TRACTATVS XI.

IN VII. LIBRVM EVCLIDIS PARS PRIMA.

De proportionibus Numerorum in genere.

HIc agit Euclides de numeris. Diuiditurque in tres Expenſiones: In prima agit de fundamento proportionis in numeris, quæ eſt ratio mutua menſuræ, & menſurati; Secunda agit de proportione numerorum, in qua modi argumentandi etiam in numeris veri demonſtrantur, qui veri vniuerſaliter demonſtrati ſunt lib. 5. Tertia agit de numeris minimis primis inter ſe, & hoc vt octauo libro, deinde agat de proportionibus numerorum primorum, ſicut eodem libro agit de proportionibus planorum numerorum, & ſolidorum, quibus primi numeri ſunt radices.

EXPENSIO I.

De principijs.

PAuca hic principia ponenda ſunt, cùm feré omnia appoſuerimus tract. 8. quãdo de Arithmetica ſimplici egimus, & ea, quæ ſpecialiter ad hunc tractatum ſpectant ſunt ſequentia.

DEFINITIO I.

PRoportio numerorum eſt habitudo quædam vnius numeri ad alium ſecundùm quòd continet, vel continetur, vel ſemel, vel aliquoties, & inſuper aliquam illius partem vel partes.

Supra tract. 8. def. 17. breuiùs proportionem numerorum definiuimus dicendo eſſe habitudinem numerorum in ratione menſurantis, & menſurati. Verùm hæc definitio per omnia genera proportionum accuratiùs in ratione quâque menſurantis, ſeu menſurati progrediens, rem ſpecialiùs aperit. Eas verò ſpecies proportionum exponit, de quibus ſupra egimus tract. 9. expen. 2. cor. 3.

Cùm dicit *continet, vel continetur,* explicat proportionem maioris, & minoris inæqualitatis, ſi adſit.

Cùm dicit *ſemel* explicat proportionem æqualitatis; cùm dicit *aliquoties* explicat proportionem multiplicem.

Cùm dicit, *& inſuper aliquam eius partem* explicat ſuper, vel ſubparticularem etiam multiplicẽ, ſecũdùm quòd cõtinet, & cõtinetur, vel ſemel, vel aliquoties, & inſuper aliquam contenti partem.

Cùm verò dicit *partes* explicat proportionem ſuperpartientem, vel ſubpartientem etiam multiplicem: nam ſi ſemel, & inſuper aliquas partes eſt ſuperpartiens, & ſi contineatur ſubpartiens: quòd ſi aliquoties, & inſuper aliquas partes, tunc eſt ſuper, vel ſubpartiens multiplex.

DEFINITIO II.

TErmini, ſeu radices proportionis ſunt duo numeri, quibus in illa proportione minores ſumi nequeunt.

DEFINITIO III.

CVm tres numeri proportionales fuerint, primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur, primi ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint primus ad quartum triplicatam rationem habere dicitur primi ad ſecundum, & ſemper deinceps vno amplius, quam diu proportio extiterit.

Hæc definitio explicata eſt ſupra tract. 9. par. 1. def. 7.

Itaque ſi ſint tres numeri eadem proportione gaudentes V. g. 2. 4. 8. proportio 2. ad 8. eſt duplicata proportionis 2. ad 4. & ſi ſint quatuor eſt triplicata, V. g. 2. 4. 8. 16: numerus 2. ad 16. habet proportionem triplicatam, 2. ad 4. & ſic conſequenter ſi ſint quinque, V. g. 2. 4. 8. 16. 32. numerus 2. ad 32. quatruplicatam proportionem habet eius, quam 2. ad 4. quod & intelligitur inuersè, quod numerus maior vltimus ad primum habeat proportionem repetitam, & replicatam, quam ſecundus ad primum. V. g. 32. ad 2. eſt quadruplicata eius, quæ 4. ad 2.

DEFINITIO IV.

QVotlibet numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum; & ita deinceps, donec intermedij extiterint numeri.

Hæc quoque definitio explicata eſt par. 1. def. 8. tract. 9. Vnde breuiter: ſi ponantur ordine numeri creſcentes, quoquo placuerit augmento V. g. 2. 8. 7. 9. 12. 16 vltimus 16. componitur ex proportionibus primi 2. ad ſecundum 8. & ſecundi 8. ad tertium 7. & tertij 7. ad quartum 9. & quarti 9. ad quintum 12. Et ſi inter iſtos libeat interponere numerum vel plures, V. g. 8. inter 7. & 9. dicetur quoque 16. ad 5. nouiter appoſitis proportionibus componi.

AXIOMATA.

NVmerus metiens totum, & ablatum, metitur, & reliquum.

Sit V. g. numerus 9. qui metiatur 45. & ablatum 27. Dico, quòd metitur, & reliquum 18. Nam cùm metiatur totum diuidi poterit totum in partes ipſi 9. æquales; nempe in quinque nouenarios. Cumque metiatur ablatum quoque, hoc ablatum 27. diuidi poterit in partes ipſi 9. æquales, nempe in tres nouenarios, & remanebunt duos nouenarios ad æquandum totum. Ergo duo nouenarij menſurant reliquum vſque ad complementum totius 45. nempe 18.

Axiomata reliqua tract. 8. habentur.

EXPENSIO II.

De partibus numerorum alterum menſurantium.

AD hoc, vt ſternat iter ad numericas proportiones intelligendas Euclides incipit agere de partibus numerorum, quæ alium numerum poſſint menſurare, vtpote quòd in hac mutua menſura, vel totius, vel alicuius partis proportio eorum conſiſtat.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duobus numeris inæqualibus detrahatur ſemper minor à maiore alterna quadam detractione, & ſemper ſuperſit aliquid, donec peruenias ad vnitatem: Numeri primo aſſumpti primi inter ſe erunt.

17. 6.

SIt propoſitus numerus 17. maior, 6. minor, qui detrahatur à priori quoties fieri poteſt, nempe duplici vice, deinde aliâ detractione reſiduum à quo 6. auferri nequeat, V. g. 5. detrahatur viciſſem à 6. ſi remaneat vnitas ſola, vt hic remanet: Dicit propoſitio, *quod de his numeris, & omnibus alijs ſimilem proprietatem habentibus pronunciandum ſit, quòd ſint inuicem primi, idest, quòd ſolam vnitatem pro communi menſura poſſideant.*

Progreſſ. 1. Probatur. Nam ſi aliam obtinerent; hæc eſſet numerus maior vnitate, qui metiretur vtroſque nempe totum maius 17. & ablatum minus 6. ſed ex axiom. 12. numerus metiens totum, & ablatum, metitur quoque reliquum. Ille ergo numerus maior vnitate metiretur, reliquum 5.

Progreſſ. 2. Et rurſus eodem ritu argumenti; quia 5. ſecunda detractione ablatum eſt à 6. & ex primo progreſſ. numerus ille maior vnitate metitur totum 6. & ablatum 5. metietur, & reliquum 1. Ergo numerus maior vnitate ipſam vnitatem metietur, quòd eſt abſurdum. Vnde communis menſura nulla 17. & 6. numeris erit, niſi vnitas: Ergo erunt inuicem primi ex def. 22. tract. 8.

PROBL. I. PROPOS. II.

Duobus numeris datis non primis inter ſe maximam eorum communem menſuram reperire.

6. 22.

DEntur duo numeri, vt 6. & 22. Detrahatur que minor à maiore quoties fieri poteſt; remanebunt 4. Detrahatur rurſus ſecunda detractione 4. à minore 6. & remanet 2. Detrahatur rurſus tertia detractione 2. à 4. & nihil reliqui remanet. *Dico 2. eſſe communem amborum menſuram.* Quod, ſi eſſet neceſſe aliam, & aliam detractionem reiterare, id fiat, donec nihil remaneat. Ille enim poſtremus numerus, à cuius detractione nihil remanet, erit communis aſſignatorum numerorum menſura maxima.

Progreſſ. 1. Probatur primò; Quod hæc ſit communis menſura V. g. 2. numeri 6. & numeri 22. ex pronunc. 10. tract. 8. Nam numerus numerum metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur; ſed numerus 2. vltimo remanens metitur 4. cùm nihil ex eo, factâ detractione, quoties fieri poteſt, remanſerit. Ergo metitur quoque partes ei 4. æquales; quas numerus idem 4. per detractionem abſtulit à numero maiori. Ergo metietur quoque numerũ ſe maiorem 6. qui ex ijs partibus conſtabat, & ſe vltimo reſiduo V. g. ex 4. & 2.

Progreſſ. 2. Sed numerus 6. & 4. metiuntur numerum primum 22; cùm 6. æquetur partibus detractis nempe tribus vicibus numero 6. & 4. æquetur reſiduo: Ergo vltimum reſiduum 2. metitur quoque numerum primo propoſitum 22.

Patet conſeq. quia metitur ex primo prog. 4. & 6. qui numeri integrant numerum primo poſitum 22.

Probatur ſecundò: Quòd hæc ſit menſura maxima. Nam ſi hic numerus 2. maxima menſura non eſt; erit aliquis maior, quam 2. qui metietur vtroſque 22. & 6. Quare ex pron. 1. huius metietur quoque primum reſiduum 4. quia metietur totum 22. & ablatum 6. Sed eadem paritate, quia metitur totum 6. & ablatum 4. metietur quoque reſiduum 2. Maior ergo numerus, quam 2. commenſurabitur numero 2. quod eſt abſurdum.

Quod ſi datis duobus numeris, & facta detractione nihil remaneat, numerus minor erit communis maxima menſura maioris, vt eſt 6. numeri 18. ſe enim metitur ſua quantitate, & numerum maiorem ſui replicatione.

COROLLARIVM.

HInc manifeſtum eſt numerum metientem duos numeros, metiri quoque eorum communem maximam menſuram: Nam aut hic numerus eſt æqualis, aut minor (maior enim eſſe non poteſt, cùm ijdem duo numeri duas maximas inæquales menſuras habere non poſſint.) Ergo ille numerus, ſi eſt æqualis, metietur quoque communem menſuram, cui æquatur; ſi eſt minor, idem valebit argumentum: nam maxima menſura eſt reſiduum vltimum: quare ſi metitur totum, & ablatum; metietur etiam omnia reſidua ſucceſſiuè remanentia, & tandem maximam quoq; communem mensuram; Sic 6. est maxima mensura, & simul residuum numeri 42. & 12. quos si numerus 3. mensuret; dū quaterdecies in numero 36. sexties in 12. inest: mensurabit quoque 6. quòd eorum residuum existat.

PROB. II. PROPOS. III.

Tribus numeris datis non primis inter se eorum communem mensuram reperire.

42. 18. 8. mensura 2.

DEntur tres numeri 42. 18. & 8. quorum communis mensura reperiri debeat.

Inueniatur primo maxima mensura duorum maiorum V. g. 42. & 18. ex 1. propos. quæ sit 6. si ergo hæc maxima mensura capiat in tertio numero ex æquo ita, quod nihil remaneat: hæc erit maxima omnium communis mensura: At si aliquid remaneat exerceatur per mutuam detractionem regula tradita præc. propos. quoties opus est; detrahaturque E. g. 6. ab 8. quoties fieri potest. Remanebunt 2. rursus si 2. ex 6. subducatur, nihil remanet.

Pronuntio itaque 2. esse trium numerorum 42. 18. *& 8. communem mensuram maximam.*

Probatur, quod sit trium commuuis mensura ex præc. prop. Post remum residuum 2. est maxima mensura numeri tertij 8. & maximæ mensuræ 6. duorum primo assumptorum numerorum. Ergo etiam ipsorum est mensura ex pronunciato 1. huius.

Probatur quoque secunda pars; Quod sit omnium trium maxima mensura. Nam, si non est, erit aliquis numerus maior V. g. Nūmorum, qui cum metiatur duos numeros primo propositos 42. & 18. metietur quoque eorum communem mensuram 6. ex Coroll. præcedenti; sed ex hypothesi metitur quoque tertium numerum 8. Numerus ille Nūmorū cū ex aduersarijs dicatur triū datorum numerorum communis mensura. Ergo metitur totum nempe 8. & ablatum 6. Qua de re metietur quoque reliquum 2. Sed ille Nūmorum numerus ponebatur maior, quam 2. Ergo numerus maior, quam 2. ipsum metiretur, quod est absurdum.

COROLLARIVM

HInc ellicies idem, quod in præced. Coroll. numerum metientem tres numeros metiri etiam maximam eorum mensuram: Nam maior esse non potest ipsâ maximâ mensurâ; si sit æqualis clarum est cum numerus omnis se per vnitates suas metiatur. Si sit minor eodem modo, quo supra probatur. Quoniam maxima mensura est rel quorum trium numerorum. Ergo ea mensura minor, quæ metitur tres numeros, nempe totum primū, & ablatos reliquos per mutuam subtractionem, metitur etiam vltimum residuum, nempe omnium trium maximam communem mensuram.

COROLLARIVM II.

SI verò aliquis cupiat plurium numerorū, quàm trium communem mensuram, idem præstandum erit, & inuenta trium mensura, quarti, per mutuam detractionem inuentæ mensuræ ab ipso, mensura maxima inuenietur; illa enim erit quatuor numerorum mensura communis.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Omnis numerus est cuiuslibet dati numeri, aut pars, aut partes

PRobatur. Vel sunt primi inuicem, vt 7. & 5. & sic numerus minor est partes numeri maioris; Quia tot habet vnitates V. g. 5. quæ sunt partes maioris numeri, ex quibus, additis alijs, 2. componitur.

Vel duo numeri non sunt inuicem primi, & sic si minor maiorem metiatur, vt 4. metitur 8. tunc 4. est pars, vt per se patet, numeri 8. Quod si non metitur, reperiatur eorum communis mensura, qualis est 3. numeri 6. & 9. Assumanturque à minori numero ei communi mensuræ tot partes æquales, quot possunt sumi V. g. 3. & 3. Iam numerus minor est partes numeri maioris; quia eius plures partes comprehendit; cùm 3. 3. integrent numerum 6.

THEOR. III. PROPOS. V.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & simul vterque vtriusque eadem pars erit, quæ est vnus vnius.

HÆc propos. est 1. 5. propos. 1. vniuersaliter proposita; modo hic in numeris ostenditur.

Partes	3.	2.	compositi 5
Integri	12.	8.	20

Dentur plures numeri, sed facilitatis g. duo, vt 2. & 3. quorū primus 2. diuidat 8. In tot numero partes V. g. in 4. in quot 3. diuidit 12.

Dico, quod compositi 2. & 3. diuisores, vt faciant 5. diuidere quoque compositos numeros 8. & 12. nempe 20. in tot numero partes, vt priùs diuidebant.

Probatur. Diuide numeros metitos 8. & 12. in partes æquales metientibus numeris 2. & 3. habebisque ex hypothesi æqualem numerum partium ex singulis metitis numeris, vt ex 8. erues 4. duenarios, ex 12. verò 4. ternarios. Adde itaque singulos duenarios æquales 2. metienti

2 3
8 12
2222 3333
5555
20

ternarijs æqualibus metienti 3. efficiesque 4. quinarios æquales metientibus 2. & 3. simul additis: Ergo reperiret quinarius metiens in simul additis quinarijs, nempe vicenario 4. quinarios, idest singulas partes cuiuscunque metiti 12. & 8. simul additas.

THEOR. IV. PROPOS. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & simul vterq; vtriusque eædem partes erit, quæ vnus vnius.

HÆc propositio eadem est, ac antecedens; solùmque vult, quòd numerus metiens comprehendat non vnam partem, sed plures partes metiti. Sint ergo plures numeri, sed pro nunc duo V. g. 6. metiens numerum 8. cuius comprendat 3. duenarios ex quatuor quibus 8. constat, & 9. metiens 12. comprehendat quoque ex eo 3. ternarios ex 4. quibus constat.

Partes	6.	9	compositi 15
Integri	8.	12	20

Dico: Quod, si componantur 6. & 9. & fiant 15. eandem tres partes comprehendent ex 8. & 12. simul additis, nempe Vicenario, vt prius simplices faciebant quælibet ex suo numero metito.

6 9
222 333
8 12
2222 3333
555
15
5555
20

Probatur: Diuide numeros metientes in partes; secundùm quas metiuntur suos metitos V. g. 6. in 3. duenarios, & 9. in 3. ternarios, quas simul addes idest duenarios cum ternarijs vt fiant 3. quinarij: Ergo metientes compositi, nempe 15. comprehendet tres quinarios. Sic est faciendum de metitis singuli enim distributi in partes metitas V. g. 8. in duenarios, & 12. in ternarios ex hypothesi, tum duenarij, tum ternarij æquales numero erunt, nempe 4. qui simul additi erunt quinarij 4: prout numeri metiti constabant singuli, vel 8. ex 4. duenarijs, vel 12 ex 4. ternarijs. Cum ergo, tum metiti compositi eundem numerum partium 4. quinarios, & metientes 3. quinarios, secundum quem in mensura priùs correspondebant, integrent; patet, quod etiam compositi alter alterius eædem partes erunt. Idē autem etiam eueniet, si aut fractos assumas, aut si plures.

THEOR. V. PROPOS. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, vt ablatus ablati: & reliquus reliqui eadem pars erit.

SIt numerus integer 5. eadem pars numeri 20. quæ pars est ablati 2. numeri 8. ablati, hic à 20. ille à 5.

Pars	2	compars	3	totum	5
Pars	8	compars	12	totum	20

Dico reliquum 3. ex 5. esse eandem partem residui 12. ex numero 20.

Prob. Assume probationis gr. quemcumque numerum incognitum *Equorum*, cui residuum 3. sit eadem pars, nempe tot vicibus insit, quæ est ablati 2. ablato 8. & consequenter, quæ est totius 5. toti 20. idest quatuor vicibus ex hypothesi. Ergo metientes 3. & 2. simul vt faciant 5. inuenient tot partes ex 5. propos. huius in metitis 8. & numero *Equorum* incognito simul vnitis, quot 2. ablatus, & metitor, in 8. ablato, & 5. totum in toto 20. Ergo illi compositi numerus 8. & numerus *Equorum* facient 20. hoc enim aggregatum metitur eadem mensura 5. nempe 2. & 3. compositi per vices 4. replicatas easdem, quibus metiabatur mensura 5. totum 20. Quare incognitus Equorum numerus erit 12. nempe residuum numeri 8. ex 20. quem metietur residuum 3. vt 2. ablatus, ablatum 8. & 5. totus totum 20.

COROLLARIVM

COllige, quod idem intelligitur in numeris fractis, & etiam de numero maiori, & multiplici respectu minoris. Sic si 8. ablatū sit tot vicibus numero 2. ablato, quot 20. totus numero 5. toti, erit etiam residuum 12. tot vicibus maior numero residuo 3. vt patet, cùm sit eadem ratio.

THOR. VI. PROPOS. VIII.

Si numerus numeri partes fuerint, quales ablatus ablati, & reliquus reliqui eædem partes erit, vt totus totius.

Partes	6	9	compars	15	totum
Partes	8	12	compars	20	totum

SIt numerus 6. ablatus à 15. eadem pars numeri 8. ablati à 20. scilicet eius tot vices contineat V. g. tot duenarios, quot 15. integer minoris numeri continet vices numeri 20. integri maioris V. g. quinarios.

Dico, quod residuum 9. integri 15. cum numerus 8. fuerit ablatus, est eædem partes, nempe tot vicibus contineatur aliqua eius pars in numero 12. residuo maioris numeri 20. quot 6. in 8. vel 15. in 20.

Probatur. Assumatur aliquis alius *Equorum*, qui tot vices contineat numeri 12. quot ablatus 6. ablati 8. vel integer 15. numeri 20. Coniungaturq; iste numerus *Equorum*, cum residuo 6. At 12. residuum cum ablato 8. Isti vtique, vt priùs, facient 20. V. g. *Homines*. Ergo ille numerus *Equorum* iunctus cum 6. faciet 15 Nam, cùm incognitus Equorum numerus sit eædem partes 12. vt 6. numeri 8. Ergo etiam iunct 6 & incognitus ex propos. 6. huius erit eædem partes numeri 8. & 12. coniunctorum, ac vnus vnius V. g. 6. respectu numeri 8. Sed numerus, qui sit ad 20. vt 6. ad 8 alius non est; nisi 15. Ergo iste numerus *Equorum* cum numero 6. iunctus faciet 15. Ergo erit ille numerus *Equorum* 9. nempe residuum numeri 15. ablato 6. qui ita est ad 12. residuum numeri 20. vt ablatum 6. ablato 8. vel totus 15. toti 20. Quod & de numeris quibuscumque fractis intelligitur.

THEOR. VII. PROPOS. IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; Et vicissem, quæ pars est vel partes primus tertij, eadem pars erit, vel eadem partes secundus quarti,

I. 2. Hominum II. 8. Lapidum
III. 3. Equorum IV. 12. Nummorum
333 222

SIt primus numerus V. g. 2. *Hominum* numeri 8. secundi *Lapidum* eadem pars, quæ est 3. *Equorum* numeri tertij 12. *Nummorum*. *Dico, quod Hominum numerus numero Equorum eadem pars est, vel partes, quæ numerus Lapidum numero Nummorum.*

Probatur. Nam diuisis *Lapidibus* 8. secundum vices; quas *Hominum* continet, V.g in duenarios, & numerus *Nũmorum* secundum vices, quas continet *Equorum* V. g. in tot ternarios, erunt ternarij *Nũmorum* tot vices, quot duenarij *Lapidum* ex hypothesi. Sed insuper erunt omnes duenarij eædem partes respectu ternariorum. Cum enim omnes tum duenarij inuicem, tum ternarij inuicem sint æquales sit, vt duenarius tot vnitates habeat respectu vnius ternarij, quot alius duenaris respectu alius ternarij. Ergo si coniungantur omnes duenarij simul, vt fiant 8. vt priùs numerum *Lapidum*, & ternarij quoque simul vniantur, vt fiant 12. *Nũmorum*, vt prius eadem pars, seu partes eædem manebunt ex 5. propos. & 6. huius, quæ vnus vnius, nempe quæ duenarij *Hominum* respectu ternarij Equorum.

THEOR. VIII. PROPOS. X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars, aut partes est secundus quarti.

SIt primus numerus *Hominum* 6. qui sit partes secundi numeri 9., Sitque alter tertius numerus 8. *Equorum*, qui sit partes num. 12. quarti.

I. 6. Hominum II. 9.
III. 8. Equorum IV. 12.

Dico. Quod primus numerus Hominum tertio Equorum eadem pars est, seu partes, quæ 9. secundus numerus numeri 12. quarti.

Probatur. Nam diuisus in suas partes 6. numerus *Hominum* iuxta quas capit in 9. nempe in 2. ternarios, & 8. *Equorum* iuxta quas capit in 12. nempe in 2. quaternarios singulæ erunt sui totius pars, quia 6. *Hominum* numerum habet tot ternarios, quot *Equorum* 8. quaternarios, Et insuper erunt eadem pars, tam ternarius numeri 9. quam quaternarius numeri 12. ex hyp. Vicissim ergo ex anteced. eadem pars, vel partes duenarius erit quaternarij, quæ 9. numeri 12. Ergo si iterum iungas duos ternarios *Hominum*, vt sint 6. simulque iungas duos quaternarios *Equorum*, vt sint 8. vt priùs ita erunt ex 5. & 6. prop. hu. iuncti ternarij 6. ad iunctos quaternarios 8. vt vnus 3. ad vnum 4. & ideo, vt 9. ad 12.

Nam, vt ibi si numerus numeri fuerit pars, aut partes, & alter alterius eadẽ pars, seu partes simul vterque vtriusque eadem pars erit, vel partes, quæ vnus vnius.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum.

LIcet modi argumentandi vniuersaliter supra ostẽsi sint l.5. Quia tamẽ in quãtitate discreta specialibus rationibus comprobari poterant, noluit Euclides eos prætérire; quippe, cum proprietates quãtitatis discretæ ostendere apud se cõstitutum habuerit, & illi præcipuum locum inter passiones numerorum inuenirant, ad eas penitùs ostendendas etiam modos ipsos demonstrationibus quantitatis discretæ naturæ addictos prosequi necessarium fuit.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIt numerus aliquis totus 21. ad 24. vt 14. ablatum à 21. ad 16. ablatum à 24.

Totus 21. ad totum 24.
Vt ablatum 14. ad ablat. 16.
Reliquum 7. ad reliq. 8.

Dico, quòd reliquum 7. erit in eadem proportione ad reliquum 8. vt 14. ad 16.

Probatur. Nam ex definitione erit totus pars, vel partes totius, vt ablatus ablati. Ergo, & reliquus reliqui ex 7. & 8. prop. erit pars eadem, aut partes ablatus ablati, vt totum totius. Ergo dicent eandem proportionem; cùm proportio numerica in eo consistat, quòd vnus respectu alterius sit eadem pars, vel partes, & cet. vt ex definit. 1. constat.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Si sint quicumque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Series I. 3 2 5 collecti 10
Series II. 9 6 15 numeri 30

SInt duę numerorũ series, quorum numeri sint proportionales ex ordine V. g. in prima serie 3. 2. 5. in secunda 9. 6. 15. ita vt primus 3. referatur primo 9. vt secundus 2. secundo 6. & tertius 5. tertio 15.

Dico collectos numeros primæ seriei numeris collectis secundæ seriei eadem proportione referri, quam vnus eorum ad alium possidet.

Probatur. Numeri, qui dicunt proportionem sunt eædem partes, vel eadem pars ad inuicem, vt sunt numeri primę seriei, cum numeris secundæ sed ex 5. & 6. propos. numeri, qui sibi inuicem sunt eadem pars, vel eædem partes, si vniantur, & colligantur, sunt etiã eadẽ pars, vel eadem partes

tes

tes vnũ ad alterum sit collecti, vt erat vnus vnius: Ergo 10. numeri primę seriei collecti erũt eadem pars, seu partes numerorũ 30. secundæ seriei collectorum, vt vnus 3. primæ seriei ad alterũ correspondetem 9. in secunda. Igitur cum adhuc perseuerent eædem partes, seu pars collecti eadem proportione, quâ singuli se respicient.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; & vicissem proportionales erunt.

4 6
8 12

SIt 4. ad 6. quemadmodum 8. ad 12. *Dico eos inuicem fore, proportiales.*

Probatur, ex huius 9. vel 10. propos. Quia primæ combinationis antecedens numerus 4. & fundamentum relationis est eadem pars, seu partes ac 8. in secunda combinatione fundamentum itẽ, & antecedens; sicut terminus, & consequens in prima combinatione 6. est ad terminum, & consequentem 12. in secunda combinatione. Sed qui sunt vicissem eadem pars, seu partes dicunt proportionem ex definit. 1. Ergo cum sint vicissem eædem partes vicissem erunt proportionales, vicissem vero significat, quod fundamenta relationum dicant eam proportionem inuicem, quam termini.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si sint quotcunque numeri, & alij ijs æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Series I. 3 5 4 Ergo vt 3 ad 4
Series II. 9 15 12 9 ad 12

SInt duæ series numerorum prima 3. 5. 4. Secunda 9. 15. 12. qui bini, & in eadem ratione sumantur, nempe primus 3. ad secundum 5. sit in prima serie, veluti 9. ad 15. in secunda serie: Sic in prima serie, sit 5. ad 4. vt in secunda est 15. ad 12. Dicit, *quòd etiam extremi, tum primæ, tum secundæ seriei in eadem ratione erunt*. Primusque 3. tertium numerum 4. eadem proportione respiciet, quâ 9. respicit 12.

Progress. 1. Nam ex hypothesi, vt primus 3. in prima serie ad secundum 5; sic in secũda primus 9. ad secundum 15. & vt 5. ad 4. sic ponitur 15. ad 12. Ergo permutando 3. erit ad 9. vt 5 ad 15 Rursusque vt 5. ad 15. sic 4. erit ad 12. Ergo ex 5. & 6. propos. erunt etiam eadem pars, vel partes 3. numeri 9. quæ 5. numeri 15. Sic quoque eadem pars, vel partes 5. numeri 15. quæ 4. numeri 12. Quapropter eadem pars, vel partes erit 3. numeri 9. quas 4. numeri 12. Siquidem sunt eadem pars, vel partes alter respectu alterius similiter, ac est 5. numeri 15. Propterea etiam similiter erit pars, vel partes 3. numeri 9. sicut 4. numeri 12.

Cum ergo sint inuicem numerus 3. eadem pars, vel partes numeri 9. quæ 4. numeri 12. sequitur ex definitione 1. quod 3. sit ad 9. vt 4. ad 12.

Progress. 2. Cum itaque 3 respondeat proportione ad 9. eadem, quà 4. respicit 12. Ergo rursus permutando 3. erit ad 4. vt 9. erit ad 12.

COROLLARIVM

IN numeris itaque licebit argumentari *ex æquo*, & positis tribus numeris, vel pluribus, qui in eadem ratione bini, & bini; ac alij tres, seu plures sumantur, poterit argui esse primum proportionis fundamentum ad vltimum terminum in prima serie, vt primum fundamentum ad vltimum terminum in secunda serie in proportione respondet.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Si vnitas numerum quempiam metiatur: æquè autem alter numerus alterum quẽdam numerum metiatur, & vicissim vnitas tertium numerum metietur, ac secundus quartum.

LIcet vnitas numerus non sit secundùm multos, easdem tamen proprietates, ac numerus præter pluritatem possidet, & maximè, quòd sit pars alterius numeri V.g. 4. quemadmodum alter numerus 4. pars erit numeri 12. Quare idem verificabitur de vnitate, quod dictum est propos. 9. & 13. de numeris, absque eo quod eandem demonstrationem hic repetamus, & hoc ne dum intelligendum in hac propos. Sed in omni alia, vbi fit comparatio numeri ad numerum: Nam quilibet numerus numeri mensurati fit vnitas: V. g. 3. numeri 9. fiunt tres ternarij, sicut in ipso 3. sunt tres vnitates. Dicit itaque Euclides, quod si 1. metiatur 3. sicut 4. metitur 12. quòd vnitas quoq; metietur 4. sicut 3. metitur 12. Quòd est dicere, quod si sit 1. ad 3. vt 4. ad 12. quod etiam erit vicissem 1. ad 4. vt 3. ad 12. ex propos. 13.

THEOR. VI. PROP. XVI.

Si duo numeri mutuò se se multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

6 4
24

DVo numeri 6. & 4. se se mutuò multiplicantes faciant aliquem.

Dico, *quòd siue 4. multiplicet ipsum 6. siue ipse numerus 6. multiplicet* 4. numerum eundem prodire, vel duos numeros æquales V. g. 24 & 24.

Probatur. Tot erunt in producto 24 quaternarij, si 6. multiplicet 4 quot in numero 6. vnitates ex def. 15. tr. 8. & ita vnitas metietur 6. sicut 4. metitur productum 24. Quare vicissim ex præc. ita vnitas metietur 4. sicut 6. numerum productũ 24. Quia verò etiam 4. multiplicat 6. Ergo productus numerus V.g. Ouium cõtinebit 6. quoties sunt in 4. vnitates; cùm ergo in hoc posteriori producto Ouium genito à 4. multiplicatore numeri 6. toties contineatur senarius, quot in 4. vnitates, & cùm 6. multiplicabat 4. senarius quoq; continebatur toties in producto 24. quoties in 4. erant vnitates, vt ostensum est; Ergo senarius per æquales vices mensurat productum 24. & hoc productum Ouium: Quapropter hoc productum Ouium erit 24. ex pr. 3. tr. 8.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

Est 6 ad 8
Multiplicans 4
Vt 24 ad 32

SIt numerus 4. qui multiplicet 6. & multiplicet 8.

Dico, quod producti 24. & 32. ita sunt inuicem in proportione, vt 6. ad 8. multiplicati, quos 4. multiplicat.

Probatur. Nam 6. continetur tot vicibus in 24. quot 8. in 32. cum tot vicibus contineatur, quot vnitates sunt in 4. ex hypothesi. Ergo ex defin. 1. dicent multiplicati cũ suis productis proportionem eandem cum sint productorum eædem partes, & erit 6. ad 24. vt 8. ad 32. Ergo ex 13. propos. & ad inuicem, vicissemque dicent proportionem, & ita erit 6. ad 8. multiplicati, sicut producti 24. ad 32.

THEOR. VIII. PROP. XVIII.

Si duo numeri numerum quendam multiplicando fecerint aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

Ita 6 8
Multiplicatus 4
Vt 24 32

SIt numerus 6. qui multiplicet 4. quem & 8. multiplicet.

Dico 24. & 32. productos esse ita ad inuicem, vt 6. & 8. qui multiplicauere numerum 4.

Probatur. Quia ex 16. h. producti erunt equales etiam si 6. & 8. non essent multiplicatores sed 4. eos multiplicaret, sed ex anteced. si vnus numerus duos multiplicat productus ad productum; ita est vt multiplicatus ad multiplicatum. Ergo idem sequetur, si duo numeri vnum eundemque multiplicent, ideoque 6. erit ad 8. vt 24. ad 32.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & vltimo fit numerus æqualis est ei, qui fit à medijs.

Vel si numerus, qui emergit ex multiplicatione primi cum vltimo sit æqualis producto ex medijs, illi numeri erunt proportionales.

SIt numerus 2. ad numerum 3. vt numerus 4. ad numerum 6. in proportione refertur.

Dico primò; quod multiplicatus primus 2. cum vltimo 6. generat numerum æqualem genito ex multiplicatione mediorum 3. & 4.

2. ad 3. vt 4. ad 6. Genitus 12.

Id verò demonstratur. Etenim primus numerus 2. multiplicet 4. medium, & faciat numerum quendam *Ouium* V. g. 8. Cum ergo idem numerus multiplicet quoque extremum 6. ex hypothesi & generet V. g. numerum *Hominum* 12. erit genitus *Ouium* 8. ad genitum *Hominum* 12. ex prop. 17. huius, vt generantes 4. & 6. per eundem numerum 2. multiplicati, & ideo etiam vt 2. ad 3. cum ex hypothesi sit eadem ratio.

Rursus: quia ex hypothesi 4. multiplicat 3. & generat numerum *Equorum*, ex effectione autem 4. etiam multiplicat 2. & producit numerum *Ouium* 8. Ergo 8. dicet eadem proportionem ad numerum *Equorum*, ac generantes 2. & 3. ideoque vt 2. ad 3. ita 8. ad numerum *Equorum*. Cum numerus *Ouium* 8. dicat proportionem ad numerum *Equorum*, & *Hominum*, quam 2. ad 3. seu 4. ad 6. quæ ex hypothesi est eadem proportio. Et ideo, cùm dicat idem numerus ad eos proportionem eandem, erit eorũ, vel pars, vel partes eædẽ: Quare geniti erunt æquales, ex 3. pr. tr. 8. cùmque genitus ex 2. & 6. sit 12. numerus *Hominum*, etiam numerus *Equorum* ex 3. & 4. genitus erit 12. cui est eædem partes numerus 8. *Ouium*.

Dico 2. Quod, si numerus productus à primo, & vltimo sit æqualis producto ex medijs, *eos producentes numeros fore proportionales; & multiplicantes esse inuicem, vt multiplicati*. Sic numeri Hominum, & *Equorum*, si sint æquales, erit 2. numerus multiplicans in genito *Hominum* ad multiplicantem 3. in numero *Equorum*, vt multiplicatus 4. in eodem ad multiplicatum 6. in numero Hominum ita, vt reciproca sit relatio.

Probatur. Nam idem numerus *Ouium* ad eosdem numerum inquam *Hominum*, & *Equorum*, vt pote ad æquales eandem dicit proportionem, & eam ipsam ex propos. 16. quam multiplicantes ad multiplicatos. quare ita erit 8. ad numerum 12. Hominum, vel Equorum, vt 2. ad 3. per numerum 4. generantes 8. Ouium, & Hominum numerum 12. vel vt 4. ad 6. per numerum 2. generantes 8. *Ouium*, & 12. *Equorum* numerum: Quare cum 2. ad 3. sit in eadem proportione, ac *Oues* ad *Homines*, & in ipsâ eâdem sit 4. ad 6 etiam inuicem erit eorũ eadẽ proportio ex prop. 16. l. 5. h. & ita erunt 2. ad 3. multiplicantes, vt 4. ad 6. multiplicati.

THEOR. X. PROPOS. XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur æqualis est ei, qui à medio efficitur.

SIt 2. ad 4. vt 4. ad 12. Medius numerus est 4. qui vt duplex æqualis vsurpatur. Vnde hæc est eadem propositio, vt prior eademque paritas. Nam in alio non differt; nisi quod medij numeri hic sunt æquales vt 4. & 4. ibi vero inæquales.

THEOR. XI. PROPOS. XXI. Eucl. 22.

Si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales; qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

2 3 4   Ergo   2 ad 4
6 8 12   vt 6 ad 12

SInt duæ series numerorum Vna 2. 3. 4. & altera 6. 8. 12. quarum numeri bini sumantur: Reperiaturque eorum proportionem esse perturbatam: nimirum primos binos 2. ad 3. prioris seriei dicere inuicem eam proportionem, quam 8. ad 12. bini extremi secundæ seriei, & extremos binos prioris seriei 3. ad 4. dicere eam proportionem, quam duo primi 6. ad 8. posterioris seriei.

Dico, quòd ex æqualitate in eadem ratione existunt.

Progress. 1. Probatur. Ponitur ex hypothesi 2. ad 3. vt 8. ad 12. Ergo ex 19. propositione, si multiplicentur inuicem extremi numeri 2. & 12. & medij 3. & 8. dabunt genitos æquales 24 & 24.

Progress. 2. Sic quia in hypothesi ponitur 3. ad 4. vt 6. ad 8. si eadem multiplicatio fiat extremorum 3. & 8. & mediorum 4. & 6. prodibunt numeri geniti æquales inter se. Ergo etiam cum priùs genitis.

Siquidem etiam hìc inuicem se multiplicant 3. & 8. in vna multiplicatione sicut progressu primo. Quare sicut ibi producebant 24. sic, & hìc producent, cui genitus numerus ex 4. & 6. erit æqualis, & consequenter genito primo ex numero .. & 12. Ergo ex 19. propositionis parte secunda dicent proportionem ad inuicem generantes numeri, quæ vocatur ex æqualitate, & ita respondebit proportione 2. ad 4. in prima serie, vt 6. ad 12. in secunda medijs numeris posthabitis 3. & 8.

Quod si fuerint plures numeri, quàm tres V. g. 2. 3. 4. 8. pro vna serie, & 3. 6. 8. 12. ita vt sint etiam 4. ad 8. vltimi vt 3. ad 6. primi, idem prorsus sequetur: Nam cùm sit ostensum; ita esse 2. ad 4. vt 3. ad 8. relictis medijs 3. & 6. consequenter erunt solum tres numeri pro vna serie 2. 4. 8. & pro altera 3. 8. 12. quorum proportio perturbata erit 2. ad 4. vt 6. ad 12. & 4. ad 8. vt 3. ad 6.

2, 4. 8.
3. 6. 12.

Vnde eadem, quæ superiùs valebit demonstratio: Idem etiam ostendetur in quinque numeris, ac in quatuor etiam si numeri sint fracti.

Et hæc Euclides de proportionibus numerorum. Verum adsunt etiam proportiones, quas libro 7. vniuersaliter probat de quacunque quantitate, & quas ex intimis principijs Arithmeticis Clauius hic adducit, qui modi. cùm fundent argumenta, quæ ex proportionibus petuntur ob eorum vtilitatem, visum est non præterire.

THEOR. XII. PROPOS. XXII.

Si quatuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erunt.

NAm detur 4. qui sit ad 10. vt 12. est ad 30.

4 ad 10   Ergo   10 ad 4
vt 12 ad 30   vt 30 ad 12

Dico, Quod conuertendo 10. erit in eadem proportione ad 4. vt 30. ad 12.

Probatur. Ponitur 4. ad 10 in eadem proportione, quâ 12. refertur ad 30. Ergo ex 13. propos. & vicissim proportionales erunt. Eritq; 4. ad 12. vt 10. ad 30. Quia itaque refertur 10. ad 30. & 4. ad 12. Ergo rursus vicissim proportionales erunt; eritque 10 ad 4. vt 30. ad 12. Ita enim proportionem conuertimus: dum terminos pro fundamentis relationum sumimus, & consequentia pro antecedentibus.

THEOR. XIII. PROP. XXIII.

Si compositi numeri proportionales fuerint, & diuisi proportionales erunt.

COmpositi numeri proportionales sunt; cùm totum refertur ad partem suam, vt aliud totum ad aliam partem suam. Sit ergo 9. qui referatur ad suam partem 3. vt 15. refertur ad suam partem 5. diuidantur isti numeri per easdem partes suas, auferanturque partes 3. à 9. & erit 6. Rursus 5. à 15. & erit 10.

9 totum ad 3 partem   vt compars 6 ad 3
Vt   Ergo
15 totum ad 5 partem   sic compars 10 ad 5

Dico, quod pars 3. refertur ad reliquum 6. vt pars altera 5. refertur ad reliquum suum 10.

Probatur. Quia ex prop. 11. si totum ad totum se gerat vt ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit. *Sed* numeri V. gr. 3. & 5. sunt ablata 6. & 10. sunt reliqua: Ergo se habent prorsùs eodem pacto vnum ad aliud correspondens, 3 nimirum ad 5. & 6. ad 10. vt totum 9. ad totum 15. ergo, & inter se eodem pacto se habent, vt cum toto; quia quæ sunt eadem vni tertio sunt eadem inter se.

THEOR. XIV. PROP. XXIV.

Si diuisi numeri proportionales sint. Hi quoque compositi proportioaales erunt.

Vt	pars	7	ad	compartem	3
Ita	pars	14	ad	compartem	6
Ergo vt	pars	14	ad	totum	20
Sic	pars	7	ad	totum	10

DEntur numeri quatuor partes duorum integrorum V. g 7. pars prioris totius 10. qui sit ad suam compartem 3. vt alterius totius 20. pars 14. est ad suam compartem 6.

Dico; quod etiam tota sibi inuicem proportionalia sunt ea proportione, qua partes, & quod *componendo*, si erit, vt 7. ad suam compartem 3. sic 14. ad suam compartem 6. hinc etiam erit consequenter totum 10. ad 7. partem, vt totum 30. ad 14 partem.

Prob. Ponitur proportio 7. partis ad 3. compartem prioris totius vt pars 14. ad 6. compartem in posteriori toto. Ergo ex propos. 13. huius erunt, & viciſſim, eritque 7. pars ad 14. partem fundamenta, vt 3. compars ad 6. compartem terminos: Quaderè ex propoſ. 12. huius, vt vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, & ſic, vt 7. antecedens ad 14. conſequens, ſic omnes antecedentes 7. & 3. nempe totum 10. ad omnes conſequentes 14. & 6. ſimul, hoc eſt totum 20. propterea que ex propoſ. 13. rurſus viciſſim erit 7. antecedens ad 10. antecedentem, vt 14. conſequens ad 20. conſequentem; nimirum pars ad ſuum totum, vt alia pars ad ſuum totum eadem proportione refertur; ex eò quod fuerit pars ad ſuam compartem, vt alia pars ad ſuam compartem, quod eſt arguere componendo ex definit. 25. lib. 5.

THEOR. XV. PROPOS. XXV.

Si compoſiti numeri proportionales fuerint; hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.

Conuerſioni rationis locus datur, cùm totum refertur ad partem, vt aliud totum ad ſuam partem: Nam tunc poteſt argui; quòd, & altera pars ſit ad totum vt alia pars ad ſuum totum. V. g. ſit 9. pars numeri 15. & 12. pars numeri 20. & 9. referatur ſimili proportione ad 15. vt 12. ad 20. Dicit, *quod ita quoque refertur reliquum* 6. *ad* 15. *totum, vt reliquum* 8. *refertur ad* 20. *totum ſuum.*

Vt pars 9 ad 15 totum.
Sic pars 12 ad 20 totum.
Ergo compars 6 ad 15 totum.
Vt alia compars 8 ad 20 totum.

Probatur. Nam ſi eſt pars 9. fundamentum relationum ad 15. totum, & ad terminum, vt 12. pars, & fundamentum ad 20. terminum, & totum. Ergo ex propoſ. 13. & viciſſim fundamenta 9. & 12. & partes dicent eandem proportionem, quam termini 15. & 20. tota. Quamobrem ſi eſt totus 15. ad totum 20. vt ablatus 9 ad ablatum 12. etiam reliquus 6. totius 15. ad reliquum 8. totius 20. ex 11. propoſ. erit, vt totus 15. ad totum 20. Si itaq; pars 6. vt fundamentum reſpicit relatione proportionis terminum, & partem 8. vt totum 15. tanquam fundamentum, totum 20. vt terminum: Ergo rurſus viciſſim ex 13. propor. inuicem fundamenta eandem proportionem dicent, quam termini inuicem, & ita reſpiciet totum 15. reliquum 6. ambo fundamenta; ſicut reſpicit totum 20. reliquum 8. ambo termini.

EXPENSIO IV.

De minimis, primiſque numeris.

THEOR. I. PROPOS. XXVI. Eucl. 23.

Primi inter ſe numeri ſunt minimi, qui eandem proportionem obtineant.

Sit 7. & 4. primi numeri ad inuicem. *Dico eos minimos eſſe eorum numerorum, qui proportionem ſimilem habent, quam* 4. *ad* 7.

Probatur. Nam ſi alius reperitur minor, quam 7. & 4. Sit ille *Equorum* quidam numerus, qui præſupponatur minor, quam 7. & *Leonum*, qui dicatur ab aduerſarijs, minor, quàm 4. dicentes tamen proportionem, quam 4. ad 7. Cum itaque proportio numerorum in eo ſita ſit, vt numerus numeri ſit eadem pars, vel partes, quàm alter ſimilis eis in proportione eſt pars, vel partes alterius; ſequitur, vt debeat dari aliquis numerus, qui metiatur *Equos*, & *Leones* toties, quoties metitur 4. & 7. Vel ergo ille numerus eſt vnitas, & ita cum vnitas toties capiat in 7. quot ſunt *Equi*, & toties in 4. quot ſunt *Leones*, erunt *Equi* ſeptem, & *Leones* 4. nempe idem numerus, qui 4. & 7. non autem minor, vt volebant aduerſarij. Quod ſi non ſit vnitas; ſed aliquis alius numerus, qui 4. & 7. metiatur, ſicut *Equos*, & *Leones*: iam 4. & 7. non erunt inter ſe primi: nam primi numeri inter ſe ſunt: quorum communis menſura eſt non numerus, ſed tantum vnitas.

THEOR. II. PROPOS. XXVII. Euc. 24.

Minimi numeri omnium eorum, qui habent cum ipſis communem rationem primi quoque ſunt inter ſe.

Si dentur 7. & 4. qui dicantur minimi ex omnibus, qui proportionem habent, quam 7. ad 4. *Dicit quod iſti quoque erunt inter ſe primi.*

Probaturque reducendo propoſitionem ad impoſſibile. Nam, ſi non ſunt primi, erit aliquis numerus V. g. *Hominum* communis menſura; ita quod numerus ille *Hominum* capiet toties in 7. quot in ſtabulo ſunt *Equi*, & toties in 4. quot in ſylua ſunt *Leones*. Ergo ſi multiplicetur numerus *Hominum*, per numerum *Equorum* producet numerum 7. & ſi multiplicetur idem numerus *Hominum* per *Leonum* numerũ procucet 4. Quamobrem ex propoſ. 17. numerus *Leonum* minor, quam 4. & *Equorum* minor quam 7. (cum multiplicati faciant 7. & 4) dicent inuicẽ proportioné eandẽ, quam 7 ad 4. Vnde 7. & 4. nõ erunt minimi omnium proportionem dicentium, quàm 7. ad 4. quòd *Leonum*, & *Equorum* minores numeri eandem proportionem dicant, quod eſt contra præſuppoſitum.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII. Euc. 25.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui vnum eorum metitur, numerus ad reliquum primus erit.

Dentur numeri 8. & 9. qui inuicem primi ſint, & 4. metiatur 8. *Dicit quod* 4. *ad reliquum* 9. *primus erit.*

Primi 8 9
4

Probatur. Quia. Si 4 non eſt primus ad numerum 9. metietur eos aliqua communis menſura præter vnitatem. Sit hæc menſura aliquis numerus *Hominum*, quæ metiatur 4. & 9. Hæc etiam ex 11. pronunc. metietur 8, quoniam 4. ex hypotheſi metitur 8., qui numerus 4. à numero *Hominum* metitur: quare numerus *Hominum* erit menſura numeri 9. ex præſuppoſito, & numeri 8,

vt probaui; vnde 9. & 8. non erunt inter ſe primi; cùm habeant aliquem numerum *Hominum* pręter vnitatem communi ipſorum menſuram, quod eſt abſurdum; cùm præſupponamus 7. & 9. primos inuicem.

THEOR. IV. PROPOS. XXIX. Eu. 22.

Minimi numeri omnium in ſua proportione æquè metiuntur alios maiores eandem proportionem habentes, minor quidem minorem, & maior maiorem.

Dentur duo numeri 2 & 3. minimi inuicem, alijque duo maiores 4. & 6. eandem proportionem habentes. *Dicit quod* 2. *minor æquè metitur* 4. *minorem, ſicut* 3. *maior quam* 2. *æquè metitur* 6. *maiorem, quam* 4.

Probatur. Quoniam ponitur, vt 2. ad 3. ita 4. ad 6. ex prop. 13. viciſſim proportionales erunt; nempe fundamenta proportionis dicent eam proportionem, quam termini, & ita erit quoque 2. ad 4. vt 3. ad 6. Quamobrem iuxta 1. definitionem erunt numeri minores 2. & 3. eadem pars, vel partes maiorum 4. & 6. Vnde eos metientur.

Probatur etiam, quod ęquè. Quia non poſſunt eſſe eædem partes: Nam ſi dicatur, quod hoc euenire poſſit, diuidantur in eas partes, quas conficit 2. numeri 3. & ſint tot, quot *Equi* ſunt in agro, & 4. numeri 6. & ſint tot, quot *Oues* ſunt in ſtabulo. Itaque erit numerus 2. iuxta 1. definitionem ad numerum *Equorum* ſimilis in proportione, quam 4. ad numerum *Ouium*. Quamobrem ex 13. propoſ. & viciſſim ita erit numerus *Equorum* ad numerum *Ouium*, vt 2. ad 4. minor autem vtique eſt *Equorum* numerus, quam 2. & *Ouium* quam 4. quod ſint pars, vel partes horum numerorum; eo quod ſint multiplicatores partium eos componentium, & ideo neceſſario minores; quod eſt abſurdum, cùm 2. & 4. ex hypotheſi ſint minimi in hac proportione. Quare 2. erit medietas numeri 4. vel ſi aliquis alius numerus loco exempli ſubſtituatur, erit eius, vel pars tertia, vel quarta, non autem plures partes numeri 4. continebit. Sicut nec 3. numeri 6. alioquin neceſſariò darentur partes minores, quæ eandem rationem poſſiderent contra Hypotheſim.

THEOR. V. PROPOS. XXX. Eucl. 26.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex ijs genitus ad eundem primus erit.

Ponantur duo numeri 7. & 4. qui ſint primi ad 9. inuicemque multiplicentur 7. & 4. & fiat numerus 28. Dicit *quòd, & numerus* 28. *erit primus ad* 9.

Probatur reducendo ad impoſſibile. Nam, ſi 28. & 9. non ſunt inter ſe primi, metiatur eos aliquis numerus *Hominũ*, at 28. toties, quot sũt *Leones* in campo. Itaque numerus *Leonum* multiplicatus per numerum *Hominum*, vel è contra producet 28. qui numerus producitur etiam à 4 & 7. Vnde ex 19. propoſ. reciprocè proportionales erunt, & 4. ad numerũ *Hominũ* erit, vt numerus *Leonũ* ad 7.

Progreſſ. 2. Quoniam autem 4. & 9: ex hypotheſi ſunt inuicem primi, & numerus *Hominum* metitur 9. ex pręſuppoſito, ſequetur iuxta propoſ. 28. quòd etiam numerus *Hominum* ſit primus ad numerum 4. & ideo, quòd ſit minimus in ſua proportione iuxta propoſ. 26. Et hinc, quòd in hac proportione ſint numeri maiores 7. & numerus *Leonum*, qui hanc ipſam dicunt proportionem, ex progreſſu 1. Et iuxta propoſ. anteced. quod ęquè metiatur 4. numerum *Leonum* ſicut numerus *Hominum* numerum 7. Cum autem numerus *Hominum* metiatur 9. vt ex hypotheſi, & 7. vt modo; ſequeretur, quòd 7. & 9. non eſſent inuicem primi, quòd communi menſura præter vnitatem metiantur contra hypotheſim.

THEOR. VI. PROPOS. XXXI. Eu. 28.

Si duo numeri ad duos numeros, quiſq; ad vtroſque primus ſit: Etiam geniti ex primis duobus erunt primi ad genitos ex poſtremis duobus numeris.

2 3 15
Primi Geniti
4 5 8

Dentur 2. & 4. primùm, & deinde 3 & 5. Sitque primus 2. ad vtroſque 3. & 5. ſicut, & 4. ad eoſdem vtroſque 3. & 5. primus exiſtat. Multiplicentur ſimul 2. cum 4. vt fiant 8. & 3. cum 5. vt euadant 15. Dicit, *quod etiam* 8, *&* 15. *geniti, erunt primi inuicem.*

Probatur. Nam 2. ponitur primus ad 3. & 5. Ergo ex præced. etiam genitus 15. erit primus ad eundem 2. Item, quia 4. eſt primus ad 3. & 5: etiam 4. erit primus ex præced. propoſ. ad 15. Cùm igitur numerus 15. ſit primus ad 2 & 4. Ergo ex præced. etiam erit primus ad genitum ex ipſis 8. & ita 8. ad 15. primus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XXXII. Eu. 29.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſeipſum, fecerit aliquem; Geniti ex illa multiplicatione primi inter ſe erunt. Et ſi rurſus ijdem multiplicent hos Genitos, & alios numeros efficiant. Iſti denuò refecti erunt primi inuicem: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

2. 3. 9 27
Primi Geniti & rurſus Geniti
2. 3. 4 8

Sint 2. & 3. qui ſe multiplicent, & 3. faciat 9. & 2. faciat 4. *Dico primò* 4. *&* 9. *eſſe primos inuicem.*

Probatur. Quoniam 2. & 2. ſunt primi ad 3. Ergo ex 30. propoſ. huius, etiam ex illis genitus 4. ad eundem 3. primus erit. Cum ergo ſit 4. primus ad 3. & ideo quoque ad aliud 3. Ergo ſi 3. & 3. ſe multiplicent; 9. Genitus ex propoſ. 30. primus erit ad 4.

Dico 2. Quod ſi rurſus 2. multiplicet 4. & faciat 8. & 3. multiplicet 9. & faciat, 27. eodem modo sint primi inuicem.

	2	9	27
Primi	ad	Geniti	
	3	4	8

Probatur. Nam 2. est primus ad 3. ex hypothesi & 9 est primus ad 2. Siquidem 3. & 3. sunt primi ad 2. Ergo ex propos. 30. 9. genitus erit etiam primus ad 2. Sic vt diximus supra 4. est primus ad 3. & 9. Quare habemus duos numeros, quorum quisque ad duos alios primus est, nempe 2. ad 9. & 3. & 4. ad 9. & 3. Ergo ex preced. geniti ex ipsis nempe 8. ex 4. & 2. sic 27. ex 3. & 9. erũt inuicẽ primi, & sic dicendum, etiamsi 2. multiplicet 8. & 3. 27. & sic eodem modo res succedet, cùm semper sit eadem ratio.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXIII.

Omnem compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

PRobatur. Quia dato numero aliquo, V. g. 24 & datâ eius aliquâ mensurâ, vt 8. vel iste 8; est primus, & iam habemus intentum, vel compositus; Si est compositus, metiatur eum numerus V. g. 2. qui similiter, vel erit primus, vel compositus, quod, si primus, habemus id, quòd volumus, si non primus metietur eum aliquis alius numerus; cùmque in numeris diminuendo non possimus progredi in infinitum; tandem in aliquo numero primo quiescendum erit, vt est 2. respectu numeri 24.

THEOR. IX. PROPOS. XXXIV.

Omnis numerus, vel est primus, vel eum aliquis primus numerus metitur.

PRobatur ex antecedenti, quia si non est primus erit compositus, & ideo aliqua mensura primi alicuius numeri; tandem mensurabitur.

PROBL. I. PROPOS. XXXV.

Numeris datis quotcunque reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

SInt, quotcunque numeri 6. 9. 15. habentes quascumque proportiones, siue sit eadem proprtio, quæ 6. ad 9 & quæ 9. ad 15 siue non: Isti, vel erunt inter se primi, & sic erunt etiam minimi in ea proportione iuxta propos 26; vel compositi, & sic iuxta 2. propos. reperiemus maximam communem mensuram 3. quæ metiatur eos primum gemina vice secundum tricies, tertium quinquies Dico, *quod duenarius ternarius; & quinquenarius sunt numeri inuicem primi in ea proportione.*

Probatur itaque primò, quod eam proportionem possideant.

Quoniam numeri 2. 3. 5. multiplicati per 3. faciunt numeros prædictos 6. 9. & 15. Sequitur ex propos 18. quod habeant geniti qui sunt 6. 9. & 15. eandem rationem, ac multiplicati 2. 3. 5.

Probatur quoque quod sint minimi in ea proportione, si enim tales non sunt dabuntur aliqui ipsis minores. Sint itaque tales numerus *Hominum, Equorum, & Ouium*, qui iuxta propos. 28. metiētur ipsos 6. 9. & 15. æquè, & ideo per numerum aliquem V. g. *Leonum*. Quapropter numerus *Leonum* multiplicans numerum *Hominum* faciet 6. multiplicans autem numerum *Equorum* faciet 9. & tandem numerum *Ouium* generabit 15. Itaque ex 19. propos. h. quoniam duenarius multiplicatus per numerum 3. generat 6. & numerus *Hominum* multiplicatus per numerum *Leonum* generat item 6. Proportionales erunt inuicem hi numeri, & se gerent multiplicantes, vt multiplicati reciprocè, & erit 3. multiplicans ad *Leonum* numerum multiplicantem, vt *Homines* ad 2. multiplicati, sed *Homines* ex hypothesi sunt minus, quàm 2. numerus. Ergo ex prop. 29. etiã 3. numerus erit minor, quã *Leones*, qui numerus *Leonum* metitur 6. 9. & 15. propositos per numeros *Hominum, Equorum, & Ouium*. Quare numerus *Leonum* erit communis mensura illorum numerorum 6. 9. 15. & maior, quàm eorundem communis mensura 3. contra hypothesim, quæ maxima supponitur. Itaq; alij numeri minores ipsis, nempe duenario, ternario, & quinario, qui eadem proportione potiantur, quam 6. 9. & 15. non poterunt dari.

PROB. II. PROPOS. XXXVI.

Duobus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIt primo exquirendus minimus numerus omnium, quem duo numeri primi inuicem, nempe 3. & 4. metiantur. Multiplicentur inuicem, & procreatus, puta 12. erit numerus, quem metiantur. Nam toties capiet 3. in 12. quot vnitates sunt in 4 & 4. in 12. quot vnitates sunt in 3. Quod verò 12. sit minimus omnium, quem dati numeri metiantur.

Probatur. Nam, si fieri potest, aliquem alium numerum minorem V. g. *Equorum* mensuret, & numerus quidem 3. toties, quot *Oues* sunt in campo numerus verò 4. eundem numerum; *Equorum* metiatur toties quot *Canes* sunt in platea. Itaq; multiplicatus 3. per numerum *Ouium* produtet numerum *Equorum*, & hunc eundem numerum producet 4 multiplicatus per numerum *Canum*. Vnde ex 19. pr. reciprocè relationem dicēt multiplicati 3. ad 4 quam multiplicantes numerus *Ouium* ad numerum *Canum*, & quia etiam 4 & 3. minimi ponuntur in hac proportione mentietur quoque 3. numerum *Ouium*, & 4. numerum *Canum* ex 29. propos.

Progress. 2. Considerandum autem est rursus, quòd numerus 3. multiplicans numerum 4. facit 12. & 4. multiplicans ex hypothesi numerũ *Ouium* facit numerum *Equorum*; erit ex 17. pr. eadem proportio 4 ad numerum *Ouium*, quam 12. ad numerum *Equorum*. Sed ex primo progressu 4. metitur numerum *Ouium*. Ergo, & 12. metiretur numerum *Equorum*, quem posuimus minorem, quam 12. quod est absurdum.

Sint secundo dati numeri non primi inter se, vt 8. 12. inueniantur que ex prop. 33. h. minimi in ea proportione, vt sit 2. ad 3., vt 8. ad 12. multiplicenturque iuxta 9. propos. extrema proportionum inuicem nempe 2 & 12. rursusque media, vt 3. & 8. fiet idem numerus 24. Dico, *quod iste numerus est minimus, quem dati numeri metiantur.*

Quòd

Quòd autem 8 & 12. mensurent 24. clarum est cum multiplicati per 3. & 2. ipsum producant.

Quòd verò 24. sit minimus omnium, quem mēsurent, probatur eodem tenore argumenti vt supra. Nam si non est minimus dabitur aliquis numerus V. g. *Equorum* minor ipso, quem mensurabunt 8. toties, quot *Oues* sunt in campo, & 12. toties, quot *Canes* sunt in platea: Quapropter idē numerus fiet *Equorum*, si numerus *Canum* multiplicet 12. sicut si numerus *Ouium* multiplicet 8. Itaque dicent eamdem proportionem ex 19. propos. multiplicantes inuicem, quàm multiplicati, reciprocè, & ita erit 8 ad 12. vt ad numerum *Ouium* numerus Canum, & ita pariter erit 2. ad 3. vt numerus *Canum* ad numerum *Ouium* cum 2. ad 3. dicant eandem proportionem, quam 8. ad 12. Quare 2. & 3. (cum positi sint minimi in ea proportione) mensurabunt quoque æquè numerus quidem 2. numerum *Canum*, & 3. numerum *Ouium*.

Progress. 2. Obseruandum rursus est, quod 8. multiplicans 3. producit 24. Sicut, & numerus idem 8. multiplicans numerum *Ouium* producit numerum *Equorum*: Quare ita 3. erit ad numerum *Ouium* ex propos. 17. sicut 24. ad numerum *Equorum*.

Propterea q; cùm ex progr. primo 3. mensuret numerum *Ouium*, mensurabit quoque ex propos. 29. numerus 24. numerum *Equorum*, Qui positus est minor; itaque maior metiretur minorem, quod est absurdum.

COROLLARIVM

HInc fit; quòd si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci minimum numerum, quem illi mensurant. Nam demonstratum est; quòd, si primus maior 3. multiplicans 8. compositum minorem, & 2. primus minor multiplicans 12. compositum maiorem faciunt 24. numerum minimum, quem 8. & 12. metiantur.

THOR. X. PROPOS. XXXVII.

Si duo numeri numerum quendam mensurent, minimus quoque numerus mensuratus ab ipsis numerum illum mensurabit.

SIt 4. & numerus 6. qui mensurent 36. & numerus minimus mensuratus ab ipsis 12. (Nã 4. & 6. multiplicati per 2. & 3. primos, & minimos in eadem proportione faciunt 12.) Dico, *quod hic numerus 12. metitur quoque numerum 36.*

Probatur. Nam, si non ita est; auferatur à 36. numerus 12. quoties fieri potest, & sit pars ablata numerus, quidam *Hominum*, qui 12. ex equò continebit, per hanc ablationem necessariò superabit aliquid, quod erit minus, quã 12. ex aduersarijs: Hoc ergo reliquum sit quidam numerus *Ouium*. Cum itaque 4. & 6. mensurent 12. etiam mensurabũt ablatum *Hominũ*, ex numerò 36. & (vt presupponitur) cũ mēsurent quoq; torũ 36. mensurabunt, & reliquum numerum *Ouium* ex propos. huius 8. itaque numerus 12. contra hypothesim, non erit minimus, quem 4. & 6. metiantur; cùm metiantur quoq; & reliquũ *Ouium* minus, quàm 12.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

Tribus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur numerum.

3. 4. 6. metitus 12.

SIt inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri 3. 4. 6. metiantur. Inueniatur ex propos. 36. minimus, quem 4. & 3. metiantur, & sit 12. quem etiam 6. metitur. Dico, *quod 12. est minimus numerus, quem 3. 4. & 6. metiantur.* Si enim esset aliquis minor, is esset V. g. quidam Hominum, ergo numerus Hominum minor, quã 12. mensuraretur quoque à numero 3. & 4. Quare 12. non esset minimus, quem 3. & 4., vt repertum fuit, mensurarent.

Verùm si occurrat. Quòd minimus numerus, quem duo numeri mensurant, non mensuretur à tertio, vt est 16. qui mensuratur à 4. & 8. sed non mensuratur à 6. tertio numero. Inueniatur minimus numerus, quem 16. & 12. metiantur, sitq; 48. *Dico, quod iste est numerus, quem tres 4. 8. & 12. metiantur.*

metitus primus 16.

4. 8. 12.

metitus secundus 48.

Probatur primò. Quod metiantur. Nam 4. & 8. mensurãt 16. hic 16. verò mēsurat 48. Ergo, & 4. & 8. mensurant 48. ex propos. 10. huius.

Probatur secundò. Quod sit minimus omniũ eorum, quos 4. 8. & 12. mensurant. Nam, si datur aliquis numerus V. g. *Equorũ* minor, quam 48. quem 4. 8. & 12. mensurent. Sequitur, & quòd eum mensurent 12. & 16. siquidem 16, mensuratur à 4. & 8. Quare ex prop. prec. num. *Equorũ* mensurabitur quoque à 16. minimo, quem illi mēsurēt. Ergo 48. non erit minimus, quē 12 & 16. mensurent contra hypothesim, cũ 16. ex probatione mensuret numerum *Equorum* minorem, quã 48. & 12. eundē mensuret, vtpote tertius numerus eorũ, qui numerũ *Equorũ* ex aduersarijs mēsurãt.

COROLLARIVM

SI tres numeri numerum quempiam metiantur, etiam minimum; quem, illi metiuntur, eundem mensurare. Nam si numerus 12. & 16. mensurant numerum Equorum etiam numerus 48. ex præced. propos. debebit illum mensurare. Cùm à minimis numeris numerus mensuratus, mēsuret omnem numerum ab illis minimis mensuratum.

THEOR. XI. PROPOS. XXXIX.

Si quispiam numerus numerum metiatur, mensuratus habebit partem, vel partes à mensurante denominatas.

MEnsuret numerus 3. numerum 12. *Dico numerum 12. habere partes, vel partem à 3. denominatam*; nempe habere tertiam partem.

Ostenditur. Nam 3. metiatur 12. toties, quot vnitates sunt in 4. Ergo vt Vnitas metitur 4. sic 3 metitur 12. Quare ex propos. 13. ita quoque

vicissim

viciſſim. Vnitas metietur 3. vt 4. 12. Et ideo eadem pars erit Vnitas ipſius 3. quæ 4. ipſius 12. Sed Vnitas eſt pars ipſius 3. à 3. denominata. Ergo etiam 12. habebit partes ab ipſo 3. denominatas; nempe partem tertiam, vel duas tertias partes, & cet.

THEOR. XII. PROPOS. XL.

Si numerus partem habuerit quamlibet, metitur illum numerus à parte denominatus.

HAbeat numerus 15. partem 5. quæ denominetur à 3. ita, quòd 5. ſit tertia pars numeri 15. Dico, quod 5. menſurabit 15.

Probatur. Nam quot vnitates erunt in 3. tot erunt quinquenarij in numero 15. Ergo numerus quinquenarius à parte tertia denominatus metietur numerum 15.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Numerum reperire, qui minimus cùm ſit habeat datas partes.

SInt datæ partes tertia, quarta, quinta, quas inueniendus aliquis minimus numerus poſſidere debeat. Reperiatur aliquis minimus numerus, quem numerent 3. 4. & 5. iuxta partium datarum denominationem, qui erit 60. Dico numerum 60. eſſe minimum eorum, qui tertiam, quartam, & quintam partem habent.

Probatur. Nam quia 3. 4. & 5. metiuntur numerum 60. clarum eſt, quod numerus 60. ex præced. propoſ. habet partes à 3. 4. & 5. denominatas.

Quod *verò ſit minimus eorum, qui tales partes habent.*

Probatur. Nam ſi dicatur eſſe numerum aliquem Hominum minorem, qui tertiam, quartam, quintam partem habeat, metietur eum numerus 3. 4. & 5. & ſic non erit 60. minimus numerus, quem 3. 4. & 5. menſuret. Cum menſurent quoque numerum Hominum minorem numero 60.

THEOR. XIII. PROPOS. XLII.

Primis quibuſcumque numeris propoſitis ſemper plures vltra propoſitos poterunt inueniri.

SInt propoſiti numeri 2. 3. 5. primi inuicem. *Dico quòd vltra ipſos inuenietur aliquis alius.* Nam ſit numerus metitus à propoſitis 30. & addatur vnitas, & fiant 31. Iſte numerus, vel eſt primus cùm propoſitis; vel non. Si eſt primus habemus, quod volumus; inueniri nempe alium aliquem primum numerum præter propoſitos. Si non eſt primus ex propoſ. 33. eum aliquis primus numerus metietur. Menſuret eum numerus Equorum. Iſte, vel eſt idem cum primis, & eſt, vel 2. vel 3. vel 5. & ſic menſurabit totum 31. ex hypoteſi, & ablatum 30. vt vnus ex dictis. Ergo & reliquum 1. quòd eſt abſurdum cum numerus vnitatem non metiatur, vel eſt diuerſus à prædictis, & iam intentum habemus.

COROLLARIVM

ELlicies modum reperiendi numeros primos; Silicet reperiendo primum numerum, quem dati numeri metiatur, & illi reperto addendo vnitatem, nam ille erit primus ad inuentos.

TRACTATVS XI. IN VIII. LIBRVM EVCLIDIS

PARS SECVNDA.

De ſpeciali Numerorum proportione.

HIc liber agit iam non de proportionibus numericis in vniuerſali; ſed de ipſis in particulari: Et primò de proportionibus numerorum ſimplicium. Secundò de proportionibus numerorum figuratorum, quorum inquam vnitates ſi ordine diſponantur, figuram conſtituant. Vnde operæ pretium erit prius horum numerorum perfectam habere notionem.

EXPENSIO I.

De principijs.

DEFINITIO I.

CVm duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitus numerus planus appellabitur, numeri verò hunc generantes latera dicentur.

Planus

Planus dicitur numerus ortus ex duorum multiplicatione; quia ſecundùm ſuas vnitates ordine diſpoſitas parallelogrammum conſtituit, vt 3. & 4. faciunt 12.

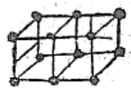
* * * *
* * * *
* * * *

Poteſt verò idem, & vnus numerus plura habere latera; cùm ex pluribus multiplicationibus generari queat, vt 12. habet latera 3. & 4 ſic 2. & 6. vt ex aſteriſmis ordinatis conſtat.

DEFINITIO II.

C*Vm verò tres numeri mutuò ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus, erit ſolidus dicetur, & generantes tres numeri latera dicentur.*

Quia nimirum, ſi vnitates eius diſponantur, vel ſumantur tanquam partes ſolidæ alicuius ſolidi, ſolidum conſtituent, V. g. ſi 2. multiplicet 2. facient 4. & ſi 4. multiplicet 3. facit 12. quæ vnitates ſolidum conſtituunt, vt hìc videre eſt.



DEFINITIO III.

Q*Vadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis, vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.*

Nam eius vnitates in longum, latumque diſpoſitæ quadratum conſtituunt. Sic numerus 25. ex 5. in 5. procreatus, dicitur numerus quadratus.

Numerus vero generans dicitur latus, ſeu radix quadrata, quæ, vt exquiratur, ſuo loco oſtendendum erit.

DEFINITIO IV.

C*Vbus numerus eſt, qui æqualiter æqualis æqualiter, vel qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.*

V. g. 125. qui ſub tribus 5. ſe multiplicantibus continetur: ſic 5. in 5. producit 25. & rurſus 5. in 25. producit 125. qui numerus cubus appellatur, & numeri producentes dicuntur latera, ſeu radix cubica, de qua ſuo loco agendum.

DEFINITIO V.

S*Imiles ſolidi numeri, & plani ſunt, qui proportionalia habent latera.*

Vt planus numerus plano numero ſimilis ſit, non requiritur, quòd omnia eius latera, ex quorum multiplicatione generatur ſint proportionalia omnibus lateribus, ex quibus alius generari poteſt ſic 6. & 24 ſunt proportionales; quòd ita ſit 2. ad 3. latera numeri 6. vt 4. ad 6. latera numeri 24. licet numerus 24. habeat alia latera; nempe 2. & 12. ſic 3. & 8., quæ lateribus 2. & 3. non proportionantur. Sic etiam ſolidus ſolido ſimilis erit; ſi aliqua latera vnius, lateribus alterius proportione reſpondeant, licet alia inueniri poſſint, quæ talia non ſint: ſic 24. & 192. ſimiles ſunt, quòd latera 24. numeri ſint 2. 3. 4. quæ ita ſunt inuicem, vt 4. 6. 8 latera numeri 192. licet adſint alia latera numeri V. g. 192. quæ non ita ſe habeant; vt 6. 8. 4.

EXPENSIO II.

De minimorum numerorum proportionibus.

QVia omnes numeri licet ratione non tamen proportione correſpondent. Ideo primo videndum quinam numeri inter ſe primi ſint, quibus poſſint inueniri numeri proportionales, & etiam tradere modum illos inueniendi, quod in hac Expenſione operi demandatur.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales: extremi verò ipſorum primi inter ſe fuerint, ipſi omnes minimi in ea proportione erunt.

SInt numerorum deinceps proportionalium nempe continuè 8. 12. 18. 27. *Dico quòd ſi extremi 8. & 27. ſint primi inuicem; quòd etiam erunt dati omnes numeri minimi in ea proportione.*

Probatur. Nam dentur 4. numeri minores ipſis, ſi id eſſe poteſt *Hominum, Equorum, Ouium*, & *Leonum*. Nam cum dicant eandem proportionem inuicem etiam extrema eorum ex propoſ. 14. ſept. ex æqualitate in eadem ratione erunt, & ita erit numerus *Hominum* ad numerum *Leonum*, vt 8. ad 27. Quare cum 8. & 27. ſint primi inuicem ex hypotheſi menſurabunt ex 29. propoſ. ſept. 8. quidem *Homines*, & numerus 27. *Leones*: nempe maior, vt ponitur 8. *Homines* numero minores, & 27. maior *Leones*, qui ſupponuntur pauciores.

PROBL. I. PROPOS. II.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos in datâ ratione, quotcunque iuſſerit quiſpiam.

SIt data ratio, quam habet 2. ad 3. Et iubeamur primo inuenire tres numeros minimos ſucceſſiuè proportionales in illâ datâ proportione. Numerus 2. multiplicetur in ſe, & fiat 4. Deinde cum numero 3 & fiant 6. tandem 3. in ſe, & fiat 9 Dico 4. 6. 9. eſſe minimos in ea proportione.

Probatur autem primò. Quòd ſint proportionales. Nam, cum numerus 2. multiplicet ſe, & 3. ex propoſ. 17. ſept. erit, vt ipſe 2. ad 3 ita producti 4. ad 6. Item cum numerus 3. multiplicet 2. & ſe erit vt 2. ad 3. multiplicantes, ita in proportione erunt producti 6. & 9.

Probatur ſecundò. Quod etiam ſint inuicem primi ex propoſ. 32. lib. ſept. Nam extremi 4. & 9. procreati ſunt ex numeris primis inuicem cum minimi ſint in ea proportione multiplicati in ſe. Ergo, & extremi 4. & 9. erunt primi, & ideo minimi in ea proportione. ex propoſ. ant. Quare etiam medij erunt minimi in ea proportione ex eadem propoſ. anteced.

Iubeamur ſecundo ex ijs repertis, inuenire alios minimos in ea proportione fiant ex 2. in tres inuentos 4. 6. 9. multiplicato, numeris 8. 12.

& 18. Deinde ex 5. in vltimum 9. fiat 27. Dico rursus 8. 12. 18. 27 *esse minimos in ea proportione*.

Probatur primò. Quod sint proportionales. Nam ex propos. 17. septimi, numerus 2. multiplicans 4. 6. & 9. facit aliquos 8. 12. 18. ipsi geniti in eadem ratione erunt, quam 4. ad 6. & 6. ad 9. quæ quoque est eadem, quam dicit 2. ad 3. Sic pariter 3. multiplicans 9 fecit 27. & 2. multiplicans item 9. fecit 18. ex eadem propos. 18. & 27. in eadem ratione erunt, quam 2. ad 3. Ergo omnes quatuor numeri nuper reperti 8. 12. 18. 27. in eâdem ratione sunt, quam 2. ad 3.

Probatur secundo, quod minimi, quoque sint. Nam 2. & 3 cum sint primi, minimi sunt in ea proportione, & in eadem extremi sunt, 8. & 27. geniti ex 2. & 3 gemina vice in se. Quare ex pr. 32. sept. erunt quoque primi. Quare erunt minimi in ea proportione ex propos. ant. quam 2. ad 3. & sic semper succedet, si in infinitum sequaris.

COROLLARIVM I.

Hinc deducitur. Quod si tres numeri minimi sint continuè proportionales extremos quadratos esse. Nam sunt ex definitione 18 æqualiter æquales, siquidem extremi, vt 4. & 9. sunt facti, ex multiplicatione minimorum 2. & 3. in se.

COROLLARIVM II.

Deducitur quoque quatuor numerorum inuentorum, si minimi sint, extremos cubos esse, nempe 8. & 27. Nam 8. fit ex multiplicatione 2. in 2 & rursus ex multiplicatione 2. in genitũ 4. Sic 27. fit ex multiplicatione 3. in 3. & rursus ex multiplicatione 3. in genitum 9. Quarè 8. & 27. sunt numeri æqualiter æquales æqualiter. Si verò essent quinque, extremi essent quadrati quadratorum, & alij qui in Algebra explicantur.

COROLLARIVM III.

Extremi quoque secundùm hanc regulam inuenti, vt 4. & 9. sic 8 & 27. sunt primi inuicem, vt ex 32. propos. lib sept. constat. Nam consurgit 4. ex multiplicatione numeri 2. in se. Sic 9. ex multiplicatione 3. in se. Quare erunt primi ad inuicem. Sic 8. & 27. consurgunt ex multiplicatione 2. rursus in 4. & 3. rursus in 9.

COROLLARIVM IV.

Constat etiam duos minimos numeros in aliquâ ratione metiri alios quoscunque in eadem ratione. Quia scilicet producuntur ex eorum multiplicatione.

PROBL. II. PROPOS. III. Euc. 4.

Rationibus datis quotcumque in minimis numeris reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint datæ duæ rationes 2. ad 3. & 5. ad 6. Oporteatque reperire tres numeros minimos deinceps proportionales in datis rationibus, quod scilicet primus ad secundum sit, vt 2. est ad 3. & secundus ad tertium, vt 5. est ad 6. Ita fiet. Reperiatur minimus numerus ex propos. 36. sept. quem metiuntur 3. & 5. secundus, & tertius, & sit 15. exortus ex multiplicatione 3. cum 5. quia sunt primi inuicem; at si non essent primi, esset operandum, vt in secunda parte eiusdem propos. iubemur.

Rationes	2.	3.	5.	6.	
Continuè in illis	10.	15.		18.	Proportionales.

Deinde tertius 5. multiplicet primum 2. & fiant 10. sicut secundus 3. multiplicet vltimum 6 & fiant 18. Dico *tres inuentos* 10. 15. 18. *esse in ea proportione, quam possident 2. ad 3. & 5. ad 6. nimirum esse* 10. *ad* 15. *vt* 2. *ad* 3. *&* 15. *ad* 18. *vt* 5. *ad* 6.

Probatur primo, quod eandem proportionem dicant. Nam numerus 2. & 3. multiplicando 5. fecerunt aliquos; nempe 2. ex 5. numerum 10. sicut 3. ex 5. numerum 15. Ergo ex prop. 17. sept. erunt in eadem proportione 2. ad 3. vt 10. ad 15. sic numerus 5. & 6. multiplicando 3. fecerunt 15. & 18. Ergo erunt in eadem proportione, ex eadem propositione, 5. ad 6. vt 15. ad 18.

Probatur secundò. Quod *sint minimi in datis rationibus*. Nam progress. primo si non sunt minimi erunt aliqui numeri minores singuli, singulis. Qui in datis rationibus existant. Sit ergo numerus *Equorum* minor, quam 10., qui sit ad numerum *Ouium*, minorem quam 15 vt 2. ad 3. cum ergo 2. & 3. ex hypothesi minimi sint in ea proportione ex prop 20. sept. metietur 2. numerum *Equorum* sicut 3 numerum *Ouium*.

Progress. 2 Pariter dabitur quoque numerus *Ouium* minor, quam 15. & numerus *Leonum* minor, quam 18. qui sint in eadem proportione, qua 5. ad 6. Quare 5. metietur *Oues* & 6. *Leones* ex citata prop. 29. sept. Vnde 5. & 3. metientur numerum *Ouium* minorem, quam 15. numerus quidem 5. vt modo probauimus: numerus verò 3. ex præc. progressu.

Quamobrem cùm 5. & 3 mensurent quoque 15. minimum, quem metiuntur. Sequetur, quòd numerus 15. ex propos. 37. metietur numerum Ouium minorem: quam 15. Cùm 15. sit minimus eorum ex effectione, quem 5. & 3. mensurent. Quòd verò numerus maior metiatur minorem, hoc esse nequit.

Sint deinde secundo casu tres rationes in minimis numeris 3. ad 4. prima, secunda 5. ad 6 tertia 2. ad 7. Et sint inueniendi quatuor numeri in datis rationibus deinceps, idest continuè proportionales.

Rationes	3. 4.	5. 6.	2. 7.	
Continuè proport.	15.	20.	24.	84.
	Equi,	Boues,	Leones	n. minores

Inueniatur minimus numerus, quem mensuret numerus secundus 4. & tertius 5. & erit 20. Deinde multiplicetur tertius 5. cùm primo 3. nempe per vices, iuxta quas 4. capit in 20. & gignetur numerus 15. Rursus multiplicetur 4. cum quarto 6. nempe per easdem vices, penes quas 5. capit in 20. & producetur numerus 24. Erunt itaque 15. 20. 24. tres numeri in data ratione continuè proportionales. Videatur igitur, an quintus numerus 2. mensuret 24. Quod si metiatur, vt facit 2. propositus, qui capit 12. vicibus in 24. per has vices multiplicetur 7. & erunt 84. Dico itaque, quod 15. 20. 24. 84. habent datas rationes.

Probatur primò. Quod sint in datis rationibus, & quidem de tribus primis 15. 20. 24 constat, cum eodem modo executioni problema mandatum sit, ac in primo casu. De tertio verò, qui sit, ad quartum vt 2. ad 7. sic constat. Nam 2. metitur 24. tot vicibus, quot 7. metitur 84. cum ambo multiplicati per 12. eos gignant. Ergo 24. & 84. ex propos. 18. septimi erunt in ijsdem rationibus 2. ad 7.

Probatur secundo. Quod sint minimi, & etiam de tribus primis res constat ex primo casu. De numeris verò 24. & 84. tertiam proportionem facientibus clarum est, quia minor numerus dari nequit, quàm 84. qui capiat 12. vicibus 7. vt 24. capit 12. vicibus 2.

Nam si 20. 24. & 84. non sunt minimi in datis rationibus 5. ad 6. & 2. ad 7. Dabitur itaque numerus quidam *Equorum*, qui sit ad *Boum* numerũ vt 5. ad 6. & sit numerus Boum ad Leones, vt 2. ad 7. qui tamen singuli essent minores, quam 20. 24. 84. Quare ex propos. 29. septimi 5. metietur *Equos*, & 6. *Boues*. Et ex eadem 29. propos. 2. metietur quoque *Boues*, vt 7. *Leones*. Quia dati numeri 2. 7. & 5. 6. minimi sunt in datis rationibus. At 2. & 6. mensurant quoque 24. ex effectione minimum, quem possint metiri: ergo 24. mensurabit quoque *Boues* numerum se minorem ex propos. 37. septimi, quod est absurdum.

Tertius casus est, si quintus numerus non caperet æquè in 24. vt si esset tertia proposita proportio A 5. ad 7. reperiatur *minimus numerus*, quem A 5. & 24. metiuntur, & sit 120. Quoties ergo 24. metitur 120. quæ vices sunt 5. toties 15. primus numerus metiatur alium, numerum nempe multiplicetur 5. per 15. & fiet 75. Item quoties 24. metitur 120. toties 20. secundus numerus alium numerum multiplicatus per eas vices, quę sunt quinque, metiatur, & erit 100. At quoties 5. metitur 120. quæ sunt 24. toties 7. alium numerum metiatur, & ita 7. multiplicatus per 24. producet 168. Itaque 75. 100. 120. 168. erunt minimi in datis rationibus. Quod enim habeant datas rationes ostenditur. Quia enim 15. 20. 24. metiuntur 75. 100. 120. per eundem numerum A 5. erit eadem proportio inter hos quoque, quæ erat inter illos. Illi autem 15. 20. 24. eas rationes habebant, quæ 3. ad 4. & 5. ad 6. Ergo easdem habebunt 75. 100. & 120.

Deinde, vt 5. metitur 120. vicibus viginti quatuor, ita, & 7. metitur 168. Ergo inter 120. & 168. erit eadem proportio, quæ inter 5. & 7.

Prob. 2. Quod sint minimi. Nam Progr. 1. si non sunt tales. Dabitur aliquis numerus *Equorum* minor, quam 100. *Boum* minor, quam 120. & *Leonum* minor, quam 168. qui tamen habebunt datas rationes.

			A	
Rationes	3. 4.	5. 6.	5. 7.	
Continuè Prop.	15.	20.	24.	
Continuè Prop.	75.	100.	120.	168.
secundo inuenti	Equi,	Boues,	Leones n. minores, quam immediatè ipsis superpositi.	

Numerus *Equorum* est ad numerum *Boum*, vt 5. ad 6. & ideo 5. metietur numerum *Equorum* ex propos. 29. & quia & 5. & 4. metitur 20. minimum, quem possent metiri ex effectione, metietur quoque 20. ex propos. 37. septimi numerum *Equorum*.

Progress. 2. Quia verò ostensum est, quod sicut 20. est ad 24. sic 100. ad 120. Et ita quoque ex aduersarijs *Equi* sunt ad *Boues*, vt 100. ad 120. Ergo ex *Equo*, vt 20. ad 24. sic *Equi* ad *Boues*: Quare permutando, vt 20. ad *Æquos*, sic numerus 24. ad *Boues*. Quare sicut ex 1. Progressu 20. metitur *Equos* sic 24. metietur *Boues*.

Sed 5. mensurat etiam ipsos Boues, eo quod præsupponatur ab aduersarijs, quod ita sit 5. ad 7. sicut *Boues* ad *Leones* iuxta propor. 29. sept. Cum itaque 24. & 5. mensurent *Boues* mensurabit quoq; & numerus 120. ex propos. 37. sept. quem illi minimum mensurant numerum (qualem reperimus ipsũ 120. ab initio) ipsos *Boues*: At *Boues* dicũtur minus esse numero, quàm 120. Ergo numerus maior 120. metietur minorem *Boum*, quod esse nequit.

THEOR. II. PROP. IV. Eu. 16. l. 9.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit, vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint primi inter se 6. & 7. Dico, quod non potest esse, vt 6. ad 7. ita 7. referatur ad alium quempiam V. g. ad numerum *Ouium*.

6		7
	vt	
7		Oues

Probatur. Quia ex propos 29. sept. Si 6. esset ad 7. vt 7. ad numerum Ouium oporteret, quod 6. metiretur 7. æquè, vtpote fundamentum secundæ proportionis 7. quemadmodum idem 7. terminus primæ metiretur numerum Ouium, quod esse nequit, cùm 6. & 7. sint inuicem primi.

THEOR. III. PROPOS. V. Euc. 17. l. 9.

Si sint quocumque numeri deinceps proportionales: Extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; non erit, vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

4		9
ad 6		Equos

Dentur 4. 6. 9. continuè proportionales quorum extremi 4. & 9. primi sint inuicem. Dico, quòd non est, vt 4. ad 6. ita 9. ad alium quempiam V. g numerum *Equorum*.

Probatur. Nam si ita esset 4. ad 6., si, 9. ad numerum *Equorum* permutando esset quoque 4. ad 9. vt 6. ad numerum *Equorum*. Quare, cùm 4. & 9. sint primi inuicem in ea proportione 4. æquè metiretur 6 ex propos. 29. sept. & 9. Equos. Quia ergo 4. mensurat 6. & ponitur, vt 4. ad 6. ita 6. ad 9. metietur quoque 4. ipsum 9. æquè ex propos. 18. tr. 8. quod est absurdum.

PROBL. III. PROP. VI. Euc. 18. l. 9.

Duobus numeris datis considerare; an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

Sint dati numeri 4. & 7. Videndum est; si sint primi inuicem, si primi sunt, vt assignati. Ex propos. 4. huius euidens est, quod illis tertius proportionalis nequeat inueniri.

Quod si non sint primi, vt 4. & 6. multiplicetur in se numerus secundus, vt 6. & fiant 36. Videaturque an numerus primus 4. mensuret 36. si mensurat, vt assignatus 4. qui metitur 36. per 9. dicendum est; quòd habeat tertium proportionalem, & quod iste sit numerus ille 9. per quem primus 4. mensurat genitum 36. ex multiplicatione numeri 6. in se.

Probatur, quod ille 9. sit tertius proportionalis ex propos. 20. sept. Nam idem numerus 36. producitur, tam ex multiplicatione numeri medij 6. in se, quam ex multiplicatione 4. & 9. inuicem, qui sunt numeri extremi; siquidem, vt supponitur 4. per 9. mensurat 36. Vnde ex illa prop. 20. erit, vt 4. ad 6. sic 6. ad 9. Quod si non mensurat genitum ex multiplicatione secundi in se numerus primus, vt si dati fuissent 2. & 3. & genitus ex 3. esset 9. quem 2. non mensurat, dicendum; tertium proportionalem non posse illi inueniri.

Probatur. Nam si ille esset. Esset V. g. numerus *Equorum*: Quare cum ponatur, vt 2. ad 3. ita 3. ad *Equos*, ex propos. 20. producetur idem numerus ex multiplicatione 3. in se, nimirum 9. & ex multiplicatione 2. per numerum *Equorum*. Quamobrem 2. metiretur 9. mediante numero *Equorum*; quod esse nequit, cùm ponatur non metiri 2. ipsum 9.

PROBL. IV. PROP. VII. Euc. 19. l. 9.

Tribus numeris datis considerare, an possit illi quartus proportionalis inueniri.

SInt dati 3. numeri, quorum extremi, si sunt primi: Iam nequit quartus proportionalis inueniri ex propos. 5.

8. 12. 18. 27.

Si verò non sint primi, vt 8. 12. 18. multiplicandi sunt 12. & 18. vt fiant 216. & diuidendus est numerus 216. per 8. vt videamus; an ex æquo mensuret 8. primus numerus numerum 216. genitum ex medijs; Si mensurat, vt in assignato exemplo; videndum, per quem numerum id fiat, V. g. per 27. Et tunc dicendum: tribus numeris 8. 12. 18. quartum proportionalem inueniri posse; ipsumq; esse numerum 27.

Probatur ex propos. 19. sept. Nam idem numerus fit ex multiplicatione mediorum 12. & 18. qui ex multiplicatione extremorum 8. & 27. cùm 8. multiplicando 27. generet 216. siquidem 8. ipsum metitur per 27. ex pronunc. 7. tr. 8.

Quare 8. 12. 18. 27. erunt inuicem proportionales.

Si verò primus datus numerus non mensuret genitum ex medijs, vt si essent dati 3. 4. 10. Nam 3. primus numerus non mensurat ex æquo 40. numerum ortum à multiplicatione numerorum reliquorũ 4. & 10. Tunc dicendum quartum proportionalem prædictis numeris inueniri nequaquam posse.

Probatur. Quoniam, si inuenitur, sit illis numerus *Ouium*. quartus proportionalis. Numerus 3. 4. 10. & numerus *Ouium* sunt proportionales: Ergo ex 19. propos. sept. medij 4. & 10. producerent inuicem multiplicati 40. Et idem numerus produceretur ex multiplicatione extremorum 3. & Ouium numero; Quare 3. per numerum Ouium metiretur 40. quod est absurdum cùm ponamus 3. non metiri 40.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum non primorum.

ALiqua etiam de quibuscunque numerorum proportionibus sunt delibanda, eaque, quę elementi vim habeant, deseruiantque cęteris, de quibus agendum est.

THEOR. I. PROPOS. VIII. Euc. 8.

Si inter duos numeros medij continua proportione numeri cadant; etiam inter alios eandem rationem cum ipsis habentes totidem continua proportione cadunt numeri.

DEntur 10. & 80. inter quos medij continua proportione cadant 20. & 40. ita, quòd sint continuè proportionales 10. 20. 40. 80. Sintque alij duo numeri, qui eandem proportionem dicant 6. & 48. quam 10. ad 80. Dico, *quò sicut inter* 10. *&* 80. *cadunt duo medij proportionales* 20. *&* 40. *ita cadere inter* 6. *&* 48.

10. 20. 40. 80.

Quod, vt ostendatur, assumantur minimi, quatuor numeri in ea proportione, in qua sunt 10. 20. 40. 80. & sint 1. 2. 4. 8. eritque, vt 10. ad 20. ita 1. ad 2. & sicut 20. ad 40. ita 2. ad 4. & sicut 40. ad 80. ita 4. ad 8. Quare ex *Æquo*, vt 10. ad 80. sic 1. ad 8. & ita 6. ad 48.

Cumque sint 1. & 8. minimi in ea proportione, ita mensurabit 1. numerum 10. sicut metitur 8. numerum 80. ex propos. 29. l. sept. & ex eadem propos. metietur etiam numeros 6. & 48. habentes eandem proportionem cum ipsis.

Quoties igitur 1. metitur numerum 6. & 8. numerum 48. toties intermedij minimi numeri 2. & 4. metiantur aliquos alios, & quia 1. metitur 6. sex vicibus, & 8. numerum 48. vicibus item sex, producet 2. intermedius minimus multiplicatus per easdẽ vices numerũ 12. & 4. alter intermedius, item per 6. ductus numerum 24. Quamobrem geniti in eadem proportione erunt ex propos. 17. sept. ac generantes per eundem numerum senarium multiplicatos, & ita erit 12. ad 24. vt 2. ad 4. quæ eadem est, ac 1. ad 2. & quæ 4. ad 8. Erunt itaque continuè proportionales 6. 12. 24. 48. vt sunt 1. 2. 4. 8. & ideo, vt sunt 10. 20. 40. 80. Cumque multitudo numerorum intermediantium, qui reperti sunt 12. & 24. sit æqualis multitudini numerorum mediantium 20. & 40. patet propositum: Quod tot numeri medij proportionales cadent inter duos numeros 6. & 48. quot inter 10. & 80. eandem proportionem cum eis habentes.

COROLLARIVM

HInc est, quod neque inter numeros duplæ proportionis, neque superparticularis, neque superbipartientis possit cadere medius proportionalis, quia caderet etiam inter numeros minimos similis proportionis. Illi autem medium proportionalem recipere nequeunt. Nam dupla proportio minimorum est inter 1. & 2. superparticularis verò inter numeros sola vnitate dissitos, inter quos nullus numerus cadit, vt 2. & 3. superbipartiens verò inter numeros, qui dualitate differunt, vt 5. & 7. inter quos sola vnitas intercipitur, quæ esse nequit medius proportionalis.

Nam sint 3. & 5. minimi in aliqua proportione superbipartiente, & sit numerus inter eos 4. qui dicatur medius proportionalis. Ergo erit 3. ad 4. vt 4. ad 5. quare ex pr. 22. l. 5. & 3. ablatus à 4. ita erit ad 4. ablatum à 5. vt residuum 1. à 4. ad residuum 1. à 5. & ideo 3. esset ad 4. vt vnitas ad vnitatem, quod est falsum; quia esset vt inæqualis ad inæqualem, ita æqualis ad æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IX. Euc. 10.

Si inter duos numeros, & vnitatem continua proportione ceciderint numeri; quot inter ipsos, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri totidem, & inter ipsos medij continua proportione cadent.

16. 40. 100. 250. 625.
8. 20. 50. 125.
4. 10. 25.
2. 5.
5.

SInt numeri proportionales 16. & 625. & inter primum, & vnitatem tres medij proportionales cadant 2. & 4. & 8. sicut, & inter secundum 625. & vnitatem cadant tres medij proportionales 5. & 25. & 125. *Dico, quòd, & inter ipsos, tres pariter medij proportionales inuenientur.*

Nam duo minores numeri interpositi 2. & 5. se mutuò multiplicẽt, procreabunt 10. minor autem eorum 2. multiplicet tum modo factum 10. & faciet 20. tum mediocrem alterius seriei, nimirum 25. & faciet 50. Tandem idem numerus 2. multiplicet hos factos nimirum factum 20. & faciet 40. sic, & factum 50. faciet 100. & tandem maiorem alterius seriei 125. & faciet 250. *Dico hos postremo factos esse inter datos* 16. *&* 625. *medij tres proportionales.*

Obseruandum verò est in primis: Cùm 1. 2. 4. 8. & cęt. sicut 1. 5. 25. 125. dicuntur proportionales ab vnitate, quòd sicut vnitas metitur bis 2. sic 2. metitur 4. & 4. 8. & cęt. sicque vnitas metitur 5. quinq; vicibus, vt 5. 25. & 25. metitur 125. & cęt. Quia ita ponitur 1. ad 2. vt 2. ad 4. & sic ponitur 1. ad 5. vt 5. ad 25. & cęt.

Probatur. Quia omnes 16. 40. 100. 250. & 625. habent eandem proportionem, quam 2. ad 5. Ergo sunt continuè proportionales. Quod verò eam proportionem habeant, quam 2. ad 5. Patet nam 16. 40. 100. & 250. eandem proportionem habent ex propos. 17. quam multiplicati ex quibus prodiere 8. 20. 50. cùm fuerint multiplicati per eundem numerum 2. Isti verò 8. 20. 50. eandem habent ob eandem rationem, quam 4. & 10. cum fuerint multiplicati per eundem 2. Et rursus isti 4. & 10. eandem, quam 2. & 5. quod hi per 2. fuerint multiplicantes, ex 18. propos. Et ob eandem rationem quoque 250. & 625. quem primo posthabuimus, erunt in eadem proportione, quam 2. ad 5. cum 125 multiplicatus per 2. fecerit 250. minorem, & multiplicatus per 5. fecerit 625. Vnde omnes quinque 16. 40. 100. 250. & 625. erunt continuè proportionales, nimirum in eadem proportione, quâ 2. ad 5.

EXPENSIO IV.

De numeris planis, & solidis.

CVm numeri plani, & solidi multas insignes proprietates consequantur, quę maximè deseruiunt in Arithmeticis operationibus, & lib. 10. necessarię sint, ad cognoscendam diuersitatem quantitatis discretę à continua hinc, est quod visis proportionibus numerorum simplicium; hic debeamus agere de numeris figuratis, nempe planis, vel solidis, & eorum proportiones agnoscere.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 5.

Plani numeri inter se rationem habent ex lateribus compositam.

Plani 8 15.
Latera 2. 4. 3. 5

SInt duo numeri plani 8. & 15. & latera primi 2. & 4. secundi 3. & 5. *Dico proportionem 8. ad 15. esse compositam ex proportione laterum.*

Prob. Faciant latus primi 2. & latus secundi 3. numerum 6. se mutuò multiplicando. Itaque habemus, quod numerus 2. multiplicando 4. fecit planum 8. & multiplicando 3. latus alterius plani, numeri 15. facit 6. & ideo ex propos. 17. l. sept. Ita erit 4. ad 3. vt 8. ad 6.

Progress. 1. Eadem quoque ratione, quam 3. multiplicans 2. facit 6. & multiplicans 5. fecit 15. erit eadem ratio ex cit. propos. 2. ad 5. qua 6. ad 15. refertur. Quare 8. 6. 15. sunt deinde proportionales in proportionibus, quibus refertur 4. ad 3. & 2. ad 5. Nam tribus ijs numeris ordine positis, ita refertur 8. ad 6. vt latus 4. ad latus 3. & ita respondet in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5.

Plani numeri 8 15
Latera 4. 2 3. 5
6 numerus ex 2 & 3

Ita refertur 4 ad 3 & 2 ad 5.
Vt 8 ad 6 & 6 ad 15

Sed si ordo laterum inuertatur, & disponatur hoc ordine.

Plani 8 15
Latera 2. 4 & 5. 3
20

Vt refertur 2. ad 5, & 4 ad 3
Sic 8 ad 20, vt 20 ad 15

Erit adhuc eadem ratio 8. ad 20. quæ est 2. ad 5. & 4. ad 3. quæ est 20. ad 15. Ita si quocunque alio ordine ea latera colloces V. g. 4. 2. 5. 3., aut 2. 4. & 3. 5. Nam 10. aut 12. producti ex medijs, laterũ numeris erunt ad extremos proportionales velut latera, & ita referretur 4. ad 5. vt 8. ad 10. & 10. ad 15. vt 2. ad 3. Sic referretur 2. ad 3. vt 8. ad 12. & 12. ad 15. vt 4. ad 5. Ergo, cùm proportio 8. ad 15. sit effecta ex proportione V. g. 8. ad 12. & 12. ad 15. aut ex proportione 8. ad 10. & 10. ad 15. aut ex proportione 8. ad 20. & 20. ad 15. aut ex 8. ad 6. & 6. ad 15. & hæ omnes sint proportiones laterum diuersimodè collatorum; patet ex def. 8. tract. 9. part. 1. proportionem planorum 8. ad 15. componi ex proportione laterum, quod, & de omnibus alijs planis valet.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 15.

Duorum similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus, & planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SInt duo plani numeri similes, scilicet habentes latera proportionalia aliqua. V. g. 6. & 24. Nam latera aliqua numeri 6. quę sunt 2. & 3. sunt proportionalia aliquibus lateribus numeri 24. nempe 4. & 6. licet, & alij sint numeri, qui ex mutua multiplicatione producunt 6. & 24. qui proportionem non dicunt, vt essent 2. & 12. aut 3. & 8. latera quoque numeri 24.

Plani similes 6. 24. Medius 12.

Latera 2. 3. 4. 6.

Latera itaque numeri 6. sunt 2. & 3. & numeri 24 sunt 4. & 6. & eadem proportione gaudet 2. ad 3. vt 4. ad 6.

Dico, quòd inter 6. & 24. cadit medius proportionalis numerus aliquis. Nam multiplicentur termini 3. primæ combinationis extremo, cum 4. alterius proportionis, producetur 12. *Dico hunc esse proportionalem medium.*

Probatur. Progressus 1. Quoniam ita refertur 2. ad 3. vt 4. ad 6. permutando ita quoque erit 2. ad 4. vt 3. ad 6.

Progressus 2. Quoniam 3. multiplicans 2. fecit 6. & 4. fecit 12. erit eadem proportio 2. ad 4. quam 6. ad 12. & sic quia 4. multiplicans 3. fecit 12. & multiplicando 6. fecit 24. erit eadem proportio 3. ad 6. quæ 12. ad 24. Quare proportionales sunt numeri 6. 12. & 24. Ergo 12. est medius proportionalis.

Probatur secundo: Quòd habeat 6. ad 24. duplicatam lateris homologi ad latus homologum rationem. Latera homologa illa sunt, quæ vtraque in eadem quantitate sunt, fundamenta proportionis, vel termini; ita erunt in hac 2. & 4. fundamenta, & 3. & 6. ambo termini; patet autem ex prima probatione, quod ita est 6. ad 12. vt 2. ad 4. & 12. ad 24. vt 3. ad 6. Quare cum 6. ad 24 eam proportionem obtineat, quæ est 6. ad 12. & 12. ad 24. est duplicata cum gemina vice repetatur eadem proportio, & est etiam ea, quæ laterum homologorum 2. ad 4. vt 3. ad 6. Possent tamen etiam alio pacto disponi latera, vt in præc.

THEOR. III. PROPOS. XII. Euc. 19.

Duorum similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri; & solidus ad solidum triplicatam habet rationem, quam habet latus homologum ad aliud latus homologum.

Solidi 48. & 162.

Latera 2. 4. 6. & 3. 6. 9.

SInt duo numeri solidi similes 48. & 162. & primi latera sint 2. 4. & 6. Secundi verò 3. 6. 9. sunt autem similes; quod latus 2. ita referatur ad 4. primi, vt latus secundi 3. refertur ad 6. & ita latus 4. primi referatur ad 6. vt latus 6. secundi refertur ad 9. *Dico, quod inter hos numeros solidos 48. & 162. duo medij proportionales cadunt numeri.*

Notandum verò est in primis; quod quia ponitur 2. ad 4. vt 3. ad 6. erit etiam permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6. & quia ponitur 4. ad 6. latus primi solidi, vt 6. ad 9. latus secundi, erit etiam permutando 4. ad 6. vt 6. ad 9. quare erit eadem proportio, vel 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. nimirum latera vnius solidi ad latera alterius solidi collata, cùm conueniant in intermedia proportione 4. ad 6.

Nunc, vt probetur propos. disponatur latera in ordinem, vt placet; dummodo proportiones similes in loco correspondente sint, vt vides.

48

2 4 6 72

12

3 6 9 108

18 162

Deinde multiplicandi sunt 2. cum 4. latera primi fient 8. sicut 3. cum 6. latera secundi, & fient 18. plani numeri. Deinde terminus primi, vel consequens 4. multiplicandus est cum fundamento relationis, vel cum antecedente secundi, qui est 3. & fient 12. Tandem 6. primi, & 9. secundi hunc 12. multiplicent, & facient 72. & 108.

Probatur itaque primo: Quod hi numeri 72. & 108. sint duo medij proportionales inter 48. & 162.

Progress. 1. Quoniam itaque 4. multiplicauit 2. & 3. sequitur ex propos. 17. septimi; quòd eadem proportio sit inter genitos 8. & 12. quæ est inter multiplicatos 2. & 3.

Progress. 2. Iterum, quia 3. multiplicauit 4. & 6. sequitur ex eadem propos. quòd sint 4. ad 6. multiplicati sicut 12. & 18. geniti. Quare 8. 12. & 18. sunt continuè proportionales.

Progress. 3. Solidus quoque numerus 48. resultauit ex multiplicatione 2. in 4. ex qua prodijt numerus 8. & rursus ex multiplicatione 6. in 8. Vnde factus est numerus ipse solidus 48. Sic dicendum est de numero solido 162.

Progress. 4. Numerus itaque 6. latus primi solidi multiplicans ex effectione 12. fecit 72. Itaque ex cit. propos. 17. ita erit 48. ad 72. geniti, quæ est 8. ad 12. quæ est ex 1. progressu 2. & 3.

Progress. 5. Sic quia numerus 9. latus tertium secundi solidi multiplicauit ex 3. progr. 18. & fecit 162. & ex effectione multiplicans 12. fecit 108. fit vt eadem proportio sit inter multiplicatos 12. & 18. quæ inter genitos 108. & 162. quæ verò est inter 12. & 18. est illa, quę est inter 4. & 6. ex 2. progressu.

Progressu 6. Tandem, quia latus tertium 6. primi solidi 6. & 9. latus tertium secundi solidi multiplicando 12. fecerunt 72. & 108. Sequitur ex cit. propos. 17. quò eadem proportio sit inter 6. & 9. quæ est inter 72. & 108. Quamobrem

Concluditur: Quod ita sit in proportione solidus primus 48. ad 72. quæ est 2. latus prioris solidi ad 3. latus posterioris. ex 4. progressu. Et quod 72. ad 108. sit in eandem proportione, quam habet 6. latus tertium primi solidi ad 9. latus tertium secundi solidi ex 6. Progr. Tādem quod 108. sit ad 162. solidum posterius, quæ est inter 4. latus secundum primi solidi ad 6. latus secundum posterioris solidi ex Progr. 5. quare continuam proportionem habebunt 48. ad 72. & hic ad 108. & iste ad 162. quam habet 2. ad 3. & 6. ad 9. & 4. ad 6. nimirum laterum vnius ad latera alterius, quæ

quæ vt prænotauimus est eadem proportio.

Probatur secundò: Quòd sit proportio triplicata inter solidos 48. & 162. nam vt probatum est, eadem proportio 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. repetita in quatuor numeris 48. 72. 108. & 162. triplicatur, & ita est 48. ad 72. vt 72. ad 108. & 108. ad 162.

PROBL. III. PROPOS. XIII. Eu. 20.

Si inter duos numeros cadat vnus medius proportionalis numerus, similes plani erunt illi numeri.

CAdat inter 18. & 32. numerus medius proportionalis 24. *Dico* 18. *& 32. esse similes planos numeros.*

Prog. 1. Sumātur duo numeri minimi in ratione, qua refertur 18. ad 24. aut quę est eadem 24. ad 32. ex propos. 35. & sint 3. & 4. ex propos. 29. sept.

18 24 32

3 4 6 8

3. & 4. metientur 18. & 24. æquè, idest per æqualem numerum; metiantur per 6: ideoque 3. & 6. erunt latera numeri 18.

Progress. 2. Sic quoq; 3. 4. metientur ex eadem propos. numeros 24. & 32. æquè, idest per equalem numerum 8. ideoque 4. & 8. erunt latera numeri 32.

Obseruandum est autem quod idem numerus 4. in primo progr. multiplicans 6. fecit 24. & ex 2 pr. idē 4. multiplicans 8. fecit 32. Vnde 6. & 8. habebunt eandem rationem, quam 24. ad 32 quæ est 3. ad 4. ex 17. septimi. Poterimus itaque vti permutatione. Cùmque sit 3. ad 4. vt 6. ad 8. etiam erit 3. ad 6. vt 4. ad 8. Iam ergo patet numeros 18. & 32 esse similes planos. Planos quidem; quia habent latera 3. 4. & 6. 8. similes verò, quia latera, vt requirit def. 1. h. planorum numerorum, sunt proportionalia, & est 3. ad 6. latera plani 18. vt 4. ad 8. plani 32.

THEOR. XI. PROPOS. XIV. Euc. 21.

Si inter duos numeros cadant duo medij proportionales numeri; similes solidi sunt illi numeri.

8 12 18 27

4 6 9

22 A 2 33 B 3

CAdant inter 8. & 27. duo numeri proportionales 12. & 18. *Dico* 8. *& 27. solidos esse.* Sumantur tres numeri minimi in ratione 8. ad 12. vel quæ eædem sunt 12. ad 18. vel 18. ad 27. ex propos. 35. septimi, & sint 4. 6. 9.

Progress. 1. Quia itaque inter 4. 9. assumptos numeros minimos cadit vnus medius proportionalis 6. erunt 4. & 9. assumpti minimi in ea proportione ex præced. prop. plani. Lateraque eorum erunt scilicet 2. & 2. latera numeri 4. & 3. 3. latera numeri 9.

Progress. 2. Quia 4. 6. 9. assumpti minimi sunt in ea proportione metientur ex propos. 29. numeros primò propositos 8. 12. 18. 27. qui habent eandem rationem cum ipsis, & numeri quibus metiūtur erunt A 2. & B 3. Itaque 4. & 6. mensurabunt 8. & 12. per A 2. eos multiplicando & 6. cum 9. mensurabunt 18. & 27. per B 3. eos multiplicando;

Progress. 3. Sed 2, 2. latera numeri 4. plani se se multiplicando faciunt 4. rursus 4. per A 2. ex secundo progressu multiplicando 4. facit 8. cùm, vt ibi 4. metiatur 8. multiplicatus per A 2. Itaque 8. numerus solidus erit, cujus latera erunt 22. & A 2. Sic, & 27. Nam 9. per B 3. multiplicatus ex secundo progress. producit 27. At ipse 9. numerus planus producitur ex multiplicatione suorum laterum 3. & 3. Ergo 27. erit, solidus ex definitione 2. h. cuius latera erunt 3. 3. & B 3.

Probatur verò; Quod sint solidi similes. Nam illi sunt solidi similes, quorum vnius latera tria tribus alterius sunt proportionalia.

Sed talia sunt 2 2 2. respectu laterum 3. 3. 3. Ergo solidi similes erunt.

Progress. 4. Quod vero talia sint. Probatur. Nam ex 2. progr. A 2. multiplicans 6. produxit 12. & B 3. multiplicans 6. item produxit 18. Ergo erit 2. ad 3. vt 12. ad 18.

Progress. 5. 12. verò, & 18. sunt in eadem ratione, quæ 4. & 6. quia multiplicati per 3. fecerunt ipsos 12. & 18. & ideo, vt A 2. ad B 3.

Progress. 6. Quia verò assumpti minimi sunt extremi eorum 4. & 9. erunt quadrati ex Coroll. 1. 2. propos. huius, & ideo plani similes, & hinc ex propos. 9. cadet inter illos medius proportionalis 6. in proportione laterum homologorum.

Propterea latus 2. primi solidi 4. & aliud latus 2. eiusdē; dicent eandem rationem ad 3. & 3. latera secundi solidi 9. vt 4. ad 6. quæ eadem ex 5. progr. quæ 2. A ad B 3. numeros mensurantes, & latera tertia solidorum. Quamobrem si est 2. ad 3. vt 2. ad 3. vt 2. A ad B 3. poterimus vti *Permutatione*, & dicere, quod erit latus 2. primi solidi ad 2. vt latus 3. ad latus 3. secundi, & ita latus 2. ad A 2. tertium latus eiusdem primi solidi, vt latus 3. ad latus tertium B 3. secundi solidi; quapropter similes erunt isti solidi.

Non potuimus autem assumere minimos 4. 6. 9. in proportionibus numerorū 8. 12. 18. 27. nisi extremi essent quadrati; quia trium minimorum numerorum, in eadem proportione continuantium extrema quadrata sunt ex Coroll. 1. propos. 2. huius.

THEOR. XII. PROPOS. XV.

Similes plani numeri inter se rationem habent, quam quadratus numerus aliquis ad aliquem quadratum numerum.

DEntur duo plani similes 8. & 18. Dico, *quod sicut est* 8. *ad* 18. *ita sit aliquis quadratus ad aliquem numerum quadratum.*

Probatur. Nam 8. & 18. sunt plani similes ex hypothesi. Quare mediabit inter eos aliquis numerus proportionalis. Iste mediet, & sit 12. Reperiāturque minimi in eadem proportione, & sint 4. 6. 9. Horum extremi ex Coroll. 1. prop. 2. h. quadrati erunt. Quamobrem erit, vt quadratus 4 ad quadratum 9. ita 8. ad 18.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVI. Eu.27.

Similes solidi inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

PRobatur. Nam inter 16. & 54. vtpote inter solidos numeros similes interponantur duo medij proportionales ex propos. 12. huius. Eruntq; V. g. 24. & 36. Sumptis ergo quatuor numeris minimis in ea proportione, quę est 16. ad 24. item 24. ad 36. & tandem 36. ad 54. qui sint 8. 12. 18. 27. vt ex Coroll. 2. propos. 2. huius habemus, 8. & 27. Cubi erunt. Igitur 16. ad 54. solidi numeri habebunt eandem rationem; quam Cubus 8. ad Cubum 27.

COROLLARIVM I.

COlligitur ex prædictis omnibus. Nullos numeros esse planos, vel solidos similes, inter quos medius proportionalis cadere nequeat. Quare nulli numeri primi V. g. 11. & 13. possunt esse solidi similes; Quia latera non obtinent, præter vnitatem, & se ipsum (quia V. g. ex 1. & 11. fit 11. quæ latus non sunt; nisi impropriè, nec inter eos medius proportionalis cadere potest. Sic nec numeri inter se primi; qui quadrati non sint, aut cubi similes sunt. Quòd, si dicantur esse planos similes, cadet inter eos medius proportionalis, vel vnus, vel duo Quare cum sint primi inuicem, & sint tres, vel quatuor continua proportione hi erunt. Quadrati, vel Cubi ex Coroll. 1. vel 2. propos. 2. huius, quod est contra positionem,

COROLLARIVM II.

SIc nec numeros, quorum minor primus sit, qui ab vnitate solùm mensuretur, vt 3. 5. vel 7. non posse esse planos, vel solidos similes, nisi minor mensuret maiorem; Nam, si non mensuret essent primi inuicem, & ideo non possent esse plani, vel solidi similes ex præced. Coroll.

COROLLARIVM III.

SIc, neque plani similes possunt esse ij, quorum vnus Quadratus, vel Cubus sit alter nequaquam, vt 4. & 5. vel 16. & 20. aut 8. & 10. Nam, si essent plani similes haberent proportionem, quam quadratus, vel cubus numerus ad Quadratum, vel Cubum numerum. ex propos. 11. quod est contra hypothesim.

COROLLARIVM IV.

VNde facilis est inuentio numerorum non similium. Nam omnes numeri primi in se vt 3. 5. 7. 11. Sic numeri primi inuicem 2. & 3. Sic, & numeri, quorum vnus primus est, & alium non metitur, vt 5. & 8. Sic, & numeri quorum vnus Cubus sit, vel Quadratus, alter verò nequaquā, non possunt esse, aut plani, aut solidi similes.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Duos numeros planos similes inuenire.

ACcipiantur quatuor numeri proportionales, & sit 2. ad 5. vt 8. ad 20. seque multiplicent fundamenta cum terminis proportionum: 2. cum 5. & procreent 10. & 20. cum 8. & producant 80. *Dico hos esse planos similes.*

Probatur, quia illi sunt similes, qui habent latera proportionalia ex defin. talia verò sunt ex constructione 10. & 80.

EXPENSIO V.
De Quadratis, & Cubis.

NVmeri Cubici, & Quadrati quædam species sunt numerorum similium planorum, & solidorum. Vnde visis eorum genericis proprietatibus, nunc etiam species ipsorum considerandæ.

THOR. I. PROPOS. XVIII. Eucl. 11.

Duorum Quadratorum numerorum vnus proportionalis numerus medius est, & Quadratus ad Quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SInt duo Quadrata 9. & 49. quorum latera sint 3. & 7. Dico primo *inter eos cadere aliquem numerum medium proportionalem.*

Probatur. Nam duo Qnadrata sunt duo solidi similes; siquidem eorum latera 3. 3. & 7. 7. sunt ęqualia: Vnde eadē proportio est 3. ad 3. quę alterius laterū 7. ad aliud latus 7. Ergo ex prop. 5. inter eos aliquis medius proportionalis cadit.

Quadratum quoque duplicatam habet lateris ad latus rationem. Nam ea proportio, quæ inter 3. & 7. gemina vice in vno quoque quadrato repetitur, ob multiplicationem laterum in se.

THEOR. II. PROPOS. XIX. Eu. 28.

Duorum Cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, & Cubus ad Cubum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

PRobatur. Nam duo Cubi sunt duo solidi similes ob laterum suorum æqualitatem. Sic Cubi 27. latera 3. 3. 3. ad Cubi 64. latera 4. 4. 4. eadem proportione referuntur, & est primus 3. ad secundum 3. & primus 4. ad secundum 4. & secundus 3. ad tertium 3. vt 4. ad 4. sed inter solidos similes ex propos. 6. duo medij proportionales numeri cadunt. Ergo etiam inter Cubos.

Solidi quoque habent duplicatam lateris ad latus rationem. Quare etiam Cubi eo, quòd sint solidi similes. Sic 27. & 64. habent duos medios proportionales 36 & 48. & latus 3. cubi 27. prius in se; deinde in productū 9. ductus facit 27. Sicut, & latus 4. cubi 64. priùs in se, deinde in productum 16. ductus facit 64. Vnde proportio, quæ est inter 27. & 64. est illa ipsa, quæ est inter 3. & 4. sed triplici vice repetita.

THEOR. III. PROPOS. XX. Eucl. 22.

Si tres numeri deinceps sint praportionales; primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

SInt 9. 36. 144. continuè proportionales. *Dico quod si 9. est quadratus, & tertium 144. esse quadratum.*

Quia cum inter 9. & 144. cadat vnus medius proportionalis erunt plani similes ex propos. 11. huius, & ita ex definitione proportionalia habebunt latera: Quare ita erit 3. ad 3. vt latus alius 144. ad sui ipsius alterum latus: sed 3. & 3. sunt æquales: Ergo, & latera numeri alius 144. erunt æqualia 12. & 12., quare quadratus erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXI. Eu. 23.

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, & primus sit Cubus; quartus etiam Cubus erit.

SInt quatuor numeri 27. 45. 75. & 125. continuè proportionales. Dico, *quod si primus sit Cubus, & vltimum quoque cubum esse.*

Probatur. Nam erunt similes solidi primus 27. & quartus 125 eo quòd inter eos duo medij proportionales numeri intercipiantur ex prop. 12. Quare ex definitione ita erit 3. ad 3. & hic ad 3. vt latus primum ad latus secundum, & hoc ad latus tertium numeri 125. Sed 33. & 3. sunt numeri æquales. Vnde latera numeri 125. erunt inuicem æqualiter æqualia, quare cubus erit.

THEOR. V. PROPOS. XXII. Euc. 24.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam quadratus ad quadratum, si primus quadratus sit, etiam secundus talis erit.

SI sit 36. quadratum ad 64. numerum; vt quadratum 9. ad quadratum 16. *Dico etiam numerum 64. esse quadratum.*

Probatur. Quia inter quadratos 9. & 16. cadit vnus proportionalis numerus V. g. 12. ex propos. 11. huius, sed ita est quadratus 36. ad numerum 64. Ergo ex propos. 18. etiam inter 36. & 64. cadet vnus medius proportionalis. Videlicet 48. Ergo ex propos. 0. huius. Si 36. est numerusquadratus, talis erit, & 64.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII. Eu. 25.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, si primus sit cubus, talis quoque erit secundus.

SInt 64. & 116. numeri, qui habeant rationem eam inter se, quam 8. obtinet comparatus ad numerum 27. ambo cubos. Dico, *si 64. est Cubus, quòd talis quoque erit* 116.

Probatur, quia inter 8. & 27. vtpote inter numeros Cubos ex propos. 19. huius duo proportionales cadunt numeri: Quapropter ex propos. 8. cadent quoque tales numeri duo proportionales inter 64. & 119. Quare ex propos. 21. cum 64. Cubus ponatur, talis quoque erit numerus 116.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps sint proportionales. Tertius ab vnitate quadratus erit, & vno intermisso quilibet sequens. Quartus autem Cubus, & duobus intermissis quilibet alius. Septimus autem Cubus simul, & quadratus, & quinque intermissis omnes alij.

SInt ab vnitate continuè proportionales

A B C D E

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512

1024. 2048. 4096. F

Primò *Dico tertium 4. esse quadratum, & intermisso vno, sextum 16. esse quoque quadratum, & intermisso vno, octauum 64. esse quadratum,* & sic sequendo.

Probatur. Nam: Quod 4. sit Quadratus numerus, inde patet; quia sub duobus æqualibus numeris 2. & 2. continetur ex definit. 4. Siquidem Vnitas est ad 2. vt 2. est ad 4. sed vnitas metitur 2. per se ipsam, ergo, & metietur numerus 2. numerum 4. per se ipsum, nempe per 2. Quod autem, & alij, qui intermisso vno succedunt sint quadrati, etiam patet ex propos. 20. eò quia intermediet inter vtrumque medius proportionalis V. g. inter 4. & 16. numerus 8. At 4. est Quadratus quapropter, & 16. erit quadratus ex pa. 22. h.

Secundo Dico, quod quartus ab vnitate Cubus sit. Nam Vnitas est ad 2. vt 4. ad 8. eodemque modo vnitas mensurabit 2. vt 4. numerū 8. Sed iam ex primę partis probatione 2. multiplicans 2. & per se ipsum generat 4. Ergo etiam modo 2 multiplicans 4. faciet 8. Ergo 8. Cubus erit. Quod autem intermissis duobus, omnes alij sint Cubi, patet ex 19. propos. quia inter 8. & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur.

Tertiò Septimus ab vnitate ostensus est cubus, vt patet ex numero D, quia occupat eum locum post primum cubum intermissis duobus: Est quoque Quadratus: quia post primum, & secundum Quadratum intermisso vno occurrit: Ergo simul erit Cubus, & Quadratus.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si ab vnitate quotcumque numeri proportionales deinceps fuerint; qui verò post vnitatem Quadratus sit, & reliqui omnes Quadrati erunt, & si qui post vnitatem sit Cubus, & reliqui omnes Cubi erunt.

SI sint ab vnitate continuè proportionales numeri 2. 4. 16 64. 256. 1024. & primus 4. sit Quadratus. *Dicit reliquos omnes esse quadratos.*

Probatur. Quia; cùm sint tres proportionales 4. 16. 64. primusque 4. sit quadratus, & tertius quadratus erit; Eodem modo, cum 16. 64. & 256. sint continuè tres proportionales, & 16. sit quadratus ergo ex propos. 20. huius, & 256. erit quadratus, & sic de reliquis. Nam numerus 4. ex hypothesi, numerus verò 16. quadratus eo, quòd ex prop. præc. sit quintus ab vnitate.

Probatur quoque de cubis eodem modo. Nam

2. 3. 4. 5. 6 7
si sint 8. 64. 512. 4096. 32768. 262144. quartus ab vnitate 512. Cubus erit ex propos. anteced. & duobus intermissis ex propos. 19. 262144. erit quoq; Cubus. Sic quia primus 8. ex hypothesi est Cubus: Ergo ex prop. 29. numerus quoq; 4096. Cubus erit ob duos proportionales intermedios 64. & 512. Cum autem 512. quartus, & quintus 4906. sint cubi, & ita sit tertius 64. ad quartum 512. vt 512. ad 4096. ex propos. 21. huius, tertius quoque 64. erit Cubus. Cùm verò tertius 64. sit cubus, etiam ob duos proportionales intermedios. Sextus 32768. & sic de reliquis.

TRACTATVS XI. IN IX. LIBRVM EVCLIDIS

PARS TERTIA.

De Planorum, Solidorumque generatione, & inuentione.

HIc agit Euclides de planis, solidisque numeris inueniendis, etiam Quadratis, & Cubis; & quærit, qui numerus multiplicans alium Cubum, vel Quadratum efficiat, aut etiam numerum solidum aut planum: Reliqua verò de quibus pertractat de numeris paribus, & imparibus, & de perfectis, & imperfectis, non putauimus inter elementa necessariò collocanda. Cùm nomen vix consequantur in alijs partibus mathematicis; substituimus autem Expensionem de æquipotentia numerorum, & inuentione Quadratorum, qui tractatus lib. 10. deseruiunt, & absolutè necessarij sunt.

EXPENSIO I.

De numerorum æquipotentia ad gignendos æquales planos.

SIcut lineas lib. 2. Euclidis ostendimus æquipotentes, & in diuersas partes sectas, posse æquiualere quadrato totius. Sic nunc idem videndum est de numeris. Cũ Euclides de his non agat; sed acutissimè Clauius, verùm cum eius ostensiones visæ nobis sint difficiles, alias attulimus, quæ faciliori pede percurri possint.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si numerus aliquis in duas partes secetur Planus numerus totius, partisque multiplicatione consurgens æquatur quadrato, eiusdem partis, partiumque plano.

7
3 4
12 9 21

* SIt numerus 7. qui diuidatur in duas partes in 3. & 4. multipliceturque totus per 3. & fiant 21. deinde ducatur 3 in se, & fiat quadratum 9. in alteramque partem, & fiat 12. *Dico, quòd planus numerus 12. & quadratus 9. æquantur plano* 21.

Probatur. 3. multiplicauit 4. & fecit planum 12. & se fecit 9. Ergo ex propos. 17. sept. ita erit 3. ad 4. vt 9. ad 12. Rursus idem 3. multiplicauit se, & fecit 9. multiplicauit quoque 7. & fecit 21. Ergo ex eâdem, ita se habet 3. ad 7. vt 9. ad 21. Quia ergo est 3. ad 4. vt 9. ad 12. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. simul, vt 9. ad 9. & 12. simul; sed eadem proportio est 3. ad 3. & 4. simul, quæ 3. ad 7. & eadem proportio, quæ est 3. ad 7. vt dixi est 9. ad 21. Ergo eadem proportio erit 9. ad 9. & 12., quæ 9. ad 21. quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æquales inter se 9. & 12. simul, ac 21. quod eidem 9. eandem dicant proportionem: hæc propos. ostenditur de lineis propos. 4. l. 2.

COROLLARIVM I.

* HInc educitur; quod idem dicendum de alia parte. Nam totus 7. multiplicatus per 4. nempe 28. æquabitur quadrato ipsius 4. nempe numero 16. & plano partium hoc est, numero 12. In quo considerandum est, quod partiũ numerus est in vtroque idem, nempe 12. quoniam partes sunt ædem 3. & 4. quæ se inuicem multiplicant.

COROLLARIVM II.

* HInc etiam est, quòd si assumatur aliquis alius numerus præter partes, & ipsæ partes; totumque multiplicetur; planus numerus partium, per illum, alium numerum multiplicatus æquabitur totius plano ex eo alio numero consurgente; Sic 3. & 4. partes numeri 7. si multiplicentur per 5. alium numerum, dabunt planos numeros 15. & 20. simul æquales plano 35. ex 5. per 7. genito: Ratio verò est eadem: Nam ita est 15. ad 20. vt 3. ad 4. ob numerum 5. multiplicantem & 15. ad 35. vt 3. ad 7. ob eundem 5. multiplicantem ex 17. septimi. Quaderè, si est 15. ad 20. vt 3. ad 4. erit etiam componendo 15. ad 15., & 20. simul; vt 3. ad 3. & 4. simul; sed 3. ad 3. & 4 simul est eadem, quam 3. ad 7. & 3. ad 7. eadem, quæ 15. ad 35. vt dixi. Ergo proportio 15. ad 15. & 20. simul erit eadem, quæ 15. ad 35. Ideoque ex prop. 9. lib. 5. æquales erunt numeri 15. & 20. simul, ac 35. cum ad eosdem, 15. numerus eandem dicat proportionem. Hoc etiam ostenditur de lineis lib. 2. propos. 4.

COROLLARIVM III.

ELlicito. Quod etiam si numerus in plures partes, quam 2. secetur, idem tamen erit, vt si 7. secetur in 3. 2. & 2. Nam totus numerus per aliquam partem V. g. 3. vel aliquem alium numerum multiplicatus, æquabitur singulis partibus per eundem numerum multiplicatis; & simul sumptis eadem ratione, sic si 3. 2. & 2. multiplicetur per 3. hi facient 9. 6. & 6. qui æquabunt 21. numerum consurgentem ex 7. in 3. ducto.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si numerus in duas partes diuidatur, plani duo sub partibus, & toto comprehensi æquantur quadrato totius.

SIt numerus 7. diuisus in duas partes 3. & 4. & ex toto 7. & 3. fiat planus 21. & ex 7. & 4. planus 28. Dico *hæc duo plana æquari totius quadrato* 49.

7
3 7 4
21 49 28

* PRobatur. Nam quia 7. multiplicat 7. & 3. & facit 49. & 21. erit 3. ad 7. vt 21. ad 49. Sic quia multiplicat se, & 4. erit 4. ad 7. vt 28. ad 49. ex propos. 17. l. oct. cumque 7. multiplicet 3. & 4. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 21. ad 28. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. simul, quæ 21. ad 21. & 28. simul. Sed proportio 3. ad 3. & 4. simul est eadem; quæ 3. ad 7. & 3. ad 7. quæ 21. ad 49. ergo ita erit 21. ad 21. & 28. simul vt 21. ad 49. quare ex propos. 9. l. 5. erunt æquales 21. & 28. simul ipsi 49. Id ostend. propos. 3. l. 2. de lineis.

THEOR. III. PROPOS. III.

Duo quadrata, cum duobus numeris planis, ex lateribus eorum effecta, æquantur quadrato, ex duobus lateribus tanquam vno assumpta.

* SIt quadratum 16. & quadratum 9. quorum latera sint 4. & 3. & duo plani ex eorum lateribus 4. & 3. effecti, qui erunt 12. & 12.

3 4
21 7 28
9 12 12 16
49

Dico, quod hæc omnia simul æquantur quadrato totius numeri 3. & 4. vt vno latere assumpti nempe 7. cuius quadratum est 49.

Probatur. Duo plani ex toto 7. & partibus 3. & 4. producti nempe 21. & 28. ex præced. æquantur quadrato totius 7. Sed ex 1. huius planus numerus sub toto comprehensus, & parte, vt 21 & 28. æquatur quadrato ex parte illa comprehendẽte, & plano numero à partibus comprehenso, & ideo planũ 21. æquatur quadrato 9. ex 3 & plano numero 12. ex 3. & 4 multiplicatione effecto, sicut planus 28. æquatur quadrato 16. ex 4. & plano eidẽ 12. Ergo quadratum 16. & 9. cum planis numeris 12. & 12. ex lateribus eorum 3. & 4. æquabunt quadratum ex ijs lateribus, vt vno hoc est 7. quod est 49 cùm æquent planos 21. & 28 æquantes simul quadratum totius 7. Ostenditur de lineis propos. 6.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si numerus bifariam sectus sit, & quidam numerus ei additus. Quadratum dimidij cum numero adiecto æquat planum numerum ex toto, & adiecto per adiectum multiplicato, & quadratum dimidij.

8
4 4 3

* SIt numerus 8. & diuidatur bifariam, & sit 4. addaturque 3. & sint 7. & 3. cum 8 toto sint 11. ex quo 11. toto cũ addito 3. fiat planus numerus 33. Inde ex dimidio 4. fiat quadratum 16. *Dico, quod planus numerus* 33. *& quadratum* 16. *æquant* 49. *quadratum lateris* 7. *dimidij 4 cum adiecto* 3. Quod, & ostenditur propos. 8. de lineis l. 2.

Probatur. Nam planus ex 11. & 3. æquat ex Coroll. 3. propos. 1. duos planos sub medietate duplici 4. & 4. & 3. adiectâ comprehensos; nempe 12. & 12. & quadratum ex 3. nempe 9. Si ergo addamus etiam quadratum ex 4. hoc est 16. habebimus duos planos numeros ex lateribus quadratorum, & duo quadrata. Sed duo quadrata, & duo plani ex lateribus quadratorum æquant quadratum ex lateribus pro vno latere sumptis ex 3. propof. huius. Quare æquabunt quadratum 49. ex dimidio cum adiecto numero: Siquidem duo plani ex lateribus, non ex toto numero, & vnico 8. sed ex dimidio, eius facti sunt, vt duo esse possint, & ideo hi plani obtinent latera ex dimidio numero 4. pro latere, & pro alio ex adiecto 3. constituta, quæ simul addita vt sint 7. faciunt quadratum 49. cuī duo quadrata 16. & 9. & duo plani ex ipsorum lateribus 12. & 12. æquantur ex propof. 3. huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si numerus secetur in partes æquales, & inæquales numerus planus sub partibus inæqualibus contentus vna cum quadrato, quo maior pars dimidiam superat, æquatur quadrato, qui ex dimidio enascitur.

*SIt numerus 10. & secetur in partes equales in 5. & 5. & inequales in 7. & 3. & numerus, quo 7. maior pars superat dimidiam 5. fit 2. *Dico, quod planus numerus 21. ex 3 in 7. productus* vnà cum quadrato ex 2. hoc est 4. æquat quadratum 25. ex medietate numeri 10. hoc est 5.

* Probatur. Quia ex 1. huius Coroll. 3. planus numerus 21. ex 3. & 7. inæqualibus partibus, æquat duos planos numeros, ex 2. & 2. per 3. genitos, nempe 6. & 6. & quadratum 9. ex 3. prodietem, si ergo addamus quadratum 4. ex 2. erunt duo quadrata 4. & 9. cum duobus planis 6. & 6. æqualia quadrato 25. ex eorum lateribus consurgente, vt vno sumpto ex prop. 3. quæ sunt 2. & 3. & faciunt 5. Quod verò planus numerus 21. ex 3. & 7. genitus duos planos 6 & 6. cum quadrato 9. ex 3. exequet; patet ex Coroll. 3. propof. 1. nam 7. in tot partes diuidi potest, hoc est in partem, quâ medietatem superat 2. & in partem, qua medietas superat minorem 2. & in ipsam minorem 3. siquidem tanto deficit minor pars à medietate, quanto maior super medietatem augescit, & 7. maior est medietate numero 2. sicut 3. est minor medietate eodem numero 2. Ostenditur prop. 7. lib. 2. de lineis.

EXPENSIO II.

De Planorum, Solidorum, Quadratorum, & Cuborum generatione.

MVltiplicatio est illa, quæ generat numeros planos, vel solidos. Vnde hic quæritur; quinam numeri inuicem multiplicati, Quadratos, & Cubos, seu Planos, Solidosque numeros efficere possint.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Si duo plani similes numeri multiplicantes se mutuò, fecerint quendam numerus productus Quadratus erit.

SInt duo plani similes 6. & 24. qui se mutuò multiplicent, & generent 144. Dico *hunc numerum esse quadratum*. Quod, vt ostendatur, multiplicandus est numerus 6. in se, & faciet 36. & sic 6. numerus multiplicabit se, & numerum 24. vnde ex propof. 17. ita erunt multiplicantes 6. ad 24. vt geniti 36. ad 144. sed ex propof. 11. lib. 8. inter planos similes vnus medius proportionalis cadit numerus V. g. inter 6. & 24. cadit 12. Ergo etiam ex propof. 8. lib. 8. cadet inter genitos, & eâdem proportione gaudentes 36. & 144. Cadat igitur, & sit 72. Cum igitur 36. 72. & 144. sint tres continuè proportionales, primusque 36. sit quadratus ex propof. 20. lib. 8. & secundus 144. quadratus erit, quod oportebat ostendere.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Si duo numeri se se mutuò multiplicantes faciant quadratum, similes plani erunt.

SInt 6. & 24. qui faciant se inuicem multiplicantes quadratum 144. Dico, *quod isti numeri 6. & 24. similes plani erunt*. Nam primus 6. multiplicet se, & faciat 36. Erunt duo numeri quadrati 144. & 36. inter quos interueniet aliquis proportionalis numerus medius ex propof. 18. l. 8. Et quia 6. multiplicando se, & 24. facit 36. & 144. erunt in eadem proportione geniti, & generantes 6. & 24. Vnde etiam inter istos cadet ex propof. 8. lib. 8. aliquis proportionalis numerus 12. Quapropter ex propof. 13. erunt similes plani 6. & 24.

COROLLARIVM I.

ELlicitur. Quod si duo numeri quadrati etiam æquales faciant quendam, iste factus erit quadratus. Quòd duo quadrati facientes sint plani similes, eo quia quadrati ponantur, vt diximus in ostensione propof. 18. l. 8.

COROLLARIVM II.

ELlicitur quoque quod, si quis numerus quadratus alium multiplicans faciat quadratum, iste alius multiplicatus quadratus erit. Erunt enim ex hac 7. propof. plani similes. Vnde inter eos medius proportionalis cadet aliquis numerus; quà ex re ex propof 20. lib. 8. si primus sit quadratus, & secundus quadratus erit.

THEOR. III. PROP. VIII.

Si compositus numerus aliquem multiplicans creet aliquem alium, productus solidus erit.

NVmerus compositus 6. multiplicans quemlibet alium numerum 4. faciet alium aliquem puta 24. *Dico genitum 24. esse Solidum*.

Probatur numerus 6. dicitur compositus. Itaq; metietur eum aliquis numerus præter vnitatem. Sit ergo 2. qui metiatur 6. per 3. idest ter replicatus. Propterea que 2. multiplicans 3. facit 6. & 6. multiplicans 4. procreat 24. cùm ergo 24. consurgat à multiplicatione trium numerorum 2. 3. 4. ex definitione 4. lib. 8. factus 24. solidus numerus erit.

THEOR.

THEOR. IV. PROP. IX.

Si Cubus numerus se ipsum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

NVmerus Cubus 64. se multiplicando procreet aliquem nempe 4096. Dico *hunc quoque esse Cubum*. Repertum sit latus Cubi 64. quod est 4. & ex hoc 4. in se fiat 16. & deinde 16. multiplicetur per 4. erunt 64.

Progress. 1. Idem 4. se multiplicando fecit 16. & multiplicando 16. generauit 64. Quapropter ex prop. 17. sept. eademproportio erit inter 4. & 16. quæ est inter 16. & 64. Sed vt 4. metitur 16. per 4. & 16. 64. ita vnitas metitur 4. per 4. idest vnitas quater accepta facit 4. sicut 4. quater acceptus componit numerum 16. & 16. numerum 64. Quamobrem eadem pars erit vnitas numeri 4. quæ 4. numeri 16. & quæ 16. numeri 64. Vnde inter vnitatem, & numerum 64. duo medij proportionales cadunt numeri 4. & 16.

Progress. 2. Considerandum verò est, esse ita vnitatem ad 64. vt 64. ad 4096. Quoniã 64. multiplicando se, idest sexaginta quatuor vicibus acceptus generat 4096. sicut vnitas 64. vicibus accepta facit 64. Quare eadem proportio erit inter vnitatem, & 64. quæ est inter 64. & 4096.

Sed ex primo prog. inter vnitatem, & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur; Ergo quoque ex propof. 8. lib. oct. cadent inter 64. & 4096. etiam duo proportionales numeri intermedij. Quaderé ex prop. 21. l. oct. cum 64. sit Cubus, talis quoque erit numerus 4096.

THEOR. V. PROPOS. X.

Si Cubus numerus Cubum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

SIt Cubus 8. qui multiplicet Cubum 27. & faciat 216. Dico *hunc quoque esse Cubum*.

Probatur. Nam si 8. multiplicet se productus 64. cubus erit ex præced. & quia 8. multiplicauit duos numeros 8. & 27. & generauit 64. & 216. eadem proportio erit ex 17. l. sept. inter genitos 64. & 216. quæ est inter generantes 8. & 27. sed inter istos duo medij proportionales cadunt numeri, cùm sint cubi ex propof. 19. l. oct. Ergo ex propof. 8. inter 64. & 216. Quapropter ex prop. 21. l. oct. cum primus 64. ex præced. sit Cubus etiam secundus 216. Cubus erit.

THEOR. VI. PROP. XI.

Si Cubus numerum aliquem multiplicans faciat Cubum, ille multiplicatus Cubus erit.

CVbus numerus 27. multiplicans aliquem v. g. 8. faciat Cubum 216. Dico 8. *quoque Cubum esse*.

Probatur eodem argumenti methodo: Nam 27. multiplicet se, & faciat 729. Itaque, quia 27. multiplicauit 27. & 8. generantes, & protulit genitos 729. & 216. eadem proportio erit ex propof. 17. sept. inter 27. & 8. quæ reperitur inter 729. & 216. Verùm 729. & 216. sunt Cubi; hic quidem ex hypothesi, ille autem ex propof. 9. & hac de causa ex propof. 19. lib. oct. inter eos duo medij proportionales interponuntur. Ergo etiam ex 8. lib. 8. inter 27. & 8. Vnde ex propof. 21. l. 8. cum primus 27. ex hypothesi sit cubus, etiam secundus 8. cubus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XII.

Si numerus quispiam se multiplicet, & genitus sit Cubus, generans quoque Cubus erit.

SI 64. genitus ex multiplicatione 8. in se Cubus est. Dico, *& numerum 8. qui fuit in se multiplicatus Cubum esse*.

Multiplicetur rursus 64. per 8. & fiant 512. qui cubus erit; quia est productus ex multiplicatione numeri 8. in se, rursus numeri 8. in productum 64. ex sui multiplicatione exortum. Qua ex re, cùm numerus 64. numerum aliquem multiplicans generet Cubum, multiplicatus 8. ex præc. propof. Cubus erit.

EXPENSIO III.

De numeris quadratis inueniendis.

AD libri 9. demonstrandas propositiones ista omninò Expensio est necessaria, cùm enim ibi agatur de inuentione irrationalium multatum, inter eas quædam sunt, quarum inuentio in inuentione numerorum, qui cum alijs numeris, vel quadratum efficiant, vel etiam non efficiant, prout res postulauerit, consistit.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Duos numoros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus quoque sit.

EX propof. 17. lib. 8. reperiantur duo numeri plani similes, quorum vterque, vel par sit, vel impar V. g. 10. & 40. detrahaturque minor à maiore, & reliquus par erit, nam etiam detracto impare, ab impari residuus numerus par reperitur, quia auferendo impar aufertur differentia vnitatis, quà differebat maior à pari, & sic relinquitur par. Quare cum residuum sit par s. 30. diuidatur per medium, vt fit 15. Si ergo 40. planus numerus maior multiplicet minorem planum 10. fiet numerus quadratus 400. ex 6. propof. h. Deinde multiplicetur 15. in se, medietas residui, & fiet quadratus 225. Dico igitur, quod si duo hęc quadrata addantur simul, *Quod fiet numerus quadratus, qualis est 625.*

40. ablatus 10. Resid. 30. med. 15.
10. in 40. dat 400. 15. in 15. dat 225.
Additi 225. & 400. Sunt 625. quad.
cuius radix 25. idest 10. & 15.

Prob. ex propof. 4. huius. Nam ibi ostendimus, quod si aliquis numerus dimidius sit, cui addatur aliquis numerus, & summa in se multiplicata faciat quadratum, quod hoc erit æquale quaquadrato ex ipsius dimidio, sine adiectione sumpto, & plano numero consurgenti ex summa

adiecti,

addiecti, & totius pro vno latere, & adiecti tantùm pro alio.

Sic itaque hìc fecimus. Sumpsimus numerum 30. addidimusque 10. planum numerum, & fecimus planum 40. constitutumque est ex 10. ipso adiecto, & multiplicato in 40. (nempe in totum 30. cum adiecto 10.) numerum 400. Deinde assumpta est medietas 15. numeri 30. & factum est quadratum 225. Quare, si addamus 400. & 225. fiet quadratus numerus; Erit enim ille numerus æqualis quadrato ex medietatis 15. & adiecti 10. summâ 25. in se multiplidata consurgens, qui est 625. Numeri verò coniuncti simul 400. & 225. sunt quadrati, & 225. quidem ex effectione, & 400. ex 6. huius; quòd duos numeros ex quorum multiplicatione generatur, assumpserimus planos similes.

PROB. II. PROPOS. XIV.

Numerum quadratum inuenire, qui subductus ab altero quadrato, relinquat quoque quadratum numerum.

Construantur omnia, vt supra, nimirum assumantur duo plani similes 10. & 40. pares ambo, vel ambo impares, & subducatur alter 10. ab altero 40. & residuum 30. bifariam secetur, & sit medietas 15. & habebimus duos numeros requisitos 15. nimirum medietas, & 25. eadem numeri 30. medietas cum addito 10. multiplicentur in se numeri 15. & 25. & sint 225. & 625. geniti. Dico, *quòd si minor 225. subducatur à maiore 625. relinquet 400. qui est numerus quadratus.*

Prob. Nam subducto quadrato 225. à quadrato 625. reliquitur planus numerus ex toto 30. cũ addito 10. & additi 10. multiplicatione generatus f. 400. ex præc. Sed totus, cum addito nempe 40. & additus 10. fuerunt duo plani similes ex constructione, ergo planus numerus ex eorum multiplicatione progeneratus erit quadratus ex 6. huius.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Inuenire duos numeros quadratos, quorum excessus non sit quadratus.

Elige duos planos non similes, V. g. 8. & 30. nempe totum 22. cum addito 8. qui multiplicati inuicem dabunt numerum planum non quadratum 240. medietas verò numeri 22. nempe 11. multiplicetur in se, fiet numerus quadratus 121. qui simul additi, vt sint 361. ex propos. 7. huius, erunt æquales quadrato ex medietate 11. & addito 8. nempe numero 19. quod quadratum est 361. Ergo 361. & 121. erunt duo quadrati numeri, quorum minor subductus à maiore relinquet pro excessu numerum non quadratum 240.

PROBL. IV. PROPOS. XVI.

Duos numeros quadratos inuenire ita, vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

18. Ablat. 8. Resid. 10. Med. 5.
8. in 18. dat 144. * 5. in 5. dat 25.
Additi 144. & 25. dant Quad. 169.
Cuius radix 13. idest 5. & 8.

Præceptum 1. Eadem constructio fiat, quæ priùs & assumptis duobus planis similibus paribus, vel imparibus, vt 8. & 18. quorum latera sunt proportinoalia 2. & 4. primi, & 3. atq; 6. secundi. Subducaturq; alter ab altero, & residuetur 10. qui diuidatur per medium; & sit medietas numerus 5. Eritque quadratum 25. ex multiplicatione numeri 5. in se, simulque planus numerus 144. ex 8. in 18. æqualis quadrato ex summa 13. numerorum 5. & 8. qui est 169. quadratus.

Auferatur deinde ex latere 5. vnitas, & relinquuntur 4. fiatque quadratum A 16. Dico, *quod hic numerus 16. compositus cum quadrato 144. non facit numerum quadratum, nimirum eorum quadratorum summam 160. non esse quadratum.*

Totum D 16. Ablat. 8. B. Resid. 8. E Med. 4.
B 8. in D 16. dat G 128. * 4. in 4. dat 16. Quad.
Additi 128. & 16. æquant Quad. 144. C.
Cuius Radix 12. idest B 8. & 4.

Præceptum 2. probationis gratiâ. Assumatur duplum numeri 4. & fiant 8. & iuxta constructionem præcedentem adiciatur numerus 8. vt priùs, & fiat totum D 16. Itaque habemus numerum totum 16. D. idest B 8. cum adiecto 8. E. Diuidantur per medium B 8. & sit 4. Deinde multiplicetur 4. in se, & fit quadratus 16. & multiplicetur postea totus numerus B 8. & E 8. adiectus in vnam summam redacti hoc est 16. D. per ipsum E 8. adiectum, & erunt G 128. qui duo numeri quadratus 16. & 128. planus numerus ex 6. huius æquabunt quadratum 144. C numerum, ex summa dimidij 4. & adiecti E 8. nempe 12. se multiplicantis, qui quadratus numerus 144. C appelletur ob distinctionem quadrati item 144. prioris præcepti.

Itaque aduertendum est quadratum 16. coniunctum cum plano secundi præcepti G 128. minore, vtpote à minori latere 16. per multiplicationẽ 8. producto æquat quadratum C 144. & coniunctus cum plano maiore 144. primi præcepti effecto, qui à lateribus 8. & 18. prouenit æquat numerum 160.

Obseruandum quoque est, quod quadratum 144. C & anteced. præc. 169. habent latera, quæ sola vnitate differunt nimirum 12. & 13.

Prob. Nunc propos. Itaque numerus A 16. est quadratus, vtpote ex 2. præc. productus ex multiplicatione 4. in se, sic 144. quadratus est, quòd sit productus ex duobus numeris planis ex propos. 6. huius, qui simul additi faciunt numerum 160. non quadratum. Si enim numerus 160. quadratus, foret aut esset æqualis quadrato 169. prioris præcep. aut eo major. Seu esset æqualis quadrato posterioris præcepti C 144. aut ipso minor, aut esset quadratum quoddam inter hos numeros quadratos medium: sed neutrum ex istis esse potest; Ergo non erit quadratum.

Singulæ itaq; propositiones ostenduntur. Non potest esse æqualis quadrato 169. vel ipso maior, eo quod ex 1. præcept. planum ex lateribus 8. & 18. consurgens 144. & quadratum 25. nascens ex latere 5. ei sit æquale. Hic verò numerus 160. generatus est à dicto plano, sed quadrato 16. cuius latus est tantummodo 4. & ideo minor, quam quadratus 25. cuius latus est 5.

Non potest esse minor hic numerus 160. quadrato C 144. nec ei æqualis; Eo quia huic numero est æquale planum 128. à lateribus 8. & 16. exurgens ex posteriori præcept. vna cum quadrato 16. cuius latus est 4. hic verò numerus 160. nascitur à dicto

à dicto quadrato 16. Sed plano 144. cuius latera sunt maiora 8. & 18. & ideo etiam ipsum 160. necesse est, quòd sit maius.

Tandem. Non potest esse quid medium. Quoniam si esset quadratum medium inter quadrata 169. prioris præcepti, & quadratum C 144. posterioris præcepti consequeretur latera media inter latus huius, & latus alterius. Sed id non potest esse; Idcirco neque potest esse quadratus numerus medius. Quod ostenditur: Nam vt præaduertimus, latera horum duorum quadratorum 169. & C 144. sunt 13. & 12. qui sola vnitate ex constructione differunt: Vnde nullus numerus inter eos intercipi potest, ex quo consurgat tanquam à latere medio quadratum 160. Quamobrem non erit quadratum.

COROLLARIVM

Educitur hinc compositum hoc modo ad illos duos quadratos non habere proportionem, quam quadratus ad quadratum; Quia ex propos. 22. lib. 8. cùm componentes sint quadrati, ob proportionem eam quadrati ad quadratum ipse quoque compositus quadratus esset.

PROBL. V. PROPOS. XVII.

Numeros non quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis sit quadratus.

Secetur numerus quadratus in duas partes non quadratas, & erit factum, quod quæris; siquidem illæ duæ partes non quadratæ erunt tales, quæ compositæ rursùs numerum quadratum efficient.

PROBL. VI. PROPOS. XVIII.

Inuenire numerum, qui ad numerum quadratum, & ad alterum non quadratum, non habeat proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Numero non quadrato addenda est vnitas, ita tamen, vt per hanc vnitatis additionem nõ reddatur numerus quadratus, vt si sint 4. quadratus, & 5. non quadratus, adde vnitatem numero 5. & fiant 6. & quia 6. non est quadratus habebis numerum, quem quæris: si quidem neque ad 5. neque ad 4. proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. At si daretur numerus talis, cui addita vnitas faceret quadratum, vt 8. cui additus 1. facit 9. tunc deme vnitatem, vt sit 7. & obtinebis, quod desideras. Dico itaque; quod iste numerus 6. aut 7. proportionem non habet cum numero 4. & 5. quam quadratus ad *quadratum numerum*.

Nam talem non habet respectu numeri non quadrati; quoniam non potest cadere inter eos aliquis numerus, qui sit medius proportionalis; cùm sola vnitate differant; & ideo nullus numerus inter eos cadere possit; sed nec cùm numero quadrato 4. hac de causa; quod si cõsequeretur eam proportionem, cùm primus 4. sit quadratus ex 22. propos. lib. 8. esset quoque quadratus ipse, seu 6. seu 7.

PROBL. VII. PROPOS. XIX.

Duos numeros non quadratos inuenire, vt compositus ex ipsis non sit quadratus, neque cum ipsis proportionem dicat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Id faciliter fit, si diuidatur numerus quilibet non quadratus, vt 14. in duos numeros inter se primos 3. & 11. & erunt numeri quæsiti. Nam cũ primi sint inter se proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum numerum, & cum numerus 14. ex quo per diuisionem euenere non sit quadratus; neque ipsi sunt; aut possunt esse quadrati; Ideoq; nec ad eos habere proportionem quadrati ad quadratum.

TRACTATVS XII.

IN X. LIBRVM EVCLIDIS

De Lineis irrationalibus.

VT Tractatus linearum irrationalium intelligeretur, necesse fuit priùs aliqua saltem de numeris cognoscere. Vnde tres de numeris libri huic libro præmittendi fuerunt; nulloque modo fieri potuit, vt immediatè hæc tractatio succederet, aut sexto libro, aut præcedentibus. Cognitio verò harum linearum est etiam elementaris. Siquidem cū sint complurimę magnitudines latera irrationabilia obtinentes, tàm planę, quàm solidæ; multoties, quis errorem acciperet, dum putat lineam, seu latus alicuius figuræ se posse numeris exprimere, quòd inexprimibile est; & quia insuper ostendit Euclides spatia quædam æqualia quadratis irrationabilibus, V. g. parallelogramma applicata lineæ rationali alterum latus irrationale efficere talis, vel talis rationis: nos illam cognitionem tanquam minus necessariam ab elementis ablegauimus sola generica cognitione contenti.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam ipsum de incommensurabilibus librum aggrediamur, quædam principia ad eum spectantia præcognoscere oportet: hæc autem sunt.

DEFINITIO I.

Commensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

Sint lineæ altera quatuor palmorum, altera septem palmorum; quia palmus metitur vtrasque commensurabiles appellantur.

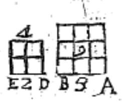
DEFINITIO II.

Incommensurabiles verò, quarum nulla communis mensura contigit reperiri. Ergo duę lineæ tales essent, quarū vna sex palmos contineret, altera verò, nec palmo ex æquo mensurari posset quantumcumque multiplicatis ipsius partibus aliquotis, nec semipalmo, nec quarta palmi, nec septima, nec octaua, nec decima, nec quacunque alia; illa linea irrationalis respectu lineæ sex palmorum appellatur; cum tamen respectu alterius lineæ rationalis esse queat. Vnde irrationabilitas alicuius lineæ, seu quantitatis semper respectiuè sumitur.

DEFINITIO III.

Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt; cum quadrata earum idem planum metitur.

Sint duo quadrata primum AB, quod capiat nouem quadrata, alterum E D quatuor, hæc quadrata dicentur commensurabilia, & latera eorum, potentiâ commensurabilia. Sunt verò lineæ, vt infra ostendam, quæ longitudine, & potentiâ commensurabiles sunt; aliæ solum potentiâ, quòd quidem earum quadrata aliquâ communi mensurâ dimetiri possint; sed non ipsę lineæ, & istæ vocantur potentiâ tantùm commensurabiles.



DEFINITIO IV.

Incommensurabiles lineæ potentia sunt, cum quadrata earum nulla communi plana mensura mensurantur.

DEFINITIO V.

Alicui lineæ, aliquæ erunt longitudine commensurabiles; aliæ potentia tantùm; aliæ erunt quoque incommensurabiles omninò.

Hæc itaque linea, cui aliæ secundùm commensurabilitatem, & incommensurabilitatem comparantur, dicenda est *Rationalis*. Itaque tota rationalitas, & irrationalitas sumitur relatiuè ad aliquam lineam propositam; cùm alioquì etiam irrationales illi propositæ, alijs lineis ab illa diuersis, rationales dici possint.

DEFINITIO VI.

Et huic commensurabiles, siue longitudine, siue potentia tantùm, Rationales dicantur.

DE-

DEFINITIO VII.

Vt illi omninò incommensurabiles, irrationales. Nimirum tum potentiâ, tum longitudine.

DEFINITIO VIII.

Et quadratum, quod à proposita recta linea fit, dicatur Rationale.

Quemadmodum linea dicitur Rationalis, quæ notæ quantitatis est, sic quadratum ab ea descriptum rationale dicitur, & respectu eius cæteræ planities commensurabiles, seu incommensurabiles dicuntur, si nulla planitie, quæ communis mensura sit tum propositæ planitiei, tum alterius reperiatur.

DEFINITIO IX.

Et quadrata huic commensurabilia rationalia.

DEFINITIO X.

Et huic incommensurabilia pariter irrationalia appellantur, siue sint quadrata, siue alicuius alterius figuræ.

DEFINITIO XI.

Recta verò, quæ illis quadratis irrationalibus latera sunt, vel quadratis quibuscumque æqualibus spatio irrationali cuiuscumque figuræ sit, illæ dicantur irrationales.

Si spatia itaqne incommensurabilia fuerint, quadrata: latus illorum irrationalis est linea, si quadrata non fuerint, tunc illis figuris irrationalibus quadratum æquale, habebit latus, quod linea irrationalis appellanda est.

AXIOMATA I.

Magnitudo quamcumque magnitudinem mensurans, etiam compositam ex ipsis magnitudinibus mensuratis, mensurat.

II.

Magnitudo mensurans, aliquam, mensurat quoque omnem aliam, quàm illa mensurata mensurat.

III.

Magnitudo mensurans totam, & ablatam; mensurat quoque reliquam magnitudinem.

EXPENSIO II.

De commensurabilibus quantitatibus.

VT irrationales quantitates euidentiùs innotescant, prius de rationabilibus, & earum commensurabilitate agendum, & ad numeros habitudine. Quare id præsenti expensione præstabimus.

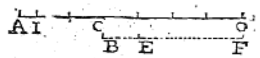
PROBL. I. PROP. I. Euc. 2.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram reperire.

DVÆ magnitudines dentur, quæ sint commensurabiles, quarum oporteat maximam mensuram reperire.

Linea detur punctata B F, & alia continua linea O A: Detrahaturque minor punctata à maiore, quoties fieri potest, & remaneat AC, quæ iterum subducatur à punctata FB, quoties fieri potest, vel totam auferet, & sic A C, erit maxima communis mensura, vel non, sed remanebit aliquid s. EB: Hoc iterum subducatur ab AC, & remaneat IA: Iam tandem, cùm sit, commensurabilis, aliquod residuum adæquatè mensurabit præcedentē magnitudinem; Et sic *hec erit maxima communis mensura, quæ is est in datis lineis* I A, quæ mensurat EB diuidens eam in duas partes nihilo remanente.

Probatur primò, quòd IA metiatur vtramque. Nam I A metitur BE, sed BE metitur I C: Ergo, & IA metitur IC ex 3. Axiomate. Rursus IC metitur EF; Sed IA, vt modo probatum est, metitur IC; Ergo ex eodem principio metitur quoque IA partem EF; Sed metiebatur EB quoque alteram partem, ergo totam BF metitur. Sed hæc partem C O in linea continua metitur; Ergo, & IA metitur CO. Sed metiebatur etiam CI compartem, & IA se ipsam, quæ simul componunt totam AO. Ergo IA totam lineam continuam metitur; igitur AI totum BF, & totum AO metietur.



Probatur quoque, quòd sit maxima communis mensura: Nam si adesset alia maior: hæc metietur IA minorem, quòd fieri nequit; Nam metietur A O, & BF, hæc autem metitur CO, ergo hæc assignata metiretur C O; sed metiebatur ex supposito totam AO; Ergo, & residuum CA ex 2. princ. Sed residuū CA s. I A, & IC mensurat FE; Ergo hæc assignata metiretur quoque EF; quare, & residuum EB; sed E B mensurabat CI, Igitur EB metiretur CI; quare, & residuum IA; ergo illa maior, quæ assignaretur, mensura metiretur tandem IA minorem, quod esse nequit.

COROLLARIVM

HInc patet. Quod magnitudo aliqua metiens duas magnitudines, metitur etiam earum communem mensuram: Nam assignata illa maior, ad hoc, vt ambas totas posset mensurare, debebat, & earum maximam communem mensuram tandem mensurare; vt in demonstratione ostensum fuit.

Non ponimus hic duas primas propositiones Euclidis: Quoniam sine ipsis possumus omnia ostendere, quæ in hoc libro assumpsimus ostendenda: & alioquin in secunda proposit. ponat id, quod fieri posse, aliqui dubitent, nempe perpetuam detractionem ab aliqua quantitate. Illam autem ponimus alibi ex Ambrosio à Sancto Vincentio

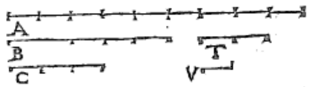
centio

centio efficatiùs demonstratam Tract. de progressionibus linearum.

PROBL. II. PROPOS. II.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

SInt datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C. Sitq; ex preced. 1. propos. reperta maxima mensura duarum A, & B, quæ sit T, si ergo T metiatur quoque C; habebimus maximam mensuram omnium trium A, B, & C; quòd si non metiatur saltem B, & T ex præced. Coroll. commensurabiles erunt, & dabitur aliqua magnitudo, quæ mensurabit A, B, & E cum sint commensurabiles; Quamobrem & mensurabit quoque T duarum A, & B maximam communem mensuram. Inueniatur ergo ex præced. propos. maxima mensura ipsarum C, & T, & sit V. Dico *magnitudinem V esse trium A, B, C maximam communem mensuram.*



Probatur, quod sit mensura: Nam V est mensura magnitudinis T, & C; Ergo ex 3. pron. & magnitudinum B, & A, quas T mensurat.

Probatur quoque: Quòd ea sit maxima; Nam assignata quædam V. g. palmus, vel quælibet alia; quæ maior dicatur, quam V. Mensurabit B, & A; Quare, & maximã earum mensuram T ex Coroll. præced. Metitur quoque C. Quare, & earum T, & C mensuram communem V. Ergo palmus maior, quam V, metiretur lineam V; quod fieri nequit.

COROLLARIVM

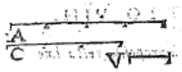
COlligitur hinc quoque; Quòd magnitudo metiens tres magnitudines, & earum maximam communem mensuram metitur. Nam palmus, si metiretur tres A, B, C, metiretur quoque mensuram communem V. Quod si darentur quatuor magnitudines. Repertâ trium ex preced. probl. communi mensurâ maximâ; deinde huius mensuræ repertæ, & quartæ maxima communis mensura reperiri deberet, quæ esset omnium quatuor maxima mensura communis, & sic de alijs pluribus in infinitum.

THOR. I. PROPOS. III. Eucl. 5.

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum: Et si hanc obtineant commensurabiles erunt.

Sicut incommensurabiles proportionem non habent, quam numerus ad numerum; Et si hanc non habeant, incommensurabiles erunt.

PRobatur prima pars. Nam si A, & C sunt commensurabiles. Inueniatur earum communis mensura V, Quotiesque ea repetita metitur A toties vnitas repetatur, & faciat numerum æqualem numero V. g. 4. partium; idemq; fiat mensurando C, & faciat 3. Tot itaque mensuras continet A, quot vnitates sunt in numero 4. & tot C, quot vnitates in numero 3. Cum ergo æquè vnitas mensuret



numerum 4. & 3. vt V metitur A, & C proportionem eandem habebit A ad C, quam 4. ad 3. & ideo, quam numerus ad numerum.

Probatur secunda pars. Nam si duæ magnitudines A, & C, proportionem habeant, quam 4. numerus ad numerum 3. quot vnitates sunt in 4. in tot partes æquales sit diuisa magnitudo A, quarum vna sit V; Erit itaque magnitudo A ad V, vt numerus 4. ad vnitatem; Sed vt 4. ad 3. ita ponitur A ad C. Ergo C tot partes obtinebit ex ijs, quibus constat A, nempe ex partibus V, quot vnitates sunt in 3. Nam mensura communis mensurans 4. & 3. iuxta quam proportionem dicunt, est vnitas. Ergo etiam erit V communis mensura, iuxta quam A, & C proportionem dicunt.

Probatur tertia pars. Nam, si aliquæ quantitates, quæ dicuntur incommensurabiles, proportionem haberent, quam numerus ad numerum ex probatione secundæ partis, commensurabiles essent.

Probatur quarta pars. Nam si proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, & tamen commensurabiles credantur; ex primæ partis probatione habebunt quoq; proportionem, quam numerus ad numerum contra Hypothesim.

THEOR. II. PROPOS. IV. Eu. 9.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionem habent, quam quadratus ad quadratum numerum.

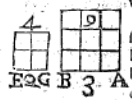
Et quadrata proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum & latera habebunt longitudine, commensurabilia.

Quæ verò à rectis lineis longitudine non commensurabilibus fiunt quadrata, non habent inuicem proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sicut quadrata proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nec latera habebunt longitudine commensurabilia.

PRobatur prima pars; Nam lineæ commensurabiles proportionem habent, quam numeri: Sed ex 18. lib. 8. numerorum quadrata sunt in duplicata proportione laterum. Sic quoque linearum quadrata sunt in duplicata ratione suorum laterum ex 20. sexti libri. Ergo quadrata linearum, & quadrata numerorum sunt in duplicata proportione laterum: Quare sunt in simili proportione, nempe duplicata laterum suorum.

Probatur secunda pars. Nam ex ijsdem citatis propositionibus est quadratum numerorum, sicut & linearum in duplicata proportione laterum: Sed numerorum quadratorum latera sunt numeris exprimibilia; Ergo, & partes linearum, quæ latera ijs quadratis contexunt: vt G E, & A B tales erunt.



Probatur tertia pars. Nam si lineæ sunt incommensurabiles; quadrata earum non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Siquidem ex prima probatione quadrata, quæ proportionem obtinent, quam quadratus numerus ad quadratum, latera quoque obtinent longitudine commensurabilia; & ideo illæ lineæ contra Thesim essent commensurabiles.

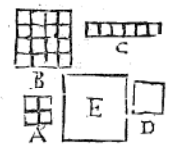
Probatur quoque 4. pars eodem tenore. Nam quadrata, quæ referuntur ad aliud vt quadratus numerus ad quadratum numerum, latera obtinent commensurabilia; & ideo illa quadrata, quæ non referuntur proportione eâ, vt quadratus numerus ad quadratum numerum longitudine latera incommensurabilia possidebunt. Aliòquin si latera essent commensurabilia, & ipsa quadrata se haberent, vt quadratus ad quadratum numerum contra hypothesim.

COROLLARIVM.

SEquitur. Lineas longitudine commensurabiles tales quoque esse potentiâ: Nam possunt constituere quadrata inuicem commensurabilia.

Lineas verò potentiâ commensurabiles; nimirum quorum quadrata commensurabilia sunt, posse quidem, & longitudine esse commensurabiles, sed non semper. Nam potest V. g. dari quadratum, quod sit tertia pars alterius, & proportionẽ habeat, quam numerus ad numerum, vt 1 ad 3: quorum latera erunt incommensurabilia omnino cum quadrata non sint inuicem, vt numerus quadratus ad quadratum. Si verò detur quadratum, quòd ad aliud proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, illud semper ex propos. præced. habebit latera commensurabilia respectu alterius. Lineas verò longitudine incommensurabiles, quandoque esse, & potentiâ incommensurabiles, quandoque verò nequaquam: Quia eorum quadrata poterunt habere proportionem V. g. quod vnum sit duplum alterius, nimirum, quam numerus ad numerum, vt 4. ad 9. vel 10. ad 11. licet non eam, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quæ requiritur, vt etiam latera sint commensurabilia. Lineas verò incommensurabiles potentiâ, longitudine quoque semper esse incommensurabiles. Verùm dices. Cùm omnes numeri plani, & solidi proportionẽ consequantur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ex propos. 12. l. 8. vt 6. & 24. qui proportionem habent, quam 1. ad 4. vel 4. ad 16.

An hæc quadrata, quæ inuicem hanc proportionem dicunt, innitantur quoque lateribus longitudine commensurabilibus, & Resp. affirmatiuẽ; Licet enim non possent diuidi in eas partes, in quas latus quadrati 4. & 16. diuiditur: possent tamen diuidi in alias partes V. g. si latus quadrati 6. diuiditur in duas partes latus quadrati 24. posset diuidi in quatuor. Nam cum quadrata sint in duplicata proportione suorum laterũ, si se habent quadrata, vt 1 ad 4. latera erunt, vt 1 ad 2. & sicut latus sic, & quadrata ipsa poterant diuidi: vnum quidem in 4. alterum verò in 16. partes, non tamen commensurabiles illis, quæ 6. plana similia, & 24. constituant.



Sic si sit quadratum partium quatuor A, & aliud partium 16. vt B, & parallelogrammum 6. ex dictis partibus complectens; cui ex documentis primi libri fiat quadratum æquale D, & huic quadrato D fiat quadratum quadruplo maius, E Quadratum D erit 6. partium respectu quadrati A, & B, & parallelogrammi C, cum huic sit æquale, & quadratum E consequenter partium 24. & ideo latera horum quadratorum; si sumantur, vt constituta partibus 6. & 24 nullis numeris effari possunt, cùm non sint 6. & 24. numeri quadrati; Verùm absolutè, cùm ex alijs partibus quadrata D, & E constitui possint V. g. D ex 4. & E ex 16. erunt eorum latera commensurabilia. Vnde colligitur omne quadratum, quod proportionẽ obtineat, quam similes numeri plani, habere latera longitudine commensurabilia: Si quidem ex propos. 12. l. 8. omnes numeri similes proportionem inuicem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

EXPENSIO III.

De comparatione linearum rationalium, & irrationalium.

DOcet hæc expensio modum argumentandi in lineis rationalibus, & irrationalibus; & quomodo argumenta valeant, & deductiones de commensurabilibus, vel è contrà. Vnde sine hac expensione irrationales magnitudines impossibile est cognoscere in spetie.

THEOR. I. PROPOS. V.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & fundamentum primæ combinationis suo termino sit commensurabile; fundamentum quoque secundæ combinationis suo termino erit commensurabile, & si è contra fundamentum illud primæ suo termino sit incommensurabile; tale quoque erit fundamentum secundæ combinationis respectu sui termini.

SInt quatuor magnitudines proportionales, ita quod sit A ad B, vt C ad D; s. A fundamentum primæ combinationis sit ad suum terminum B, vt *fundamentum* C ad terminum D. Dico, *quod si fundamentum* A *commensuraretur termino* B; *fundamentum quoque alterum* C *suo termino* D *commensurabile esse*.

Probatur. Erit enim A ad B in proportione, vt numerus V.g. 2. ad numerum 4 ex propositione 3. huius, sed eandem proportionem dicit quoque C ad D; quare ex eadem propositione erit quoque commensurabilis C cum suo termino D, cum sit, vt A ad B, & ideo vt 2. ad 4. hoc est, vt numerus ad numerum.

Si verò sit incommensurabilis A fundamentum respectu termini B. Dico, *nec esse commensurabilis magnitudo; & fundamentum* C *respectu termini* D.

Probatur quoque ex eadem propositione sic. Nam si A est incommensurabilis ipsi B. Ergo non dicet proportionem, quam numerus ad numerum. Sed tali quoque in proportione est magnitudo C respectu magnitudinis D; ergo neque ipsa dicet proportionem, quam numerus ad numerum, ideoque incommensurabilis erit C ipsi D.

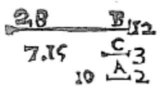
Hoc autem intelligitur non de commensurabilitate longitudinis tantùm, sed etiam potentiæ tantùm. Nam sit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus 2. ad numerum 4. quia ponitur A ad B, vt C ad D, & ideo ob similitudinem figurarum ex propositione 26. l. 6. vt quadratum ex A ad quadratum ex B, sic quadratum ex C ad quadratum ex D; erunt quoque, vt 2. ad 4. sic quadratum ex C ad quadratum ex D, quare ex quadratalinearum C, & D sint vt numerus ad numerum erunt ipsę potentiâ tantùm commensurabiles ex pr. 4. huius.

THEOR. II. PROPOS. VI. Euc. 12.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

DEtur magnitudo A, & B, quæ magnitudini C commensurabilis existat. Dico, *eas magnitudines inuicem esse commensurabiles*.

Probatur. Nam cum magnitudo A ponatur commensurabilis magnitudini C, erit, vt numerus V.g. 10. ad numerum 15. Et eadem ratione, quia magnitudo B ponitur quoque commensurabilis magnitudini eidem C, erit ad magnitudinem eam C vt numerus aliquis V.g. 28. ad 7. & ideo conuertendo C erit ad B, vt numerus 7. ad alium 28. Reperiantur itaque tres numeri continuè proportionales in datis rationibus 10 ad 15. & 7 ad 28, ex propositione 3. l. 8. & sint 2.3 12. ita quod linea A se habeat ad C, vt 2. ad 3 & C ad B, vt 3. ad 12.



Quo posito erit quoque ex æquo A ad B, vt 2. ad 12 & ideo A erit commensurabilis ipsi B, quia se geret A magnitudo ad B magnitudinem, vt numerus ad numerum.

Quod & intelligitur, si duæ A, & B sint solum commensurabiles, cuidam tertiæ potentiâ. Nam tunc erit V.g. quadratum ex A ad quadratum ex C, vt numerus 10. ad numerum 15. & quadratum ex B ad quadratum ex C, vt 28. ad 7. Repertis ergo tribus numeris 2.3. 12. in continua proportione ex 3. lib. erit quadratum ex A ad quadratum ex C, vt 2. ad 3. & quadratum ex C idem ad quadratum ex B, vt 3. ad 12. ideoque ex æquo erit, vt 2 ad 12. sic quadratum ex A ad quadratum ex B: cum quæ sit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum; ipsæ lineæ ex 4. huius erunt tantùm potentiâ commensurabiles.

THEOR. III. PROPOS. VII. Euc. 13.

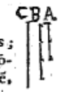
Sint duæ magnitudines; & altera quidem sit commensurabilis cuidam tertiæ, altera verò incommensurabilis; illæ magnitudines inuicem erunt incommensurabiles.

SIt A lineæ C commensurabilis, seu longitudine, seu potentiâ, & eidem C linea altera D incommensurabilis. Dico *eas nempe* A, & D *esse inuicem incommensurabiles*.

Probatur. Nam si D est commensurabilis magnitudini A; cum eidem quoque A ponatur commensurabilis C: Sequeretur, quòd, cùm D, & C vni tertiæ A sint cõmẽsurabiles ex propos. antec. contrà Thesim inuicem cõmensurationem haberent, seu longitudine, seu potentiâ.

THEOR. IV. PROPOS. VIII. Euc. 14.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles: altera verò ipsarum cuidam incommensurabilis sit, & reliqua eidem incommensurabilis erit.



PRob. eodem argumẽto, ac præcedens; quia magnitudo A potẽtiâ tantù, seu lõgitudine, & B cõmẽsurabiles essent inuicẽ, & tamen A existente cum aliâ magnitudine, quapiam C incommensurabili esset nihilominus magnitudo B eidem ipsi C commensurabilis.

Iam magnitudo A, & magnitudo C magnitudini B essent commensurabiles. Quamobrem ex proposit. 6. huius inter se quoque A, & C essent commensurabiles contra id, quod præsupponitur.

COROLLARIVM

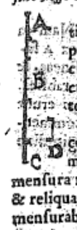
QVæ incommensurabilibus inuicem sunt commensurabiles, sunt inter se etiam incommensurabiles, quia eadem militat ratio de duabus, aut pluribus, & de vna, vt patet.

THEOR. V. PROPOS. IX. Eucl. 17.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique earum commensurabilis erit.

Quòd, si tota magnitudo vni earum commensurabilis sit, & magnitudines, quæ compositæ à principio fuerunt, commensurabiles erunt.

DEntur A B, & B C magnitudines, quæ componantur in B. Dico *eas, vt priùs, licet compositæ sint, esse commensurabiles*.



Nam eadem communis mensura D metitur vtrasque diuisas. Ergo etiam compositas metietur ex pronunciato 1. Quare cum diuisæ, & compositæ habeant eandem communem mensuram erunt AB, BC, & tota AC commensurabiles.

Probatur secunda pars, quia si tota AC commensurabilis erit vni ipsarum V.g. magnitudini BC, ergo eadem communis mensura D, metietur totam, & ablatam BC: Quare, & reliquam BA ex 3. pronunc. & ideo BA erit commensurabilis toti AC.

COROLLARIVM.

HInc sequitur. Quod si tota magnitudo ex duabus composita cõmensurabilis sit vni ex suis partibus; quòd etiam reliquæ cõmensurabilis sit: Nam mensura, quæ metitur totum, & ablatum metitur, & reliquum ex pronunc. 3.

THEOR. VI. PROPOS. X.

Si duæ magnitudines inuicem incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit.

Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit, & quæ à principio compositæ magnitudines, inuicem erunt incommensurabiles.

PRobatur prima pars. Quia si detur aliqua mensura metiens totam AC, & ablatam AB, in schemate præced. propos. metiretur quoque, & reliquam BC, ex pronunc. 3. quòd est contra hypoth. ponuntur enim AB, & BC incommensurabiles.

Probatur secunda pars; Quia si ab initio magnitudines, quæ fuere compositæ dicantur commensurabiles; sequitur, quod si tota magnitudo AC vni ipsarum sit commensurabilis, quod etiam sit alteri, ex propos. præced. contra Thesim.

COROLLARIVM

HInc sequitur. Quòd, si tota magnitudo ex duabus composita sit incommensurabilis alteri partium componentium, hæc etiam erit incommensurabilis reliquæ; Nam ex Coroll. prec. si esset commensurabilis vni esset, & alteri.

Magnitudines autem, quæ componuntur, debent esse re ipsâ commensurabiles, quę nempe possint dimetiri communi mensura maxima; alioquin ratio non valeret, quæ à communi mensura desumitur, vnde non intelligitur de lineis potentiâ commensurabilibus.

EXPENSIO IV.

De inuentione linearum rationalium.

ANtequam irrationales inueniantur, priùs de inuentione rationalium agendum est; ex harum enim cognitione gradus sternitur ad irrationales diuersas inueniendas. Vnde in primis diuersas species harum linearum, vt singulas deinde doceamus inuenire; distinguere opus est.

Rationales inuicem lineæ in plura genera se iunguntur secundùm diuersam comparationem, quâ cum linea aliqua tertiâ conferuntur, quæ dicitur ob id Rationalis; nempe illa, ex quo cæterarum mensuræ æstimantur, & est velut Cubitus, seu Pes in vsitata rerum vendibilium mensuratione. Nam duę hæ lineæ comparatæ cum illâ sunt inuicem longitudine commensurabiles, quatenùs ex eius partibus, vel vna, vel ambæ integratæ inuicem quoque consentiunt longitudine, vel non, sed solùm potentiâ. Si longitudine commensurabiles, tunc potest accidere, quòd vna ex istis sit Rationali æqualis; & ecce *primum genus*, quòd si omnes sint inæquales illi; sed solum secundum partes in linea Rationali existentium longitudine commensurarentur. Erit *secundum genus*: Si verò inuicem sunt solùm potentiâ commensurabiles; tunc altera ex istis potest reperiri, vel æqualis, vel saltem commensurabilis lineæ Rationali, si æqualis reperitur erit *tertium genus*, si inæqualis, sed tamen commensurabilis erit *quartum genus*. At si ne dum inuicem; sed etiam cùm linea Rationali comparatæ sunt, tantùm potentia commensurabiles, erit *quintum genus*. Et tandem potest accidere, quod hæ lineæ sint commensurabiles inuicem, sed cum linea Rationali comparatæ, illi solùm sint potentia commensurabiles, & erit *sextum genus*.

Primum genus, vt docebimus reperitur ex Corollario propos. 11. sicut, & secundum.

Tertium verò genus, & quartum reperitur, si primo inueniatur rationali alicui commensurabilis aliqua, vel æqualis ex propos. 11. sequentis Corollario, & huic reperiatur alia potentiâ tantùm commesurabilis, ex propos. 12. nam duæ repertæ erunt inuicem potentiâ tantùm commensurabiles, sed altera ex istis erit lineę Rationali cõmẽsurabilis, altera verò potentia tantũ, ex prop. 7.

Quintum genus reperitur ex propos. 12. si nempe expositæ Rationali A inueniatur aliqua potentia tantum commensurabilis B, & huic inuentæ alia item reperiatur potentiâ tantum commensurabilis C, nam, cum rationalis A, & hæc secundo inuenta C primo inuentæ B sint potentiâ tantum commensurabiles erunt, inuicem potentiâ tantùm cõmensurabiles ex propos. 6.

Sextum verò genus reperitur ex Corollario propos. 12.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Inuenire rectam, ad cuius quadratum, ita se habeat quadratum alterius, vt numerus ad numerum.

SInt duo numeri 3, & 5. & linea A. Debeamusque inuenire lineam aliquam, cuius quadratum, ita sit in proportione, cum lineæ E quadrato, vt est numerus 3. ad numerum 5.

Diuidatur linea A in tot partes, quot habet numerus oblatus 3. V.g. in tres partes; deinde assumatur linea C, quæ quinque partes æquales illis, obtineat, eritque linea A, ad lineam C, vt numerus 3. ad 5.

Inter istas autem lineas media proportionalis inueniatur ex 16. propos. lib. 6. quæ sit E. Dico quadratũ ex A ad quadratum ex E esse sicut 3 ad 5.

Probatur ex Corollario propos. 21. lib. 6. Nam

A, E, C,

A, E, C. tres lineæ sunt continuæ proportionales; & ideo, cum quadrata omnia sint similia, similiter;

que descripta erit, vt latus A ad latus C, ita quadratum factum ex A ad quadratum factum ex E ob proportionem laterum duplicatam; Sed A se habet ad C, vt 3. ad 5. Ergo, & quadratum ex A ad quadratum ex E se habebit in proportione, vt 3. ad 5.

COROLLARIVM

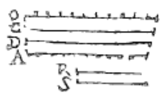
HInc enascitur modus inueniendi lineas longitudine alteri commensurabiles. Nam nihil aliud agendum, quam diuidere datam A, (quæ quoniam ab ea cæterarum mensuræ desumũtur, vocatur Rationalis,) in partes, quas voles, & ex illis partibus alias componere lineas, siue alias æquales Rationali in diuersas partes diuidere, & eas partes, tanquam lineas assumere, omnes enim datæ Rationali A, erunt similiter Rationales.

PROB. II. PROPOS. XII.

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentiâ.

SIt recta proposita A, cui inuenienda primo sit linea incommensurabilis longitudine tantùm. Inueniantur duo numeri proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum V. g. 10. & 11. ex propos. 19. lib. 9. vel ex 16. pr. Coroll. 4. l. 8. Deinde ex præced. inueniatur linea, cuius quadrato ita se gerat in proportione quadratum ex C confectum, vt 10. ad 11. numeri, vel vt linea A ad O lineam. *Dico esse C lineam lineæ A incommensurabilem potentia tantùm.*

Probatur primo, quod sit incommensurabilis longitudine. Nam ea quadrata habent etiam latera longitudine cõmensurabilia, quæ proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum ex propos. 4. huius. Sed quadratum factum ex A ad quadratum ex C, illam non habet proportionem, cùm sit solùm proportio, quam habet numerus 10. ad numerum 11. non quadratos: Ergo eorum latera, nempe linea A, & C, erunt incommensurabilia.



Probatur secunda pars, nempe quod sit tantùm longitudine incommensurabilis. Nam earum quadrata commensurantur, cùm habeant proportionem, quam numerus ad numerum.

Secundò sit inuenienda altera linea D, quæ sit quoque potentiâ incommensurabilis. Inueniatur linea D inter duas A, & C longitudine incommensurabiles media proportionalis ex 13. lib. 6. Dico D esse incommensurabilem tum longitudine, tum potentiâ lineæ A primo positæ.

Probatur ex propositione 21. lib. 6. Nam ea proportio intermediat inter quadratum ex A factum, & quadratum ex D, quæ est inter lineas, & latera A, & C. Sed illæ sunt incommensurabiles. Ergo etiam quadrata ex propos. 5. huius erunt incommensurabilia, & ideo ipsæ rectæ incommensurabiles erunt potentiâ. Vnde, & longitudine ex prop. 4. huius.

COROLLARIVM

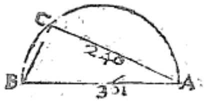
COllige modum, quo, & plures lineæ inueniantur datæ rationali potentiâ tantùm incommensurabiles. Nam sufficit huic inuentæ C reperire alias longitudine commensurabiles V. g. R, vel S ex Corollario præcedenti: Nam erunt etiam datæ Rationali potentiâ tantùm commensurabiles.

Siquidem A est longitudine incommensurabilis C, cui tertiæ sunt commensurabiles lineæ inuentæ R, & S; Quare ex propos. 7. linea Rationalis A, & inuente R, aut S erunt inuicem incommensurabiles.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Inuenire duas rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior possit efficere quadratum maius, quàm linea minoris, quorum differentia, seu excessus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine commensurabile.

PRoponatur aliqua linea Rationalis AB, & inueniantur ex propos. 15. lib. 9. duo numeri quadrati, quorum excessus non sit quadratus, vt 361. & 121. quorum excessus 240. non est quadratus. Deinde ex propos. 11. reperiantur duæ lineæ AB, & CB potentiâ tantùm commensurabiles, quorum nimirum quadrata se habeant, vt numerus 361. quadratus, ad numerum non quadratum 240. Deinde super maiori AB fiat semicirculus, alteraque AC accommodetur in semicirculo, connectaturq; recta CB. *Dico AB plùs posse quàm AC, ambæ* ex constitutione potentiâ tantùm commensurabiles, quadrato rectę lineę CB; quę ipsi AB longitudine est commensurabilis.



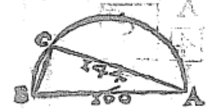
Probatur. Nam quadrata linearum AB, & AC sunt æqualia quadrato ex linea AB confecto ex propositione 11. lib. 2. sed vt numerus 361. ad 240. ita est quadratum lateris AB ad quadratum lateris AC. Ergo *per conuersionem rationis* erit 361. ad 121. complementum numeri 240. vt sit æqualis numero 361. ita quadratum ex latere AB ad quadratum ex latere CB, quod cum quadrato AC, sit æqualis quadrato ex latere AB, sed quadrata numerorum 361. & 121. habent latera commensurabilia, alioquin non essent numeri quadrati, ergo, &

& latus AB, cum latere CB erit commensurabile ex propos. 5. huius.

PROBL. IV. PROPOS. XIV.

Inuenire duas rectas potentiâ tantùm commensurabiles, quarum maior possit efficere quadratum maius, quàm efficiat minor: quorum differentia, seu excessus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine incommensurabile.

SIt linea rationalis AB, inueniantur ex propos. 16. lib. 9. duo numeri quadrati 16. & 144. ita quod compositus ex ipsis, nempe 160. non sit quadratus: Fiatque, vt compositus non quadratus 160. ad quadratum V. g. 144. ita linea AB ad aliam AC, ex propos. 12. huius. Deinde super maiorem AB fiat semicirculus, accommodeturque AC in eo à puncto A, connectaturque recta CB. *Dico CB esse lineam lineæ BA longitudine incommensurabilem latus quadrati, quo A superat AC quad.*



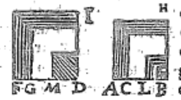
Probatur. Quia BA est ad AC, vt non quadratus numerus 160. ad quadratum 144. Ergo quadratum ex BC, erit ad AD, vt compositus non quadratus 160. ad quadratum numerum 16. per conuersionem rationis. Quoniam quadrata duo ex BC, & CA ex propos. 11. lib. 2. æquant quadratum ex BA, sicut quadrati numeri 144. & 16. æquant numerum 160. quare ita se habebit, vt numerus 160. ad 16. ita BA ad BC. Sed 160. ad 16. cum non sit quadratus, nõ habet proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo neque latera BA, & CB ex propos. 11. huius, & ideo non erunt cõmensurabilia. Quare quadratum ex BA superabit AC quadratum, & excessus quadrati latus BC incommensurabile erit.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Si quatuor lineæ sint proportionales, & fundamentum relationis, seu antecedens in prima combinatione superet consequentem, & terminum quoad potentiam quadrato, cuius latus sit fundamento illo commensurabile: Alterum quoque proportionis fundamentum in secunda combinatione eodem excessu superabit suum terminum: At si excessus primæ combinationis fuerit lateris incommensurabilis, talis quoque erit excessus in altera combinatione fundamenti respectis sui termini.

SIt BA ad BC, vt DF ad DG. Dico, quod si quadratum BA superet quadratum BC, & excessus, seu gnomon niger sit tale spatium, quòd in quadratum redactum latus eius fundamento lineæque maiori BA sit commensurabile; talequoq; erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum in quadrato DF. Quòd illud quadratũ si gnomoni nigro in AB quadrato æquale, habeat latus incommensurabile ipsi BA, tale quoque erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum in quadrato DF.

Probatur, vt est BA ad BC, ita DF ad DG. Ergo ex 26. lib. 6. vt est quadratum ex BA ad quadratum ex BC, ita assimilatur in proportione ob similitudinem figurarum, (quia omnia sunt quadrata,) quadratum ex DF ad quadratum ex DG. Ergo conuertendo erit etiam totum quadratũ ex BA ad aliam compartem, nempe gnomonẽ nigrum, & excessum suum HA, sic quadratum ex DF ad aliam compartem, & excessum suum gnomonem nigrum FI; Ergo, & ad quadrata gnomonibus æqualia, eritque quadratum ex BA ad quadratum nigrum BL ęquale gnomoni nigro AH, vt quadratum ex DF ad quadratum nigrum DM æquale gnomoni nigro FI, ideoque erit quoque latus BA ad latus BL illius quadrati nigri, vt latus DF ad latus DM huius quadrati nigri ex 26. lib. 6. si ergo BA, & LB sint lineæ commensurabiles, tales quoque erunt DF, & DM; quod si fuerint incommensurabiles longitudine BA, & BL tales quoque erunt DF, & DM longitudine incommensurabiles ex propos. 5. huius.



EXPENSIO V.

De Binomijs.

AGitur de compositione linearum potentiâ tantùm commensurabilium in vnam lineam coalescentium, ex quarum compositione resultat linea tota, quæ Binomium appellatur, vel ex Binis nominibus: eo quia resultet à compositione duarum linearum potentiâ commensurabilium: Est quæ primum genus linearum irrationalium. In quatuor enim genera secedunt irrationales lineæ. Aliæ enim exoriuntur ex cõpositione, vt prędictę. Aliæ à subtractione, vt Apotome, duarum linearum potentiâ tantùm commensurabilium. Alię Irrationales procedunt à proportionali interpositione mediæ alicuius proportionalis inter duas commensurabiles potentiá tantùm. Et vocantur Mediæ; Aliæ tandem ex diuisione lineę in partes irrationales, & ab irrationalibus simpliciter exoriuntur, quæ postrema duo genera, & per subductionem alias producunt pariter irrationales. Agemus autem primo de Binomijs, vtpote de facilioribus.

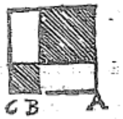
THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si duæ rationales potentiâ tantùm inuicem commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex Binis Nominibus.

COmponantur duæ rationales AB, & BC potentiá tantùm inuicem commensurabiles ex propos.

propoſ. 12. huius inuentæ. Dico *totam* AC *irrationalem eſſe*.

Probatur. Quoniam enim ex propoſ. 1. lib. 6. rectangulum ſub AB, & BC; quale eſt album ad quadratum BC nigrum ſe habet, veluti reſpicit baſis AB baſim BC: Quoniam ea rectangula ſunt eiuſdem altitudinis: ſequitur, quòd ſint incommenſurabilia, qualiter ſunt ipſæ baſes. Addatur rectangulo eius duplum, quòd certè ei commenſuratur, & fient duo rectangula æqualia alba. Addatur quoque quadrato nigro aliud nigrum ex AB, eruntque quadrata inuicem commenſurabilia; quòd lineæ AB, & BC ex hypotheſi ſint inuicem potentiâ commenſurabiles. Nam factâ hac compoſitione ex propoſ. 10. duo rectangula à duobus quadratis incommenſurabilitate diſſidebunt; quia magnitudinibus, quæ priùs erant incommenſurabiles, vt rectãgulo albo, & quadrato nigro commenſurabiles; quælibet ſuę magnitudines addidimus, quadrato quidem nigro quadratum aliud nigrum ſibi cõmenſurabile, rectangulo verò aliud rectangulum ſibi æquale. Sed componantur ſimul hæc duo rectangula, quæ incommenſurabilia ſunt quadratis, & ipſa duo quadrata; ex propoſ. 10. tota magnitudo CE incommenſurabilis erit, cum alterâ magnitudine partium incommenſurabilium; & ideo rectangula alba, cum duobus quadratis nigris ſimul erunt incommenſurabilia ipſis met quadratis nigris ſeorſim ſumptis.



Verùm duo rectangula prædicta cùm duobus quadratis nigris ex propoſ. 6. lib. 2. ſunt æqualia quadrato ex tota AC, tanquam vna linea. Hoc itaque quadratum maximum ex tota AC erit incõmenſurabile duobus quadratis altero ex AB, altero ex BC: cum ergo quadratum ex tota AC ex duabus AB, & BC coalitá ſit irrationale quadratis ipſarum componentium AB, & BC; etiam ipſa tota AC erit irrationalis ex propoſ. 9. huius, ipſis partibus componentibus AB, & BC. Cuius nomen erit Binomium, quia ex duabus integratur.

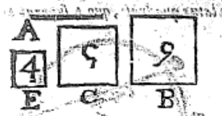
Quod præcedenti propoſ. explicauimus Binomium, eſt genus quoddam, quod ſex differentias Binomiorum ſub ſe complectitur. Illæ verò exoriuntur à comparatione duarum, ex quibus componuntur potentiâ tantùm ſibi inuicem commenſurabilium comparatarum lineæ Rationali, reſpectu, cuius dicuntur rationales, ſeu longitudine, ſeu potentiâ; & quia in ſuperioribus vidimus duas differentias linearum commenſurabilium potentiâ tantùm, primam propoſ. 13. nempe, cùm maior excedit minorem in quadrato ſuo conſtituendo ſpatio tali, quòd ſi in quadratum redigatur, latus eius ſit longitudine maiori commenſurabile; inde eſt, quòd, ſi hoc primum genus lineæ Rationali comparetur, & maior illi Rationali ſit longitudine commenſurabilis hinc prima differentia conſtituatur; Quod ſi minor ſit Rationali commenſurabilis iam ſecundam differentiam obtineamus. Quod ſi, nec maior, nec minor, ſed ſicut ſunt incommenſurabiles inuicem, ita quoque ſint Rationali, & tertia differẽtia habetur.

Secundum verò genus linearum ſibi inuicem incommenſurabilium eſt; quando vna alteram excedit tali ſpatio quadrato, quod habeat latus eidem maiori incommenſurabile ex propoſ. 14. & eodem ordine dat tria alia Binomia. Nam vel maior linea, ſeu Nomen eſt commenſurabile datę Rationali, & ecce. Quartũ, vel minor ei commenſuratur, & ecce Quintum; vel neutra incommenſurabilium, ei commenſuratur, & ecce. Sextum. Docebimus itaque modum in ſequentibus reperiendi hæc omnia Binomia, ob quæ neceſſarium eſt priùs refricare memoriam eorum, quæ diximus lib. 9. Expenſ. vltima.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Inuenire ex Binis Nominibus primam.

OPortet primò reperire duas lineas longitudine commenſurabiles A, & B ex Corollario propoſ. 11. huius, quarum primã A ſtatuatur pro Rationali. Alteri verò B inueniatur altera C longitudine ſolùm incommenſurabilis, & gaudeat conditionibus, quas aſſignauimus propoſ. 13. hu. nempe repertis duobus numeris quadratis 4. & 9.



quorum exceſſus 5. non ſit quadratus. Maioris B quadratum obtineat ad minoris C quadratum eam proportionem, quam maior quadratus numerus 9. ad exceſſũ 5. non quadratũ. Nã ſi duę iſtæ potentiâ tantùm commenſurabiles componantur; linea tota ex illis duabus coaleſcens, erit primum Binomium.

Probatur. Nam potitur duabus conditionibus ad primum Binomium requiſitis. Prima eſt, quòd rationali A ſit maius nomen B commenſurabile, vt ex conſtructione conſtat.

Secunda eſt, quòd eſt de genere illarum linearum potentiá tantùm commenſurabilium, quarum quadratum, quod poteſt efficere, maior B excedit minoris C quadratum exceſſu quodam quadrato; quòd habet latus commenſurabile ipſi maiori, cùm eius B quadratum, quod eſt, vt numerus 9. ſit ad quadratum minoris C, vt numerus 5. ex propoſ. 11. huius, & ideo exceſſus E ſit vt 4. numerus quadratus ad ipſum 9. numerum quadratum. Vnde latus illius exceſſus, in quadratum redacti ad quadratum ipſius B maioris erit commenſurabile ex propoſ. 4. huius. Si ergo B, & C componantur ex 16. efficient Binomium, quod ex dictis requiſitis erit primum.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Inuenire ex Binis Nominibus ſecundam.

SIt Schema præcedens; Et ſumantur, vt priùs duæ commenſurabiles A, C, & A ſtatuatur pro Rationali; huic verò C inueniatur potentiá tantũ commenſurabilis B eadem arte, ac modo, quo propoſ. 13. huius; ſed cum hac differentiá ab anteced. quod vt exceſſus numeri 5. non quadratus, ad quadratum numerum maiorẽ 9. ſic quadratum ex C minori, & commenſurabili linea ipſi Rationali ad quadratum ex B maiori erectum. *Latera enim horum quadratorum in vnam lineam compoſita*

ta exhibebunt Binomium ſecundum.

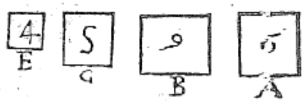
Probatur. Nam minus nomen, nempe latus minoris quadrati C eſt ex conſtructione commenſurabile Rationali datæ A, eſt autem minus latere B, quod ſit quadratum ex C ad quadratum ex A, vt exceſſus non quadratus, & reliquus 5. ad numerum excedentem, & totum 9. & ideo ad maiorem. Quare, & latus C, vtpote quadrati minoris erit minus latere B.

Secundam verò conditionem ex effectione propoſ. 13. adipiſcitur, cùm non obtineant proportionẽ earũ quadrata, vt numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Et quadratũ maius B ſuperet C quadrato E ſibi B in latere commenſurabili, vt propoſ. 13. oſtenſum eſt; Vnde ſi componantur B, & C ex 16. efficient Binomium, quòd erit ex dictis ſecundum.

PROBL. III. PROPOS. XIX.

Inuenire tertium Binomium.

PRæcept. 1. Inuentis duobus numeris quadratis 4. & 9. eá conditione, qua propoſ. 13. vt exceſſus 5. non ſit quadratus; Sumatur ex prop. 18. l. 9. numerus alius, qui ad neutrũ eorum 5. & 9. proportionem dicat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, qui ſit 6. Deinde vt eſt numerus non quadratus 6. ad quadratum 9. ſic quadratum Rationalis A ad quadratum, cuius latus B; nec ſit quadratum Rationalis A proportionatus ad quadratum ex B, vt quadratus numerus ad numerum quadratum. Ideoque licet quadrata ſint rationalia; quia ſunt, vt numerus ad numerum; ipſa tamen latera A, & B potentiá tantùm erunt commenſurabilia, uon longitudine ex propoſ. 4. huius.



Præcept. 2. Deinde fiat iuxta propoſ. 13. huius vt quadratus numerus 9. ad ſuum exceſſum 5. non quadratum: ita quadratum eiuſdem rationis, cuius latus B, ad aliud quadratum ex propoſ. 11. huius, & ſit huius quadrati latus C. Dico, *quod ſi* C *&* B *componantur erit Binomium tertium.*

Prob. Progr. 1. Quoniam primam conditionẽ genericam conſequitur ex conſtructione. Quia quadratum B ſuperat quadratum C quadrato quodam E, cuius latus eſt maiori B commenſurabile, quia eſt vt 9. ad 5. cuius reſiduum vſque ad 9. eſt 4. numerus quadratus, & ideo etiam quadratum C habet reſiduum, cum quo æquat quadratum B, vt numerus quadratus 4 & 5. numerum quadratum 9. ex propoſ. 13. Vnde ex propoſ. 4. latus exceſſus E erit commenſurabile lateri B.

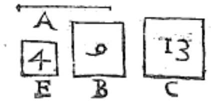
Progreſſ. 2. Habet quoque conditionem ſpecificam nempe, quod ambæ B, & C ſint incommenſurabiles Rationali A: Et B quidem ex Pręcept. 1. id conſequitur. De linea verò C oſtenditur; Quadratum ex A eſt ad quadratum ex B, vt 6. ad 9. ex effectione, nempe non dicit proportionem eam, quam quadratus numerns ad quadratum numerum: At quadratum ex B dicit proportionem ad quadratum ex C, quam 9. ad 5. ſ. non eam quam quadrati numeri ad numerum quadratum. Ergo ex æquo erit vt 6. ad 5. ita quadratum ex A ad quadratum ex C, & ideo non erit illa, quam quadrati numeri ad quadratum numerum. Vnde nec lineę A, & C inuicem commenſurabilitatem conſequentur. Cum ergo B, & C ad Rationalem A ſint incommenſurabiles, maiorque B ſuperet minorem C quadrato E, ſibi maiori commenſurabilis lateris, facient, ſi componantur Binomium quod ex 16. propoſ. huius, & ex alijs conditionibus erit tertium.

PROBL. IV. PROP. XX.

Inuenire ex Binis Nominibus quartam.

VSque adhuc vſi ſumus pro fundamento Binomiorum propoſ. 13. huius: nunc vtendum eſt propoſ. 14. Iuxtaque ipſius documenta duo numeri quadrati aſſumendi ſunt, ita quòd compoſitus ex ipſis non ſit quadratus, vt 4. & 9. cuius compoſitum eſt 13. non quadratus; ideoque nec proportionem dicit, quam quadratus ad numerum quadratum ex prop. 16. lib. 9. Deinde reperiatur A Rationalis, & C ei commenſurabilis. Fiatque vt compoſitus non quadratus 13. ad quadratum alterum ex componentibus, puta 9. ex propoſ. 11. huius; ita quadratum commenſurabilis C ad quadratum alterius B componaturque B, & C, *& erit Binomium quartum.*

Probatur. Nam B, & C ſunt commenſurabiles ſolùm potentiâ, cùm eorum quadrata ſe habeant, vt numerus ad numerum.



Sibi verò vindicant conditionem genericam Binomiorum. Quoniam maius Nomen C, vtpote latus maioris quadrati ſuo quadrato ſuperat quadratum minoris lateris B quadrato quodam ſibi longitudine incommenſurabili, vt oſtenditur citata propoſ. 14.

Obtinent quoque requiſitum ſpecificum: Etenim C maius nomen acceptum eſt ex effectione commenſurabile Rationali A. Cum ergo C ſit cõmenſurabilis rationali A & potentiâ tantùm commenſurabilis reſpectu B, quam ſuperat ſuo quadrato, exceſſu tali quadrato E, cuius latus ſibi eſt longitudine incommenſurabile, ſed ſolùm potentiâ: Si hæ duæ lineæ B, & C coniungantur, efficient ex propoſ. 16. Binomium, & hoc ex requiſitis præallegatis erit quartum.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Inuenire ex Binis Nominibus quintam.

ADhibeatur idem Schema, & repertis duobus numeris, vt priùs, eadem fiat conſtructio numerica, vt in antecedenti, vel 14. prop. h. Deinde accepta quadam Rationali A ipſi commenſurabilis inueniatur B; fiatque deinde, vt numerus quadratus V. g. 9. ad compoſitum ex duobus quadratis non quadratum 13. ſic ex propoſ. 11. huius quadratum ex B, quod erit minus ad quadratum alterum, cuius latus C, quod erit maius, vt numerus quadratus eſt minor compoſitorum quadrato, *&* B, *&* C *latera in vnam lineam conflata facient Binomium quintum.*

Pro-

Probatur. Quoniam obtinent conditionem genericam Binomij: quia eadem conſtructio facta eſt, quæ propoſ. 14. & ideo B ſuperat C quadrato quodam E, cuius latus ſibi maiori B eſt longitudine incommenſurabile: Lineæ quoque B, & C ſunt potentiá tantùm commẽſurabiles; eò quòd earum quadrata ſint, vt numerus ad numerum, hoc eſt, vt 9. ad 13.

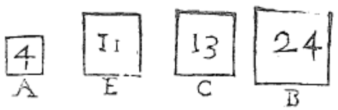
Et tandem obtineat conditionem ſpecificam: nã, & Minus Nomen B eſt ipſi Rationali A ex conſtructione commenſurabile, ideoque B, & C compoſitæ facient Binomium, ex 16. h. & hoc quintum erit.

PROBL. VI. PROPOS. XXII.

Inuenire ſextam ex Binis Nominibus.

REperiendi ſunt duo numeri non quadrati ex propoſ. 16. lib. 9. V.g. 11. & 13. qui compoſiti faciant numerum non quadratum 24. Idcircoque, nec cum eo, quod componunt, nec inuicem dicant proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Aſſumaturque quilibet numerus, qui ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus numerus, ad quadratum numerum, vt eſt quilibet quadratus. V.g. 4. Sumatur deinde Rationalis A, & vt 4. ad 24 ſic fiat quadratum ex A ad quadratum ex alia aliqua V. g. B ex propoſ. 11, huius: eruntque B, & A tantùm potentiá commẽſurabiles. Deinde fiat, vt 24. ad 13. ita quadratum ex B ad quadratum ex alia C: eruntq; latera longitudine incommenſurabilia B, & C; quia eorum quadrata ſe habeant, vt numerus ad numerum.



Ita quoque ſe habent incommenſurabiliter cum Rationali A: & quidem E, vt diximus: Linea verò C ex hac ratione. Nam vt 4. ad 24. ſic A, quadratum Rationalis ad quadratum B, & vt 24. ad 13. ita quadratum B ad quadratum C. Ergo ex æquo, vt 4. ad 13. ita quadratum A ad quadratum C, nimirum, vt numerus ad numerum, & ideo linea Rationalis A, & C erunt inuicem incommenſurabiles, & hæc eſt conditio ſpecifica harum linearum E, & C ad Binomium requiſita. Obtinent quoque conditionem genericam. Nam quadratum ex B quadratum ex C ſuperat quadrato quodam E, quod eſt, vt 11. ad 24. tanquam numerus ad numerum, ideoque ſibi maiori B longitudine incommenſurabile. Quare ſi B, & C componantur ex propoſ. 16. facient Binomium, quod ex prædictis conditionibus erit ſextum.

EXPENSIO VI.

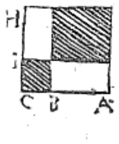
De lineis Apotomis.

COmpoſuimus vſque adhuc lineas irrationales addendo inuicem duas rationales potentiâ tantũ commenſurabiles, nunc verò auferendo vnam ab aliá generabũtur irrationales eodem ordine, ac in præced. Expenſione.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentiâ tantum commenſurabilis exiſtens toti; reliqua irrationalis erit, vocatur autem Apotome.

DEtrahatur à Rationali AC Rationalis BC, quę ipſi AC toti potentiâ tantùm ſit commenſurabilis. Dico *reliquam* AB *eſſe irrationalem reſpectu lineæ* AC, *&* BC.



Probatur ferè eodem argumento, quo propoſ. 16. Rectangulum AI ſub AC, & BC cõtentum, cùm AC, & CB ponantur longitudine incommenſurabiles ex 1. l. 6. erit incommenſurabile quadrato nigro, ex BC conſtituto; etenim cum ſint eiuſdem altitudinis, ſunt inuicem, vt baſes.

Progreſſ. 2. Addatur rectangulo eiuſdem AI ſeminigro duplum, & ſint duo rectangula ſeminigra AI, & BH æqualia, & ideo inuicem ſibi commenſurabilia pro vna parte. Pro alia verò addatur quadrato nigro ex BC aliud quadratum AH ex tota AC. quod ei vtique eſt commenſurabile, cum lineæ ipſæ ponantur commenſurabiles potentiâ. Factaque hac additione ex propoſ. 8. huius manebunt duo rectangula ſeminigra ſumpta, vt vna quantitas, & duo quadrata nigrum ex CB, & AC ex tota pariter vt vnum quid ſumpta inuicem incommenſurabilia, vt erant priùs.

Progreſſ. 3. Addatur rurſus rectangulis quadratum nigrum ex AB: Efficiemuſque magnitudinem ex totâ AC, & ex quadrato nigro BC, ex 9. l. 2. quare magnitudo tota ex rectangulis ſeminigris duobus, & quadrato nigro BA erit tunc commenſurabilis, vtpote illi ęqualis, quantitati ex duobus quadratis nempe ex tota AC, & parte BC conſtitutis, & ideo cum illa ex progr. 2. ſit rectangulis incommenſurabilis etiam hæc incommenſurabilis parti componenti, nempe rectangulis ijſdem duobus ſeminigris erit. Cum itaque tota magnitudo ex rectangulis compoſita, & quadrato AB nigro ſit incommenſurabilis vni parti componenti: nempe rectangulis duobus ſeminigris; erit etiam incommenſurabilis alteri ex Coroll. propoſ. 10. huius, ſcilicet quadrato ex AB. Et ideo etiam quadratum ex tota AC, & quadratum ex parte BC æqualia rectangulis, & quadrato alteri ex AB, erunt eidem nigro ex BA incommenſurabilia, & inſuper cum quadrata AC, & ex parte BC ex hypotheſi ſint inuicem commenſurabilia, quòd lineæ AC, & BC ſint potentia commenſurabiles, & ideo etiam toti ex propoſ. 9. huius, erit etiam vnumquodque eorum eidem quadrato, ex BA incommenſurabile ex prop. 8. h.

Igitur

Igitur, cùm quadrata ex BC, & AC ſint incommenſurabilia, quadrato ex AB; Lineæ ipſæ, & latera erunt irrationalia ex propoſ. 4. huius. Vnde ablata BC ex AC relinquet reſiduum AB incommenſurabile, & toti AC, & ablato BC, & ideo dicetur Apotome.

Sex ſpecies Apotomarum, quæ exoriuntur à lineis potentiá tantùm commenſurabilibus, vt Binomiorum, reperiuntur.

Nam, vel maior plùs poteſt, quàm minor linearum potentiá tantùm commenſurabilium, & differentia potentialis eſt quadratum, cuius latus maiori eſt commenſurabile, & hoc genus parit tres ſpecies Apotomum, prout comparantur cum aliá quadam Rationali. Nam ſi maior ſit Rationali commenſurabilis eſt prima Apotome, ſi minor exoritur ſecunda Apotome, ſi nec vna, nec altera oritur tertia Apotome dummodo minor harum linearum ad Rationalem comparatarum auferatur à maiore, vt Reliqua Apotome ſit.

Secundum genus linearum potentiá tantùm commenſurabilium explicatum propoſ. 14. ex illud, quarum vna poteſt magis, quàm alia, & differentia eſt quadratum quoddam, cuius latus eſt maiori incommenſurabile, & hoc genus parit tres ſpecies Apotomum eodem ordine. Nam vel maior eſt commenſurabilis expoſitæ Rationali, & obtinemus quartam ſpeciem, vel minor, & conſequimur quintam, vel nulla Rationali commenſuratur, & ſextam Apotome habebimus.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Apotomum ſex ſpecies reperiuntur.

REperiuntur eodem modo, ac Binomia, ſolumque in hoc differenti; quòd repertis lineis duabus nempe maiori, & minori Nomine; deinde, vt Binomium efficiatur, coniunguntur ſimul. Hic verò minor linea, quæ dicitur Congruens, ſubducitur à maiori, quæ dicitur Tota, & quod reſtat, vocatur Apotome, ſeu Reliquum. Ita primum Binomium paritur per coniunctionem duarum linearum ex propoſ. 17. quarum minor, ſi ſubducatur à maiori efficitur Apotome prima, & ſi duæ lineæ repertæ propoſ. 18. coniunctæ faciunt Binomium ſecundum, ſi minor earum ſubducatur à maiori faciet Apotomem ſecundam. Sic dicas de alijs: Vnde ſingulas propoſitiones non replicabimus; ſed propoſ. 19. dabit Apotomem tertiam, propoſ. 20. Apotomem quartam. prop. 22. Apotomem quintam. Tandem propoſ. 21. Apotomem ſextam docebit inuenire.

EXPENSIO VII.

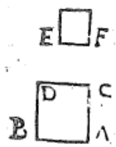
De Irrationalibus Medijs.

HIc agimus de lineis irrationalibus, quæ reſultant per relationem ad alias, & proportionem, & in duplici genere ſunt. Vel enim ad lineas, quæ potentiá tantùm ſunt inuicem commenſurabiles referuntur, & vocantur mediæ, eò quòd ſint medium proportionale inter duas potẽtiá tantùm commenſurabiles. Vel non ſunt mediæ inter duas incommenſurabiles, ſed naſcuntur per æquipotentiam ad ſpatia irrationalia; & hoc ſecundum eſt genus, quod ſub ſe habet ſpecies de quibus infra. Porrò Mediæ in duplicem ſpeciem ſecernuntur, Aliæ enim ſunt; quarum duæ ſumptę faciunt rectangulum ſub ipſis contentum Rationale, licet ſingularũ quadrata ſint irrationalia Quadrato Expoſitæ Rationalis, quas explicamus 29. & alię quarum rectangulum eſt irrationale, quas docemus inuenire propoſ. 30.

THEOR. I. PROPOS. XXV.

Recta linea potens quadratum irrationale, irrationalis eſt.

POſſit recta AB quadratum ABCD, ſcilicet ex ea fiat, vel factum ſupponatur, & hoc ſit irrationale ſcilicet comparatum, cum quadrato alicuius lineæ FE, ſit irrationale, nulláque communi menſurá dimetiri poſſit. *Dico, quod etiam linea* AB *ſit irrationalis comparata cùm linea* FE.

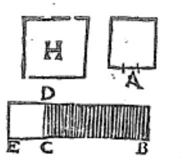


Probatur. Nam ſi dicitur rationalis eius quadratum erit rationale: ex propoſ. 4. huius, quòd eſt contra Theſim.

THEOR. II. PROP. XXVI.

Quod ſub rationalibus potentiâ ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt, & recta linea ipſum potens; nempe potens efficere quadratum illi æquale, irrationalis. Vocatur autem Media.

SIt data rationalis A, cui adſint duæ aliæ potentia tantùm commenſurabiles BC, & CD, ex quibus rectãgulum nigrum componatur. Dico, *quod hoc rectangulum eſt irrationale comparatum cum quadrato lineæ* A. Inſuper, & aſſero, quòd, ſi fiat quadratum H æquale dicto rectangulo, *linea recta latus huius quadrati erit irrationalis reſpectu lineæ* A, & quòd vocanda ſit *Media*.



Probatur prima pars. Nam deſcripto quadrato ex altera illarum, & ex DC, quod erit rationale, & quadrato lineæ A commenſurabile; cum lineę datę BC, & CD ſint ei potentiá commenſurabiles; ideſt earum quadrata ſint commenſurabilia, eritque inſuper eiuſdem altitudinis ob latus idem CD, quare ex 1. lib. 6. erunt in eadem proportione ita latera, vt quadrata, & eodem modo referentur latus CB lateri EC, vel æquali DC, vt rectangulum nigrum ad quadratum album; ſed hæ lineę, lateraque ſunt incommenſurabilia Idcircò etiam incommenſurabilia erunt rectangula album, & nigrum ex propoſ. 5 huius. Sed quadratum DE album eſt commenſurabile quadrato ex Rationali A conſtructo; Ergo rectangulum nigrum erit eidem quadrato Rationalis incommenſurabile ex propoſ. 7. huius.

Pro-

Probatur secunda pars. Nam cum rectangulum nigrum fuerit ostensum irrationale, etiam quadratum H; quod ei supponitur æquale, erit irrationale comparatũ quadrato Rationalis A, & ideo latus eius ex anteced. propos. erit irrationale.

Probatur tandem latus huius quadrati H sit vocandum Linea Media. Nam ex propos. 19. lib. 6. illa linea media proportinalis est inter alias duas, cuius quadratum est æquale rectangulo ab illis duabus constituto. Quare cum quadratum H sit æquale rectangulo nigro lineis BC, & CD constituto, erit latus eius media proportionalis, inter huius rectanguli latera BC, & CD.

COROLLARIVM I.

HInc videre est spatium medio spatio commensurabile medium esse, idest irrationale. Nam postquam demonstratum est spatium DB incommensurabile esse spatio DE; ostensum quoque est medium esse, cum ipsum potens sit media silllicet latus quadrati H.

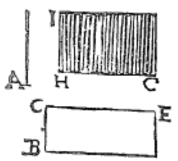
COROLLARIVM II.

HInc quoque educes omnia spatia sub irrationalibus duabus, seu longitudine, seu potentiá contenta esse vni earum quadrato incommensurabilia, & irrationalia, quod, ita sint quadratum DE ad rectangulum DB, vt ipsæ lineæ E C ad C B; sed ipsæ ponuntur irrationales. Quare etiam rectangulum nigrum albo quadrato erit irrationale.

THEOR. III. PROP. XXVII.

Si ex Rationali fiat rectangulum æquale quadrato Mediæ; alterum latus erit ei Rationali potentiâ tantùm commensurabile.

SIt data Media A, & Rationalis BC, siue longitudine, siue tantùm potentiá, ex qua tanquàm ex vno latere, vel per propos. 43. lib. 1. vel reperiendo extremam BC, & A lineis proportionalem CE. Nam rectangulum ex 9. lib. 6. ex extremis CE, & CB constitutum erit æquale quadrato mediæ A. Dico, *quod hæc tertia proportionalis* CE *est Rationalis potentia tantum Rationali* BC *commensurabilis*.



* Probatur. Nam quadratum ex Media est æquale rectangulo sub duabus rectis lineis potentiá tantùm commensurabilibus comprehenso, vt ex propos. ant. Sit ergo illud GI habens lateri C B, latus HI potentiá tantùm cõmensurabile. Modo sic arguo. Rectangula BE, & GI sunt æqualia, vtpote vni tertio æqualia; nimirum quadrato ex media A. Ergo habebunt latera ex propos. 10. l. 6. reciprocè proportionalia. Quare eandem proportionẽ dicet HI ad CB. quã CE ad GH: Sed HI, & GB sunt potentiá tantùm commensurabiles: Ergo etiam GH, & CE ex 5. h. Sed HI cõmensuratur ipsi HG ex Thesi. Ergo ex 6. h. inuicem IH, & CE: sed CB cõmensuratur eodẽ modo HI, & CE quoq; Ergo, & inter se.

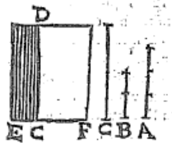
THEOR. VI. PROP. XXVIII.

Mediæ commensurabilis media est.

S*It recta* A *media* B *commensurabilis, Dico, & B mediam esse idest incommensurabilem.*

Detur itaque Rationalis, respectu cuius B media est, & sit C. Applicetur q; ei C, vel quod idẽ est, fiat ex eá, tanquám ex vno latere rectangulum nigrum E D, quod sit æquale quadrato mediæ B ex propos. 43. lib. 1. Et ex præced. EC erit Rationalis potentiá tantùm commensurabilis. Deinde ex Rationali C; tanquam ex vno latere ex eadem propos. 43. lib. 1. fiat rectangulum æquale quadrato datæ A. Cum ergo media B, & A recta data ponantur commensurabiles, earum quadrata erunt commensurabilia ex propos. 4. huius; quamobrem rectangula quoque quadratis æqualia erunt commensurabilia, quibus suppositis.

Probatur. Rectangula DE, & DF ob eandem Rationalem DC, quæ vtriusque latus contexit, sunt eiusdem altitudinis: Ergo ex propos. 1. lib. 6. se habebunt inuicem, vt Bases EC, & CF; cum ergo Rectangula album, & nigrum sint cõmensurabilia ex hypothesi; bases quoque erunt inuicem cõmensurabiles EC, & CF. Sed EC Rationali DC est incommensurabilis longitudine; sed solum potentiá, vt dictum est ex præc. propos. Ergo etiam talis erit CF ex propos. 8. h. Sunt ergo hæc duo rectangula nigrum, & album contenta sub incommensurabilibus longitudine, quia EC est incommensurabilis ipsi C, & eidem quoque CF ostensa est incommensurabilis: Quare & rectæ lineæ, quę quadrata æqualia istis rectãgulis efficere possunt, ex propos. 25. huius. Sed talis est A, Quoniam fecimus rectangulum album, illius quadrato æquale: Ergo erit Media.



COROLLARIVM

HInc educitur spatium quoque medio spatio commensurabile medium. Quia rectangula nigrum, & album ponuntur commensurabilia, & tamen probantur media, dum ostenditur contineri sub lineis potentia tantum commensurabilibus. Vnde ex propos. 25. erit spatium irrationale, & linea ipsum potens media B, & consequenter appellabitur spatium medium ab ipsa linea, quæ ipsum potest accipiendo denominationem.

PROBL. I. PROP. XXIX.

Medias inuenire potentiâ tantùm commensurabiles, quæ rationale contineant.

SInt duæ potentiá tantùm commensurabiles ex proposition. 12. huius A, & B, inter quas media proportionalis sumatur C, ex propos. 16. lib. 6. & ex propos. 15. lib. 6. reperiatur huic quarta proportionalis D; ita quod ita sit in proportione A ad B, vt C ad D. Dico C, & D *esse medias potentia tantùm commensurabiles*. Secundò, *quòd si fiat ex eis rectangulum, illud erit rationale*.

Probatur prima pars. Nam A, & B potentiá tantùm

tantùm sunt commensurabiles. Ergo, cùm eandem proportionem dicant A ad B, vt C ad D, erunt etiam C, & D inuicem commensurabiles ex prop. 5. huius solùm potentia.

Probatur secunda pars: Nam fundamentum proportionis A est ad suum terminum B, ex construct. vt fundamentum C ad terminum D: Ergo *permutando* referetur fundamentum A ad fundamentum C, vt terminus D ad terminum D.

Sed ex constructione, cùm C sit media proportionalis, ita est A ad C, vt C ad B. Ergo etiam erit, vt C fundamentũ ad B terminũ, ita B ad terminum D, quòd sit eadem proportio C ad B, quæ A ad C, & quæ A ad C eadem, talis sit B ad D ex ostensione superiori Et ideo etiam B erit media proportionalis inter C, & D; Propterea que eius quadratum erit æquale rectangulo ex C, & D ex 19. propos. lib. 6. Est autem quadratum ex linea B constructum Rationale cum B sit Rationalis potentiá tantum commensurabilis: Ergo, & rectangulum, ex rectis C, & D tanquam lateribus compactum erit Rationale.

COROLLARIVM.

SI A, & B sint lineæ tales potentiá commensurabiles; ita quòd quadratum maioris superet quedratum minoris spatio quodam, quod in quadratum redactum habeat latus commensurabile ipsi maiori, vt docemus propos. 13 Etiam mediæ adiumento earum repertæ simili conditione gaudebunt, & C maior poterit plùs, quam D minor quadrato lineæ rectæ maiori commensurabilis. Nam ita est A ad B, vt C ad D; potest verò A plusquam B quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Ergo etiam C plus, quam D eodem genere quadrati poterit, vt ex propos. 15. huius Reperientur autem duæ cum hac conditione ex prop. 13. huius.

PROBL. II. PROPOS. XXX.

Medias inuenire potentiâ tantùm commensurabiles, quæ spatium irrationale contineant.

SInt tres Rationales potentia tantum commensurabiles A, B, C, & inter A, & B media D proportionalis inueniatur ex propos. 16. lib. 6. Deinde reperiatur ipsi D quarta proportionalis E ex propos. 15. sexti; ita quòd, sicut B refertur ad C lineam, tali quoque proportione D referatur ad lineam E. Dico D, & E *esse medias proportionales potentia tantùm commensurabiles*. Secundo Dico; *quòd spatium irrationale contineant, quòd appellatur medium*.

Probatur A, & B sunt lineæ ex hypothesi potentiá tantùm commensurabiles. Ergo rectangulum factum ex ipsis ex propos. 26. huius erit medium. Sed D est inter easdem A, & B media proportionalis: Ergo ex propos. 19. lib. 6. eius quadratum rectangulo ex lineis A, & B facto erit æquale, & etiam quadratum ex D erit medium, & irrationale, & D media. Quippe quod rectangulo irrationali sit æquale.

Sed B refertur ad C, vt D ad E. Illæque B, & C sunt potentiá tantùm commensurabiles; Quamobrem, & E ipsi D erit potentiá tantùm commensurabilis ex propos. 5 huius. Propterea erit quoque E media ex propos. 28. huius. Ergo D, & E mediæ sunt potentiá tantum commensurabiles.

Probatur quoque 2. pars. Nempe quòd, si ex E, D lineis fiat rectangulũ, illud sit mediũ.

Fundamentum B refertur ad terminum C, vt fundamentum D refertur ad terminum E, ex constructione. Vnde *permutando*, ita erit fundamentum B ad fundamentum D, vt terminus C ad terminum E. Sed D est media proportionalis inter A, & B. Qua ex rè, vt est A ad D, sic erit D ad B in proportione. & *inuertendo* eá proportione respiciet B ipsum D sicut D ipsum A. Cum itaque sit B ad D, vt D ad A: Ergo etiam referetur terminus C ad terminum E, vt D refertur ad A: quia est ipsorum D, & A proportio eadem, quæ fundamenti B ad fundamentum D, & ideo eadem, quæ termini C ad terminum E;

Cum ergo istæ quatuor lineæ sint proportionales, & D sit ad A; vt C ad E; rectangulum ex propos. 18. l. 6. quod continetur sub extremis D, & E erit æquale rectangulo à medijs contento A, & C: sed rectangulum hoc ex lineis C, & A est medium ex propos. 26 huius. Ergo etiam rectangulum factum ex lineis E, & D ei æquale.

COROLLARIVM.

HInc nascitur, quod si maior B plus possit quã C quadrato habente latus commensurabile ipsi maiori B: quod etiam sic se habebit D ad E, & suo quadrato superabit quadratum ipsius E quadrato tali, quod habebit latus sibi commensurabile Ratioque est eadem, quæ præced. Coroll. quia ponitur, sic esse B ad C, vt D ad E in proportione. Potest verò B plus, quam C quadrato rectæ lineæ sibi maiori incommensurabili: ergo etiam D plus poterit; quam E eodem genere quadrati, ex 15. huius: Porrò reperientur duæ B, & C cum ea conditione ex propos. 14. huius.

EXPENSIO VIII.

De irrationalibus, quæ nascuntur à medijs.

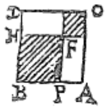
MEdiæ licet respectu Rationalis irrationales sint, inuicem tamen commensurabiles sunt, ex propos. 28. huius. Idcirco penes diuersos respectus & relationes possunt dici, & rationales, & irrationales; irratioales quidem respectu Rationalis expositæ, at rationales inuicem: De istis verò duo genera assignauimus: Primum propos. 29. quæ rationale spatium continent: Secundum propos. 30. quæ medium spatium amplectuntur. Nunc ex isto duplici genere mediarum; Quatuor species oriuntur irrationalium linearum; duæ per compositionem, duæ per subtractionem, vt supra ex rationalibus potentia tantùm Binomia, & Apotomes nascebantur. Si ergo potentiá commensurabilis mediæ, ei addatur; quæ ambæ rationale spatium contineant, vocabitur ex Binis Medijs prima, seu primum Binomium Medium. Si verò vna subducatur ab aliá, vocabitur media

Apotome prima. Si verò duę mediæ inuicem potentia commensurabiles medium contineant spatium, & vna addatur alteri vocabitur ex binis medijs secunda; seu Binomium Medium secundum: Si verò vna subducatur ab alia, dicitur media Apotome secunda.

THEOR. I. PROPOS. XXXI.

Si duæ mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota irrationalis erit, quæ vocatur ex Binis Medijs Prima.

Componantur duæ Mediæ PA, & PB superiùs inuentæ propos. 29. quæ rationale rectangulum contineant. *Dico totam irrationalem esse.* Probatur. Nam rectangulum album AF ex medijs AP, & PB ita refertur ad quadratum nigrum ex BP ex 1. l. 6. cum sit eiusdem altitudinis, vt bases; Sed bases sunt incommensurabiles: Ergo etiam Rectangulum AF album est incommensurabile quadrato nigro PH.



Addatur rectangulo aliud æquale FD, & ideo sibi commensurabili; Quadrato verò PH nigro ex PB, quadratum nigrum OF ex AP, quod vtique ei erit commensurabile; cùm mediæ inuicem ponantur potentiâ commensurabiles. Illa duo rectangula alba AF, & FD adhuc erunt incommensurabilia quadratis nigris, ex propos. 8. huius. Verùm si omnia hæc aggregentur simul, duo rectangula alba, cum duobus quadratis nigris, ex propos. 10. hoc aggregatum ex magnitudinibus irrationalibus vtrique parti aggregatæ irrationale erit, & signanter duobus rectangulis albis, quæ magnitudo est vna pars aggregata. Tota autem hæc magnitudo irrationalis, nempe duo rectangula alba, & duo quadrata nigra æquant ex propos. 6. l. 2. quadratum AD ex tota AB: Ergo hoc quadratum AD ex tota AB erit irrationale respectu rectangulorum alborum, quæ sunt rationalia, & ideo etiam respectu quadrati Rationalis. Quare etiam ipsa tota AB, latus ipsius, erit incommensurabilis lineæ Rationali. Vocatur autem *Binomium medium*; quod componatur ex duabus medijs, & *primum* ad differentiam secundi.

THEOR. II. PROPOS. XXXII.

Si à media media auferatur potentiâ tantùm ei commensurabilis, quæ rationale contineant, Reliqua irrationalis erit; vocatur autem Media Apotome prima.

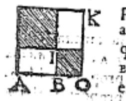
Accipiantur duæ mediæ potentiâ tantùm commensurabiles, quę spatium rationale contineant inuentæ propos. 32. huius CB, & AG, & minor BC subducatur à maiori AC. *Dico residuum AB esse lineam irrationalem.* Probatur. Rectangulum AI sub maiori AC, & minori BC est rationale: Quare etiam duplicatum erit rationale, vt sunt AI, & BH. Quadrata verò nigra ex medijs AH, & BI irrationalia respectu Rationalis quadrati, licet inuicem rationalia, & ideo etiam irrationalia respectu rectangulorum AI, & BH, vt pote illi quadrato Rationalis commensurabilium ex Thesi. Si verò totum ex duobus quadratis AH, & BI sumatur erit vtique singulis quadratis commensurabile: cum partes ipsæ nempe quadrata sint inuicem commensurabilia, & ideò respectu rectangulorum AI, & BH erit totum irrationale ex propos. 8. huius.

Verùm, si rectangulis duobus addatur quadratum ex AB, ex 9. secundi fit magnitudo æqualis magnitudini duorum quadratorum BI, & AH; ideoque sicut duo quadrata AH, & BI sunt rectangulis ostensa incommẽsurabilia, sic erit hoc aggregatum ex rectangulis, & quadrato BA ipsis AH, & BI nigris quadratis æquale, rectangulis eisdem AI, & BH seorsim sumptis erit irrationale. Cùm itaque tota magnitudo ex rectangulis, & quadrato ex AB sit incommensurabilis suæ parti, nempe rectangulis seorsim: Erit etiam incommensurabilis reliquæ parti nempe quadrato nigro ex AB ex parte 2. propos. 10. Quare Quadratum ex AB erit incommensurabile Rectangulis ipsis; sed rectangula ponuntur rationalia respectu Quadrati lineæ Rationalis: Quaderè etiam quadratum ex AB erit irrationale ex propos. 8. respectu quadrati lineæ Ratinalis; Et idcirco etiam ipsa AB ipsi Rationali, irrationalis erit.

THEOR. III. PROPOS. XXXIII.

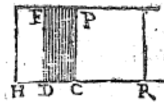
Si duæ mediæ potentiâ tantùm commensurabiles componantur, quæ medium contineant, tota irrationalis erit; vocatur autem ex Binis Medijs Secunda.

Componantur duæ mediæ potentiâ tantùm inuicem commensurabiles AB, & BC, quæ medium spatium contineant. *Dico totam AC irrationalem esse.*



Præassumptum. Vt propos. ostendatur præsupponendum est, Duo rectangula alba inuicem æqualia esse media; quia alterum ex ipsis sub AB, & BO ex Thesi est medium, & ideo eius duplum, eique commensurabile, medium est ex Coroll. propos. 30. Sic quoque quòd quadrata nigra sunt media, quia lineæ AB, & BO eorum latera contexentes ex Thesi sunt mediæ respectu rationalis, licet inuicem comparatæ commensurabiles sint potentiâ; ideoque eorum quadrata inuicem sibi erunt commensurabilia, & hinc compositum ex ipsis ex propos. 10. erit medium, & irrationale, sicut ipsa seorsim irrationalia sunt. Deinde Rationali ED expositæ applicandum est rectangulum EH, scilicet ex eâ, tanquam ex vno latere, efficiendum est EH ex propos. 43. primi; quod rectangulum sit ęquale duobus medijs rectangulis albis, & eidem aliud rectangulum PD applicandum est, quod sit æquale duobus quadratis nigris item medijs. Primo itaque est ostendendum spatium totum PH

PH esse irrationale respectu quadrati lineę Rationalis; & hoc demonstrabitur ex eò, quòd contineatur



sub CD, & DH, quę ostendetur potentiâ tantùm commensurabiles, quæ compositæ facient ex propos. 16. h. lineam irrationalem CH; linea verò DE, vel æqualis CP Rationalis est. Ideoque spatium PH erit irrationale, vt ostendetur: Quibus omnibus suppositis, cum spatium PH irrationale, sit æquale quadratis nigris, & albis rectangulis, ex effectione, quæ ex propos. 6. lib. 2. faciunt quadratum ex tota AO, erit quadratum AK ex tota AO irrationale: Quamobrem etiam latus, & tota AO erit irrationale.

Primo itaque progressu ostendendum est duas CD, & DH esse rationales potentiâ tantùm commensurabiles, & ostendetur primo esse incommensurabiles longitudine. Nam in figura primò proposita rectangulum AI ex AB, & BO album quadrato nigro ex BO incommensurabile est; quòd ex 1. lib. 6. rectangulum sit ad quadratum eiusdem altitudinis, vt basis AB ad basim BO; ideoque cum bases sint incommensurabiles, etiam rectangulum AI album ex AB, & BO erit nigro quadrato ex BO incommensurabile. Ideoque etiam duo rectangula duobus quadratis erunt incommensurabilia, quia rectangulum rectangulo æquali. Quadratumq; quadrato commensuratur ad præassump. Ideoque spatium quoque nigrum PD æquale quadratis erit incommensurabile spatio albo EH æquale rectangulis. Ipsæ ergo lineæ erunt incommensurabiles, cum sit rectangulum nigrum ad rectangulum album, vt basis ad basim ex 1. l. 6.

Probatur deinde 2. Progr. Quod etiam sint potentiâ commensurabiles. Nam spatium nigrum PD est medium, vtpote æquale quadratis nigris medijs ex præassumpt. & DE Rationalis. Ergo alterum latus CD erit Rationale saltem potentiâ, ex propos. 27. Et ex eadem cum spatium album EH sit medium, vtpote medijs rectangulis albis AI, & IH æquale, latus eius alterum HD erit potentiâ commensurabile; quia ED Rationalis est; itaque lineæ CD, & DH sunt incommensurabiles longitudine quidem, vt supra ostensum est: Verùm, vt modo ostendimus, commensurabiles potentiâ, compositę facient lineam CH irrationalem ex propos. 16. huius, Ideoque spatium PH conclusum sub rationali DE, vel CP, & sub irrationali CH erit irrationale: Quod consequens modo demonstrandum est.

Progress. 3. Si spatium CH esset rationale spatium, latus quoque CH esset rationale, & sic rationale, & irrationale; quod repugnat. Irrationale quidem, vt probatum est progress. 2. Rationale verò, vt ostendetur ex sententiâ aduersariorũ, si spatium ex CH afferant rationale. Nam facto quadrato PR ex Rationali CP, ita erit quadratum PR ad rectangulum HP, vt RC ad CH: sed rectangulum HP comparatum quadrato PR, ex aduersarijs est rationale: Ergo latus RC, vel æquale DE respectu lateris CH ob eandem altitudinem CR erit rationale, contra quòd ostensum est progress. 2. cum itaque hoc spatium PH sit irrationale, & sit æquale quadrato AK etiam quadratum illud erit Irrationale, & linea AC irrationalis erit respectu rationalis DE, quod erat ostendendum.

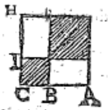
COROLLARIVM

Hinc est, quod medium spatium non superet medium spatium spatio rationali: sed irrationali spatio. Siquidem quadratum AK est irrationale, & medium, cui æquatur rectangulum PH & ideo irrationale est. Rectangulum quoque nigrum PD est irrationale, & medium, quod superatur à rectangulo PH spatio EH, quòd ostensum est irrationale; siquidem si spatium EH esset Rationale, etiam rectangula AI, & IK æqualia essent rationalia.

THEOR. IV. PROP. XXXIV.

Si à mediâ media auferatur potentiâ tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium contineat reliqua irrationalis erit, vocatur verò mediæ Apotome secunda.

Detrahatur à media AC media BC, ei AC tantùm potentiâ commensurabilis; quæ cum tota AC medium rectangulum contineant. *Dico reliquam BA irrationalem esse lineæ alicui expositæ Rationali, cui BC, & AC mediæ sunt.* Probatur. Nam, cum latera AC, & BC potentiâ tantum sint commensurabilia, efficient sua quadrata cõmensurabilia: Quare etiam cõposita ex 9. huius, magnitudo ex compositione resultans vtrisque seorsim commensurabilis erit; Quamobrem, cùm ea quadrata ex hypothesi media sint, tota magnitudo eis commensurabilis media erit ex propos. 9. huius.



Progress. 2. Rursùs, quia rectangulum sub AC, & BC medium, & irrationale est ex Thesi; si accipiantur duo ex ipsis AI, & BH; Tota quoque magnitudo media erit ob eandem rationem, quòd dupla sit singulis partibus, & duplum suæ parti dimidiæ commensurabile sit.

Progress. 3. Sciendum verò est ex 8. lib. 2. Duo quadrata, totum ex AC, & nigrum ex CB prædicta esse æqualia duobus rectangulis AI, & BH addito eis quadrato ex BA: Spatium itaque medium ex 1. progr. nempe duo quadrata superant spatium medium ex 2. progr. nempe duo rectangula, quadrato ex AB: sed ex præc. Coroll. medium non superat medium; nisi spatio medio: Ergo illud spatium reliquum quadratum ex AB erit medium, & irrationale; & linea AB; quæ eius latus contexit, erit irrationalis, quæ vocanda est media Apotome secunda.

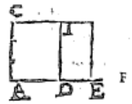
THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

A mediâ infinitæ irrationales fiunt, & nulli antecedentium est eadem.

Sit media DA. Dico *ex ea fieri irrationales infinitas, quæ nulli ex primo factis eædem sint.*

Exposita enim Rationali AC. Contineatur sub rationali AC, & mediâ AD spatium DC: hoc erit irrationale. Possit illud recta DE, idest sit latus quadrati illi spatio æqualis; hoc erit rursus irrationale quadratum, & DE erit media inter DA & AC ex prop. 19 lib. 6. Addatur DE ipsi Rationali, vel æquali DI, & fiat spatium EI, hoc iterum erit irrationale cum contineatur sub media ED, & rationali DI. Possit illud EF, quæ rursùs erit media proportionalis inter ED & rationalem DI, & sic in infinitum.



Quod vero ED non sit eadē, ac AD patet, quia EI est rectangulum, linea verò ED est latus quadrati ei rectangulo æqualis, sic EF est latus quadrati rectangulo EI equalis: vnde EF non potest æquari ipsi ED, sed nec ipsi DA; cum semper proportio, vel crescat, vel diminuatur. Est enim rectangulum ED minus, quam DA ob latus minus ED altero DI semper eodem persistente, & sic de alijs in infinitum.

Quòd verò rectangulum sub rationali, & irrationali contentum sit irrationale patet. Nam rectangulum ex media AD, & AC Rationali est ad quadratum ipsius Rationalis AC ob eandem altitudinem, quam ipsa Rationalis præstat, vt basis AD ad latus AC: sed ex Thesi sunt irrationales, ergo etiam ipsum spatium erit irrationale quadrato Rationalis, & sic dicas de omnibus alijs.

EXPENSIO IX.

De lineis in partes commensurabiles, seu incommensurabiles, & omninò irrationales secandis.

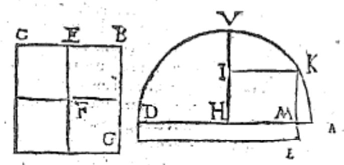
Visis inuentionibus linearum potentiâ incōmensurabilium; modo docere oportet, quomodo in qualibet exhibitá lineá partes commensurabiles, seu incommensurabiles reperiatur pro qua indagine necessaria est propos. 30. & 31. lib. 6. in qua docemus applicare rectangulum æquale dato rectilineo alicui lineæ, quòd ad implendam totam eius longitudinē figurá quadratá deficiat. Verùm quia propositio, vtpote vniuersalis est difficilior, nos verò solum indigemus applicatione ad lineam datam rectanguli tantum æqualis quadrato; inde ponemus Lemma faciliùs ad institutum deseruiens.

LEMMA I. PROP. XXXVI.

Datæ rectæ maiori rectangulum applicare æquale quartæ parti quadrati à minore descripti: sed taliter, vt per totam non se extendat; sed spatium relinquat, cui quadratum applicari possit.

Sit linea maior AD, minor CB, quæ diuisa bifariam in E; quadratum ex medietate CE descriptum, vt CF erit quarta pars quadrati à tota descripti CG, ex propos. 6. secundi Coroll. Huic ergo quartæ parti CE sit applicandum ad lineam AD maiorem æquale parallelogrammum.

Secetur AD bifariam in H, & deducta perpendiculari ad AD, quæ sit HV à puncto H detruncetur æqualis ipsi CE, & centro H interuallo HD medietate ducto semicirculo AKVD ab I ducatur IK perpendicularis ipsi HI, & eo puncto, quo secat semicirculum in K, deducatur alia perpendicularis ad AD, quę secet eam in M; segmentoque AM æqualis fiat reliqua ML, & tandem perficiatur rectangulum LD.



Dico hoc parallelogrammum LD applicatum rectæ AD esse, æquale quadrato CF, & deficere figura quadrata AL vsque ad occupandam totam lineam AD.

Probatur ex propos. 16. l. 6. MK est media proportionalis inter MD, & MA. Ergo eius quadratum ex propos. 19. eiusdem est æquale parallelogrammo LD ex lineis MD, & ML confecto: sed huius KM quadratum est æquale quadrato CF, quod sit MK latus æquale ipsius lateri CE ex effectione. Ergo rectangulum DL est æquale quadrato CF: patet verò deficere figura quadrata ad occupandam lineam AD; quia latus LM est æquale segmento MA.

THEOR. I. PROPOS. XXXVII.

Si recta secetur in partes inæquales, & ab eadem detrahatur pars æqualis parti minori: si illæ partes fuere commensurabiles, reliquum erit commensurabile toti; sin minus, reliquum erit toti incommensurabile.

Sit recta AD, cui detrahatur minor pars AB, & rursùs huic æqualis pars CD. Dico reliquum BG commensurabile esse ipsi primitiuæ AD; si tamen partes primo factæ AB, & BD ab initio fuere commensurabiles.

Pro-

Probatur. Quoniam partes AB, & BD ponuntur primò commensurabiles suo toti AD: Etiam tota linea AD vtrique ipsarū cōmensurabilis erit ex propos. 9. Componantur AB, & æqualis CD: eritque composita commensurabilis suæ parti dimidiæ AB, & ideo tota AD etiam huic toti ablato AB, & CD commensurabilis erit. Quare totū AD, etiam reliquo commensurabilis erit ex Coroll. prop. 9.

Probatur secundus casus eodem genere argumenti. Nam, si pars AB est incommensurabilis parti BD, eritque composita ex tota AD ex propos. 10. incommensurabilis singulis suis partibus AB, & BD. Addatur parti AB pars æqualis CD, vt ideo ei commensurabilis, & huic toti adhuc erit incommensurabilis tota AD ex propos. 8. & ideo ex Coroll. propos. 10. erit quoque incommensurabilis residuo BC.

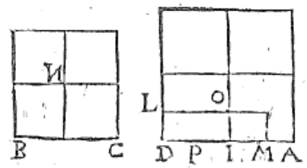
COROLLARIVM

Deducitur. Conuersam huius propositionis quoad vtraque partes esse quoque veram: nempe, quòd si BC ponatur commensurabilis ipsi toti DA, etiam BA, vel CD, vel vtrasque simul commēsurabiles, ipsi DA futuras; quoniá si tales nō essent, deberet dici, quòd essent incommensurabiles BA, seu CD ipsi DA: quare sequeretur quoque iuxta præced. BC esse incommensurabilem ipsi AB contra Thesim. Similiter si CB incommensurabilis ponatur ipsi DA: Erit etiam BA, vel CB, vel vtraque simul incommensurabiles ipsi AD ob eandem rationem; quia si essent commensurabiles sequeretur contra Thesim iuxta anteced. ostensionem, BC non esse incommensurabilem.

THEOR. II. PROPOS. XXXVIII.

Si fuerit linea quædam maior, cui fuerit applicatum rectangulum æquale quartæ parti quadrati à minore descripti, & secet lineam in partes inæquales; excessus, seu differentia, qua maius segmentum superat medietatem, erit latus quadrati, cuius quadruplum est excessus quadrati lineæ totius maioris super quadratum minoris.

Sit linea AD, cui fuerit applicatum ex Lemmate præcedenti rectangulum ML æquale quartæ parti CN quadrati à minore CB descripti. Dico, *quod differentia MI erit latus quadrati, cuius quadruplum æquat excessum, quo quadratum lineæ AD superat quadratum lineæ CB.*



Quòd, vt probetur; diuidatur maior AD bifariá in I, & ex ea sumatur DP æqualis lineæ, & segmento AM, quo facto cum AI, & ID sint medietates, & ideo æquales, & MA, & PD ablatæ æquales; reliquæ MI, & IP æquales remanebunt.

Progr. 1. Recta AD est diuisa bifariam in I, & & non bifariam in M: Quare ex propos. 7. lib. 2. rectangulum ML sub MA, & MD contentum vnà cùm quadrato ex MI erecto erit æquale quadrato ex medietate IA descripto.

Progr. 2. Sed rectangulum hoc ex hypothesi, & constructione est æquale quartæ parti hoc est CN quadrati ex minore CB descripti, Ergo hoc rectangulum ML quater acceptum æquabit totum quadratum ex CB descriptum. Et quadratum ex MI, vt ex Coroll. propos. 6. lib. 2 constat æquabit quadratum ex MP quater acceptum, quòd supra MI, & IP ostensæ sint æquales.

Progress. 3. Sed quadratum ex AI æquat rectangulum ML simul cum quadrato ex MI, & dixi progress. 1. & hoc quadratum quater acceptum æquat quadratum totius AD ex Coroll. propos. 6. lib. 2. Ergo etiam rectangulum ML ex segmentis, & quadratum MI quater accepta æquabunt quadratum ex linea tota AD descriptum.

Progress. 4. Sed ex secundo progr. Rectangula quatuor sunt æqualia quadrato ex CB, & hæc eadem simul cum quatuor quadratis ex 3. progress. æquant quadratum ex AD: Ergo AD quadratum excedet quadratum ex CB quatuor quadratis ex MI differentia, quod erat probandum; Quatuor autem quadrata ex MI æquant quadratum ex MP, vt progress. 2. dictum est.

PROBL. I. PROPOS. XXXIX.

Diuidere datam lineam in partes incommensurabiles.

Sit data recta AD in præced. schemate, quam oporteat diuidere in partes incommensurabiles. Huic primò reperiatur alia tantùm potentiâ commensurabilis minor CB, qua minori possit efficere ipsa data maior AD quadratum maius tali excessu quadrato, qui habeat latus sibi maiori incommensurabile ex propos. 14. huius. Applicetur autem rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex minore CB descripti, quòd deficiat ad eius longitudinem occupandam figurâ quadratâ, & sit ML. Dico MD esse partem in linea AD incommensurabilem ipsi AD, & etiam compartem AM talem esse ipsi AD actu, & potentia, sed insuper inuicem esse incommensurabiles.

* Probatur. Quia ex præced. MI, qua maior pars superat medietatem est quarta pars quadrati, quo linea AD suo quadrato superat quadratū lineæ CB. Ideoque MP erit linea subtendens totum quadratum, quò maioris AD superat minoris CB quadratum: Ergo MP erit incommensurabilis, quia ex hypothesi excessus iste quadratus obtinet latus incommensurabile ipsi AD. Sed ex propos. 37. Coroll. si MP sit incommensurabilis ipsi AD etiam MA & PD erit incommensurabilis toti lineæ AD. Ex propos. 10. autem, si tota magnitudo ex duabus conflata vni earum incommensurabilis sit, erit, & alteri ex partibus, & ipsæ partes ab initio assumptæ incommensurabiles erunt. Quare AM, & PD ipsi AD toti, & etiam comparti MP incommensurabilis erit. Quòd si componatur MP, & AM, vel æqualis PD tota quoque magnitudo MD erit incommensu-

menſurabilis parti MA. Quamobrem portiones AM, & MD incommenſurabiles erunt longitudine, tum toti AD, tum inter ſe.

Præaſſ. Pro oſtenſ. 2. partis, ſilicet, quòd ſint, ne dum actu incommenſurabiles, ſed etiam potentiâ, tum reſpectu lineæ AD, tum inuicem incommenſurabiles, præſupponendum eſt; Quòd rectangulum ML eſt commenſurabile quadrato CB, cum ſit eius quarta pars, & ideo quadrato AD, cui ex CB quadratum ex Theſi commenſuratur. Deinde, quòd etiam quadratum ex MP eſt commenſurabile eidem AD. Quia, cùm quadratum ex CB ſit commenſurabile toti quadrato ex AD, erit etiam reliquum ex MP eidem commenſurabile; quòd autem ex MP ſit reliquum oſtenſum eſt in præced. Tandem rectangulum ML eſſe eiuſdem altitudinis, ac quadratum ex AM, & quadratum ex MD, nam vnum latus DL æquat AM ex hypotheſi, & MD eſt latus etiam quadrati ex MD.

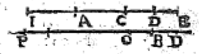
* Probatur, quòd AM, & MD ſint incommenſurabiles potentiâ ipſi AD Rectãgulum LM eſt cõmenſurabile quadrato CB, cum ſit eius quarta pars: Ergo etiam quadrato AD, cui ex CB commẽſuratur quadratum. Sed vt eſt AM, ad MD incommenſurabiles ex 1 l 6 ſic eſt quadratum ex AM ad rectangulum ML ob eandem altitudinem DL æqualẽ PD: Ergo etiam quadratum ex MA erit incommenſurabile quadrato ex CB, & ideo ex AD. Idem oſtendetur de quadrato MD. Quia eſt eiuſdem altitudinis ob latus MD idem, ac rectanguli ML. Ergo erit incommenſurabile rectangulum ML, & quadratum ex MD, quales ipſæ baſes ſunt AM, & MD, & ideo quadratum ex MD erit incommenſurabile ipſi quadrato ex CB, & quadrato ex AD.

* Probatur. Etiam, quòd quadrata ex AM, & MD ſint inuicem incommenſurabilia: Nam rectangulum ML duplicatum, cum quadrato ex MP, ex 9. ſecundi æquant quadratũ ex MD cum quadrato PD. Cũ autẽ rectang. ML, & quad. MP ex præaſſ. ſit commenſurabile ipſi AD. Etiam illa rectangula ML duplatum, & quadratum MP ſunt commenſurabilia quadrato CB, & AD: Ergo etiam totum quadratum ex MD ſimul cùm quadrato ex PD, vel AM, commenſurabilia erunt, quæ illa æquant quadrato ex CB, & AD, ſed quadratum ex AM eſt oſtenſum incommenſurabile quadrato ex CB, vel AD. Ergo etiam erit incommenſurabile toti quãtitati aggregatæ quadratorum AM, & MD; Quare ex propoſ 10. ipſa quadrata erunt inuicem incommenſurabilia.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Si linea extrema, & media ratione ſecetur, vtrumque ſegmentum irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

* PRobatur de maiori ſegmento. Nam ſi tota linea AB ponatur rationalis; etiam dimidium erit rationale. Sed ex propoſ. 35. l. 6. ſi hoc dimidium reperiatur coniunctum cum maiori ſegmento facit quadratum quintuplo maius; quã à dimidio deſcriptum quadratum. Quare dimidij CB, vel æqualis AI, & maioris ſegmenti AD tanquam ex vnica linea, ideſt DI factum quadratum erit vt 5. reſpectu quadrati ex ſola dimidia AI, quod erit vt 1. Eritque proportio tanquam numeri ad numerum, vnde lineæ ipſæ dimidia AI, & ſegmentum AD ſimul reſpectu dimidij tantum, ideſt AI, vel CB erunt potẽtia tantum commenſurabiles, cum earũ quadrata habeant proportionem, quam



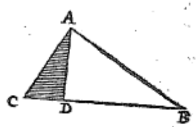
numeri ad numerum: Si ergo dimidia IA auferatur ab ID, reliquum remanebit AD ſegmentum maius ex propoſ. 19. huius Apotome.

* Probatur quoque ſecunda pars. Nam, ſi addatur PB tota minori ſegmento, & ſiat DP efficit ex propoſ. 38. lib. 6. quadratum quintuplo maius, quàm quòd efficitur à maiori ſegmento PO; ſi ergo auferatur maius ſegmentum à totâ, cùm minori ſegmento DB, remanebit duplex minus ſegmentum; nempe, quòd erat prius DB, & ID, quod relinquitur ex hac ablatione BO, Quare DO eſt Apotome, ſed DB eſt dimidium BO: Ergo DB eſt Apotome, quòd erat probandum: Quoniam irrationali commenſurabilis irrationalis linea ex prop. 8. huius eſt, & Apotome quoque, quòd exoriatur ex ablatione minoris à maiori linearum, quæ inuicem potentia commenſurantur, cùm earũ quadrata ſint, vt ¼ quad. ad quinque, ex 6. l. 2.

EXPENSIO X.

De irrationalibus ſimpliciter.

TErtium genus irrationalium eſt earum, quæ naſcuntur ex equipotentia ad duas lineas incõmenſurabiles, ne dũ longitudine ſolùm, ſed etiã incõmenſurabiles potentiâ; & huius generis ſunt tres ſpecies. Prima ſpecies eſt earũ, quarum quãdrata ſimul poſita faciunt ſpatium rationale; rectangulum verò ab ipſis contentum medium, Secundum genus ſe habet è contrà; nam rectangulum ſub ipſis contentum eſt rationale, ſpatium verò ex earum quadratis conflatum eſt irrationale. Tertium genus eſt earum, quæ faciunt rectãgulum ſub ipſis contentum medium, & ſpatium quoque, quòd conflatur ex eorum quadratis medium, quæ quomodo inueniãtur docere oportet.



Obſeruandum eſt ex 29. l. 6. quod perpendicularis in rectangulo ab angulo recto demiſſa ſecat baſim tali modo, vt rectangulum ſub tota, & maiori ſegmento ſit equalis quadrato maioris lateris, at rectangulum ſub tota, & minore ſegmento ſit æquale quadrato minoris lateris.

Quod patet ex Coroll 2. pr. 8. l. 6. Nam latus BA maius eſt medium proportionale inter totam baſim BC, & maius ſegmentũ BD: Ergo ex propoſ. 19. lib. 6. eius quadratum erit æquale rectangulo, quod totâ baſi BC maiori ſegmento BA ambitur. Eadem ratio eſt de totâ BC, & minori ſegmento DC inter, quæ medium proportionale eſt minus latus CA.

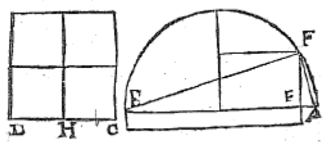
Sic obſeruandum eſt, quòd quadratum perpendicularis eſt æqualis rectangulo ſegmentorum, quòd ex eiuſdẽ 8. Cor. 1. l. 6. pp̃dicularis ſit mediũ proportionale inter duo baſis ſegmenta.

Sic rectangulum ſub tota baſi, & ſub perpendiculari eſſe æquale rectangulo crurum: Patet, quia ob ſimilitudinem triangulorum, ita eſt CB ad crus maius AB, vt crus minus, & baſis AC in triangulo CAD eſt ad perpendicularem AD, cruſq; maius in eodem triangulo, ideoque ex propoſ. 19. lib. 6. rectangulum contentum ſub extremis proportionalibus erit æquale mediarum rectangulo.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant quidem compoſitum ex ipſarum quadratis rationale; rectangulum verò ſub ipſis contentum medium.

REperiantur duæ Rationales poteſtate ſolùm commenſurabiles, ex propoſ. 14. huius, quarum maior AB plus poſſit, quam minor CD quadrato rectæ ipſi maiori AB incommenſurabilis. Deinde ex propoſ. huius 36. applicetur maiori parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, quod ſit equale parti quartę quadrati à minore CD deſcripti, cuius latus eſt medietas CH, diuidatque eam in E in partes incommenſurabiles, ita quòd rectangulũ contineatur ſub AE, & EB. Deſcripto tandem ſemicirculo ſuper AB, erigatur à puncto E perpendicularis EF, ad AB, quæ ſecet ſemicirculum in F; iunctis ergo punctis extremis AF, & BF erunt rectæ AF, & FB duæ incommenſurabiles, quarum quadrata compoſita facient magnitudinem rationalem; *rectangulum verò ab ipſis concluſum medium.*



Probatur primò: Quòd ſint *incommenſurabiles* ex propoſ. 39. huius. Partes AE, & EB ſunt incommenſurabiles, ſed vt eſt ſegmentum AE ad ſegmentum EB; ita eſt rectangulum ſub tota, & minore parte EA ad rectangulum ſub tota, & maiore parte EB ex 1. ſexti; quòd ſint eiuſdem altitudinis ob idem latus AB totius, commune vtriſque. Ergo etiam hæc duo rectangula erunt incommenſurabilia, vt ſunt baſes AE, & EB. Sed hoc rectangulum ex tota, & maiore parte EB eſt æquale quadrato ex FB, vt ſuprà notaui, ſicut, & rectangulũ ex tota, & minore parte AB, vt ſuprà eſt æquale quadrato ex latere AF minore. Ergo quadratum cruris maioris BF, & quadratum minoris AF erunt incommenſurabilia; & ideo rectæ AF, & FB, quæ horum quadratorum contexunt latera, erunt incommenſurabiles eodem modo, quo AE, & EB, nimirum toti rationali AB, & inter ſe.

Probatur ſecunda pars. Quod earum quadrata compoſita efficiant ſpatium rationale. Nam ex 11. ſecundi efficient ſpatium æquale quadrato ex AB ob rectangulum triangulum AFB: Baſis verò AB ponitur potentiâ commenſurabilis ipſi CD minori, & ideo eius quadratum erit rationale. Quadrata ergo ex AF, & FB ſimul poſita illi quadrato æqualia efficient ſpatium rationale.

Probatur tertia pars, quòd rectangulum ſub ipſis AF, & FB contentum ſit medium. Rectangulum ſub AE, & EB contentum, vtpote, quæ ſint poteſtate ſolùm commenſurabiles medium eſt prop. 26. huius. Ergo etiam omne aliud, quòd ipſis ſit commenſurabile ex propoſ. 28. Coroll.

Sed rectangulum ex totâ baſi AB, & perpendiculari EF illi commenſuratur, quòd ſit medietas eius, ergo hoc rectangulum erit medium.

Quòd verò ſit medietas rectanguli ex CD, & AB incommenſurabilibus rectangulum ex AB, & EF oſtenditur; quia EF horthogonalis eſt medietas lateris CD. Vnde, cùm rectangulum ex tota AB, & FE ſub totâ AB, & medietate lineæ CD contineatur erit dimidio minor; quàm rectangulum ſub totâ AB eâdem, & totâ CD.

Quòd verò orthogonalis ſit medietas lateris CD, ſic oſtenditur, perpendicularis FE quadratum ex præaſſumpt. æquale eſt rectangulo ex partibus AE, & EB baſis; ſed hoc ex effectione eſt æquale quadrato ex dimidia CH totius CD: Ergo quadratum perpendicularis FE, & quadratum ex HC erunt æqualia. Vnde, & latera erunt æqualia, & perpendicularis EF erit ęqualis medietati CH lineę CD. Rectangulum ergo ſub EF, & AB, vtpote medietas rectanguli medij, & irrationalis ſub AB, & DC contenti erit medium, & irrationale: Sed huic ex prænotatis eſt æquale rectangulum ex cruribus AF, & FB; Igitur rectangulum ex cruribus AF, & FB erit medium, & irrationale. Duæ itaq; AF, & FB faciunt quadrata ſimul poſita rationalia, at rectangulum ſub ipſis contentum medium, & irrationale, & ipſę ſunt incommenſurabiles potentiâ ipſi AB Rationali potentiâ commenſurabili.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommenſurabiles; quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis medium: rectangulum verò ſub ipſis contentum Rationale.

INueniantur duę *Media* ad differentiam propoſ. anteced. AB, & CD potentia tantùm inuicem commenſurabiles, quæ Rationale ſpatium amplectantur ex propoſ. huius 29. ſed hac conditione, quòd AB maior plùs poſſit, quàm CD minor quadrato rectæ ſibi maiori longitudine incommenſurabilis, quas docuimus inuenire Coroll. prop. 30. Deinde applicetur maiori rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex CD minori deſcripti, & omnia peragantur, vt priùs vtendo eadem figura. *Dico primo* AF, *&* FB *eſſe incommenſurabiles.*

Probatur eadem ratione, quâ oſtenſa eſt prima pars pręced. propoſ. ex eo principio, quòd partes AE, & EB ſint incommenſurabiles. Vnde, & eorum rectangula ſub tota AD, & ipſis AE, & EB comprehenſa, vtpote eiuſdem altitudinis: ideoque quadrata ex AF, & BF eis æqualia: Idcircoque, & ipſa latera AF, & BF erunt incommenſurabilia. Dico ſecundo. *Compoſitum ex ipſarum quadratis eſſe medium, & irrationale.*

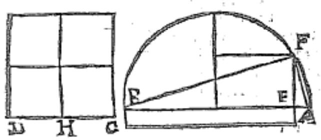
Probatur eodem modo, quo oſtenſa eſt ſecunda pars præced. Ex eo, quod ſit æqualis ea magnitudo quadratorum compositorum ex AF, & FB quadrato ex AB media. Vnde illud spatium duorum quadratorum medium erit ex Coroll. propos. 28.

Dico tertio *rectangulum sub ipsis contentum esse rationale*. Probaturque eadem deductione, qua tertia pars præced propos. Nempe ex eo, quia rectangulum earum AF, & FB æquale est rectangulo ex perpendiculari FE, & tota BA; quod est medietas rectanguli sub AB, & CD, & ideo ipsi commensurabili. Idcircoque, cùm rectangulum illud ex AB, & CD ex Hypothesi sit rationale, cùm medias assumpserimus spatium rationale continentes, etiam dimidium eius erit rationale, & ideo rectangulum ex AF, & FB huic dimidio æquale, erit quoque rationale.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, quæ faciant compositum ex earum quadratis medium, & rectangulum sub ipsis comprehensum medium.

REperiantur duę Mediæ potentiâ tantùm commensurabiles AB, & CD; quæ medium contineant spatium, & irrationale ex propos. 30. huius, & maior plus possit, quàm minor quadrato cuiusdam rectæ maiori incommensurabilis. Deinde omnia fiant, vt propos. 41. habebimus intentum,



Nam ijsdem probationibus vtendo, primo AE, & EB erunt incommensurabiles ob quadratum, quo maioris superat minoris quadratũ maiori ipsi incommensurabile, & ideo AE, & EB sunt incommensurabiles, & hinc earum rectangula AB tota pro altero latere inseruiente erunt incommensurabilia; Idcirco etiam quadrata linearum AF, & FB eis æqualia. Vnde ipsæ AF, & FB erunt incommensurabiles.

Secundo aggregatum quadratorum AF, & FB erit medium, quòd sit æquale quadrato ex AB medio propter suum latus AB medium.

Tertiò rectangulum sub AF, & FB erit medium; cum sit medietas rectanguli sub AB, & CD medij ex Thesi, & irrationalis, quòd sit æquale rectangulo ex perpendiculari dimidia datæ CD, & altera data AB, facto, & ideo rectangulum ex lineis AF, & FB erit medium, & irrationale, vt ex suppositione est rectangulum ex AB, & CD.

EXPENSIO XI.

De lineis irrationalibus, quæ ab irrationalium simpliciter additione, vel subductione resultant.

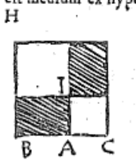
VIdimus, quomodo tres species irrationalium reperiantur in anteced. Expens. quæ certis conditionibus discriminantur. Si ergo istæ inuicem addantur constituunt tres species irrationalium *Maior* prima; Secunda *Rationale, & Medium Potens*. Tertia *Bina Media potens*. Si verò altera alteri subducatur relinquunt tres species alias irrationalium. Nempe *Primã, quæ dicitur minor*. Secundam *cum Rationali medium totum efficiens*. Tertiam *Cum medio medium totum efficiens*; quas omnes demonstrabimus esse irrationales.

THEOR. I. PROPOS. XLIV.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, quarum quadrata aggregata rationalia sint, Rectangulum verò irrationale. Tota est irrationalis, quæ vocatur Maior.

COniungãtur duæ rectę AB, & AC potẽtiâ commensurabiles, quarum quadrata aggregata CI, & HI rationalia sint Rectangulum verò ab ipsis effectum irrationale sit BI. Dico *totam* CB *esse irrationalem*.

Probatur ratione, quã vsi sumus propos. 15. Rectangulum nigrum BI sub AB, & AC conclusum est medium ex hypothesi; Vnde, & duplicatum addito ei altero nigro medium, & irrationale perseuerabit ex Coroll. propos. 28. cùm sit commensurabile parti componenti. Sed aggregatum quadratorum alborum CI, & IH, quibus pro lateribus inseruiunt, ponitur rationale. Rectangula nigra igitur quadratis duobus albis erunt incommensurabilia. Et si rectangula cum quadratis componantur totum aggregatum ex propos. 10. erit vtrique parti componenti irrationale. Hoc autem totum est æquale ex propos. 6. secundi quadrato ex CA, & AB, tanquàm vnâ lineâ constituto. Ergo hoc quadratum totius compositæ AB erit incommensurabile quadratis duobus nigris: Sed quadrata duo ex lineis seorsim sumptis ex Thesi ponuntur rationalia: Ergo quadratum ex tota CB quadratis albis erit irrationale. Vnde, & tota CB erit irrationalis ipsis CA, & AB, quam placuit appellare *Maiorem*.



THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur. Quorum quadrata aggregata faciant spatium medium; Rectangulum verò, quod claudunt, Rationale tota irrationalis erit; vocatur autem Rationale, & medium potens.

COmponantur duæ rectæ DE, & CE potentiâ incommensurabiles, quas docuimus reperire propos. 35. quæ compositum quadratorum faciunt medium; rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale. Dico *has compositas facere lineam Irrationalem*.

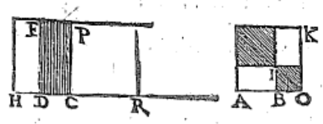
Probatur eâdem ratione adhibitâ, quæ in præcedenti. Nam rectangulum nigrum CQ est Rationale, quod claudũt inuẽtæ ED, & CE, & cũ alio nigro æquali rectangulo est adhuc rationale. Quadratorum verò alborum aggregatum ex Thesi est irrationale. Ergo si simul omnia ponantur tota quantitas, & magnitudo aggregata singulis partibus erit irrationalis, sicut, & ipsis quadratis. Sed hæc tota aggregatio quadratorum, & rectangulorum ęquat quadratũ DV ex CD ex prop. 6. l. 2. Ergo hoc quadratum magnum ex CD erit irrationale, & idcirco eius latus tota composita BC ex duabus repertis CE, & ED erit irrationalis, quæ appellabitur *Rationale, & medium potens*, quia potest efficere suis partibus, quibus componitur rectangulum rationale, & quadratorum partium aggregatum medium, nempe irrationale.

THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur; quorum quadrata composita spatium medium efficiant, & rectangulum quoque, quod continent medium sit, tota irrationalis erit; vocatur autem bina media Potens.

PRobatur eadem ratione, qua vsi sumus ad ostendendam propos. 33.

Vt ergo probetur applicandum est alicui rationali DE rectangulum DP nigrum, quod sit æquale rectangulis duobus albis ex hypothesi medijs duarum datarum AB, & OB; & eidem Rationali PE applicetur aliud rectangulum æquale duobus quadratis nigris ex hypothesi medijs, quæ fiant ex AB, & OB.



Quo facto probabitur eodem modo, ac ibi propos. Totum spatium PH esse irrationale; quòd sit confectum ex duobus rectangulis, quorum vnum est æquale rectangulo medio duplici albo, & alterum quadratis nigris, quæ quantitates sunt Incommensurabiles; quòd rectangulum album ad quadratum nigrum ob eandem altitudinem, quam cum illis habent, sit vt bases AB, & OB, quæ ponuntur incommensurabiles, & ideo quadrata ipsa rectangulis nigris erunt incommensurabilia. Quare rectanguli PH, partes DP, & FH, vtpote æquales quantitatibus inuicẽ incommensurabilibus constans, erit incommensurabilis altera, alteri: Quare lineæ ipsæ erunt incommensurabiles CD ad DH.

Erunt autem potentiâ commensurabiles Quoniam ED est rationalis, & spatium medium rationali applicatum facit aliud latus potentia commensurabile; ex propos. 27. Quamobrem duæ lineæ potentiâ tantùm commensurabiles sunt, quæ compositæ facient lineam irrationalem ex propos. 16 huius. Spatium verò, quod continent progr. 3. propos. 33. ostensum est irrationale: quia ibi demonstratur: quod, si spatium contineatur sub rationali, & irrationali, illud est irrationale.

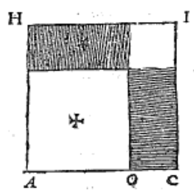
Hoc autem spatium, ex effectione æquant rectangula alba, & quadrata nigra, quæ simul faciunt quadratum AK, ex AO. Ergo quadratum ex AO erit Irrationale; & ideo ipsa AO irrationalis erit.

THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

Si à linea recta auferatur alia potentia incommensurabilis existens illi toti, sit autem compositum ex ipsorum quadratis rationale: at rectangulum ab ipsis clausum medium: reliqua irrationalis erit, quæ vocatur Minor.

DIcit propositio quod si detur AC linea maior, & tota, & OC minor, quorum quadrata sint rationalia; at rectangulum sub ipsis contentum, vt est semialbum OI, sit medium: Dicit inquam, quod si minor OC auferatur à maiori AC, *reliqua* AO *erit irrationalis*.

Probatur eodem modo, ac propos. 23. huius. Rectangulum sub AC, & OC seminigrum inuentis lineis iuxta propos. 41. est ex Hypothesi medium; ergo duplicatum erit quoque medium ex Coroli. propos. 28.



Compositum verò ex quadratis datarum AC, & OC Rationale: Igitur prædictis rectãgulis OI, & PI semialbis quadrata album ex linea OC, & aliud totum CH erunt irrationalia, & incommẽsurabilia. Si verò rectangulis prædictis addatur quadratum ex residuo AO ex 7. secundi efficietur magnitudo æqualis duobus quadratis prædictis CH ex CA toti, & alteri ex linea OC. Ideoque incommensurabilis rectangulis duobus OI, & PI. Cum ergo tota magnitudo quadrati OA, & rectangulorum duorum seminigrorum PI, & IO sit incommensurabilis rectangulis seorsim sumptis ex propos. 10. erit, & incommensurabilis quadrato ex AO. Quapropter erit hoc quadratum cruce insignitum ex AO irrationale. Vnde ipsum

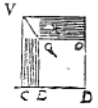
 residuum

residuum linea AO erit irrationalis, quod apellandum est linea Minor.

THEOR. V. PROPOS. XLVIII.

Si recta linea à rectá auferatur incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum ex ipsorum quadratis medium; rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale, Reliqua irrationalis erit. Vocatur autem, cum Rationali medium totum efficiens.

DEtrahatur à rectá CD maiori recta CE minor, quæ inuentæ sint iuxta propos. 42. Dico *reliquum* ED *esse irrationale.*



Probatur eadem ratione, ac antecedens. Rectangulum sub CD, & CE contentum ex hypoth. ponitur rationale, vnde, & duplicatum tale erit, vt OY, & EV: Sed duorum quadratorum DV, & QV ex duobus EC, & CD lateribus factorum compositum est irrationale. Ergo hoc compositum duplicatis rectangulis OV, & EV erit irrationale, & incommensurabile: Sed si rectangulis addatur quadratum album DQ, ex ED ex 9. secundi efficitur magnitudo æqualis magnitudini ex conflatis quadratis DV, & QV ideo quadratis seorsim fumptis incõmensurabilis, ex propos. 10. huius. Quare incõmensurabilis quoque quadrato residui albo ex QD. Ideo reliqua ED irrationalis erit, que vocatur. *Cum rationali medium totum efficiens.*

THEOR. VI. PROPOS. XLIX.

Si à rectâ auferatur recta potentiâ incommensurabilis existens toti, quæ faciat compositum ex ipsorum quadratis mediam, & rectangulum sub ipsis contentum medium, & quadratis incommensurabile; Reliqua irrationalis erit, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens.

SIt recta AC, à qua detrahatur OC, & fint eiusdem rationis, quas docuimus reperire prop. 43. additá eá conditione, quod rectangulum non commensuretur quadratis ex AO, & AC. Dico residuum OC esse incommensurabile, & irrationale.

Probatur eadem ratione, quá vsi sumus prop. 34. Tota magnitudo ex repertarum AC, & OC quadratis conflata media est ex Thesi, sicut, & rectangulum feminigrum sub ipsis contentum, etiam si duplicatum, vt sunt duo rectangula nigra, cum duplici quadrato minori, & quia rectangulum feminigrum duobus quadratis albis ponitur incommensurabile; tale quoque erit compositum ex rectangulis duobus feminigris.

Sed si duobus Rectangulis addatur quadratum maius ex residuo OC ex propos. 9. secundi efficietur magnitudo æqualis magnitudini ex duobus quadratis AC toto, & AO: Ergo hęc tota magnitudo quadratis duobus seorsim fumptis erit media, & incommensurabilis iuxta propos. 10. superant itaq; quadrata media magnitudinem rectangulorum compositorum nigrorum quadrato ex residua OC.

Sed medium non superat medium rationali, aliquâ quãtitate ex Coroll. prop. 33. Ergo quadratum ex residua OC non est rationalis quantitas: Vnde erit irrationalis, & linea illud quadratum subtendens OC erit irrationalis, quæ vocatur. Cum media medium totum efficiens, quia nascitur à partibus, quæ efficiunt tum quadrata composita: tum rectangulum, quod ambiunt medium, & irrationale.

COROLLARIVM VNIVERSALE.

HAbemus itaque 26. inuentiones diuersarum linearum irrationalium. Primò sex Binomiorum, quæ nascuntur à compositione linearum potentiâ tantum commensurabilium. Secũdò sex Apotomes ex subtractione potentiâ tantùm rationalium. Deinde habemus mediam irrationalem, quæ inter duas potentiâ tantùm commensurabiles media proportionalis est, ex quà nascũtur quatuor species irrationaliũ duę per subductionẽ, quę dicũtur Apotome media prima, & Apotome media secunda, duæ per additionẽ quę vocantur Binomium mediũ primũ, & Binomiũ mediũ secundũ. Tandẽ inuenimus tria genera irrationalium simpliciũ, ex quibus prodiere, sex species irrationalium; nempe duæ à singulis generibus; vna quidem per additionem, vt sunt, quas hic descripsimus prima *Maior*. Secunda *Rationale, ac med um potens*. Tertia *Bina Media potens*. Altera verò per ablationem nempe Prima *minor*. Secunda *Cum rationali medium totum efficiens*, & Tertia *Cum medio medio totum efficiens*, quæ omnes, si simul ennumerentur erunt 26. nempe 22. per additionem, & ablationem, & aliæ genericæ, nempè Mediæ, & irrationales simpliciter, & si placeat reperire etiam plures ex media infinitæ mediæ fiunt, vt supra diximus.

Addit verò Euclides multas harum linearum proprietates, quæ exoriuntur ab applicatione spatiorum irrationalium ad ipsas, seu ad aliquam rationalem: sed cum visum nobis fit, ea non pertinere ad elementa, noluimus in plura hunc tractatum extendere, cum hæc sufficiant ad naturam irrationalium, exortumque intelligendum: neque amplior earum cognitio ad prosecutionem Mathematices dessideretur.

EXPENSIO XII.

De commensurabilibus ad lineas irrationales.

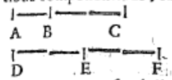
FÆcundum germen linearum irrationalium sunt lineæ ipsæ irrationalibus commensurabiles: nam ipsæ quoque illarũ naturam inducunt, & irrationales sunt: Vnde ad multiplicandas irrationales sufficiet multiplicare alicui irrationali semel repertæ commensurabiles.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. L.

Alicui ex Binomijs commensurabilis, ipsa quoque Binomium est.

IRrationalitas Binomiorum consistit in eo, quod totum sit incommensurabile omnino suis partibus componentibus, cùm partes ipsæ sint potentiâ commensurabiles. Sit ergo Binomium AC diuisum in sua nomina AB, & BC, & ei linea commensurabilis longitudine DF; ostendendum est DF esse quoque Binomium, & ostendetur ex eò, quòd possit DF in duas partes diuidi, quibus totum erit irrationale, cùm ipsæ partes inuicem sint potentiâ commensurabiles.



Fiat itaque ex propos. 15. lib. 6. vt AC ad DF; sic AB ad DE. Eritque etiam ex propos. 22. quinti cum sit totum AC ad totum DF, vt ablatum AB, ad ablatum DE, reliquum quoque BC ad reliquum EF, vt totũ ad totũ, & vt ablatũ AB ad ablatũ DE. Quare ex 5. huius erunt commensurabiles AB, & DE, sicut etiam BC, & EF. Sed BC, & AB ponuntur incommensurabiles toti AC: Ergo etiam DE, & EF ipsi toti AC tales erunt, sed AC, & DF sunt commensurabiles, ergo ex propos. 8. huius. & ipsi suo toti DE, & EF erunt incommensurabiles.

Progr. 2. Probatur quoque esse DE, & EF duas tantùm potentiâ inuicem incommensurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo *permutando* AB ad BC, vt DE respondet in proportione ad EF; sed AB, & BC sunt potentia commensurabiles. Ergo etiam ex 5. huius tales erunt DE, & EF. Quare cum DE, & DF sint duæ potentiâ tantùm commensurabiles ex ijs constet DF, etiam DF erit Binomium.

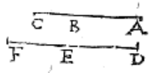
THEOR. II. PROPOS. LI.

Apotome commensurabilis, etiam ipsa Apotome est.

SIt AB Apotome, & BC congruens, & DE ipsi AB commensurabilis. *Dico, quod etiam hac ipsa* AB *Apotome sit*; Scilicet ex subductione duarum Rationalium potentia tantum, irrationalis quædam linea resultans respectu ipsarum, à quibus subduci poterat.

Fiat itaque AB ad DE, vt AC ad DF ex propos. 15. lib. 6.

Quia itaque est totum AC ad totum DF, vt pars AB ad partem DE ablatas, erit quoque ex prop. 22. lib. 5. reliquum BC ad reliquum EF, vt totum ad totum, & vt ablatum ad ablatum, & ideo inuicem commensurabiles lineæ.



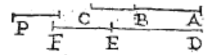
Sed AB ablatum ponitur, vtpote Apotome incommensurabile ipsi compar-ti BC, & toti AC. Ergo etiam DE ex huius 5. erit incommensurabile ipsi DF, & EF. Quoniam inuicem AB, & DE sunt commensurabiles sicut, & inuicem tota AC, & DF, quare reliquum EF erit incommensurabile toti AC: vnde, & suo toti ei commensurabili DF ex propos. 8. huius.

Probatur deinde, quòd DF, & EF sint potentiá commensurabiles. Nam ostensumest, quòd sicut est AC totum ad DF totum sic, & BC pars reliqua sit ad EF partem reliquam. Ergo *permutando*, vt est AC totum ad suam partem reliquam BC in proportione, sic est DF totum ad suam partem reliquam in proportione, sed AC totum ad BC reliquam est potentiá commensurabilis linea. Ergo ex propos. 5. huius etiam totum DF ad reliquum EF. Vnde cum DE sit residuum à subtractione Rationalis EF potentia tantùm commensurabilis respectu illius DF, à quá subducta est, ipsa erit Apotome quoque, & respectu illarum, à quibus emanat eãdem naturam Apotome sortitur.

THEOR. III. PROPOS. LII.

Binomio medio commensurabilis, & ipsa Binomium medium est.

SIt P Rationalis, & AC Binomium medium diuisum in sua nomina AB, & BC & DF, toti Binomio AC commensurabilis. Et ex 15. lib. 6. fiat, vt tota AC ad totam DF, sic pars AB ad partem DE. Erit ergo ex 22. quinti etiam reliquá BC ad reliquam EF, vt tota AC ad totam DF, & ideo, cùm DF ponatur commensurabilis ipsi AC; talis erit pars DE commensurabilis parti AB, ex propos. 5. huius, & sic EF commensurabilis parti BC. Quare respectu Rationalis P, erunt incommensurabiles, & mediæ DE, & EF; vt sunt AB, & BC ex propos. 28. huius. Secundo ostendetur esse inuicem potentiá tantùm commensurabiles DF, & EF, sicut, & illæ sunt AC, & BC.



Quæ enim est, vt pars AB ad partem DE, sic pars BC ad partem EF, erit *permutando* pars AB ad partem BC, vt pars DE ad partem EF: Sed partes AB, & BC potentia tantùm ponuntur commensurabiles; Ergo etiam DE, & EF ex prop. 5. h. Quare, cum sint mediæ efficient aliquam ex ijs irrationalibus, quæ resultant per compositionem mediarum.

THEOR. IV. PROPOS. LIII.

Apotome media commensurabilis, & ipsa Apotome media est

SEd sit AB Apotome media in fig præced. & ei congruens BC, & fiat, vt AC ad DF, ita AB ad DE. Quia ergo, vt totum AC correspondet proportione ad totum DF, sic pars AB ablata ad partem ablatam DE. Ergo etiam ex propos. 22. lib 5. BC reliqua pars correspondebit ad reliquam EF, vt ablata AB ad ablatam DE, sed pars ablata AB est cõmensurabilis parti DE ablatę ex Thesi. Ergo ex propos. 5. h. reliqua BC, reliquæ EF, & totum AC toti DF erit commensurabile, & quia AC, & BC ponuntur medi ; erunt etiam DF, & EF mediæ ex propos. 28. h. respectu rationalis P.

Probatur deinde, quòd sint inuicem potentia commensurabiles DF, & FE.

Nam ita est AC ad DF, vt BC ad FE; Ergo *permutando* ita erit fundamentum AC ad fundamentum BC, vt DF terminus ad FE terminum: Sed AC, & BC sunt potentiá tantùm commensurabiles: Ergo ex propos. 5. h. etiam DF, & FE.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. LIV.

Compositis lineis irrationalibus commensurabiles sunt quoque eodem modo, ac ipsæ irrationales compositæ.

SIt AB, & BC duæ omninò irrationales, quæ cõpositæ faciant lineam AC irrationalem respectu P Rationalis. Dico, & DF ei commensurabilem, seu longitudine seu potentiá tantùm esse lineam quoque irrationalem, vt ipsa est.

Probatur. Sit diuisa AC in suas partes irrationales, quibus componitur AB, & BC. & fiat totum AC ad totum DF, vt AB ad DE ex propos. 15. lib. 6. ideoque etiam erit totum AC ad DF totum, sic altera pars BC ad alteram partem EF ex 22. lib. 5., & ideo partes AB ad DE, vt BC ad EF. Quare, cùm totum AC ponatur commensurabile toti DF, erit etiam pars AB commensurabilis parti DE, sicut, & alia compars BC erit alteri comparti EF commensurabilis. Quare, cùm partes sint commensurabiles, & totum AB rationali P ponantur incommensurabile, etiam partes DE, & DF erunt incommensurabiles ipsi Rationali P; sicut, & ipsum totũ DF toti AC commensurabile, & ipsi rationali P erit incommensurabile ex prop. 8. h.

Probatur secundo. Quod etiam illæ partes DE, & EF sint inuicem incommensurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo *permutando* ita erit AB ad BC, vt DE ad EF; Sed BA, & BC sunt incommensurabiles omnino. Ergo ex prop. 5. h. etiam DE, & EF.

THEOR. VI. PROP. LV.

Quæ Reliquis ex lineis irrationalibus commensurabiles sunt, & ipsæ irrationales, & Reliquæ, vt illæ sunt.

SIt AB reliquum ex irrationalibus duabus AC, & BC, & commensuretur ei DE. Dico, quod etiam DE est reliquum, seu Apotome ex irrationalibus duabus.

Sit enim BC altera irrationalis à cuius subtractione ab irrationali AB remansit AC, & ex prop. 15. l. 6 fiat, vt AB ad DE, ita AC ad DF; & quia AB commensuratur ipsi DE, etiam AC totum commensurabitur ipsi toti DF, & altera pars BC alteri comparti EF. Cum ergo AC totum, & BC pars ponantur incommensurabiles omninò rationali P etiam DF totum, & EF pars reliqua ex prop. 8. h. erit incommensurabilis omnino, & irrationalis rationali P.

Probatur deinde; quòd etiam DF, & FE sint duę omninò incommensurabiles: Nam vt est AC ad DF, ita ponitur BC ad EF: Ergo *permutando* erit, vt AC ad BC; ita DF ad FE: sed AC, & BC sunt incommensurabiles omninò, & irrationales: Ergo ex prop. 5. h. etiam DF, & FE: ideoque, cùm sint inuicem irrationales, & irrationales quoque respectu P rationalis remanebit lineá DE Reliquum ab irrationali DE subductá irrationalis EF sicut AB est reliquum subductá irratinnali BC ab irrationali AC.

Et hæc dicta sint genericè de illis lineis, quæ commensurantur irrationalibus; licet enim Euclides ad species singulas descendat, in illis 22. Binomiorum, & Apotomarum speciebus, & probet singulas commensurabiles vnicuique speciei Binomio, vel Reliquo ad illam speciem pertinere, cui commensuratur; nobis tamen visum est, adeo specificam cognitionem necessariam non esse, maximè, quia irrationales minùs in vsum veniant in rebus mathematicis.

TRACTA-

TRACTATVS XIII.

IN NVMERIS PROPORTIONALIBVS. PARS I.

De Numerorum Ratione.

POST Elementa primus scopus, in quem Mathematica tendit, sunt proportiones numericæ, vtpote, quæ cum sint rationales, magis etiam cognitioni sunt obuiæ, & proportionibus corporum maximè affines, illis ianuam aperiant. Sed priùs de numeris ipsis proportionalibus, vt qui proportionum Arithmeticarum sint fundamenta, agere opus est, & sub hac ratione fundamenti proportionum de illis sermonem facere. Possunt autem considerari, vt fundamenta proxima, & vt fundamenta remota, vt remota considerantur cum rationes ipsorum, quatenus se gerunt, vt continens, & contentum speculationem subeunt, at vt fundamenta proxima, cùm non iam sub ratione simplici, sed sub ratione relata ad aliam, & similitudinem alij rationi dicente animaduertuntur. Ibi interueniunt duo numeri solum; hic quatuor requiruntur, quoniam iam non considerantur, vt obtinent rationem; sed proportionem. Si ergo, vt rationem dicentes numeri accipiantur, tunc vocantur fracti: nempe partes alterius numeri, qui se tanquam totum, & continens gerit, & de istis prima hac tractatus parte peragemus, numeris, vt rationem dicentibus in secundam partem reseruantes.

EXPENSIO I.

De minutiarum proportionibus.

ANtequam ipsarum minutiarum Algorithmum proponamus, necesse est cognoscere ipsarum proportionem, quam hic breuiter indicabimus.

DEFINITIO I.

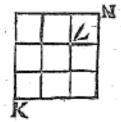
FRactio, minutiaue, aut numerus fractus est vna pars, seu plures partes alicuius totius; vel plurium totorum sub vnius ratione consideratorum.

Si enim totum sit sectum in 4. partes æquales, duæ ex ipsis, vel vna erunt numerus fractus: Item si tres aurei secti sint in 8. partes æquales, & ex illis accipiantur tres, illæ tres partes erit numerus fractus trium aureorum.

Constat verò quælibet fractio duobus numeris alter est, qui partes acceptas exprimit, & super lineolam ponitur, alter est, qui totius exprimit partes, & sub lineola ponitur hoc modo.

$\frac{3}{7}$ $\frac{4}{3}$ Qui super lineolam ponitur dicitur Numerator; quòd numeret partes, quæ accipiuntur ex partibus totius; qui verò sub lineola collocatur dicitur Denominator; quòd denominet, ex quo toto illæ partes sũptæ sint; ita in minutia $\frac{3}{5}$, in qua sunt tres quintæ partes vnius integri quinque partibus constantis, tres est Numerator quinque Denominator.

Præassumpt. I. Oriuntur numeri fracti sæpius à diuisione integrorum, in quâ, aut illa, quæ diuidũtur sunt integra singula, vt numerus diuidendus accipitur, vt plures partes plurium integrorum, vt vnius, & diuisio instituitur ad hoc, vt illæ partes in integros rediganutur, vt 103. Iulij diuiduntur per 10. Iulios, quibus constat Aureus quilibet, vt Aurei fiant & sic fractio $\frac{3}{10}$, quæ remanet à diuisione significat vnius aurei tres partes, ex 10. ex quibus constat. Vel diuiditur aliquis numerus ad hoc; vt singulis distribuatur, V. g. 103. Aurei, vt distribuantur 10 Militibus, & tunc significat fractus $\frac{3}{10}$ très Aureos in 10. æquales partes distributos. Ita si dentur V. g. in quadrato KN partes 9. ex quibus accipiantur 4. & fiat minutia $\frac{4}{9}$ KL constabit ex quatuor quadratis, quorum quodlibet est 9. pars totius; quare si singulæ partes in 9. partes iterum intelligantur diuisæ numerus 4. est etiam huius totius nona pars. Nam, si hæ singularum nouenæ partes simul erant quatuor nouenarios, etiam singulis diuisis in nouem partes, quatuor ex ipsis erunt quatuor nouenariorum nona pars. Nam fient 36. cuius 4. est nona pars, nempe earum nouem in quibus 4. partes intelliguntur diuisæ, vt fiant 36. Vnde est illud, quòd minutia idest 4. est pars numeratoris



tis scilicet ipsius 4. à denominatore denominata, nempe nona pars.

THOR. I. PROPOS. I.

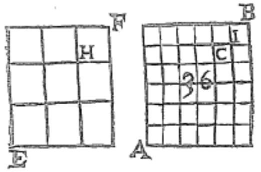
Minutia est ad suum integrum, vt numerator ad denominatorem.

PRobatur. Quia numerus numerans exprimit partes totius, & tot habet vnitates, quot partes sunt in ipsa quantitate non integra, nempe minutiâ, sicut & denominator tot habet vnitates, quot integrum partes; Ergo vt est minutia ipsa ad integrum, ita est numerator ad denominatorem.

THEOR. II. PROPOS. II.

Minutiæ æqualis, vel eiusdem integri quæ ad suas integras quantitates eandem habent proportionem, inuicem sunt æquales; quæ verò habet maiorem proportionem, illa maior est.

SIt integri eiusdem AB 36 minutia AC, seu pars 16. nempe $\frac{16}{36}$ sitque integrum prædicto æquale EF 9. cuius minutia sit 4. EH, ita vt sit $\frac{4}{9}$. *Dico minutias esse æquales si ad sua integra æqualia sint in eadem proportione.*



Probatur. Quia ex propos. 9. quinti, quæ magnitudines ad eandem, seu ad æquales eandem habent rationem æquales sunt inter se; sed minutia HE 4. & AC 16: ad æqualia integra EF, & AB similē habent rationem; Ergo sunt inuicem æquales.

Probatur secunda pars. Quia maior ratio est, cùm aliqua quantitas alterius plùs comprehendit, sed AI 25. dicit ex hypothesi ad suum totum AB 36. maiorem rationem, quam EH 4. ad EF 9. ergo plùs comprehendit AI 25. ex integro AB; quàm EH 4. ex integro BE 9. quæ integra sunt æqualia: Quare erit maior AI, quam EH.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si ad sua integra inæqualia minutiæ similem dicant proportionem erunt inuicem in proportione, vt sua tota, & integra existunt.

SIt minutia KL 4. ad suum integrum KN 9. vt in schemate præced. præass. vt minutia AC ad integrum maius priori integro AB. *Dico, quod minutia KL ad AC est, vt integrum KN ad AB.*

Probatur. Ita est EL minutia ad KN totum, vt AC minutia ad AB totum ex hypothesi. Ergo permutando erit KL ad AC, vt totum KN ad totum AC.

COROLLARIVM

HInc eruitur minutias, quarum numeratores eandem proportionem habent ad suos denominatores esse æquales; si denominator integrū æqualis quantitatis exprimat; cum enim denominator vices integri obeat, & partes, quæ in ipsa quantitate sunt, exprimat, patet; quòd eadem ratio est de denominatoribus, ac de totis ipsis: Vnde, & minutia ad suum denominatorem maiorem rationem dicens maior erit, & ita Aurei $\frac{3}{9}$, & $\frac{4}{12}$ erunt minutiæ æquales. Quia ita se habet 3. ad 9. vt 4. ad 12. At $\frac{4}{9}$, & $\frac{4}{12}$ sunt minutiæ, quarum prima $\frac{4}{9}$ cum habeat maiorem rationem ad suum denominatorem; quam $\frac{4}{12}$ maior erit.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, eandem proportionem habent, quam numeratores, dummodo de eodem vel æquali toto verificentur.

DEtur minutia $\frac{16}{36}$, & $\frac{25}{36}$. Dico, *quòd habent eandem inuicem proportionem, quàm numeratores 16. & 25.*

* Probatur, vt numerus 16. ad 36. ita est minutia AC partium 16. nempe ipsa quantitas in schemate præc. ad integram quantitatem BA ex 1. h. vt autem numerus 36. ad 25. ita est AB ad AL. Ergo *ex æquo* ita erit 16. ad 25. relicto medio 36. vt quantitas AC ad quantitatem AI.

EXPENSIO II.

De fractionum valore.

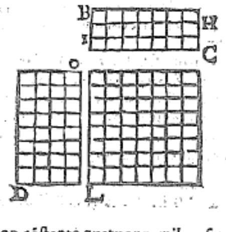
CVm à proportione, quam dicunt numeratores ad denominatores minutiæ, pro vt vidimus valore crescant, & maiores sint, videndum modo est; quomodo earum valor dignosci queat.

PROBL. I. PROPOS. V.

Duas minutias diuersarum denominationum ad eandem reducere denominationem.

SInt datæ minutiæ $\frac{4}{7}$, & $\frac{3}{8}$ Velimusque cognoscere valorem harum minutiarum, idest quænam ad suum idem, cuius sunt minutiæ, maiorem proportionē dicat. Alternatìm denominatores vnius cum numeratoribus alterius multiplicentur V. g. 3. per 7. & fiant 21. & è contra 4. per 8. & fiant 32. deinde denominatores inuicem, qui exprimāt partes ipsius totius, & fiat 56. Dico eandem esse minutiam $\frac{21}{56}$ quæ $\frac{3}{8}$, & $\frac{32}{56}$ quę $\frac{4}{7}$.

* Probatur. Nam, cùm sint numerator 3. & denominator 8. multiplicati per eundem numerum 7. erit ex 17. l. 7. elem. eadem proportio 3. ad 8. quam 21. ad 56. ex prima vero propos. h. minutiæ, quæ ad suum totum idem, habent æqualem proportionem, æquales sunt; quare CB minutia constans tribus octauis partibus CI, & IH, & HB erit æqualis CB ipsi toti, prout constat 21. partibus minoribus ex 2. h. propos. cùm ad CL totum eandem dicat proportionem.



Sic in OD cōstante quatuor partibus septimis, cū sit 4. multiplicatus per numerū eundem 7. & sit factus 32. & item totum 8. sit multiplicatum per 7. & factum 56. habebit eandem proportionem 4. ad 7. quam 32. DO minutia ad 56. CL totum: Ergo ex 1. propos. h. $\frac{32}{56}$, & $\frac{4}{7}$ erunt æquales, & erit eadem minutia DO. Quare duæ minutiæ $\frac{3}{8}$, & $\frac{4}{7}$ erunt redactæ ad eundem denominatorē, cum $\frac{21}{56}$, & $\frac{32}{56}$ illis sint æquales.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Plures, quàm duas minutias diuersarum denominationum ad eundem reducere.

SInt datæ minutie $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{2}$, quę ad eandem denominationem redigende sint. Multiplicentur simul ordinatìm denominatores, nempe 2. cum 7. vt fiat 14. & cum hoc producto 14. numerus 3. vt fiant 42, & cum hoc producto 42. numerus 5. vt fiat 210. Deinde diuidatur numerus productus per ipsum denominatorem. Diuidatur V. g. per primum 2. & erunt 105. qui multiplicetur per 1. numeratorem, & prodibit prima minutia $\frac{105}{210}$ Deinde idem numerus diuidatur per secundum denominatorem 7. & prodibit 30. multipliceturque hic numerus per numeratorem 4. & erit $\frac{120}{210}$. Idem fiat de tertio 3. nam diuiso 210. per 3. erit 70. qui multiplicetur per 2. & erit $\frac{140}{210}$. Sic diuidatur per 5. & erit 42. qui multiplicetur per 3. & erit vltima minutia $\frac{126}{210}$. Dico omnes datas minutias reuocatas esse ad alias $\frac{126}{210}$ $\frac{140}{210}$ $\frac{120}{210}$ $\frac{105}{210}$ eiusdem denominationis, quæ prædictis $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{2}$ æquiualent.

* Probatur. Nam, cùm multiplicauerimus denominatores simul, habebit primus numerus tot duenarios, quot vnitates sunt in 7. & tot septenarios, quot vnitates sunt in 2. & sic habebit partes, quas numerus 2. & quas 7. habent, idem dicas de numero 7. multiplicato cum 3. & de 3. multiplicato cum 5. Vnde productus numerus 210, eas habebit partes, quas habent denominatores; nempe secundam, septimam, tertiam, quintam. Poterit itaque mensurari numero 5. 3. 7. & 2. reperiantur itaque istæ partes per diuisionem, & sit V. g. quinta pars 42. Quia ergo 42. est quinta pars habebit eam proportionem 42. ad 210. quam 1. ad 5. Si ergo multiplicetur 42. per 3. & fiat 126. & per 5. vt fiat 210. erit eadem proportio 3. ad 5. multiplicatorum, quæ 126. ad 210. genitorum; cum per eundem numerum 42. multiplicati sint; quare ex propos. 1. erit eadem minutia $\frac{126}{210}$ & $\frac{3}{5}$, & sic de alijs.

PROB. II. PROPOS. VII.

Datas minutias diuersæ denominationis, vel eiusdem æstimare, quæ maior sit.

SIt data minutia $\frac{3}{5}$, & $\frac{4}{7}$, & volumus cognoscere, quænam maior sit. Multiplicentur inuicem numeratores vnius cum denominatoribus alterius, & consideretur, cuiusnam numerator maiorem numerum producat. Nam illa minutia est maior. Sic quia multiplicatus 4. per 5. producit 20. & 3. cum 7. producit 21. maior erit minutia $\frac{3}{5}$, quam $\frac{4}{7}$.

* Probatur. Nam si inuicem denominatores multiplicentur, & fiat 35. erit eadem minutia $\frac{21}{35}$, quæ $\frac{3}{5}$, & $\frac{20}{35}$, quæ $\frac{4}{7}$ ex 5. huius prop. Sed 21. maiorem proportionem dicit ad suum totum 35. quam 20. ex propos. 8. lib. 5. quia plures partes eius comprehendit. Ergo 21. erit maior, quam 20. ex secunda propos. huius. Vnde etiam erit maior $\frac{3}{5}$, quam $\frac{4}{7}$ ex propos. 12. lib. 5. Coroll.

COROLLARIVM I.

QVód, si iam sint æquales denominatores patet, eam minutiam fore maiorem, quæ denominatorem habet maiorem; ita est maior $\frac{1}{2}$, quam $\frac{2}{3}$, & cæt. Quod si numeratoribus ijsdem denominatores inequales sint, vt $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, erit illa minor minutia, cuius denominator maior est ex prop. 8. lib 5. quia suo toti minorem proportionem dicit. Nam $\frac{3}{4}$ minutiæ denominator superat numeratorem vnica parte tantum; at minutia $\frac{3}{5}$ denominator superest numeratori duabus vnitatibus: Vnde 3. magis comprehendit de integro 4. quam 3. de integro 5.

COROLLARIVM II.

HInc etiam est; Quod, si in aliquâ minutia numerator, aut æquet, aut superet denominatorē, quòd illa minutia æquet, aut superet integrū, cùm partes integri numerator exprimat, ita $\frac{9}{9}$, & $\frac{7}{7}$ sunt integra; at si essent $\frac{9}{5}$ tunc esset vnus integer, & insuper $\frac{4}{5}$, & sic propriè esset scribendum $1\frac{4}{5}$.

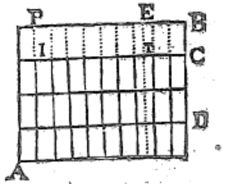
PROBL. III. PROPOS. VIII.

Valorem alicuius minutiæ, secundùm alias partes non à denominatore denominatas explorare.

SIt minutia $\frac{3}{4}$ vnius quadrati, quod constet 20. partibus. Volo scire, quot partes sint tres quartę illius quadrati: multiplico per partes 20. datas numeratorem 3. & facit 60. diuidoque per denominatorem 4. & productum erit 15. Tot ergo partibus constat minutia $\frac{3}{4}$, estque æqualis $\frac{15}{20}$, & $\frac{3}{4}$.

* Probatur. Nam multiplicetur per 20. numerus 4. denominator, & quia 20. multiplicat 4. & facit 80. & 3. & facit 60. erit eadem proportio, ex 17. lib. 7. n. 3. ad 4. quæ 60. ad 80. Diuidat rursùs 4. eundem numerum 60. & 80. & generet 15.

& 20. eadem quoque proportio erit 15. ad 20. quæ 60. ad 80. ideſt, quæ 3. ad 4. Quare æqualis erit minutia ex 2. huius propoſ. $\frac{3}{4}$, & $\frac{15}{20}$.



Sic ex 10. parallelogrammis; quibus conſtat AB ob multiplicationem per 4. factum eſt AB totũ 40. minorum, & AC minutia æqualis priori ex tribus parallelogrammis, quorum vnum eſt AD factũ eſt 30. & tandem per diuiſionem per 4. diuiſum eſt totum in 10. parallelogramma, quorum vnum eſt AP, & item minutia, & facta eſt AB æqualis minutiæ AC.

Quod ſi minutia intelligatur diuiſa per denominatorem, vt def. 1. aduertimus V. g. remanſerint ex aliqua diuiſione facta per 4. tres integri: vt ſint $\frac{3}{4}$, tunc tria V. g. parallelogramma intelliguntur diuiſa in 4. partes, quorum trium parallelogrammorum ſimul ſumptorum minutia eſt tertia pars, aut tres illarum amplectitur, & aliquis deſiderat ſcire, quot ex decem partibus, in quas illa tria parallelogramma intelliguntur diuiſa comprehendant $\frac{1}{4}$ ipſorum. Tunc eodem modo agendum eſt. Ratio eſt, Quia accepta vnitate V. g. AD, ea habet eandem rationem ad 3. cũ 1. multiplicando 3. faciat 3. ex 17. lib. 7, quam 10, ad 30. item per 3. multiplicatus: Si verò diuidatur per 4. eadem ratio erit $7\frac{1}{2}$ ad 10. quæ 3. ad 4. cum 30. diuiſus per 3. faciat 10. & idem 30. diuiſus per 4. faciat $7\frac{1}{2}$ cumque idem numerus vtrobique diuidatur quotientes $7\frac{1}{2}$ & 10. habebunt eandem rationem, quam numeri diuidentes 3. & 4. Quare minutia AT erit tres quartæ partes minutiæ AC tribus parallelogramis conſtantis, quorum vnum eſt AD.

Aduerte tamen; quòd ſi quando, vt hic $7\frac{1}{2}$ numerus, qui prouenit non ſit integer; tunc propriè non poteſt ad eam denominationem redigi minutia; quia ſilicet minutia non ſolet per numeratorem, cui fractus adhæreat exprimi; vt fieret, ſi numerator ſtatueretur $7\frac{1}{2}$; ideoque minutia redigetur ad aliã æquiualentem $\frac{15}{20}$, vel ſi detur 10. & velit aliquis, exhiberi minutia, cuius numerus 10. ſit denominator, tunc reſpondebitur, quod propriè nequit fieri, ſed æquiualenter.

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Tam numeratoris, quam denominatoris maximam communem menſuram inuenire.

SIt datus numerus $\frac{1970}{2758}$, cuius tum numeratoris, tum denominatoris maxima communis menſura ſit reperienda. Diuidatur denominator 2758 per numeratorem 1970. & reſiduum V. g. 788. diuidat rurſùs numeratorem, & 394. diuidat rurſùs reſiduum præcedens 788. aut nihil remanet, aut aliquid: ſi aliquid remaneat; rurſùs idem faciendum, diuidendo reſiduum maius per reſiduum minus, donec ad vnitatem deuentum ſit, & ſi ad eam perueniatur, erit ea cõmunis menſura, nec aliam communem menſuram ij numeri habebunt, & ideo vocabuntur inter ſe primi; at ſi ad vnitatem non perueniatur, vt hoc exemplo, in quo diuiſo reſiduo 788, per reſiduum minus 394. nihil remanet, ideo 394. erit commũnis amborum menſura maxima.

Prob, ac propoſ. 2. lib. 7. elem. Nam iam 394. menſurat ex æquo 788. reſiduũ: hoc autem reſiduum 788, menſurat 1970. & hoc menſurat 2758. Ergo 394. menſurat etiam 2758. Quod vero etiam ſit maxima communis menſura patet, & probatur eiuſdem prop. 2. l. 7. elem.

PROBL. V. PROPOS. X.

Minutiam ad minorem denominationem redigere.

MInutię aliquando adeo magnis numeris proponuntur, vt non facilè earum proportio intelligatur, quis enim non faciliùs intelligat $\frac{5}{7}$ quam $\frac{1970}{2758}$. Imo aliquando magna minutia alicuius reſidui diuiſionis per minimos exprimitur, cùm tamen computus apparenter hoc non exhibeat, V. g. ſit numerus 24812. diuiſus per 2758. quotiens erit 9. & reſiduum erit $\frac{1970}{2758}$, qui numerus apud auctores reperietur expreſſus per hunc $\frac{5}{7}$ minimum numerum illi minutiæ æquiualentem: Vnde oportebit cognoſcere eandem minutiam ſub diuerſis numeris poſſe exprimi; ne aliquis putaret errorem irrepſiſſe in computo aliquo apud Mathematicos breuiſſimis terminis expreſſo.

Ita igitur, ſi reducenda ſit aliqua minutia ad minimos terminos, erit agendum: Repertâ maximâ communi menſurâ ex antecedenti diuidatur per eam, tum numerator, tum denominator V. g. datę minutię $\frac{1970}{2758}$ diuidatur per maximam menſuram 394. tam numerator 1970. & prodibit pro numeratore 5. tum denominator, & exeret pro denominatore 7. ita erit noua minutia $\frac{5}{7}$ quam Dico æquiualere minutiæ $\frac{1970}{2758}$.

* Probatur eadem proportio eſt 5. ad 7. quam 1970. ad 2758. cum vterque numerus ſit per 394. diuiſus, & quotiẽtes ſint 5. & 7. ex pr. 17. lib. 7. Quare ex 3. propoſ. Cor. huius erit æqualis minutia $\frac{5}{7}$ minutiæ $\frac{1970}{2758}$.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Integros ad minutiam redigere.

SInt dati integri 7. qui reducendi ſiut ad minutiam denominatam à numero 9. multiplicetur 7. per 9. & erit productus 63. qui erit numerator, ſtabitque minutia $\frac{63}{9}$.

* Probatur. Denominator exprimit integrum in eas partes, quas habet, ſeu numeros diuiſum. Ergo tot erunt nouenarij, quot integri. Sed integri ſunt 7. Ergo nouenarij erunt quoque 7. Numerus verò 9. ſepties acceptus facit 63. vnde erunt $\frac{63}{9}$.

EXPENSIO III.

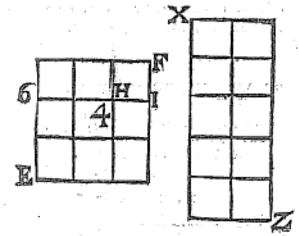
De fractorum numerorum additione.

ADditio fractorum facilis eſt, & ferè eadem, quæ integrorum; quare ad eam declarandam vnica propoſitio ſufficiens erit.

PROBL. I. PROPOS. XII.

Minutias eiuſdem denominationis, aut diuerſæ ſimul addere.

SInt primo addendæ minutiæ eiuſdem denominationis $\frac{6}{9}$, & $\frac{4}{9}$. Simul colligantur numeratores, & ſint 10. & ſupponatur denominator, & ſint $\frac{10}{9}$, ideſt 1. & $\frac{1}{9}$. Dico *duas minutias eſſe ſimul additas.*



* Probatur; vt eſt numerator numerus 6. ad denominatorem 9. ita eſt minutia EI ad integrum EF ex propoſ. 1. Et vt eſt numerus 4. ad denominatorem 9. ita eſt minutia EH ad integrum EF ex 1. huius. Ergo ex propoſ. 25. lib. 5. compoſitus numerus 6. prima quantitas cum 4. quinta, habebit eandem rationem ad denominatorem 9. ſecundam, quam EI tertia cum EH ſexta ad integrum EF quartam quantitatem; ſed 6. & 4. numerus eſt ad 9. vt 10. ad 9. ſed vt 10. ad 9. ita fiat ZX minutia ad integrum EF. Ergo ZX ad integrum EF erit, vt EI, & EH ad integrum EF. Vnde ZX erit minutia æqualis EI, & EH, & dicet eandem proportionem ad integrum, quam 10. ad 9. Vnde bene quoque exprimetur per numerum $\frac{10}{9}$, vt requiritur in expreſſione minutiæ ex prima propoſ. huius.

Idem verò agendum etiã, ſi ſint plures minutię, quam datæ, vt $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$. Nam omnes iſtæ minutiæ ſimul collectæ efficient $\frac{13}{5}$ ideſt 2. & $\frac{3}{5}$, ſic agito in cæteris.

Si vero denominatores minutiarum ſint diuerſi; tunc redigentur ex ſupradictis ad eãdem denominationem, & eadem ſeruabitur regula, eademque oſtenſio valebit.

EXPENSIO IV.

De Minutiarum ſubductione.

EAdem prorſus ratio eſt de ſubductione, quæ de additione.

PROBL. I. PROP. XIII.

Minutiam minorem à minutia maiore ſubducere.

SI duæ minutiæ, quarum minor à maiore ſubducenda ſit. Subducatur numerator minoris à maiore, & reſiduum erit minutia, quæ poſt ſubtractionem remanet. Ita ſi $\frac{3}{7}$ à $\frac{4}{7}$ ſubducenda ſit, deducto n. 3. à 4. reſiduum erit $\frac{1}{7}$ ſic ſi $\frac{4}{9}$ à $\frac{7}{9}$ deducatur, reſiduum erit $\frac{3}{9}$.

Probatur. Quia enim 4. detractus à 7. relinquit 3. erit 3. & 4. æqualis numero 7. Ergo, & minutia 3. & 4. expreſſa erit æqualis quantitati minutiæ expreſſæ numero 7. Vnde ablata quantitate reſpondente numero 4. remanebit quantitas reſpondens numero 3.

At ſi ſint minutię diuerſorum denominatorum. Priùs in vnam denominationem ſunt reuocandæ, vt ſupra docuimus, & ſic inſtituenda eſt, vt priùs, operatio.

EXPENSIO V.

De fractorum multiplicatione.

MInutia multiplicatur, aut per minutiam aliam, aut per numerum integrum cum minutia, aut per numerum integrũ, aut mutuò duo integri cum duabus minutijs, &c.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Inuicem Minutias multiplicare.

SInt multiplicandæ minutiæ $\frac{4}{9}$, & $\frac{6}{9}$ multiplicentur inuicem numeratores, & fiat 24. Deinde denominatores, ſeu ſint eiuſdem, ſeu diuerſæ denominationis, & fiant 81. Ergo numerus ex multiplicatione $\frac{4}{9}$, & $\frac{6}{9}$ productus eſt minutia $\frac{24}{81}$ ſic $\frac{2}{3}$, & $\frac{3}{4}$ multiplicantur ex numeratorum multiplicatione faciendo 6. & denominatorum faciendo 12.

* Prob. Illa eſt multiplicatio, in qua toties componitur is, qui multiplicatur, quot ſunt in multiplicante vnitates; vnde genitus V. g. 15. eam habet proportionem ad multiplicatum 5. quã habet 3. multiplicans ad vnitatem. Data ſit ergo minutia $\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{7}$ multiplicetur 2. per 3. numeratores, & fiant 6. & 5. per 7. denominatores, & fiant 35. Dico *quod minutia $\frac{6}{35}$ ita eſt ad minutiam $\frac{3}{7}$, vt $\frac{2}{5}$ eſt ad vnitatem*, & ideo minutiam $\frac{6}{35}$ eſſe genitam ex minutia $\frac{3}{7}$ per minutiam $\frac{2}{5}$.

Probatur. Nam; cùm 7. multiplicatus per 5. produxit 35. erit eadem proportio producti 35. ad multiplicatum 7. vt multiplicantis 5. ad 1. Idem dicas de numeratoribus; nam 6. ad 3. erit, vt 2. ad 1. ob eandem rationem, Cum ergo tam denominator 35. ad denominatorem 7. generantẽ, quã numerator genitæ minutiæ $\frac{6}{35}$, nimirum 6. ad numeratorem 3. minutiæ generantis $\frac{3}{7}$ dicat eam proportionem, quam numerator 2. dicit ad 1. & denominator 5. dicit ad 1. minutiæ $\frac{2}{5}$ multiplicãtis, tota minutia, nempe ſimul numerator, & denominator $\frac{6}{35}$ generata erit ad totum $\frac{3}{7}$ multiplicatã, & generantem, vt minutia tota multiplicans

$\frac{7}{1}$ est ad 1. ideo erit ea, quæ multiplicabit $\frac{8}{3}$, & generabit $\frac{56}{3}$.

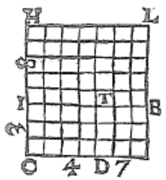
COROLLARIVM

Hinc vides maiorem esse rationem in minutiā genitā denominatoris ad numeratorem, quàm in minutijs generantibus denominatorum ad numeratores: si quidem 3. ad 2. est proportio sesquialtera, & 4. ad 3. est proportio superparticularis sesquitertia, at verò 6. ad 12. est dupla, ad quod explicandum.

THEOR. I. PROP. XV.

Genitus numerus in multiplicatione minutiarum habet proportionem compositam, ex proportione minutiarum generantium.

Sit $\frac{2}{3}$, & $\frac{3}{4}$ docet regula multiplicationem numeratorum simul, & denominatorum simul, sed hoc est proportiones componere. Siquidem ex def. 1. lib. 8. per mutuam multiplicationem duorum denominatorum fit planus numerus, item fit alius planus numerus per multiplicationem numeratorum; sed ex propos. 10. lib 8. elem. duo plani numeri inter se rationem habent ex lateribus compositam: Ergo, & hi duo numeri denominator, & numerator habebunt proportionem



a lateribus compositam inuicem. Sic si adsit numerus $\frac{4}{8}$ DH, & alius $\frac{3}{7}$ CB, si multiplicauerimus latus 8. per 7. efficiemus planum num. 15. CL, & 3. per 4. planū 12. CT, qui habebunt eam proportionem compositam ex $\frac{4}{8}$, & $\frac{3}{7}$. Quoniam si multiplicentur 3. numerator per 8. denominatorem efficiemus 24. & 12. ad 24. erit eadem proportio, vtpote multiplicati per eundem 3. quæ 3. ad 8. sic 24. & 56. erit eadem proportio, quæ 3. ad 7. vtpote multiplicati per eundem numerum 8. sed proportio 12. ad 57. est composita ex proportione (defin. 4. lib. 7.) n. 12. ad 24. & 24. ad 57. ergo etiam ex proportione 4. ad 8. & 3. ad 7.

COROLLARIVM

Hinc elicito non esse mirum; si magis augeatur proportio denominatoris ad numeratorem in genitis, quam ea, quæ est in generantibus. Nam genitæ minutiæ denominator ad numeratorem, cum sit composita ex proportionibus generantium minutiarum est maior. Vnde numerator geniti debet plures, vel saltem plus cōprehendere suum numeratorem ob maiorem proportionem, quam ei dicit, quàm denominator minutiarum generantium ad suum numeratorem, ad quem dicunt proportionem simplicem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Minutiam per integrum, cuius est minutia multiplicare.

Accipitur integer tanquam minutia supponendo integro 1. vt fiat ex ea, velut fractio ab vnitate denominata; deinde regula præcedens adhibeatur. Sic si sit multiplicanda minutia $\frac{2}{3}$ per numerum 7 fiat $\frac{7}{1}$, & adhibita regula tradita fient $\frac{14}{3}$, vel $4.\frac{2}{3}$.

* Prob. Tum ex antecedenti, tum quia, cum in minutiâ integrū exprimat denominator diuisū in tot partes, quot in eo sunt vnitates, integra 7. si numerator sit 3. continebūt septies trinas partes, seu septem ternarios, ex quibus singulis ternarijs duas partes tantùm æquat minutia $\frac{2}{3}$. Si ergo tot tertiæ partes ex singulis septem integris tribus partibus compositis accipiantur, quot vnitates sunt in 2. erunt 14. tertiæ partes, vtpote, quòd à singulis septem duæ tertiæ partes accipiantur. Vnde conficient minutiam $\frac{14}{3}$, & numerum $4\frac{2}{3}$.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Numerum integrum cum integro minutiæ adnexo multiplicare.

Integer ad minutiam reuocetur, & fiat deinde, vt supra, sic, si sint multiplicandi 7. per 2. & $\frac{2}{3}$; integer 2. cui adhæret minutia in tertia proijcietur multiplicando per denominatorem, vt fiant $\frac{8}{3}$: deinde numero 7. ad modum minutiæ accepto, $\frac{7}{1}$ prima regula adhibeatur, fientque $\frac{56}{3}$.

Probatur ex 14. propos. ac etiam eodem modo velut præcedens. Nam integrum quodlibet ex duobus intelligitur diuisum in tres partes, ex quibus minutia $\frac{8}{3}$ octo tertias partes comprehendat. Si ergo ex illis accipiantur 8. tertiæ partes toties, quot vnitates sunt in 7. non est dubium; quòd fient 56. tertiæ partes; nempe minutia $\frac{56}{3}$.

COROLLARIVM

Hinc est, quod eodem modo multiplicetur integer cum minutia per minutiam solùm. V. g. 2. $\frac{2}{3}$ per $\frac{7}{1}$ reducendo integrum ad minutiam, & faciendo $\frac{8}{3}$, & $\frac{7}{1}$. Deinde multiplicando numeratores simul, & denominatores simul, & efficiendo minutiam $\frac{56}{3}$.

Sic, si multiplicanda sint inuicem integra duo, quibus minutiæ adhereant idem præstabitur V. g. sint 2. & $\frac{2}{3}$ multiplicandi per 4. $\frac{2}{5}$: reducetur ad minutiam suam vtrumque integrum; primum quidem ad $\frac{8}{3}$, secundum verò ad $\frac{22}{5}$; & deinde eodem modo res præstabitur, & fient $\frac{176}{15}$.

* Quod sic ex dictis propos. 14. probo. Quia 8. multiplicat 22; ita erit genitus 176. ad 22. vt 8. ad 1. Rursùs, quia 3. multiplicat 5. ita erit genitus 15. ad 5. vt 3. ad 1. ex defin. 16. Tract. 8. Quare etiam simul 176. & 15. idest $\frac{176}{15}$ erit ad 22. & 5. idest ad minutiam $\frac{22}{5}$, vt 8. & 3. simul nimirū $\frac{8}{3}$ ad vnitatē; vnde $\frac{8}{3}$ minutia erit multiplicans.

COROLLARIVM.

Hinc est videre numeratores in minutijs siue ex additione collectis, seu ex multiplicatione genitis aliquando prodire maiores suis denominatoribus, & ideo superare minutias ipsas sua tota, quod in multiplicatione præcipuè tunc solum aduenit, cum iam numeratores multiplicandi erant denominatoribus in aliquo maiores. Si verò quis cupiat in integra, vt priùs restituere hoc consequetur; si ipsos numeratores per denominatores diuidat. Sic, si quis cupiat agnoscere, quot integra in minutia $\frac{176}{15}$ contineantur, diuidat per 15. & inueniet integra 11. & $\frac{11}{15}$.

Porrò Multiplicatio probatur per diuisionem. Vnde operę pretium erit, priùs addiscere diuisionem, quam modo trademus.

EXPENSIO VI.

De Minutijs diuidendis.

Qui intellexerit minutiarum multiplicationem, facilis ei euadet diuisio, quòd fere idem sit, vt modo videri poterit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Minutiam, quam alia data minutia per aliam minutiam mensuret, reperire.

Sit data minutia $\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{7}$, & iubeatur quis reperire minutiam aliquam, quam minutiæ datæ metiantur. Multiplicentur vnius inuicem numerator, & denominator, vt 3. & 7. & fiant 21. & per hunc numerum multiplicetur numerator 2. & denominator 5. alterius, & fiat minutia $\frac{42}{105}$. Dico *hanc minutiam metiri minutia* $\frac{2}{5}$.

* Probatur. Quia 21 multiplicat 2. & 5. Ergo producti 42. & 105. erunt inuicem, vt 2. ad 5. ex 17. lib. 7. & sic 42. metietur 105. vt 2. mensurat 5. Sed etiam 3. & 7. mensurant 21. qui per 2. mensurat 42. & per 5. metitur 105. ergo etiam $\frac{3}{7}$ metietur $\frac{42}{105}$ ex 9. pronunc. Tract. 8.

Reperiemus secundò numerum per quem minutia $\frac{3}{7}$ metitur minutiam $\frac{42}{105}$. Sic fiat 2. per 7. & prodibit 14. numerator, deinde 3. per 5. denominatores vnius cum numeratoribus alterius minutiæ multiplicando, & habebimus 15. denominatorem, stabitque minucia $\frac{14}{15}$, per quam dico minutiam $\frac{3}{7}$ metiri minutiam $\frac{42}{105}$.

Et probatur. Nàm idem 2. multiplicauit 7. & fecit 14. multiplicauit quoque 21. in præced. probatione, & fecit 42. ergo, ex 17. septimi, ita est 7. ad 21. vt 14. ad 42. Quare ex def. 18. Tr. 8. talis pars erit 7. numeri 21. quæ 14. 42. sed 7. metitur 21. per 3. ex ostensione 1. partis, ergo etiam 14. metietur 42. per 3. & ideo etiam è contra 3. metietur 42. per 14. Rursus Quoniam 3. multiplicauit 5. & fecit 15. & 5. multiplicauit 21. vt supra, & fecit 105. ita erit 3. ad 21. vt 15. ad 105. sed 3. metitur 21. per 7. Ergo etiam 15. metietur 105. per 7. & ideo etiam 7. metietur. 105. per 15. ideoque $\frac{3}{7}$ metietur minutiam $\frac{42}{105}$ per minutiam $\frac{14}{15}$.

COROLLARIVM

Minutiam, seu numeros, per quos altera minutiarum $\frac{3}{7}$ mensurat productum $\frac{42}{105}$ & quotientes $\frac{14}{15}$ consurgere à decussata datarum minutiarum $\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{7}$ multiplicatione, nempè denominatorum vnius per numeratores alterius, & vice versa. Nam 2. per 7. facit 14. qui ter acceptus mensurat 42. & 3. per 5. facit 15. qui septies acceptus facit 105. Vnde quotientes 14. à numeratore vnius 2. per 7. alterius denominatore, & 15. à numeratore 3. per denominatorem alterius 5. consurgit. Quare minutia $\frac{14}{15}$ mensuratur à minutia $\frac{2}{5}$ per minutiam $\frac{7}{3}$ nempe per $\frac{3}{7}$ inuersè sumptam.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Minutiam per minutiam diuidere.

Potest diuisio fieri, ac multiplicatio, & eodem pacto præstari hac solum conditione seruata, vt diuisoris minutiæ numerator sumatur pro denominatore, & denominator pro numeratore sedibus eorum commutatis. Sint diuidendi $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ diuisoris $\frac{3}{7}$: numeri sedes mutent, & fiat $\frac{7}{3}$. Deinde multiplicentur inuicem numeratores, & fiat minutia $\frac{14}{15}$. Dico Minutiam $\frac{2}{5}$ esse per minutiam $\frac{3}{7}$. diuisam.

Fiat 3. in 7. numerus 21. & 3. in 21. fiat 42. sic 7. in 21. fiat 105.

* Probatur. Cum 42. se habeat ad 105. vt 2. ad 5. erit eadem minutia $\frac{42}{105}$ ac $\frac{2}{5}$ ex prima parte anteced. propos. Sed minutia $\frac{3}{7}$ mensurat $\frac{42}{105}$ per minutiam $\frac{14}{15}$ ex præced. 2. parte. Ergo etiā minutia $\frac{3}{7}$ mensurabit minutiam $\frac{2}{5}$ per $\frac{14}{15}$. Hec autem minutia $\frac{14}{15}$ ex Coroll. consurgit ex multiplicatione vnius denominatoris per alterius numeratorem, & è contra, vel à multiplicatione vnius minutiæ per aliam multiplicantem sumptam inuersè. Ergo si sumatur minutia diuidens inuersè vt $\frac{7}{3}$, & multiplicetur per aliam producetur quotiens alterius V. g. $\frac{14}{15}$, qua mensurabit $\frac{42}{105}$ minutia $\frac{3}{7}$, & ideo etiam minutiam $\frac{2}{5}$, quæ est eadem cum ipsâ.

Eodem autem modo agemus, si voluerimus diuidere quamlibet minutiam per integrum, seu per integrum, cui minutia adhereat, seu integrum per minutiam, vel integrum, cui minutia hæreat per minutiā, vel integrū per integrum cū minutia, vel tandem integrum cum minutia per integrū solùm, vel cum minutia, qui sunt casus 7. Id verò reducendo semper integra quæcunque ad minutiam agemus, & more minutiarum ea assumendo, vt hic vides.

Min.		Int.				
$\frac{2}{3}$	per	4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	fiet	$\frac{2}{12}$
min.		int.min.				
$\frac{2}{5}$	per	$3\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{17}$		$\frac{10}{85}$
int.		min.				
3	per	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
int.min.		min.				
$4\frac{1}{3}$	per	$\frac{2}{5}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{5}{2}$		$\frac{65}{6}$
int.		int.min.				
5	per	$2\frac{3}{4}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{4}{11}$		$\frac{20}{11}$
int.min.		in.mi.				
$6\frac{1}{2}$	per	$3\frac{4}{5}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{5}{19}$		$\frac{65}{38}$
int.min.		int.				
$4\frac{2}{4}$	per	2	$\frac{18}{4}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{18}{8}$

Obseruandum verò est diligenter, quinam numerus sit diuisor, vt eius numerus inuertatur; alioquin, si non diuisoris, sed diuidendi numerus inuertatur contrarium eueniet, vt experimentum docebit.

THEOR. II. PROPOS. XX.

Numerus, seu minutiæ quotiens potest esse aliquando maior minutiâ diuisâ.

Sit data minutia $\frac{6}{7}$ diuidenda per minutiam $\frac{2}{7}$. Factâ operatione $\frac{6}{2}\,\frac{7}{4}$ minutia erit quotiens, & demonstrabit, quoties $\frac{2}{7}$ ingrediuntur in minutia $\frac{6}{7}$, quæ minutia $\frac{6}{1}\,\frac{2}{4}$ est minutia maior minutiâ diuisâ $\frac{6}{7}$.

* Probatur. Nam quotiens est numerus indicans, quot vicibus diuisor in numero diuidendo capiat; sed minutia diuidens multo minor, quam diuidenda potest capere tot vicibus, vt quotiens vel superet denominatoré proportionis minutię diuidēdę: Ergo potest esse maior ipsa ex Cor. pr. 3 huius. Sic minutia $\frac{2}{7}$ in $\frac{6}{7}$ capit ter perfectè; & ideo 42. numerator etiam capit denominatorem 14. ter. At è contrà, si diuideretur $\frac{2}{7}$ per $\frac{6}{7}$ nam 6. non capit in 2. nisi pro tertia sui parte; & ideo esset quotiens $\frac{1}{3}\,\frac{4}{2}$. Nam 14. minus est numero 42. pro tertia ipsius 42. parte, & ad illum habet proportionem, quam 1 ad 3. & quam $\frac{2}{7}$ diuisus numerus habet ad $\frac{6}{7}$ numerum diuidentem.

COROLLARIVM.

Hinc itaque collige, Quod minutiæ quotientis numeratoris proportio ad denominatorem exprimit proportionem, quam habet minutia diuisa ad diuisorem. Nam, si numerator contineat denominatorem: etiam minutia diuisa continebit diuidentem, vel semel, vel pluries prout numerator quotientis denominatorem continet, quod, si non continet; sed minor sit numerator denominatore in minutia quotiente, tunc exprimit proportionem minoris inæqualitatis, quam habet minutia diuisa ad diuidentem, vt $\frac{2}{6}\,\frac{7}{7}$ exprimet proportionem subtriplam, quam habet $\frac{2}{7}$ ad $\frac{6}{7}$, & ideo exprimit, quod $\frac{2}{7}$ non continet, nisi tertiam partem numeri $\frac{6}{7}$, vt 14. non continet, nisi tertiam partem numeri 42. at è contra, si diuideretur $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$ tunc quotiens esset $\frac{4}{1}\,\frac{2}{4}$ exprimens, quod minutia diuisa continet diuidentem ter, & habet ad eam proportionem maioris inæqualitatis triplam.

EXPENSIO VII.

De Minutijs minutiarum.

Aliquando fracti numeri quoque suas fractiones habent, quæ duplici sensu accipiũtur, vel enim sunt fractiones vnius partis, quæ numero fracto reperitur. Sic, si dico duæ tertiæ partes vnius dimidij diuisum significo illud dimidium in 3. partes ex quibus possideo duas.

Alio verò modo accipitur, tanquam non vna pars numeri fracti, sed omnes partes simul per modum vnius essent diuisæ in alias partes, ex quibus omnes non assumerem, sed aliquas, vt, si dicerem $\frac{2}{3}\,\frac{5}{6}$ significo duas tertias partes, ac si essent vnica pars, diuisas esse in 6. partes ex quibus assumo 5. Scribitur autem fractio fractionum interiecto puncto pro linea sic $\frac{2}{1}$.

PROBL. I. PROPOS. XXI.

Fractiones fractionum ad simplices fractiones reuocare.

Vt fractiones fractionum secundo sensu intellectæ ad simplicem fractionem reuocemus, numeratores inuicem sunt multiplicandi, & vltimus terminus genitus erit numerator minutię omnibus illis fractionibus fractionum equiualentis; denominator autem erit numerus à multiplicatione mutuâ denominatorum genitus. Sic $\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}$ reducetur ad hanc $\frac{8}{15}$, & minutia reducetur ad hanc 6. $\frac{2}{6}\,\frac{4}{0}$ multiplicatis inuicem numeratoribus 2. 3. 4. & denominatoribus 3. 4. 5.

A	B	C
2	3	4
·	·	·
3	4	5

* Probatur hanc regulam esse bonam. Nam quia intelligitur minutia secundò sensu. Ergo duæ partes totius 3. A erunt diuisæ in 4. Si ergo minutiæ minutiarum denominator 4. mensurat 2. numeratorem ex hypothesi; mensurabit etiam ex pronunc. 9. Tract. 8. denominatorem simplicis minutiæ A, qui est 3. quem 2. mensurat. Ergo redigatur denominator A 3. in partes, quas contineț denominatoris B 4. & in easdem partes A 2. numerator, fietque minutia $\frac{8}{12}$. & quia 3. & 2. A fuerunt multiplicati per eundem numerum 4. ita ex 17. sept. erit 2. ad 3. multiplicati, ac geniti 8. & 12. Sic numerator minutiæ minutiarum 3. B mensurat suum denominatorem B 4. & hic ex hypothesi numeratorem A 2. simplicis minutiæ. Redigatur itaque A 2. in partes, quas continet numeri B 4. & 3. & gignetur minutia $\frac{6}{8}$; quia autem 2. multiplicauit 4. & fecit 8. & 3. fecit 6. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 6. ad 8. Cum ergo sit 6. ad 8. vt B minutiæ minutiarum 3. ad 4. & 8. ad 12. vt A minutiæ simplicis 2 ad 3. Ergo etiam erit ex *æquo* 6. ex 2. in 3. genitus ad 12. ex 4. in 3. nascentem, vt numerator minutiæ minutiarum B 3. ad minutiæ simplicis denominatoré A 3. quare $\frac{6}{12}$ equiualebit tribus quartis duarũ tertiarũ partiũ. Nam vt magis res pateat, duę quartę partes numeri 12. sunt 8. quarum tres quartæ partes sunt 6.

At si in primo sensu minutia intelligatur, & de vnica parte minutiæ simplicis intelligatur fractus secundus, & minutia minutiæ: Tunc alio pacto oportebit procedere. Nam numerator idẽ persistet, q minutia minutię, at denominatoris cũ denominatore minutię simplicis, vel antecedentis multiplicatio denominatorem dabit. Sic si sint $\frac{3}{3}\,\frac{3}{5}$ fractionis secundæ idem 3. numeratoris vices obibit; at denominator consurget ex multiplicatione 5. cum 3. vt fiant 15. & stabit minutia $\frac{3}{15}$.

Prob. Nam, cùm numeri 3. intelligatur diuisa quælibet vnitas in 5. partes; Ergo 5. toties mensurabit 2. quot vnitates sunt in 2. & ideo etiam mensurabit 3. quot vnitates sunt in 3. ideoque si habeo tres quintas vnitatis, quæ est in 2. habeo etiam 3. quintas partes vnius vnitatis quæ est in 3. & quia omnium vnitatum 3. simul sumptarum quinque partes faciunt 15. habebo itaque minutiam $\frac{3}{15}$.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Minutiam minutiæ in primo sensu, minutiæ inserere, seu simul addere.

Differt insitio à reductione. Nam ibi quærimus minutiam, quæ eiusdem valoris sit, ac minutia minutiæ, hic verò addimus minutiam minutiæ simplici minutiæ, ita vt ibi non interuenit prima, & simplex minutia, nisi tanquam denominator minutiæ secundæ, nec auget eam, sed restituit eandem non re, aut numero; sed valore: hìc autem minutia simplex additur minutię minutiarum, vt fiat maior etiam valore, & est propriè additio.

Fit ergo sic. Detur minutia $\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}$, & debeamus simul addere quatuor quintas partes vnius tertię, ad duas tertias. Numerator minutię simplicis in denominatorem minutiæ minutiarum ducatur. Nempe 2. in 5. vt fiat 10. & huic addatur numerator 4. minutiæ minutiarum, & fint 14. & hic erit numerator; denominatorem verò exhibebit mutua denominatorum multiplicatio, & erunt 15. stabitque minutia ex minutia simplici, & minutia minutiæ coaugmentata $\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}$.

* Probatur. Nam cùm 5. multiplicet 3. & multiplicet 2. & fiat minutia $\frac{1}{1}\,\frac{0}{5}$ erit eadem ac $\frac{2}{3}$ sed quia 5. idem est, ac vna pars denominatoris 3. minutiæ simplicis ex præc. propos. parte secunda ideo $\frac{4}{15}$ erit eadem minutia, ac $\frac{1}{3}\,\frac{4}{5}$ nimirum minutia $\frac{4}{5}$ simplicis $\frac{1}{3}$; cùm ergo habeamus $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{1}\,\frac{0}{5}$ poterimus simul addere, vt fiant $\frac{1}{1}\,\frac{4}{5}$, quod est inserere.

Et idem agendum, si sint plures minutiæ minutiarum, vt si $\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{5}{8}$ proponantur addendæ. Ex 2. in 5. fiunt 10. addito 4. fiant 14. ex 14. in 8. fiunt 112. addito 5. fiunt 117. & hic erit numerator: Denominator verò exeret ex mutuâ denominatorum multiplicatione 120. & erit minutia $\frac{1}{1}\,\frac{1}{2}\,\frac{7}{0}$ summa minutiarum $\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{5}{8}$.

Aduerte autem minutiam nullam esse reducendã ad minimos terminos, dum vna alteri additur, licet valde augescat; sed tunc, cum omnino completa est operatio; alioquin sensus variaretur, & nihil recti colligeretur, sic $\frac{2}{7}\,\frac{1}{5}\,\frac{3}{6}\,\frac{5}{4}$ prius ad 2. per 3. fiunt 6. addito 1. fiant 7. deinde per secundum 3. 7. fiunt 21. & addito 2. fiunt 23. deinde 23. per 4. fiunt 92. addito 3. fiunt 95. pro numeratore, cum denominator ex multiplicatione denominatorum mutua colligatur 180. & fiat minutia summa prædictarum minutiarum $\frac{9}{1}\,\frac{5}{8}\,\frac{5}{0}$, quæ deinde potest redigi ad denominationem minorem per regulas traditas $\frac{1}{3}\,\frac{9}{6}$.

PROBL. III. PROPOS. XXIII.

Minutiam minutiæ minutiæ simplici in secundo sensu addere, aut inserere.

Sint exhibitæ minutie $\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}$ intellectæ in secundo sensu, quæ sint simul addendæ. Minutiæ simplicis numerator 3. cum denominatore minutiæ secundæ 5. multiplicetur, vt fiant 15. deinde ipsi numeratores inter se multiplicentur 2. & 3. & sint 6. addanturque simul 15. & 6. & fiant 21. pro numeratore; denominator verò erit numerus ex multiplicatione denominatorum 4. & 5. procreatus nempe 20.; stabitque minutia $\frac{2}{2}\,\frac{1}{0}$, quæ erit summa prædictarum minutiarum $\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}$.

* Probatur. Nam quia 5. multiplicauit 3. & 4. ex 17. lib. 7. ita erit 3. ad 4. vt 15. ad 20. Quare ex 3. huius Coroll. eadem minutia erit $\frac{3}{4}$, quæ $\frac{1}{2}\,\frac{5}{0}$. Rursus, quia 5. multiplicauit 4. qui sunc denominatores, & fecit 20. & 2. multiplicauit 3. numeratores, & fecit 6. ex propos. 21. huius eadem minutia erit $\frac{6}{2}\,\frac{}{0}$, quæ $\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}$.

Cum ergo habeamus eandem minutiam minorem $\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}$ expressam minutia $\frac{6}{2}\,\frac{}{0}$, & minutiam $\frac{3}{4}$ maiorem, & simplicem expressam numero $\frac{1}{2}\,\frac{5}{0}$. Si eas addamus simul efficient minutiam $\frac{2}{2}\,\frac{1}{0}$ summam minutiarum $\frac{3}{4}$, & $\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}$. At si plures minutiæ adsint, idem prorsus agendum. Sic, si habeamus $\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}\,\frac{5}{6}$ nempe $\frac{4}{5}$, & 2 quintas trium quartarum duarum tertiarum, & tres quartas duarum tertiarum addendas ad duas tertias, ita agemus. Multiplicabimus 2. numeratorem primæ $\frac{2}{3}$ per denominatorem maximæ minutię minutiarum 4. & fiant 8. & deinde numeratores inuicem, & erunt 6. quibus simul additis conficient 14. hunc verò per denominatorem 5. sequentis minoris multiplicabimus, & fiet numerus 70. deinde omnes tres numeratores inuicem 2. 3. 2. & fient 12. quibus numero 70. additis erunt 82. quem numerum per denominatorem postremæ 6. multiplicabimus, & fiet 492. & deinde omnes quatuor numeratores inuicẽ 2. 3. 2. 4. vt sint 48. qui numerus addendus est numero 492. & erit numerator 540. Denominator verò erit numerus ex mutuâ multiplicatioplicatione denominatorũ productus, nempe 360. & minutia summa omnium prædictarum ſtabit [illegible] idest $\frac{1}{2}$.

Porrò in hac Inſitione, ſeu additione termini ante totalem additionem ad minimos numeros reduci poſſunt, ſi tamen numerator ſit minor, quàm denominator, alioqui illa reductio eſſet potius cauſa confuſionis.

TRACTATVS XIII.

PARS SECVNDA.

De Numeris proportionalibus inueniendis.

HIc iam ipſos numeros, non vt rationem, ſed vt proportionem dicentes exquirimus, & docemus, tum numeros extremos proportionales inuenire, & conſequenter Auream regulam proportionum; tum mediam proportionalem, vnde extractionem Radicis quadratæ, tum etiam duos medios proportionales, & cubicam radicem inuenire docemus. Tractatus omninò, & abſolutè neceſſarius, ſine quo in Mathematicis proficere nemo poteſt.

EXPENSIO I.

De inueniendo datis tribus quarto proportionali, vel de regula proportionum.

HÆc regula, quâ datis tribus numeris quartus quæritur, dicitur Aurea ob eius vſum mirificum, ne dum in mathematicis; ſed & in omnibus humanis comercijs, vt ferè nihil in negotijs cõtractibuſue agatur, niſi hęc regula interueniat.

PROBL. I. PROP. I.

Tribus datis numeris quartum proportionalem inuenire, qui ita ſit ad tertium, vt ſecundus ad primum.

DIſponantur tres numeri dati in ſeriem, ita vt tertius, cui annexa eſt quæſtio, & cui quæritur quartus, qui ſit ei proportionalis, vt eſt ſecundus ad primum ſit vltimo loco, & huic ſimilis primo loco, cui verò quartus, qui deſideratur, debet aſſimilari ſecundo loco, V.g. ſit datus numerus 6. & 9. & 12. numero verò huic vltimo quartus proportionalis quæritur, nempe aliquis numerus, qui ſit in proportione ad 12. vt eſt 9. ad 6. Primo ergo loco ponendus eſt numerus 6. ſecundo 9. tertio 12. dicendo ſi 6. tanquam fundamentum habet pro termino numerum 9: numerus 12. acceptus, vt fundamentum, quem numerum proportionalem habebit, qui illi ita correſpondeat, vt 9. ad 6.? Sicque diſpoſiti, vt hic vides ſtabunt numeri, ſi 6. dant 9. quid 12.? Multiplicabitur, itaque numerus 12. per 9. & fient 108. genitus autem numerus diuidetur per 6. & prodibunt 18. hicque numerus erit quartus proportionalis.

Probatur ex 19. propoſ. ſeptimi Eucl. cum quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex medijs generatur eſt equalis ei numero, qui ex extremis conficitur; cùm ergo hìc ſint quatuor numeri proportionales, & ſit 6. ad 9. vt 12. ad 18. genitus numerus à medijs 12. & 9. qui eſt 108. erit æqualis numero, qui producitur ab extremis 6. & 18. Itaque habemus eundem numerum, qui ab extremis produceretur per multiplicationem mutuam mediorum: quare ex defin. 15. multiplicationis Tract. 8. numerus 108. toties continebit numerum 18. quot vnitates ſunt in 6. quia eſt idẽ numerus, qui produceretur à 6. & à 18. inuicem multiplicatis: Si ergo diuidatur per numerum 6. prodibit numerus, qui perquiritur, nempe numerus 18.

COROLLARIVM I.

COllige ex propoſ. 4. octaui non omnes numeros habere quartum proportionalem; eo quòd minimi ſint in datis rationibus: vnde enaſcuntur minutiæ in diuiſione geniti ex ſecundo, & tertio per primum ferè ſemper, quæ eodem modo ponendæ ſunt, vt in diuiſione integrorum tract. 8. monuimus Coroll. propoſ. 22. & more fractorum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis numeris, cuius primo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

SIt V. g. qui emerit 3. palmos ſerici cum $\frac{5}{7}$ quinque aureis, quęratur quot nummis aureis emet 32. palmos?

$$\text{Si } 3\,\frac{5}{7} \quad \text{dant } 5 \quad \text{quid } 32.?$$

Primo

Primo multiplicabimus integros ſecundum, & tertium. Nimirũ 32. p quinque, & facient 160. Iſte ergo numerus per integrum 3. & $\frac{5}{7}$ eſt diuidendus ex doctrina propoſ. 19. part. 1. Tractat. huius. Supponemus itaque numero 160. vnitatem, & deinde redigemus integrum 3. in minutiam: multiplicabimuſque 3. per 7. vt fiant 21. addemuſque numeratorem 5. & fient 26. itaque minutia erit $\frac{26}{7}$, & ſic numeri diſpoſiti erunt.

$$\frac{160}{1} \quad \frac{26}{7} \quad \text{diuiſoriſque mutato loco} \quad \frac{7}{26}$$

Multiplicabimus 160 per 7. & prodibit genitus quotiens $\frac{1120}{26}$, quem, vt redigamus ad integra diuidemus per 26. & prodibit numerus 43 [illegible]. Itaque 32. palmi ſerici venient aureis, 43. [illegible] ſi 3 [illegible] quinque aureis venduntur.

PROBL. III. PBOPOS. III.

Datis duobus numeris, cuius ſecundo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

$$\text{Si Equi } 5. \text{ aureis } 35\,\frac{4}{9} \text{ quid } 27?$$

SInt V. g. Equi quinque, qui empti ſint 35. aureis, & $\frac{4}{9}$. Quæritur, quot aureis Equi 27. conſtabunt. Ex Tract. h. p. 1. prop 11. integra in fractiones proiciãtur, nempe 35 $\frac{4}{9}$ in $\frac{319}{9}$, & numero 27. ſupponatur 1. & ſic ſtent numeri inuicem multiplicandi.

$$\frac{27}{1} \quad \& \quad \frac{309}{9}$$

Qui generabunt numerum [illegible]. qui diuidentur per numerum 5. Equorum ex propoſ. 19. Tr. h. 1. & erunt [illegible], quæ fractio ad integra redacta erit 185. & [illegible], ideſt [illegible]. Ita Equi 27. conſtabunt aureis 185. & [illegible].

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Datis tribus numeris, cui tertio adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

QVæratur, quot aureis 57. libræ, & [illegible], Zaccari veneant? dum tres libræ 14. ſolidis emuntur itaque numeri diſponentur.

Libræ 3. dant 14. ſolidos, quot reſtituent libræ 57. & [illegible]?

Igitur, vt in anteced. numerus 57 [illegible] in minutias proiciendus, vt ſint [illegible]; ex inde ſecundus numerus 14. per hunc tertium multiplicandus, & genitus prodibit [illegible], qui deinde per 3. primum diuidendus erit ex part. 1. propoſ. 19. h. Tract. de fractis, fientq; [illegible], qui ad integra redacti dabunt 268. & [illegible], ideſt [illegible]. Obſeruandum verò eſt, quòd fracti non ſunt ad integra redigendi, neque in hic, neque in antecedenti operatione; donec ſit completa operatio, ne impediatur, & confuſio enãſcatur.

PROBL. V. PROPOS. V.

Datis tribus numeris, cui primo, & ſecundo adhæreant fractiones, quartum proportionalem inuenire.

QVæratur, quid veneant 12. vlnæ panni; ſi 3 $\frac{5}{7}$ veneunt aureis 2. & $\frac{3}{5}$, itaque ita diſpoſiti ſtabunt numeri.

$$3\,\frac{5}{7} \quad \text{dant } 2\,\frac{3}{5} \quad \text{quid } 12?$$

Multiplica ex prop. 17. huius Tract. par. 1. numerum 12. per 2 $\frac{3}{5}$ redigendo ad fractiones [illegible] & deinde ducendo 12. in [illegible], & fient [illegible]; deinde ex expenſ. 5. Tract. huius p. 1. diuido fractionem [illegible] per Integrum, & fractionem 3 $\frac{5}{7}$ nempe $\frac{26}{7}$ multiplicando 7. per 156. & 26. per 5. & erit minutia [illegible] nimirum ad integros redacta 8. & [illegible], ideſt [illegible] itaque 12. vlnæ panni conſtant aureis 8. & [illegible].

PROBL. VI. PROPOS. VI.

Datis tribus numeris, cui ſecundo, & tertio minutia adhæreat quartum proportionalem inuenire.

SInt quatuor pedes muri, qui fiant pretio 6. aureorum, & $\frac{1}{3}$; quot aurei perſoluentur ob opus pedum muri 9. & $\frac{1}{4}$?

Redigentur ad fractiones 6. [illegible] ad [illegible], & 9 [illegible] ad [illegible]; & deinde multiplicentur, & fient [illegible] diuidantur deinde ex ſupra cit. propoſ. [illegible] per 4. & fient [illegible], quæ minutia ad integrũ redacta, fient aurei 16. & [illegible]; itaque 9. pedes muri, & $\frac{1}{4}$ efficientur pretio 16. aureorum, & [illegible].

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis tribus numeris, cui tertio, & primo adhæreat fractio quartum proportionalem inuenire.

EOdem modo fit. Quæratur V. g. ſi 4. vlnæ, $\frac{5}{8}$ emũtur pretio 20. aureorum, quot aureis $\frac{3}{7}$ vnius vlnæ ementur?

$$\text{Si } 4\,\frac{5}{8} \text{ vlnæ aureis } 20. \text{ quid } \frac{3}{7}?$$

Itaque multiplica 20. per $\frac{3}{7}$ ex expenſ. 4. ſuper citata, eruntque $\frac{60}{7}$, qui fracti diuidentur per integrũ, & fractionem 4 $\frac{5}{8}$ multiplicando, vt docetur propoſ. 9. expenſ. 5. ſupracit. eruntque [illegible], itaque pretium erit 1. aureus, & [illegible] qui redigi nequeunt ad minorem denominationẽ, ideſt inſuper dandæ erunt 221. partes vnius aurei ex 259. in quas diuideretur.

PROBL.

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

Datis tribus numeris, in quibus omnibus inueniatur fractio, quartum proportionalem reperire.

QVis tribus diebus, & septem horis, nimirum in 3. & $\frac{7}{24}$ conficit 93. milliaria. & $\frac{1}{8}$; quæritur, quot milliaria conficiet 5. diebus, & 11. horis nimirum $5\frac{11}{24}$? Itaque redigentur integri 5. ad suam minutiam, & fiant $\frac{131}{24}$, sic etiam $93\frac{1}{8}$ redigentur ad $\frac{745}{8}$ & inuicem multiplicabuntur, eruntque $\frac{97595}{192}$, quæ minutia diuidetur per minutiam 3. & $\frac{7}{24}$ redactam ad $\frac{79}{24}$, vt docemus expens. 5. huius de fractis, & producet $\frac{2342280}{15168}$. Quæ minutia ad integros redacta dabit milliaria $155\frac{6}{8}$ nimirum ferè $\frac{1}{2}$, itaque viator quinque diebus, & 11. horis conficiet milliaria $155\frac{1}{2}$, qui confecit diebus 3. & 7. horis milliaria 93. & $\frac{1}{8}$.

EXPENSIO II.

De probatione regulæ aureæ.

MOdus inueniendi quartum numerum proportionalem indiget trutinâ aliquâ, ob quam, quis certò agnoscat se benè operatum fuisse; pro quo secendum est duobus alijs modis æquiualentibus quartus proportionalis inueniri, quos hic explicabimus; deseruientque pro lydio lapide ad captandum experimentum de operationis rectitudine.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datis tribus numeris quartum proportionalem aliter inuenire.

SIt numerus 10. cui quærendus quartus proportionalis, qui ad illum ita sit proportionatus, vt 8. ad 12. diuidatur per primum secundus numerus, & quotiens multiplicet tertium numerum 10. sic.

Si 8. dat 12 quid 10. ? dabit 15.

diuisus numerus 12 per 8. dat quotientem $1\frac{4}{8}$, per quem multiplicatus 10. dat numerum quartum proportionalem 15.

Probatur. Quia enim, vt est 8. ad 12. ita esse debet 10. ad 15. & quotiens $1\frac{4}{8}$ exprimit proportionem, secundùm quam 8 continetur in 12. estq; denominator proportionis; & ideo eam ipsam designat, iuxta quam 10. debet contineri in quarto proportionali; quare si 10 multiplicetur per quotientem $1\frac{4}{8}$ producet illum numerum, qui toties continebit 10. vt 12. continet 8. quia quotiens numerat vices, quibus multiplicatus continetur in numero genito.

Si verò fracti adsint eadem regula valebit. V. g. velit quis capere experimentum, an computus præced. expens. propos. 7. sit bene deductus, in quo quærebatur, quid fiet vellent $\frac{3}{7}$ vnius vlnę; si 4 vlnæ & $\frac{1}{8}$ pretio 20. aureorum vendebantur. Itaque diuidendus erit secundus numerus per primum 4. $\frac{1}{8}$ idest $\frac{33}{8}$, & numerus prodibit $\frac{160}{33}$, qui multiplicabuntur per $\frac{3}{7}$, & dabunt $\frac{480}{231}$, vt priùs.

Placeat deinde capere experimentum operationis propos. 6. in qua quæritur, cum habeamus per 4. pedes muri aureos $\frac{11}{4}$; quid simus lucraturi si sint pedes $9\frac{1}{2}$, vel $\frac{19}{2}$, diuidemus itaque $\frac{11}{4}$ per 4. & producent $\frac{11}{16}$: deinde multiplicabimus per $\frac{19}{2}$, & generabunt $\frac{209}{32}$.

PROBL. II. PROPOS. X.

Alio quoque modo datis tribus numeris quartum proportionalem inuenire.

DAtis tribus numeris 30. 55. 89. quæratur quartus proportionalis, qui sit ad 89. vt 55. est ad 30. diuidatur tertius per primum, & quotus erit $2\frac{29}{30}$. Multiplicet deinde hic quotus secundum 55. & producit $\frac{4895}{30}$, qui diuisus per 30. dabit $163\frac{5}{30}$, idest $\frac{1}{6}$.

I. 30. II. 55. III. 89. IV. 163. $\frac{1}{6}$.

Probatur. Ita est primus ad secundum, vt tertius ad quartum: Ergo quoties continetur tertius in primo, toties continebitur quartus in secundo; quoniam *permutando*, ita quoque erit primus ad tertium, vt secundus ad quartum, & *inuertendo*, ita erit tertius ad primum, ita quartus ad secundum; quamobrem primus toties continebitur in tertio quoties continebitur secũdus in quarto, vel è contrà. Quapropter si diuidatur tertius per primũ, quotiẽs indicabit suis vnitatibus vices secundũm quas continetur primus in tertio, & ideo secũdùm quas continetur secundus in quarto, eritque denominator proportionis. Quare secundum eas vices, & per illum quotum secundus multiplicatus ex 18. defin. tract. 8. restituet quartum ignotum; cùm genitus ex multiplicatione contineat multiplicatum toties, quot vnitates habet multiplicans, qui, vt prædiximus, quotus est, & proportionis denominator.

COROLLARIVM.

HInc autem habes, quomodo regulæ aureæ operatio tentari possit. Nam postquam perfeceris eam primo modo, poteris hoc secundo, & tertio expiare, & experimentum sumere; an eundem numerum pariat; moraliter enim impossibile est, vt per diuersas operationes procedendo in eundem errorem delabaris.

Sit V. g. accipiendum experimentum, an prop. 5. præced. Expens. calculus sit ritè confectus, in quo proponebatur quæstio.

Si $3\frac{1}{7}$, dant $2\frac{1}{7}$, quid exposcet 12 ?

Itaque tertius numerus 12. diuidendus erit per primum $3\frac{1}{7}$ in fractiones redactum $\frac{22}{7}$, & quotiens erit $\frac{84}{22}$, qui deinde multiplicandus erit per $2\frac{1}{7}$ in fractiones redactum $\frac{15}{7}$, & pariet numerum $\frac{1260}{154}$, vt priùs.

Rursus velit quis examinare prop. 4. operationem in quâ dantur lib. 8. zaccari emendæ solidis 14. & quæritur librarum $57\frac{1}{2}$ pretium. Diuidatur vltimus in minutias redactus $\frac{115}{2}$ per primum 3 & erunt $\frac{115}{16}$. Rursusque hic quotiens multiplicet secundum 14. & prodibit genitus $\frac{1610}{16}$ requisitus quartus proportionalis; eruntque solidi $268\frac{3}{4}$.

EXPEN-

EXPENSIO III.

De regula trium inuersa.

DIximus primum numerum ad secundum in regula proportionum ita respondere proportione, vt tertius ad quartum, qui quæritur, & ideo, vt ex propos. 12. lib. 5. Euclidis constat eò maior est quartus secundo, quò maior est tertius primo, & pari ratione quò minor est tertius primo, sic, & esse debeat quartus secundo. Verùm aliquando etiam desideratur numerus quartus qui tantò sit minor secundo quantùm est tertius maior primo, vel è contra quartus expetitur; qui tantò sit maior secundo, quantò tertius est minor primo. Si tamen in priori ordine numeri disponuntur, ita vt primum locum occupet numerum, qui significat id, quod etiam tertius 9. secundum verò occupet, cui quæritur eiusdem significationis numerus, qui ita sit ad tertium, vt ipse est ad primum. Sic verò inuersa ratio stat.

Proportio recta.				Inuersa			
I.	2.	3.	III.	I.	2.	4.	III.
II.	4.	6.	IV.	II.	6.	3.	IV.
Recta.				Inuersa.			
I.	4.	6.	III.	I.	4.	2.	III.
II.	2.	3.	IV.	II.	3.	6.	IV.

Itaq; erit proportio inuersa cum vltimum consequens secundæ ponitur loco consequentis seriei secũdę, & secundũ consequens loco antecedentis secundæ seriei, & tertij termini:

THEOR. I. PROPOS. XI.

In planis numeris æqualibus tantò est latus maius latere vnius plani, quantò est minus latus aliud huius latere alio primi plani;

SIt planus numerus A, & B. Dico, *quod quanto est 6. numeri B maior quàm 4. numeri A; tantò, & 2. eiusdem B minor erit quam 3.*

	A	B	
	* * *	* *	
	* * *	* *	
4	* * *	* *	6
	* * *	* *	
	3	* *	
		* *	
		2	

Probatur. Nam ita est ex propos. 17. primi reciprocè 4. ad 6. vt 2. ad 3. Ergo ex 12. lib. 5. Elem. ita 4. erit minor quam 6. sicut 2. quam 3. Quare 3. consequenter tantò erit maior, quam 2. quantò 2. est minor, quam 3. & consequenter, quantò 4. minor quam 6. tantò maior erit 3. quàm 2.

COROLLARIVM.

HInc est posse dari casum, quòd cognoscamus plani numeri latera 4. & 3. & alterius 6. & hinc velimus cognoscere ipsi 6. per regulam auream latus tale, quod faciat cum ipso numerum talem planum, qui exequet numerum planum ex 3. & 4. Ideoque debeat inquiri numerus, qui sit tanto minor, quam 3. quanto 6. est maior, quam 4. & ideo sit inuertenda regulá.

THEOR. II. PROP. XII.

Inuersa regula ad rectam reduci potest.

QVoniam, vt declarauimus, Consequens primæ seriei pro antecedente ponitur in secũda serie, & consequens secundæ seriei pro consequente in prima in 2. regula inuersa. Ideo erit, vt consequens 2. primæ seriei *conuertendo* ad antecedentem suum 4. Ita consequens secundæ seriei 3. ad ignotum antecedens 6. Eritq; proportio ex conuersione terminorum proportioni rectę respondens. Ibi enim referebatur Antecedens 4. ad consequentem 2. vt quiddam ignotum ad consequentem 3. Sed conuersio terminorum proportionem eorum non immutat, & adhuc antecedens assumptum, quod priùs erat consequens. Si dicebat ꝓportionẽ maioris inæqualitatis ad suũ antecedens in prima serie, talem, & dicit consequens in secunda serie ad antecedentem suum alioquin non esset eadem proportio, si esset in vna serie maioris inæqualitatis, in altera minoris: Ergo Proportio inuersa conuersis terminis erit recta, & consequens, ac antecedens assumptum 2. erit minus antecedẽte 4. vicem termini occupante in prima serie, vt antecedens 3 priùs consequens ignoto altero termino minus erat.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Quærere quartum proportionalem, qui sit maior secundo, vt est tertius minor primo; Vel etiam minor secundo, vt tertius est maior primo.

IVxta præcedentem Regulam rectam proportionum sint dispositi numeri, & quæratur; si 3. palmi latitudinis 9. vlnas serici exposcunt ad conficiendam lacernam; quot vlnæ 2. palmi latitudinis requirent.

3. 9. quid 2 ?

Inuertantur termini, & qui habet annexam quæstionem primus constituatur, medius medium teneat; primus tertium locum, sic.

Quid 2.? si 9. dant 3.

Deinde eodem prorsus modo procedatur, multiplicetur vltimus per secundum, & erit 27. qui diuidatur per primum 2. & erit quartus proportionalis $13\frac{1}{2}$. Et ita erit 2. ad 9. vt 3. ad $13\frac{1}{2}$: quoniam sicut 9. quater cum dimidia eiusdem parte continet 2. sic $13\frac{1}{2}$ quater cum dimidia eiusdem ternarij parte continet 3.

Itaque 3. vlnæ latitudinis dant 9. longitudinis; quare 2. vlnę latitudinis exhibebũt vlnas longitudinis $13\frac{1}{2}$, cùmque 2. primus sit minor, quam 3. tertius, quartus tamen $13\frac{1}{2}$ est maior secundo 9. cum in regula recta deberet esse minor: Si enim regula recta adhiberetur proueniret numerus 6. qui esset tanto minor, quam 9. secundus, vt tertius 2. minor est primo 3.

Sed iam huius regulæ capiamus experimentum in fractis.

Operarij 30. perficiunt opus 11. diebus, 15. horis, quot diebus conficient 50?

30. 11. D. H. 15. quid 50 ?

Quo maior hic numurus operariorum, & minor numerus dierum requiritur ad opus perficiendum,

dum,& ideo quantò eſt tertius maior primo, nempe 50. numero 30. tantò erit tempus, qui deſideratur, & quartus numerus minor ſecundo 11. qui etiam tempus exprimit.

Vnde regula aurea; ſed euerſa adhibenda eſt: atque numeri inuerſò erunt diſpoſiti.

$$50?\quad 11\frac{15}{24}\quad 30.$$

Itaque multiplicabitur 30. per 11 $\frac{15}{24}$ in minutias redactum [illegible], & efficient [illegible], qui deinde diuidentur per 50. & efficient [illegible] nimirum dies 6. & [illegible].

Quæ regula inuerſa etiam probari poterit, tum primo, tum ſecundo modo præcedentis expenſionis, & quidem primo; ſi numerus ſecundus, [illegible] diuidatur per primum 50. & fiant [illegible] deinde quotiens hic multiplicet tertium 30. & fiant [illegible]. Sic etiam ſecundum examen poterit adhiberi diuidendo per primum 30 tertium numerum 50. vt fiant [illegible], deinde multiplicando hanc minutiam cum minutia media [illegible] dabit enim [illegible].

Cognoſcetur autem ex ipsâ quæſtione propoſitâ, cùm adhiberi oportebit regula proportionum inuerſa; nam ipſum lumen naturæ dictabit, quãdo requiretur quartus terminus tantò minor ſecundo, quantò tertius maior primo, quòd tertius ex ſui natura non poſſit dare maiorem terminum, ſed minorem. V. g. ſi ſaccus tritici, cum emitur quatuor aureis dat panem vnius ſolidi 10. vnciarum, quot erunt ûnciæ, ſi triticum cariùs ematur; nempe 6 aureis: nam ipſa rei natura dictat, quòd quantò cariùs emitur frumentum, tantò panis debeat eſſe minoris ponderis, vt eodem pretio ſemper vendatur, & numero æquet pretium maius, cum panis ſemper vendi debeat vnico ſolido, ideoque hìc cognoſcitur, quod regula Inuertenda ſit, quia, quo maior eſt 6. tertius numerus, quàm 4. eo minus debeat eſſe pondus panis, qui expoſcitur, pondere dato 10. vnciarũ.

EXPENSIO IV.

De Regula Aurea compoſita.

Componitur regula Aurea, cum geminâ vice adhibetur eo, quòd quæſtio propoſita talis naturæ ſit, vt non niſi gemina vice adhibita regula proportionis ſolui queat.

THOR. I. PROPOS. XIV.

Quando proponuntur magis, quam tres termini; tunc gemina vice regula proportionum eſt adhib nda.

Svnt quinque operarij, qui murum 23 pedum conſtruunt 7. diebus: ſi ergo ſint 10. quot diebus conſtruent murum 39. pedum? Vides hic plures, quàm tres terminos eſſe propoſitos, nempe quinque operarios 23. pedes, dies 7. & rurſus 39. pedes, & decem operarios. Dico itaque, quod regula trium gemina vice adhibenda ſit: Nam exquirendum eſt; ſi 5. operarij, vt faciant 23. pedes 7 diebus operantur, quod inſument temporis in conficiendis 39. pedibus ijdem met operarij. Ita, vt operarij non veniant ſub quæſtione, cum ijdem ſemper ponãtur, cognito deinde tempore V. g. 11. dierum, & [illegible] partium vnius diei. Poſtea exquiremus, ſi 5 operarij temporis 11 [illegible] conficiunt murum 39 pedum quanto tempore 10. conficient eundem met murum. Itaque murus hic non venit ſub quæſtione; ſed idem præſupponitur. Sicut multa alia licet poſſent reuocari ad quæſtionem, quòd tamen eadem præſupponantur in vtraque proportionalium ſerie, tam in primo, & ſecundo, quam in tertio, & quarto non reuocantur ad quæſtionem, vt altitudo muri, & longitudo, quæ, ſi proponeretur, quælibet ſemel adhibitâ regulâ eſſet exquirenda, vt infra.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Regulam trium rectam compoſitam data capaci quæſtione adhibere.

Sit propoſitum ſaxum, cuius altitudo ſit pedes 2. latitudo pedes 4. $\frac{1}{2}$, faciatque 9. pedes ſuperficiei; quæritur quot pedes faceret, ſi latitudo eſſet 6. altitudo eſſet 5. pedum. Itaque quæremus primo de altitudine, ſi ita placeat, deinde de latitudine. Itaque dicemus ita. Si ſaxum altum pedes 2. latitudine poſthabita, pedes 9. ſuperficiei exhibet. Quot daret ſi eſſet altum pedes 5? & multiplicato 9. per 5. generabitur 45. quẽ diuidemus per 2. & prodibit quotiens 22 $\frac{1}{2}$. Deinde quæremus de latitudine; dicemuſque ſi ſaxum pedum 4 $\frac{1}{2}$ dat longitudinis 22 $\frac{1}{2}$ quid ſi eſſet 6. & dabit 30. pedes.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Regulam auream inuerſam compoſitam dato capaci ſubiecto exercere.

Sit Rupes 13. pedibus lata, alta 22. ex quâ longitudinis desũpſi pedes 32. ad conficiendũ murum. Debeo conficere alium murum eiuſdem magnitudinis, & habeo aliam Rupem altam 17. pedes, & latam 11. Quæritur, quid debeam de illa deſumere in longitudinem. Quæram igitur primo, ſi pedes 13. latit. dant 32. longitudinis, quid dabunt 11? Certum eſt, quòd dabunt magis, quàm 32. licet 11. ſit minus, quam 13. eò, quia ſit minor latitudo; vnde debeo deſumere magis ſecundùm longitudinem; ideoque regulam inuertam.

Quid 11.? ſi 32. dant 13.

Et facto computo prodibit 37. [illegible]. Itaque, ſi 13. dant longitudinem 32; oportebit, quòd ex ſaxo minoris latitudinis deſumam longitudinem maiorem 37 [illegible]: Deinde Rurſùs dicam, ſi 22. dant 37. [illegible], quid 17? & vtique debet eſſe maior numerus, qui quæritur, quam 37 [illegible] licet 17. ſit minor, quam 22; quia minor altitudo dat magis longitudinis. Vnde inuertam regulam ſic.

$$\text{Quid } 17.?\quad \text{ſi } 37\frac{9}{11}\ \text{dant } 22.$$

Et inuenies numerum [illegible], ideſt 48. & [illegible]; itaque longitudo huius rupis debebit eſſe 48. & [illegible], & patet: Nam producunt 13. 22. & 32. molem æqualem nimirum 9152. vt producunt 17. 11. & 48 [illegible], qui etiam producunt 9152. & ita ex mole æquali ſaxea poſſum conficere murum æqualem.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Regulam Auream compoſitam ex inuerſa, & recta dato capaci ſubiecto exercere.

Sint quinque operarij, qui murum conficiant diebus 25. pedum 32. Quæritur, quanto tempore conficient, ſi eſſent operarij 7. & murus pedum 40.

Primo itaque inquiratur, ſi diebus 25. Operarij 5. dant murum pedum 32. quid ſi eſſent 7. & ſic ſtabit quæſtio.

Si 5. diebus 25. perficiunt opus, quid 7?

Sed quia, quò plures ſunt operarij eò minori tempore opus perficiunt, quare licet 7. ſit maior numerus, quam 5. numerus tamen, qui quæritur debet eſſe minor, quam 25. ideoque inuertenda eſt regula ſic.

Quid 7.? ſi 25. diebus 5. opus perficiunt.

Et adhibita regula eueniet tempus 17 $\frac{6}{7}$ dierum.

Deinde inquiremus; ſi murus 32. pedum conficitur diebus 17 $\frac{6}{7}$; quanto tempore perficietur ſi eſſet 40. pedum, & ſic erit exemplum.

$$\text{Si } 32.\ \text{diebus } 17\frac{6}{7},\ \text{quid ſi } 40.\ \text{pedum?}$$

Et quia, quò opus eſt maius, eo maius eſt tempus inſumptum in opere, ideo, vt eſt maior 40. quam 32. ita erit maior numerus exoptatus, quam 17 $\frac{6}{7}$: Vnde hæc operatio recta erit, & multiplicato vltimo numero, cum medio prodibit numerus [illegible], & ſi diuidatur per 32. numerus erit [illegible], ideſt facient opus diebus 22 [illegible]; ideſt [illegible]. Propterea perficient opus, ſi ſint 7. operarij, & opus 40. pedum, ſi 5. faciunt pedes 32. diebus 25.

EXPENSIO V.

De numeris æquè potentibus.

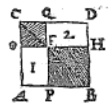
Antequam ad inuentionem radicis quadratæ accedamus, & inuentioni medij proportionalis, opus eſt vtile licet non neceſſarium, de numeris æquè potentibus agere, qui fundantur in lib. 2. Eucl. & 8. ſiquidem hæc maxime faciunt ad radicem quadratam intelligendam.

Præaſſ. Iam quidem de numeris æquè potentibus latè egimus lib. 8. Verum hìc faciliùs, eaq; quæ demonſtrauit Euclides de lineis, numeris applicantur. Siquidem vnica oſtenſione omnes 10. propoſitiones lib. 2. numeris conuenire oſtenditur. Quia longitudo, ſeu linea commenſurabilis alteri eſt ſicuti numerus ad numerum ex prop. 3. decimi, & ex propoſ. 4. quę à lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata ſunt, vt quadratus numerus ad quadratum numerum, & conſequenter, quæ ex lineis longitudine commenſurabilibus fiunt rectangula, ſe habebunt vt planus numerus ad numerum planum. Hinc euenit; quòd, ſi latera cuiuſcumque, ſeu quadrati, ſeu rectanguli, cuiuſcumque propoſitionis ſecundi libri ponantur rationalia, quòd ſe habebunt inuicem, vt numerus ad numerum, & eorum quadrata, & rectangula, vt quadratus numerus ad quadratum numerum; & ideo etiam, vt planus numerus ad planum numerum: Vnde ſi linea ſit ad lineã, vt numerus ad numerum, etiam quadratus ad quadratũ, vt numerus quadrat. ad numerũ quadratum, & planum ad planum, vt planus numerus ad planum numerum; Sed propoſitiones ſecundi Euclidis de lineis commenſurabilibus intelligi poſſunt, cum ſectio permittatur vt libet de 1. vſq; ad 10. Ergo eadem ratio, quæ de lineis, & quadratis, rectanguliſque erit de numeris, eorumque quadratis, & planis: ſed vt etiam pateat quomodo ijs propoſitionibus ſingulis, hæc vniuerſalis doctrina applicetur ſub exemplum veniat propoſ. 4. quæ, & noſtra intereſt.

THEOR. I. PROP. XVIII.

Si numerus diuiſus ſit, vtcumque quadratus totius eſt æqualis quadratis partium, & inſuper rectangulis earundem.

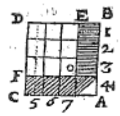
Sint partes AB 8. cuius 3. aſſumantur, & fiat quadratum 9. & 5. & fiat quadratum 25. deinde partes ipſæ multiplicentur ſimul, & fiat planum 15. & geminetur, ſintque 15. & 15. duo plana. Dico, quod hæc duo plana 15. & 15. & duo quadrata 25. & 9. ſunt æqualia quadrato ex toto numero 8. nimirum quadrato 64.



Patet. Nam ita eſt, vt ex præaſſumpto oſtenſum eſt, quadratum AD ad quadrata nigra, & rectangula 1. & 2. vt numerus quadratus 64. ad duo quadrata 9. & 25. & plana 15. & 15. ſed illud AD eſt æquale quadratis nigris, & rectangulis 1. 2. ergo etiam quadratus 64. erit æqualis quadratis 9. & 25. & planis 15. & 15.

COROLLARIVM I.

Hinc eſt modus reperiendi quadratum numerum, cum quo quilibet numerus quadratum quoque numerum conſtituat. Sit V. g. numerus 7. conſtituaturque hic vice gnomonis in quadra-



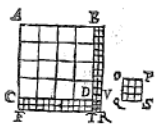
to ABCD, vt per quadrata parua nigra exprimitur. Ad hoc itaque, vt reperiatur numerus quadratus cum hoc gnomone, quadratum quoque efficiens, reperiendus erit quadratus albus EF. Vt igitur reperiatur ex numero 7. dematur 1, vt auferatur quadratum ſeminigrum angulare ad A, remanebuntque 6, qui numerus duo parallelogramma nigra

gra exprimit ; ad hoc itaque , vt vnum habeatur, diuidatur bifariam,& erunt 3. : multiplicetur ideo 3 in se ipsum, quia latus plani est æquale lateri quadrati albi, & obtinebis quadratum album 9. cum quo 7. faciet quoque quadratum numerũ 16.

Si verò velis plana seu parallelogramma nigra plures series quadratorum continere, & numerus datus sit capax , tunc ita efficies dato numero 351. subtrahes ab eo numerum quadratum , quem elegeris, cuius sit capax, vt 169. cuius radix & latus est 13. nempe latus o 7. quadrati parui seminigri; remanetque numerus 182. pro parallegrammis nigris cc, & ob. Diuidatur bifariam, quia sunt duo; & erit 91. diuidaturque per latus 13. nempe o 3. & prodibit latus oe , nempe quotus 7. Multiplicabitur itaq; in se quotus 7.& generabitur 49. qui numerus cum 35. constituet quadratũ 400. cuius radix est 20. Verum id non potest semper fieri præcisè , sed proximè in numeris maximè, in quibus fractiones interueniunt .

COROLLARIVM II.

*Hinc etiam regula ellicitur alia , quâ inueniatur numerus, qui cum numero quadrato quadratum quoque efficiat . Ob cuius declarationem ponamus quadratum ABCD non habere, nisi 16. partes, & ideo in se toto non continere , nisi quadrata parua 256. si vellem addere quadrata tot eiusdem rationis, quæ componerent quadratum maius , deberem addere 16. pro vno quoque



latere ; at insuper in angulo 1 quadratum . Vnde essent addenda 3. quadrata . Quod si in geminam seriem essent addenda quater 16. quadrata nempe 64.& insuper 4. quadrata in angulo . Vnde regula prodit . Sit datus numerus quilibet 9. & radix 16. quadrati 256. per illum 9. multiplicetur, & producet 144. & productus numerus bis assumatur , & fit 288. ob duos planos numeros BV , & CT , deinde 9. in se multiplicetur,& fit 81. ob quadratum seminigrum DR, qui cum 288. faciat summam 369. hic numerus additus quadrato 256. quadratum quoque efficit 625. cuius radix est 25. nimirum 16 & 9.

Et hac regula potest fieri tabula radicum , & quadratorum . Nam si quadrato 1 velimus addere quadratum numeri 2. accipiamus gemina vice radicem numeri 1 , quæ est 1 , & addamus 1 , & fient 3. qui cum quadrato 1 facient 4. cuius latus est 2 Deinde accipiemus gemina vice 2. & addemus 1. vt fient 5. qui additus quadrato 4. facit 9 quadratum numeri 3. Deinde gemina vice acceptus 3. cum vnitate facit 7. qui additus quadrato 9. facit quadratum 16. numeri radicalis 4. & sic consequenter procedendo singulorum numerorum naturaliter procedentium, singula quadrata obtinebimus ; quorum tabulam dat Clauius Geom. prac, l.8. & Maginus tab. Tetragonica .

COROLLARIVM III.

Tandem eruitur, quomodo dato quadrato reperiamus numerum ; qui subductus relinquat quoque quadratum ; nam si à latere 16. quadrati 256. auferatur 3. & reliquus 13. per 3. multiplicetur , & fiant 39. & gemina vice accipiatur, & fit 78; cui addatur quadratum 9. numeri 3. subducti à 16. fient 87. Numerus itaque 87. subductus à numero quadrato 256. relinquit quadratum 169. cuius radix 13.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Numero dato æquipotentes numeros alios , quos , quis iusserit, reperire .

Sit numerus aliquis 6. diuidendus in numeros 3. qui possint efficere quadrata, quæ simul æquent quadratum numeri 8. Reperiantur tres numeri 5. 4. 3. ex propos. 13. lib. 9. Elem. quorum duo 4. & 3. æquent quadratum numeri 5. Deinde vtere regula aurea, & dic si 5. dant 4. quid dabit datus numerus V. g. 8. ? & si 5. dant 3. quid 8? Inueniesque $6\frac{2}{5}$, & $4\frac{4}{5}$, qui erunt radices duorum quadratorum quadrato numeri 8. æqualium .

* Nam ita ponitur 5. ad 4. vt 8. ad $6\frac{2}{5}$ Ergo ex 18. l.8. cum quadrati suorum laterum proportionem habeant duplicatam; ita erit quadratum ex 5. ad quadratum ex 4. vt quadratum ex 8. ad quadratum ex $6\frac{2}{5}$. Et sic pariter quadratum ex 3. ad quadratum ex 5. vt quadratum ex $4\frac{4}{5}$ ad quadratum ex 8. Cum ergo ex 25. l.5. prima, & quinta quantitas ad secundam eandem obtineat rationẽ, quam tertia,& sexta ad quartam . Erit quadratum ex 4. & 3. ad quadratum 5. vt quadratum $6\frac{2}{5}$, & $4\frac{4}{5}$ ad 8. sed quadrata ex 4. & 3. sunt æqualia quadrato ex 5. Ergo etiam quadrata ex $6\frac{2}{5}$, & $4\frac{4}{5}$ æquabuntur quadrato 8.

Sed rursus quæratur si 5. dat 4. & 3. quid $4\frac{4}{5}$? Inuenienturque $3\frac{21}{25}$, & $2\frac{22}{25}$, qui æquabunt quadratum numeri $4\frac{4}{5}$, & consequenter cum quadrato numeri $6\frac{2}{5}$ æquabunt quadratum numeri 8. ex prædicta ratione, & sic efficies, si alios exoptabis plures , quam tres.

EXPENSIO VI.

De radice quadrata perquirenda , & medio proportionali , tertioque percrutando datis duobus .

Radicem quadratam exquirere est idem , ac datis duobus proportionalibus numeris medium proportionalem inuenire, quia ex prop. 19. lib. 7. Elem. quadratus numeri proportionalis est æqualis plano extremorum . Vnde sine cognitione huius extractionis medius numerus proportionalis venari nequit .

Præassumptum . Aduerte id quod notauimus Tract. 8. de Arith. simplici locum significare proportionem , quæ per decuplam multiplicationem numeri crescit ; Ita primus nnmerus à dextra significat vnitates, secundus versùs sinistram decimas

mas , tertius decimas decimarum, & cæt.

Ideo quadratus numerorum , qui primò subtrahuntur incipiendo à sinistra erit maior , quam secundus , & sic de reliquis ; quia significat , vel decimas, vel centesimas, vel millesimas. Cum itaq; quadrati numeri latus non inueniatur totum simul obstante numeri magnitudine ; sed per partes , & per diuersa quadrata : ideo primus quadratus si vnus , vel duo significat quadrata numeri simplicis, si sint tres numeri erit centesimarum,& numerus ille quadrati , qui subducitur , significabit singulis vnitatibus decimas , & idem si sint quatuor ; quia non possunt facere quadratum numerum decimarum; nisi tres, vel 4. numeri; sicut vnitatum quadratum facit vnus , vel duo numeri : Nam 10. per 10. ductus facit 100. qui tribus numeris exprimitur. At si sint quinque, vel sex quadrati radix , quæ extrahitur , erit centesimarum: nam 100. per 100. ductus facit 10000. qui quinque numeris exprimitur , nec minor numerus potest esse centesimarum quadratum ; at si sint septem, radix quadrati, quæ extrahitur, erit millium; quia 1000. per 1000. ductus facit 1000000. quadratus numerus vnitatis millenariorum, qui, & poterunt esse dualitatis earundem, & trium, & quatuor , & ideo etiam octo numeris poterit exprimi , vt quadratum quatuor millium est 16000000. qui octo numeris exprimitur, & si sit centesimarum exprimetur, vt diximus sex numeris, vt 160000. & si sit decimarũ quatuor, vt 1600. & si sit vnitatũ duobus 16. Et sic dicendũ de alijs numeris etiã maioribus.

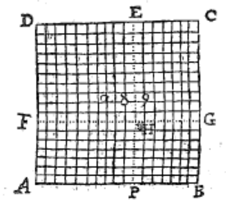
Præassumptum 2. Aduertendum secundo ex propos. 18. lib.8. inter numerum quadratum, & alium semper cadere aliquem proportionalẽ numerum planum, qui sunt in quadrato duo complementa æqualia , vt ex propos. 35. lib. 1. Eucl. colligitur, & ex propos. 4. expens. præced. qui cum altero quadrato complent quadratum maiorem . Cum ergo habetur quadratum aliquod maius , & ex eo subducat aliquis quadratum minus relinquit Gnomonem silicet quadratum aliud, & duo complementa : Sic si ex quadrato DCAB subducatur quadratum DEFH , relinquet gnomonem EBF circa se, qui continet quadratum HB , & duo rectangula CH , & HA , quæ sunt media proportionalia inter quadratum DEFH , & quadratum HB . Quare tum hac, tum ratione supradicta non ab omnibus numeris latus quadrati subducẽdus est tum ex prima ratione , cum secundus, quartus, sextus, octauus,& cæt. consignificent cum primo, tertio, quinto, septimo , & cæt. Tum quia ex præsenti ratione , rectangula quoque sunt subducenda ; vnde semper reliquendus est vnus medius pro illis subducendis .

PROBL. I. PROPOS. XX.

Quadratam radicem subducere .

Sit subducenda radix quadrata à numero 289 punctum sub dextro 9. collocabitur procedendo ad sinistram,& intermisso vno , idest 8. sub tertio 2. & sic , si alij adsint, quia ab illis propriè radix quadrata subducitur; ab intermedijs verò media proportionalia , seu rectangula . Deinde videndum est, quinam quadratus numerus capiat in 2. ad sinistram, qui est 2. & video; quòd in numero 2. maior quadratus nõ continetur, quàm 1. quare scribo seorsim 1.& sub 2. rursùs scribo 1. in se multiplicatus , & factus quadratus 1. Et deinde subduco ab 2. & remanet 1. nempe subduxi quadratum decimarum, qui est 100. ob locum tertium, in quo est , & æquale quadratum DFHE, & habeo latus DE , qui est 1. numerus sepositus, qui, quia in radice ponendus est secundo loco, vt constabit, erit numerus decimarum, & significabit 10. idest latus DE , remansitq; residuum 189. Sed quia rectangula etiam ipsa subducenda sunt, propter quòd numerus intermedius 8. non est punctatus, quæ sunt rectangula CH , & AH, quæ pro vno latere continent quantum continet redix quadrata , & pro alio radix illius quadrati subtrahendi adhuc incogniti, vt ex prop. 4. præced. colligitur : Siquidem latus 17. sectus est vtcumque in 10. & 7. Vnde duo plani numeri, qui cum duobus quadratis ex 10. & 7. integrant quadratum ex toto numero 17. continebuntur sub 10. & 7. inuicem multiplicatis , quare vnum latus erit 10. latus iam cognitum, & aliud 7. erit exquirendum .

$$\begin{array}{r|l} \dot{2}8\dot{9} & 1 \\ 1 & \\ \hline 189 & \end{array}$$



Ad hoc, vt ergo illa subtraham, quia sunt duo, habẽt consequenter duo latera æqualia radici EH, & HF . Quare radix duplicanda est vt faciat 2. significans 20. ob secundum locum quem occubabit radix 1. & ponendus seorsim sub radice .

Circa quem numerum 2. considero ; an capiat, & quod vicibus capiat in numero residuo 18. & video , quòd capit 9. vicibus , & esset hoc 9. aliud latus HG rectangulorũ : sed quia quantum est hoc latus HG, tantùm debet esse latus aliud quadrati incogniti subtrahendi HB: ideo videndum est; an hic numerus 9. in se multiplicatus capiat in numero residuo, & punctato, à quo illud quadratum deducendum est , & quia à 189. ablatis 2. per 9. multiplicatis, nimirum 18. residuum est 9. in quo 9. in se multiplicatus nimirum 81. non capit ideo 9. non erit alterum latus planorum CH , & HA ; quia non relinquit sufficientem numerum, qui faciat quadratum HB .

Accipiam igitur 7. pro latere HG , qui duabus vicibus continetur in 18. & relinquit insuper pro residuo 4. qui cum 9. faciunt 49. qui numerus est

$$\begin{array}{r|l} \dot{2}8\dot{9} & 17 \\ 1 & \overline{2} \\ \hline 189 & \\ 14 & \\ \hline 49 & \\ 49 & \end{array}$$

tantus, qui capiat 7. in se multiplicatum : Nam 7. ductus in 7. exhibet 49. Ideo iam reperi latus HG, vel EC planorum . Vnde ambo subducenda sunt; ergo 2. in 7. ducti faciunt 14. qui ob locum æquinaæquiualent numero 140 subtrahoque à 189. ita tamen, vt sera t suum locum, & 4 sub 8. situs sit, & 1. sub ·. neque vltimum numerum punctatum vllo modo tangat subtractio. remanentq; 49. Et quia iam cognoui latus parui quadrati HG esse 7. ideo multiplico 7. in se, & faciunt 49. qui subductus à 9. numero residuo nihil remanet: Vnde 7. ponendus est apud radicem sepositam 1. & efficiet 17. Vides itaque, quod 1. priùs significabat 10. cum modo cum numero 7. significet 17 qui est radix, seu latus DC 17. partium maximi quadrati capientis quadratula 289.

Sed quia aliquando casus occurrunt, qui ambiguum possent reddere operatorem: nisi de illis priùs monitus esset, ideo libet omnes casus, qui occurrere possunt recensere.

Primus est; si numerus primus ad sinistram punctum non habeat, tunc, vt diximus in præass. 1. ille numerus est consignificator, & tota radix à duplici numero subducenda est, vt si fuissent dati 9189. tunc numerus 9. nõ esset punctatus; quare radix non esset ab illo extrahenda, quæ esset 3; sed ab illo quidem vt cum numero 2. idest à 92. quæ est 9 cuius quadratum est 81. à 92. subducendus, & residuum erit 1189. Duplicetur ergo, vt supra radix 9. & facit 18 Video itaque, quot vicibus capiat 18. in 118 & video, quod capit quidem magis quã 6. sed numerus 6. est ille, qui relinquit numerum capacem recipiendi quadratum ipsius 6. & ideo multiplico 6. per 18. & faciunt 108. quos subduco à 1189. ponendo 8. sub 8. & reliqui numeri sub reliquis versùs sinistram, & residuum est 101. Multiplico deinde 6. in se, & faciunt 36. quos subduco à 109 ponendo 6 sub 9. & residuum est 73 fractus numerus à quo radix quadrata subduci nequit. Radix ergo quadrata huius numeri erit 96.

Casus secundus est, si numerus, qui datur non sit quadratus V g. si numerus datus esset 115. ita vt ablato primo quadrato 1. remaneat 15. à quo radix quadrata duplata pro planis proportionalibus medijs subduci nequit, vt hic: Nam 1. sepositus duplatus non potest subtrahi ab 1. qui est apud 5. Vel etiam si capiat numeros planos proportionales medios, adhuc tamen totus residuus numerus à radice quadrata primo extracta. & duplata adeo absorbeatur, vt non remaneat locus alteri quadrato, nec quidem vnitati, vt si daretur numerus 120. tunc subducto maximo quadrato ab 1. qui est 1 remanet 20. à cuius numero sinistro radix quadrata 1. duplata subtrahi quidem potest; sed nihil remanet tunc signum est, quòd non adsit tantus numerus quadratorum paruorum, qui integrent saltem seriem vnam ipsorum pro quolibet plano; nimirum 10. pro vno, & 10. pro alio, vt in numero 115. siquidem ablato maximo quadrato decimarum, nempe 100. quarum radix est 10. non remanent nisi 15. qui non possunt conficere duas series æquales radici 10. pro FH, & 10. pro HE; vt constat ex Cor. 2. propos. 18. expens. præced. hæc verò series gemina 10. & 10. idest 20. non adest, cum non sint, nisi 15. Quod si adesset, at non superesset saltem vnitas pro quadrato paruo nigro, ad H, vt ex supracit. Coroll. constat esse necessarium ad hoc, vt duo plana, & series quadratorum paruorum cum quadrato magno extracto faciant quoque quadratum. Ideo, si hoc occurrat, apud radicem ponendus est 0, vt dicat 10. & residuum 15. aut 20. erit numerus fractus.

Casus tertius est. Si id occurrat non in fine, sed in medio V. g. si esset numerus 12036. à quorũ quinto 1. radix quadrata subducta relinquit 20. à quo si 1. radix duplata subducatur nihil remanet sub puncto nisi 0, à quo, nec vnitas subduci potest: Signum est; quòd ab eo numero radix quadrata, quæ esset decimarum subduci nequit; cum nullum adsit quadratum centesimarum, nempe nullum adest quadratum 100. vnitates, seu quadratula continens: Quare apud 1. sepositam radicem, vt locum seruet ponendus est 0, & posthabito numero medio punctato, cuius loco ponitur 0, apud radicem, iam procedendum est ad educendam radicem quadratam ab vltimo: Vnde considero numerum, qui apud eum est non pũctatum, 203. quot vicibus capiat radicem duplatam 10. quæ est 20. & video quod 9. vicibus, & adhuc remanet numerus talis, qui capiat 9. in se multiplicatum nempe 81. Ideo multiplico 20. per 9. & faciunt 180. quos subduco à 203. & sunt residui 23. quibus addo 6. vt sint 236. à quo in se multiplicatus subducendus nempe 81. & residuum est 155 qui fracti sunt, nec ab eis radix quadrata amplius subduci potest. Itaque radix quadrata numeri dati 12036. est 109. & remanet aliquid, quia numerus quadratus non est. Vnde maximi quadrati, qui est 11881. qui in ipso capiat radix quadrata subducta est.

11036	109. Residuum 155.
11	20
203	81
180	
236	
155	

Casus quartus est, si remaneant reliquiæ maiores; quam par sit, & ferat regula, quomodo dignoscatur error. Hic itaque dignoscitur ex Cor. 2 propos. 18. præced. Nam reperiatur talis numerus, qui cum numero, cuius radix quadrata extracta est, quadratum quoque efficiat; Cùm ergo sciamus radicem quadratam, eam duplicabimus, & sit præcedentis quadrati duplicata radix 218. & vt reperiamus minimum numerum, qui hoc quadratum constituat accipiemus 1. per quem multiplicabimus 218. & dabit eundem numerum, cui addemus 1. in se multiplicatum, vt faciat 1. & fiet 219. & hic erit minimus numerus, qui quadrato 11881. possit addi ad hoc, vt eius radix vnitate tantùm aucta adhuc efficiat quadratum; si ergo residuum V. g. 155. æquet hunc numerum; signum est, quòd radix quadrata non bene deducta, sit, & quòd ille, qui extractus est, licet sit radix quadra-

ta

ta alicuius numeri, non est tamen maximi quadrati, qui in numero illo capiat, cum maior potuisset capere, cuius radix vnitate esset maior.

PROBL. II. PROPOS. XXI.

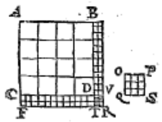
Radicem quadratam vtrum benè deducta sit inuestigare.

Extracta radix quadrata in se multiplicanda est, & si adsint reliquiæ addendæ. Nam, si restituat numerum priorem additis residuis, benè est extracta radix quadrata alicuius quadrati, qui in numero dato capiat; Ad hoc autem, vt sciamus, & securi simus, illum esse maximum quadratum; examinandæ erunt reliquiæ; vtrum possint superare, vel æquare numerum ex Casu Tertio, qui cum numero à quo radix quadrata deducta est quadratum constituat; Nam potest esse, quod quadratum sit benè deductum; sed non maius quàm fieri possit, ita si extracta esset radix quadrata 16. à 289. multiplicatis in se 16. & additis fragmentis 33. restitueret priorem numerum 289. cum tamen radix quadrata non sit 16. sed 17.

PROBL. III. PROPOS. XXII.

A numeris non quadratis radicem quadratam proximiùs, quàm possit, educere.

Quoniam non omnis numerus quadratus est, si tamen quis vellit ab eo maximum quadratum, quem possit, proximiùs inuestigare, ita faciendum est.



A B C D F T R V O P S

* Sit numerus 22. à quo radix quadrata subducta 4. qualis est quadrati ABCD reliquerit pro residuo quadrata 6. vt est os. Volo cognoscere, quid radici quadratæ addendum sit propter hoc residuum. Multiplico radicem quadratam 4. pro vt mihi placet, V. g. per 3. (si per 10. vel 100. exactior erit, & facilior operatio) & faciet 12. & quia sunt duo plana facient 24. ita vt sint 12. pro vno, & 12. pro alio, quod nihil aliud est, quàm quod latus quadrati BD intelligatur diuisum in partes 12. & singula quadratulorum latera in 3, & item CD in partes 12. quæ sunt 24. Deinde me transfero ad residuum, nempe 6. & quia vnumquodque latus quadratorum paruorum, quę remanent, vt est OPQS, debet diuidi in tres partes, vt est diuisum quodlibet latus quadratorum paruorum in quadrato AB, & fieri quadrata parua; ideo multiplico 3. in se, & reddit 9. & quia habeo 6. quadrata multiplico 6. per 9. & faciunt 54.

Radix verò est solum 24. nempe deberent addi ad hoc, vt peruenirent ad longitudinem duorum laterum CD, & BD quadrata parua 24. & insuper vnum in angulo, quæ sunt 25. sed, quia numerus residuus est 54. multo maior, ideo forte potero ex istis quadratis adiungere duos ordines, nempe CD, & FR pro vno latere, & BD, & NV pro alio, ideo multiplico per 2. & faciunt 48. & rursus multiplico 2. in se, & faciunt 4. quos addo numero 48. & faciunt 52. Addidi verò 4 ob quadratum paruum DR, cuius latus est 2. ob duas tesseras quadratulorum 24. hinc, & inde additas: hos itaq; 52. subduco à 54 & residuum erit 2. de quibus non est curandum maximè, si ellegeris numerum maiorem, vt admonui. At quia latus multiplicaui per 3. & gemina vice duo latera radicis compleui; ideo efformo minutiam $\frac{2}{3}$. Latus ergo quadratum numeri 22. erit $4\frac{2}{3}$ ferè.

Obserua verò. Quod hoc est idem, ac si quadratula parua omnia 22. multiplicarentur per 3. in se ducto, idest per 9. & fierent 198. & ab eis ita multiplicatis radix quadrata erueretur: Nam subducta radix quadrata est 14. à numero 198. Quare si rursùs diuidatur 14. per 3. restituit $4\frac{2}{3}$, nempe partes 4. radicis prioris, & earum $\frac{2}{3}$. Vnde facilitatis gratia addes numero à quo radix quadrata subducenda est V. g. 22. binarium zifrarum, vt faciat 2200. ita enim multiplicabis numerum 22. per quadratum 100. numeri 10 & deinde ab eo extrahes radicem quadratam, vt supra docui; quæ erit 46. Diuides ergo 46. per 10. & erit $4\frac{6}{10}$ numeri 22. radix quadrata. Sic si addas duos binarios zifrarum numero 22 vt sint 220000 extrahes exactiùs: nã hęc additio habet vim multiplicationis per 10000. qui est quadratum numeri 100. radix verò quadrata numeri 220000. est 469. quã diuides per 100. & dabit 4. & $\frac{69}{100}$. Minor vero, sed maxima, quę eo numero contineri possit. Et si cfi cupias etiã exactiorem, binarium, vel duos, vel tres binarios addes, parique modo operaberis. Sufficiet autem detruncare tot numeros radici, quot binarij zifrarum additi sunt; quoniam duæ zifræ vnicum numerum in radice pariunt, & sub singulis figuris, seu numeris, interiectâ lineolâ addere zifram cum vnitate ad sinistram; nam hęc detruncatio habet vim diuisionis, vt patet. Si verò velis radicem maiorem vera, addes fractioni vnitatem V. g. fractioni 6. addita vnitas, vt sint 7 dat $4\frac{7}{10}$ maiorem vera. Sic, & fractioni $\frac{69}{100}$ addita vnitas dat 4. & $\frac{70}{100}$ maiorem vera radice.

PROBL. IV. PROPOS. XXIII.

Datis duobus numeris tertium proportionalem inuenire.

Ex propos. 20. septimi habemus, quod duo numeri extremi proportionales generant ęqualem numerum inuicem multiplicati medio proportionali in se multiplicato, idest eius quadrato sicut ex propos. 19. l. 6. habetur, quòd rectangulum duarum linearum proportionalium est æquale quadrato ex media; quòd cum ita sit, si adsint duo numeri proportionales 24. 32. & tertius quęratur hic tertius quæsitus erit latus plani numeri æqualis quadrato numeri 32.. Ergo in se multiplicetur 32. & fiet quadratum 1024 quia ergo iste numerus est etiam planus numerus, cuius latus est 24. & tertius proportionalis est aliud latus sicut ex defin. 1. lib. 8. se mutuo multiplicantes planum generauerunt, sic si diuidatur per alterum numerus alter restituetur. Ergo diuide 1024. per 24. & quotus erit $42\frac{2}{3}$ tertius proportionalis, eritq; 24. ad 32. vt 32. ad $42\frac{2}{3}$ nam 24. ad 32. & 32. ad 42. & $\frac{2}{3}$ est vt 3. ad 4.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Datis duobus numeris medium proportionalem inuenire.

QVoniam ex propos.20. lib.7 si sint tres numeri proportionales, planus numerus genitus ab extremis est æqualis medij in se multiplicati quadrato; Ideo, si duo numeri dati inuicẽ multiplicentur, & ab ipsorũ genito radix quadrata eruatur, hic numerus erit medius proportionalis. Sint dati duo numeri 20. & 45. Multiplicentur inuicem, & fiat 900. si à 900. extrahatur radix quadrata erit 30. qui est intermedius proportionalis, & ita est 20. ad 30. vt 30. ad 45. quòd si numerus genitus non sit quadratus, neque enim omnibus numeris tertius, aut quartus proportionalis inuenitur ex prop.4.& 5.l.8.elem. Auferendus est ex dato numero plano maximus quadratus, qui auferri possit, vt medius proportionalis vicinius, quam possit, obtineri queat.

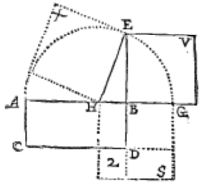
COROLLARIVM.

HInc poteris experiri illud, qnod Eucl. probat propos.5. lib.8, non omnẽ numerũ habere, aut mediũ, aut tertiũ proportionalẽ, quià sũt numeri inter se primi. neque compositi ex alijs: Quare, si videas radicem quadratam prima vice non esse erutam. licet, vt docuimus possis à reliquis extrahere radicem quadratam, aut veræ radici semper magis appropinquare, non tamen vera educi potest, cum illa non adsit saltem numeris exarabilis: Vnde tandem quiescendum, cùm ad eas minutias peruentum sit, quæ insensibiles habeantur.

PROBL. VI. PROPOS. XXV.

Numerum datum maiorem, ita diuidere, vt partes sint respectu alterius extrema proportionalia.

V. g. sit 10. qui ita debeat diuidi, vt partes sint, respectu numeri 4. extrema proportionalia. Diuidatur in duas partes, & sint 5 multiplicetur in se fiunt 25. subducatur deinde 4. in se ductus, nempe 16. remanent 9. cuius radix est 3. qui additus numero 5. facit 8. & alterum segmentum est 2. estque 2. ad 4. vt 4. ad 8.



*PRobatur adhibito schemate propos.16 secundi elem. HE quadratũ medietatis AG equale est quadrato EB, & HB ex 11. propos. lib.2. elem. quare ablato quadrato BE à quadrato HE residuum erit quadratum ex HB, si ergo requiratur HB latus, & addatur medietati AH lineę HG constituet lineam AB, & residuũ medietatis erit BG. Sed ex prop.16.l.6. elem. BG, & BE, & AB sunt proportionales. Ergo etiam numeri eas proportiones exprimentes, vt notauimus præass. ad propos.18. huius.

EXPENSIO VII.

De radice Cubica, duobusq; numeris medijs proportionalibus.

EXtractio harum duarum radicum, nempe tùm cubicæ, tum quadratæ omnino necessaria est reliquis tractatibus; sed hæc præcipuè pro solidis inueniendis, & permutandis, aut proportionaliter augendis: Cæteræ verò radices Zensizensica, Surdesolida, & cæt. vix in vsum veniunt, & rarus omnino casus dempta Algebra, & etiam in ipsâ, nec frequentior vsus; Propterea earum explicatio, & extractio huic libro parum conuenit, in quo omnia quidem Mathematica, sed relictis superfluis, & minus vtilibus tradere intendimus.

Præass. Cubica radix est numerus radicalis, qui gemina vice multiplicatus in se, & in genitum producit numerum cubum, V.g 2. ex defin.2.l.8. Elem. erit radix cubica, quia multiplicatus in se facit 4. & iterum idem genitum multiplicans facit 8. & 8. erit cubus. Dato itaque numero cubo, vel numernm, qui cubum comprehendat, tradenda est regula, quâ ex ipso hæc radix possit deduci.

Aliæ verò radices sũnt numerorum, qui nedum multiplicant se, & productum, sed insuper productum producti, vt Zensizensica. Vel producti etiam productum, vt Surdesolida, & sic in infinitum. Si ergo numeri V.g.2. & 2. adhibeantur eos vnica vice inuicem multiplicãdo, numerus est quadratus; si etiam rursus 2. adhibeatur, & multiplicet productum 4. erit productus 8. cubus: Si rursus 2 adhibeatur ad productum 8. multiplicandũ erit productus 16 Zensizensus. Si 2. rursus adhibeatur erit numerus productus 32. Surdesolidus, & sic procedendo in infinitum.

Præass. 2. Quod adnotauimus in præass.1.expens. præced. etiam hic aduertendum. Cubum numerorũ, à quo primo subducitur à dextra significare cubum vnitatum; secundum significare cubum decimarum, tertium cubum centesimarum; & ideo cubus vnitatum, silicet, cuius radix sunt vnitates, exprimetur ad summùm tribus numeris. Sic numeri 9. radix erit numerus cubus 729. tribus numeris expressus; at, si sit quatuor, iam incipit esse Cubus decimarum; nam numeri 10. cubus est 1000. quatuor numeris expressus, & quia cubus centesimarum incipit à 7. numeris, quia 100. per 100. faciunt 10000. & iterum hic per 100. facit 1000000. Ideo Cubus decimarum exprimetur, ne dum quatuor numeris, sed quinq; & sex; cum vltimus cubus decimarum s. numeri 99. Sit 970299. sex numeris expressus. Quare, cum ob numeri magnitudinem totus cubus extrahi simul nequeat, & debeat extrahi per partes; priùs extrahitur radix numeri cubi decimarum, V. g. deinde vnitatum si sex, vel quinque vel quatuor numeri sint: at, si sint septem vel octo, vel nouem figuræ: tunc ipsiùs extrahitur cubi centesimarum radix, deinde decimarum; posteà vnitatum, & sic si adsint plures numeri.

Præassumpt. 3. Aduertendum quoque ex prop. 19. lib.8. inter duos cubos, duos medios differentes cadere proportionales numeros, qui sicut in radice quadrata erant duplandi. Sic in Cubica sunt triplandi, vt potes faciliter intelligere ex fig. Cubi hic apposita. Cubus enim QO, cuius bases nigræ, si dematur à cubo toto QT, remanet cubus OT, & remanent quoque duæ species solidorum; nempe solidum AB, quod habet superficiem AO eandem ac cubus demptus OQ, & altitudinẽ SO, quam cubus residuus OT. Remanet quoque solidum aliud KO habens superficiem cubi residui OT, & altitudinem SO cubi dempti OQ. Quę tamen solida ad cubum complendum triplicantur, nam primæ speciei sunt tria AB, & CI, & FD, sicut & secundæ speciei tria sunt KO, & LH, & EI, quæ omnia extrahenda sunt, vt habito latere, & radice FE, deinde residuũ eius FH obtineatur, quæ est eadem ac TK, vel FS. Hinc est, quod tum propter hanc rationem, tum propter rationem prædictam non ab omni numero radix cubica extrahatur; sed inter singulos duo medij prætermittendi sint.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

Radicem Cubicam extrahere.

SIt datus numerus 15625. à quo radix cubica extrahi debeat. Super primam figuram ad dextram punctum collocabitur, & duabus intermissis super quartam, & sic semper duabus intermissis: quia ab istis punctatis propriè radix quadrata subducitur; ab alijs verò intermedijs solida proportionalia educuntur.

Videndum est itaque quinam maximus cubus capiat in primo numero punctato etiam inclusis precedentibus ad partem dextram, nempe in 15. ad quod expediet habere cubos iam deductos, cùm suis radicibus ab vno vsque ad 10. vt hic vides.

Itaque maximus cubus, qui capiat in 15. est 8, cuius radix est 2. itaque seorsum radix 2. statuatur, & subducatur 8. à 15. residuumque erit 7. & sic subduxi Cubum 10. ex primo præassumpto: quia numerus punctatus, à quo subduxi, est quarto loco, qui est milliarium: habeoque radicẽ, & latus 2. qui in radice ponendus est secundo loco, quod significet decimas, tunc cùm fuerit omnino extracta radix cubica.

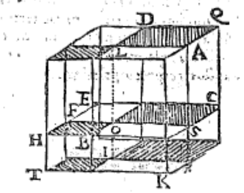
Radix	Quad.	Cubus
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	10000

2

———

7625.

Accedamus modo ad alterius cubi extractionem à punctato numero 5. sed quia priùs deducenda sunt omnia solida, ideo accipiamus quadratum radicis 2. apposita vnica zifra, vt sit 20. quia,



vt dixi est numerus decimarum, eritque 400. quẽ triplico ob tria proportionalia solida maiora, & sunt 1200. Iste ergo numerus debet capere in residuo 7625. & insuper remanere aliquid, tum ob solida minora triplicata extrahenda, tum ob cubum numerum insuper deducendum. Et video, quòd quinquies capit, & insuper remanet talis numerus, qui, vt puto, erit capax recipiendi solida prædicta minora, & cubum. Ideoque apud radicem pono 5. vt altera radix, vt itaque faciam, & tramutem in solidos numeros, superficies supra factas 1200 multiplico per 5. nempe per altitudinem inuentam, & faciunt 6000. & habeo tria solida maiora. Deinde, vt habeam quoque solida minora, & cubum. Multiplico radicem 5. in se, & generat planum numerum 25. habeoque basim solidorum minorum, quam triplico; quia tria sunt, & faciunt 75. quem numerum multiplico per latus 20. vt obtineam altitudinem ipsorum, & faciunt 1500. tandem, vt obtineam cubum, multiplico quadratum 25. per radicem 5. & facit 125. Quos omnes numeros simul colligo, nempe 6000. solida maiora 1500. solida minora, & 125. cubum; eritque numerus 7625. Quem subduco à numero residuo 7625. & nihil remanet. Radix ergo cubica extracta fuit, & reperta 25. Si verò fuisset numerus 15637. non fuisset cubus numerus; vnde superfuisset aliquis numerus V. g. 12. à quo radix cubica vlteriùs extrahi non potuisset, vt supra de radice quadrata dixi, & illi casus, quos ibi aposui, sunt & hic obseruandi; sed omnia triplicando.

25

———

7625

Primus itaque casus est; si ante primum numerum dextrùm reperiantur duo numeri, vel vnus; tunc primi sunt consignificatores, & illi tres pro vno sunt accipiendi; Secundus si numerus, qui datur non sit cubus V. g. si datus fuisset numerus 1330. tunc extracto cubo 1. remanet 330. à quo non possumus extrahere duas species proportionalium triplicatas, & cubum minorem. Nam 1. in se facit 1 addito 0. facit planũ numerum 100. quẽ triplico; & facit 300. qui numerus capit in 330. vnica vice; itaque radix altera esset 1. Si ergo talis verè est oportebit, vt capiat eius cubus, & solida tria in residuo 30. multiplicatus ergo 1. in se facit 1. superficiem, quam triplico, & multiplico per 10. & facit 30. solidum. Deinde 1. in se, & facit 1. Vnio tandem simul 300. solida maiora 30. solida minora, & cubum 1. & faciunt 331. maior numerus; quam 330. Itaque nec quidem cubus vnius vnitatis in residuo 330. capere potest: Quare apud radicem pono ziffram, & erit 10. & 330. erit residuum; quod si fuisset hoc residuum 331. radix cubica fuisset 11. & nihil residui fuisset, quia numerus exhibitus fuisset cubus.

Tertius casus est. Si id occurrat non in fine operationis, sed in medio: tunc apposita, vt in pręc. casu apud radicem zifra, totum residuum sequentibus numeris est copulandum, & videndum, an à reliquo hoc consequentibusque ad punctum radix cubica extrahi possit.

Quartus casus est. Cum remanent reliquiæ, cognoscere: an illæ sint maiores, quam oporteat. Quod vt cognoscatur radix cubica iam extracta V. g. 10. à numero 1333. multiplicetur in se, quę multiplicata triplicetur; vt sit 300. triplicoque 1. & per radicem 10. multiplico, & facit 30. & addo 1. & facit 31. quem addo numero 300. & sunt 331. Residuum verò nnmeri 1333. deductâ radice Cubicâ

bicâ 10. est 333. itaque cum numerus sit maior, quàm productus 331, signum est, quòd adhuc vnica vice Cubus vnius vnitatis capere potest, & quod radix cubica maxima sit 11. huius numeri 1333. remanetque fractus numerus 2.

PROB. II. PROPOS. XXVII.

Radicem cubicam, vtrum benè deducta fuerit? inuestigare.

HOc fit multiplicando radicem cubicam in se, & deinde in productum, & additis residuis, si consentiat cum numero exhibito erit bene facta deductio; sin minus aliquis error irrepsit; Hoc autem patet per se, nec indiget ostensione.

PROBL. III. PROPOS. XXVIII.

Dato numero non cubico, radicem cubicam proximiorem deducere.

ADdes proposito numero V.g. 15862. aliquot ternarios zifrarum V.g. duos, vt fiat numerus 15862000000. à quo radix cubica subducatur, & sit 2512. Quia ergo duo ternarij zifrarum additi sunt, auferantur duæ figuræ sinistre 12. tanquam numerus fractus, & suppôsito 1. cum duabus zifris iuxta ternarios zifrarum additos, erit radix cubica numeri 15862 valde proxima 25. & $\frac{12}{100}$. Ratio est eadem, quæ præcedent. Expens. prop 22. eritque hic applicanda. *

* Vel multiplicabis residuum 237 subductâ radice cubicâ per cubum 1000. numeri 10. & erit 237000. Deinde radicem cubicam 25. multiplicabis per 10. eritque 250. quam duces in se met, vt habeas numerum planum 62500. & ob tres proportionales interpositos per 3. multiplicabis, eritque 187500. videbis itaque quot vicibus capiat hic numerus 187500. in residuo 237000. & capit vnica vice. Ideoque hæc vnitas in se ducta multiplicabitur cum radice 250. & erit 250. quam triplicabis, vt faciat 750. ob tres proportionales minores, deinde duces vnitatem quoq; in se, & erit 1. Ergo isti numeri 187500. & 750. & 1. simul addantur, eruntque 188251. quos subduces à residuo 237000. Et quia in hoc vnica vice capit, & radix Cubica fuit multiplicata per 10. ideo erit minutia $\frac{1}{10}$.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

Si dentur quatuor numeri continuè proportionales, quadratum primi ad quadratum secundi est veluti secundus ad quartum.

SInt quatuor numeri continuè proportionales 3. 6. 12. 24. & sit quadratum primi 9. & secundi 36. Dico, quod ita est 9. ad 36. vt secundus 6. ad quartum 24.

* Probatur. Quoniam ponitur 3. ad 6. vt 6. ad 12. Ergo Rectangulum, & numerus planus ex primo 3. & tertio 12. æquabitur quadrato ex medio 6. Quare primus 3. multiplicando se faciet suum quadratum, & multiplicando tertium 12. faciet quadratum numeri 6. Ergo ex propos. 17. septimi erit 3. ad 12. nempe primus ad tertium. Sic quadratum primi 9. ad quadratum 36. secund. Sed vt primus ad tertium, ita est secundus ad quartum. Ergo vt secundus ad quartum, sic erit quadratus primi ad quadratum secundi.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

Si sint quatuor numeri proportionales, erit solidus primi in se ducti, & in extremum æqualis Cubo secundi.

SInt quatuor numeri proportionales 2. 6. 18. 54. Dico solidum genitum ex multiplicatione primi in se, & in quartum esse æqualem Cubo secundi.

* Probatur ex præced. ita est quadratus primi 4. ad quadratum secundi 36 vt secundus ad quartum. Ergo ex 19. septimi Elem. Si multiplicetur primi quadratus cum vltimo, qui sunt extremi proportionales generabit æqualem numerum, ac secundi multiplicati in suum quadratum, qui sunt medij proportionales. Sed secundus multiplicans suum quadratum facit Cubum, & primus multiplicans se, & deinde quartum facit solidum. Ergo iste cubus, isteque solidus erunt æquales.

PROBL. IV. PROP. XXXI.

Inter duos numeros datos, duos medios proportionales adinuenire.

SInt dati duo numeri 54. & 2. inter quos duo medij proportionales sint coniiciendi. Multiplico primum 54. in se, & deinde in alium 2. generabiturque numerus solidus 5832. Ab hoc itaque numero extrahatur radix cubica, & erit 18. secundus proportionalis apud primum 54. ponendus. Accipiatur deinde numerus 2. tanquam primus, & ducatur in se, deinde in vltimum 54. & generabit numerum solidum 216. Cuius radix cubica est 6. apud 2. collocandus, & sic erunt 54. 18. 6. 2. quatuor proportionales continui.

* Probatur. Nam cubus secundi proportionalis ex præced. æquatur plano numero ex primo in se, deinde in quartum ducto. Si ergo ab eo plano numero primo in se, deinde in quartum extrahatur radix cubica, illa erit secundus proportionalis post primum collocandus. Quamobrem, si accipiatur vltimus 2. tanquam primus inuerso ordine dabit secundum, qui erit idem, ac tertius, seriè, vt priùs acceptâ. Etenim tertius 6. est secundus respectu 2. vltimi; vt primus accepti, vt 18. est secundus respectu primi 54.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

A fractionibus quadratis, & cubicis radicem quadratam excerpere atque cubicam.

EXtrahatur radix Quadrata, seu Cubica, tum à numeratore, tum à denominatore, seu vera, seu propinqua: si quando non sit nec numerator, nec denominator numerus, aut quadratus, aut cubicus, & erit factum, quod desideratur; Nam illæ duæ radices numeratoris inquam, & denominatoris constituent minutiam radicem numeri propositi. Proponatur V.g. minutia $\frac{4}{9}$ à quà deducenda sit radix quadrata. Radix numeratoris est 2. denominatoris 3. ergo $\frac{2}{3}$ erit radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$, sic quoque $\frac{2}{3}$ erit radix cubica numeri $\frac{8}{27}$. Quod, si data minutia sit fractio alterius minutiæ reducenda est ex dictis ad eam minutiam. Quod, si hæreat integris, & ab integro simul cum minutia radix quadrata, vel cubica educenda sit; integer in minutiam reuocetur, & ab ea minutia radix cubica, vel quadrata eruatur. Sic si sit $5\frac{4}{9}$ primò $5\frac{4}{9}$ reducetur ad minutiam $\frac{49}{9}$, & extrahetur radix quadrata, tum à numeratore 49 quæ erit 7. tum à denominatore 9. quæ erit 3. itaque minutia $\frac{7}{3}$. erit radix quadrata minutiæ $\frac{49}{9}$, vel 5. & $\frac{4}{9}$.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIII.

A fractionibus, nec cubicis, nec quadratis radicem proximiorem cubicam, vel quadratam excerpere.

SIt data minutia $\frac{5}{7}$, à quá oporteat radicem proximiorem excerpere. Potest id exequi præcedenti regula duas radices nempe denominatoris, & numeratoris excerpendo proximiores, & ex eis duabus radicibus numeratoris quidem pro numeratore, denominatoris autem pro denominatore vtendo ad statuendam minutiam, quæ sit radix minutiæ datæ. Sic numeratoris 5. radix quadrata est $2\frac{2}{10}$, & denominatoris 7. est $2\frac{6}{10}$ essetque minutia.

* Verum, vt scribantur ad modum minutiæ integri reducendi sunt ad fractiones, & vt earum valor cognoscatur per denominatorem numerator diuidendus, vt redigantur ad vnicam minutiam. Sic $2\frac{2}{10}$ erunt $\frac{22}{10}$, & $2\frac{6}{10}$ erunt $\frac{26}{10}$. Quia ergo ex propos. 4. huius 1. par. ita est minutia $\frac{22}{10}$ ad minutiam $\frac{26}{10}$, vt numerator ad numeratorem; ideo minutia $\frac{22}{26}$ erit ea, quæ quæritur relicto denominatore 10. qui non variat minutias. Vnde ita erunt minutię illę, ac minutia $\frac{22}{26}$.

$$\frac{2\frac{2}{10}}{2\frac{6}{10}} \quad \frac{\frac{22}{10}}{\frac{26}{10}}$$

Verùm, & alio modo exactiori fieri potest. Multiplicetur denominator 7. per numeratorem 5. & fiunt 35. eritque huius 35. radix quadrata 5. & $\frac{9}{10}$, seu $\frac{59}{10}$. Si ergo assumatur numerator 5. & statuatur pro numeratore huius radicis inuentæ $\frac{59}{10}$ eo modo, quo supra, redigendo ad eandem denominationem, in fractioneq; proiciendo, vt sit $\frac{50}{10}$ erit relicto denominatore 10. minutia radix datæ minutiæ $\frac{50}{59}$. Sic etiam eueniet, si radix inuenta $\frac{59}{10}$ statuatur pro numeratore, & denominator supponatur, & fit $\frac{59}{70}$.

* Probatur, quod hæc minutia sit eadem radix, ac illa, quæ esset educta, tum à numeratore, tum à denominatore propositæ minutiæ, & ideò quod, & ipsa radix sit.

Nam, quia multiplicauimus duos numeros 5. & 7. extremos, & fecimus 35. cuius radix quadrata est 5. & $\frac{9}{10}$ ex prop. 20. septimi, erit eadẽ proportio 5. ad 5. & $\frac{9}{10}$ ac 5. & $\frac{9}{10}$ ad 7. (supponimus autẽ ostensionis gratia 5. $\frac{9}{10}$, esse radicem veram) Quare proportio 5. ad 7. est duplicata eius, quam habet 5. ad 5. $\frac{9}{10}$, vel 5. & $\frac{9}{10}$ ad 7. Sed etiam 5. ad 7. habet duplicatam proportionem radicis 5. ad radicem numeri 7. ex propos. 18. l. 8. Ergo est eadem proportio radicis numeri 5. ad radicem numeri 7. ac 5. numeratoris ad radicem numeri 35. vel radicis numeri 35. quam ponimus esse $5\frac{9}{10}$ ad denominatorẽ 7. quare erit ex Cor. prop. 3. p. 1. huius, eadem minutia radix numeratoris, & radix denominatoris V.g. $\frac{50}{59}$ supra inuenta, ac numerator 5. cum radice numeri 35. nempe $\frac{59}{70}$, aut ipsa radix 59. numeri 35. cum denominatore 70. cum in omnibus eadem sit proportio, quod earum omnium proportionum duplicata sit proportio numeratoris 5. ad denominatorem 7.

Ad extrahendã verò radicẽ Cubicã. Numerator 5. quadretur, & sit genitus 25. ducaturque in quadratum 25. denominator 7. & fiat 175. adiectisque zifrarum ternarijs, ab hoc numero extrahatur radix cubica. Nam si hæc statuatur tanquam numerator denominatoris 7. erit cubica radix minutiæ propositæ.

Sic numeri 175. radix cubica proxima est 5. & $\frac{6}{10}$. Si ergo hac radice vtar pro denominatore, & numero 5. pro numeratore modo prædicto, & faciam minutiam $\frac{50}{56}$ hæc erit radix cubica proxima datæ minutiæ $\frac{5}{7}$.

Probatur. Nam ex prop. 27. huius, radix solidi 5. in se, deinde in 7. ducti, nempe numeri 175. est secundus proportionalis post 5. primum collocandus, & 7. quartus proportionalis. Quare numerus 5. ad numerum 7. habebit triplicatam proportionem eius, quam habet 5. ad radicem numeri 175. Sed ex 19. l. 8. etiam 5. habet ad 7. triplicatam proportionem radicis cubicæ 5. ad radicem cubicam numeri 7. Ergo radix cubica numeri 5. sumpta, vt numerator ad radicem cubicam numeri 7. sumptam, vt denominator habebit eandem proportionem, quam 5. ad radicem cubicam numeri 175. Vnde ex propos. 3. huius 1. part. Coroll, erit eadem minutia, si sumatur 5. vt numerator, & radix cubica numeri 175. pro denominatore accipiatur, ac radix cubica numeri 5. vt numerator sumpta, & radix cubica numeri 7. vt denominator, quæ constituit cubicam radicem minutiæ $\frac{5}{7}$.

Potes etiam ducere numeratorem in quadratum denominatoris, & radix cubica erit numerator, cuius denominator erit ipse, qui priùs erat, constituesque minutiam $\frac{62}{70}$.

Ratio est eadem, quæ prædicta; solumque differt in hoc, quòd denominator, vt primus assumitur, vt radix extracta sit secundus proportionalis immediatus, & numerator quartus. Ibi verò numerator, vt primus assumebatur, & radix extracta tanquam secundus proportionalis, & tandem denominator tanquam quartus.

TRA-

TRACTATVS XIIII.

IN PROPORTIONES NVMERICAS. PARS I.

De Proportione Geometrica continua.

QVoniam ipſa fundamenta proportionum, numeros in- quam ſimili ratione ſe referentes in præcedenti Tracta- tu inuenire docuimus, nunc ipſas proportiones, ratio- numque ſimilitudines opus eſt ſpeculari. Tres verò ſpecies proportionis ſunt; nempe Geometrica, Arith- metica, Muſica, de quarum ratiuâ agere opus eſt. Vnde in tres par- tes iſte Tractatus abibit, in quarum ſingulis, ſingulas ſpecies expo- nemus.

EXPENSIO I.

De proprietatibus proportionis Geometricæ continuæ.

PRæcipua eſt, & quam in primis definit. lib. 5. defin. 4. Euclides, & de qua intelligit in propoſitionibus quinti, & ſexti eſt proportio Geometrica, & de hac primò agendum eſt; cùm ſit omninò eius cognitio neceſſaria ad Logarithmos inueniendos, & ordinandos; ob quem ſcopum de ea, hic tandem pleniorem cognitionem exhibere fuit neceſſarium.

Proportio autem Geometrica in ſimilitudine continentiarum conſiſtit, quando quantitas continet vel continetur ab alia ſimiliter, ac aliqua alia quantitas continet aliam tertiam V.g. 4. 8. 16. ſunt in proportione Geometrica, quia 8. continet 4. ſicut 16. continet ipſum 8 nempe gemina vice.

Datur duplex proportio Geometrica, *Continua*, & *Diſiuncta*. Continua eſt illa, quæ eſt eadem inter tres, aut quatuor, aut plures numeros, ita ut quilibet ſit ſequens, & antecedens, terminus relationis, & fundamentum V.g. 4. 8. 16. proportionem continuam habent; quòd fundamentum 4. referatur ad 8 vt terminum, qui tanquam fundamentum refertur quoque ad 16. terminum ſuum. At non continua eſt illa, in quá nullus numerus rationem habet fundamenti ſimul, & termini, vt eſt illa, quæ intercedit inter 2. ad 4. & 5. ad 10. & 6. ad 12. Nam quælibet licet eadem proportio dupla habet ſuum fundamentum 2. 5. & 6. terminumq; 4. 10. 12. diſtinctum. Cum itaque multæ proprietates, tum de Geometrica proportione in genere, ſeu inter quantitates corporum, vt quinto, & ſexto libro, ſeu inter quantitates numerorum, vt ſeptimo & octauo, & nono ab Euclide explicatæ ſint, remanet hic, vt ſolas proprietates Geometricæ proportionis continuæ explicemus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Non omnes numeri continuari in ſuis proportionibus poſſunt.

PRobatur. Quia ex propoſ. 4. lib. 8. & prop. 5. eiuſdem; nec numeri duo inter ſe primi, nec tres, aut plures proportionem dicentes continuam; ſi eorum extremi ſint inter ſe primi continuari in numeris integris poſſunt. Quomodo verò cognoſcendum ſit, an dati numeri poſſint continuari in ſuis proportionibus, ibi explicatum eſt propoſ. 7.

THEOR. II. PROPOS. II.

Numeri, qui ab vnitate continuè proportionales ſunt, primus in ſe multiplicatus producit tertium, & primus in tertium producit quartum.

PRobatur. Quoniam vnitas per ipſum primum primum metitur: nam vnitas, V.g. ter accepta facit 3. Vt itaque referatur 3. ad alium, vt 1. ad 3. ter debet accipi ipſe 3. & ita in ſe multiplicari, vt fiat 9. Ad hoc autem, vt 9. ſe habeat ad alium, vt 1. ad 3. debet ter rurſus accipi, vt fiant 27. & ſic proſequendo. Ergo primus numerus poſt vnitatem in ſe ducendus, vt fiat ſecundus. Secundus autem multiplicandus per primum, vt fiat tertius in numeris ab vnitate continuè proportionalibus.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum continui proportionales ceciderint numeri, quot inter eos, & aſſumptum numerum cadunt, tot, & inter ipſos medij proportionales cadent.

SInt à numero 8. continuè proportionales ABC, pro prima ſerie, & DEF pro ſecunda, & primæ numero æquali. Dico; *quòd tot inter eos cadunt numeri*, V.g. B, & E, vel C, & F quot inter quemlibet ipſorum B, vel C, & num. 8. proportionales cadunt.

C	27.	36.	48.	64	F
	B	18.	24.	32	E
		A	12	16	D
			8		
			64		
P	144	Q		256	R
S	20736.	3996.		66136	
		T		V	

Quod, vt probetur, quilibet ipſorum quadretur ducendo illum in ſe, & ex numero 8. fiat quadratus numerus Q, & quadratus numerus P ex numero A, & quadratus numero R ex numero D; Cum ergo P, & Q ſint numeri quadrati cadat inter eos medius vnus proportionalis ex prop. 8. octaui Euc. Sed inter B, & 8. cadit vnus medius proportionalis nempe A 12. quare erit B ad 8. numerum, vt numerus P quadratus ad quadratum Q.

Idem dicas de quadrato R, qui inter ſe, & quadratum Q admittit medium proportionalem vnicum; ſicut E reſpectu numeri 8. Quare Q reſpiciet R quadratum, vt 8. numerus reſpicit numerum E. Ideo, cum ſit B ad 8. vt P ad Q, & 8. ad E, vt Q ad R erit ex æquo B ad E, vt P ad R. Sed cum P, & R. ſint quadrati vnus inter eos proportionalis cadit, ergo etiam inter B, & E; Quia ergo inter B, & 8. vel E, & 8. vnus medius proportionalis cadit, vel A, vel D, inter etiam ipſos B, & E vnus medius proportionalis cadet, ſ. 24. & prop. 8. l. 8. Idem dicas de C, & F, inter quos duo medij proportionales cadent 36. & 48. ſicut cadunt inter C, & 8. duo medij proportionales B, & A, vel ſicut cadunt inter F: & 8. numeri medij E, & D. Quia inter S, & V cubos cadent duo medij proportionales.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si ſint quotcumque numeri continuè proportionales eandem inuicem proportionem dicent, tres numeri in eâdem diſtantiâ aſſumpti relictis intermedijs.

SInt numeri continuè proportionales 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Dico, *quòd ſi aſſumantur hinc tres numeri in eadem diſtantia*, V.g. 2. & 16. & 128. qui relictis duobus accipiuntur, *quod eadem proportio adhuc eſt 2. ad. 16. quæ eſt 16. ad 128.*

* Probatur. Nam vt eſt 2. ad 4. ſuum ſequentem ita eſt 16. ad 32. ſuum ſequentem, & vt 4. ad 8. ita 32. ad 64. & tandem, vt 8. ad 16. ita 64. ad 128. Ergo ex *æquo*, ita eſt 2. ad 16. vt 16. ad 128.

THEOR. V. PROPOS. V.

Trium numerorum continuâ proportione ſe reſpicientium quadratum medij eſt æquale rectangulo extremorum.

PAtet ex propoſ. 20. ſeptimi. Nam numerus medius in ſe ductus, qui eſt quadratus ex defin. 18. ſeptimi facit numerum genitum æqualē numero extremorum; qui eſt rectangulum numericum, aut planum, vt ex defin. 1. lib. octaui. Hoc idem poſſet probari in quantitate continua ex propoſ. 17. ſexti.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si ſint quatuor numeri continuè proportionales planum factum ab extremis æquale eſt illi plano, quod ſit à medijs.

PAtet quoque hæc propoſ. ex 19. propoſ. ſept. vbi numerus ex multiplicatione extremorum probatur æquari numero ex multiplicatione mediorum; cum verò inuicem numeri multiplicantur in plana rediguntur, vt conſtat ex def. 1 octau. quod etiam eſt intelligendum de cubo facto ex medio, cui eſt æquale ſolidum numericum factum ex extremis multiplicatum per medium. Patet enim, quod cum plana ſint æqualia multiplicata per eundem numerum medium faciant idem ſolidum.

THEOR. VI. PROP. VII.

* *Quo maior eſt numerus, eò in ipſo minutiores proportiones reperiri queunt continuâ proportione ſibi inuicem reſpondentes.*

PRobatur eo, quia ibi plures poſſunt inueniri relationes, vbi plura ſunt fundamenta; talia autem ſunt in multitudine maiori. Sed poſſunt etiam inueniri minutiores. Nam ea eſt minor proportio, quæ numeri, ad quem comparatur minorem partem, vel partes continet: ſed numerus paruus acceptibilis à maiori numero continebit illius minorem partem, quam numeri minoris, V.g. 2. continebit pauciores partes numeri 1000. quam numeri 100. cum huius quinquageſimam partem amplectatur, illius verò quingenteſimam. Ergo in maiori numero minutiores proportiones reperiri queunt.

THEOR. VII. PROPOS. VIII.

* *Differentiæ ſunt in eadem proportione, ac ipſi proportionales in continuè proportionalibus.*

SIt proportio continua 50. 60. 72. Dico differentias 10. & 12. eſſe in eadem proportione, ac ipſi termini, & ſic eſſe 10. ad 12. vt 50. ad 60.

Pro-

* Probatur. Ita ponitur 50. ad 60. vt 60. ad 72. Ergo *diuidendo* ita erit 50. ad 10. vt 60. ad 12. Ergo *permutando*, ita erit 50. ad 60. vt 10. ad 12. quod erat ostendendum.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Differentiæ coacervatæ in continuis proportionalibus constituunt cum numero radicali maximum terminum.

SInt tres termini continuè proportionales 4.6. 9. & differentiæ 2. & 3 Sitque quidam numerus Ouium æqualis numero 4. & differentiæ 2. & 3. isti numero addantur. Dico fieri terminum æqualem termino 9. vltimo. Nam si addamus 2. ipsi 4. quà differt 4. à 6 fiet Ouium æqualis numerus numero 6. & sic successiuè. Ergo cum omnes termini semper sint æquales etiam vltima æquali additione differentiæ Ouium completus numerus, vltimo termino erit æqualis.

THEOR. X. PROPOS. X.

Datis duobus terminis proportionalibus diuiso maiore per minorem Quotiens est denominator proportionis.

EXibeantur duo termini 4. & 12. & diuidatur 4. per 12. quotiens erit 3. Dico *hunc quotientem 3. esse denominatorem proportionis, quam habet 4. ad 12.* Nempe 4. respectu 12. esse $\frac{1}{3}$.

Probatur ex defin. 1. septimi. Nam eam proportionem dicunt numeri, cum alterius fuerit eadem pars, vel partes, & cæt. Si ergo per diuisionem exquiratur, quæ pars sit numerus 4. numeri 12. habebimus eius proportionem, quare ex propos. 40. septimi, pars numeri 12. quæ est 4. erit à quotiente denominata, nempe à 3 & dicetur tertia pars. Sic si velimus scire, quæ pars sit numerus maior 12. numeri 4. quia per diuisionem 4. per 12. habetur minutia $\frac{4}{12}$, aut $\frac{1}{3}$ habebimus proportionem, quam dicit 12. ad 4. nimirum triplam.

COROLLARIVM.

HInc verò est, quod secundus terminus contineat antecedentem ipso antecedente dempto, quot vnitates sunt in denominatore vna abiecta, & sic quod 12. minus 3. idest 9. contineat 3. toties, quot vnitates sunt in 4. sed demptâ vnâ.

THEOR. XI. PROPOS. XI.

* *Numerus maior in quacumque proportione multiplici continet reliquos omnes tot vicibus, quot sunt in denominatore vnitates vna dempta, & insuper numerum à quo denominatio incepit.*

SIt data continua multiplex denominata à 4. proportio, quæ sit 3. 12. 48. Dico 48. continere reliquos minores tricies nempe vna vnitate minus, quam sint vnitates in denominatore, qui est quaternarius, & insuper numerum 3. à quo incipit series

Probatur. Nam progress. 1. ex suppositione n. 12. continet quater 3. ergo 3. tricies multiplicatus, idest acceptus quater minus vna vice æquabit 12. si cum 3. coniungatur numero, à quo incepit proportio. Progress. secundus sic dicas de numero 12. qui tricies acceptus, nempe per denominatorem quaternarium vnitate mancum multiplicatus, idest 36. & iunctus cum ipso 12. æquabit 48. Sed iam hoc ipsum 12. habemus, quo deficit numerus 36. ad adæquandum 48 ex primo progress. ex 3. tricies multiplicato, additoque ei numero ipso radicali 3. Ergo numerus 48. continebit reliquos tricies, nempe toties, quot vnitates sunt in denominatore minus vno, & insuper numerum radicalem, cùm 12. tricies acceptus cum 3. tricies accepto vna cum 3. radicali, nempe 12. æquet ipsum 48. Et idem dicas, etiam si sint plures termini, quàm tres.

Sic pronuncies etiam si proportio sit multiplex superparticularis, seu superpartiens: V. g. detur 9. 24. 64. cuius denominator est 2. & $\frac{2}{3}$. Si subtrahas 9 à 24. remanent 15. 51 $\frac{2}{3}$. Quare 9. acceptus iuxta denominatoris vnitates vnâ exclusâ, nimirum 1. & $\frac{2}{3}$, quæ faciant 15. addito ipso numero 9. æquant 24. Ita 24. acceptus semel cum duobus tertijs, & 9. cum duobus tertijs addito numero 9. radicali æquant ipsum 64.

* Probatur aliter data proportione 3. 12. 48. si dematur 3. à 12. erit 3. ad 9. Ratio denominata à 4. sed diminuto vnitate, idest à 3. Quia ergo est 3. ad 12. vt 12. ad 48. erit *diuidendo* 3. ad 9. vt 12. ad 36. Quarè *permutando* erit 3. ad 12. vt 9. ad 36. & *Componendo* erit 3. ad 15. vt 9. ad 45. Quare etiam *permutando* erit 3. ad 9. vt 15. summa aliorum minorum ad 45. terminum maximum deducto primo. Sed 3. ad 9. habet rationem denominatam à 3. idest à denominatore 4. vnitate minuto. Ergo etiã 15. summa ad 45. terminum maximum mancum 3. primo termino eandem obtinet.

THEOR. XII. PROPOS. XII.

Summa reliquorum in proportionalibus continuis proportionis superpartientis, & superparticularis excluso maximo diuisa per denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum dat quotientem, qui vnitus cum numero radicali ipsum maximum proportionalem numerum facit.

*SIt proportio data superparticularis 50.60.72. cuius denominator proportionis, quam habet differentia 10. ad radicalem terminum 50. sit $\frac{1}{5}$. Dico, quòd summa reliquorum dempto maximo, quæ est 110. diuisa per $\frac{1}{5}$ dat quotientem 22. qui vnitus cum numero radicali 50. facit maiorem terminum 72.

Prob. ex 8. prop. h. ita est differẽtia ad differentiã 10. ad 12. vt terminus 50. ad terminum 60. Ideoq; ex Coroll. 2. prop. 19. lib. 5. ita erit 10. ad 10 & 12. simul, idest summam 22. differentiarum, quemadmodum 50. ad 110. summam terminorum. Verum si diuidatur summa 110. per denominatorem 5. & per eundem 5. terminus 50. erunt adhuc ex prop. 19. lib. 7. quotiens numeri 50. ad quotientẽ numeri 110. vt 50. ipse terminus ad summam 110.

Cum

Cum ergo differentia ad summam differentiarũ, & quotiens radicalis termini ad quotientem summæ terminorum obtineat eandem proportionem, quã termini radicalis ad summam terminorum, erit etiam eadem proportio primæ ipsius differentiæ ad summam differentiarum, quæ quotientis radicalis termini ad quotientem summæ terminorum ex 16. lib. 5. Elem. & ideo *permutando* differentia prima ad quotientem radicalis termini habebit eam proportionem, quam summa differentiarum ad quotientem summæ terminorum. Sed Quotiens radicalis termini est æqualis differentiæ. Siquidem diuisor est $\frac{1}{5}$ denominator proportionis, quam differentia habet ad radicalem terminum ex propos. 10. huius. Ergo etiam summa differentiarum, & quotiens summæ terminorum erunt æquales.

Sed omnes differentiæ additæ primo termino constituunt vltimum terminum ex prop. 9. Ergo etiam Quotiens summæ termitorum diuisore existente denominatore proportionis, quam habet differentia ad primum terminum, additus primo termino dabit vltimum terminum, vnde quotiens 22. additus termino 50. constituit vltimum terminum 72. Sic dicas de proportione superpartiente; Datis enim tribus terminis 25. 40. 64. summa minorum 65. diuisa per denominatorem $\frac{5}{3}$, quæ fit multiplicando per 3. diuidendo per 5. dabit numerum 39. qui vnitus numero radicali 5. procreabit ipsum maiorem 64. Et idem argumentum valebit, etiam si plures sit termini, vt patet.

THEOR. XIII. PROP. XIII.

Secundus proportionalis detracto numero radicali, & primo dicit eandem proportionem ad numerum radicalem, quam numerus extremus detracto eodem primo ad summam reliquorum.

SIt data proportio continua 3. 12. 48. detrahaturque numerus radicalis, & minimus 3. à numero 12. & remaneat 9. sicut, & ab extremo 48. & remaneat 45. summa verò reliquorum est 15. Dico, quòd ita 9. est ad 3. vt refertur proportione 45 ad 15. summam reliquorum. Denominator autem proportionis est 4.

* Probatur ex propos. 11. huius. Nam maximus numerus continet summam reliquorum tot vicibus, quot denominator dempta vna habet vnitates, & insuper numerum primum, & radicalem. Ergo hoc numero primo, radicalique excluso continebit tot vicibus, quot reposcunt vnitates denominatoris vna exclusa; sed & secundus terminus minutus primo continet primũ tot vicibus, quot vnitates sunt in denominatore vna vnitate minuto ex propos. 10. Coroll. Ergo tot vicibus continetur primus in secundo minutus primo V. g. 3. in 9. quot summa reliquorum in extremo eodem primo minuto, vt 15. in 45. quare eamdem proportionem dicent ex 1. definit. septimi, & ita erit 9. ad 3 vt 45. ad 15. & ita dicas de reliquis etiam si plures termini ponantur.

Idem quoque in proportione superpartiente, & superparticulari valet. Nam, si dentur 8. 12. 18. 27. cuius denominator proportionis differentiæ primæ ad terminum radicalem est $\frac{1}{2}$. Erit ablato 8. ad 12. vt sint 4. & à 27. vt sint 19. eadem proportio 4. secundi termini dempto primo 8. ad primum terminum 8. quæ est extremi dempto primo 19. ad summam reliquorum 38.

Prob. ex 12. h. Nã quotiens summæ differentiarũ cum primo termino constituit vltimum, ergo ablato primo remanebit quotiens summæ differentiarum, cuius diuisor est denominator prædictus $\frac{1}{2}$. Cum ergo idem diuisor diuidat primum terminum, & constituat primam differentiam, & summã terminorum, & constituat summã differẽtiarũ, erit secũdus terminus ablato primo, idest differẽtia prima ad primũ terminum, vt summa differentiarum, idest ex propos. 9. vltimus terminus ablato primo, ad summam terminorum. Quòd autem $\frac{1}{2}$ diuidat primum terminum, & generet primam differentiam, patet ex 10. huius; quia diuiso primo termino per differentiam dat denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum. Ergo diuiso ipso termino primo per quotientẽ, & denominatorẽ differentiam dabit ex princip. 8. Tract. 8. Elem.

THEOR. XIV. PROP. XIV.

* *Denominatores proportionum in quolibet proportionali crescunt ab vnitate.*

SIt series proportionalium 4. 12. 36. 108. & denominator proportionis 3. Dico, quod 3. in singulis proportionalibus reperitur crescendo ab vnitate, nempe, quod semel est in 12. nouies est in 36. nonagies in 108.

* Probatur. Nam numerus radicalis 4. ter acceptus facit 12. ergo tot partes erunt in 12. quot vnitates erunt in 3. ergo 12. in suis partibus numerabit 3. semel, at 36. numerat etiam ter 12. ergo 12. ter ipsum 3. numerat, sic 108. ter capit 36. at 36. ter capit 12. ergo ter nouies capit 3. Sic verò procedere est procedere continua proportione ab vnitate ex propos. 2. huius.

EXPENSIO II.

De summandis proportionalibus Geometricis continuis.

SVmma proportionalium continuè fit etiam, si intermedij ignorentur, V. g. datis 24. & 64. summa omnium, qui inter 24. & 64. intercipiuntur sine intermedijs haberi potest; ideoque hìc oportet huius artis specimen exhibere.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Datis terminis continuè proportionalibus primo, secundo, & vltimo omnium summam inuenire.

3. 12. —— 768.

* SInt dati termini continuè proportionales 3. 12. 768. inter quos intercipiuntur 48. & 192. continuè proportionales, qui tamen ignoti præsupponuntur, cum eorum cognitio in acquirenda eorum summâ non sit necessaria. Detrahatur terminus

minus

minus primus 3. à secundo 12. & residuum sit 9. sic idem 3. terminus primus detrahatur à 768. & residuum sit 765. Hoc verò residuum multiplicandum est per primum terminum adhibita regula proportionum, & diuidendum productum 2295. per residuum secundi 9. Nam quotiens erit 255. summa omnium excepto maximo. Si ergo hanc summam maximo addas, erit omnium summa cognita 1023.

* Probatur. Quia ex propos. 13. huius, est eadem proportio primi termini ad secundum, cui ipse primus demptus fuerit, quæ est summæ omnium vsque ad vltimum exclusiuè ad ipsum vltimum, & maximum, cui similiter primus demptus sit; quare plana, ex primo, & vltimo ex istis quatuor proportionalibus erunt æqualia plano ex medijs ex propos. 6. huius. Quare planum factum ex 3. minimo, & 765. maximo erit æquale plano ex 9. secundo, & summa omnium excepto vltimo; vnde si diuidatur per 9. latus cognitum, planum illud latus alterum 455. exeret, quod est omnium proportionalium summa excepto vltimo.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Dato termino maximo, & minimo, & denominatore proportionis summam omnium terminorum continuè proportionalium inuenire.

3. 9. 27. 81.

* SInt dati termini continuè proportionales 3. 9. 27. 81. & denominator 3. ex vltimo primus demendus nimirum 3. & erunt 78. qui diuidendus est per denominatorem proportionis, cui vnitas ablata fuerit, nempe 2. & erunt 39. qui coniuncti cum 81. efficient omnium summam, & hoc in proportione multiplici; & multiplici superparticulari, vel superpartiente.

Probatur ex prop. 11. huius. Quia numerus maior continet minores omnes, quot sunt vnitates in denominatore vna dempta vnitate ab ipso denominatore. Ergo si diuidatur per illas vnitates minus vna prodibit summa omnium aliorum.

Sic dicas de non multiplici, nam datis.

8. 12. 18. 27.

Sublato primo ab vltimo remanent 19. qui per denominatorem proportionis 1. differentiæ ad primum terminum, qui est $\frac{1}{2}$ dabit 38. summam omnium, excepto primo.

* Prob. ex prop. 12. h. Nam summa omnium diuisa per denominatorem proportionis prædictum dat quotientem differentiarum, qui cum primo ipsum facit vltimum. Ergo extracto primo, & residuo per denominatorem eundem multiplicato dabit summam omnium; quia illud residuum erit quotiens ex proportionis denominatore diuidente relictus. Vnde per multiplicationem ab eodem denominatore factam in pristinam multitudinem restitutus summam omnium, dempto vltimo exhibebit, & coniunctus cum eo erit omnium summa.

EXPENSIO III.

De proportione Geometrica propaganda.

DVplici modo potest extendi in infinitum proportio Geometrica, vel diminuendo, vel augendo; ideoque de duplici hac extensione erit agendum.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Datis duobus terminis, & proportionis denominatore extendere proportionem, seu augendo, seu diminuendo in infinitum.

MVltiplicetur terminus datus maior datis duobus terminis 2. & 6. per denominatorem proportionis, quam habet minor ad maiorem, qui est 3. & producetur terminus maior tertius 18. & si per eundem denominatorem multiplicetur 18. fient 54. & sic in infinitum se augendo.

2. 6. 18. 54. 162. & cæt.

At si cupias eam extendere diminuendo diuide minorem terminum per denominatorem eundem, & habebis minorem terminum tertium $\frac{2}{3}$; & si iterum diuidas producentur $\frac{2}{6}$; & rursus enascent $\frac{2}{12}$.

$\frac{2}{12}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{3}$ 2. 6.

Vel si dati sint 54. & 162. quorũ denominator proportionis 3. si diuidas per 3. numerum 54. acquires tertium terminum 18. & cæt.

Probatur. Nam illi numeri sunt in proportione Geometrica; qui easdem partes habent, ex def. 1. l. 7. elem. Nempe ab eodem numero denominatas; cum ergo quilibet V. g. tertius, vel quartus terminus se augendo comprehendat tres partes minoris ob multiplicationem sicut datus terminus minorem datum comprehendebat, patet esse in eadem proportione; & idem dicas de diminutione. Nam terminus tertius ob diuisionem erit tertia pars secundi dati, sicut ipse secundus est tertia pars primi.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Proportionem extendere, vel in augmentum, vel in diminutionem nullo dato proportionis denominatore.

SI sit proportio extendenda in augmentum duc maiorem in se. Deinde diuide per minorem, & tertius terminus prodibit; quod si diminuendo sit procedendum, ducendus erit minor terminus in se, & diuidendus per maiorem. Sic datis 12. & 18. si ducatur 18. in se fiet 324. qui diuisus per 12. dabit tertium terminum maiorem 27. Sic si ducatur 12. terminus minor in se, erit 144. qui diuisus per 18. dabit minorem tertium terminum 8.

Probatur ex propos. 5. huius. Nam rectangulum, seu planum ab extremis confectum est æquale

le quadrato medij; Vnde medio ducto in se habebimus quadratum tale; quod erit æquale rectangulo extremorum; cùm verò vnum ex extremis habeamus, obtinemus latus huius rectanguli; quare, si diuidatur per hoc latus, aliud latus prodibit, nempe aliud extremum; sicut enim rectangula numerica fiunt ex multiplicatione laterum ex defin. 16. sept. Elem. ita habetur quilibet per diuisionem totius ab altero effectam.

THEOR. I. PROPOS. XIX.

Aliquæ proportiones per solam additionem, vel subtractionem possunt extendi.

PRobatur. Nam talis est proportio dupla vt 4. 8. 16. 32. subductus enim terminus minor à maiore dat proportionem decrescentem, at additus terminus minor ipsi minori dat proportionem crescentem.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Datâ successiuâ proportione subducendo alias proportiones successiuas reperire.

DAta proportione aliqua, subducatur minor à maiore, & ordine eodem differentiæ notentur. Nã illæ in eadẽ proportione erũt V. g. dentur proportionales 27. 81. 243. 729. & 2187. crescentes in tripla proportione: Si dematur continuè minor à maiore erunt differentiæ 54. 162. 486. & 1458. similiter in tripla proportione, & si rursus horum proportionalium sumantur differentiæ, erunt eodem modo proportionales; vt 108. 324. 972.

Probatur. Nam ex 23. propos. septimi. Ita dicunt proportionem numeri proportionales, vt eorum partes aliquotæ, quæ sunt in eadem proportione: Quando verò aufertur terminus minor à maiore aufertur pars aliquota, vtpote quod sit maioris pars aliqua, quam numerat denominator; vt 3. est pars aliquota numeri 9. & 9. numeri 27. Ergo reliquæ partes aliquotæ, quæ superant, dicent eandem proportionem. Probatur etiam ex propos. huius 8.

PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Data serie proportionali alias series diuidendo reperire.

ASsume quemlibet numerum diuisorem V. g. 4 & datam seriem partire 27. 81. 243. 729. habebisque 6 $\frac{3}{4}$, 20 $\frac{1}{4}$, 60 $\frac{3}{4}$, 182 $\frac{1}{4}$, & rursus hos diuidas, habebis alios proportionales in eadem proportione in infinitum.

Probatur ex eadem propos. 18. l. 5. & 7. vel 8. huius. In eadem enim proportione sunt totum, & partes.

THEOR. II. PROPOS. XXII.

Si summa proportionis alicuius diuidatur successiuè per terminos proportionis. Quotientes in eadem proportione inuerso ordine inuenientur.

SIt summa 155. terminorum 5. continuè proportionalium 5. 10. 20. 40. 80. & per ipsos terminos diuidatur; habebimus hos terminos continuè proportionales 31. 15 $\frac{1}{2}$, 7 $\frac{3}{4}$, 3 $\frac{7}{8}$, 1 $\frac{15}{16}$.

* Probatur ex propos. 19. septimi. Nam 155. est rectangulum, vel planum, cuius vnum latus est 5. & alterum latus 31. vel 10. & alterum latus 15 $\frac{1}{2}$, vel 20, & alterum latus 7 $\frac{3}{4}$, & cæt. Quare, cùm hæc latera faciant planum semper eundem erunt in eadem proportione 5. ad 10. vt 15 $\frac{1}{2}$ ad 31. quòd etiam ostenditur ex propos. 17. sexti, & ex dictis propos. 6.

COROLLARIVM I.

HInc est, quod si horum proportionalium postremò repertorum summam diuiseris per eosdem proportionales, efficies rursùs alios in eadem proportione, & si horum summam rursus per hos diuiseris, alios inuenies in infinitum.

COROLLARIVM II.

HInc quoque satisfaciemus exquirenti duos proportionales, quorum summa æqualis sit numero vnius in alterum procreato. Nam sumptis proportionalibus duobus, & collectis in summã, ea dabit diuisa per eosdem, duos quotientes proportionales, quorum summa æqualis erit numero ex multiplicatione vnius in alterum procreato.

Sic sũptis numeris 4. & 8. quorum summa 12. diuisa per 4. dabit 3. diuisa per 8. dabit 1 $\frac{1}{2}$, quorum summa 4 $\frac{1}{2}$ est æqualis numero per mutuam multiplicationem effecto: Nam 1 $\frac{1}{2}$, & 3. inuicem multiplicati dant 4 $\frac{1}{2}$.

* Probatur. Cum enim 3. multiplicans 4. restituat 12. & multiplicans 1 $\frac{1}{2}$ faciat 4 $\frac{1}{2}$ erit eadem proportio 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. quam 4 $\frac{1}{2}$ ad 12.

Rursus, cum sit quotientium 1 $\frac{1}{2}$ ad 3. vt 4. ad 8. ex præced. vel ex 17. l. 9. erit cõponendo 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. $\frac{1}{2}$, summam, vt 4. ad 12. quare permutando erit quoque 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. vt 4 $\frac{1}{2}$ summa ad 12. Cum ergo 4 $\frac{1}{2}$ quatenus summa, & 4 $\frac{1}{2}$, vt genitus ex mutua proportionalium multiplicatione 3. & 1 $\frac{1}{2}$ habeat eandem proportionẽ, quam 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. ad eundem numerum 12. erit idem numerus genitus ex proportionalibus, & collectus, vel summatus ab ipsis ex propos. 9. Elem. lib. 5.

EXPENSIO IV.

De proportionalibus in Geometrica proportione interserendis.

INterpositio proportionalium dificilis est maximè si in prolixam seriem proportio debeat extendi

tendi, cum non inter quoscunque numeros numeri proportionales cadant, sed solum planos, vel solidos similes. Vnde cum procedendo tandē plani dissimiles euadant, necesse est tandem incidere in laboriosas fractiones, vt patebit experimentum capienti.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Inter duos numeros constituere medium Geometricè proportionalem.

SInt dati duo numeri 3. & 75. inter quos reperiendus sit medius proportionalis. Multiplicentur simul, & sit numerus multiplicationis 225. cuius radix quadrata 15. est medium proportionale, & 3. ad 15. erit in eadem proportione, ac 15. ad 75. Et si rursus velimus scire 15. & 75. quem medium proportionalem habeant, multiplicabimus eodem modo numeros exhibitos, & subducemus radicem quadratam, quæ erit $33\frac{1}{2}$ proxima, sed non vera, cum numerus ex datorum numerorum multiplicatione exerens non sit quadratus: Ita ergo erit 15. ad $33\frac{1}{2}$, vt $33\frac{1}{2}$ ad 75.

Probatur ex propos. 5. huius. Quia enim quadratum medij est æquale plano extremorum; hinc est quòd ex mutua multiplicatione duorum numerorum, quos extremos volumus esse proueniat numerus æqualis quadrato medij: Vnde ex eo deducta radix quadrata erit latus numericum illius quadrati, & ideo dicet eandem proportionem hoc latus suis extremis, cùm sit latus quadrati æqualis plano extremorum.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Inter duos datos numeros plures proportionales numeros interserere.

A Datis duobus numeris 81. & 1296. extrahemus radices quadratas 9. & 36. & iterum ex istis radices quadratas 3. & 6. si fieri possit. Deinde multiplicandæ radices ipsæ, vt intermedij proportionales prodeant; sic multiplicata radix quadrata 3. cum 9. dabit 27. & 6. cum 36. dabit 216. & habebimus duas series numerorum ab vnitate continuè excrescentium ex propos. 2. huius, deinde subscribendæ singulis datis suæ radices, & proportionales ordinatim decrescentes, & hinc multiplicandæ inuerso ordine, maxima cum minima, maior cum minore, mediocris cum mediocri, & cæt. Nam numeri producti dabunt medios proportionales; ita 6. multiplicatus cum 27. dabit secundum proportionalem 162. & 3. cum 216. tertium proportionalem 648. & 9. cum 36. numerum 324.

Probatur hæc operatio ex propos. 9. lib. 8. elem. Nam tot cadunt medij proportionales inter duos datos numeros, quot inter vtrumlibet ipsorum, & vnitatem; Cùm ergo inter vnitatem, & 81. inuenti sint cadere 27. 9. & 3. & inter 1296. cadere 216. 36. 6. Ergo, & inter 81. & 1296. tot medij proportionales cadent nempe tres. Patet autem ex illa propositione; quod ij ipsi sunt qui ex mutua, & alterna multiplicatione, maximi cum minimo, & cæt. fiunt.

81.	162.	324.	648.	1296.
27				216
9				36
3				6
1				1

Nam, vt ibi probatur, habent intermedij eam propottionem, quam 3. ad 6. Cum ergo 3. multiplicando 27. produxerit 81. ergo 6. multiplicando eundem 27. producet secundum proportionalem, qui se habeat ad primum, vt 3. ad 6. ex propos. 17. septimi, cum idem numerus 27. multiplicet 3. & 6. Verum non omnis numerus talis est naturæ, vt æquali proportionalium numero distet ab vnitate, ac alter datus, nec talis, vt radix quadrata ab eo extrahi possit. Vnde vt plurimum laboriosa erit hæc operatio, & non precisa; nisi forte numeri, inter quos medij proportionales desiderantur ab vnitate continua proportione excrescant.

ROBL. III. PROPOS. XXV.

Numerum datum in partes iuxta datam proportionem proportionales distribuere.

SIt datus numerus 992. qui diuidendus sit in partes quinque habentes proportionem duplam disponantur numeri quinque eiusdem proportionis 2. 4. 8. 16. 32. quorum summa sit 62. per hanc summam diuidatur numerus 992. & habebimus numerum 16. qui multiplicatus per terminos prædictos dabit partes quæsitas 32. 64. 128. 256. 512. quæ simul conflatæ restituent numemerum 992.

* Probatur autem. Quia summa proportionalium continet omnes proportionales, simul: Quotiens verò à diuisione numeri dati 992. proueniens, qui est 16 secat ipsum in tot partes, quot vnitates sunt in summa proportionalium, quæ est 62. quia 16. multiplicatus per 62. facit 992. Ergo, si summa hęc 62. habet tot vnitates, quot vnitates reperiuntur in omnibus proportionalibus, etiam numerus datus 992. capiet tot vicibus 16. quot vnitates sunt in omnibus proportionalibus. Et quia ita est 1. ad 62. vt 16. ad 992. etiam compositus 1. & 1. idest multiplicatus per 2. ad 62. vt eodem modo compositus 16. & 16. ad 992. ex prop. 24. lib. 7. elem. & sic de alijs. Cùm ergo sit quilibet proportionalis 2. 4. & cæt. ad 62. vt 32. & 64. & cæt. ad 992. Etiam simul omnes ex prop. 24. lib. 7. elem. proportionales 2. 4. & cæt. ad 62. erunt vt omnes simul 32. 64. & cæter. ad 992. sed illi sunt æquales ex Thesi numero 62. vtpote suæ summæ, ergo etiam, & isti 32. 64. & cæt erunt æquales numero 992.

Quod verò 32. 64. & cæt. sint proportionales, vt 2. 4. & cæt. Prob. quia per eundem numerum 16. multiplicati fuere, vnde ex 17. lib. 7. Ita erunt multiplicati 2. ad 4. vt geniti 32. ad 64.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Numerum extremum intermissis multis medijs in proportione Geometrica reperire.

SInt dati aliqui termini 3. 9. 27. 81. possum reperire alium 2187. qui distet ab 81. duobus intermedijs 243. & 729. vt ipse vltimus 81. distat à 3. Id verò executioni mandatur multiplicando 81. in se, & diuidendo per primum 3. & dispositi in seriem erunt.

3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Probatur. Quia, ita ex propos. 4. huius, 3. est ad 81. vt 81. est in proportione ad alium sequentē duobus intermissis pro vt 3. distat ab 81 Ergo ex propos. 5. huius quadratum ex medio 81. est æquale plano ex extremis. Quare diuisum per latus 3. dabit alterum latus 2187. quod distat ab 81. duobus intermissis, & à 3. quinque intermissis. Vnde poteris reperire ab hoc distantē quinque terminis multiplicando 2187. in se, & diuidendo per 3. &c.

TRACTATVS XIV.

PARS SECVNDA.

De proportione Arithmetica.

COgnatio arcta intercedit, vt videbimus, inter Arithmeticam, & Geometricam proportionem, vt altera alteri ritè deseruiat, & operationibus alterius sedulè ministret; Ideo post tractationem proportionalitatis Geometricæ statim Arithmeticæ discursus subnectendus est.

EXPENSIO I.

De proprietatitibus Arithmeticæ proportionis.

SImiles sunt effectiones harum duarum proportionum Arithmeticæ, & Geometricæ; nisi quòd huius multiplicatione, & diuisione, vt plurimùm innotescunt; illius ex subtractione, & additione. Proportio verò Arithmetica consistit in æqualitate excessuum, vt vna excedat aliam eodem excessu, quo hæc aliam excedit. V. g. numerus 8. excedit 6. eodem excessu, nempe dualitate, sicut 6. excedit 4. quia ergo isti tres numeri 4. 6. & 8. æquali excessu dualitatis se superant, dicuntur Arithmeticè proportionales.

Præass. 1. Sed in primis notandum, quod si sint numeri quotcumque Arithmetico interuallo, vel etiam quocumque incerto crescentes, vel decrescentes, quilibet maior est æqualis minori, & omnibus interuallis numericis, quibus distant V. g.

Sint 7* 12* 17* 22* 27* 32* 37* & cæt.

Dico, quod 37. est æqualis numero 7. si tamen ei addatur interuallum 5. toties quot intercapedines sunt inter 7. & 32. quæ stellulis notatæ sunt, & sunt sex. Si ergo multiplicetur 5. per 6. & fiunt 30. & addatur numero 7. erunt 37. quod patet; quia tot vicibus à numero 7. excreuit 37. per additionem numeri interuallaris 5.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si sint quatuor quantitates continua proportione Arithmetica excrescentes, summa mediorum est æqualis summæ extremorum.

* DEntur quatuor numeri, qui se superent æqualiter, nimirum ternario 8. 11. 14. 17. Dico quod additi 8. & 17. faciunt eundem numerum, quem additi simul faciunt 11. & 14. nimirum 25.

Probatur. Numerus 8. excreuit vsque ad numerum 14. per continuam additionem ęqualis partis idest ternarij, qui semel additus est numero 8. vt fiant 11. gemina vice numero 8. iterum, vt fiant 14. iuxta interuallorū multitudinem, quibus ab 8. distat 11. & 14. vt prænotaui in pręass. ergo ternarius additus ter ipsi 8. semel in 11. & iterum bis in 14. faciunt medios.

Sed etiam ter idem ternarius additus est primo 8. vt fieret extremum 17. semel quando excreuit ab 8. in 11. semel cum excreuit ab 11. in 14., & semel cum excreuit à 14. in 17. iuxta tria interualla, quibus distat à primo 8. Cum ergo ter ternarius additus primo numero 8. duplato faciat duos medios, & ter additus eidem 8. faciat extremum, patet, quod duo medij simul erunt æquales primo, & extremo; cùm tam medij, quàm extremus cum primo, componantur ex primo bis accepto, & ex tribus ternarijs.

THEOR. II. PROP. II.

Si sint tres quantitates continua proportione Arithmetica se respicientes duplum medij est æquale summæ extremorum.

SInt tres quantitates 7. 11. 15. quæ proportione Arithmetica, nempe æquali crescant augmento, & medium 11. dupletur. Dico, *quòd hoc duplum erit æquale summæ extremorum.*

* Probatur. Nam diximus propos. anteced. quòd terminus tertius componitur ex duplici additione æqualis partis, quæ hic est quaternarius bis additus numero primo 7. Numerus verò secundus Arithmeticus ex numero eodem 7. & simplici additione æqualis partis, nimirum quaternarij; Ergo si bis accipiatur hoc duplum constans gemino quaternario, & gemino numero radicali 7. erit æquale extremo, primo ei addito, qui etiam semel continet primum cum gemina parte equali, nempe quaternario; & sic faciet summam, quæ bis continet primum, & bis partem equalem, quâ proportio augetur.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si sit quotcunque numeri Arithmetico interuallo crescentes, seu decrescentes, primus multiplicatus per numerum interuallorum minutum vnitate iunctus cum vltimo erit æqualis secundo multiplicato per interuallorum numerum totum.

SIt 2 6* 10* 14* 18* 22* 26* 30* 34 &c. numerus interuallorum sit 8. que stellulis notantur. Dico, quòd si 2. multiplicetur per numerum interuallorum vna vnitate abiectâ, nempe per 7. & iungatur extremo 34. quòd est æqualis secundo 6. multiplicato per interuallorum numerum 8.

* Progress. 1. Si primus terminus 2. multiplicetur per 8. numerum interuallorum, & fiat 16. & si per eundem 8. multiplicetur numerus differentiæ 4. & fiant 32. isti duo numeri collecti erunt æquales numero illi, qui ex multiplicatione secundi termini V. g. 6. cum numero interuallorum eodem 8. nascitur, qui erit 48. Patet, quia 6. cōponitur ex 4 interualli numero, & 2. primo radicali; vnde, siue seorsim, & deinde iuncti, siue simul multiplicati eandem summam efficient 48.

Progr. 2. Differentię numero 4. multiplicato per 8. addito 2. radicali est ęqualis numerus vltimus 34 xe primo preass. Ergo abiecto numero radicali à multiplicato numero differentiali, vt restet 32. remanet 34. numerus vltimus illo 32. maior in ipso numero radicali: Quare, & si adderetur vtrisq; numerus ex interuallorū 8. & numeri radicalis 2. multiplicatione cōsurgēs, qui est 16. adhuc esset maior, ita auctus vltimus terminus eodē æqualiter aucto numero differentiali 32. in ipso 2. radicali. Quamobrem, vt sit æqualis demendus est à 16. numerus ipse radicalis, & ita erit 14. nempe numerus 2. radicalis multiplicatus non per 8. sed per numerum vna vnitate minorem, nempe per 7. Quamobrem numerus radicalis multiplicatus per numerum interuallorum minus vna vnitate, V. g. per 7. vt sit 14 iunctus vltimo termino 34. erit ęqualis numero 16. ex multiplicatione interuallorum 8. & numeri radicalis 2. & numero differentiarū 32. s. 48. Ergo etiā erit æqualis numero consurgenti ex multiplicatione secundi termini 6. cum numero interuallorum; quem ex primo progress. probauimus equalē numero differentiali 32. & 16. radicali per interuallorum numerū multiplicato, & in vnam summam redacto, idest eidem 48.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Numeri proportione Arithmetica procedentes, dempto radicali, ita quilibet ad sequentem est in proportione, vt numerus interualli vnius ad numerum interualli alterius.

SInt numeri 2* 6* 10* 14* 18* 22* 26* 30* 34. 38. 42. & numerus interceptus inter quemlibet eorum sit 4. Dico, *quòd si à numeris immediatis 34. & 38.* numerus radicalis expungatur, vt fiant 32. & 36. interuallorum numerus 8. qui mediat inter primum 2. & 34. dicit *eam proportionem Geometricam ad 32.* quam 9. numerus interuallorum medians inter primum 2. & sequentem 38. dicit ad 38. numero radicali deducto, idest 36.

* Prob. Nam 4 octies continetur in 32. ex primo notabili huius, toties nempe quot sunt interualla, sicut eodē modo 4. nouies continetur in 36. ergo numerus octonarius interuallorum quater continetur in 32. sicut numerus nouenarius interuallorum quater continetur in 36. Quare cum 8. & 9. per eundem 4. multiplicatus sit: ita erit 8. ad 9. vt 32. ad 36. ex propos. 17. lib. 7. Elem.

COROLLARIVM.

HInc est, quod planum ex medijs 8. & 36. fit æquale plano extremorum 9. & 32.

THEOR. V. PROPOS. V.

Numeri proportione Arithmetica procedentes eandem dicunt proportionem Geometricam quilibet ad suum numerum interuallorum, si tamen ab eis numerus radicalis dematur.

PRobatur. Nam data eadem numerorum serie, quæ in præcedenti propositione; ostensum est; ita esse numerus interualli 8. ad numerum 9. interualli alterius, vt 32. Arithmeticus ad sequētem numerum Arithmeticum 36. à quibus tamen Arithmeticis demptus fuit numerus radicalis 2. Quare, & *vicissim* erit 32. ad 8. vt 36. ad 9. numerum interuallorum.

THEOR.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

* *Si aliquis terminus Arithmeticus maior multiplicetur per numerum interuallorum carentem vna vnitate, numerus productus addito ei termino radicali est æqualis numero, qui fit ex eodem numero interuallorum toto, & termino immediato minori.*

SIt eadem dispositio terminorum, quæ priùs 2 6* 10* 14* 18* 22* 26* 30* 34* 38* 42. & numerus interuallorum inter 2. & 38. sit 9. Dico, quòd si multiplicetur 38. per 9. minutum vna vnitate videlicet per 8. procreabitur terminus 304. cui si addatur terminus radicalis 2. efficietur æqualis numero 306. qui fit ex multiplicatione totius numeri interuallorum 9. cum minori 34. termino Arithmetico immediatè sequente.

Probatur, si dematur à duobus terminis Arithmeticis 34. & 38. terminus radicalis 2. dicent proportionem ad inuicem, vt numerus interuallorū, ex præced. propositione, & ita erit 8. ad 32. vt 9. ad 36. Quare, & plana eorum erunt æqualia, nempe productū ex 32. & 9. ac productum ex 8. & 36. ex Coroll. præced. quæ sunt 288. Si verò singulis addatur terminus radicalis, & fiat 34. & 38. & deinde multiplicentur per 9. numerus 34. vt fiat 306. & per 8. numerus 38. & fiat 304. addet 9. ei plano ex 32. tot terminos radicales, quot addit 8. & insuper vnum terminum radicalem, & faciet 306. Quare maior terminus 38. multiplicatus per numerum interuallorum minus vno, vt est 8. restituet numerum addito termino radicali 2. æqualem ei numero, qui fit ex multiplicatione termini immediate minoris 34. & toto numero interuallorum 9. vt est 306.

COROLLARIVM

ELlicitur hinc, quòd idem euenit etiam, si duo numeri dati Arithmetici non sint immediati; sed secundum distantiam, ita interualla sumantur. V. g. si elligeres 30. & 38. interualla essent 7. inter 30. & primum radicalem, & inter 38. interualla essent 9. cum ergo ita se habeat 7. ad 28. vt 9. ad 36 dempto videlicet ab vtroque numero radicali; sequitur, quòd planum ex medijs 9. & 28. sit æquale plano ex extremis, nimirum 7. & 36 addito verò vtriq; numero radicali per interuallorum numerum multiplicato productús continebit insuper, qui oritur à 9. & 28. nouem numeros radicales; qui verò à 7 & 36. septem insuper numeros radicales; Vnde erit ei æqualis, si bis addatur numerus radicalis.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

Inter quoscumque numeros Arithmeticè dispositos eadem est ratio Geometrica interualli ad interuallum, quæ est differentiarum ad differentias.

SInt numeri 3* 5* 7* 9* 11* 13* 15* 17. interualla inter 3. & 17. erunt 7. differentia subducto 3. à 17. prodibit 14. sic inter quoscumque alios inter 7. & 13. differentia est 6. interualla 3. Dico itaque, quòd ita 7. est ad 3. vt 14. ad 6. nempe numeri interuallorum, & differentiarum numeri in eadem proportione sunt.

* Probatur. Nam multiplicato numeso differentiali ex præass. 1 per interualla, dat differentias omnes, quibus distat vnus terminus ab alio. Sic 2. multiplicatus per 7. dat differentiarum numerum 14. & idem 2. multiplicatus per 3. dat differentiarum numerum 6. nempe differentias omnes, quibus 9. distat à 3. vel 17. distat à 3. Ergo ex 17. lib. 7. Elem. cum numerus interuallorum per eundem numerum 2. multiplicatus producat numerum differentiarum, habebunt eandem rationem geniti, & multiplicati. Vnde ita erit 3. ad 7. numeri interuallares multiplicati, vt 6. ad 14. differentiales geniti.

COROLLARIVM

HInc est, quod *permutando* sit quoque numerus interuallaris ad differentias aggregatas nempe 3. ad 6. vt 7. ad 14.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Numeri Arithmeticè procedentes, si æqualiter remoti ab extremis addantur simul, illi omnes sunt æquales.

SIt series 7. 11. 15. 19. 23. 27. Dico 7. & 27. esse æquales additi simul numeris 11. & 23. sicut etiam 15. & 19 additi simul, qui sunt æqualiter remoti ab extremis.

* Probatur. Nam tantùm 7. & 27. faciunt 34. ad quem numerum ad hoc, vt perueniat numerus 23. deficit ei 4. nempe numerus interualli, quo termini distant, & primus terminus; at numerus 11. continet ambos, ergo additus 23. facit 34. sic 19. vt perueniat ad 34. deficit ei numerus interualli gemini 4. & 4. & primus 7. numerus verò 15. vtpote duobus interuallis à primo distans 4. & 4. continet, & 7. Quare additus numero 15. conficiet 34. & sic de alijs.

EXPENSIO II.

De proportionalibus Arithmeticis continuis in vnam summam colligendis.

FAciliùs trahuntur in opus Arithmetici proportionales, quàm Geometrici; cùm sola additione, & subtractione tractentur.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Arithmeticos proportione continua procedentes; tum pares, tum impares in vnam summam colligere dato vltimo, & primo, & terminorum numero.

SInt dati quicumque termini impares proportione Arithmetica procedentes V. g. septem 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. Oporteatque omnium

sum-

summā noscere. Vltimus terminus 22. iungatur cū primo 4. & fit 28. diuidatur deinde in geminas partes, quarū vna fit 14. numerus, qui per numerū terminorum multiplicetur nempe per 7. dabit summam omnium 91.

Si vero numerus terminorum par fuerit 7. 11. 15. 19. 23. 27. Addatur similiter vltimus terminus primo, vt fiant 34. & multiplicetur per numerum dimidium terminorum 3. vt fiant 102. & erit omnium summa.

Probatur. Nam additi numeri æquè ab extremis remoti sunt omnes æquales ex propos. 8. quare Arithmet. numerus iunctus primus extremo, & multiplicatus per numerū terminorum æquabit numerum planum omnium numerorū simul vnitorum, qui æqualiter remoti sint ab extremis, & facti sint omnes æquales V. g. 3. 5. 7. 9. 11. 13. facti sint omnes æquales, nempe minimus 3. per adiectionem maximi 13. & maximus 13. per adiectionem minoris 3. Item sequens minor 5. per adiectionē penultimi 9. Sicut, & 9. penultimus per adiectionem minoris 5. erunt sex numeri æquales 16. qui multiplicati per 6. dabunt planum numerum 96. qui est summa omnium sex cōstantium vnitatibus 16. quia

F	E	A	B	C	D
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	5	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	7	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	9	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	11	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	13
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
13	11	9	7	5	3

ergo numerorum ita additorū summa est numerus 16. per numerum terminorū multiplicatus, & addita est medietas; dum singuli suis correspondentibus additi sunt, tot enim sunt additi, quot erant. Ergo summa omnium erit dimidia huius plani numeri, nempe 48. sed si dimidium terminorum multiplicetur cum vltimo 16. generat dimidium plani numeri, idest 48. Ergo vltimus terminus V. g. 13. additus primo 3. vt fiat 16. multiplicatus cum dimidio terminorum, vt fint 48. erit omnium summa. Quod autem dimidium terminorum, cum vltimo, addito primo multiplicatū, producat dimidium plani ex toto numero terminorum, & eadem summa vltimi, & primi geniti, patet ex 2. prop. lib. 9. quia duo plani tales æquant planum totius.

Nec interest, si dimidium terminorum multiplicetur cum toto extremo, seu dimidium extremum multiplicetur cum omnibus terminis, nam semper conficiet dimidium planum, ex 2. propos. lib. 9. Elem. Ita seu 3. multiplicetur cum 4. seu 2. multiplicetur cum 6. dimidium planum 12. constituent. Hoc autem dimidium planum erit summa omnium terminorum Arithmeticorum.

COROLLARIVM

IN progressionibus naturalibus ab 1. incipientibus quadratum maximi dempta radice, & dimidiatū est summa omniū ipso dempto. Sic si sint 1. 2. 3. 4. 5. quadratū 25. numeri 5. dempta radice 5. vt faciant 20. dimidiatum nempe 10. est summa omniumquatuor. Quia addita vnitate numero 4. fit 5. qui multiplicatus per dimidium terminorum daret summam omnium, idem verò est multiplicare per dimidium, & per totum si genitum postea diuidas, & idem est multiplicare per 4. & per 5. ipsum 5. si à genito auferas ipsum 5. vt fiant 20.

EXPENSIO III.

De proportione Arithmetica propaganda.

FAcilis est propagatio huius proportionis, vnde breuiter eam explicabimus.

PROBL. I. PROPOS. X.

Data differentia proportionem Arithmeticam extendere.

HOc faciliter fit addendo illam successiuè singulis terminis, sic si 4. addatur 5. differentia fient 9. secundus terminus, & si eidem 9. addantur rursus 5. fient 14. eruntque 4. 9. 14. tres termini Arithmetici.

Ratio quoque euidens; quia proportio Arithmetica oritur ab additione eiusdem partis.

PROBL. II. PROP. XI.

Datis duobus terminis Arithmeticis tertium inuenire.

A Maiore duplicato detrahe minorem, eritq; residuum tertius terminus maior, vel è contrà à minore duplicato detrahe maiorem, & minor terminus exeret; ita datis duobus terminis 8. 15. si duplices maiorem, erunt 30. à quo detractus minor residuum exhibebit terminum maiorem 22. & è contra, si duplices 8, & detrahas 15. remanebit 1. terminus minor.

Probatur ex propos. 2. huius. Quia medius terminus duplicatus est æqualis summæ extremorum; vnde, si ab eo alterum ex extremis deducatur, alterum prodire necesse est.

PROBL. III. PBOPOS. XII.

Datis numero terminorum, maiori seu minori extremo, & differentia reperiemus alterum extremum.

SInt dati 10. Termini Arithmetici, quorum primus sit 7. differentia 2. Dico, quòd reperiemus aliud extremum maximum, si ducamus differentiam 2. in terminorum numerum proximè minorem V. g. in 9. vt fiant 18. & huic genito primum terminum adijciamus, vt fiat 25. nam hic numerus 25. erit terminus maior.

Probatur. Differentiæ sunt additæ, primo termino, tot, quot sunt interualla. Nā interualla tot sunt. quot termini vno dempto. Ergo ex primo præass. vltimus terminus factus est, cum vltimus sit æqualis primo, & differentię per interualla multiplicatę.

Aduerte, quòd si progressio incipiat à zifra, quod ipsa, vt numerus est auferenda sicut, & in sequenti Probl.

PROBL. IV. PROPOS. XIII.

Dato primo, & secundo termino, & numero interuallorum reperire vltimum; quem elegeris.

MVltiplicetur secundus per numerum interuallorum, & à genito dematur primus per interuallorum numerum minus vno multiplicatus.

Probatur. Quia ex propos. 3. isti geniti sunt æquales; nempe primus per interuallorum numerum minutum vnitate, cum vltimo, & secundus per numerum interuallorum multiplicatus. Quare si à genito ex secundo, & numero interuallorum detrahatur ille genitus: residuum erit vltimus terminus; sic ibi 6. secundus multiplicatus per 8. interuallorum numerum dat 48. à quo demptus 14. nimirum 2. multiplicatus per 7. interuallorum numerum vnitate minorem dat 34. vltimum terminum.

PROBL. V. PROPOS. XIV.

Dato vltimo, & penultimo termino, & numero interuallorum reperire primum.

MVltiplicetur penultimus per numerum interuallorum, & ex ipso genito deducatur vltimus multiplicatus per eundem interuallorum numerum; sed minutum vna vnitate, & residuum erit primus terminus.

Probatur ex propos. 6. huius. Nam isti duo sunt æquales, vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno iunctus primo, & penultimus per interuallorū numerū multiplicatus. Vnde si ex hoc genito deducatur ille genitus prodibit primus: Sic ibidē penultimus 34. per interuallorū numerū 9. ductus dat 306. à quo dēptus 304. ex 8. interuallorū numero vnitate minori, & 38. vltimo prouenlens dat 2. primum terminum.

Aduerte in is omnibus, quod si progressio Arithmetica incipiat à 0. vt 0. 4. 8. 12. 16. 20. 24. tunc ex hac operatione proueniet 0. ostendens primū terminū zifrā esse, vt 6. numerus interuallorum dat 120. multiplicatus per penultimū 20. sed 24. vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno, nimirum per 5. dat 120. at 120. iste deductus ab illo relinquit 0.

PROBL. VI. PROPOS. XV.

Datis duobus terminis extremis, & numero interuallorum reperire differentiam.

MInorem à maiori subducito, & residuum diuide per numerum interuallorum.

Probatur, quia tot sunt ex primæ Expen. huius pręass. differentiæ additæ primo, quot interualla vt fieret vltimus; Ergo vt fiat differentia subducendus est primus, & reliquum per interuallorum numerum diuidendum.

EXPENSIO IV.

De proportione Arithmetica interserenda.

INterpositio terminorum in Arithmetica proportione non est grauis laboris, eamque istis præceptis in opus reducemus.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Inter duos terminos Arithmeticos medium proportionalem inuenire.

COniūgatur primus 5. cum altero 9. & summa 14. diuidatur per medium, & medietas 7. erit medium proportionale inter 5. & 9. eritque arithmeticè 5. ad 7. vt 7. ad 9. sic si sint 9. & 8. summa erit 17. & medietas 8. & $\frac{1}{2}$ erit medius terminus.

Probatur ex propos. 2. huius partis. Nam duplum medij est æquale summæ extremorum. Vnde summa extremorum diuisa per medium dabit medium terminum Arithmeticum.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Inter duos terminos Arithmeticos plures medios inuenire.

HOc executioni mandatur reperiendo differentiam, quæ inter terminos illos debet mediare. Sit ergo 5. & 68. inter quos debeant inueniri 8. proportionales. Subducatur 5. à 68. & residuum erit 63. assumatur verò numerus terminorum minutus vnica vnitate, nempe 7. & diuidatur numerus residuus 63. per 7. & fiet differentia 9. Si ergo numero 5. addas differentiam 9. continuè septem vicibus, efficies 8. terminos; quorum primus erit 5. vltimus 68. vt 5. 14. 23. 32. 41. 50. 59. 68.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datum numerum Arithmeticum in partes proportionales Arithmeticas distribuere.

DAtum numerum 152. diuidemus per dimidium numerū terminorū 4. & quotiens erit 38. hunc quotiētem in duas partes inæquales diuidemus, vt placet in 3. & 35. quos constituemus pro extremis, inter quos vt libet volumus esse 8. proportionales. Horum differentiam proportionalem inueniemus, vt propos. 17. huius part. quæ erit 5. cum iam habeamus electos terminos primum 3. & nouissimum 35. & numerum terminorum 8. & consequenter interuallorum 7. cum tot sint, quot termini minus vna vnitate: Si ergo differentiam repertam 5. addamus primo termino successiue efficiemus terminos arithmeticè progredientes 3. 8. 13. 18. 23. 28. 33. 38. quorum summa erit 152.

Probatur ex 9. propos. huius partis. Nam vltimus terminus iunctus primo multiplicatus per diuidium terminorum facit summam omnium; Ergo diuisa per dimidium terminorum summa omnium, qualis debet esse numerus 152. dabit numerum, qui in se continebit maius, & minus extremum. Et hinc possumus diuidere in duas partes inæquales, vt placet, cum possimus eligere maius, & minus extremum, vt voluntas erit; Vnde dato maiori, minorique extremo, & numero terminorum habebimus interuallorum numerum quapropter rectè differentiam reperiemus.

Si verò numerus interuallorum sit impar, nec commodè in duas partes possit diuidi, per ipsum totum poterimus partire numerum datum, & quotiens duplicatus erit numerus terminorum, qui rursus in duas partes inæquales diuisus dabit maius, & minus extremum, & cæt.

Sic 152 diuisus per 8. dat quotientem 19. qui duplatus restituit 38.

Ratio est, quia maius, & minus extremum ex propos. 9. in vnam summam collectum, & bifariam diuisum dat, si hæc eius medietas multiplicetur cum numero omnium terminorum, summam omnium. Vnde etiam summa omnium diuisa per totum numerum terminorum dabit dimidium numerum, in quo maius, & minus extremum latet.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

* *Data terminorum Arithmeticorum serie, aliam similem inuenire.*

ID faciliter operi consignantur multiplicando per eundem numerum proportionales Arithmeticos datos. Sic si dantur 2. 5. 8. 11. reperiemus aliam seriem Arithmeticam eos per numerum 3. placitum multiplicando, & producti erunt 6. 15. 24. 33. Arithmetici.

* Probatur. Quoniam 3. multiplicauit 2. & 8. eadem proportio erit genitorum 6. ad 15. quæ generantiũ 2. ad 5. & 15. ad 24. quæ 5. ad 8. Quare ex *æquo* erit 2. ad 8. vt 6. ad 24. Et *diuidendo* erit 2. ad residuum 6. ex 8. proportio, quæ est 6. ad 18. residuum ex 24. & *permutando* erit 2. ad 6 vt 6. residuum ad 18. Et pariter. Quia respondet 2. ad 5. vt 6. ad 15. erit *diuidendo*, 2. ad residuum 3. ex 5. vt 6. ad residuum 9. ex 15. Et *permutando* 2. ad 6. vt 3. residuum ad residuum 9. Cum ergo residua 6. ad 18. & 3. ad 9. dicant eandem proportionem, quæ est 2. ad 6. erit etiam inter eosdem eadem proportio, & 6. erit ad 18. vt 3. ad 9. Quare *permutando* 6. erit ad 3. vt 18. ad 9. Numerus verò 6. est differentia, inter 2. & 8. & ideo dupla differẽtiæ 3. quæ est inter 2. & 5. terminos datos; & ideo etiam 18. differentia, quæ est inter 6. & 24. erit dupla differentiæ 9. quæ est inter 6. & 15. quare 6. 15. 24. erunt Arithmetici, vt sunt 2. 5. 8.

TRACTATVS XIIII.

PARS TERTIA.

De Proportione Harmonica.

PRoportio Harmonica in eo existit; quòd eadem proportio Geometrica sit inter extrema, quæ est inter differentias, quibus numerus medius dissidet ab extremis; Ita inter 2. 3. 6. est proportio harmonica; quia extrema 2. & 6. ita geometricè proportionalia sunt, vt est 1. ad 3. quæ sunt differentiæ, quibus dissidet extremum 2. à medio 3. & extremum 6. ab eodem 3. Hæc autem proportio, licet dicatur Harmonica, est tamen potiùs Optica vt suo loco ostendemus; pro nunc ipsius vniuersalia tantùm simptomata afferemus.

EXPENSIO I.

De proportione Harmonica inuenienda, & aliquibus eius proprietatibus.

PRoportio Harmonica videtur quiddam inter Geometricam, & Arithmeticam. Nam in comparatione terminorum Geometrica est; quoad verò originem, ab Arithmeticâ ortus suos desumit, vt modo videre licebit.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis tribus numeris Arithmeticè proportionalibus, tres alios Harmonicè proportionales inuenire.

SInt dati 3. 7. 11. continuè Arithmeticè proportionales, & differentia sit 4. multiplicentur extremi inuicem, & fint 33. Multiplicetur deinde medius cum extremis, & erunt 21. & 77. Dico itaque 21. 33. 77. esse inuicem in Harmonica proportione.

* Probatur. Quia 3. extremum multiplicauit medium 7. & fecit 21. Multiplicauitque aliud extremum, & fecit 33. erit 7. ad 11. ex prop. 17. l. 7. vt 21. ad 33. Quare *diuidendo* erit 7. ad 4. differentiam, vt 21. ad 12. differentiam.

Rursùs. Quia 11. multiplicauit extremũ 3. & mediũ 7. & generauit 33. & 77. erit 3. ad 7. vt genitus 33. ad genitum 77. ex prop. 17. l. 7. elem. Quare *diuidendo* erit 3. ad 4. differentiam, vt 33. ad 44. differentiam. Quapropter etiam *componendo* erit 3. cum 4. nempe 7. ad 4. differentiam, vt 33. cum 44. s. 77. ad 44. differentiam. Cùm ergo sit 7. ad 4. vt 21. terminus, ad 12. differentiam, & 7. ad 4. vt 77. terminus ad 44. differentiam ex propos. 13. quinti erit eadem proportio 21. ad 12. quæ est 77. ad 44. Proptereaque *permutando* 21. terminus primus ad 77. vltimum terminum erit proportio, quæ est differentię 12. ad differentiam 44. Quamobrem erunt tres termini 21. 33. 77. continuè harmonicè proportionales ex definit.

COROLLARIVM I.

HInc est. Quod ita sit 3. ad 11. termini Arithmetici, vt 21. ad 77. terminos musicos, & vt 12. ad 44 differentias. Patet. Medius 7. multiplicauit 3. & genuit 21. & 11. & genuit 77. Ergo ex propos. 17. septimi eadem proportio est 3. ad 11. quæ est 21. ad 77. sed vt est 21 ad 77. ita est 12. ad 44 quæ sunt differentiæ, ergo ex *æquo*, vt 3. ad 11. ita est differentia 12. ad differentiam 44.

COROLLARIVM II.

HInc emanat illa proprietas, quòd differentia primorum multiplicata in tertium, seu extremum generet numerum æqualem differentiæ posteriorum ductæ in primum, vt hic vides.

12 44
21 33 77
924

Ratio petitur ex propos. 19. lib. 7. Elem. Quoniam extrema dicunt eãdem proportionem, quam differentiæ, & ita est 21. ad 77. vt 12. ad 44. Ideoque multiplicati medij inuicem 77. & 12. & extremi inuicem 21. & 44. dabunt genitos æquales, & idem dicas ob eandem proportionem de extremis arithmeticis, & differentijs Harmonicis, seu extremis Harmonicis.

3 7 11 3 7 11
21 33 77 12 44
231 132

Nàm, quia, ita est 3. ad 11. vt 21. ad 77. ex Coroll. 1. ideo multiplicati inuicem 21. & 11. sicut 3. & 77. dant 231. Et quia ita est 3. ad 11. vt differentiæ 12. ad 44. ex Coroll. 1. ideo 11. & 12. inuicem ducti sicut, & 3. & 44. dant 132.

COROLLARIVM III.

COlligitur Arithmeticos tres esse in eadem proportione Geometrica; ac Harmonici, sed conuerso ordine. Quia enim 3. V. g. generauit 21. & 33. primos Harmonicos. Multiplicando duos extremos Arithmeticos 7. & 11. ideo isti postremi erunt in eadem proportione, ac Harmonici primi 21. & 33. Rursus; quia 11. multiplicando duos primos Arithmeticos 3. & 7. produxit Harmonicos postremos 33. & 77. ideo in eadem proportione erũt isti postremi Musici cum Arithmeticis primis.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duobus terminis tertium in Harmonica proportione reperire, siue maiorem, siue minorem.

TErminorũ datorũ differentiã à minore subductã termino, diuidẽdus est residuo genitum ex eorũ multiplicatione, nam quotiens cum datis duobus constituet Harmonicum maiorem. V. g. sint dati 6. & 8. quorum differentia est 2. quæ deducta à minore termino 6 relinquit 4. Numerus verò genitus ex eorum multiplicatione terminorum est 48. qui diuisus per 4. relinquit 12. tertium terminum; dico itaque quod 6. 8. 12. sunt in proportione Harmonica.

* Probatur. Nam subducta differentia à minore termino dato relinquit residuum, qui cum duobus antecedentibus proportionem Arithmeticam habet; nempe 4. 6. 8. differentia enim, quę subducto 6. ab 8. remanet, eadem à termino minori 6. subducitur. Vnde multiplicati, vt superius in 1. propos. producent tres terminos in proportione Harmonica. Nempe 6. multiplicando 4. & 8. extrema, dabit 24. & 48. & extrema 4. & 8. se multiplicando facient medium 32. Si ergo omnes diuidantur per 4. patet quotiẽtes in eadem proportione mãsuros esse. Sed iam quotiẽtes 24. & 32. diuisorum per 4. residuũ sũt ipsi multiplicati 6. & 8. Ergo reliquus diuisus quoq; per 4. residuũ dabit tertium Harmonicum proportionalem 12. Siquidem diuisio æquiualet multiplicationi, & sicuti multiplicati numeri per eundem numerum ex propos. 17. septimi faciunt genitos in eadem proportione, in qua ipsi multiplicati se respiciunt, ita etiam diuisi generant quotientes in eadem proportione, in qua ipsi erant. Si verò cupias reperire vtroque dato minorem: Differentiam eorum maiori adde, & per hanc summam numerum ex eorum mutuâ multiplicatione genitum diuide; quotiens enim erit terminus vtroque dato minor, vt si dentur 6. & 9; addo differentiam eorum 3. maiori 9. & summa fit 12; diuido deinde numerum 54. ex eorum multiplicatione genitum per hanc summam 12. & prodit tertius terminus minor $4\frac{1}{2}$.

* Probatur eodem modo. Nam addita differentia eorundem, maiori V. g. ipsi 9. ex ipsis fiunt tres termini in proportione Arithmetica, vt 6. 9. 12. idem enim interuallum 3. mediat: quare fient ex ipsis Harmonici 54. 72. 108. ex prima propos. qui, si diuidãtur per maiorem 12. dabunt quotien-

 tes

tes eiusdem Harmonicæ proportionis: sed iam 6. & 9. sunt quotientes duorum 72. & 108 ex diuisione per 12. consurgentes; si quidem & ipsi 72. & 108. ex multiplicatione 6. & 9. per 12. consurgunt: ergo reliquus quotiens inuentus 4. $\frac{1}{2}$ ex diuisione primi proportionalis 54. proueniens erit primus terminus ipsorum 6. & 9.

COROLLARIVM.

*Hinc est quod non semper duobus datis tertius Harmonicus proportionalis inueniri queat vtroque maior; licet possit reperiri vtroque minor in infinitum.

* Ratio est, quia quandoque occurrere potest, vt differentia datorum à minore subduci nequeat, eò quòd sit maior, quàm ipse minor numerus, vel ipsi æqualis, vt essent 3 & 9. nam 6. differentia non potest subduci à 3. & sicuti si darentur 4 & 8. differentia ipsa 4. non posset subduci à 4. quia nihil remaneret. At potest diminui in infinitum, quòd differentia semper possit addi maiori termino, & sic semper numerus ex eorum multiplicatione genitus per eum diuidi possit.

EXPENSIO II.

De proportione Harmonica continuanda.

Dvplici modo Harmonica proportio continuatur. Prima est, cùm datis tribus terminis Harmonicis tertio, duo alij in eadem proportione Harmonica adiunguntur. Secunda quando tribus datis, duobus extremis tertius Harmonicè proportionalis adiungitur, quæ, seu prima, seu secunda non potest dici propriè continua. Non quidem prima, eo, quòd secundus, tertius, & quartus deinde non habeant proportionem Harmonicam, vt 2. 3. 6. 9. 18. Nam 2. 3. 6. & 6. 9. 18. eam, & eandem Musicam proportionem possident; non autem 3. 6. 9. qui distant Arithmeticè. Secunda verò non est eadem priorum trium, quæ posteriorum, nam 3. 4 6. & 4. 6. 12. sunt secundo modo continuè proportionales; sed non eadem proportione 3. refertur ad 6. vt 4. ad 12.

PROBL. I. PROPOS. III.

Proportionem Harmonicam datis tribus terminis primo modo continuare.

Denominator proportionis inter extrema ducitur in duos terminos medium, & extremũ, duoq; alij adiungẽtur tertio termino, qui in eadem proportione erunt cum eo, ac tres dati inuicem V. g. datis 2. 3. 6. si per 3. denominatorẽ proportionis, quã habet 2. ad 6. multiplicetur 3. mediũ & 6 extremum producentur 9. & 18. qui in eadem proportione erunt ad 6. quã tres dati 2. 3. & 6 ita vt sint 2. 3. 6. 9. 18. continuè modo primo proportionales: & sic si multiplices hos vltimos per eundẽ pportionis denominatorẽ, erũt numeri geniti 27. 54. alijs quoq; adiũgendi, ita vt sint continuè proportionales harmonicè 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54.

* Præass. Antequam deueniamus ad probationem obserua priùs, quòd denominator ternarius rationis numeri 2. ad numerum 6. multiplicando 2. facit 6. Quare si adhuc 3. vt iussimus, multiplicet 6. & faciat 18. erit eadem proportio 2. ad 6. quæ 6. ad 18. Sed idem ternarius multiplicauit quoque, vt præcepimus, intermedium numerum 3. & fecit 9. quare ita erit 3. ad 9. vt 2. ad 6, & ideo; vt 6. ad 18. quæ est ob proportionem Musicam eadem, ac differentiarum 1. ad 3

* Quo supposito in propos. probanda sit primus progress. Primus terminus 2. ad extremum 6. est vt medius terminus 3 ad inuentum 9. Ideò *permutando* erit 2. ad 3. vt 6. ad 9. & *diuidendo* residuum 1. erit in proportione ad totum 3. vt residuum 3, ad totum 6. Quare *permutando* rursus erit residuum 1. differentiaque datorum numerorum ad differentiam 3. extremi dati 6. ab inuento 9. vt 2. ad 6. primus, & vltimus datus.

Progress. 2. Eodem modo, ita erit 3. medius ad 9. inuentum, vt 6. extremus datus ad 18. inuentum. Ergo *permutando* erit 3. ad 6. vt 9. ad 18. & *diuidendo* differentia 3. ad terminum 6. vt differentia 9. ad terminum 18. & *permutando* erit differentia 3. ad differentiam 9 vt 6. ad 18. termini, quę est eadem, ac 2. ad 6. terminorum, vt progr. 1.

Progress. 3. Cum ergo sit 1. differentiã primi, à medio termino 3. ad differentiam 3. extremi termini 6. ab inuento 9. veluti 2. ad 6. ex primo progr. & ex secundo differentia 3. medij 3. ab extremo 6. ad differentiam 9. inuenti minoris 9. ab inuento maiore 18. sit vt 2. ad 6. Erit itaque eadem proportio 1. differentia minor datorum ad 3. differentiam minorem extremi ab inuento minore quæ est differentia 3. maioris datorum ad 9. differentiam maiorem inuentorũ. Quare *permutando* erit minor 1. ad maiorem 3. datorum, vt minor 3. ad maiorem 9. inuentorum terminorum. Differentię verò 1. minoris ad 3. maiorem proportio est, vt 2. terminus primus datus ad vltimum datum 6. & ex præass. vt 6, ad 18. quare erit differentia 3. ad differentiam 9. inuentorum, vt terminus vltimus 6. datus ad vltimum inuentum 18. Quadere 6. 9. 18 erunt iu Musica proportione, vt 2. 3. 6. quòd erat tandem probandum, cùm sit 6. ad 18. vt differentia 3. termini 6. à 9. ad differentiam 9. termini 9. à termino vltimo 18.

COROLLARIVM.

Hinc est, quòd secundus, tertius, & quartus in istis harmonicis, & quartus, quintus, sextus, sint Arithmetici. Quòd vt pateat.

* Aduerte idem esse multiplicare numerũ p numerum suarũ partiũ, & deinde per numerũ illas partes numerantẽ productum multiplicare, ac in se multiplicare; quia numeri plani facti ex toto numero, & eius partibus, si simul sumantur, æquant ipsum quadratum numeri in se ducti ex propos. 2. lib. 9. Vnde, si habeamus numerum partium, & rectangulum sub vna ex ijs partibus, & toto numero comprehensum, & hunc planum per numerum, earum partium multiplicemus, habebimus omnia rectangula, quæ ipsum quadratum dati numeri exequant. Sic si 2. tertia pars numeri 6 multiplicet 6. & faciat 12. deinde hunc numerum planum multiplicemus per numerum partium, qui est 3. ponemus tres numeros planos duodenarios simul, qui æquabunt quadratum numeri 6. Sint ergo Arithmetici 2. 4. 6. à quibus Musici prodeunt 8. 12. 24 36. Quia 6. multiplicauit 2. & genuit 12. & rursus 4. & genuit 24. & tandem se, & genuit 36. ex propos. 19. præc. partis erunt 12. 24. 36. Arithmetici. Multiplicauit autem se numerus 6. vt diximus supra: nam multiplicauit priùs 2. & fecit numerum planum 12. deinde fuit multiplicatus per denominatorem 8. ad 24. ex propos. 3. quæ ex Coroll. 1. propos. 1. est idem, ac denominator proportionis 2. ad 6. & cõsequenter cum fuit multiplicatus numerus planus 12. per numerum continentiarum 2. in 6. fit quòd genitus æquet quadratum numeri 6. & virtualiter in se ipsum fuerit multiplicatus, quia per numerum partes numerantem fuit multiplicatus.

PROBL. II. PROPOS. IV.

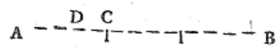
Proportionem Harmonicam secundo modo continuare.

Secundo modo continuabitur proportio Harmonica. Datis enim tribus terminis Harmonicè proportionalibus 2. 3. 6. inueniemus duobus vltimo, & penultimo alium proportionalem iuxta ea, quæ docuimus propos. 2.

PROBL. III. PROPOS. V.

Etiam alio modo proportionem Harmonicam propagare.

*Disponantur fracti ab vnitate incipientes, aut quoquo alio numero, & erunt in proportione Harmonica, ita erunt Harmonici.
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, & cæt. Sic $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, & cæt.
Patet primo. Si ad eandẽ denominationem reducantur [illegible], & [illegible], qui omnes proportionem consequuntur harmonicam secundo modo continuatam.



Vt autem probetur monendum. Si eadem quãtitas AB diuidatur in tres partes, quarum vna AC, & rursus in quatuor, quarum vna AD; certum est, quòd ablatis à tertijs partibus minores quartæ relinquent differentias æquales. vtpote, quòd æquales ab æqualibus demptæ sint; & quia sunt tres tertiæ partes, tot etiam relinquent differentias, quas, dico, tres differentias esse æquales vni quartæ parti. & ostẽdo. Nam tres tertiæ partes æquãt AB, à quibus auferuntur tres quartæ, vt DC, & relinquunt tres differentias, sed auferãtur tres quartæ partes à tota AB æquali tribus tertijs relinquet vnam quartam partem AD: Ergo 3. differentiæ æquant vnam quartam partem; quia ambo residua sunt ablationis æqualium trium quartarum ab æqualibus tota AB, & eius tribus tertijs.

Ergo tres differentiæ æquant quartam partem, & addita vna, quatuor differentiæ æquabunt partem maiorem tertiam.

* Sint ergo $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ eiusdem totius. Dico hos numeros musicos esse: Nam differentia vnius tertij ab vnico quarto erit vnius quartæ partis $\frac{1}{3}$, & rursus differentia, quæ est inter vnam quartam, & vnicam quintam partem totius, est vnica quinta pars eiusdem totius, nempe vnius quartæ ex præassumpto. Ergo differentiæ erunt $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{5}$ sui totius, sicut fracti dati extremi sunt $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{5}$ eiusdem totius; cùm ergo sint differentiæ eadem minutia, ac extremi fracti dati, erunt in eadem proportione; vnde $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ erunt Musici ex pr. 3. Cor. Tract. 3.

COROLLARIVM

Hinc est quoque, quod numerus factus ex differentia maiori Harmonica, & minori extremo, vel è contrà minori differentiã in maius extremum ductã facere numerum, qui continet tres harmonicos, tanquam suas partes; ideoque Harmonici sunt fractiones, cuius genitus est denominator, vt [illegible], & [illegible], quòd enim cõtineat duo extrema, patet quia fit ex eorũ multiplicatione; quod autem contineat medium 33. Prob.: Nam illius partes continentur in extremis, cùm ex mutua Arithmeticorum extremorum multiplicatione fit genitus, quæ produxere etiam extrema Harmonica multiplicata per medium Arithmeticum, vt ex 1. propos. huius part. constat; imò, & si tres Arithmetici simul ducantur; numerus productus erit denominator, cuius numeratores erunt Harmonici: Nam Harmonici, cum generentur ex multiplicatione Arithmeticorum non possunt continere alias partes, quam quæ in ipsis sunt, cum autem Arithmetici omnes simul ducuntur, patet, quòd genitus omnes partes, quas ipsi continent, obtineat: Vnde & continebit omnes partes Harmonicorum, sic 231. qui fit ex ductione 3. in 7. & 7. in 11. Arithmeticos continent 21. vndecies 33. septies 77. tricies.

EXPENSIO III.

De proportione Harmonica interserenda.

Non potest prætermitti intersitio proportionis harmonicæ, vtpote aliquando eius continuationi necessaria, huicque cognitioni addemus etiam diuisionem dati numeri in Musicos terminos.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Inter duos datos numeros medium Harmonicum reperire.

Istud operi mandatur Regula aurea. Nam primo eorum differentiam reperies, & deinde eos in vnam summam rediges, quæresque summa, & minore termino, & differentia, differentiam, quæ debet esse inter primum, & medium, quâ repertâ ipsi minori addatur, vt constituatur terminus medius. Sint pro exemplo dati 15. & 25. inter quos medius proportionalis harmonicè sit inueniendus; Differentia est 10. summa 40. Dico itaque si 40. dant 15. quid dabit 10. differentia? & multiplicatis 10. per 15. & diuisis per 40. prodibit differentia 3. $\frac{3}{4}$, quę addita minori termino 15. faciet 18. $\frac{3}{4}$ pro medio, ita vt sint tres harmonicè proportionales 15. 18. $\frac{3}{4}$, & 25.

* Probatur ex propos. 24. septimi elementorum. Nam si diuisi numeri proportionales fuerint, hi quoque compositi proportionales erunt, Quia ergo ita est extremum ad extremum, vt medij differentia à primo ad eiusdem differentiam ab vltimo, sequitur, vt eadem proportio sit aggregati extremorum ad vnum ex extremis, quæ est aggre-

aggregati ex differentijs ad vnā earundem. Datis autem duobus terminis habes per additionem eorum aggregatum per subductionem verò summā differentiarum, vt probabo: Ergo habes tres terminos proportionales: nam ita est aggregatum extremorum ad vnum ipsorum, vt aggregatum differentiarum ad alteram ex ipsis, quę debet inquiri per regulam proportionum.

Quòd verò differentia inter duos numeros extremos sit aggregatum differentiarum, patet: medius enim numerus non potest magis differre ab ambobus maiori, & minori, quam ipsi inuicem differant V. g. datis 3. 7. 11. non potest 7. magis differre à 3. & à 12. quā, quòd ipsi differunt, nempe à 3. num 4. & à 12. numero 5. quæ simul faciunt 9. differentiā ipsorum, vt per se patet alioquin esset distantia maior, vel minor, quàm quod esset, namque esset 9. vnitatum, at mensurata per 4. & 5. distantiam eorundem à medio, non esset talis.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Datum quemlibet numerum in proportionem Harmonicam distribuere.

Sit datus quisque numerus V. g. 54 & oporteat secundùm proportionem Harmonicam illum distribuere, diuidatur per terminos Arithmeticos V. g. 1. 2. 3. 4 eruntque partes in proportione Harmonica, quæ sunt 54. 27. 18. 13. $\frac{1}{2}$.

Probatur. Quia 54. numerus, vel quilibet alius respectu partium, in quibus diuisus est, est veluti integer, cuius vna pars est quotiens. Ergo dicent partes singulę, & quotientes eandem proportionem, quam $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, de quibus probatum est prop. 5. dicere proportionem Harmonicam.

COROLLARIVM.

Hinc est; quòd si numeri Arithmetici 1. 2. 3. 4. vel quilibet alij in vnam summam continua multiplicatione redigantur, & summa deinde per singulos diuidatur, quòd producentur Harmonici continuè proportionales ob eandem rationem, quòd summa se habeat veluti integer, & denominator, cuius numeratores sint partes diuisæ, sic 24. summa numerorum Arithmeticorum 1. 2. 3. 4. ex mutua multiplicatione resultans diuisa per eosdem numeros, dat 24. 12. 8. 6. in Harmonica proportione continuos.

EXPENSIO IV.

De comparatione Proportionum.

Tribus modis inuicem proportiones comparari possunt; vel vt eorum differentiæ dignoscantur, vel vt inuicem termini intermisceantur, vel vt omnes, aut aliquas proportiones ipsi termini obtineant: Tribus itaque expensionibus breuiter ab ista speculatione nos expediemus; cum nihil de cætero Mathematicę deseruiat.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Conueniunt in hoc omnes proportiones, quòd per eundem numerum termini multiplicati generent numeros eiusdem proportionis.

Sic 2. 4. 6. Arithmetici multiplicati per quemlibet numerum V. g. 4. generant 8. 16. 24. terminos quoq; Arithmeticos; Sic 3. 4. 6. Harmonici per 4 multiplicati generant 12. 16. 24. Harmonicos sic dicas de Geometricis.

Probatur verò propositio ex præcedentibus, & ex propos. 17. septimi Elementorum.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Differunt proportiones; quod Arithmetica progrediatur in infinitum crescendo, non decrescendo, nisi incidat in fractos, Harmonica solum decrescendo, Geometrica crescendo, & decrescendo.

Probatur ex dictis, & maxime da Harmonica ex Coroll. propos. 2.

THEOR. III. PROPOS. X.

Differũt quoq; Quod Arithmeticæ proportionis differentiæ æquales sint, & proportiones inæquales, idest dissimiles: at Geometrica proportiones habet similes, & terminorum differentias similes cum differentiæ in eadem proportione sint, & Harmonica neque differentias similes, neque proportiones possidet similes in suo continuo progressu. Patet ex dictis.

Svnt aliæ, quæ oriuntur ex eorum multiplicatione, diuisione additione, & subtractione supra explicatis praxibus, quas, si voluerit, potest quilibet conferre, & differentias etiam in istis operationibus tractandis agnoscere.

EXPENSIO V.

De maxima, & minori Harmonia.

Cvm quatuor termini, ita sunt ordinati; vt in ipsis omnes tres proportiones inueniantur, dicunt Mathematici habere Harmoniam maximam, quòd si solum duæ inueniantur, dicunt, Harmoniam minorem possidere. Oportet itaque docere modum inueniendi quatuor terminos, qui vel duas, vel omnes proportiones consequantur.

PROBL. I. PROP. XI.

Quatuor numeros habentes proportionem Arithmeticam, & Geometricam inuenire.

Cape tres terminos, quorum extrema, vel paria ambo sint, vel ambo imparia; sed Geometricâ proportione nexos, vt 16. 24. 36. interque istos extremos numerum Arithmeticum, interijce eos vniendo, vt docuimus, & deinde bifariam diuidendo, & erit numerus 30. itaque in quatuor numeris 16. 24. 30. 36. proportio Geometrica, & Arithmetica reperietur, vt ex ipsa constructione est manifestum.

PROBL. II. PROPOS. XII.

Quatuor numeros reperire, in quibus Harmonica proportio, cum Geometrica, reperiatur, vel cum Arithmetica.

Accipe tres numeros continue Geometricè proportionales, vt 16. 24. 36. & ex dictis propos. 5. vel 4 h exquire inter extrema 16. & 24. Harmonicum proportionalem numerum, eritque 19. $\frac{1}{5}$. Vnde quatuor termini 16. 19. $\frac{1}{5}$ 24. 36. duas proportiones propositas obtinebunt, vt patet ex constructione. Si verò cupias inter 16. & 36 extremos idem ages, eritque 22. $\frac{8}{13}$.

Eodem modo inter duos Harmonicos 4. & 6. extremos trium 3. 4. 6. intericietur terminus Arithmeticus 5. eruntq; quatuor termini 3. 4. 5. & 6. Harmonicè, & Arithmeticè proportionales.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Quatuor terminos reperire, in quibus omnes proportiones sint, & extrema proportionem datam Geometricam consequantur.

Ex tribus Arithmeticis paribus, vt docuimus propos. 3. huius creentur tres Harmonici proportionales, quorum extrema proportionem habeant datam, & inter extremos horum statuatur terminus Arithmeticè proportionalis, & erunt quatuor termini in Maximâ Harmonia, vt exposcis.

Sint V. g. tres numeri Arithmetici 4 6. 8. ex quibus creo tres Harmonicos 24. 32. 48. interque extrema 24. & 48. interpono Arithmeticum in se 6. multiplicando, vt fiat 36. Sunt ergo termini 24. 32. 36. 48. habentes omnes proportiones requisitas.

Probatur. Nam primo 24. & 48. sunt in proportione data 4. ad 8. vt patuit supra propos. 1. huius, & Coroll.

Secundo obtinent proportionem geometricam non continuam, & ita est 24 ad 36. vt 32. ad 48. Nam quia 6. multiplicauit 4. & fecit 24. & se & fecit 36. Ergo eadem proportio erit inter 4. & 6. quæ est inter 24. & 36. Sic quia 8. multiplicauit 4. & 6 ex prop. 17. septimi elementorum, ita erunt geniti 32. & 48. vt 4. ad 6. Ergo, cùm proportionem eandē, quam 4. ad 6. dicant 24. & 36. ac 32. & 48. eandem Geometricam rationem habebunt. Sunt etiam 24. ad 32. vt 36. ad 48. in eadem ratione. Nam 4. multiplicauit 6. & 8. Ergo geniti 24. & 32. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. & quia 6. multiplicauit se, & 8. geniti 36. & 48. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. Ergo & inter se eandem, quam 6. ad 8. consequentur.

Probatur tandem de proportione Arithmetica numerus enim 6. multiplicauit se, 4. & 8. Ergo geniti 24. 36. 48. erunt in eadem proportione, quam 4. 6. & 8. sed hæc ex Hypothesi est Arithmetica, ergo, & genitorum 24. 26. 48. ex 19. prop. part. præced. 2.

Probatur tandem de Harmonica ex ipsa constructione. Imperatum est enim ex tribus datis Arithmeticis 4. 6. 8. tres Harmonicos reperire 24. 32. 48.

TRACTATVS XV.

De Linearum, Segmentorumque proportionibus.

QVamuis quædam fundamentalia de lineis ſecandis lib. 6. Expenſ. 3. tetigerimus; ea tamen fuere pauca, & quæ ſolùm elementi neceſſitas expoſceret. Verùm linearum amplioribus terminis clauditur ſpeculatio, latiorque admodum eſt, & quæ cognitionem multarum propoſitionum, quæ deinde oſtenſæ ſun, requirat, & ideo earum ſpeculationem, neceſſe fuit, in hunc locum reicere.

EXPENSIO I.

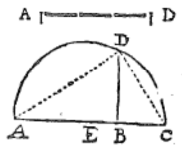
De linearum proportionali inuentione in proportione Geometrica.

QVamuis ſupra cum Euclide lib. 6. Expenſ. 3. inuenerimus lineas proportionales datis lineis. Quia tamen faciliter id, alio modo executioni demandatur; ideo ad tractatus perfectionem hic eum docebimus, & præter hoc docebimus quoque reperire alias lineas proportionales, ſeu potentia, ſeu commenſurabilitate, vel inæqualitatis, vel æqualitatis, vt plena linearum proportionalium cognitio habeatur.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis duabus lineis alteram proportionalem Geometricam, ſeu extremam, ſeu mediam reperire.

SIt inquirenda media proportionalis datis AB, & AC. Fiat ſuper AC ſemicirculus, & erigatur perpendicularis à puncto B in peripheriam, ducaturque AD punctata: nam hæc ex 2. Coroll. propoſ. 8. ſexti inter AC & AB eſt media proportionalis, diciturque diuidere proportionem AB, ad AC *per interpoſitionem* AD *in duas partes æquales.*

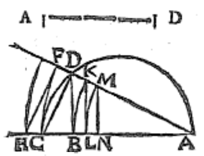


Si verò datis maiore AC, & media AD exquiratur minus extremum; facto ſuper AC ſemicirculo accommodetur media AD in ipſo, & à puncto D. cadat perpendicularis. Nam AB ex cit. Coroll. erit minus extremum. Si verò dato minore extremo AB, & mediâ AD ſeorſim expoſita exquiratur maius extremum, ex B excitetur perpendicularis BD; prolungeturque AB quantum opus eſt, & cẽtro altero extremo A interuallo AD media ducatur circulus, l. cũ fig. non exprimat, qui ſecet perpendicularem BD in D. A puncto ergo D, quo illã ſecat, excitetur perpendicularis DC, quę ſecabit minus extremum productum in C Dico ergo AC ex eodem Coroll. eſſe maius extremum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duabus rectis lineis proportiones earum progagare in infinitum.

DEntur duæ AB, & AD, & ſecundùm proportionem minoris ad maiorem creſcendo ſit propaganda proportio: Quia datur minus extremum AB, media AD ſeorſim data; ideo ex propoſ. anteced erecta perpendiculari BD centro A interuallo AD ducatur circuli portio l. in fig. non ſit, & ì pũcto D quo ſecat exeat data A D in A, & ei normalis DC, & CA erit tertia ꝓportionalis ex prec. Rurſuſque ex puncto C ducto arcu CF interuallo AC: ab F, in quo ſecat, ducatur rurſus perpendicularis F H ad AF, ſeu parallela primò ductę CD, *&* *in* H *erit quarta proportionalis, ita vt* AB *ſit* AD, *vt* AD *ad* AC, *&* AD *ſit ad* AC, *vt* AC *ad* AH.



Probatur, quia AB eſt ad AD, vt AD ad AC ob rectum angulum D ex Coroll. 2. prop. 8. lib. 6. Ergo etiam AD erit ad AF, ideſt AC, quæ ei vtpote radius, æquatur, vt AF ad AH ob rectum angulum H, ex dict. Coroll. propoſ. 8. & ſic in infinitum creſcendo.

Si verò requiratur proportio continuata in decreſcendo maioris AD ad minorem BA. A puncto B interuallo AB ducatur portio circuli BK, & à puncto K demitatur perpendicularis KL. Rurſuſq; à puncto L ducatur portio circuli LM; & à puncto M demitatur perpendicularis MN. Dico hoc modo proportionem continuari in ſe diminuendo, & AD eſſe ad AB, vt AB ad AL, & AB eſſe ad AL; vt AL ad AN; & ſic quouſque placuerit.

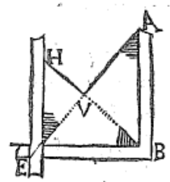
Probatur. Nam ex præced. vt eſt AD ad AB hoc eſt ad æqualem AK; ita eſt AK ad AL. Rurſuſque, vt AB hoc eſt AK ad AL ob rectum angulum L ſic AL, ideſt AM ad AN; & ſic quouſque placeat, poteris continuare. An verò hæc continuatio poſſit verè in infinitum produci infra videbimus, cum de proportionum progreſſione.

PROBL. III. PROPOS. III.

Duobus datis extremis proportionalibus inter ea duas medias continuè proportionales in data proportione conijcere.

HOc problema antiqui, non niſi organicè ſoluere potuerunt ob infinitam, linearum multitudinem, quæ inter lineas poſſunt poni; Multas autem eorum inuentiones ſingulari ingenio excogitatas Clauius affert lib. 6. propoſ. 15. Geometr. pract. & quaſdam valde amplificat Betinus Aerarij Math. propoſ. 13. tom. 2. Nos afferemus modum faciliimum Platonis.

Sit regula lignea, vel cuprea AB placitæ longitudinis, cui alia regula BE eiuſdem rationis rectangulè infixa ſit, & ſtabiliter. Huic verò rectangulè altera inſeratur EH tali modo, vt per illam mota, nunquam tamen ab angulo recto deficiat, & ecce inſtrumentum paratum erit.



Vſus verò inſtrumenti talis eſt. Sint duæ datę extremę lineę AV, & VH, quę rectãgulè vniãtur in V, & producantur per punctatas, quantum ſatis erit. Applicetur verò inſtrumentum extremo A regula AB, & ita accommodetur trasferendo regulam HE, vel viciniùs, vel longinquiùs vſq; dum alterum extremũ H alterius datæ VH extremum ipſa regula mobilis lambat, & ſimul continuatæ punctatę VE, & VB tranſeant per angulos rectos, regularum; nempe VE per angulum E, & VB per angulum B. Dico *quatuor* AV, *&* BV, *&* VE, *&* VH *eſſe quatuor continuè proportionales.*

Hocque, diciturque à Mathematicis diuidere in tres partes æquales proportionem AV ad VH.

Prob. Nam triangula AVB, & BVE, & EVH ſunt æquiangula. Anguli enim ad V recti, & anguli nigri æquales; Cùm albus, & niger ad baſim AB in triangulo AVB vni recto ſint æquales; & ideo, cum totus apud B ſit rectus, reſiduus ãgulus niger ad B erit æqualis nigro ad A, & idem dicas de alijs.

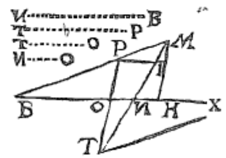
Cum ergo triangula æquiangula ſint, erit AV crus maius ad BV minus in triangulo AVB, vt BV idem; ſed maius in triangulo BVE ad crus minus VE, & hoc BV maius ad ſuum minus VE erit, vt ipſum VE maius in triangulo VEH ad minus VH. Quare BV, & VE ſunt duæ mediæ proportionales inuentę inter extremas AV, & VH.

PROBL. IE. PROPOS. IV.

Datam lineam exhibere, quæ ad aliquam compoſitam habeat proprortionem ex duabus lineis ad duas alias, cum fieri poteſt.

SIt data proportio BN ad NO, & proportio TP ad TO non eadem, ac precedens, ſed diuerſa, vt proportio compoſita ſit, non duplicata.

Ductis lineis BH, & TP, vtcumque, quæ faciant quemcumque angulum in O: menſuretur NO punctata ſuper alteram earum V. g. ſuper continuam NB à puncto O in N, & à puncto N altera punctata ei correſpondens NB; Sic in altera TP punctata TO menſuretur ſuper OT à puncto O in T, & à puncto T altera punctata TP correſpondens perque extrema P, & B ducatur MB, & per N, & T linea TN, quę conuenient in M, *&* *erit reperta* MB, *quæ ad* PM *habebit proportionem compoſitam, ex proportione* NB *ad* NO, *&* OT ad PT.



* Probatur primo, quod MB, & MT conuenient, in M. Nam ſi non conuenient, eſſent TM, & MB parallelæ; Quare triangula POB, & NOT eſſent proportionalium laterum, vtpote æquiãgula V. g. ſi TX eſſet ipſa TN parallela ipſi BP; eſſet OB ad OX, vt OP ad OT, & *componendo* OB ad OB ſimul, & OX eſſet, vt OP ſola ad OP ſimul, & OT: Quare contra preſuppoſitionem proportio eſſet ſimilis datarum linearum, quòd nolumus: nam poſuimus NB ad ON diſſimilem à proportione TO ad TP. Quare non erunt parallelæ; idcircò conuenient E. g. in M.

Probatur. Quod proportio BM, ad PM ſit compoſita ex proportione NB ad NO, & TO ad TP. Ducaturque parallela PI ad NB V. g. à puncto P.

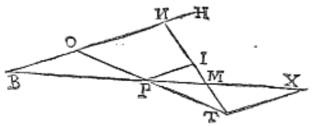
Eritque ex 4. lib. 6. MB ad MP, vt NB ad IP. Interponatur quælibet, vt aduertimus poſſe fieri Tract. 9. part. 1. Expenſ. 3. Scilicet NO, quæ interponatur inter IP, & NB. Erit igitur proportio NB ad IP compoſita ex duabus, ſc. ex proportione NB ad NO, & NO ad IP: Sed ex 4. lib. 6. vt NO ad IP ob parallelifmum linearum ON ad IP; Sic eſt in proportione TO ad TP: Ergo (poſita proportione TO ad TP loco proportionis NO ad IP) proportio MB ad MP eadem, quæ NB ad IP erit compoſita ex proportione NB ad NO, & TO ad TP, quod ſi cupias proportiones componentes ambas eſſe maioris ad minorem vtere figura prop. ſeq.

PROBL. V. PROPOS. V.

Data linea, quæ dicatur componi ex proportione vnius lineæ ad aliam exhibere duas lineas, quæ reliquam proportionem contineant.

DIcatur linea BM ad MP composita ex proportione BN ad ON; & ex alia, queraturque reliqua proportionum, quæ proportionem MB ad PM compleat.

Accomodetur in hac, seu præc. fig. NB longior, vt faciat cum MB quemcumque angulum, & ducatur indefinita MT ab M per N. Deinde ab N, mẽsuretur NO super NB, & à puncto P parallela ducatur ad NB, quæ sit IP, & à P per O transeat PT conueniens cum TM. *Dico proportionem* TP *ad* TO *esse proportionem, quæ componit cum proportione* NB *ad* NO *proportionem* BM *ad* PM.



Probatur. MB est ad MP, vt NB ad IP interponatur NO; eritque proportio NB ad IP composita ex proportione NB ad NO, & NO ad IP. Quare, & proportio BM ad MP erit composita ex proportione NB ad NO, & NO ad IP, scilicet ex TO ad TP, vel TN ad TI, & aduerte, quod si TP non conueniet cum TM versùs T conueniet versùs M; cum in proportione composita, vt dixi in præcedenti TP, & TM non possint esse parallelæ, vt est BN, & XT.

PROB. VI. PROPOS. VI.

Datâ mediâ trium in continua ratione existentium, & aggregato extremarum proportionalium primam, & vltimam exhibere.

SVper aggregato HI duarum extremarum fiat circulus ACBD, & mediâ datâ duplâ BC accommodetur in circulo; siquidem oportet aggregatum extremarum, quæ diametrum faciunt circuli esse maius ipsâ mediâ duplatâ, quia duæ extremæ sunt maiores, quàm mediæ, & tantò magis cùm mediæ sunt inuicem æquales ex propos. 13. lib. 5. Elem.

Deinde ipsi CB erigatur perpendicularis AD ab eius medietate E. *Dico factum esse id, quod desiderabatur.*

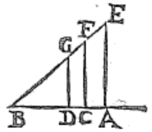
Probatur. Quia AB est ad EC, vt EC ad ED ex Coroll. propos. 16. lib. 6. Linea AD verò, vt diameter æquatur aggregato HI,

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis duobus excessibus trium magnitudinum in continuâ proportione existentium exhibere tres continuas.

SInt dati excessus AC, & CD, qui in vnicam lineam ponantur AD, quę, & extendatur ad placitum vsque ad B; Deinde à punctis A, C, D erigantur perpendiculares, quę ex 14. lib. 6. eandem proportionem seruent, quę AC ad CD, & ducatur EG per puncta E, F, G, donec cum altera AB conueniat in B. *Dico factum esse id, quod exposcitur, & esse* BD *ad* BC, *vt* BC *ad* BA.

Probatur, vt AB ad CF, sic est AB ad CB ex propos. 4. lib. 6. sed AE ad CF, effecta est sic vt AC ad CD; Ergo vt est AC ad CD, sic ex 16. l. 5. est tota AB ad CB, Sed, vt est CF ad DG, ita est CB ad DB; ex propos. 4. lib. 6. At CF respicit in proportione DG, vt AE respicit CF, vt AC respicit CD ex effect. & ideo vt proportionatur AB ipsi CB, Ergo proportionata est AB ipsi CB, vt CB ipsi DB. Quare tres AB, & CB, & DB sunt in continua analogia.



PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

* *Dato termino maiori, & differentia termini maioris à medio reperire ipsum medium terminum, atque minorem.*

SIt datum maius extremum AB in propos. præced. figurâ, & differentia AC: Detrahatur hęc differentia AC à maiore extremo AB, & residuum CB erit medius terminus; Rursus ex propos. 15. sexti, fiat, vt AB ad suam differentiam AC est in proportione, sic CB ad aliud; & inuenietur CD. *Dico itaque, quod* AB, *&* CB, *&* DB *erunt in continua proportione.*

* Probatur, vt AB est ad AC; sic CB est ad CD. Ergo componendo, vt AB est ad AC cum CB; sic CB est ad CD cum DB: Quare diuidendo, vt AB est ad CB; sic CB erit ad DB: quapropter AC, & CB, & DB, erunt in continua proportione.

EXPENSIO II.

De proportionali linearum additione.

ADditio proportionalis linearum maximas in Geometria secum fert vtilitates, & plurimis præbet speculationibus fundamentum, interque multas propositiones, quę exhibentur, hę sunt vtiliores, & admodum necessarię.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datam lineam rectam, vtcumque sectam tali segmento augere, vt tota cum adiuncta sit ad adiunctam, vt maius segmentum ad minus.

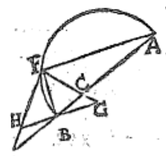
SIt linea AB secta, vt cumque in C, & iubeamur adiungere talem partem V. g BD; quæ faciat rectam AD; & hæc tota AD sit ad adiunctam, & segmẽtum BD, vt maius segmentum primitiuum AC est ad minus CB.

Ponatur CE æqualis ipsi CB: Fiatque per 15. propos. lib. 6. vt AE ad EC: Sic tota AB ad BD: reperieturque BD: *Dico itaque totam* AD *esse ad* BD *adiunctam veluti proportionatur segmentum maius* AC *segmento minori* CB.

Probatur. Quoniam enim AB respicit EC veluti AB respicit BD; erit quoque componendo AE, & EC ad EC, vt AB, & BD ad BD: sed EC est æqualis ex effectione minori segmento CB: Ergo erit etiam, vt AE, & EC, hoc est AC ad CB; sic AB cum BD, idest tota AD ad BD.

* Potest etiam fieri alio modo. Sit data AB diuisa, vt cumque in C. Facto super AB semicirculo, à puncto C erigatur, si placet perpendicularis CF, & fiat triangulum rectangulum AFB, lineęq; AB ducatur GH parallela per punctum B, & occurrat ipsi CF in G. Sit deinde BH æqualis ipsi GB, & ducatur per H linea FH, vsque ad L; & AB prolungetur, vsque ad L. *Dico* BL *esse eam additionem, quæ requiritur; &* AL *esse ad* BL, *vt* AC *ad* CB.

Probatur AF est ad BH, vel æqualem GB ob earum parallelismum in triangulo AFL, vt AB ad BL: sed vt AF ad GD; sic AC ad CB, ob triangulorum AFC, & GCB similitudinem: cum sint ad verticem, & inter parallelas ex 9. sexti: Ergo vt tota AL ad adiunctam BL, sic AC segmentum maius ad CB segmentum minus.

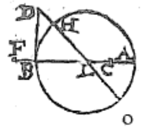


PROBL. II. PROPOS. X.

Datæ lineæ, vtcumque sectæ tale segmentum addere, vt tota cum addita sit ad totam, vt segmentum ad ipsam additam.

INter AB, & AC media proportionalis inueniatur BD; Eritque quadratum ex BD factum æquale rectangulo ex AC segmento, & tota AB effecto ex propos. 19. lib. 6. Erigatur itaque hæc media ex B perpendiculariter, & facto super AB totâ datâ circulo, per centrum eius L ducatur à vertice D linea OD: *Dico, quòd portio* HD *inter mediæ inter* DB *tangentem, & peripheriam intercepta est illa, qua addita ipsi* AB *facit* AF, *quæ est ad totam* AB, *vt segmentum* AC *est ad additam* BF.

Probatur. Quia rectangulũ ex tota, & addita pro vno latere AF, & addita BF pro alio est ęquale rectãgulo ex DO tota, & segmento HD ob æqualitatem laterum HD, & BF. Rectangulum verò ex OD, & HD est æquale quadrato BD, ex 36. lib. 3. vnde etiam erit æquale rectangulo AB, & AC, quod æquatur ex dictis quadrato ex BD: Quare ex prop. 10. lib. 6. OD, idest æqualis AF tota cum additâ erit ad AB totam, vt eius segmentum AC ad additam HD idest æqualem BF.

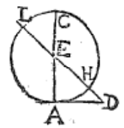


PROBL. III. PROPOS. XI.

Datis duabus lineis, alteram ipsarum, ita continuare, & tota cum additâ sit ad alteram, vt altera ad additam, idest sint continuè proportionales.

SIt data recta maior AC, & minor AD, quæ orthogonaliter ad verticem A coniungantur. Diuisâque bifariam alterâ ipsarum, puta AC minorem, dimidiæ EA interuallo describatur circulus, & ducatur ex D per centrum E linea DL. Dico totam HL, idest AC datam cum adiunctâ HD simul, idest LD esse ad datam AD, vt AD ad AC.

Probatur. Nam ex DL tota adiecta cum HD pro latere, & adiecta HD solum pro alio fiet rectangulum ęquale quadrato tangentis AD ex 36. lib. 3. Eucl. Ergo ex propos. 10. lib 6. vt DL ad AD; sic AD erit in proportione ad DH; quare AC æqualis HL aucta eodem incremento DH erit ad DA, vt DA ad DH.



PROBL. IV. PROPOS. XII.

Lineæ datæ adiungere talem partem, vt alterius segmentis data, & adiuncta sint proportionales.

SIt linea AC secta in B, & alia DB, cui oporteat addere talem partem, vt ipsa DB sit ad segmentum BC, vt AB segmentum alterum ad additam BF: Addatur linea ED lineæ AC ad punctum B, & faciat cum AC, quemcumque angulum. Per tria verò pũcta ADC reperiatur circulus transiens ex 5. lib. 4. & DB prolungetur vsque ad circumferentiam in F, & erit factum, eritque AB ad BF, vt DB ad BC.

Probatur. Et enim BF cùm DB faciunt rectãgulum æquale rectangulo ex AB, & BC, & ideo erunt, vt AB ad BF, sic BD ad BC ex 18. lib. 6.

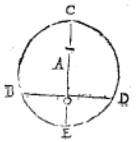
Quod autem rectangulum ex BD, & BF sit æquale rectangulo ex AB, & BC ostenditur ex 35. lib. 3.

PROBL. V. PROPOS. XIII.

Datam lineam ſectam, vtcumque, ita augere, vt ſegmentum maius cum addita ſit ad ſegmentum maius, vt ſegmentum maius ad minus.

Sit linea AE diuiſa in O, & ſegmentum maius C A; debeatque huic ſegmento addi talis pars; vt ipſum cum parte addita ſit ad ſegmentum maius AO, vt maius ad EO minus.

Erigatur perpendicularis OB, & OD æqualis ipſi AO à puncto O, & per tria puncta B, E, D tranſeat circulus, Prolungeturque CA ad peripheriam in C, & erit factum.



Eritque ex 35. lib. 3. rectangulum CO, & EO æquale quadrato OB, ideſt OA ei æquali ex effectione.

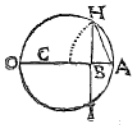
Vnde ex propoſ. 19. lib. 6. CO ſegmentum, cum addita erit ad OA, vt OA ad AC.

PROBL. VI. PROPOS. XIV.

Datam lineam, vtcumque ſectam, ita addere; vt tota cum addita ſit ad ſegmentum maius, vt ſegmentum maius ad minus.

Sit data linea AC, quam oporteat adiungere; vt tota AC cùm additâ CO, ſ. AO ſit ad BC ſegmentum maius, vt BC ad AB ſegmentum minus.

Erigatur à puncto B perpendicularis, & à centro A interuallo ſegmento maiori BC portio circuli ducatur, quæ ſecet B H in H, cui BH fiat equalis HI; perque tria puncta H, A, I tranſeat circulus, & prolungetur BC in O. Dico AO nempe totam AC cum addita CO eſſe ad CB ſegmentum maius, vt ipſa CB ad BA ſegmentum minus.



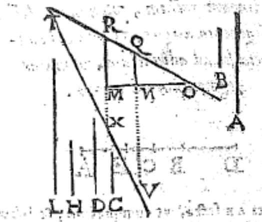
Patet, quia ex Coroll. propoſ. 8. lib. 6. ita eſt AO ad AH, ideſt BC, vt AH ad AB.

PROBL. VII. PROPOS. XV.

Datæ ſint duæ lineæ inæquales, & ratio data. Sintque addendæ talibus partibus, vt rationem datam inuicem obtineant, ſed compoſitæ aliquam aliam rationem datam conſequantur.

Sciendum eſt hoc problema non ſemper operi demandari poſſe; ſed aliquando, prout rationes exhibentur, iuxta quas addendum ſit, vel detrahendum: Ipſa verò experientia docebit, cùm operi demandari poterit, abque eo, quòd omnes caſus ponamus: Sunt enim multi, & qui prolixis verbis indigerent.

Sint ergo datæ duæ lineæ A, B, ad quas duæ aliæ addendæ ſint, quæ ſint, vt C ad D, & efficiant compoſitæ proportionem, quam H ad L.



Fiat ON ad MO, veluti proportione reſpicit C ipſam D, & ex punctis M, & N erigantur perpendiculares, & parallelæ ipſis datis æquales A, & B, quæ ſint NV, & MX; iunganturq; puncta VX. Deinde fiat ex propoſ. 15. l. 6. exp. vt H ad L, ſic XT ad VT: Poſtmodum à puncto T per punctum O ducatur recta OT; Producanturque NV in Q, & XM in R. eruntque lineæ XR ad VQ in data proportione H ad L.

Probatur ſunt enim TX ad TV. ſic RX ad QV; ob parallelismum lineatum VQ, & XR in triangulo VQT, ſed XT ad TV ita effecimus, vt H ad L: Ergo erunt R X ad V Q, vt H ad L: Sunt verò NQ ad MR, vt ON ad OM, & ON ad OM, vt B ad A ex effectione, & pariter MX ad VN, vt C ad D; ergo effecimus id, quòd propoſitum fuit. Nam partes additæ NQ, & MR obtinent rationem datam C, & D totæ verò XR ad VQ rationem datam H ad L ipſe verò lineæ, quibus facta eſt additio, ſunt æquales lineis datis A, & B.

EXPENSIO III.

De linearum diuiſione.

Rectam lineam ſecare proportionaliter præter ea, quæ traddimus lib. 6. hic docemus, cùm id multis operationibus deſeruiat, multiſque propoſitionibus, quæ deinde tradendæ ſunt hæc doctrina neceſſaria euadat,

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Rectam lineam ita ſecare, vt inter ſegmenta altera recta ſit media proportionalis, quæ data debet eſſe, aut ſubdupla, aut minus, quàm ſubdupla illius, quæ ſecanda eſt.

Sit ſecanda AC in duo ſegmenta, ita quòd inter ſegmenta tanquam media proportionalis ſit BA, non maior, quàm dimidium datæ AC. In E ad diſtantiam dimidiæ AE fiat ſemicirculus ſuper AC diametro, & AB data fiat tangens in A, & faciat in A angulum rectum. Ducaturque diametro pa-

rallela

rallela BH ab altero extremo B, quæ ſecabit, vel tanget ſemicirculum AHC; quòd AB ex hypotheſi minor ſit, quàm ſemidiameter AE, vel ei æqualis. Deinde ab H, in quo ſecat, ducatur HF perpendicularis ad AC, ſecabitque AC in F.

Dico itaque, quod inter AF & FC ſegmenta, media proportionalis eſt AB.

Probatur. Nam ex propoſ. 16. lib. 6. FH inter ſegmenta eſt media proportionalis; ſed FH eſt æqualis AB, cum ſint inter parallelas, & parallelæ. Ergo etiam AB eſt media proportionalis inter AF, & FC.

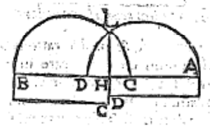
COROLLARIVM

Hinc data aliqua V. g. BA inuenies illius extrema proportionalia, nempe AF, & FC per præcedentem praxim, ſi ſimul iungas, vt vnam longitudinem efficiant, vt per ſe conſtat.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Rectam lineam duobus punctis in tres partes diuiſam, in quatuor partes iterum diuidere per punctum intermedium; vt ſegmenta facta remaneant proportionalia.

Sit linea AB diuiſa in punctis C, & D, quæ oporteat iterum diuidi in H, vt ſegmentum AH ſit ad ſegmentum CH, vt ſegmentum HB ad ſegmentum HD. Diametro AD deſcribatur circulus, & iterum diametro CB alius circulus deſcribatur,



& à puncto, quo ſe interſecant in L ducatur perpendicularis ad H, & erit factum, quòd expoſcitur. *Taliſque erit proportio* AH *ad* CH; *qualis eſt* HB *ad* HD, *vel* CA *ad* CH, *vt* BD *ad* DH.

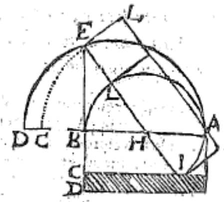
Probatur. Nam rectangulum ex AH, & HD eſt æquale quadrato HL ex 19. lib. 6. eo, quòd ex 8. lib. 6. HL ſit media proportionalis, ſic rectangulum ex CH, & HB erit æquale eidem quadrato ob eandem rationem; quare hęc rectangula erunt ęqualia inuicem; quare ex propoſ. 10. lib. 6. AH latus vnius erit ad HC latus alterius, vt HB latus huius ad HD latus rectanguli, cuius alterum latus AH. Quare etiam *diuidendo* AC erit ad CH, vt DB ad DH.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datam lineam ſemel ſectam, iterum denuò ſecare, vt partes ſint in continua proportione.

Sit linea AD diuiſa, vtcumque in B, quam oporteat iterum ſecare in C, vt partes ſint in continua analogia, & ſit AB ad BC, veluti eſt BC ad CD.

Diametro AB fiat circulus, & diametro AD alius circulus deducatur, & à puncto diuiſionis datæ B erigatur perpendicularis, quæ ſecet peripheriam maioris circuli in E; & ducatur EH, cui fiat æqualis HC. Dico factum eſſe, quòd mandatum fuit, & AB, BC, & CD *in continua proportione reperiri.*



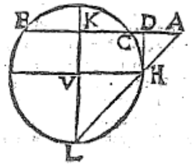
Probatur rectangulum ex IE, & EL eſt æquale quadrato ex BE ex 35. lib. 3. & ex 19. lib. 6 eidem quadrato ex BE, rectangulum ex AB, BD æquale eſt, quia AB, & CE, & BD ex 8. l. 6. ſunt in cõtinua proportione. Rectangulum verò ex AB, & BC æquatur rectangulo ex AB, BC, quòd eſt AC, & rectangulo nigro ex AB, & CD; Pariter ex IE, & EL rectangulum æquatur rectangulo ex IL, & LE, & quadrato ex LE. Rectangula verò iſta ex IL, & LE, & ex AB, & BC ſunt æqualia, cum ſint ex diametro, & LE, vel æquali BC; Quare ablatis iſtis rectangulis æqualibus rectangulum nigrum, & IL quadratum remanebũt æqualia, quamobrem ex 19. l. 6. latus nigri rectanguli, ideſt AB erit ad EL, hoc eſt ad BC; vt BC ad CD, quòd erat probandum,

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam lineam ſectam ita ſecare; vt pars intermedia ſit vltima proportionalis trium continuè proportionalium.

Sit data linea AB, quæ, vtcumque ſit diuiſa in C: Oporteatque iterum eam diuidere in D. vt DC pars intermedia ſit extrema proportionalis, & ita ſit DB ad AD, vt AD ad DC.

Diuidatur BC bifariam in K, & erigatur ex K perpendicularis KL æqualis lineæ A K. Ducaturque AL per extrema A, & L: perque tria puncta C, B, L circulus tranſeat, & à centro V ducatur parallela ad AB, quæ occurrat AL in H puncto, & ex pũcto H deducatur perpendicularis HD, & erit factum. Nam ita erit BD ad AD, vt AD ad DC.



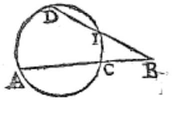
Probatur AK æquatur KL, & HV eſt parallela ad AK: Ergo, & ipſa æquatur radio VL. Quare HV eſt etiam radius. Eadem ratione cum DH ſit parallela ad KL erit æqualis lineæ AD, & HD ad angulos rectos incidet in HV radium: Vnde erit tangens: quare eius quadratum erit æquale rectangulo DB, & CD ex 36. lib. 3. & conſequenter quadratum æqualis AD erit æquale rectangulo eidem CD, & DB, vnde ex 19. lib. 6. DB erit ad AD, vt AD ad DC.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Datam lineam ita ſecare, vt tota ſit ad ſegmentum alterius, vt tota altera eſt ad ſegmentum huius.

SIt data AB, in quà ſegmentum CB. Volumus autem ita ſecare BD in I V.g. vt tota DB ſit ad CB, vt AB ad IB, ideſt reciprocè proportionentur totæ, & partes. Vniantur ad verticem B; vt faciant quemcumque angulum. Per tria verò puncta A, C, D agatur circulus ex prop. 11. l. 3. Nam dico IB *eſſe ſegmentum, quod requiritur, & eſſe* DB *ad* CB, *vt* AB *ad* IB.



Probatur ex propoſ. 36. lib 3. elem. Coroll. Nam rectangulum ex AB, & CB eſt æquale rectangulo ex DB, & IB. Vnde ex propoſ. 10. lib. 6. ita erit DB ad CB, vt AB ad IB.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Datas duas rectas ita ſecare, vt ſegmenta ſint reciproca in proportione.

SIt data AB minor pro libito ſecta in C, & maior BO ſecanda ſit ſimiliter, vt ſegmenta V.g. OL, & BL ſint proportionalia ſegmentis AC, & CB reciprocè, *nimirum* OL ſit *ad* CB, *vt* AC *ad* BL.

Inter ſegmenta data AB, & CB inueniatur media proportionalis CD: Factoque ſuper BO maiori, ſemicirculo reperiãtur duo ſegmẽta, quibus CD ſit media proportionalis ex propoſ. huius 16. & ſint BL, & LO. Eritque factum, quòd poſtulatur, & OL *erit ad* CB, *vt* AC *ad* BL.

Probatur rectangulum ex AC, & CB, ideſt CQ, eſt æquale rectangulo LH, ex OL, & BL, quòd inter ambo ſegmenta ſit CD eadem media proportionalis; & ideo ex 19. lib. 6. ſint æqualia quadrato ex CD facto. Vnde, & erunt æqualia inuicem. Quare ex 19. lib. 6. erit OL ad CB, idem latus quod AQ, vt AC ad BL, idem latus quam OH, quod erat præſtandum.

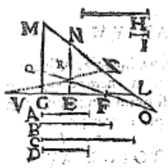
PROBL. VII. PROPOS. XXII.

Auferre à lineis duabus datis partes, quæ inuicem habeant proportionem datam; ita tamen, vt reſidua correſpondeant inuicem in proportione datâ, cùm fieri poteſt.

SInt datæ duæ lineæ A, & B, à quibus demendæ ſint duæ partes in ratione C ad D, ita tamen, vt reſidua inuicem eam proportionem dicant, quam dicit H ad I.

Fiat FG ad FE, vt C ad D, & ex punctis E, & G erigantur perpendiculares EN, æqualis A, & GM æqualis B, coniungaturque MN, & fiat ex propoſ. 15. lib. 6. OM ad ON, vt H ad I. Si MO eſt maior, quam ML linea, in quam FG terminat, producta ſi fuerit, & FG non pertingat ad L, ſed debeat produci, problema fieri poteſt, ſecùs, ſi id non eueniat. Igitur ex O per F ducatur OQ. Dico factum eſſe, quòd expoſcitur, & QG *eſſe ad* ER, *vt* C *ad* D; *reſiduas verò* QM *ad* NR *eſſe, vt* H *ad* I.

Probatur. Nam QG ablata correſpondet proportione ad ER ablatã, vt FG ad FE, quæ ex effectione eſt eadem proportio, quæ C ad D. Sic MQ eſt ad RN, vt OM ad ON, quæ ex effectione eſt eadem, quæ H ad I. Ergo reſiduum MQ ad reſiduum NR eſt, vt H ad I; quod fieri oportebat.



Aliquando tamen fieri poteſt, ſed reciprocè, vt ſi ZM inuenta, quæ eſſet, vt H ad I non pertingeret vltra H in O; ſed eſſet minor, quàm ML, & eſſet MZ, tunc enim deberet fieri EV ad VG, vt C ad D, & ex Z ad V ducenda eſſet ZV punctata; quæ ſecaret in reciproca ſegmenta. Nam reſiduum à punctata vſque ad M eſſet ad MR, vt H ad I; at verò ablata ER ad G vſque ad punctatam, vt C ad D: ita vt fundamentum, & terminus eſſent in eadem quantitate V. g. EN.

PROBL. VIII. PROPOS. XXIII.

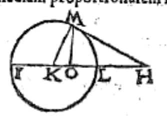
Lineam diuiſam extrema, & media ratione proportionali diuidere.

DIuidere extremâ, & mediâ ratione proportionali lineam eſt eam ſecare in tria ſegmenta facta, vt tota ad ſegmentum primum ſit, vt ſegmentum, aliud ſecundum ad tertium.

Sit ergo linea data IH ſecta in L, quæ ita ſecãda ſit in tria ſegmenta in aliquo puncto V. g. O, vt tota IH ſit ad ſegmentum datum LH, vt alterum ſegmentum IO eſt ad OL.

Super ſegmentum IL fiat circulus, & à puncto H ducatur tangens HM, connectaturque punctum contactus MK, & ob eodem puncto contactus M demitatur perpendicularis MO. Et dico eſſe factum, id, quod poſtulatur. *Nam tota* IH *erit ad* LH, *vt ſegmentum factum* IO *eſt ad* OL.

Præaſſumpt. Obſeruandum eſt lineam OM eſſe mediam proportionalem inter baſis ſegmenta OH, & OK in triangulo rectangulo KMH ex 8. Eu. Et eandem OM eſſe mediam proportionalẽ inter duo diametri ſegmenta IO, & OL ex prop. 16. lib. 6. Quare ſi fieret ex OM quadratũ ei eſſet æquale rectangulum ex HO, & KO ex propoſ. 19. lib. 6. necnon, & rectangulum ex diametri ſegmentis IO, & OL ob eandem rationem. Quare hæc rectangula inuicem eſſent æqualia. Vnde ex prop. 10. lib. 6. habebunt latera reciprocè proportionalia: Ideoq; ea proportione reſpondebit HO ad OI, vt OL ad OK. Quo poſito.



Probatur Propoſ. & progreſſ. 1. Cum HO, ſit ad OI, vt OL ad OK. Vtendo itaque *compoſitione rationum*, ita erit HO cum OI, ideſt tota HI, ad OI, vt OL cum OK, ideſt LK ad OK.

Progreſſ.

Progreſſ. 2. Rurſus; ſi HO eſt ad OI, vt OL eſt in proportione ad OK ex præaſſumpto vtemur *permutatione*, & erit antecedens HO ad OL antecedentem vt OI ad OK terminos. Vtemur deinde *diuiſione rationũ*; & erit LH pars ad LO compartẽ, vt KI pars & radius, vel LK item radius ad KO compartem.

Progreſſ. 3. Cum ergo iſtæ proportiones æquales ſint, & ſimiles *ex æquali arguendo* erit HI ad OI, quam primo progr. oſtendimus, velut IK, vel LK ad OK: nimirum tota HI ad partem interceptam IO; vt pars extrinſecùs aſſumpta HL ad alteram partem interceptam OL.

Progreſſ. 4. Cùm ergo IH correſpondeat proportione ad IO, vt LH ad OL poterimus denuo vti *permutatione*, & erit IH ad HL antecedentes, vt IO ad OL ſequentes, nempe tota IH ad ſegmentum datum HL, vt ſegmentũ factum IO eſt ad OL, quod erat demonſtrandum.

EXPENSIO IV.

De proportione linearum Arithmetica.

LIcet proportio Arithmetica ſit faciliima, non licet tamen eam omnino præterire ad tractatus integritatem, ideo breuiter.

PROBL. I. PROPOS. XXIV.

Tres proportionales datis duabus lineis in Arithmeticâ proportione inuenire.

HOc faciliter fit: Datis enim duabus A, & B inquiratur maius extremũ. Fiat CL æqualis ipſi A, & addatur differentia VI ſemel, & fit LQ, & erit CQ maius extremum.

Si verò exquiratur minus extremum fiat CL æqualis ipſi AV mediæ, & ei ſemel differentia LQ detrahatur, & fiet B minus extremum. Si verò inquiratur media datis B, & CQ fiat AI æqualis ipſi B, & differantia OQ, quæ eſt inter minus, & maius extremum bifariam diuidatur, addaturq; ipſi AI, & ſit AV media proportionalis. Patet inuentas eſſe extrema proportionalia arithmeticè, quia ſingulæ lineę altera ſuper alteram excreſcunt augmento æquali; quòd eſt de ratione proportionis arithmeticæ: ſic VA excedit B linea VI, & CQ excedit AV linea IQ, & IQ, & VI ſunt differentiæ æquales.

EXPENSIO V.

De linearum proportione Muſica.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

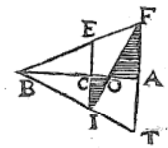
Datis duabus lineis alteram proportionalem Harmonicam, ſiue mediam, ſiue extremas inuenire.

SIt primo datum maius extremum AB, & minus CB, cui oporteat mediam proportionalem Harmonicam reperire.

A puncto C excitetur perpendicularis CE, ſicut & à puncto A perpendicularis AF; Sitque CE, cuiuſcumque magnitudinis. Prolungetur vſq; ad I, quantum eſt CE, & à B per E ducatur linea recta vſque ad AF, & vbi ſecat in F ad I recta ducatur, quæ ſecabit AB in O; quam eſſe ſectam Harmonicè affirmo, & CB *eſſe medium proportionalem inter* CB, & BA Harmonicè, ideſt eſſe CB ad CA Geometrica in proportione, vt eſt differentia OC inter primam, & mediam ad differentiam OA inter mediam, & extremam.

Probatur. Nam ob parallelismum linearum AF, & CE in triangulo AFB, ita erit AB ad CB, vt AF ad CE.

Progreſſ. 2. Deinde conſiderandum quoque eſt, quod triangula nigra ſunt ſimilia, quòd ſint rectangula, & habeant angulos ad O ad verticem æquales, vnde, & reliquos: quare erit AO ad AF, vt OC ad CI, vel æqualis CE & *permutando* ita erit AO ad OC, vt AF ad CI, vel CE: Sed AF ad CE erat in primo progreſſ. vt AB ad CB; Ergo etiam differentia AO ad differentiam OC eſt, vt maius extremũ AB ad minus CB, quare OB erit media proportionalis, cuius differentia à maiori extremo AO, ita refertur ad differentiam ſuam à minori extremo CB, vt maius extremum ipſum refertur ad minus.



Si verò libeat minus extremum data media OB, & maiori AB reperire excitabis perpendicularem AF à puncto A, cuius longitudinis placeat V.g. AF, æqualemque deduces AT perpendicularem ab A, iungeſque TB, & ab F per O duces FI, & à puncto, quo ſecat in I rectam BA deduces perpendicularem IC, & vbi cadit in C erit extrema minor proportionalis harmonica CB.

Patet. Quia eſt eadem conſtructio, ac antecedens ſolo ordine variata.

Si verò, quis cupiat dato minori extremo CB, & media BO maius extremum. Is excitabit perpendicularem IC, cuius longitudinis libeat, & producet æqualem CE, perque punctum E à puncto B ducet rectam, & rurſus ab I per O aliam rectam, quæ ſe interſecabunt ſicubi V.g. in F. Ab F ergo puncto ad OB prolungatum duces perpendicularẽ, quæ cadet in A. Linea itaque AB erit maius extremum. Quod autem conueniant, patet: Maior eſt enim angulus externus E, quã angulus niger I internus acutus I, quod crus CO crure BC neceſſariò ſit minus in triãgulo OCI, ideoq; IF, & BF non poſſunt eſſe parallelæ, quod incidens EI non faciat angulos internum externo æquales.

Probatur verò prop. ex eo, quòd ſit alio ordin eadem operatio, quæ priùs in prima parte propoſitionis, vt patet.

TRAG-

TRACTATVS XVI.

DE PROGRESSIONE PROPORTIONALI.

PARS PRIMA.

De Linearum Progressione Geometrica.

Vidimus progressionem numeris procedentem, & eius singulares affectiones speculati sumus; modo linearum progressionem proportionalem oportet animaduertere in multis à prima diuersam, & præcipuè in eo, quòd in progressione numerali Geometrica vltimus numerus assignari nequit, ad quem progressio perueniat; hìc autem assignari potest vltimus lineę terminus, ad quem licet infinita progressio tendat, illumque consequatur, ita vt inter assignata extrema omnis multitudo innumera proportionalium concludatur, quamuis ad illud extremum successiuè procedendo nunquam sit peruentura, in duas verò partes hunc Tract. secabimus, agendo priùs de Geometrica proportione, deinde de Musica, Arithmeticam prætermittentes, vtpote à numerica non discrepantem.

EXPENSIO I.

De principijs.

Antequam de progressionibus pertractemus ipsa principia, definitionesque videre oportet.

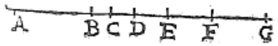
DEFINITIO I.

Series Progressionis est quantitas finita diuisa secundum proportionem Geometricam datam.

Sit quantitas aliqua finita data AG, quæ diuidatur secundùm proportionem AB ad AC; ita quod AB sit ad AC, vt AC ad AD, & rursùs AC ad AD, vt AD ad AE, & cæt. hæc est series Progressionis Geometricæ.

DEFINITIO II.

Geometrica progressio est quotcumque terminorum secundum eandem rationem continuatio.



Geometrica itaque progressio est illa continuatio diuisionis secundum eandem datam rationem eiusdem quantitatis, ita vt nullum includat finem secundum se. Iam verò vt de progressione numerica dictum est, alia est discreta, alia continua. Discreta est, quæ non progreditur per easdem rationes: continua verò per eandem datam rationem, aut perpetuò augetur, aut perpetuò diminuitur.

DEFINITIO III.

Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur, Sed ei perpetuò accedet.

Itaque progressionis GF ad GE, & GE ad GD, & cæt. est A: quia licet diuisiones perpetuò contingant viciniores puncto A illud tamen punctum consequi non valebunt vt infra ostendetur.

EXPENSIO II.

De progressionum terminis inuicem comparatis, & differentijs.

Priùs considerabimus progressionem in se cõparando terminos terminis; deinde comparabimus progressiones inuicem; tandem accessum terminorum ad finem animaduertemus. Tripliciter autem comparari possunt inuicem termini, vel quoad ipsam proportionem, quam cum alio dicunt, & hoc sufficienter aduertimus in proportionibus; tum numericis, tum quantitatis continuæ; at verò differentiæ terminorum, & eorum aggregata restant hic consideranda.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. I.

Continuè proportionalium differentiæ se eadem proportione respiciunt, quà termini ipsi.

Sint in continua proportione AG, & AF, & AE, & AD, & cæt. *ostendendum differentias quoque in continua correspondentia, & eadem, quà propositi termini reperiri. & GF esse ad FE, vt FE ad ED, &c.*

Probatur Progress. 1. Tota AG est ad AF, vt AF ad AE. Ergo *diuidendo* GF erit ad FA, vt FE ad EA; & *permutando* GF ad FE erit, vt FA ad EA: quæ est eadem, ac proportio AG ad AF in fig. defin. 1.

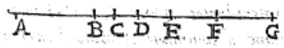
Progress. 2. Repete idem argumentum de sequentibus terminis EA est ad EA, vt EA ad AD. Ergo *diuidendo* FE erit EA, vt ED ad DA. Igitur *permutando* erit FE ad ED, vt EA ad DA; quæ est eadem, quam obtinet GA ad FA.

Itaque ex primo progress. GF differentia est ad FE differentiam, vt GA ad FA: Rursusque ex secũdo progress. FE est ad ED, quæ sunt differentiæ, vt GA ad FA. Ergo eadem proportione fruuntur differentiæ GF, & FE, & ED, quà reperitur inter GF, & FA: Quare sunt continuè proportionales: ideq; dicas de differentijs aliorum terminorum continuò proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si differentiæ sint continuæ proportionales; etiam alij termini eadem proportione continua gaudebunt, dummodo duo primi gaudeant.

Sint differentiæ continuè proportionales GF, & FE, & ED in eadem figura, addaturque ipsis EA, ita quod terminus AG sit ad AF, vt differentia GF ad differentiam FE. *Dico omnes terminos AG, & AF, & AE, & AD esse continuè proportionales.*



Probatur ex primo Progress. Differentia GF est ad FE; vt AG terminus ad AF terminũ: Ergo *permutatim* differentia GF ad terminum AG refertur, vt differentiã FE ad terminum AF. Ergo *diuidendo* GF refertur ad FA, vt refertur FE ad EA. Quare *permutando* rursus GF respicit FE veluti FA respicit EA, quæ est eadem proportio, quæ est GA ad FA, & ex datis FE ad FD. Quare GA, FA, & EA erunt in eadem proportione.

Progress. 2. Sic quoque eodem discursu differentia FE refertur ad differentiam ED, vt FA ex primo progress. respicit EA ideo *permutando* FE in proportione se geret ad FA sicuti ED est ad EA: Quare *diuidendo* FE erit ad EA proportionata, sicut ED ad DA: Quare rursùs *permutando* FE erit ad ED, vt EA ad DA.

Quamobrem cum ex datis termini GA sit ad FA, GF ad FE differentiæ, quæ ex datis est eadem proportio, ac FE ad ED; & rursus FA sit ad AE ex primo progress. vt eadem FE ad eandem ED, & ex secundo progress. EA sit ad DA pariter, vt eadem FE ad eandem ED, patet, quod quatuor termini GA, & FA, & EA, & DA erunt in eadem proportione, & sic dicas de alijs.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si plures fuerint quantitates in continuà proportione, & aggregentur binæ, & binæ, erunt aggregata in continuà proportione.

Sint V. g. in præced. fig. quatuor quantitates continuè proportionales GF, & FE, & ED, & DC; & simul sumantur GF, & FE. Deinde FE, & ED, tandem ED, & DC. *Dico hæc aggregata esse quoque continuè proportionalia.*

Probatur Progress. 1. GF est ad FE ex datis, vt FE ad ED. Ergo *componendo* GF, cum FE ad ipsam FE, erit vt FE cum ED ad ED: Igitur *permutando* GF cum FE erit ad FE cum ED, vt FE ad ED.

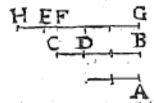
Progress. 2. FE est ad ED veluti ED ad DC. Ergo simili discursu *componendo* FE, cum ED ad ipsam ED erit in proportione, vt est ED cum DC ad DC, & *permutando* FE simul cum ED erit ad ED cum CD, vt ED ad DC. Sed hæc proportio ED ad DC eadem est ex datis, quę est FE ad ED: Ergo sunt in eadem proportione aggregata GF cum FE, ad FE cum ED. & hoc FE cum ED ad ED cum DC, cum habeant eam proportionem, quæ est FE ad ED; quod erat præstandum.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si sint tres magnitudines, & minor terminus, differentiaque à mediocri, & huius differentiæ, differentia à maiori differentia sint continuè proportionales, ipsi quoque termini erunt continuè proportionales.

Sint tres quantitates A, & BC, & CH, minorq; differentia CD, & hæc conferatur cum differentia maiori HF, & differat quantitate EF; sintq; continuè proportionales EF, & CD, & A. *Dico ipsas quantitates HG, & CB, & A futuras esse continuè proportionales.*

Probatur. Ponitur differentia CD respicere minorem terminum A, vt EF differentia differentiæ respicit ipsam differentiam CD. Ergo *componendo* CD cum A, idest CB erit ad A, veluti EF cum CD idest HF, est ad CD: Quãobrem etiam *permutando* CB erit ad HF fundamẽta veluti A respicit CD termini. Quapropter rursùs *componendo* medius terminus CB, cum HF maiori differentia hoc est terminus maximus HG, erit ad CB, vt proportionem dicit terminus A cum differentia CD, hoc est CB terminus medius ad ipsum A terminum primum, quod erat probandum.



COROLLARIVM I.

COlligitur propos. conuersa. Nam si quantitates A & BC, & GH fuerint continuè proportionales etiam differentia differentiæ maioris à minori, minor differentia, & primus terminus minor erunt continuè proportionales.

COROLLARIVM II.

QVod si differentia differentiæ EF differentia CD, & terminus primus minimus DA simul addantur, quod erunt continuè proportionales, patet ex prima huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Differentia differentiæ maioris, à minore ipsa differentia maior, & terminus maximus in quantitatibus continuè proportionalibus sunt continuè proportionales.

SInt quantitates, vt in præced. figura continuè proportionales A, BC, & GH, & differentia EF differentiæ maioris HF à minori CM, & terminus maximus HG. *Dico esse continuè proportionales* EF, *&* HF, *&* HG.

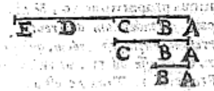
Probatur ex primâ huius, vt differentia HF ad differentiam CD, talis quoque est proportio termini HG ad terminum CB: quare *diuidendo*, vt HF residuum est ad CB ablatum, idest FG æqualem. Sic EF residuum ad differentiam CD, vel æqualem HE; Ergo *componendo*, vt HF cum FG, quæ est maior terminus ad HF maiorem differentiam. Sic erit EF cum HE, quæ est HE maior differentia ad EF differentiam differentiæ.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si sint tres quantitates continuè proportionales, & maiori termino bis medius, semel vltimus aggregetur; Mediocri verò semel vltimus, erunt hæc aggregata, cum vltimo termino in continua proportione.

SInt tres quantitates continuè proportionales AB, & BC, & CD. Dico, quod si sumantur omnes simul, & addatur ED æqualis medio termino; deinde sumatur medius terminus semel cum minimo, & fit CA, & tandem minimus, *quod omnes adhuc erunt continuè proportionales, & ita erit* BA *ad* CA, *vt* CA *ad* AE.

Probatur. Quoniam ponuntur continuè proportionales DC, & CB, & BA. Si arguatur à *compositione* rationum erit DC cum CB, ad CB in eadem proportione, ac CB cum BA ad BA. Ergo *permutando* erit DC cum CB linea proportionata ad CB cum BA, veluti est CB ad BA: Rursusque *componendo* erit DC cum CB, & CB cum BA simul, hoc est EA ad CB cum BA hoc est CA, vt CB cum BA, hoc est CA ad BA.



Itaque omnes termini BA, CB, & DC, & insuper iterum medius CB, vel equalis ED ad medium CB cum primo BA habent eandem proportionem, quã ipse medius CB cum primo BA habet ad ipsum primum BA, quod erat ostendendum.

EXPENSIO III.

De serie linearum proportionalium inuicem comparatarum.

VIsis proprietatibus differentiarum, simulque aggregatorum proportionalium terminorum, restat contemplari series linearum ad inuicem comparatas, & maximè earum, quæ ab eodem principio enascuntur: hæc enim cognitio in primis deseruit ad inueniendas areas Parabolarum, & Ellipsium, corporibusque solidis, vt plurimùm dimetiendis.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si sint duæ series linearum proportionalium, & perueniant ad eundem terminum, etiam si sequantur, termini sequentes vnius seriei ad terminos alterius erunt, vt antecedentes, dummodò in eadem remotione à communi termino summantur.

SInt ABC series vna decrescens, FGC crescens, & terminus communis C, & sequantur in suâ progressione, & fiant termini in prima serie A, B, C, D, E; at in secunda F, G, C, H, I, *Dico, quod sicut est* B *ad* G, *ita sit* D *ad* H, & sicut est A ad F, sic respondeat in proportione E ad I.

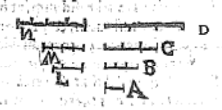
Probatur. Quia BCD ponuntur continuè proportionales erit rectangulum ex B, & D ex propos. 19. lib. 6. elem æquale quadrato ex C facto: sic ponuntur proportionales GCH erit æquale rectangulum ex G, & H quadrato C: Quare erunt æqualia rectangulũ ex H, & D, & rectãgulũ G, & H: habebunt itaque reciprocè latera ex 10. lib. 6. proportionalia, & ita erit B ad G, vt H ad D.

Similiter A, B, C, D, E sunt continuè proportionales: Ergo erunt ex *æquo* ACE continuè proportionales: Vnde vt priùs rectangulum ex AE erit æquale quadrato C. Pariterque FCI ex *æquo* erunt continuè proportionales; quapropter rectangulum ex F, & I erit æquale quadrato ex C. Vnde rectangula ipsa inuicem erunt æqualia, vtpote equalia vni tertio, & hinc etiam latera ex 10 lib. 6. elem. erunt reciprocè proportionalia, & A erit ad F, vt I ad E.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

Si sint duo ordines continuè proportionalium incipientes ab eodem termino. Tertij termini primo incluso erunt in duplicata ratione secundorum ad inuicem, & quarti in triplicata, & quinti in quadruplicata, & sic in infinitum.

QVoniam ABC, & ALM sunt continuè proportionales erunt quadrata ex A, & C æqualia quadrato B, & ex A, & M æquale quadrato ex L: sed quadrata ipsa sunt ex 21. lib. 6. Eucl. in duplicata ratione suorum laterum: Ergo etiam rectangula illis quadratis æqualia: Sed rectangula, vtpote eiusdem altitudinis A sunt inuicem, vt bases C, & M, ergo C, & M erunt in duplicata ratione linearum B ad L.

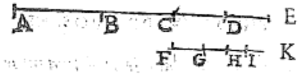


Lineæ verò quartæ erunt in triplicata: Nam quadrata ex C, & M sunt in duplicata ratione suorum laterum, quibus æquãtur quadrato quidem C rectangulum ex B, & D, & quadrato ex M rectangulum ex L, N: quare inuicem ea rectangula erunt vt quadrata: sed quadrata ex C, & M obtinent proportionem duplicatam laterum C ad M, quæ latera dicunt proportionem duplicatam respectu B ad L, ergo quadrata predicta ex C, & N habebunt proportionem quadruplicatam eius, quæ est B ad L. Quamobrem rectangula quoque ex B, & D, & ex L, & N æqualia quadratis consequentur rationem quadruplicatam linearum B ad L; sed proportio rectangulorum est composita ex proportione laterum B ad L, & D ad N. Tolle itaque proportionem B ad L, cui erat quadruplicata, & remanebit proportio linearum D, N triplicata eius, quæ est B ad L; & sic concludes de alijs.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series composita, ex paribus numero terminis ad aliam ex tot terminis conflatam, & in eadem proportione continuatam habet eandem multiplicatam proportionem, quæ ex terminis conflatur.

SInt duæ series quantitatum in eadem proportione, sed pari numero terminorum constantes AE, & FK V. g. quatuor, ita vt sit AB ad BC, & hic ad CD, & hic ad DE, & hic ad FG in eadem proportione. *Dico, quòd tota series, seu quantitas* AE *ad quantitatem* FK *habet proportionem quadruplicatam vnius termini ad alium puta* AB *ad* BC.

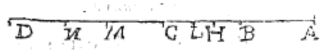


Probatur quilibet terminus obtinet proportionem quadruplicatam ad quemlibet terminum alterius seriei, & AB huius ad FG alterius quadruplicatam proportionem habet eius ex def. 7. Tract. 9. quæ est AB ad BC, quia per quatuor terminos AB, & BC, & CD, & DE vsque ad FG continuatur. Idem dicas de termino BC respectu termini alterius seriei GH & sic de alijs: Quare omnes antecedentes termini in AE, qui constituunt AE ad omnes consequentes in FK, nempe KF habebunt proportionem quadruplicatam quoque cum vnus antecedentium AB ad alterum consequentium FG talem consequatur proportionem, vt patet ex propos. 17. lib 5. elem.

PROBL. I. PROP. X.

Duas series similium proportionalium datis tribus terminis continuè proportionalibus exhibere.

SInt disponendæ duæ series continuè proportionalium, & dentur tres termini AB, & AC, & CD: Inueniatur inter AB, & AC, media proportionalis AH, & inter AC, & AH media proportionalis AL, & sic semper fiat, & erit inuenta vna series. Rursus inter AC, & CD media proiciatur AM, & inter AM, & AD media proiciatur AN, & sic semper fiat. Dico, *quod hæ duæ series inuentæ erut similes, & quilibet terminus erit ad alium terminum similis; ac quilibet terminus eiusdem seriei erit ad alium sibi correspondentem.*



Probatur. Quoniam inter continuas proportionales AB, & AC, & AD medias proiecimus HA, AM erunt omnes in continuâ proportione: Quare ex prima h. etiam differentiæ erunt in cõtinua eadem proportione MC, & MD: HB, & CH.

Progress. 2. Et quia inter AH, & AC est media proportionalis AL, erunt AH, & AL, & AC continuè proportionales, sicut, & AM, & AN, & AD, quod NA sit media, tales erunt, & ideo ex 1. huius etiam differentiæ erunt in eadem proportione, & HL erit ad LC, vt AL ad AC; Et pariter MN erit ND, vt AN ad DA, quæ est eadem, quæ AL ad AC, ex Thesi eo quod sint mediæ proportionales AL, & AM inter similes proportiones AH, & AC atque inter AM, & AD: Vnde, & differentiarum proportiones erunt similes, eritque HL ad LC, vt MN ad ND.

Progress. 3. Et quia ex primo progr. est MB ad HC; vt CM ad MD. Erit quoque *componendo* BH cum HC, idest BC ad ipsam HC, vt CM cum MD idest CD ad ipsam DM.

Progreſſ. 4. Sic quia eſt ex 2. progr. HL ad LC, vt MN ad ND, erit componendo HL cum LC, ideſt HC ad LC, vt MN cum DN ideſt MD ad ND: Vnde erit BC ad CH veluti CD ad DM ex 3. progr. & ex 4. progr. CH ad CL, vt MD ad DN, & ſic conſequenter, ſi alij termini adſint.

THEOR. IV. PROPOS. XI.

* *Si ab aliqua data ſerie deſumantur alternè termini, & fiat ſeries, hæc ſeries ad primum terminum duplicatam habet rationem eius, quam habebat data ſeries ad ſuum primum terminum.*

SIt A Z data ſeries, à qua deſumantur alternè termini intermedio ſemper relicto vt AB, CD, & EF, & cæt. & fiat ſeries AX. Dico ſeriem AX eſſe ad primum terminum AB in duplicata ratione AZ ad AB.

Prob. AB eſt ad BC, vt BC ad CD, ergo ex æquo AB erit ad CD in duplicata ratione eius, quæ eſt AB ad BC, ſed, vt AB ad CD, ex 9. prop. h. ita eſt AX ad CX, cũ ille ſeries AX, & CX ob duplicãdam eandem rationẽ ſint quoq; cõtinuè proportionales, ergo AX ad CX duplicatã habet rationẽ AB ad BC, ſed vt AB ad BC, ita ex propoſ. 9. huius eſt A Z ſeries ad BZ ſeriem: ergo AX ſeries ad CX ſeriem duplicatam habet rationem ſeriei ZA ad ſeriem ZB, ergo p *conuerſionem* rationis erit quoque AX totum ad compartem AB, & primum terminum in duplicata ratione eius, quæ eſt totius AZ ad compartem AB, & primum terminum.

EXPENSIO IV.

De progreſſionis termino.

MOdo conſideramus progreſſiones linearum in partibus ſuis, ſed quatenus finitæ ſunt, & eſt vtiliſſima conſideratio maximè ad quadrandas ſuperficies Ellipticas, & Parabolicas, & huiuſmodi.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Si in aliqua finita quantitate fuerit pars aſſignata in proportione ad reſiduum, vt pars reſidui in proportione eadem ad remanens aliud reſiduum; hæ partes in quantitate finita in infinitum multiplicari poſſunt.

SIt data magnitudo AG, & ſit in ea pars IG ad reſiduum ſuum IA, vt pars huius reſidui E I eſt ad ſuum reſiduum EA. Dico, *quod in infinitum in quantitate* GA *iſtæ partes poterunt multiplicari;* fiat GI ad IE ſic IE ad K.

Prob. Pr. 1. Quoniam itaque eſt IG ad reſiduum EA, vt IE pars reſidui ad id, quod hinc reſtat EA; Erit quoq; *permutando* pars GI ad IE partem, nempe IE ad K ex conſtructione, veluti reſiduum IA ad aliud reſiduum EA. Quare rurſus *permutando* erit IE ad AI, vt K ad AE; Verũ IE eſt minor, quàm IA. Ergo ex propoſ. 12. lib. 5. elem. etiam K erit minor quam EA. Vnde ex EA poterit ſumi æqualis ED: Eruntque GI, & IE, & ED tres continuè proportionales: Sicut ex effectione erant IG, & IE, & K, & pariter erit IE ad IA, vt ED æqualis ipſi K ad EA, vt oſtenſum eſt.

Progr. 2. Quoniã itaq; eſt IE ad IA, vt ED ad EA erit quoq; *diuidendo* IE ad EA, veluti ED ad DA. Quare ſi inueniatur duabus IE, & ED tertia proportionalis L idem argumentum, quod ſupra iterabis. Nam, quia eſt pars IE ad reſiduum EA, vt pars ED ipſius reſidui ad reſiduum aliud DA, erit *permutando* IE pars ad ED partem, ideſt ex effectione ED ad L, vt reſiduum EA ad aliud DA, & rurſus permutando ED ad AE proportione reſpondebit, vt L ad DA. Verum ED eſt minor, quàm EA, vt dictum eſt. Ergo etiam L minor erit, quàm DA: Vnde ex DA poterit abſcindi DC æqualis ipſi L, & ſic in infinitum continuari.

COROLLARIVM.

QVod ſi fuerit pars ad reſiduum, vt huius pars ad ſecundum reſiduum, & proportio partis ad partem continuetur; continuabitur etiam proportio partium quarumcumque inuentarum ad ſua reſidua V. g. quòd ſi ED ſit tertia proportionalis tribus GI, IE, & ED, erit etiam IE ad EA in eadem proportione, vt ED ad DA: quia oſtenſum eſt in 2. progr. quando argumentati ſumus ex *diuiſione rationis* IE eſſe ad EA, vt ED ad DA.

Et idem dicas de parte DC: Nam; quia vt in fine 2. prog. oſtenſum eſt ED eſt ad EA, vt L, vel DC ad DA, ergo *diuidendo* ED erit ad DA, vt DC ad CA, & ſic continuè.

COROLLARIVM II.

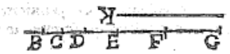
* HInc eſt; quod ſi linea, vel magnitudo aliqua proportionali aliquo decreſcente creſcat augmento, quod illæ partes decreſcentes in infinitum poterunt in ea multiplicari. Nam in linea AG. Quia GI eſt ad IA, vt IE ad EA, erit etiam permutando GI ad IE, vt IA ad EA. Ponitur quoq; IE ad EA, vt ED ad DA ex effectione, ergo permutando erit IE ad ED, vt EA ad DA. Quia ergo eſt GI ad IE, vt IA ad EA. Et IE ad ED, vt EA ad DA. Ergo erunt GI, & IE, & ED partes continuæ proportionales, vt reſidui IA, EA; & DA; & ideo ex præc. in infinitum procedent.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si proportio maioris inæqualitatis continuetur magnitudo vltra omnem datam magnitudinem augetur.

SIt data proportio CB ad BD, & aſſignata quantitas K. Dico, quòd ſi hæc proportio continuetur; quantitatem illam maiorem quantitate K quantumlibet magnâ euaſuram.

Probatur. Differentia DC replicata multoties, certum eſt, quod tandem ſuperabit quantitatem K. Sed Additiones, quæ ipſi DB accreſcunt, ex proſecutione, & continuatione CB ad D B proportionis, ſunt maiores ſingulæ; quàm DC. Ergo continuatæ toties, quoties replicata eſt quantitas DC ſuperabunt ipſam K.



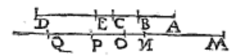
Quod autem differentiæ, ſeu additiones DC, & E D, & EF, & cæt. ſint maiores; quam DC; patet ex prima huius. Nam ſunt in eadem proportione, ac termini. Quadere, vt eſt DB ad BE termini; ſic differentiæ DC ad DE; ſed maior eſt BE, quàm DB, Ergo ex propoſ. 12. lib. 5. elem. etiam ED, quam DC maior erit.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si à quantitate aliqua partes auferantur, vt ſit prima pars ad ſuum reſiduum, vt pars ipſius reſidui ad reſiduum ſuum; ſiet tandem reſiduum datâ quacumque quantitate minus.

SIt quantitas AD V. g. linea, ex quà auferatur quantitas, & pars AB, & à reſiduo BD pars BC: ita quòd ſit AB ad BD, vt BC ad CD. Dico, *quod ſi hoc continuè fiat, relinqui tandem partem, qua libeat aſſignata* MN *minorem.*

Sit quantitas MN data, & reperiatur alia NO, cui ſit MN, vt reſiduum BD eſt ad totam AD, & continuetur hæc proportio, donec euadat maior in Q, quam AD; hoc enim eueniet aliquando ex præced. Deinde in ratione prædicta partis ad reſiduum diuidatur toties AD, quoties MQ diuiſa eſt; hoc enim poterit fieri in infinitum ex 12. huius.



Progreſſ. 1. Quoniam MN, & MO, & MP, & MQ ſunt continuè proportionales, erit MN ad MO, vt MP ad MQ; ſed ex effectione MN eſt ad MO, vt reſiduum BD eſt ad AD. Igitur MP erit ad MQ, vt DB ad AD. Et ideo *inuertendo* QM erit ad MP; vt AD ad DB.

Progr. 2. Rurſus *permutando* MQ erit ad AD, vt MP ad DB: ſed ex effectioue MQ maior eſt, quam AD: Ergo etiam MP maior erit, quam BD.

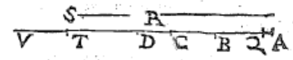
Progreſſ. 3. Deinde quia eſt AB ad BD, vt BC ad CD erit quoque *componendo* AB cum BD ideſt AD ad BD; vt BC cum CD, ideſt BD ad CD; ideoque proportio AD erit ad BD, vt BD ad AD, & etiam erit, vt MQ ad MP eadem, quæ eſt AD ad BD, vt dixi Progr. 1. & ex effectione MQ ad MP, eſt veluti MP ad MQ: Quare cum ſit BD ad CD, vt PM ad MO, erit quoque Permutando BD ad PM, vt CD ad MO: Sed maior eſt MP ex probatis, quàm BD. Ergo maior quoque erit MO, quam CD.

Idem autem oſtendes de MN reſpectu ED: quare erit maior MN data quantitas; quam ED, quod erat oſtendendum.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Si fuerit propoſita talis quantitatum ſeries, vt quilibet ablatus terminus ab aliqua alia ſit ad eius reliquum, vt ſequens terminus à reliquuo ablatus ad id, quod denuò remanet; erit illa alia quantitas æqualis toti ſeriei infinitæ terminorum propoſitæ.

SIt ſeries infinita terminorum propoſita AB, BC, CD, & cæt. qui auferantur à quantitate AV; & quilibet V. g. AB relinquat reſiduum BV, ad quod ſit AB, vt BC alius terminus ablatus à reſiduo eſt ad reliquum ſuum CV. Dico; *quòd hæc quantitas* AV *æquat totam ſeriem.*



Probatur non erit maior tota ſerie; ſed nec minor: Ergo totam ſeriem æquabit.

Quod non ſit minor, patet ex 11. propoſ. Quia tota ſeries poterit intra ipſam continuari in infinitum; ita quòd numquam perueniatur ad V: Ergo quantitas AV minor non erit ſerie terminorum infinita.

Quod verò non ſit maior oſtenditur: nam ſi eſſet maior aliquo exceſſu eſſet maior. Sit is TV, & continuetur proportio AB ad BC in linea AV; donec ſit minor pars reſidua, quam TV, quod ex propoſ. præc. fieri poteſt: cum ergo ſeries infinita ſuperet AT: Ergo AV non ſuperat ſeriem terminorum omnem quantitate TV; ſed minore, cùm iam continuata minus relinquat, quam TV contrà hypotheſim; & ſemper idem argumentum vrgebit: Ergo quantitas AV nulla aſſignabili quantitate excedet infinitam ſeriem: ſed nec ea minor eſt: Ergo illam æquat, quod erat oſtendendum.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Datâ ſerie infinitâ terminorum per eandem proportionem procedentium, & primâ differentiâ inuenire magnitudinem, ſummæ omnium terminorum æqualem.

SIt ſeries infinita AB, & BC, & CD, & cæt. & differentia maioris termini à ſequenti BC, ſit AZ, & fiat differentia AZ ad primum terminum AB, vt AB ad aliud; & inueniatur AV: ex prop. 14. l. 6. elem. Dico *lineam* AV *toti magnitudini infinita terminorum æqualem eſſe.*

Probatur. Quoniam ex conſtructione AZ differentia eſt ad AB primum terminum, vt terminus AB ad quantitatẽ AV. Etiam *diuidendo* AZ erit ad BZ, eſt AB ad VB. Idoeque *componendo* AZ cum BZ ad BZ, vt AB cum AV ad B V, hoc eſt AB erit ad BZ equalem BC, vt AV ad BV.

Rurſuſque *permutando* AB erit ad AV, vt BZ idem terminus, qui BC ex effectione ad BV. Quare *diuidendo* AB erit ad BV, vt BZ, vel BC ad CV. Quare ex præced. AV æquabit totam ſeriem datorum terminorum.

CO-

COROLLARIVM I.

Hinc est, quòd, si fuerit AB ad AV, vt BC ad BV; quod AV æquabit totam seriem in finitorum terminorum. Item si fuerit AB ad BC, vt AV ad BV, vel BV ad CV: erit enim *permutando*, vt priùs AB ad AV, vt BC ad BV. Quare, & *diuidendo* AB erit ad BV BC ad CV.

Item si AV, BV, & CV, sint continuè proportionales, quoniam *diuidendo* erit AB ad BV, vt BC ad CV. Quare semper quantitas AV æquabit infinitam terminorũ seriem.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque educitur, quod cum sit AB ad BC, vt AV ad BV, & AV contineat omnes antecedentes alicuius seriei, & BV omnes consequentes, licet in infinitum procedentes; quod tota collectio infinitorum antecedentium ad collectionem infinitorum consequentium erit, vt vnum antecedens ad vnum consequens.

COROLLARIVM III.

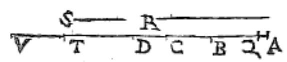
Educitur quoque differentiam maioris termini à minore, & maiorem terminum, & totam collectionem terminorum esse in continuâ analogiâ: siquidem fecimus, vt AZ differentia ad AB primum terminum; sic AB ad aliud; & inuenimus totam collectionem terminorum infinitorum AV.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datam magnitudinem iuxta proportionem datam, ita diuidere; vt progressio secundum eandem seriem continuata terminetur in punctum destinatum.

Sit data proportio R ad S, & secundùm hanc proportionem sit diuidenda AV, vt progressio terminorum finiat in V.

Diuidatur taliter AV, vt proportio AB ad BV sit ea, quam habet R ad S ex prop. 13. Cor. 6. Elem. deinde iuxta proportionem AV ad BV, sic fiat AB ad BC, & erit factum id, quod desiderabatur.

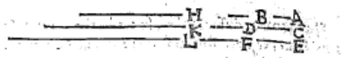


Probatur. Vt AV ad BV; sic est AB ad BC. Ergo etiam ex propos. 22. lib. 5. Reliquum VB erit ad reliquum VC, vt AB ad BC. Vnde ex propos. 16. huius, terminus progressionis est V, hæc autem progressio ex effectione est vt R ad S.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datis pluribus rationum progressionibus inuenire quantitatem, quæ omnes adæquet.

Sint datæ tres proportionũ AB, & CD, & FE series & ex 16. h. inueniantur tres quantitates, quę illas adæquent H, K, L, & hæ quantitates in vnam

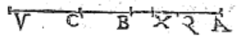


summam redigantur, eritque factum, quòd exoptatur.

Patet. Nam, cùm quælibet quantitas vt H æquet suam seriem V. g. proportionis A ad B, sicut K seriem proportionis C ad D, & tandem L seriem proportionis F ad E; si simul colligantur eas omnes series propositas tota æquabit.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam magnitudinem, ita secare, vt duplicis seriei idem sit terminus.



Sit AV quantitas, & secetur in B; vt AB sit ad BV, vt BC ad CV ex propos. 15. lib. 6. Elem: Rursusque secetur in Z, & fiat, vt AZ ad ZV; ita ZX ad XV, & ex propos. 15. harum duarum proportionum erit idem terminus V. Quod patet ex constructione ipsa.

TRAC-

TRACTATVS XVI.

PARS SECVNDA.

De Linearum Progressionibus Harmonicis.

Alij antecedentes Tractatus à diuersis Auctoribus selecti sunt, aliqui etiam multa additione cumulati, & omnes aliqua saltem propositione, aut ostensione adaucti: hic Tractatus omnino meus. Licet; vt nostri instituti est plurimis intermissis in compendium redactus.

EXPENSIO I.

De progressionis Harmonicæ continuatione.

Docuimus supra datis duabus lineis, vel interserere lineam mediam harmonice proportionalem; sicut, & extremas inuenire: Modo docendũm est eas continuare, & in plures terminos propagare, & priùs declarationes dictionum nonnullarum oportet precedere,

DEFINITIO I.

Centrum harmonicum est punctum, in quo plurimæ lineæ conueniunt musicas in proportiones aliquam lineam; vel aliquas lineas diuidentes.

Sic N in fig. sequenti erit centrum, si lineę NO, & NP diuidant AB in partes proportionales.

DEFINITIO II.

Linea intercepta vocatur, quæ inter centrum, & primæ lineæ harmonicè diuisæ extremum intercipitur.

Sic NB erit intercepta inter AB lineam harmonicè diuisam, & N centrum.

DEFINITIO III.

Bases æquales triangulorum sunt partes æquales cuiusdam lineæ interceptæ parallelæ, quæ radios terminant.

DEFINITIO IV.

Radij harmonici sunt lineæ quædam, quæ à centro eodem discedentes in bases æquales terminant, & lineam aliquam, vel aliquas harmonicè diuidunt.

Lineæ itaque, quæ bases æquales vocantur sunt vt AO, & OP, & cæt. quæ radios NO; & NP, & cæt. recipiŝit. Si ergo lineam aliquam V. g. AB in partes harmonicè proportionales diuidant, illi radij vocabuntur radij harmonici.

PROBL. I. PROPOS. I.

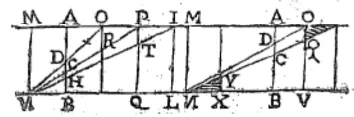
Datam lineam ita secare, vt singulæ partes successiuè proportionem musicam obtineant.

Sit AB diuidenda in partes musicè continuè proportionales ita, quòd sit BC, BD, BA in proportione musicâ sicut etiam sunt BH, & BC, & BD, & sic successiuè. Ducantur duę parallelę per vertices AB, quæ sint MI, & NL, & à puncto A sumpta qualibet parte MA, singulæ fiant æquales in infinitum AO, OP, & PI. Sicut, & NB, iunctisque punctis N, & M à puncto N, ducantur rectæ NO, & NP, & IN in infinitum. Dico, *has partes, quas ductæ in linea* AB *designant esse musica proportione singulæ toti correspondentes*, & BH, & BC, & BD, & BA esse musicè proportionales.

Aduerteq; quod non est necesse, parallelas MI, NL esse perpendiculares ipsi AB; sed ad quemcunque angulum.

* Probatur ea est proportio musica, quàm proportione Geometricâ, ita est primus terminus ad vltimum, vt differentia ad differentiam. Sed CE est ad BA; vt differentia CD ad differentiam DA. Ergo sunt in proportione musicâ.

Probatur verò assumptum: Ita est CB ad PQ, idest æqualem BA, vt OR ad MN, idest BA ob triangu-



lorum similitudinem MNP, & NPQ: Quare RO, & CB erunt ex propos. 9. lib. 5. æquales: Cùm itaque sit ob parallelismum linearum OR ad DC, vt NO ad DN, & vt NO ad DN, sic MN ad DA; erit etiam OR, idest BC ad DC, vt MN hoc est BA ad DA: Quare *permutando* erit quoq; terminus BC ad BA totam, vt DC differentia ad DA differentiam.

Idem

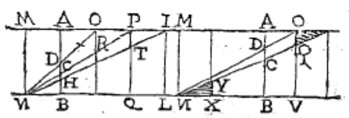
Idem ostendemus de tribus BH, & BC, & BD, quod sit BH ad BD termini extremi, vt CH ad CD differentiæ. Nam BH æquatur ipsi PT ob triangulorum PTI, & NHB in angulis ob parallelas æqualitatem, & æquales bases NB, & PI ex hypothesi: Quare erit, vt CH ad PT, vel BH; sic NC ad NP; sed NC æquatur ipsi RP: Ergo sicut RP ad NP, sic CH ad PT: sed vt RP ad PN sic RO ad MN. Ergo ex 9. lib. 5. RO erit in proportione ad NM, vt CH ad PT, vel æquali BH, idest, quæ CB ad BA, vt supra diximus. Sed OB ad NM, idest CB ad BA habent eam proportionem ex ostensis, quam DC ad DA; hoc est DB ob similitudinem triangulorum DAO, & NDB: Ergo CH ad PT, idest BH, vt supra dixi est, vt DC ad BD: Quare permutando CH erit ad DC differentiæ BH ad BD termini. Quòd si ND non sit æqualis reliquis AO, & OP, sed quælibet, vel irrationalis, probl. tamen ostendetur præsupponendo tamen AO, & OP æquales, vnde ex 4. lib. 6. Coroll. etiam CQ, & QP ob similitudinem triangulorum ex parallelis ortum erunt æquales.

Quoniam ita est DA ad NM, vt AO ad OM, & OD ad ON, & ideo, vt QC ad QN. Fiat NX æqualis OP, & ducatur XY. Erit igitur YX ad QV, vt NY, quæ æquatur ipsi QP, & ideo ipsi CQ est ad NQ. Quod enim NY sit æqualis ipsi QP: patet: Quia ob parallelas triangula NYX, & OQP sunt æqualia in angulis, imo etiam in lateribus ex eo, quia fecimus NX æqualē OP: vnde, & cætera crura vnius, alterius cruribus erunt æqualia. Cùm itaque sit YX hoc est OQ ad QV, vt NY, idest QP, & ideo CQ ad NQ, & OQ ad VQ, vt CD ad CB ex propos. 4 Elem. Coroll. Ergo DC erit *ex æquo* ad CB, vt CQ ad NQ, ideoq; *ex æquo* rursùs, vt DA ad MN. Cum ergo sit DC ad CB, vt DA ad MN erit *permutando* DC ad DA, vt CB ad MN, idest æqualem AB, nempe, vt differentia DC ad differentiam DA, sic erit terminus BC extremus ad terminum extremum BA.

PROBL. II. PROPOS. II.

° *Plurimas lineas in infinitum inuenire, quæ proportione Musicá decrescant, vel accrescant.*

Fiat eadem operatio, quæ priùs, & vtere eadem fig. & dico NM, DA, OR, PT *continua proportione musica decrescere*.



* Probatur. Similitudo enim triangulorum efficit; vt PT æquetur ipsi BH; sunt enim similia triangula NHB, & PTI ob angulos ob parallelismum linearum æquales. Sic OR æquatur ipsi CB. Sic DA ipsi BD; sed BH, & BC, & BD, & BA sunt in proportione musicâ, vt ostendimus. Ergo etiam PT, & OR, & DA, & MN, erunt in proportione musicâ.

Sit deinde data PT, cui plurimas in proportione musicâ respondentes volumus inuenire. Ducatur ad eius extremum P linea MI, & assumpta in ea placita parte PI in reliqua numerantur partes quotquot voluntas erit ei PI æquales, vt PO, & OA & AM; eriganturque MN, AD, OR parallelæ ipsi PT a punctis M, A, O, & ducetur ab I per T extremum datæ recta, quæ illam secet in N, & à puncto N rectæ ad singula puncta ducantur A, O, P; Eruntque segmenta intercepta NM, DA, OR, & PT musicè continuè proportionales; patet ex præcedenti.

THEOR. I. PROP. III.

* *Linea diuisa successiuè; secundum proportionem musicam erit diuisa in partes successiuæ denominationis.*

Sit ligea AB diuisa in partes Harmonicè proportionales DB, & CB, & HB. Dico *eam esse diuisam in partes successiuè denominationis* V. g. primo in duas, secundo in tres, tertio in quatuor; ita vt primus terminus sit tota, secundus dimidia, tertius tertia pars, quartus quarta, & cæt.

Aduerte tamen, quòd non intendimus probare quod necessariò ordo incipiat à dimidia, cum possit incipere à qualibet alia denominatione V. g. à quarta, seu quinta parte, seu etiam irrationalis omninò sit; nec possit subire denominationem aliquam series harmonica.

*. Probatur autem ita est DA ad MN, vt AO ad OM ob parallelas ex 4. propos. lib. 6. Elem. sed AO est dimidium OM ex effectione. Ergo, & DA erit medietas lineæ AB. Sic CB erit tertia pars lineæ totius AB.

Prob. autem; quia CB est ad PQ, vel AB, vt NB ad NQ; sed NB ex effectione est tertia pars NQ. Ergo etiam CB taliter erit in proportione geometrica respectu totius AB.

Sic ostendetur de HB quod sit tertia pars totius AB, & sic de reliquis. Quod si AM sit irrationalis respectu AO etiam tota composita MO ad AD irrationalis erit ex propos. 10. lib. 10. quare, & omnes MO, MP, & cæt. vtpote ex incommensurabilibus composita magnitudo, vnde DA quoque ad MN incommensurabilis erit, & sic dices de alijs.

COROLLARIVM.

Hinc est quod si lineam quamcumque successiuè, primò in tres V. g. secundo in quatuor, tertiò in quinque, quartò in sex diuidas, hæ omnes partes erunt musicè proportionales, eritque tertia pars ad quartam, & hæc ad quintam, & cæt. successiuè in proportione Harmonica proportionalis.

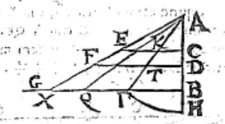
PROBL. III. PROPOS. IV.

* *Datá lineá harmonicè secta alias quascumque in infinitum harmonicè similiter secare.*

Sit data recta AB secta in C, & D harmonicè, & oporteat alias similes secare. Ducantur à punctis BCD parallelæ CE, & DF, & BG, mensureturq; super AB prolungatam, si necessarium sit, longitudo lineę diuidēdę AH; Facto ergo centro in A interuallo AH portio circuli ducatur HI, & punctum, quo secat BG connectatur cum A centro recta AI. Dico AI sectam esse, vt BA harmonicè in K, & T.

* Pro-

* Probatur. Nam ex Propos. 4. lib. 6. vt est AC ad CB, vt AK ad KI, ergo componendo AC est ad AB, vt AK ad KI, quod memoriâ tenendum.



Rursus AC ad AK; sic est AB ad AI; & AD ad AT. Ergo ex p. 22. l. 5. erit pars CD residua ad partē KT residuam, & pars DB ad partem TI, vt AB ad AI totum; vel vt DA ad AT alterum totum. Cum ergo sit CD ad KT, vt DB ad TI erit etiam *permutando* CD ad DB, vt KT ad TI: Sed CD est ad DB, vt AC ad AB, ex hypothesi: Ergo etiam KT erit ad TI, vt AC ad AB: sed vt AC ad AB, ita est AK ad AI. Ergo erit AK ad AI, sic differentia KT ad differentiam TI: sed etiam ex propos. 13. lib. 6. est secta similiter, ac AB, ergo habemus intentum: Sic dices de alijs lineis AQ, & AX, & quibuscumque similibus.

EXPENSIO II.

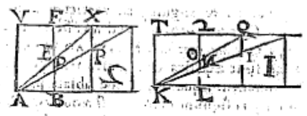
De comparatione vnius seriei harmonicæ ad aliam.

Visa continuatione seriei musicæ; modo eam alij seriei comparare oportet.

THEOR. I. PROPOS. V.

* *Duæ series Harmonicorum proportionalium basibus suis sibi inuicem æqualibus sitæ, & à linea aliquota incipientes; eandem proportionem inuicem semper seruant.*

Sint duæ series proportionalium Harmonicorum secunda BF; & BE, & BD, & AC. Prima LZ, & LO, & LN, & quarum radij cuiuscumque in bases æquales terminent, & primus sit tota linea FB, vel LZ secundus medietas BE, & LO, & sic de reliquis. Dico eam proportionem, quam habet LZ ad BF primus terminus vnius seriei, cum primo termino alterius perpetuò seruari respectu terminorum sequentium ita, vt alter alteri correspondenti sit in eadem proportione, nempe ita erit, vt tota LZ ad totam BF, sic OL ad BE, & LN ad BD, & cæt.



* Prob. Prog. I. Nam cum QZ sit medietas TZ, & pariter XF sit medietas lineæ XV; Ita erit QZ ad QT vt XF ad XV, Ideoque ZO ad KT, vt EF ad AV. quare permutando erit OZ; idest OL ad EF, vel ED vt KT ad AV. Deinde Pr. 2. vt KO ad KQ, sic est ON ad QI, idest æqualem NL, & vt AE ad AX, sic ED ad XP, idest æqualē CB, sed vt KO ad KQ sic est AE ad AX, ergo, vt ON ad NL, sic est ED ad DB, vel *conuertendo* NL ad ON vt DB ad ED. Quare erit OZ ad KT, vt EF ad AV ex primo progr. & ON ad NL, vt ED ad DB ex secundo, & ideo permutando OZ ad EF, vt KT ad AV, & ON ad ED, vt NL ad DB.

Cum ergo sit quoque ZO ad KT, idest EF ad VA, vt ON ad NL, idest ED ad DB, vt demonstrationis serie dictum est, erit quoque *permutando* ZO ad ON, ideoque EF ad ED, vt KT ad NL, & ideo, vt VA ad DB. Igitur erit permutando, vt KT ad VA, sic NL ad DB.

Quod vt clariùs innotescat faciamus, quòd linea FB sit 48. partium, & linea TK, seu ZL 36. nimirum $\frac{3}{4}$ ipsius FB. In prima ergo diminutione ex propos. 3. huius EB erit $\frac{1}{2}$, idest 24. & OL $\frac{1}{2}$ idest 18. At vero 18 ad 24. seruat proportionem, quam habet tota ad totam, quæ est $\frac{3}{4}$. Sic linea DB erit partiū 16. & NL partiū 12. quia quælibet erit $\frac{1}{3}$ totius, at vero 12. ad 16. est eadē proportio 3. ad 4. &c.

PROBL. I. PROPOS. VI.

* *Seriem proportionis Musicæ similiter alteri ordini propagare.*

Sit datus ordo primus, & oporteat alium ordinem in data proportione extendere: Fiat primus terminus AB ordinis propagandi maior, vel minor iuxta placitam longitudinem, & tot numero partes cuiuscumque magnitudinis illæ sint inuicem æquales intermedient inter centrum A, & primū terminū BF in hac secunda serie, quot numero intermediant inter centrum K, & terminum primum ZL in primâ serie, & in præced. propos. schemate, & deinde ordo consequens terminorum propagetur, vt docuimus propos. 2. huius, & erit progressus harmonicus 2. similis proposito primo.

Probatur eodem modo, ac præced. propos.

THEOR. II. PROPOS. VII.

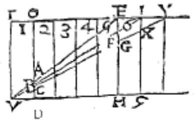
* *Omnes proportiones musicæ similes sunt in proportione Geometrica alteri ab vnitate denominatæ, si tamen sint rationales.*

Sit proportionis Musicæ series AD, & BD, & CD tres termini. Dico tres terminos EH, & FH, & GH esse quoq; musicè proportionales, & quamuis alius denominationis; esse tamen geometricè similes præcedentibus.

* Probandum itaque primo tres terminos EH, & FH, & GH esse musicè proportionales, & hoc ostenditur. Quoniam vt est primus EH ad vltimum GH, sic est differentia EF ad differentiam FG.

In ea proportione est EF ad TV ex 4. prop. lib 6. vt EI ad IT, & IF ad IV, & XG ad XV, vel æquales VC ad VX, sed vt VC ad VX; ita est CD ad XZ: sed CD æquatur IX, sunt enim æquales ob similitudinem triangulorum VCD, & XIY æqualium quoque laterum YI, & VD ex hypothesi. Quare erit VC ad VX, vt IX ad XZ: sed vt XI ad XZ, sic ex Coroll. prop. 4 lib. 6. est FG ad GH. Ergo FG ad GH, erit, vt VC ad VX: sed vt VC ad VX, sic est VB ad IV, vel æquales FI ad IV, & vt FI ad IV, sic est EI ad IT, & EF ad TV. Ergo ex 16 l. 5. el. vt FG ad GH, sic ēst EF ad TV, idest æqualem EH. Vnde *permutando*, vt est FG ad EF differentiæ sic GH ad EH terminos. Vnde cum sit differentia ad differentiam, vt terminus ad ter-

terminum erunt termini EH, & FH, & GH Harmonicè proportionales.



Probatur quoque. Sint alius denominationis, quam ea priùs proposita, quæ denominatur ab vnitate, vt ea in quam diuideretur OD, quæ est tota $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$. Nam FH primus terminus post totam lineam HE est ad totam HE, vel IZ, vt VF ad VI: sed VF ad VI se habet ex hypothesi, vt 5. ad 6. Ergo etiam secundus terminus HG se habebit ad primum, vt 5. ad 6. Sic tertius terminus GH ad totam se habet, vt VG ad VY; sed VG ad VY se habet, vt 5. ad 7. Ergo etiam GH ad totam HE se habebit, vt 5. ad 7. & sic procedendo quartus erit, vt 5. ad 8. vnde series erit tota $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$, &c.

Probatur tādem, quod sint in eadem proportione Geometrica cum serie, quæ denominatur ab vno. Nam ex Coroll. prop.4. lib.6. vt differentia AB ad differentiam BC, sic EF ad FG, differentiæ quoq; alius seriei, & vt CA ad CD, sic EG ad GH. Quare *componendo* AC cum CD idest AD terminus maior ad CD minorem, sic EG cum GH, idest EH terminus maior in alia serie ad GH terminum minorem. Patet etiam, quia $\frac{1}{6}$, & $\frac{1}{6}$ ex *Tract.* 13. Coroll. prop.17. se habent, vt 1. ad 5. & sic $\frac{1}{5}$, & $\frac{1}{5}$ habent 1. ad 5. & sic semper eodem modo se habet.

PROBL. II. PROPOS. VIII.

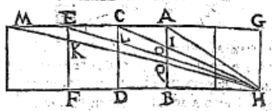
Series Harmonicas proportionalium reperire datæ denominationis in aliqua linea.

SIt Schema præcedens, & velimus reperire proportionem harmonicam in data linea EH, quæ se habeat ad aliam in eadem linea continuatam, vt 1. ad 5. Per extremum E ducatur linea TI, & quinque æquales partes, vt EI numerentur ab E versus T; erigaturque TV æqualis datæ EH. Deinde rursus in alteram partem portiones primis æquales numerentur, quantùm placet, vt EI, & IV, & cæt. ducanturque ab V rectæ, vt VI, & VY, & cæt. nam diuident lineam EH in partes, quæ ad aliam seriem datam, in quam diuisa est OD erunt singuli termini, vt 1. ad 5. Patet ex præced. ostensione.

PROBL. III. PROPOS. IX.

* *Series harmonicas proportionalium reperire iuxta datam proportionem in pluribus lineis.*

SInt reperiendæ plures lineæ, quæ dicant inuicem proportionem harmonicam, & sint ad alias proportionem harmonicam dicentes vt 3. ad 1. fiant lineæ parallelæ AB; CD, & EF, & æquali distent interuallo, & recta coniungantur A, E puncta, & erunt æquales AC, & CE. Sumantur ergo in AC duæ partes æquales ipsi AC, & ducatur parallela GH ipsi AB. Deinde per B recta parallela ipsi GE ducatur, quæ cum GH conueniet in H: Ab H ergo ad C, & E; & cæt. radij ducantur, & ex præc. AB erit diuisa in terminos harmonicos iuxta datam proportionem, ita vt AB tota $\frac{2}{2}$ IB $\frac{2}{3}$ OB $\frac{2}{4}$ QB $\frac{2}{5}$, & se habebunt ad aliam $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, vt 2. ad 1. modo dico, quod etiam lineæ AI, CL, & EK sunt in eadem proportione ac IB, & OB, & QB. Vnde se habebunt ad seriem $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ eodem modo ac 3. ad 1, cum, & etiam ipsi sint $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$.



Probatur triangulum HIB est æquiangulum triangulo AIC, ob angulos C, & H inter parallelas alternos, & angulos apud I ad verticem. Quare erit ex 4. lib. sexti AC ad AI, vt HB ad IB, & *permutando* AC ad HB, vt AI ad IB. Rursus HOB triangulum est æquiangulum triangulo CLE ob eandem rationem. Quare similiter arguendo ex 4. l. sexti & *permutando* CA erit ad HB, vt CL ad OB. Rursusque triangulum HQB est æquiangulum triangulo EKM, quare erit eodem modo EM ad HB, vt EK ad QB. Sed tres, vtpote æquales AC, & CE, & EM habent eandem proportionem ad eandem HB. Ergo etiam tres AI, & CL, & EK ad tres IB, & OB, & QB, vtpote eiusdem proportionis trium æqualium ad HB habebunt eandem proportionem. Quare erit IA ad BI, vt CL ad OB, & EK ad QB. Quare permutando AI erit ad CL, vt IB ad BO, & CL ad EK, vt OB ad QB.

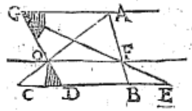
LEMMA I. PROP. X.

Si inter duas parallelas crura duorum triangulorum æqualium basium se intercipiant, linea per eorum intersectiones ducta erit parallela basi, & triangula, quæ fiunt æqualis altitudinis.

SInt duo triangula quæcumque ABC, & CED quorum crura se decussent in F, & O. *Dico, quod linea* FO *ducta per* F, & O *est parallela basi* FC.

Probatur triangulum AFG est æquiangulum triangulo EFB, quod angulus E sit æqualis angulo G nigro, vtpote alterni inter parallelas ex propos. 30. lib.1. Elem, & anguli quoque apud F sint ad verticem, & ideo æquales: vnde, & reliqui ex Coroll. 2. prop.17. lib.1. Elem. Quare AG ad AF, vt EB ad FB, & *permutando* AG ad EB, vt AF ad FB: Sic quoque dicendum de triangulis AOG, & DOC ob angulos alternos nigrum ad D, & seminigerrimum ad G æquales, & angulos ad verticem æquales quoque. Quadere erit, vt AG ad AO, sic DC ad OC. Quare *permutand.* erit AG ad DC, vt AO ad OC, sed EB, & DC sunt æquales cum bases triangulorum præsupponantur æquales; Vnde ablata parte BD communi, reliquum EB, & DC est æquale. Quare AG ad EB, & eadem AG ad DC dicet eandem proportionem ex 7. lib.5. vtpote ad æquales. Quaderè erit etiam eadem proportio AF ad FB, quæ AO ad OC. Quare cùm crura trianguli sint diuisa proportionaliter linea transiens per diuisiones F, & O erit parallela basi BC ex prop.2. lib.6. & triangula EFB, & DCC ex propos.40. lib.1. Coroll.2. erunt æqualis altitudinis.

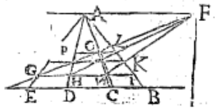
THEOR.



THEOR. III. PROP. XI.

* *Si plurima triangula æqualia æqualiū basium in vnum verticem conueniant, & recta aliqua basi non parallela in ea incidat, & secet, parallelæ basibus à sectionibus crurum ductæ omnia crura secabunt harmonicè proportionaliter.*

SInt triangula ABC, & ACD & AED, & cæt. quæ in vnum verticem A conueniant, & eorum sint æquales bases: secetque eorum crura aliqua FG. Dico, *quod si ducantur per eorum intersectiones parallelæ basi* B.E *istæ in partes harmonicè proportionales diuident omnes lineas sectas, & crura triangulorum.*



* Quod vt ostendatur ducatur basi BE parallela FA à verticibus triangulorum; donec occurrat obliquæ secanti GF; occurret enim, cùm incidens FG basibus parallela non sit, & à puncto F, ducatur FH, & FN. Quia ergo HN, NI, & HG sūt æquales, q a ex Cor. prop.4. l.6. el. HG est ad HN, & NI; vt equales ex thesi, DE ad DC, & CB. Ex 1. propos. AB erit secta harmonicè proportionaliter, & AI, & KA & AL erunt tres termini harmonici, quo supposito.

* Probatur. Parallelæ ductæ ab intersectionibus O, P, G crurum ab FG incidente factis transeunt necessariò per puncta IKL. Ergo eam diuidunt in partes proportionales harmonicè IA, & KA, & LA. Triangula HPG ex præced. & IKN sunt æqualis altitudinis. Ergo parallela à P discedens incidet in punctum K ex prop.39. Cor. l. 1. in verticem trianguli IKN. Sic triangulum NOG æqualis altitudinis est velut ILH: Ergo parallela discedens ab O incidet in punctum L: Quare eodem modo IA diuidetur in partes proportionales, sic à radijs NF, FH, & FG, vt à parallelis LO, & KP, & IH. Cùm ergo IA sit diuisa in partes harmonicè proportionales, etiam omnes CA, DA, & EA ab ijsdem parallelis erunt diuisæ ex propos.4. huius.

COROLLARIVM.

*HInc que patet quomodo possimus diuidere in partes harmonicas plurimas lineas simul, & plures series harmonicorum terminorum efficere.

EXPENSIO III.

De interpositione Harmonicorum terminorum.

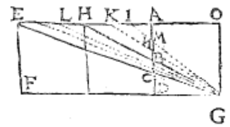
INterpositio terminorum est cum inter duos terminos alij termini interiaciuntur, ita tamen, vt sit adhuc continua series proportionalium eo modo, quo continuatur proportio Harmonica.

PROBL. I. PROPOS. XII.

* *Terminos continuè proportionales harmonicè inter terminos harmonicos conijcere.*

SInt dati tres termini continuè proportionales harmonicè AD, & BD, & CD nempe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. & oporteat inter eos alios terminos interponere, qui proportionem continuent. Sint verò termini AD, & BC, & CD inter parallelas AF, & EF, lineisq. à centro G egredientibus GH. & GE determinati, eruntq; æquales AH, & HE. Diuidantur itaq; AH, &

$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$



HE secundum terminos, quos volumus interponere V. g. 3. ita quòd primus terminus sit, vt 3. ad 3. secundus, vt 3. ad 4. tertius, vt 3. ad 5. &c. Deinde ad singulas diuisiones à centro G rectæ ducantur GI, & GH, & GL, & cæt. & erit factum, & sic procedent termini.

$\frac{3}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{9}$

*PRobatur. Nam ex prælibatis huius in prima propos. AD primus terminus erit ad AD vltimum, vt differentia AM ad differentiam MN, & MD erit ad BD, vt differentia MN ad differentiam NB. Ergo inter AD, & BD duos terminos termini duo interpositi sunt MD, & ND. Et sic dicas de cæteris, quod verò sint datę denominationis patet ex prop. 8. huius.

EXPENSIO IV.

De terminis inuicem comparatis, & differentijs.

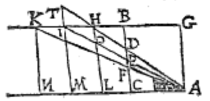
IAm ex ipsa definitione proportionis harmonicę notum est duas differentias harmonicas inter tres terminos esse inuicem, ut primus terminus ad tertium, & ideo etiam permutando esse differentiam maiorem ad maiorem terminum, vt minor differentia ad minorem terminum: reliquas igitur proportiones indagabimus.

THEOR.

THEOR. I. PROP. XIII.

* *Maior terminus est ad summam omnium differentiarum, vt æquales bases cum intercepta ad ipsas æquales bases.*

SIt secta BC in partes proportionales harmonicè in D,E,F. Differentię erunt BD,& DE,& EF, & summa earum BF. Dico, *quòd ita se habet* AG *primus terminus ad totam seriem, & summam differentiarum* BF, *vt* AC *intercepta, vel æqualis* GB *cum æqualibus basibus* omnibus simul sumptis BH, & HI, & IK, ad ipsas æquales bases simul sumptas.



Probatur. Nam ex 4. lib.6. vt BK ad KG, sic est BF summa differentiarum ad AG primum terminum.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Minor terminus omnium ita est ad summam omnium differentiarum, vti intercepta ad omnes bases æquales.*

SIt figura, quę præcedentis propos. Minor terminus omnibus alijs terminis erit FC,& summa differentiarum erit FB. Intercepta AC omnes bases æquales BK. *Dico, quòd* FC *sit ad* FB, *vt* AC *est ad* BK.

* Probatur AFC triangulum est æquiangulum triangulo BFK: quia anguli apud F sunt ad verticem anguli verò ad A, & K alterni. Ideoque ex propos.11. lib.6. elem. AC erit ad FC, vt BK ad FB ideo *permutando* AC erit ad BK, vt FC ad FB.

THEOR. III. PROPOS. XV.

* *Termini ad inuicem maior ad minorem sunt in eadem proportione, ac æquales bases cum intercepta ad ipsas æquales bases cum intercepta minus vna æquali basi.*

SIt eadem fig. quæ supra. *Dico* BC *terminum esse ad* DC, *vt* GH *ad* Gb, *&* DC *esse ad* EC, *vt* GI *ad* GH, *& è contra inuertendo.*

Probatur. Nam ADC, & DBH sunt æquiangula triangula: Ergo ex 11. lib.6. AC erit ad DC, vt BH ad BD: Quare *permutando* AC. vel GB ei æqualis erit ad BH, vt DC ad DB, & ideo *componendo* AC, vel GB cũ BH erit ad GB, vt DC cum DB ad DC, idest HG addita basis, & intercepta erit ad interceptam BC, vt terminus BC ad terminum DC.

* Probatur quoque de reliquis terminis: nempe de termino DC respectu termini EC. *Dicoque quòd* DC *sit ad* EC, *vt* GI *ad* GH.

Triangulum HIO est æquiangulum triangulo AEC ob parallelas, inter quas est. Quare vt priùs AC erit ad EC, vt HI ad HO; quapropter *permutando* AC, vel GB æqualis erit ad HI, vel æqualem BH, vt EC ad HO: sed eadem AC erat in pręced. part. huius prop. ad EBH, & ideo ad æqualem HI ex hyp. vt CD ad BD. Ergo ex 16.l.5. vt CD ad BD ita EC ad HO, & hinc *permutando* CD ad EC, vt BD ad HO: Sed producta AH in T ob ęqualitatem triangulorum HTI, & HBD ipsa TI æquatur ipsi BD: Proportione autem respondet TI, idest BD ad HO, vt TA ad AH, & vt IG ad GH, & consequenter ex 16.l.5. CD erit ad EC, vt IG intercepta cum additis omnibus ad GH interceptas cum additis vna minus, ita in quam erit terminus CD ad terminum EC.

Est autem IG ad HG, vt TA ad HA, quia ob triangulorum THI, & HGA similitudinem TH est ad HA, vt IH ad HG, ideoque *componendo* TA est ad HA, vt IG ad HG, & ideo, vt TI, vel BD ad OH.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

* *Si intercepta sit irrationalis, etiam termini Musici erunt irrationales, idest nullo numero exprimibiles.*

SIt AC intercepta irrationalis: Dico, *quòd termini erunt irratioaales* BC, *&* DC, *&* EC.

* Probatur. Quia AC ponitur irrationalis ipsi BH idest æqualis CL etiam compositũ LA erit irrationale ex propos. 10. lib. 10. vtrique parti componenti, nempe ipsi CL, & ipsi AC. Sed vt est AL ad AC, sic BC terminus ad DC terminum: Ergo ex propos.5. lib. 10. elem. termini ipsi inuicem erunt incommensurabiles BC, & DC.

Idem argumentaberis de terminis DC, & EC. Nam AC ponitur incommensurabilis ipsi GL: Ergo etiam ipsi æquali LM. Quamobrem, & compositũ ipsarũ AL erit incõmensurabile ipsi LM. Vnde si LM, & AL incõmensurabiles cõponantur AM totũ erit incommensurabile ipsi AL; sed vt MA ad AL, seu, vt IG ad GH: sic est ex 15. huius DC ad EC. Ergo, & DC ipsi EC erit incommensurabilis, & sic dicas de reliquis.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Posita intercepta incommmensurabili, reliquæ omnes differentiæ inuicem erunt incommensurabiles.

POnatur intercepta incommensurabilis. Dico differentiam DB esse incommensura bilem ipsi differentiæ DE.

Probatur DE est ad FE differentiæ, vt termini DC ad CF: sed termini sunt incommensurabiles, ergo ex 5. lib.10. & ipsæ differentię, quòd verò primus terminus ad tertiũ incõmensurabilis. Prob. sit DC est ad EC, vt AM ad AL, & ex prop.15. huius EC est ad FC, vt AN ad AM: Ergo DC est ad FC ex æquo, vt AN ad AL, Sed NA, & AL ex dictis in præc., si AC sit incommensurabilis, sunt incommensurabiles, Ergo etiam DC, & FC termini.

EXPEN-

EXPENSIO IV.

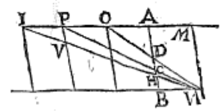
De progressionis Harmonicæ extremo.

SIcut in progressionis Geometricæ continuatione extremum est, ad quod nulla progressio, quantumuis multiplicata, peruenire potest; ita & Harmonicum extremum est, quòd nulla progressio harmonica valet consequi, quod vt demonstratione firmetur sit.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

* *Nulla progressio harmonica extremum suum consequi potest, quamuis vt vtlibet multiplicata.*

SInt termini harmonici AB: & DB, & CB, & HB. *Dico, quod etiam si sine meta multiplicentur nunquam poterunt consequi extremum* B.



* Probatur ex propos. 15. huius: Nam terminus penultimus CB erit ad vltimum HB, vt MI ad MP; sed MI ad MP habet minorem proportionem. quàm omnes alij termini præcedentes, & ideo MP ad MI maiorem. Ergo BH ad CB habebit maiorem proportionem omnibus terminis præexistentibus: sed CB est linea: Quare etiam BH linea erit. Quoniam comprehendit plures partes ipsius CB, quàm omnes antecedentes termini cõprehendant terminorum maiorum. Quod autem MP ad MI sit maior proportio, quàm MO ad MP patet. Quia crescit linea MI per continuam additionem vnius. Maior est autem proportio 2. ad 3. quàm 1. ad 2. & 3. ad 4. quam 2. ad 3. & sic successiuè.

* Probatur quoq; alio modo. Nam quacunq; positâ terminorum multiplicatione semper NHB erit triangulum, & centrum N distabit à puncto B. Ergo etiam H distabit ab eodem puncto B.

Tandem Probatur 3. Refertur BN ad AI, vt HB ad HA, & ideo *permutando*, vt BN ad HB ita est AI ad sũmã differentiarum HA: sed omnes differentię HA ad omnes bases AI sunt quid quantum; Ergo etiam BH respectu BN.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

In qualibet data linea absque fine quæcumque progressio Harmonica continuari potest.

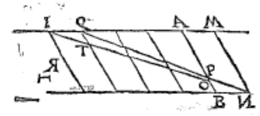
PRobatur in præced. fig. ad partes æquales assumptas in linea basium æqualium MI à centro N, possunt duci infiniti radij; quià partes AO, & OB, & PI possunt multiplicari in infinitum, & à singulis ab N radius duci potest: sed omnis radius in AB designat terminum harmonicum ex dictis propos. 1. huius; nec ex præc. datur terminus harmonicus, cuius longitudo excedat punctum B: Ergo in AB termini harmonici in infinitum multiplicari poterunt abque eo, quòd perueniatur ad punctum B.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Assignatâ qualibet in proportionis harmonicæ serie ad minorem perueniri poterit.

PEr additionem partium æqualium fit semper minor proportio totius cum addito ad totum solùm V.g. 3. habet proportionem minorem ad 2. quam 2. ad 1. & 4. ad 3. quàm 3. ad 2. & 5. ad 4. quàm 4. ad 3. & sic continuè.

Assignetur ergo linea R, cui habeat minorem proportionem intercepta NB, quam E. g. 7. ad 3. eritque R ad NB maior proportio, quam 7. ad 3. Ad MA addantur tot partes, vt maior sit proportio MI cum additis ad MN; quam 7. ad 3. & ducatur ad illud extremum radius NI.



Quoniam igitur triangulum MIN est triangulo IQT, & ideo æquali NOB æquiangulum erit MI ad MN, vt NB ad BO: sed MI habet maiorem proportionem ex effectione ad NM, quàm 7. ad 3. Ergo etiam NB habet maiorem proportionem ad BO, quàm 7. ad 3. sed eadem NB habet minorem proportionem ad R, quam 7. ad 3. Ergo R maior erit, quam BO. Vnde lineâ assignatâ R poterit in AB minor linea assignari in proportione harmonica.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Termini harmonici vltra omnem assignatam quantitatem diminui possunt.

SIt aliqua data R in præcedenti fig. Dico, quod in progressione Harmonica procedendo terminus aliquis minor, quàm R dari potest.

Assignatæ R habeat aliqua ex ipsis basibus, vt QI minorem proportionem, quam quilibet assignatus numerus 30. ad 3. Addanturque tot bases donec MI ad MN habeat maiorem proportionem, quam 30. ad 3. quo posito.

Probatur Propos. Triangulum QIT est æquiangulum triangulo MIN. Quare erit MI ad MN, vt QI ad QT: Sed MI habet maiorem proportionem ad MN, quàm 30. ad 3. Ergo etiam QI habebit maiorem proportionem ad QT, quàm 30. ad 3. sed QI ad R habet minorem proportionem ex hypothesi, quam 30. ad 3. Ergo R est maior, quàm QT. Est autẽ QT terminus harmonicus, vt ex prop. 2. h.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Si series infinitorum terminorum musicorum continuetur relinquet tandem aliquam differentiam assignata qualibet quantitate minorem.

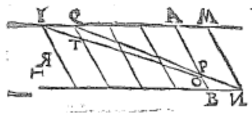
ASsignetur quantitas aliqua minima R. *Dico in* AB *differentias musicas adeo posse multiplicari, vt tandem aliqua sit minor, quàm* R.

Probatur. Nam termini adeo possunt multiplicari, vt aliquis sit minor, quàm R ex præced. multiplicentur, & sit QT minor, quam R; Ducaturque NQ. Dico differentiam PO esse minorem, quam R. patet. Nam PO est ad QT, vt NP ad NQ, vel MA ad MQ: sed MA minor est, quam MQ ex hypothesi. Ergo PO minor est quam QT. Ergo minor etiam est, quàm R.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Quæcumque infinita differentiarum musicarum series æquat primum terminum.

PRobatur. Nam enim minor erit, quia in BA primo termino infinitæ differentiæ capere possunt ex propos. 18. h. & ideo infinitam differentiarum multitudinem capere. Sed nec erit maior. Si enim est maior sit maior V. g. quantitate OB: Multiplicentur itaque termini adeo, vt aliquis tandem inueniatur ex propos. 20. minor assignata quantitate BO. Ergo series illa in infinitum procedens in quantitate AB relinquit minus residuum, quam BO. Quare BA primus terminus non superat seriem infinitam differentiarum quantitate BO, & sic semper valebit argumentum: ergo series infinita differentiarum musicarum æquat primum terminum.



TRACTATVS XVII.

De Proportionalitatibus Rationum.

LIcet iste Tractatus sit vniuersalis, & omne genus quantitatis complectatur, tum discretæ, tum continuæ; quia tamen numeris faciliùs, & euidentiùs proportionum similitudines explicantur, hinc est, quòd numeris exempla dabimus, non lineis, aut superficiebus, cum tamen propositiones genericè sint intelligendæ, & omni generi quantitatis applicandæ.

EXPENSIO I.

De principijs.

EGimus in præcedentibus de similitudine Rationum, & continentiarum, iuxta quas vna quantitas aliam continet: nunc autem agimus de similitudine ipsarum similitudinum Rationum, & in eo consistit, quòd ipsæ rationes, quibus inuicem duæ quantitates, & duæ in se continendo assimilantur ipsæ quoque inuicem sint similes. Quamobrem proportionalitas requirit ad minus duas proportiones, & ideo quatuor Rationes, nam duæ Rationes vnam proportionem efficiunt, & tandem octo terminos, inter quos quatuor rationes reperiantur.

DEFINITIO I.

PRoportionalitas est proportionum similitudo.

Sint duo numeri $\frac{2}{4}$ duobus numeris proportionales $\frac{3}{6}$; sint deinde etiam alij duo $\frac{1}{2}$ duobus alijs $\frac{4}{8}$ proportionales, hæc proportio, quæ inter primos quatuor reperitur si sit similis proportioni, quæ inter hos extremos proportionatur, dicitur *Proportionalitas*.

DEFINITIO II.

RAtionum denominatores vocantur quantitates, quæ suis partibus exprimant continentiam vnius quantitatis respectu alterius.

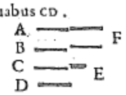
Sint $\frac{2}{8}$, & $\frac{3}{9}$ Denominatores harum quantitatum sunt primæ 4. secundæ 3. quia indicant quot vicibus vna quantitas in alia contineatur; sic quater 2. continetur in 8. & 3. in 9. ter continetur; Sic si exhiberentur duæ lineæ pertica, & palmus. Linea quædã, quæ demonstret suis partibus continentiam palmi in pertica, dicetur denominator. V. g. semipalmus diuisus in 6. vncias poterit dici denominator, quia indicabit suo sexagenario partium continentiam sex pedum, quas pertica complectitur.

DEFINITIO III.

SImilitudo proportionum consistit in similitudine denominatorum.

Et hoc quidem verum est in quantitatibus rationalibus, & in irrationalibus, nam exprimuntur earum similitudines per mutuam duarum quãtitatum habitudinem. Sic sit $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{12}$, poterit exprimi denonaminator proportionis, quam habet 2. ad 6. & 3 ad 12. esse eam, quæ est inter 3. & 4. nempe ipsos denominatores, qui indicant, quot vicibus capiat 2. in 6. & 3. in 12. Sic si sint duæ irrationales AB similes alijs duabus CD.

Sintque duæ aliæ lineę, quæ exprimant V. g. F continentiam B in A, & E, quæ demonstret continentiam D in C, istæ rationum similitudines licet



irrationales poterunt exprimi per illos duos Denominatores F, & E, & dicere, quod sicut est F ad E, ita est proportio AB ad proportionem CD.

DEFINITIO IV.

PRoportiones similes illæ sunt, quæ ijsdem, vel æqualibus denominatoribus gaudent.

Sint V. g. $\frac{2}{4}$, & $\frac{8}{16}$: istæ proportiones sunt similes, quia ita 4. continet 2. gemina vice, sicut 16. continet 8. gemina vice: quare sunt similes in continendo, cùm contineant, tam vna, quam alia ijsdem vicibus, quarè, & ipsæ continentiæ sunt similes.

PRINCIPIVM.

QVantitas rationis, siue denominator ductus in consequentem producit antecedentem, si sit maioris inæqualitatis, at è contra si sit minoris, nam diuisus consequens per denominatorem, antecedentem, & manifestat.

C 4 — A 12 D 3 C $\frac{1}{4}$ A 3 D 12

Sit proportio A 12 ad D 3. quæ exprimatur denominatore 4. C. Si 4. ducatur in 3. producet 12. quia 4. suis vnitatibus indicat vices continentiæ 3. in 12. Sit rursus proportio rationis A 3. ad D 12. denominator $\frac{1}{4}$, quia 4. numerat vices, seu partes ex quibus A 3. sibi assumit vnicam, ideo si 12. diuidatur per 4. denominatorem producetur antecedens 3. Sic si denominator 2. & $\frac{2}{5}$, quam habet 5. ad 12. diuidat 12. producet 5. at si detur ratio 12. ad 5. & 2. $\frac{2}{5}$, denominator multiplicet 5. producet 12.

Aduerte autem; si quando iubemus reperire, vel tertium, vel quartum, vel medium proportionale, id præcipimus iuxta regulas, vel in numeris traditas lib. 7. & 8. Elem. & iuxta Tract. 13. de numeris proportionalibus. In lineis iuxta dicta lib. 6. element. Expens. 4. Si agatur de superficiebus, vel de corporibus iuxta tradenda suis locis, licet enim exempla in numeris exhibeamus, in omni tamen genere quantitatis valet iste Tractatus. Vnde iuxta cuiuscunque quantitatis modum præcepta sunt operi demandanda.

EXPENSIO II.

De Proportionibus ad denominatores collatis, & ad terminos.

PRiùs videndum est, quomodo Denominatores, terminique in proportionibus exprimendis se gerant, vt deinde earum compositionẽ cognoscere, multitudinemque possimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Proportiones eundem terminum habentes inuicem referuntur, vt denominatores.

* SIt A $\frac{3}{7}$, & B $\frac{4}{7}$. Dico *has proportiones esse inuicem, vt denominatores*, ideoque A $\frac{3}{7}$ esse ad B $\frac{4}{7}$ in proportione, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ proportionis A ad denominatorem D 1 $\frac{3}{4}$ proportionis B.

Denomin. C 2 $\frac{1}{3}$ D 1 $\frac{3}{4}$

A $\frac{3}{7}$ B $\frac{4}{7}$

* Probatur. Nam toties fundamentum A 3. continetur in termino 7. quot vnitates sunt in suo denominatore C 2 $\frac{1}{3}$, nempe gemina vice, & $\frac{1}{3}$: Sed etiam fundamentum 4. continetur in termino 7. quot vnitates sunt in denominatore D 1 $\frac{3}{4}$ proportionis B; Silicet vnica vice, & $\frac{3}{4}$: Ergo denominatores sunt similes in vnitatibus, vt termini, seu consequentes in continentijs fundamentorum, & ita vnitas continetur in Denominatore C 2 $\frac{1}{3}$, vt fundamentum 3. in termino 7. & vnitas inest in denominatore 1 $\frac{3}{4}$, vt fundamentum 4. in termino 7. quare ex defin. 1. lib. 7. elem. ita erit C 2 $\frac{1}{3}$ ad D 1 $\frac{3}{4}$, vt A $\frac{3}{7}$ ad B $\frac{4}{7}$.

Et idem dicas etiam si proportio esset maioris inæqualitatis, vt A $\frac{6}{2}$ B $\frac{8}{2}$; nam terminus 2. multiplicatus per denominatorem C 3. producit antecedentem 6. proportionis A, & idem consequens B 2. per denominatorem proportionis E 4. multiplicatus producit 8. Ergo multiplicatur continentia 2. in 6. toties, quoties vnitas in denominatore 3. continetur, & vt 2. in termino 8. comprehenditur ita vnitas in denominatore 4. ipsius. Ergo ex defin. 1. lib. 7. elem. vt est 3. ad 4. denominatores, ita est proportio A $\frac{6}{2}$ ad proportionem B $\frac{8}{2}$.

THEOR. II. PROP. II.

Duæ rationes habentes commune consequens eam sortiuntur rationem, quæ inter fundamenta reperitur.

SInt rationes A $\frac{3}{7}$, & B $\frac{4}{7}$. *Dico eas eam consequi rationem, quæ inter fundamenta reperitur*; nimirum 3. & 4. Si tamen eodem termino gaudeant, & ita esse Rationem A $\frac{3}{7}$ ad Rationem B $\frac{4}{7}$, vt 3. ad 4.

Probatur. Nam fundamentum A 3. ductum in denominatorem suum 2 $\frac{1}{3}$ producit terminum 7. & rursùs fundamentum B 4. ductum in suum Denominatorẽ D 2 $\frac{3}{4}$ pducit terminum eundem 7. Ergo ex 17. lib. 7. ita erit A 3. ad B 4. vt Denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denominatorem D 1 $\frac{3}{4}$. Sed, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denominatorem $\frac{3}{4}$ sic est Ratio A $\frac{3}{7}$ ad rationem B $\frac{4}{7}$. Ergo Ratio A $\frac{3}{7}$ ad Rationẽ B $\frac{4}{7}$ est vt 3. fundamentũ ad fundamẽtũ 4.

Et idem erit in proportione minoris inæqualitatis, vt A $\frac{3}{2}$, & B $\frac{4}{2}$, nam erit A ad B, vt 3. ad 4. eadem ratione: & fundatur in propos. 17. lib. 7.

THEOR. III. PROPOS. III.

Proportiones eosdem antecedentes habentes, erunt inuicem, vt termini inuerso ordine, vt secundus terminus ad primum.

A $\frac{2}{\text{B } 3}$ A $\frac{2}{\text{C } 4}$ E 1 $\frac{1}{2}$ B 3

FIat enim, vt C ad A; nimirum 4. ad 2. ita B 3 ad aliud E, 1 $\frac{1}{2}$; erit ratio AB ad rationem EB, vt A 2. ad E 1 $\frac{1}{2}$ ex anteced. sed eadem est ex effectione EB proportio, ac AC. Ergo proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$ est, vt A ad E; sed ex effectione, vt C est ad A; sic B est ad E. Ergo permutando, vt C 4. terminus secundus est ad B 3. primum; sic A est ad E, & ideo etiam proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$, quæ ostensa est, vt A ad E, erit etiam, vt terminus secundus C 4. ad primum B 3.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. IV.

Datæ sint quotcumque rationes earum denominatores reperire.

DAtæ sint proportiones A $\frac{4}{6}$, & B $\frac{2}{4}$, & oporteat reperire harum proportionum denominatores.

Duplici modo id fit. Primo efficiatur, vt 4. ad 2. in proportione B, sic in proportione A 6. ad aliud, quòd sit E 3. quartum proportionale in eadem specie quãtitatis. Dico E 3. & B 4. *esse Denominatores A 4. quidem proportionis A, & E 3. proportionis B.*

A $\frac{4}{6}$ B $\frac{2}{4}$

E 3

Probatur. Nam ex effectione B 4. terminus est ad suum fundamentum 2. vt A 6. terminus est ad aliud 3. Ergo *inuertendo* in proportione B 2. erit ad 4. vt E 3. aliud inuentum ad A 6. Cum ergo sit ratio alius E 3. ad A 6. quæ 2. ad 4. erit etiam ita proportio A $\frac{4}{6}$ ad B $\frac{2}{4}$, vt proportio eadem A $\frac{4}{6}$ ad aliud inuentum E $\frac{3}{6}$, cum ergo 4. & 3. habeant eosdem terminos 6. & 6, erit proportio fundamentorum 4. & 3. eadem, ac Denominatorum ex 1. propos. huius, ideoque 4. & 3. erunt Denominatores proportionum, ita, quòd, vt refertur 4. ad 3. ita continentia A 4. ipsius 6. ad continentiã B 2. ipsius 4. Potest etiã fieri alio modo: Nam datis proportionibus fiat, vt 2. ad 4. terminum in proportione B, sic 4. ad aliud E 8. in proportione A.

A $\frac{4}{6}$ & B $\frac{2}{4}$ $\frac{\text{A } 4}{\text{E } 8}$

Dico, *quòd 6. & 8. erunt Denominatores.*

Probatur. Nam ex effectione in B proportione 2. est ad 4. vt in A proportione 4 est ad 8. Quare ita erit proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt ad proportionem E $\frac{4}{8}$: sed proportio $\frac{4}{6}$ ad proportionem E $\frac{4}{8}$ est, vt 8. ad 6. ex 3. huius. Ergo proportio A $\frac{4}{6}$ ad rationem B $\frac{2}{4}$ est, vt 8. ad 6. quare 8. & 6. erunt Denominatores 8. quidem rationis A, & 6. rationis B.

COROLLARIVM.

COllige hinc: Quomodo duas proportiones diuersorum consequentium, seu antecedentium reducantur ad idem consequens, seu antecedens: nimirum, si fiat, vt in praxibus prædictis. Sic $\frac{4}{6}$, & $\frac{4}{8}$ eædem proportiones sunt, quæ $\frac{4}{6}$, & $\frac{2}{4}$. Sic $\frac{4}{6}$, & $\frac{2}{4}$ sunt eedem, ac $\frac{4}{6}$, & $\frac{3}{6}$, vt in demonstratione ostensum est.

COROLLARIVM II.

ERuitur hinc: Rationes esse inuicem in proportione, vt sunt denominatores. Siquidem proportio A $\frac{4}{6}$ est ad proportionem E $\frac{3}{6}$ ob eundem terminum 6. vt 4. ad 3. Sed proportio B $\frac{2}{4}$ est eadem, ac proportio E $\frac{3}{6}$. Ergo est proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt Denominator 4. ad denominatorem 3.

PROBL. II. PROP. V.

Data ratione, & duabus quantitatibus, alias duas quantitates reperire, quæ sint in proportione data cum istis exhibitis.

SIt data Ratio AB $\frac{2}{5}$, & quantitates C 3. & D 6. & alias duas quantitates oporteat inuenire, quæ faciant proportionalitatem similem ad datas quantitates collatæ; vt est proportio AB $\frac{2}{5}$.

Proportio $\frac{\text{A } 2}{\text{B } 5}$ Date $\frac{\text{C } 3}{\text{D } 6}$

G 7 $\frac{1}{2}$ E $\frac{5}{\text{F } 4}$

D 6

Fiat, vt A ad B rationes, sic C ad aliud G 7 $\frac{1}{2}$. Deinde fiat, vt D 6. ad inuentum G 7 $\frac{1}{2}$. Sic quelibet alia quantitas F 4. ad aliud E 5. Dico, *quòd proportio* CD $\frac{3}{6}$ *ad proportionem* EF $\frac{5}{4}$ *est, vt* A 2. *ad* B 5.

Probatur. Quoniam ex effectione, & inuertendo, vt G 7 $\frac{1}{2}$ est ad D 6. ita est proportio E 5. ad F 4. Et ex 2. huius, proportio CD ad proportionem CD ob eundem terminum D est, vt C ad G: Ideo proportio CD ad proportionem EF, eandem cum GD, erit vt C ad G; sed, vt est A ad B ita effectum est C ad G: Ergo, vt A 2 ad B 5. ita est proportio CD $\frac{3}{6}$ quantitatum datarum ad proportionem EF $\frac{5}{4}$ quantitatum inuentarum.

PROBL. III. PROPOS. VI.

Duas Rationes exhibere, quæ datam habeant rationem,

A $\frac{3}{\text{B } 7}$ A $\frac{3}{\text{C } 8}$ B $\frac{7}{\text{C } 8}$ E $\frac{6}{\text{F } 16}$

SIt data Ratio AB $\frac{3}{7}$, & postulentur duæ similes huic rationi; Componatur A 3. alicui cuicumq; quantitati C 8. & sic etiam B 7. eidem copuletur, sintque proportiones AC $\frac{3}{8}$, BC $\frac{7}{8}$, & erit factum, quod postulatur: Nam ex propos. 3. huius, proportio AC ad rationem BC, est vt A ad B.

Quod si nolimus consequentes eosdem esse fiat, vt A ad C, sic quælibet alia E 6. ad quamlibet aliam E 16. & erit, vt constat EF $\frac{6}{16}$ ad BC $\frac{7}{8}$, vt AC proportio eadem ex effectone, ac EF, ad BC; Sed AC ad BC sunt, vt A ad B: Ergo etiam EF ad BC sunt, vt A ad B.

PROBL. IV. PROPOS. VII.

Rationes duas assignare duabus datis proportionales eiusdem denominationis.

SInt duæ datæ Rationes AB [illegible], & CD $\frac{3}{4}$, & oporteat exhibere duas rationes illis proportionales; quæ eosdem obtineant Denominatores. Fiat, vt D 4. ad C 3. Sic B 5. ad aliud E 3 $\frac{3}{4}$. Erit ratio BA ad rationem BE, vt E ad A ob idem antecedens B ex 3. huius, & *inuertendo* AB erit ad EB, vt A ad E; & quia est eadem Ratio B ad E ex effectione, quæ D 4. ad C 3. & *inuertendo* C ad D, quæ E ad B, ideo erit ratio AB ad rationem CD, vt A ad E. Ponatur itaque quæuis alia V.g. F 6. Dico *Rationem* EF, *&* *Rationem* AF *eosdem denominatores habere*.

B 5 B 5

A 2 / B 5 C 3 / D 4 E $3\frac{1}{4}$ / F 6 A 2 / F 6

Probatur. Proportio AF $\frac{2}{6}$ ad proportionem $\frac{1}{4}$ EF est, vt A 2. ad E 3. $\frac{1}{4}$ ex 2. huius: Sed vt A 2. ad E 2 $\frac{1}{4}$, ita ustensa est Ratio AB ad rationem CD. Ergo ratio AF ad Rationem EF est, vt Ratio AB ad Rationem CD. Ideoque, cum Rationes habeant eandem proportionalitatem; obtinebunt quoque eosdem denominatores.

PROBL. V. PROPOS. VIII.

Assignare proportionalitatem similem proportioni datæ, cui quantitates quoque datæ sint antecedentes, vel consequentes.

SIt data Ratio AB $\frac{2}{3}$, & quantitates C 4. & D 5. & voluntas sit reperiendi duas alias proportiones, quibus sint C, D quantitates antecedentes, sed similes, ac proportio A ad B.

A 2 C 4 quantitates L 6 G 12
Propor.
B 3 D 5 datæ L 6 E 10

Sumantur quæuis L, & fiat, vt A ad L; sic C ad aliud G: Deinde fiat, vt B ad L, sic D ad aliud E. Dico *proportionem* CG *ad proportionem* DE *esse, vt* A *ad* B.

Probatur. Nam Ratio AL ad Rationem BL est vt A ad B; sed, vt est A ad L, sic ex effectione est C ad G; Vnde eius loco substitui potest, & vt b ad L, sic est D ad E; Vnde pariter vicaria Illius BL hæc DE esse potest: Substitutis ergo istis CG, & DE, erit Ratio CG ad rationem DE, vt A ad B.

At è contrariò efficies, si placeat terminos datos C, & D esse consequentes.

L 6 A 2 C 4 G $1\frac{1}{3}$
L 6 B 3 D 5
E $2\frac{1}{2}$

Vt L 6. quælibet est ad A 2. sic C 4. ad aliud G; & vt L 6. eadem priùs electa ad B 3. sic D 5. ad E 2 $\frac{1}{2}$. Eritque ratio GC ad rationem ED, vt A ad B.

Probatur. Vt Ratio AL est ad Rationem BL, sic est A ad B: Sed vt A ad L, sic est G ad C; quia affectum est L ad A, vt C ad g; ideoque *inuertendo* erit A ad L, vt g ad C: Quare proportio GC potest substitui loco proportionis AL. Sic dicas de proportione L ad B, quæ ex effectione est, vt D ad E; ideo inuertendo E ad D erit, vt B ad L: ideoque proportio ED poterit poni loco proportionis BL: Istis itaque illarum loco positis Ratio GC erit ad Rationem ED, vt A ad B sicut erant priùs AL ad BL, vt A ad B.

PROBL. VI. PROPOS. IX.

Data Ratione, & quantitate aliqua cum duobus denominatoribus assignatæ quantitati terminum reperire, vt Ratio data sit ad rationem, cuius, quæsitus est terminus, vt Denominator ad Denominatorem.

SInt Denominatores C 4. & D 3. & proportio data AB $\frac{2}{6}$, & quantitas E 5. cui terminus debeat assignari V. g. F: ita vt proportio DA sit ad proportionem EF, vt Denominator 4. ad Denominatorem 3.

A 2 C 4
Propor. Denomin.
B 6 D 3

G $1\frac{1}{2}$ F $1\frac{1}{4}$
B 6 E 5

Fiat, vt C ad D, sic A ad aliud G $1\frac{1}{2}$: Deinde B 6. ad G, $1\frac{1}{2}$; sic quantitas data E 5. ad aliud F, $1\frac{1}{4}$ & erit F terminus quesitus. Dicet *quæ* AB *Ratio proportionem ad Rationem* FE, *vt Denominator* C *ad Denominatorem* D.

Probatur. Ex effectione: vt E 5. ad F $1\frac{1}{4}$, sic B 6 est ad $1\frac{1}{2}$, & *inuertendo*, vt F est ad 8, sic G ad B. Proportio verò AB ad proportionem GB ob eundem terminum B refertur, vt A ad G, ideoque AB erit ad FE loco rationis GB eiusdem positam, vt A ad G. Sed vt A ad G, ita factum est C ad D. Ergo vt C ad D; ita est Ratio AB ad rationem FE.

A 2 C 4 E 5
G $1\frac{1}{2}$
B 6 D 3 F 20

Quod si quis cupiat quantitatem datam E 5. esse non consequentem, sed antecedentem: Postquam fecit, vt C ad D, ita A ad G. Deinde è conuerso faciat, vt G est ad B, sic data quantitas E 5. ad aliquam aliam F 20. eritque AB ad rationem FE $\frac{1}{4}$, vt C ad D.

Probatur. Ex effectione E est ad F, vt G est ad B, sed vt Ratio AB est ad rationem GB, sic est A ad G ex 2. huius, ideoque erit etiam AB ad rationē EF eandē, quā GB, vt A ad G; sed A ad G ita facta est, vt C ad D: Ergo, vt C ad D, ita erit proportio AB ad proportionem EF, in qua quantitas E data est antecedens.

EXPENSIO III.

De proportionum compositione.

EXplicauimus Tract. 9. in Elementis, quid sit compositio proportionum: modo aliquas insigniores compositionum proprietates, quæ ad arguendum in proportionibus sunt necessariæ, demonstrare oportet.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. X.

Inter magnitudines; si interponatur quælibet magnitudo, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad interpositam, & interpositæ ad extremam.

SInt propositæ duæ magnitudines A 2. & B 12. & interponatur quælibet V.g. 4. C, proportio 2. ad 12. componitur ex proportione A 2. ad C 4. & 4. ad B 12.

Reperiantur denominatores proportionum 2. ad 4. & sit D 2. & C 4. ad B 12. & sit F 3. Dico, quòd, & si 2. multiplicet 3. quantitates denominatoresque propo. tionum producetur H 6. quæ quantitas erit denominator proportionis 2. ad 12. & ideo, quòd proportio A 2. ad B 12. componetur ex proportione 2. ad 4. & 4. ad 12. Quia quantitates, seu denominatores ipsarum proportionum D 2. & F 3. inuicem multiplicati producunt quantitatem proportionis, quam habet A 2. ad B 12. vt vult definitio 8. Tract. 9. part. I.

Termini A 2 C 4 B 12
Denominatores D 2 F 3
Quantitas L H 6 Quantitas
Proportionis D in F.
inter AB.

Prodatur, Reperiatur Denominator, seu quantitas proportionis A ad B, & sit quantitas L, & ostendam; quòd hęc quantitas L est eadem, quam quantitas H 6. ex multiplicatione denominatorum D 2. & F 3.

Quantitas ergo L est illa ex principio huius I. quæ multiplicans terminum A 2. producit B 12. alium terminum: sed etiam quantitas H 6. multiplicans terminum 2. producit 12. B; Ergo sunt quantitas L, & H 6. æquales ex prop. 19. lib. 7. Eucl.

Id autem patet: Nam D 2. multiplicans F 3. facit H 6. & idem D 2. multiplicans 2 A facit C 4: interpositam; Ergo ex propos. 19. lib. 7. ita erit F 3. ad A 2. multiplicati, vt H 6. ad C 4. geniti, & permutando ita erit F 3. ad H 6. vt A 2. ad C 4. Quare ex propos. 19. lib. 7. extremæ quantitates 3. & 4. producent eandem quantitatem inuicem ductæ, ac mediæ H 6. & A 2. nempe 12. Quod etiam erit verùm; quamuis maior quantitas interponatur V. g. C 16. inter A 2. & B 12. Nam Denominator proportionis 2. ad 16. est D $\frac{1}{8}$, & 16. ad 12. est F $\frac{4}{3}$: Si ergo 8. multiplicet 2. producet interpositam 16. & si multiplicet alterum denominatorem $\frac{4}{3}$ facit 6. Ergo ita erit $\frac{4}{3}$ ad 2. vt 6. ad 16. ideo producent eundem numerum 12.

A 2 C 16 B 12
Denominatores D 8 F $\frac{4}{3}$
Quantitas L H 6 Quantitas
Proportionis ex D in F.
inter A, & B.

THEOR. II. PROPOS. XI.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum antecedentium, & consequentium inuersè sumptorum.

SInt datę Rationes A 3. ad B 4. & C 5. & D 8. Dico *proportionem* AB $\frac{3}{4}$ *ad* CD $\frac{5}{8}$ *componi ex proportione* A 3. *ad* C 5. *& proportione* D 8. *ad* B 4.

A 3 / B 4 C 5 / D 8 E $2\frac{1}{2}$

Fiat, vt D ad C, sic B ad aliud E. Erit ex prop. 4. huius AB proportio ad CD proportionem, vt A ad E: Quia est ex effectione B ad E, vt D ad C, & inuertendo E ad B, vt C ad D: Est autem A B ad EB proportionem, vt A ad E; ideoque AB ad CD proportionem, vt A ad E. Sed ratio A ad E componitur ex proportionibus A ad C, & C ad E ex præass. 2. Tract. elementaris; quia sufficit ponere quid intermedium; vt extrema ex ea proportione dicatur composita. Igitur proportio Rationis AB ad rationem CD componitur ex proportione A ad C, & C ad E; quia verò ex constructione est, vt D ad C; sic B ad E, & *permutando* est, vt D ad B, sic C ad E: Ergo proportio A ad E componitur ex proportionibus, nedum A ad C, sed etiam D ad B, quæ est eadem, quæ C ad E, quare etiam proportio AB ad CD componitur ex proportione A ad C, & D ad B.

Quod verò AE componatur ex proportionibus, A ad C, & C ad B, nempe 3. ad 5. & 5. ad 2 $\frac{1}{2}$ potes etiam videre ex præced.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum alterius, quidem directè alterius autem proportionis inuersè sumptorum.

A 1 / B 3 C 2 / D 5 E $1\frac{1}{5}$

SIt A 1 ad B 3. at C 2. ad D 5. *Dico proportionē* AB $\frac{1}{3}$ *esse compositam ex proportione* A 1. *ad* B 3. *&* D 5. *ad* C 2. *inuersè sumptorum* fiat, vt D 5. ad C 2. sic B 3. ad aliud E 1. $\frac{1}{5}$. Erit ex 4. huius, vt in pręc. Ratio A ad E, quam habent rationes AB ad CD. Sed ratio A ad E $1\frac{1}{5}$ est cōposita ex Ratione A 1. ad B 3. & B 3. ad E 1 $\frac{1}{5}$ ex 10. h: proportio verò B ad E est eadem, quę D ad C: Ergo etiam Ratio AB ad Rationem CD est composita ex ratione A ad B, & B ad E hoc est D ad C, sicut est composita proportio A ad E, quæ est eadem, ac Rationum AB, & CD.

THEOR. IV. PROPOS. XIII.

Duas Rationes similes non inuicem, sed cum alijs duabus compositæ producunt proportionem similem alteri ex duabus Rationibus similibus compositis consurgenti.

*SIt data proportio AD $\frac{6}{3}$ similis proportioni FE $\frac{4}{2}$, & alia proportio CB $\frac{5}{4}$ similis alteri HL $\frac{16}{8}$. Dico, quòd, si inuicem proportiones componantur AD, & CB inter se dissimiles, sed similes alijs duabus FE, & HL, quæ inuicem etiam componantur atq; producant proportiones IK $\frac{30}{12}$, & MN $\frac{40}{16}$. Dico inquam *proportiones esse similes*, esseque I ad K, vt M ad N.

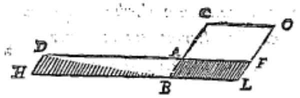
A 6 — D 3 F 4 — E 2 C Denomin. I 2. 2 I 30 — K 12

C 5 — B 4 H 16 — L 8 Denom. $1\frac{1}{4}$ $1\frac{1}{4}$ M 40 — N 16

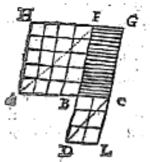
Sint Denominatores proportionis AD 2. & FE pariter 2. eo quod proportiones ponantur similes silicet ab eodem, vel æquali denominatore denominatas ex defin. 3. huius.

Item denominatores CB, & HL erunt $1\frac{1}{4}$, & $1\frac{1}{4}$. Si ergo denominatores isti componantur 2. cum $1\frac{1}{4}$, & 2. cum $1\frac{1}{4}$, quæ compositio fit multiplicando, producent denominatorem æqualem $2\frac{2}{4}$: & $2\frac{2}{4}$. Sed isti sunt denominatores proportionum compositarum IK, & MN ex def. 8. Tract. 9. Ergo ex defin. 3. huius compositæ proportiones IK, & MN erunt similes.

Et licet hęc propositio sit vniuersalis, etsi numeris explicata, eam tamen, & rectangulis applicabimus ad maiorem explicationem aliquarum prop. Conicarum, cui est necessaria.



* Sit basis AC ad AB in rectangulis AO, & AH sicut in rectangulis BH, & BL basis AB ad CB, & AF ad AD, in primis, vt FB, & BD in alijs. Ergo rectangulum AO super AC erit ad nigrū AL eiusdem altitudinis super AB, vt rectangulum BH super alteram basim AB ad nigrum BG eiusdem altitudinis super BC. Sed nigrum AL est ad eiusdem altitudinis rectangulum feminigrum BD, vt BG nigrum, & eiusdem altitudinis ad BL ex prop. 26. lib. 6. Quia basis priorum AF ad AD ponatur, vt BF ad BD in postremis. Quare ex equo in prima fig. rectangulum AO erit ad seminigrum AH, vt AF rectangulum ad rectangulum BL in postremâ.



THEOR. V. PROPOS. XIV.

Si ex duabus proportionibus similibus auferantur duæ proportiones similes, reliquæ proportiones remanent similes.

SInt proportiones IK, & MN, vt in præced. propos. & detrahantur ex ipsis duæ proportiones similes AD, & FE. *Dico residuas esse quoque proportiones similes* CB, *&* HL.

Probatur: nam sint proportionum integrarum IK, & MN denominatores $2\frac{2}{4}$, & $2\frac{2}{4}$ erunt enim denominatores æquales, quia proportiones dicuntur similes ex definit. 3. huius: Rursusque sint denominatores ablatarum proportionum 2. & 2. qui etiam erunt æquales ob ablatarum proportionum similitudinem. Auferantur itaque isti denominatores à primis, quæ ablatio proportionalis fit diuidēdo, cùmq; ab ęqualibus ęqualia demātur, vel æqualia per æqualia partiātur, residua remanebunt æqualia $1\frac{1}{4}$, & $1\frac{1}{4}$, quare etiam proportiones remanentes ex defin. 3. h. erunt similes.

COROLLARIVM

HInc ergo patet modum argumentandi in compositione rationum similium, vel diuisione efficaciter conuincere, quā ex eò, quòd duæ proportiones sint compositæ ex proportionibus similibus arguitur esse similes etiam compositas ex ipsis: Sicque ex eo quòd à proportionibus similibus auferantur proportiones similes, efficaciter deducitur residuas proportiones esse inuicem similes, quos modos arguendi descripsimus ad definit. 27. Tract. 9. Elem. part. I.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Componere proportiones.

DAtæ sint proportiones AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{5}$, quas oporteat multiplicare.

Fiat, vt C 3. ad D 5. sic B 4. ad aliud E $6\frac{2}{3}$. *Dico proportionem* AE *esse compositam ex proportione* AB, *&* CD.

A 2 — B 4 C 3 — D 5 E $6\frac{2}{3}$ — B 4

Prob. proportio AE est composita ex proportione A ad B, & B ad E: sed proportio BE est eadem, ac proportio CD. Ergo proportio BE componitur ex proportione AB, & CD; quòd verò AE componatur ex proportione A ad B, & B ad E patet ex propos. 12 huius Expens.

PROB. II. PROPOS. XVI.

Ratio quæuis ducta in rationem æqualitatis producit se ipsam.

SIt data ratio æqualitatis AB $\frac{2}{2}$, & alia ratio CD $\frac{3}{5}$. *Dico; si ducatur* AB *in* CD, *quòd ipsam* CD *Rationem producet.*

Fiat, vt C 3. ad D 5. sic B 2. ad aliud E $3\frac{1}{3}$ ex anteced. Ratio AE erit composita ex AB Ratione, & CD Ratione.

A 2 — B 2 C 3 — D 5 E $3\frac{1}{3}$

Sed Ratio AE est eadem, ac ratio BE; quia A, & B sunt æquales, & Ratio BE eadem, ac ratio CD ex effectione: Ergo Ratio CD ducta, seu composita ex proportione ęqualitatis AB semet generat.

COROLLARIVM.

HInc que educitur; quòd multiplicatio rationum per proportionem æqualitatis nihil addit rationibus; sed relinquit, vt erant.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Datis quatuor Rationibus exhibere proportionem, quam producunt duæ rationes inuicem ductæ ad duas alias Rationes inuicem ductas atque compositas.

SInt quatuor Rationes AB $\frac{2}{3}$, CD $\frac{1}{2}$ EF $\frac{3}{6}$, & GH $\frac{4}{5}$. quarum duæ componantur AB, & CD, aliæ duæ EF, & GH. componantur, & sit inquirendum, quam proportionem producant.

A 2 — P 6 A 2 — B 3 E 3 — F 6 E 6 — Q 15

L $2\frac{1}{2}$ C 1 — D 2 G 4 — H 5 O 3

Fiat vt propos. 15. vt C 1. ad D 2. sic B 3. ad aliud P 6. eritque proportio AP $\frac{2}{6}$ composita ex proportionibus AB, & CD ex propos. 15. huius. Rursus fiat, vt G 4. ad H 5. sic F 6. ad aliud Q $7\frac{2}{4}$: eritq; proportio EQ $3.7\frac{2}{4}$, vel $\frac{6}{15}$ composita ex proportione EF, & GH.

Si ergo ex propos. 4. denominatores proportionum compositarum reperiantur AP $\frac{2}{6}$, & EQ $\frac{6}{15}$ qui erunt huius O 6. & illius L 5. Et erit proportio O 6. ad L 5., seu, vt explicemus alijs terminis 3. ad $2\frac{1}{2}$ illa, quę est inter compositas proportiones AP ex Rationibus AB, & CD, & aliam EQ ex Rationibus EF, & GH confectam.

Prob., ex eadem propos. 4. nam ibi probatur ita esse proportio ad proportionem, vt denominator denominatorem.

THEOR. VII. PROP. XVIII.

Si quatuor quantitates dentur; proportio primæ, & secundæ ducta in proportionem secundæ, ad quartam eandem producit rationem, quæ proportio primæ, & tertiæ ducta in Rationem tertiæ ad quartam.

SInt quantitates A 2. B 3. C 5. D 4. Dico, quod Ratio AB $\frac{2}{3}$ in BD $\frac{3}{4}$ ducta producit eandem Rationem, ac AC $\frac{2}{5}$ in Rationem CD $\frac{5}{4}$ ductam.

Probatur. Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, seu producitur ex proportionibus AB, & BD. Eademque Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, seu producitur ex proportione AC, & CD ex 10. huius. Ergo Ratio AB ducta in Rationem BD eandem producit Rationem AD, ac AC ratio ducta in CD rationem.

THEOR. VII. PROP. XIX.

Ratio ducta in seipsam conuersis terminis producit rationem æqualitatis.

SIt ratio AB $\frac{2}{4}$, quæ ducatur in se, sed conuersis terminis BA $\frac{4}{2}$. Dico, quòd *producit antecedens, & consequens æquales.* Assumatur quantitas C 2. æqualis ipsi A 2. & ordine positis terminis A 2. B 4. C 2. Ratio AB componitur ex proportione A ad B, & B ad C: sed ratio BC est eadem, ac ratio BA; Ergo AC producitur quoque ex multiplicatione rationum AB, & BA conuersis terminis, sed ratio AC $\frac{2}{2}$ est ratio æqualitatis. Ergo ratio AB ducta in rationem BA producit rationem æqualitatis.

EXPENSIO IV.

De proportionum similitudine commutatis terminis.

VT possimus in proportionibus argumentari aliqua de earum similitudine priùs consideranda sunt, in quà vis argumentorum fundatur.

THEOR. I. PROPOS. XX.

Si sint datæ rationes, & termini inuersi sumantur; inuersæ quoque Rationes eandem proportionem habebunt, quam priùs habebant.

SInt duæ rationes AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{5}$ inuertantur termini DC $\frac{5}{3}$, & BA $\frac{4}{2}$. Dico, quod ita erit AB ad CD, vt DC inuersis terminis ad BA ipsas proportiones inuertendo.

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, ita B ad E; $2\frac{2}{5}$, & erit, vt A ad E; ita Ratio AB ad Rationem CD.

A 2 — B 4 C 3 — D 5 E 2 $\frac{2}{5}$

Prob. Proportio BE ad BA ob idem fundamentū B est, vt A ad E ex 3. h. Sed ratio B ad E eadē est, ac Ratio D ad C ex constructione. Ergo Ratio DC ad BA est, vt A ad E; sed vt A ad E, ita est AB ad CD ex dictis prop. 4. Ergo vt AB ad CD, ita est DC ad BA.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

Proportiones duæ adsint, quarum termini permutatè sumantur, dicent quoque eandem proportionem.

SIt AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{4}{5}$, & termini permutatè sumantur AC $\frac{2}{4}$, & BD $\frac{3}{5}$. Dico, quod Ratio AB ad ad rationem CD est, vt AC ad BD proportionem.

$A\,\frac{2}{3}\ B \quad C\,\frac{4}{5}\ D \quad A\,\frac{2}{4}\ C$ & $B\,\frac{3}{5}\ D \quad F\,2\frac{2}{5}\,/\,E\,2\frac{2}{5}$.

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, sic B ad aliud E $2\frac{2}{5}$ Eritq; vt AB ad CD rationem ita A ad E.

Fiatque Rursus ex rationibus quarum permutati termini, vt D ad B; sic C ad aliud F.

Probatur itaque. Quia est, vt D ad C, sic B ad E ex effectione. Erit permutando D ad B, vt C ad E: Sed, vt D ad B, ita facta est ratio C ad F. Et ideo cũ C ad F sit idem cum ratione D ad B ex 16.l.5. erit C ad E eadem ratio, ac C ad F: quare ex nona quinti E, & F erunt quantitates æquales.

Cum ergo sit AB ad CD rationem ex effectione, vt A ad E, & inuersis terminis ratio AC ad BD rationem, vt A ad F, & AE, & AF sint eędem rationes etiam AB ad CD, & AC ad BD eandem habebunt similitudinem.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Si sint datæ duæ Rationes, quarum inuertantur, & permutentur termini erunt adhuc in eadem ratione.

Sint AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{4}{5}$, & inuersè permutatèque sumantur termini DB $\frac{5}{3}$, & CA $\frac{4}{2}$. Dico quod AB est ad CD, vt DB ad CA.

$A\,\frac{2}{3}\ B \quad C\,\frac{4}{5}\ D \qquad D\,\frac{5}{3}\ B \quad C\,\frac{4}{2}\ A$

Proportio AB est ad CD ex 20. vt Ratio DC ad BA sed ex præced. vt DC ad BA, sic est DB ad CA. Ergo ratio AB ad rationem CD est, vt ratio DB ad rationem CA.

EXPENSIO V.

De proportionum Dialectica.

Sicut quatuor terminis argumentamur in Trac: elementarijs; sic etiam octo terminis possumus argumentari. Scilicet cũ pro terminis ponuntur non quantitates ipsæ, sed quantitatum Rationes, quæ dicantur similes alijs duabus rationibus, ex quarum similitudine deducatur arguendo similitudo inter easdem rationes; sed alio modo combinatas, vnde 7. modi argumentandi, quos ex Euclide enumerauimus Tract. 9. etiam proportionibus conuenire hic ostendemus.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Sit Ratio fundamentum ad rationem terminum sit, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum; Erit quoque permutãdo Ratio fundamentum ad aliam rationem fundamentum, veluti ratio terminus ad aliam rationem terminum.

Sit Ratio A $\frac{2}{4}$ ad rationem B $\frac{2}{6}$ terminum, vt alia ratio C $\frac{5}{10}$ ad aliam rationem D $\frac{3}{9}$. Dico quod permutatione vti poterimus, eritque A $\frac{2}{4}$ fundamentum ad rationem C $\frac{5}{10}$ fundamentum, vt B $\frac{2}{6}$ terminus ad D $\frac{3}{9}$ terminum.

E 2   F 5

$A\,\frac{2}{4}$ ad $B\,\frac{2}{6}$ vt $C\,\frac{5}{10}$ ad $D\,\frac{3}{9}$. Ergo $A\,\frac{2}{4}$ ad $C\,\frac{5}{10}$ vt $B\,\frac{2}{6}$ ad $D\,\frac{3}{9}$.

H $1\frac{1}{3}$. L $3\frac{1}{3}$.

Reperiãtur ex propos.4. huius Denominatores proportionum E 2. rationis A $\frac{2}{4}$, & F 5. rationis C $\frac{5}{10}$. Sic H $1\frac{1}{3}$ rationis B, & tandem L $3\frac{1}{3}$ rationis D. Eritque ex Coroll. propos.4. huius A ratio ad B Rationem, vt denominator E ad denominatorem H.

Sed ex hypothesi, vt est ratio A ad rationem B sic est ratio C ad D rationem, & C ratio est ad D rationem, vt Denominator F est ad denominatorem L, quare ex *æquo*. Ita erit denominator E ad H denominatorem, vt denominator F ad denominatorem L, quare, & permutando erit E ad F, vt H ad L denominatores, vnde ex Coroll. propos.4. erit etiam ratio A ad rationem C, vt ratio B ad D.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si sit ratio fundamentum ad rationem terminum, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum: erit etiam inuertendo ratio terminus ad rationem fundamentum, vt alia ratio terminus ad aliam rationem fundamentum.

Sint rationes eædem, quæ superiores.

E 2   F 5

$A\,\frac{2}{4}$ ad $B\,\frac{1}{3}$ vt $C\,\frac{5}{10}$ ad $D\,\frac{4}{12}$. Ergo $B\,\frac{1}{3}$ ad $A\,\frac{2}{4}$ vt $D\,\frac{4}{12}$ ad $C\,\frac{5}{10}$.

H $1\frac{1}{3}$ L $3\frac{1}{3}$

Dico, quod si Ratio A sit ad Rationem B, vt ratio C ad rationem D erit etiam inuertendo ratio B ad rationem A, vt ratio D ad rationem C.

Probatur. Nam denominator E rationis A est ad H denomicatorem B, vt ipsa ratio A ad B ex Cor. 2. propos. 4. & ratio A est ad rationem B, vt C est D rationes, & ratio C ad D, est, vt denominator F rationis C ad denominatorem L rationis D. Ergo ex æquo denominator E rationum A ad H denominatorem rationis B erit, vt denominator F rationis C ad denominatorem L Rationis D. Quare, & inuertendo H erit ad E denominatores, vt L ad F. Quare ex Coroll. propos.4. etiam ratio B erit ad A, vt D ad C inuertendo.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Sit ratio pars ad rationem compartem alicuius totius rationis, vt alia ratio pars ad aliam rationem compartem alterius totius rationis: erit etiam componendo totum ad suam partem, vt alterum totum ad aliam suam partem.

Inuentis enim denominatoribus cuiuscumque proportionis.

E 3   F 6

$A\,\frac{3}{4}$ ad $B\,\frac{2}{3}$ vt $C\,\frac{6}{8}$ ad $D\,\frac{10}{15}$. Ergo $AB\,\frac{3}{12}$ ad $A\,\frac{3}{4}$ vt $CD\,\frac{60}{120}$ ad $C\,\frac{6}{8}$.

H $2\,\frac{2}{3}$ L $5\,\frac{1}{3}$

Vel etiam

$A\,\frac{3}{4}$ ad $B\,\frac{2}{3}$ vt $C\,\frac{6}{8}$ ad $D\,\frac{10}{15}$. Ergo $AB\,\frac{3}{12}$ ad $B\,\frac{2}{3}$ vt $CD\,\frac{60}{120}$ ad $D\,\frac{10}{15}$.

Sint E 3. rationis A, & H $2\frac{2}{3}$ rationis B, sic F 6. rationis C, & L $5\frac{1}{3}$ rationis D denominatores. Erit itaque ex inductione præcedentium propos. duarum E ad H, vt F ad L ob rationum suppositam similitudinem A ad B, vt C ad D.

Sed E, cum H, denominatores, est ad H, vt F cum L, denominatores, est ad L *componendo*: Ergo etiam ratio AB simul, vt totum ad A partem erit, vt ratio CD simul, vt totum ad rationem C partem, quòd est componendo arguere.

Potest autem etiam referri compositum AB ad compartẽ B, vt compositum CD ad compartem D.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

Si sit ratio totum ad partem suam, vt aliud totum ad partem quoque suam: Erit etiam diuidendo pars ad suam compartem, vt alia pars ad aliam compartem suam.

Sit eadem dispositio proportionum quę priùs, & ratio composita AB sit ad rationem simplicem A, vt ratio composita CD ad rationem simplicem C. Dico, *quòd ratio simplex, & pars* A *erit ad suam compartem simplicem* B *diuidendo vt simplex ratio* C *est ad suam compartem rationem simplicem* D.

EH 1   FL 2   E 3   F 6

$AB\,\frac{6}{12}$ ad $A\,\frac{3}{4}$ vt $CD\,\frac{60}{120}$ ad $C\,\frac{6}{8}$. Ergo $A\,\frac{3}{4}$ ad $B\,\frac{2}{3}$ vt $C\,\frac{6}{8}$ ad $D\,\frac{10}{15}$.

E 3   F 6   H $2\,\frac{2}{3}$ L $5\,\frac{1}{3}$

Constituãtur singularum proportionum denominatores E, H, F, L. Quoniam Ratio AB ad A est, vt ratio CD ad C: erit etiam denominator EH ad E prioris combinationis rationum, vt denominator FL ad F posterioris rationum combinationis ex Coroll.2. propos.4. huius. Quare diuidendo, quia EH est ad E, vt FL est ad F erit etiam E ad H, vt F ad L suos denominatores partiales. Quare etiam ex Coroll 2.prop.4. huius ratio A erit ad rationem B, vt ratio C est ad rationem D.

THEOR. VI. PROPOS. XXVII.

Si sit ratio composita ad rationem simplicem suam partem, vt alia ratio composita est ad aliam rationem suam partem simplicem: Erit etiam ratio prior composita ad suam alteram compartem rationem simplicem, vt secunda ratio composita ad suam alteram portionem simplicem.

Sit quoque eadem dispositio rationum, vt in præcedenti.

EH 1   FL 2   EH 1   FL 2

$AB\,\frac{6}{12}$ ad $A\,\frac{3}{4}$ vt $CD\,\frac{60}{120}$ ad $C\,\frac{6}{8}$. Ergo $AB\,\frac{6}{12}$ ad $B\,\frac{2}{3}$ vt $CD\,\frac{60}{120}$ ad $D\,\frac{10}{15}$.

E 3   F 6   H $2\,\frac{2}{3}$ L $5\,\frac{1}{3}$

Et sint inuenti rationum denominatores compositarum EH compositæ rationis AB, & FL rationis CD. Sicque denominatores rationum simpliciem F, & H, nec non, & F, & L.

Igitur ex Cor.2.p.4. quia est AB, ad A, vt CD ad C: Erit etiam denominator EH ad E, vt FL ad F, cum eorum rationes sint eædem, ac rationum proportiones: Quia itaque est EH ad E, vt FL ad F erit quoque *conuertendo* EH ad H, vt FL ad L: quare etiam proportiones similes suis denominatoribus ex Coroll. propos. 4. simili correspondentia conuenient, & AB, erit ad B, vt CD erit ad D.

THEOR. VI. PROPOS. XXVIII.

Si sit ratio ad rationem, vt altera ratio ad aliam rationem, & ista altera sit ad tertiã rationem, vt hæc alia ad tertiam quoque rationem aliam, erunt etiam ex æquo prima ratio ad tertiam, vt alia ratio prima ad aliam tertiam.

$$A\,\frac{1}{3}\quad C\,\frac{4}{9}\quad E\,\frac{4}{8}\qquad A\,\frac{1}{3}\quad E\,\frac{4}{8}$$

Ergo

$$B\,\frac{2}{6}\quad D\,\frac{8}{12}\quad F\,\frac{2}{4}\qquad B\,\frac{2}{6}\ \text{ad}\ F\,\frac{2}{4}$$

SInt datæ Rationes, & prima in priori serie A sit ad C, vt in posteriori B est D; At in priori C sit ad E, vt in posteriori D est ad F. Dico, *quòd ex æquo erit quoque ratio A ad rationem E, vt ratio B ad rationem F.*

Probatur Progress. 1. Ratio A est ad C, vt B ad D, ergo permutando A erit ad B, vt C ad D.

Progress. 2. Rursus, vt respicit ratio C rationem E respicit quoque similiter ratio D rationem F: Quare permutando C erit ad D, vt E ad F.

Sed iam ostensum est C referri ad D progress. 1. vt A ad B. Ergo etiam A referretur ad B, vt E ad F. Quare rursus permutando A proportione correspondebit ipsi E, vt B correspondet ipsi F, quod erat demonstandum.

COROLLARIVM

HInc est,: quòd etiam si proportio sit perturbata idem euenSet: vt vides in expositis rationibus.

$$A\,\frac{1}{3}\quad C\,\frac{6}{9}\quad E\,\frac{3}{4\frac{1}{2}}$$

$$B\,\frac{4}{12}\quad D\,\frac{2}{6}\quad F\,\frac{8}{12}$$

Ergo vt

$$A\,\frac{1}{3}\qquad \text{ad}\ E\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}$$

$$B\,\frac{4}{12}\qquad \text{ad}\ F\,\frac{8}{12}$$

EXPENSIO VI.

De proportionum Algorithmo.

HIc agimus de multiplicatione, diuisione, subductione, additioneque proportionum ostendendo omnes istas varietates operationum, quæ conueniunt numeris, etiam proportionibus suo modo conuenire.

THEOR. I. PROP. XXIX.

Partium simul sumptarum ratio est ad quantitatem datam eadem, ac compositum ex ipsis ad eandem quantitatem datam.

$$A\,\frac{2}{D\,4}\qquad B\,\frac{1}{D\,4}\qquad AB\,\frac{3}{D\,4}$$

SIt data quantitas A, & B, & simul comparentur ad D. *Dico, quod si comparetur* AB *composita ex ipsis ad* D, *eadem omnino proportio est.*

Probatur Ratio A ad D, & B ad D est illa ipsa quantitatis A ad B ex 31. huius. Ergo componendo erit Ratio AD vnà cum ratione BD ad BD, vt ratio A vnà cum ratione B refertur ad B, hoc est, vt AB 3. ad B 1. Quamobrem proportio AD cum BD ad BD erit, vt AB 3. compositum ad D quantitatem datam.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Datæ rationis duplam assignare, aut dimidiatam, aut aliam in alia ratione.

SIt data ratio AB, cuius duplum, aut dimidium postuletur. Fiat quantitas aliqua C dupla quãtitatis A. Dico rationem C ad B esse duplam proproportionis A ad B, & rationem BC esse dimidiam eius, quam habet B ad A.

$$A\ 3\qquad C\ 6$$
$$B\ 4$$

Probatur. Ratio CB ad AB est eadem, quam habet C ad A ex propos. 2. huius: sed C ad A ex effectione habet proportionem duplam, ergo ratio AC ad AB habebit proportionem duplam.

Ratio quoque B ad C, & B ad A est, vt A ad C, sed A ad C habet proportionem dimidiatam. Ergo etiam BC ad BA habebit proportionem dimidiatam.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

Datas proportiones diuersorum antecedentium, vel consequentium ad eadem antecedentia, seu consequentia habentem proportionem reducere.

DOcuimus id Coroll. 2. propos. 4. sed in quãtitatibus rationalibus multiplicabimus simul terminum vnius, cum fundamento alterius, & huius terminum cum fundamento prioris, & deinde termini inuicem V. g. data proportione $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{7}$, quæ reducenda sit ad eundem terminum multiplicabimus 4. per 5. & generabitur 20. deinde 3. per 7. & generabitur 21. & tandem termini 5. & 7. & producetur 35. Proportio itaque $\frac{20}{35}$ erit ea, quæ habebit eundem terminum 35. ac proportio $\frac{21}{35}$.

$$\frac{3}{5}\ \times\ \frac{4}{7}\qquad \frac{20}{35}\qquad \frac{21}{35}$$

Probatur: Quia cum 5. multiplicauit 4. & 7. erit ex propos. 19. septimi 4. ad 7. vt genitus, 20. ad 35. Rursus. Quia 7. multiplicauit 5. & 3. erit eadem proportio 3. ad 5. quæ 21. ad 35. Ergo erunt $\frac{20}{35}$ eadem proportio, quæ $\frac{4}{7}$, & $\frac{21}{35}$, quæ $\frac{3}{5}$.

Si verò quis cupiat antecedentes multiplicet, vt priùs terminos, cum fundamentis alternatim, deinde fundamenta inuicem, & producet $\frac{12}{20}$, & $\frac{12}{21}$, quæ rationes habent idem antecedens 12.

Patet eadem ratione. Nam quia 4. multiplicauit 5. & 3. erit eadem proportio generantium 5. & 3. quę genitorum 12. & 20. ex 19. septimi. Sic, quia 3. multiplicauit 4. & 7. erit eadem proportio generantium 4. ad 7. ac genitorum 12. ad 21. ergo erit eadem ratio $\frac{4}{7}$, ac $\frac{12}{21}$, & eadem quoque $\frac{3}{5}$, & $\frac{12}{20}$.

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

Datis quibuslibet rationibus eas in vnicam summam aggregare.

SInt rationes AB, & CD vnà aggregandæ. Reperiantur denominatores faciendo, vt D ad C, ita correspondeat proportione B ad aliud F. Deinde assumatur aliqua quantitas H illis A, & B. denominatoribus simul sumptis æqualis. Dico HB *esse summam proportionum* AB, & CD.

$$\frac{A\ 3}{B\ 4}\quad \frac{C\ 4}{D\ 5}\quad \frac{F\ 3\frac{1}{5}}{B\ 4}\quad \frac{H\ 6\frac{1}{5}}{B\ 4}\quad \frac{I\ 3}{L\ 8}\quad M\ 1\frac{1}{2}\quad \frac{N\ 7\frac{7}{10}}{B\ 4}$$

Ratio AB, & FB est eadem, ac ratio AB, & CD. quia CD, & FB eadem ratio est ex Coroll. 2. prop. 4. huius: sed ratio HB est æqualis illis duabus ex 30. prop. Ergo proportio AB, & CD in vnam summam redacta est.

Quod si placeat, & alias aggregare ipsi HB, idem fiat; sit V. g. IL $\frac{3}{8}$, & debeat aggregari proportioni HB; Fiat, vt 8. ad 3. sic 4. ad aliud M, assumaturque quantitas æqualis quantitati H, & M s. N, & erit proportio NB ex omnibus illis aggregata; nempe ex AB, CD, & IL, vt patet: quia NB ob eãdem prædictam rationem est aggregatum proportionum HB, & IL. Proportio verò HB est aggregatum proportionum AB, & CD. Ergo NB erit aggregatum proportionum earundem AB, & CD, & insuper rationis IL.

Si verò agatur de numeris ipsis, vel quantitatibus, quæ proportionum præbent fundamenta. Addenda simul sunt antecedentia, simulque consequentia, & numerus ex additione collectus erit summa exoptata. V. g. sint 2 $\frac{2}{5}$, idest $\frac{12}{5}$, & 3 $\frac{1}{4}$, vel $\frac{13}{4}$ in vnam summam colligendi. Colligantur simul fundamenta proportionum 12. & 13. in minimas partes redacta, & fundamentum fiet 25. deinde termini 5. & 4. & fient 9. erit ergo summa collecta $\frac{25}{9}$, vel 2 $\frac{7}{9}$. Patet, quia cum additi sint simul, & antecedentia, & consequentia, etiam simul additas earum proportiones hoc in sensu necesse est fateri. Patet quoque, quia si auferatur à proportione $\frac{25}{9}$ proportio $\frac{12}{5}$ restituitur proportio $\frac{13}{4}$.

Aduerte tamen, quod Denominatores non sunt simul addendi V. g. 2 $\frac{2}{5}$ cum 3 $\frac{1}{4}$; sed ipsa proportionum antecedentia 12. & 13. neque hic modus addendi est propriè addere proportiones: sed proportionum terminos.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIII.

Datam proportionem minorem à maiore detrahere.

SIt data proportio minor AB, quam oporteat subducere à proportione maiore CD.

$$\frac{A\ 2}{B\ 4}\qquad \frac{C\ 6}{D\ 9}\qquad \frac{E\ 4\frac{1}{2}}{D\ 9}\qquad \frac{F\ 1\frac{1}{2}}{D\ 9}$$

Fiat, vt B ad A, sic D ad aliud E. Subducaturq; quantitas E 4 $\frac{1}{2}$, vel detrahatur à quantitate C 6. & remanebit F, 1 $\frac{1}{2}$, & F, 1 $\frac{1}{2}$ ad D 9. habet proportionem residuam, & quod proportio FD sit residua proportionis AB à proportionis CD subductione.

Probatur. Nam ex 29. huius rationes ED, & FD rationi quantitatũ E, & F simul sumptarũ equantur, idest ipsi C ad D: sed proportio ED est eadem, ac AB, ergo proportio AB, & FD æquantur ipsi CD. Quare proportio FD erit residuum subducta proportione AB à proportione CD. Quantitates autem tenùs: non autem quoad proportiones subductio fit detrahendo fundamenta à fundamentis, & terminos à terminis proportionum. Sic si velimus à proportione $\frac{25}{9}$ deducere proportionem $\frac{12}{5}$ subducemus 12. à 25. antecedentia, & 5. à 9. termini ambo, & residuum erit proportio $\frac{13}{4}$. Patet, quia si simul vt priùs addantur, restituitur proportio $\frac{25}{9}$, cuius denominator est 2 $\frac{7}{9}$.

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

Datam rationem per aliam multiplicare.

MVltiplicare idem est, ac componere; ideoque eodem modo, ac propos. 15. hoc prob. operi demandabimus, quod si placeat efficere, vel multiplicando, ita faciendum erit.

Sit data proportio AB $\frac{2}{3}$, & alia CD $\frac{5}{9}$, quas oporteat multiplicare. Assumatur toties quantitas 2. quot partes sunt in 5. nempe quinque duenarios, idest 10. F, & toties quantitas 3. quot partes sunt in 9. eritque quantitas composita F 27. Dico, *quod proportio* 10. *ad* 27. *est proportio genita ex multiplicatione* AB *in* CD.

$$E\ 10$$
$$\frac{A\ 2}{B\ 3}\ \times\ \frac{C\ 5}{D\ 9}$$
$$I\ 15\qquad F\ 27$$

Probatur. Nam assumatur toties quantitas 3. quot vnitates sunt in 5. & fiunt I 15. ordineque ponantur quantitates E 10. I 15. F 27. proportio E ad F componetur ex proportione E 10. ad I 15. & I 15. ad F 27. ex propos. 10. huius.

Sed ex propos. 17. lib. 7. quia 5. multiplicat 2. & 3 & facit 10. & 15. eadem proportio erit inter genitas quantitates 10. & 15. quæ inter generantes 2. & 3. Sic quia 3. multiplicauit 5. & 9. & fecit

15. & 27. eadem proportio erit genitorum 15. & 27. quæ generantium 5. & 9. Cùm ergo 10. & 15. sit eadem proportio, quæ 2. ad 3. & 15. ad 27. quæ 5. ad 9. Proportio 10. ad 27. dicetur quoque composita ex proportionibus 2. ad 3. & 5. ad 9.

Iste verò modus erit optimus pro numeris, & quantitatibus rationalibus; præscriptus autem propos. 15. huius prorsus est vniuersalis.

PROBL. VI. PROPOS. XXXV.

Datis rationum Denominatoribus ipsas rationes multiplicare.

SInt datæ rationes AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{9}$, & dentur denominatores ipsarum AB denominator GH, & CD denominatur EF, qui simul multiplicentur ex propos. 15. huius; Et producetur denominator alius, qui proportionem compositam denominabit N $\frac{2}{12}$.

A 2   C 3   Denom.   E $1\frac{1}{3}$ / F 4 — N $\frac{2}{12}$; G 2 / H 4 — Vel $2\frac{2}{3}$ N $\frac{}{16}$

B 4   D 9

Probatur ex defin. 8. Tract. 9. Elem. Nam rationum quantitates, idest denominatores inter se multiplicati efficiunt rationem compositam. Vnde N $\frac{2}{12}$ erit proportio composita ex AB, & CD.

Et hic modus, tum quantitatibus rationalibus, tum irrationalibus conuenit.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Datam rationum proportionem per alteram proportionum rationem multiplicare.

SInt datæ duæ rationes AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{3}{5}$, sic, & aliæ duæ EF $\frac{2}{4}$, & GH $\frac{5}{6}$. Reperiantur earum denominatores; & quidem rationis AB sit P 2. rationis verò DC sit Q $1\frac{2}{3}$. Deinde rationis EF sit M 2. & rationis GH sit N $3\frac{3}{4}$.

10   P 2 $\frac{A\ 2}{B\ 3}$ $\frac{E\ 2}{F\ 4}$ — M 2 — 12

15   14

9   Q $1\frac{2}{3}$ $\frac{C\ 3}{D\ 5}$ $\frac{G\ 5}{H\ 6}$ — N $3\frac{3}{4}$ 20

Probatur. Ratio P ad Q denominatores est, vt rationis AB ad rationem CD; item proportio denominatorum M ad N est eadem, ac rationum EF ad GH. Quare si methodo præc. vel 15 h. rationes denominatorum inuicem multiplicentur, & Q $1\frac{2}{3}$ ad P 2. vel redacta ad easdem partes 9. ad 10. & ratio M $3\frac{3}{4}$ ad rationem N 2. vel 20. ad 12. multiplicentur simul, & fiant 9. ad 6. Ratio 9. ad 6. erit ea, quæ ex ratione denominatorum, & ideo ipsarum rationum consurgit, vel alio modo erit proportio 180. ad 120. vt docuimus prop. 34. huius.

PROBL. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Datam rationem in duas ipsam componentes rationes partiri, quæ inter se datam obtineant rationem.

SIt data proportio A 6. ad B 27. & oporteat hanc proportionem in duas diuidere, quæ inuicem datam obtineant rationem E 2. ad F 4.

Rat. $\frac{A\ 6}{B\ 27}$ Prop. data $\frac{E\ 2}{F\ 4}$ $\frac{A\ 6}{D\ 3}$ C 9 $\frac{B\ 27}{D\ 3}$ $\frac{A\ 6}{C\ 9}$ $\frac{C\ 9}{B\ 27}$

Fiat itaque, vt refertur F ad E, quòd sic referatur A ad aliud D. Deinde inter D, B media proportionalis statuatur C. Dico factum esse, quòd proponebatur, & rationem AB esse diuisam in rationes AC, & CB, quæ inter se rationem obtinent, quæ est inter E, & F.

Probatur. Quoniam B est ad C, vt C ad D per constructionem, erit etiam inuertendo D ad C, vt C ad B: sed vt A ad D, sic ex 3. huius est ratio AC ad rationem DC ob eundem terminum C, & ratio DC, est eadem, ac CB: Vnde ratio AC ad rationem CB est A ad D hoc est ex constructione, vt E ad F.

Proportio autem AB componitur ex proportione AC, & CB interposito termino C ex 10. huius: Ergo Ratio AC, & ratio CB sunt duæ rationes, quæ se habent, vt E ad F, quæ componunt proportionem AB.

PROBL. IX. PROPOS. XXXIX.

Datam rationem diuidere.

SIt ratio AB $\frac{4}{5}$ diuidenda per rationem CD $\frac{5}{7}$ fiat, vt D ad C, ita B 7. ad aliud, & prodibit E $4\frac{1}{5}$, itaque ratio AB $\frac{4}{5}$ subductâ ratione CD $\frac{5}{7}$ remanet ratio E 4 ad $4\frac{1}{5}$, idest 20. ad 21.

Probatur. Nam toties AB continet rationem CD, quoties A continet E, quia A, & E sunt denominatores Rationum: & sicuti diuiso numero quotiens demonstrat vices, quibus diuisor continetur in diuisore; sic, & hic denominatores A, & E ostendunt quoties ratio CD continebatur in ratione AB nempe, vt 20. in 21.

Si verò agatur de numeris, vel de quantitatibus rationalibus; fundamenta Rationum cùm terminis alternatim multiplicentur.

V. g. Sit proportio AB $\frac{3}{7}$ auferenda à proportione CD $\frac{4}{5}$ multiplicetur fundamentum huius 3. cum termino alterius 7. & producetur 21. Deinde fundamentum 4. alterius cum termino huius 5. & fient 20. eritque proportio $\frac{20}{21}$, illa, quæ erit quotiens, & demonstrabit, quomodo proportio $\frac{3}{7}$ contineatur in proportione $\frac{4}{5}$.

Probatur. Nam fundamenta 3. & 4. quoque multiplicentur simul; producent 12. Itaque quia 3. multiplicauit modo 4. & priùs 7, erit eadem proportio 4. ad 7. quæ genitorum 12. ad 21. ex prop. 17. lib. 7. Proportio verò 12. ad 21. est composita ex proportione 12. ad 20. & 20. ad 21. ex propos. 10. huius: Proportioque 12. ad 20. est eadem, quæ 3. ad 5. cùm sint 12. & 20. numeri geniti ab eodem 4. qui vtrosque 3. & 5. multiplicauit ex propos. 17. lib. 7. Quare subducta proportione 12. à 20. eadem, quæ 3. ad 5. remanebit proportio 20. ad 21.

Quod autem ratio 20. ad 21. sint quoque quotiens, patet; si inuicem multiplicentur termini: Fiet enim terminus 35. communis vtrisque, vt suprà docuimus propos. 13. huius; ideoque ex propos. 2. huius erit ratio $\frac{20}{35}$ ad rationem $\frac{21}{35}$, vt 20. ad 21. quare proportio 20. ad 21 indicabit, quoties ratio $\frac{20}{35}$ contineatur in ratione $\frac{21}{35}$. Vnde proportio $\frac{20}{21}$ erit quotiens.

COROLLARIVM.

HInc que patet idem esse in proportionibus subducere, ac diuidere, sicut idem est multiplicare, & componere, quia subductâ vnâ ratione ab aliâ, ratio residua est quoque quotiens, & multiplicata ratione per aliam, vt diximus, fit ratio composita.

PROBL. X. PROPOS. XL.

Datis rationibus, quæ inuicem habeant rationem inæqualitatis assignare excessum minoris proportionis super maiorem.

$\frac{A\ 3}{B\ 12}$ $\frac{C\ 6}{D\ 10}$ E $7\frac{2}{10}$

I $1\frac{9}{12}$

K 5

SIt data ratio AB $\frac{3}{12}$, & Ratio maior CD $\frac{6}{10}$. Fiat, vt D ad C, ita B ad aliud exhibebit E $7\frac{2}{10}$. Ideoque ex 4. huius, vt AB ad CD rationem; ita erit A ad E: ponitur autem maior ratio CD ratione AB; erit ergo maior E quantitas, quantitate A. Subducatur itaque, & auferatur ab E quantitas æqualis ipsi A 3. & remanebit residuum E $4\frac{2}{10}$ denominatoris subducto denominatore A 3. Fiat itaque, vt denominator A 3. ad residuum denominatoris A $4\frac{2}{10}$ sic AB $1\frac{3}{12}$ ad aliam rationẽ IK ex propos. 9. huius, & 5. Dico *rationem* IK *esse excessum, quò superat ratio* CD *rationem* AB.

Probatur. Quoniam, vt A ad E totum, denominatores, sic AB ad CD, rationes. Ergo, ex 22. l. 5. vt sublatũ ad residuum denominatoris E, sic AB ablatũ ad residuum rationis CD. Sed vt A ablatum ad residuum denominatoris E, sic ex effectione est ratio AB ad rationem IK. Ergo ratio IK est eadem, ac residuum rationis CD. Quia eadem vna ratio AB eisdem CD, & IK dicit eandem proportionem, quam A denominator ablatum ad residuum denominatoris, E, quod erat ostendendum.

Hęc autẽ IK est eadẽ ac 3. ad $1\frac{2}{10}$ vt patet, solũq; excessus sub alijs terminis, si placeat exquiri potest. Patet verò 3. ad $4\frac{2}{10}$, vel 30. ad 42. esse, vt denominator 4. proportionis AB $\frac{3}{12}$ ad denominatorem IK $1\frac{9}{12}$ ad 5. vel 21. ad 60. qui est 2. & $\frac{9}{21}$, quoniam redacti ad numeros planiores sunt 60. & 84. qui sunt in eadem proportione, ac 30. ad 42.

EXPENSIO VI.

De proportionum similium continuatione.

SIcut datis duabus quantitatibus, vel tertia, vel media proportionalis reperitur, & datis tribus quarta proportionalis reperitur, idem sentiendum est de proportionibus ipsis, in quibus si dẽtur duæ, media, vel extrema poterit inueniri, & tribus datis quarta perscrutari valebit.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inter duas datas rationes mediam rationem proportionalem inuenire.

DAtæ sint rationes AB $\frac{2}{5}$, & GH $\frac{9}{10}$, inter quas oporteat reperire mediam proportionalem. Fiat, vt H ad G; nempe 10. ad 9. sic 5. ad aliud E $4\frac{1}{2}$. Interque A 2. & E $4\frac{1}{2}$ media proportionalis quantitas inueniatur A 2. K 3. & E $4\frac{1}{2}$. Deinde fiat, vt A 2. ad K 3. sic ratio AB $\frac{2}{5}$ ad rationem CD $\frac{3}{5}$ ex propos. 9. huius, vel 5. Dico *hanc esse mediam proportionalem, ideoque* AB, *&* CD, *&* GH *in continua proportione.*

$\frac{A\ 2}{B\ 5}$ $\frac{G\ 9}{H\ 10}$ A 2   K 3   E $4\frac{1}{2}$

AB $\frac{2}{5}$ CD $\frac{3}{5}$ GH $\frac{10}{9}$

Probatur. Nam, vt A ad K; sic effecimus rationem AB $\frac{2}{5}$ rationi CD $\frac{3}{5}$ correspondere proportione. Ratio autem A ad E est duplicata rationis A ad K ex 10. h. erit quoq; ratio A ad E duplicata rationũ AB $\frac{2}{5}$ ad CD $\frac{3}{5}$. Sed ratio A ad E est eadem, quæ ratio AB. ad rationem GH cùm A, & E sint denominatores ex 4. huius, Ergo AB ad rationem GH est duplicata rationis AB ad CD, & sic CD est media proportionalis, quæ exposcitur, & AB, CD, & GH erunt in continua proportione.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Datis duabus rationibus tertiam rationem proportionalem inuenire.

DEntur duæ rationes AB $\frac{2}{5}$, & CD $\frac{8}{12}$, & oporteat ipsis tertiam proportionalem inuenire. Fiat, vt D ad C, sic B ad aliud I. 3. & $\frac{4}{12}$, vt autem A 2. ad I. $3\frac{4}{12}$, seu 24. ad 40. sic fiat ratio CD ad rationem aliam GH $3\frac{1}{3}$ ad 3. vt docuimus pr. 5. ad 3. Dico, quod proportio GH est tertia proportionalis, & quod Ratio AB, & GD sit in continuâ Analogiâ trium AB, CD, & GH.

$\frac{A\ 2}{B\ 5}$ $\frac{C\ 8}{D\ 12}$ $\frac{G\ 3\frac{1}{3}}{H\ 3}$ $\frac{B\ 5}{I\ 3\frac{4}{12}}$

Probatur. Nam ratio AB est ad rationem CD ex propos. 4 huius, vt A ad I; sed vt A ad I, sic facta est ratio CD ad rationem GH: Ergo Ratio CD ad

GH habet eandem proportionem, quam AB ad CD. Vnde tres AB, CD, & GH sunt in continuâ Analogiâ.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Datis tribus rationibus quartam proportionalem adinuenire.

SInt datæ tres rationes AB $\frac{1}{3}$, CD $\frac{2}{4}$, EF $\frac{3}{5}$, & oporteat inuenire quartam proportionalem.

Fiat, vt D 4. ad C 2. sic B 3. ad aliud X, 1 $\frac{1}{2}$; inueniaturque ex propos. 6. huius ad rationem EF alia ratio GH, quæ sit in proportione, vt A, 1 ad X, 1 $\frac{1}{2}$, & erit GH $\frac{9}{10}$. Itaque GH est illa, quæ exquiritur, proportioque AB est ad proportionem CD, vt ratio EF ad rationem EH.

A	1	C	2	X	$\frac{1}{2}$	E	3	G	9
B	3	D	4			F	5	H	10

Probatur. Ratio AB est ad rationem CB ex 4. huius, vt A ad X, sed vt A ad X; ita effecta est ratio EF ad rationem GH: Ergo ratio AB ad rationem CD erit, vt ratio EF ad rationem GH.

Vbi vides, quòd ad hoc, vt rationes ipsæ sint similes, non est necesse, quòd termini ipsi sint proportionales, & quod ita sit A 1. ab B 3. vt C 2. ad D 4. nec E 3. ad F 5. vt G 9. ad H 10. vti est necesse in similitudine ipsorum terminorum ad hoc, vt enim similis sit ratio A ad B, quæ C ad D, necesse est, vt etiam ipsi termini sint similes, & A 2. sit ad B 4. vt C 3. ad D 6. & tunc ratio 2. ad 4. dicetur eadem, quam 3. ad 6. Sed in rationibus ipsis AB $\frac{1}{3}$ ad Rationem CD $\frac{2}{4}$ est, vt ratio EF $\frac{3}{5}$ ad rationem GH $\frac{9}{10}$, & tamen termini ipsi sunt dissimiles: Imo, & rationes ipsæ: neque enim eadem ratio est $\frac{1}{3}$, quæ $\frac{2}{4}$, aut $\frac{3}{5}$, quæ $\frac{9}{10}$, vt patet; & tamen ita est AB ratio ad rationem CD, vt EF ad GH, quod, & ipso experimento percipies, si reducas omnes proportiones ad eosdem terminos AB $\frac{4}{12}$ CD $\frac{6}{12}$ EF $\frac{30}{50}$, & GH $\frac{45}{50}$: nam cum istæ proportiones habeant eosdem terminos erunt, vt antecedentes, & erunt, vt A 4. ad C 6. sic E 30. ad G 45. vt patet.

PROBL. IV. PROPOS. XLIV.

Propagare proportiones secundum datam rationem.

SIt data ratio AG $\frac{2}{3}$, & oporteat reperire rationẽ triplicatam ad rationem AG, sed in ratione A ad G.

Disponantur quantitates proportionales ab eadem quantitate incipientes in ratione AG 2. ad 3.

A	2	B	4	C	8	D	16	E	32
A	2	H	6	L	18	M	54	N	162
						K	36	P	108

Dico, quod factum est id, quod requiritur. Nam proportio tertia DM habet ad proportionem ad primam BH duplicatam proportionem B ad H, & EN quadruplicatam ad eandem BH eius, quam habet B ad H.

Nã expr. 8. tr. 16. p. 1. D ad M habet ꝓportionẽ triplicatã eius, quæ est B ad H. Fiat, vt H ad B, sic M ad K, eritque ex 4. h. ratio DM ad rationem BH, vt D ad K. Ratio verò DK componitur ex proportione D ad M, hoc est, vt dixi triplicata rationis B ad H eius, quam habet A ad A, cuius denominator 1, & M ad K, quę ex effectione est eadem, ac ratio HB. Atqui rationes BH, & HB producunt compositæ rationem æqualitatis ex propos. 19. huius.

Ergo ratio D ad K componitur ex ratione eius, quam habet A ad A triplicatã rationis BH, & ideo duplicatam B ad H, & ratione æqualitatis, sed Ratio æqualitatis nihil addit ex Coroll. propos. 15. in compositione rationum, ergo ratio D ad M est duplicata rationis B ad H. Sed vt D ad M, ita ratio DK ad rationem BH, ergo ratio DM ad rationem BH habet duplicatam proportionem.

Ita dicas de ratione EN, quæ est triplicata rationis BH. Fiat enim, vt H ad B, sic N ad aliud P. Eritq; ex 4. h. E ad P, vt proportio BH ad proportionẽ ED.

Ratio vero E ad P componitur ex proportione E ad N, & N ad P, & ideo quadruplicata eius, quam habet A ad A, & triplicata eius quam habet B ad H, & H ad B, siquidem ex effectione NP est eadem ac HB, sed HB, & BH producunt rationem æqualitatis, quę nihil addit in ꝓportionibus, ideo ꝓportio E ad P est triplicata rationis, quam habet B ad H, sed vt est E ad P, ita est ratio BH ad proportionem EN, ergo proportio EN est triplicata rationis BH.

Et idem erit si cupias quintuplicare rationes, & sextuplicare addendo terminos in eadem proportione.

COROLLARIVM.

ERuitur itaque ex hoc Tractatu multos vnius cuiuscumque proportionis reperiri denominatores; & si agatur de denominatoribus numericis.

Primo reperitur denominator propriè dictus, qui ita est ad vnitatem, vt aliqua quantitas ad suam partem, V. g. Proportio 6. ad 3. habet denominatorem propriè dictum numerum 2. quia ita 2. est ad 1. vt 6. ad 3. ex hoc sensu multi numeri, nempe omnes primi in ijs proportionibus, non possident alium denominatorem, nisi se ipsos; quia ex propos. 1. lib. 8. Element. sunt minimi in illis rationibus, & ipsis minores eiusdem proportionis dari nequeunt. vt sunt $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$, & de istis intelligitur principium illud, quod multiplicantes consequens producant antecedens, vel diuidentes iuxta exigentiam proportionis maioris, vel minoris inæqualitatis.

Secundo adesse denominatores impropriè dictos, sub quo genere, ne dum numerici; sed, & quantitatis continuæ concluduntur, nempe quantitates; quæ sint in proportione ad aliquam suam partem, vt duæ quantitates sunt ad inuicem, quarum proportionem denominant; & hoc sensu omnes etiam irrationales proportiones obtinent suum denominatorem; si non minorem saltem maiorem; vt proportio 6. ad 3. habet denominatorem $\frac{6}{2}$ $\frac{8}{4}$, & irrationales, vt explicauimus in definit. 3. h.

Tertio adesse denominatores proportionales, qui sua habitudine ad aliam ostendunt proportionalitatem, quam habet vna ratio ad aliam V. g. proportio 6. ad 3. habet denominatorem 2. & 4. ad 10. numerum 2 $\frac{1}{2}$, vel prima 4. & secunda 5. vel prima 12. & secunda 15. Isti ergo omnes denominatores sunt proportionales, quia suis partibus

tibus idem officium exequuntur, quod denominatores simplices 2. & 2 $\frac{1}{2}$.

Quarto reperiri denominatores proportionis maioris inæqualitatis; qui exprimuntur numeris integris etiã fractionibus copulatis, sed tali modo, vt vel vnitas in propriè dictis, vel pars aliquota supposita subintelligatur, vt $\frac{2}{1}$ $\frac{4}{2}$ proportionis 2. ad 6. quo significetur, antecedens continere in se duas partes, quarum consequens est vna. At minoris inęqualitatis vnitas, vel pars aliquota superposita est subintelligenda, vt $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$, quo notetur quantitatem antecedentem esse partem, vel secundã, vel tertiã sequentis. Id tamen scribi non solet, eo quia commodè non possit, cum denominator, cui adhæret fractio (vt multoties euenire solet) ad modum fractionis exarari non debeat, nec possit; quamuis si denominatores calculo subigantur interest, vt ad eorum significationem percipiendam aliquo modo notetur.

In proportionalibus autem denominatoribus nullo modo id sit necessarium; cùm sufficiat habitudo ipsa quantitatum ad exprimendam proportionem rationum.

TRAC-

TRACTATVS XVIII.

De Flexis.

VIſis lineis rectis ſecundum ſe, antequam videamus de ipſis, prout circulo inexiſtunt, vel ſecant, vel eum tangunt, & vt latera quoque ſunt omnium figurarum, quæ circulo deſcribuntur, & ideo omnes etiam, vt earum latera conſiderentur; priùs de ipſis Flexis agendum eſt, & in primis de circulo.

EXPENSIO I.

De circuli deſcriptione, atque menſura.

FLexæ; aliæ ſunt, quæ ex corporum ſectionibus exoriuntur, quæ per motum puncti, & lineæ in plano nullo modo explicari poſſunt; aliæ, quę in plano ſolùm deſcribuntur, itaut ad corpus nullam relationem poſſideant, aliæ vero, quæ & plano deſcribi queant, & tamen ſectiones quoque corporum ſint; aliæ, licet corporum ſectiones non ſint; ſolis tamen corporibus rotundis, & flexis deſcribi queunt.

Primi generis ſunt, Hiperbola, & aliqua talis quæ per lineæ motum, vel puncti nullo modo explicari poſſunt, vel ſaltem de facto non explicantur, & ſectiones Coni ſunt. Quarti verò generis Helix Cilyndro, ſeu Cono, ſeu ſphere circumuoluta, quæ eſſentialiter poſcunt illud ſubiectum; nec plano deſcribi queunt. Secundi verò generis eſt ſpiralis Conchilis, Aſymtotos; & huiuſmodi. Tertij verò Circulus, qui & plano, & ſphera eodem modo deſcribi poteſt, ſicut Ellipſis, & Cylindro Conoque, & etiam plano duobus centris adhibitis, vel motu lineæ per angulum rectum, vt infrà. Hic agemus de lineis, quæ plano deſcribuntur: reliquæ enim lineæ, cognitiones ipſorum corporum poſcunt: vnde eas ſuo loco ſeruabimus: at hic in primis de circulo.

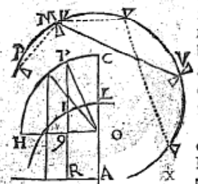
Licet facilis deſcriptio circuli ſit cum planum liberum eſt, & breue: cum tamen magnum, & impeditum non eſt adeo facilis; quare de hoc loquentes ſit.

PROBL. I. PROPOS. I.

Arcum circuli, cuius centrum haberi nequeat, deſcribere.

SIt deſcribendus circulus, & centrum A haberi nequeat. Fiat angulus VMP obtuſus, & claui figantur plano in punctis M, & P, moueanturque altera lambendo clauos, V. g. à P per M vſque ad V; vertex enim M deſcribet portionem circuli PMV, quam produces. Si latus MP transferas per arcum factum: nam aliud latus MV ſua extremo arcum XV continuabit.

Probatur ex propoſ. 24. lib. 3. Nam in ſegmentis æqualibus eiuſdem circuli capiunt anguli æquales. Cum ergo angulus VMP, ſit ſemper æqualis, erit ſemper in æquali circumferentia eiuſdem circuli vertex eius M, & eius extrema V, & P; quare eundem circulum deſcribent. Huius autem circuli inuenies diametrum ex 1. lib. 3. vel per calculos.



* Sed etiam alio modo deſcribi poterit. Nempe faciendo centrum O in alio loco, & ducendo circulum CH cum non poſſit in A, nam LC longitudo, ſeu maior ſeu minor ea fuerit menſurata à circulo CH in qualibet linea parallela ipſi OC velut eſt PI ſuo extremo I circulum deſcribet.

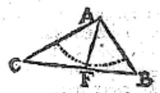
Probatur. Nam ablato impedimento ſit AL radius æqualis radio OC, & ducatur perpendicularis AR ad AO. Cum ergo ſit LA æqualis OC: ablata ergo communi LO, erit LC æqualis ipſi OA: ſed IP eſt æqualis LC ex hypotheſi. Ergo & OA, & conſequenter æquali QR, & ideo QR erit æqualis IP: ſi addatur itaque QI vtriſque erit RI æqualis QP; ſed QP ſuo extremo P eſt in circumferentia circuli: Ergo etiam RI vel PI ſuo extremo I erit in circumferentiâ circuli æqualis.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. II.

Secto angulo alicuius trianguli biſariam, ambo crura ad baſim totam, habent eandem proportionem, quam ipſum crus ad ſegmentum baſis ſibi vnitum.

SIt triangulum ABC. Diuidaturque angulus ad A biſariam per lineam FA. Dico *quòd* AB, *&* AC *ſimul eandẽ proportionẽ habent ad* BC *crus alterũ, quã ipſũ crus* AC *ad ſegmentum baſis ſibi vnitum* FC.

Probatur ex propoſ. 3. lib. 6. ita eſt CF ad FB, vt CA ad AB. Quare *componendo*; ita CF, & FB baſis ſegmenta ſimul ad alterum ſegmentum baſis CF; vt crus AC, & crus AB ſimul ad crus AC illi ſegmento CF vnitum: Quare, & *permutando* ita erit CF, & FB ſegmenta baſis ad crura AC, & AB, vt ſegmentum baſis CF ad crus ſibi vnitum AC. Vel *inuersè* CA, & AB ad CB, vt CA ad CF. Hoc eſt fundamentum Archimedeę demonſtrationis ſequentis.

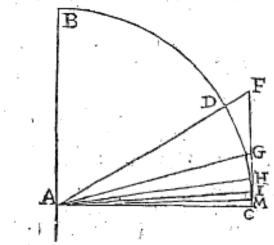


THEOR. I. PROPOS. III.

Cuiuſlibet circuli peripheria eſt tripla diametri, & adhuc parte ſeptima ipſius inſenſibiliter minor eſt.

SIt circulus, ſeu quadrans, quòd ſufficit ABC. Sitque in eo angulus DAC ad centrum 30. Gr. Latus CF trianguli AFC erit dimidium baſis FA, ex illis, quæ dicta ſunt lib. 4. elem. propoſ. 15. Siquidem eſt latus hexagoni FV cuius duplum, ſeu 60. Gradus ſubtendit, & ideo æquat baſim AF, & cum CF ſit tangens, CAF triangulum eſt rectangulum.

Progreſſ. 1. Si ergo CF ponatur 153. partium FA eius dupla erit 306. Vnde ex propoſ. 11. elem. lib. 2. exquiremus latus AC. Nam quadratum numeri 153. eſt 23409. quo dempto à quadrato numeri 306. quod eſt 93636. remanet quadratum 70227. à quo ſubducta radix quadrata ex prop. 20. Tract. 13. dat latus AC paulo maius, quam 265. vnde iunctum ſimul lateri AF 306. erunt 571.



Progreſſ. 2. Quia itaque, vt ex Lemmate duo crura AF, & AC 571. ſunt ad baſim CF 153. vt vnum crus AC ad ſegmentũ ſibi vnitũ CG diuiſo angulo FAC biſariam in G, erit crus AC ad ſegmentum CG paulo maius in proportione, quam 571. ad 153. & ideo poſito, quòd CG ſit 153. AC crus excedet 571. ſed non integra vnitate, neque enim perueniet ad 572.

Progreſſ. 3. Cum ergo habeamus nota AC, & CG in triangulo ACG rectangulo, eodem prorſus modo progrediemur, vt in primo progr. Nam diuiſo angulo GAC biſariã in H eodẽ tenore argumẽti procedemus. Quia poſuimus ſegmentum CG eſſe 153. partium quadratum eius erit, vt dictum eſt 23409. & quia poſuimus AC eſſe 571. & paulò magis, quadratum eius erit 326041. & ſimul faciẽt ferè quadratum AG ex 11. lib. 2. elem. partium 349,450. licet quadratum ipſius AG ſit paulo maius, eiuſque radix paulo maior, quam radix $591\frac{1}{8}$ prædicti numeri 349450. Vnde proportio AG ad CG erit $592\frac{1}{8}$, & aliquid amplius ad 153. baſim CG. & ſi iungantur ſimul duo crura AC, & AG 571. & 591. & $\frac{1}{8}$ eruntvt $1162\frac{1}{8}$ ad baſim CG 153.

Quamobrem arguentes, vt ſecundo progreſſu. Quia ex propoſ. 2. duo crura AC, & AG ad baſim CG ſunt, vt crus AC ad ſegmentum ſibi vnitum CH, ideo ſi ponatur CH 153. partium, erit crus AC $1164\frac{1}{8}$, & paulo maius.

Progr. 4. Secabimus rurſus in triangulo HAC angulum A in duas ęquas partes in I: & eodem argumentandi ritu procedemus. Iungemus enim quadratum AC paulò maius, quàm $50534\frac{1}{4}\frac{3}{4}$ quadratum inquam numeri $1164\frac{1}{8}$ ei cruri pęnè æquale, & quadratum baſis CH 23409, & facient quadratum $1373943\frac{3}{4}$, quod pęnè æquabit duo quadrata facta ex crure AC, & baſi CH, quadrato ipſi ex crure AG ex 11. lib. 2. æqualia, & deficiet, nec quidem integra vnitas; vnde extracta radix quadrata dabit numerũ $1172\frac{1}{8}$, qui proximè æquabit crus HA. Vnde HA erit ad CH ferè vt $1172\frac{1}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, & ſi ſimul iungantur duo crura AH $1172\frac{1}{8}$, & AC $1164\frac{1}{8}$ erunt, vt numerus $2332\frac{2}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, quã ipſe numerus $2334\frac{2}{8}$. Quapropter cum duo crura AC, & AH ſint ad totam baſim CH, vt crus AC ad ſegmentum CI, ob diuiſum angulum biſariam in I. Si ponamus hoc ſegmentum CI eſſe 153. partium crus AC, erit $2334\frac{2}{8}$, & paulò ampliùs.

Progreſſ. 5. Secabimus deinde angulum IAC in M biſariam, iungemuſq; quadratum baſis IC ſemper idem 23409. & quadratum cruris AC $2334\frac{2}{8}$ quod eſt $5448723\frac{1}{4}$, & paulò ampliùs, fietque quadratum $5472090\frac{1}{4}$, cuius radix $2339\frac{1}{4}$ eſt crus IA, & etiam paulo auctior; Vnde crus IA erit ad CI, vt $2339\frac{1}{4}$ proximè ad 153. & crura ſimul poſita CI $2339\frac{1}{4}$, & AC $2334\frac{1}{4}$ erunt vt $4673\frac{1}{2}$, & paulò ampliùs, quam ipſe numerus ad 153. Quaderè, ſi ponatur CM ſegmentum 153. ex Lemmate, & 2. propoſ. huius erit crus AC paulò maius, quam $4673\frac{1}{2}$ ſed non maius adeo, vt ęquet 4674.

Progreſſ. 6. Sicque iam habemus multilaterum circulo circumſcriptum, cuius ſemilatus CM eſt 153. ad ſemidiametrũ AC, quod eſt paulo maius, quã $4673\frac{1}{2}$, quia ergo DC eſt tertia pars quadrantis dimidium GC, erit ſexta; & huius dimidium CH duodecima, & huius dimidium CI vigeſima quarta, & huius dimidium CM quadrageſima octaua pars erit quadrantis. Vnde CM erit ſimilatus multilateri, quod ſubtendet 48. partem quadrantis. Sed duplicatum, vt ſit latus integrum ſubtẽdet 24. partem quadrantis; & ideo ob quatuor quadrantes multiplicatum per 4. nonageſima ſexta pars totius circuli; nempe Polygonum laterum 96. & quia ſemilatus eius, vt probauimus progreſſ. 5. eſt ad ſemidiametrum, vt 153. ad $4673\frac{1}{2}$ ferè; ideo totum

tum latus erit ad totum radium, vt 153. ad 4673 $\frac{1}{2}$ cum ita sit dimidium ad dimidium, vt totum ad totum ex propos. 18. lib. 5. Quapropter si multiplicemus latus CM 153. per 96. latera, quibus polygonum constat, habebimus latera totius polygoni 14688.

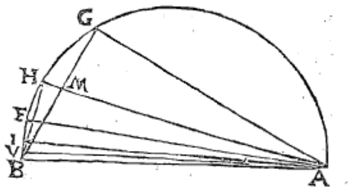
Si ergo dicas, regulam auream adhibendo si 22. dant 7. idest si 3. & $\frac{1}{7}$ dant 1. quid 14688.? & exhibebunt 4673 $\frac{1}{2}\frac{0}{2}$. Quare Polygoni ambitus ad 4673 $\frac{1}{2}$ habet minorem proportionem, vtpote ad numerum maiorem, quam ad 4673 $\frac{1}{2}\frac{0}{2}$ Quare, & ad ipsum diametrum maius, quam 4673. $\frac{1}{2}$ habebit adhuc polygoni ambitus minorem proportionem, vtpote adquid maius. At circumferentia, vtpote interior ipsi polygono est minor, quàm ambitus polygoni: Ergo dicet tanto ampliùs minorem proportionem ad diametrum ex propos. 8. lib. 5. idest, quàm 14688. ad 4673 $\frac{1}{2}\frac{0}{2}$, vel quàm 22. ad 7.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. IV.

Triangulum in semicirculo, cuius vnus angulus sit medietas alterius trianguli in eodem semicirculo, habet crus maius ad minus in eadem proportione, quam habent duo crura maioris trianguli ad totam basim.

SIt triangulum ABH in semicirculo AGB, cuius angulus ad A, sit medietate minor, quàm angulus A in triangulo maiori BAG. Dico, quòd AH crus refertur ad HB latus, vt duo cruta AG, & AB trianguli maioris referuntur ad basim BG.

Probatur. Triangula AHB, & paruum MBH sunt æquiangula, quod sint rectangula, & in æquali peripheria BH, & HG ex 21. lib. 3. Ergo latera in eadem proportione versabuntur ex propos. 4. lib. 6. Ergo erit ita proportionatum crus AH maius in triangulo magno ad ~~crus~~ BH maius crus in paruo, vt ipsum BH crus quoq; minus in magno ad HM in paruo triangulo crus minus, idest vt AH ad BH, sic BH ad HM. Et ita erit basis BA in magno ad basim BM in paruo, vt crus minus BH trianguli magni BAH ad crus minus MH parui trianguli BMH.



Sed iam dictum est, quòd HA ad HB prorsus eiusdem proportionis reperiatur, vt HB ad HM parui. Ergo etiam hæc duo crura respicient bases eadem proportione, quà respiciebant BH, & HM ex 16. lib. 5. Ideoq; ita erit AB basis ad basim BM, vt crus AH ad crus BH. Sed ex 2. huius proposit. vt BA, & AG, vt vnum sumpta respiciebant basim GB; sic crus BA respiciebat BM crus sibi vnitum, & segmentum basis maioris trianguli BAG. Ergo etiam AH crus maius ad BH crus minus eandem proportionem dicet, quam duo crura BA, & AG ad basim BG trianguli maioris BAG dicebant.

THEOR. II. PROP. V.

Circumferentia cuiuslibet circuli diametrum continet ter, & insuper magis, quàm eius octauam partem.

PRobatur ferè eodem modo, quò secunda propositio. Fiat itaque circulus; ducaturque diameter AB, & latus hexagoni BG. Quod BG statuatur partium 780. erit diameter AB, vtpote eius duplum partium 1560. cuius quadratũ erit 2433600. Quadratum verò lateris hexagoni BG 608400. quod deptũ à quadrato diametri remanet 1825200. quadratum lateris AG, cuius radix quadrata est paulò minor, quam 1351. Vnde latus AG erit paulò minus; quàm 1351. & simul vtrumque crus AB, & AG erit paulò minus, quam 2911. & basis BG latus hexagoni part. 780.

Progr. 1. Diuidatur angulus ad A bifariam linea AH, & iungatur BH, fietque rectangulum ABH; Quia ergo, vt 4. propos. huius ostensum, ita est vtrumque crus AG, & AB ab basim GB, vt crus AH ad crus BH; ideo, si ponatur; quòd crus BH sit partium 780. crus HA erit partium 2911. nempe, vt est basis GB ad duo crura AB, & AG. Ideoque ex quadratis laterum rectanguli BAH inquiremus basim AB: cum ergo quadratum cruris BH, sit 608400. quòd crus supponitur 780. partium, & quadratũ AH cruris, quod ponitur hoc progr. 2911. partium sit 8473921. si vniantur simul, vt fiat numerus 9082321. hoc erit quadratum basis AB rectanguli AHB, cuius radix quadrata est 3013 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ paulò auctior, & ideo AB erit paulò minor partibus 3013 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, & simul vtrumque crus AB, & AH part. 2911. erunt partiũ 5924 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, & crus HB 780.

Progr. 2. Secto rursus angulo ad A in triangulo BAH bifariam per lineam AF, ex prop. 4. huius, ita erit vtrumque crus BA, & AH ad basim HB, vt crus AF ad crus BF. Vnde, si statuatur basim BF esse 780. partium crus AF, erit parùm minus, quàm 5924 $\frac{1}{2}$; nimirum, vt basis HB ad duo crura AB, & AH: Quare si horum quadrata vniantur simul in rectangulo BFA dabunt basis quadratum BA: cùm ergo quadratum BF sit 608400. & quadratum FA 35102662. Iuncta itaque simul dabunt quadratum 35711062. cruris BA, cuius radix quadrata est 5975 $\frac{1}{2}\frac{6}{2}$, & paulò magis. Itaque crus BA erit paulò minus, quàm 5975 $\frac{1}{2}\frac{6}{2}$, quod iunctum cruri AF 5924 $\frac{1}{2}$ facient numerum amborum crurum AF, & BA paulo auctiorem, quàm 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ basis verò BF erit 780.

Progressus 3. diuidatur rursus angulus BAF in duas partes æquales per lineam AI, & per 4. prop. huius, ita erit vtrumque crus trianguli maioris BA & AF ad basim BE; vt crus AI ad crus BI. Ideoq; si statuatur basis BI part. 780. erit crus IA par. 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{6}$, nẽpe vt basis BF ad duo crura AB, & AF, & quia BIA est triangulum rectangulum: Ideo quadratum duorum crurum BI, & AI erit æquale quadrato basis BA. Quadratum verò cruris AI est 141628090. & quadratum BI est 608400. iuncta simul erunt 142236890. cuius radix quadrata est 11926. $\frac{1}{2}\frac{1}{6}$ paulò auctior: vnde AB basis erit paulò minor quàm 11926 $\frac{1}{2}\frac{1}{6}$, quod iunctum cruri IA 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{6}$ dat 23826 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$: basis verò, seu crus IB erit 780.

Progr. 4. Diuidatur tandem angulus IAB bifariam linea AV, & quia ex propos. 4. huius ita est summa crurũ AB, & AI ad basim IB, vt crus AV ad crus VB, ideo diuiso angulo BAI bifariã rectã AV, si statuatur crus VB 780. partium erit VA 238526; cuius quadratum est 567706867. & iunctum quadrato cruris VB 608400. partium efficiet, quadratum AB 568315267. cuius radix quadrata est 23839 $\frac{4}{7}\frac{}{6}$, & paulò magis: vnde basis AB erit paulo minor, quam prædictus numerus 23839 $\frac{4}{7}\frac{}{6}$.

Progressus 5. Cum itaque iam habeamus diametrum AB paulo minorem, quam 23839 $\frac{4}{7}\frac{}{6}$, & crus VB 780; habemus quoque latus polygoni 96. laterum. Nam BG est hexagonum, quadere eius dimidium BH erit duodecagonum, & huius dimidij dimidium BF figura 24. laterum, & huius BF dimidium BI 48. laterum, & tandem huius dimidium BV 96. Cùm itaque iam habeamus VB latus polygoni 96. laterum partium 780. si multiplicemus per 96. habebimus ambitum totius polygoni 74880.

Progress. 6. Si ergo dicas auream regulam adhibendo; si 25. dant 8. idest 3. & $\frac{1}{8}$ dant 1, quid 74880.? & factus computus exhibebit 23961 $\frac{1}{2}\frac{1}{5}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{4}{7}\frac{}{6}$ habet, vtpote ad numerum minorem maiorem proportionem, quàm ad 23961 $\frac{1}{5}$, & tanto maiorem ad diametrum ipsum, qui eo numero 23839. $\frac{4}{7}\frac{}{6}$ paulò minor est: Sed circumferentia vtpote exterior ipsi polygono, maior est ipsius ambitu: Ergo obtinebit tanto maiorem proportionem ad diametrum ex prop. 8. l. 5. quàm 74880. ad 23961. $\frac{1}{5}$, vel quam 25. ad 7. idest, quam 3 $\frac{1}{8}$ ad 1.

Et hæc ad ostendendam propositionem sufficiunt, verùm ad hoc, vt videas præcisionem huius operationis, & quàm proximè ad verùm accedit fiat, vt 223. ad 71. Idest quam 3. & $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ ad 1, sic 74880. ad aliud, & regula proportionum inuenies esse 23840 $\frac{1}{2}\frac{6}{2}\frac{0}{3}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{4}{7}\frac{}{6}$ dicet maiorem proportionem, quam ad numerum 23840 $\frac{1}{2}\frac{6}{2}\frac{0}{3}$, qui se habet, vt 223. ad 71. & tanto maiorem ad diametrum, qui eo numero 23839 $\frac{4}{7}\frac{}{6}$ minor est, & tantò maiorem proportionem dicet, circumferentia ipsa, quæ vtpote exterior polygono illo ipso maior est.

Quare circumferentia ex hac quidem propositione maior euadit diametro sumpto ter cum octaua sui parte, vel sumpto ter cum decem ex 71. partibus, at ex propos. 3. huius, circumferentia est minor, quam diameter sumptus ter cum sui septima parte. Ergo inter has duas proportiones consistit, altera quidem tripla sesquiseptima, altera verò tripla sesquioctaua.

COROLLARIVM.

COllige ex istis duabus propositionibus 3. & 5. quòd circumferentia est inter duos istos terminos maiorem 3 $\frac{1}{7}\frac{0}{6}$, & minorem 3. & $\frac{1}{7}\frac{0}{2}$ diametri. Vnde si diuidatur circumferentia per 3 $\frac{1}{7}$ producetur numerus minor, quam diameter, at è contra si multiplicetur diameter per 3 $\frac{1}{7}$ producetur maior numerus, quam circumferentia: Si verò multiplicetur diameter per 3 $\frac{1}{7}\frac{0}{2}$ procreabitur minor numerus; quam circumferentia, & si

diuidatur circumferentia per 3 $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ procreabitur maior numerus; quam diameter.

EXPENSIO I.

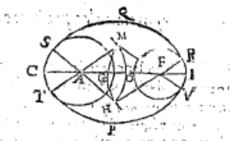
De circuli segmentis in figuram circularem coaptandis.

NOn mediocre Architecturæ, quandoque affert emolumentum, cæterisque similibus artibus diuersorũ circulorũ segmenta varia in vnã flexam componere, vt molli quodam flexu nullos efficiant angulos: primo autem docebimus de segmentis in se se redeuntem lineam efficientibus, deinde de segmentis in spiralem se flectentibus.

PROBL. I. PROP. VI.

Segmentum circuli duos circulos tangens ducere,

SInt duo circuli, siue contigui, seu se intersecantes, seu quocumque spatio dissiti, seu æquales, seu inæquales (hic exhibemus exemplum circulorum inequalium, & ab inuicem remotorũ) Ducatur recta per eorũ centra transiens CI: Hinc sumantur rectæ æquales IG, & CO, quæ dimidium per centra transeuntis CI superet, & à centris illorum circulorum A, & F interuallo AO, & FG, duæ portiones circulorum educantur MGH, & MOH, punctaque intersectionum M, & H rectis coniungantur MAT, & MFV sicut, & HFR, & HAS, & cet. quæ traseant per centra A, & F: Factoque centro in H, circuli describatur arcus SQR interuallo HS, vel HR. sic facto centro in M alius arcus describatur TPV, quem arcum *dico tangere circulos propositos*.



Probatur. Quia AM, & AO sunt æquales additis portionibus equalibus si radijs CA, & AS remanebunt æquales totæ HS, & CO. Sed CO ex constructione æquatur ipsi GI, & GI ipsi HR. Ergo HS, & HR erunt æquales. Vnde circuli arcus centro H transibit per puncta S, & R. Quòd verò GI sit æqualis ipsi HR patet; quia GF, & FH sunt æquales, additis itaque portionibus æqualiqus FR, & FI totæ GI, & HR remanebunt æquales.

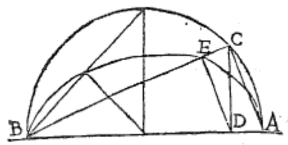
COROLLARIVM.

CVm verò circuli arcus tangit alium arcum, adeo bene inuicem se accommodant, vt nullum angulum efficiant, vt satis experimento constat: Vnde etiam addisces lineam spiralem ducere segmentis circulorum productam: si omnia centra arcuum super eandem rectam collocaueris, vt est centrum H arcus SQR. Alios verò modos, qui id exquisitè efficiant, aliò reseruamus, cùm eorum hic proprius locus non sit.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Lineam oualem propriè dictam efformare.

PRæcedens figura propriè oualis non est, cùm non omnino ouum imitetur, quod altera parte acutius est; Propterea figuram exhibemus, quę illum præcisè imitetur, & ad inueniendas duas medias proportionales inter duas datas perutilis sit.



Super AB, semicirculo facto ACB, à puncto B plurimis chordis ductis, vt BC, & cæt. à punctis extremis demitantur perpendiculares, vt CD, & à puncto D, quo secant diametrum in quãlibet chordam, vt CB (ex cuius extremo in diametrum perpẽdicularis CD deducta est) in quamlibet inquam talem chordam alia perpendicularis deducatur DE: hæc enim signabit punctum E in qualibet chorda, per quæ æquabili manu ducta linea oualem figuram describet, hanc autem apellamus oualem ex similitudine, quam cum ambitu oui consequitur.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

Ope oualis figuræ inter duas extremas lineas duas proportionales proijcere.

SIt iam descripta linea oualis AEB. Super lineam maiorem ex datis AB, & in ouato altera minor data accommodetur BE, vt ex prop. 1. lib. 4. Eucl. quæ producatur vsque ad C, à quo demitatur perpendicularis CD: quia verò BEA est facta ex perpendicularibus à D in E ductis, etiam talis erit ducta DE. Et ideo erit AB ad BC, vt BC ad BD, & BD ad BE: & ideo CB, & BD erunt duæ mediæ proportionales.

Probatur ob triangulorum æquiangulorum similitudinem ACB, & DEB ob parallelas AC, & DE, linea AB erit ad CB, vt DB ad BE. Sed vt AB ad CB, ita quoque ex Coroll. prop. 8. elem. est CB ad DB, & DB ad BE: ergo sunt quatuor AB, & CB, atque DB, & tandem BE continuè proportionales.

COROLLARIVM.

OVatum quoque describetur, si describantur, vt infra duæ ellypses, quarum maioris minor axis deseruiat pro maiori axi minoris Ellypsis; Ellypsium autem descriptionem infra dabimus.

EXPENSIO III.

De linea Spirali.

SPiralis linea digna fuit, quæ Archimedis animum alliceret in sui speculationem, tantumque geometram suarum proprietatum propallatorem haberet, vsus verò eius insignis est in volutis capitellorum in Architectura prouoluendis, alijsque similibus ornamentis. Verùm non ea omnia, quæ Archimedes demonstrauit in medium adferemus de lineis eam tangentibus, earumque ad peripheriam, vel proportione, vel æqualitate, cùm ea inutilia sint; neque alijs de quibus agendum, deseruiant: ea verò speculatus est Archimedes; vt inueniret lineam peripherię circuli æqualem, ob quam eam mensurare posset, quod tamen affecutus non est.

DEFINITIO I.

LInea spiralis est linea formata à motu puncti per semidiametrum; dum semidiameter suo extremo puncto efformat circulum illis proportionaliter eodem tempore se mouentibus.

Sit IB semiradius in seq. fig. ponaturque moueri per peripheriam RDB eam efformando suo motu, & interim punctum ab I discedat, & per semidiametrum BI ascendat ad B, ita vt quot partes peripheriæ perfecerit extremum B, tot partes diametri perficiat punctum in eo se mouens, ex 16. V. g. partibus, in quibus diuisus est tam semidiameter, quam peripheria: hic motus puncti describit spiram BEFGPI punctatam.

DEFINITIO II.

VOcetur autem I principium spiræ manens, & B principium circularis.

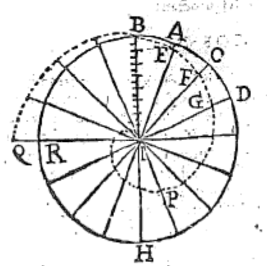
DEFINITIO III.

REcta linea IB spacium spirale concludens: spacium verò spirale BCPI primum, quòd si sequatur in Q secundum, & si post completam reuolutionem adhuc sequatur tertium, & sic deinceps.

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Lineam spiralem in plano per puncta describere.

DIuidatur circumferentia BACD in tot partes æquales, quot placuerit, & in totidem semidiameter (quò plures erunt eò exactior erit operatio) V. g. in 8. transferanturque singulæ partes semidiametri semper accipiendo vnam minus in singulos radios AI, & IC, & ID, & cæt. ductos à circumferentiâ ad centrum, quę imprimient puncta EFG, & cæt. *Per ea itaque puncta manu æquabili ducatur flexa, quæ erit quæsita spiralis.*



Probatur. Quia punctum E est 15. partibus distans ab I in diametro IA sicut peripheria BRA est 15. partibus distans à puncto B. Sic in radio IC punctum F 14. partibus distat ab I, sicut BRHC 14. partibus peripheriæ distat à B. Sic punctum G 13. partibus distat ab I, sicut peripheria BRD 13. partibus distat à B. Ergo, cum eodem partium decremento, tum circumferentię, tum diametri puncta, tum punctum B in extremo diametri translatum in ACD, quàm punctum aliud per ipsum diametrum ascendendo à DI in G, F, & E hęc puncta erunt in spirali iuxta definit. I. quòd, si secundum ambitum spiralis exoptemus, prolungentur diametri, vt IQ, & partes se eodem excessu superantes ex HI transferantur successiuè in diametros prolungatos, & per ea puncta flexa ducatur, quæ erit voluta in alias circumuolutiones promota.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. X.

**Si omnium circulorum æquali diminutione decrescentium arcus singuli componantur integrabunt dimidium ambitum totius maximæ peripheriæ, & dimidium maximi arcus. si verò à progressione terminus primus excludatur, tunc minus erunt dimidio ambitu eadem maximi arcus medietate.*

*PRæassumpt. supponendum est singulas peripherias, & earum partes, quarum diametri se æquali augmento superant, se etiam inuicem æquali augmento superare, & etiam subtensas illis partibus se superare æquali augmento: Ratio est, ex 43. 44. 45. tertij Elem. Siquidem ita inuicem sunt peripheriæ, & radij, & cordæ arcuum similium, & arcus similes, vt diametri: Cum ergo diametri æquali se superant augmento, etiam, & arcus, & cordæ, & peripheriæ æquali augmento se superabunt; Ideo in figurâ AH cùm arcus similes sint, AE, BC, & CD similes sint, cordæ, & arcus se æquali augmento superabunt. Quod diametri OX, OB, OC, OD se æquali augmento superent.

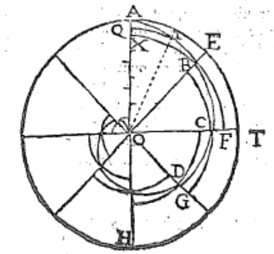
Sit itaque diuisa peripheria 8. circulorum similiter decrescentium in partes 8. & ex singulis accipiatur vnicus arcus V. g. AE, BC, & CD, & cæt. Dico, *quòd octo partes decrescentes istæ facient semicirculum* AEH, *& insuper dimidium arcus maximi* IE.

Sic si fit diuisa peripheria 16. circulorum æquali diminutione decrescẽtiũ in partes 16. Et ex singulis peripherijs accipiatur vnicus arcus, & omnes isti arcus 16. decrescentes ponantur simul. Assero, *quod facient lineam æqualẽ semigyro maximo, & insuper dimidio maximi arcus.* Nam arcus singuli sint partes 24. Ergo, vt deficiant æqualibus 16. decrementis singuli deficient $1\frac{1}{2}$, & stabit progressus Arithmeticus decres. 24. $22\frac{1}{2}$, 21. 19. $\frac{1}{2}$, 18. $16\frac{1}{2}$, 15. $13\frac{1}{2}$, 12. $10\frac{1}{2}$, 9. $7\frac{1}{2}$, 6. $4\frac{1}{2}$, 3. $1\frac{1}{2}$, 0, qui omnes efficient numerum 204. at verò maximus circulus, cuius vnica pars decima sexta constat 24. particulis, est 384. cuius medietas est 192. Quare dimidius gyrus est 192 particularum; & arcus decrescentes sunt 204. nempe 12. particulis ampliùs, quæ sunt dimidiata pars decimasexta gyri maximi; quæ constat 24. particulis.

Si verò pars decima sexta maximi gyri excludatur: tunc erunt reliqui arcus decrescentes minus, quàm semiperipheria maxima 12. particulis, erunt enim tantum 180. particulæ, & deficient 12. ad 192. dimidium gyrum maximum, cuius decimasexta pars est 24. particularum.

Ratio est petenda à propos. 9. de propor. numericis Arithmet. Tract. 14. vbi ostendimus maximum terminum vnitum primo facere totam summam progressionis Arithmeticæ, si multiplicetur per dimidium numerum terminorum, siue autem terminus primus $1\frac{1}{2}$, & vltimus 24. per eundem numerum dimidium terminorum 8. multiplicẽtur seorsim, & faciant 12. 192. & deinde in vnam summam redigantur, siue simul vniantur, & postea multiplicẽtur per 8. idẽ num. fit 204. vt pr. 2. l. 9. el.

Numerus verò 24. per 16. numerum terminorum ductus facit totum circulum maximum. Vnde per dimidium 8. ductus efficiet dimidium circuli ex propos. 17. lib. 7. cum sint ita multiplicati 8. ad 16. vt geniti 192. ad 384. Ergo Progressionis Arithmeticæ summa erit maior circuli maximi dimidio 192, nempe genito ex multiplicatione maximi termini 24. per numerum dimidium terminorũ in termino primo $1\frac{1}{2}$, sed multiplicato per eundem dimidium terminorum numerum 8. qui gignit 12. Quia si 16. multiplicando $1\frac{1}{2}$ facit 24. ergo 8. eundem $1\frac{1}{2}$ multiplicando faciet 12. cum ita ex propos. 17. lib. 7. sit 8. ad 16. multiplicati, vt 12. ad 24. geniti. Itaque Progressio Arithmetica erit maior dimidio circulo maximo ipso primo termino $1\frac{1}{2}$ in 8. multiplicato, & facto 12. qui est dimidium maximi termini 24. quod verificatur in progressionibus, quæ incipiunt à nihilo, vt proposita.

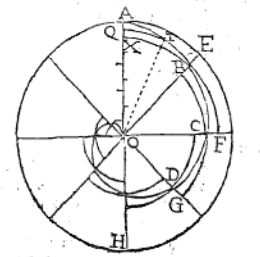


Quadere secunda pars quoque patet; nam exclusô à collectione omnium maximo termino, excluditur ne dum dimidium maximi termini ipsius, quo superabat ambitum semicirculi; sed etiam aliud dimidium, nempe totum maximum arcum, vnde à semicirculo eadem medietate illius deficit.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. XI.

Summa omnium arcuum, cuiuscumque circuli Arithmeticè decrescentium, si successio decrementi sit infinita, æquat semicirculum.

SInt arcus AE, & BC, & CD, & subdiuidantur, vel intelligantur subdiuisi in infinitum. Dico, quod hæc progressio arcuum decrescentium æquat semicirculum.



* Prob. Quo successio arcuũ numero est maior, eò maximus terminus est minor V. g. si semidiameter DA sit diuisus in 8. partes, erunt octo circuli decrescentes, & ex eis singulis octo arcus, & terminus maximus AE. Verùm si sint 16. partes in radio OA arcus erunt 16. & ideo maximus arcus AE dimidio minor. Quamobrem quo maior erit subdiuisio radij, & ideo circulorum decrescentium successio maior, eò minor erit differentia, qua collectio omnium arcuum excedit dimidium circulum includendo maximum, & incipiendo ab A, ita, vt sint termini AE, & BF, & CG. Et tantò minor erit quoque differentia; quà excluso maximo termino, & incipiendo ab X, vt sint XB, BC, & & CD, collectio arcuum decrescentium deficit à semicirculo. Ergo si istæ series infinitè crescãt numero, infinita erit diminutio differentię qua deficit à semicirculo: sed facta infinita diminutione subdiuidendo tandem vltimus terminus quantitatis acquiritur, & absumitur ipsa quãtitas ex propos. 15. Tract. 16. part 1. Ergo differentia eius post infinitam subduplam diuisionem fit nulla, & sic equabitur, siue progressio maximum terminum includat, siue excludat toti semicirculo.

THEOR. I. PROPOS. XII.

* *Spiralis sensibilis est linea infinitis circulorum segmentis sensibilibus successiuè minoribus coagmentata.*

* PRob. Ita est AT arcus ad TC diametri portionem, vt EA ad BE, & si subdiuidatur, ita erit subdiuisi circuli portio ad subdiuisi diametri portionem, vt AT ad CT, & rursus portio hæc subdiuisa circuli ad aliam subdiuisam portionem, vt diametri arcus AT ad portionem CT, & sic semper in infinitum: sed AT est maior. quàm CT, cum peripheria sit maior, quam radius, & consequenter omnes eius partes proportionales erunt maiores, quam proportionales ipsius radij: Ergo ex Coroll. 1. propos. 12. lib. 5. etiam omnes arcus quò quò decremento diminuti erunt maiores, quam partes diametri similiter diminutæ.

Probatur nunc principaliter propositio. Nam quò arcus sunt minores, è magis BX arcus intimus accedit extimo. Ergo si sint minores vltra omnem sensibilitatem, tantò magis BX minor longitudine vltra omnem sensibilem factus accedet ad arcum extimum EA V. g. arcus diminuatur sub dupla longitudine, & fiat IQ, accedet quoque subduplò spacio ad EA, & sic de alijs in infinitum minoribus, cumque semper sit maior quacunque diuisione proportionali præstita, arcus, quàm portio diametri, decrescet semper magis portio diametri minor, quàm arcus maior. Vnde, si diminuitur vltra omnem sensibilitatem spatium inter A, & E, tanto minus erit sensibile spatium XA, & EB. Quòd, si est vna linea, vt spatium sensibiliter non mediet inter E, & A: Ergo spira BA inter illos EA, & BX incedens erit idem cum ipsis saltem quoad sensum.

COROLLARIVM.

* HInc est, quòd si assumatur magna aliqua progressio Arithmetica per interuallum 1 procedens, & eius vltimus terminus reperiatur ex Tr. 14. p. 2. Propos. 13. de proportionalit. & ex inde omniũ summa ex propos. 9. eiusdem; hæc summa proximè exprimet Spiralem, si verò maximus terminus multiplicetur in se exprimet circulum. Sic si pu.etur diuisus circulus in 256. partes, quarum singulæ 256. particulis constent, vt singuli arcus vna particula diminuãtur. Arcuum decrescentium summa erit 23896. at verò peripheria, cuius 256. partes singulę 256. particulis constant, & medietas partis vnius 128. erit particularum 65536. quarum medietas est 32768. quæ subducta à summa arcuum dat pro residuo 128. nempe vnam dimidiam ex particulis 256. nimirum $\frac{1}{512}$ totius peripheriæ.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Spiralis æqualis est generanti semicirculo in sua circumuolutione integra.

* PRobatur. Arcus se diminuentes Arithmeticâ proportione, & interiores simul sumpti, & exteriores simul item sumpti semper accedunt magis ad semicirculum, quantò magis multiplicantur, sed quantò magis multiplicantur, tantò magis accedunt ad spiralem. Ergo si in infinitum multiplicentur accedent simul ad semicirculũ, & ad spiralem. Ergo spiralis cum semicirculo eiusdẽ longitudinis erit. Patet conseq. quia arcubus ad hoc vt æquẽt spiralẽ, & fiant spiralis multiplicatio infinita submultiplex deest, vt præced. pr. & eorum summæ, vt euadant simul æquales semicirculo ex propos. 11. multiplicatio infinita deest. Ergo ex eadem, si hęc pręstita pręsupponatur euadent spiralis, & summa arcuum decrescentium æquales semicirculo.

Hæc propos. est audacior, quam antecedens, sed si nõ placeat alicui, ãplexetur priorẽ, quę sufficit.

EXPEN-

EXPENSIO IV.

De Linea Quadratrice.

LInea Quadratrix, quam ad circuli quadraturam excogitauere Dinostratus, & Nicomedes, ex Pappo lib. 4. Mirabilis est, plurimosq; vsus in Geometrica obtinet; ideoque non est pretermittenda.

DEFINITIO

QVadratrix est linea, quam proportionali motu radius ductus per circumferentiam, & perpendicularis per diametrum se intersecando producunt.

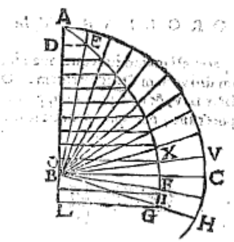
Hoc autem ex ipsa descriptione patebit.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Quadratricem lineam describere.

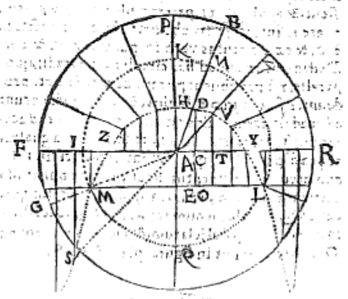
FAcilior modus Geometricè Quadrandi circulum est linea Quadratrix, quam describit Clauius lib. 6. Elementorum ad finem iuxta antiquos, & lib. 7. Geometr. pract. Modus autem describendi talis est.

Centro B fiat portio circuli maior quadrante ACH. Et sit quadrans BAC; cuius circumferentia diuidatur in tot numero partes, in quot radius (quò plures erunt, eò exactior erit descriptio) nos diuisimus in 10. partes, quarum aliquæ diametri, in diametrum BA prolungatam in L, & aliæ circumferentiæ quadrantis AC, in ipsam pariter prolungatam, vt CH insuper signatæ fuere. Ducantur deinde radij à centro B, ad circumferentiæ singulas partes, vt V, & H, & à diametri singulis partibus perpẽdiculares ipsi radio BA, vt sunt DE, & OX, & cæt. educantur donec terminent in singulos radios; prima in primum, vt DE secunda in secundum, & cęt. Deinde æquabili manu per puncta terminationum ducatur flexa AEFG, hæc enim erit linea quadratrix. Ideò verò prolungauimus ab E in G, quia cum E nequeat reperiri, cum radius sit idem, ac perpendicularis: reperitur tamen inueniendo puncta infra ipsam, qualia sunt F, I, G, quæ puncta; quo erunt plura, eo quadratricis curuitatem exactiùs prodent.



Probatur. Quia quadratrix est linea, quam diametri per circulum, & perpendicularis ipsi per ipsum diametrum motus proportionalis efficit, ita vt tot partes perpendicularis per diametrum suo motu conficiat, quot radius per circumferentiam: sed intersectiones assignatæ, per quas quadratrix ducitur tales sunt ea effectione: Ergo ea puncta in quadratrice sunt.

Altã descriptionem lineæ Quadratricis inuenit in sua Cylomathia Vincentius Leotaudus Delphinas, de qua etiam acutissimè insignes proprietates demonstrat, est autem eadem, ac antiqua, sed auctior, ne dum circuli quadrante descripta: se toto circulo suis radijs intersectiones præbenbente, quam sic deducit prædictus auctor. Centro A describatur circulus cuiuscumque magnitudinis, & in plurimas æquales partes diuidatur incipiendo à P (nam quo plures erunt eo exactior erit descriptio) per quarum singulas à centro A radij emitantur, vt AP, AB, & cæt. Tum diameter FA in partes æquales inuicem tot, quot in circulo dessignatæ fuerunt diuidatur, & per singulas diuisiones perpendiculares erigantur, vt CD, & cæt. Etenim istæ initio facto ab AP radio, & prima parallela CD successiuè se intersecabunt, cum radijs V. g. in punctis D, & V per totum dimidium circulum; & idem dicas de parallelis, & radijs ad alteram partem circuli successiuè se ellongantibus à prædicto radio AP. Per istas ergò intersectiones successiuas ducenda est manu æquabili linea flexa punctata SHL, quæ erit quadratrix integra.



Ex descriptione Quadratricis, linearum, & circulorum, quę eam secant nomina, & definitiones licet haurire.

DEFINITO.

CIrculus, & radius generans est ille, qui adhibetur in secunda descriptione ad totam Quadratricem describendam.

Talis est Radius AR, & circulus PRSF.

DEFINITIO II.

CEntrum quadratricis idem est, ac circuli generantis.

Tale est centrum A.

DEFINITIO III.

AXis quadratricis est recta, quæ in verticem quadratricis terminat, & deinde ad alteram partem *prtum in infinitum producitur, & Quadratricem in duas partes curuas diuidit. Cuius pars inter centrum circuli generantis, & verticem intercepta vocatur Basis seu Sagitta.*

Talis est HQ, quæ hinc terminat in verticem H inde ad Q in infinitum procedit, cuius pars AH Sagitta, seu Basis dicitur.

DEFINITIO IV.

Applicatæ sunt lineæ perpendiculares ipsi axi vtrinque in Quadratricem desinentes; & Primaria inter eas est portio diametri, quæ intra quadratricem concluditur.

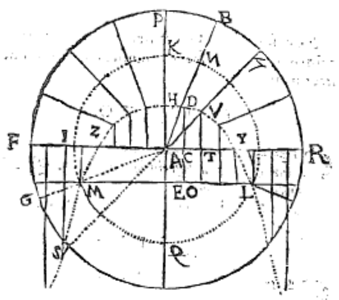
Itaque applica erit ML, & primaria erit ZY, quæ transit per centrum A; estque portio diametri axi perpendicularis, quæ ab ipsa Quadratrice intercluditur.

PROBL. II. PROPOS. XV.

Dato centro quadratricis, eiusque ordinatim quacumque applicatâ ipsam quadratricem totam describere.

Datum sit futuræ Quadratricis centrum A, & applicata quæcumque EL, & oporteat totam quadratricem describere.

Centro A per verticem L applicatæ EL transeat circulus punctatus LKM. Tum hic arcus LKM interceptus in partes inuicem æquales secetur, sicut, & applicata EL parem multitudinem partiū, ac arcus interceptus, obtineat; hæc in punctis E, & O, & cæt. circulus verò in punctis K, N, & cæt. Destinētur itaque ad has circuli partes, radij, quos parallelæ à partibus applicatæ EDOV, & cæt. prodeuntes secent in D, V, & alijs, & hæc puncta erunt ad quadratricem. Et ad hoc, vt vlteriùs producatur ipsa Quadratrix vltra L, & M partes æquales, ac prædictæ, vsque quo possunt replicari in residuo arcus LQ signentur sicut, & par multitudo partium æqualium, vt EO in applicata prolungata extra Quadratricem numerentur. Nam successiuæ intersectiones parallelarum, & radiorum erunt ad Quadratricem, vt in figura ipsa videre est.



Probatus. Quia ducta RA per centrum diuidetur in partes æquales à parallelis, sicut, & circulus generans RBP in partes æquales à radijs productis diuiditur, & tot numero, tum semicirculi, tum diametri partes erunt: Ergo eodem pacto, ac si circulus primarius, & generans RPF, & diameter AR in partes æquales, & pari numero diuisus fuisset, puncta in quadratrice dabuntur.

Dices. Poterit occurrere, vt arcus LQ vltima pars non sit æqualis cæteris arcus KL.

Respondetur vltimam partem in Q terminantem in Quadratrice non esse necessariam, sicut nec vltima pars diametri, quæ terminet in R: quia parallela ipsi AQ radio ducta ABR non potest occurrere radio AQ; vt patet, cum sit ipsa eadem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Radio ad quemcumque angulum ad axem constituto per dessignatum in eo quodcumque punctum deducere Quadratricem.

In eodem Schemate ductus sit radius AM ad axem PA faciens angulum GAP, & assignatum in eo sit punctum M.

Per punctum M ducatur circulus MEL, & ab eodem axi perpendicularis EM, quæ erit applicata. Vnde cum obtineas applicatam EM, & centrum A deduces per M datum punctum, & in dato radio AM Quadratricem ex præc. propos.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Dato quouis Quadratricis puncto, & centro, punctum è diametro oppositum assignare.

Datum sit quadratricis punctum V, cui oportebat aliud è diametro oppositum definire. Per centrum A agatur ab V linea, & per centrum A, radius generans RAF, ad quam ab V puncto dato perpendicularis ducatur VT. A puncto T igitur sumatur TI æqualis generanti semidiametro RA, & ab I perpendicularis demittatur occurrens lineæ VA productæ in S, & intersectio S erit in Quadratrice.

Probatur. Nam tot partes æquales enumerare debet arcus RZBPGS, quot dinumerat diameter RTI, vt parallela IS secet radiū VS; sed semicirculus additus ZPS constituit radium TS. Ergo semidiameter TI punctum I dessignabit. Siquidem iuxta documenta propos. 14. huius, tot partes debent fieri in semicirculo, quot in semidiametro generante.

COROLLARIVM

Hinc patet etiam modus continuandi in maximam distantiam Quadratricem. Quoniam punctis datis D, V, & cæt. puncta opposita M, S reperiri poterunt, per quæ producatur.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Perpendiculares à Quadratrice ad axem deductæ ita sunt ad totum diametrum, vt arcus à radio interceptus, & axi, ad totum semicirculum.

Sit quadratrix MHL, & à centro eodem A eiusdem fig. ac præced. tum circuli, tum quadratricis educatur radius AG, & à puncto M, quo secat quadratricem, demittatur applicata EM. Dico *ita esse hanc applicatā EM ad totum radium; vt arcus PG ad semicirculum.*

Probatur ex effectione, vel defin. 1. Qualis pars est arcus PG semicirculi talis pars est AZ semidiametri. Ergo ita erit arcus BG ad semicirculū vt AZ ad radium; sed applicata EM est æqualis, cum sit inter parallelas ipsi AZ. Ergo etiam applicata EM ita erit ad semidiametrum, vt arcus PG, ad semicirculum, vel etiam *conuertendo* diameter ad applicatam, vt semicirculus ad arcum.

COROLLARIVM.

Hinc enascitur esse quoque applicatam ad applicatam, vt circuli arcus ad arcum ab applicatarum radijs, vsque ad axem AP deductum. Namque omnes applicatę habent eandem proportionem ad diametrum, quam arcus intercepti à radijs per verticem applicatarum transeuntibus obtinent ad semicirculum. V. g. in fig. sequenti AM est ad radium, vt arcus ACK ad semicirculum, & EL est ad radiū, vt arcus CK ad semicirculum, ergo *conuertendo* radius est ad FL, vt semicirculus ad arcum CK quare ex *æquo*, vt MA ad LF, ita arcus ACK ad arcum CK.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Arcus ab extremo applicatæ ductus est ad applicatam, vt radius ipsius ad sagittam.

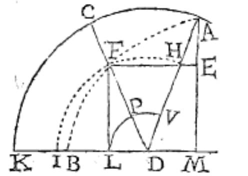
Sit sagitta DB applicata MA, circuli arcus ACK, & diameter eius AD, qui prodeant ab extremo A. *Dico ita esse.* Arcum ACK ad applicatam MA, vt radius AD ad sagittam DB.

Probatur. Per reductionem ad impossibile. Nam si non est ACK arcus ad MA applicatam, vt radius AD ad sagittam DB; erit forte ad maiorem, quàm ipsa sagitta. Sit ergo, si ita placet ACK ad MA, vt AD ad DI maiorem, quam BD.

Casus, & Progressus 1. Quoniam ergo est ex aduersarijs, vt ACK ad AM, ita AD ad DI, & vt propos.45. lib.6. element. sit quoque arcus ACK ad HFI arcum, vt AD ad radium DI. Consequenter proportio arcus ACK ad AM applicatam, & ACK arcus ad arcum HFI erit eadem proportio, ex prop. 16. lib.5. cùm sit eadem proportioni tertiæ AD ad DI.

Quamobrem, cùm eadem quantitas arcus ACK ad duas AM radij, & HFI arcus eandem dicat proportionem, ex 9. lib.5. erunt inuicem arcus HFI, & applicata AM æquales.

Progress. 2. Deinde, cùm ex anteced. Coroll, sit arcus ACK ad arcum CK, vt applicata AM ad applicatam FL, & idem arcus ACK ad minorem arcum CK, vt arcus HFI ad arcum minorem IF, esset consequenter eadem proportio ex 16. lib.5. applicatæ AM ad FL perpendicularem, & applicatam, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, cùm sit eadem proportio, quæ ACK ad arcum minorem CK. Cum



ergo sit AM applicata ad applicatam LF, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, erit etiam *permutando* applicata AM ad arcum HFI maiorem, vt applicata FL ad arcum minorem FI. Sed ex primo progress. cognouimus esse AM æqualem ipsi arcui HFI: Ergo, & applicata LF esset æqualis arcui FI, quem subtendit, quod est absurdum. Non erit itaque ACK ad AD, vt AM ad DI. Cùm ergo non sit AM ad maiorem DI, erit fortè ad minorem.

Casus 2. Progress. 3. Arcus itaque ACK sit ad AM applicatam, vt radius AD ad aliquam DL minorem, quàm sagitta DB; & eodē modo sequetur absurdum.

Siquidem ab aduersarijs ponitur arcus ACK ad applicatam MA, vt AD radius ad radium DL, & propos.45. lib.6. element. vt ACK arcus est ad arcum VPL, ita est AD radius ad radium DL.

Quadere ex 16. lib.5. erit eadem proportio arcus ACK ad diametrum AD, & arcus ACK ad arcum LPV, cum sit eadem, ac tertia proportio AD ad DL; cùmque idem arcus KCA ad duo applicatam MA, & arcum LPV eandem dicat proportionem, essent DA & arcus VPL æquales.

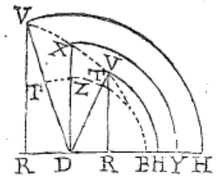
Progress. 4. Deinde cum ex anteced. sit arcus ACK ad arcum minorem KC, vt applicata AM ad applicatam FL, & idem arcus ACK eam proportionem dicat ad arcum minorem CK, vt arcus VPL ad arcum se minorem PL, esset consequenter eadem proportio ex 16. lib 5. applicatæ AM ad FL, quę VPL arcus ad arcum minorem PL. Quapropter *permutando*; ita esset AM ad VPL arcum, vt FL ad LP: sed applicata AM, & arcus VPL ostensi sunt æquales in 3. progr. Ergo etiam FL, & arcus LP essent æquales, quod non potest esse; nempe, quòd tangens sit æqualis arcui, cuius est tangens.

Cùm itaq; arcus ACK nō possit esse ad AM applicatam, vt diameter AD ad maiorem DI, quam sit sagitta DB, ex primo casu, neque ad minorem ex 2. casu DL; Radius AD erit ad æqualem ipsi sagittæ DB, taliter qualis est arcus ACK ad applicatam AM, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc est, si quando contingat applicatam esse idem, ac diametrum alicuius circuli, vt est DX in fig. seq. quadrantis XY, quod radius ille, & applicata sit media proportionalis inter sagittam, & quadrantem: itaque esse DB sagittā ad applicatam DX, vt eadem DX radius quoque ad arcum XY, qui est quadrans, & è contra *conuertendo* quadrantem XY esse ad diametrum XD, vt idem XD applicata quoque ad sagittam DB.

COR-



COROLLARIVM II.

HInc quoque enascitur, quòd si sagitta Quadratricis statuatur semidiameter alicuius circuli, diameter DX, erit æqualis quadranti illius ZB. Nam probatur iuxta tenorem præced. pr. & Coroll. quòd cum sit arcus XY ad DX applicatam, vt DX ad radium DB, & sit quoque ex propos. 43. lib, 6. elem. arcus XI ad arcum ZB, vt radij DX ad radium DZ, seu DB sagittam quod consequenter sit eadem proportio arcus XY, qui est quadrans ad quadrantem ZB, quæ est eiusdem arcus XY ad radium XD, cum tertiæ proportioni sit eadem radij XD ad radium DZ, quare cum idem arcus XY ad duas quantitates semidiametrum XD, & ZB arcum eandem dicat rationem erunt arcus ZB, & semidiameter DX æquales; cumque ZB sit quadrans DX quater assumpta circulum æquabit, cui sit sagitta BD radius.

COROLLARIVM III.

INsuper colligitur quoque ex eodem argumento, & fig. præced quamcumque applicatam RV esse æqualem arcui TB per verticem B ducti; cui sagitta quadratricis pro radio deseruiat.

Quoniam enim ex præced. est radius DV, ad sagittam BD, vt arcus HV ad applicatam RV, & arcus HV, ita est ad arcum TB, vt diameter VD ad diametrum TD, seu sagittam BD æqualem erit quoque ex 16. lib.5. arcus HV ad applicatam RV, (cum eidem proportioni DV ad BD dicant consimilem proportionem) vt arcus HV ad arcum TB: Cum ergo idem arcus HV, tum applicatæ RV, tum arcui BT eandem dicat proportionem arcus BT, & applicata RV erunt equales.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Sagittæ, atq; applicatæ arcum tertium proportionalem assignare.

SIt Quadratrix ABCin fig. seq & sagitta DA, necnon, & applicata EC, & oporteat arcum circuli reperire tertium proportionalem, ita vt sagitta AD sit ad applicatã EC, vt ipsa ECad arcũ reperiendũ.

Longitudo applicatæ CE trasseratur super radium DC, & sit DH; perque punctum H ducatur IB parallela axi, & secet in B Quadratricem, perque B ducatur radius BD, & centro D quadratricis fiat circulus interuallo EC, seu DH æqualibus. *Dico inuentum esse, quòd quærebatur, & sagittam* DA *esse ad applicatam* EC, *seu* DH, *vt* DH *ad arcum* HL.

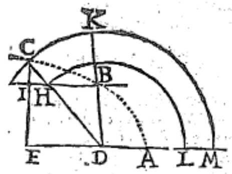
Probatur. Ita est sagitta AD ad radium DC, vt applicata EC ad arcum CKM *conuertendo* propos. 16. & *permutando*. Ita est sagitta AD ad applicatam EC, seu DH, vt radius DC ad arcum CKM. Sed vt radius DC ad arcum CKM, ita est radius DH ad arcum HL ex propos. 46. lib. 6. elem. ergo *ex æquo*, vt est DA sagitta ad DH, seu æqualem EC applicatam; ita est DH, vel EC ipsa ad arcum HL; Ergo arcus HL erit tertia quantitas proportionalis, quam animo insederat reperire.

Si verò quis cupiat reperire tertium proportionem in ipso arcu MKC id efficiet ex propos. sequenti.

PROB. VI. PROPOS. XXI.

Sagittæ, & applicatæ tertium proportionalem arcum reperire in ipso arcu ab applicatæ extremo prodeunte.

FIant omnia, quæ in præced. praxi, & semidiameter DB protendatur vsque in K ducto arcu CKM per extremum applicatæ EC; & dico *arcum* KM *esse tertium proportionalem*; & ita esse sagittã AD ad radium DC; vt radius DC ad KM arcum.



Probatur Progress. 1. Vt semidiameter DC ad radium DH, ita est arcus CM ad arcum HL, ex prop. 45. lib.6. Sed vt CD ad HD; sic ob parallelismum linearum in triangulo DCE est CE ad IE: ergo, vt est CE ad IE, ita est arcus CKM ad arcum HL.

Progress. 2. Sed etiam in eadem proportione est arcus ipse CKM ad sui arcum minorem MK, quã CE ad IE ex ipsa cõstructione quadratricis ex Coroll. propos.h.18. Ergo idem arcus CKM duobus arcubus KM, & HL ex primo progr. eandem dicit proportionem, quam CE ad EI. Quare KM, & HL licet inæqualium circulorum erunt æquales ex propos.9. lib.5. Cum ergo, & sagitta AD applicata EC, & HL sint continuè proportionales ex præc. etiam AD, & EC, & arcus KM erunt continuè proportionales.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Quadratrix ad axem Asymptota est, & numquam axem consequi; sed semper ad illum accedere potest.

PRobatur. Nam in fig. prob. 1. quanto magis diuiditur CV in minores, minoresque partes in ratione subdupla, semper tamen remanet pars residua ex Tract. 16. de progr. lin. propos. 12. Quare numquam poterimus consequi punctum, quod sit in ipso BC; verùm semper aliquatenus accedendo minus perpetuò remouebitur, & materialiter quidem accedet, non speculatiuè, vt dixi Tr. 1. prop. 6.

EXPEN-

EXPENSIO V.

De Quadratricis, & Elicis comparatione.

QVoniam non inutilem hanc comparationem agnoui: hinc est, quod illam præterire non potuerim, pro quo sit.

DEFINITIO

COnnata Helici Quadratrix ea dicitur, quæ habet semidiametrum circuli se generantis æqualem diametro circuli generantis Quadratricem.

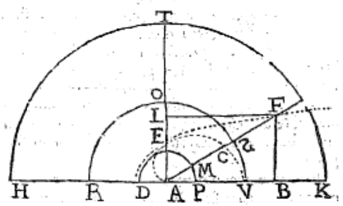
Est igitur connata Helix DE CV Quadratrici DEF; quòd semidiameter eam generans, & primam reuolutionem complens AH, vel AK circuli HTK sit æqualis diametro VAR circuli ROV generantis Quadratricem, & ideo AR radius est medietas radij AH.

THEOR. I. PROP. XXIII.

Applicata Quadratricis, & radius Helicis, qui productus ei connectatur ad verticem in ipsa quadratrice, sunt æquales.

SIt AC radius Helicis, qui productus in quadratrice DEF inueniat extremum F, applicatæ BF. Dico *huic applicatæ* BF *radium Helicis* AC *æqualem esse*.

Ducaturque gratia ostendendæ propos. à puncto F axi parallela FL.



Probatur ex constructione Helicis eadem ratio reperitur radij totius AS ad radium AC, quæ est arcus ROV ad arcum ROS. sed, quæ proportio est arcus ROV ad ROS arcum, eadem ex constructione Quadratricis est radij OA ad radium AL. Ergo radius OA, seu AV habet ad duas AL, quę æquatur BF applicatæ, & ad radium Helicis AC eandem proportionem, quam arcus ROV ad arcum ROS. Ergo AC, & AL, vel BF erunt æquales ex propos.9. lib.5.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Omnes radij Helicis abscindunt à circulo, cui radius est sagitta quadratricis, arcus sibi æquales.

SVpra ostensum est propos.20. Coroll. 2. omnes applicatas, vt BF esse æquales arcubus DM circuli DMP, cui radius est sagitta à radio, vt AF, terminante in ipsum applicatæ extremum F recisis: sed applicata BF ex præced. propos. ostensa est æqualis radio Helicis, ergo radium Helicis æqualis est arcui MD, cui radius est sagitta AD.

EXPENSIO VI.

De linea Ellipsi.

ELlipsis est inter omnes figuras Mathematicas flexas, & in se se redeuntes post circulum celebrior. Estque veluti circulus figura plana, & etiam solidis corporibus conueniens.

DEFINITIO I.

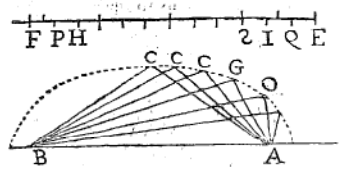
ELlipsis est motus puncti circa duo puncta talis, vt quantùm accedit ad alterum, tantùm remoueatur ab altero.

Sint A, & B duo puncta, punctumque aliud C ita moueatur per locum CCCGO, vt quantùm remouetur à puncto B, tantùm accedat ad punctum A, linea hoc motu descripta Ellipsis est: an verò sit illa ipsa, quæ est sectio coni, id erit videre in Conicis, cum ostendemus hanc ipsam proprietatem, & illam obtinere, & sic quoque, vt hęc illam describi.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

Lineam Ellipticam describere.

LInea EF in partes, quascumque placeat, diuidatur, & deinde super alteram duobus punctis, vtcumque electis BA interuallo V.g. QP, assumatur FI, & in B facto centro describatur arcus, & reliqua assumatur IE, & facto centro in altero puncto A, rursus arcus versus easdem partes describatur, vbi se decussant in O Ellipsis circumferentia trãsiet. Simili modo itaq; inueniantur alia puncta GCCC, & cæt. tum infra, tum supra lineam AB, & per illa ducatur flexa. Nam illa erit Ellipsis, quam definiuimus.



Patet. Singula puncta ex constructione, tantùm sunt remota ab vno puncto, quantùm alteri approximant, nam quantum est FI, & IE, quã signatum est tantùm est OS, & SE, qua punctum G inuentum est, & sic de cæteris.

Hoc autem fit mechanicè in duobus punctis A, & B clauos infigendo, & chorda AOB liberè circum excurrat; Nam si stylo O; dum AO, & OB Chorda tensa tenetur linea imprimatur in subiecta planitie, ea erit ellipsis; infra tamen eam vberiùs describemus, cùm de Conicis.

Pp EXPEN-

EXPENSIO VI.

De linea Conchili.

CONchilis est inuentio Nicomedis non inutilis. Nam per illam inter duas extremas interponit duas medias proportionales, & angulum quemcumque in tres partes diuidit; deseruitque in Architectura ad tumores columnarum ritè delineandos, vt apud Vignolam.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

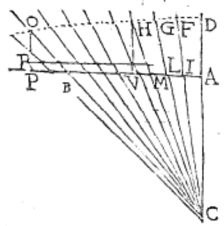
Conchilem describere.

LInea ducta AB, ducatur ei perpendicularis CD & electo in ea quolibet puncto C plurimæ rectæ ducantur quolibet interuallo ab inuicem dissitę, (quò propinquiores erunt eò meliùs) & sint CD, & CF, & CG, & CH, & cæt. Deinde arbitrarium interuallum AD super quamlibet lineam transferatur, à linea AP versùs alteram partem, qua lineæ non conueniunt, & sint IF LG, & MH; æquales ipsi arbitrariæ AD. Tandem per puncta extrema D, F, G, H, linea flexa æquâ manu ducatur, *& erit Conchilis.*

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Conchilis est linea Asymptotos: idest nunquam conueniet cum AT, licet semper ei appropinquet, conueniet tamen cum qualibet alia illi parallela, etiam si propinquissima.

PRobatur prima pars; quòd semper propinquior fiat. Nam data basi æquali MH V. g. & BO, cum angulus PBO fit minor angulo VMH, etiam perpendicularis minori angulo opposita PO, erit minor, quam VH. Quòd verò nunquam conueniat, patet, quia ex constructione punctum quodlibet conchilis, vt O distat à quolibet puncto lineę AB, quanta est BO, æqualis AD, quòd verò quam-

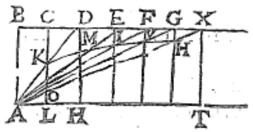


libet aliam lineam parallelam ipsi AP, vt RL inter Conchilem, & AP ductam tandem debeat secare, patet, quia producta in infinitum semper distantiam diminuet. Ergo etiam minimâ datâ qualibet minor euadet. Quare etiam distantiâ PR minor euadet.

PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

Aliam lineam Conchilem describere, quæ nec minimam, nec maximam distantiam assequi queat.

SVper lineam BX plurimæ perpendiculares æquidistantes erigantur, vt AB, & CL, & cæt. atq; electo pũcto A ducantur plurimę rectę ad puncta D, E, F, G, X, & cæt. nam quælibet perpendicularem antecedentem secabit. V. g. quæ terminat ad D, antecedentem perpendicularem CL in puncto K, quæ finit in I secabit DM in M, & cæt. Si ergo p istas omnes interfectiones describatur linea KH. Dico *esse conchilem talem*, quæ nec ad maximam concham, seu distantiam à linea AT, in quâ maior concha est, nec ad minimam distantiam à linea AT possit peruenire.



Probatur prima pars. Nam puncta K, M, I, V, & H, quò magis procedunt, eò viciniora sunt lineæ BX. Nam ob parallelismum linearum BA, & CK, vt est CD ad DB, ita est CK ad AB: sed CD est dimidia AB, ergo CK erit dimidia AB; rursus, vt DE ad EB, sic DM ad BA: sed DE est tertia pars EB. Ergo etiam DM erit tertia pars AB, & sic de reliquis, cum ergo eiusdem AB linea DM sit $\frac{1}{3}$, & CK $\frac{1}{2}$, patet esse minorē; ergo semper KH propinquior fiet: Nunquam tamen perueniet. Nam AX semper distabit à lineâ BX in puncto ab X remoto V. g. in H. Sed talia sunt omnia pũcta p quę ducitur KH, ergo nunquam ad lineam EX perueniet, & tamen semper accedet. Sed accedendo ad BX semper concha fit maior, & distans ab AT. Ergo nunquam ad maximam suam concauitatem perueniet, & tamen semper accedet.

Probatur secunda pars. Quod nec ad minimam peruentura sit. Nam minima esset in linea AB, cum si vltra AB producatur rursus ad EX prolungatam accedat: sed ad AB nunquã perueniet, & ideo, nec ad minimam distantiam ab AT.

Probatur minor. Nam non potest produci versùs AB; nisi subdiuidendo lineam BC, primo per medium; deinde alteram partem mediam, vt sit $\frac{1}{4}$, & hanc mediam, vt sit $\frac{1}{8}$: sed hoc modo, vt ex propos 12. Expens. 4. de linear. Geomet. progress. patet, nunquam sectio finitur: Ergo nec vnquam ad AE conchilis KH peruenire potest.

EXPEN-

EXPENSIO VII.

De lineæ Ciclicæ descriptione.

LInea Ciclica est illa, quam in Cęlo peragunt planetæ dum Epiclis prouoluuntur, & quam rotæ Clauus suo extremo describit, dum Currus trahitur, quamuis Ciclica planetarum suos anfractus in gyrum torqueat, at rotę amfractus suos in directum continuet.

DEFINITIO.

LInea Ciclica describitur à motu puncti circa circulum, dùm ipse circulus suo centro motu recto, seu circulari mouetur.

Itaque si moueatur V. g. circa rotam aliquod punctum ipsius rotæ, & ipsa rota vertendo se circa axem transferatur de loco ad locum efficitur quædam linea flexa, quæ Ciclica vocari potest.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Lineam Ciclicam per puncta describere.

LInea Ciclica triplex est, vel enim est motus centri velocior, quam punct. in circumferentia circuli, vel æquè velox, vel minus velox; sed quocumque modo se habeat, linea quidem diuersa est, sed eodem modo describitur. Sit linea AB equalis circuli, cuius centrum B, circumferentiæ; cùm scilicet motus centri æquè velox est, ac motus puncti in eius circumferentia, vel maior, cùm velocior est motus centri, quàm puncti in circumferentia, vel minor, cùm tardior est motus centri, quam motus puncti in circumferentia. Diuidaturque in quaslibet partes V. g. 12. eriganturque perpediculares lineæ AB æquales diametro à singulis partibus lineæ AB, & in tot

numero partes diuidatur circulus, & facto centro in quibuslibet punctis LMN, & cæt. diuisionum lineæ AB describantur portiones circulorum: Sitque DF vni parti circuli æqualis EG, duabus, HI tribus, & cæt. Si ergo per puncta CFGI, & cæt. extrema arcuum transeat linea æquabili manu ducta, hęc erit linea Ciclica, quam scilicet quodlibet punctum in rota signatum describit, dum currus mouetur, vel planetæ in epiciclis describunt, quę differt ab ea in eo, quod rectę perpediculares, vt CB & LD, & cæt. sunt radij excentricorum circulorum & ad centrum alterius magni circuli tendunt, cui est circumferentia linea BA.

TRAC-

TRACTATVS XIX.

De Angulis.

MVlta de Triangulis egit Euclides lib. 1.: sed ea erant elemetaria, quæ non ab alijs pendebant, sed potiùs alijs sequentibus fundamenta vniuersalissima sterne. bant. Modò de ipsis triangulis, quæ elementaria non sunt tradenda, quæ tamen necessaria ad multa in sequentibus percipienda.

EXPENSIO I.

De basi triangulorum, atque lateribus in vnum verticem conuenientium.

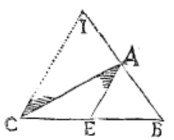
HÆc Expensio necessaria est, tum figuris Isoperimetris percipiendis tum tractatui de Sphęricis, tum Stereometriæ, & multis alijs.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo trianguli crura inæqualia fuerint, ducta à vertice recta, quæ bifariam basim secet, hæc diuidet angulum, eritque maior anguli pars minori cruri adiacens; minor verò maiori.

SIt triangulum AEC, & AE diuidat basim in duas partes æquales BE, & EC. Dico *angulum non esse ex æquo diuisum*, sed *angulum album apud* A *adiacentem cruri minori* BA *esse maiorem angulo nigro apud* A, *adiacente cruri maiori*.

Progress. 1. Ducatur CI parallela AE; eritque producta AI æqualis cruri minori BA; Quod patet: Nam in triangulo IBC ob parallelismum linearum AE, & IC, vt est BA ad BI ex 4. lib. 6. elem. ita est BE ad EC: Quare ex 16. lib. 5. elem. ablatis proportionalibus BA, & BE, reliqua erunt in eadem proportione; sed EC est dimidium BC ex hypothesi: Ergo etiam AI erit dimidium IB, & ideo æqualis ipsi BA.

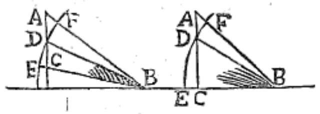


Progress. 2. Cum ergo AI æquet lineam BA, & ex hypothesi AC sit maius, quã crus AB, erit maius, quàm producta AI. Vnde erit maior angulus I, quàm niger apud C, vt subtendens AC maiorem basim, quam AI; Sed niger apud C est æqualis nigro apud A trianguli BAE ex prop. 30. lib. 1. elem. ob lineas parallelas: Ergo angulus albus apud A in triangulo BAC; est maior nigro apud A in triãgo BAC eodem, quod erat probandum.

THEOR. I. PROPOS. III.

In omni triangulo rectangulo segmentum cruris ad reliquum adiacens angulo recto habet maiorem proportionem, quàm angulus ipsi insistens, angulo insistenti reliquo segmento.

SIt triangulum ABC, & secetur in D. Dico *segmentum* AD *habere maiorem proportionem ad segmentum* DC, *quàm angulus albus ad angulum nigrum apud* B *perpendiculari adiacentem*.



Probatur. Ex 1. lib. 6. Elem. ita est triangulum BAD ad triangulum BDC, vt est basis AD ad basim DC, & ex 39. lib. 6. vt est sector FDB ad sectorem BDE, ita est angulus albus ad nigrum apud B. Triangulum verò ADB. est maius, quàm sector FDB, & ideo est proportio maioris inæqualitatis, at triangulum DBC minus, quàm sector DBE; ideo est proportio minoris inæqualitatis. Proportio verò maioris inæqualitatis maior est, quàm minoris inæqualitatis; siquidem maior continet minorem, & insuper aliquid, at minor ne dum non continet, sed aliquid ei deficit. Quare maior erit proportio trianguli BAD ad sectorem BFD, quàm trianguli BDC ad sectorem, DEB, quo posito propos.

Probatur maior est proportio trianguli BAD ad sectorem BFD, quàm trianguli BDC ad sectorem BED: Ergo *permutando* maior erit proportio trianguli

anguli BAD ad triangulum DBC, quàm sectoris FDB ad sectorem DEB: Sed hæc triangulorum est eadem, vt supra notauimus, quę basium. Proportio verò sectorum eadem est, ac angulorum ex 39. lib. 6. ergo erit maior proportio basis AD ad basim DC quàm anguli albi ad nigrum apud B.

COROLLARIVM I.

HInc & ex 39. lib 6. elem. deducitur quoque, quod habet maiorem proportionem segmẽtum AD ad segmentum DC; quam arcus FD ad arcum DE: quia proportio arcuum est eadem, ac angulorum suorum: Vnde cum AD ad DC segmenta dicant maiorem proportionem, quam anguli albus ad nigrum; dicent etiam maiorem proportionem; quam arcus FD ad arcum DE illis subtensos.

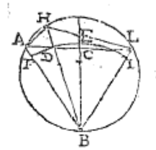
COROLLARIVM II.

HInc etiam videre licet, quòd etiam si segmẽtum non immediatè adiaceat, angulo recto, attamen remotius dicet semper maiorem proportionem ad propinquius, quàm angulus remotiori insistens, angulo propinquiori insistente. Sic DA dicet maiorem proportionem ad AB angulus albus ad nigrum apud A, quòd triangulum DAB sit maius sectore BDF. Triãgulum verò BDC sit minus sectore BDE, vnde in figura sinistra intexes idem argumentum, quòd in propositione deductum est.

THEOR. III. PROPOS. III.

Maior arcus habet maiorem proportionem ad minorem; quam chorda maioris ad chordam minoris in semicirculo.

DIco LH *arcum habere maiorem proportionem ad* HA; *quam chord*: LH *ad chordam* HA. Ducatur LA, & diuiso arcu AEL bifariã in B ducatur HB, & angulus LHA in segmento erit sectus bifariam. Deinde per punctũ D centro B. arcus ducatur IEF. Basis autem LA. secta quoque sit bifariam ab EB in triangulo æquicruro LBA.



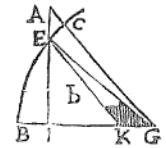
Prob. ex præc. maior est proportio DA segmenti ad DC segmentum, quàm arcus DF ad DE arcum ex 3 h. Ergo inuertẽdo DC ad DA erit minor proportio, quam DE ad DF. Ideoque *componendo* CD, & DA segmentorum erit minor proportio ad DA segmentum; quam ED, & DF arcuum ad DF arcum, & ideo dupli segmentorum LA erit minòr proportio ad segmentum DA, quàm dupli arcuum IEF ad arcum DF. Quadere *diuidendo* erit minor pportio LD partis ad DA comparcem basis LA, quam arcus ID ad DF, sed vt pars LD ad compartẽDA basis, ita est crus ad LH crus HA ex 3. lib. 6 elem. ob angulum H bifariam sectum, & vt arcus ID ad DF ad centrum, ita est arcus LH ad HA ad circumferentiam, ex 39. lib. 6 Elem. Ergo erit minor proportio LH ad HA chordæ, quam arcuũ LH ad HA. Vnde LH arcus habebit maiorem rationem ad HA; quam chordæ LH ad chordam HA.

THEOR. IV. PROP. IV.

In omni triangulo rectangulo erit maior proportio totius cruris ad suum segmentum angulo recto adiacens, quàm anguli acuti adiacentis segmento ad angulum acutum adiacentem ipsi cruri.

SIt triangulum rectangulum EIG, & àb angulo acuto quolibet V. g. E ducatur recta EK ad latus oppositum IG. Dico *maiorem esse rationem cruris* GI *ad* IK, *quàm anguli* EKI *ad angulum nigrum* G.

Ab angulo itaque G ducatur parallela GA ad EK, centro G transeat per verticem E circulus BEC, & quia longior est AG basis, crure GE ob angulum obtusum, quem subtendit, apud E; ideo circulus BEC secabit intra triangulum AEG, & sector CGE minor erit triangulo GEA. Rursùs; quia GE maius est, quam crus GI ob angulum rectum, quem subtendit, circulus EB extra triãgulum cadet; maiorque erit sector BEG triangulo IEG.



Aduertendũ autẽ est triangula GEI, & AGE, quod sint eiusdem altitudinis se habere ad inuicem, vt bases ex 1. lib. 6. & sectores item, vt supra monuimus, vt anguli inuicem se habent ex 39. lib. 6. Elem.

Probatur. Triangulum GAE est maius sectore GCE, quare si comparentur eidem triangulo GEI maior erit proportio trianguli maioris, quam sectoris ad dictum triangulum GEI: Sector verò iste GCE habet maiorem rationem ad dictum triangulum GEI, quàm ad alterum sectorem GEB triangulo ipso GEI maiorem, quare multò maiorem rationem habebit triangulum AGE ad triangulum GEI, quàm sector GCE ad sectorem GEB; cùm multò maius sit triangulum AGE comparatum triangulo GEI, & sic eius comprehendet magis, quam sector CGE respectu sectoris EGB: quare etiam cõponendo triangulum AIG compositum, ad triangulum simplex GEI maiorem rationem habebit, quam sector totus compositus GCB ad simplicem sectorem GEB; Et ideo etiam angulus totus seminiger ad G ad angulum nigrum apud G, vt præmonuimus, & ideo insuper ita erit basis tota AI ad basim IE segmentum; sed vt est ex 4 lib. 6. AI ad segmentum IE; ita quoque GI tota ad segmentum KI; Ergo GI habebit maiorem proportionẽ ad KI, quam angulus semialbus G parti nigræ; sed angulus totus semialbus G est æqualis angulo K ob parallelismum linearum GA, & KE: Ergo tota basis GI dicet maiorem proportionem ad segmentum KI; quam angulus K ad angulum nigrum G.

COROLLARIVM.

COllige quoque, quod erit quoque GK segmentum in maiori proportione ad KI, ac angulus GEK, quod opponitur nigro G, ad ipsum G nigrum; quia probatum est esse in maiori proportione AE ad EI; quam angulus albus G ad nigrum G; sed angulus GEK est æqualis albo; erg AE ad

B',

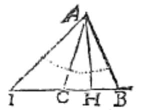
EI, & ideo GK ad KI ob eandem proportionem, erit in maiori ꝑportione, quã GEK angulus ad nigrũ G.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si sit maior proportio lateris ad latus, quam basis ad basim in triangulis duobus alterum crus commune habentibus, & basim eiusdem lineæ; erit etiam angulus subtensus segmento basis maiori maior angulo minori segmento insistente.

SIt ABI triangulum; & in eo ducatur AH, sitq; maior proportio AI ad BA, quàm segmenti IH ad segmentum HB. Dico, *& angulum* HAI *esse maiorem angulo* BAH.

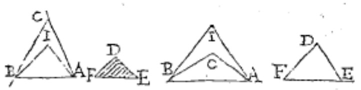
Prob. Nam, cum sit maior ratio HI, detruncetur talis portio, vt sit AC ad AB, vt CH ad HB ex propos.3.lib.6. erit angulus HAC æqualis angulo BAH. Ergo HAI erit maior, vtpote, quòd HAC sit eius pars.



THEOR. VI. PROP. VI.

Si dentur duo triangula, quorum lateris ad latus ratio sit maior, quam basis ad basim angulus verticalis erit minor. At si sit minor laterum proportio, quam basis, erit angulus maior.

QVoniam latera ponuntur maioris proportionis, quam bases, & AC est ad ED in maiori proportione, quam AB ad EF. Pone AI esse ad ED vt AB ad EF, ideo quoq; AC habebit maiorem proportionem ad ED, quam IA ad ED. Vnde ex 10.l.5. AC maior erit, quã AI. Sic dicas de crure BI si fiat ad DF, vt AB ad EF bases, quare erit maior proportio CB ad DF, quam IB ad DF; erit itaque maior, vnde crura, cum sint maiora ex 21.lib.1. conuenient extra triangulum, & minorem angulum concludent, quam IA, & IB & minorem, quam EDF, quia ex 5. lib.6. sunt triangula ABI, & EDF æquiangula.



Sic dicas de minori proportione laterum, quam basium. Si enim dicat minorem proportionem AC ad ED, quam AB ad EF; fiat AI ad ED, vt AB ad EF, quare AC dicet minorem proportionem ad ED, quam AI ad ED: Vnde erit minor AC, quam AI. Sic dicas de latere BC, quod dicit minorem proportionem ad FD, quam AB ad EF, quare si fiat IB ad DF, vt AB ad FE, crus CB dicet minorẽ ꝑportionẽ ad FD, quã BI ad FD, quare erit crus CB minus ex propos. 10. lib.5. quam BI, ideoq; triangulum AIB erit maius, quam triangulum ACB quod erit minus angulusq; ACB maior, quam AIB, sed AIB est æquiangulum triangulo EDF, ex 5.lib.6. Ergo ACB erit angulus maior, quam angulus EDF.

THEOR. VII. PROP. VII.

Bases trium triangulorum in vnum verticem conuenientium erunt continuè proportionales, si anguli duo excessuum sint æquales, & medium sit isoscelum.

SInt triangula ABC, & BAD, & BAH, quorum anguli, quo vnus alium superat niger, & nigerrimus sint æquales. Dico, & bases futuras esse continuè proportionales BC, & BD, & BH, dummodò latus BD sit equale lateri BA.

Probatur. Angulus ADC niger est æqualis duobus internis, & oppositis angulo nempe H, & angulo ad A nigro in triangulo DAH; angulus verò niger ad D est æqualis angulo semialbo ad A, nempe BAD ob æqualia crura subtensa, quare angulus semialbus ad A erit æqualis nigro ad A, & ad H. Angulus verò nigerrimus pars semialbi est æqualis nigro; quare residuum album erit æquale angulo ad H. Itaque triangulum HAB erit æquiangulum triangulo BAC; siquidem angulus B communis est; angulus albus A æqualis angulo H; quare, & reliquus BAH erit æqualis angulo C nigro ex Coroll. propos. 17. lib.1. quare hæc triangula habebunt latera proportionalia, ex 4. l.6. & BC erit ad BA, seu ED, cui ipsa BA æquatur, vt BA, seu BD ad BH.

EXPENSIO II.

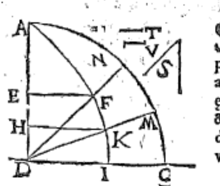
De triangulis, quo ad angulos secundùm rationem datam constituendis.

ANtiquitas tota; totusque ingeniorum neotericorum nixus in id elaborauit, vt posset angulos in triangulis iuxta datam proportionem diuidere, maximè si de trisariatione agitur; & preter ea, quæ antiquitùs inuenta sunt, nihil inuenit noua ætas, quod antiqua inuenta promoueret; Dinostratus itaque, & Nicomedes quadratricem lineam ad id inuenere, & Nicomedes Conchoideam lineam; quos modos breuiter tradere intendimus:

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Angulum datum mediante quadratrice iuxta proportionem datam diuidere.

SIt exhibita Quadratrix AFI, proportioque V ad T, & angulus S. Fiatque ei equalis ãgulus CDN, & parallela ad basim ducatur FE, Fiatq; vt V, & T ad T ex pr. 15. lib.6. elem. Sic ED ad aliam, & inuenietur DH à puncto itaque H ducatur parallela HK ad basim ID, & per K agatur radius DM, eritque arcus CM ad arcum MN, vt V ad T.



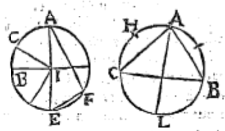
Probatur. Nam ex propos. 18. tract.18. de lineis curuis, vt est portio lateris DE ad latus DA, sic est arcus NC ad quadrantem totum CA, vt autem DA latus ad HD partem, sic Quadrans CA ad arcum MC ex eadem cit. propos. Ergo *ex æquo*, vt pars DE ad partem HD lateris, hoc est, vt V, & T ad T ex constructione. Sic CN arcus ad CM arcum. Quare *diuidendo* EH erit ad HD hoc est *diuidendo* quoq; V ad T veluti NM ad MC.

PROBL. II. PROPOS. IX.

Triangulum constituere, cuius duo anguli inter se habeant proportionem datam.

SIt quadrans circuli AB ope Quadratricis diuisus in C secundùm proportionem datam; mensureturque arcus AC gemina vice in circumferentia AF; ducaturque AF, & FE, habebitque triangulum AFE duos angulos, qui habebunt proportionem datam arcus AC ad arcum CB; nempe angulus ad E erit æqualis AIC ad centrum, vtpote quod subtendat duplo maiorem circumferentiam ex effectione, & sic angulus ad A duplus anguli CBI.

Quod si velimus, & tertium angulum datam habere proportionem, totus semicirculus ACL secundùm proportionem datã diuidatur, replicando in AH, HC, & CL quadrantis arcus datos, & quilibet arcus in circulo gemina vice mensuretur, vt omnes rursùs replicati æquent totam circumferentiam, & puncta ABC coniungantur, & erit factum, quod postulatur; habebuntque anguli eam proportionem, quam habent partes arcuum AH, & HC, & CL secundum proportionem datam eo modo, quo diximus ope Quadratricis inuentam.



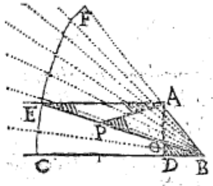
PROBL. III. PROPOS. X.

Angulum datum ope Conchoidis trifariam secare.

SIt angulus datus acutus ABC, & à quolibet puncto lateris, quod placuerit, demitatur perpendicularis in aliud latus AD, prolungeturque latus BD in C, & sit DC addita pars dupla alterius lateris BA, & ab A ducatur parallela AE ipsi DC, describaturque centro B Conchois CEF, & ad punctum E, quo secat, à puncto B ducatur BE; angulusque niger B erit tertia pars totius anguli ABD dati, & altera pars alba eius duplum erit.

Probatur OE ex descriptione Conchoidis æquatur ipsi DC: Quare diuisa in P bisariam OP æquabitur dimidiatæ DC, & ideo ipsi BA, cui tota DC dupla est ex constructione; & quia OAE angulus ex effectione rectus est, circulus centro P descriptus

transibit per tria puncta OAE ex propos.18.lib.3. elem. Quare AP erit radius, & æqualis OP, & PB, & BA; quare anguli nigri ad A, & E erũt æquales ex 14 lib.1. elem. & angulus niger ad P, vtpote externus illis duobus erit æqualis, & duplus vni eorum E: at ob æqualitatem laterum BA, & AP angulus P niger æquatur albo B: quare angulus B albus erit duplus anguli E nigri: sed hic, vtpote ab incidente in parallelas AE, & BC ex propos.30. lib.1. elem. factus æquatur angulo B nigro: Ergo angulus albus B est duplus anguli nigri B; & sic ABD sectus est, & diuisus in tres partes, quarum duæ sunt pars alba, reliqua pars nigra.



EXPENSIO III.

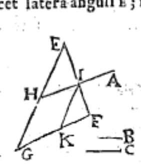
De Angulis, quoad latera secundùm datam rationem constituenda.

VIdimus modum constituendi angulos proportionales; modo restat videndum quomodo, & latera proportionalia secundùm datam rationem efficiamus.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato angulo à puncto extra illum ducere lineam, quæ crura iuxta datam proportionem detruncet.

SIt datum punctum A, & ab eo ducenda sit linea, quæ iuxta datam proportionem B ad C detruncet latera anguli E; ita vt sit vnum ad alterum, vt C ad B. Eligatur quodlibet punctũ F, & fiat, vt C ad B ex propos.15. lib.6. elem. sic EF ad EG, & GF ducatur dein ab A parallela ipsi FG, quę sit AIH, & *erit* IE *ad* EH, *vt* C *ad* B.



Patet ex prop.4. lib.6. elem. Nam FE est ad EG, idest, vt C ad B ex effectione; vt EI ad EH: Ergo erit EI ad EH, vt C ad B. Quod intelligitur etiàm si intra triangulum hęc praxis operi demandetur.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Ad datum punctum intra angulum lineam ducere, quæ ab eo puncto remaneat diuisa secundùm datam rationem.

SIt in præcedenti fig. datum punctum K per quod ducenda sit linea, vt K diuidat eam in proportiones datas B ad C.

Ducatur parallela KI lateri GE, à puncto K; & fiat, vt B ad C, sic EI ad IF, & ducatur à puncto F per punctum K linea recta FG. Dico KG *esse ad* KF, *vt* B *ad* C.

Patet,

Patet, quia est ex ad KF, vt EI ad IF, nempe, vt B ad C ex constructione, ergo etiam GK erit ad FK, vt B ad C.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

A dato puncto extra angulum ducere lineam, quæ diuidatur à lateribus anguli secundùm datam rationem.

SIt datum punctum B, & angulus A, & ducatur quæcumque à B puncto, quæ secet anguli A latera, & deinde fiat, vt data proportio K ad L, sic CB ad CD, & à puncto D ducatur parallela ipsi CE, & occurrat lateri AF prolungato, ac tandem ducatur BF iungens B, & F puncta. Dico BE *esse ad* EF, *vt* K *ad* L.

Patet, quia ex 4. lib. 6. est, vt BC ad CD, quæ ex effectione est, vt K ad L; sic BE ad EF. Ergo BE ad EL est, vt K ad L.

EXPENSIO IV.

De potentijs laterum triangulorum quorumcumque.

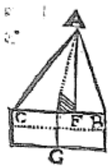
LIcet supra viderimus l.2. elem. potentias laterum triangulorum comparatas ad inuicem remanent tamen aliqua, quæ vtpote vtilia superficiebus conorum non rectorum proximè inueniendis, hic non debent posthaberi.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

In omni triangulo quadrata laterum simul sumpta sunt æqualia quadratis duobus sumptis, tum dimidiæ basis; tum quadratis duobus lineæ à vertice in eam medietatem deductæ.

TRes casus habet propositio, secundùm quòd perpendicularis cadit, vel enim extra triangulum ducitur, vel intra latera ipsius trianguli, seu est latus ipsius trianguli, vt in rectangulis, quos omnes casus seorsim ostendemus, est autem prop. Pappi, sed aliter eam dabimus.

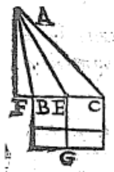
Cadat primùm perpendicularis intra triangulū, vt est AF in triangulo BAC; sitq; BC basis bifariam diuisa in E, & ducta AE. Dico, *quod quadrata ex cruribus* BA, *&* AC *simul sumpta æquātur duobus quadratis lineæ* AF, *simulq; duobus quadratis medietatis* BE.



Probatur. Quadratum AB ex 14 lib.2. est minus quadratis ex BE, & AE rectangulo BE, & EF bis sumpto; quod est BG ex eò quia angulus BEA sit acutus, & triangulum Oxigonium. Rursus quadratum AC maius est quadratis AE, & EC ex 13. lib.2. rectangulo ex EC, & FE bis sumpto: quod est CG, eo quia angulus CEA sit obtusus, & triangulum Amblygonium, quare tantò maius est quadratum ex AC quadratis ex AE, & EC; quantò minus est BA ijsdē quadratis AE, & CE, vel æquali BE, cum enim BE, & EC sint æquales, & FE eadem etiam rectangula BG, & CG bis hinc inde sumpta erunt æqualia: Quare si ex AE, & EB quadrata gemina vice sumantur, æquabunt quadrata BA, & AC, cum tantum reponat quadratum AC quantum tollit quadratum BA.

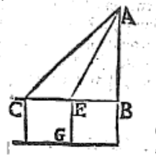
* Sit secundus casus, in quo perpendicularis extra cadat in triangulo secundo, & adhuc affirmo *quadrata* BA, *&* AC *simul sumpta æquari quadrato duplici ex* AE, *&* *quadrato item duplici ex* BE *medietate basis*.

Probatur. Quadratum ex AC, vtpote in Amblygonio oppositum angulo obtuso B in triangulo ACB maius est quadratis crurum AE, & EC duobus quadratis ex BE, & EC equalibus, & duobus rectangulis ex BE, & FB, s. rect. CB, & BF, vt lib.2. elem.p.13.



Quadratum verò BA minus quadratis AE, & BE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF, vt ostendam. Ergo, cum tantùm desficiat quadratum ex BA quantùm augescit quadratum ex AC, super quadrata AE, & EC, si hæc duplentur, illa simul sumantur, supplente altero deffectum alterius quadrata laterum BA, & AC æquabunt duo quadrata ex AE, & duo ex EC, vel EB.

Quòd autem BA quadratum deficiat à quadrato AE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF, patet ex 13. lib. 2. elem. Nam ex AE quadratum maius est lateris AB, & BF quadratis duobus rectangulis ex BE, & BF, ita quòd AE quadratum contineat in se quadratum ex BE, & duo rectangula ex BE, & BF, & quadratum ex AB, cui quadrato AE si addamus insuper ex BE quadratum istud AE cum addito BE superabit quadratum, ex AB duobus quadratis ex BE & duobus rectangulis ex BE, FB: quare AB quadratum minus erit quadrato ex AE, & BE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF.



Casus 3. Cadat perpendicularis, & sit ipsum crus AB in triangulo BAO tertio.

Tunc ex AC quadratum erit maius quadratis ex AE, & EC duplici rectangulo EC, & EB, ex 13. lib.2. quod est quadratum CG bis sumptum: BA verò deficiet, à quadratis BE, & AE quadrato BE bis sumpto, quia AB cùm BE quadratum illud AE ex prop.11. lib.2. exæquat. Quare defectus cruris BA æquatur excessui cruris AC, super quadrata ex AE, & BE. Quare simul posita ex BA, & AC quadrata æquabunt quadrata ex AE, & BE bis sumpta.

EXPENSIO V.

De angulis in figuris rectilineis.

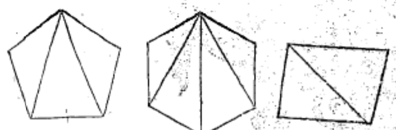
VIsa angulorum secundùm se constitutione, cognitisque proprietatibus modo eos, vt figuris rectilineis applicatos consideramus, siue illæ regulares sint, seu irregulares.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Qualibet figura rectilinea continet bis tot angulos rectos, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

QVælibet figura rectilinea continet angulos bis tot æquales rectis quota ipsa est inter figuras rectilineas. V g. prima figura est triangulum; illius anguli duobus rectis æquabuntur. Secunda, seu oblonga, seu Trapezia, illius itaq; anguli, eo quòd sit secunda bis tot rectis, nempe quatuor erunt æquales. Tertia est Pentagonum, seu æqualium laterum, seu non. Sex itaque rectis eius anguli æquales erunt.

Ratio est, quia quælibet figura in tot triangula diuidi potest, quota ipsa est inter figuras rectilineas trahendo à quouis angulo rectas ad vnum aliquem illorum: Sic triangulum non nisi in triangulum diuidi; quadrata verò figura in duos angulos: at pentagona in tres, sexagona in 4. vt vides hic factum.



At ex 17.lib 1.propos. demonstratum est internos cuiuscumque trianguli angulos æquales esse duobus rectis: Quare quæ figura non potest diuidi, nisi in vnum angulum trahendo de angulo ad angulum rectas, vt triangulum, æquabitur duobus rectis, quæ in duos, vt quadratum quatuor rectos exæquabit, quæ in tres, vt pentagona sex rectis æquos angulos obtinebit sexagona octo angulos rectos complebit, & cæt. Sed quæres, quā ratione cognoscatur figura inter figuras talem sedem occupare V.g. esse decimam, vel vndecimam figuram.

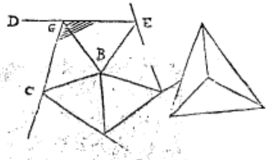
Respondetur numeranda esse latera, vel angulos, & detractis duobus (duo enim latera figuram constituere nequeunt, sicut nec duo anguli solum, vt patet) ille numerus residuus, quam sedem occupet in serie figurarum demonstrabit V. g. data figura 20. vel angulos, vel latera numeret detrahe 2. remanebit 18. illa itaque figura inter figuras erit decimaoctaua.

THEOR. II. PROPOS. XVI.

Anguli cuiuscunque figuræ rectilineæ æquantur bis tot rectis, quot angulos obtinet, seu latera detractis rectis quatuor.

VVlt propos. quòd numerentur latera, seu anguli cuiuscunque figuræ, & eo numero duplicato detrahantur quatuor, & residuus numerus angulos rectos demonstrabit, quibus anguli æquales sunt. V.g. Pētagoni sunt anguli, vel latera; quinq; duplica hunc numerum 5. erunt 10. à quo si detrahas 4. remanebunt 6. indicans quinque angulos pentagoni sex rectis esse æquales.

Probatur. Quia figura quælibet in tot triangula diuidi potest à singulis eius angulis trahendo lineas ad aliquod punctum in medio assumptum, quot ipsa habet latera, seu angulos, vt vides hic factum in triangulo, & pentagono.



Quare cum ex propos. 17. lib. 1. elem. quilibet trianguli angulus sit æqualis duobus rectis, sequitur, vt triangula ea in qualibet figura iuxta numerum angulorum, vel laterum facta sint æqualia bis tot rectis, quot sunt anguli illi: sed omnes illi habent angulos circa punctum medium figuræ consistentes omnes simul sumptos æquales quatuor rectis, vt collegimus propos.12. lib.1. qui ad angulos figuræ non pertinent: quare si detrahatur, remanebunt reliqui ad figuram pertinentes: Sic, si ex 10. auferantur 4. erunt reliqui 6. anguli recti, quibus 5. anguli pentagoni æquales sunt.

THEOR. III. PROPOS. XVII.

Anguli cuiuscumque figuræ externi à latere producto, & sibi coniuncto effecti æquant solùm quatuor rectos.

ANgulos exteriores cuiuscumque figuræ, qui fiunt à lateribus versus eandem partem seriatim deductis, vt vides factum in pentagono B omnes sunt æquales tantum 4. rectis.

Deducitur ex propos. 10. lib 1. elem. vbi asseritur, quòd linea super aliam consistens angulos duos, hinc, & inde facit duobus rectis æquales, quare cum quodlibet latus figuræ cuiuslibet insistat super alium productum, vt est CG super DE; sequitur, vt angulus niger figuræ internus, & angulus albus externus sint æquales duobus rectis, & cum omnes ita se habeant, sequitur esse æquales omnes interni, & externi bis tot rectis; quot ipsi sunt V. g. in fig. 5. angulorum decem angulis rectis; quia 5. interni, & interni 5. sunt; Sed iam diximus internos esse æquales sex rectis: sequitur, quòd externi sint solum æquales 4. rectis.

COROLLARIVM.

HInc poteſt colligi modus cognoſcendi in figuris rectilineis,& equilateris regularibus quot gradus quilibet eius angulus, tum internus, tum externus, tum ad centrum contineat, cum enim quilibet rectus angulus 90. partes, graduſque contineat ſit, vt ex cognitione rectorum deueniamus in cognitionem continentiæ, quam anguli figuræ poſſidet ſic cum anguli ad centrum ſint 4. rectis æquales; qui 360. gradus continent, & illi V. g. in Pentagono ſint 5. ſi per 5. diuidatur 360. dabit 72. numerus ſilicet graduum, quem continet angulus B. & quia anguli externi, vt G quatuor quoque rectis ſunt æquales, angulus quoque G 72. gradus continebit, ſed quia anguli interni 6. rectis ſunt æquales, qui dant 540. gradus diuiſo hoc numero per 5. dabit 108. grad. pro continentia cuiuſcumque anguli interni.

TRACTATVS XX.

De Lineis circulo circumpoſitis.

VIſis Linearum proprietaribus ſecundùm ſe, modo incipimus eas conſiderare, vt margines ſuperficiei, atq; figuræ; & quia vt 3 lib. Elem. vidimus, omnes figuræ perfectę adiumento circuli deſcribuntur; ideo eas, vt applicatas circulo conſideramus.

EXPENSIO I.

De principijs huius Tractatus.

PRæcipuus ſcopus huius Tractatus eſt conſiderare lineas, quæ circuli peripheriæ, vel eius datis portionibus ſubtenduntur, quatenùs menſurabiles ſunt, vel menſura adæquata, ſi lineę ſint ſemidiametro commenſurabiles, quę tanquam rationalis reſpectu omnium aſſumitur, & tanquam ea, iuxta cuius partes omnes alię lineæ diuidendę ſunt; vel, ſi ſint incommenſurabiles, ſaltem menſurâ proximâ.

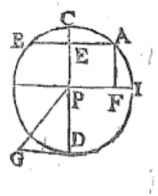
Circulus omnis ex libito hominum in 360. partes diuiditur, quæ Gradus appellantur, & omnis gradus in 60. partes, rurſùs intelligitur diuiſus, quæ minuta dicuntur; rurſùſque omne minutum in 60. partes ponitur diuiſum, quæ ſecunda, & quodlibet horum in 60. partes inciſum iterum, quæ Tertia vocitantur, & ſic Quarta, Quinta, Sexta: ſemper ſubdiuidendo vſque ad 10.

Iſtis itaque partibus circuli linea aliqua ſubtenſa vel circumſcripta ſi non omnibus ſaltem Gradibus, & minutis notæ longitudinis reſpectu radij reperire fuit neceſſarium; ſi non adequatè, ſaltem proximè, & cùm inſenſibili differentia à vero.

Linearum verò rectarum, quæ circa peripheriam circuli conſiderantur aliæ ſunt intra, aliæ ſunt extra, aliæ eam ſecant. Quæ intra circuli peripheriam exiſtunt illæ ſunt ſubtenſę, quæ, & cordę dicuntur, & Sinus.

DEFINITIO I.

CHorda itaque eſt recta linea in circulo dirimens eum in duo ſegmenta, & vtrumque pariter ſubtendens.



Talis eſt AB in circulo ABCD, quæ ſubtendit ſegmentum BCA, & BDA, quòd licet verum ſit, tamen, cũ ſinũ EA in ſe continens accipitur, vt minorem portionem BCA ſubtendens conſideratur.

DEFINITIO II.

SInus Rectus eſt dimidiata chorda à diametro ei perpendiculari ſecta.

Talis eſt EA. Sinus verò eſt nomen Arabicum vſurpatum in hanc ſignificationem à Mathematicis. Licet Vitalis in ſuo Lexico Mathematico ex eo velit ſinum appellatum, quòd claudat curuitatem arcus.

DEFINITIO III.

SInus Verſus eſt diametri portio chordæ, ſeu ſinui recto perpendicularis inter chordam ipſam, & peripheriam incluſa.

Talis eſt CE inter BCA ambitum, & EA ſinum, ſeu BA chordam exiſtens, qui etiam dicitur ſagitta.

DEFINITIO IV.

SInus complementi eſt ſinus rectus illius arcus; qui alium complet.

Talis eſt AF, qui eſt ſinus arcus AI complentis arcum CA vſque ad quadrantem, qui dicitur etiam ſinus ſecundus.

DEFINITIO V.

SInus totus eſt radius ipſius circuli.

Aſſumitur verò radius: vt rationalis reſpectu omnium aliarum, ſeu chordarum, ſeu ſinuum, ideoque à recentioribus ſupponitur diuiſus in partes 10000000. licet Ptholomeus cum poſuerit partium 60. Arzael par 150. ſed experimentum docuit minutiorem diuiſionem eſſe maioris commodi.

Lineæ, quæ extra peripheriam ſunt communi nomine dicuntur ſecundæ, & ſunt tangentes, quarum definitionem lib. 3. def. 2. explicauimus. Talis eſt DG quarum terminus eſt ſecans aliqua, quæ proueniat à centro, & in ipſam tangentem terminet, vt PG. Itaq; cum ſemper diameter PD in punctum contactus ductus faciat angulos rectos, cum tangente ex lib. 3. Elem. prop. 20. Radius cum tangente, & ſecante ſemper faciet triangulum rectangulum, cui ſecans PG baſis ſit.

EXPENSIO II.

De lineis portionibus peripheriarum inscriptis, quæ latera alicuius figuræ regularis intexunt.

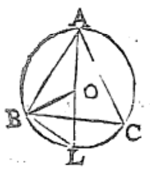
QVę lineæ circulo inscriptæ aliquam figuram regularem constituunt notiores sunt, & fundamentum, quo cæteræ inueniantur. Vnde ab istis doctrina exordienda. Vidimus autem propos. 15. lib. 4. elem. Latus Hexagoni ęquari radio; vnde de reliquarum figurarum lateribus sermo erit.

THEOR. I. PROPOS. I.

Latus Trianguli circulo inscripti potentiâ triplum est semidiametri.

SIt triangulum ABC ęquilaterum in circulo ABC. Dico *eius latus posse inseruire pro latere quadrati, quod erit triplo maius, quàm quadratum semidiametri*, BO, qui æqualis est BL lateri hexagoni ex propos. 15. lib. 4. Euclid.

Probatur. Quadratum basis AL in rectangulo BAL est æquale quadratis rectarum BA, & BL, ex 11. lib. 2. quòd angulus B in semicirculo: rectus sit ex 28. lib. 3. Sed quadratum à diametro factum est quadruplum quadrato sui dimidij, & semidiametri BL, vel BO, ex Coroll. propos. 6. lib. 2. Ergo reliquum quadratum ex BA æquat reliquas tres partes, quæ vna cum quadrato ex BL, vel BO quartæ parti æqualis, omnes quatuor partes quadrati AL exæquat: vnde solum quadratum ex AP erit triplum quadrati OA radij, & consequenter ipsum latus AB triplo ampliùs poterit.



COROLLARIVM.

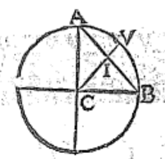
HInc est, quod si diametrum in se multiplices, & quadres, sic, & semidiametrum: deinde quadratum semidiametri à totius diametri quadrato subducas, & à residuo radicem quadratam extrahas, quòd inquam ea radix erit latus trianguli AB, & chorda, quæ subtendit 120. grad. cuius medietas est sinus 60.

Aduerte autem, & hoc sit vniuersale monitum, quod vt exactissimus sit calculus sinus totus duabus zifris augendus, & à radice quadrata, deinde vna figura abijcienda est; in qua aliquis error in maiori, vel minori excessu inesse potest.

THEOR. II. PROPOS. II.

Latus quadrati circulo inscripti potest duo quadrata ex semidiametro constituta.

PAtet. Nam latus quadrati in circulo subtendit quadrantem: Ideo angulus C rectus: Vnde ex 11. lib. 2. quadratum ex basi BA rectanguli ACB æquatur duobus quadratis alteri ex semidiametro AC, alteri ex semidiametro CB.



COROLLARIVM.

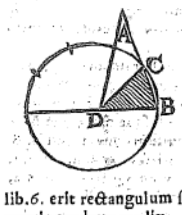
COlligitur. Quòd si quadretur semidiameter auctus duabus zifris, & duplicetur, & à toto radix quadrata eruatur, illa abiecta vltima figura datura sit latus quadrati, & chordam AB, cuius medietas est sinus 45. grad.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si hexagoni, & decagoni latus in eodem circulo descriptorum componantur tota recta linea extrema, & media ratione secatur.

SIt latus decagoni BC, & ei addatur AC æqualis semidiametro DB, quę, & erit latus hexagoni. Dico *totam* AB *sectam esse in* C *extrema, & media ratione*. Nempe quadratum contentum sub AC esse æquale rectangulo sub AB, & CB contento.

Prob. Progress. 1. Triangula ADB totum, & nigra pars sunt ęquiangula, vt ostendam; Ergo ex 4. lib. 6. ita est proportionatum AB latus ad DB basim in triangulo maiori ADB, vt latus DB in triangulo nigro minori vel ęquale AC ex constructione basi CB. Cùm ergo sit tota AB ad segmentum maius AC, vt idem ad minus CB ex prop. 19. lib. 6. erit rectangulum sub extremis contentum æquale quadrato mediæ.



Remanet solum probandum triangula ABD, & minus nigrum esse æquiangula.

Progress. 2. Angulus niger apud D est quinta pars semicircumferentiæ nimirum duorum rectorum, vtpote angulus decagoni, quòd BC ex Thesi sit latus decagoni. Ergo reliqui duo C, & B nigri æquales inuicem ob æqualitatem laterum subtensorum erunt quatuor partes duorum rectorum, vt omnes simul sint æquales duobus rectis ex 17. propos. lib. 1. & siguli duæ partes, nempe dupli anguli nigri apud D. Sed angulus C niger est æqualis ex prop. 17. l. 1. duobus internis, & oppositis A, & albo apud D, qui ęquales inuicē sunt ob crura DC, & CA suptensa ęqualia. Ergo duplus vni eorum V. g. angulo A, sed, & erat duplus angulo nigro apud D, ergo isti angulus A, & niger apud D erunt æquales.

Progress. 3. Hincque probabitur angulum D totum nigrum, albumque trianguli maioris esse æquale angulo C nigro minoris. Nam est totus duplus anguli A; cùm quilibet, nempe niger D, vt ostensum est, & albus D ob æqualitatem laterum sint æquales ipsi A: Ergo totus albus, nigerque D ipsi A duplus, ergo totus æqualis nigro angulo B duplo quoque, vt secund. progress. anguli nigri D.

Tandem angulus B est communis, ergo triangulum magnum, & paruum nigrum sunt æquiangula; cum de singulis angulis probata sit ęqualitas in ambobus, & hinc erit AB ad AC, vt AC ad CB: quare recta AB, quę constat ex latere decagoni, & hexagoni extremâ, & mediâ ratione secta est.

COROLLARIVM

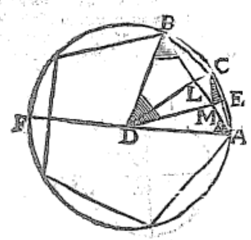
HInc, si diametrum auctum duabus zifris, & hoc quadratum diuidas per semidiametrum similiter auctum excipies latus decagoni.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describitur, pentagoni latus potest, quod potest, & latus decagoni, & latus sexagoni.

DVo intendo demonsttare alterum, quòd pentagoni latus possit latus sexagoni, quod possit quoque latus decagoni; Ideoque, vt ambo.

Probentur. Sit BA latus pētagoni, quod subtēdat arcum BCA; isque arcus diuidatur per medium in C; ducaturque à centro D semidiameter DC; connectanturque subtensę, quę erunt latera decagoni CB, & CA; semidiametrique ducantur BD, & DA, & rursùs diuiso arcu CA per medium in E, ducatur semidiameter DE; & secet chordam BA in M, & CA in I; connectaturque MC.



Probatur duo triangula BAD, & BMD sunt, vt deinde ostendam, æquiangula, & angulus apud D niger est æqualis angulo A nigerrimo, & angulus niger B cōmunis, ergo ita erit BA ad BD, vt BD ad ad BM. Ideoque rectangulum sub extremis contentum BA latere Pentagoni, & BM, eius portione erit æquale quadrato ex media BD, radioque ex 19. lib. 6.

Progress. 2. Æquiangula quoque sunt, vt ostendam, triangula nigrum totum CMA & maius ipso ABC, cuius angulus B est æqualis angulo nigro C, & niger apud A communis. Ergo eadem ratione erit AB ad AC, vt AC ad MA: Ideoque rectangulū sub AB, & MA extremis æquale erit quadrato mediæ CA ex 19. lib. 6. Sed hæc rectangula, nempe primi progr sub BA, & BM, & secundi sub BA, & AM æqualia, sunt quadrato ex tota BA, ex 4. prop. lib. 2. Ergo talia quoq; erunt quadrata illis æqualia, nempe quadratum ex BD æquale rectangulo, & tota AB, & maiori segmento, & quadratum CA æquale rectangulo ex tota, ex minori segmento, ista inquam duo quadrata erunt æqualia quadrato ex BA: Ergo BA latus pentagoni potest quadratum BD lateris sexagoni, & CA lateris decagoni.

Remanet primo ostendendum triangula BAD, & minus BMD esse æquiangula. Quod ita conuincitur. Angulus A nigerrimus est in peripheria: Ergo vt sit æqualis BDE ad centrum debet esse supra duplò maiorem circumferentiam, cùm super æqualem sit subduplus ex 23. lib. 3. Talis verò est circumferentia FB, nempe duplo maior super quā insistit A nigerrimus angulus ad circumferentiam respectu BCE circumferentiæ, quam comprehendit angulus niger D ad centrum, vt considerant; patet, cum FB sit 6. ex circuli 20. partibus BE verò 3. Angulus verò niger apud B est communis. Ergo reliquus reliquo æqualis, cum tres anguli cuiuscumque trianguli duobus rectis æquentur ex propos. 17. lib. 1. Coroll.

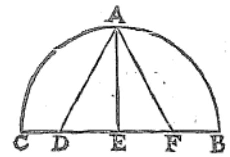
Prob. Deinde triangula BAC maius, & seminigrum CMA esse æquiangula. Nam anguli in minori nigro apud A, & apud C niger sunt inuicem æquales ob æqualitatem laterum, vt consideranti patet; item angulus A albus est æqualis angulo apud B trianguli CBA maioris, cum sint super ęquales circumferentias CA, & CB. Ergo idem angulus apud B albus trianguli ABC erit æqualis alteri nigro minoris trianguli apud A; & consequenter angulo C nigro ei æquali: Cùm ergo B maioris, & C nigri minoris trianguli sint æquales, & reliquus albus apud A communis, erunt quoque duo reliqui æquales: Vnde triangulum maius BAC triangulo minori AMC erit æquiangulum.

PROBL. I. PROPOS. V.

Latera decagoni, & hexagoni in eodem circulo inuestigare.

SIt circulus, vel quod sufficit semicirculus CAB, cuius diametro AB sit perpendicularis EA, & diuiso bifariam semidiametro in F ducatur FA, cui æqualis sumatur FD, & à puncto D ducatur ad A recta AD. Dico rectam ED esse latus Decagoni, & secundo AD esse latus Pentagoni.

Probatur. Nam DB est secta media, & extrema ratione in E: quare ED minus segmentū erit latus decagoni, & EB maius segmentum erit latus sexagoni ex propos. 3. huius.



Probatur antecedens, quod DB secta sit media, & extrema ratione. Nam ex propos. 8. lib. 2. Radius EB sectus est bifariam in F, & ei addita est recta ED. Vnde rectangulum ex tota DF, & addita DE vnà cum quadrato ex EF medietate est æquale quadrato medietatis, & additæ vt vno latere FD facto, sed FD est æqualis lineæ AF ex constructione. Ergo ipsius AF quadratum dicto rectangulo, & quadrato ex medietate radij æquale erit. Sed quadratum ex AF est quoque æquale quadratis AE radio, & EF eiusdem medietatis ex 11. lib 2. Quamobrem si quadratum illud EF dematur, remanebunt quadratum ex AE, vel quod idem ex maiori segmento EB, nempe

nempe radio, & rectangulum ex tota DB, & additâ DE comprehenso æqualia: Quare DB erit secta extrema, & media ratione.

Probatur secunda pars. Nam ex 11. secundi AD potest, & quadratum ex EA, & quadratum ex DE: sed DE est latus decagoni, vt modo ostensum est EA hexagoni, cùm sit radius. Ergo ex propos. anteced. est latus pentagoni.

COROLLARIVM.

HInc patet modus, quo eruatur latus Decagoni. Nam numero radij in se multiplicato, & numero medietatis radij quoq; in se ducto, âbo simul colligantur, & ex toto radix quadrata eruatur, & obtinebitur linea AF, à qua dempto numero medietatis radij, nempe EF remanebit DE latus decagoni. Radius verò duabus zifris augendus, vt præcisior sit calculus, & deinde ex radice extructa expungenda figura vltima est.

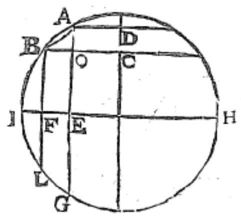
COROLLARIVM II.

ET hinc quoque fit, quòd ex antec. pentagoni latus habeatur. Nam numero radij aucto duabus zifris ad maiorem precisionem in se ducto, & Decagoni quoque in se ducto, si à toto simul aggregato radix quadrata extrahatur dabit DA latus pentagoni.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Quindecagoni latus potest quadrata linea, quà differt semilatus trianguli à semilatere Pentagoni, & eorum sinuum versorum differentiæ.

PRobatur per 16. lib. 4. Euclid. recta Inscripta inter basim trianguli, & pentagoni latus tertium est latus quindecagoni, vt AB, quæ est inter punctũ A, in quo cadit basis trianguli, cuius vertex in H, & B, quo item incipit à pũcto B tertium latus



pentagoni ab H: Erit ergo AE semilatus trianguli & FB pentagoni, & differentia OA. Sinus verò versus semilateris pentagoni est CB, & trianguli est DA, & eorum differentia OB; cum ergo OBA triangulum sit rectangulum: ex 11. lib. 2. basis AB quadratum æquabitur quadratis ex OB, & OA.

COROLLARIVM.

QVare Colligitur, quod si semilatus FB subducatur AE relinquetur AO, qui in se ducetur. Repartitis verò complementis DA, & CB, vt infra docebo, & minori à maiori subducto relinquetur OB, qui in se multiplicabitur: numeri verò in se ducti, tum AO, tum OB aggregentur. Nam extracta radix quadrata dabit chordam AB, & latus quindecagoni Gr. 24. quæ dimidiata erit sinus Gr. 12.

EXPENSIO III.

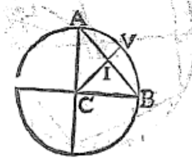
De proportione laterum figurarum circulo inscriptarum, cum diametro.

NE frustra quandoque laboremus in lateribus prædictarum figurarum inueniendis, oportet priùs videre, an sint lineæ rationales, & ideo numeris exprimibiles: si namq; numeris partium, in quas diameter diuisus est exprimi nequeat earũ longitudo, frustra quis nescius calculum reiteraret, vt tandem partes numero exprimeret, quæ exprimi nequeant.

THEOR. I. PROPOS. VII.

In quadrato diametrum incommensurabile est lateri, seu semidiametro cui est inscriptum.

PRobatur ex demonstratis lib. 2. & propos. 6. in Coroll. Quadratum factum ex diagonali AB est duplũm quadrati facti ex latere, & radio CB: Ergo hęc quadrata non possident rationem talem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum debet habere: sed quam numerus ad numerum ex Coroll. 1. enim propos. 16. lib. 8. inter numeros, quorum vnus sit duplus alterius non cadit medius



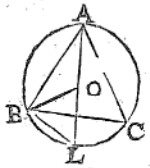
proportionalis; & sic inter eos non potest intercedere proportio, quæ inter quadratos numeros mediat ex eadem 16. propos. Cum ergo quadratum diametri diagonalis AE ad quadratum lateris sit solum, vt numerus ad numerum ex propos. 6. lib. 10. erunt longitudine duo incommensurabiles latus, & radius BC, & diagonalis AC, quæ est chorda subtensa quadranti, & ideo etiam diametro toti incommensurabilis erit.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

In triangulo latus ipsius semidiametro, in quo inscribitur incommensurabile est.

PRobatur. Nam ex propos. 1. latus trianguli AB potest inseruire pro quadrato, quod erit triplo maius; quam semidiametri AO: Sed 1. ad 3. non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum ex Coroll. 12. lib. 8.

Ergo



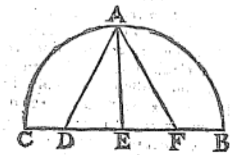
Ergo nec quadratũ semidiametri ad quadratũ lateris inscripti trianguli. Quare ex prop. 6. lib. 9. latera horũ quadratorum erunt incommensurabilia.

THEOR. III. PROPOS. IX.

In Pentagono, & Decagono latus diametro est incommensurabilis linea, tum longitudine, tum potentia.

*PRobatur primo de Decagono. Nam assumpta fig. prop. 5. præcedentis quadratum dimidij radij EF est quarta pars quadrati totius EA. Sed linea AF potest efficere quadratum æquale duobus quadratis, & lineæ AE, & lineæ EF. Ergo potest quintuplo magis, quam dimidius radius EF. Quare lineæ EF & DF longitudine incommensurabiles erunt ex propos. 10. lib. 10. quia possunt quadrata, quæ proportionem habent, vt numerus ad numerum; non autem, vt quadratus numerus ad numerum quadratum.

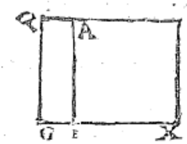
Si itaque à DF recta æqualis ipsi FA auferatur semiradius EF rationalis respectu totius diametri, eique commensurabilis. Cum à linea integra maiori DF, potestque magis, quàm minor EF quadrato rectæ AF, quæ linea toti maiori est incommensurabilis, quia quadratum AF est quater, & DF quinquies maior, quàm EF, & ideo cum quadrata se ge-



rant, vt numerus ad numerum; ipsa latera erunt incommensurabilia. Cum ergo maior DF plus possit, quam minor EF quadrato DE lateris sibi maiori incommensurabilis, ipsaque minor EF sit exposite. Rationali nempe diametro commensurabilis longitudine, & potentia, recta DE ablata EF minori erit Apotome; Et quia EF quadratum est ad quadratum ex FD, vt numerus ad numerum; ideo DE erit Apotome quinta ex 24. vel 21. propos. lib. 10.

Probatur secundo de latere pentagoni AD. Nam potest efficere quadratum æquale quadrato lateris DE, & EA. Linea verò DE est irrationalis cùm ostensa sit Apotome.

Cũm ergo DE sit irrationalis, quadratum eius, vtpote ex irrationali factum, erit omninò irrationale ex 25. lib. 10. Vnde si applicetur ad rationalem AE rectangulum illius quadrato ęquale ex



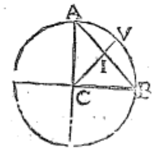
35. lib. 1. Hoc efficiet latitudinem, seu alterum latus EG rationali ipsi EA incommensurabile lõgitudine, cum rectangulũ ZE sit ad rectangulum AX, velut basis GE ad basim XE ex pr. 1. lib. 6. & ideo ex prop. 5. lib. 10. GE, erit incõmẽsurabile ipsi EX. Vnde additũ ipsi rationali EX efficiet totam lineam GX longitudinem incommensurabilem ipsi Rationali AE, atque irrationalem ex prop. 10. lib. 10.

Erunt itaque incommensurabiles GX, & AE idest GZ: Vnde ex propos. 26. lib. 10. rectangulum, quod continent XZ erit irrationale. Sed huic rectangulo est æquale quadratum EX DA: Quia rectangulum GA ex const: factum est æquale quadrato, ex DE constituto. Ergo linea AD potens hoc rectangulum est irrationalis ex prop. 25. lib. 10.

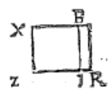
THEOR. IV. PROPOS. X.

Latus Octogoni est diametro incommensurabile.

*PRobatur. Nam considerato schemate prop. 2. sit radius CI perpendicularis ipsi lateri quadrati AB; eritque semiquadratum CIB. Vnde diagonalis huius quadrati CB erit duplò maior in potentiâ, quàm CI, & ideo vt ex prima propos. huius Expens. constat erunt longitudine incommensurabiles CI, & CB, ablata itaque CI, à radio CV, vel CB reliqua erit Apotome, nempe irratio-



nalis etiam potentiâ, & ideo eius quadratum irrationale. Applicetur itaque rationali potentiâ IB, vt in antecedenti fecimus rectangulum æquale quadrato rectæ IV, & fit BR, & erit longitudo IR ex 2. lib. 10. irrationalis ipsi IB, vel æquali IZ; ideoq; cùm duæ ZI, vel æqualis IB, & IR sint irrationales tota erit irrationalis, & ex Cor. 2. popos. 26. lib. 10. rectangulum XR erit quoque irrationale. Vnde latus octogoni VB potens efficere quadratum huic rectangulo XR æquale erit irrationale. Potest autem efficere quadratum rectangulo XR æquale. Quia potest efficere quadratum æquale quadratis duobus VI, & IB: quæ æqualia sunt huic rectangulo XR ex effectione.



EXPEN-

EXPENSIO IV.

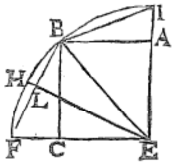
De circulo inscriptis, quæ figuram non constituunt.

FGimus de lineis inscriptis circulo, quæ figuram faciebant, modo de illis, abque respectu ad figuram vllam, sed determinatæ quantitati graduum subtensis: Eas vero in duas classes diuidemus, & hìc agemus de illis subtensis, quę vt inueniãtur radicis quadratę extractionem deposcunt: deinde alias trademus, quibus tractandis radix quadrata adhibenda non est.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Sinus complementi, & sinus recti quadrata æquantur quadrato radij. Sicut, & quadrato chordæ æqualia sunt sinus versi, & sinus recti quadrata.

PRobatur BAE rectus est angulus. Vnde ex 11. lib. 2. Quadrata ex BA sinu, & AE, vel æquali BC sinus complementi erunt ęqualia quadrato radij BE.



Probatur secunda pars. Nam angulus C rectus est. Ergo sinus versi CF quadratum, & recti sinus CB erũt æqualia quadrato chordæ BF, & est eadem ratio de sinu recto BA, & verso AI, qui æquantur chordæ BI.

COROLLARIVM I.

HInc dato sinu recto BA si ducatur in se, & subducatur à sinu toto in se ducto, & à residuo dematur radix quadrata; Illa dabit sinum complementi BC, quo ablato à sinu toto remanebit sinus versus IA.

COROLLARIVM II.

SI verò hic sinus versus in se multiplicetur, & coniungatur cum quadrato sinus recti. V. g. quadratum fiat ex FC, & coniungatur cum quadrato ex CB, vel quadratum BA cum AI Radix quadrata subducta à toto dabit chordam BF, vel BI, cuius medietas est sinus dimidiati arcus BI, vel BF, vt est sinus BL arcus BH.

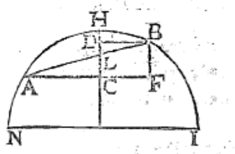
COROLLARIVM III.

QVod si duplices sinus complementi, & sinum rectum habebis chordas, quæ totum arcum subtendunt, nam si duplices BC sinum complementi habebis Chordam duplicis arcus FB, sicut si duplices sinum rectum BA habebis Chordam duplicis arcus BI.

THEOR. II. PROPOS. XII.

* *Chordæ cuiuslibet quadratum est æquale quadrato duorum sinuum simul positorum, quorum arcus simul illa subtendit, & quadrato differentiæ sinuum versorum.*

SIt Chorda AB subtendens arcum AHB, qui sit diuisus in quascumque duas portiones AH, cuius sinus rectus AC versus CH, & HB arcum, cuius sinus DB rectus, & versus DH. Dico, *quod si sinus recti cõponantur ita vt efficiant* ACF, & deinde sinus minor versus DH à sinu maiori CH subducatur, vt remaneat DC, vel ęqualis FB, dico inquam, quòd quadratũ Chordæ AB est ęquale duobus quadratis, quorum vnum est factum ex latere AF aggregato sinuum rectorum, & alterum DC, vel BF differentia sinuum versorum.



Probatur facilè. Quia triangulum ABF est rectangulum. Ergo quadratum ex AB ex 11. lib. 2, est æquale quadratis ex AF, & FB.

Quòd autem triangulum ABF sit rectangulum, patet, cùm anguli ad C, & D sint recti, & latera CF, & DB sint æqualia, sicut, & DC, & FB ex effectione. Vnde etiam angulus F rectus erit.

COROLLARIVM.

MOdus vniuersalissimus hinc enascitur, quo plurimi sinus reperiantur. Nam si duo quæcumque latera, seu chordas superius Expens. 1. inuentas dimidiaueris erunt sinus recti, quibus ex præcedenti reperies sinus complementi, qui subducti à sinu toto relinquent sinus versos. Si ergo duos ex sinibus ita repertos iunxeris, & quadratè multiplicaueris, & eorum sinus versos minorem à maiori subduxeris, differentiamque quadratè quoque multiplicaueris, multiplicatosque numeros simul iunxeris, & ab aggregato radicem quadratam subduxeris; illa erit Chorda, quæ illos duos arcus inequales subtendit, quę diuisa per medium dabit sinum medietatis summæ arcus, quam simul vniti efficiunt. V. g. sit chorda decagoni Gr. 36. 6180340. posito sinu toto 10000000. Medietas erit sinus Gr. 18. nimirum 3090170. Sic Sexagoni Grad. 60. est 10000000. medietas est 5000000. Gr. 30. Hinc sinus complementi Gr. 18. nimirum Gr. 72. est Par 9510565. qui subductus à sinu toto relinquit sinum versum 489435. Sic sinus complementi Gr. 30. sunt Gr. 60. quorum sinus est 8660254. subductus à sinu toto relinquit sinum versum 1339746. à quo subductus sinus versus alter primo inuentus dabit latus BF 850311. qui in se multiplicãdus. Sic iuncti sinus 5000000. & 3060170. dant 8060170. qui pariter multiplicãdus in se, & deinde iungendi numeri ita multiplicati; à quorum summa extracta radix quadrata dabit chordam Gr. 18. & 30 simul nempe 48. quæ dimidiata erit sinus Gr. 24. Par. 4067361.

Sic si iunctis sinibus Gr, 24. & 30. & in se multiplicatis, multiplicata quoque differentia sinuum verso-

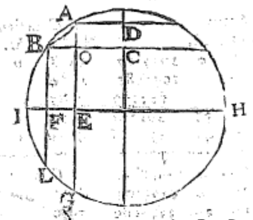
rum in se, deinde aggregentur numeri ita multiplicati, & ab aggregato radix excipiatur, illa dabit chordam Gr. 54. & dimidiata sinum Gr. 27.

Sic idem agas iunctis sinibus 24. & 27. habebis sinum Gr. 26 $\frac{1}{2}$. Et si iungas 27. & 30. Gr. sinus habebis sinum 28 $\frac{1}{2}$, & cæt. At si iungas sinum Gr. 30. cum sinu Gr. 36. nimirum cum dimidiata chorda pentagoni habebis sinum arc. 33. Si verò medietates, vt supra reperiantur continuè dabunt multò plures sinus.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Quadratum chordæ differentiæ duorum arcuum est æquale quadratis differentiæ sinuum versorum, atque rectorum eorumdem sinuum.

REassumatur fig. propos. 6. In qua AE; & BF sint sinus cuiuscumque arcus ABIG, & BIL differentia eorundem sinuum erit AO. Sic eorum sinus versi sint FI minoris arcus, & IE maioris differentia erit FE, vel OB. Dico, *quòd quadrata harum differentiarum sunt æqualia quadrato chordæ* AB.



Probatur. Quia triangulum AOB, est rectangulum, ergo ex 11. lib. 2. Euclid. vera erit propositio, & quadrata ex lateribus differentijsque OB, & OA æqualia erunt quadrato chordæ, & basis AB.

COROLLARIVM

HÆc propositio deseruit ad inueniendas eas chordas quarum arcus vniti superant quadrantem. Nam tunc poterimus vti subtractione subducendo à sinu tum verso, tum recto arcus, sinum arcus minoris, vt habeatur gemina differentia sinuum OA, & OB, ex quibus differentijs tanquam ex lateribus in numerum quadratum redactis, & vnitis, subducendo radicem quadratam reperiemus chordam differentiæ dictorum arcuum, nempe illius arcus AB, quo differt IB ab IA.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Quadratum cuiuslibet chordæ vnà cum rectangulo gemino, quòd fit à sinu complementi, & toto sinu, tanquam ex lateribus, æquatur geminis quadratis factis à sinu toto.

SIt Chorda BF. Dico, quod eius quadratum minus est quadratis radiorum BE, & FE rectangulo duplici comprehenso sub FE radio, & CE sinu complementi.

Probatur ex propos. 13. lib. 2. Euclid. Quia chorda BF, vt in fig propos. 11. & duo sinus toti EB, & FE faciunt triangulum oxigonium, ergo ea propositio hic verificabitur, quę eodem sensu vniuersaliter ibi probatur.

COROLLARIVM.

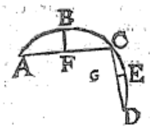
HInc deducitur; quomodo reperta chorda, siue per additionem, siue per subductionẽ, vt ex 12. & 13. proposit. huius reperiatur sinus versus, & complementum sinus, nec non, & sinus rectus illius arcus, cuius chorda componendo, vel subducendo duos sinus inuenta sit.

Pone itaque chordam inuentam esse FB, & cupis scire sinum versum FC. Quoniam quadratum FB, si vniatur cum rectangulo ex FE sinu toto, & EC sinu complementi bis accepto ęquatur quadratis laterum FE, & EB, qui sunt sinus toti. Multiplicetur chorda FB in se, sicut & sinus toti in se ducantur gemina vice, & ab hoc numero aggregato sinus totius geminâ vice in se ducti dematur numerus chordę in se ductus: nam reliquus erunt duo rectangula ex EF sinu toto, & CE sinu complementi. Diuidatur bifariam & medietas erit vnum ex rectangulis, cuius latus FE notum est; quod est sinus totus. Vnde diuisa medietas remanens per sinum totum dabit latus CE sinus complementi quo habito, & subducto à sinu toto, remanebit FBC sinus versus, cuius quadratum, vt ex 11. huius subductum à quadrato Chordę FB relinquet numerum, à quo subducta radix quadrata, dabit sinum rectum CB.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Est maior proportio arcus maioris ad minorem, quam chordæ subtensæ maiori ad chordam subtensam minori.

ID non probabimus eâ euidentiâ, qua Regiomontanus, & nos supra ostendimus prop. 3. Tract. 19. cum res per se clara sit. Dicit itaq; quod arcus maior ABC comparatus ad minorem CED comprehẽdit plures partes minoris, quam comprehendat chorda maioris AC partes minoris CD. Ostenditur verò sic. Nam certum est; quòd magis curuatur ABC arcus super CA Chordam, quam CED arcus super suam Chordam CD: patet ex sagitta FB, & GE: sed quo magis curuatur aliqua linea, eo plures partes continere necesse est, cùm longiùs spatium mensuret. Ergo arcus ABC, qui magis curuus est super rectam AC, quam minor arcus, plures partes continebit illius arcus, quam quòd contineat AC Chorda maior respectu minoris Chordę CD.



COROLLARIVM.

HInc eruitur, quod chorda vnius gradus sensibiliter non differat ab arcu suo sicut, nec sinus 30. minutorum; cum sensibiliter super illam non dum arcus curuetur. Sic quod maior proportio arcus vnius Gradus ad arcum 45. minutorum, quam chordæ ad Chordam. Idest, quod ſi arcus vnius Grad. comprehendit m. 45. & inſuper 15. minuta tertiam eorum partem; quod chorda vnius gradus non comprehendet totam Chordam 45 minutorum, & inſuper eius tertiam partem; ſed paulò minus. Sic quod ſit arcus Gradus 1 m. 30. comprehendit arcum vnius gradus vnica vice & inſuper eius medietatem; quòd Chorda ipſius arcus Gr. vnius, & m. 30. non cōprehendet chordam arcus Gr. vnius ſemel, & inſuper chordæ eius medietatem, ſed paulò minus, & idem dicas de ſinubus.

COROLLARIVM II.

HInc eruas quoque; quomodo propè verum Sinum vnius gradus requiras, licet non certò, nec Infallibiliter, ſed tamen adeo propè veritaté, vt nullus error ſenſibilis ſubrepi queat. Diuidatur ſinus 261769. repertus propoſ. 11. huius Coroll. Arcus Gr. vnius m. 30. in ſex partes, & ſexta pars erit 43628 $\frac{1}{6}$. Sic ſinus 130897. minutorum 45. in tres partes, eritque tertia pars 43632. Si ergo daremus ſinui vnius gradus quatuor vicibus ſextam partem hanc 43628 $\frac{1}{6}$ ſinui vnius Gr. m. 30. eſſet ipſe ſinus Gr. vnius part. 174512 $\frac{4}{6}$. Et ſinus ipſe Gr. 1. m. 30. cum comprehenderet ſemel, & inſuper dimidiam ipſius partem, aut vicibus quatuor ex ſex, quibus conſtat ipſa maior, vt arcus Gr. vnius m. 30. comprehendit gradum vnum, nempe 4. vicibus ex ſex partibus, quibus ipſe grad. maior Gr. 1. m. 30. conſtat.

At ſi daremus quatuor partes, ex quibus tribus conſtat ſinus minutorum 45. & comprehenderet ſinum 45. vt Gr 1. arcum m. 45. eſſet 174528. Differentia autem eſt par. 16 $\frac{4}{6}$, vel 17. Quamobrem electis $\frac{1}{6}$, & quid minus, nimirum partibus 12. proximè addemus eas partibus 174512. vel reſiduum 4. ſubtrahemus partibus 174528. & efficiemus ſinum partium 174524., quæ ſinum minutorum 45. non continebit ſemel cum tertiâ parte: quia ſic deberet eſſe 174528. at eſt paulò minùs, & continebitur à ſinu Gr. vnius m. 30. non ſemel cum medietate eius, ſic enim eſſet 174512. ſed paulò minus. Vnde proportio arcus maioris Gr. vnius ad arcum minorem m. 45. erit maior, quia illum continet, ſemel cum tertia parte, quàm ſinus maioris ad minorem, qui eum non continet ſemel cum tertia parte; ſed paulò minùs, & maior arcus Gr. 1. m. 30 ad arcum vnius grad. habebit maiorem proportionem, quàm ſinus maior ipſius ad ſinum minoris, quòd contineret arcum minorem ſemel, & medietatem eius; ſinus verò maior minorem ſinum contineat ſemel, & minùs medietate.

COROLLARIVM III.

HInc verò ſinum arcus habebis minorem 15. minutis; medietas enim Chordæ vnius gradus dabit Sinum m. 30. par. 87264. cuius reperies chordam ex Coroll. 2. propoſ. 11. cuius medietas erit minutorum 15.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Tabulam ſinuum ordinare, & omnino complere.

DOctrina, quam tradidimus ſufficiet ad tabulam ſinuum condendam, licet, vel facilitatis gratia, & maioris abundantiæ, etiam cæteras regulas trademus infrà.

Itaque ex lateribus inuentis figurarum regularium Quadrati, Pentagoni, Exagoni, & Quindecagoni, ita cæteri ſinus educentur. Nam illi erunt chordæ arcuum, quos ſubtendunt, & medietates ſinus, quorum dimidiabis arcus ex Coroll. 2. propoſ. 11. & harum ſemiſſium inenlantur ſinus. Deinde harum ſemiſſium reperiantur complementa ex Coroll. 1. eiuſdem. Inuentorum autem cōplemētorum accipiantur ſemiſſes, & earum ſinus reperiantur ex Coroll. 2. prop. eiuſdem, & ſic ſucceſſiuè, vt in appoſitis tabellis videre potes.

Tabella arcuum ex latere Gr. 24. Quindecagoni naſcentium.

Arcus N.	Gr.	M.		Complementa N.	Gr.	M.	
1	12	0	2079117	1	78	0	9781476
2	6		1045285	2	84		9945219
3	3		523360	3	87		9986295
4	1	30	261769	4	88	30	9996573
5	0	45	130896	5	89	15	9999147
Comp. 1. Semiſſes.				Comp. Semiſſium.			
6	39	0	6293204	6	51	0	7771460
7	19	30	3338069	7	70	30	9426415
8	9	45	1693495	8	80	15	9856[illegible]
Comp. 2. Sem.							
9	42		6691306	9	48		7431448
10	21		3583679	10	69		9335804
11	10	30	1822355	11	79	30	9832549
12	5	15	871557	12	84	45	9961947
Comp. 3. Sem.							
13	43	30	6883549	13	46	30	7253744
14	21	45	3705574	14	68	15	9288097
Comp. 4. Sem.							
15	44	15	6977905	15	45	45	7163019
Comp. 6. Sem.							
16	30	30	5075384	16	59	30	6661392
17	15	15	2630312	17	74	45	9647873
Comp. 7. Sem.							
18	30	15	5037740	18	79	45	8638355
Comp. 9. Sem.							
19	24		4067366	19	66		9135455
Comp. 10. Sem.							
20	34	30	5664062	20	55	30	8241262
21	17	15	2965416	21	72	15	9550199

Comp.

N.	G.	M.		N.	G.	M.	
Comp. 11. Sem.				Compl. Semiſſium.			
22	39	45	6364390	22	50	15	7688418
Comp. 13. Sem.							
23	23	15	3947439	23	65	30	9187912
Comp. 16. Sem.							
24	29	45	4972165	24	30	15	8681988
Comp. 19. Sem.							
25	33		5446390	25	57	0	8386706
26	16	30	2840153	26	73	30	9588197
27	8	15	1434926	27	81	45	9896514
Comp. 20. Sem.							
28	27	45	4656145	28	62	15	8849876
Comp. 23. Sem.							
29	32	45	5409745	29	57	15	8410390
Comp. 25. Sem.				Comp.			
30	28	30	4771588	30	61	30	8788121
31	14	15	2461533	31	75	45	9692309
Comp. 26. Sem.							
32	36	45	5983246	32	53	15	8012538

Tabella Sinuum, qui naſcuntur à latere Sexagoni Gr. 60.

Arcus, & Semiſ. N.	Gr.	M.		Complem. N.	Gr.	M.	
1	30		5000000	1	60		8660254
2	15		2588190	2	75		9659258
3	7	30	1305262	3	82	30	9914449
4	3	45	654031	4	86	15	9978589
Complementi 1. Sem.				Compl. Semiſſium.			
5	37	30	6087614	5	52	30	7933533
6	18	45	3214395	6	71	15	9469301
Comp. 3. Sem.							
7	41	15	6593458	7	48	45	7518398
Comp. 5. Sem.							
8	26	15	4422887	8	63	45	8968727

Tabella Sinuum, qui naſcuntur ex latere Pentagoni Gr. 72.

Arcus, & Semiſ. N.	Gr.	M.		Complem. N.	Gr.	M.	
1	36		5877852	1	54		8090170
2	18		3090170	2	72		9510565
3	9		1564345	3	81		9876833
4	4	30	784591	4	85	30	9969173
5	2	15	392598	5	87	45	9992290
Semiſ. 1. Comp.				Compl. Semiſſium.			
6	27	0	4539905	6	63	0	8910065
7	13	30	2334454	7	76	30	9723699
8	6	45	1175374	8	83	15	9930685
Semiſ. 3. Comp.							
9	40	30	6494480	9	49	30	7604060
10	20	15	3461171	10	69	45	9381913

N.	G.	M.		N.	G.	M.	
Semiſ. 4. Comp.				Compl. Semiſſium.			
11	42	45	6788007	11	47	15	7343225
Semiſ. 6. Comp.							
12	31	30	5224986	12	58	30	8526402
13	15	45	2714405	13	74	15	9624552
Semiſ 7. Comp.							
14	38	15	6190940	14	51	45	7853169
Semiſ. 9. Comp.							
15	24	45	4186597	15	65	15	9081432
Semiſ. 12. Comp.							
16	29	15	4886212	16	60	45	8724960

Tabella Sinuum, qui naſcuntur à latere quadrati Gr. 90.

Arcus, & Semiſ. N.	Gr.	M.		Complementa. N.	Gr.	M.	
1	45		7071068	1	45		7071068
2	22	30	3826834	2	67	30	9238795
3	11	15	1950903	3	78	45	9807853
4	33	45	5555702	4	56	15	8314696

COROLLARIVM I.

EX his itaque tabellis habebis iam inuentos ſinus arcuum 120. qui ſe ſuperant m. 45 & licet ordo ſit confuſus; poteris tamen in ſeriem collocare, & ſic 45. minutorum augmentum ordinatum dignoſcere.

Si autem, & arcuum, qui ſe ſuperant min. 15. tantummodo, ſinus percipias, id deinde efficies ex propoſ. 12. huius addendo ſinum arcus 39. grad. ſinui arcus Gr. vnius, & exquirendo chordam grad. 40. ex notâ ſinuum verſorum ipſorum differentiâ, vt ibi docemus, hic itaque arcus grad. 40. & eius Semiſſes, & complementa eodem modo, ac præcedentes tabellę compoſitę ſunt, dabunt multos, multoſque arcus, qui prædictos 15. minutis ſuperant.

Tabella Sinuum ex additione ſinus grad. 39. & Gr. 1. reſultans, nempe ex latere Nonagoni.

Arcus, & Semiſ. N.	Gr.	M.		Complem. N.	Gr.	M.	
1	20		3420201	1	70		9396926
2	10		1736482	2	80		9848078
3	5		871557	3	85		9961947
4	2	30	436194	4	87	30	9990482
5	1	15	218149	5	88	45	9967620
Semiſ. 1. Comp.				Semiſſium, Compl.			
6	35	0	5735764	6	55	0	8161520
7	17	30	3008058	7	72	30	9537169
8	8	45	1521234	8	81	15	9883515
Semiſ. 2. Comp.							
9	40, & cęt.		6427876	9	50		7660445
Semiſ. 3. Comp.							
10	42	30	6755902	10	57	30	7372773
11	21	15	& cæt.	11	68	45	& cæt.

Et

Et sic produces ipsam tabellam vsque dum poteris ; illa enim ferè omnes gradus è 15. in 15. minuta progredientes adimplebit, si iungantur, & in ordinem redigantur cum arcubus præced. tabellarum ipsius arcus cum sinibus adiunctis.

Deinde ex arcu Gr. 52. m. 30. subducemus arcum m. 30. & acquiremus arcum Gr. 52. cuius chordam perquiremus ex 13. propos. huius, & habebimus sinum grad. 26. cuius perquiremus complementa, & semisses, & complebit omninò numerum Grad. 360. qui excrescunt 15. minutis se augendo : sicque illius tabulæ stabit initium.

Tabella Sinuum enascentium ex subductione arcus m. 30, ab arcu Gr. 52. m. 30.

Arcus N.	Gr.	Semis. M.		Complem. N.	Gr.	M.	
1	26	0	4383712	1	64	0	8987940
2	13	0	2249511	2	77	0	9743700
3	6	30	1132032	3	83	30	9935058
4	3	15	566928	4	86	45	9983917
Semis. 1. Comp.				Compl. Semissium.			
5	32		5299192	5	58		8480481
6	16		2756573	6	74		9612617
7	8		1391731	7	82		9902681
8	4		697565	8	86		9975640
9	2		348995	9	88		9993908
10	1	& cæt.		10	89		& cęt.

COROLLARIVM II.

VErùm, si pigeat tanti laboris, scias aliquos vti differentijs ipsis inter sinus Arcuum se superantium m. 45. & earum partibus proportionalibus.

Itaque dispositis sinubus arcuum se 45. minutis superantium hoc modo.

G.	M.	Sinus	Differentiæ Prę.
11	15	1950903	
12	0	2079117	128214
12	45	22 6974	127857
13	30	2354454	127480
14	15	24 1533	127179

Subduces sinus minores à maioribus, vt habeas differentias ipsas primas, quas singulas in tres partes æquales diuides. Inde sinui datorum graduum V. g. 12. addes, & habebis sinum maiorem minutorum 15. nempe Gr. 12 m. 15. saltem proximè, & si adhibueris in supputationibus sinum maiorem saltem duabus zifris etiam admodum exquisita hæc regula erit, vsque ad grad. 45. Nam postea cæteri Sinus per Inuentorum sinuum arcuum se superantium m. 15. complementa inueniendi sunt.

Sit ergo Sinus Gr 12. silicet 2079117. differentia est à sinu maiori Gr. 12. m. 45. Par. 2206974. differentia inquam est Partium 127857 quæ trifariam diuisa tertiam partem exhibebit 42619. Addesq; deinde sinui G. 12. m. 15qui est 2079117. & erit 2121736. qui erit quidem paulo minor, quam is, qui in sinubus ponitur ; Sed abiectis duabus figuris, quæ abundant ad dextram erit exquisitius sinus 21217. Gr. 12. m. 15. posito sinu toto 100000. at si maior supponatur sinus, vt in tabulis : tunc sinus inuenti ex sinu aucto insuper duabus zifris erunt maiores, quàm hic ponuntur : vnde error etiam, qui in hac regula contingere potest abiectis 2. figuris corrigetur. Cum non possit vltra duas primas figuras ad dextram extendi.

Si verò cupias sinum Gr. 12. m. 30. addes prædicto 2121736. eandem differentiam, & fiet sinus 2164355 abiectisque duabus figuris dextris erit sinus exquisitus Gr. 12. m. 30. posito sinu toto 100000. & sic de cæteris vsque ad 45. Gradus : ex inde enim mediantibus regulis traditis, vel tradendis complementa exquiri debebunt sinuum arcuum inuentorum, & sic omnes sinus arcuum excrescentium m. 15. acquisiti erunt.

COROLLARIVM III.

HInc quoque cognosces ; quomodo sinus minutorum reperiantur. Namque si iam, vt præsupponitur reperti sint præced. tabularum sinus adhibendo sinum totum auctum duabus zifris, cum vix differat grad. 0. m. 1. vsque ad 45. Gr. sinus adeo paruâ additione aucti à curuitate ipsius circuli ipsi arcui additâ ; hinc fit, quod per regulam proportionum possint exquiri.

Primò itaque accipe differentiam inter sinum V. g. m. 30. & min. 45. quæ erit 43632. Dicesque si minuta 15. quibus discrepat arcus maior à minore dant differentiam 43631. quid m. 5. ? & habebis partes 14544. quæ addità ad sinum m. 30. Partium 87265. efficient sinum 101809. minutorum 35.

Iam verò reperto sinu arcus m. 35. Part. 101809. si differentiam, qua discrepat ab arcu minori in quinque partes diuiseris, & singulas addideris sinui m. 30. efficies successiuè sinus m. 31. & 32. & 33. & cæt. & hoc exactiùs succedet ; si, vt monui, assũptus fuerit sinus totus auctus duabus zifris. Quinta igitur pars differentiæ 14544. est partium $2908 \frac{4}{5}$, quam addes sicut tabella ostendit.

Ita verò sequeris differentias inter sinum arcus maioris Gradibus 35. ab arcu minori in quinque secando, & sinui minori singulas quintas partes successiuè addendo vsque ad arcum Gr. 45. Nam repertis ita omnibus istis sinubus, quęrenda sunt deindè modo supra tradito Coroll. 1. prop. 11. huius, eorum complementa, & sic tota Tabula omnibus Sinibus appositis erit completa.

Sinus m. 30	87265
	$2908 \frac{4}{5}$
Sinus m. 31	$90173 \frac{4}{5}$
	$2908 \frac{4}{5}$
Sinus m. 32	$93082 \frac{3}{5}$
	$2908 \frac{4}{5}$
Sinus m. 33	$85991 \frac{2}{5}$
	$2908 \frac{4}{5}$
Sinus m. 34	$98900 \frac{1}{5}$
	$2908 \frac{4}{5}$
Sinus m. 35	1018090

EXPENSIO V.

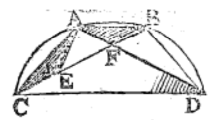
De Sinibus, Chordisque inueniendis sine extractione Radicis Quadratæ.

QVæ diximus supra satis sunt ad tabulam sinuum efficiendam. Verùm ad ampliorem eruditionem, & vt laboriosam, & minus notam inuentionem radicis quadratæ effugiamus suppositis cognitis lateribus figurarum regularium ; ex inde sequenti doctrina eam quoque tabulam condere poterimus.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si in circulo quadrilaterum sit descriptum, rectangulum ex diametris factum est æquale duobus rectangulis simul sumptis qui sub oppositis lateribus comprehenduntur.

SIt ABCD rectangulum descriptum in circulo, seu segmento. Dico *rectangulum descriptũ ex duabus diagonalibus* AD, *&* BC *esse æquale rectangulo* descripto à duobus lateribus oppositis AB, CD, & rectangulo à CA, & DB lateribus oppositis contento.



Quod vt probetur.

Progr. 1. Eligatur aliquis angulus à latere diagonali comprehensus, vt BAF niger apud A, qui vel sit æqualis, vel minor, quam alter ad eandem partem eodem diametro: & latere contiguo comprehensus qualis angulus CAD ad A. Si est æqualis, nihil fiat ; si est minor, vt in exemplo est A in maiori abscindatur æqualis angulus, & sit ad A angulus niger trianguli CAE, quibus nigris, & æqualibus ; si addatur albus communis EAF remanebunt æquales niger, albusque EAB, & niger, albusque CAF, diagonalis verò CB erit secta in duas partes in E ; Quapropter ex 3. lib. 2. Euclid. rectangula duo sub partibus, & altera diagonali AD comprehensa erunt æqualia rectangulo sub duabus CB, & AD concluso.

Progr. 2. Triangula BAE, & CAD sunt æquiangula, angulusque niger apud A, & albus in maiori triangulo CAD est æqualis nigro, & albo BAE ex constructione.

Anguli verò B, & D nigri, eo quòd inexistant eidem circumferentiæ AC sunt equales ex 24. lib. 3. Euclid. Quare, & reliqui ad E, &c. Ergo ex 4. lib. 6. Euclid erit eadem proportio CD basis ad crus AD maioris, ac basis BE ad crus AB minoris trianguli. Ergo ex 18. lib. 6. rectangulum sub extremis CD, & AB erit æquale rectangulo sub medijs BE, & AD.

Progr. 3. Idem dicendum est de triangulo nigri CAE, quod est æquiangulum triangulo ABD : Nam nigri CAE, & FAB apud A sunt anguli æquales ex constr. albus verò apud D, & niger apud C ; eò quòd inexistant eidem circumferentiæ AB sunt quoque æquales, quare, & reliqui. Ergo eodem argumento. Ita erit in proportione AD ad BD, vt AC ad CE : Ideoque rectangulum sub extremis lineis clausum, nempe AD, & CE erit æquale illi, quod à medijs BD, & AC clauditur.

Progr. 4. Notandum est itaque, quòd rectangulum ex 2. progr. est factum ex tota diametro AD & maiori portione alterius diametri EB, & æquatur rectangulo laterum AB, & CD oppositorum, & rectangulum ex 3. progr. est ex eodem diametro AD, & minori portione alterius diametri CE æquaturque rectangulo ex reliquis lateribus oppositis BD, & AC. Rectangula autem duo ex diametro tota, & portionibus alterius facta æquantur illi facto ex integris diametris AD, CB, vt prænotauimus ex 3. l. 2. Eu. progr. 1. Quare hoc rectangulum ex diametris erit æquale duobus rectangulis quorum quodlibet ex duobus lateribus oppositis quadrilateri circulo inscripti componitur.

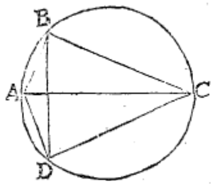
COROLLARIVM I.

HInc eruitur quomodo datis duabus chordis, & chordis repertis complementorum vsq; ad semicirculum ex Coroll. 1. propos. 11. possimus venire in cognitionem chordæ, quæ inter duos arcus datarum chordarum intercipitur, vel quo simul superant semicirculum, vel quo arcus datus superat alium ; sine extractione Radicis quadratæ. Nam datis Chordis CA, & BD multiplicabuntur simul, vt fiat rectangulum sub ipsis comprehensum : Deinde repertis chordis complementorum vsque ad semicirculum AD, & CB arcuum ABD, & CAB inuicem pariter multiplicabuntur, & erit rectangulum æquale rectangulo ex CA, & BD, & rectangulo ex AB, & CD. Subducito itaque rectangulum notum ex lateribus CA, & BD, remanebitque rectangulũ ex DC, & AB, quo diuiso per totum diametrum dabitur chorda arcus AB, quæ diuisa per medium dabit sinum dimidij arcus AB, quò dati arcus ED, & AC deficiunt à semicirculo. Hunc autem sinum obtinebis quoque si opereris dimidio diametro, & dimidijs omnibus chordis acceptis. Nam ita est totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Quod si ponas vnum arcum esse CAB, alterum AED, chorda AB reperta erit arcus illius, quo dati arcus simul sumpti superant semicirculum : At si arcus dati sint CA, & CAB reperta chorda esset illius arcus quo vnus superat alium, vt patet.

COROLLARIVM II.

HInc quoque chorda summæ duorum arcuum reperitur. Pone itaque te habere notas Chordas AB, & AD ; earum complementa ad semicirculum reperiantur BC, & DC : Deinde lineę diagonales ducantur, quarum vna sit diameter AC, altera BD in quadrilatero ABDC : Multiplicetur itaque AB latus per oppositum DC ; item AD per oppositum BC habebimusque duo rectangula æqualia rectangulo facto ex diagonalibus AC, & BD, si ergo aggregatum duorum rectangulorum ex lateribus AB, & CD necnon,

& AD, & BC diuidatur per totum diametrum prodibit Chorda BD, quæ diuisa bifariam dabit sinum



dimidij arcus BAD. Poteris quoque vti dimidiatis lateribus, & dimidio diametro, & prodibit idem sinus dimidij arcus BAD.

COROLLARIVM III.

POteris quoque datâ chordâ simplicis arcus; & chordâ dupli arcus reperire chordam tripli. Sit ergo chorda arcus AC simplicis, & arcus ACD duplicis. Inuenietur chorda tripli BACD, si chorda simplicis arcus multiplicetur in se nimirum chorda CD, & æqualis AB laterum oppositorum quadrilateri BACD, deinde multiplicetur in se

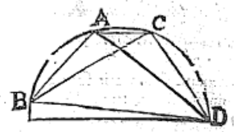
chorda dupli arcus, nempe diagonalium AD, & BC, & ab hoc rectangulo per multiplicationem facto deducatur rectangulum primo factum per multiplicationem laterum BA, & CD, & residuum æquabitur rectangulo ex lateribus oppositis AC, & BD. Vnde si hoc rectangulum diuidatur per latus notum AC; relinquetur latus BD tripli arcus chorda, & si vtaris dimidiatis chordis eueniet sinus dimidij arcus BACD.

COROLLARIVM IV.

SI autem noueris chordam tripli arcus BACD, simplicis BA, & cupias chordam duplicis. Oportet multiplicare AB simplicis arcus chordam in se, & habebis rectangulum sub lateribus æqualibus oppositis comprehensum, deinde simplicis arcus chordam cognitam per arcus tripli chordam multiplicabis, & habebis rectangulum ex BD, & AC, quæ vnita æquabunt quadratum ex diagonalibus AD, & BC. Vnde educta radix quadrata dabit chordam AD, quod licet ad hunc locum minus spectet, cum nostrum institutum sit docere, quomodo sine extractione radicis quadratæ datis lateribus figurarum circulo inscriptarum possint omnes sinus reperiri; nolluimus tamen omittere.

COROLLARIVM V.

POteris quoque reperire ex chordis notis dupli arcus tripli, & simplicis chordam quintupli arcus. Chorda simplicis arcus sit AC, dupli arcus CD. Si multiplices CD, & BA æquales inuicem habebis rectangulum, quadrilateri BACD sub oppositis lateribus contentum; multiplicabis quoque diagonales BC, & AD in se, & obtinebis rectangulum, à quo demes rectangulum ex oppositis late-

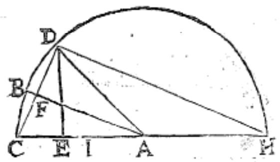


ribus constitutum BA, & CD, residuumque diuides per latus AC, iam cognitum, & prodibit chorda BD arcus quintuplicis BACD.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

Quadratum sinus recti est æquale rectangulo ex sinu verso duplicis arcus, & medietate radij confecto.

*PRobatur. Nam triangulum CDH ad circumferentiam, est rectangulum, vt etiam tale est CDE, angulusque C communis, ergo ita erit CH diameter, & basis ad chordam, & latus minus CD trianguli maioris, vt idem latus, chordaque, & insuper basis in triangulo minori ad CE latus minus: Et ideo ex propos. 19. lib. 6. quadratum ex chorda CD, tanquam ex medio æquale



erit rectangulo ex extremis confecto CE, & CH. Ergo, & quarta pars quadrati ex CD, cuius latus est medietas, FD, est æqualis quartæ parti rectanguli, quæ comprehenditur à CI semiradio, & CE sinu verso duplicis arcus, quod est intentum: hæc verò quarta pars posset constitiui; si placeaet ex semisinu verso, & toto radio CA, vt considerant patet.

COROLLARIVM.

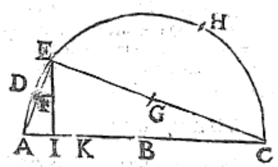
HInc est, quod si multiplices sinum rectum CF in se, & deinde diuidas per semiradium CI quod habeas sinum versum duplicis arcus CE, qui subductus à sinu toto dat sinum complementi EA. Sic quoque, quod si multiplices sinum versum CE per semiradium CI, & ex numero multiplicato radicem quadratam eruas, quod sinum rectum CF obtineas.

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Vt dimidium sinus totius se habet ad sinum dimidij alicuius arcus, ita sinus complementi eiusdem dimidij ad sinum totius arcus.

SIt dimidium AK, Sinus totus AB; dupletur ipse sinus totus, & sit ABC diameter, & hac diametro fiat semicirculus. Sitque in eo sinus EF, dimidij arcus AD totius arcus ADE: Sinus verò totius arcus eiusdem ADE sit IE; complementum arcus dimidij ED sit EH, & ducta EC sinus illius cōplementi EH sit EG. Dico, *quod ita est dimidium* AK *sinus totius ad sinum* EF *dimidij arcus, vt refertur sinus* EG *complementi eiusdem dimidij in proportione ad sinum totius* EI.

Quod vt probetur considera AEC angulum; quod si in circumferentiâ, & EIC ex Hypothesi esse rectangula, angulumque communem esse apud C. Vnde, & erunt æquiangula, vt constat ex propos. 8. lib. 6. & ideo ex 4. Eucl. lib. 6. latera circa æquales angulos erūt proportionalia. Ideoque erit, vt basis AC trianguli maioris ad crus minus AE, ità basis EC ad crus minus IE minoris trianguli EIC. Quamobrem dimidium quoq; AB totius diametri, & basis se habebit ad idem suum crus minus AE, vt dimidium EG basis EC minoris IEC trianguli se habet ad EI crus minus in ipso. Radius AB, & GE, itaque iam sumantur non vt dimidia, sed cum sint in eadem proportione, ac sua tota veluti tota accipiantur, & erit AB ad AE, vt EG ad EI. Vnde eodem argumento; denuò concludemus intentum. Nam dimidium sinus dimidij, & quarta pars AK basis AC erit ad dimidium sui cruris AE. nempe ad sinum EF dimidij arcus ADE, vt sinus EG complementi ad sinum IE duplicis arcus.



COROLLARIVM I.

QVòd si obtineas cognitionem sinus recti AF dimidij arcus AE & sinus complementi eiusdem EG potes acquirere cognitionem sinus duplicis arcus EI per regulam auream. Nam si multiplices sinum complementi EG per sinum rectum EF, & diuidas per medietatem sinus totius AK habebis sinum EI rectum duplicis arcus ADE.

COROLLARIVM II.

SIc si obtines cognitionem Sinus duplicis arcus, & sinus complementi simplicis eiusdem posses deuenire per regulam auream in cognitionem sinus simplicis arcus. Nam si multiplices dimidium sinus totius AK, cum sinu duplicis arcus IE, & aggregatum diuidas per sinum complementi dimidij arcus EG habebis sinum simplicis arcus FE. Nam EG, qui est sinus complementi dimidij arcus EH est ad EI sinum duplicis arcus, vt dimidium sinus totius AK est ad sinum simplicis arcus AF, quare rectangulum factum ex medijs AF sinu simplicis arcus & GE complementi eiusdem æquale est rectangulo facto ex extremis AK dimidio sinus totius, & IE sinu duplicis arcus.

Si verò è contra diuidas rectangulum ex IE, & AK per sinum simplicis arcus FE habebis sinum complementi simplicis arcus EG, sicque dato sinu duplicis arcus, & dimidio sinus totius, & sinu simplicis arcus deuenies in cognitionem sinus complementi eiusdem arcus simplicis.

PROBL. I. PROPOS. XX.

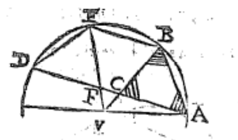
Arcus tertiæ partis Chordâ datâ chordam totius arcus inuestigare.

SIt data chorda AB, & opporteat inuenire chordam AD, quę arcum totum subtendat.

Fiat, vt VA sinus totus ad AB chordam datam; ità AB ad BC. Deinde rursus adhibitâ regula proportionum fiat, vt radius BV ad residuum VC inuentę BC, sic Chorda data AB, vel æqualis BE ad aliud, & inuenietur CF; Quia ergo AC, & FD sunt æquales ipsis AB, & BE: si addatur ipsis nuper inuenta CF efficietur AD, quæ quærebatur.

Quòd, vt ostendatur, ducta EV ponatur AC æqualis ipsi AB, & prolungetur in D. Dico *in primis* BED *arcum esse duplum arcus* AB, & ideo AED arcum, quem subtendit AD esse triplum arcus AB.

Prob. Nam angulus niger B est æqualis nigro C ob æqualia crura AB, & AC ex effectione: Quare & angulus A semialbus erit æqualis nigro B ob æqualia crura AV, VB, nempe radios, & ideo quoque nigro C, & sic B, & C anguli nigri trianguli ABC erunt æquales angulis B, & A trianguli BAV: Quare, & reliquus angulus niger A in triangulo ABC erit æqualis albo V in triangulo BAV ex propos. 17. lib. 1. elem. Sed A niger est ad circumferentiam. ergo vt æqualis duplo maiorem circumferentiam subtendet BED, cum si subtenderet æqualem subduplus esset; ideo addito EB totus arcus ABED erit triplus arcus solius AB.

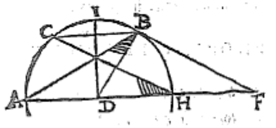


Prob. 2. Quòd radius sit ad datam AB, vt AB ad BC: cum enim triangula fiat æquiangula habebunt latera circa æquales angulos proportionalia. Ergo erit, vt AV ad BA basim, ita eadem crusque AB ad BC. Et hinc ex 4. lib. 6. erit BV ad residuum VC inuentę BC, subducte à sinu toto, vt BE ad CF, quæ cum AC, & DF complet subtensam AD.

THEOR. VI. PROP. XXI.

Radius est ad chordam, quadrantem superantem, vt ipsa chorda ad diametrum addita Chorda dupli excessus.

Sit data AB, quæ superet quadrantem, & duplus excessus sit CB. Dico, *quòd radius* AD *est ad* AB, *vt* AB *chorda ad* AF *diametrum cum* HF *æquali* CB dupli excessus IB, quo arcus ACB superat quadrantem AI.



Probatur. Nam triangula ABD, & ABF sunt æquiangula, & angulus A est æqualis angulo F ob parallelismum linearum æqualium ipsi AB, quæ sunt CH, & BF; siquidem ob id; tam angulus A, quam F æquantur tertio angulo H nigro, angulus verò A communis vtrisque æquatur angulo B nigro ob equales radios: Ergo, & reliqui ex Cor. 2. propos. 17. lib. 1.: Quare habebunt hæc triangula latera circa æquales angulos proportionalia, eritque AD crus ad AB basim, vt ipsa AB crus in triangulo ABF ad AF basim.

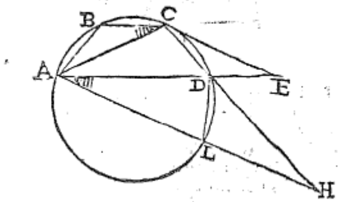
COROLLARIVM.

Hinc si datâ chordâ AB excedente quadrātem facias regula aurea, vt semidiameter AD ad AB, ita AB ad aliud inuenies AF, à quo inuento subduces diametrum, & restabit HF idest æqualis CB dupli excessus, quo superat data chorda quadrantem.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Tres subtensæ prima arcui simplici secunda duplici, tertia triplici æqualibus sunt tres continuè proportionales: si prima tertiæ addatur, vt sit vltima proportionalis.

Addatur AB prima tertiæ AD. Dico AB, AC, & AE *esse tres continuè proportionales*.



Extensâ AD fiat equalis linea CE ipsi AC. Et ostēdēdum primo esse BA ad CA, vt CA ad AE. Angulus DAB albus est bifariam sectus linea AC, & partes DAC, & CAB equales sunt: sed angulus E ipsi CAD ob æqualia crura ex effectione, sicut CI niger albo CAB æquantur. Ergo triangula, ECA, CBA æquiangula sunt; quare erit, vt crus BA ad basim AC, ita AC ad AE ex 4. lib. 6. elem.

Deinde ostendendum est ED equari ipsi AB Triangulum EDC est æquiangulum triangulo CBA. Angulus enim E ostensus est æqualis angulo nigro C: Angulus ABC subtendit totam periferiam exceptis duabus partibus BC, & BA; quibus inest; sed angulus CDA subtendit duas ipsas partes CB, & BA. Ergo residuus angulus exterior EDC totam reliquam periferiam occuparet, cū duo anguli apud D duobus rectis æquentur, & ideo ad centrum positi insisterent semicirculo. Vnde ad peripheriam totam peripheriam vsurparent. Quare EDC angulus æquabitur angulo B: cum ergo sint æquiangula triangula ob duos angulos equales ex Cor. 2. pr. 17. lib. 1. ita erit BA ad CB, vt DC ad DE: sed BA, & CB sunt æquales, Ergo etiam DC, & ED lineæ; linea verò DC æquatur ipsi CB ex hypothesi.

Sit deinde HD æqualis ipsi DA. Dico rursus CA esse ad EA, vt AD ad AH in proportione. Sunt enim ECA, & HDA triangula equiangula ob angulos ipsorum apud A æquales ex Thesi, & consequenter ii, & ii cum triangula sint æquicrura: vnde, & reliqui æquales ex Coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quare erit vt CA crus ad EA basim, ita DA crus ad AH basim.

Deinde assero HL æquari ipsi CA. Nam HLD triangulum est æquiangulum triangulo DCA. Nam angulus H æquatur nigro A, & angulus DCA obtusus subtendit totam circumferentiam exceptis tribus partibus, idest arcum DCBA: Sed angulus DLA subtendit easdem tres partes; & est internus, ergo reliquus HLD externus equatur ipsi DCA: & totam reliquam circumferentiam in circumferentia positus subtenderet. Quamobrem DC erit ad CA, vt DL ad LH: quare permutando DC erit ad DL; vt CA ad LH; sed CD, & LD sunt æquales. Ergo LH, & CA erunt æquales.

COROLLARIVM.

Hinc deduces modum, quo triplices, & quadruplices, aut quintuplices, & cæt. arcum propositum Cuiuscumque arcus subtensam inuenias. Nam datâ subtensâ arcus simplicis BA, & arcus duplicis CA si adhibita regulâ aureâ multiplices subtensā arcus duplicis in se, & diuidas per subtensam arcus simplicis habebis AE, cui subducta ipsa EA, idest DE tertiam subtensam DA arcus triplicis exhibebit. Quoniam ostendimus BA esse ad CA, vt CA ad AE. Deinde si rursus assumas DA, & ei addas DE, vel BA, vt fiat EA; & regula proportionum dicas si CA dat EA, quid dabit AE? inuenies HA, quæ subductâ ipsâ CA, dabit subtensam AL arcus quadruplicis LCA, & sic de alijs.

COROLLARIVM II.

Elicies. Quomodo ex cognitione chordarum, quæ latera figurarum, de quibus diximus Expensione prima, & chordarum arcuum, qui earum arcus complent vsque ad semicirculum, quæ acquiri possunt ex propos. 18 possimus deuenire in cognitionem cæterorum omnium sinuum. Nam dimidientur chordæ, & erunt sinus dimidij arcus. Sic earum complementa vsque ad semicirculū, & erunt sinus complementorum vsque ad quadrantem.

tem. Deinde per propositiones positas omnes alios arcuum sinus se inuicem superantium 45 minutis possumus reperire, & deinde ex dictis Coroll. 2. prop. 15. reperto sinu, arcus vnius. Similiter omnes alios arcus, qui 15. minut. alter super alterum augentur inuenire, ex Coroll. 1. & 2. prop. 16. & tandem ex regula aurea omnes alios, qui vnico minuto continuò excrescent augmento.

V. g. data chorda decagoni 24. dimidiata erit sinus Gr. 12. Sicut, & complementi chorda 156. Gr. dimidiata erit Gr. 78. complementi arcus 12. Primo itaque ex Corollar. propofit. 18. habebis sinum versum duplicis arcus Gr. 24. quo subducto à Radio erit residuum eius complementum Gr. 66. & consequenter chorda duplicis arcus Gr. 132. Quibus obtentis potes etiam obtinere cognitionem sinus recti ex prop. 17. Coroll. 1. arcus eius duplicis 48. & eius complementi gr. 42. ex Cor. pr. 18. Deinde cum iam habeas sinum Gr. 42. potes reperire eius duplum sinum gr. 84. & eius complementi gr. 6. Et hinc gr. 3. deinde gr. 1. m. 30. & tandem gr. 0. m. 45. Quo habito poteris reperire per ordinem omnes sinus, qui differunt m. 45. ex Coroll. propos. 22. vsquequo compleas 120. arcus inter quos reperies sinus couenientes, vt supra docuimus. Vel vtendo alijs propositionibus positis datâ chordâ arcus 12. & arcus 30. ex propos. 17. Coroll. 2. inuenies chordam summe datorum arcuum G. 42. cuius sinum cōplementi ex prop. 18. vel 19. reperies sinum arcus G. 46. & dimidij huius arcus ex propos. 19 duplicabisque; & erit chorda totius arcus 46. istis itaque duabus chordis gr. 12. & G. 46. ex propos. 16. Coroll. 2. inuenies chordam summæ arcuum illarum chordarum, nempe arcus 58. cuius medietas sinus erit arcus 29. & ita prosequeris diuersimodè sinus, complementaque, & chordas combinando: Nam eodem modo omnes sinus reperies, qui se superant m. 45.

EXPENSIO VI.

De reperiendis sinubus aliquibus per solam subductionem, & additionem.

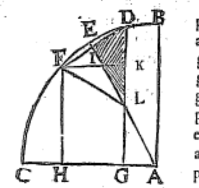
Quia facilitas in omnibus, & temporis compendium placet in multis sinubus inueniendis singulari breuitate, & facilitate hâc regula possumus vti; quàm præmissa vnica propositione tradемus.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Differentia sinuum rectorum peripheriarum duarum à circuli sexta parte æquali interuallo remotarum æquantur sinui recto peripheriæ alterius interualli à circuli sexta parte.

Sint in quadrante ABC peripheriæ duæ EF, & ED æquali interuallo ab E circuli sextante remotæ, quarum sinus DI, vel FI; sinus verò arcuum, qui ab E circuli sextante æquali interuallo seiunguntur sint FH sinus arcus FC, & GD sinus arcus DC, quorum differentia sit KD. Dico KD *differentiam esse æqualem sinui recto* FI, *vel* ID *interualli, seu* DE, *seu* EF. Ducatur itaque AE, & ab L, vbi secat AE ducatur LF.

Probatur. Triangulum DFL est æquiangulum. Habemus enim duo triangula rectangula prorsus æqualia nigrum, & album. Nam latera quidem IF, & ID æqualia sunt, latus verò IL commune.



Propterea ex pr. 22. primi, & bases erunt æquales. Vnde, & anguli ad L albus, & niger æquales: Sed angulus niger ad L est partium 30. æquatur enim angulo LAB apud A ex pr 30. l. 1. ob parallelismum linearum AB, & GD. Ergo alter niger ad D erit G. 60. ad hoc, vt cum angulo recto ad I æquetur duobus rectis ex prop. 17. l. 1. Sic philosofare de albo ad F ob angulum album ad L. æqualē angulo ad L nigro, qui est Gr. 30. qui, & compositi facient totum DLF Gr. 60. Ergo æquilaterum erit triangulum, & æquiangulum, & perpendiculares KF, & LE diuident, vt angulos bifariam, sic, & latera bifariam. Ergo erit KD differentia sinuum rectorum, & IF sinus rectus interualli, quo distat arcus FC ab arcu gr. 60. CE erunt æquales.

COROLLARIVM I.

Si itaque notum habeas sinum rectum arcus V. g. 36. & sinum rectum interualli vsque ad 60. arcus Gr. 24. & addas simul istos duos sinus efficies sinum arcus 84. Sinus enim ille V. g. EF gr. 24 æquatur differentiæ KD arcus 84. nimirum arcus, qui compositus est ex arcus 60. & interuallo 24. qui erat inter 60. & 36. vnde additus FI sinus G. 24. sinui arcus FH Gr. 36. facient sinum GD arcus 84.

COROLLARIVM II.

Sic si notos habeas duos sinus arcuum, qui æqualiter distent ab arcu gr. 60. vt sunt duo sinus HF arcus 36. gr. & GD arcus gr. 84. & subducas vnum ab alio, habebis sinum arcus interualli; quo alteruter eorum distat à gr. 60. nempe DE sinum arcus ED, vel FE.

COROLLARIVM III.

Sic si demas notum sinum ID Interualli ED, à maioris arcus sinu GD pariter cognito habebis sinum HF minoris arcus.

Et hoc de sinibus dictum sit quatenus ipsi inueniri possunt, cùm de cęterò de eis iterum reassumendus sit tractatus, quatenus mediantibus ipsis arcus inueniri queunt.

EXPENSIO VII.

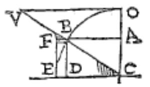
De tangentibus, & ſecantibus.

SEcantium atque tangentium ex præcedentibus inuentis quantitates deducuntur; ex proportionibus enim, quas ad ſinus habent, earum mutuas proportiones breuiter explicabimus.

THEOR. I. PROP. XXIV.

Quam proportionem habet Sinus complementi ad ſinum rectum, eam habet Sinus totus ad tangentem arcus.

PAtet. Nam ſinus complementi AB arcus BO complentis vſque ad quadrantem arcum BE eſt æqualis CD ob parallelogrammum rectangulũ ABCD: Sed CBD, & CFE ſunt triangula æquiangula, vt patet, & BD, & EF parallelæ. Ergo ex prop. 4. lib. 6. Eucl. ita erit CD ſinui AB complementi æqualis ad BD ſinum rectum, vt CB radius ad EF tangentem; quod eſt propoſitum.



Quod ſi conſtituas OB pro arcu, & AB pro ſinu recto BD erit ſinus complementi. Quare eadem ratione ſinus rectus AB, vel æqualis CD erit ad ſinum complementi BD, vt CE ad EF; quare in hoc caſu, quam proportionem habet ſinus rectus ad ſinum complementi eam habet ſinus totus ad tangentem ipſius complementi.

COROLLARIVM.

HInc potes dato ſinu recto, & ſinu complementi, & radio inuenire tangentem, ſeu ſinus recti, ſeu complementi. Nam ſi multiplices ſinum totum per ſinum complementi, & diuidas per ſinum rectum, habebis tangentem complementi. Quod ſi multiplices ſinum totum per ſinum rectum, & diuidas per ſinum complementi, tangentem habebis arcus, cui rectus ſinus ſubtenditur.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Radius medio loco proportionalis eſt inter tangentem arcus, & tangentem complementi.

PRobatur. Nam triangula CEF, & COV ſunt æquiangula. Ergo ex propoſ. 4. lib. 6. ita erit OV crus maius, & tangens ad OC radium, vt radius CE, & crus maius in minori triangulo ad EF crus, & tangentem.

Quod autem triangula VOC, & CFE ſint æquiangula non eſt dubitandum. Nam ſunt rectangula ad O, & E ob tangentes perpendiculares; vnde reliqui anguli nigri ſimul ſumpti C, & F erunt æquales vni recto, quare angulus niger F erit complementum anguli C. Ergo æqualis angulo ad C albo, & eiuſdem complementum, & ob eandem rationem angulus albus V erit æqualis nigro C.

COROLLARIVM.

HInc emergit Rectangulum tangentium eſſe æquale quadrato ſinus ex propoſ. 17. lib. 6. Eucl. & ideo in ſe ducto ſinu toto; ſi diuidas per notam tangentem arcus habebis tangentem complementi, & ſi diuidas per tangentem complementi, reſultabit tangens arcus.

Vnde faciliter tabulæ tangentiũ extrui poſſunt; Nam ex 24. propoſ. inuentis tantùm tangentibus dimidij quadrantiſ, cæteras inuenire poteris ex hac propoſitione, & quidem per ſolam diuiſionem quadrati ſinus totius.

THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Sinus totus medio loco proportionalis eſt inter ſinum complementi eiuſdem arcus, & ſecantem eiuſdem arcus.

PRobatur ex præmiſſis. Nam CBD, & CEF ſunt triangula æquiangula: Ergo ita erit ad baſim, & ſinum totum CB ſinus complementi CD, vel AB, vt idem ſinus totus, cruſque CE eſt ad ſecantem CF.

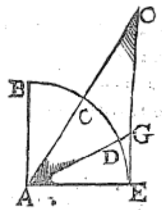
COROLLARIVM.

HInc verò deduces multiplicatum ſinum totum in ſe, & diuiſum per ſinum complementi exhibiturum ſecantes arcuum, quos complent. Ita CE ſinus totus multiplicatus in ſe, & diuiſus per AB ſinum complementi BO exhibebit ſecantem CF arcus EB.

THEOR. IV. PROPOS. XXVII.

Sècans arcus minoris ſemiquadrante additæ tangenti facit tangentem arcus, qui prædictum continet, & ſemiſſem ſui complementi.

SIt arcus ED, cuius ſecans AG, tangens GE, complementum ſit arcus DB, & medietas eius DC. Quare arcus continens arcum primo propoſitum ED, & ſemiſsẽ illus complementi DC erit arcus EC. Dico *eius tangentem fieri* EO. *ſi* AG *ſecans arcus* DE *addatur tangenti* GE.



Probatur. Sunt enim æquales AG, & GO. Ratio eſt; quia anguli nigri ad A, & O ſunt æquales; Vnde, & latera eis ſubtenſa erunt æqualia. Sunt autem æquales; quoniam æquantur vni tertio angulo BAC, quòd eſt anguli CAE, ſeminigerrimi complementum, ſicut angulus niger O eſt complementum eiuſdẽ CAE in rectangulo AEO triangulo.

Cùmque BAC, & O niger, eiuſdem CAE ſint complementa erunt æqualia; ſed BAC æquatur ipſi DAC nigro ex conſtructione; ergo niger O, & niger A erunt ęquales: quare, & latera AG, & OG ſubtenſa æqualia erunt.

COROLLARIVM.

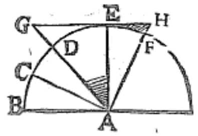
HInc habes. Quod cognitis ſecantibus, & tangentibus omnium Gr. vſque ad 45. poſſis per ſolam additionem omnes alias tangentes maiores, quam 45. graduum reperire, addendo ſilicet ſecãtes tãgentibus V.g. ſi habeas tãgentẽ, & ſecantem arcus Gr. 24. & eas addas ſimul efficies tangentem arcus 57. Gr. qui continebit ſemel 24. & inſuper medietatem complementi eius, quod amplectitur gr. 66.

THEOR. . PROPOS. XXVIII.

Secans arcus æqualis eſt tangenti arcus eiuſdem, & tangenti ſemiſſis eius complementi.

SIt arcus ED, cuius tangens EG; medietas verò eius complementi DB, ſit DC, vel arcus æqualis FE, cuius tangens EH. Dico, *quòd tota* GH *ex tangentibus arcus, & ſemiſſis complementi æqualis eſt ſecanti* AG.

Probatur. Nam anguli ad H niger, & A niger, & albus in triangulo HGA inuicem ſunt æquales. Ergo, & latera ſubtenſa ex 15. propoſ. lib. 1. Elem. erunt æqualia. Quod verò anguli ſint æquales H niger, & totus A ſemialbus oſtenditur. Nam pars alba ad A ex Hypotheſi eſt æqualis angulo BAC.



Ergo reliquus ad H niger in rectangulo AEH erit ęqualis angulo CAE, vt ex propoſ. 17. lib. 1. Eucl. Cor. 2. Talis verò eſt totus angulus HAG, nimirum æqualis angulo CAE, cùm habeat partem nigram communem, & albam ex Theſi angulo BAC, & æquali CAD æqualem; vnde H, & A anguli, & ideo crura in triangulo HGA erunt æqualia.

COROLLARIVM.

HInc euenit; Quod ſi ſimul componantur tangens arcus V, g. 24. & tangens ſemiſſis complementi eiuſdem, nempe arcus 33. efficiatur ſecans arcus 57. Vnde multæ ex ſecantibus, atque tangentibus ſola additione enaſci poſſunt; Et hęc de ſecantibus, & tangentibus; quatenùs ipſę inueniri poſſunt, quatenùs verò per eas arcus inueniuntur, & quatenus inuicem referuntur infra tractabimus. 24.