquaretur dimidio rectangulorum FP, & fG, omnium inquam defectuum, & ideo si esset triangulum APC partium 3. duæ cederent FP, fG, & MR rectangulis, at vna excessui quadratorũ. Quare quadrata BG, XM, & KR posito toto rectangulo BACP partium 6. essent dimidium, & tertia pars alterius dimidij, nempe $\frac{4}{6}$, & rectangula residua FB, & fG, & RM $\frac{2}{6}$. Sed iam ostensum est quadratum GB primum deficictium nullo pacto excedere BAC. Vnde sũma quadratorũ BG, & XM, & KR deficit à $\frac{4}{6}$ dimidio rectangulo PF, siquidem si spatio æquali illi dimidio excederet BG quadratum diagonalem AC, iam æquaret $\frac{4}{6}$ totius BACP. Sed quantitas BACP est dimidium quadratorum AN ex h. propos. 12. Ergo quadratorum, (cùm BP ponatur 6) AN rectangulum erit 12. & ideo BG, & XM, & KR summa erit ad AN 4. quadrata integra minùs quam 4. ad 12. idest minus, quã 1. ad 3. cum sit ad PB, vt 4. ad 6.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

* *Si quadratis decrescentibus, & quadratis quoq; non decrescentibus addamus maximum quadratum, erit maior proportio omnium decrescentium ad omnia non decrescentia addito vtrobique maximo; quam 1. ad 3.*

SI series quadratorum, seu rectangulorum decrescens in præced. schemate addito maximo EA, & BG, & XM, & KR, iterumque quadrata integra tot numero YN addito eis quoque maximo. Dico, quòd quadratorum prædictorum decrescentium EA, & BG, & XM, & KL, Proportio ad YN quadrata

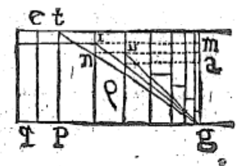
drata æqualia erit maior, quàm 1. ad 3.

Probatur. Ita est vnitas ad radicem, vt radix ipsa ad suum quadratum. Ergo æquabitur rectangulum ex vnica parte V. g. AP, & ex ED partibus tot, quot sunt in quadrato EA partes, constante quadrato ipsi AB ex 17. Elem. lib. 6. Quare etiam dimidium eP rectanguli ex ED, & AP erit æquale dimidio EV rectanguli EA. Quod autem ED constet tot partibus, quot in EA sunt quadrata parua patet ex hypothesi; quia est radix ipsa BA toties accepta, quot in ipsa BA sunt partes: Vnde si in BA sunt 4. partes in ED erunt 16. quia in AE sunt 16. partes productæ ex multiplicatione lateris BE in se quo posito. Iam BP rectangulũ est ad AN, vt 3. ad 6. ex propos. 12. huius: addito autem quadrato, vt sit YN, & quadratis decrescentibus BV dimidium ipsius; erit adhuc VC ad YN; vt 3. ad 6. Ideoque cum quadrata decrescentia BG, & XM, & KL sint minus, quam 2. ad 6. ex præced. ad AN quadrata æqualia, si addamus eis duas tertias partes parallelogrammi BV erunt adhuc quadrata decrescentia GB, XM, & KR cum $\frac{2}{3}$ ipsius VB ad YN quadrata non decrescentia minus, quam 2. ad 6. & defectus erit ex præced. dimidium parallelogrammi FP: Si ergo addamus EV dimidium quadrati BA addimus plus, quàm FP, vt in principio ostendimus nimirum PE. Ergo addito toto quadrato EA quadratis decrescentibus, cum addamus magis, quàm quod requirunt ad hoc, vt dicant proportionem 2. ad 6. vel 1. ad 3. habebunt ad quadrata non decrescentia YN maiorem proportionẽ, quàm 2. ad 6. vel 1. ad 3. & excedent ferè rectangulo dimidio eP, & triente EV.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

* *Quadrata decrescentia, seu rectangula duplici decremento Arithmetico supra descripto, quò iuxta minutiores partes successiuum eorum decrementum constituitur, eò magis accedunt ad proportionem 1. ad 3. respectu quadratorum non decrescentium.*

MVltiplicentur GB, XM, & KR rectangula præcedentia per diuisionem subduplam, vt in fig. Q. Proportio quadratorum, seu rectangulorum semper crescet ad quadrata non decrescentia, & semper fiet magis proxima ad eam proportionem, quam habet 2. ad 3.



Probatur. Nam rectangulum m t erit minus, quàm FP in præced. fig. & ferè duplò minus, quam FP, siquidem etiam, si secundùm longitudinem excrescat ei pars t I, ea certè non æquat longitudinem Im, vt ex dictis etiam colligi potest. Cum ergo hoc rectangulum sit minùs, reliqua erunt maiora, vt patet. Nam loco sequenti GF præced. fig. succedent in hac duo rectangula nm, u a simul æqualis latitudinis, ac GQ, sed quæ magis distent ob diuisionem minutiorem, & subduplam à termino g erunt longiora, & sic de cæt. Proptereáque etiam triangula, vt n I g, dimidia rectangulorum erunt maiora triangulis QGC in præced. fig. si duo triangula illius vni huius ob basim n I subduplo minorem sumantur. Sed hæc sunt æqualia incremento rectangulorum I vsque ad g supra dimidium tgp: Ergo etiam rectangula, seu quadrata, velut I p crescunt magis vltra dimidium, quàm quadrata GB, & cæt. præced. fig. & magis ad $\frac{2}{3}$ accedunt.

Nec tamen vnquã perueniunt ad $\frac{2}{3}$, quia semper ad $\frac{2}{3}$ deficiet dimidium rectanguli t m; quare ad quadrata, seu rectangula q t septem integra erunt proximè; vt 2. ad 6. ex propos. 13. huius, cùm ea integra sint duplo maiora, quam rectangulum g t. Quod si quadratis non decrescentibus septem, & istis decrescentibus addas q t; eodem pacto, & eadem ratione erunt magis, quam $\frac{2}{6}$: sed multo magis accedent ad $\frac{2}{6}$, quadratis præced. fig. BA, & & GB, & cæt. Nam tertia pars rectanguli e p erit minor, quàm tertia pars residua BV, & dimidium e p huius, quod æquatur rectangulo e m erit minus, quàm dimidium EV illius, quo dimidio, & qua tertia parte quadrata precedentia decrescentia sunt magis, quàm $\frac{2}{6}$ respectu non decrescentium, vnde addito vtrinq; maximo q t rectãgula octo h. fig. minus discrepabunt à $\frac{2}{6}$, quam rectangula præced. fig. respectu octo rectangulorum integrorum quale vnum est t q.

THEOR. VI. PROPOS. XVII.

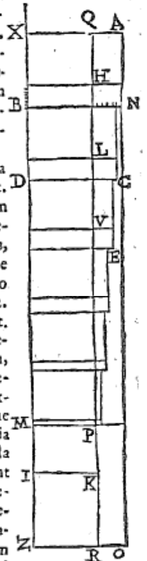
* *Series quadratorum, seu rectangulorum si infinita subdiuisione in Arithmeticam seriem, quoad ambo latera diminuatur, æquatur duobus sextis, quadratorum integrorum saltem quoad sensum.*

PRob. Nam quò numerosior est subdiuisio eò fit propinquior accessus ad $\frac{4}{6}$ rectanguli g t excluso maximo rectãgulorum à minori proportione; Sic incluso maximo fit accessus ad $\frac{4}{6}$ rectãguli gt à maiori pportione: nec excluso maximo accedendo ad $\frac{4}{6}$ potest excedere $\frac{4}{6}$, nec incluso maximo ex præc. Ergo si diminutio fiat quoad vsque fieri potest equabit tota simul $\frac{4}{6}$. Patet consequent. Nam non erit magis, quam $\frac{4}{6}$ alioquin posset adhuc fieri subdiuisio à maiori proportione, per quam acceditur ad $\frac{4}{6}$, sed nec erit minùs, quam $\frac{4}{6}$ integrorum rectangulorum eadem de causa; quia inquam posset fieri adhuc subdiuisio, per quam accedimus ad $\frac{4}{6}$ à minori proportione: Ergo æquabit $\frac{4}{6}$ rectanguli t g. Et ideo totius rectanguli, quod componitur ex rectangulis integris eodem numero constantibus, quod est ex 12. huius duplum rectanguli ex deficientibus vnico decremento rectangulis compacti erit vt 4. ad 12. idest, vt 1. ad 3.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

* *Si rectangula Arithmetico decremento ſine fine deficientia vſque ad vltimum ſui non deficiant; tunc rectangula defficientia ad illa minora, quæ integra perſeuerant proportionem æqualitatis; ad complementa verò proportionem ſubduplam, ad rectangula verò circa diametrum reſiduum ſubtriplam.*

SInt rectangula Arithmeticè deficientia AB, & BC, & DE: Quorum defectus perueniat vſque ad MK. Dico rectangula deficiẽtia omnia eſſe primo rectangulis XH, BL, DV, & cæt. æqualia. Dimidium verò complementorum AH, & HB quoad totam ſeriem: Tertiam vero partem rectangulorum HN circa reſiduum HN diametri XN exiſtentium non deficientium.



Probatur. Quia rectangula XH, BL, DV integra perſeuerant. Ergo ſeries talium æqualium ſeriei æquè multiplicatę erit æqualis. Complementa verò HB, & LD deficiunt pro medietate ſui, ſicut, & AH, & NL, & CV pro medietate ſui deficiunt, ex 12. h. ergo ſimul AH, & HB, & cæt. dimidio quoque deficient. Rectangula verò circa diametrum, quod duplici Arithmetico decremento deficiant ex 17. h. extenuabuntur ſucceſſiuè vſque ad $\frac{1}{3}$ omnium. Quarè omnia ſimul ad integra HN rectangula ęquè multiplicata ſe habebunt vt 1. ad 3. Itaq; rectangula deficientia Arithmetico decremento ſecundum vtrumque latus; ſed non vſque ad vltimum ſui; ſe habebunt ad integra, ad rectangula quidem XH, BL, DV, circa diametrum, vt 1. ad 1. ad cõplemẽta verò BH, HA, vt 1. ad 2. ad reliqua verò rectangula circa diametrũ HN, vt 1. ad 3.

THEOR. VIII. PROP. XIX.

* *Rectangula duplici Arithmetico decremento ſe extenuantia, & non ad vltimum ſui, ſunt ad rectangula integra, vt rectangulum ſub maximo, & minimo latere, & triente rectanguli differentiæ ad rectangulum primum.*

IN præced. fig. ijſdem poſitis. Dico rectangula Arithmetico decremento, & non vſque ad vltimum ſui deficientia AB, & BC, & DE eſſe ad integra pari numero conſtantia, vt rectangulum BQ ex maximo latere XB, & minimo XQ conſtante, & triente rectanguli HN, quod oritur à differentijs laterum, quæ inter maximum, & minimum reperiuntur.

Probatur. Nam XH æquat ipſum rectangulum XH non deficiens, at HB eſt medietas complementorũ NB, AH, quod cõplemẽta ſunt inuicem ęqualia ex 45. l. 1. Quamobrem ſi, & aſſumas $\frac{1}{3}$ quadrati, vel rectanguli HN circa diametrum, erit tota ſeries rectangulorum deficientium proportione Arithmetica ad ſeriem multiplicem rectangulorum non deficientium, vt rectangulum QB ſub latere XB maximi, & minimi XQ vna cum tertia parte rectanguli HN ad integrum XN, quia ſeries deficiens ad integra ſe habet quoque, vt 1. ad. 1.; & vt 1. ad 2. & tandem, vt 1. ad 3. ex 18. h.

COROLLARIVM.

HInc etiam educes: Totam ſeriem rectangulorum arithmeticè deficientium eſſe ęqualẽ rectangulo ex latere totã ſeriẽ integrã ſubtẽdente XZ, & latere MP minimi rectanguli, vnà cum tertia parte rectanguli differentiæ crurum PO. Nam tota ſeries rectangulorum minorum non dificientium finiat in PM; vnde rectangulum PX erit ęquale toti ſeriei minori rectangulorum non deficientium. Differentia itaque eſt inter ſeriem maiorum, & minorum non decreſcentem rectangulum PZ; quod eſt dimidium omnium complementorum; ſiquidem PZ æquat complementum PA, & ideo eſt dimidium omnium complementorũ hinc, & inde deficientium cum ipſa ſint dimidium integrorum ex 18. h. Cum itaque XP æquet omnia rectangula minora At AP, vel PZ omnia cõplementa deficiẽtia dimidio ſui, etiam rectangulũ PO, æquabit omnia quadrata reſidua circa diametrum, vt HN non deficientia.

Si ergo accipiatur rectangulum XR habebimus totam ſeriem rectangulorum minorum in rectangulo XP, & in reſiduo PZ dimidium omnium complementorum; ſi ergo inſuper aſſumamus tertiam partem PO rectanguli conſequemur omnia rectangula deficientia HN, LC, & VE, & cæt. Itaque tota ſeries rectangulorum deficientium ſine meta, ſed ad ſui vltimam diminutionem non peruenientium erit æqualis in ſua planitie rectangulo ſub rectanguli primi latere ZR, vel XQ, & ſub latere omniũ rectangulorũ non deficientiũ XZ, & tertia parte rectanguli differentiæ OR crurum ZR, & OZ, & differentiæ MZ laterum XM, & MZ. Si verò conſideres ea, vt deficientia quidem; ſed non quoad omnem poſſibilem extenuationem ſingulorum, tunc omnia rectãgula deficientia excluſo maximo erunt ęqualia rectangulo XR, & minus, quam tertiæ parti rectanguli PO; ſi verò includas maximum, erunt æqualia rectangulo XR, & magis, quam tertiæ parti rectanguli PO: Ratio eſt, quia excluſo AB rectangulũ PB ęquat omnia minima nõ deficientia: at PZ omnia complementa pro medietate ſui deficientia; cætera verò quadrata deficientia quoad vtrumque latus excluſo HN ſunt minus, quam tertia pars omnium quadratorum eiuſdem numeri non deficientium, quam multitudinem æquat rectangulum PO, ſi verò addas maximum XN iam deficientia complementa in complemento AH ſunt maiora rectangulo XR, & quadrato HN, quod additum rectangulis LC, VE, & cæt. faciet magis, quam $\frac{1}{3}$ rectanguli PO.

TRAC-

TRACTATVS XXIX.

De Geodæſia Rectilineorum Planorum.

GEodæſia eſt pars Geometriæ admodum inſignis, & in vſibus humanis neceſſaria, quam apud Clauium lib. 6. Pediaſimus definit eſſe. Partitionem areę inter diuerſas perſonas; Verùm in ſuo Lexico Hyeronimus Vitali eruditiſſimus deſcribit Geodęſiam eſſe corporum quoq; dimenſionem per ſenſibiles menſuras. Sed quidquid ſit de ſignificatione nominis: nos eam vſurpamus pro ea parte Geometriæ, quæ ſuperficies rectilineas conſiderat, ſiue eas transformando, ſiue partiendo, ſiue menſurando; ſiquidem, ſi altera harum conſiderationum alteri deſit, mancha euadit, & imperfecta.

EXPENSIO I.

De figurarum planarum rectilinearum transformatione in æquales ſuperficies.

SVperficies rectilineæ planæ facilem inuicem ſubeunt transformationem, & non multo labore, licet, vel angulis, vel lateribus, tum quantitate, tum numero diſcrepantes, ſeruata ſemper æquali capacitate in alias ſecedunt.

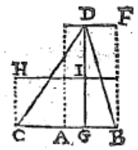
PROBL. I. PROPOS. I.

Aream cuiuſlibet trianguli in parallelogrammi aream transformare.

HOc efficitur ducendo perpendicularem ad baſim. Nam ſi ex dimidiata baſi CB, quæ eſt AB, & tota perpendiculari AD fiat rectangulum, vt eſt AF, hoc erit triangulo CDP æquales.

Probatur ex 41 prop. Elem. Nam ibi hoc docetur. Vnde non debemus repetere.

Id etiam operi mandatur diuidendo perpendicularem bifariam, & conſtituendo rectangulum BH, ex dimidiata perpendiculari, & tota baſi, hoc enim erit æquale triangulo CDB.



Probatur. Nam DGB triangulum ex 41 primi eſt æquale parallelogrammo IB ſuper dimidiatam baſim GD ad eandem altitudinem effecto: Sic eſt triangulum CGD æquale parallelogrammo GH; Ergo totum triangulum CDB toti parallelogrammo HB erit æquale.

COROLLARIVM.

HInc eſt aream ſimiliter parallelogrammi poſſe in triangulum transfundi, ſi ſuper duplam baſim ad eandem altitudinem triangulum fiat.

PROBL. II. PROPOS. II.

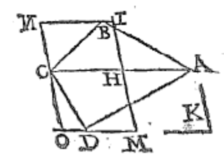
Aream cuiuſlibet trianguli, vel parallelogrammi in aream alterius trianguli, ſeu parallelogrammi transformare, quæ habeant angulum datum, & latus datum.

VIde propoſ. 43. lib. 1. Element.

PROBL. III. PROPOS. III.

Dato quadrilatero æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

HÆc operatio facilior eſt, quam ex Eucl. prop.



45.

45. l.1. Detur ABCD quadrilaterum, & ducatur diagonalis AC; detrunceturque bifariam in H, & ducatur MI faciens cum ipsa diagonali apud H angulum æqualem angulo K. & per verticem C ducatur parallela ON ipsi IM, sicut, & diagonali à vertice D, & B parallelæ IN, & MO; eritque parallelogrammum IMNO æquale quadrilatero ABCD.

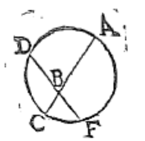
Probatur. Nam parallelogrammum HO est æquale triangulo ACD ex dictis in propos. 1. sic & parallelogrammum HN est æquale triangulo ABC ex eadem propos. quod sint inter easdem parallelas, & ideo ad eandem altitudinem, & super dimidiatam basim AC. Ergo & totum quadrilaterum ABCD toti parallelogrammo IMNO erit æquale.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Dato parallelogrammo supra datam rectam æquale parallegrammum constituere in dato angulo rectilineo.

*SIt datum parallelogrammum rectāgulū, quod cōtineatur rectis AB, & BC, dataque recta BD. Latera itaque parallelogrammi dati in vnam rectam redigantur, quæ sit AC, & à puncto B trahatur recta data DB, faciens cum AB, quemcumque angulum: Triumque punctorum ADC reperiatur centrum ex prop. 11. lib. 3. Elem. & fiat circulus per ea transiens ADC: deinde prolungetur DB in F, nam dico DB, & BF æquale rectangulum constituere ipsi ex BA, & BC constituto.

Probatur ex propos. 35. lib. 3. Eucl. Nam si in circulo duæ rectæ se mutuò secuerint, vt DF, & AC rectangulum comprehensum sub segmentis vnius AB, & BC æquale est rectangulo comprehenso sub segmentis alterius qualia sunt DB, & BF.



Si verò ex propos. 3. huic rectangulo constituamus æquale parallelogrammum in angulo dato habebimus id, quod propos. desiderat.

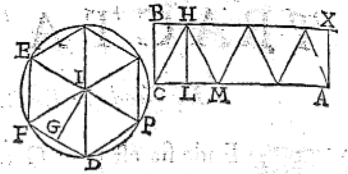
Idem quoque assequemur si tribus datis rectis ex 14. lib. 6. inueniatur quarta proportionalis, ita vt DB data sit prima. Nam ex prop. 18. erit rectangulum sub prima DB, & sub quarta inueta æquale rectangulo sub duabus medijs comprehenso.

PROBL. V. PROPOS. V.

Aream cuiuslibet figuræ regularis in æquale parallelogrammum redigere, seu etiam triangulum.

FIat parallelogrammum AB quod habeat AC æquale ambitui dimidio dati hexagoni V. g. cuius centrum I; aliud verò latus æquale perpendiculari IG in aliquod latus figuræ regularis cadente à centro I. Nam dico hoc parallelogrammum rectangulum æquale esse areæ hexagoni.

Probatur. Nam comprehendet tot triangula æqualia quot habet figura regularis: Latus enim AC rectanguli, cum sit dimidium ambitus PDFE substernet bases tres, vt MC, vnde dimidia LC erit æqualis FG dimidię FD æqualis basibus tribus PD, & cæt. linea vero LH perpendicularis est æqualis perpendiculari IG; Quare ex 1. h. triangulum LHC est æquale triangulo IGF: Horum verò triangulorum duodecim habet parallelogrammum, sic duodecim hexagonū. Vnde cū constent æqualibus numero, areaq; triangulis erunt æqualia.



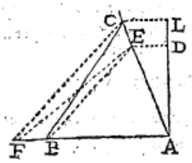
Si verò libeat habere triangulum æquale figurę datę dupletur basis AC, & fiat æqualis toti ambitui, & super eam fiat quodcumque triangulum contentum parallelis AC, & BX. Nam cùm hoc ex 1. propos. sit æquale rectangulo AB, erit etiam æquale hexagono I.

PRORL. VI. PROPOS. VI.

Datum triangulum, vel parallelogrammum in aliud æquale, sed vel maioris, vel minoris altitudinis transformare. Sicut & in aliud maioris, vel minoris basis.

SIt triangulum ABC, & illud oporteat reducere ad minorem altitudinem AD, ducatur DE parallela AB, & ducatur EB ad angulum B, cui parallela à vertice C agatur CF, & deinde ducatur FE: Dico triangulum AEF altitudinis datę esse ęquale triangulo ACB.

* Prob. autem. Quia ECB triangulum ablatum est æquale triangulo FBE, quod additur ipsi AEB, vtpote super eandem basim BE, & inter easdem parallelas EB, & CF. Vnde remanet adhuc æquale cum æquale sit, quod additur ei, quod aufertur.



Eodem modo poterit augeri in altitudinem. Nam si ponamus esse nobis exhibitum triangulum AEF, quod oporteat in altitudinem AL subleuare producatur AE, & ducatur parallela basi LC, & à puncto C, vbi secat latus AC ducatur ad F recta CF, cui à vertice dati trianguli E ducatur parallela EB, & vbi basim secat in B; ducatur BC. Nam dico hoc triangulum BCA in altitudinem AL subleuatum esse æquale triangulo exhibito AEF.

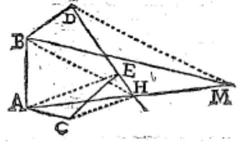
Probatur, vt antecedens praxis. Nec aliter maiori basi accommodabitur sit enim triangulum ACB, cui sit prolungāda basis vsq; ad F, cōiungatur FC, & à pūcto C ducatur lineæ CF, & ei parallela EB, à puncto B, deinde ducatur EF. Nam triangulum AEF super maiorem basim AF est æquale triangulo ACB, vt supra ostensum est. Et eadem operatio erit de diminutione basis. Eadem quoq; operatio erit de parallelogrammo, vt patet, cum sit duplum trianguli.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Dato rectilineo ad datum eius latus triangulum æquale constituere, seu parallelogrammum.

SIt datum rectilineum ABDEC, quod oporteat in triangulum transformare insistens super assignatum latus AB, è contra assignati lateris DE. Latus prolungetur ED in H, & ducta EA, ab angulo C ducatur ei parallela CH. Deinde ducatur AH. Quoniam enim triangulum ECA est super eandem basim AE, & inter easdem parallelas CH, & AE erit æquale triangulo AHE, & ideo quinquāgulum erit transformatum in quadrangulum HABD necessarium ad operationem faciendam.

In quadrangulo ergo HABD ducatur diagonalis HB, & prolungato latere AH, ab angulo D ducatur DM parallela diagonali prædictæ HB. & tandem ducatur MB, & erit factum triangulum AMB æquale, quinquāgulo ABCD super latus AB, quod vergit contra latus DE.



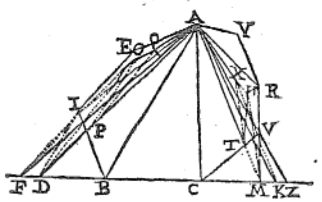
* probatur. Quia æquat quadrangulum HABD: siquidem spatium HAB est, tum triangulo, tum quadrilatero commune. Triangulum verò reliquum HMB trianguli AMB est ęquale triangulo HBD reliquo quadranguli; cùm super eandem basim HB existant, & in eandem basi parallelam MD terminent.

Sed quadrilaterum HABD est æquale quinquāgulo ECABD, vt dictum est; Ergo etiam triangulum AMB erit eidem æquale, quod triangulum ex dictis poterit conuerti in parallelogrammum habens latus AB, vt patet.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Multilineum quodcumque in æquale triangulum, seu parallelogrammum super datum latus insistens transfundere.

*SIt multilaterum quodcumque AEIBCVY, datūq; latus BC, super quod prolūgatum triangulū, & parallelogrāmū dato rectilineo æquale cōstituere oporteat. E regione electo angulo A ducatur AB, & AC, & lateri AB ducatur parallela ID ab angulo I: Deinde coniungatur DA. Nam triangulum ADB super eandē basim AB, & in eandē parallelā ID terminans erit æquale triangulo AIB. Transferatur triangulum IEA super rectam AD, & sit omninò ei æquale, & simile triangulum AOP. Deinde maioris basis DA fiat iuxta propos. 6. h. conseruando æqualitatem, & sit AQD, & à vertice Q ducta ad AD parallela QF, ducatur AF. Nam ob parallelismum, & eandem basim triangulum AFD erit triangulo AQD æquale, quod est triangulo POA, & consequenter triangulo IEA, quare triangulo IEA erit æquale quoque AFD; quapropter portio multilateri AEIB est æqualis triangulo FAD, & DAB simul; idest toti FAB: Idem erit efficiendum de alia portione.



Nam ducta ad latus AC parallela VM ab angulo V, transformabitur triangulum AVC in triangulum ACM ducta AM. Deinde super AM transferetur triangulum ARV, & erit ANT, quod extendetur ad occupandam totam basim AM, & erit AXM. Deinde ab X angulo ducta XK parallela ad basim AM, vbi secat in K ducatur AK, eritque triangulum AMK æquale triangulo AXM; quod æquatur triangulo ANT, & æquali, & simili triangulo ARV. Idem fiet de triangulo AYR transferetur enim super basim AK, faciendo ab A triangulum ei simile, & æquale. Deinde extendetur ad occupandam totam basim AK: & tandem in triangulum AKZ transformabitur. Iamque habebimus triangulum FAZ æquale multilatero AEBCVY, quod omnia triangula, quibus componitur omnibus triangulis, in quibus multilaterum distributum est, sint æqualia. Vnde iuxta regulas traditas poterit conuerti in ęquale parallelogrammum rectangulum.

PROBL. IX. PROPOS. IX.

Dato rectangulo æquale quadratum constituere.

HOc docuimus cum Euclid. propos. 14. lib. 2. cum rectilineum priùs in rectangulum. Deinde rectangulum in quadratum æquale transmutauimus.

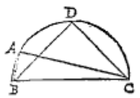
Potest etiam fieri inueniēdo inter duo latera rectanguli mediam proportionalem ex prop. 13. lib. 6. Nam quadratum huius mediæ est æquale rectangulo ab extremis contento ex propos. 17. lib. 6.

PROBL X. PROPOS. X.

Duobus quadratis inuicem inæqualibus simul sumptis inuenire duo alia quadrata simul sumpta æqualia, quæ etiam inuicem æquentur.

COnstituatur rectangulum ex duobus lateribus quadratorum inuicem inæqualium, ita vt duo latera maioris alterum. alterum minoris angulum rectum claudant, vt AB, & AC. Deinde nectantur extrema puncta basis BC: super verò basim BC cōstituatur āgulus rectus duobus cruribus æqualibus clausus, quod fiet diuidēdo BC bifariam, & facto ibi centro ducendo semi circulum BADC, & diuidendo bifariã in D, trahendoq; latera, & crura BD, & DC. Nam cum peripherias æquales BD, & DC subtendant erunt æqualia: angulus verò, vtpote in semicirculo erit rectus ex 23 lib 3.

Dico itaque quod quadrata laterum BD, & BC sunt æqualia duobus quadratis ex lateribus BA, & AC, nam sunt æqualia quadrato basis BC ex propos. 2. lib. 11. ergo, & inter se erunt æqualia.

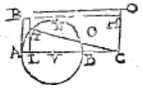


Possunt autem etiam inueniri inæqualia, vt per se patet, quod, & de rectangulis similibus valet ex 32. lib. 6.

PROBL. XI. PROPOS. XI.

Rectangulo dato alia rectangula reperire ei æqualia sub diuersa laterum quantitate.

SIt rectangulum comprehensum duobus rectis AC, & BC, velitque aliquis aliud rectangulum paulò breuioris lateris efficere iuxta mensurã datã; hæc super latus AC mẽsuretur, & sit CL, & diuiso bifariam segmento AB in V centro V ducatur circulus. Deinde centro C interuallo CI ducatur

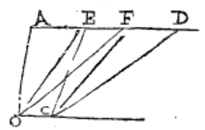


portio circuli LI, & vbi secat in L ducatur IC. Nam OC erit aliud latus, quod claudet rectangulum LO rectangulo CB æquale. Probatur ex Cor. 1. propos. 36. lib. 3 elem. hæc duo rectangula AH, ex AC, BC, & LO ex IC, CO esse æqualia, sicut & tangens circulum erit quadratum prędictis rectangulis æquale, si ex puncto C illum contingat.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Trapezia inter easdem parallelas constituta inter se sunt æqualia, dummodo sit æqualis altera alteri correspondenti eorum basis.

SIt trapezium OACE, & trapezium OFCD quorum bases AE, FD æquales sint, & O B eadem, vel æqualis. Dico hæc trapezia esse æqualia.



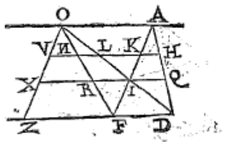
Probatur. Nam ex Cor. prop. 40. lib. 1. triangula habentia eandem basim, & inter easdem parallelas inter se sunt æqualia: quare triangula OFC, & OCE erunt ęqualia. Porrò triangula AEO, & FCD ob bases æquales AE, & FD erunt æqualia. Ergo trapezia quoque æqualibus triangulis constantia erunt æqualia.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

* *Triangula inter parallelas constituta, & basi eadem, si secentur parallelis lineis segmenta sunt æqualia.*

TRiangula DAF, & DOF sint inter parallelas AO, & DF constituta super eandem basim DF, & secentur parallela aliqua, vt HN. Dico *illa segmenta esse æqualia*.

Probatur. Triangula DAF, & DFO sunt æqualia ex propos. 40. lib. 1. Element. Propterea que ablata communi parte DIF triangula DIA, & FIO remanebunt ęqualia. Quare erit OI ad ID, vt AI ad IF ex prop. 11 lib. 6. Ideoque erit quoque *componendo* IO ad OD, vt AI ad AF; sed vt AI ad AF; ita se refert QI ad DF, & vt OI ad OD, sic IR ad DF. Quare QI ad DF, & IR ad DF eandem dicent proportionem OI ad OD, vel AI ad AF. Et ideo, cùm eidem DF eandem dicant proportionem duæ QI, & IR erunt ex propos. 9. l. 5. æquales.



In triangulo autem AIO, vt LO ad OI, sic AK ad KI. Est autem LO ad OI, sic LN ad IR, & vt AK ad AI, sic HK ad QI. Quare erit eadem proportio LN ad IR, quam HK ad QI: sed QI, & IR ostensæ sunt æquales; Ergo etiam HK, & LN ex 12. l. 5. Vnde patet, quod sint super ęquales bases triangula HAK, & LON, scilicet HK, & LN: vnde erunt ęqualia, sic triangula QAI, & ROI cũ sint super æquales bases QI, IR & inter parallelas erunt ęqualia. Vnde etiam residua trapezia IHKQ, & ILNQ erunt æqualia. Cùm ab æqualibus triangulis sint æqualium triangulorum residua.

COROLLARIVM.

HInc obiter patet triangula æqualis altitudinis, atque trapezia: ne dum consequi bases æquales, sed & omnes basibus ductas parallelas esse inuicem æquales: dummodo ad eandem altitudinem sint deductæ, quod etiam verificatur ne dum in triangulis eandem basem habentibus; sed, & ęqualem, vt per se patet.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Trapezia inter lineas proportionales constituta, & eiusdem altitudinis se habent inuicem, vt bases.

SInt in præced. fig. duo triangula æqualis altitudinis DAF, & DOZ; hęc ex 1. lib. 6. se habebunt ad inuicem, vt bases DF, ad DZ. Rursus triangula QAI, & IOX se habent ad inuicem, vt bases QI ad IX: nimirum DF ad DZ: Quadere cum sit totum DAF ad totum DOZ, vt ablatum QAI ab ablatum IOX, etiam reliquum trapezium DQIF erit ad reliquum trapezium DIXZ, vt totum DAF ad totum DOZ, scilicet, vt basis DF ad basim DZ, vel vt QI ad IX.

EXPENSIO II.

De casu perpendicularis, & ipsius quantitate.

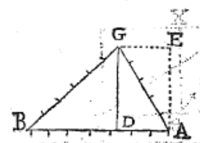
DOcuimus mediantibus tabulis quodlibet ex triangulis in duo triangula rectangula reducere in tr. 27. Trigonometrico, nunc sine tabulis idem docere oportet, & primo, in quod punctum subiectum baseos cadat perpendicularis, & deinde quantitatem ipsius perpendicularis, cùm id sit necessarium ad areas planas mensurandas per numeros, & maximè triangulorum.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Casum perpendicularis ex notis lateribus cùm cadit intra triangulum inuenire.

SIt triangulum AGB, in quo angulus G sit maior vtrolibet apud A aut apud B, habeamusque crura nota AB 7. planorum AG quinque & GB palmorum 6. Multiplicando singula latera in se fiant eorum quadrata, vt docuimus def. 1. Tract. 7. lib. 8. Eucl. nimirum lateris AB 49. cruris AG 25. & cruris GB 36. Adde deinde duo quadrata simul V. g. 25. & 49. fiet 74. subduc quadratum residuum 36. erunt post subtractionem 38. partire bifariam, & erunt 19. quem numerum partieris per numerum basis 7. & dabunt 2. & $\frac{5}{7}$ nimirum distantiam AD ab A, & punctum D, in quod à vertice G cadit perpendicularis.

Probatur nam ex prop. 13. lib. 2. quadratum BG minus est quadratis rectarum AG, & AB rectangulo bis comprehenso sub BA, & AD, quod cum ita sit sunt vnita, simul quadrata cruris AG 25. & basis AB 49. partium, & summa fuit 74. & subductum est quadratum rectę GB 36. & residuum fuit 38. nimirum duo rectangula singula contenta sub AB, & AD, vt ergo remaneat vnũ tantum rectangulum residuum 38. diuisum est bifariam, & remansit 19. & tandem, vt habeatur crus AD diuisum est 19. per latus AB 7. partium, vnde reliquum latus remansit, & segmentum, in quod cadit perpendicularis partium 2 & $\frac{5}{7}$.

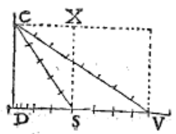


At si placeat reperire casum BD. Simul BA 49. & AG 36. quadrata vnito, vt fiat summa 85. subducto altero quadrato 25. residuum erit 60. pro duobus rectangulis sub AB, & BD contentis, diuisoque eo numero bifariam erit 30. vnum rectangulum, quod diuisum per crus AB 7. partium quotiens erit crus DB 4. partium, & $\frac{2}{7}$.

PROBL. II. PROP. XVI.

Casum perpendicularis ex notis cruribus cùm cadit extra triangulum reperire.

SI ergo sciamus perpendicularem extra triangulum cadere, eo quod in triangulo VSC angulus ad S sit obtusus, & V acutus, tunc vtemur propos. 12. lib. 2. Elem. in qua demonstratur cruris VC quadratum maius esse quadratis rectarum VS, & SC rectangulo bis comprehenso sub VS, & SC, ideo quadratum 25. cruris SC, & 16. quadratũ cruris VS in vnã summam redigantur, subducaturque à quadrato cruris VC 64. & erunt residuus numerus 23. duo rectangula contenta sub VS, & SD bifarientur, vt sint vnicum tantùm rectangulum erit 11 $\frac{1}{2}$, quod diuisum per latus VS 4. dabit 2. & $\frac{7}{8}$: pro latere SD.



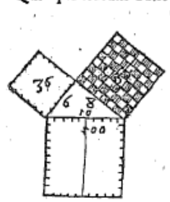
At si nesciamus: an cadat intra, vel extra, sed solùm nouerimus VC crus maximum, & latus SV, & SC; ideoque quia quadratum cruris SC, minus est quadratis rectarum VS, & VC rectangulo bis comprehenso sub VS, & segmentum ab V vsque ad illud punctum, in quod cadit perpendicularis ex 13 l. 2. Eucl. nondum notum, ideo quadratum SC 25 subduco à summa quadratorum reliquorum VS, & VC quadratorum 80. & residuum erit 55. duo nimirum rectangula: diuidatur, itaque numerus 55. per medium, vt vnicum rectangulum 27. $\frac{1}{2}$, quod diuidatur per latus VS 4. & prodibit alterum latus notum VD partium 6. $\frac{7}{8}$.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Ex notis cruribus duobus rectanguli alterum crus inuenire.

QVoniam per deductionem perpendicularis diuisimus triangulum quodlibet in duo rectangula, quorum habemus nota duo crura, vt in fig. anteced. VD, & VC, & possumus cognoscere tertium crus, nempe perpendicularem CD.

Quia quadratum basis subtensæ angulo recto ex 11. lib. 2. æquale est quadratis laterum: multiplicabimus palmos basis V. g. 10. palm. & fient 100. deinde lateris noti 8. palmorum, & fiet 64. quibus deductis à quadrato basis 100. erunt residua quadrata 36. à quibus extracta radix quadrata dabit 6. pro altero latere.



Sic si iam innotuerint ambo latera angulum rectum claudentia aliquo modo, & nesciamus basim; eadem ratione poterimus inuenire, nam quia quadratum basis angulo rectò subtensæ æquale est quadratis duobus laterum, si 6. multiplicetur in se,

& fiat quadratũ 36.& 8.& fiat quadratum 64. iuncta ſimul dabunt quadratum 100. palmorum à quo educta radix quadrata dabit 10. pro longitudine baſis angulo recto ſubtenſæ, vt vides.

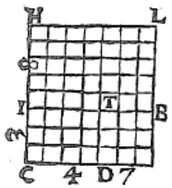
Si verò latera obtineant numeros fractos, vt in præc. latus VD eſt 6. $\frac{7}{8}$ omnes tũ huius, tum alterius lateris partes in eaſdẽ minutias proijci debẽt, & ſic latus VC erit par.64.& quadratũ 4096. (nam quilibet palmus diuiſus ſupponitur in 8. partes cumque ſint palmi 8.dant 64. partes,) & latus VD erit partium octauarum 48. & addita minutia $\frac{7}{8}$ erit 55. & quadratum 4025. quo à priori deducto prodibit quadratum perpendicularis CD partium 1071. à quo educta radix quadrata dabit partes 32. $\frac{1}{3}$, & paulò ampliùs pro perpendiculari DC. Perpendicularis verò DC alterius trianguli eodem computo facto erit par. 4. & $\frac{3}{7}$.

EXPENSIO III.

De areis triangulorum, omniumque aliarum figurarum rectilinearum menſurandis.

LInea recta menſuratur, cùm tot rectas lineas continet equales. Et non alia ratione ſuperficies menſuratur, cum continet tot minores ſuperficies inuicem æquales: ſed quia non omnes ſuperficies ſpatium implent, & ſuperficiem omninò occupant, vt circuli, ideo adhibenda fuit menſura, quę ſuperficiem menſurandam multiplicata omninò poſſet occupare, & eam totam operire, ne quid extra menſuram remaneret. Hæc autem fuit rectangulum, quod multiplicatum poteſt omnes figuras rectangulas, rectilineas omninò tegere, & occupare. Quà de re alias figuras, vt menſurationi ſubijcerentur oportuit ad rectangulas reducere, quod hic agimus reducendo triangula ad rectangulas ſuperficies, vt certę menſurationi numeris exprimibili ſubiaceant.

In confeſſis eſt autem rectanguli, cuius ſint nota latera, etiam areã ſtatim prodire, ex multiplicatione laterum inuicem; ſic ſi ſit notum latus HL eſſe 7.palmorum,& HC 8. palmorum ex multiplicatione mutua fit area 56. palmorum quadratorum, vt diximus l.2.p.3.Cor. & ſic ſi area ſit nota rectanguli 56. palmorum,

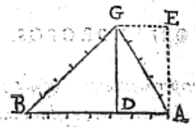


& latus alterum 7. ſtatim innoteſcet per diuiſionẽ alterum latus, & ſic, ſi 56. diuidatur per 7. fiunt 8. palmi pro latere HC. In quadratis verò idem aſſequemur per extractionem radicis quadratę; ſic, ſi à numero 25. educatur radix quadrata prodibit latus palmorum 5. quod & verificatur de partibus, vt ſi aſſumantur partes CI 3. & CD 4. laterum CH & HL, fiet area CT 12. palmorum quadratorum.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Aream cuiuſlibet trianguli inuenire, cùm perpendicularis intra triangulum cadit.

SVpponimus hìc omnia latera trianguli nota, vel quod mẽſurari potuerint, vel quod ex doctrina ſinuum, ſecantium, atque tangentium potuerint inueniri, ideoque ex Expenſ. præced. notam quoque perpendicularem, & punctum, in quod cadit, & conſequenter redactum triangulum, vel ad vnum, vel ad duo triangula rectangula, & ideo quoq; notã eſſe altitudinẽ, eorũ quam perpendicularis dimetitur, & quia ex propoſ.40. lib.1. parallelogrammum eiuſdem baſis, & eiuſdem altitudinis eſt duplum trianguli, ideo ex crure AD 2. & $\frac{1}{7}$,

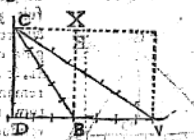


vel 19. partium, & perpendiculari DG 4. & $\frac{1}{7}$, vel 29. quæ crura angulum rectum ambiunt, fiat rectangulum AGDE 551. multiplicatione mutua quadratorum paruorum: nam medietas huius rectanguli 275 $\frac{1}{2}$ erit area AGD, idem fiat de alio rectangulo GDB; nam multiplicato latere DB part. 30. cum latere DG part.29. prodibit rectangulum 870. cuius medietas erit 435. area trianguli DGB.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Aream triangulorum, cùm perpendicularis extra triangulum cadit inuenire.

EX noto latere AD part.6. & $\frac{7}{8}$, ideſt minutiarum 55. & perpendiculari CD 32 $\frac{1}{2}$ fiat rectangulum VC mutua numerorum multiplicatione quadratis paruis conſtans 1787 $\frac{1}{2}$, quorum medietas erit triangulum VCD 893 $\frac{3}{4}$. Rurſus ex ſeg-



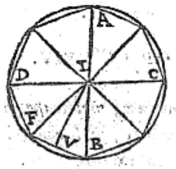
mento BD part.23. & perpendiculari DC part.32. $\frac{1}{2}$, fiat rectangulum DX part.747. $\frac{1}{2}$, & medietas 373. $\frac{3}{4}$ erit triangulum BCD, quod auferendum eſt à triangulo VCD part. 893 $\frac{3}{4}$, & reſiduum erit area trianguli BVC part. 520.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Aream cuiuſcumque figuræ regularis inuenire.

SIt octogonum CADB, cuius latus BF iam notum ſit ex ijs, quæ de lineis circulo inſcriptis diximus,

mus, vel ex tabulis ſinuum 765. radio IF 1000. partium præſuppoſito. Itaque poterit diuidi, & reſolui tota figura in 8 triangula iſoſcela, & hæc in 16. triangula rectangula ducta perpendiculari VI ad mediũ FV lateris FB octogoni, cumq; habeas notum caſum perpendicularis, nempe ad medietatem lateris BF part. 382 $\frac{1}{2}$, & crus IF 1000. inuenies ex prop. 17. perpẽdicularem VI partium 924. hincque efficies rectangulum 353430. cuius medietas erit 176715. triangulum IVF, & quia 16. triangula totam figuram complent, ideo ſi multiplices prædictum numerum per 16. totam aream octogoni obtinebis part. 1827440. Idemque efficies in omnibus alijs figuris regularibus, omnes enim in triangula æquicrura, & deinde in rectangula diſtribui poterunt, ex quorum notis areis tota area figuræ in palàm erit.

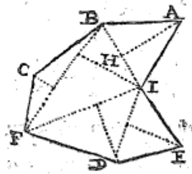


PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Aream figuræ rectilineæ irregularis non triangularis inuenire.

REſolues totam figuram in tot triangula, eaque in rectangula transformabis, rectangulorumque ſingulorum exquires aream, quas deinde areas in vnam ſummam colliges, & illa erit area figuræ irregularis.

V. g. ſit data figura rectilinea irregularis ABCFDEI. Ductis lineis BI, & IF, & ID, deinde BF erit redacta figura in tot triangula, de quorum lateribus præſuppono cognitionem te habere, vel menſura, vel ex tabulis. De ſingulis itaque triangulis ex prop. 15. vel 16. h. caſum perpẽdicularis, vt HA & hinc ex pr.18. vel 19. h. aream HBA; & ſic ages de area IHB, & de alijs, quas omnes areas, vt inueneris, in vnam ſummam rediges, totamque aream totius figuræ irregularis propoſitæ conſequeris.



PROBL. V. PROP. XXII.

Aream figuræ tum regularis rectilineæ, tum irregularis geometricæ inuenire.

ID exequeris, ſi eam redigas in quadratum ęquale; nam illius quadrati area erit, & figuræ propoſitæ, vt autem id fiat, oſtendemus infra cum de figurarum transformatione agemus.

EXPENSIO IV.

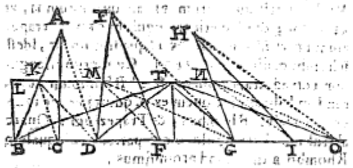
De augmento, & partitione trianguli.

DVplici modo quælibet fig. diuidi poteſt, vel ex pũcto in eius latere, vel in medio dato in triangula, vel per parallelas vni lateri dato, in trapezia, vel in quid ſimile, licet enim poſſit diuidi etiam ex puncto, extra dato, iſte tamen modus diuidendi conuenit triangulo, conuenit etiam parallelogrammo, ſed vniuerſalis non eſt. Figuræ autem diuidendæ, vel augendę, vel ſunt multilaterę, vel ſunt triangula, vel ſunt parallelogramma, ſed vt à facilioribus exordiamus, incipiemus à triangulis.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Triangulum datæ altitudinis ex multis triangulis diuerſæ altitudinis coagmentatum conſtruere.

SIt triangulum BAC, DEF, & GHI, quæ in triangulum altitudinis BL reducenda ſint. Ducta BI indefinita, & huic BL perpendiculari; triangulum BAC redigatur ad triangulum BKD datę altitudinis ex prædictis de transform. fig pr.6.h. apud quem ſuper eandem lineã conſtituatur triangulum DEF, & redigatur in triangulum æquale eiuſdem altitudinis DMG, & à puncto G erigatur



tertium triangulum GHI, & redigatur in triangulũ eiuſdem altitudinis GNO. Ductis deinde rectis BT, DT, TG, & TO erunt tria triangula tribus ob baſim eandẽ, & æqualẽ altitudinẽ, æqualia nempe BDT triangulo BKD, & ideo quoque triangulo æquali ex conſtruct. BAC: triangulũ DTG item eſt æquale triang. DMG, & ideo triangulo DEF: at triangulum GTO triangulo GNO, & conſequenter triangulo GHI. Habemus itaque triangulum BTO coagmentatum ex tribus BAC, DEF, & GHI.

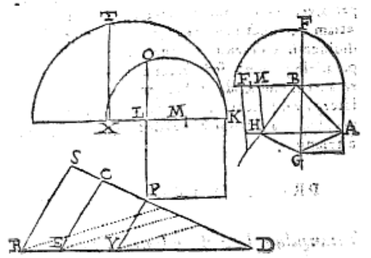
PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Triangulo datam partem addere, vel auferre eadem figura manente.

SIt primo data pars, nempe area æqualis rhombo ABGH à triangulo, quod debet eſſe maius, CDE auferenda. Triangulo CED fiat æquale quadratum PK, priùs *conuertendo* in rectangulum; inde in quadratum ex propoſ. 14. lib. 2. Elem. idemque fiat de rhombo ABGH, & ſit quadratũ ex BF. Dein-

de

de duobus lateribus quadratorum KL, & BF inueniatur tertia proportionalis B, quæ transferatur in latus KL, & fit LM, intercipiens residuum KM, & totũ latus KL media proportionalis inueniatur LO. Inueniaturque deinde rectis KL, & LO, & DE lateri trianguli quarta proportionalis DV, ita quòd fit, vt KL ad LO, ita DE ad CV, & à puncto V ducatur parallela lateri CE. Dico *triangulo* CED *ablatum esse trapezium* EP *Rhombo* ABGH *æquale*.



Probatur triangulum DEC ad triangulum DVP duplicatam habet laterum rationem ex 19. sexti, nempe lateris DE ad latus DV, quæ ex constructione eadẽ proportio est, quæ reperitur inter OL, & KL: At OL, KL, & KM sunt cõtinuè proportionales; ex effect. quare eadem quoq; proportione respiciet KL rectam KM, qua triangulum DCE alterum minus DPV. Et per *conuersionem rationis*, ita erit quoque triangulum DEC ad Trapezium EP, quò superat triangulum DPV, vt KL ad LM; quo superat lineam KM. Fecimus autem LM tertiam proportionalem inter duo latera LK, & BF quadratorum. Vnde ita erit quadratum PK ad quadratum BF, vt KL ad LM; & ideo erit triangulum CED ad trapezium EP, vt sibi æquale PK ad quadratum BF, idest Rhombum sibi æquale ABGH. Cum ergo triangulum ECD ad trapezium EP, & ad Rhombum ABGH, eandem habeant rationem ex 9. quinti, erunt inuicem æquales Rhombus, & Trapezium. Quare abstulimus à triangulo DCE partem EP æqualem Rhombo BAHG, quod promisimus.

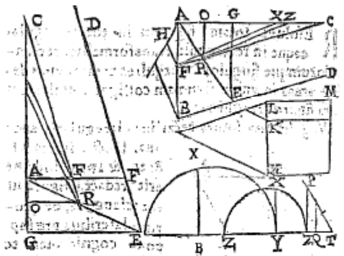
Si verò sit addendum hoc idem fiet: nisi quod LM ipsa media proportionalis inter latera quadratorum KL, & BF adiungatur ipsi lateri maioris quadrati, vt sit tota KX, & inter hãc, & latus KL, reperietur media proportionalis XT: deinde fiet, vt XT ad KX, ita ED ad aliud, & prodibit DR, pro portionalis: Ducta verò RS parallela ad CE erit additum triangulo, trapezium RC, quòd cum ipso integrat triangulum RSD eiusdem rationis.

Probatur autem eadem ratione, Nam triangulum RSD est ad triangulum CED in duplicata ratione basis DR ad basim DE: hæc autem proportio basis ad basim, est eadem ex constr. *inuert.* quæ lineæ XK ad mediam XT, quæ est duplicata eius, quam habet eadem KX ad latus quadrati KL (siquidem media proportionalis mediat XT) & ideo XX ad KL latus habet eandem proportionem duplicatam, vt habet triangulum DRS ad DCE triangulum. Quare poterimus vti *diuisione rationis*, & dicere, quod triangulum CED erit ad trapezium SE, quo triangulum maius superet minus, vt LK latus ad residuum LX, quo linea KX superat LK. Hæc verò linea X, seu LM est BN tertia proportionalis lateri KL, & BF, ita ꝙ sit, vt KL, & BP, ita BF ad BN: Vnde & quadrata dicent eandem proportionem ex Cor. prop. 21. lib. 6. & ita erit quadratum KP ad quadratum ex BF, vt KL, & LX, & ideo, vt triangulum CED æquale quadrato PK ad trapezium RC. Cum itaque ad trapezium RC, & ad quadratum ex BF Rhombo æquale eandem dicat proportionem triangulum CED ex 9. lib. 5. erunt æquales inuicem trapezium RC, & ex BF quadratum; & ideo etiam Rhombus BHAG. Vnde Rhombo æqualis pars, triangulo addita est, quod est promissum.

PROBL. III. PROPOS. XXIV.

Triangulo, cui deficiat vertex, vel trapezio destinatam partem addere, vel auferre trahendo parallelam vni ex lateribus.

Sit triangulum AFC, vel Trapezium ABCD, cui parallelà EG lateri BA sit auferenda pars æqualis quadrato NM, quod sit minus toto triangulo ABC. Ducatur CF parallela lateri BD, quæ faciat triangulum AFC: Deinde cruri AB, & lateri AF inueniatur tertia proportionalis HA, vt vides factum in triangulo BHA: Duabus verò AB, HA, & lateri LN quadrati NM, inueniatur quarta proportionalis LK, ex quà fiat rectangulum KM. Quod dico esse ad quadratum MN, vt triangulum AFC ad triangulum BACD: si esset perfectum.



Probatur, Nam ita est EACD triangulum imperfectum ad AFC triangulum; vt BA ad HA ex Cor. p. 21. l. 6. cùm sit HA tertia proportionalis; vt autem BA ad AH; ita est NL ad LK ex effectione, & quia sunt eiusdem altitudinis, ex 1. lib. 6. Elem. ita est NM quadratum ad KM rectangulum, quòd, cùm ita sit, si auferamus partem æqualem rectangulo KI à triangulo AFC ex documentis antecedpropositionis, quæ sit OF ducta parallela RO lateri BA (inueniendo priùs quadratum ex ZT æquale rectangulo KM, & quadratum ex TP æquale triangulo AFC, & illis duobus lateribus inueniendo tertiã proportionalem TQ, & residui ex QT lateris TP, & ipsius TP mediã proportionalẽ XY, & tandem tribus TP, YX, & cruri CA quartam proportionalẽ CR.) Cum itaq; repertum sit trapeziũ FO æquale rectangulo MK reperiatur illi trapezium simile, similiterque positum, ad quod illud se habeat, vt rectangulum MK ad quadratum MN; quod fiet ducta diagonali AR, vsque ad E, & ducta EG ex E parallela RO, vel BA. Eritque AE trapezium pars ablata æqualis quadrato MN à triangulo imperfecto AICD.

Probatur, Nam, cùm sint inter parallelas consequenter erunt similia, similiterque posita, cùm & habeant latera proportionalia ex Coroll. prop. 23. lib. 6.

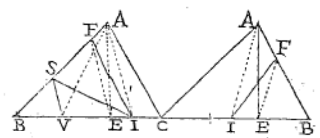
23. lib. 6. & sit AF ad FR, vt AB ad BE. Quare erit trapezium AE ad trapezium OF, vt AB ad AH, Sed ex effectione AB ad AH est, vt NL ad LK, & ideo ex 1. lib. 6. elem. vt MN quadratum ad rectangulum KM. Sed Trapezium OF est æquale rectangulo MK ex effectione. Ergo & trapezium AE erit æquale quadrato MN ex 12. lib. 5.

Idem prorsus agẽdum, si de additione sermo sit: nisi, quòd quadratum MN nõ interest an sit minus: sed potest esse maius. Nam primò inuenitur tertia proportionalis AH duabus AB, & FA. Deinde tribus AB, AH, & LN, quarta LK, super quam, & LM formatur rectangulum MK. Et deinde ex documentis propositionis antecedentis vbi agitur de additione, addatur trapezium AB habens RO parallelum latus lineæ AF (primò inueniendo quadratum TZ rectangulo MK æquale, & quadratum TP triangulo AFC. Deinde reperiendo lateribus eorum tertiam proportionalem QT; duabus verò QT, & PT simul, & ipsi PT mediam proportionalem XS. Postea tribus XS soli PT, & TQ tamquã vna, & CF, quartam proportionalem CR, à quo puncto ducta RO dabit trapezium OF quæsitum) ducta autẽ AR vsq; ad DE ab E puncto ducatur parallela EG cruri AF, & dabit trapezium AE æquale quadrato MN, vt AB ex effectione est æquale rectangulo MK.

PROBL. IV. PROPOS. XXV.

Triangulum iuxta proportionem datam diuidere per lineas ab vno puncto in eius latere dato discedentes.

Sit triangulum ABC, quod oporteat diuidere secundùm proportionem datam V. g. in tres partes à puncto in eius latere dato. Diuidatur basis BC in tres partes, & tertia pars sit CE, vel ergo punctum datum cadit in E, ex qua diuidendum est triangulum, & ducta AE erit triangulum CAE, vel BAE in dextro triangulo tertia pars, cum sit ve basis ad basim, ita triangulum ad triangulum ex 1. lib. 6. Vel cadit in I, vel hinc, vel inde extra E punctum, & ducatur IA: cui parallela fiat FE; connectaturque IF. Dico trapezium CIAF in sinistro, vel triangulum FIB in dextro triangulo esse tertiam partem trianguli BAC dati.



Probatur. Quia spatium BFE est commune. Triangulum verò FAE est æquale triangulo FEI, cùm sit inter easdem parallelas, & super eandem basim FE: Ideo communi spatio BFE additum est addendo triangulum EFI quantum ablatum est, auferendo triangulum FAE. Propter hoc erit adhuc æquale BAE, & BFI: Sed BAE est tertia pars totius trianguli, cum se habeat ad totum triangulum, vt basis EB, quæ est tertia pars ad basim BC. Ergo, & triangulum BFI erit totius trianguli tertia pars.

Idem dicendũ est de sinistro triangulo, vbi triãgulum CIA est commune, & triangulum IAE est æquale triangulo AIF. Vnde trapezium AICF erit æquale triangulo CAE. Quod si alia tertia pars desideretur; Ipsi AI ad V tertia parte ducatur parallela VS, & ab S ad I ducatur recta; eritque triangulum ISB æquale triangulo VAB, consequenter tertia pars totius trianguli CAB siquidem PSV est spatium commune, & SAV, & SVI æqualia ob eandem basim, & parallelas SV, AI.

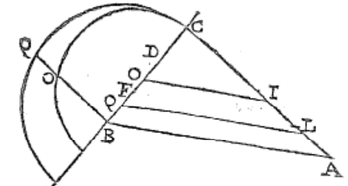
COROLLARIVM.

Qvare deducitur, quòd si punctum I coniungatur cum vertice A, & lineæ connectenti IA ducantur parallelæ FE, & VS à partibus basis CE, & EV, & VB. & vbi secant latera angulum oppositum comprehendentia, ad ea puncta à puncto dato rectè ducantur, vt IS, IF, illæ diuident triangulum in tot partes, in quot basis diuisa est.

THEOR. V. PROPOS. XXVI.

Triangulum in partes assignatas secare lineis vni lateri parallelis.

Sit triangulum ABC diuidendum in tres partes per parallelas vni lateri V. g. lateri AB,



Diuidatur alterum latus CB in tres partes, & Inter quaslibet, & totam V. g. inter CD, & CB inueniatur media proportionalis BO, & rursus inter CF, & CB media proportionalis BQ, transferanturque à puncto C in latus CB, & fint CO, & CQ; à punctisque O, & Q parallelæ ad basim AB ducantur. Nam illæ secabunt totum triangulum in tres partes æquales.

Probatur. Nam ex Cor. prop. 21. lib. 6. elem. poligonum ad polygonum simile est in duplicata ratione laterum homologorum, & ideo erit, vt CB ad CD; ita triangulum CAB ad triangulum ICO; siquidem, & CB ad CD habet duplicatam rationem eius, quàm BC, ad CO ex effect. sed CB habet proportionem ad CD, quam 3. ad 1. ex constructione. Quare CAB triangulum totum ad ICO triangulum se habebit, vt 3. ad 1. vnde triangulum ICO erit $\frac{1}{3}$ trianguli CAB.

Idem dicas de triangulo CLQ. Nam triangulum totum CAB ad CLQ duplicatam laterum CB ad CQ possidet rationem, quam quoque possidet CB ad CF; quare cum CB tota sit ad CF vt 3. ad 2. Triangulum quoque ACB totum erit ad triangulum LCQ, vt 3, ad 2. & ideo LCQ erit $\frac{2}{3}$ trianguli CAB. Ablato ergo ICO, de quo ostendimus esse tertiam partem totius, residuum LOQI trapezium, erit tertia pars totius CAB.

EXPENSIO V.

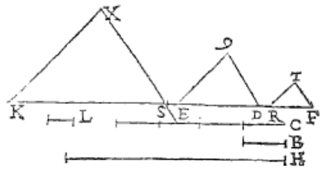
De quocumque rectilineo augendo, vel partiendo in plana rectilinea data similia.

TRiangula in diuersas partes diduximus modo vniuersaliùs est instituenda speculatio, & ad omnes figuras planas extendenda, ad quam additum aperuit ipsa triangulorum multiplicata partitio.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Dato rectilineo construere rectilineum simile, & similiter positum maius, aut minus secundùm proportionem datam.

SIt rectilineum datum DQE, quòd debeat fieri quadruplo maius: sed tali modo; vt simile sit id quod componitur rectilineo præcedenti dato, & similiter positum.



Sit linea C quadruplo maior, quam B: lateri verò EF rectilinei dati DQE inueniatur quarta proportionalis maior, vel minor, prout volumus augere, vel minuere, ita quod si augendum sit, vt B est ad C, ita fiat DE, ad H, si minuere, vt C ad B, ita fiat DE ad L: deinde inter istas reperiantur mediæ proportionales KS, vel FR. Nam Triangulum SXK ex 23. lib. 6. constitutum super SK simile similiterque positum, vt EQD erit triangulum quadruplo maius, & FTR constitutum super RF quadruplo minus.

Probatur. Quia ex Cor. pr. 21. l. 6. ita est triangulum super KS ad triangulum super DE, vt H ad DF: cum vtrobique sit duplicata proportio. Sed H est ad DE ex effectione, vt C ad B, nempe quadrupla. Ergo & H ad DE quadrupla erit. Vnde triangulum super SK ad triãgulum super DE quadruplam quoque habebit proportionem.

Idem asserendum de triangulo super RF, vt per se patet.

PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

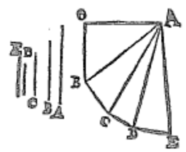
Datis pluribus rectilineis, ea in vnicum rectilineum conglobare:

SI rectilinea sint dissimilia, diuersæque positionis, ea redigantur in similia, similiterque posita triangula, quadrata, seu parallelogramma, vel ad quãcumq; aliam figuram eiusdem rationis, sed melius erit ad prædictas figuras facilitatis gratia.

Sint V. g. quinq; quadrata, quę super latera A, B, C, D, E sint cõstituta, vel quinq; parallelogrãma, vel triãgula quorũ latera homologa sint, sintq; primi latera A, & B angulũ rectũ O claudẽtia, subtẽdaturq; basis AB, iterumque super basim hanc BA erigatur ad rectos angulos C linea tertia à puncto B, & coniungatur basi secundâ AC angulo recto B subtensa. Sicque fiat rursus de linea D erigendo eam perpendiculariter super CA, & coniungendo basi tertia DA, & tandem idem fiat de linea E.

Dico quadratum, seu parallelogrammum ex EA simile, similiterque prædictis positum esse æquale omnibus alijs parallelogrammis similibus positis similiter, seu quadratis.

Probatur. Nam quoad quadrata ex 11. l. 2. elem. quoad parallelogrãma, seu alias figuras ex 32. lib. 6. rectilineum factum ex BA basi est æquale duobus similibus, & similiter positis ex BO, & OA factis: huic vero ex AB, & ex BC est æquale rectilineum CA similiter positum, &

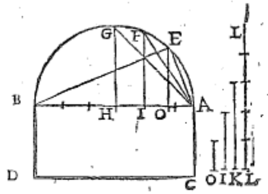


simile prædictis, huic autem CA, & alteri CD est æquale rectilineum ex AD, & tandem huic postremo, & rectilineo DE est æquale rectilineum EA simile, similiterque positum. vnde rectilineum ex EA est æquale omnibus similibus, & similiter positis, ex E, D, C, B, A, siquidẽ ęquat rectilineum ex DA, quæ omnia comprehendit excepto rectilineo ex DE, & ipsum rectilineum ex DE.

PROBL. III. PROPOS. XXIX.

* *Vnicum rectilineum in plura rectilinea partiri, secundùm proportionem datam, manente eadem figura, & positione.*

SIt rectilineum ABCD, ex quo oporteat fieri plura V. g. tria rectilinea similia, similiterque posita; sed iuxta proportionem, quam habent K, I, & O lineæ, Ita quòd vnum sit $\frac{1}{2}$ aliud $\frac{1}{3}$ aliud $\frac{1}{6}$ totius rectanguli, & se excedant inuicem, vt lineę K, I, & O. Ex lineis K, & O componatur vnica linea L, diuidaturque ex 10. lib. 6. Elem. AB in easdem partes, ac L diuisa est, & sint HA similis lineę H linea AI similis lineę I, & AO similis lineę O. Quo facto à diuisionibus erigantur perpendiculares ED, & IF, & HG; & connectantur super AB facto semicirculo pũcta, quibus secatur rectis AB, AF, & AG. Dico rectilinea tria similia, similiterque posita super tres AE, AF, & AG æquare rectilineum ABCD.

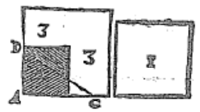


Probatur. Rectilineum ex AE ad illud ex EB habet

habet duplicatam suorum laterum proportionem nempe AE, & EB, sed hæc ob similitudinem triangulorum est eadem, quæ AO, ad EO. Vnde habebunt rectangula ex EA ad EB duplicatam proportionem AO ad OE. Sed hæc est duplicata proportionis AO ad OB, cum sint tres proportionales continuę AO, & OE, & OB ex propos. 16. lib. 6. Elem. Ergo AO ad OB erit eadem, ac rectilinei super AE ad rectilineum super EB. Ergo *componendo* ita erit AO ad AO, & OB, vt AE rectilineum ad duo rectilinea simul AE, & EB, quæ sunt æqualia ex 32. lib. 6. Elem rectilineo ABCD, quamobrem, cum AO sit ad AB; vt O ad L; nempe $\frac{1}{2}$ tale etiam erit rectilineum AE ad AD. Eadem ratio erit de rectilineo super AF, & de rectilineo super AG; sed AO, & AI, & AH; simul æquant lineam AB. Ergo, & tria rectilinea simul ex AE, AF, & ex AG æquabunt totum rectilineum ACED.

COROLLARIVM.

EX istis duabus propositionibus postremis eruitur, quomodo dato rectilineo addatur talis pars, quę libuerit, & tamen remaneat simile, similiterque positum, vt priùs, aut dematur ipsi. Et si loquamur de additione detur quadratum I, & quadratum 2. nigrum oporteatque quadrato 2. addere tantum, quod æquiualeat quadrato I. Accipe mensuram lateris quadrati I, & productum vnum ex lateribus quadrati 2. nigri sit æquale ipsi lateri quadrati I ab A vsque ad C, coniungeque DC nimirum ex duobus lateribus quadrati I, & quadrati 2. fiat angulus rectus ad A, ducaturque basis DC.



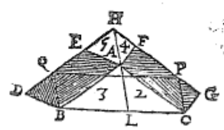
Nam quadratum, cuius latus DC quale est 2.3.3. est ęquale, vt patet ex 11. lib. 2. quadrato nigro 2. & I. quod idem erit de quocumque alio rectilineo ex prop. 32. l. 6. Si verò loquamur de ablatione, cum iam pr. 23. l. 6. notum sit quomodo fiat rectilineum simile, similiterque positum, quod æquale sit datæ parti alterius parallelogrammi, quale est parallelogrammum ex AE $\frac{1}{6}$ parallelogrammi ABCD clarum est, quod parallelogrammum ex EB simile, similiterque positum, quod cum ipso ex AE est æquale ipsi ABCD, deficiet ab eo $\frac{1}{6}$ nempe parallelogrammo ex AE vt fig. pręc. prop.

PROBL. V. PROPOS. XXX.

Dato parallelogrammo dissimili illud augere vel minuere addendo ei aliud parallelogrammum quodcumque:

SIt datum nigrum parallelogrammum CF, & aliud, cui addere oportet BE. Coniungantur eorum latera CA, & AB ad quemcumque angulum apud A, & producantur GF, & DE vsque dum conueniant in H, & per H, & A agatur HL, & terminet in CB lineam coniungentem latera CA, & AB, ipsi LH ducantur parallelæ CP, & BQ, & coniungantur P, & Q, & parallelogrammum PQ erit ęquale duobus CF, & BE nigris.

Probatur I, quod sit parallelogrammum: Nam HA, & CP inter parallelas CA, & GH parallelæ ex 33. lib. I. erunt æquales, sic BQ, & AH parallelæ inter parallelas AB, & DH æquales erunt. Ergo etiã inter se erunt æquales, & parallelæ ex 31. l. I. quare ex 34. lib. I. BP erit parallelogrammum. Quod verò sit æquale parallelogrammis nigris, patet.

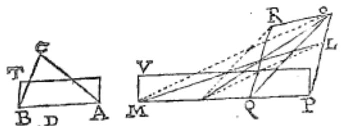


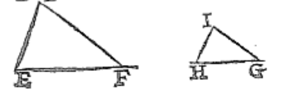
Nam ex 36. lib. I. LP, & CH parallelogrammi super eandem basim CP, interque parallelas CP, & LH sunt ęqualia, sic nigrum CF, & CPAH parallelogramma super basim CA, & inter parallelas GH, & CA æquantur, ergo nigrum parallelogrammum CF, & PL tertio CPAH æqualia inuicem æquabuntur. Sic parallelogrammũ LQ æquale est tertio BAHQ ob basim BQ eandem, & parallelas HL, & BQ, cui equatur ob basim AB eandem, & parallelas AB, & DH nigrum BE: quare nigrum BE æquabitur ipsi LQ, vnde LP, & LQ, Idest BP parallelogrammum ęquabitur duobus nigris CF, & BE.

PROB. VI. PROPOS. XXXI.

Duobus datis rectilineis tertium proportionale inuenire simile, similiterque positum, sicut vnum ex datis.

SIt rectilineum OPQR, & rectilineum ACB, & illi OPQR inuenire oporteat planum tertium proportionale simile, similiterque positum, ac rectilineum ACB. Redigatur trapezium ORQP in ęquale rectilineum, sed simile, similiterque positum





rectilineo ACB, quod ex prop. 27. lib. 6. Elem. fiet redigendo priùs in æquale sibi triangulum, & postea hoc triangulum ad eandem altitudinem deprimendo ex prop. 6. huius. & tandem in parallelogrammum PV eiusdem altitudinis, ac AT. Nam media proportionalis inter latera MV, & MP inuenta ex 16. lib. 6. erit illa, super quam efficiendum est triangulum simile, similiterq; positum, ac ACB ex 27. lib. 6. æquale trapezio ROPQ, quod triangulum erit DBF. Inueniatur itaque lateribus AB, & FE tertia proportionalis GH, & super eam constituatur rectilineum simile, similiterque positum, ac ACB ex 23. lib. 6. & erit tertium proportionale duobus rectilineis trapezio, & triangulo simile, similiterque positum vni ex ipsis, nempe triangulo, & ita erit FED triangulum, vel PROQ equale trapezium

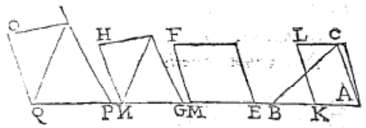
pezium ad ABC triangulum, vt idem ABC ad GHI ſimile ipſi ACB.

Probatur. Quia latera ſunt proportionalia, & ita eſt FE ad AB, vt AB ad GH, ergo ex 26. lib.6.El. ipſa quoque rectilinea erunt proportionalia cum ſint ſimilia, ſimiliterque poſita; ſed trapezium eſt æquale triangulo DFE. Ergo trapezium quoque eſt prædictis triangulis proportionale.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

Tribus datis rectilineis quartum proportionale inuenire, quod ſit ſimile, ſimiliterque poſitum, ſi placet, vni ex datis rectilineis.

SInt data tria rectilinea, ABC triangulum, ER parallelogrammum, & GH trapezium, & oporteat trapezio ſimile, ſimiliterque poſitum quartum proportionale inuenire, ita quod ſit vt triangulum ad parallelogrammum, ita trapezium ad aliud trapezium. Rectilineo ACB V.g. conſtruatur æquale rectilineum, ſed ſimile, ſimiliterque poſitum, ac rectilineũ EF ex 27.l.6., quod ſit AL. Deinde tribus lateribus AK, EM, & GN inueniatur quarta proportionalis PQ ſuperquam conſtruatur trapezium ſimile, ſimiliterque poſitum, ac rectilineum GH ex propoſ.23 lib.6. Elem. Dico ita eſſe rectilineum AL, ſeu ACA ad rectilineum EF, vt GH ad PO.



Probatur ex eadem propoſ.26 lib.6. Elem. Nam ita ſunt rectilinea ſimilia, ſimiliterque poſita, vt ſunt latera inuicem. Quare cum AK ſit ad EM, vt GN ad PQ erit etiam AL rectilineum, vel æquale ACB ad EF, vt GH ad PO trapezia.

PROBL. VI PROPOS. XXXIII.

Duobus datis rectilineis medium proportionale inuenire ſimile, ſimiliterque poſitum, ac aliquod rectilineum ex datis.

SIt datum rectilineũ HIG, & rectilineũ QO ſuper latus QP; oporteatque reperire medium proportionale inter hæc duo rectilinea; ſed tale, vt ſit ſimile, ſimiliterque poſitum, ac rectilineum ſuper HG, vt in ſchemate propoſ.31. h.

Redigatur QO in EDF ſimilem figurã, & ſimiliter poſitam, ac rectilinei dati ſuper HG; Sitque eius latus homologum ad GH latus FE; inter FE, & GH inueniatur ex 16.l.6. media proportionalis BA, & ſuper BA conſtituatur rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum, ac illud poſitum ſuper HG latus ex 23. lib. 6. Elem. & hoc erit medium proportionale inter HIG rectilineum, & rectilinenm QO ſuper QP.

Probatur ex Iterum proportione ex 26. lib.6. Elem. Nam cum ſit rectilinea ſimilia erunt ad inuicem, vt baſes: ſed baſis EF ex effectione eſt ad BA proportionata vt BA ad HG. Vnde & rectilineum ſuper FE, vel quod idem eſt, cum ei ſit æquale, rectilineum QO ad rectilineum ſuper BA erit in ea proportione, quâ ipſum met ſuper BA ad rectilineum ſuper HG conſtitutum.

COROLLARIVM.

IStæ propoſitiones antecedentes intelliguntur etiam de circulis minuendis, & augendis in data proportione. Nam vt eſt polygonum ad polygonum in circulo inſcriptum, ita, & circuli, & vt diameter ad diametrum ita ex prop. 41. lib.6 Elem. ſunt quoque inuicem circuli: quare ſi reperta proportionalis, vel tertia, vel media, vel quarta conſtituatur diameter circulorum, ipſi circuli iuxta datam proportionem augeſcent.

EXPENSIO VI.

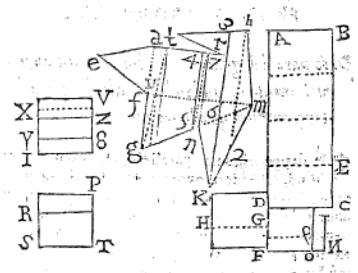
De rectilineo quocumque partiendo etiam in partes non ſimiles per parallelas vni lateri.

VIdimus de augmento, & partitione fig. in plures ſimiles figuras, modo de earum partitione; non quidem in plures figuras; ſed quaſi in eiuſdẽ plures partes ſtatuendo eas inuicẽ æquales, vel proportionales, ſed nec ſimiles, nec ſimiliter poſitæ, duplex autem eſt iſta deſignatio, vel per parallelas vni lateri, vel per diſcedentes lineas rectas ab vno puncto in dato latere.

PROBL. I. PROPOS. XXXIV.

Figuram rectilineam regularem in deſtinatas partes ſecare per parallelas dato lateri.

SIt figura irregularis rectilinea a e f g n l m h t, quæ debeat in quatuor partes V.g. partiri per parallelas lateri f g ex propoſ.8. fiat rectangulum æquale, vel toti rectilineo, vel quod idem eſt ſingulis eius omninus partibus, & triangulis, quod ſit ABCD, quod diuidatur in quatuor partes, & ſit quarta pars DE, quæ erit etiam quarta pars dati rectilinei; oportet itaque hanc quartam partem ſignare in ipſo rectilineo irregulari dato; ſed per parallelam lateri f g.



Tranſmutetur hæc quarta pars in quadratum KF, & vt incipiamus à parte dextra videndũ eſt; an triãgulum a f e adæquet quartam partem traſmutando

tando in rectangulum ex propoſ.2. vel 7. huius, cuius latus ſit quadrati DF, quod erit FH: Quare non implet totum quadratum KF, & ideo nec triangulum f a e adæquat rectilinei irregularis quartam portionem.

Ex triangulo itaque m a g, cuius vertex non cognoſcitur ex documentis 23. prop.h. auferenda eſt pars æqualis rectangulo reſiduo DH: Trahendo parallelam lateri r a, vt fiat triangulum m f g; rectangulo verò DH equale, inueniatur quadratum DO. Inuenta autem tertia proportionalis lineis a g, & g f ſit N, & tribus g a, & N, & lateri FO quadrati OD quarta proportionalis ſit QO, ex qua rectangulũ QF fiat ad altitudinem OF, & ſequendo operationem ex 23. prop.h fiat trapezium æquale g u, & ducta g t, & ex puncto t parallela lateri f g. Dico trapezium g t cum triangulo e f a eſſe quartam partem totius rectilinei irregularis.

Probatur ex ipſa effectione ſuppoſita doctrina tradita in 23. propoſ. huius; nam t g ex effectione eſt trapezium æquale quadrato DO: quod æquat rectangulum DH; rectangulum verò FH eſt æquale ex effectione triangulo a f e; quæ duo rectangula integrant quadratum KF, quod eſt ex effect. equale rectangulo DE, quod eſt quarta pars parallelogrammi magni AC equalis rectilineo irregulari; vnde etiam FK rectangulum erit quarta pars figuræ irregularis, & conſequenter t g, & f e a erit quoque quarta pars figuræ irregularis.

Sit ſecundo ad ſiniſtram partem per lineam parallelam eidem lateri gf abſcindenda quoque quarta pars: Quia adeſt angulus ad h, videatur an parallela ducta ab eo angulo abſcindat quartam partem rectanguli AC, & conſequenter totius rectilinei irregularis, & facta operatione iuxta præſcripta propoſ. 22. vel 23. erit triangulum h m 2 æquale rectangulo PR, cuius latus eſt quadrati PS æquantis rectangulum ED quattam partem totius magni AC, ideoque m h 2 non equat quartam partem: Ducemus itaque ab angulo K rectam K 3, & tranſmutato trapezio h 2 K 3 in rectangulũ RT iam æquat totum quadratum PS, & conſequenter totum rectangulum ED, ideſt quartam partem rectanguli AC, & conſequenter h 3 m K eſt quarta pars totius rectilinei irregularis.

Sed apud hanc partem alia quarta pars ſit locanda: Quia adeſt triangulum 3 r t, quod eadem linea ſecari nequit V.g. 4 5, cùm diſcontinuum ſit in eo ſitu; ideo placeat illud in hac etiam parte, quæ modo auferenda eſt, computare.

Redigetur itaque ad rectangulum VX in quadrato VI equale quarte parti ED rectanguli AC magni, & quia adeſt angulus n trahemus lineam n 7, vt videamus, an adæquet trapezium r 7 K n reliquum XZI in quadrato VI: quare triangulum K 6 n redigetur in parallelogrammum XZ; & deinde trapezium 7 6 in rectangulum ZY, quod totum quadratum non æquat, ideo triangulo r 6 n 7, cuius vertex ignoratur, addendum eſt ad lineam 7 n trapezium 7 4 n 5 æquale rectangulo reſiduo ex prop.23. huius; eritque figura 4 5 K 3 cum triangulo 3 r t quarta pars, & conſequenter reliquum trapezium 5 t, erit quoque quarta pars. Vnde rectilineum totum irregulare in quatuor æquales partes diuiſimus, vt patet.

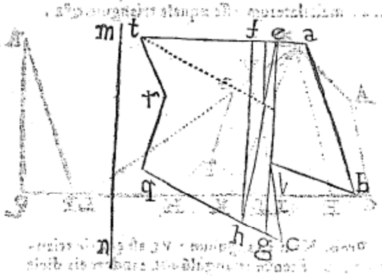
COROLLARIVM.

HInc potes quoque ſi placet diuidere per lineas, quæ nulli lateri parallelæ ſint, ſed cuidam extra rectilineum, nam illa linea, quæ prima fortuitò trahitur ab aliquo angulo, vel alicui extra figuram parallela, poteſt conſtitui tamquam ſi eſſet latus figuræ, & videre, quid ipſa ex tota figura auferat, & cætera circa ipſam præſtare, vt ſi eſſet latus figuræ, vt quilibet ex ſe experimento comprehendet.

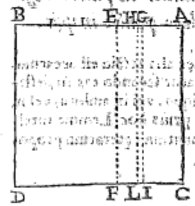
PROBL. II. PROPOS. XXXV.

Figuram irregularem rectilineam in proportionales partes ſecare per lineas parallelas lineæ extra figuram poſitæ.

POteſt eodem modo in proportionales partes ſecari area quælibet, ac propoſ. anteced. V.g. ſi rectilinei AC vna quarta ſolum pars aſſumpta fuiſſet, & illa à rectilineo irregulari fuiſſet ablata, vt eſt n 3 K m, illa eſſet ad totum, vt 1. ad 4. idem dicas de quibuſlibet alijs ſecundùm diuiſionem, in quam rectangulum BADC diuiſum fuiſſet.



Pro quo oſtendendo ſit fig. a b l c q r t, quæ diuidenda ſit parallelis ad m n in duas partes proportionales, ita vt vna nempe ſiniſtra ſe habeat alteri, vt 2. ad 3. conſtituatur rectangulum ABCD æquale dato rectilineo irregulari, & diuidatur eius baſis in 5. partes. Ex prima lib.6. rectangulum AECF erit $\frac{2}{5}$ reſpectu totius, & ad BDEF cõpartem ſe habebit, vt 2. ad 3. ſicut baſis CF ad baſim FD ſe habet, vt 2. ad 3. Ad angulum itaque l ducatur linea parallela lineæ m n ſcilicet ad ſiniſtram partem, videaturque quid ex AECF rectangulo abſumat trapezium b a e l, & triangulum l c g; faciendo rectangulũ AGCI ſuper datum latus AC æquale trapezio a b l e, & GHIL æquale triangulo l c g; Cum ergo iſta duo triangula ſit minora, quam $\frac{2}{5}$ totius rectanguli AD, ex 23. propoſ. huius trianguli g e t q, cuius ignoratur vertex ad latus e g auferenda eſt pars e g h f equalis rectangulo HLEF, quæ complebit $\frac{2}{5}$ totius, & ad aliam partẽ ſe habebit vt 2. ad 3. per parallelã f h



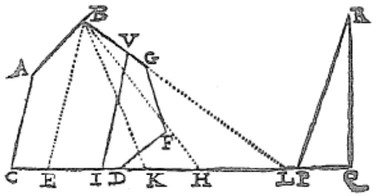
datę m n. Nam f g h e eſt ex conſtructione æquale trapezium rectangulo HELF; reſidua verò AHGL ſunt æqualia ex conſtruct. Trapezio b a e l, & triangulo l c g. Quare totum AECF rectangulum eſt æquale toti a f c h rectilineo ſicut to-

totum rectangulum AD eſt æquale dato irregulari rectilineo abqt; Cum ergo ſit AECF $\frac{2}{5}$ totius AD erit ah totius abqt $\frac{2}{5}$, & *diuidendo*, vt eſt rectangulum AECF ad rectangulum EFBD ita erit afch ad fh q t nempe, vt 2. ad 3.

PROBL. III. PROPOS. XXXVI.

A multilatero datam partem ſecare per parallelam dato lateri.

A Dato ſexagono ABCDFG abſumenda ſit pars æqualis dato triangulo QPR, quod ſit, aut fiat eiuſdem altitudinis ſexagoni ex propoſ. 6. huius. Agatur ex angulo B recta BE dato lateri CA parallela, & fiat ttiangulum EBH ex dictis prop. 8. h. ęquale reſiduo rectilineo EDFGB continuenturque latera CH, & BG, & concurrant in L, Deinde menſuretur baſis QP ab H, & ſit HK; & ducta HB erunt æqualia ex I. Cor. p. 39. l. I. triangula KBH, & PRQ & inter LE, & LK reperiatur media proportionalis IL; & ducatur IV parallela ipſi CA. Dico IFGV multilaterum eſſe æquale triangulo QPR.



Prob. Nam triangulum IVL eſt ęquale triangulo EBL. Etenim triangulũ EBL eandem eis dicit proportionem. Dicũt namque proportionem EBL, IVL duplicatam lateris LE ex 21. lib. 6. ad latus LI, ſed ex effectione hæc eſt, quam EL habet ad LK; cùm ſit IL media proportionalis inter LE, & LK: ſed quam proportionem habet LE ad LK eam ex propoſ. I. lib. 6. Elem. habet EBL ad KBL. Ergo idem triangulũ EBL eandem dicunt proportionem triangulis IVL, & KBL. Ergo ex II. lib. 5. ęqualia. Quamobrem ęqualibus IVL, & BKL ablatis à triangulo EBL, remanebunt æquales EKB triangulum, & EBVI trapeziũ. Si ergo rurſùs auferantur hæ portiones æquales triangulum EBK à triangulo EBH, & trapezium à rectilineo BEDFG, quod triangulum EBH ex conſtructione æquat, remanebunt æqualia triangulum KBH, ideſt QRP, & pars aſſumpta VGFI.

EXPENSIO VII.

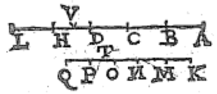
De figuris planis rectilineis in partes diſſimiles ſecandis à dato puncto in ipſis.

NOn minus vtilis hęc alia ſectio eſt arearum, quæ operi demandatur ſecando eas in deſtinatas partes à puncto aliquo, vel in ambitu, vel in meditulio dato, pro quo priùs hoc Lemma intelligendum eſt, vt fundamentum cęterarum propoſitionum: tale autem eſt.

LEMMA PROPOS. XXXVII.

Si magnitudo in quaſlibet partes ſecetur, & alia in totidem illis proportionales eadem ſerie, & accipiantur aliquæ partes prioris magnitudinis hæ ſimul comparatæ ad reſiduas ſimul habebunt eandem proportionem, quæ totidem poſterioris ſimul ad reliquas habent ſimul ſumptas, & eodem ordine.

SIt AL prima magnitudo in quinque partes diuiſa, & alia, etiam ſi ſit diuerſi generis KQ, pariter in quinque partes diuiſa prioris magnitudinis partibus eodem ordine proportionales, & accipiantur duæ ex prima AB, & BC, & duæ de ſecunda ſecundùm eundem ordinem KM, & MN. Dico, quod AC ad reliquas ſimul CL habebunt eandem rationem, quam KN ad reliquas NQ.



Progr. I. Probatur. Nam ex hypotheſi, quam proportionem dicit AB ad BC eam dicit KM ad MN: Igitur *componendo* ea eſt proportio AB cum BC ad BC, quæ KM cum MN ad MN: Ex hypotheſi quoque vt eſt BC ad CD, ita eſt MN ad NO: quamobrem ex *æqualitate* erit AB cum BC ad CD, vt KM cum MN ad NO in alia quantitate.

Prog. 2. Deinde cum ſit HL ad HD, vt QP ad PO; erit quoque *componendo* LH cum DH ad LH, vt QP cum PO ad QP: ſed ex hypotheſi *conuertendo*, vt HD ad DC, ita PO ad ON. Ergo ex *æqualitate*, vt DH cum HL reſpicit in proportione DC, ita QP cum PO reſpicit ON, & *cõponendo*, vt CL eſt ad CD ita NQ ad NO: & *inuertẽdo* CD ad CL, vt NO ad NQ, ſed reſpiciebat quoq; AC, CD, vt KN partem NO ex primo progr. Vnde erit AC ad CD, vt KN ad NO, & vt CD ad CL, ita NO ad NQ: vnde ex *æqualitate* ita erit AC duę ſimul ad CL reliquas ſimul, vt KN duæ ſimul alterius quantitatis ad NQ reliquas eiuſdem.

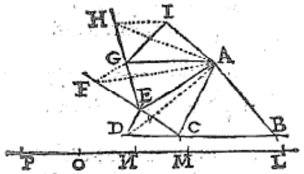
COROLLARIVM.

VNde ſi rurſus aliqua pars, vt DH ſecetur in prima quantitate V. g. in V, & in T ſecunda pars correſpondens OP in ordine, etiam proportionaliter ſecetur in ſimiles portiones; totq; quoque quantitates erunt ſectæ proportionaliter, & ita erit AV ad VL, vt KT ad TQ. Nam eadem probatio militat, cum ex hypotheſi, vt primo factæ ſint partes proportionales eodem ordine correſpondentes, quare, & correſpondenter erit AV ad LV, vt KT ad QT, vel etiam AV ad AL, vt KT ad KQ *componendo*.

PROBL. I. PROPOS. XXXVIII.

Diuiſo rectilineo quolibet in triangula, rectas lineas eodem ordine, & proportione, qua triangula exiſtunt, præditas inuenire.

SIt figura diuiſa in triangula BAC, CAE, EAG, & AIG; oporteatque lineas inuenire, quæ inuicem habeant eam proportionem, quam triangula. Producatur BC in D, & ducatur ED parallela lateri AC: Deinde ducatur AD, eritque triangulum ACD æquale triangulo CAE: ſed eiuſdem altitudinis, ac BCA, cum deſinat in idem punctum A: Quare ex I. lib. 6. erit BC ad CD, vt triangulum BCA ad triangulum CAD, vel ad æquale CAE, quas lineas transferemus pro primis inuentis in lineã LP, quæ erunt LM, & MN. Idem faciemus triangulis CAE, & collaterali EAG: nam ducta GF ab angulo G parallela lateri AE; & CE in F, ductaque AF erit triangulum AEF æquale triangulo AGE, & eiuſdem altitudinis. Quare erit, vt triangulum ad triangulum, ita baſis CE ad baſim EF, quare lineis CE, EF, & MN inueniemus quartam proportionalem NO: quia ergo eſt CE ad EF, vt MN ad NO, erit etiam MN ad NO ex 16. lib. 5. vt CAE ad GAE.



Idem tandem faciemus de triangulis EAG, & AGI: eritque, vt triangulum AEG ad GAI, ita baſis EG ad baſim GH. Sic ergo etiam, vt baſis EG ad baſim GH, ita NO ad quartam OP; eritque tertia NO ad quartam OP, vt baſis EG ad baſim GH, & conſequenter, vt triangulum EAG ad AGI.

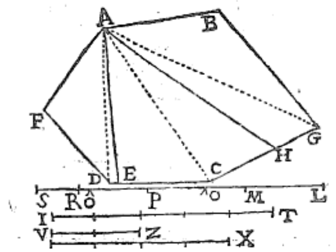
Verùm ſi aliqua figura adeo ęrit irregularis, vt nequeat in triangula diuidi ab vno puncto conuertantur ſingula triangula, in triangula æqualia, ſed eiuſdem altitudinis ex 8. prop. de conuerſ. figur. vel parallelogramma, & baſes erunt inuicem, vt triangula æqualis altitudinis, & conſequenter, vt triangula, in quæ figura irregularis diuiſa eſt, vtcumque.

PROBL. II. PROPOS. XXXIX.

Datum rectilineum in datas partes ſecare per rectas ab vno puncto in latere, vel in angulo diſcedentes, dummodo in triangula ab vno puncto diuidi poſſit.

SIt figura ABGCDF; quæ in triangula à dato puncto A diuiſa ſit; hanc in quaſlibet partes, vel proportiones, nempe quam habet V ad TI $\frac{2}{3}$, & X ad TI $\frac{4}{1}$, volumuſque proportionem V ad TI eſſe ad partem B.

Reperiatur ex propoſ. præcedenti linea LS, quarum partes habeant eandem proportionem ad inuicem, vt triangula, & eodem ordine, ita quod LM ſit ad MP, vt triangulum GBA ad triangulum GAC, & MP ſit ad PR, vt triangulum GAC ad CAD, & PR ſit ad RS, vt CAD ad DAF.



Tribus verò TI, & V datis, & LS reperta, inueniatur quarta proportionalis LO, ita quod vt TI ad V, ita ſit LS ad LO, quæ inter P, & M cadit.

Diuidatur deinde; quia linea MP correſpodet ex ordine baſi CG ea baſis GC ſecundùm proportionem MP ad MO, & ſit quarta proportionalis GH. Dico trapezium ABGH eſſe ad totam figuram irregularem ABGCDF, vt V ad TI, ideſt $\frac{2}{3}$.

Probatur ex Coroll. propoſ. 37. Nam ita eſt quantitas LO ad OS; vt eſt quantitas BAGH ad quantitatem reſiduam AHCDF: ſed illa LO ad OS, vt V ad TZ ex effect. & *inuertendo*, nempe vt 2. ad 3. Ergo etiam figura ABPH erit ad reſiduum, vt 2. ad 3. & conſequenter ad totum erit vt 2. ad 5. & ABPH erit ad totum 2. ad 5. vt eſt V ad IT.

Placeat rurſus diuidere ea proportione, quam X habet ad TI, ita quod antecedens proportionis X ſit in figura irregulari verſus B.

Tribus eodem modo inueniatur quarta proportionalis, vt TI ad X; ita LS ad LO; & quia hęc diuiſio O cadit in tertiam PR correſpondentem tertiæ baſi CD: Tribus rurſus PR, & PO, & CD inueniatur quarta proportionalis CE. Nam ducta AE erit ABGCE ad totam figuram, vt X ad TI eadem ratione.

PROBL. III. PROPOS. XL.

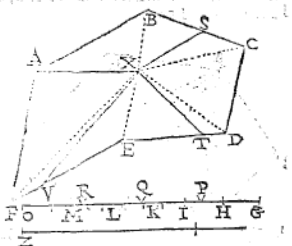
Figuram à dato in medio puncto in datas partes ſecare, dummodo ad angulos ab illo puncto rectæ duci poſſint.

SIt in figura ABCDEF datum punctum X in medio vbicumque malueris, & ſit diuidenda fig. in quatuor partes ęquales (poſſet, & diuidi in proportionales, ſed in præcedenti proportionalem diuiſionem exemplo illuſtrauimus.)

Sit linea GO, cuius partes GH, & HI, & IK, & KL, & LM, & MO ſint eodem ordine proportionales ex prop. 38. vt triangula ABX, BXC, CXD, DXE, EXF, FXA, quæ diuidatur in quatuor partes in P, Q, R. Quia ergo prima diuiſio P cadit in ſecundam lineam erit latus BC ſecundi trianguli diuidendum, ita vt quemadmodum eſt HI ad HP, ita ſit BC ad BS ducta XS erit XABS quarta pars. Sic quia Q cadit in parte KL, quæ correſpondet baſi quarti trianguli ſiet, vt KL ad KQ, ita baſis DE ad DT. Et

ducta

ducta XT erit SXT alia quarta pars, & sic de parte R, quæ poscit EF basim correspondentem diuidendam esse, vt LM ad LR in V, vt sit alia quarta pars SXV.



Quod Probatur. Nam ita est ex Coroll. prop. 37. GP ad totam GO, vt XABS ad totum rectilineum; sed GP est querta pars totius GO. Ergo, & portio XABS erit quarta pars totius rectilinei.

Iterum, vt est GQ ad GO; ita est ABCTX ad totum rectilineum; sed GQ est $\frac{2}{4}$ totius GO. Ergo etiam ABCTX erit $\frac{2}{4}$ totius rectilinei. Ablato ergo AXS, nempe $\frac{1}{4}$, vt ostendi erit SXT $\frac{1}{4}$ totius, & sic dicas de alijs; vt per se patet.

EXPENSIO VII.

De figuris per lineas, vtcumque ductas partiendis.

POscit ordo, & ratio, vt quemadmodum superficies per parallelas lineas, & etiam per lineas ab vno centro progredientes diuisimus, sic, & eas per lineas incertas, & vtcumque ductas partiri doceamus.

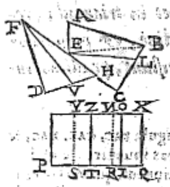
PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Rectilineum quodcumque partiri per lineas non parallelas, nec in vnum punctum conspirantes.

SIt Rectilineum ABCDE, quod oporteat secare in tres partes lineis; quę nec sint parallelę, nec sint in vnum punctum coeuntes, vel quia id nequeat, aut quia non placeat.

Fiat rectangulum QO æquale areæ trianguli BAE, & OT æquale areæ trianguli BEC, & tandem PZ æquale areæ trianguli CED. Diuidatur deinde QP latus in tres partes in R, & S. Et quia prima pars finit in basim IT parallelogrammi OT æqualis secundo triangulo BEC; ideo tribus IT, IR, & EC inueniatur quarta proportionalis EL, vt sit IT ad IR, vt EC ad EL. Ducaturque EL. Dico BAEL esse tertiam partem totius rectilinei.

Probatur. Quoniam QO rectangulum est equale triangulo BAE ex effectione; rectangulum verò OR, quod complet tertiam partem totius parallelogrammi æqualis toti rectilineo est æquale triangulo BEL. Ergo BAE, cùm BEL est tertia pars rectilinei; cum æqualium ad æqualia eadem sit proportio: Quod autem triangulum BEL sit æquale rectangulo OR; patet. Nam rectangulum OR est ad rectangulum OT, vt basis IR ad basim IT, & ita triangulum BEL ad triangulum EBC est vt basis BL ad basim BC: sed hæc eadem ex effectione, quam basis IR ad IT.



Ergo rectangulum OR ad rectangulum OT habet eandem proportionem, quam BEL ad BEC, sed BEC, & OT sunt æqualia: Ergo etiam rectāgulū OR ex 12. l. 5. & triangulum BEL erunt æqualia. Eadem est probatio in trahenda linea FV: Siquidem secunda pars RS ex tribus finit in basem TP, in S parallelogrammi æqualis triangulo HFD: Vnde basis HD secanda est proportionaliter, vt TP secta est in S; & trahēda FV, & FELCV ex dicta ratione erit FOVELC, remanentis rectilinei $\frac{2}{3}$.

EXPENSIO VIII.

De planis è puncto extrinseco partiendis.

SIcut plana ab vno puncto in eis electo in plures partes discepsimus, sic à puncto foris electo diuidemus, licet id sit minus necessariū, & magis laboriosū, & non semper in opus reducibile.

PROBL. I. PROPOS. XLII.

Datum Triangulum à dato extra ipsum puncto in datas partes secare.

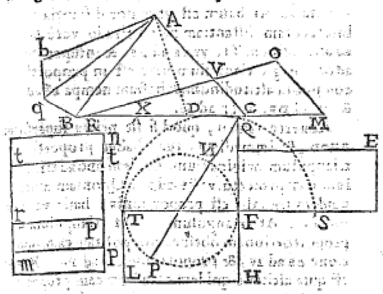
SIt propositum triangulum ABC $\frac{1}{3}$ trianguli BAC, in quo ex O puncto extra ipsum dato sit auferenda data pars æqualis triangulo ACD.

Ex lateribus trianguli AC, & CD fiat rectangulum EF; lineę verò parallelę OM ex 25. lib. 1. Elem. applicetur rectangulum æquale ipsi EF rectangulo, & fiat FL rectangulum, cuius alterum latus inuentum sit FT, mensuretur itaque à puncto C latus FT, & sit CX; rectangulo autem CX, & MC, idest TF, & FS fiat æquale quadratum QF; & huic quadrato ex 37. lib. 3. æquale rectangulum ex NQ, & PQ, quod fit constituendo latus quadrati pro tangente, quæ tangat circulum, cuius diameter NP, vel TE æquet CX; ita enim rectangulum NQ, & PQ ex cit. propos. 37. lib. 3. Elem. equabit quadratum ex FQ, & ideo ipsi æquale rectangulum ex CX, & MC, vel TF FS æqualibus; transferatur itaque NQ latus ab X in R, & ducatur à pūcto dato O linea OR, & Dico CAD æquari triangulo VCR, & ideo per lineam OR auferri tertia pars trianguli BAC, vt fuit promissū.

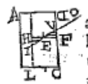
Probatur autem. Rectangulum ex CR, & XR, idest NQ, & PQ æqualibus æquatur quadrato tangentis FQ, ideoque rectangulo ex MC, & CX, ideoque latera ex 10. lib. 6. Eu. erunt reciprocè proportionalia, eritque CR ad MC, vt CX ad XR. Ideoque *componendo* erit CR cum MC, idest tota MR ad CR, vt CX cum XR, idest CR ad CX.

Verùm ob parallelas MO, & CV erit ex 4. lib. 6. MO ad CV, vt MR ad CR, quæ sunt in proportione, vt CR ad CX. Ideoque MO ex 16. lib. 5. erit ad CV, vt CR ad CX. Vnde ex 18. lib. 6. si ex extremis MO, & CX

& CX componatur rectangulum erit æquale rectangulo mediarum CV, & CR. At rectangulum ex MO, & CX ex effectione, idem, quod LF æquatur rectangulo EF, ex lateribus CA, & CD trianguli CAD. Quarè etiam eidem EF equabitur rectangulum CV, & CR, & propter hoc latera erunt reciprocè proportionalia ex 10. lib. 6. El. & CR erit ad CA, vt CD ad CV, angulus verò C est idem. Vnde ex 11. lib. 6. triangula CAD, & CVR erunt æqualia.



Sit punctum datum O. Oporteatque rectangulum DABC in tres partes secare, diuidatur in tres partes, & sit tertia pars LA parallelogrammum, & reliquum LC duæ tertiæ partes erunt; diuidatur rursus per rectam FH, eritque HC tertia pars; secetur itaque FH bifariam in E, & ducatur OI. Dico trapezium VLCI esse tertiam partem.



Prob. Quia triangula nigra sunt æqualia cum sint rectangula, & anguli ad vertices E sint equales: quare tantùm additur in triangulo nigro apud V, quantum aufertur in triāgulo nigro apud H. Vnde figura IVHL erit æquale tertiæ parti CFHL.

PRORL. III. PROPOS. XLIV.

**Datum quodcumque rectilineum in partes destinatas per lineam à puncto extra ipsum ductam secare.*

SIt rectilineum AbqB, quod diuidatur in triangula, & fiat parallelogrammum m n æquale toti, & in eo parallelogramma singulis triangulis æqualia, vt in fig. propos. anteced.

Nimirum mp triangulo bqA sicut pr ipsi AqB, & r n vltimo BAC. Deinde diuide, quia punctum O est prope triangulum BAC rectang. r n in partē, quam voles, vel quæ tibi data fuerit n t, & quia non occupat totam partem r n ideo auferri poterit à triangulo BAC; quod si totam occupasset, vel maiorem: tunc triangula, in quæ diuisa est figura, essent alio pacto ordinanda, & ducenda essent à vertice C, vel partìm à C partìm ab A, & illis rectangula æqualia facienda in rectangulo m n, & videndum eodem modo, an pars data ab vno ex ipsis subduci posset. Nam eo pacto, & poterit à triangulo ipsi parallelogrammo æquali ea pars auferri per lineam à puncto dato protractam.

Quod cum obtinueris. Tunc illud rectangulum t n in triangulum æquale DAC parti in parallelogrammo ei correspondenti facta V. g. in parallelogrammo r n conuertendum est: Et deinde ea omnia præstanda, quæ dixi prop. penultima antecedenti, & erit diuisum rectilineum datum in partem datam.

COROLLARIVM.

POterit etiam, & aliquando diuidi in plures partes datas; sed non semper; quia non omnia triangula, quæ in figura fient, poterunt habere aliquod latus puncto dato obuersum, vt AC ad quod linea duci possit: talis, quæ non secet latus alterius trianguli. Sed ipsa experientia docebit possibilitatem rei, de qua queritur.

EXPENSIO IX.

De planiciebus Musicis, & proiectis.

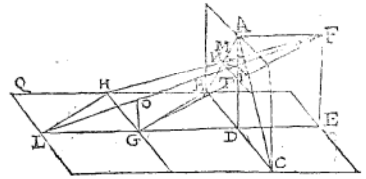
PLanities proiectæ sunt illæ, quæ nascuntur à lineis proiectorijs latera figurarum proijciendarum lambentibus, vt descripsimus tract. 26. propos. 8. & quidem de illis, prout conus proiectorius directè in eas incidit, non agemus, vtpote quod de eis certum sit esse in duplicata ratione suorum laterum, cùm vt ibi ostendimus de circulo figuræ similes, sint itaque de eis agendū cum radij proiectorij in planū obliquè incidūt, & præcipuè hìc de eorum proportionibus agere in animo est.

THEOR. I. PROP. XLV.

Spatiorum originalium altitudines ad proiectorum altitudines obtinent eam proportionem, quæ distantia remotior ad altitudinem centri, si primæ sint; quod si secundæ etiam eam, quam distantia propinquior ad interceptam distantiam.

SIt spatium originale GHBD, cuius altitudo GD, distantia DE à centri F perpendiculari altitudine EF; altitudo verò huius plani proijciatur, & sit DT. Dico GD *altitudinem esse ad altitudinem* DT, *vt* GE *maior distantia, quam* DE, *ad* EF *altitudinem centri.*

Patet ex 4. lib. 6. Nam ob parallelismum linearum, ita GD est ad DT, vt GE ad EF.



Deinde sit altera altitudo LG, quę non sit prima, & Immediata, vt est GD. Dico quod proiecta in TI habet proportionem, ne dum, quę est LE ad EF; sed insuper, quæ GE distantia propinquior ad DE interceptam; nempe compositam ex LE ad EF, & GE ad DE, vt si DE esset 3. GE 4. at EF 2. & LE 5. haberet LG ad TI proportionem, quam 20. ad 6. quæ est

est composita ex 4. & 5. ad 2. & 3.

Probatur. Nam ducta GO parallela ipsi DA. Erit LG ad GO, vt LE remotior distantia ad FE altitudinem centri, sed GO est ad TI; vt GF ad TF, & GF est ad TF, vt GE propinquior distantia ad DE interceptam distantiam. Ergo LG erit ad TI, ne dum vt LE ad FE; sed etiam, vt GE ad DE. Vnde LG ad TI erit composita proportio ex LE ad EF, & GE ad DE, & sic dicas de alijs sequentibus.

THEOR. II. PROPOS. XLVI.

Omnes latitudines planorum originaliũ ad omnes planorum proiectorum eam habent rationem, quam distantia à centro ad interceptam distantiam.

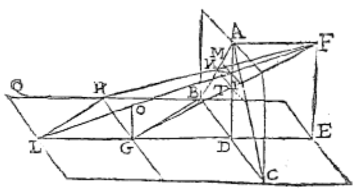
LAtitudines originarias, vt GH eam dico *obtinere proportionem ad proiectas latitudines*, NT, quam distantia GE ad interceptam DE.

Probatur. Nam GH est ad NT, vt GF ad FT ex 4 lib. 6. elem. at vt GF ad FT; sic est GE ad DE. Ergo vt GH ad NT, sic GE ad DE, & idem asseras de latitudine LQ, quæ se habet ad MI, vt LE ad DE.

THEOR. III. PROPOS. XLVII.

Superficies generans parallelis contenta, quæ sit diuisa diagonali in duo triangula, alterum quidem triangulum originarium ad proiectum eam habet proportionem duplicatam, quam distantia tota ad interceptam, & quam distantia remotior ad altitudinem centri radiosi; Alterum autem habet proportionem ex distantia minori ad interceptam, & distantia remotiori ad altitudinem centri radiosi.

DEtur superficies QLHG diuisa diagonali LH, quæ proijciatur, & proiecta sit in NITM. Dico superficiem LHG esse ad NIT primo, vt GE ad DE, secundò rursùs vt GE ad ED, & tertiò ex LE ad EF.



Probatur. Nam triangula quæcumque ex Cor. 2. prop. 22. lib. 6. ea habent proportionem, quę componitur ex altitudinibus, & basibus: sed basis GH habet proportionem ad basim NT, quam GE ad DE: rursùs altitudo LG habet proportionem ad TI altitudiné, vt LE ad EF, & GE ad DE. ex 45. h. Ergo proportio trianguli LHG ad triangulum NIT consequitur proportioné GE ad DE duplicatã, nempe distantię minoris ad interceptam distantiam, & insuper distantiæ maioris ad altitudinem centri.

Probatur quoque de reliquo triangulo LQH ad triangulum NMI. Nam LQ latitudo, & basis, collata ad MI basim est, vt maior distantia LE ad interceptam distantiam DE: altitudo verò LG est ad altitudinem TI, vt LE ad EF, & insuper, vt GE ad DE. Ergo triangulum NMI est, in proportione composita altitudinum, & basium nempe LE ad ED, & GE ad DE, & LE ad EF.

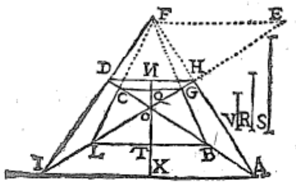
Aduerte tamen, quòd si sit prima superficies BHGD, & immediata, tunc habet proportionem triangulum originarium, quidem BDG ad triangulum GBT proiectũ, vt GE ad EF. Quoniam altitudo quidem DT talis est proportionis; basis verò BD eadem. At triangulum HGB ad triangulum BNT proportortionem obtinet compositam ex proportione GE ad EF, & proportione GD ad DE. Ratio est quia altitudo quidem GD ad DT eam proportionem obtinet GE ad EF, at latitudo aliam proportionem GE ad DE.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

Superficies musicas augere, vel minuere secundum datam rationem.

SIt data superficies BGCL augenda secundum datam rationem V ad S. Inueniatur itaque media proportionalis R, & trahatur diagonalis LG, producaturq; in E, nempe vsque ad parallelam FE basi BL, & iterum prolungetur in I. Rursusq; ducatur diagonalis DA, quæ se secent in O; fiat deinde vt V ad R, sic LO ad IO, ducaturque ab I parallela AI basi LB, & duæ AF, & FI ab I, & A ducantur ad centrum F, quæ secabunt diagonales AD in D, & IE in H, perque punctum D ducatur HD parallela basi AI, & erit factum, quod imperatur. Nam BCLG planum est ad planum HDAI in proportione data V ad S.

Nam ostendetur primo ADHI esse superficiem musicam, vel proiectam, quia ex proppos. 11. tract. 16. crura trianguli AFI, & BFL sunt secta proportionaliter parallelis AI, & HD musicè ob lineam IE in ea obliquè incidentem.



Deinde basis LB ad basim AI est, vt V ad R. Nam ducta per O recta XN perpẽdiculari ad AI, linea LO est ad OI, vt OG ad OH in triangulis æquiangulis AOI, & ODH ob angulos ad verticem HOD, & AOI æquales, & angulos incidentis lineæ IE in parallelas HD, & GC, & BL, & AI, sed LO ad IO est vt V ad R ex effectione: Ergo etiam OG ad OH: Cum itaque LO sit ad OI, vt OG ad OH, & ideo *permutando* LO ad OG, vt OI ad OH, hinc *componendo* LO cum OG, idest LG ad LO, vt OI cum OH idest IH ad OI; rursùsque *permutando* LG erit ad HI, vt LO ad IO, idest vt V ad R.

Sed vt LO ad IO, sic est basis BL ad AI in triangulis ęquiangulis BOL, & AOI ob parallelas BL, & AI. Ergo erit LG ad HI, vt basis BL ad basim AI, scilicet, vt V ad R.

Et quia in triangulis OND, & OQC, ita est ob parallelismum linearum, OQ ad ON, vt OG ad OH erit OQ ad ON, vt V ad R, & sic OT erit ad OX, quia est in æquiangulis triangulis LOT, & IOX, sic quoque, vt OT ad OX, latus LO, & OI. Quadere erit OQ ad ON, vt OT ad OX, & *permutando* OQ ad OT, vt ON ad OX, & *componendo* OQ cum OT, idest QT ad OT, vt ON cũ OX, idest NX ad OX scilicet, vt V ad R.

Quia itaque triangula habent proportionem compositam ex proportione basium, & altitudinum ex propos. 22. Coroll. 2. lib. 6. altitudo verò trianguli BCL est TQ, & trianguli AID est XN; bases verò sunt BL, & AI. Ergo habebit proportionem compositam ex proportione eadem, quæ est basium, & altitudinum: quare ex p. 1. tract. 9. expens. 5. erit proportio duplicata trianguli BCL ad triangulum ADI, quę basis BL ad basim AI, scilicet V ad R; proportio vero V ad S data est duplicata eius, quam habet V ad R. Ergo triangum BCL ad triangulum ADI habet proportionem, vt V ad S.

Idem dicendum de triangulis BGC, & AHD; siquidem eadem altitudine gaudent XN, & QT, basis verò GC est ad basim HD in æquiangulis triangulis OGC, OHD, vt OG ad OH; sed iam ostensum est OG ad HO eam esse proportionem, quæ LO ad OI, idest ex effectione, quam V ad R. Ergo & basis GC erit basim HD, vt V ad R. Cùm itaque bases, & altitudines obtineant eandem proportionem, & proportio triangulorum sit composita ex altitudinibus, & basibus, quę est eadem, erit duplicata eius, quæ est V ad R, nempe erit, vt V ad S.

Si verò agatur de diminutione ductis diagonalibus AD, HI fiat vt S ad R, sic AO ad BO, quæ mensuretur ab O in B, & ducta parallela BL cætera perficiantur: vt priùs, & compleatur spatium BGCL, eritque spatium musicum AHDI ad spatium musicum BGCL, vt S ad V eadem prorsùs ratione, quam supra assignauimus.

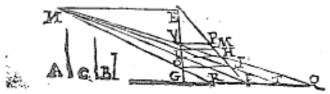
PROBL. II. PROPOS. XLIX.

Superficies iuxta datam proportionem Harmonicè se diminui incipientes constituere.

SIt data proportio A ad B $\frac{2}{3}$; oporteatque constituere superficies procedentes harmonicè iuxta datam proportionem; ita vt primus terminus sit $\frac{2}{2}$, secundus sit $\frac{2}{3}$, & reliqua progressio sequatur, vt exigit progressus harmonicus.

Reperiatur media proportionalis inter A, & B, & sit C: fiatque, vel exhibitum sit triangulum GFE, in quo harmonica proportio instituenda est, fiatque vt A ad C sic GE ad BF, & ducatur parallela HI. Deinde ducatur diagonalis FI, vsque dum occurrat ductæ à centro parallelæ EN basi FG in N, & diuisa FG per medium in R; ducatur NR, & vbi secat in O, ducatur parallela LO. Dico spatia Harmonica HO ad OF habere proportionem, quam A ad B.

Probatur. Nam ex propos. 1. tract. 16. part. 2. GE est diuisa harmonicè cum bases FR, & RG sint æquales; Vnde erit vt FE ad HE termini, sic differentia FL ad LH; sed vt FE ad HE termini, sic est A ad C, est autem A ad C proportio duplicata eius, quæ est A ad B, Ergo A ad B habebit proportionem duplicatam, quæ est FE ad HE terminos, & ideo, quę est trianguli FEG ad triangulum simile ex 26. l. 6. elem. HEI; sed ex Tract. 28. de propos. 11. vt est triangulum FEG ad triangulum HEI, sic est LG superficies scalena ad HO superficiem. Ergo vt est A ad B, sic est LG ad HO, nempe, vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{3}$, & *inuertendo* HO ad LG, vt B ad A: quare si sequaris diminuendo harmonicè ducendo lineas QN, & TN à



partibus æqualibus QT, & TF partibus FR, & RG, successiuè harmonicè à data proportione decrescent termini, vt primus sit $\frac{2}{2}$, tertius sit $\frac{2}{3}$, quintus $\frac{2}{4}$, septimus $\frac{2}{5}$, & sic successiuè ex pr. 3. Tr. 16. p. 2. Siquidem ex tract. 28 de progr. prop. 11. etiam spatia triangularia harmonicè proportionaliter decrescunt, vt ipsæ lineæ, quæ in primis terminis duplicatam FE ad HE obtinent proportionem, quæ est vt 2. ad 3. vel A ad B: lineæ verò illæ ex 3. tract. 16. part. 2. vt numeri $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ procederent: quare etiam triangulorum superficies, quæ duplicatam basium habẽt proportionem, ita successiuè propagabuntur. Differentiæ verò erunt, successiuè, vt primus ad tertium ponitur, nempe vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{3}$ idest $\frac{6}{6}$ ad $\frac{6}{9}$ ex pr. 12. tract. 16. at termini scilicet triangula successiuè se habebunt harmonicè vt $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{4}{9}$, & cæt. ideoq; GL erit ad LI, vt $\frac{4}{4}$ ad $\frac{4}{6}$ sc. vt GEF ad HIE, at HO ad HI, vt $\frac{4}{5}$ ad $\frac{4}{7}$, nimirum, vt triangulum LEO ad triãgulum MIE, & IM ad MY, vt $\frac{4}{6}$ ad $\frac{4}{8}$, scilicet, vt triangulum HEI ad triangulum PEY, vnde differentiæ non successiuè se habebunt, nisi binæ, & binæ sumantur.

EXPENSIO X.

De planitiebus Isoperimetris constituendis.

AD perfectam cognitionem mathematicam iste tractatus necessarius est, cum aliquibus videri possit æquales figurarum ambitus æqualia quoque spatia continere, quòd verum non est, vt videbimus: Quia verò aliquando opus potest esse, quod aliquis requirat figuram eiusdem ambitus, & æqualis areæ, ideo id quoque docebimus præstare.

DEFINITIO I.

ISoperimetræ figuræ sunt, quæ æquales ambitus habent.

DEFINITIO II.

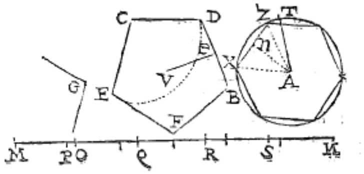
ARea cuiuslibet figuræ est eius secundùm planum capacitas.

PROBL. I. PROPOS. L.

Figuram regularem alteri Isoperimetram constituere dato alterius figuræ constituendæ angulo.

SIt sexagonum A, cui figuram Isoperimetram V. g. Pentagonum oporteat constituere.

Latera sex sexagoni super lineam MN extendantur; quale vnum ex ipsis est MP. Hancque lineam diuide iuxta numerum angulorum ad centrum, seu quod idem est laterum fig. constituendę, nempe



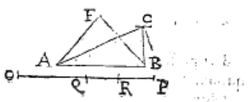
Pentagoni, vt est MO, & OQ, & QR, & RS, & SN: ex duabus verò MO, & OQ, fiat angulus C æqualis angulo pẽtagoni dato G, & idem fiat de reliquis tribus annectendo V. g. BQ ad CE sub eodem angulo interno G, & fiet Pẽtagonum dato Isoperimetrum; vt patet ex ipsa constructione.

Eodemque modo quęlibet alia figura regularis alteri Isoperimetra constituetur.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Dato angulo scaleno super eandem basim æquicrurum Isoperimetrum triangulum constituere.

SIt datum triangulum scalenum ABC, cui æquicrurum sit constituendum Isoperimetrum; Ducatur OP, & in illam transferantur latera AC, & CB, & sint OR, & RP, hæcque linea diuidatur bifariam in Q, & ex duabus æqualibus OQ, & QP super basim AB constituatur triangulum AFB. Nam illud erit Isoperimetrum alteri ACB.

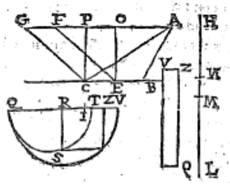


Probatur. Nam AC, & CB scaleni, sicut AF, FB crura æquicruris sunt æqualia lineæ OP; quare etiam inuicem; basis verò AB communis.

PROBL. III. PROPOS. LII.

Dato triangulo parallelogrammum æquale, & Isoperimetrum constituere.

SIt datum triangulum BAC, cui æquale, simulq; Isoperimetrum parallelogrammum sit constituendum: Latera BA, & AC in rectam HL transferantur, & sint HN, & NL, lineaque diuidatur bifariam in M sicut, & basis BC in E. Sumpto verò interuallo HM lineæ dimidio, centro E portio circuli ducatur, quæ secet parallelam AG in puncto F, ducaturque EF, & à C parallela EF lineç, quæ sit CG. Dico parallelogrammum EFGC esse triangulo CBA Isoperimetrum, & æquale.



Probatur de æqualitate ex 33. lib. I. Quòd verò sit Isoperimetrum patet; Nam latera FG, & EC æqualia inuicem ob parallelismum sunt equalia basi BC. Nam EC est medietas. Vnde basis æqualis FG erit etiam alteri medietati BE æqualis; Latera verò EF, CG sunt æqualia lateribus BA, & AC, quod sint simul æqualia lineæ HL.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Rectangulum parallelogrammo non rectangulo æquale, Isoperimetrum constituere.

SIt rectangulum OC in prec. fig. equale parallelogrammo EGFC; sed non isoperimetrum, oporteatque seruata æqualitate in isoperimetrum transformare.

Inueniantur eius lateribus EO, & OP; media proportionalis RS, cuius quadratum ex 19. lib. 6. est rectangulo OC æquale. Deinde lateribus EC, & CG parallelogrammi non rectanguli redactis in rectam QV, quę sint QI, & IV, tota QV secetur ex tr. 15. propos. 16. vt SR inter segmenta QZ, & ZV sit media proportionalis; rectangulũq; QZV ex extremis QZ, & ZV erit æquale quadrato mediæ RS, & ideo rectangulo OC, & EG dato ex 19. lib. 6. Sed dico, quod etiam isoperimetrum sit parallelogrammo EG eidem dato.

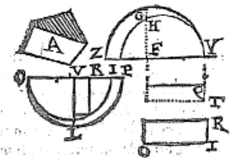
Probatur. Quia latera ZV, & ZQ sunt æqualia lineæ VQ, cui, & sunt æqualia ex effectione latera EC, & CG: quare etiam reliqua reliquis.

PROBL. V. PROP. LIV.

Dato rectilineo quocumque æquale, & isoperimetrum rectangulum constituere, cùm fieri potest.

SIt datum multilaterum A rectilineum, cui æquale sit rectangulum FT, & linea PO ęqualis dimidiato ambitui rectilinei A.

Inueniatur, vt in antecedenti figura, media proportionalis inter rectãguli FT latera YF, & FZ, & sit FG, quę si sit æqualis dimidio PV lineę PO est ipsũ quadratũ ex FG, quod quæritur, si maior; vt hìc, iam non potest secari PO in duo segmenta, inter quæ FG sit media proportionalis: quia erecta normaliter super PO deberet contineri intra semicirculum PLO, cui medietas VO est semidiameter. Vnde LV, vel equalis FG perpendicularis maior semidiametro esse nequit, non capiet in semicirculo OLF, quamobrem non poterit Problema exequi.



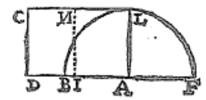
At si sit minor, vt si esset datum A sine triangulo nigro, cui ęquale esset QF rectangulum, inter cuius latera media proportionalis esset FH; tunc FH esset minor medietate VI lineæ totius OI, quæ æqualis est dimidiato ambitui rectilinei dati A excluso nigro triãgulo. Quare IO posset ex 16. Tr. 15. ita secari in R, vt inter segmenta IR, & RO inuenta FH esset media proportionalis. Quamobrẽ rectangulũ sub segmentis RI, & RO clausum esset æquale quadrato ex FH, & consequenter rectilineo QF æquali ex 17. lib. 6. & tandem rectilineo A excluso triangulo nigro.

Est autem isoperimetrum, quia RI, & RO medietas laterum sunt æqualia lineæ OI, quę est æqualis medietati laterum multilateri A excluso triangulo nigro.

PROBL. VI. PROPOS. LV.

Rectangulum constituere æquale, & Isoperimetrum semicirculo, vel eius partibus.

IAm docuimus ex quadratrice, vel per numeros lineam peripheriæ æqualem inuenire, vel quasi ęqualem, docebimus autem Tr. 30. rectangulũ ex semidiametro, & recta æquali semiperipheriæ esse æquale areę circuli. Vnde medietas CA erit æqualis medietati FLB quarta pars quartæ parti, & sexta sextę areę circuli erit æqualis.



Hoc autem rectangulum AC æquale dimidiato circulo est Isoperimetrum ipsi; siquidem duo latera AL, & CD sunt æqualia diametro BF latera verò AD, & LC sunt æqualia dimidio circumferentiæ, cùm vnum ex ipsis sit medietas lineæ æqualis dimidię circumferentię BLF, & cõsequenter quartę parti BL ęqualis. Vnde & AD, CL erit ęqualis circumferẽtię BLF; Sic dicas de medietate LI, & cęt. vt ex te met potes considerare.

EXPENSIO XI.

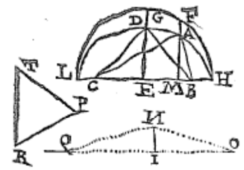
De proprietatibus figurarum Isoperimetrarum.

FIguræ Isoperimetræ id habent mirabile, quòd I. æquali ambitu cõclusę areas tamẽ inuicẽ continent inæquales, prout aut anguli, aut latera inequalia sunt; ideoque ad arearum dignoscendas exactiùs proprietates, hęc cognitio haurienda est.

THEOR. I. PROPOS. LVI.

Triangula Isoperimetra, quò latera magis ab æqualitate recedunt ambientia angulum verticalem, eo sunt minora, & quò magis anguli ad basim inuicem differunt.

*SInt duo triangula isoperimetra BAC, & BDC habentia eandem basim BC. Dico primò, quòd BAC triangulũ erit minùs triangulo BDC, quia latera sunt inæqualia magis in BAC, quam in BDC.



Probatur. Quia triangula sunt isoperimetra eadem HL mensurabit latus BA, & AC, & latus BD, & DC, quaderè ex propos. tr. 24. pr. 25. de conicis B, & C puncta foci erunt, & vertices H, A, D, L erunt in Ellipsi. Verùm in Ellipsi applicata MA, & ideo normalis est minor applicata, & normali DE; ergo altitudo MA est minor in triangulo BAC eiusdem basis, ac trianguli BDC altitudo ED, quæ est maior; quare ex I. lib. 6. Elem. Coroll. minus erit triangulum BAC, quam triangulum BDC. Quod verò altitudo MA sit minor, quàm ED, quæ sit maior.

Probatur. Quia ita est ex prop. 72. tract. 24. conic. in semicirculo HGL sinus FM ad applicatam AM, est vt sinus GE ad applicatam DE, ergo *permutando* FM ad EG erit, vt AM ad DE, quare ex 12 lib. 5. minor erit AM, quam DE; sicut minor est sinus MF, quam EG.

Probatur quoque secunda pars, quo latera opposita sunt magis inæqualia, eo anguli ad basim sunt magis inæquales, quia maiori angulo maius latus subtenditur ex 19. lib. I. Elem. Sed iam ostensum est, quod quo latera magis inæqualia sunt, eò triãgula isoperimetra esse minoris capacitatis. Ergo etiam quo magis anguli ad basim sunt inæquales; ideoque triangulum BAC erit minus triangulo BDC: quia anguli ABC, & ACB sunt magis inæquales, quam anguli DBC, & DCB, quorum latera subtensa minus inuicem inæquantur, quàm latera trianguli BAC, Quod, & confirmatur sequenti propos.

COROLLARIVM.

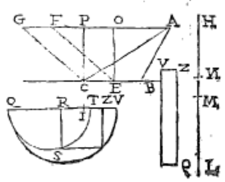
HInc est triãgulum Isoscellũ isoperimetrum illi esse minus, quod angulos ad basim habet magis inæquales alteri tertio; Nam accõmodetur BC in Ellipsi, & sit CA, & ducatur BA; Triãgulum itaque BAC erit minoris capacitatis; quàm triangulum isoscelles, & illi isoperimetrum BDC: sed B, & A sunt æquales anguli inuicem ob æqualia crura CA, & CB, licet tertio minori C trianguli BAC maiorem proportionem dicant, & ideo magis ipsi inæquales, quam duo B, & C angulo D trianguli BDC. Ergo quò magis duo anguli trianguli isoperimetri sunt inæquales tertio, eò triangulum est minoris capacitatis.

Prob. etiam de angulis, si sint acuti in isoscello triangulo, qui sc. dicunt minorem proportionem ad angulum verticalem suum, quam anguli alterius, quòd ideo minorem aream comprehendant. Nam BAC isoscelles diuidatur in duo à vertice C linea normali, & partes componantur secundùm latus breuius, vt fecimus in triangulo ONQ, cuius partes ONI, & NQI sunt trianguli BAC: Istud triangulum habebit angulos O, & Q ad basim dicentes minorem proportionem ad angulum verticalem N, quàm duo B, & C ad angulum D trianguli BDC: Et iam ostensũ est minus quo ad aream ipso triangulo BDC. Vnde colliges etiam TPR equiãgulum isoperimetrum triangulo BDC, eo esse maius, & omnibus triangulis sibi isoperimetris non habentibus angulos æquales, aut latera æqualia.

THEOR. II. PROPOS. LV.

Eadem proportione figuris in Isoperimetris diminuuntur latera, quæ & anguli.

PAtet. Nã eadem pars est totius ambitus sui latus pentagoni, quæ angulus pentagoni quatuor rectorum; sicut enim OM est 5. pars ambi-



tus pentagoni MN ex 50.h, sic angulus petagoni XAZ est quinta pars quatuor rectorum; Et sicut angulus exagoni est sexta pars quatuor rectorum angulorum; sic & latus figuræ præcedenti Isoperimetræ IM est sexta pars eiusdem ambitus MN.

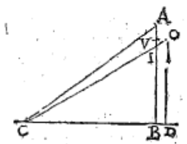
COROLLARIVM.

HInc verò deduces, & partem, quà latus maius superat minus, vt est OP, qua latus OM pentagoni superat latus PM exagoni, habere eandem proportionem ad latus minus PM, quam angulus pentagoni superat exagoni angulum ad ipsum angulum exagoni XAZ, namque vt part. 3. Tract. 14. prop. 5. eadem pars quinta est residuum OP lateris PM; quæ est OM totius ambitus MN. Siquidem si auferas quinque sextas partes à quinque quintis residua erunt quinque, quæ complebunt partem sextam: ideoque sicut OM est quinta pars totius MN: sic vnum residuum OP ex quinque remanentibus erit quinta pars vnius partis sextæ, & idem valet de angulis ob eandem proportionem ostensam in præced. vnde ZAT erit quinta pars anguli XAZ, & idem dicas, si medietatem tum residui ZAT, tum anguli XAZ assumas, vel si medietatem OP residui accipies, & medietatem lateris AP; eandem enim est proportio totius ad totum, quæ medietatis ad medietatem ex prop.18.lib.5.

THEOR. III. PROPOS. LVI.

In figuris Isoperimetris perpendicularis super vnum ex lateribus cadens, quò figura plures continet angulos, eò est maior.

SIt latus hexagoni OD, & latus pentagoni AB isoperimetri. Dico, quod perpendicularis CD est maior in exagono, quam CB in pengono. Nã si esset eiusdẽ lõgitudinis caderet in pũctũ B, & terminaret in punctum I latus exagoni isoperimetri pentagono ad hoc, vt idem angulus ACO remaneret, quo differt angulus pentagoni ab exagoni angulo: sed id esse non potest. Nam prop 3. Tract. 19. segmentum AI habet maiorem proportionem



ad IB; quàm angulus ACO ad angulũ OCD, idest est maior AI, quam quod possit esse quinta pars lateris IB sicut ACO est quinta pars anguli OCD; Latus verò DO isoperimetrũ superatur à BA ex Cor. præc. vt angulus superat angulum: Nempe 5. parte ipsius DO, quæ est AV, ideoque maius erit latus BV exagoni, quàm BI. Quare, cùm non capiat à B puncto vsque ad I, debebit capere inter puncta magis remota à centro, quam B, & I V.g. inter D, & O, vbi litera anguli OCD magis dilatata sunt, & lineam longiorem OD, quam IB capere possunt. Vnde CD perpendicularis longior erit, quàm CB.

THEOR. IV. PROPOS. XVII.

Figurarum Isoperimetrarum ea capacior est, quæ plures angulos, & plura latera habet.

PRobatur vtendo schem. propos. 50. Ex dictis pr.5.h. parallelogrammum factum ex dimidiato ambitu, & perpendiculari à centro super vnum latus cadente est æquale areę ipsius figuræ regularis; Quare dato eodem ambitu, & perpendiculari eadem, idem erit parallelogrammum; at si ambitus sit idem, at perpendicularis maior, erit quoque maius rectangulum, vtpote, quòd habeat latus maius: sed rectangulum factum ex dimidiato ambitu figurarum isoperimetrarum V, & A habet idem latus æquale dimidiato ambitui eiusdem longitudinis pentagoni V, & pẽtagoni A; At aliud æquale perpendiculari VE exagoni maius, quam NA sexagoni ex præced. & ideo maius rectangulum sexagono æquale, quàm illud, quod est æquale pentagono, & consequenter maior area sexagoni A quàm pentagoni V.

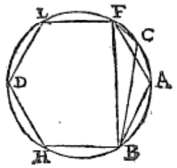
THEOR. V. PROPOS. LVIII.

Isoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima est æquilatera, & æquiangula.

DEtur figura ABHDLF maxima inter sibi isoperimetras. Dico eam esse æquilateram, & æquiangulam.

Prob. primò, quòd sit æquilatera. Nam si fieri potest, non sit æquilatera; sed latus BC sit maius, quàm CF, ducatur BF, & ex pr.1.h. fiat super BF triangulũ BAF æquicrurũ, & isoperimetrũ; Illud erit maius ex prop. 1. h. Exp. triangulo BCF; addito igitur cõmuni polygono BHDLF erit figura BAFD maior, quã CFDB cõtrà pſuppositũ, quòd repugnat; Ergo figura maxima inter isoperimetras sibi, & numero eodem laterũ costans erit etiam æquilatera.

Sic ostendes si exhibeantur alia latera, & dicantur non æqualia inuicem, vt BH, & HD, nam æqualia laterum semper spatia erũt maiora capacitate, quibus si addas spatium reliquum, seu latera sit numero disparia, seu paria semper conficietur spatium maius cum triangulis ęquicruribus maioribus, quàm cum ijs, quæ æqualia crura non possident.



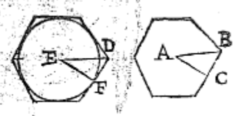
Prob. 2. pars. Nam sit aliqua figura BHLFA, in qua omnes anguli sint æquales isoperimetra alteri alicui CBHDLF, in qua sit tantũ angulus C inæqualis angulo A ducta BF; quia angulus BCF est minor angulo BAF triangulũ verò BAF est isoperimetrum triangulo BCF; cum in cęteris consentiat, & figura figurę eadẽ sit; anguli ad basim erũt minores ex 17. l.1. in triangulo BCF: quàm in triangulo BAF: quare ex Cor. prop.54. erit triangulum BAF maioris areæ, quàm triangulum BCF. Vnde addita communi area BHDLF, erit maior figura æquiangula ABHDLF, quàm non æquiangula CBHDLF.

THEOR. VI. PROPOS. LIX.

Circulus omnibus figuris sibi Isoperimetris rectilineis maior est, sicut & quæcumque Ellipsi sibi isoperimetra.

DAto circulo E, & data figura rectilinea isoperimetra A. Dico, quòd maior est circulus, quam figura data. Circumscribatur circulo figura similis totidem laterum, & ad aliquod latus ducta perpendiculari EF, & ad angulum ED constituatur rectangulũ triangulũ FDE, & idem fiat in figura A; sitque rectangulum triangulum, & illi simile ABC, vt patet, cùm figuræ sint similes, & ideo triangula ęquiangula.

Probatur nunc propositio, nam figura circumscripta maior est circulo in ambitu suo, vt per se patet, ergo maior etiam est rectilineo isoperimetro A; quare recta BA erit minor, quàm DE: Sed ob similitudinem triangulorum ita est BA ad DE, vt CA ad FE, ergo minor erit CA, quàm FE. Ideoque rectangulum sub semicircumferentia circuli, & sub radio comprehensum æquale ex dicendis prop. 3. tract. 30. areę circuli maius erit, quàm quod sub semiambitu rectilinei A, & minori linea CA, quam EF, quod ex dictis propos. 4. huius est æquale areę rectilinei, ergo maior erit circulus E rectilineo A.



Probatur quoque de Ellipsi, nam Ellipsis non potest continere figuram ęquiangulam, quę sit ei, quę in circulo inscribitur isoperimetra, & ęqualium numero laterum.

Quapropter omnis figura circulo inscriptibilis erit maior, quam omnis figura ellipsi isoperimetrę inscriptibilis, cum sit illa ęquiangula, hęc vero minimè, quapropter etiam circulus Ellipsi Isoperimetra maior erit.

COROLLARIVM I.

HInc est circulum omnibus figuris sibi isoperimetris maiorem esse, nam maior est omnibus, quę sint ęquiangulę, & ęquilaterę rectilineę, quę, & omnibus alijs Isoperimetris non ęquiangulis, vel non laterum ęqualium maiores sunt. Sic, etiam maior est circulus omni ellipsi sibi Isoperimetra, ergo omnibus figuris sibi isoperimetris absolutè maior est.

COROLLARIVM II.

SEcundò colligitur spheram quoque capaciorem esse omnibus corporibus equalis superficiei tàm sphericis, quàm planis superficiebus constantibus. Quandoquidem sphera componitur ex indefinitis circulis, aut saltem ex omni parte circuli trahi possunt. Cum ergo circuli omni figura plana isoperimetra sint capaciores, sequitur quoque, quod solidum circulis intextum, vt sphera est, omni figura solida capacior sit, Hec autem confirmatio satìs est in re per se admodum clara, licet sciam Theonem, & antiquos exactiùs, & magis mathematicè probare, sed eorum ostensio dependet à mensura corporum solidorum, quam nondum hausimus.

TRAC-

TRACTATVS XXX.

De Transformatione Curuilineorum.

EA omnia, quæ de Geodæsia plana considerauimus, de curuilineis quoque animaduertere oportet; quamuis eleuatior sit contemplatio, & acrioris ingenij acumen exposcat; neque omnino sit perfecta; cum aliquæ, vt Hyperbola trasformari in rectilineas, vsque adhuc recusauerint, imò nec quidem in curuilineas diuersi generis deduci potuerint.

EXPENSIO I.

De quadratione Circuli Arithmetica.

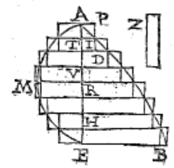
MVlti ne dum apud veteres; sed recentiores etiam, vt testatur Hyeronimus Vitalis ex nostris in suo Lexico mathematico in circuli Tetragonismum sc. quadrationem totis viribus incubuere, & quidem apud antiquos Antiphon, Bryso, Hyppocrates Chius. Inter Neotericos autẽ Orontius Finæus, Campanus, Nicolaus Cardinalis Cusanus, desudarũt. Sed ceteris sublimus Ambrosius à S. Vincentio in insigni opere, quod de Quadratura circuli inscripsit totam penè etatem consumpsit, Sed licet multa consequutus fuerit omnino admiratione digna; tamen scopum assequutus nõ est. Nam eius quadraturas (quatuor enim protulit l. 10. de quadratura circuli inscripto) impugnat Vincentius Leutaudus preter multos alios, & euidentiùs deijcit, & licet Franciscus Xauerius Ayscon authorem propugnet. Id tamẽ libro Lugduni impresso anno 1663. noue impugnationi eidem Leutaudo locum dedit. Vnde satiùs iudicaui antiquam quadraturam Archimedeam approximantem veritati proponere, quàm nouum tetragonismum, & laboriosissimum, & adhuc sub lite versantem producere.

THEOR. I. PROPOS. I.

Cuicumque figuræ curuilineæ, seu mixtilineæ possunt tot rectangula inscribi, aut circumscribi, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem.

SIt data figura plana ABE, que sit aut curuilinea, aut mixta. Dico tot rectangula posse, vel inscribi, vel circumscribi, vt, quod inter figuram curuilineam, vel mixtilineam, & rectangula superficiei remanet, & intercipitur, sit qualibet quantitate plana V. g. assignata Z minus.

Ducta AE hec diuidatur taliter, vt maximum rectangulum, quod fit ex eius partibus, & maxima linea ei perpendiculariter insistente, vt BE, vel RM sit minus quantitate Z data, & cetera omnia rectangula simul sumpta relinquẽt inter se, & figuram cui inscribuntur, vel circumscribuntur quantitatem data Z minorem.



Probatur. Relinquunt inscripta paulò magis, quàm medietatẽ rectangulorum AI, & ID, & cet. circũscripta verò AI, & ID paulo minus ob lineam curuã, & globosam (è contra de concaua esse asserendum) sed omnia rectangula IA, ID, & cetera curuam intercipientia equant BH vt patet, ergo spatia, que remanent, vt AIT, vel IAP, & cetera omnia triangula mixtilinea conclusa inter curuam, & rectangula inscripta, quod sint minus quasi sub duplo, quam rectangula AI, & ID curuam stipantia equalia rectangulo BH equanti planitiem Z sunt minus, quam planities Z. Quod autem rectangula AI, & ID stipantia curuam AIB æquent rectangulum BH patet ex 3. lib. 2. Elem. cum TI, & cætere sint partes ipsius EB, & TA, & ID, & cæteræ sint omnes æquales ex hypothe ipsi EH.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. II.

Figura qualibet circulo circumscripta maiorem obtinet ambitum, quàm circulus, sicut, & figura inscripta minorem.

LIcet pressiùs hanc propos. ostendat Archimedes lib. 1. de sphæra: nobis tamen ex communi conceptu eam probare satis erit. Circumscripta figura continet circulum. Ergo, cùm ex communi hominum sensu sit maius continens, quàm contentum, erit maior ambitus continentis multilateri, quàm contenti circuli.

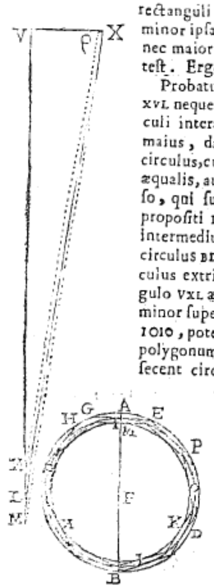
Probatur quoque secunda pars. Nam si circulus contineat multilaterum inscriptum ex eodem principio erit maior circulus, quàm inscripta figura.

THEOR. III. PROPOS. III.

Area cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo triangulo ex linea recta æquali circumferentiæ, tamquam vno crure, & semidiametro tamquam altero crure confecto.

SIt circulus 1010 intermedius, & supponatur factum triangulum rectangulum XVL, cuius crus VL sit æquale ipsius circuli peripheriæ, & VX semidiametro. Dico hanc rectanguli aream esse æqualem areæ circuli 1010.

Probatur. Nam, si non est æqualis erit area rectanguli VXL, aut maior, aut minor ipsa circuli planitie: Sed nec maior, nec minor esse potest. Ergo erit æqualis.



Probatur. Quòd triangulum XVL nequeat esse maius area circuli intermedij. Nam, si est maius, dabitur itaque aliquis circulus, cuius area, aut illi erit æqualis, aut proximè minor ipso, qui superet aream circuli propositi 1010, & sit aliquid intermedium. Sit itaque iste circulus BDAH: Quia itaq; circulus extrinsecus BDAH rectãgulo VXL æqualis, vel proximè minor superat circulum datum 1010, poterit in ipso inscribi polygonum, cuius latera non secent circuli interioris 1010 peripheriam. Sed ad summum tangãt. Quod fiet si ducto radio FI, tãgens ei erigatur in I, quæ sit CG; ductis enim ei æqualibus EP, &c. æquales circũferẽtias abscidẽt; ex 32.l.3 donec aut minor circũferentia remaneat; aut æqualis HG; si æqualis tanget dicta linea HG; si minor saltem non tanget.

Confecto itaq; polygono HPDB, erit vt polygonum comprehendes maior eius ambitus, quàm circumferentia circuli 1010, quam claudit: Quaobrẽ, si fiat huic polygono triangulũ XVM rectãgulum æquale ex propos. 5. Trac. præc. linea VM omnibus cruribus polygoni HPDB æqualis, erit maior: quàm VL, æqualis peripheriæ medij circuli 1010. Quare etiam triangulum VXM erit maius; quàm triangulum VXL. Verùm triangulum VXL est æquale; vel maius circulo exteriori BDA (siquidem cum dicerent aduersarij triãgulum VXL esse maius, quàm circuli planities 1010 circulũ BDA præsupposuimus triangulo illi VXL, aut æqualem, aut minorem) Cùm ergo triangulum VXL sit, vel æquale, vel maius circulo exteriori BDA; iste circulus exterior BDA, remaneret minor ipso triãgulo VX, quod etiam minus est triangulo VXM, vt ostensum est: at VXM factũ est æquale poligono HEPDB, ergo circulus exterior BDA esset minor, vel æqualis Polygono HEPDB; quod in se concludit, quod est absurdum.

Probatur deinde, Quòd triangulum prædictum VXL non possit esse minus, quàm superficies circuli propositi 1010: Quoniam, si est minus, dabitur aliquis circulus intermedius, aut æqualis, aut maior prædicto rectangulo VXL. Sed tamen non excedens circulum datum 1010. Detur MKN, & illi circumscribatur polygonum, cuius latera in circulo dato 1010 comprehendantur, vt supra docuimus efficere, erit itaque area huius polygoni minor area circuli dati 0101 circumscribentis. Vnde si fiat rectangulum aquale ex NKM ambitu polygoni, vt supra prop. 5. præc. Tr. vt, est QVN; hoc erit minus rectangulo triangulo VXL, vtpote crure minori VQ æquali perpendiculari FM, & VN ambitu polygoni inscripti. Cùm ergo triangulũ VXL maius sit triãgulo VQN, etiam circulus internus MKN, qui est maior ex aduersarijs, vel æqualis triãgulo VXL (siquidẽ cũ afferrent VXL esse minus circulo 1010 circulũ KN fecimus, aut maiorẽ proximè, aut æqualẽ ipsi triãgulo VXL) Circulus inquã internus MKN erit maior, quã Polygonũ, à quo circumscribitur, cũ polygono illi triãgulũ VQN sit æquale, & minus triangulo VXL, qui internus prædictus circulus KNM, aut maior est, aut ipsi æqualis ex suppositione; Hoc autem esse nequit, nempe quod internus circulus comprehensus sit æqualis Polygono, à quo circumscribitur.

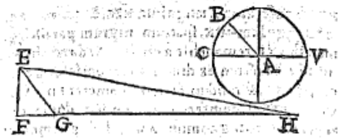
Cum ergo triangulum VXM, nec minus esse possit, nec maius circuli dati 0101 planitie, oportebit fateri; quòd illi æquetur.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si detur triangulum, cuius altitudo sit radius, & basis portioni peripheriæ æqualis subtendenti sectorem, hoc erit sectori æquale.

EXibeatur sector ABC, in circulo BCV & trianguli FEG crus FE radio AC æquetur, & basis FG æquetur arcui sectoris CB. Dico triangulum EFG æquale esse sectori ABC.

Probatur. Nam sit FH æqualis peripheriæ toti. Erit itaque, vt arcus CB ad circulum: sic basis FG ad basim FH cùm ex propos. 7. lib. 5. æqualium ad æquales sit eadem proportio. Verùm ex prop. 39. lib. 6. vt arcus CB est ad peripheriam CBVC, ita sector ACB est ad superficiem totius circuli, & ex 1. lib. 6. vt basis GF ad basim FH, ita EFG triangulum



gulum eiusdem altitudinis FEG ad triangulum FEH. Ergo ex 16. lib 5. ita erit sectoris planities ACB ad planũ circuli CBV, vt trianguli FEG ad planitiẽ trianguli EFH, & *permutando*. Ita erit ACB sector ad FEG triangulum, vt circulus CBV ad triangulũ EFH: sed circulus, & triangulum in preced. ostensa sunt æqualia: ergo etiam sector ACB, & triangulum FEG equabuntur: quare, & rectangulum ex dimidio, vel radio, vel linea æquali dimidio arcui erit ex 39. equale sectori ACB.

PROBL. I. PROPOS. V.

Aream circuli ex data diametro, & circumferentia proximè inuenire.

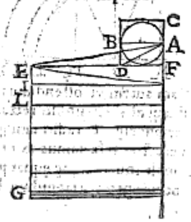
CVm ex ostensis propos. 3. Tract. 16. inuenerimus circumferentiam ad diametrum se habere vt 22. ad 7. quæ tamen verâ paulò maior est. Hinc si accipiamus 7. pro diametro, & 22. pro circumferentia, mutuâ horum numerorum multiplicatione efficiemus rectangulum, seu planum 154. cuius medietas 77. ex propos. 40. lib. 1. Elem. erit equalis triangulo rectangulo XVL; de quo iam ostendimus prop. 1. aree circuli æquale esse.

Si verò placeat aream rectanguli verâ circuli planitie minorem insensibiliter. Accipies diametro vere circumferentiam habentem minorem proportionem: quam 22. ad 7. nimirum eam, quam prop. 5. tract. 18. explicauimus, in qua posito diametro partium 71. circumferentia erit 223. nimirum in proportione tripla super decupartiente septuagesimas primas; idest comprehendet diametrum ter, & ferè septimam ipsius partem deficiente tantùm $\frac{1}{7}$ vnius vnitatis. Et ita vt priùs multiplicatus diameter 71. per circumferentiam 223. efficiet aream 15833. que bifariam diuisa erit 7916. $\frac{1}{2}$ circuli planities.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Area circuli proportionem eam consequitur ad quadratum diametri, quam 11. ad 14. proximè.

SIt circulus, cuius diameter AB, eiusque quadratum CD. Dico aream circuli veluti 11. ad 14. ad quadratum diametri respondere.



* Dimidium quadrati CD erit AD, & quarta pars eius erit triangulum FAD. Prolungetur diameter FD in E, atque FE æqualis circumferentiæ præsupponatur, & ducatur AE. Itaque triangulum FAE erit eiusdem altitudinis, ac triangulum FAD, quod est quarta pars quadrati ex diametro. Quamobrem ita erit triangulum FAE ad triangulum FAD, nempe ad quartam partem quadrati CD, vt basis FE ad basim FD ex 1. lib. 6. Elem. quæ est proximè, vt 22. ad 7. Quare erit triangulum FAE, equale areæ circuli ex 3. h. ad FAD æquale quartæ parti quadrati CD proximè, vt 22 ad 7. quare FAE triangulum ad quadratum totum quater maius CD erit vt 22. ad numerum quater maiorem 28. que est eadem proportio, quæ 11. ad 14.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Ex diametro noto aream circuli proximè inuenire.

SIt notus diameter Partium 84. quadretur hic numerus, & sit 7056. Vtendò itaque regula aurea fiat, vt 14. ad 11. sic 7056. ad aliud, & exeret area circuli 5544.

THEOR. VI. PROPOS. VIII.

Quadratum circumferentiæ se habet ad aream circuli, vt 88. ad 7.

* PRobatur; Nam posito FE part. 22 in figura prop. 6. antec. nempe æquali proximè circũferentiæ, & posito diametro partium 7. si fiat quadratum ex FE circumferentia continebit sex rectangula dupla AFE ex 3. lib 2. Elem. & insuper rectangulum nigrum ex septima parte confectum: Nam 22. continet ter diametrum partium 7. & ideo sexies semidiametrum partium $3\frac{1}{2}$, & addit insuper septimam partem diametri, nempe $\frac{2}{7}$ semidiametri: Quare rectangulum FI ex circumferentia FE, & semidiametro FA erectum, erit duplò maius, quàm triangulum FAE proximè æquale areæ circuli. Propterea que quadratum FG ex circumferentia continebit duodecies aream circuli, & insuper parallelogrammum nigrum, quod est septima pars rectanguli FL sub toto diametro EL, & tota circumferentia FE comprehensi, at $\frac{4}{7}$ dimidij rectanguli FI, & ideo $\frac{4}{7}$ trianguli FAE; Si itaque ad vitandas fractiones efficiamus aream circuli, vel triangulum ei proximè æquale FAE esse partium 7. totum quadratum FG duodecies maius erit, cum quatuor septimis partibus, nempe cum rectangulo nigro part. 88. Nam 7 duodecies acceptus facit 84. & $\frac{4}{7}$ additi efficiunt 88. & ideo quadratum FG erit partium 88. posita area diametri partium 7.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Aream circuli proximè inuenire.

FIat, vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ 254. ad aliud, & adhibita regula proportionum elicietur numerus 5544. pro area circuli quæsiti.

PROBL. IV. PROPOS. X.

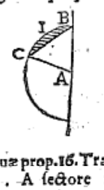
Datâ sectoris peripheria, & cruribus, eius aream adinuenire.

SIt, vt in pr. 4. sector ABC, cuius AC crus notū sit partium 25. pedum, & arcus BC 10. pedum, ideoque ex prop. 4. huius triangulum rectangulum EFG, cuius crus FE sit 25. pedum, & basis FG 10. pedum erit ei æquale. Quaderè si mutua multiplicatione fiat rectangulum partium 250. & medietas sumatur partium 125. hęc erit sectoris arealis quæsita quantitas.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Cognito sectore, & chorda cognoscere aream segmenti circuli.

SIt segmentum circuli nigrum BIC, deturque chorda BC, & cognitus quoque sector BACI;

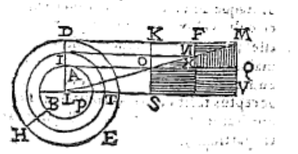


Debet priùs per ea, quæ prop. 16. Tract. 29. triangulum BAC cognosci. A sectore itaque subductum triangulum CBA relinquet segmentum nigrum ICB.

PROBL. VII. PROPOS. XII.

Annulum planum in quadratum redigere, & mensurare.

DEtur annulus DEHAPB planus, cuius notus sit circulus medius ITI, vt faciliter ex nota diametro inueniri potest: multiplicetur hic circulus per residuum semidiametri AD subducto diametro minori LA, & productum erit area prædicti annuli DEHAPB.



* Prob. Nam fiant parallelogrāma LM, LN, & LO æqualia singulis circulis DEH, ITI, & BAP; quæ ob latera æqualia semicircumferentijs erunt similia, cùm sit ita radius vnius circuli ad radium alterius vt peripheria ad peripheriā ex pr. 39 l. 6. El. & ex 25 l. 6. ideo triangula circa diametrum cōsistentia ex prop. 35. lib. 1. Elem. MOR, & MOQ, necnon, & complementa OD, & OV erunt æqualia: si autem spatio MXOQ auferatur triangulum NXO, & addatur æquale triangulum MFN, spatium nigrum parallelogrāmo albo XD remanebit æquale. Sed rectangulum istud est factum ex dimidia circumferētia circuli medij ITI, & residuo AD semidiametri LD. Quare ex integra circumferentia, cùm fiat duplo maius æquabitur toti gnomoni AMS: sed gnomon AMS æquatur annulo DEH, APB. Ergo etiam duplum rectangulum XD, quod fit ex peripheria ITI, & segmento AD æquabit annulum DEHABP.

Quod autem gnomon AMS æquet annulum patet. Nam rectangulum OAS ęquat circulum BAP. Totum autem rectangulum LM æquat totum circulum DEH. Ergo subductus ab æqualibus rectangulum LO ab LM, & minimus circulus à toto circulo restabūt annulus DEHPBA, & gnomon AMS residua æqualia.

COROLLARIVM.

HInc quoque agnosces partem annuli dimetiri. Nam sicut tota annuli media peripheria ITI cum residuo diametri AD multiplicata dat totum annulum; sic pars IT peripheriæ eiusdem medię cum eodem diametri residuo AD multiplicata partem annuli ADT, quem metitur, producet.

EXPENSIO II.

De Quadratione Circuli Geometrica.

FAciliori modo quadrationem circuli operi demandabimus mediante quadratrice, quam descripsimus tract. 18. de flexis ex prop. 14. vnde fit.

THEOR I. PROPOS. XIII.

Circuli areæ æquale triangulum parallelogrammumque, & quadratum constituere.

COrollario 1. propos. 19. tract. 18. cit. probauimus DB sagittam ad DX radium esse, vt radius ad quadrantem XY, si in quadrante XY circuli propositi quadrandi describamus quadratricem; obtinebimus quoque sagittam DB illius. Quamobrem, si sagittę inuentę DB, & radio XD tertiam proportionem inueniamus, hęc erit ęqualis quadranti XY, quam quadruplicabimus, & totum ambitum circuli, cuius radius XD æquabit.

Quoniam autem vt ostendimus prop. 2. h. area circuli est æqualis triangulo rectangulo ex linea æquali peripherię, & radio tamquam ex duobus lateribus erecto: si faciamus ex radio DX, & tertia proportionali inuenta, quę ęquat peripheriam circuli XY totius; patet triangulum hoc esse ęquale

areę circuli, cuius quadrans DXY. Quod si ex dimidio prædictę lineę inuentę, quę æquat peripheriam constituatur rectangulum parallelogrammum, cùm hoc sit æquale triangulo prędicto, erit quoque æquale areę ipsius circuli; cum vt prędiximus prop. 23. tract. pręced. hoc modo triangulum in rectangulum ęquale conuertatur.

Tandem parallelogrammum commutetur in æquale quadratum, vel ex prop. 14. l. 2. vel reperiendo inter eius latera mediam proportionalem. Nam quadratum ex hac media erectum cum sit æquale parallelogrammo consequenter etiam circulo æquabitur.

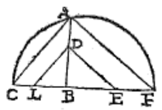
Vnus autem circulus in quadratum redactus multos alios similiter quadrabit. Quandoquidem si offeratur alius circulus similiter redigendus ad quadratum. Inueniatur quarta linea proportionalis istis tribus, nempe diametro circuli, & rectę ęquali eius circumferentię ex linea quadratrice iam notæ, & diametro circuli propositi ex propos. 12. lib. 6. & inuenietur linea ęqualis peripherię circuli oblati; siquidem ex prop. 33. lib. 6. ita diameter est ad diametrum, vt peripheria cuiuscumq; circuli ad alius peripheriam. Si itaque hac quarta proportionali inuenta, & semidiametro circuli alterius propositi constituamus triangulum, hoc erit ęquale alterius circuli propositi areę, quod, & redigemus in rectangulum, & in quadratum ęquale, quę consequenter ipsa quoque aream circuli exęquabunt.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Quadratum in circulum æqualem transfundere.

OPortet priùs inuenisse aliquod quadratum ęquale alicui circulo ex prop. pręced. cuius circuli radius notus sit. Deinde inueniatur tribus quadrati lateri, & circuli ei ęqualis iam noti radio, & tandem lateri quadrati in circulum transfundendi quarta proportionalis ex prop. 12. lib. 6. & hęc erit diameter circuli ęqualis quadrati.

Detur itaque Ex. g. latus quadrati AB, & diameter notus circuli ei ęqualis BC, & latus quadrati trasmutandi BD. Ducta parallela DL. Linea DL erit diameter circuli trasmutandi, qui cōsequetur aream ęqualem quadrato ex BD.



Probatur. Nam sit nota BF semicircumferentię pręhabiti noti circuli ęqualis, nempe tertia proportionalis duabus BC, & BA, talis enim prop. 13. huius ostensa est, cum in fine illius fuit dictum, quòd latus quadrati circulo ęqualis sit medium proportionale inter lineam ęqualē semicircumferentię eius, & radium, cum sit æquale rectangulo ab illis extremis comprehenso, & ideo FB tertia proportionalis. Iungatur deinde FA, quę claudet cum AC, vt patet ex Coroll. prop. 13. l. 6. angulum rectum, cùm sit BC radius ad BA latus quadrati, vt BA ad BF semiperipheriā, deinde à puncto D ducatur DE parallela ipsi AF quibus positis.

Probatur prop. Nam quia est ob similitudinem triangulorum FB ad BA, vt EB ad BD, & vt BA ad BC ita DB ad BL; erit ex *æquo* eadem proportio FB ad BC, vt EB ad BL; quadere ex 43. l. 6. BE erit ęqualis circuli semicircūferentię, cuius semidiameter sit BL. Sicut FB est ęqualis circuli semiperipherię, cuius radius BC. Et quia quadratum DB est ęquale rectangulo ex linea EB ęquali peripherię, & BL radio; Etiam BD quadratum erit ęquale circulo, cui radius BL, illi rectangulo ex BE, & BL ęquali.

PRORL. II. PROPOS. XV.

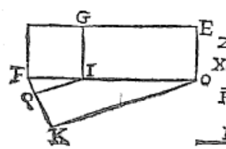
Dato sectori inuenire rectangulum æquale cognita proportione arcus subtensi ad circulum.

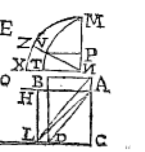
QVoniam ex propos. 4. huius. Rectangulum sub linea dimidio arcui æquali, & sub radio comprehensum est æquale sectori, si detur eius proportio ad circulum V. g. quòd octaua pars, accipietur octaua pars lineę rectę ęqualis peripheriæ inuentæ, & ex huius dimidio, & ex radio rectangulum constituètur. Nam dimidium octauæ partis lineæ æqualis peripherię erit æquale dimidio octauæ partis peripheriæ. Vnde rectangulum quoque erit ęquale sectori.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Dato rectangulo circulo æquale constituere eius sectorem æqualem dato rectangulo minori.

* DEtur rectangulū EF, æquale areę, circuli sub FO semiperipheria, & sub radio OB cōprehensum, & rectangulum ACBD, eo minus, cui quęritur sector ęqualis. Si non est eiusdem altitudinis, ac EF, redigatur ad eandem altitudinem, ex prop. 6. part. 1. huius, & sit CH. Mensuretur deinde eius latus CL in latere FI. & ducta GI, erit parallelogrammū GF ęquale ipsi CH, & cōsequenter CB parallelogrammo. Deinde ex pr. 10. l. 6. Elem. secetur OE, vel FK diameter iuxta proportionem, quam habet FI ad OF, & sit eadem proportio FQ ad QK; Radio itaque FK seorsim fiat quadrans MNX in quo inscribatur quadratrix MVT, qui quadrans erit quarta pars parallelogrammi EF, cum sit quarta pars circuli æqualis.





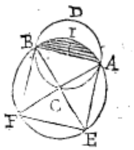
Translata itaque FQ in PN ducatur ad quadratricem MVT parallela PV basi NT, & & per V à centro N ducatur radius NZ. Dico quadruplum sectoris NXZ esse ęquale parallelogrammo ABCD.

Prob. Nam vt sector NZX, est ad quadrantē MNX ita est arcus XZ ad quadrātis ambitū XZM ex 39. l. 6 vt autē arcus XZ ad XZM quadrantem, sic portio NP ad radiū NM ex 18. Tr. 18. & FQ ad QK, & FI ad FO, ex effect. & rectangulū cū sit eiusdē altitudinis ex 1 lib.6. FG ad FE: Igitur ex 16. lib.5. Elem. vt est sector XZN ad quadrantem XNM; ita est rectangulum FG ad rectãgulum FE; sed quadruplum quadrantis XZM, & rectangulum FE sunt æqualia. Ergo etiam ex prop.12. l.5. Elem. sectoris NZX quadruplum, & rectangulum FG erunt æqualia.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Triangulum Lunulæ exhibere æquale.

FVit hic nixus, quò Hyppocrates Chyus ad quadrationem circuli peruenire putauit; fiat itaque circulus ACBD, & ducto diametro AB, & quadrati lateribus AC, & CB, alius circulus fiat radio CB, & relinquet in antedenti circulo ACBD lunulam AIDB, quam dico esse æqualem triangulo ACB.



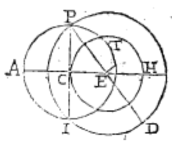
Probatur. Qooniam quadratum ex EB est duplum quadrati ex AB circulus quoque EABF erit duplus circuli ACBD ex prop.41.lib.6. & ex prop.39. semicirculus semicirculo, & quadrans quadrante duplus erit; Si ergo quadrans circuli minoris dupletur, & fiat semicirculus ADB, is erit æqualis quadranti ACB: Dempto igitur communi spatio nigro AIB inter vtrosq; intercepto, erit Lunula AIDB triangulo ACB æqualis.

PROBL. V. PROPOS. XVIII.

Dato circulo annulum planum æqualem exhibere, cuius magnitudinis placeat? Et data annuli latitudine, & diametro circulum annulo æqualem facere.

SIt datus circulus APTI cuius centrum C, & dato semidiametro annuli describendi EP, qui vt patet debet esse maior semidiametro PC dati circuli, à quo erigatur perpendicularis à centro C, quæ sit radius CA. & centro P ad interuallum dati diametri EP describatur arcus, qui secet AE in E; ibiq; facto centro describatur EP radio circulus, & eodem centro E interuallo EC alius circulus describatur, *quem aio incindere annulum* CHDIP *æqualem circulo* APTI.

Probatur. Nam vt sunt quadrata ex diametris, ita circuli ex prop. 40. lib.6. Cum ergo ex 11. lib. 2. quadratum PE sit æquale duobus quadratis ex CP, & CE etiam erit equalis circulus ex EP duobus circulis ex CP & CE. Ergo etiam circulus PD erit equalis duobus circulis ex PE diametro, & CH diametro, cùm sint dupla circulorũ super semidiametros CE, & CP, & circulus quoque PD duplus circuli ex PE semidiametro. Quare cum circulus ex PD, vt diametro æquet circulos ex IP; & CH diametris, ablato CH communi obtinebimus annulum CPHDI æqualem circulo APTI.



Quod si detur annulus CPTHD, & desideres huic annulo adinuenire circulum æqualem primò ex propos.19.l.3. duces tangentem PCI interiori circulo CTH vsque dum secet extrinsecum PDI, quam bifariam diuides, & produces AE, factoque centro in puncto contactus C interuallo CP describes circulum; eritque circulus æqualis annulo dato CPHD, vt patet ex præc. ostensione.

COROLLARIVM.

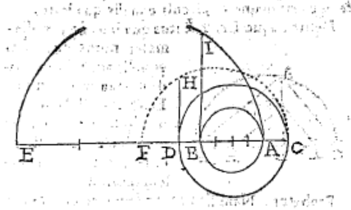
HInc disces plurimos circulos in vnum aggregare; Siquidem ex preced. circulus PDI equatur circulis API, & CTH. Vnde sic eidem PID aliũ poteris aggregare; successiuèque alios vsque dum placeat.

PROBL. XI. PROP. XIX.

Circulos proportionaliter augere, vel minuere.

EFficies quadratum ex prop.28. Tract.29. V.g. duplum, vel triplum alterius; describesque circulos super eorum latera, tamquam diametris; obtinebisque circulos in data proportione tripla V.g. maiores. Sit circulus AB augendus, ita vt ad circulum maiorem se habeat vt 1. ad 3. Sit rectangulum ex AB, & BE triplo maius, quam quadratum AB, quod fit assumendo latus BE triplò maius: Nam cum sint eiusdem altitudinis se referent, vt bases AB, & BE ex 1. lib.6. Deinde inter AB, & BE reperiatur media proportionalis BI, & quadratum ex BI æquabitur rectangulo AB, & BE triplo maiori, quam quadratum ex AB constituatur, ergo circulus ex IB, vel æquali CD, & erit intentum.

Si verò oporteat diminuere sit circulus CD minuendus, diuidaturq; latus CD in tres partes, & sit FD æqualis tertiæ parti; ita vt se habeat rectangulum ex CD, & FD tertia parte ad quadratum FD, vt 3. ad 1. interque totam diametrũ CD, & tertiam partem DF sit media proportionalis DH, & circulus ex DH, tamquam diametro factus erit $\frac{1}{3}$ circuli ex CD



Patet, quia circuli ita se habent in proportione, vt ex diametris quadrata ex 39. lib.6. ideoque se habebunt ad inuicem, vt quadratum ex CD ad quadratum ex AB; sed quadratum ex CD ad quadratum ex AB se habet, vt rectangulum AB, & BE ad quadratum AB ex constructione, nimirum, vt 3. ad 1. ergo etiam circuli ex 16. lib.6. se habebunt, vt 3. ad 1.

EXPENSIO III.

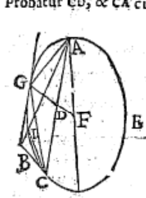
De Ellipsium tum inuicem, tum in alias figuras transmutatione.

TRansformatio Ellipsium non minus vtilis; quam necessaria est, cum enim ipsius vsus sit apud homines communissimus ipsius quoque mensuratio, multoties, ne dum opportuna erit, sed & pernecessaria: iureque succedit circulo cùm sit quoad figuram valdè ei proxima, & ferè in omnibus proprietatibus suis illum imitetur.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Triangulum maximum Ellipsi inscribere.

SIt Ellipsis ACE, & eius segmentum CGA, sitq; inscribendum maximum triangulum, quòd in eo inscribi queat. Ex centro F per medium D lineę CA ducatur diameter GF, & compleatur triangulum CAG, quod erit maximum.

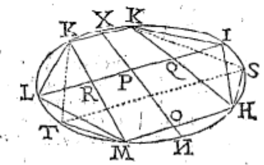


Probatur CD, & CA cum ex effectione sint equales sunt applicatę, & GF diameter def.11. Tract.24. quare ducta BG contingente in G, hæc erit parallela lineæ CA ex prop. 28. Tr.24 Si ergo CGA triangulum maximum non est, assignetur aliquod maius & sit CIA; producaturque IA in B ad contingentem BG, & ducatur CB. Erit igitur triangulum CBA æquale triangulo CAG ex propos.39.lib.1. Coroll. Ergo CIA erit minus, quàm CAG, quod ponebatur æquale. Ergo non dabitur triangulum maius, quàm CGA.

THEOR. I. PROPOS. XXI.

* *Omnia triangula, que super bases nectẽtes diametrum aliquem cum applicatis, vel applicatas ad idem punctum, nec non, & vertices in applicatis similiter obtineant, inter se sunt æqualia.*

SInt HK, & KM nectẽtes verticem diametri X, vel applicatarum KK cùm applicatis OM, & OH ad idem punctum O, verticesque earum sint in applicatis PI, & PL ad idem punctum P. Dico hæc triangula HIK, & KLM esse æqualia.



Probatur. Nam PL, & PI applicatę sunt equales; Quare subductis æqualibus QP, & PR, remanebunt bases æquales IQ, & RL: Quare triangula in eundem verticem X, vel in parallelam KK desinentia IQK, & KKL erunt equalia: Sic, & triangula IQH, & RML, vtpote inter parallelas HM, & IL. Vnde tota triãgula HIK, & KLM erunt æqualia.

Quod autem QP, & PR sint æquales, patet. Quia KK, & HM sunt parallèlę; & ideo cum HO, & OM sint equales, & KX, & KX ex prop 13. Cor. tract. 29. erunt etiam RP, & PQ equales, vel si in eundem verticem terminent ex prop.4. Cor.2. lib.6.

COROLLARIVM.

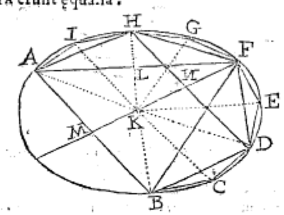
HInc euenit, quòd si triangulum, & taliter assignatis sit maximum, vt KLM, quòd etiam aliud HIK erit maximum. Nam si non est, sit puntactum triangulum maximum HSK, & ducatur ST parallela HM, & constituatur triangulum punctatum MKT, quod erit minus triangulo MLK: quod ponitur maximum: sed hoc est æquale triangulo HIK ex præced. Ergo triangulum HIK maius erit punctato KMT: quare contra hypothesim, & maius punctato HSK ipsi æquali ex pręced. quod est absurdum cum SHK ab aduersarijs statuatur maximum, quod in segmento HIK capere possit.

THEOR. II. PROPOS. XXII.

Segmenta Ellipsium, in quibus capiant maxima triangula æqualia, inter se sunt æqualia.

SInt duo segmenta FHA, & FDB Ellipsis AFEB in quibus capiant triangula maxima equalia FDB, & FHA. Dico ea esse æqualia.

* Probatur. Nam KH erit diameter, & LA, & LF applicatę, & bases FH, & HA nectentes diametrum HK; quæ bifariam diametris, KI, & KG diuisæ constituent triãgula maxima: ideoq; ex præc. FGH, & HIA erunt equalia.



Sic si connectatur D, & H recta DH nectens erit parallela lineæ BA ex præced. quare HN, & ND erunt applicatæ. Vnde bases DF, & FH nectentes diametrum KF, & applicatas DN, & NH diuisæ bifariam diametris KG, & KE substernent triangula maxima, & ex prec. æqualia HGE, & FED. Sicque erũt quoq; æqualia triãgula BCD, & DEF; & sic probabis si alia triãgula in residuis rursùs inscribas in infinitum.

Si ergo inscribantur omnia triangula maxima in segmentis BDF, & FHA, quæ inscriptibilia sunt omne spatium occubabunt segmentorum ellipticorum FHA, & BDF; alioquin, si aliquid remaneret, non omnis triangulorum inscriptibilis multitudo inscripta fuisset: sed omnia triangula inscriptibilia remanent semper equalia; Ergo & spatium omne, quòd occupant, segmenti huius elliptici FHA æquatur alteri FDB ab æqualibus numero, & extensione triangulis occupato.

THEOR. III. PROP. XXII.

Sectores æqualibus segmentis Ellipticis insistentes inter se sunt æquales.

INspiciatur figura præcedens triangula MKA, & BKM; sicut, & BFM, & MAF sunt æqualia ob equales bases BM, & MA, cum desinant in eundem verticem K, & F. Ablatis itaque triangulis BMK, & MKA erunt æqualia triangula BKF, & FKA; additis itaque æqualibus segmentis ex Thesi BDF, & FHA erunt æquales sectores FKAH, & KBDF.

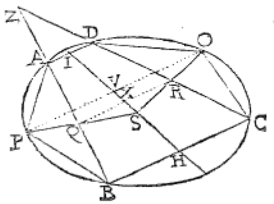
Vnde etiam ceteri erunt æquales sectores BKDC, & AKHI, vtpote dimidia æqualium, & sic de reliquis.

PROBL. II. PROPOS. XXIII.

Dato segmento abscindere aliam portionem ab Ellipsi æqualemquò quò versùm in ea placauerit.

SIt datum segmentum ApB, & ducatur semidiameter SP. Dato deinde semidiametro SO sit auferendum prædicto APB segmento aliud equale.

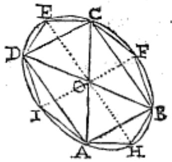
Ducatur OP, & vt SP ad QS, sic fiat OS ad RS, & ducatur QR, quæ ex prop. 4. lib. 6. Elem. erit parallela ipsi OP, & per R ducatur recta applicata CD, ex Cor. I. prop. 32. tract. 24. eritque segmentum COD æquale segmento APB.



Prob. Nam productis CD, & BA in Z, & ducta CB, & DA cùm sint CR, & RD æquales inuicem, vtpote applicatę; sicut etiam AQ & QB erit RD ad QA ex prop. 7. lib. 5. Eucl. vt CR ad QB in triangulo CBZ: ideoque CB, & OP, & DA erunt parallelæ ex prop. 2. lib. 6. Elem. quę diuisæ bifariam, erunt quoque applicatæ diametro HI. Vnde ex propos. 1. & 2. huius cum bases æquales CD, & BA nectant applicatas; & vertices sint in applicatis OV, & VP, necnō, & in diametris SO, & SP substernēt maxima, & æqualia triangula DOC, & APB, vnde, & ex 3. h. etiam segmēta ellipsis, in quibus sunt COD, & DBA erunt æqualia. Possent etiam duci à punctis A, & B parallelæ lineę AD, & BC ipsi PO, & per C, & D extrema trahi CD. Nam CR, & RD erunt applicatæ, & hinc, vt priùs ostēdetur propositio. Ratio est, quia productis CD, & BA in Z in triangulo CZB erit BQ ad QA, vt CR ad RD ex propos. 3. lib. 6. Elem. sed QA, & QB sunt æquales: ergo CR, & RD ex 7. l. 5.

COROLLARIVM:

HInc colliges modum, quo diuidas Ellipsim in partes subduplas V. g. in 2. in 4. in 8. in 16. Nam primo per quemcumque diametrum ex prop. 32. Tr. 24. bifariam secabis, deinde rursus aliam diametrum coniugatam duces, & diuides in 4. partes: exinde per eorū extrema duces rectas, quæ bifariam diuidentur, & diametri per earum medietates ducti quatuor iam partes effectas bifariam diuident, & 8 efficient, & sic de reliquis.

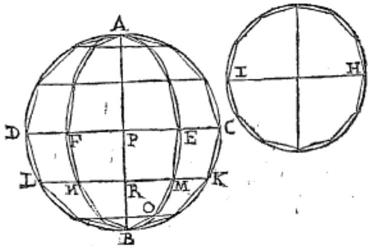


Patet; CDA, & CBA sunt triangula maxima; cùm BD applicata, simulque diameter eorum extrema nectat, ergo etiam segmenta CDA, & CBA erunt æqualia: triangulum verò COD est æquale triangulo COB ob bases æquales OB, & OD, & eumdem verticem C segmenta quoque æqualia CBD, BFC ex dictis prop. 21. huius sunt, & sic de alijs asserendum

THEOR. IV. PROPOS. XXIV.

Omne spatium ellipsis ea proportione respicit circulus maiori eius diametro descriptus, qua maior diameter minorem.

SIt Ellipsis AEFB. Dico ad eā proportionē habere circulū ABCD maiori diametro descriptum, quam diameter maior CD ad minorem EF. Quod vt probetur; sit circulus HI, cui eā habeat pportionē circulus ADBC, quā CD ad EF; quod fiet ex 23. l. 6. si inter CD, & EF media pportionalis inueniat HI, & ea diametro circulus HI describatur. Deinde, diuisis circulis in æquales numero partes inscribatur figura quælibet V. g. 12. laterum, in circulo verò CADB ducantur rectæ parallelæ diametro CD, vt sunt KL; puncta autem; in quibus secant ellipsim, vt E, M, & O rectis iungantur. Eritque in ipsa Ellipsi inscripta figura tot laterum, quot in circulo inscripta possidet.



Antequam autem propos. probetur, primò considerandum. Quod spatia plana á dictis lineis circuli comprehensa, vt est FRCX dicunt eam proportionem ad spatia Ellipsis inter easdem lineas clausa V. g. EPRM, vt CP ad PE, vel vt KR ad MR.

Ratio est deducta à propos. 72: Tract. 24. Conic. Cum enim sit CP ad EP, vel KR ad MR erit etiam eiusdem altitudinis spatium CKPR ad spatium EPMR, vt bases, quæ sunt eiusdem proportionis, vt propos 13. tract. preced. nimirum vel CP, ad EP, vel KR ad MR, & ita dicas de omnibus alijs spatijs. Quare figura inscripta in circulo ex prop. 17. lib. 5. Elem. ad figuram inscriptam in Ellipsi eam obtinebit proportionem, quam diameter Ellipsis maior CD habet ad minorem EF. Siquidem cùm singula spatia circularia singulis ellipticis sint in eadem proportione, quam CP ad CE, quę est eadem, quę KR ad MR, & sic de alijs lineis, quę omnes in eadem proportione sunt, etiam omnia spatia simul composita circularia ad omnia spatia simul composita Elliptica in eadem proportione erunt, vt CP ad CE, vel etiam CD ad EF.

Deinde aduertendum est quoque, quia fecimus circulum ACBD, se habentē ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum EF; quod etiam circulo maiori ACBD inscripta figura se habebit ad inscriptā circulo minori HI, vt CD ad EF ex pr. 26. 39. lib. 6. Quare figura inscripta Ellipsi, & figura inscripta circulo HI erunt ęquales ex prop. 7. l. 5. vtpote, quod illis dicat eandem proportionem CD ad EF figura circulo maiori ACDB inscripta.

Quo posito ostenditur propos. Spatium Ellipticum est ęquale areæ circuli HI, sed circulus CADB, ita est ex effectione ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum Ellipsis EF. Ergo etiam spatium circuli maiori diametro descripti ACBD respiciet spatium Ellipticum, vt CD diameter, vel BA respicit minorem diametrum FE.

Probatur quòd spatium Ellipticum sit æquale circulo HI. Nam si non est æquale erit, aut maius, aut minus; sed neutrum dici potest. Ergo erit æquale. Nam si non est Ellipsis æqualis circulo HI: Sit circulus HI maior. Describatur in circulo HI figura adeo multiplicatis lateribus, vt sit maior ipsa Ellipsi: siquidem in circuli maiori, quàm Ellipsis, maior figura ipsâ Ellipsi capere poterit. Similis autem figura circulo ADCB, & Ellipsi, vt docuimus, inscribatur, & erit figura multilatera circuli maioris ACBD ad multilaterā Ellipsis in eadem proportione, vt ad multilateram circuli HI, & ideo æquales erūt circulo HI, ac Ellipsi figurę inscriptę. Sed est maior figura circulo inscripta ex aduersarijs, ergo esset maior, simulque æqualis, quòd esse nequit.

Quod si asseratur circulus HI minor; quàm Ellipsis. Tunc in Ellipsi talis figura inscribatur adeo multiplicatis lateribus, vt docuimus, vt sit maior ipso circulo HI; Nam cum sit maior Ellipsis circulo HI adeo inscriptæ fig. latera multiplicari poterunt, vt euadat circulo HI in aliquo maior, sitq; alia tot numero laterū in circulo HI inscripta. Sed, vt ostendi, figura circulo HI inscripta est æqualis ipsi figuræ Ellipticæ, ergo figura in HI esset ęqualis, & vt volunt aduersarij minor, quam figura Elliptica: quod esse nequit.

COROLLARIVM.

HInc educitur Ellipsim ABEF ad circulum CDAB consequi eam proportionem, quam rectangulum ex CD, & EF lateribus ad quadratum CD. Ratio est, quod cum quadratum, & rectangulum sint eiusdem altitudinis CD se habebunt inuicem, vt bases EF ad CD, quàm, & adipiscitur Ellipsis ABFB, collata ad circulum ACBD.

THEOR. V. PROP. XXV.

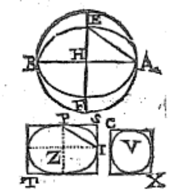
Si circulus fiat ex diametro, qui sit media proportionalis inter diametrum maiorem, & minorem Ellipticum, æqualis Ellipsi est.

PRobatur ex præced. Siquidem ostendimus talem circulum, nec posse esse Ellipsi minorem, nec maiorem. Quare æqualem esse conclusimus. Et hinc iam habes modum, quo circulum æqualem Ellipsi efficias; si inter CD, & EF mediam proportionalem inuenias HI, & ex eo circulum HI delinees.

THEOR. VI. PROPOS. XXVI.

Ellipsis quælibet ad circulum quemcumq; in proportione ea est, qua rectangulum ex diametris ad quadratum circuli dati.

SIt circulus V Ellipsis EAFB. Dictum est in Cor. Ellipsim EAFB ea proportione referri ad circulum maiori eius diametro descriptum AB; qua rectangulum ex eius diametris AB, & EF ad quadra-



tum AB; Sed circulus ex AB ad circulum V ea refertur proportione, qua quadratum AB ad quadratum XC ex propos. 40. lib. 6. Elem. Ergo ex *æquo* Ellipsis EAFD eam retinet proportionem ad circulum V, quam rectangulum ex AB, & EF diametris ad quadratum CX.

THEOR. VII. PROPOS. XXVII.

Ellipsis quæcumque ad quamcumque Ellipsim eam consequitur proportionem, quam rectangulum ex diametris primæ ad rectangulum ex diametris secundæ.

ELlipsis ABEF in fig. prop. anteced. eam adipiscitur proportionem ad circulum V; quam rectangulum ex diametris AB, & EF ad quadratum XC ex pr. antec. Sic circulus V ad Ellipsi alteram Z eam dicit proportionem ob eandem propos. quam quadratum CX ad rectangulum ST: Ergo ex *æquo* Ellipsis AEBF ad Ellipsim Z eam dicit proportionem, quam rectangulum ex AB, & EF ad rectangulum ST.

COROLLARIVM I.

Hinc deduces quomodo Ellipſes æquales deſcribantur, aut iuxta datam proportionem. Nam ſufficit efficere rectangula, quæ inuicem datam proportionem conſequantur ex prop.27.Tr. 39.præced & ex illorum lateribus conſtituere duas Ellipſes, ex prop.55.Tr.24. quæ inuicem datam proportionem rectangulorum obſeruabunt.

COROLLARIVM II.

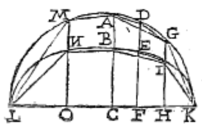
Hinc quoque eſt, quod Ellipſis ſit ad Ellipſim, & ad circulum, vt triangulum ex diametris, vel ſemidiametris AHE Ellipſis AEBF præc. prop. 26. ad triangulum ex ijſdem IPZ in altera Ellipſi Z, vel ex radijs in circulo: Patet quoniam triangula dimidia ſunt rectangulorum: ex ijſdem lateribus conſtantium: quare cum ſit totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Etiam triangulum erit in eadem proportione ad triangulum, vt rectangulum ad rectangulum, vel ad quadratum, & ideo, vt Ellipſis ad Ellipſim, vel ad circulum.

THEOR. VIII. PROP. XXVIII.

Segmentum circuli ſe habet ad totum circulum, vt ſegmentum Ellipſis ad totam Ellipſim, quæ ſint inter eaſdem parallelas concluſa.

Segmentum aliquod Ellipticum exhibeatur CBIH, & aliud circulare ACGH inter parallelas AC, & GH. Dico, quod ſpatium ACGH eſt ad circulum LAK, vt ſpatium Ellipticum CBIH eſt ad totam Ellipſim LBK.

Probatur, vt eſt AC ad BC, ita eſt ſpatium ACGH



Trapezij circulo inſcripti ad BCIH trapezium Ellipticum, & ita eſt ſpatium totum figurę inſcriptę circulo LMAGK ad figuram Ellipſi inſcriptam LNBIK, vt demonſtrauimus prop. huius 24. Initio. Diuidatur itaque trapezium circuli CAGH bifariam per eandem parallelam DF; diuidetur quoque trapezium BCIH, ducanturq; IE, & EB, necnon, & AD, & DG; eritque trapezium GHDF ad trapezium EFIH, vt DF ad EF, & vt AC ad CB, & ſic trapezium DACF erit ad trapezium BCEF veluti AC reſpicit BC, & ideo, vt figura LMAGK ad figuram Ellipticam: Quare etiam ſimul duo trapezia circularia ACDF, & DFGH erunt ad duo Elliptica BECF, & FEIH ex propoſ.17.lib.5.vt figura circulo inſcripta ad figuram Ellipſi inſcriptam; Et ſic ſemper ſequetur, ſi diuidas in infinitum; Sit igitur facta in trapezio dato circuli ACGH omnis poſſibilis ſubdiuiſio, ſicut etiam in trapezio Elliptico; ambo ita diuiſa omne ſpatium, quod inter GA rectam, & curuam ADG, ſicut inter rectam BI, & ambitum BEI abſument: alioquin, ſi aliquid remaneret, omnis poſſibilis ſubdiuiſio facta nō eſſet; cùm minor figura rectilinea capere poſſet in circulo, & Ellipſi ex cuius latere ductæ lineæ trapezium minus conſtituerent. Cùm ergo facta omni poſſibili trapeziorum ſubdiuiſione ſemper ſit omnis congeries trapeziorum in ACGH factorum ad omnem multitudinem trapeziorum in BCIH factorum, vt figura LMGK ad figuram LNIK, & figura LMGK ad figuram LNIK ſit vt circulus ad Ellipſim. Etiam trapezium circulo inſcriptum omni poſſibili ſubdiuiſione multiplicatum erit ad trapezium CBIH, & ideo ſegmentum circulare CAGH ad ſegmentum Ellipticum CBIH, cui ita ſubdiuiſa æquantur, erit, vt circulus ad Ellipſim: Quadere *permutando* ſegmentum circulare CAGH erit ad totum circulum, vt ſegmentum Ellipticum CBIH ad totam Ellipſim.

COROLLARIVM.

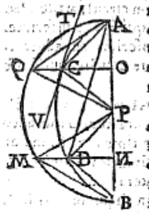
Hinc, ſi habes circulum in quotcumque partes æquales parallelis ſectum, obtinebis quoque ellipſim ex eius diametro, vt axi maiori factam in partes æquales ſimiliter ſectam ab ijſdem parallelis, verùm in circulo vſque adhuc inuenta via non eſt tales partes efficiendi.

PROBL. III. PROPOS. XXIX.

Datam Ellipſim in quaſcumque partes æquales, in quas circulus diuidi poſſit, per ſectores partiri.

Svpra docuimus ſubduplam diuiſionem, hic autem omnem eam, quæ circulo deſcribi poſſit. Sit itaque data ſemiellipſis ACDB, & oporteat eam in tres æquales ſectores partiri, vt ſemicirculus diuiſus eſt AQMB. Demittatur perpendicularis QO à circuli ſexta parte AQ, & ducatur CP. Dico ACP ſectorem eſſe ſextam partem Ellipſis, vnde ſi ducta TV tangente, & parallela AD facias alium ſectorem æqualem erit CPD altera pars. & ſic de reliquis faciendo alios ſectores æquales ex prop.21. huius.

Prob. ex 24. h. vt QO ad CO lineas, ſic QAO ſegmentum circuli ad ACO ſegmentum Ellipſis, & ita erit QOP in circulo triangulum ad triangulum COP in Ellipſi ob eandem altitudinem cum terminent in idem punctum P. Quare, ſi componantur, ita erit triangulum QOP cùm AQO ſegmento, ideſt ſector AQP in circulo ad triangulum COP cū ſegmento ACO, ideſt ſectorem ACP in ſemiellipſi, vt QO ad CO: Sed vt QO ad CO, ita eſt



ſemicirculus AQMB ad ſemiellipſim ACDB ex prop. 24. huius contextu Erit itaque AQP ſector circuli ad ACP ſectorem Ellipticum, vt totus circulus ad Ellipſim: Quapropter *permutando* erit QAP ſector circuli ad circulum, vt ACP ſector Ellipticus ad Ellipſim: ſed ille ſector circuli eſt ſexta pars ipſius, & tertia eius dimidij: Ergo etiam ſector Ellipticus ſexta pars erit totius, & tertia eius dimidij. Quare ſi ducta tangente TV ducas ei parallelam AD, & facias ſegmentum AC æquale ſegmento CD ex huius 23. erunt etiā ACP ſector, & CPD inſiſtentes æqualibus ſegmentis æquales ex huius prop.22. Propter eaque CPD erit altera totius ſexta pars, & ſic de reliquis.

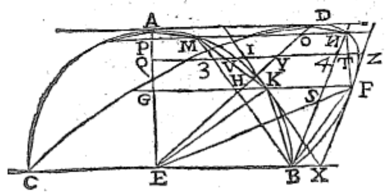
COROLLARIVM.

Hinc noſces deſcribere figuras in Ellipſibus ſimiles illis; quæ ſunt in circulo, ſi fiant tales, quarum ſingula triangula ſe habeant in circulo ad totum circulum, vt ſingula triangula ellipticę figuræ ad totam ellipſim, etiam ſi ſint triangula quæcumque, & irrationalia. Quia, & tota figura circuli inſcripta erit ad totum circulum, vt figura Ellipſi inſcripta ad totam ellipſim. Nam ſi V.g BMQO figurę circuli triangula BMP, & MQP, & QOP, erunt ad figuræ ellipticæ BDCO triangula BDP, & CPD, & PCO, vt OQ ad OC, vel æquales MN ad MD, ideſt, vt circulus ad Ellipſim; etiam tota figura circulo inſcripta ſe habebit ad figuram ellipticam, vt circulus ad Ellipſim: Propter eaque *conuertendo* ita erit figura in circulo ad totum circulum, vt figura ellipſis ad totam ellipſim.

PROBL. IV. PROPOS. XXX.

Super datam circuli diametrum deſcribere Ellipſim circulo æqualem, cuius data ſit ſemidiameter, & applicata æqualis radio.

Sit BAC circulus, cuius centrum E, & data ſemidiameter ellipſis maior ſemidiametro circuli ED: ducta tangente AD inter parallelas AD, & BC accommodetur ab E puncto data ED, & ductis parallelis, vt FG ſinguli ſinus, vt GK traſferantur à ſemidiametro ellipſis ED ſuper eandem lineam, vt ſunt HF, ſingulaque puncta flexa molli ductu vniantur, & ſemiellipſis BFDGC erit conſtituta; quam iuxta eaſdem menſuras perficies. Dico itaque hanc ſemiellipſim ſemicirculo eſſe æqualem.



Nam, quod ſit ellipſis patet ex ijs, quę diximus propoſ.52. Cor. Tract. 24. Quod verò ſit ęqualis ſemicirculo.

Probatur. Nam ducta PN vſquequo interſecet circulum, & ellipſim in M, & N parallela ad diametrum ellipſis productum, erunt eius partes MP & NO diametro ED, & EA applicatę in P, & O, & ideo æquales cum omnes alias applicatas tales effecerimus ex conſtructione. Ducantur deinde ſubtenſę BM, & BN ab interſectionibus N, & M, & erit ſegmentū circuli MKB ellipſis NFB. In ſegmentis ergo circuli BKM maximū triang. inſcribatur BKM, & ab K vertice ducatur parallela FG, ſi nō ſit ducta, & in L erit vertex maximi trianguli ellipſis ſegmento BFN inſcripti, vt infra oſtendendum. Erunt itaque cùm ſint triangula maxima pluſquam dimidia ſuorum ſegmentorum. Sunt autem etiam æqualia, & triangulum BFN æquatur triangulo BKM, ſicut & trapezium BNOE trapezio MPBE, & ſemitriangulum maximum NDO ſemitriangulo maximo MAP, cum ſit dimidium maximorum: Et ſi in ſegmentis remanentibus rurſùs alia triangula inſcribantur, & multiplicentur vſque dum multiplicari poſſunt, ſemper idem ſuccedet, & ſemper multiplicata maxima triangula in circulo æquabuntur ellipticis æquè in ſucceſſiuè remanenti quolibet ſegmento multiplicatis: ſed maxima triangula in circulo multiplicata, vſquedum multiplicari queunt, æquant circulum; alioquin ſi remaneret aliquod ſegmentum, non eſſent multiplicata omni multiplicatione poſſibili, & ſic dicas de ellipſi. Ergo cum omnia triangula circuli ęqualia circulo æquentur omnibus triangulis ellipticis æqualibus ellipſi; Ellipſis, & circulus erunt æquales.

Itaque oſtendendum remanet primo triangulum BFN, & omne ſimiliter inſcriptum eſſe maximum. Hoc autem oſtenditur. Nam ducta per F linea XF parallela ipſi BN tangens erit, & ideo ex dictis 1. propoſ. huius BFN erit maximum triangulum. Quod autem XF ſit tangens ducta XK parallela ipſi MB, tangente circuli K ſic oſtenditur. Quoniam omne punctum, quod in ipſa aſſignetur extra ellipſim eſt, ergo non ſecabit eam; ſed continget in F, ergo tangens erit, quod ſi ita non eſt. Aſſignetur punctum Z V.g. quod dicatur eſſe intra ellipſim, & oſtēdetur de illo extra ellipſim reperiri. Ducta ZQ Trapezia NOBE, & BEMP ſunt ęqualia ob ęquales baſes ex conſtr. NO, & MP, & eandem EB ex propoſ.72. Tract.24. Vnde, & ex prop.13.tract. 19 pręc. SH, & HG æquabūtur ſicut, & in ZQ partes 4. Y, & 3Q. Sunt verò æquales ex conſtructione HF, & KG. Vnde, & reſidua FS, & HK erunt ęqualia. Quamobrem cum ſint inter parallelas, & parallelæ Z4, & I3. erunt æquales ex prop.33. lib.1. Elem. quæ additæ æqualibus, vt oſtendi 4Y, & 34 remanebunt æquales ZY, & IQ. Sunt autem VQ, & TY ex conſtructione æquales, & QV eſt minor, quam IQ. Ergo etiam TV, quæ finit in ambitu elliptico in T eſt minor, quam YZ: Vnde punctum Z remanebit extra ellipſim: quod cum poſſit demoſtrari de omni alio puncto excepto F in quo tangit, remanebit tota XZ extra ellipſis ambitum. Quamobrem ZX erit tangens, & ideo NFB maximum triangulum, quod in ſegmento NFB inſcribi poſſit ex prop.1. h.

Deinde oſtendendum eſt triangula, ſeu trapezia Elliptica ęquari circularibus. Nam primo trapezium BNOE æquatur trapezio BMPE ex prop.13. tract. præc. quòd ſint inter parallelas, & æqualium baſium. Triangulum quoque BFN in ellipſi ęquatur triangulo BKM in circulo; quod pars FSB ſit æqualis parti KBH, vtpote inter parallelas exiſtenti, & ſuper baſes æquales FS, & HK, vt ſupra oſtenſum eſt, & idem dicendum de triangulis HMK, & FSN; necnon, & de triangulis MAP, & NDO, & ſic de alijs, ſi inſcribantur. Verificatur itaque, quod omnia triangula in ellipſi ſint maxima, & ſint æqualia maximis, & inſcriptis in circulo, & ideo quòd in perpetuā minorum deſcriptione, tùm circuli, tùm ellipſis, cum triangula ſint ſemper æqualia, circulus ellipſi æqualis erit.

COROLLARIVM.

Hinc potes ne dum totam ellipſim alteri exhibere æqualem, ſeu circulo, ſeu ellipſi, ſed etiam ſingula eius ſegmenta, ita quod triangulum BFN ſit æquale triangulo BKM, cum in ipſis triangula, & in ſegmentis ſucceſſiuè remanentibus semper æqualia inscribi possint, vt ex demonstratione patet: quinimò sector quoq; BKE æquabitur sectori BFE cum triangula BFE, & BKE ob æqualem basim, & altitudinem sint æqualia.

EXPENSIO VI.

De areis parabolarum quadrandis.

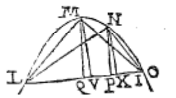
QVoniam aliquando superficies spatijs parabolicis, vel ferè talibus continentur, vt exactus Geodeta possit talia spatia exactissimè mensurare, etiam quadrationem parabolæ noscere debet, & eam in libitas partes diuidere.

PROBL. I. PROPOS. XXXI.

Datæ parabolæ terminatæ maximum inscribere triangulum.

SIt parabola, seu segmentum eius LMO, cui oporteat inscribere triangulum maximum. Subtendat itaque illum quęlibet recta LO, quæ diuidatur bifariàm, & erigatur diameter QM, & coniungantur rectæ LM, & MO. Dicoque LMO esse maximum triangulum segmento parabolę O N M L inscriptum.

Probatur. Nam si triangulum LMO non est maximum, erit aliquod aliud V. g. LNO, de quo probo non esse maximum contra hypothesim, siquidem ita ex Coroll. propos. 50. tract. 24. est LQO rectangulum ad LPO rectangulum, vt QM ad PN: sed est maius rectangulum, L Q O, quam LPO ex propos. 29 lib. 6. Quare etiam erit maior QM, quam PN. Vnde triangulum LMO erit maius triangulo LNO, siquidem ductis perpendicularibus MV, & NX, & ideo parallelis, cùm QM, & PN diametri sint in parabola paralleli quoque ex propos. 27 tract. 24. triangula QMV, & PNX erunt æquiangula, vnde erit QM ad PN, vt normalis VM ad normalem XN; sed maior ostensa est diameter QM, quàm NP. Ergo etiam maior VM; quam XN. Vnde cum triangulum LNO obtineat altitudinem minorem ex I. lib. 6. Cor. erit minus.

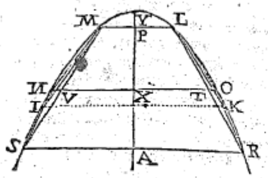


THEOR. I. PROPOS. XXXII.

Omnia triangula, quæ in applicatis obtinent vertices suos in parabola, inter se sunt æqualia.

SIt triangulum LOR, & MNS, quæ in applicatis LM, ON, & RS vertices M, N, S, & R, O, L habebāt. Dico ea esse in parabola SMLR æqualia.

Probatur. Ducto diametro XY, erunt XN, & OX æquales, & TX, & XV quoque ex prop. 13. Tract. 29. quia SM, & LR coniungunt æquales applicatas PM, & PL in æqualibus trapezijs RALP, & APMS; sicut etiam RA, & SA. Ablatis itaque æqualibus TX, & TV ab æqualibus OX, & XN, reliquæ erunt æquales OT, & VN: Quapropter triangula OTL, & VMN ex pr. 39. lib. I. Cor. inter parallelas LM, & NO, & super æquales bases OT, & VN existentia erunt



æqualia; necnon ob eandem rationem triangula OTR, & VNS; quare tota triangula ROL, & MNS erunt æqualia.

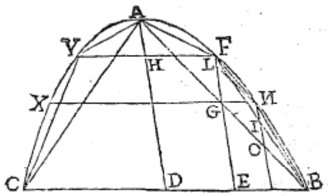
COROLLARIVM.

HInc educes, quòd si triangulum ORL sit maximum, etiam aliud NMS futurum esse maximum. Quoniam, si aliud maximum posset constitui in segmento MNS, cuius vertex K; Tunc ducta ab I parallela I K, si constitueretur triangulum RKL esset æquale triangulo maximo MIS, & ideo maius triangulo SNM non maximo ex aduersarijs: sed MNS æquatur triangulo ROL. Ergo etiam triangulum, quod constitueretur RKL esset maius triangulo ROL. Ergo triangulum ROL contra Thesim maximum non esset, quod inscriptum fuisset in segmento parabolico ROL.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Parabola est sesquitertia trianguli maximi in illa inscripti.

SIt parabola BFAYC, & triangulum maximum in ipsa BAC. Dico parabolam ei esse sesquitertiam; nempe triangulum continere, & insuper eius tertiam partem, vel esse ad illud, vt 4. ad 3. Ducatur itaque diameter AD; diuisaque bifariam semibasi BD in E ducatur AD diametro parallela EF vsque ad parabolam in F, & ducatur basi parallela FH.



Probatur. Nam ex propos. 2. de conicis Tr. 24. Quadratum BD est ad quadratum FH, vel ED, vt AD ad AH, sed quadratum BD ex propos. 6. lib. 2. Cor. est quadruplum quadrati EB. Ergo etiam diameter AD quadruplus est portionis HA, & per diuisionem rationis HD ipsius AH, vel EF æqualis sesquitertia. Linea verò EG subdupla est ipsius AD propter triangulorum similitudinem, cùm GE sit ad DA, vt BE ad BD, & ita quoque BG ad BA. Itaq; GE erit duplo maior ipsius GF æqualis ipsi AH: Siquidem EF est $\frac{3}{4}$ ipsius AD, & EG $\frac{2}{4}$.

Quamobrem triangulum quoque GBE erit, duplum

plum trianguli BFG ex I. lib. 6. eundem verticem habentis in B; & ideo eandem altitudinem, & quia BA est dupla ipsius BG, vt dixi; ideo triangulum BFA erit trianguli BFG duplum, & ideo ęquale triangulo BGE, sed huic BGE est quadruplum triangulum BDA ex 21. lib. 6. siquidem duplicatam habet basim, & est similiter positum, & simile: vnde illi habebit proportionem, quem 4. ad I. nempe duplicatam, quam 2. ad I. idest basis DB ad basim EB.

Deinde sit parabolæ segmentum BFA. In eo GF parallela DA, ex BG æquali applicatæ AG puncto medio erecta, quæ erit diameter, & maximum triangulum in eo inscriptum BFA, ex propos. I. h.

Diuidatur bifariam semibasis BG in O, & ducatur parallela ON ipsi FG, & NL basi BA. Et eodem prorsùs argumēto ostendes ON esse sesquitertiā FG, eo q. ex 5. Tr. 24 quadratū BG quadruplū quadrati BO, sit ad NL quadratū, vt GF ad FL, idest 4. ad I. & hinc residuum GL ad LF, vt 3. ad I. & ideo NO æqualem ipsi GL esse $\frac{3}{4}$ ipsius GF, & OI ipsius GL dimidiam, quod ei eandem dicat proportionem; quam BO ad BG; ideoque OI ipsius GF $\frac{3}{8}$, idest duplam residuæ IO $\frac{3}{8}$, quę sublatis $\frac{3}{8}$ erit $\frac{3}{8}$, ideoque triangulum IOB duplo maius, quam BIN erit, quę ob eandem altitudinem B sunt inuicem, vt bases OI ad IN: ideoque addito æquali INF triangulum BIO æquabitur triangulo toti NBF; & ideo erit subquadruplus trianguli BFG, cum sit ille BFG supra duplo maiorē basim BF, & ideo, vt similis, similiterq; positus ex 21. lib. 6. habeat proportionem duplicatam nempe BIO, vel æqualis BNF subquadruplus erit trianguli BFG, & sic semper erit etiam, si diuidas in infinitum.

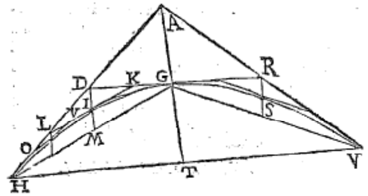
Si ergo inscripta sint in parabola BAC omnia triangula, quæ inscribi possunt, illa multitudo æquabit totam parabolam alioquin si aliquid parabolę restaret, non esset inscripta omnis inscriptibilis multitudo, cùm adhuc inscribendi spatium suppeteret, cùm itaque omnia triangula inscriptibilia se habeant successiuè, vt I. ad 4. & sit illimitata progressio hæc successiua; ideo ex Cor. 3. pr. 26. Tract 16. part. I. differentia secundi termini BFA à primo BAD erit ad BAD, vt BAD ad totam collectionem terminorum, scilicet triangulorum in seriem continuam proportionalium æquantium ipsam parabolam: sed ostēsum est BFA esse ad BAD, vt I. ad 4. & ideo differentia erit 3. Quapropter, vt 3. ad 4. ita erit triangulum BAD primus terminus ad totam collectionem triangulorum inscriptorum in seriem continuam proportionalium, idest ad parabolā BFDA; & ideo duplū Trianguli BAC ad duplam parabolam BFAYC. Vel conuertendo parabola BFAYC erit ad triangulum BAC, vt 4. ad 3.

THEOR. III. PROPOS. XXXIV.

Si parabola contingentibus stringantur, & applicata terminetur, figura concaua, quæ restat, est ad triangulum exterius contingentium, vt 4. ad 3.

SIt Parabola VGH, & contingentibus VA, & AH, & RD stringatur, & applicata VH terminetur. Dico concauam figuram V A H G esse ad triangulum contingentium exterius RAD, vt 4. ad 3.

Probatur. Quia VA, & AH sunt contingentes ex propos. 12. Tract. 24. GT æquabitur GA, & quia RD ponitur contingens erit parallela VH applicatæ ex 27. tr. 24. & ideo triang. RAD erit super basim GA subduplā basi TA, vel AD ipsi AH, cumq; triangula TAH, & GAD sint similia, similiterq; posita ex prop. 22. lib. 6. Elem. erunt inuicem in duplicata ratione laterum, & quia AD se habet ad AH, vt I. ad 2. triangulum AGD erit ad triangulum ATH, vt I. ad 4. nempe in proportione subquadrupla. Idem dicas de triangulo KDL, quia enim GD, & DH sunt tangentes, & GH applicata, ab eius puncto medio M educta parallela MD ipsi TG in contactū tangentiū cōueniet in D, vt diameter ex II. tr. 24 & MD erit dupla IM, & KL, vtpote tangens erit parallela GH applicatę, & ideo erit KD dupla GD: quare KDL triangulum simile, similiterque positum super basim KD subduplam basi GD erit subquadruplum trianguli GDH, sed triangulum GDH est ęquale triangulo GDA ob æquales bases AD, & DH, & verticem eundem G, ergo KLD triangulum est ad triangulum GAD, vt I. ad 4. scilicet in propositione subquadrupla, & sic in infinitum poteris sequi circumscribendo, qui semper erunt ad antecedentem vt I. ad 4. Nam KDL triangulum est ad triangulum ADG dimidium trianguli circumscripti RAD, vt I. ad 4. ita triangulum VLO est ad dimidium IDL trianguli circumscripti KDL, vt I. ad 4. & sic procedendo.



Ponatur itaque parabolę VGH conclusę tangentibus AH, & VH esse circumscripta omnia triāgula, quæ circumscribi possunt, omnia spatium AHIG tandem absorbebunt; alioquin, si remaneret spatium aliquod omnia triangula circumscriptibilia, non essent circumscripta contra Thesim, cùm adhuc aliquod spatium inscriptibile remaneret.

Verùm omnia illa in infinitum procedentia semper seruant eandem proportionem I. ad 4. quà secundus respicit antecedentem, vel 4. ad I. quà respicit primus terminus GAD secundum KDL: quare differentia minoris trianguli KDL, terminiq; secundi à primo GAD erit ad primum GAD, vt 3. ad 4. sed vt differentia secundi termini à primo ad ipsum primum, sic primus terminus GAD ad totam collectionem terminorum in infinitum procedentium in serie continua eiusdem proportionis ex Coroll. 3. prop. 26. Tract 16. de progr. Geom. Ergo GAD triangulum ad totam collectionem triangulorum circumscriptibilium figuræ concauæ GAHIG, & ideo ad ipsam figuram concauā ei collectioni æqualem se habebit, vt 3. ad 4. & ideo duplum trianguli RAD se habebit ad duplum collectionis seriei triangulorum in infinitum procedentis, & ideo figurę cōcauæ VAHGV, vt 3. ad 4. vel è contra figura VAHG ad triangulum RAD, vt 4. ad 3

COROLLARIVM.

HInc patet figuram concauam VAHG esse ad figuram conuexam VSGIH subduplam; Nam figura concaua est ad triangulum RAD, vt 4. ad 3. sic figura conuexa est ad inscriptū VGH triangulū, vt 4. ad 3. ex 44.h. ideoque figura concaua VAHG sic se habebit ad triangulū RAD, vt conuexa VGIH ad triangulum VGH; ideoque *permutando* figura concaua ad conuexam se habebit, vt triangulum RAD ad triangulum VGH; sed triangulum RAD est subduplum trianguli VGH ob subduplas altitudines GD, & GR. respectu altitudinum TH, & TV ex Coroll prop 16.& æqualem basim GA,& GT. Quare etiam figura concaua erit ad conuexam in ratione subdupla sc. vt 1. ad 2.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV.

Parabolica segmenta, in quibus capiuntur triangula maxima æqualia inuicem erunt æqualia.

SIt fig. propos. 32 h. præced. in qua parabola BFAYC, & sint duo segmenta BFA, & AYC, in quibus capiat ex prop. 2. h. exp. triangula maxima, & æqualia. Dico ipsa segmenta esse equalia.

Prob BFA triangulum est æquale triangulo AYC, cùm sint inter parallelas eorum vertices, ita triangula FNB, & YXC ob eandem rationem, & sic continuè in infinitum, quare cum continua progressio infinita triangulorum absorbeat omne spatium segmentorum parabolicorum BFA, & AYC iuxta ostensa propos. 15. Tract. 16. part. 1. quod ostensum sit prop. 23 huius semper iuxta eandem proportionē procedere, quæ est 1. ad 4. etiam segmenta parabolica AFB, & AYC erunt æqualia, quod in eis omnia inscriptibilia triangula sint equalia.

PROBL. V. PROPOS. XXXVI.

Parabola ad parabolam, seu segmentum eius ad aliud segmentum obtinet eandem proportionem, quam triangulum maximum ad triangulum maximum, quæ in illis inscripta sunt.

SIt parabola ACB, vel segmentum, quam dico habere ad aliam parabolam, vel segmentum MLN eandem proportionem, quam triangulum ACB ad triangulum MLN, quæ maxima sint.

Probatur. Nam Parabola ACB est ad triangulum ACB, vt 4. ad 3. Sic etiam parabola MLN ad triangulum MLN, vt 4. ad 3. Quadere parabolæ ad sua triangula sunt in eadem proportione, ideoq; *permutando* ACB parabola erit ad parabolam MLN, vt triangulum ACB ad triangulum MLN.

COROLLARIVM.

HInc, si duæ parabolæ habeant æquales bases erunt inuicem, vt altitudines, & si obtineāt altitudines æquales erunt ad inuicem, vt bases.

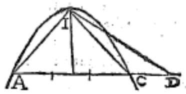
COROLLARIVM II.

HInc quoque colligitur, quomodò describantur parabolæ æquales, vel iuxta datam proportionem. Nam factis triangulis ACB, & LMN, quæ datam proportionem consequantur circa illa describetur parabola iuxta dicta propos. 59. tract. 24. & quia ita est triangulum ad triangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum inter easdem bases, & parallelas; hinc est; quòd factis duobus parallelogrammis, iuxta datam proportionem, si ope illorum duæ parabolæ describantur ex propos. 69. tract. 24. illæ erunt quoque in data proportione.

PROBL. II. PROPOS. XXXVII.

Datæ parabolæ æquale triangulum exhibere.

MOdus exhibendi triangulum Parabolę equale hic est, inscribatur parabolæ AC triangulum maximū AIC, & deinde in tres partes secetur basis AC; nam si basi AC addatur tertia pars CD, & fiat AD, & ducatur ID hoc triangulum AID erit æquale parabolæ AIC.

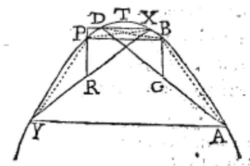


Prob. Parabola AIC est ad triangulum AIC, vt 4. ad 3. sed triangulum AID est ad idem triangulum AIC, vt basis AD ad AC basim ex 1. l. 6. quę ex effectione est vt 4. ad 3. Ergo est in eadem proportione ad triangulū AIC, ac parabola AIC ad idem triangulum AIC: quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æqualia triangulum AID, & parabola AIC, cùm eidem triangulo AIC eandem proportionem dicant.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

E parabolæ dato puncto auferre segmentum alteri æquale dato diametro eiusdem,

DAta sit parabola ATY, & segmentum in ea ABTD; diameterque BC, & oporteat aliud segmentum dato æquale resecare, quod incipiat à puncto X. Iungatur punctū X puncto D, & lineæ XD ducatur parallela AY, ducaturq; XY; nam segmētū XPY erit, quod exoptatur æquale segmēto ABD.



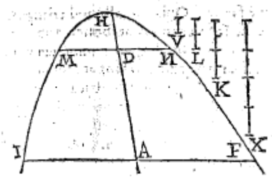
Probatur. Nam ducta BP erunt æqualia triangula ex prop. 32. huius ABD, & XPY cum habeant vertices in parallelis XD, & BP, & AY, triangulum verò

verò ABD est maximum ex propos. 11. huius. Ergo etiam triangulum XPY ex Cor. p. 23. h. Quadere, cùm maxima sint triangula ABD, & XPY, & ęqualia; erunt quoque segmenta XPY, & ABD parabolæ æqualia ex prop. 35. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIX.

A parabola eadem auferre segmentum dato proportionale.

SIt parabola, seu segmentum FHI, & oporteat ab ea resecare aliud segmentum, quod se habeat, vt X ad V; Inter X, & V inueniantur duæ mediæ proportionales LK ex propos. 3. Tract. 15. fiatque vt X ad L, sic AH diameter ad HD, & ducatur parallela NM. Dico segmentum FHI esse ad segmentum NHM, vt X ad V.



Progr. 1. Probatur segmentum FHI ad segmentum parabolicum HNM est in ratione triplicata FI ad NM, & proportionis FI ad NM duplicata, vt dicā est proportio AH ad HD; & AH ad HD, sic facta est, vt X ad L, & X ad L ex effect. est duplicata proportio X ad K. Ergo FI ad NM est, vt X ad K. Verùm segmentorum parabolicorum, vt dixi FHI ad MHN triplicata est proportio FI ad NM; quæ est, vt X ad K; & X ad V triplicatam possidet proportionem illius, quæ est X ad K. Ergo segmentum parabolicum FHI ad NHM segmentum est vt X ad V.

Remanet ostendendum proportionem parabolici segmenti FHI esse ad NHM in triplicata ratione FI ad NM.

Progr. 2. Ex 36. h. parabola FHI se habet ad parabolam NHM, vt triāgulum in maiori FHI inscriptum ad triangulum in minori designatum NHM; sed triangulorum proportio componitur ex proportione FI ad NM, & AH ad HD; sed pportionis FI ad NM est duplicata ratio AH ad HD, quod sit, vt quadratum FA ad ND, vel ex 6. lib. 2. quadruplum quadratum ex ½ I ad illud ex NM, sic AH ad HD ex 5. Tr. 24. ergo ex dupla proportione componitur AH ad HD, & ex simplici pportione quoq; FI ad NM. Ergo proportio segmenti parabolici FHI ad NHM est triplicata illius, quæ est FI ad NM.

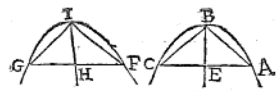
COROLLARIVM.

HInc est, quòd si illud item segmentum NHM alibi in eadem parabola efficere desideres, poteris id facere ex propos. 37. huius detruncando alibi in eadem parabola segmentum æquale segmento NHM. Nam erit illi segmentum FHI, vt X ad V, cùm ad æquales eadem sit proportio.

PROBL. III. PROPOS. XL.

A Parabola data segmentum rescindere, quod sit æquale alterius parabolæ datæ segmento.

DEtur parabola ABC, & oporteat resecare à parabola FIG segmentū æquale; Accōmodetur in parabola FIG linea GF æqualis lineæ AC, & ducatur diameter HI ex 36. tr. 24. Dico FIG esse æquale segmento ABC.

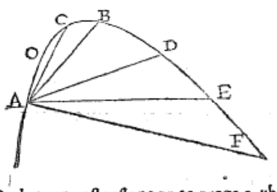


Probatur cum FH sit dimidia FG æquabitur ipsi AE. Sed vt AB ad EB, sic ob similitudinem omnium parabolarum ex prop. 51. tract. 24. est ex defin. similitudinis sectionum est FH ad HI, & *permutando* AE ad FH, vt EB ad HI. Sed FH, & AE sunt æquales; Ergo etiam tales erunt EB, & HI. Quare triangula ABC, & FIG erunt æqualia, vtpote æqualium altitudinum, & basium; sed etiam sunt triangula maxima, quia sunt ad diametros ex 31. h. Ideoque vt triangulum ABC ad triangulum FIG sibi æquale sic erit segmentum parabolicum ABC ad parabolicum segmentum FIG, ergò 12. lib. 5. erunt æqualia parabolica segmenta CBA, & FIC.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Segmenta à parabola datâ detruncare, quæ sint in continua proportione.

SIt data proportio segmenti AOC ad segmentum ACB, & fiat ex propos. 14. lib. 6. vt subtensa AC ad AB subtensam, sic AB ad aliud AD, & sic successiuè vt AB ad AD, ita AD ad AE, & cæt. Deinde lineæ inuentæ à puncto A accommodentur in parabola, & ducantur AD, AE, AB, & cæt. Nam dico segmenta ACB, & ABD, & ADE, & AEF, esse in continua proportione.



Probatur ex ostensione pr. 39. progr. 2. vbi ostēdimus segmenta ACB, & ACBD, & ABDE, & cæt. esse in triplicata proportione subtensarum AB, & AD, & AE, & cæt. sed illæ factæ sunt continuæ proportionales. Ergo ex propos. 1. tract. 28. etiam segmenta parabolica erunt continuæ proportionalia.

PROBL.

PROBL. V. PROP. XLII.

Parabolæ aream ad quamcumque figuram reducere.

QVoniam vt prop.36. huius ostendimus, quod parabola in triangulum æquale commutari potest: hinc enascitur, quòd si triangulum illud æquale parabolæ conuertatur ex pr.3.tr.29. in rectangulum, & hoc in quadratum, & deinde in circulum ex pr.14.tr.30. & tandem in Ellipsim ex prop.30.h. quòd etiam parabola omnes istas transformationes sit subitura, cum sit consequenter æqualis Ellipsi, circulo, quadrato, & rectangulo, quę triangulo, in quod primo conuersa est æquantur.

EXPENSIO VI.

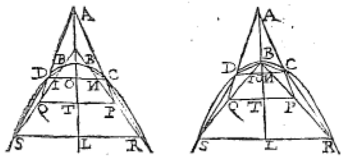
De partitione Hyperbolæ.

HYperbola vsque adhuc quadrationi subigi non potuit, & licet Ambrosius à S. Vincentio in id conetur, illius tamen quadratio adeo inuoluta est, vt omninò incomperta remaneat: Vnde ne inutiliter librum oneremus, satiùs erit certam tantùm eius Geodęsiam proponere.

THEOR. II. PROPOS. XLIII.

In Hyperbola triangula segmentorum, quorum vertices in parallelis sunt, & applicatis, æqualia inuicem sunt.

SInt triangula RCB, & BDS, que sint in segmentis hyperbolicis, & vertices eorum nectant parallelæ CD, RS, & vertices B, vel sint in eodem puncto, vel aliqua V.g. BB prędictis RS, & CD parallela nectantur. Dico illa esse æqualia.

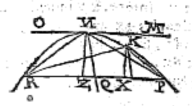


Prob. Cum RBL, & LBS sint triangula ad eandem altitudinem super bases ęquales, idest applicatas RL & LS ex pr.13. tr.29. æquales erunt NO, & OI, sed CO, & OD sunt quoque applicatæ: Ergo erunt æquales; Ablatis itaque æqualibus NO, & OI reliquæ erunt æquales CN, & ID; Quamobrem triangula CBN, & IBD erunt æqualia, vtpotè super bases æquales, & inter parallelas; sic triangula CNR, & IDS ob eandem rationem erunt ęqualia. Vnde etiam triangula BDS, & RCB ex illis partialibus constituta erunt æqualia.

PROBL. I. PROPOS. XLIV.

Datæ Hyperbolæ terminatæ maximum triangulum inscribere.

IN Hyperbolæ PNR ducta quacumque PR, & diuisa bifariam in Q erigatur diameter QN ex propos. 30. Tract. 24. & ducatur contingens MO, quæ erit ex propos. 28. Tract. 24. de conicis parallela lineæ PR. Ducantur itaque à contactu N rectæ PN, & NR, & triangulum quod constituitur, PNR maximum erit.



Probatur facile. Quia, si aliquod triangulum aliud adsit in segmento Hyperbolico PNR, quod obtineat verticem alibi V. g. in K punctum K non erit in parallela MO, cum MO tangat tantum in N; ergo inferius erit, & minor erit altitudo KX, quam ZN, vt patet. Vnde cum minorem altitudinem triangulum PKR consequeretur, esset minus, quam PNR. Quare PNR erit maximum cum maius, vel æquale nequeat assignari.

THEOR. II. PROP. XLV.

Triangula maxima inter parallelas existentia in Hyperbola sunt inuicem æqualia.

*SInt triangula maxima RCB in pr.43.h. & BDS. Dico illa esse æqualia. Nam ductis diametris PA, & QA, & linea DC per eorum vertices C, & D ea erit parallela applicatę RS, & ideo etiam vertices triãgulorum maximorũ RCB, BDS erũt in parallelis applicatisque; quare ex 43. h. erunt æqualia.

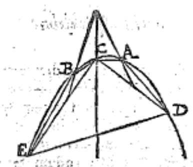
*Prob. Nam ducatur PQ, & applicata CO, & diuisa bifariam RS ducatur quoque diameter LA: Isti itaque tres diametri ex prop.29. Tract. 24. Coroll. conuenient in idem punctum A, & quia in triangulo REL est vt RL ad TP, sic LB ad TB, & sic in alio LS ad TQ, ideo erit RL ad PT, vt LS ad TQ, ideoq; *permutando* RL erit ad LS, vt PT ad TQ, sed RL, & RS sunt æquales, ergo etiam PT, & PQ. Ab O itaq; ducatur OD in verticem trianguli BDS, & hæc erit applicata quoque. Nam æquabitur ipsi OC. Probatur autem hoc. Nam TQ est ad OD, vt TA ad OA, & TA ad OA, vt PT ad CO. Ergo ex 16. lib.5. TQ erit ad DO, vt PT ad CO; ideoq; *permutando* TQ erit ad TP, vt OD ad CO; sed PT, & TQ ostẽsæ sunt ęquales, ergo etiam CO, & OD ex 12. l.5. Ergo DO erit applicata, & ideo parallela ipsi RS. Quamobrem cum triangula BCB, & BDC maxima obtineant vertices in parallelis, & applicatis erunt æqualia.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Cuiuscumque Hyperbolæ segmenta; in quibus capiant triangula æqualia maxima inuicem æqualia sunt.

*SInt segmenta Hyperbolica, in quibus triangula maxima DAC, & CBE capiant. Dico etiam ipsa segmenta esse æqualia.



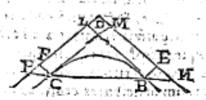
Probatur, Nam reliqua quoque segmenta capient triangula maxima, cum sint inter parallelas DE, & AB ex thesi, & idem dicas de residuis, & sic absque fine: Inscribantur itaque semper per ęqualem numerum procedendo in vtroque segmento omnia triangula maxima, quæ inscribi possunt; hęc infinita series ęquabit ipsa segmenta. Nam si non ęquaret adhuc restaret aliquod spatium, in quo triangulum maximum posset inscribi: sed hęc triangula, vt vt multiplicentur semper æqualia perseuerant, ergo etiam omni possibili multiplicatione præstita æqualia erunt: Quadere ipsa quoque hyperbolica segmenta, quæ ęquant series possibili omni multiplicatione numerosas erunt ęqualia.

Quod verò semper multiplicentur ęquali numero patet: nam relinquit quodlibet triangulum duo spatia, quę duobus triangulis possunt inscribi, & hęc singula duo quoque, & ideo quatuor, & hæc octo, & sic continuè duplicando.

PROB. IV. PROPOS. XLVII.

Si detur Hyperbola Asymptotis inclusa, & applicatæ extremo ducantur Asymptotis parallelæ, illa includent spatia æqualia.

EXponatur Hyperbola BC, & ab ea sint duæ parallelæ ductæ BL, & CM à terminis applicatę BC, necnon BE, & CF Asymptotis PD, & DN. Dico etiam EBDL, & MDCF esse æqualia quadrangula.



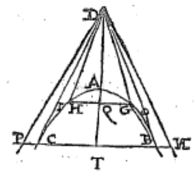
Prob. Producta BC ad asymptotos in N, & P erũt NB, & CP æquales ex prop.46. vel 66. Tract.24. de conicis, & ob parallelismum linearum EB, & MC, ita erit, NB ad NC, idest æquales CP, ad PB, vt BE ad CM. Verùm ob eandem rationem, vt CP ad PB, sic CF ad BL. Ergo ob similitudinem rationum vni tertiæ ex prop.16.lib.5. erit EB ad MC, vt CF ad BL reciprocè, quare rectangula EL, & FM æqualia ex prop.10 lib.6. Elem.

THEOR. IV. PROPOS. XLVIII.

Si detur Hyperbola asymptotis stipata, & in ea duo segmenta conuexa perhibeantur æqualia, erunt etiam segmenta concaua æqualia.

SIt Hyperbola BGAHC Asymptotis stipata PD, & ND, & dentur segmenta æqualia conuexa BOG, & HIC in ipsa BGAHC: Dico, quòd etiam segmenta concaua BODG, & HICD erunt æqualia.

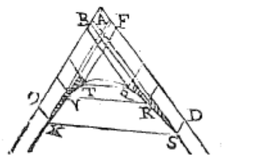
*Probatur. Nam primo triangula GDQ, & HDQ ob eandem altitudinem, & ęquales bases GQ, & QH erunt æqualia: Trapezia quoque QGTB, & CHTQ erunt æqualia ex propos.12. tract.29. ob eandem altitudinem cum sint inter parallelas, & ęquales bases, quæ applicatæ GQ, & QH, & CT, & TB sunt. Tandemq; idem afferas de triangulis BDT, & DTC ob eandem altitudinem DT, & æqualeș bases CT, & TB. Ablatis itaq; triangulo DQG, & trapezio TQGB ab æquali toto BDT alteri TDC toti, cui similiter auferantur partialia prædictis ęqualia triangulum HDQ, & trapezium HQCT reliqua remanebunt æqualia BGD, & HDC. A quibus si vtrinque auferantur segmenta conuexa ex 46.h. æqualia BOG, & HIC remanebunt quoque concaua BOGD, & HDIC æqualia.



THEOR. V. PROPOS. XLIX.

Si sint segmenta in Hyperbola concaua, quæ æqualium parallelogrammorum lateribus contineantur, illa inter se erunt æqualia.

*SIt Hyperbola contenta asymptotis suis, sintque iuxta propos.47. huius expens. æqualia parallelogramma TA, & QA, necnon, & SA, & XA, relinquent mixtilinea nigra super SQ, & XT.



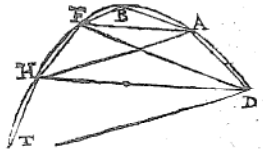
Ducta parallela RV erunt rursùs parallelogramma VA, & RA æqualia; necnon, & parallelogramma TA, & QA ex eadem prop. & relinquent mixtilinea minora nigra, & si sic semper subdiuidantur, semper ipsa parallelogramma remanebunt ęqualia: sed semper minus, & minus mixtilineum relinquent. Multiplicentur itaque vsquedum multiplicari queunt subdiuidendo, relinquent minus spatium mixtilineum omni possibili simili spatio; si enim adhuc superesset aliquod mixtilineum, tantò magis adesset spatium pro parallelogrammo mi-

minori constituendo. Quoniam parallelogrammũ quodlibet à mixtilineo deficit segmento concauo nigro. Cum itaque omnis possibibilis multiplicatio parallelogrammorum omne spatium mixtilineum absumat, erunt illa parallelogramma ęqualia toti segmento concauo OAFTX, sic etiã ex alia parte concauo segmento SDBAQ. Cum itaque series parallelogrammorũ SQAD sit secundum omnes suos terminos æqualis seriei parallelogrammorũ ATXO, & singulæ series æquent segmentum concauum suum, etiam ipsa segmenta concaua SRQDAB, & TVXOAF erunt ęqualia.

PROBL. III. PROPOS. L.

Dato Hyperbolæ segmento conuexo à dato puncto in ambitu illius ducere rectam, quæ æquale segmentum auferat.

DAtum sit segmentum Hyperbolæ linea AD abscissum, & punctum B in ambitu Hyperbolæ DAT. Ducatur ab A ad B punctum datum linea AB, & huic fiat parallela DF, & ducatur BF. Dico factum esse, quod petebatur, & segmenta lineis DA, & BA abscissa esse inter se æqualia.



Probatur. Quoniam cum sint inter parallelas DF, & AB in ipsis triangula maxima inscribi poterunt æqualia ex propos. 44. huius. Vnde ex prop. 46. huius ipsa segmenta conuexa erunt æqualia: Rursus si AF punctum coniungatur puncto A, & ducatur ipsi AB parallela DH, & FH; segmentum FH erit æquale opposito DA, & ideo segmento BF, & sic in infinitum.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Concauum segmentum alteri æquale exhibere in eadem Hyperbola suis Asymptotis stipata ab assignato puncto.

SIt in Hyperbola pr.48.h. in asymptotis ND, & NP segmentum concauum BOG, & velit aliquis à puncto H abscindere segmentum, quod sit ęquale dato BOG. Ducatur GH ad datum pũctum H, & postea illi parallela BC, & coniungantur extrema H, & C vertici D, & erit factum, quòd postulatur.

Patet enim ex pr.48.h. BDOG triangulũ concauũ ęquari triang. cõcauo HICD, vel segmentum segmento.

Quod si cupias segmentum non contineri lineis in verticem D conuenientibus; sed parallelis alteri asymptotorum sit datum segmentum concauum CBPO clausum lineis CO, & BP, & ad destinatum punctum N æquale oportæat ponere aliud segmentum. Ducatur parallela ad datum punctum N recta BN, & ei parallela CX; deinde ducantur rectæ à punctis N, & X parallelæ asymptoto OA, & dico *segmentum* NMXR *æquari segmento* CPBO.

Probatur. Nam segmentum concauum BCOA æquatur segmento concauo NXRA ex propos. 49. h. Parallelogrammum quoque BAP parallelogrammo NMA, quibus ablatis BAP, & NMA relinquentur BPCO, & XRNM ęqualia.

EXPENSIO VII.

De Spatijs Spiralibus.

SPatia spiralia sunt illa; quę diametro spiram generante, vt QA, & spira ipsa continentur, vt est spatium ACEHQA; Horum autem spatiorum proportiones ad spatium circuli inuestigandæ sunt vt ex illis innotescat eorum quadratio.

Præassumptum. Reminiscendum itaque sectores habere eam proportionem, quam rectãgula ex semiarcu subtenso, & radio, si sint diuersorum circulorum; dummodo arcus sint similes, quia eis sunt æqualia, vt diximus propos. 4. h. agentes de circulo. Quadere sectores diuersorum circulorum decrescentium, vel crescentium augmento arithmetico, vel decremento, quorum arcus sint similes; ipsi quoque decrescent, vel se augebunt eadem ratione, qua rectangula diametrorum, & arcuum.

V. g. sector BAQ erit in fig. prop. 53. maior sectore CPQ eodem incremento, quo augetur rectangulum ex dimidio arcu BA, & radio QA. Super rectangulũ ex dimidio arcu CP, & radio CQ. Siquidẽ arcus similes sunt inuicem, vt diametri ex 44. l. 6. Quare ita augebuntur arcus inuicem, & diametri, & ita semidiametri, & semiarcus, scilicet si QA sit 8. partium, & arcus BA octaua pars sui circuli ponatur 8. partium, diameter QL erit 7. partium, & PC arcus eius, octaua pars sui circuli, erit quoque 7. partium, & si MQ sit 6. erit arcus EM octaua pars sui circuli conflatus ex 6. partibus. Quare etiam rectangula ex semidiametro, & semiarcu æqualia sectoribus: se respicient, vt ea rectangula quorum latera arithmetico decremento continuo decrescunt, de quibus supra Tract. 28. Exp. 3. Siquidem deficiunt, horum quoque rectangulorum latera duplici decremento arithmetico. Quare se habebunt ad inuicẽ, vt rectangula AE, & BG, & cęt. vsq; ad LK, vt fig. pr. 13. tr. 28. videre potes. Quę sunt facta ex lateribus arithmetico decremento deficientibus BA, & XG vsque ad CL. Ostensum autem ibi est prop. 16. Quòd hæc rectangula in seriem infinitam multiplicata, si simul ponantur ad rectangula integra, & maximo æqualia inuicem, & multitudine prędictis erunt, vt 2. ad 6. Rectangula igitur quoque sectoribus ęqualia, quę deficiunt duplici decremento Arithmetico propter radium, & propter arcum deficientes erunt ad integra, vt 2. ad 6. si multiplicentur omni multiplicatione possibili, siquidem quoad vtrumque latus alterum æquale radio alterum æquale semiarcui deficiunt.

PROBL. I. PROPOS. LII.

Spiræ inscribere, vel circumscribere sectores tot, vt sint simul posita omnia spatia inter spiram, sectoremque conclusa minora qualibet data quantitate.

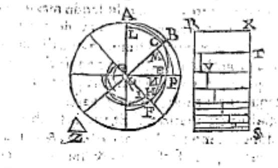
SIt data spira in fig. prop. sequent. ACEHQ, & debeat circumscribi tot sectores, vt spatium quod relinquunt, vt CAL, sit minus quantitate Z. Redigatur quantitas Z in rectangulum ex tract. 19. prop. 3. & hoc fiat sector QBA primus minor, quod facile fiet efficiendo triangulum circumscriptum ABQ illi rectangulo ex Z effecto ęquale, & sector ipse BAQ minor triangulo erit minor quoque, quàm Z. Dico, quod si reliqui sectores ęqualis anguli apud Q circumscribantur ęquali deficientes diminutione AL, & CM, vt diximus tract. 18. prop. 9. posse fieri, relinquent ij sectores, vt BAQ, & cęt. quantitatem minorem, quam Z.

Probatur. Quia differentię BACL, & CPEM, & EFNH, & alię omnes ęquant, vt patet BAQ sectorem minorem, quam Z. Ergo omnes simul differentię erunt minores, quam quantitas Z, & tantò minores, si sumamus differentias non quibus inuicem differunt, sed quibus differunt à spira, vt BAC, CPE, EFH exteriores, vel interiores ACL, CEM, ENH.

THEOR. I. PROPOS. LIII.

Spiræ primæ circumscripti sectores habent proportionem ad sectores circuli spiram comprehendentis maiorem; quàm 2. ad 6. & sectores spiræ inscripti habent minorem proportionem ad illos, quam 2. ad 6.

*SIt spira ACEH vsque ad Q, quæ est prima, & circulus illam complectens, cuius radius AQ. Sectores circuli sint octo; quorum vnus est BAQ; Sectores circumscripti sint BAQ, & CPQ, & EFQ, & cæt. Inscripti LCQ, & MQE, & NHQ, & cæt. Circumscriptique erunt 8. cum maximo, at inscripti, quia excludunt maximum, erunt septem. Itaque vt in pręass. Arithmeticè decrescentes sectores sunt ad sectores non decrescẽtes ęquales numero,



vt rectangula similiter decrescentia TR, TV ad numero ęqualia sed non decrescentia rectangula, sed hæc decrescentia sunt magis, quàm 1 ad 3. incluso maximo, & minus eo excluso maximo ad tot rectangula non decrescentia æqualia. Ergo tales quoque erunt sectores, & omnes octo sectores decrescentes arithmeticè incluso maximo, vt BQA & CQP, & EQF, & cęt. erunt ad octo maximos, vt QBA ęquales inuicem magis, quam 1. ad 3. at septem sectores CQL, MQE, & NHQ minùs, quam 1. ad 3. ad octo maximos, & sic semper erit quocumque numero maiori sectorum electo, & sine vlla meta multiplicato.

THEOR. II. PROP. LIV.

Spatium à spira prima, & radio ad eius initium ducto conclusum est ad circulum suum, vt 1. ad 3.

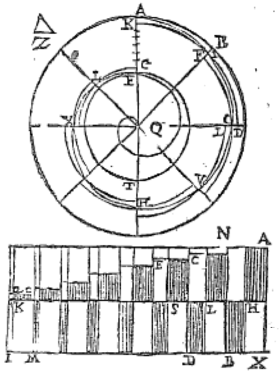
SIt spatium ACEHQA spira ACEHQ, & radio QA clausum. Dico, quòd hoc spatium ad totam planitiem circuli est, vt 1. ad 3. vel quod idẽ 2. ad 6.

* Probatur. Nam spatium ACEHQA prædictum non est maius, aut minus, quam $\frac{1}{3}$ totius circuli. Ergo æquale erit. Primò enim si illud spatium est maius, sit minus quãtitate aliqua Z, & tot spiræ sectores inscribantur ex 1. h. donec spatiũ inter spirã arcũq; inscripti sectoris clausũ sit minus quãtitate proposita Z, qua spatium à spira, radioque conclusum ACL. & cętera omnia superant tertiã partẽ circuli. Cum itaque spatium radio, spiraque clausum sit maius tertia parte circuli consequenter spatium sectoribus contextum CLQ, & MEQ, & cæt. erit maius tertia parte circuli, cùm spatium inter spiram, sectoremque arcus interceptum quale vnum ex ipsis CAL sit minus eo spatio, quo spatium spira, radioque clausum tertiam partem circuli superat. Quòd autem spatium sectorum inscriptorum, qui primo, & maximo excluso BAQ incipiunt à sectore CLQ habeat maiorem proportionem, quam 1. ad 3. ad circulum, idest tertia parte circuli sit maius, hoc est contra præcedentem demonstrationem, ideoque absurdè esset minus, & maius sectorum spatium tertia parte circuli. Si verò asseratur spira, radioque spatium conclusum esse minus, quam tertia pars circuli. Sit minus quantitate Z, & deinde tot sectores circumscribantur, & sit adeo numerosa multitudo sectorum, vt spatium arcubus sectorum, spiraque interceptum CBA, & PCE, & cęt. sit minus quantitate Z. Spatium itaque sectoribus clausum minus erit tertia parte circuli, cum illud spatium interceptum inter spiram, & sectorum arcus sit minus spatio Z, quo spirale spatium minus est tertia parte circuli: Sed supra ostensum est sectores circumscriptos cum includant maximum conficere spatium maius, quàm tertia pars circuli: Ergo esset maius, & minus, quod esse nequit.

THEOR. III. PROPOS. LV.

Sectores inscripti spiræ secundæ habent proportionem ad primum circulum minùs quàm 7. ad 3. & circumscripti ad eundem circulum maiorem proportionem obtinent, quàm 7. ad 3.

SIt spira in secunda sua reuolutione AFCVHXLE; & inscripti sectores FKQ, & FCQ, & cęt. Dico hos sectores habere proportionem ad sectores tot numero, vt EQL, seu ad circulum primæ reuolutionis ET, cuius radius EQ, vt 7. ed 3. Sectores verò circumſcriptos, vt BAQ, & IDQ habere maiorem proportionem ad eundem circulum ET, quam 7. ad 3. Quod vt oſtendatur fiant rectangula illis inſcriptis æqualia BC, & DE, vſq; ad K necnon etiam circumſcriptis æqualia rectangula BA, & BC, & DE, quę deficient, vt ſectores arithmetico decremento, & primum AB æquabitur primo ſectori BAQ. Cum itaque hæc rectangula decreſcentia ſe habeant ad rectangula XH, & cęt. primi circuli ſectoribus æqualia magis, quàm, vt 7. ad 3. vt oſtenderur incluſo maximo, & minus, quàm 7. ad 3 eo excluſo, ſequitur, quòd etiam ſectores illis ęquales incluſo maximo ſe habeant ad ſectores primi circuli magis, quàm 7. ad 3. & minus excluſo maximo, quàm 7. ad 3.



Oſtendendum itaque eſt rectangula AB, & BC, & cęt. decreſcentia ſe habere ad rectangula primi circuli ſectoribus æqualia magis, quam 7. ad 3. & rectangula BC, & DE, & cęt. excluſo maximo minus, quā 7. ad 3. Siquidem ſector BAQ maximus eſt ad ſectorē EQL circuli primi, vt circulus maior ad circulum minorem: ſed circulus ad circulū eſt quadruplus cum ſit ſupra duplò maiorem diametrum. & ideo duplicatam diametrorum habeat rationem ex prop. 21. lib. 6. duplicata verò proportio 2. ad 1. eſt 4. ad 1. ſed etiam rectangulum AB ad HX ſe habet, vt 4. ad 1. Ergo cùm rectangulum AB æquetur ſectori BAQ ex conſtructione etiam rectangulum HX, ſeu HN æquabitur ſectori EQL circuli primi. Conſiderandum autem eſt, quòd in tota progreſſione decreſcente HX, BL, & DS, & cæt. vſque ad I perſeuerant integra. Deinde rectangula nigra AH, & LN, & ES, vel HB, LD, & cęt. perſeuerantia eiuſdem altitudinis ex pr. 12. Tr. 28. de progr. planitierum erunt dimidium rectangulorū omnium æqualium BL, & DS, & aliorum vſque ad I. Sic eorum complementa nigra HA, & NL, & CS, & aliorum vſque ad K ipſis æqualia ex prop. 35. lib. 1. quapropter erunt cum alijs rectangulis nigris, complementiſque ſuis æqualia rectangulis albis BL, & DS, & cęt. quæ æqualia perſeuerant; ſiquidem duo dimidia integrum æquant. Vnde ſi ſumamus omnia ſimul rectangula integra XH, & BL, & cęt. vſque ad I, & complementa vtraque nigra decreſcentia HB, & LD, ſic AH, NL, & CS vſq; ad X erunt totę planitięs duplæ planitięrū XH, BL vſq; ad I, quæ integræ perſeuerant, ſcilicet, vt 2. ad 1. vel vt 6. ad 3.

Quia verò HN, & LC, & SE, & cęt. vſque ad I duplici decremento arithmetico hinc, & inde quo ad vtrumq; latus deficiunt, & primum, maximumque HN demonſtratum eſt æquale maximo ſectori ELQ, & ideo maximo rectangulo ſibi ęquali præc. propoſ. decrementa omnia ex Theſi ſunt ęqualia decrementis rectangulorum pręc. propoſ. rectangula LC vſque ad KQ erunt ſingula ſingulis prædictis æqualia; Ideoque ad tot numero rectangula integra HN ex prop. 13. Tract. 28. ſe habebunt magis, quam 1. ad 3. incluſo maximo HN vtrinq; Proptereaque cum rectangula, quę integra perſeuerant, & deficientia complementa ſe habeant ad integra tantum, vt 6. ad 3 ſi iſtis addes rectangula HN cum deficientibus LC vſque ad KQ erunt ad rectāgula integra tot numero HN, vel HX, BL, DS vſq; ad I magis, quam 7. ad 3 ex prop. 32. Tract. 28. de propor. rationū. Verùm ſi demas ab vnaquaque ſerie maximum ſcilicet XN, & HA, & HB, & HN, ſeries LC vſque ad KQ deficiens ad ſeriem non deficientem BL, & DS conflata ex pari multitudine terminorum erit minus, quàm 1. ad 3. & ideo cum ſerię rectangulorum prædictorum ęqualium BL, & complementorum nigrorum, ſcilicet tota rectangula BC, & DE, & cęt. ſe habebit ad ſeriem rectangulorum non deficientium XH, & aliorum minus, quam 7. ad 3. quòd remanſerat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc eſt, quod cum ex 41. lib. 6. circuli inter ſe ſint, vt ex diametris quadrata, quod ſi ponamus primum circulum 3. cuius radius EQ ſecundus erit 12. nempe vt quadratum EQ ad quadratum QA. Vnde rectangula circumſcripta ſpirę ſecundę ſe habebunt ad circulum eundem QA magis, quam 7. ad 12. & inſcripta minus, quam 7. ad 12.

THEOR. IV. PROPOS. LVI.

Circulus ſecundæ ſpiræ eſt ad ſpatium ab ipſa ſpira, ſemiradioque clauſum, vt 12. ad 7.

Sit ſpatium EA recta, & ſpira ſecunda ACHXB concluſum. Dico, *quòd circulus, cuius radius* AQ *ad hoc ſpatium ſe habet, vt 12. ad 7.*

* Probatur. Nam ſectores circumſcripti, & decreſcentes BAQ, & FCQ & cęt. vſque ad LEQ oſtenſi ſunt ex Coroll. pręced. propoſ. in maiori proportione maximum BAQ includendo, quàm 7. ad 12. & inſcripti deficientes KQF excludendo maximum in minori proportione, quam 7. ad 12. demonſtrati ſunt ad ſectores maximos numero æquali multiplicatos. Si ergo ſpatium ſpiralę non ſit ad circulum, vt 7. ad 12. erit ad quid minus, aut maius. Maius itaque ſit primo, quam 7. partes, in quas circulus diuiſus eſt ſpatio Z. Et tot inſcribantur ſectores donec omne ſpatium, vt KFA, & FCI, & cęt. quòd inter arcus ſectorum, & ſpiram intercluditur ſit minus, quàm ſpatium Z. Ergo erunt omnes iſti ſectores maiores, quam 7. partes ex 12. in quas circulus diuiſus eſt: quia à ſpatio ſpirali maiori, quam partes 7. illarum, in quas circulus diuiſus eſt in ſpatio Z minus differunt, quam 7. quod eſt abſurdum; cum oſtenſum ſit ſectores inſcriptos

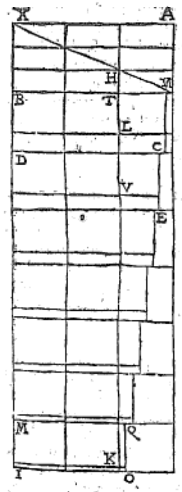
ſcriptos ad totum circulum ſe habere minori in proportione, quam 7. ad 12.

Si verò aliquis dicat eſſe minus ſpatium ſpirale; quam partes 7. ex ijs, in quas 12. circulus ſuus diuiſus eſt. Circumſcribantur tot ſectores donec omne ſpatium, quod arcu ſectorum, & ſpira clauditur ſit minus, quàm ſpatium Z: tunc ſectores circumſcripti erunt minores. quàm 7. partes ex ijs 12. in quas circulus partitus eſt, cum minus differant à ſpatio ſpirali minori, quam partes 7, minori differentia, quam Z ſpatium, in quo ſpirale ſpatium partibus 7. minus euadit: Hoc autem eſſe nequit cum ſectores circumſcripti oſtenſi ſint obtinere proportionem maiorem ad 12. quàm 7. ad 12. Ergo cum non poſſit eſſe, aut maius, aut minus ſpatium ſpirale AICVHXEA; quam 7. partes ex partibus 12. circuli, erit ad circulum, vt 7. ad 12, & *conuertendo* circulus ad ſpirale ſpatium, vt 12. ad 7.

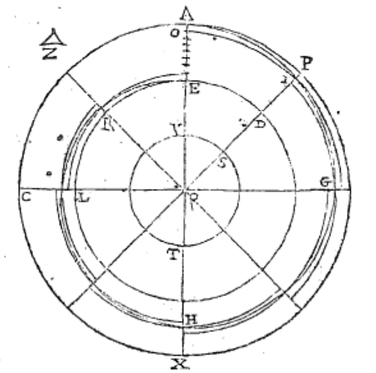
THEOR. V. PROPOS. LVII.

Sectores inſcripti tertiæ ſpiræ habent minorem proportionem ad primum circulum, quam 19. ad 3. & circumſcripti maiorem proportionem, quàm 19. ad 3.

Sit ſpira in tertia circumuolutione AIGH, vſque ad B, & diameter circuli ſpiram comprehendentis QA triplus diametri primæ ſpirę TY; erunt circuli in ratione duplicata ſuorum diametrorum; Ideoque circulus tertię ſpirę QAX erit ad circulum primę ſpiræ TY, vt 9. ad 1. ex 41. lib 6. Quare ſinguli ſectores ſimiles eius ad ſectores circuli TY primæ ſpirę ſe habebunt, vt 9. ad 1. Fiant itaque rectangula AB, BC, & DE, & cęt. æqualia ſectori PAQ tertię ſpirę, & ſectoribus alijs deficientibus, & rectangulum primū AB ſe habeat ad rectangulū HN, vt 9. ad 1. eritque rectangulum HN ęquale ſectori maximo ſimili circuli YQS primę ſpirę cumque cęteri LC, & VE, & cęt. deficiant æqualibus decrementis arithmeticis ſecundum vtrūque latus, ac rectangula primæ ſpirę, vt in fig. 2. pr. 53. hinc ſingula ſingulis erunt æqualia; Quamobrem ad rectangula æqualia, & non deficientia incluſo maximo vtrinque HN magis erunt, quam 1. ad 3. at excluſo maximo, minus quàm 1. ad 3.



Iſtis itaque rectangulis decreſcentibus adde pari numero rectangula, quę eadem perſeuerant XH, & BL vſque ad KM, & cęt. quæ ſe habent, ad HN, vt 4. ad 1. & inſuper rectangula BH, & LD, & alia, quæ decreſcunt ſecundum vnicum latus decremento arithmetico, quę etiam dupla ſunt rectanguli HN; & erunt ad integra HH, vt 1. ad 1.; ſiquidem ob decrementum arithmeticum pro dimidio deficiunt ex prop. 12. Tract 27. & ideo efficiuntur ei æqualia, quibus adde æqualia complementa, ſimiliterque deficientia HA, & cęt. vſque ad KQ, & cum prędictis erunt dupla ipſorum, ſcilicet, vt 2. ad 1., & cum rectangulis quadruplicibus XH vſq; ad MK erunt, vt 6. ad 1. ſeu, vt 18. ad 3. Adde itaque inſuper rectangula duplici arithmetico decremento deficientia HN, & LC, & cęt. vſque ad KO, quæ addito HN ſe habent magis, quam 1. ad 3.



Ideoque tota ſeries rectangulorum XN, & BC, & DE deficientia incluſo maximo XN, cuius ſinguli termini prædictis rectangulis partialibus conſtant, erit ad rectangula HN æquali numero ſumpta non deficientia magis, quàm 19. ad 3. At ſi à ſingulis ſeriebus excludas maximum, & ideo rectangulum XN, erit tota ſeries rectangulorum BC, & DE vſque ad MO ad totam ſeriem rectangulorum æqualium inuicem, & multitudine prędictis HN minùs, quàm 19. ad 3. Cum itaque ſectores circumſcripti ſinguli ſint æquales ſingulis rectangulis; ſiquidem ita deficit rectangulum, vt ſector quilibet circumſcriptus ex hypotheſi, & æqualibus decrementis, & ſectores circumſcripti includant maximum PAQ, ſectoreſque circuli primæ ſpiræ SYQ, omnes ſint æquales oſtenſi rectangulis HN ęqualibus inuicem; Sequitur, quod ſectores PAQ, & cæteri circūſcripti deficientes ſe habeant ad ſectores circuli YSQ primę ſpirę magis, quā 19. ad 3. Sectores verò inſcripti OIQ, & cæt ęquales rectangulis BC, & DE. & cęt. maximū excludentes minus, quam 19. ad 3. ad ſectores circuli primę ſpirę SVQ, & cęteris ęqualibus, & qui numero ſectoribus deficientibus reſpōdeāt.

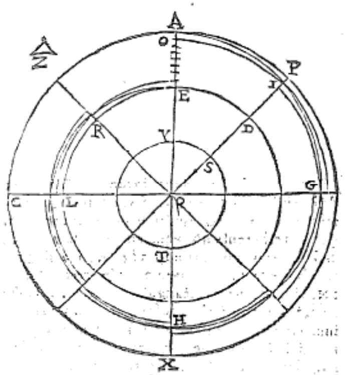
COROLLARIVM.

Circulus tertiam ſpiram comprehendens iuxtà Coroll. prop. 21. lib. 6. eſt ad circulum primæ ſpiræ, vt 27. ad 3. cum ad illum obtineat diametri proportionē duplicatā 9. ad 3. Quamobrem cum rectangula ęqualia ſectoribus circumſcriptis tertiæ ſpiræ ſint ad rectangula omnia æqualia ſectoribus primi circuli, vt 19. ad 3 erunt ad ſectores æquales tertij circuli, & ideo ad ipſum circulum, vt 19. ad 27. & paulò ampliùs, quia includunt maximum. At inſcriptis ſectoribus æqualia rectangula ad rectangula æqualia ſectoribus primi circuli, quia ſunt minùs, quàm 19. ad 3. & ideo quoque ſectores inſcripti ſectoribus circuli primi æqualibus ſint minùs, quam 19. ad 3. erunt ad ſectores omnes tertij circuli, & ideo ad ipſum tertium circulum minùs, quam 19. ad 27.

THEOR. VI. PROPOS. LVIII.

Spiræ tertiæ ſpatium comprehenſum eſt ad circulum eam claudentem, vt 19. ad 27.

*Probatur eodem modo ex propoſ. 54. h. Nam ſpatium ſpira concluſum AGHLEA non eſt maius, aut minus, quàm 19. partes, quarum circulus eam comprehendens continet 27. Ergo erit ad circulum vt 19. ad 27. Nam ſi poteſt eſſe maius ſit maius quantitate z, & ſectores inſcripti adeò multiplicentur, vt propoſ. 52. Tract. h. vt ſpatium AIC, & alia omnia inter ſpiram, arcumque ſectoris internum concluſa ſimul ſumpta ſint minora,



quantitate z. Quia itaq; ex aduerſarijs ſpatiũ ipſũ ſpirale eſt maius partibus 19. erit etiam multitudo ſectorũ maior, quã partes 19. ex 27. circuli partibus, cum ſectores differant minùs à ſpatio ſpirali, quã quod ipſum ſpatium ſpirale differt à partibus circuli 19. Hoc autem eſſe nequit; cum inſcripti ſectores ſint minùs, quàm 19. partes circuli maximi partibus 27. conſtantis, vt propoſ. præced.

Si verò affirmetur, quòd ſpatium ſpirale ſit minùs, quàm partes 19. quarum circulus includens eſt 27. Sit defectus ſpatiũ z, & tot circũſcribãtur ſectores, vt ſpatia omnia, vt IPA inter ſpiram, arcuſq; ſectorum ambiẽtiũ intercepta ſimul ſumpta ſint minus, quam ſpatium z, tunc ſectores, qui minus differunt à ſpirali ſpatio minori partibus 19. quàm partes 19. differant ab ipſo ſpatio ſpirali erunt minora, quàm partes 19. vnde ſe habebunt ad circulum claudentem minus, quàm 19. ad 27. contra oſtenſa propoſ. 57. h. Cum itaque ſpirale ſpatium, nec maius eſſe poſſit, nec minus, quam 19. ad 27. eam proportionem conſequetur quam 19. ad 27. quod demonſtrandum erat.

THEOR. VII. PROPOS. LIX.

Spira prima ad ſecundam eſt, vt 1. ad 6. & ſecuda verò ad tertiam ſe habet, vt 1. ad 2. & ſic tertia ad quartam, & cæt.

Probatur. Nam repetita figura propoſ. 55. h. ſit ſpatium primum ſpirale QG, & ſecundum ACHXEA. Dico itaque, quod primum ſpatium ſpirale ad ſecundum ſe habet, vt 1. ad 6.

* Probatur. Nam prima ſpira eſt ad ſuum circulum, vt 1. ad 3. hic verò ad circulum ſecundum, vt 3. ad 12. Quare prima ſpira ſe habebit ad circulum ſecundum, vt 1. ad 12. ſecunda ſpira eſt ad circulum ſuum, vt 7. ad 12. Proptereaque cum iſtæ proportiones habeant eoſdem terminos ex prop. 7. de propor. Tract. 17. ſe habebunt ad inuicem, vt fundamenta 1. ad 7. Sed ſpatium ſpirale 7. comprehẽdit ipſam ſpiram minorem cum ſuo circulo; clauditur enim ſpira ACHXE, & portione radij EA, ideoq; ſubducta ſpira prima EQ remanebit ſecũda 6. Vnde prima ſpira ſe habebit ad ſecũdã, vt 1. ad 6.

Probatur etiam ſecunda pars. Nam tertia ſpira habet proportionem ad ſuum circulum, quam 19. ad 27. & circulus iſte ad primum eſt, vt 27. ad 3. & circulus primus ad ſpiram, quam claudit eſt, vt 3. ad 1. ideo ex *æquo* ſpira tertia ad primam erit vt 19. ad 1. Cum ergo tertia ſpira cum ſecunda, & prima ſit 19. ablata prima erit 18, & ſecunda, quæ eſt 7. remanebit 12. Quare habebit ſecunda ſpira ad tertiam proportionem, quam 6. ad 12. nempe ſubduplam.

Quòd verò reliquę ſpirę minores ad immediatè maiores ſubduplam proportionem ſeruent, patet. Nam iuxta modũ probandi adhibitũ antecedentibus propoſitionibus quarta ſpira ſe habebit ad ſuum circulum, vt 43. ad 48. ablata verò prima ſecunda, & tertia ſpira, quod ſpatium eſt 19. partium remanebit ſpira quarta 24. ad tertiam ſpiram quæ eſt 12. nempe 2. ad 1. vel conuetendo tertia ad quartam, vt 1. ad 2. & ſic de reliquis.

COROLLARIVM I.

VNde cum noueris circulum, in quo prima ſpira deſcribitur, facilè inuenies areę cuiuſlibet ſpiralis quantitatem. Nam V. g. ſit quinta ſpira, & circulus primæ reuolutionis ſit 35. partium. Inuenietur primo proportio reuolutionis quintæ ad primum circulum, qui ponatur 3. Itaq; iuxta tradita, quia ita eſt ſector ad ſectorem, vt circulus ad circulum, & rectangula ſectoribus æqualia, & pariter progreſſiones eorum; ideo rectangulum æquale ſectori ſpiræ quintæ ad rectangulũ equale ſectori ſpirę primę ſe habebit, vt 25. ad 1. vel vt 75. ad 3. cum latera ſe habeant, vt 5. ad 1. Ideoq; ſi in fig. 1. pr. 57. ponas latus XB eſſe 5. partiũ rectãgulũ AB ęquale ſectori quinti circuli erit partiũ 25. ad 1. vel 75. ad 3. rectãgulum verò XH, cuius latus erit, minus vnica parte erit, vt 16. ad 1. ideoque triplatum erit vt 48. ad 3. rectangula verò HB, & HA deficientia pro ſuo dimidio ſe habebunt, vt baſes, nempe quodlibet, vt 4. ad 1. & ſimul, vt 8. ad 1. & quia deficiunt pro dimidio rurſus, vt 4. ad 1. & ideo, vt 12. ad 3. & cũ non deficientibus AB, vt 60. ad 3. ſi verò addas rectãgula HN, quę deficiunt circuli ſui $\frac{1}{3}$: ideo omnia ſimul ſe habebunt ad circulum primæ ſpirę, qui ponitur 3. vt 61. ad 3. Et erit inuenta

uenta proportio primi circuli ad quintam ſpiram. Quã ob tentã dices adhibendo regulam proportionum, ſi 3. dant 61. quid 35. ideoque calculus prodet 711 $\frac{2}{3}$ pro quintæ reuolutionis ſpatio poſito primo circulo partium 35.

THEOR. VIII. PROPOS. LX.

Spiralis ſpatij ſectio eſt ad ſuum ſectorem maximum circuli maximi comprehendentem eam ſectionem, vt rectangulum ex lineis eam terminantibus ſimul, & triens quadrati ex earundem differentia ad quadratum diametri circuli prædicti maximi comprehendentis.

*SIt datum ſegmentum ſpirale AGB, quod cõcludat ſpatium IAB. Dico, quod hoc ſpatium ad ſectorem comprehendentem ALC habet eam proportionem, quam rectangulum ex IB, & AI, vel IC æquali vnà cum quadrato ex differentia BC ad quadratum ex diametro IA, vel IC.

Probatur. Nam ſi fiant rectangula deficientia ęqualia ſectoribus ſingulis inſcriptis, & deficientibus omni poſſibili multiplicatone multiplicatis AIL, DEI, EGI, & HIB, & cæt. hęc rectangula erunt ad rectangula æqualia quantitate ſectoribus non deficientibus, & inuicem, at numero prędictis deficientibus ex prop. 19. tract. 28. Cor. vt rectangulum ex maximo, à quo incipit, & minimo latere, ad quem peruenit propreſſio cum triente quadrati ex differentia eorundẽ laterum ad rectangulum totum maximum. Ergo etiam ſectores ipſi ſimiliter multiplicati, & ijſdem rectangulis ſinguli ſingulis æquales arithmetico decremento deſſicientes, ſed non vſque ad vltimum ſui ab A vſque ad B, & ob omnem eorum multiplicationem omnimodam poſſibilem, ſpiram ęquantes, habebunt ad ſectores integros ęquales numero prædicto, & quantitate inuicem eandem proportionem, eruntque, vt rectangulum ex AI, & IB maximo, ad quem terminat cum triente quadrati ex BC differentię ad rectangulum ex AI, & IC hoc eſt quadratum AI.