EVCLIDES
ADAVCTVS,
ET METHODICVS,
D. GVARINI GVARINII
C. R. THEATINI.

EVCLIDES ADAVCTVS ET METHODICVS MATHEMATICAQ; VNIVERSALIS

CAROLO EMANVELI II.

SABAVDIAE DVCI PEDEMONTIVM PRINCIPI

REGI CYPRI, &c.

DICATA,

Quæ ne dum propoſitionum dependentiam , ſed & rerum ordinem obſeruat. Et complectitur ea omnia, quæ de quantitate tum diſcreta, tum continua abſtracta ſpeculari queunt. Reſectis ſuperfluis demonſtrationibus, & requiſitis omnibus profusè coadunatis.

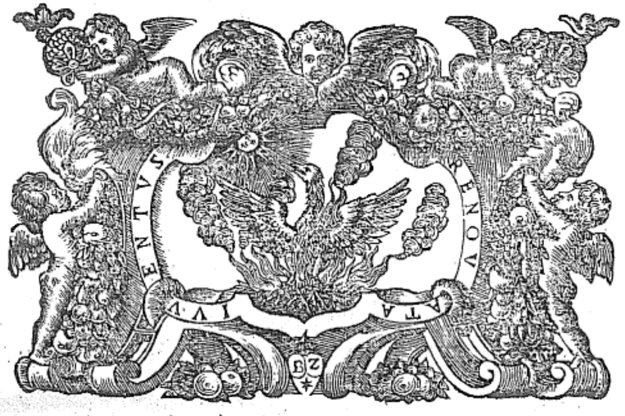
Singuli quoque Tractatus nouis propoſitionibus adaucti ſunt, & aliqui etiam ex integro adornati. Omneſque tùm figuris, tùm verbis clarè, dilucidèque propoſiti.

AVCTORE

D. GVARINO GVARINO

MVTINENSI C.R. THEATINO,

Philoſofo , Theologo & eiuſdem R. C. Mathematico.



AVGVSTÆ TAVRINORVM, M.DC.LXXI.

Typis Bartholomæi Zapatæ Bibliopolæ S. R. C.

Superiorum permiſſu.

REGALIS CELSITVDO.

FOLIA hæc, quæ Vniuerſalis Mathematicæ limpidiſsimas demonſtrationes candidis ſinubus concepere, inſolubili obligatione deuincta, & mole officiorum coacta, ſub auguſtiſsimo nomine R. C. V. in ſcenam literariam prodire gliſcunt. Illi enim glorioſiſsimo ſuæ magnitudinis iubare obſcura huius voluminis incunabula irradiare iuuabit, quòd ab ea facultate deriuet, quæ nobilis inter alias Magnorum Principum limina familiari terit inceſſu, & modo ad pedes R. C. V. ſe obſequioſa prouoluit in tributum profuſa illius maieſtatis, quæ omnigenæ virtutis, & ingenuæ, ne dum in ſolidiſsimum columen, & liberaliſsimum Mæcenatem ſe ſe magnanimo offert ſubſidio: ſed inſuper Thaumaturga Mathematicorum miraculorum inſigni, verèque Regali architectura coruſcat: Talem etenim illam plaudenti conclamant aſpectu Venariæ amænis inſtructæ viridarijs, ſubſtructionibuſque ſuperbis turritæ regius voluptatum, deliciarumque thronus, auguſtiſsima Palatia, Ædes ſumptuoſiſsimæ, aditus triumphales magnarum vrbium, aliaque permulta ſua admirabili protoplaſtice excogitata, & ad artem vltimam ſolis nutibus, aſpectuque directa.

Excipiat itaque R. V. C. pacato vultu, serenaque clementia illam: quam toties in concipiendis sublimibus ideis vasto ingenij sui sinu fouit mathesim, & in ea adornanda exanthlatos laboris mei conatus; qui simul opportunitatem mihi aperiunt, & me, & totius voluntatis meæ dicatissimas vires in hostiam obsequij, deuotique cultus consecrandi. Dum ad terram demisso vultu profundissimum in flexum deciduus regales vestros poplites humillimus adoro.

V. R. C.

Humillimus, Obsequentiss.mus & Oblig.mus Seruus

D. Guarinus Guarinus C. R.

BENEVOLO LECTORI.

CVM inter illos, qui in elementa Euclidis desudarunt, nullum intuear, vnico consarcinare volumine, quæ ad quantitatem sub genere inuestigandam faciunt, secutus sęculi genium, quod centuriat, vt plurimùm, & florilegia condit, putaui nequaquam me frugem perdere; si huic muneri vniuersaliùs inseruirem, & Mathematica rerum exordia ex omni parte rotunda, & contornata exiberem. Siquidem ex meo labore didici, cuius pretij, cuius vtilitatis id operis emergat; quod ea omnia, quæ Mathematicas luces, & euidentias in vnicum lucis fontem, adeoq; solem nedum tumultuaria collectione aglomeret: sed etiam ordinato agmine disponat, in seriesq; suas naturali consecutione distinguat præcipué illis, qui nullo Mercurio tramitis indice, aut duce audent se huic studio consignare, & admodùm dificilem prouinciam in suam sarcinam traducere. Pone enim me tibi offerre pulcherrimam, eamq; vtilissimam demonstrationem, quæ tamen, aut Pergæi, aut Archimedis, aut Pappi rarissimos libros ad sui euidentiam exposcat, quos, aut nunquam perlustraueris, aut ne quidem consequi te posse fidas: quam hauries lucem, aut quam scientiam adipisceris? aut potiùs quibus tenebris, qua caligine non confuderis? Ideoq; cum tota Mathematica sit alligata in vnumq; corpus naturali lege deuincta: quod diuidi non patiatur sine totius detrimento, si quis totum non colligat, nihil colligit, & frugiperda nixu monstrum nulla euidentia animatum in malè destinatos trahit amplexus.

Scio quidem Herigonium Parisijs, & Schotum in Belgio cursus Mathematicos eruditissimos cudisse: sed hic ostensiones sæpius solis operibus occupatus ex industria præterit, ille multis libris diuersoq; tempore editis, vt rarus sit ille, qui in suum commodum congerere possit, institutum prosequutus est. Quamobrem cum nullus in Italia huic locubrationi se dederit, & exteri, aut nullatenùs obtineri; aut non sine magno pretio negotioq; à suo cęlo in nostras regiones peregrinari cogantur; non ingratum reipublicę literarię fore suspicatus sum; si illud laboris, quod meis priuatis profectibus desudaram, publici iuris facerem: Maximè quia in illud, quod omnes huius rei scriptores posthabuerunt, pręcipuè animum fixi; vt propositiones nedum in seriem, quoad earum, vt assolet, deriuationem, sed etiam quoad doctrinæ dignitatem, rerumq; naturalem sedem digererem: & à superfluis, & quæ nullius vtilitatis erant expiarem: nullas aduenas rogarem assertiones in veritatis vadimonium; doctrinam in se se redeuntem, sibiq; ipsi famulam ab omni alieno iure absoluerem, vt qui legit nihil aliud ad perfectum captum desideret, quæ omnia non sinę eluctamento obtinui. Odopęium me præstiti; nullisq; parcens verbis, aut figuris, amfractus, alioquin senticosos, petricososq; ab omni offendiculo immunes in vias veluti consulares aperui: Et ne aliquis subrostrarius mihi obmurmuret, in fastidiumq; versus torcularibus incassùm defatigatis misereatur; non omnia ex pęnu rurido antiquitatis prolata; lapidem, & nos protulimus, & antiquos Mathesis limites aliquantùm submouimus. Herculęos enim terminos præterlabenti ingenio nouæ doctrinarum regiones, illęq; feraces, & vtiles detectę Multę ostensiones, aut quod nullę extabant, aut quòd proniores exoptarentur instructę; quidam tractatus denuò magna ex parte adornati, aliqui exintegro conditi, paucis non additum. Quæ omnia asterismis pręnotaui, aut saltem plurima (in paucis enim ex incuria prętermissum) Scilicet ne videar alienis pennis

amici-

amiciri malè ominata cornix, & de cęterò, vt noſtra cautiùs excipiantur, tan- quam nulla auctoritate ſuffulta, & ſi aliquid erratum fuerit, aut in meliùs fęliciori ingenio reſtituatur, aut ſaltem ab humanitate lectorum meę imbecillitati condo- netur. Noui hominum non vnam eſſe indolem; cuicunq; neceſſe eſt ſuos ante ſe cernere antiſtomos, ſuos audire antiſthroſos. Vateſq; mihi ſum eos, qui omne en- cęniſmum ſtomacantur vindices annoſitatis quęſituros in ſcirpo nodum, vt quid culpent, nanciſcantur. Sed faciant per me; licet. Talibus infortunijs aſſueui. Meus, etenim liber, quem inſcripſi *Placita Philoſofica*, & Pariſijs cuſioni dedi an- no *1665*. iam pridem in hoc detrimentum, & quidem à limine inceſpitauit. An- no enim *1667*. Ioannes Bonifacius Bagatta, quondam meus auditor Curſum Phi- loſoficum edidit, qui ne dum philoſofantium more multa in quęſtionem pro- thrait: ſed videtur maiori nixu me perſequi. Omnia veterat. Auctores plurimi ſaltem aliqui anonymi iam ſententias omnes meas propoſuere, dicant, vel ſaltem accinant, vel etiam pænitùs non alludant, verum ſemper eſt idem iam protuliſſe. In meas aliquas rationes inuehitur non tamen in omnes feroceſcit: ſed nec quidem earum meminit, vt ſcilicet credatur funditùs omnia proſtrauiſſe. Sententias non ſemel meas amplectitur; Sed quaſi in occulto eas diuerſis verbis perſonatas pro- ponens, quaſi piaculum foret, me aperto vultu ſequi, & aliquando in verba Ma- giſtri iuraſſe. Sed quod diſſimulare nequeo, me vocat in memetipſum, & cogit contra fas in me, & iniuſtè quidem, pugnare. Et ne videar in ventos fari; hoc ſiue aliud exemplum in ſpectaculum producam. Ipſe enim Sec. 2. de præd. p. 77. n. 14. in reſp. vbi tantùm aliqua mea argumenta oſtendentia Modum prędica- menti dignitate non potiri ſubuertere nititur, dicit. *Deinde ſecundùm communem ſententiam, quam, & ipſe Guarinus ſuſtinet actio, & paſſio ſunt diuerſa prædicamenta, & tamen*. & cæt. Intuere an actionem, & paſſionem in diuerſa prędicamenta ſecerni, cum communi fatear, & lege meam diſput. 12. Exp. 2. lit. B. pag. 105. probat. 2. vbi ex eo quod *aliqua ex prædicamentis non diſtinguantur inuicem, vt actio, & paſſio* arguo. *Diuiſionem entis in decem prædicamemta potiùs per modum exempli ab Ariſtotele fuiſſe traditam; quam quod exiſtimauerit eam eſſe bonam, & adæquatam*. Et ibidem conc. 2. aſſero. *Quæ verè, & certè prædicamenta appellantur ſunt ſubſtantia, & accidens*. Si itaq. duo tantùm prædicamenta ſtatuo ſubſtantiam, & accidens, quì ſuſtineo actionem, & paſſionem prædicamenta quoq; multiplicare? Vidiſti ne: vt ſua confirmet, quàm me verſatilem efficiat? Sed & patere aliud huius rei ſpecimen adhuc proponi. Concluſionem ſtatuit diſ. 2. ſec. 2. in 1 L. phiſic. pag. 54. conc. 2. n. 11. *Formam materialem ſubſtantialem non eſſe entitatem diſtinctam à materia (: ſed eſſe actualem terminum ſubſtantialem intrinſecum eiusdem materiæ; à quo materia taliter modi- ficata, & affecta, & terminata conſtituitur in determinata phiſica ſpecie.) Fitq; potens ad conſeruanda ea omnia, quæ ad totalem conſeruationem compoſiti ſpectant*. Deinde ſubin- fert. *eam etiam aliquo pacto defendit Guarinus aſſerendo eam eſſe puram potentiam*. Sed heus ſequere; ne quęſo mancha proferas effata, quid pono diſ. 3. phiſicæ conc. 1. pag. 119? Non ne hic affirmo; formam de ſe non habere vllam entitatem: ſed eſſe puram potentiam? quod deinde declaro pag. 200. l. D, conc. 2. *Dicimus*, in- quiens, *formam eſſe puram potentiam; quia agens naturale per ſuas operationes nihil aliud facit; niſi imprimere quandam potentiam in materia per quam efficitur ſibi principium ſuo- rum accidentium conſeruatiuum, & reparatiuum, & etiam omnium aliarum operationum*. Tolle ergo à tua Theſi verba quæ parentheſi clauduntur, veluti ea, quæ ex eo quod forma dicatur. naturali lege ſequantur, & ipſiſſimam defendam opinio- nem; non aliquo pacto imitabor: Sed quid deinde in mea argumenta buccinas? ad

quid

quid immeritò me cogis? vt tibi videaris efficaciſſimum in me vibraſſe argumen- tum inquis. *Si agens naturale non haberet virtutem producendi ex nihilo*. Hoc enim ad confirmandam propoſitionem aſſumpſi. *neque formas accidentales poſſet producere, quod tamen nec ipſe Guarinus aſſerere poteſt*. Sed cur accidentia ab agente non produci affirmare nequeo? Non ne diſp. 14. logicæ exp. 5. pag. 117. accidens ab alijs acci- dentibus edi per modificationem diuerſam probaui? Non ne eadem diſp. exp. 4. & diſp. 6. phiſicæ exp. 10. conc. 1. pag. 124. affirmaui accidentia de ſubiecto in ſubiectum peregrinari, & per communicationem produci. Non ne diſp. 5. de gener. & corrupt. exp. 4. conc. 2. effectum formalem ab efficiente diſtinxi, & poſſe accidens in ſubiecto commorari abſque eo, quod vllum ſui inditium pręberet in mouendo ſubiecto. Igitur, & ſi aliqua cauſa denudata accidente videatur. V G. aqua feruida frigore; frigus tamen latens in ſe, vel in minimo gradu tuetur quo- ad entitatem, quamuis non prodeat in frigefactionem; quod remota cauſa effi- catiori calorem extraneum de ſe euaneſcentem vt dico diſp. eadem exp. 2. in reſp. ad arg. 2. facilè deſijcit, & in priſtina ſe reſtituit. Semper itaq; exeret accidens, ex aliquo gradu ſui; cum nunquam à materia elliminetur. Vbi eſt ergo ex meis principijs formarum accidentalium ex nihilo prolatio ſiue in compoſiti proprios ſinus, ſiue in alienos?

Hæc autem non dixerim; quod virum in crimen vocem, quaſi ex inſtituto, & arte ſubdola hæc mihi inuſſerit; neq; enim candidos eius mores ea ſuſpicione fædare fas, & honeſtum permittit: Sed quod aut tædio victus, vel agendorum machina preſſus, non potuerit totum volumen perluſtrare. vel quod ſcriptorum meorum, quos extemporaneos, & ſubleſtos eccepit aliqua fortè poſitione deluſus iudicauit eamet typis mandaſſe. Quid quid cauſę id fuerit non potuit in adeo religioſo viro; quod in me actum eſt, non niſi ab honeſtatis amore, ſtudioq; veritatis excludi.

Debui tamen meis non deeſſe; beneuoloq; lectori dementum, improuidamq; allucinationem aperire, ne quis putaret mea tela mihi inimica, & in mea præci- pitia ædificaſſe. Contineat ergo fidem ſuam quis quis æquus iudex in illum Cur- ſum Philoſoficum inciderit; donec, & noſtra euoluat, & quod mihi tribuitur, meum eſſe dignoſcat: auritus vtrinq; ſit, nec reum damnet, donec in ius compellat, & denunciatos lapſus ipſa re intueatur.

Interim hunc Librum eccipe, in quo non multæ opiniones: omnia ſolidiſſimis demonſtrationibus illuſtrata, ex quò facilè dignoſces an in Placitis Philoſophi- cis adeo inconſtanti voce vibriſlare potuerim, & alternatione tam continuata lu- dere. interim dum rerum menſuras, & Symbolizationes ſtupendas eccipis Di- uinam artem admirari non intermittas: qui omnia trutina examinauit, lanceq; ſuæ omnipotentiæ, vt ſemper admirabilis dignoſceretur appendit.

LIBRVM hunc, cui titulus Euclides adauctus, & methodicus à doctissimo Patre D. Guarino Guarino conscriptum vidi iussu Reuerendissimi P. Magistri Thomæ Camotti Generalis Inquisitoris Taurinen. in eoq; nihil, quod orthodoxæ religioni, vel bonis moribus aduersetur, deprehendi: quinimo preclarum hoc opus omnibus matheseos studiosis vtilissimum, & publica luce dignissimum censeo. Datum in Colleggio Societatis Iesu die 31. Martij 1671.

Franciscus de Malines Societatis Iesu
in Collegio Taurinensi studiorum Præfectus.

EGO infrascriptus Sacræ Theologiæ Lector de mandato Reuerendissimi Patris F. Thomæ Camotti Inquisitoris Taurini diligenter perlegi opus, cui titulus est, Euclides adauctus, & methodicus ab Adm. Reuerendo Patre D. Guarino Guarinio Ordinis Clericorum Regularium conscriptum, & elaboratum, & nihil in eo animaduerti Sanctæ fidei, aut bonis moribus aduersum; Imo omnia in eo contenta perutilia fore Reipublicæ literariæ, & Mathematicarum artium professoribus. In quorum fidem, &c. Datum in Conuentu S. Dominici de Taurino die 20. Martij. 1671.

F. Petrus Martyr Rubeus Ord. Præd.

Imprimatur.
F. THOMAS CAMOTTVS Ord. Predicatorum Inquisitor Taurini.

EVclidem Methodicum Adm. Reu. P. Guarini Guarini sedulò euolui. Euclides ipse est si apodexion puritatem, acumen, neruos estimauero; nec ipse tamen, si doctrinæ ordinem, copiam, iucunditatem. Tam multa, noua, pulcherrima accessere, vt sibi admodùm blandiri queat Euclides Iconem suum, hactenus rudem, ac salebrosum, iam tandem acuratissimà viri, verè viri industriâ absolutissimè, reformatum. Promus condus ipse est Mathematicę vniuersæ, totaq; exhauritur Geometria: de numeris numerosissimè, deq; dimensionibus supra humani mensuram ingenij. Nec modò latet in eo quicquam Patrijs legibus onerosum: Quin totum tantum opus est: vnde maximum sint habituræ, & literaria, & Politica Respublica incrementum. Ergò ne quæso publica fraudetur luce purgatissimis luminibus volumen micans. Ita sentio. Taurini 4. Aprilis. 1671.

Bartholomæus Torinus vidi de mandato Illustriss.
& Excellentiss. D. Magni Cancellarij.

Permittitur imprimi.
BVSCHETTVS.

IVssu A. R. P. D. Petri Pauli Nobilioni Præp. Generalis nostræ Religionis Euclidem Adauctum, & Methodicum à R. P. D. Guarino Guarino compositum diligenter perspeximus, & cum nihil in eo deprehenderimus, quod catholicę Religioni, aut bonis moribus aduersetur: imò potiùs tanta diligentia, ac ingenio elaboratum vt nihil ad perfectionem sumpti argumenti dessiderari videatur. Ideo vt typis excussus in publicam lucem prodeat non solum dignissimum putamus, verùm, & necessarium, tam pro Mathematicarum artium professorum vtilitate, quàm vt ab ijsdem collatus cum eiusdem auctoris Philosofia iam inpressa ipsius ingenij fæcunditas acumen, & profunditas agnoscatur. Datum Taurini in domo S. Laurentij die 3. Aprilis 1671.

D. Amedeus Romagnanus C. R.

D. Carolus Saluaticus C. R.

D. Gaetanus Garimbertus Præpositus Generalis Clericorum Regularium.

HOc opus, cui inscriptio Euclides adauctus à D. Guarino Guarino nostræ Religionis Theologo Sacerdote compositum, & iuxta præfixam assertionem patrum, quibus id commisimus approbatum, vt typis mandetur, quoad nos spectat, facultatem concedimus. Datum Romæ die 30. Iunij 1671.

D. Gaetanus Garimbertus Præpositus Generalis Cl. Reg.

Locus † Sigilli.

D. Antonius Maria Riuanus Secret.

INDEX

Tractatuum & Expensionum totius operis

Vt id, in quo erratum sit singulis tractatibus, expensionibusque pateret, faciliorque euaderet correctio; hic errores aliquos, quos in relegendo potui aduertere, emendaui: alios, qui fortè me præterierunt, tuæ humanitati, & beneuolentiæ relinquo.

TRACTATVS I.
De quantitate continua.

TRACTATVS II.
De quantitate discreta.

TRACTATVS III.
De Mathematica & eius affectionibus.

TRACTATVS IV.
In primum librum elementorum.

TRACTATVS V.
In secundum librũ Euclidis, de æquipotentia linearum

TRACTATVS VI.
In librum 3. Euclidis de circulis.

TRACTATVS VII.
In lib. 4. elementorum de inscriptione & circumscriptione figurarum in circulo.

TRACTATVS VIII.
De Arithmetica simplici integrorum numerorum.

✠✠ 4 De

TRACTATVS IX.

Pars 1. in 5. Euc. lib. de proportionum notione.

Pars 2. De proportionib. in genere.

TRACTATVS X.

In 6. lib. Euc. De proportione quantitatis continuæ.

TRACTATVS XI.

In 7. lib. Euc. Pars 1. De proportionibus numerorum in genere.

Pars 2. De speciali numerorum proportione.

TRACTATVS XII.

TRACTATVS XIII.

De numeris proportionalibus Pars 1.

Pars 2. De numeris proportionalibus inueniendis.

TRACTATVS XIV.

De proportionibus numericis continuis.

Pars 2. De proportione Arithmetica continua.

Pars 3. De proportione Harmonica continua.

TRACTATVS XV.

De linearum, segmentorumque proportionibus.

TRACTATVS XVI.

De linearum progressione Geometrica. Pars 1.

Pars 2. De linearum progressione Harmonica.

TRACTATVS XVII.

De proportionalitatibus Rationum.

TRACTATVS XVIII.

TRACTATVS XIX.

De Angulis.

TRACTATVS XX.

De lineis circulo circumpositis.

TRACTATVS XXI.

De logarithmis.

TRACTATVS XXII.

De intersectionibus planorum.

TRACTATVS XXIII.

De sphęræ contactibus, & sectionibus in genere. Pars 1.

Pars 2. De intersectionibus maximorum circulorum ad inuicem.

3 De

Corrige, & hos errores, qui postea occurrerunt. Pagin. 30. Principio 3. lin. 6. minori legẽ maiori, & lin. 7. minori lege maiori. Pag. 38. Pr. 14. lin. 5. DCA; lege A B F. Pag. 70. Prop. 16. in figura appone R; vt fiat triangulum POR. Pag. 205. Prop. 45. & sequen. lin. 2. ipsius propositionis, quorum lege quarum, & Pr. 47. in figura sub H. pone P. Pag. 161. Pr. 21. l. 42. vt 3. ad 8. lege vt 6. ad 12. rursus vbi est 6. lege 8, & l. 44. vbi est 3. 8. 12. lege 3. 6. 12. Pag. 240. Pr. 9. lin. 27. & 28. vbi est 9. lege 11. Pag. 251 Prop. 11. l. 7. A C. lege AH, & Prop. 9. lin. 28. A B. lege A L, lin. 29. G D. lege G B. Pag. 252. lin. vltima ad A O. lege EO. Pag. 292. Prop. 11. in figura ad finem linee O F. Scribe T. Pag. 297. Pr. 25. lin. 15. est lege est O. Pag. 304. in fig. propos. 14. Scribe E. inter C, & F. Pag. 310. Prop. 7. l. 12. A E. lege A B, lin. 14. A C. lege AB. Pag. 340. Pr. 26. coroll. aliqui numeri errant in tabula, sed corriges addendo ex ordine num 4. Pag. 386. Prop. 31. in figura ducito lineam A X. Pag. 492. Pr. 75. l. 9. 10. 11. quod dicitur de arcubus B D, & D F. intellige de complementis. Pag. 440. l. 14. pro num. 68. repone 48. Pag. 542. Prop. 48. in fig. ducito lineam C H.

TRACTATVS I. PRÆLIMINARIS.

De essentia Quantitatis continuæ.

ANTEQVAM agamus cùm Euclide de proportionibus Mathematicis quantitatis, necessarium videtur, essentiam quantitatis ipsius, proprietatesque Metaphysicas cognouisse. Definitiones enim primas vix independenter ab essentiâ quantitatis potest haurire cognitio: Quarum notitiâ obscuriùs perceptâ, cætera omnia, quæ ab ipsis dependent in apertum prodire nequaquam possunt. Verum quidem est; quòd nec ipsa quantitatis essentia probè dignoscitur; nisi dependenter à multis propositionibus, quæ deinde sunt ostendendæ: Vnde nos tanquam Philosophos gerentes, quibus anticipare non insuetum, & præsuponere non indecens, earum probationibus, aut principijs ad oportuna loca seruatis, quæ ad quantitatis notionem faciunt Theoremata hîc vsurpabimus, tanquam nota, & ostensa, vt solùm, quantùm necessitas reposcit, percipi possit ipsius quanti constitutio.

EXPENSIO I.

In quo consistat conceptus quantitatis in genere, & in quot species secernatur.

HAnc questionem diffusiùs agitaui in nostris placitis philosophicis dis. 15. pag. 119. ex qua disputatione liceat aliqua, quæ magis ad Mathematicam faciunt, hîc delibare; vt deinde euidentiùs ipsa quantitatis essentia sese in apertum prodat.

PRÆASSVMPTVM.

COmmunis hominum conceptus in id conspirat; vt quantitatis nomine notet, tum continuam quandam rerum successionem, aut multitudinem, tum vnius rei extensam molem. Et quamuis Virtutum, potentiarum, accidentiumque intensionem, & vim operatiuam quantitatis mensuris subigant: an tamen verè sub quantitatis definitione veniant, incertum, & apud Philosophos controuersum. Motus quoque & temporis incerta, & anceps quantitatiua denominatio, & licet mensurentur, non propterea certum est, quantitatis sub genere contineri. Quamobrem, vt omnino pateat, quænam inter quantitates enumeranda sint, priùs Quantitatis, quæ apud nullos est controuersa, vt est successiua, continua, & discreta, conceptus, & definitio est inquirenda.

CONCLVS. I. PROPOS. I.

Essentia quantitatis *in genere eo consistit; vt sit capacitas quædam entitatis ad partes habendas*, vel actu, vel potentiâ, vel saltem per intellectus designationem.

1 PRobatur. Quia hæc definitio omnibus quantis etiam spiritualibus aptatur. Nam, & quantitas molis, & intensionis, & successionis, & numeri, & temporis, & loci, & extensionis, & omne aliud genus quantitatis sine partibus concipi nequit, siue illæ actu sint, siue potentiâ, siue designatione concipiantur. Sic in numero adsunt partes actu, in quantitate molis fieri queunt, in Cœlo, si esset incorruptibile, saltem concipi.

2 Probatur. Quia hæc capacitas ad obtinendas partes, omnium aliarum proprietatum; quæ de quacumque quantitate dicantur, fons est, & origo. Prima est apud Vasq. T. 3. in 3. par. dis. 90. c. 3. n. 15.; Quòd det aliquam distinctionem materiæ: Nam si partes sint reales, dat distinctionem realem, si factibiles, vel conceptibiles dat distinctionem, aut virtualem, aut per intellectum. Secunda, quod mensuret, aut mensuretur: Nam si capacitate ad partes consequendas potitur; ergo erit inter partes, quæ excedat, quæ exæquet, aut ab alia quantitate deficiat. Tertia est numerari; nam partes, vel actu factę, vel dessignatæ plures sunt: Quamobrem numerationi obnoxiæ erunt. Quarta est proportio.

Etenim, vbi sunt partes datur maius, minusque, & vbi datur maius, aut minus, datur maior quoque, vel minor continentia, vel totius, vel aliquarum partium eius, & ideo maior, aut minor proportio, quæ in hac continentia consistit: Quinta est vis quædam occupatiua loci. Quoniam, quod partes habet extensas, secundùm eam extensionem loco correspondere potest. Sexta. Quòd obtineat partes in semetipsa ordinatas, & se inuicem excludentes; Nam vbi diuisio est, vel conceptibilis, vel actualis, vel possibilis; ibi necesse est, vnam partem excludere aliam; alioquin si hæc aliam suâ ipsâ entitate inuolueret, non posset, nec quidem intellectus concipere cum fundamento partes; quia rei conceptus formalis earum excluderet multiplicitatem.

Dicet fortè aliquis ex Metaphysicis. Ratio, per quam essentia alicuius rei secernitur, debet esse omnibus alijs prædicatis essentialibus prior; sed extensio est prior capacitate partium; ergo extensio erit ratio constitutiua quantitatis.

Sed respond. Id optimè se habere, cùm plures proprietates adsunt eadem vniuersalitate pollentes, quæ rem aliquam constituant. Tunc enim inter multas rationes eodem modo distinctiuas, cùm eadem, & æquâ spetie se diffundant, illa debet seligi, quæ radix aliarum sit, & alijs prior, & præeminens habeatur. At in contrarium res est. Si quidem extensio licet in quantitate molis sit ratio prior, & per quam illa partibus fruatur, vt aduersarijs morem geramus, non tamen adeo latè patet; cùm nec quantitas discreta, nec virtutis, nec temporis extensione patescat. Verùm, nec equidem concedo. Extensionem in quantitate cōtinua esse partium habitudine priorem, cùm imò entitas partium existēs sit illa, quæ extensionem causat; cùm vna extra aliam est: Quoniam si penetrentur extensio non manet, & tamen essentia quantitatis adhuc est, & corpora diuinâ virtute penetrata quantitatis essentia non expoliantur.

2 Dices. Diuidere aliam quantitatem, essentia quantitatis nō est; ergo neque diuidi. Verùm, nec diuidere, nec diuidi esse quantitatis constituit: Neque enim in hac sententia sumus. Sed id afferimus; ex eo quantitatem constitui: quòd sit entitas talis, cuius vna pars nō sit omnis pars, & toti adæquetur. Si detur itaque aliquod ens, cuius hæc entitas designata non sit alia simpliciter, & sine reduplicatione intellectiuâ; hoc erit ens quantum, & hoc est consequi capacitatem partium saltem dessignabilem.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Species quantitatis sex sunt. Quantitas Molis, Numeri, Temporis, Motus, Virtutis, Ponderis.

PRob. Nam quantum, aut est substantiale, aut accidentale. Si substantiale est, aut consideratur, vt extensum loco, vel vt habens plures partes in eodem loco. Si consideratur, vt loco substantia extensa, iam quantitas molis est, quæ trinam dimensionem consequitur altitudinis, longitudinis, latitudinis. Si verò eius partes vna intra aliam latent, & eundem locum occupent; tunc est quantitas ponderis. At si quantum est accidentale; tunc, aut consideratur accidens in subiecto extensum, & tunc cum se accomodet subiecto eandem constituit cum eo molis quantitatem: licet propriè extensionis vocetur. Si verò in eadem parte subiecti se colligat; tunc est quantitas virtutis, seu intensionis. Quòd si substantia, seu accidens intelligantur moueri, tunc quantitas motus enascitur, & si perseueret in motu, quantitas durationis, seu temporis emergit. Tandem si substantia, aut accidens motus, & duratio intelligantur diuisa, & in plures partes seiuncta, discreta quantitas est, & vocatur, quantitas numeri.

COROLLARIVM.

HInc euenit, quòd, cùm quantitas molis, & numeri sint, tum substantiæ, tum accidentium, in substantia extensorum, quòd etiam ab illa dependeat quantitas, & ponderis, & motus, & temporis, & virtutis. Et hinc quod de illis primo discurrendum sit, vtpotè, quòd vniuersale præbeat fundamentum ad alias quantitates penitiùs considerandas.

Constat autem hoc de quantitate ponderis; nam à magnitudine rei pondus dependet; cùm pro sui quantitate seue pondus in specie possit æquare maius, ratione superadditæ molis. Et ita quantitas motus, & temporis à multitudine, magnitudineque partium pertranseuntium depēdet: Sic quantitas virtutis à mole, seu magnitudine agentis, seu à numero mouentium, seu à magnitudine figuraque rerum motarum exerit. Quapropter in hoc libro agendum de *Quantitate Discreta, & Continua*; vtpote in quo res mathematicæ vniuersalitèr tractantur; ideoque de illis tanquam vniuersalissimis quantis agendum, quorum cognitio omnem aliarum quantitatum cognitionem subalternat, & ab illâ euidentia principia mercantur. Subest & insuper alia ratio. Nempe omnia alia genera quantitatum sub ratione quantitatis discretæ, seu continuæ considerari, vt patebit (si Deo dante) ad illarum attingendos tractatus deueniamus.

EXPENSIO II.

An aliquod argumentum mathematicum euidenter ostendat quantitatem, ex punctis non constare.

QVamuis hæc quæstio requireret legentem mathematicâ imbutum: Cùm tamen sit quoque philosophica, & Philosophi, licet Mathesi non exornati illam percurrant, & ventilent præsupponendo ea, quæ à Mathematica dependent, vel lumine naturæ cognita, vel ab eâ demonstrata: hinc est, quòd hîc eam collocandam duxerimus, tanquam ad cætera, quæ deinde considerantur perneceſſariam.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Nullum mathematicum argumentum, ex punctis indiuisibilibus quantitatem molis *constare, ostendit.*

HÆc conclusio est negatiuè ostendenda; nempe argumentorum eam impugnantium euidenti solutione: Primò itaque aliqui credunt, ex punctis constare quantitatem ex illa propos.

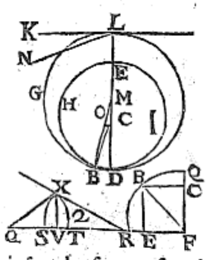
propos. Eucl. l. 3. p. 13. in qua probat circulū aliū circulū non tangere in pluribus punctis, quam vno, & hoc adducit Bagata in 6. lib. sec. 3. d. 4. de quantitate, tanquam vnicum, & ineuitabile argumentum ad puncta indiuisibilia in quantitate ostendēda, & citat fallaciter Euc. lib. 1. propos. 16.

Sed Respond. 1. Euclidem probare circulum non tangere planum, vel (quod specialiter ipse probat) circulum intrinsecùs in pluribus punctis, quam vno sensibiliter dissitis; non autem immediatis. 2. Ostendere, non tangere in pluribus punctis, quam vno; sed diuisibili; siquidem non ostendit illud punctum contactus, aut esse diuisibile, aut indiuisibile.

Verùm dices. Licet id ipse non ostendat ex eius tamen demonstratione colligitur: Nam si tangunt se in duobus punctis; tangant se in B & D; ita vt hæc duo puncta sint in vtriusque peripheria, tum maioris, tum minoris circuli. Certum est quod in omni triangulo duo latera simul sunt tertio maiora ex propos. 20. lib. 1. Element. At si B punctum in circumferentia vtriusque circuli est; trianguli M B C duo latera B C, & C M essent tertio æqualia; quod est absurdum, & contra citatam propos. 20. Id autem patet; nam B M, vtpote radius maioris circuli æquatur lineæ M D; cui etiam æquantur duo crura M C, & C B: Quoniam M C est eius pars, reliquæ verò parti C D crus B C est æquale, vtpote radius minoris à centro C ad eius peripheriam pertingens.

* Hæc est demonstratio euidens illa quidem, si agamus de duobus punctis distantibus: non tamen immediatis. Nam primò, vel agimus de lineis, quæ sint indiuisibiles, vel quæ sint diuisibiles. Si sint indiuisibiles. Certum est, quòd maior est latitudo B D, quam O C: Si ergo B D sint duo puncta immediatè se tangentia, multò magis se tangent duo puncta C, & O; vel ergo etiam ipsa erunt duo puncta immediata, & sic maius spatium non erit B D, quam O C; vel erunt minùs immediata, & se penetrabunt puncta O, & C: quapropter B M C non erit triangulum; quia nulla distantia intericietur inter C, & O puncta inuicem penetrata. Si verò lineæ sint diuisibiles; iam latitudo vnius occupabit aliam in O, & C, licet in B, & D differant spatio: Vnde rursùs B M C non erit triangulum.

* 2 Certum est. Lineolam O C esse maiorem illa portione, qua excrescunt latera B C, & M C supra tertium crus B M. Quoniam, vt potes videre in triangulo Q R X linea S V, & V T, qua excrescunt latera Q X, & R X super basim Q R; vt vna est minor perpendiculari V X; quia sunt duo sinus versi, qui numquam in triangulis obtusangulis, quorum reliqui anguli sint minores G. 45. sinus recti medietatē æquare possunt. Quia, vt Th. 2. exp. 2. de sin. Quadratū sinus recti est quadruplū rectāguli ex semiradio, & sinu verso: Sed in 3. fig. semiradius superat dimidiū sinus recti G. 45. E B. Quòd eius quadratū sit quadrato sui dimidij quadruplū ex p. 6. l. 2. semiradij verò duplū; cùm ex pr. 11. l. 2.



sit subduplū quadrato radij R F, cui semiradij est subquadruplū ex 6. l. 2. Ergo sinus versus E R minor erit dimidio sinus recti E B. Alioquin cum semiradio maiori faceret quadratum maius, quam subquadruplum quadrato sinus recti, cui quadratum sui dimidij subquadruplum est; Cum ergo sinus versi angulorum minorum, quam Gr. 45. vt sunt anguli Q, R nō æquent semiradium erunt minores; quà V X. Quod licet ex defectu principiorum modò sit obscurum, & incompertum; præsuponendum tamen est, vt certissimum, & euidens apud eos, qui Mathesi instructi sunt.

Quamobrem O C in Fig. I. maior erit ea portione, quâ excrescunt latera B C, & C M super basim; cum anguli ad M, & B sint acutissimi; eo quod angulus apud C semicirculo (excepto vnico puncto inter B D) mensuretur. Ponamus itaque illam perpendiculárem C O lineam esse vnius puncti: Ergo latera, nec quidem vnico puncto super basim excrescent: Quare basi eo in casu, nec puncto quidem indiuisibili erunt maiora. Sed minor est O C, quam D B: Ergo non excrescentibus lateribus, nec quidem vnico puncto indiuisibili super basim, & ideo æqualibus ipsi basi; erunt tamen latera apud verticem C distantia, a basi in C, & distabunt saltem puncto, & tantò magis distabunt in B, & D; quare D, & B erunt duo puncta, & B M C triangulum, & latera B C, & C M basi B M maiora non erunt.

* 3 Sint duo circuli E D, & D L, eorumque centra non magis, quàm puncto distent in C, & M; illique sint perfecti, vt ab aduersarijs conceduntur. Ambitus itaque eorum in E, & L non distabunt magis, quàm duobus punctis: In G H vnico puncto: Ergo in reliquo spatio vsque ad D minus, quàm puncto distarent; sicque punctum in multas, multasque partes diuideretur.

4 Aut contactus est physicus, & realis; aut non. Si physicus: certum est, quòd quilibet circulus in duo potest secari per imaginationem saltem; ita vt nihil integritati semicirculi deficiat. Diuidatur itaque, & diuisio in punctum contactus cadat, vel punctum illud absumet, & tunc aliquid, semicirculi partibus, vel vtrique, vel alteri deficiet: vel non; & sic in duo secabit illud punctum.

Respondere verò (vt respondet quidam) circulum in duas æquales partes nequaquam posse secari, aut quòd non possit diuidi mente: nisi aliquod ex eo deperditum imaginemur, est contra mathematicos, pugnare, qui id euidenter probant, & euidens probatio fortiùs euincit de diuisione mente conceptā, quàm de diuisione applicata materiæ.

Obijcies 2. ex Pelletario apud Clauium. Omnis quantitas si augeatur in infinitū potest quācumque datam superare, sed angulus contactus circuli cum plano, licet auctus in infinitum, nunquam potest angulum rectilineum K L N, etsi minimum superare; Ergo angulus acutus contactus K L G quantitas non est, & sic multò minùs ipse contactus quantitas erit.

Huic argum. Fusè respondet Clauius. Nos illi respondemus, quatenus nititur probare punctū contactus indiuisibile esse. Rep. itaque. Quòd, vel angulus contactus sumitur, vt inclinatio duarum linearum, prout Eucl. defin. 8. lib. 1. vel pro spatio inter lineas inclinatas cōtento. Si primo modò accipiatur verum est, quòd angulus contactus non est quantitas: sed nec angulus rectus. Verùm potiùs quidam modus quantitatis; vnde in genere quantitatis non est facienda comparatio, sed inclinationis. Cum autem lineæ rectæ à curua differant genere, hinc est, quod inclinatio curuæ ad rectam inclinatione rectæ semper euadat maior, & curua magis inclinet ad planum, quàm recta. Licet deinde facta comparatione inter lineas inclinatas eiusdem generis, puta peripheriarum possit dari minor, minorque in infinitum, prout se circuli augebunt. Si verò Angulus accipiatur prout dicit spatium comprehensum inter lineas, tunc quidem quantitas est; sed cuius ignota mensura sit. Nam angulus quidem rectus arcu circulari mensuratur inter crura comprehensi: sed, quæ nam sit mensura anguli curuilinei, incompertum est; quare omni acuto rectilineo minor quidem est in principio sui, ex demonstratione Euclidis. Sed cùm non seruet semper eandem inclinationem, & cũ accedens ad quadrantem versus G maior fiat, an absolutè dicendus sit minor; res in dubio est; & quo sensu minor dicendus sit, magis anceps.

* Et hæc quidem de angulo. Verùm vltima consequentia nullo pacto colligitur; nempe quòd contactus ipse non sit quantitas quia angulus contingentiæ omni acuto rectilineo maior sit; imò è contra potiùs videtur deduci: Quia cùm curua omni rectâ inclinante alteri rectæ magis inclinet, magis etiam se illi adaptat: Vnde contactus ipse lineæ rectæ cum curuâ maior erit, cùm maior sit inclinatio, quàm rectæ cum rectâ. Datis enim duabus lineis materialibus, & aliquali latitudine pollentibus, contactus earum maior est, si inclinatio maior sit; & ideo etiam curua, & recta sensibilis se inuicem tangent magis, quàm quælibet recta tangat rectam omnimodâ inclinatione datâ; sed puncta licet indiuisibilia in contingendo, partes habent etiam iuxta aduersarios (siquidem tangitur vnicum punctum à pluribus punctis) Quare punctum contactus poterit esse secundum plures partes, & pauciores, & contactus poterit esse maior, aut minor. Quamobrem, cùm non sit indiuisibilis nullus, licet punctorum indiuisibilium, contactus, ex eo non poterit deduci quantitatis ipsius indiuisibilitas. Quandoquidem dato etiam; quòd punctum plani à circulo tangeretur; nihilominus secundum plura puncta peripheriæ illud punctum plani posset contingere.

EXPENSIO III.

An aliquod argumentum mathematicũ ostẽdat quantitatem ex punctis non constare.

VIdimus puncta indiuisibilia in quantitate nullâ efficaci ratione mathematicâ constare: Modò videndum est; an sit aliqua ratio mathematica, quæ illa explodat.

CONCLVS. I. PROPOS. IV.

Argumenta plurima mathematica ostendunt puncta indiuisibilia in quantitate non reperiri.

ARgumentum est vsitatum, quòd non posset secari linea nouem punctorum in duas partes æquales; quia scilicet punctum medium in duo esset secandum.

2 Quòd datis duobus punctis concentricis tot reperirentur puncta in maiori, quot in minori; cùm ductis à centro lineis ad omnia puncta circonferentiæ circuli maioris, illa necessariò transirent per tot alia puncta circuli minoris: Quare in vtroque par numerus punctorum lateret.

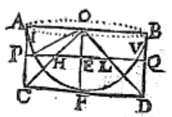
3 Quod Diagonalis in quadrato esset tot punctorum quot latus; cùm ductis à punctis omnibus laterum parallelis, per omnia diagonalis puncta transirent.

Quibus argumentis geminam opponunt aduersarij responsionem. Prima est negando lineam illam in duo secari, vel duci lineas per omnia puncta, vel laterum, vel circulorum. Sed hoc gratis negatur, cum inter concessiones de puncto ad punctum lineam posse duci, vt omnino concedibile exposcat Euclides, & sine, quo Mathematica non constaret. Et quoad sectionem lineæ bifariam, demonstratio Eucl. propos. 10. conuincit saltem de sectione mentali, & Methaphysicâ, vt euidens est, nec valet cuiusdam resp. omnino futilis, quod lineam demonstrauerit Euclides omnino in duo partibilem, ex suppositione Aristotelicæ sententiæ. Quasi quòd demonstrationes mathematicæ solam probabilitatem consequerentur, & præcipuè illa ex suppositione probabili procederet, quæ toti Mathematicæ euidentia fundamenta præbet.

Secunda est Galilei dialog. p. 21.; qui existimat puncta indiuisibilia in quantitate esse infinita; & ideo non posse punctum in duo secari, vel de puncto ad punctum, per alia puncta certa, & determinata, linea duci: Cùm nec duo, nec decem, nec aliquis numerus determinatus punctorum in quantitate reperiatur; sed inderminatus. At huic sua erit responsio; cùm ostendemus non posse infinita puncta, seu indeterminata in quantitate reperiri.

* 2 Sic probo spetialiùs positam sententiam. Sit Cylindrus A B C D excauatus concauitate sphęrica A B F Sitque in illo descriptus conus O C D. Dico; quòd si punctum illud extremum O indiuisibile est, Quod etiam tota circumferentia A B indiuisibilis est.

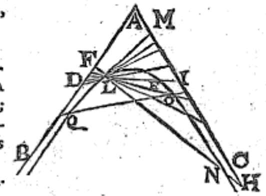
Et si illa circumferentia diuisibilis est; quòd etiam punctum O extremum, quodcũque illud sit, diuisibile est. Id verò constabit, quia circumferentia A B punctata, & punctum O probabuntur æqualia ex Luca Vallerio lib. 2. propos. 12. de cent. grauit. Quadratum O I ob angulum rectum E ex 47. elemen. Et nobis p. 11. lib. 2. est æquale duobus quadratis ex linea O E, & ex linea I E Lineæ verò O I, est æqualis linea E P, & O E linea E H: Quare quadratum, ex linea P E est æquale duobus quadratis ex I E, & E H lineis, & quadruulum eius quadruplo. Quadratum



verò ex P Q est quadruplum quadrato ex P E, & I V quadruplum quadrati I E: Et H L quadruplum quadrati H E, & ita etiam erunt circuli quadratis inscripti. Quare circulus, cuius diameter P Q est æqualis duobus circulis I V, & H L; Ablato itaque à circulo P Q, circulo I V, residuus annulus, cuius latitudo P I, & V Q, erit æqualis circulo H L. Et si lineam P Q eleues vsque ad vltimum punctum O, semper valebit idem

idem argumentum. Quare punctum O erit ęquale circulo A B: Sed circulus A B diuisibilis est; Ergo etiam punctum O, quodcumque minimum accipiatur. Hæc autem demonstratio deseruiat pro ijs; qui iam Mathematica sunt instructi, sicut & sequentes.

* 3 Sic ostenditur ex propos. 2. Expens. 4. Conic. Agentes de Asymptoto demonstrabimus, Quòd hyperbole semper ad asymptotos accedit, & numquam illos tangit, vel secat, & si ponatur quælibet minima quantitas inter ipsos, & hyperbolem, distantia tandem etiam illâ minimâ quantitate datâ minor euadet. Sint Asymptoti B A & A C, sectio hyperbola Q E N, Ostensum est, hanc semper, quousque prolungantur latera Q L, & N E, accedere propiùs ad Asymptotos A B & A C; sed numquam illos tangere. Detur itaque punctum aliquod.



Cum omni data quantitate tandem spatium interceptum inter Asymptotos A C & hyperbolam Q E N euasurum sit minus; euadet minus dato puncto; cùm tamen aduersarij nolint minus puncto in quantitate posse dari.

* Et idem erit argumentũ ex inscriptione Hyperbolarum deductũ: Nam ostendit Vincen. Viuianus insignis Geometra de maxim. & minim. lib. 1. pag. 45. Hyperbolas per diuersos vertices simul descriptas, verùm, quarum eadem sit regula, semper inuicem accedere; nunquam tangere. Quare idem quoque argumentum adornari poterit.

* 4 Prob. Quoniam omnia rectangula, vt docuimus de superfitie conicâ agentes inter Asymptotos, & hyperbolem facta, inter se sunt æqualia; Sic rectangulum factum ex lineis L F & M L, est æquale parallelogrammis interceptis, & quibuscumque alijs quorum vnum latus L M sit vni Aymtoto parallelũ, alterum F L ad idem pũctum Hyperbolæ incipiens sit alteri Asymptoto parallelum, & in primum asymptotorum A C desinat. Sit ergo punctum quantitas aliqua proposita, ad quam hyperbola semper accedendo ad alteram asymptotos, iam peruenerit. Quare rectanguli huius pũcti interpositi inter hyperbolam, & asymptotos latitudo erit linea, vtpote ab eo puncto deducta, quo distat hiperbola ab asymptoto; quod est absurdum, & linea æquabitur parallelogrammis omnibus alijs interpositis V.g. parallelogrammo F L M A, quod item absurdum est, cùm linea solùm longitudine sit diuisibilis, & parallelogrammum etiam latitudine.

Contra verò hoc argumentũ ea responsio valeret, quòd puncta sunt infinita, & ideo, quòd nec in cono vltimum punctum assignari potest, nec in hyperbolâ ea distantia, quæ punctum æquare queat. Quamòbrem vt euidentiam hæc argumenta sortiantur, hæc quæstio est resoluenda.

EXPENSIO IV.

Puncta infinita in quantitate, an admitti debeant.

POsset hæc quæstio agitari de punctis, quæ actu sint in quantitate distinctis secundùm suum esse, atque numerabilibus. Posset etiam intelligi de punctis, quæ in quantitate actu non distinguantur; sed mentaliter, vel per diuisionem successiuam separabilia. Si hoc secundo modo intelligatur, coincidit cùm opinione Aristotelicâ, quod partes sint in infinitum multiplicabiles absque eo, quòd earum vltima possit attingi. Nam, neque hoc pacto punctum vltimum, nec quidem intellectu assequi possemus; cùm infinitum exhauribile non sit, & si vltimum assignaretur, iam infinitum esset exaustum. De punctis itaque actu distinctis, & actu numerabilibus sermo est: de quibus sic assero.

CONCLVS. I. PROPOS. V.

Puncta infinita in quantitate actu distincta nequeunt admitti.

1 PRob. Quoniam mumerus infinitus dari nequit, ergo neque in quantitate puncta infinita. Nam numerus numeratus, subiectumque numeri est multitudo ipsa. Quare si multitudo infinita punctorum daretur, etiam infinitus numerus daretur. Infinitus autem numerus dari nequit; quia innumerabilis esset. Quare infinitus numericus per exclusionem essentiæ numeri constitueretur.

2 Vel puncta illa simul addita constituunt maius, vel non, si non; ergo quantitatem non extendunt, vel maius constituunt, & sic cùm eorum multitudo sit infinita, & eorum quodlibet maius quid addat, magnitudinem infinitam constituent. Sunt enim infinita simul addita, quorum quodlibet extensionis aliquid facit: Ergo istud quid extensionis multiplicatur in infinitum; Ergo extensio erit infinita.

* 3 Omne infinitum æquale est; alioquin vbi conciperetur alterum maius, ibi minus esset exhaustum, & finitum. Ergo, cùm in qualibet quantitate puncta sint infinita, quælibet quantitas assignata maior A, minor B puncta infinita in se concludet, & ideo æqualia multitudine. Sed indiuisibilia magnitudine sunt etiã omnia æqualia; quia indiuisibilia sunt: Ergo exibebunt extensionem æqualem. Propterea quantitas maior A extensione æquali pateret, ac quantitas minor B; quod esse nequit, & omnes quantitates essent æquales, quod item absurdum est.

Dices ex Galilæo Dialog. pag. 23. Quòd neque sint infinita, nec finita; sed tot, vt cuilibet assignato numero respondeant.

Nam, vel hæc assignatio potest fieri finita in infinitum, & sic idem est, ac admittere puncta finita in infinitum in quantitate; quod ipse non vult, vel finita tantùm, & sic iam, nec puncta in quantitate sunt infinita, vtpote correspondentia finitis numeris. Deinde quæro de omnibus punctis. An omnia finito alicui numero correspondeant; & hoc negat. Igitur alicui infinito; sed hoc non datur; Ergo alicui incerto, & in determi-

determinato : Quare collectio punctorum incerta est, & indeterminata ; & ideo actu non erit distincta : Siquidem omne, quod est actu, determinatum etiam est, & certum, vnitateque gaudet, & singularitate ; quâ possit vnitatibus numericis correspondere.

4 De omni, quod assignatur quantitatis, illud licet minimum, quæritur an correspondeat cuicumque numero assignato, siue non : si correspondet, cùm omnis quantitas maior aliquatenùs illâ, eandem prorsus correspondentiam consequatur, erit æqualis minori. Et si dicas correspondere quidem in multitudine punctorum non autem in extensione.

Contra est. Nam omne punctum, cùm non sit cùm alio penetratum, & per aduersarios omnia sint eiusdem rationis, & substantiæ omnia æquo modo substantiam extendunt. Ergo cùm, & quantitatis magnæ puncta, & quantitatis paruæ omni assignato numero correspondeant ; æqualiter extensionem præstabunt.

5 Cùm omni numero indeterminato correspondeant, iam, & ipsa puncta erunt multitudine indeterminata : Sed multitudo eorum extensionem dat : Ergo est etiam indeterminata extensio ; quod est absurdum.

6 Deus videt omnia illa puncta ; imò & secernere, & separe potest. Separet itaque, vel re, vel cognitione. Tunc, aut illa pũcta sunt infinita vel finita. Si infinita ; nulli numero correspondent ; cùm numerus infinitus dari nequeat. Si finita ; ergo non omni assignato numero ; sed alicui finito correspondere debent.

EXPENSIO V.

In quantitate partes infinitæ capacitatis virtualis, seu mentalis capaces sunt.

LIcet excluserimus puncta infinita in quantitate, & indeterminata, quæ actu sint ; non tamen quandam infinitam capacitatem partium exclusimus, quam hac, & sequenti expensione in animo est declarare.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

In quantitate partes in infinitum concipi possunt, dummodo quantitas concipiatur.

PRobatur. Nam essentia quantitatis in partium capacitate consistit : Ergo si quantitas concipiatur, capacitas partium concipienda est.

* 1 Mathematicè. Docet Euclides lib. 10. elemen propos. 12. reperire lineas longitudine alteri lineæ incommensurabiles, quarum natura talis est ; vt facta qualibet in eis diuisione, quamuis minimâ, & quacunque adhibitâ partium multiplicatione, nulla tamen pars possit deseruire pro communi mensurâ illarum ; sed semper inuicem pars vnius, parti alterius comparata inæqualis inueniatur. V.g. hæc diuidatur in 10, vel 100, vel 200, partes, illa in 7, aut 25, aut 138, aut quoquo modo in partes aliquotas : numquam tamen vna, alteri commensurabitur ; semperque partes dissidebunt, quousque erunt partes. Hinc autem deducitur, quòd erunt in infinitum diuisibiles. Alioquin, si tandem ad minimas deuentum esset ; iam, cùm omnia minima sint æqualia ; partes factæ æquarentur, contra euidentiam demonstrationis.

* 2 Docet Euclides propos. 49. lib. 10. elem. à mediâ, quæ est irrationalis linea, infinitas irrationales facere ; quæ nulli antecedentium irrationalium parti sint in aliqua sui parte æquales, idest omnibus irrationales ; Ergo eadem quantitas poterit habere partes infinitas saltem conceptas intellectu ; cùm nequeat inueniri pars adeo minima, quæ alteram exequet. Alioquin tandem aliqua reperiretur eadem cum aliqua ex antecedentibus, vel tota, vel in aliqua sui parte ; Si enim punctis constaret, in numeris ea puncta numerantibus proportiones illarum exprimi possent ; & ita sicut omnis numerus alicui numero est proportionatus ; sic reperiretur irrationalis alicui irrationali consentiens, cuius proportio in numeris exprimi posset. Quare irrationalis non esset : Ea enim est irrationalium incommensurabilitas ; quæ nullis numeris effari possit.

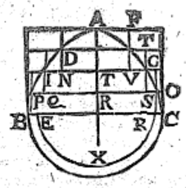
* 3 Probatur. Ductis parallelis A H, & B C, & perpendicularibus B A, & C L, &c. Ducantur ab A puncto rectæ A D, & A E, & A F, & A G, &c. in infinitum. Dico quod C L diuiditur in partes minores, & minores in infinitum : & tamen numquam finiri potest.

Nam primo in K bifariam ; deinde per E in tres partes : deinde per A F in quatuor, in quinque per A G, in sex per A O X, ita vt O L sit sexta pars totius C L : & semper lineæ inferiùs, & inferiùs

diuident in partem minorem, iterumque minorem, & nũquam ad punctum L peruenient, quia A X, aut qualibet alia longiùs in infinitum ducta, semper magis distabit in O ; quam in A à linea A H ; cùm faciat angulum A O L. Alioquin si conueniret in O, non esset recta ; vt præsuponitur. Sic lineæ C K, & M D, & I E semper breuiores erunt in infinitum : Quia M D minor erit K C, & I E minor, quàm M D, & V F, quàm E I, vt ostendemus dante Deo in tractatu perspec. & quilibet ex se potest concipere. Quapropter illæ lineæ poterunt diminui in infinitum ; & semper supererit, quid auferatur.

Probatur 4. Trac. de annulis solidis demonstramus. Annulos solidos, per quorum soliditatem conoidis parabolici superficies transit, esse inter se æquales ; & eorum superficies horizontales inuicem quoque æquales. Sic crassitudo P B in annulum B X R solidum circa conoidem B A C flexa, & per cuius soliditatem per B, & P conoidis superficies transit ; iste inquam annulus est æqualis annulo P I grassitiei maioris ; sed minoris ambitus, & etiam annulo I D, & tandem D F Cylindro. Hi verò annuli, & superficies eorum orizontales ; dum dillatantur gyro, restringuntur soliditate, superficieque in infinitum. Vel ergo semper reperitur soliditas, & soliditas : superficies, & superficies ; quæ minor fit in infinitum, & in infinitum, vel non : Si non ; ergo deueniemus ad vltimum indiuisibile in superficie annulari ; quæ erit circumferentia, & in annulo solido ad vltimum indiuisibile soliditatis, quod erit superficies vltima, in quam desijt soliditas, quæ soliditati Cylindricę D F æqualis erit ;

erit ; quod est absurdum, cùm superficiei ad corpus, & lineæ ad superficiem nulla sit proportio ; quia sunt in diuerso genere, & primo quãtitatis. Deinde tunc parabola A P B de P angulo ad alterum angulum B more dia-

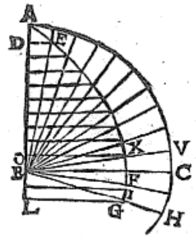


gonalis non transiret ; cum nulla esset grassities : sed parallelæ P F congrueret ; quod contra naturam parábolę est : cum nunquam parallela diametro linea parabolica esse possit. Quod si grassities P B numquam ad vltimum sui esse perueniet. Ergo soliditas est diuisibilis in infinitum. Eademque ratione si superficies B E numquam ad vltimum sui esse peruenit. Ergo diuiditur in infinitum.

* 5 Docet Archimedes, & nos de solidis, & de sphæra, & sphæræ superficie. Corpus segmentis conorum sphæræ inscriptum esse sua soliditate minus, quam quadruplum superficiei circuli maximi sphæra inscripti. Et semper crescentibus, & multiplicatis lateribus quocumque numero quadruplo, accedere quidem semper magis ad æqualitatem, tum soliditate quadrupli coni inscripti, tum superficie quadrupli circuli maximi : sed nũquam ad eam peruenire cressente semper figurâ conica in soliditate, & superficie ; sed semper minoribus, minoribusque incrementis in infinitum. Ergo quantitas illa, quâ deficit figura conicis segmentis constans sphæræ inscripta, tum superficie accedendo ad quadruplum maximi circuli, tum soliditate ad quadruplum coni inscripti, recipiet infinita augmenta in infinitum absque eo, quod æquet ipsum quadruplum : quare quantitas illa per quam fit accessus ad quadruplũ circuli, vel coni erit diuisibilis in infinitum ; cùm additione minoris, & minoris, quanti, numquam ad quadruplum deuenire possit.

6 Probatur. Nam licet angulus contactus sit minor omni acuto angulo. Iste tamen angulus potest diuidi in finitas quidem partes ; sed in infinitum. Possunt enim fieri circuli centris à linea, quam tangit, perpetuò remotioribus : Sic poterit fieri circulus semidiametro digiti vnius, semidigiti, & sic in infinitum. Sed illi circuli semper faciunt angulum contactus in infinitum minorem. Ergo angulus ille in infinitum diuidi potest.

* Probatur vltimò ex linea quadratrice C A. Equidem ; etiã si vltima pars quadrantis C V diuidatur, & subdiuidatur in infinitum ; sicut, & vltima pars proportionalis semidiametri O B ; & à partibus



subdiuisis circumferentiæ, ad centrum rectæ, vt B V ducantur. Sicut & à partibus eiusdem rationis semidiametri, perpendiculares, vt O X ; In mutuis occursibus, & intersectionibus X puncta quadratricis semper, semperque approximantia magis ipsius basi exibebunt ; sed numquam ad ipsam basim B F peruenientia. Quare Quadratrix per ea puncta continuata, numquam consequetur suam basim, aut ad eam coniungetur, vt ostendemus coroll. 2. ex pen. 3. trac. de lineis flexis in fine. Vnde partes, quæ inter basim, & datam partem vltimã quadratricis reperiuntur, vt F X, erunt in infinitum diuisibiles. Multa sunt in idem conspirantia argumenta philosophica, sed, quæ, vt extera consultò relinquimus, cum satis superque hæc conuincere videantur.

EXPENSIO VI.

An partes quantitatis phisicam diuisionem in infinitum subire possint.

HÆc quæstio philosophicè soluenda est, cùm hoc, non ab ipsa quantitate dependeat ; sed à rerum natura : Licet enim res donec concipiantur quantę semper vlteriùs diuisibiles concipi debeant. Nihilominus potest esse ; quod res determinatam quantitatem ad sui existentiam reposcant, sic ipsâ earum naturâ poscente : & ideo quòd licet vlteriùs, vt quantæ diuisibiles sint, si tamen diuidantur, pereant, cùm iam eà quantitate non potiantur, quæ ad ipsarum constitutionem requiritur.

CONCLVS. I. PROPOS. VII.

Probabile est in diuisione quanti tandem esse necessariò quiescendum.

1 PRobatur. Qualitatis per gradus augmentabilis primus gradus à Deo, vel produci potest ; vel non. Si potest : Ergo ille est indiuisibilis : Neque enim sub minori quantitate intensionis, qualitas illa producibilis est ex supposito, alioquin assignatus ille gradus primus non esset. Si verò dicas. Nequaquam id posse facere Deum. Illa igitur qualitas primum gradum non habet, à quo produci incipiat, & quomodo habebit secundum, & tertium ?

2 Efficiat Deus primam partem rei, quam potest facere. Sed non repugnat, quod faciat Deus id, quod potest. Et ideo non repugnabit consequenter, quod primam partem rei producat. Quare neque repugnabit, quod vltimam relinquat.

3 Multa sunt, quæ videntur per solam diuisionem proprias formas deperdere, & alias consequi. Ergo etiam erunt aliqua, quæ diuisa se subducent, & in nihilum abibunt. Nam difficulter potest ostendi in adustione ligni, quòd forma noua cinerum ab igne introducatur. Cùm ignis formam cinerum, vaporum, carbonum, spumarum, scoriarum, & tam diuersarum rerum, in quæ lignum, & alia similia in se adurendo conuertuntur, non contineat. Quod si noua forma non est ab igne ; à quo erit? nisi à solâ segregatione, quam præstat ignis, tanquam à causa destruente connexionem sub quâ in esse perfectiori, & sub forma altioris ordinis detinebantur. Quâ destructâ subiectum ad aliud, ad quod erat in potentia, facessit. Si ergo res per solam diuisio-

uisionē possunt mutari, ergo etiā in nihilū redigi.

4 Viuentia determinatos limites paruitatis, & magnitudinis recognoscunt ita, vt datâ vniuscuiusque specie, sub minore quantitate produci nequeant. Ita ergo non improbabiliter poterit de quacumque re inanimatâ concludi, licet tamen repugnantiam; cur sub minori quantitate esse nequeant, euidenter non cognoscamus.

5 Deus videt omnes partes factibiles in quanto, & quæ simul, & quæ successiuè fieri queunt. Ergo preter illas diuisiones, quas videt, Deus nullas alias agnoscit. Ergo partes sunt ad vltimum sui esse redactæ: Alioquin, si adhuc esset capacitas partium, non essent omnes partes acceptæ; quas videret Deus.

6 Deus quoque agnoscit extremo signato A, quæ pars immediata succedat; Quæ erit indiuisibilis; Siquidem, si multas partes concluderet, iam non esset pars immediata.

Objicies si in quanto partes in infinitum concipi possunt. Ergo etiam fieri.

Respondetur diuersam esse rationem. Nam concipi quidem possunt; quia supponitur id quod partes essentialiter recipit: At si per ablationem subiecti tollatur, & quantitas; tunc sicut quantitas non est, sic nec diuisibilitas ampliùs concipi potest. Nos autem dicimus, quòd substantia determinatos limites paruitatis obtineat, ita quòd, cùm ad illud vltimum deuentum fuerit, pereat, & deficiat. Vnde neque per diuinam potentiam possit in minutiores partes discindi: nisi pereat: Eo quòd essentialiter ita poscat esse, nec sub minori paruitate coarctari possit.

Dices nulla est ratio assignabilis; cur dato quolibet minimo quanto, minus etiam dari non possit; Ergo quantum est diuisibile in infinitum.

Respondetur eandem rationem esse de multis alijs in natura existentibus, in quibus, licet nullam possimus reddere rationem; cur non potuerint aliter esse; adhuc tamen ita necessariò sunt. Scimus enim repugnare mundum non existere in aliqua capedine; & scimus item in spatijs imaginarijs infinitas capedines reperiri. Sed non possumus cognoscere. Quare Deus potiùs elegerit hanc capedinem, quàm illam. Sic non est maior ratio, quod motus diurnus tendat in Occidentem potiùs, quàm in Orientem; & tamen illa tendentia, siue in hanc, siue in aliam partem necessaria est. Itaque sic philosophandum de quanto; Quamuis enim non repugnet vlteriùs diuidi; non tamen inde afferendum; quòd possit semper diuidi. Licet enim repugnantia ex parte quantitatis non esset: posset tamen à substantia, seu qualibet rerum corporearum specie, repugnantia suboriri.

Dices inter ens, & nihil est infinita distantia: Ergo, antequam deueniatur ad nihil, infinita diminutio fieri poterit.

Respon. Semper factâ qualibet diuisione, esse eamdem distantiam rei à nihilo. Vnde, cùm per diuisionem non procedamus ad nihil, distantia infinita non erit in causa; cur infinitus processus in diuidendo fieri queat. Quare concludimus generaliter, non esse partes in infinitum factibiles in re quanta; nec quidem in ipsa quantitate; nisi ex suppositione, quòd maneat quantitas: Sed quia diuidendo in infinitum perit omne subiectum corporeum; perit etiam quantitas ipsa. Vnde infinitæ diuisibilitatis, seu in infinitum tendentis capax non est.

7 Probatur etiam conclusio. Agens naturale V. g. Ignis attingit omnes partes subiecti disgregando, cùm in omnibus sit calor. Vel ergo omnes partes factibiles disgregat, & iam partes in infinitum distinguibiles non habemus; sed quæ, omnes tandem disgregari, & seiungi possint. Quod si aliquas. Tunc non est maior ratio de vna, quam de alia: cùm calor sit in quacumque parte subiecti, æqualiter intensus; & sic subiectum secundùm omnes suas partes adustum, non esset dilatatum, cùm aliquæ transirent immunes ab efficacia caloris.

EXPENSIO VII.

Quid sit punctum phisicum, & reale.

CONCLVS. I. PROPOS. VIII.

Punctum phisicum partes habet non possibiles, vel factibiles, sed dessignabiles tantùm; dessignabiles quidem essentiâ suâ sic poscente; non factibiles autem per accidens.

EX dictis hæc conclusio, quæ puncti phisici essentiam explicat eruta est. Si quidem, cùm probauerimus puncta per se indiuisibilia nō reperiri in quantitate; restat, dùm etiam excludimus progressum in infinitum; quòd tandem ad aliquod punctum per accidens saltem indiuisibile deueniendum sit; quod quidem partes consequatur, quæ tamen diuidi nequeant; non quia illa entitas ratione quantitatis capax non sit maioris, & vlterioris diuisionis: Sed quia non est capax ratione substantiæ, & speciei; quæ sub minori quantitate conseruari nequit.

Dices. Si ergo partes in puncto conceptibiles sunt; ergo etiam; cùm subsit quantitas ipsa huius dessignabilitatis capax; in illa, vt correspondeat nostris conceptibus in infinitum progredientibus, partes minores, & minores in infinitum inuenientur.

Respondetur. Non consequi partes dessignabiles: nisi ex suppositione, quòd sit quantitas. Et facta hac suppositione posse intellectum in infinitum procedere in subdiuidendo: quia scilicet rationem formalem intuetur; ob quam vlteriorem diuisionem concipere potest. Verùm absolutè nequaquam; neque enim in illo puncto talis subest quantitas, quæ illarum diuisionum sit capax. Quoniam illa quantitas est quantitas subiecti; quod respuit vlteriorem diuisionem, & si fiat perit subiectum. Reperitur itaque in puncto ratio formalis vlterioris diuisionis; non verò entitas illi correspondens. Sicut in homine reperitur ratio formalis vniuersalis: non ipsum vniuersale, scilicet vnum quoddam in multis; Et cùm concipimus animalitatem, concipimus vnum quoddam in multis commune Homini, & Leoni: nec inde, si quando dicatur de Homine, est etiam Leonis; verùm sit ipsius Hominis, & propter suam ipsam animalitatem dicitur Homo, animal. Si ergo in puncto quantitas concipiatur, vt quantitas partes obtinet; at si consideretur, vt coarctata puncto; & in substantia tali, partes habere nequit. Sic pietas in Deo, vt pietas, est distincta à iustitia: cum tamen in ipso Deo sit vnum quid, & idem attributum.

Dices

Dices secundò idem punctum habet partes Orientales, Occidentales, &c. cùm vndique à similibus punctis tangi possit, & cum eis vniri: ergo plures in illo partes reperiri possunt.

Respondetur. Quantum aliquod posse plura sibi æqualia coniungere, quam plura se minora respectu suę soliditatis: Ita vt minor sit proportio rerum æqualis soliditatis se alteri quanto A coniungentium ad quanti A soliditatem; quàm minoris ad ipsam soliditatem. Sic Cubus sex sibi cubos æquales coniungere potest ob sex æquales superficies, quibus circundatur.

Ita vt proportio cuborum æqualium, se alteri sibi æquali coniungentium sit vt 6. ad 1. At si cubi minores accipiantur, V.g. quorum 27. æquet cubum A; tunc quælibet superficies sibi coniunget 9. cubos minores eo quòd comprehendat 9. quadratas superficies æquales basibus eorum, & ideo erunt cubi ambientes, & tangentes cubum maiorem 54.; & hinc cum cubus maior sit positus 27. cuborum cubis tangentibus æqualium erunt, vt 54. ad 27. nempe vt 2. ad 1. Et si cubi tangentes dimminuantur respectu cubi A, & 64. minores integrent illud maius in sua soliditate; tunc quælibet superficies cum sit 16. quadratulorum æqualium basibus cuborum paruorum tangentium, erunt tangentes cubi 96. nempe vt 96. ad 64. nempe vt 2. ad 3. & sic consequenter. Vbi vides æqualia habere maiorem capacitatem ad sibi coniungendum æqualia: quàm minora. Superficies ergo externa quanti, quę tangit aliud æquale, se exhibet à pluribus tangendam æqualibus, quàm inæqualibus: Quare etiam punctum licet in se non habeat partes solidas, quæ omnibus punctis æqualibus tangentibus correspondeant: Poterit tamen consequi superficies tactiles plures: quàm quòd ipsum sit in sua soliditate, in quibus tangatur. Cùm sit hæc omnis quantitatis proprietas; Cùmque punctum à ratione, & essentia quantitatis non excludamus hinc est. Quòd & eius terminationes, vt poscit esse quantitatis, ei concedamus.

Dices hoc punctum tangeret aliud secundùm superficiem exteriorem, & non secundùm interiorem: Ergo partes complecteretur exteriores, & interiores. Respondetur negando consequentiam. Nam superficies quanti, non est pars quanti; sed eius terminus exterior, si præcisè sumatur, & extrinsecè tantùm, vt infra ostendemus. Tactus verò extrinsecus est; quare ab illo tactu, qui non est secundùm soliditatem, ad partes solidas non est arguendum. Nam tunc argumentum valeret: si partes solidæ ex superficiebus, prout tanguntur, & quatenùs tanguntur, constarent: prout verò sunt tales, nulla profunditate gaudet, & ideò nec soliditatem adipiscuntur. Cùm tactus non sit, nec in minima quidem parte penetratio. Quare superficies tactæ partes solidas integrare, & constituere nequeunt, vtpote indiuisibiles. Vt verò hæc indiuisibilitas superficierum intelligenda sit infra dicemus.

Dices 4. Si sint duo circuli concentrici, qui super duas lineas simul se voluant peruenientes ad eundem terminum, æqualem lineam percurrent: Ergo duo puncta à circulo minori in motu simul occupantur; ergo punctum circuli partes habet, quod pluribus punctis in linea, quam percurrit, correspondeat.

Respondetur moueri circulum minorem velociùs, quàm maior circulus. Velocitas autem motus est causa, quòd simul occupet duas partes velocior, & minor circulus; dum maior vnum physicum indiuisibile pertransit tardiori motu. Nam illa correspondentia motus ad duas partes non est simul; sed successiua. Quare alicui superficiei etiam indiuisibili plures æquales partes correspōdere possunt successiuè; imò simul, quod contactus indiuisibilium sit diuisibilis. Velociùs itaq; moueri est acquirere plures partes; dū aliud tardius acquirit partem aliquam indiuisibilem, & sicuti datur indiuisibile physicum; sic datur mouens tardissimum, quò tardius dari nequit: quia scilicet virtus motiua sub minori intensionis gradu nequeat produci, quæ est ad vnum indiuisibile physicum quantitatis.

EXPENSIO VIII.

Quid sint Mathematica indiuisibilia.

TRia sunt Mathematica indiuisibilia. *Punctum*, cuius pars nulla. *Linea*, quæ partes habet secundùm longitudinem tantùm. *Superficies*, quæ partes obtinet secundùm longitudinem, & latitudinem, non secundùm profunditatem, de quibus acturi sumus.

PRÆASSVMPTVM.

OBseruandum est autem. Quòd etiam priuatio corporis easdem commensurationes; & figuras, quas corpus obtinet, consequi potest relatiuè ad corpus, & abusiuè. Sic capedo corporis cubi cuba est, & cubi palmaris, cuba est, & palmaris. Sicut etiam priuatio lucis, nempe vmbra, longa, lata est, & vt lux mouetur, vt lux, figuram habet; quam à corpore illuminato consequitur.

CONCL. I. PROPOS. IX.

Superficies, linea, punctum sunt quid reale indiuisibile, iuxta illud esse secundùm quod accipiuntur: non absolutè.

PRobatur. Nam priuationes quantitatis esse nequeunt, & accipi, vt vltimum non esse quantitatis. Nam non datur priuatio priuationis: At verò linea, cùm sit terminus superficiei, esset priuatio superficiei; sed ipsa superficies esset quoque priuatio, cùm esset vltimus terminus corporis; Ergo esset priuatio priuationis, quod esse nequit.

2 Corpora se tangunt in superficie; Sed non se tangunt in nihilo, seu priuatione; quia contactus nihili, nullus est: Ergo superficies est aliquid rei. Sed illud rei non habet profunditatem aliquam, cùm corpora se tangentia non se penetrent: Ergo est aliquid rei indiuisibile.

3 Superficies, & lineæ figuram constituunt, vel planam, vel corporis solidi. Ergo non sunt nihil; sed aliquid rei. At figura partium interiorum non est. Ergo exteriorum. Verùm id, quod est purè exteriùs nulla profunditate grassescit, si sit corpus; nulla latitudine dilatatur; si sit superficies. Ergo superficies, lineaque indiuibilis est. Et idem dicas de puncto; cùm lineæ extremum sit. Neque valet recurrere ad intellectū; quia

quia contactus; figuraque sunt quid à parte rei. Dices. Si superficies, linea, punctum sunt quantitates, & sunt indiuisibiles. Ergo quantum ex indiuisibilibus componitur.

Respondetur id non sequi. Nam non sunt indiuisibiles absolutè; sed indiuisibiles, vt vltime & contingentes aliud secundùm sui vltimum esse: Si autem est vltimum esse quanti, non potest consequi secundùm illud, in quo est vltimum, & secundùm illud, in quo tangitur, partes. Nam, si superficies V. g. partes enumeraret, illa non esset vltimum molis; nec propriè tangeretur; sed penetraretur: cum illud, quod tangeretur, non esset exterius; sed quid internum. Cùm igitur sint indiuisibiles, vt vltimæ sunt, & quatenus tactæ; Illa tamen quantitas, vt tacta; & vltima non subsistit, nec esse potest sine partibus intrinsecis, ob quas vltima dicitur; si enim partes internæ non essent, hæc non esset vltima, nec exterior. Quare licet, vt vltima, partes non amplectatur profundas, & vt tacta; quia tamen se solâ non est, nec esse potest; hinc emergit, quòd non sit absolutè indiuisibilis; Sed diuisibilitatem, vt composita ex alijs nanciscatur.

CONCL. II. PROPOS. X.

Pars vltima indiuisibilis, nec est, nec esse, aut concipi potest sine alijs compartibus.

PRobatur. Quod esse nequeat sine suis compartibus: *tum ex dictis*. Quia illa se solâ, aut esset quantitas molis, aut diuersæ speciei, non molis; quia trinam dimensionem non consequeretur, non alterius speciei: Quia aliam entitatem; quam quantitatis molis non obtineret, cùm sit terminus corporis solidi.

Quod verò nequeat concipi sine suis compartibus perfecto conceptu, probatur. Quia superficies, linea, punctum sunt vltimum esse rei: Quod autem vltimum refertur ad primum. Quare est quid relatiuum: Relatiua autem sunt simul cognitione, nec vnum sine altero perfectè concipi potest. Quare, nec superficies poterit concipi sine alijs compartibus.

2 Si punctum posset concipi sine alijs partibus V. g. sine linea deberet concipi prout definit Euclides. *Cuius pars nulla*: sed id, quod nullam habet partem, quantitatis nihil est, ergo deberet concipi, vt priuatio quantitatis, & vt nihil, & idem dicas de lineâ, & superficie secundùm eam rationem, secundùm quam indiuisibiles sunt.

Dices. Tactus non præscindit: & tamen tangit solam superficiem; Ergo superficies, si se solâ tangi potest: etiam se solâ, & esse, & concipi potest.

Respondetur. Tactum esse modum quendam. Modus autem non est aliquid superadditum rei, cuius est modus. Quare, cum sit idem, ac ipsa superficies modificata, sicut ipse l. realiter rebus superueniat, nec esse, nec concipi sine illis valet, quæ modificat. Sic nec ipsius rei modificatæ ab alijs, quibus essentialiter annectitur, conceptus distinguere potest; si de perfectis côceptibus sermo sit, sicut nec modus actionis, quòd sit facta hoc, vel alio modo vim habet seiungendi, nec realiter, nec per intellectum ipsam actionem à motu, & passione licet modus actionis passionem nullo modo afficiat. Sic situs non efficit, figuram sine re figurata posse subsistere, licet figuram ipsam afficiat, & eam mutet.

3 Probatur vtraque pars. Quantitas molis non datur; nec concipi potest sine superficie, sicut nec superficies sine linea, nec linea sine puncto. Alioquin esset quid infinitum. Ergo neque superficies, linea, punctum sine quantitate molis, cùm quantitas molis non sit aliquid latiùs patens, quàm ipsius terminationes.

COROLLARIVM.

CVm ergo superficies, linea punctum non sit, nec esse possit sine corpore: hinc est, quod non sint; nisi vt tales, indiuisibiles; non autem absolutè, & conceptu adæquato concepte, & quòd, nec conceptus superficiei, nec lineæ, nec puncti perfectus, & adæquatus hauriri queat; & ideo, quòd in superficie, lineâ puncto semper partes côcipiendæ sint, si sit adæquatus côceptus. Quare à Mathematicis definitur, nec superficies, nec linea, nec punctum, secundùm suum adæquatum conceptum. Verùm secundùm id; quod præcisè dicunt, & explicitè. Sicut definitur à Theologis pietas Dei, licet idem sit cum Iustitia, non quidem, vt idem est cum ipsa, & prout in suo conceptu eam implicat; sed explicitè prout ab illa conceptu inadæquato præcisâ concipitur.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Superficies, linea, & punctum secundùm suum esse inadæquatum à Mathematicis accipiuntur.

PAtet. Quia definiunt ea esse quædam indiuisibilia, aut omnino, aut secundùm quid. Sed etiam definiunt illa, vt quantitates. Ergo considerant inadæquatè. Cum quantitas adæquatè concepta nullis indiuisibilibus integretur.

CONCL. IV. PROPOS. XII.

Superficies, linea, punctum, accipiuntur quoque, vt negationes vlterioris extensionis.

PRobat. Quia superficies non semel accipitur in aliquo corpore solido pro eo, quod mediat inter vnam partem, & aliam non realiter factam; sed tantùm conceptam. At id, quod inter vnam, & aliam immediatam interijcitur, nihil est, & solùm negatio vlterioris extensionis, prout taliter limitatur, aut limitata fuit ab intellectu: Ergo superficies etiam pro negatione extensionis vlterioris accipitur. Idem de linea, & puncto intelligi debet. Nam linea distinguens superficiem in multas partes, est inceptio huius partis, & desitio alterius in eâdem superficie côcepta. Dices. Non potest concipi negatio negationis. Respondetur concipi superficies, non vt negatio; sed vt, quid positiuum inadæquatè conceptum, in quo, & cuius potest negatio concipi,

EXPENSIO IX.

An datis indiuisibilibus, illa possint esse obiectum Mathematicæ.

BOnauentura Caualierius per indiuisibilia, libro ad id conscripto, non sine ingenio, & subtilitate Mathematicam se promouere profitetur; Et ex contemplatione punctorum indiuisibilium in quantis existentium æqualitates, & proportiones Mathematicorum corporum inuenire.

Vnde rectè hîc quærimus: an indiuisibilia, ex suppositione, quòd darentur, possint deseruire pro obiecto, quod speculationis Mathematicæ capax existat.

CONCL. I. PROPOS. XIII.

Indiuisibilia simpliciter non sunt obiectum Mathematicæ.

ESt contra prædictum, Verùm communis inter Neotericos Betinum par. 2. Epilog. Planim. Bullialdi de lineis spiralibus propos. 42. Not. 2. Vincentij Mutij de Maximis, & Minimis lib. 1. propos. 17. Primus quidem directè impugnat; Alij verò amicissimi sui laudant ingenium; cautè tamen vsurpandam doctrinam censent. Et tandem Goldinus de centro grauitatis hanc doctrinam diuersimodè carpit.

1 Probatur. Licet enim indiuisibilia in quantitate laterent; non tamen constat: An sint finita, vel infinita. Ergo non possunt prestare fundamentum euidens demonstrationi.

2 Suppositis punctis finitis. Dantur lineæ irrationales, superficiesque, & corpora. Si verò punctis finitis hæc constant, irrationales nullo modo esse queunt, cùm puncta finita aliquo numero exprimi possint: Partes verò linearum incommensurabilium nullo numero effari possunt, vt suo loco dicemus.

Dices indiuisibilia quidem proportione rationali potiri, seorsim, & distributiuè sumpta; non autem collectiuè.

Sed frustra. Nam collectio finitorum nihil aliud est; quam ipsa distributiuè sumptorum multitudo. Vndè si distributiuè dicunt omnia proportionem, & numeris indicari possunt. Ergo etiam omnium collectio numero aliquo exprimibilis est.

Deinde licet finita: non tamen omnia accipi possunt: sed aliqua; à quibus paritas ad alia acceptibilia deducatur. Sed illa aliqua rationalia sunt. Ergo etiam rationalis erit aliorum proportio.

3 Suppositis item punctis finitis. Destruit hęc opinio lineas; superficiesque potentiâ tantum commensurabiles. V.g. Latus quadrati incommensurabile est diagonali; licet eorum quadrata commensurabilia sint, nempe vt 1. ad 2.: Sed omnes lineæ æquales lateri, ex quibus constat quadratum ex latere effectum sunt incommensurabiles diagonali, & omnibus illi æqualibus, ex quibus constat quadratum diagonalis. Ergo totum quadratum lateris incommensurabile esset quadrato diagonalis. Cùm lineæ omnes, ex quibus vtrumque quadratum conficitur, sint inuicem incommensurabiles,

4 Datis punctis infinitis. Ea ex Euclide proportionem dicunt; quæ multiplicata possunt se inuicem superare. Sed infinitum multiplicari nequit; neque aliud superare. Ergo datis punctis infinitis, quantitates, vt ex ipsis constantes, consideratæ nullam inuicem dicent proportionem. Quod autem infinitum multiplicari nequeat: patet. Quia daretur infinitum triplum, quadruplum, centuplum: Ergo daretur infinitum alio maius: Si autem vnum infinitum concedatur maius alio; Iam ratio infiniti cessat in minori; Cùm ibi finiatur, vbi incipit aliud augescere.

5 Probatur. Quoniam de finito ad infinitum arguere non licet, cùm infiniti, & finiti nulla sit proportio. Sed in argumentis omnia quantitatiua accipi nequeunt, quia infinita sunt: Ergo aliqua V.g. 10. aut 20. lineas ex quarum æqualitate; vel proportione ad alias, arguitur totam planitiem alteri, vel æqualem esse, vel proportionalem. Ergo argumentum procedit ab aliquibus lineis ad omnes. Sed aliquæ finitæ sunt, omnes infinitæ. Itaque argumentum arguit à finito ad infinitum; siquidem superficies totę infinitis lineis constant.

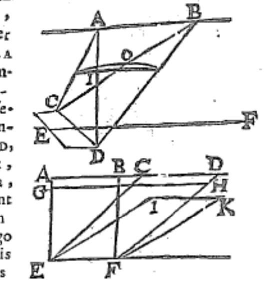
Dices omnia aliarum, etiã si sint infinitę similis ratio demonstratur, & ideo aliarum quamuis infinitarum idem argumentum vrget.

Respondetur nullam rationem æqualitatis, vel inæqualitatis in indiuisibilibus reperiri; quę author admittit; cùm punctum sit, cuius pars nulla: Vnde tota inæqualitas rejicitur in numerum punctorum; quibus lineæ constant; qui numerus cum sit infinitus omnem quoque proportionem obliterat. Deinde cum nesciamus an in quantitate sit maius, aut minus infinitum alio, vel æquale. Si omne infinitum est æquale, destruit omnem proportionem maioris, aut minoris inæqualitatis. Si admittuntur infinita inæqualia non possumus scire, an sint plura, vel pauciora; quàm oportet; & sic proportio, quæ secundùm alteram rationem militat, à numero incerto indiuisibilium destruatur.

6 Probatur vniuersaliter. Nam ex hoc sequeretur; quod minus esset æquale maiori. Dicunt enim aduersarij: Rectangulum A B E F, in schemate inferiori, esse æquale rectangulo E C D F, vt verè est, & ostendit Euclides lib. 1. propos. 36. Sed non ex demonstratione Euclidis. Verùm, quia inter lineas A D, E F non possit intercipi; nisi æqualis multitudo linearum parallelarum, qualis vna ex ipsis est G H. Quòd si ita est. Ergo E C esset æqualis lineæ E A, nam lineæ omnes, quæ duci possunt inter parallelas E F, & A D occupãt omnia puncta linearum E A, & E C; Ergo E A, & E C æquali multitudine punctorum constabunt. Quare E C erit æqualis lineæ E A maior minori, quòd esse nequit: At si maior multitudo punctorum est in E C: Ergo non tota E C lineis productis occupata est; cùm tamen totam superficiem A D E F integrent, & extendant.

Deinde, si maior multitudo punctorum est in E C; quàm E A: Plures ergo lineæ duci poterunt; cùm ex omnibus punctis lateris E C parallelæ duci queant: Ergo maius planum erit E C D F; quã E A B F contra Euclidis demonstrationem.

* 7 Probat. Nam sint duo plana in figura altiori parallela A B, E F, & sectio C D existat ad angulos rectos ad E F; sintque triangula C A D, & C D B æquicrura; Erunt ergo inter parallelas E F, & A B.



Ille ergo superficies, quæ inter hæc plana A B, & E F. interponuntur, & secant triangulum C A D, tot erunt, quot illa, quæ secant triãgulum C D B: Ergo erit ęqualis superficies C A D, superficiei C D B, cùm tot lineas sectionibus planarum impressas recipiant ambæ, vel eamdem multitudinem planorum secantium continuorum, vt est I O terminent. Sed verè sunt inæquales: maiorque est C D B, quam C A D, ergo superficies earumdem linearum capax maior esse poterit; quã alia: Quod sint inæquales, patebit ex dicendis Propos. 1. lib. 6. Ele. quò d eadem basis existat, & inæqualis eorum altitudo.

Dices. Lineas considerandas secundùm eundem situm, nimirùm parallelum. Sed huic obiectioni vtraque adductarum proximè probationum satisfacit: Nam in primâ accipiuntur secundùm eundem situm, *vel ductum parallelum*, & tamen plura puncta *reperiuntur in latere* E C; quàm E A: cúm tamen planities sint ęquales. Quòd si secundùm eundem situm lineæ G H non sunt plura puncta in E C, quàm E A; Ergo neque in secundo schemate altiori plura puncta erunt in C B, quàm C A, & ideo C A D, & C B D erunt æquales superficies. Quod verum non est ex cit. Eucl. I. propos. lib. 6.

Deinde sequeretur, quod lineæ C B essent æquales lineę C A, saltem secundùm illum situm acceptæ, cùm eadem multitudo punctorum in C A reperiatur, quæ in C B, quòd tamen falsum euidenter est.

8 Probatur. Quia dantur figuræ Isoperimetræ, quæ scilicet sub eodem ambitu, linearum, & laterum superficies continent inæquales. Quę tamen non essent: Cum eadem multitudo punctorum in lateribus æquales in multitudine duci lineas superficiem secantes exposceret, cumque multitudo linearum, tùm huius, tùm alterius superficiei esset æqualis; superficies quoque essent æquales contra præsupositum.

Dices. Ex æqualitate omnium linearum, quæ duci possunt in circulo à centro ad circumferentiam, arguitur æquidistantia circumferentiæ à centro. Sic ex omnibus angulis rectis, quos facit linea erecta, & insistens cum omnibus lineis, quæ sunt in plano, arguitur, quòd illa linea sit perpendicularis lib. 11. propos. 3. Eucl.

Respondetur. Hîc neque æqualitatem, neque proportionem argui: sed solùm situm. Vnde est dispar ratio. Deinde à multitudine linearum æquali, non arguit vllam æqualitatem: Sed ab ipsis lineis æqualibus, sint, quot quot sunt, æquidistantiam definit. Ita vt argumentum in numero linearum non fundetur: sed vel in situ, vel in æqualitate earum: Vnde patet, quòd ab infinitate, multitudineque earum omninò præscindit. Tandem non arguit à lineis, vt indiuisibilibus ad planitiem, sed à lineis sumptis prout sunt diuisibiles, & secundùm longitudinem: Vnde non transit de genere ad aliud genus quantitatis. Hinc autem eruitur.

9 Argumentum. In Mathematicis non est bona illatio, cùm sit transitus de genere ad aliud genus quantitatis, V. g. à linea ad superficiem, cum inter prima genera non sit proportio: Sed Cauallerius argumentatur ab indiuisibilibus ad planities, & à planis ad corpora. Ergo eius argumenta verâ, & euidenti illatione non concludunt.

TRACTATVS II. PRÆLIMINARIS.

De essentia quantitatis discretæ.

CVM multa, quæ de quantitatis numericæ essentia dicturi sumus, & etiam ex parte ea, quæ diximus, dependeant à quantitatis discretæ cognitione. Hinc est, quòd antequàm ipsas Mathematicas propositiones attingamus, aliquam de quantitatis discretæ essentia haurire cognitionem sit omninò opportunum; nam planiori, liberiorique pede, tùm discretæ, tùm continuæ quantitatis relationes, & respectus percipiendi facultas erit.

EXPENSIO I.

Quid sit vnitas numerica.

VNitas, quantò magis simplex est, tantò laboriosiùs penetratur, vt, velut indiuisa, ab intellectu non posse secerni, & in sua prædicata seiungi, videatur. Vnde apud Methaphisicos mirum est, quot quantæque opiniones de *vnius* essentia ventilentur. Sed nos, quæ certiora sunt, & euidentiora ex nostris Placitis philosoficis hic deducemus.

CONCL. I. PROPOS. I.

Vnitas numeralis est eadem, ac indiuidualis tùm re, tùm ratione.

1 PRob. ex Arist. 3. Methaph. tex. 14. *Numero enim vnum dicere, aut singulare nihil differt; ita enim singulare dicimus, quod numero vnum est.*

2 Ratione prima pars ostenditur. Si vnitas indiuiduationis non esset eadem cum vnitate numeri: multitudo quæ opponitur vnitati numeri; non opponeretur indiuiduationi, sed esset quid disparatum; vt humiditas, quia non est contraria frigori, est quid disparatum respectu caloris. Vnde cum calore morari potest; Sed quælibet multitudo destruit, tùm vnitatem numericam, tùm indiuidualem; estq; contraria, tùm vni, tùm alteri: Ergo idẽ est vnitas indiuidualis, & numeri.

3 Eatenùs entia sunt multiplicata, quia numerabilia, & è contra. Multiplicata verò sunt, quia diuisa sunt in se, & diuisa à quacumque alio; Sed esse diuisum in se, & diuisum à quocumque alio est vnitas indiuidualis: Ergo hæc ipsa etiam numeralis.

4 Si tollatur per intellectum omnis vnitas numeralis, relinquendo in subiecto vnitatem indiuiduationis: Ita vel erunt numerabilia, vel non. Si poterunt numerari; Ergo contra hypotesim vnitas numeralis adhuc in subiecto latet, cùm quantum numerabile efficiat: Si verò non sunt numerabilia; Ergo contra præsupositum vnum essent; Siquidem illud vnum est; quod numerali pluritati non correspondet.

5 Entia numerata constituunt numerum. Quia reperit intellectus multitudinem, atque multiplicationem: Sed nulla aliã entia à parte rei multiplicationem adipiscuntur; nisi indiuidualem: Ergo vnitas indiuidualis, etiam numeralis fatẽda.

Prob. 2. pars. Tunc aliquid cum fundamento distinguit potentia intellectiua: quando reperit, vel capacitatem in re, vel æquiualentiam ad plura actu distincta: sed hæ duæ vnitates numerica, & indiuidualis diuersitatem inter se non habent, nec pluribus separatis æquiualent. Ergo intellectus illas distinguere nequit. Quod diuersitatem inuicem non seruent; quia indiuidua etiam, vt indiuidua, numerabilia sunt; Et quia numerabilitas, & indiuiduatio vnitatem non variant, nec vnum numerale alio pacto se gerit, ac indiuiduale. Quòd verò in ordine ad aliud non distinguãtur, id facit. Quoniam vnitas numeralis, & indiuidualis non æquiualent diuersis, cum vnitas numeralis illis omnibus æquiualeat, cui æquiualet indiuidualis. Cui enim istę vnitates æquiualere possunt? nisi alicui vnitati? Pluribus enim vnitatem habentibus subiectum habens vnitatem numericam simul, & indiuidualem correspondere nequit. Illa enim vnitatem duplicem habẽtia vnumquodque, & vnitatem numeralem, & vnitatem indiuidualem possideret. Quare tùm vnum, tùm aliud vtrisque vnitatibus numerali, & indiuiduali corresponderet.

Dices 1. Substantię spirituales sunt numerabiles, licet non sint indiuiduę. 2. Multitudo ipsa est quoque numerabilis: Nam exercitus, congregationes, acerui numero subesse possunt. 3. Gradus Methaphisici etiam in eodem subiecto, & modi numerabiles sunt, & tamen indiuidua nõ sunt: Ergo vnitas indiuidualis numerica non est.

Respondetur hęc omnia esse numerabilia, quo pacto sunt diuisa, & vna. Nam quoad substantias spirituales diuisę verè sunt ab inuicem, & rationem indiuiduam veram habent secundùm Theologos numerosiores. Quoad verò ea, quę sunt vnum per accidens: iam sicut sunt vnum per accidens, ita numerantur per accidens, & sictè vnum dicuntur, tùm numericè, tùm indiuiduè. Tandem de gradibus methaphisicis non alio pacto sentiendum, qui, cùm sint quid pluribus commune veram vnitatem nõ participant:

& ſic nec veram numerabilitatem. Sed eam, quã mens noſtra pręſcindendo illis tradit. Quare ſicut verè ſunt vnum in intellectu prędicata eſſentialia, vt vnũ cogitata verè numerabilia ſunt; & vt in mente, numerabilitatem conſequuntur propriam, vt propria vnitate gaudent; nempe intellectuali ad imitationem numerabilitatis à parte rei. Sed tolle, quod appoſuit humana mens vnitatis, aut diuiſionis, & numerabilia non erũt. Modi verò multiplicantur ad ſubeundam numerabilitatem per ſolam fictionem noſtri intellectus, qui aſſumit idem ſubiectum multoties, & vt ſubiectum diuerſorum modorum plurificat. Non enim poteſt concipi modus ſine re cuius eſt modus; & ideo, cùm concipit duos modos implicitè, cõcipit gemina vice ſubiectum, in quo ſunt, & ſic idem ſubiectum multiplicat tanquam ſibi notum ex gemina varietate. Verùm modus abſolutè numerabilis non eſt. Cùm verò plures modi, vt modi ſunt, non ſint, nec plures entitates, nec quid plurificatum, imò ab eodem ſubiecto, in quo inexiſtunt, nec re, nec ratione diſtinguantur, & modus, nec quidem poſſit concipi ſine re, cuius eſt modus. Ergo tantò minùs numerari.

Dices contra 2. partem. Poteſt intellectus concipere vnitatem indiuidualem in ordine ad aliud indiuiduum. Numericam in ordine ad ſe, qui numerare poteſt: Ergo poteſt per diuerſos reſpectus iſtas duas vnitates diſtinguere.

Reſpond. Poſſe quidem intellectum conſiderare diuerſos reſpectus: ſed hoc non eſt multiplicare conceptus ipſius rei. At relationes diuerſas in ipſa re conſiderare. Quòd maximè aſſeras de prędicamentalibus, vt ſunt iſtę. Nam etiam per aliquos, nec quidem tranſcendentales relationes ſuum multiplicant conceptum. Cùm per multos actio, paſſio, & motus, nec quidem ratione diſtinguantur, & tamen ſunt reſpectus tranſcendentales operationis ad agens, & paſsũ. Sic animal, licet, vt genus, dicat ordinem ad intellectum, & vt animal, ad naturas, in quibus eſt; non tamen genus, & animal duo conceptus ſunt in ipſo animali, ſed illud ipſum animal genericum eſt, & prout ſubſtat noſtris conceptibus.

CONCL. II. PROPOS. II.

Vnitas numeralis eſt indiuiſio in ſe, & diuiſio à quocunque alio.

PRob. ex pręfata concl. Quoniam vnitas numeralis eſt idem re, ac ratione, quod vnitas indiuidualis. Sed vnum indiuiduale definitur; Quòd ſit in ſe vnum, at diuiſum à quocumque alio. Igitur tale erit quoque vnum numericum: Vnde eius vnitas erit indiuiſio in ſe, & diuiſio à quocumque alio.

CONCL. III. PROPOS. III.

Quantitas continua eſt fundamentum vnitatis poſſibilis numeralis in quocumque ſubiecto.

PRobat. Nam omne continuum diuidi poteſt: quę verò diuiſa ſunt indiuidua ſunt. Vnde & numerabilia.

COROLLARIVM.

HInc eruitur. Intellectum in re quanta ſufficiens fundamentum nanciſci numerandi partes. Quia adeſt earum poſſibilitas, ob quam ſaltem potentiâ numerabiles ſunt, ſicut & ſunt potentiâ multiplicabiles. Vnde bene Ariſt. 2. Methaphiſ. tex. 2. inquit. *Cognoſcitur quantum, vt quantum, aut vno, aut numero; omnis autem numerus vno: Quare omne quantum, prout quantum, vno cognoſcitur; Et quo primo hoc cognoſcitur ipſum vnum, propter, quod vnum, prout vnum, principium eſt numeri, prout numerus eſt.*

CONCLVS. IV. PROPOS. IV.

Quantitas intenſionis quoque eſt fundamentum vnitatis numeralis poſſibilis.

PRob. ex noſtris placitis Philoſophicis. Quoniam accidens ſeparatum à ſubiecto, vel ſaltem diuinâ omnipotentiâ, indiuiduum conſtituere poteſt. Quare ſi tres, & tres gradus accipiantur caloris, & ſine ſubiecto contineantur, efficient duo indiuidua. Ergo etiam qualitas; cùm conſequatur indiuidua poſſibilia, erit fundamentũ multiplicationis, & vnitatis numeralis.

CONCLVS. V. PROPOS. V.

Quantitas ſucceſſiua, prout dicit res pertranſeuntes, eſt numerabilis, aut actu, aut potentiâ.

PRob. Quia omne, quòd mouetur ſucceſſiuè, aut extenſum, aut intenſum, aut diſcretum eſt, ſed hęc propriè numerabilia ſunt. Ergo etiam quantitas ſuccèſſiua, quę conſiſtit in motu iſtarum quantitatum, numerabilis eſt, quoad partes vi motus pertranſeuntes, in quibus ratio temporis conſiſtit.

COROLLARIVM.

ET hinc emergit. Quòd tempus quoque numerabile ſit; Quia ſcilicet numerantur partes ęquali duratione pertranſeuntes, aut ſaltem proportionali.

EXPENSIO II.

An vnitas, numeruſque diſtinguantur realiter à re, in qua ſunt.

CVM dicimus vnum, aut numerabile operę pretium eſt ſcire; an intelligamus de ſubiecto, aut in ſubiecto ſit aliquid aliud, quòd numerabile, & vnum appellatur.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

Vnitas, quæ eſt principium quantitatis diſcretæ, non diſtinguitur realiter à re vnitatem habente.

ESt concluſio noſt. Paſq. diſput. 45. par. 2. ſec. 3.

Probat. Nam ſi vnitas eſſet accidens aliquod, ſuam vnitatem indiuidualem poſſideret. Hęc vnitas itaque; aut eſt vna aliâ quadam ſuperadditâ vnitate, aut eſt vna ex ſe, ſi ex ſe vnitate fruitur: Ergo etiam ſubiectum vnum eſſe poterit abſque hac ſuperadditâ vnitate. Si verò requiritur alia vnitas, quę ſit accidens ſuperadditũ;

iam

iam ad hanc vnitatem alia requireretur, & ſic in infinitum, quod repugnat.

2 Per hoc conſtituitur aliquid indiuiduum numero; *Quod ſit vnum in ſe, & diuiſum à quocumque alio*, ſed per aliquid extra ſe non poteſt quidquam eſſe indiuiſum in ſe, & diuiſum à quocumq; alio, ergo nec vnitatem numericam conſequi poteſt: Minor propoſ. exponitur. Nam per hoc, quòd ſubſtantia ſit alba, non eſt alba in ſe propriè: quia de ſe etiam nigredinis capax eſt. Vnde de ſe, neque alba eſt, neque non alba. Ita, ſi aliquid eſſet vnum in ſe per aliquid ſuperadditum, deberet eſſe indifferens ad diuiſionem, & indiuiſionem; nempe, neque eſſe diuiſum, neque non diuiſum; quod eſt impoſſibile.

3 Si indiuiduatio eſt forma ſuperadiuncta; poterit deſtrui à Deo. Deſtruatur. Itaque illa natura iam indiuiduatione expoliata; vel erit à quocumque alio diuiſa, vel non? Si non erit diuiſa: Ergo erit idem cum aliqua alia natura ſingulari, & ſic eſſet ſingularis, ex alterius, cum qua vnum eſt, ſingularitate. Quod ſi, nec quidem ipſa ſingularis eſt, cum alia idem ſequeretur, & ſic de alijs, donec ad naturam ſingularem aliquam deueniremus, & vltimam, quæ vtique datur, & tunc illa eſſet vna, cùm ſit vltima; quod eſt abſurdum cum dentur multæ naturæ ſingulares. Vel eſſet diuiſa à quocumque alio illa natura ſingularitate priuata à Deo. Et iam ſingularis eſſet:

Deinde 4. A parte rei vnum in multis non admittitur: ergo quælibet natura in ſe eſt diuiſa in plura ſuppoſita. Alioquin ſi in ſe eſſet indiuiſa, & per multas ſuperadditas vnitates diuiſa, eſſet vniuerſale à parte rei.

5 Natura non eſt poſſibilis ſine indiuiduis: Ergo inter eius prædicata eſſentialia inuoluitur indiuiduatio, & vnitas.

6 Agens terminat ad ſingulare: Ergo natura de ſe eſt ſingularis. Quòd ad eam terminet agens.

7 Tandem; Si hęc vnitas eſt ſuperaddita ſeparetur intellectu. Et quęro de entitate illa ſuâ vnitate expoliata: eſtne vna, aut multiplex? Si eſt vna: Ergo ſine ſuperadditione alicuius entis, quòd vnitatem prębeat vna eſt, & ſingularis: Si multiplex. Ergo ſine diuiſione aliquid poteſt fieri multiplex. Deinde adhuc vnum erit, cùm pluritas ex vnitatibus conſtet: Vnde per ablationem vnius plures conſequeretur vnitates. Si quid medium ſtatim apparet abſurdum; quoniam vnum, & multiplex negatiuè opponuntur.

CONCL. II. PROPOS. VII.

Numerus, vt numerus eſt, non eſt ens diſtinctum à re numeratâ.

COntra Auicenam 3. Methaph. Gaietanum, noſtrum Morandum, & alios.

Probatur. Quia numerus componitur ex vnitatibus. Sed vnitates non ſunt, quid diſtinctum à re vnâ: Ergo neque numerus.

2 Si eſſet aliquod accidens à ſubiecto ſeparabile numerari poſſet. Ergo numerabilitas numeraretur. Quòd eſt inconueniens.

3 Numerabilitas dicit poſſe numerari; nempe quandam potentiam ad actualem numerationem. Sed actualis numeratio nihil ſuperaddit aliud: niſi opus intellectus numerantis: Ergo nec numerabilitas aliud ſuperaddet: niſi poſſibilitas operis intellectus numerantis. Quòd res in eſſe ſuo poſſibili tales ſint, quales in eſſe actuali quoad eſſentialia inueniuntur.

4 Si numerus eſt accidens; in quo inhæret? Non in omnibus numeratis; alioquin daretur vniuerſale à parte rei; nempe aliquod vnum in multis diuiſis. Si autem in aliquo tantùm, aut eſt vnum, aut duo, aut tria. Quare, cùm formæ expoſitæ ſuos effectus formales non poſſint ſuſpendere, trias in ſubiecto ſemper trinum denominaret ſubiectum, & dualitas duo. Quare nunquam poſſet fieri, aut quatuor, aut quinque. Deinde vnicum poſſet denominari, trinum, & duo ob formam triadis, vel dualitatis ſubiecto inhærentem.

5 Si numerus V. g. quinque eſt ens ſine ſubiecto erit etiam vnũ ſine ſubiecto; quia vnum, & ens conuertuntur. Quod ſi non obtinet vnitatem ſine ſubiecto; vt patet; neque erit ens ſine ſubiecto. Quod verò numerus, vt numerus vnitatem nõ cõſequatur, patet; quia numerus, vt numerus eſt formaliter, in multiplicatione cõſiſtit.

6 Non poteſt ſeparari ratio ternarij à tribus ſubiectis. Ergo non eſt accidens; nam ſi tale eſſet, poſſet auferri, & ſic tria indiuidua eſſent, & non eſſent tria. Eſſent enim tria: Quia adhuc manerẽt indiuidua tot, vt erant priùs; cùm nullum deſtructum fuerit, non eſſent autem tria; Quia ab eis ablata eſt ratio ternarij.

Dices. Si ergo numerus accidens non eſt; nec aliquid reale: Ergo Muſica, & Arithmetica agens de numeris erit ſcientia fictitia.

Reſpond. Agere de numeratis ipſis rebus, prout obijciuntur noſtris conceptibus, eiſque ſubſunt. Ideoque eſſe ſcientias reales.

CONCL. III. PROPOS. VIII.

Vnitas, & numerus metaphiſicè conſideratus dicit aliquid præter naturam, & ſuperadiungit aliquam rationem formalem.

1 PRob. Tunc eſt diuerſa formalitas. Quando conceptu affirmatiuo poteſt concipi vnum ſine alio. Sed natura poteſt concipi ſine indiuiduatione, & numero, & dicere. Natura non eſt vnitas indiuiduationis, aut numerus. Ergo ſuper naturam addit numerus, & vnitas aliquam formalitatem.

2 Omnes naturæ conueniunt in indiuiduatione; ſed non omnes conueniunt in naturâ. Diuerſificatur quoque numerus multoties, & non natura: Ergo vnitas, numeruſque dicit aliquid pręter naturam, ſcilicet vnitas, indiuiſionem in ſe, & diuiſionem à quocumque alio: Numerus verò huius rationis multiplicationem in pluribus ſubiectis.

EXPENSIO III.

An ratio Indiuiduationis conſiſtat in differentia aliqua, ob quam plurificetur ab alijs.

CVm aliqui ex Philoſophis diuiſionem, quam aliquòd vnum habet ab alijs, dubitent, an ſit

diuiſio

diuiſio diſſimilitudinis, Ideſt diſtinctio; an verò diuiſio realis per ſeparationem ſubſtantię effecta. Hinc eſt, quòd, vt penitùs eſſentiã vnitatis perueſtigemus, ſit quoque videndum, an aliqua differentia adferat hanc vnitatem ſingularitatis ſubiecto, vel per ſolam diuiſionem obtineatur.

CONCLVS. I. PROPOS. IX.

Vnitas nullam importat differentiam in ſua formalitate; neque vlla diſtinctione conſtituitur ab alijs plurificata.

Contra multos Philoſophos, qui id aſſerunt de vnitate indiuiduationis, præcipuè Fonſecam in Methaph. cap. 10. queſt. 7. ſec. 3. Suarez in Meth. diſp. 5. ſec. 8. Zachar. Paſqual. noſtr. Tom. 2. Meth. diſp. 44. ſec. 2. num. 10.

1 Probatur. Diuiſio non ingerit differentiam inter ſubſtantias, cùm nihil producat, nullamque formam nouam ſubiecto aduehat; ſed per ſolam diuiſionem indiuidua multiplicantur; & in vnitates plures tranſeunt; Sicut per coniunctionem duarum partium integralium in vnum coaleſcunt: Ergo vnitas nullam differentiam ſecum aduehit ex ſuo formali.

2 Prob. Huic aſſignato vni, V. g. huic indiuiduo non repugnat creari indiuiduum omninò ſimile, ne dum ſubſtantiâ; ſed etiam in omnibus ſuis accidentibus, vſque ad poſitionem in eodem loco, & ſituationem. Et tunc expoſtulo. An hęc ſint duo indiuidua. Quod ſi ſunt; hoc eſt quod volumus, duas vnitates reperiri, quæ tamen nullâ differentiâ diſſentiant. Quod ſi duo non ſunt; hoc eſt contra diuinam potentiam pugnare, cui ſi talis indiuidui creatio denegatur.

3 Prob. Similitudo eſt relatio, quæ fundamenta ſupponit proxima ad relationem fundandam. Sed fundamenta relationis non poſſunt eſſe minùs, quam duo. Quod ſi fundamenta omnimodæ ſimilitudinis duo ſunt: Ergo abſque aliqua diſſimilitudine duas vnitates habemus.

4 Prob. Diſſimilitudo eſt relatio; ſed relatio præſuponit pro fundamento plura; Ergo ipſa non facit pluralitatem.

CONCLVS. II. PROPOS. X.

Tota ratio multiplicationis indiuiduorum eſt ſola diuiſio.

Probatur. Diuiſio formaliter importat negationem, & deſtructionem vnionis. Verùm, quę vnione non copulantur, vnum non ſunt. Ergo multiplicata ſunt. Sed nec genere, nec ſpecie; Quoniam nulla inuecta eſt differentia: Ergo ſunt multiplicata indiuiduatione, & vnitate numericâ.

Dices. Multa indiuidua, quæ nullo modo à ſubiecto diuiſa ſunt. Vt Accidentia materiæ, Anima corpori, Actus mentis ipſi intellectui; & inter ſe, Ens ſucceſſiuum ſubiecto, & Modi. Quapropter, cùm hæc ſint indiuidua, numeroque multiplicata, & tamen indiuiſa, diuiſio vnitatem numericam non conſtituet.

Reſp. Hæc omnia, demptis modis eſſe diuerſa numero à ſubiecto, in quo inexiſtunt, nõ actu; ſed potentiâ; quia entitatem poſſident, vt ſaltem diuina operante potentia ſine ſubiecto commorari poſſint. Ad id verò de modis reſpondetur non conſtituere; neque in ſubiecto, neque inter ſe pluritatem numericam, ſed ſolùm ſpecificam; cùm nec ſine ſubiecto concipi poſſint.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Vnitas numerica, ſeu realis, ſeu potentialis per aliquam differentiam dignoſcitur.

Prob. Quæ differentia non ſunt ab intellectu diſtingui nequeunt: Ergo ea omnia, quæ diſtincta cognoſcuntur, aliquam differentiam ſecum ferunt, ob quam dignoſcantur. At ſi ab intellectu res non diſtinguantur, vt vnum concipiuntur: Ergo ad hoc, vt intellectus plures vnitates concipiat, debet recognoſcere aliquam differentiam, ob quam diſtinguat. Quod verò quæ diſtincta non cognoſcuntur, vt vnum aprehendantur, patet experimento. Nam pone mihi aliquod corpus omninò alteri ſimile ...

diſtinguere. Vnde primò ob differentias, vel accidentales, vel ſubſtantiales concipit plura; vt euenit in omnibus heterogeneis. Secundò ob ipſius deſſignationem, vt in omnibus homogeneis, in quibus intellectus deſignat partes, & de illis agit, tanquam ſi eſſent plura actu indiuidua. Tertiò accipere quandoque pro pluribus, quæ nullo modo in plura faceſſere poſſunt. Quia differentias percipit, ob quas diſtinguit ea, quæ vnum ſunt, in plura. Quartò & aliquando concipere, vt vnum; quæ verè duo ſunt, ſic ſi Luces à diuerſis luminibus prodeuntes in eodem foramine decuſſentur, videntur, vt vna lux, cum tamen duę luces ſint, numero diſtinctæ.

EXPENSIO IV.

An vnitas numerum conſtituat.

Numerus ex vnitatibus conſtare quibuſdam dificile viſum eſt; cùm vnitas oppoſita multitudini videatur. Verùm, vt rem determinemus, ſit.

CONCL. I. PROPOS. XII.

Vnitas eſt idem obiectiuè; ac numerus; non formaliter, & reduplicatiuè.

Prob. Plura ſunt numerus obiectiuè: Ea verò ſunt ab inuicem diuiſa, & in ſe ſingula nequaquam plurificata: Ergo quodlibet vnum eſt. Ergo numerus ex vnitatibus conſtat.

Dices. Vnum, & plura opponuntur. Ergo pluritas ex vnitatibus conſtare nequit.

Reſpondetur. Vnum, & plura opponi diſparatè, non negatiuè; neque contrariè. Nimirum ex ſuppoſitione quòd intellectus conceperit vnũ, non poteſt cognouiſſe quinque. Hoc autem nè dum vnitas habet; ſed quilibet alius numerus præter vnitatem. Nam eâdem oppoſitione, quâ

obijcitur nihil inuoluat eorum, quibus à parte rei adnectitur. Sic conceptus perfectus eſt animalis, quia iſte conceptus, prout in intellectu eſt rationalitatem, quæ ei à parte rei in homine connexa eſt, non inuoluit. At ſi ego concipiam ens. Iſte conceptus, prout menti ſe obijcit, non eſt perfectus; quia, etiam quatenus in mente eſt, ſine ſubſtantia quid chimericum euaderet.

CONCLVS. I. PROPOS. XIII.

Indiuiduatio numerica à rebus indiuiduatis perfectè non præſcindit.

Probat Ariſt. 8. Metaph. text. 16. *In prædicatione vnus homo non addit aliquid aliud, quam homo, ſicut & ipſum eſſe, præter quid eſt; aut quale; aut quantum, & vni eſſe, eſt vnicuique eſſe.* Sic 3. Methaph. tex. 30. *Idem enim vnus homo, & ens homo, & non ſignificat diuerſum aliquid ſecundùm diſtinctionem repetitam homo, & ens homo, & vnus homo.*

Probaturque ratione. Vnitas numeralis, & indiuiduatio idem ſunt, vt ſuprà dictum eſt. Ideoque vnitas eſt eſſe indiuiſum in ſe, & diuiſum à quocunque alio. Sed nec indiuiſio, nec diuiſio ab alijs poteſt concipi ſine re indiuiſa in ſe, & ab alijs diuiſa. Igitur nec vnitas numeralis, nec numerus vnitatibus conſtans ſine ipſis rebus numeratis perfecto conceptu poteſt intelligi.

CONCL. II. PROPOS. XIV.

Naturâ, neque ipſa, ab vnitate numerali perfectè præſcindit.

Probatur ex Ariſt. lib. 10. Methaphiſ. tex. 8. *Quòd autem id eſt quodammodo ſignificet vnum, & ens, patet, quòd ſimiliter ſe habet, ſicut ens.*

2 Prob. Quidquid eſt in Petro diuiſum eſt, ...

perfectè à naturâ non præſcindit; ſic nec natura ab indiuiduatione. Sed natura poteſt concipi ſine indiuiduatione: Ergo etiam indiuiduatio ſine naturâ.

Prob. 2. pars. Pluritas nihil addit vnitati; niſi aliam vnitatem, & vnum vni; Ergo ab vno, & vno præſcindi nequit.

2 Ratio præciſa eſſentialiter excludit pluritatem: Quia debet eſſe quid vnum commune multis, atque conueniens. Ergo pluritas, vt pluritas præſcindi nequit.

Dices con. 1. partem. Rationes contrahibiles, & contrahentes debent eſſe diuerſæ. Sed indiuiduatio præciſa eſt eadem, ac illa, de qua dicitur; cùm ſit vnum, & idem: Ergo non datur ratio contrahibilis vnitatis, & per conſequens nec præciſa.

Reſp. Totum concedendo demptâ vltimâ conſequentiâ. Nam res, quæ à parte rei contrahit indiuiduationem, non eſt; niſi ipſum indiuiduũ, nempe *hoc*, & *illud*. Non requiritur autem; quòd hoc contrahens, & illud ſit aliquid diuerſum à conceptu meo mentali; niſi per accidens. Ratio eſt: Quia intellectus multiplicat conceptus ſuos non ratione diuiſionis: Sed ratione diſtinctionis. Cùmque diuiſio à parte rei nullam differentiam dicat: Hinc eſt, quòd per ipſam conceptus ſuos multiplicare non poſſit, & in plura ſecernere, niſi oſtenſione huius, vel illius; vel (ſi adſit) mediante aliqua differentia extrinſeca.

Dices con. 2. Mathematica, vtpote ſcientia, præſcindit à rebus materialibus: Sed numerus eſt obiectum mathematicæ. Ergo ab indiuiduis, in quibus ineſt poteſt præſcindi.

Reſp. Præſcindi quidem numerum ab hoc, & alio indiuiduo, ſed non per ſe ipſum, at mediante vnitate, quam eſſentialiter dicit, & ex quâ methaphiſicè componitur. Ideoque, cùm numerus ſit idem, ac vnitates, & vnitas præciſa reperiatur, etiam numerus præſcindi poterit. Inquies. Ratio præciſa importat immultiplicationem, vt dictum eſt: Ergo, neque ratione vnitatis præſcindi poterit.

Reſpond. Poſſe naturam abſtractam in indiuidua abſtracta multiplicari: Vt quando concipiuntur plura animalia; certum eſt, quòd non concipitur hoc, ſeu illud animal. Sed concipitur animal abſtractum ab hoc indiuiduo, & animal abſtractum ab alio. Nam ſicut ratio animalis à pluribus abſtrahi poteſt, ita etiam ab vno tantũ. Conſideratur ergo animal quodlibet tanquam ab vno præciſum, & cum indiuiduatione abſtracta. Quare ſi ſpecies, & genus abſtractè, concipitur multiplicatum, tantò magis ipſa Vnitas.

COROLLARIVM.

HInc poteſt agnoſci rationem communem indiuiduationis eſſe vniuocam. Ratio eſt, quia tunc tollitur vniuocatio; quando in ipſa ratione vniuocâ ſeſe ingerit aliqua diſſimilitudo; ita vt ex parte quidem ſit ſimilis, ex parte diſſimilis. Verùm ratio, per quam dicuntur vnitates, ſimiles, nullam aduehit diſſimilitudinem, quare relinquit vniuocationem.

EXPENSIO VI.

An poſſit dari numerus infinitus.

AD complementum tract. antecedentis hæc Expenſio neceſſaria eſt; nam ſuppoſito, numerum infinitum dari non poſſe: Nec ipſa quantitas continua infinitis punctis; vtpote numerabilibus conſtare poteſt: At ſi numerus infinitus non repugnat, ibi ſtatuta ex parte debilitantur.

CONCL. I. PROPOS. XVI.

Non poteſt dari infinitum actu in multitudine.

PRob. Multitudo infinita, vt perſpicuum eſt, numeris aliquibus finitis conſtat. Quare, cùm ſint finiti, omnes ſumi poſſunt. Sumantur. Eritque ea, quæ ſuperaddetur, vnitas extra omnem finitatem: Ergo infinita per additionem huius vnitatis ea multitudo efficietur. Rurſuſque infinita non erit: quia per additionem vnius, numerus finitus, infinitus non euadit, cùm finitum additum finito nõ faciat infinitum.

Neque dicas. Hoc argumentum contra Dei æternitatem militare: hoc enim falſum eſt, quia æternitas numerabilis non eſt; cùm ſit tota ſimul; nec fluat per partes.

2 Vel in infinito numero adſunt partiales numeri, vel non. Si nõn; Ergo quantitas diſcreta ſummam vnitatem poſſidet; cùm numeros partiales non amplectatur. Et ſic infinitus numerus vnitas eſt. Si verò numeros partiales poſſidet. Illi, vel infiniti ſunt, vel finiti. Si infiniti: Ergo totum partibus infinitis conſtat, cùmque non detur infinitum maius alio, pars erit æqualis toti. Neque dicas, hoc non verificari in infinito, vt aiunt Conimbricentes l. 1. phyſ. cap. 8. q. 2. ar. 4. & in eo totum ſuæ parti eſſe æquale. Nam hæc proprietas eſt eſſentialis conceptui totius, & partis; nec ſine illa concipi poteſt. Quare ſi conceduntur partes in infinito: Fatendum quoque eſt partem in eo totum adhæquare non poſſe.

Neque dicas poſſe admitti infinita numerorum inæqualia, & maius aliquo infinito concipi poſſe. Nam ſi hoc concedatur, etiam multa infinita poterunt reperiri æqualia. Sed numerus infinitus vnicus ſolum eſſe poteſt, cùm omnia per eamdem ſeriem numerorum naturalium augeantur. Ergo cùm multa non dentur infinita æqualia, neque inæqualia admitti poterunt. Quod verò vnicus numerus tantùm ſit, patet: quia non loquimur de numero rebus applicato. Sed ſecundùm ſe, & abſtractè; qui vnicus eſt, & immultiplicabilis, ſic enim neque plura 4, neque plura 5, dantur; Sed tantùm ex ſingulis numeris vnum. Sed iam ad ſecundam partem Dillẽmatis tranſeamus. Et ſi admittuntur partes huius infiniti omnes finitæ. Ergo totum infinitum, finitum erit: Cum quidquid in eo partium reperiatur finitum ſit, & totum maius ſuis partibus ſimul ſumptis non ſit.

3. Quia Aduerſarij contendunt, quemlibet numerum in infinito eſſe innumerabilem, etiam ſi ſit veluti pars ipſius infiniti. Quæro: an diuidendo in infinitum ſemper reperiam, quidquid diuiſum ſit, infinitum, vel non. Si numerum finitum

finitum nullum inuenio. Ergo infinitus numerus numeris non conſtat, cùm in numeris, duo, tria, quatuor eſſentialiter reperiantur; qui certè numeri infiniti non ſunt: Si inuenio aliquos finitos, V. g. duo; Ergo infinitum, finitis numeris conſtat, & per medium diuidi poteſt; Vnde & duo numerorum infinita darentur vnum maius alio.

* 4 Secetur numerus infinitus proportionaliter; ita vt minus extremum ſit ad maius, vt maius ad totum, & de minori, & minori extremo id fiat in infinitum. Certè illud extremum ſemper hac diuiſione minus fiet, & in infinitũ procedẽdo fiet minus omni quantitate propoſitâ. Sit ergo propoſita quantitas 4, Vel ergo hac continua diuiſione manet ſemper infinitum, & ſic dabitur aliquis numerus infinitus minor, quam 4, vel ſit tandem finitus; cùm ergo ita ſit iſte numerus finitus vltimo repertus ad maius extremum, vt maius extremum eſt ad totum; & ſic conſecutiuè, erit etiam maius extremum finitum; cùm finiti ad infinitum nulla ſit proportio. Quare & totum erit finitum, non infinitum, vt à principio ſupponebatur.

Neque dicas contra hoc, & antecedens argumentum: Dualitates in numero infinito eſſe infinitas, ſicut & triadas, & quatriadas, &c. Reſp. enim idẽ ſequi incõueniẽs, quod in 3. Argum. Nã omninò vnitates plures erunt dualitatibus, & dualitates minùs erunt numero quaternarijs. Quod ſi ſic. Ergo adhuc vnum infinitum eſt maius alio, & aliud includit. Quod ſi non. Iam inter numẽos infinitos non datur proportio, quæ conſiſtit. Quòd vna quantitas plures partes de alia conſequatur; quam quòd ipſa contineat, vel pauciores, vel æquales. Si verò quantitates infinitæ proportionem excludunt; iam & quantitatis eſſentiam exuunt; quę inter prędicata eſſentialia proportionem enumerat.

5 Vel proceſſus finitorum numerorum per finitos numeros, vſque dum peruenias ad infinitum, repugnat, vel non. Si repugnat, cur in infinitis deinde admittitur. Siquidem ternarij in infinito, licet infiniti, poterunt addi infinitis quaternarijs, & hi quinarijs, & ſic in infinitum. Vnde infinitus eſſet numerus in infinitum numerorum, qui facerent infinitum numerum, licet naturali ſerie per 1, 2, 3, 4, &c. progredientes, & ſe augentes. Quod ſi non repugnat. Ergo repugnabit infinitus numerus; cùm admiſſo perpetuò finito, infinitus numerus excludatur.

* 6 Si datur infinitum maius alio, vt videtur concedendum. Admiſſo numero infinito quęro, An infinitum minus includat omnem numerum poſſibilem. Si includit omnem numerum poſſibilem includit etiam maius ſe. V. g. infinitum quaternariorum concludet infinitum decimarũ. Si non amplectitur omnem numerum poſſibilẽ. Ergo non totam ſeriem naturalem numerorum includit. Sed ſeries naturalis numerorum non tota finita eſt. Ergo etiam illud, quod dicitur infinitum; finitum.

* 7 Dantur numeri quadrati, qui naſcuntur ex multiplicatione ſui in ſeipſis, vt 3, multiplicatus per 3, facit 9. Dantur quoque ſimplices numeri non quadrati; qui omnes quadratorum ſunt radices, cùm in ſeipſis multiplicari poſſint. Et idem dicas de numeris cubicis: nempe geminâ vice in ſe multiplicatis, qui, & pro radicibus habent ipſos numeros, qui quadratorum ſunt radices. Quare cùm omnes numeri ſint radices, ſuumque quadratum, & cubum obtineant; Tot erunt quadrati, & cubi, quot numeri. Quare ſi ſunt infiniti, etiam quadrati, cubique erunt infiniti. Sed inter quadratum, & radicem; inter cubum, & radicem multi neceſſariò ſunt numeri intermedij, vt inter 3, & 9, ſunt 4, 5, & 6, &c. Et quo maiora quadrata, maioreſque cubi, eo plures ſunt numeri intermedij. Ergo datis numeris infinitis erunt plures radices; quam quadrata, & cubi. Sed ſupra oſtenſum eſt eſſe tot, quot numeri. Ergo æquales, & inæquales; quod repugnat.

* 8 Quantò magis procedimus in numeris, eo pauciores numero inueniuntur quadrati numeri, multòque pauciores cubi, & tantò ampliùs pauciores ſuper ſolidi Sed numerus infinitus debet conſequi tot cubos, tot quadrata, tot ſuperſolida, quàm numeri; Ergo quo magis progredimur in numero, eo magis elongamur ab infinito quadratorum, & cuborum, vel ſuperſolidorum: Quia rariores eos inuenimus. Sed non poſſumus diſcedere ab infinito quadratorum, & cuborum; quin diſcedamus ab infinito radicum, qui numeri ſimplices ſunt; Ergo multiplicando numeros ab infinito diſcedimus.

* 9 Si numerus infinitus totalis infinitos numeros partiales claudit; multiplicetur infinitum partiale per infinitum totale. Vtique producetur numerus planus maior ipſo totali; Ergo ipſe non erat totalis; cùm maior illo detur. Sed rurſus erit totalis, vt præſuponitur, cùm omnem numerum poſſibilem includat. Ergo totalis, & non totalis.

Quod ſi dicas. Hanc multiplicationem adhiberi neutiquam poſſe: Ergo illud, quod dicitur infinitum, numerus non eſt; cum multiplicationem excludat, qui numero eſſentialis proprietas eſt. At ſi numerus totalis immultiplicabilis eſt; numeri partiales fortè non erunt. Multiplicentur ergo inuicem duæ medietates, vel proximè numeri totalis, & producetur quadratum quadrûplo maius, quam duę medietates: Quare totius infiniti totalis, duplo maiùs infinitum erit productum, vt priùs.

EXPENSIO VII.

An numerus eſſentiam conſequatur.

FRuſtra Arithmeticus numeros ſpecularetur, ſi nullam eſſentiam poſſiderent. Neque enim, vt volunt Philoſophi veriſſimo decreto, entia per accidens ſcientijs, quæ ſunt æternæ veritatis ſufficiens fundamentum præbere poſſunt; Sed ſolùm eſſentiæ rerum; quæ immutabiles ſunt, & æternæ. Videtur autem numerus nulla eſſentia frui, cùm ſit vnum per accidens, vt lapidum aceruus, vel vt multitudo. Verum ſit.

CONCLVS. I. PROPOS. XVII.

Numerus eſſentiam non poſſidet vt numerus eſt.

PRobatur. Numerus, vt numerus, eſt quædam multitudo; ſed multitudo eſſentiam non obtinet, cùm ſit ens per accidens; Ergo neque numerus eſſentiâ potitur.

2 Multitudo, & numerus excludunt, vt talia, vnitatem: Ergo quid eſſentiale non ſunt: Patet.

Omne essentiale ens est. Omne ens est vnum; cùm vnum & ens conuertantur. Ergo, quòd non sit neque vnum, neque ens numerus essentia non gaudebit.

2 Numerus; seu sumitur in ordine ad intellectum, & sunt plures eius operationes ad placitum factæ, vel in ordine ad res numeratas, & est multitudo ad placitum coadunata: Sed entia ad placitum nullam essentiam adipiscuntur. Ergo numerus essentiâ deficit.

CONCL. II. PROPOS. XVIII.

Numerus, prout dicit partes quantitatis numeratas, essentiam possidet.

PRobat. Quantitas illa prout suis partibus integrata essentia potitur: Ergo etiam numerus, vt eam exprimens suâ gaudet essentiâ. V.g. si 4, assumatur tanquam quatuor partes alicuius planitiei, necessariò multiplicatæ in se producent cubum; Quia cubus, qui superficies suas in quatuor partes diuisas habeat necessariò amplectetur 16, cubos partiales, quorum quilibet superficiem vnam habet vni ex illis 4, æqualem, & sic dicas de alijs,

CONCL. III. PROPOS. XIX.

Numerus quoque possidet essentiam in ordine ad opera nostri intellectus.

PRobatur. Opera nostri intellectus essentialiter connexa sunt, & in arguendo dependentia. Nam priùs oportet cognoscere; deinde iudicare, tandem dicurrere. Sic quod acceptum est, vt priùs: semper acceptum erit, & stante eâ acceptione, posterius esse non poterit quòd ordinatum; ordinatum; Quod simile; simile, &c. Quare intellectus, si accipit duos numeros dicentes relationem æqualitatis; vel proportionis ad alios, necessariò illi numeri tales erunt; quia scilicet intellectus accepit numerum talis respectus participem, & discurres de alijs.

Dices. Euclides 7. lib. 8. & 9. absque vlla dependentia ab operibus intellectus, vel à quantitate continuâ affectiones numerum demonstrat. Ergo numeri secundum se essentiam; quam demonstremus; passionesque possident.

Resp. Euclidem 7. 8. & 9. lib. affectiones numerorum demonstrare per reductionem ad impossibile quoad primas propositiones, quæ in alijs arguendi fundamenta sternunt. Deinde arguere à ratione continentis, & contenti, mensurantis, & mensurati, quę relationes sunt, & applicationes vnius quantitatis ad aliam nostri intellectus; eo quod V.g. si assumatur numerus; qui sit pars alterius A; quòd etiam erit pars maioris; cuius A pars est. Relationes verò licet præbeant fundamentum euidenter arguendi, non tamen entia eam relationem habentia per eam essentialiter constituuntur; cùm per multos Philosophos relationes nihil sint à parte rei, & solùm per opus nostri intellectus comparantis habeantur: Cùm itaque numerorum demonstrantur passiones, operationum nostri intellectus in accipiendis vnitatibus demonstrantur, quæ taliter acceptæ, alio modo accipi nequeunt, alioquin implicantia in ipsis operationibus sequeretur.

Et licet operationes intellectus, vt simpliciter tales, sint ad placitum, vt 2. prob. Concl. 1. diximus: non tamen, vt relatiuæ, & dependentes inuicem: nam positis quibusdam cognitionibus, ad tali modo operandum deinceps in sequentibus mens impellitur ab ipsâmet speculationum naturâ, vt Logici nouerunt.

TRACTA-

TRACTATVS III.

De Mathematica eiusque Affectionibus.

QVÆDAM de ipsâ Mathematicâ præcognoscenda; antequam limina ipsius tentemus, & pręcipuè quodnam sit eius obiectum; qui modus procedendi, & similia; qui animum doceant, quò modo in mathematicis se debeat gerere; qui primus & inassuetus eas addit. Sic, & in artibus, congruum est; vt qui eas callere velit, instrumenta priùs, & materiam; quæ ei tractanda sunt, noscat, modùm quoque, quo ea tenere, & manibus versare, adiscat; vt deinde in ipsa arte promptiùs se exercere, vt illa potiatur, facultas sit.

EXPENSIO I.

De obiecto Mathematicæ eiusq; abstractione.

PRÆASSVMPTVM.

QVælibet scientia, vt Logicus docet, obiectum materiale, & formale consequitur. Materiale quidem est illud, quod ab illa scientia consideratur; Formale verò est illa ratio sub qua consideratur. Sic Medicus considerat corpus animatum; sed vt sanabile. Sic Physicus considerat corpus naturale; sed vt mutabile. Sic Theologus Deum speculatur; sed vt cognoscibilis lumine reuelato medio discursu. Vnde in medicina corpus animatum erit obiectum materiale, sed eius sanabilitas obiectum formale.

PRÆASSVMPTVM II.

ITem considerandum est; quòd nulla scientia intuetur suum obiectum; vt in singularibus; sed, vt abstractum ab eis. Neque enim Medicus considerat corpus Petri, vt Petri: Sed, vt corpus. Ratio est, quia non vt singulare rationem formalem participat, sed vt vniuersale. Quare sub ea ratione consideratum, debet etiam concipi, non vt singularizatum. At vt inferioribus, particularibusque naturis denudatum; cum Petrus, vt Petrus sanus sit, non sanabile corpus. Et tantò magis, quod omnis scientia rei speculetur essentiam: quæ à particularibus, & indiuiduis præscindit.

CONCL. I. PROPOS. I.

Obiectum Mathematicæ est ens quantum, vt mensurabile.

PRobat. ex Arist. lib. 1. post. cap. 10. *Quare propter noc non malè Geometræ dicunt, & de entibus disserunt, vt entia sunt.*

Prob. Nam, quòd sit ens quantum, patet. Considerat enim trinam dimensionem longitudinem, latitudinem, & profunditatem, quę sunt dimensiones ens quantum constituentes. Considerat quoque quantitatem eorum, quæ corpora non sunt; Ergò eius cognitio latiùs patet, quã corporis, & in ente quanto constituenda est.

2 Agit de Conis, Cylindris, Sphæris. De numeris, de tempore, de luminis intensione, de quantitate motuum, quæ conueniunt tantùm in ratione entis quantitatiui: Ergo ratio, per quam Mathematica ad illa perscrutanda fertur, est entis quanti; Nam enim de illis ageret omnibus; nisi in aliquâ ratione, conuenirent ob quam in illa simul posset intendere.

Dices. Agit de Superficiebus Lineis Angulis; quæ entia quanta non sunt, cùm sint negationes. Item obiectum, cuiuscumque scientiæ debet esse abstractum; vnde etiam obiectum Mathematicæ. Quapropter, eius obiectum erit potiùs quantitas ipsa; quàm ens quantum.

Respondetur ad primum. Superficies, lineas, puncta esse corporis extrema, ab illo, nec quidem mente, separabilia, vt diximus. Vnde agendo de illis, implicitè agit de corpore. Deinde multa in scientijs considerantur; quæ quidem obiectum non sunt. Sed solùm assumuntur, tanquam necessaria ad perfectam cognitionem obiecti. Sic agit medicina de plantis; quòd illa cognitio ad sanabilitatem corporis indagandam; conducat. Sic Theologia de Angelis, Sacramentis, Peccatis. Quæ licet Deus non sint. Ordinantur tamen ad cognitionem Dei sub ea formalitate, sub qua consideratur à Theologo. Vnde licet superficies, lineæ, puncta entis quanti conceptu non fruerentur; eorum tamen cõmensurationes deberet Mathematicus considerare, vt ad corporis quanti cognitionem, pernecessarias.

Ad secundum respond. Obiectum cuiuscunq; scientiæ debere esse quid subsistens, & quod directæ sit positum in prædicamento substantiæ. Quantitas verò non ponitur in prædicamento substantiæ; sed ens.

Prob. quoque secunda pars, quòd in ens quantum tendeat; sed sub ratione mensurabilis. Nam intendit acquirere cognitionem entis quanti. Quanti verò essentia in capacitate partium consistit. Quare ens, vt partibus constans, & in par-

tibus

tibus conueniens ; aut diſconueniens cum alio, debet cognoſci, quæ eſt ratio menſuræ. Deinde tota diſputatio, quæ inter Mathematicos verſatur proportiones corporum rimatur : proportio verò in commenſurabilitate conſiſtit.

Dices agit de lineis, ſuperficiebus, corporibuſque irrationalibus; quæ nullam commenſurabilitatem poſſident.

Reſp. Primo quantitates incommenſurabiles non eſſe omninò tales. Sed ſolùm reſpectiuè ad aliam quantitatem. Vnde de illis ſimpliciter agere poteſt. Deinde agit de ipſis, vt ad cognitionem commenſurabilitatis conducunt : niſi enim ſciret, quęnam lineæ eſſent incommenſurabiles, nec commenſurabiles agnoſceret, aut diſtingueret. Sicuti Phyſicus agit de priuationibus, & negationibus, de vacuo, de ſpatijs immaginarijs; licet entia non ſint naturalia : Quia ad cognitionem corporis naturalis deſeruiunt.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Mathematica, quidquid conſiderat abſtractè conſiderat, & ab ente indiuiduali præſcindit.

PRob. 1. ex Ariſt. l. 2. Methaph. cap. 12. *Materia quædam ſenſibilis, quæ dam intelligibilis : ſenſibilis quidem vt æs, lignum. Intelligibilis verò, quæ in ſenſibus exiſtit, non prout ſenſibilia, vtpote Mathematica.*

Probatur verò ratione. Quoniam ſi hæreret ſenſibus : tunc multa falſa mentiretur; dum lineam alteri æqualem omninò dicit; cùm tamen linea alteri pręcisè æqualis, vel dari nequeat in rebus materialibus, vel dari ſaltem certum non ſit. Sic rectam eſſe ductam, quæ quidem, an poſſit rectiſſimè duci, dubium eſt. Sic circumferentiam circuli perfectam; quæ in circumferentijs materialibus non reperitur. Quod etiam aduertit Ariſt. l. poſt. cap. 10. *Neque*, inquiens, *Geometra falſum ſupponit quemadmodum quidam aſſeruere dicentes; quod non oporteret falſo uti; Geometram verò mentiri dicentem pedalem, non pedalem; aut rectam deſcriptam non rectam exiſtentem. Geometra verò nihil concludit, eoquod hæc eſt linea, quam ipſe loquutus eſt, ſed quæ per hæc oſtenduntur.* Sic Proclus lib. 2. cap. 2. *Qui in ſenſibilibus circulus compoſitus, magnitudine diſtans, ac certa ratione diminutus, ac ineptiarum plenus ab immaterialium puritate longè deficiens. Geometria verò, cùm de circulo quidquam loquitur, atque diametro, & de paſſionibus, & affectionibus, quæ ad circulum ſpectant, non de ſenſibilibus docet, aut differit, ab ipſis quidem ſeparare conatur; & vniuerſale ipſum conſiderat.*

* Prob. 2. Nam oſtendimus puncta impartibilia nequaquam dari poſſe, à materia ſeiuncta parteſque in infinitum diuiſibiles eſſe prout conſideratur à Mathematicis. Cùm itaque Mathematici præſuponant partes in infinitum diuiſibiles, patet ſumere ens quantum, vt quantum eſt; & ideo, vt ſemper partium capax. Non autem ſumere ens, quod eſt à parte rei : quod diuiſibilitatis infinitæ capax non eſt, aut ſaltem incertum. Sic in circulo ſupponit Mathematicus figuras inſcriptibiles in infinitum Hyperbolem ad Aſymptotum accedere in infinitum, & multa alia, quæ certè de rebus ſenſibilibus non poſſunt verificari, ſed de ipſis, vt abſtractis, & vt tales ſunt.

Dices. Mathematica docet operari in problematibus; Sed operari eſt circa res ſenſibiles, & vt ſunt à parte rei. Mathematica igitur ſaltem in problematibus à materiâ non abſtrahit.

Reſp. Docere quidem operari, ſed adhuc illam operationem, vt à materiâ ſeiunctam, & ei non applicatam conſiderare. Vnde Proclus lib. 2. com. 5. inquit. *Propriè in Mathematicis diſciplinis problema vocatur, quòd ad contemplationem operantem proponitur. Quod namque in his fit, finem, contemplationem habet; & ſæpenumero quidem eorum, quæ fieri non poſſunt, quædam problemata vocant.* Igitur, cum Mathematicus problema proponit, & docet operari, inſtruit, quid operetur, non circa rem materialem, licet, vt plurimùm etiam id, per doctrinam, quam tradit, præſtari queat; ſed circa rem conceptam, & eam operationem, vt verſantem circa res abſtractas conſiderat. Quare & aliquando docet problemata, quæ fieri nequeant, prout res ita ſe habent, non abſolutè, V.g. datum pondus datâ quacumque potentiâ mouere. Quaſi quod eſſemus cuiuſcumque potentiæ vltimis viribus inſtructi, Vel cum docet Altitudines ſtellarũ fixarum, latitudines, lõgitudines mẽſurare, tãquã ſi eſſemus in centro, cùm nec ibi eſſe poſſimus; ſed in ſuperficie. Sic deſcribere Horologia; tamquam ſi planum horizontale ſubeſſet centro mundi, & à centro in illud planum vmbra decideret.

EXPENSIO II.

De Machematica.

DIfficulter poteſt apprehendere, quis quod proponitur : niſi nec nomen eius quod proponitur nouerit. Quare in primis quærendum quid ſit Mathematica.

Mathematicę nomen deriuat à Gręco nomine, quod Latino deprumptũ ſignificat doctrinã : ſeu diſciplinam, eo quia verè doceat; quòd nihil, niſi per oſtenſionem, vt plurimùm, affirmet, & nihil, niſi, aut per ſe euidens, aut probatum ad arguendum pro principijs aſſumat. Aliæ verò ſcientiæ pro maxima ſui parte potiùs probabiles ſunt, quam euidentes, vnde poteſt deffiniri.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Mathematica eſt ſcientia oſtenſiua, cuius obiectum eſt omne illud, quòd menſurari poteſt.

HÆc Concluſio probatur ipſo experimento quoad primam partem, cum omnes eius propoſitiones oſtenſiuæ ſint.

Dices. Sunt aliqui tractatus, vt Optica, Aſtrologia, Sphęra, & multæ aliæ partes, quæ rationibus probabilibus innituntur. Reſp. id quidem eſſe verum ſaltem penes aliquas concluſiones, & tunc non appellatur ſimpliciter Mathematica; ſed Phiſiomathematica; quòd ſic exigente obiecto partim Mathematica ſit, quoad menſurationem, partim verò Phyſica, quò ad eas concluſiones, quæ menſurationi deſeruiant, V.g. Sphęra, quòd probet fluiditatem Cœlorum erit Phyſica; quatenus verò ex fluiditate motus Planetarũ hypoteſes, & commenſurationes colligit, & ea doctrinâ ſuppoſitâ oſtendit, erit Mathematica.

CONCLVS. II. PROPOS. IV.

Mathematica in tres partes diuidi poteſt in Mathematicam, Vniuerſalem, Coſmicam, & Microcoſmicam.

PRobatur. Quia eius obiectum in tres has ſpecies faceſſit. Nam aut eſt vniuerſaliſſimum, & à quocumque obiecto ſpeciali præſcindit. Et hoc à Mathematica vniuerſali conſideratur; Aut eſt ſpeciale, & hoc diuiditur in duas ampliſſimas partes, nempe *mundum, & hominem*: Quæ conſiderat mundum eiuſque proportiones dicitur *Coſmica*; quæ hominem *Microcoſmica* appellari poteſt.

Prima eſt duplex, nam alia eſt; quæ agit de quantitate *Diſcreta*, alia de *Continua*. Secunda quoque duplex eſt, alia agit de Cœlo, altera agit de Terra, terreniſque omnibus, quæ menſuris ſubſunt. Tertia quoque duplex eſt. Alia enim pertinet ad naturam hominis; vt viſus circa quẽ verſatur Optica. Alia ſpectat ad artem, vt Mechanica, & huiuſmodi.

Hoc autem libro tradimus Mathematicam Vniuerſalem, quæ de omni quantitate in communi peragit, & omnibus alijs Mathematicis partibus aditum aperit. Omnes verò Mathematicæ partes poſſunt tendere in ſuum obiectum promiſcuè. Modo illud ſpeculando, vt quantitas diſcreta eſt, modo, vt quantitas continua. Quia ſcilicet, & quantitas, vt ſic ſumpta, & mundus, & homo, in ſe quantitates diſcretas, & continuas amplectuntur, in quas poteſt tendere intellectus; vnde promiſcuè ſecundùm quod res exigit, & dependentia obiectorum repoſcit, modo fit Geometria, modo Arithmetica : Vnde & harum ſcientiarum naturam exponere oportet.

CONCL. III. PROPOS. V.

Geometria eſt ſcientia oſtenſiua, quæ de quantitate continuâ pertractat : Arithmetica verò eſt ſcientia pariter oſtenſiua, quæ quantitatem diſcretam intuetur, & ambæ iſtas quantitates, vt menſurabiles conſiderant.

PAtet per ſemet concluſio; ſi nomen Arithmeticæ, & Geometricæ ſecundùm ſuam latam ſignificationem accipiantur. Verùm non ſemper ita eſt. Geometria enim vt plurimùm ſignificat eam partem Mathematicæ, quæ agit dę planis nomine vniuerſali ſibi ſpecialiter applicato, quæ propriè Panthometria dicitur. Arithmetica quoque ſtrictiùs accepta illa eſt, quę dat regulas ſupputandi nullis adhibitis demonſtrationibus. Mathematica, itaque vniuerſalis, de qua hoc Libro agimus partim per occaſionem Geometriâ, partim Arithmeticâ conſtans, in duas quoque partes ſecernitur intuitu modi procedendi : Nam alia eſt Elementaris; alia verò nequaquam, & licet eadem tractentur, tum in Elementari, tum in altera parte, & circa eadem obiecta ſpeculatio verſetur. In Elementis tamen ſolùm traditur quædam fundamentalis, & prima doctrina, & velut primi aditus ad profundiores ſpeculationes aperiuntur, in alijs verò non elemẽtaribus circa eadem obiecta profundiora quidem cognoſcuntur, ſed quæ elementares cognitiones nequaquam dici poſſint, quoniam limen non aperiant, vt Elementa efficiunt, alijs ſpeculationibus.

EXPENSIO III.

De titulis Mathematicis.

COngruum eſt librorum, & partium, quæ in ipſis reperiuntur titulos quandoque exponere, vt magis, quæ ipsâ continentur oratione, & euidentiùs innoteſcant : Ideoque cum Mathematica ſuis præfigat propoſitionibus titulos; qui non explicati poſſent, & ipſius rei, de quâ agitur, obnubilare euidentiam : hinc eſt, quod eos declarandi prouinciam ſumpſerim.

QVID SINT ELEMENTA.

DE Elementis inquit Proclus. *Totius Geometriæ ſunt quædam theoremata principalia, & ad ea, quæ ſequuntur, principij rationem habentia, quæ Elementa appellantur. Elementaria verò ſunt, quæcumque extenſam in multitudinem cognitionem non habent.* Et deinde. *Non omne Elementum vocabitur. Verùm ea, quæ principaliſſimà ſunt eorum, quæ in rei effectæ ratione ſunt conſtituta.*

Itaque Elementa ſunt quædam Theoremata, vel etiam problemata; quæ in re, de quâ agitur vniuerſaliſſima ſunt, & plurimarum propoſitionum fons, & origo. Quas viſum eſt Mathematicis, ſeorſim ab alijs propoſitionibus à ſe dependentibus ſegregare; vtpote illæ, quæ non ſolùm propoſitionibus de eâdem materiâ agentibus deſeruiant; ſed multis alijs poſſint aditus aperire. Vnde vt magis eſſent, ad manus, & familiariùs adiſcerentur in vnam ſeriem coordinata fuerũt : Maximè quia, nec cognitio quidem omnigena; quæ extra Elementis erat; licet eamdem materiam, quæ in Elementis verſata eſt, ſpecularetur ſæpenumerò poterat perfici : ſine Elementis ad illam materiam ſpectantibus : Vnde, ne dum fuit vtile; ſed etiam neceſſarium, Elemẽtares cognitiones ab extraelemẽtaribus ſeiungere : vt ipſis ſingulis omnia Elementa, vt res poſtulabat, poſſent inſeruire.

QVID SINT PRINCIPIA.

QVoniam, vt ait Ariſt., omnis cognitio fit ex præexiſtenti cognitione. Etiam Mathematica quædam habet principia adeo clara, vt prorsùs negari nequeant; niſi ſtultè, & imprudenter. Talia ſunt. *Omne totum eſt maius ſua parte.* In quibus ab alijs omnibus ſcientijs differt. Nam principia aliarum ſcientiarum multa, aut negari poſſunt, aut explicari, cùm vera ſemper non ſint principia; ſed quædam potiùs perſuaſiones mente firmiter radicatas; quàm euidentiæ. Mathematica verò, quæ principia ponit, aut omninò innegabilia ſunt, aut talia, quæ, ſi negantur, protinùs per reductionem ad impoſſibilę oſtendat.

DE DEFINITIONIBVS.

Definitiones apud Mathematicos verè naturam rei non explicant ex eorum intentione; cùm essentiam rei explicare; sed tantùm nomen exponere sit apud ipsos in definitionibus constitutum, vt sentit Clauius in prolog., & Galilæus in dialog. contra Betinum. Id verò patet; quia si naturam rei explicarent; oporteret, quòd eam definitionem ostènderent quidditatiuam esse, & naturam rei exponere; quod nequaquam efficiunt. In concessis tamen est; quòd etiam aliquandò naturam rei exponant. Sed id non curat Mathematicus; siquidem, si curaret; maximè in id incumberet; vt talem esse rei naturam; qualem definitio describit, comprobaret.

DE POSTVLATIS.

Postulata sunt quædam; quæ faciliter conceduntur, vt fiant, & quasi axiomata sunt; sed hæc solùm speculatiua; illa verò operatiua. V.g. vt liceat *lineam ducere*. Vt liceat, *lineæ adiungere*. *Vt* liceat. *Quacumque distantia circulm ducere*. Verùm non omnia; quæ clara sunt, & concedibilia postulantur. Cùm etiam. *Producere lineam æqualem alteri*, aut. *Quacumque distantia lineam producere*. potuisset postulari ab Euclide: quod tamen non fecit: Sed ea sine quibus permissis nulla posset inchoari Mathematica operatio, Cùm debeamus posse aliquid efficere, sine probatione, vt opus primâ eâ operatione effectum ostendatur euidenter se bene habere.

QVID SIT THEOREMA.

Theorema est pura speculatio alicuius passionis quantitatiuæ euidens. quæ nullo modo aliter esse potest, vocaturque Theorema; quia in purâ speculatione sistit, & nihil efficit.

QVID SIT PROBLEMA.

Problema vocatur sic. Quod fit circa operationem, quæ, aut alio modo exequi posset, aut circa illam materiam aliud effici: vt si quando demonstrat. *Triangulum æquilaterum super rectam constituere*, hoc opus, aut alio modo executioni mandari, aut aliquod aliud triangulum super illam rectam constitui posset, & ideo *Problema* vocatur ad similitudinem Problematis dialectici; quod sicut in vtramque contradictoriam affirmari potest; sic & Problema Mathematicum, & hoc modo, & alio effici, & circa eamdem materiam aliud in opus demandari. Vnde illud, quod alio modo effici nequit; nec de eadem materia aliud fabricari, non vt Problema; sed vt Theorema proponendum est. Sic si quis proponeret in semicirculo angulum rectum efficere: Omninò errorem acciperet; cùm omnis angulus in semicirculo rectus sit: vnde cum alio modo effici nequeat; nec alius angulus in semicirculo constitui possit: Non erit hoc, vt *Problema*; proponendum; sed vt Theorema. At, inquies, sunt quædam, quæ ad modum problematis, & Theorematis proponi possunt. Id enim verum est, & licet aliquod Theorema possit etiam subire rationem problematis; non tamen vice versâ. Vnde attentiùs considerandum est; an ea, quæ problematis speciem ferunt. Verè illius naturam assequantur. Antiquorum verò sententiam Pappus refert de Theoremate, & Problemate. *Dixerunt*, inquiens, *Theorema esse; quod proponitur in ipsius propositi demonstrationem. Problema, quod effertur in constructionem propositi*; idest propositionis.

QVID SIT PORISMA.

Porismatis nomen etiam apud antiquos fuit controuersum, & videtur Pappus triplicem efferre Porismatis significationem. Primam explicat, quam antiquioribus tribuit; dum ait. *Horum autem species omnes neque Problematum, neque Theorematum: sed mediam quandam inter hæc formam, & naturam habent; quo factum est, vt ex multis Geometris alij quidem ex genere esse Problemata, alij verò Theoremata opinati sint.*

Secūdā verò iuniorū affert, inquiēs, *Immutata est autem hæc Porismatis definitio apud iuniores, & deffinierunt; Porisma est, quòd hypothesi deficit à locali Theoremate*. Idest, quod nullam consequitur hypothesim, seu suppositionem: Pro quò sciendum, quò Theorema triplici modo potest considerari. Primò quoad modum procedendi in probatione. Secundò quoad ea, quę antecedunt demonstrationem. Tertiò quoad ea, quæ in demonstratione ostenduntur.

Modus procedendi quadruplus est; nam aut diuersas partes enumerat, aut plures casus, aut diuersos progressus probando priùs multa alia, antequam ad vltimam conclusionem deueniat, aut simplex est, nullaque vel partium, vel progressuum, vel casuum multiplicitate discriminatur. Porisma itaque videtur appellatum Theorema multiplex ex aliquorum sententia, aut partibus, aut casibus, aut progressibus. Quare, inquit Pappus. *Porisma à multis sic intelligitur, vt artifitiosa collectio sit ad Analysim grauiorum, seu difficiliorum problematum, & generum incomprehensibilem multitudinē præbente ipsorum natura*. Si verò Theorema consideretur quoad antecentia; in triplici quoque differentia versantur. Alia præsuponunt aliquid in gratiam aduersariorum. Alia præsupponunt aliquid factum; quod non est operi demandatum, vt Archimedes præsuponit. V.g. Spheram esse proportionaliter sectam per talem superficiem, & probat deinde, id verè taliter se habere. Alia iubent ad demonstrationem efficiendam, talem, aut tali modo operationem faciendam. V.g. talem lineam ducere. Tandem si consideretur Theorema, quo ad ea, quæ in demonstratione ostenduntur duplex est; nempe locale, & non locale. Locale est illud, quod ostendit locum. V.g. lineas esse parallelas. Extremum alicuius lineæ esse in circumferentia. Tale punctum esse in medio circuli; quæ propriè circa quantitatem non sunt; nisi reductiuè, quatenùs locus est proprietas rei quantitatiuæ; & deseruit ad illius cognitionem.

Dicit itaque Pappus. Quòd secundum Iuniores Porisma non est Theorema locale, eo quia præsuponat Hypothesim, seu aliquam suppositionem, quam deinde non explicat, cuius sit illa suppositio, seu quænam? Insuper illud verbum *deficit* ambiguum est; nescimus enim: An deficiat ipsa hypothesis ad hoc, vt sit theorema locale: An ipsum Theorema deficiat à locali, idest localis naturā nō assequatur, eo quod Hypothesim obtineat.

Verùm Proclus in Euclidem lib. 3. sic Porisma definit. *Porisma etiam de quibusdam problematibus dicitur qualia sunt ab Euclide conscripta porismata. Propriè verò talia dicuntur; quando ex demonstratis aliud aliquod Theorema nobis non proponentibus emergit, & offertur: Quod propterea Porisma appellarunt; quasi lucrum ex scientifica demonstratione obiter, & præter expectationem factum.*

Itaque habemus clarum duplicem sensum, penes quem Porisma accipi queat. Primum ex Pappo iuxta antiquos. s. quod sit quid medium inter Problema, & Theorema, quòd & possit, vt Theorema, & vt Problema proponi. Secundum ex Proclo. Quod sit veluti quoddam Corollarium ex demonstratione collectum, & breuiter ex dictis ostensum. Obtinemus quoque alias duas ex Pappo Porismatis acceptiones; sed obscuras, & ancipites: Nempe, quod sit aliquid simile Theoremati locali. Vel quod sit Theorema, vel Problema quoddam multiplex.

QVID SIT ZETEMA.

Zetema est titulus; quem Algebrici suis operationibus præfigunt: cùm enim ea, quæ Algebra docet non demonstrentur; sed in ipsa operatione nota, & euidentia auadant; propter hoc, nec Problema, nec Theorema appellare potuerunt: vnde quam medio nomine Zetema appellauerunt.

QVID SIT LEMMA.

Lemmata sunt propositiones minus principales, & quæ obiectum, de quo agimus, non respiciunt. Sed tamen ad demonstrationes alterius propositionis omninò necessarię sunt. Lemma itaque est demonstratio, seu constructio, quæ necessariò ad demonstrandam aliam propositionem principalem, & ad rem spectantem præter institutum assumitur.

QVID SIT PROPOSITIO.

Propositio est nomen quoddam genericum; quod tùm Porismati, tùm Problemati, tùm Theorematì conuenit, & nihil aliud significat; nisi quòd proponitur aliquid ostendendum.

QVID SIT ANALYSIS, ET SYNTHESIS.

Analysis nihil aliud est; nisi quædam explicatio rei, quæ proponitur. Synthesis verò accipitur, cùm traditur modus operis, quòd fieri iubetur.

EXPENSIO III.

De Mathematica instructione.

Mathematica institutio, aut potest sumi iuxta subiectum, aut penes modum instruendi.

Si penes modum instruendi. Modus quidem euidens est. Sed Syllogismis non procedit, at Enthimematum continuata serie, quæ breuiùs probant. Ratio huius rei est: Quia, cùm sæpè repetant easdem literas, si tres propositiones efficerent, vt requirit Syllogismus, pronam in mentem audientium confusionem inducerent. Vnde Entymematibus vtūtur, quę cōclusionē immediatam habent, & quæ probata Syllogismi demonstratiui efficatiam consequuntur.

2 Quod incipiat à primis principijs, & paulatim deueniat ad conclusiones. Vnde contrario modo, ac Philosophia facit, siquidem hæc conclusionem immediatè à præmissis deducit immediatioribus, & deinde assumptas præmissas probat euidentioribus alijs, donec ad prima principia deuentum sit. At Mathesis à primis principijs incipit, & paulatim per diuersa Enthimemata, diuersasque conclusiones, ad illam vltimam, quam proposuit, tandem accedit, & in illa conquiescit.

3 Mathematici nunquam anticipant, neque vt probata accipiunt, quæ probanda postmodum sunt. Vnde Proclus ad 11. Eucl. propos. ait. *Demonstrationem autem, quæ per semicirculum fit; nec commemorare dignum est: Multa enim præsuponit eorum, quæ posteriùs ostendenda sunt, ab Elementarisque institutionis ordine omninò recedit*. Et propos. 23. reijciendo operationem, quâ fiunt anguli æquales ex peripherijs interceptis æqualibus inquit. *Huiusmodi itaque ostensionem, tanquam posterioribus vtentem, ab elementari institutione alienam esse censemus.*

Aliquando tamen ipse Proclus anticipauit ostendendo ad propos. 24. Eucl. quæ sequentibus indigebant ad sui ostensionem, in hoc verò se gessit tanquam interpres, & non vt absolutè pareret euidentiam; sed potiùs, vt indigitaret fallacias, quæ in ea propositione potuissent accipi. Sic Clauius contra Pelletarium anticipat, & Commandinus, vel qui addiderunt propos. extremas lib. 5. Eucl. supponunt enim propos. 12. lib. 6. Nam verè non potest dici demonstratio, nec intelligi quidem, quæ præsuponit non ostensa, sed potiùs credulitas, & obscuritas: cùm addiscētem opporteat credere ea esse demonstrata; vt hæc, quæ ab illis dependent, sibi persuadeat, & capere nequeat illa, quorum, nec quidem figuram aspexit. Vnde valde illi culpandi sunt; qui Euclidis Elementa perperam augentes, ea introducunt, quæ multa cognitione aliarum propositionum indigent, non dum haustam, vt suam euidentiam nanciscantur.

4 Peregrina fugiunt, & quæ ab instituto recedunt. Sic Procl. lib. 2. cap. 10. enumerat conditiones, quæ ad institutionem Mathematicam necessariæ sunt; & ea inter primas est: *quod sicut necessaria non omittat; sic superflua non interserat; perspicuitatem, & breuitatem seruet*. Et ratio est. Quod impertinens sit, scientiam extra suum obiectum vagari, & alia obiecta contemplari, quæ ad ipsam non spectant. Cùmque partes Mathematicæ sint scientiæ maximè subordinatæ; quarū vna ab alia aliquo semper subalternationis vinculo dependeat; omnes commiscere, est omnes confundere, nihilque certi tradere; dum omnia sine necessariâ dependentiâ traduntur. Vnde in iura Mathematica maximè illi peccant, qui, vt ex vngue adiscamus Leonem, dum vnam propositionem probant, alias, quæ illius loci non sunt, praxes, propositionesque ex alijs non cognitis ostensas, aut tantummodò assertas adferunt, & sic mentes discentium tenebris, offundunt, & in ambages vrgent.

5 Eandem probationem multoties repetunt; dummodo propositioni deseruiat, quam demonstrare satagunt: Sic eandem demonstrationem

9. & 11. propos. primi Euclides replicat, vt passim vbique videre est.

6 Licet nitantur, quæ proponunt, ostendere Mathematici, aliqua tamen sunt; quę nonnisi probabili ratione attingunt: Vnde Mathesis secundum omnes suas partes euidens non est: Nam in multis suis partibus ob defectum principiorum, ab instituto deficit, & probabilitate conquiescit: Sic Astrologia, Optica, Sphera quoque, & Theorica Planetarum, & multi alij tractatus ex parte quidē euidentes sunt, ex parte verò probabiles euadunt, vnde & Phisiomathematici dicuntur. Omnes autem praxes Mathematicę probabiles sunt. Quis enim credat se diuisisse perfectissimè lineam bifariam? Circulum perfectissimum duxisse? & circinum, aut crure se girante, aut pede immoto parumper non diuaricasse, & sic de alijs. Qua de re Problemata Mathematica, vt monuimus, abstractæ semper sunt intelligenda, vt euidenter concludant.

EXPENSIO IV.

De illis, qui studijs Mathematicis operam nauant.

SCiant illi frustra terere tempus, & in ventos niti: si postpositis Elementis, & prerequisitis tractatibus, velint posteriores Mathematicas demonstrationes haurire. Duplici enim de causa nunquam intelligent. Primò, quòd ea, quæ in demonstratis apud Mathematicos sunt, obscura per se sint, & quæ ænigmatis formam presefferant, vt putes de tripode Apollinem loqui, & absoleta effari. Imò & aliqua à probabilitate remotissima sunt: nisi demonstratione firmentur ita quòd; nec quidē probabilem assensum eis intellectus præbere possit proprio lumine ad id suadente, quod nō euenit in alijs scientijs. Siquidem, quæ V g. Philosophi assumunt, vt probata, & demonstrata in antecedentibus talia sunt, vt intellectus propriâ vi impellente non abnuat. Vnde si non euidentem, saltem probabilem cognitionem assequuntur.

2 Termini Mathematici obscuri; neque propriè, quid significent, & quo pacto imaginationi representari queant, nescit ille, qui prima non viderit. Sicut enim propositio sine figurâ licet multis explicata, & clarissimis verbis, argumentisque ostensa percipi nequit. Ita multò minus, quæ præcesserunt intellectui, seu imaginationi succurrere queunt, cùm tum demonstratione, tum figurâ destituantur. Quamobrem patientèr procedendum est, & cùm tractatus primus alteri aditum præbeat, per omnes successiuè transeundum. Verum tamen est, quòd non omnes tractatus æquali nexu se vinciunt, aut adeo necessario, vt quis aliquem intermittere non possit, dum ad alios festinet; sed vt plurimùm se necessario astringunt vinculo, aut certè multò faciliùs erit antecedentia legisse, vt singula postrema omninò percipiantur.

Verum est quoque Mathematicā praxibus vti, quæ independenter ab omni demonstratione possint exerceri, sed nunquam intelligi. Et hinc artifex Mathematicus excellens, & peritus euadere potest spretis demonstrationibus; quę ostendendis, non exercendis praxibus inseruiunt.

Ne tamen aliquis, qui vnam, aut alteram Matheseos partem consequi exoptat, non omnem animo amplecti, mole rerum adscendarum obrutus, deficiat, & ab incepto se absterreat, singulis tractatibus indicabimus, quænam necessariò præcognoscenda, quænam tantùm vtiliter, vt facilè prætermitti possint; Et per omnes partes expeditè omnibus superfluis amputatis discurremus, vt quantum in nobis est, omnis facessat difficultas, & planum sternatur iter ad omnia intelligendā.

Si quis verò exquirat. Quęnam ingenia ad studia Mathematica apta sint. Isti responsum erit, Pueros omninò ablegandos, si de demonstrationibus agatur; solùmque ad primas definitiones, & praxes admitti poterunt. Demonstrationes enim Mathematicæ arduæ sunt, & intellectum perspicacem & acutum summoperè requirunt, maximè, cùm agitur de proportionibus. Et si quando quærit Aristoteles. *Quid est, quòd puer fieri Mathematicus potest, sapiens autem, aut naturalis non potest.* Non intelligit simpliciter de puero; Sed de iuuene. Sic enim affirmat 6. mor. cap. 8. *iuuenes licet Geometrici, & Mathematici, & in eiusmodi rebus sapientes euadunt; prudentes autem euadere non videntur.* Quod & potest intelligi circa praxes; sicut & prudens speculatiuè iuuenis fieri; sed non practicè potest; iuuentute, & feruore animi, rerumque inexperientiâ prohibente axiomata prudentię ad opus rectè demandari. Sic licet iuuenes exercitatissimi in rebus Mathematicis sint; non tamen in demonstrationibus exhauriendis. Cùm enim Iuuenum animi instabiles, & ad oblectamenta aclines sint, parùm ad Mathematicam habiles videntur, quæ ingenium patiens, stabile, remotum, & solitarium requirit, & maximè quòd hodie Mathesis in tantam molem excreuerit; vt qui omnia probè nouerit, iam ad canos se peruenisse cum ipsa perfectione doctrinæ experiatur.

EXPENSIO V.

De Principijs.

PRincipia, quæ primo Elementorum libro inseruiunt, ea toti Mathematicæ aditum sternunt, sicut & ipse primus liber ianua ipsius est, & limen, quo posthabito, nullum aliunde in eius demonstrationes sese iter aperiat. Sunt autem in duplici differentia; nam quædam sunt, quæ pertinent ad materiam, de qua agitur, vt definitiones; aliæ, quæ ad discursum, & argumentationem inseruiunt: vt sunt prima principia per se nota, & concessiones.

DEFINITIO I.

P*Vnctum est, cuius pars nulla.*

DEFINITIO II.

L*inea est longitudo latitudinis expers.*

DEFINITIO III.

S*Vperficies est, quæ longitudinem, & latitudinem tantùm habet.*

Dicitur punctum nullam partem habere; quia accipitur, vt vltimus terminus lineæ, & linea, vt vltimus terminus superficiei: Superficies autem, vt vltimus terminus corporis conceptu explicito, & inadęquato. Ideoque à superficie excluduntur partes secundùm eam rationem, in qua concipitur terminus: nempe penes profunditatem, non quidem positiuè, & conceptu affirmatiuo, sed negatiuè præscindendo à partibus secundùm profunditatem, & de illo conceptu loquitur Euclides in superficie definienda excludēdo partes, quoad profunditatem à superficie prout inadæquatè concepta, & prout stat in intellectu. Et eodem modo loquitur de lineâ, latitudinem ab ea excludendo; quia precisè, vt inadęquatè concepta, prout terminus superficiei, partes penes latitudinem excludit. Et quia puncta sunt quoque termini lineę; hinc est, quòd etiam à puncto debuit excludere partes secundùm longitudinem, & quia erat in linea, & pertinebat ad quid ipsius; cùm esset eius vltimus terminus; hinc, etiam debuere ab eo excludi partes penes latitudinem; & quoniam linea, quid erat superficiei, vtpote terminus ipsius; hinc & à linea, & ideo etiam à puncto debuit excludere partes penes profunditatem. Ideoque punctum precisè sumptum, vt terminus lineę debuit excludere partes, & penes longitunem, & latitudinem, & profunditatem. Vnde benè definitum est *cuius pars nulla*; non quidem à parte rei; sed prout substat nostris conceptibus negatiuis explicitis: & inadęquatis; cùm punctum, etiam prout est in intellectu; sed adęquatè conceptum partes obtineat.

DEFINITIO IV.

L*Ineæ autem termini sunt puncta.*

Non quod omnis linea terminos consequatur, cum multæ redeant in semetipsas, vt *Circularis, Eliptica, Orbicularis*. Sed quia omnis linea, quę terminos consequitur puncta vice terminorum recognoscat; & quod omne punctum, vt terminus alicuius lineę concipiēdum sit; cùm se solùm, vt quantitas concipi nequeat ea ratione, quòd nullam sine linea partem obtineat: Ex partibus autem, vt dictum est, quantitas essentialiter constat.

DEFINITIO V.

R*Ecta linea est, quæ ex æquo suis interiacet pūctis.*

Idest, vt exponit Proclus, *quod quanta sit punctorum alterius ab altero distantia, tanta sit rectæ lineæ, quæ ab ipsis terminatur magnitudo; atque hoc est ex æquo inter sua puncta collocari.* Quare linea recta est breuissima, quę de puncto ad punctum duci queat, vt patet in 1. figura. Siquidem punctata est maior, quàm continuata linea, quæ inter A, & C, puncta mediant.

Regulæ verò alicuius, aut cupreę, aut ligneæ; quę deseruit ad ducendas rectas lineas examen est: Si eâ adhibitâ ducatur linea A B ab A in B puncta. Deinde inuertatur, vt regulę superior superficies sit inferior relinquendo extrema ipsius ad eas partes, ad quas erant, dextrum ad dextram, sinistrum ad sinistram, & ducatur alia linea, de puncto A ad punctum B, nam si per primam lineam incedit optima est, si verò non incedit falsa. Ratio est; quia linea recta eadem extrema consequens, spatium non occupat, vt infrà in

DEFINITIO VI.

T*Ermini superficierum sunt lineæ.*

Superficierum, & linearum terminantium exempla Proclus assignat, *vmbras*, quę cùm priuationes sint, & nihil consequenter altitudinis habeant, latitudinem tamen, & longitudinem possideāt lineisque terminantibus circumscribātur. Illud namque, in quo vmbra finit, lux incipit, quod equidem indiuisibile est: nisi, pœnumbra obliteretur, linea est, vmbrosam superficiem terminis definiens.

DEFINITIO VII.

S*Vperficies plana est ea, quæ ex æquo suas interiacet lineas.*

Scilicet, quæ ad instar alicuius speculi, nihil anfractuosum, impollitum, aut montuosum, rugosumue continet. Estque superficies breuissima; quæ de linea ad aliam lineam, duci queat. Et si super eam ducantur rectę, omnes secundùm omnem suam supeficiem; subiectum tangent; Vnde modus experiundi superficiem, est regulam exactissimam illi multimodè, & penes diuersos situs applicare.

DEFINITIO VIII.

P*Lanus angulus est duarum linearum in plano se mutuò tangentium alterius ad alteram inclinatio.*

Angulus planus, qui fitâ lineis rectis hic specialiter definit ab Euclides: Quamuis, & angulos curuilineos comprehendat, qui eodem plano iacent. Licet enim multæ lineę curuę ad sese perpetuo fluxu inclinent, vt circularis, Elliptica, Spiralis, & tamen angulum non constituant. Nihilominus, & ipsę angulum efficient, vel ad aliam curuam, vel ad rectam inclinatę, quę sequellam suę inclinationis, & normam non imitetur, vt vides figura 3. & 4. & 5. At duę circulorum portiones A B, & B C ductę duobus centris E, & D angulum non constituunt, quia licet diuerso centro ducantur, altera tamen alterius ductum suauiter sequitur, & inclinationem emollit. Sicut enim rectę à rectitudine deflectentes angulum constituunt: Sic quoque curuę suam inclinationem, & ductum non continuantes angulum constituent.

Nota verò; quòd in angulo duo possunt considerari, & ipsa linearum inclinatio, & spatium, quod inter lineas rectas ab illâ inclinatione relinquitur. Euclides verò non loquitur de spatio; sed de ipsa inclinatione. Vnde frigidum est illud aliquorum paradoxum; Lineas mutuò inclinatas udos angulos constituere, licet enim duo spatia relinquant, nempe A B E C extimum, & A E C intimum; adhuc tamen vna est inclinatio. Quare & vnus angulus, qui relinquit spatium exteriùs A B C E vtcumque terminandum, & non vnicâ rectâ, & internum A E C, quod ductâ lineâ rectâ à puncto A ad C terminari potest, & hoc spatium est propriè anguli, qui circumferentiâ A C metitur facto centro in E vertice inclinationis: Itaut maior ille angulus dicatur, qui habere potest æqualis circuli interpositam maiorem circumferentiam inter crura A E, & E C; minor verò: qui minorem inter sua crura complectitur Peripheriam.

DEFINITIO IX.

C*Vm autem, quæ angulum constituunt lineæ rectæ, fuerint; rectilineus ille angulus apellatur.*

Patet definitionem octauam de angulis rectilineis præcipuè loqui: quia tantùm hanc rectilineorum ponit definitionem. Sunt autem plures formæ angulorum rectilineorum. & mixtorum, de quibus hic superfluè loqueremur. Tantummodò genericè aduerte. Mixtos eos esse, qui curuâ, & rectâ continentur, vt in figura 4. Curuilineos autem duobus curuis, vt in 5. figura videre est.

DEFINITIO X.

C*Vm autem recta linea super rectam insistens lineam angulos facit deinceps æquales, rectus est vterque æqualium angulorum; & , quæ insistit, recta linea perpendicularis vocatur ei, cui insistit.*

Anguli deinceps sunt illi, qui ab eadem linea vltra contactum productâ, & ab altera inclinatâ fiunt ad idem punctum: Sic apud 6. figuram angulus B A D, & angulus D A C ad idem punctum A effecti, anguli deinceps vocitantur. Si ergo, in ipsa 6. figura, in puncto 6. recta A 6. cadat, & angulum A 6 B, & alterum B 6 A, qui sunt anguli deinceps, æquales fecerit; itaut 6 A non magis inclinet in hanc, aut alteram partem, anguli illi recti dicuntur.

DEFINITIO XI.

O*Btusus angulus est, qui recto maior est.*

DEFINITIO XII.

A*Cutus verò, qui minor est recto.*

Acutus itaque angulus erit E 6 B; quia minor recto est B 6 A At verò C 6 E recto maior erit. Anguli autem apud Mathematicos tribus literis designantur, & media litera semper significat illud punctum, ad quod fit inclinatio, & ipsum angulum denotat.

DEFINITIO XIII.

T*Erminus est alicuius rei extremum.*

Vnde sunt tres termini quantitatis, Punctum, Linea, Superficies; quia eam secundùm tres rationes terminant.

DEFINITIO XIV.

F*Igura est, quæ sub vno, vel pluribus terminis comprehenditur.*

Igitur, nec punctum, nec angulus figura est; quia terminata non sunt suis terminis. Angulus enim licet si clausus duobus terminis; non tamen vndique: Cùm ab ea parte, quâ lineæ patent, licet possit terminari, vel rectâ, vel curuâ, & fieri triangulum; non tamen de sua essentia, & secundùm esse præcisum angulus id consequitur. Punctum verò secundum rationem puncti terminus omnigener est, cum nullam partem amplectatur: Quaderè, nec plures terminos, atque ambitum consequi poterit hinc, & inde claudentem: alioquin in partes distingueretur. Sic nec quantitas infinita; etiam si aliquibus terminis clauderetur; si tamen ab aliquâ parte in infinitum pateret, figuræ appellationem mereretur; quia terminis vndiquè non comprehenderetur.

DEFINITIO XV.

C*Irculus est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ* Peripheria *apellatur; ad quam, ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt, omnes rectæ lineæ terminantes æquales sunt.*

Si in figura 7. omnes rectæ à puncto A in peripheriam terminantes, vt A B, & A C, A E, & A I sint æquales, ille vocatur *Circulus*. Potest etiam hoc pacto definiri. *Circulus est figura plana, quæ describitur à linea finita altero manente extremorum, alio se mouente; donec perueniat, ad idem punctum, à quo discessit motus*. Sic si linea A B manente A moueatur, donec alterum extremum B se mouens perueniat ad punctum idem B, à quo incepit motus, circulum describet. Differunt autem istæ definitiones, quòd hæc causam efficientem explicet, illa formalem. Geminus apud Proclum vocat lineam circularem compositam; nempe refractam, & in sese inclinatam, & angulatam, & Arist. 1. de Cœlo inquit. Circulum infinitis angulis constare, quod intelligendum est, non à parte rei; quasi quod circulus materialis infinitis angulis plicaretur, cùm, nec quidem infinitas partes consequatur: Sed quod ex suo conceptu debeat vna pars concipi inclinata ad aliã. Cùmq; in quantitate partes quidem in infinitum conceptibiles sint; licet non factibiles; hinc est, quòd infiniti anguli in circulo concipiendi sint; nempe quælibet pars, quæ concipiatur, si vt circuli concipiatur, oportet concipi, ad aliam inclinata; interiùs minor, exteriùs maior.

DEFINITIO XVI.

H*Oc verò punctum* Centrum *circuli appellatur.*

Itaque nullum aliud punctum *Centrum*; nisi circuli dici potest, eo quod debeat esse in circuli plani medio. Benè autem *Centrum* circuli dicitur punctum, licet enim nullas concludat partes; omnes tamen lineas, quæ à circumferentia ducuntur terminat. Quod nec lineæ secundùm, id iuxtà quod in punctum feruntur, partes obtineant; nimirum latitudinem, & hoc Methaphysicè, & abstractè, cum fundamento tamen in re, scilicet in ipsa diuisione circuli in sectores, vt est sector I A E, cùm enim diuisiones spatium non occupent in latitudinem, mente conceptæ; nec illud, quod terminat istas diuisiones, partes habebit in latitudinem. Sed neque in longitudinem: cùm lineæ terminus sit. Verùm materialiter, & in ipsa quantitate punctum propriè non est, nec indiuisibile, cùm nulla pars in quantitate ipsa indiuisibilis sit; vt supra dictum est.

DEFINITIO XVII.

D*Iameter autem Circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & suis extremis in peripheriam terminans; quæ circulum bifariã secat.*

Tales sunt in fig. 7. lineæ I C, & E V; Transeunt enim per centrũ A, & in peripheriã finiunt suis extremis I, & C, sicut etiam E, & V; circulumque bifariam secant; quia per punctum medium transeunt, nempe per centrum. Quamobrem, si superficies circuli plicaretur, in punctis,

E V,

E V, congrueret pars circuli E B V parti E D V; cùm A B sit æqualis lineæ A D.

DEFINITIO XVIII.

S*Emicirculus est figura, quæ continetur sub diametro, & sub dimidio peripheriæ.*

Talis est *semicirculus* E D V, qui continetur sub peripheria E D V, & sub diametro E V.

Porrò segmentum circuli erit illud, quod sub peripheriæ portione, & linea, quæ diameter non sit, contineatur. Sunt autem compositæ figuræ, & mixtæ ex curua, & recta linea; angulusque tũ segmenti, tum semicirculi mixtus est, curua, rectaque comprehensus, vt A E D.

DEFINITIO XIX.

R*Ectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.*

Genus explicat Rectilinearum figurarum. Non autem earum, quæ vnica linea contineantur. Quod in istis libris agat quidem de pluribus figuris rectilineis; de solo autem circulo sermonem sit facturus. Quapropter non fuit necessè explicare genus figurarum vnico ambitu comprehensarum. Verùm possent sic definiri *figuræ orbiculares vnica linea clausæ, quæ in sese regreditur.* Figuræ verò plurium laterum; sed curuorum definirentur, *quæ flexis lineis continentur.* Mixtæ autem, *quæ sub curuis, & rectis clauduntur.*

DEFINITIO XX.

T*Rilineæ figuræ sunt, quæ sub tribus lineis continentur.*

DEFINITIO XXI.

Q*Vadrilateræ, quæ sub quatuor.*

DEFINITIO XXII.

M*Vltilateræ, quæ sub pluribus, quam quatuor rectilineis comprehenduntur.*

Quoniam species figurarum rectilinearum desumptæ à multitudine laterum in infinitũ progrediuntur. Ideo omnes alias generali definitione complectitur. Attamen explicauit trilateras, & quadrilateras; quòd de istis hoc primo libro tractet, quæ & omnibus alijs fundamenta præbent, & propriè ad Elementa pertinent; cùm omnis figura rectilinea plana, vt videbimus, in triangula resoluatur.

DEFINITIO XXIII.

T*Rilaterarum autem figurarum, Æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.*

DEFINITIO XXIV.

I*Sosceles autem, quod duo latera æqualia tantummodò tenet.*

DEFINITIO XXV.

S*Calenum autem, quòd tria inæqualia habet latera.*

Nam, cùm triangulum tribus lateribus claudatur; in tres etiam species diuiditur. Si etenim omnia latera sint æqualia, constituitur *Æquilaterum*, vt fig. 8. Si duo tantùm *Isosceles*, vt 10. fig. & 11. Si omnia inæqualia, vt fig. 9. *Scalenum* constituitur.

DEFINITIO XXVI.

A*D hæc etiam trilaterarum figurarum,* rectangulum *quidem triangulum est, quòd rectum angulum habet.*

Vt fig. 10. vel 11. Hæc autem secunda triangulorum diuisio non est subordinata primæ; sed æquâ vniuersalitate patet, nec ei vllo pacto adnexa. Nam vt benè aduertit Proclus ad hanc definitionem possunt pertinere figuræ laterum quatuor, quæ tamen tres angulos solùm obtineant, vt triangula Cilogonia, & Accidoidea cuspidi sagittæ similia, vt fig. 12. quæ tamen tres tantùm angulos obtinent. Deinde triangulum rectum angulum habens potest esse, & Isosceles, & Scalenum, non autem æquilaterum. Vnde patet hanc triangulorum distinctionem à primâ non pendere. Licet magnitudo angulorum à lateribus quasdam insignes obtineat dependentias; vt videbimus.

DEFINITIO XXVII.

A*Mblygonium autem, quod obtusum angulum habet.*

Veluti fig. 12. apud circulum. Quod etiam potest esse Scalenum, & Isoscelum.

DEFINITIO XXVIII.

O*Xigonium autem, quod tres habet acutos angulos.*

Velut fig. 8. Quod etiam potest esse Scalenum, Isosceles, & Æquilaterum. Eo quod in omni triangulo tres quidem possint esse acuti anguli; sed rectus, & obtusus solùm vnus esse potest. Quamombrem reliqui duo necessariò acuti erũt. Qui si erunt æquales, triangula quoque, duo latera æqualia obtinebunt: si inæquales inuicem, duo latera quoque subtenta erunt inæqualia, & semper latus tertium angulo obtuso, vel recto subtensum maius, ob angulum maiorẽ reliquis, quem subtendit.

Oxigonium, cum tribus acutis angulis potiatur latera potest consequi omnia inæqualia, vel duo, vel tria æqualia, & sic esse Æquilaterum, Isoscelum, & Scalenum. Nam dari potest triangulum, vt cum Barocio aduertit Clauius ad propos. 15. lib. 4. Elemen. Oxigonium, quod latus habeat, tum hoc, tum altero crure seorsim sumpto maius; etiam si crura reliqua inuicem sint æqualia.

DEFINITIO XXIX.

Q*Vadrilaterarum figurarum* quadratum *est, quod æquilaterum, & rectangulum est.*

DEFINITIO XXX.

A*Ltera parte longior figura est, quæ æquiangula quidem est, & non æquilatera.*

DE-

DEFINITIO XXXI.

RHombus, *quæ æquilatera, at æquiangula non est.*

DEFINITIO XXXII.

RHomboides, *quæ opposita, & latera, & angulos æqualia tantùm habet. Non omnia.*

DEFINITIO XXXIII.

R*Eliqua verò ab his quadrilatera* Trapezia *vocentur.*

In istis Definitionibus illud aduerte. Quòd ab altera parte longiori, qualis est fig. 13. differt quadrata 2. non in angulis: sed in lateribus tantùm: Rhombo verò fig. 14. expresso in angulis; at non in lateribus: A Rhomboide fig. 16. signato in angulis simul, & in lateribus; sicut & à Trapezio, fig. 15. designato.

DEFINITIO XXXIV.

P*Arallelæ rectæ lineæ sunt, quæ, cùm in eodem sint plano, ab vtraque parte; etiam si in infinitum producantur, in neutram partem sibi mutuò incidũt.*

Tales sunt in fig. 17. Parallelæ A B, & C D. Quare duas conditiones essentiales requirit Euclides; vt lineæ parallelæ, idest æquidistantes sint; Prima, quòd sint in eodem plano, alioquin in diuersis certum est non conuenire. Secunda quòd numquam coeant, licet in infinitum producerentur. Quod licet nequeat cognosci experimento, cognoscitur tamen animo, & ratione. Quòd, cùm distantia inuicem non sit imminuta, dùm procedunt vsque ad certum spatiũ atque terminum; nec vmqnam imminuetur, cum par sit ratio de illo processu ad quamcumque distantiam: neque dicas, posse illam quidem distantiam esse imminutam; sed non sensibiliter: nam non loquimur de lineis sensibilibus; sed abstractis, & animo conceptis, in quas, vt supra diximus Mathematica, velut in suum obiectum fertur.

Definitiones, quę sequuntur Euclidis non sunt. Ab authoribus tamen adduntur, vt necessariæ ad ea, quę primo libro traduntur, percipienda.

DEFINITIO XXXV.

P*Arallelogrammum est figura quadrilatera parallelis oppositis lateribus.*

Sic fig. 13. 14. 16. 2. Parallelogramma sunt; estque nomen genericum conueniens quadrato, Rhomboidi Rhombo, & altera parte longiori, sed non Trapezio.

DEFINITIO XXXVI.

D*Iameter in parallelogrammo est linea; quæ diuidit angulos oppositos, & latera bifariam.*

Hoc aduertit A. ist. lib. 15. Probl. 1 & 2. Cur diameter appelletur, quę de angulo ad angulum ducta sit, vt A B, & non quęlibet alia bifariam figuram diuidens, & reddit rationem, quia diuidit bifariam non solùm latera, ita vt duo remaneant hinc, duo indè; sed etiam angulos, quod nullę alię rectę in parallelogrammis ductę efficiunt.

DEFINITIO XXXVII.

S*I parallelæ in parallelogrammo ducantur per idẽ diametri punctum, partes, per quas transit diameter,* circa diametrum; *per quas verò non transit,* complementa *dicuntur.*

Sic ductis parallelis A B, & C D per idem punctum I, nigra, per quę diameter non transit, Parallelogramma *Complementa*; & alba, per quę transit, vocantur, *circa diametrum*, consistentia.

POSTVLATA.

1 P*Ostuletur. Vt à quouis puncto ad quoduis punctum linea recta duci concedatur.*
2 *Lineam rectam terminatam in continuum rectà producere.*
3 *Quouis centro, & internallo circulum describere.*
4 *Omni magnitudine data posse sumi maiorem.*

PRIMA PRINCIPIA.

QVæ etiam solent dici *Dignitates, Axiomata, Pronuntiata, Effata, communes Notiones*; Alia omninò prima, quę adeo sunt clara, vt primo conceptu indubitata euadant; Alia non item; sed quasi immediatæ primorum principiorum conclusiones. Primi generis sunt.

PRINCIPIVM I.

Q*Væ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia, & quod vni æqualium maius est; maius etiam alio necesse est esse, & si minus vno similiter minus altero. Et si vnum æqualium est maius magnitudine quapiam, aut minus alterum quoq; æqualium ea magnitudine maius est, aut minus.*

PRINCIPIVM II.

E*T si æqualibus æqualia adiecta fuerint, tota erunt æqualia; Et, si ab æqualibus æqualia ablata fuerint, tota erunt æqualia.*

PRINCIPIVM III.

E*T si inæqualibus æqualia adiecta fuerint remanent, vt priùs inæqualia, & si iisdem inæqualia inæqualia quoq; addantur; sed maius maiori, minus minori, adhuc sũt inæqualia; Et, si ab inæqualibus æqualia ablata fuerint manent, vt priùs inæqualia. Quòd si ab iisdem inæqualia ablata sint maius maiori, minus minori remanent inæqualia.*

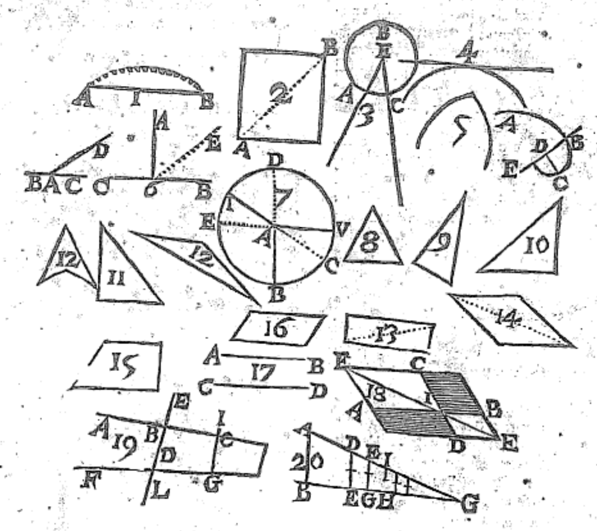
PRINCIPIVM IV.

E*T quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia, & quòd vni æqualium duplum est, duplum etiam est alteri. Et, quæ eiusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia; Et, quæ sunt æqualia, eiusdem dupli, sunt dimidia.*

PRINCIPIVM V.

E*T, quæ mutuò sibi congruunt, inter se sunt æqualia: Nimirum quando vnum alterum nulla parte excedit.*

PRIN-



PRINCIPIVM VI.

T*Otum sua parte maius est.*

Quibus auctores addidere sequentia.

PRINCIPIVM VII.

O*Mne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis.*

Si æqualibus inæqualia adiiciantur, erit totorum excessus adiunctorum excessui æqualis; & si iisdem inæqualibus æqualia addantur erunt adhuc excessus totorum, & adiunctorum æquales. Sic si è conuersò æqualibus inæqualia demantur, aut inæqualibus æqualia essent totorum excessus, & adiunctorum æquales.

V. G. si duobus palmis addantur, hinc tres quartæ palmi, inde palmus, differentia erit horum compositorum vnius quartæ palmi, vt differebant priùs tres quartæ palmi à palmo, antequàm adderentur. Et si tribus quartis palmi palmus, & palmo palmus addatur quantitates additæ different vna quarta palmi; vt differebant priùs tres quartæ, & palmus antequam vnus palmus singulis adderetur: quod est dicendum pariter de ablatione.

Principia, quę minus clara sunt, & ideo ostendĩ possunt.

PRINCIPIVM VIII.

D*Væ lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.*

Idest. Nequeunt reperiri duæ lineę quarum vna pars sit eadem cum altera, ita vt eandem lineam integret: Reliqua verò sit ab illa remota, V. g. in fig. 7. Quod I A V sit vna recta, I A C sit altera recta, quę consequantur eamdem partem I A, & in ipsa idem sint; Reliqua verò in duas partes abeat. Si enim hoc esse posset, vt ostendit Proclus, I D V esset semicirculus; quia linea, quę supponitur recta I A V, transiret per centrũ; vnde pars circuli I A D V ab ipsa, & à peripheria conclusa esset semicirculus, & ideo æqualis I A C D V semicirculo, quod esse nequit.

PRINCIPIVM IX.

D*Væ lineæ ad idem punctum concurrentes, si producantur, se mutuò secant.*

Sic A C, & A B in fig. 7. quæ ad idem punctum A concurrunt productę in D, & I se mutuò secant. Id autem potest ostendi. Nam si se non secant, congruunt (Si enim producantur vtique retrò non redibunt) & I A erit idem segmentum, ac A D, & idem erit cum ipsa, quod est contra præcedens pronunciatum.

PRINCIPIVM X.

D*Væ lineæ rectæ in eadem puncta concurrentes spatium non comprehendunt.*

Sic in prima figura. Si à puncto A, in B alia linea recta ducatur, cadet in lineam primo factam, & per eam ductus ipsius lineę incedet, nec inter eas spatium mediabit, vt mediat inter punctatam, & rectam A B.

PRINCIPIVM XI.

O*Mnes anguli recti sunt æquales.*

Quoniam, si essent inæquales alter esset maior recto, vel minor, & sic esset acutus, vel obtusus; quod esse nequit, cùm esset rectus, vt supponitur; non rectus autem, quia minor altero recto. Et sic rectus, & non rectus.

PRINCIPIVM XII.

S*I duas alias lineas alia secans, angulos intra ipsas, & versus eandem partem, minores duobus*

rectis

vestis fatiant; illæ lineæ tandem concurrent.

Quia est altera, ad alteram inclinata; vnde cùm non sint æquidistantes, necessariò tandem conuenient: Sic quia anguli in fig. 9. ad CBD, & GDB ad easdem partes, quas facit linea E L incidens, vel secans duas A C, & G F sunt minores duobus rectis; necessariò tandem concurrent, dummodo ducantur per partes semper æquales.

Ratio est. Quia si B C procedendo à B in C absumat aliquam partem distantię, V. g. sextam C I, quę est eadem, ac illa, quę est inter B, & D. Si producatur etiam per aliam partem æqualem; absumet rursus aliam partem æqualem sextam: Cumque partes æquales inter B, & D infinitę non sint. Ideo tandem omnes absumet, & sic perueniet ad aliam lineam F G. Dices; Dantur lineę asymptotales, quę ad rectam accedunt semper; nec vnquam eam assequuntur. Respondetur eas; aut esse flexas, & de istis non loquimur; aut esse rectas, & istę non ducuntur per partes æquales, sed semper minores, & minores; Vnde est dispar ratio.

Nam. Sint duę rectę, vt in fig. 20. A C, & B C, sed tali modo ducantur. Producatur A D vsque ad D, & B E vsque ad E, & ducatur E D. Deinde medietas E D assumatur, & ad eam distantiam ducatur parallela G F, & postea producatur A D in F, & B E in G. Assumptaque rursus medietate G F, quę est minor: quam E D ducatur alia parallela H I, & ad eam ducatur A D in I, & B E in H. Itaque Mathematici ostendunt, quòd lineę de parallela in parallelam viciniorem ductę, & semper in minores, minoresque distantias continuatę quales sunt A D, D F, & F I; numquam esse peruenturas ad punctum C, in quo se coniungant. Eo quod spatium A C sit diuisibile in infinitum. Sed hoc est ducere lineas inuicem inclinatas per partes semper minores, & consequenter minori, minorique augmento eas prolungare, at non per partes æquales, & æquali additione eas continuare. Partes verò seipsis perpetuò minores saltem Methaphisicè Exp. 1. tract. 1. admisimus. Non autem æquales; quę ipso sensu iudice infinitę in quantitate non reperiuntur.

EXPENSIO VII.

De Elementis in genere.

SVpra nomen Elementi, vimque explicauimus; modo de eius differentia, atque diuisione peragendum.

Elementares institutiones à varijs olim inuentas collegerunt antiquitùs aliqui Hypocrates, Chius. Leo discipulus Neoclidis, Theudius Magnes, Hermotinus Colophonius. Omnium autem Euclides præstātissimus, qui, cùm longo tēpore Alexandrię docuisset, vt testatur Procl. l. 2. c. 4. *Multa construxit eorum, quæ ab Eudoxo multa verò perfecit eorum, quæ à Theæteto reperta fuerant, & ea præterea, quæ à prioribus molliore brachio ostensa fuerunt, ad eas redegit demonstrationes; quæ nec coargui, nec conuinci possunt.* Vnde etiam Ramus lib. 3. Scho. Math. testatur. *Nullus paralogismus nulli Pseudographia in totis Elementis Euclidis nobis, quamquam seuerè inquirentibus animaduerti potuit.* Nec solùm Elementa, sed multas alias insignes lucubrationes edidit quarum, quę ad nos peruenerunt, sunt Optica, Catoptrica, Musicæ elementares institutiones, Phęnomena Datorum liber, & insuper, quas, non habemus, operas liber de diuisionibus, & Conicis: vnde insignem in Geometricis consecutus est, & primam laudē.

CONCL. I. PROPOS. VI.

Elementa in duplici ordine sunt, alia subalternata, alia subalternantia.

PAtet, quia aliqua dependent à primis, & suppositis illis probantur: Ergo aliqua sunt subalternantia, idest, quę alijs prima principia prębent, alia dependentia, ab illisque principia mutuant, & ex eis euidentiam adipiscuntur. Vnde propriè, & verè Elementa non sunt. Hæc verò sunt, quę II, & sequentibus libris explicantur; maximè quia non adeò vniuersalia sunt; sed ad certas figuras, nempe solidas tales, aut tales restringuntur.

CONCLVS. II. PROPOS. VII.

Ordo Elementorum decem libris comprehensorum talis est: Primò agitur de proportione; Secundò de proportionum similitudine; Tertiò de quantitatis Discretæ, & Continuæ comparatione.

PRob. Quia primis 4. libris ostendit figurarum, aut partium in ipsis factarum proportionem, & aut æquales, aut maiores, aut minores probat, Primo quidem lineas triangula parallelogrāma quo ad se, Secundo lineas quoad earum potentiam, Tertio circulos, Quarto alias figuras planas explicans. Libro verò 5. agit de proportionum similitudine in genere, Sexto de proportionum similitudine in quantitate continua, Septimo, Octauo, & Nono de proportionum similitudine in numeris. Decimò comparat quantitatem Discretam, & Continuam, & earum proportiones componit, aliasq; conuenire cum proportionibus numerorum. alias non conuenire affirmat, & ideò numeris inexprimibiles, & irrationales asserit, & quamuis passim agat de effectione figurarum, vt cū agit de constituendo triāgulo æquilatero, & quadrato, &c. Attamen in ipsa probatione ostenditur, earum partium adinuicem æqualitas, vel quod vna alterà sit, vel maior, vel minor. Vnde semper agit de proportione corporum, vel eorum partium adinuicem. Non agit verò de proportione numerorum, quia in ipsa prolatione numeri statim agnoscitur, an numerus sit maior, aut minor, aut æqualis. Vnde superfluum erat de hac re demonstrationem extruere. Agit itaque de proportione in genere, 1. 2. 3. & 4. libro. De proportione verò in specie, eam comparando alteri proportioni, ideoq; de proportionum similitudine 5. 6. 7. 8. & 9. libro, & tandem 10. de quantitatis Continuæ, & Discretæ comparatione.

TRACTATVS IV.

In primum Librum Elementorum.

LIBER primus Elementorum agit præcipuè de lineis inter se comparatis, quoad situm, æqualitatemque, & de triangulis duplici modo, primò item in se, comparando latera angulis, quibus subsunt. Secundò etiam respectu aliorum triangulorum, ostendendo quænam sint æqualia, quæ verò non. Tandem agit de quadratis, & parallelogrammis versus finem. Agit autem duplici modo quædam speculatiuè tantùm, & Theoricè, quædam verò Problematicè, & in ordine ad operationem. Ordo verò confusus est; non quidem, quoad rerum dependentiam, cùm aptissimè in hoc procedat; sed quoad materiarum diuersitatem. Siquidem primo agit de triangulo, inde de lineis; rursus reddit ad triangula, &c. Nos verò hunc ordinem ausi sumus paululùm immutare; vt etiam secundus ordo seruaretur in ipsis rebus tractandis. Et quia modo nominantur latera, modo anguli, angulos nigro, alboque, vel sub nigro distinximus; at lineas literis notauimus, vt magis perspicua esset demonstratio, & literarum ferè eadem repetitio intellectum legentium non confunderet. Sicca verò, & nuda ponimus Elementa, quòd & ipse Euclides ita faciendum duxit, vt testatur Proclus lib. 2. cap. 5. *Præcipuè verò circa Geometricam Elementorum institutionem eum,* nempe Euclidem, *quispiam admirabitur, propter ordinem, & electionē corū, quæ per Elementa distribuit; etenim non ea assumpsit omnia, quæ poterat dicere;* sed ea dumtaxat, *quæ Elementi potuit ordine tradere.* Vnde puto grauia per se, & difficilia primo ingressu esse Elementa; vt contra ius faciat, & æquitatem, illum, qui insuper ad augendam fascem, aliena vocet in Elementa, & ex alijs principijs dependentia, & ideò obscurissima, & altioris ordinis, vt tenebras offundat clarissimis, proponat. Satiùsque existimaui sobriè me agere, & necessaria solùm proponere consulens simul, & breuitati, & claritati.

EXPENSIO I.

De Triangulis constituendis.

CVm Triangulum prima figurarum sit, & quædam etiam inter lineas exerceri nequāt sine eorum consideratione, & effectione, ideò primus limes in triangula ingreditur.

PROB. I. PROPOS. I.

Super data linea terminata Triangulum æquilaterum constituere.

SIt linea B A finita, super quam triangulum æquilaterum sit constituendum.

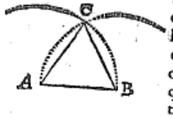
Centro B trahatur circulus interuallo A B vt in postulatis concessum. Iterumque centro A eodem interuallo A B alius circulus describatur.

Se intersecabunt in C; Trahatur igitur ad illud punctum intersectionis C à puncto B linea recta C B, & item à puncto A alia recta A B ducatur ad idem punctum C: eritque factum triangulum A C B rectilineum, *quod dico esse æquilaterum.*

PRÆASSVMPTVM.

PRimò supponendum lineas tractas à circumferentia ad cētrum esse æquales ex dictis. Secundò quod, quæ sunt æqualia alicui tertiæ rectę, esse lineas æquales inuicem ex 1. pronunc.

Prob. Linea C B est æqualis lineæ B A; vt ductę à centro B ad punctum circumferentiæ A, & C. Linea quoq; altera A C est æqualis eidem A B, ob eandem rationem, quod ductæ sint à centro A ad puncta circū-

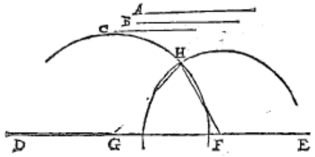


ferentię C, & B; Ergo cùm lineæ tertiæ A B, duo crura A C, & C B sint æqualia, erunt & inuicem æqualia.

PROB. II. PROPOS. II. Euc.22.

Datis tribus partibus in vna recta, quarum duæ simul sumptæ reliquâ mediâ sint maiores, constituere triangulum habens crura illis æqualia.

SVnt datæ in recta D E partes D G, & G F, & E F equales, si ita placuerit, singulę singulis A, C, B. Debeatque triangulum constitui, cuius crura dictis partibus sint æqualia.



Facto centro in F circulus ducatur interuallo F E. Iterumque facto centro in G interuallo D G circulus ducatur, qui se intersecabunt in H. Ductis igitur ad H rectis G H, & F H *erit factum triangulum* G H F. *Cuius basis est* G F *vna pars, linea* G H *æqualis* G D *alteri parti, &* F H *tertiæ parti* F E.

Probatur; quia sunt duæ D G, & G H æquales, vtpote radij eiusdem circuli ducti centro G. Sic quoque duæ F H, & F E sunt æquales, vtpote radij eiusdem circuli ducti centro F; Tertia autem G F eadem, quæ priùs. Ergo crura huius trianguli G F H, tribus partibus lineæ D G, & G F, & F E sunt æquales.

Quòd autem circuli se debeant intersecare; patet ex conditione, quam posuimus in propositione; quòd duæ D G, & F E reliquâ mediâ sint maiores simul sumptæ; quia sic circulus F H, & G H in linea G F vnus, vbi alter est, secundùm aliquam sui partem cadet: Vnde necessariò deuecti ad H, dum alter exit ab altero, se intersecabit.

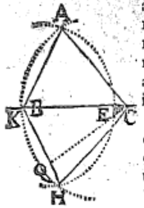
PROB. III. PROPOS. III.

* *Dato triangulo, ei triangulum æquale ad aliam partem constituere.*

AB antecedenti Propos. emergit, quod dato triangulo A B C possit fieri aliud triangulũ B H C super eãdem basim B C alteri æquale. Interuallo B A describatur circulus, & interuallo C A describatur rursùs circulus; vbi ergo se intersecant in H à punctis B, & C ducantur rectę B H, & H C, *Et erit factum triangulum* B H A *æquale triangulo* B A C.

Probatur latera enim sunt æqualia; Nam B A crus, & B H crus sunt eiusdem A E H radij; Ergo æqualia: Sic & A C, & C H crura sunt eiusdem circuli A K H radij; Ergo æqualia. Crus verò B C commune.

Anguli autem singuli, angulis erunt æquales; Nam si aliquis est inæqualis; Sit V.g. B C H, qui sit maior: ita vt B C Q niger dicatur angulo B C A æqualis. Et tamen latera sint lateribus, singula singulis trianguli B A C æqualia; Ergo B Q crus



erit æquale B A: sed B A est æquale cruri B H; Ergo etiam B Q crus esset inæquale cruri B H, minus maiori; quod esse nequit. Ergo omnes, quoque anguli erunt æquales: Cùm idem argumentum sit de reliquis; quòd verò possimus ducere circulũ interuallo dato, & centro V.g. C: hoc postulauit Eucl. & fecit in prima Propos. Nã in ducendo posteriori crure æquilateri trianguli interuallum assumpsit idem, quòd priùs facto alibi centro.

COROLLARIVM.

HInc est vniuersaliter, quòd si detur triangulum habens duo crura innixa eidem basi. V.g. B C vel æquali, & crus vnum vni, alterum alteri sit æquale, quòd & triangula singulis angulis insistentibus, iisdem lateribus æqualibus erunt æqualia: Sic anguli ad C erunt æquales; quia æqualibus B H, & B A cruribus insunt, vel insistũt.

PROB. IV. PROPOS. IV.

Datum angulum, & basim, æquicrurumque triangulum bifariam secare.

* SIt datus angulus I A C, qui in duo secãdus sit centro A interualload l bitum A B ducatur circulus B V D, & secet crus A C in D, & recta ducatur B D. Facto deinde centro in D interuallo D A ducatur circulus, & idẽ fiat in B interuallo B A. Et à puncto, in quo se intersecãt in E, ducantur rectæ B E, & D E. A puncto deinde A, ad E ex post. I. ducatur A E. Dico *angulum apud* A *esse medium sectum, medietatemque nigram albæ esse æqualem.*

Probatur. Quia A D, & B A, vtpote eiusdem

circuli radij sunt æquales; & B E est linea æqualis lineæ B A ob eandem rationem; nec non E D, ipsi A D. Ergo etiã erunt, vt illa A D, & B A, inter se æqualia hæc postrema crura B E, & E D. Ergo triãgulum A D E super eandem basim A E, ex præced. erit æquale triangulo E B A. Et sicut singula latera, singulis lateribus, sic & anguli singuli, singulis angulis; Quare angulus niger erit æqualis albo, apud A.

Dico secundo basim B D in duo sectam.

* Prob. Nam; si non est secta bifariam, erit pars altera, vel maior, vel minor. Sit, V.g. maior H B, quę, vt esset ęqualis, deberet esse H V, & ducatur ab V linea V A.

Quęro, an V A sit æqualis A D, vel non? Si nó. Iam sumus extra pręsupositionem: Nam A D, & A B præsuponimus æqualia crura: Vtpote Isocelis. Si verò æquat V A crus A D. Iam habemus V A H triangulum æquis cruribus, singula singulis correspondentibus trianguli A H D, & basis communis: Ergo etiam anguli ex pręced. erunt æquales. Quare angulus apud A inter V A, & A H erit æqualis angulo maiori H A D nigro, & consequenter albo sibi æquali B A H; pars toti, quòd esse nequit. *Quare basis* B H *non erit minor basi* H D, *sed æqualis.*

*Pro.

* Prob. 3. pars: Quòd etiam triangulum B A D nuper factum sit bifariam sectum. Nam cum omnia duo crura trianguli B A H, & H A D, vnum B A, vni A D, & aliud B H. alteri H D correspondenti sint æqualia, & basis H A cõmunis, erũt triãgula ipsa inter se æqualia, ex pręced. BAH, & HAD.

EXPENSIO II.

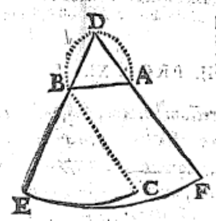
De lineis secandis.

LIcet lineæ circino secari possint, & æquales assumi, & inter postulata id potuisset connumerari; vt liceret lineam, ad placitam distantiam ducere. Id tamen noluit Euclides: Quia, vt aduertit Tartalea, poterat ostendi; & ipse voluit ostendere, quidquid ostendibile fuit.

PROB. I. PROP. V. Euc. 2.

A dato puncto datæ rectæ æqualem rectam ducere.

SIt linea data punctata B C, & datum punctum A. Oporteatque ab illo puncto A ducere rectam, quę sit æqualis datę punctatæ B C.



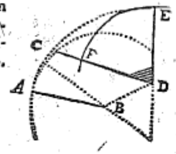
Coniungatur punctum extremum illius lineæ punctatæ, quę datur, cum puncto A dato, & sit linea coniungens A B. Superque eam constituatur triangulum equilaterum B D A: Deinde pũcto B, quod coniũctum est ad A, interuallo B C fiat circulus, & secet B D productum latus trianguli in E. Centro postea D vertice trianguli, interuallo prolungati lateris E D circulus describatur. Postea latus alterum D A prolungetur vsque ad hanc secundi circuli peripheriam E C F, nempe vsque ad F. *Et erit* A F *ea linea, quæ quæritur æqualis lineæ punctatæ* B C.

Probatur lineę D F, & D E sunt æquales, vtpote radij maioris circuli. Vnde demptis cruribus æquicruris trianguli D A, & D B, residuę portiones remanebunt æquales E B, & A F ex pronunc. I. Sed etiam B E, & punctata B C; vtpote radij minoris circuli; sunt æquales. Ergo duę A F, & A C æquales tertię B E, inter se erunt æquales.

PROB. II. PROP. VI. Euc.3.

Duabus datis lineis inæqualibus de maiori æqualem minori rectam lineam detrahere.

DEntur duæ rectæ A B minor, C D maior; Et iuxta præcedens Problema, vt punctatę lineæ, & circuli ostendunt à puncto D ducatur æqualis minori A B linea D E: Et ducatur cẽtro D interuallo D E circulus: qui secet D E in F. *Dico segmentum* D F *æquale esse lineæ* A B.



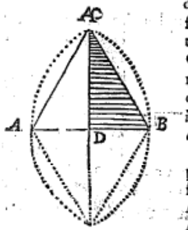
Probat. Quoniam sunt æquales vni tertiæ D E, linea A B ex effectione iuxta præcedens Problema, & F D segmentum, vtpote radius eiusdem circuli centro D ducti. Ergo etiam sunt inuicem æquales A B, & D E.

Patet itaque quod lineæ rectæ in tantum assumuntur æquales; quia sunt eiusdem circuli diametri, quod fortè intendit Euclides. Et ideò noluit id inter postulata exquirere, tanquam concedibile; cùm hãc proprietatem æqualium voluerit demonstrare; Quod scilicet potentiâ sint eiusdem circuli semidiametri.

PROB. III. PROP. VII. Euc.10.

Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

SIt linea recta data A B; quæ non in infinitum extendatur; & quæ in duas partes æquales sit diuidenda. Super eam fiat triangulum æquilaterum. Ex prop. I. A B C. Cuius angulus C bifariam ex prop. 4. diuidatur. *Dico lineam* A B *in duas partes æquales esse sectam.*



Probat. Quia in propos. illa 4. ostensum est segmentum D B basis A B æquale segmento A D eiusdem: Ergo in duas partes æquales secta est.

EXPENSIO III.

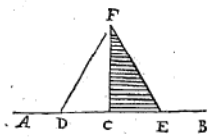
De linearum se tangentium situ.

QVo ad situm lineę considerate secũdùm se, non prout figuræ alicuius latera, inuicem referri possunt; quæ sunt in duplici differentia; aliæ paralellæ, quæ nunquam se tangunt, etiam in infinitum productæ; aliæ verò se tangunt, vel saltem productæ se tangant, & de istis sermo in præsenti est.

PROB. I. PROP. VIII. Euc.II.

Datâ rectâ lineâ à puncto in illa dato lineam rectam ad angulos rectos excitare.

REcta linea detur, quæ sit A B: & in ea punctum C, à quo linea perpendicularis, quæ def. 10. descripta est, sit educenda.



Electo puncto altero in ea, V.g. in E. Ex prop. 6. Portioni C E auferatur equalis ad alteram partem C D; ita vt C sit pũctum medium. Et ex docum. propos. I. super E D triangulum

æqui-

æquilaterum constituatur D E F. Et à puncto C ad F recta ducatur: *Hæc enim insistet super rectam datam A B perpendiculariter.*

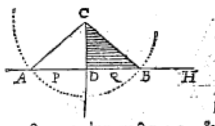
Probatur crus C E, & D C sunt æqualia, & E F crus alteri F D; basis verò C F communis. Ergo totum triangulum nigrum toti albo triangulo erit æquale, etiam quoad angulos ex Coroll. prop. 3. Angulus itaque niger, est æqualis albo apud C existenti; Ideoque F C erit perpendicularis, ex defin. 10.

PROB. II. PROP. IX. Euc. 12.

Super datam rectam infinitam à dato puncto, quod in ea non sit, perpendicularem rectam ducere.

HAnc lineam indefinitam vult esse Eucl. quia, si esset nimis breuis posset euenire, circulum ad operationem necessarium ipsam non secare; vel quòd punctum, ita extra eam esset positum, vt ipsa prolungata in illud incideret, & sic circulus necessarius ad operationem, vt oportet, duobus punctis nõ secaret, vt si esset linea P Q, & punctum H: itaque.

In puncto dato C; quod in linea non est, fiat



centrum electo radio, & interuallo tali, vt rectam datam A H secet in duobus punctis A, & B. Et ab illis ducantur ad punctum C duæ rectæ A C, & C B. Deinde ex propos. 8. ea diuidatur in duas partes æquales in D, & ducta C D. *Erit, quæ in propos. promittitur, ipsi A B perpendicularis.*

Probat. Nam trianguli nigri crus D B alterius triãguli albi cruri A D ex cõstructione est equale, & item crus C B, cruri A C vtpote radij: Basis verò D C communis; Ergo totum triãgulũ nigrũ etiam quoad angulos toti albo est æquale. Vnde angulus niger ad D correspondẽti albo ad D erit equalis, & ideò ex defin. 10. D C *erit perpendicularis.*

THEOR. I. PROP. X. Euc. 13.

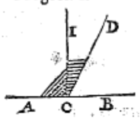
Cùm recta linea super rectam consistens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

INcipit hic sola speculatio, & primam proprietatem linearum se tangentium demonstrat.

Sit itaque recta A B, super quam consistat C D, & si quidem anguli hinc, inde sunt æquales, sumus extra quæstionem: Nam ex 10. defin. illi anguli recti sunt. Quòd si anguli illi sint inæquales: Dicit tamen Eucl. duobus rectis, simul sumptos esse æquales. Quod vt ostendat, imperat ex propos. 9. à puncto C dato erigi perpendicularem C I.

Probatur. Quoniam ex 7. pronunc. omne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis; rectus angulus I C B erit æqualis nigro, & albo, vtpote suis partibus: Si verò addas, tum recto angulo I C B, tum albo, & nigro, nigerrimum A C I rectum, efficietur, vt albus niger, & nigerrimus additus, sint æquales duobus recto I C B, & item eidem nigerrimo ei addito, ex 2. pronunt. quòd memoriâ tenendum.

Progres. 2. Rursus Angulus A C D ex eodem



pronunt. 7. est æqualis, vtpote suis partibus angulo nigro I C D, & nigerrimo A C I: quare, si addas vtrisque angulũ album, efficietur, vt angulus A C D, & angulus albus ad C sint æquales tribus albo, nigro, & nigerrimo ad C. Iam itaque vides angulum I C B rectum, & nigerrimum item rectum, vt priùs probatum est, tribus albo, nigro, & nigerrimo esse æquales; Rursusque, vt modo dixi, A C D obtusum, & album acutum factos à lineâ D C, tribus albo, nigro, & nigerrimo item esse æquales, vt modò demonstraui: sed quę eisdem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia ex 1. pronun. Ergo *angulus* A C D, & *albus* ad C *sunt æquales angulis duobus* I C B *recto, & recto nigerrimo* A C I.

COROLLARIVM.

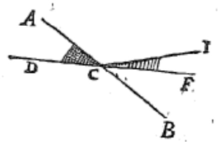
COllige quoscumque angulos super rectam à pluribus lineis insistentibus effectos esse duobus rectis æquales, sicuti hi tres albus, niger, & nigerrimus duobus rectis ostensi sunt æquales.

THEOR. II. PROP. XI. Euc. 14.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ, eos, qui sunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se illæ lineæ rectæ.

ELigendum est punctum C in linea A B, & ab eo duæ lineæ trahendæ sunt in diuersas partes, idest ad oppositas, vt sunt C D, & C E. Modò inquit. *Si hæ lineæ angulos, qui ex eorum tractione nascuntur, æquales duobus rectis fuerint, necessariò erunt in directum, & vnicam lineam rectam continuabunt.* Hęc verò propositio conuertit superiorem, ibi enim probatum est ex rectis lineis nascentes angulos debere esse æquales duobus rectis, hic probatur lineas *rectas*, & *in directum positas* fore; si angulos, quos hinc, inde faciunt, cum lineâ, super quam cadunt, duobus rectis æquales fecerint.

Probatur. Nam si anguli, quos super lineas



C E, & C D facit C A duobus rectis sunt æquales; sicut & illi, quos B C efficit; & tamen D C, & C E in directum nõ sunt, Linea D C prolungata non coincidet, nec super lineam C E incedet: Sed vel suprà, vel infrà. Cadat V. g. suprà, & sit D C I recta, prout inquiunt aduersarij. Itaque C A suprà D C I cadens, vtpote super rectam, angulos nigerrimum D C A, & album A C I duobus rectis æquales efficiet ex prędedẽti Prop.

Verùm

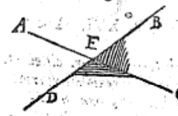
Verùm id præsuponimus, & facere A C insistens super D C, & C E. Quamobrem, cùm, ex 12. pronun. omnes recti sint æquales, emergit; vt tum anguli facti ab A C insistente super lineam A C I, quam volunt aduer. etiam rectam, quales sunt negerrimus, & albus, quàm anguli affecti ab eadem A C cadente, & insistente super D C, & C E, quales sunt niger cum albo, & nigerrimus, inuicem esse æquales; vtpote omnes duobus rectis æquales; Si itaque auferas D C A nigerrimum ab vtrisque, remanerent æquales albus tantùm, cum albo, & nigro simul sumptis, nempe pars toti, quod esse non potest. Ast si dicas infra cadere lineam prolungatam D C, eodem argumento perurgeris: vnde oportebit confiteri; quòd *cadet in directum* D C *ipsi* C E, *& quòd eædem in vnicam lineam dirigantur.*

THEOR. III. PROP. XII. Euc. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint; angulos ad verticem æquales inter se efficient.

PRo angulis ad verticem intelligit eos, qui iuxta intersectionem sibi oppositi sunt; vt est in duobus lineis se intersecantibus A C, & B D, angulus nigerrimus, & albus E.

Prob. de angulis obtusis primò ex Propos. 10.



Cùm linea B E insistat super lineam A C, faciet angulos suos, nempe album E, & nigrum duobus rectis æquales: Rursus; quia recta C E insistit super rectam B D faciet item ex eadem 10. Propositione angulum nigrum, atque nigerrimum æquales duobus rectis: Omnes verò recti sunt inuicem æquales, ex 12. pronunc. Vnde, & duo albus E, & niger anguli, duobus nigro eidem, & nigerrimo æqualitate commensurabuntur. Aufer itaque angulum nigrum vtrisque coniunctum, & annexum, quia idem ab vtrisque abstulisti; ex 3. pronunc. *Angulus albus* apud E, & *nigerrimus, æquales remanebũt.*

Simili argumenti specie de angulis acutis vteris, qui sunt niger, & albus oppositus, cum etenim A E recta insistat rectæ B D; faciet ex propos. 10. cit. angulos duobus rectis æquales; nempe obtusum album E, & acutum album: Quòd & præstabit B E cadens super A C: Quapropter angulus niger acutus cum albo obtuso E, sicut & angulus albus acutus cum albo obtuso E, erunt æquales, vtpote duobus rectis æquales. Auferatur communis obtusus albus E; remanebuntque albus, & niger acuti æquales.

COROLLARIVM I.

EX sententia Procli colligit primo Euclides: *Lineas se secantes facere quatuor angulos, quatuor rectis æquales;* nam in demonstratione ostensum est, nigrum, & album E esse duobus rectis æquales; sicut & nigerrimum cum albo acuto.

COROLLARIVM II.

ET hinc colligitur secundo, *Omnes quotcumque angulos, qui circa aliquod punctum fieri possint tantùm esse quatuor rectis æquales.* Namque si multiplicas rectas ad punctum E terminantes, nihil aliud efficies, quàm diuidere in multas partes quatuor angulos dictos ad E constitutos, quæ omnes simul sumptę totis suis adęquantur; Cùmque illi angulis quatuor rectis sint æquales; hinc est, vt omnes quotcunque anguli circa aliquod punctum consistentes quatuor solùm rectis sint æquales. Quare & omne spatium circa aliquod punctum consistens non, nisi quatuor rectis angulis, poterit æquiualere.

EXPENSIO IV.

De proprietatibus Triangulorum.

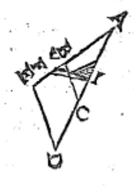
TRiangula possunt, aut considerari in se, aut considerari quatenus comparantur cum alijs. Primò agemus de triangulis in semet consideratis.

THEOR. I. PROP. XIII.

Si sit triangulum ita dissectum; vt crus, cruri, & alterum crus, alteri sit æquale; angulus quoq; ab illis cruribus clausus angulo sit æqualis. Basis quoq; erit basi æqualis, & totum triangulum toti.

SIt triangulum E A D lineis sectum; ita quòd crus B A sit æquale cruri A I, & crus B C cruri F I; anguli verò ad B, & I æquales. *Dico Basim* A F *basi* A C, *& triangula per sectionem facta inuicem esse æqualia.*

Probatur. Nam, si basis basi non est æqualis, sit



maior A F, quę, vt esset equales, deberet esse V. g. V A: Tunc quero ductâ rectâ V I; an hęc sit æqualis cruri B C; Si non est æqualis, est contra hypothesim. Si verò est æqualis V I crus cruri B C, iam habemus triangulũ V A I, quod habet vnum crus V I, cruri B C æquale, & alterum B A alteri A I, basimque V A basi A C æqualem. Quare ex Coroll. Propos. 3. totum triangulum toti erit æquale, & angulus ad I niger erit æqualis angulo apud B; Et ideò angulo sibi æquali A I F seminigro, quod esse nequit; Cùm niger sit eius pars, & ille I A F totum, & idem contexes argumentum, si crus A F sit maius; Nam A C erit minus, & eadem operatio, & demonstratio valebit.

THEOR. II. PROP. XIV. Euc. 5.

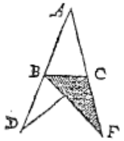
Anguli Isoscelium triangulorum, qui sunt super basim, sunt inuicem æquales, & productis cruribus, anguli infra basim sunt etiam inuicem æquales.

SI Triangulum duorum æqualium crurum A B C, & ea duo crura producãtur A B in D, & A C in F, & ex Propos. 5. B D, & C F portiones adiunctę fiant inuicem equales; & rectâ B F coniungantur puncta B, & F, sicut lineâ D C puncta

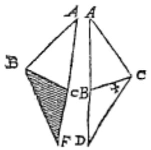
D, & C.

b, & c. D'eo angulos super basim B C apud B, & C esse inuicem æquales; & angulos infra basim, vt semi-niger ad B, & niger ad C esse quoq; inuicē æquales.

Probat. secunda pars. & considerentur D A C, & D C A; tanquam duo triangula; quæ vt tali ratione cogitarentur fecimus separata, replicando in ipsis triangulum idem Isoscelum B A C. Quoniam itaq; anguli ad A in triangulo seminigro, & albo sunt æqualia, & crus vnum B A vni A C ex hypothesi alterum A F ex effectione alteri A D est æquale; Ergo ex præced. F F basis basi D C erit æqualis;& totum triangulum seminigrum toti albo erit æquale.



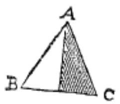
Progr. 2. Deme. B A C triangulum ab vtrisq; & quod residuum est æqualium, triāgulorum nigrum albo B D C erit æquale: *Quare, & angulus niger ad C, & semialbus D B C erunt æquales, qui sunt infra basim anguli.*



Prob. 1. pars. Quia triangulum A C D triangulo B A F est æquale ex 1. parte probat. erit angulus apud B totus angulo apud C toti æquale. Et eadem ratione pars nigra apud B parti C cruce signatę erit æqualis; quòd triangulum nigrum sit ęquale albo B C D. Ablatis ergo partibus æqualibus angulorum nigra, & C cruce signatâ ab angulis totis æqualibus; *ex post. 1. remanebunt æquales anguli supra basim* residui apud B, & C; nimirum C B A, & A C B, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc emergit triangulum æquilaterum habere omnes angulos ęquales. Prob. Nam cū duo crura A B, & A C sint ęqualia, anguli supra basim C niger, B albus erunt ęquales ex pręced. Sic quia duo crura A C, & C B sunt ęqualia anguli seminiger apud A, & albus B erunt ęquales. Duo itaque anguli seminiger A, & niger C vni tertio B sunt ęquales; Ergo ex Pron. 1. sūt ęquales inuicem.



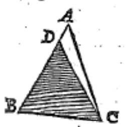
THEOR. III. PROP. XV. Euc.6.

Si in triangulo duo anguli æquales inter se fuerint; & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

Licet hoc Theorema faciliter possit colligi ab antecedenti; cùm sit conuersa eiusdem propositio nihilominus, quia aliquę sunt propositiones, quę conuerti nequeunt, ex logicis: Ponendo prędicatum loco subiecti; eo quòd prędicatum sit minus vniuersale subiecto; vt hęc *omnis homo est animal*, conuerti nequit, & dici, *omne animal est homo*. Cùm animal magis pateat, quam prędicatum hominis; sed dici debet, *aliquod animal est homo*. Ideò consueuere Mathematici etiam conuersas propositiones ostendere, vt demonstrent illas propositiones conuerti seruata quantitate, & qualitate earum; nimirum esse affirmatiuas, & eodem pacto vniuersales, cōuersę; vt priùs erant; quòd euenit in ista propositione.

Dicit itaque Euclides, quod si sit triangulum B A C, cuius duo anguli sint ęquales B niger, & C semialbus; *quod latera subtensa A B seminigro, & A C nigro æqualia inter se erunt.*

Quod si aliquis neget; Ponatur; quod B A sit crus maius, quam A C, & ideò quod ad hoc, vt sit ęquale debeat esse B D.



Probatur itaque, quia B D est ęquale cruri A C ex aduersarijs: Crus verò B C est commune, & angulus B niger, communis quoque, tàm triangulo nigro minori, quàm seminigro maiori: Ex prop.13. erunt triāgulū nigrū B C D, & seminiger B C A æqualia; pars nigra toti B C A, quod esse nequit.

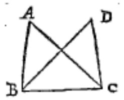
COROLLARIVM.

Sequitur ex hac propositione omne triāgulum æquiangulum esse quoq; æquilaterum; quòd est conuersum pręcedentis Corollarij, cùm enim anguli B albus in fig. preced. Coroll. & C niger sint æquales, latera A B, & A C erunt æqualia: Item, cùm angulus A seminiger, & angulus B albus sint æquales, etiam latera A B, & B C erunt æqualia: Quare omnia latera erunt æqualia.

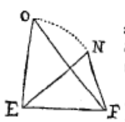
THEOR. IV. PROP. XVI. Euc.7.

A basis alicuius trianguli termino cruri discedenti æqualis linea, & ab altero extremo alteri cruri alia linea æqualis non discedet, quæ terminet ad aliud punctum; quàm ad verticem prioris trianguli: dummodo versus eandem partem lineæ ducantur, in quam crura conueniunt.

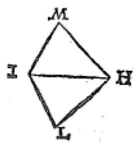
Multę requiruntur conditiones ad hoc, vt Theorema verificetur; Primò, quod linea æqualis cruri exeat ab eodem extremo basis; ideoque C A, & B D sunt æquales; Sed non exeunt ab eodem puncto C, quod requirit propositio, & ideò de eis non loquitur.



Secundò, quòd, tum hæc linea sit ęqualis vni cruri, tum altera æqualis alteri; nec sufficit æqualitas vnius cruris cum vna linea; & vt E O, & E N sint æquales, & F O, & F N inęquales, & ideò de istis non est sermo.



Tertiò requirit, quòd ducantur versùs easdem partes; Et ideò licet I M, & I L sint æquales, & H M, & H L; quia tamen ducuntur, ad duas partes oppositas M, & L. Ideò nec de istis loquitur propositio.

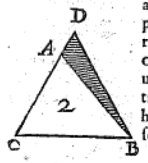


Multos verò habet casus, hæc propositio secundùm quòd punctum hoc prope verticem trianguli, in quod conueniunt collocatur.

Casus

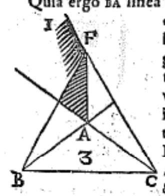
Casus 1. Si ergo duę lineę dicantur conuenire, & non in verticem trianguli; quarum queque suo cruri, à cuius extremo discedit, ęquetur. Sit illud punctum assignatum D, pro primo casu; ita vt linea D C à puncto C discedens super crus C A ducatur, & perueniat ad D cū alterâ B D æqualis alteri cruri B A. extra triangulum C A B. Sed hoc euidenter implicantiam inuoluit, & falsum est. Nam linea C D esset maior, quàm crus C A contra hypothesim.

Casus 2. Idem erit. Si punctum cadat in latere aliquo, V.g. C D in fig. 2. Nempe, quòd linea B A ęqualis cruri B D, & linea C A discedens ab C, & super crus C D ducta conueniant in A infra verticem trianguli D; Et hoc etiā extra hypothesim; quia linea C A esset minor; quàm C D.



Casus 3. Si punctum hoc concursus ponatur intra triangulum in A; vt in 3. fig. Et tunc ostendetur propositio, ex propos. 14. Productâ enim lineâ A C, & crure C F ducatur recta A F; Et habebimus duo triangula; ex aduersarijs æquicrura C A F, & B A F.

Quia ergo B A linea cruri B F ex aduersarijs æquatur; erunt anguli super basim A F; nempe A seminiger, & niger F æquales in triangulo B F A. Angulus verò F est pars anguli I F A infra basim A F trianguli alterius A F C, & A F I totum. Ideoque angulus seminiger A, toto illo I F A minor erit, & pars ipsius nigra ad A multò minor angulo eodem I F A infra basim trianguli A C F existenti.

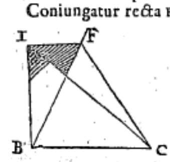


Pars verò ista nigra anguli ad A est infra basim A F trianguli A C F. Sunt ergo duo anguli infra basim apud A, niger A, & I F A inæquales. Sed rursum sunt æquales ex propos. 14. quia linea A C ex aduersarijs est ęqualis cruri C F. Ergo essent æquales, & inęquales anguli infra basim, quòd esse nequit.

Casus 4. Quod si punctum concursus ponatur extra triangulum sit illud in F. Et productis cruribus trianguli B A C, & ducta A F, & producta C I idem contexes argumentum.

Casus 5. Est. Si punctum concursus cadat extra triangulum in I assignatum ab aduersarijs tali modo; vt altera linearum posteriùs ductarum secet aliquam ex primo ductis; V. g. secet lineam B F, & excurrat in punctum I.

Coniungatur recta F I, eritque factum triangulum C I F; cuius duo anguli supra basim debebunt esse æquales; nempe angulus I niger, & angulus F seminiger ex propos. 14. quòd linea C I ab aduersarijs dicatur æqualis cruri C F. Quare pars nigra anguli seminigri apud F erit minor angulo nigro C I F, & multò minor addita ei parte nigerrima, vt fiat angulus B I F: Sed angulus niger F, & totus B I F niger sunt quoque æquales; quòd sint anguli ad basim in altero triangulo B I F, cuius linea B I ex aduersarijs æquatur cruri B F; & ideò ex pr. 14. sint æquales. Ergo æquales, & inæquales, quod esse nequit. Quare nullibi punctum concursus linearum postremò ductarum potest cadere; nisi in verticem trianguli, igitur vera propositio.



THEOR. IV. PROP. XVII. Euc. 32.

Cuiuscumque trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

Et vno crure producto, externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis.

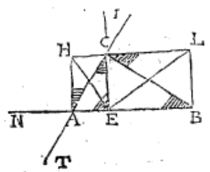
Si triangulum A B C. Volo primum ostendere angulum ad A album, C seminigrum, & B nigrum omnes internos esse æquales duobus rectis; Quòd vt ostendatur.

Progressus 1. Ducatur perpendicularis à puncto C ad basim A B ex propos. 10. & sit E C. Producto deinde A C in T, & I detruncetur ex propos. 5. C I æqualis A E, & A T æqualis E C; Et ex propos. 2. constituatur triangulum A H C; quod erit æquale ex Coroll. prop. 3. triangulo A E C; Ideoq; ad H angulus C H, & H A clausus erit æqualis angulo recto nigro apud E. Ducatur deinde H E; Eritque rursùs triangulum H C E æquale triangulo H A E ex prop 3. quod sit super eandem basim H E, & inter crura vnum H C vni A E, & alterum C E alteri H A æqualia ex effectione; Sed hæc duo componunt totum A H C E. Quòd priùs erat. Ergo ambo simul æqualia triangulis A C E; & A H C; quæ priùs erant; Sed illa erant æqualia inter se, & ideò dimidia eiusdem totius: Sed hęc etiam sunt æqualia inter se, & dimidia eiusdem totius; Ergo æqualia cum primis. Vnde H C E erit ęquale triangulo A E C, & angulus C in ipso seminiger, angulo E nigro, & recto. Sic dicas de angulo seminigro apud A, quòd erit æqualis angulo H albo, vel E nigro rectis. Vnde recti erunt angulus H A E, & H C E.

Eodem modo procedemus in constituendo triangulo C L B; & eodem pacto argumentabimur, ostendendo angulum C, & B semialbos in triangulo E C L, & E B L esse rectos angulos.

Prog. 2. Quo posito. Sic prima pars propositionis prob. In parte A C E; quę prima consideratur. Angulus apud A niger est æqualis angulo apud C nigro, & albus apud C albo apud A ex propos. 3. Coroll. eo quod æquis cruribus insistant. Quare interni trianguli niger apud C, simul cum albo apud A, sunt æquales toti semialbo E A H, nempe angulo recto.

Prog. 2. Iterum in spatio E C B angulus niger apud B, & niger apud C; vtpote æqualibus cruribus insistentes E C, & B L ęquales sunt. Item albus B, & albus apud C æquales; Ergo albus apud C, & niger apud B angulo recto E B L, vel E C L erunt ęquales. Cum ergo in triangulo A C B anguli A C B nigra pars, cum angulo A sit recto æqualis ex primo prog. & in angulo item C pars alba, cum nigra apud B sit recto æqualis, qui in triangulo A C B sunt interni anguli. Patet, quod omnes anguli interni trianguli A C B duobus rectis erunt æquales.



Prob. pars 2. Et producatur latus aliquod, V.g. N A. Quia angulus E A H semialbus rectus est,

erit

erit quoque angulus NAH rectus; & ideò angulus externus NAC, & internus CAB erũt æquales duobus rectis ex propos. 10. & propterea tribus internis angulis trianguli CAB. Tolle internum communem album apud A: remanebit itaque solus angulus externus NAC æqualis duobus internis, & oppositis seminigro apud C, & nigro apud B.

Hincque est quadrangulum quodlibet habere angulos quatuor suos quatuor rectis æquales: Cum enim CHAB in duo triangula diuidatur, & quodlibet triangulum suis angulis duos rectos angulos æquet; patet omnibus angulis suis quadrangulum quatuor rectos æquare.

COROLLARIVM I.

HInc est primo, quod angulus externus maior sit: quàm quilibet oppositus, & internus seorsim sumptus; quia duobus internis, & oppositis est æqualis; quod ostendit Eucl. propos. 16. primi, alia ratione satis difficili.

COROLLARIVM II.

SEcundò deducitur cuiuscumq; trianguli tres angulos simul sumptos æquales esse tribus angulis simul sumptis alterius: Quia tum hi, tum illi sunt æquales duobus rectis. Deduciturque etiam, quòd, si duo anguli vnius erunt æquales duobus angulis alterius trianguli; quòd reliquus angulus reliquo erit æqualis, & æquiangulum erit triangulum alteri quoad omnes angulos.

COROLLARIVM III.

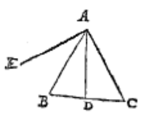
COnstat etiam in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus, fuerit rectus, quemlibet reliquorum esse semirectum; cùm omnes tres sint æquales duobus rectis, & tertius ex ipsis ponatur rectus. Quare, cùm duo reliqui inter se sint æquales, ex prop. 14. erit quilibet eorum semirectus. At si angulus cruribus comprehensus fuerit maior recto, nempe obtusus, qui ad basim sunt, erunt minus, quàm semirecti; Si verò minor recto, ideft acutus, reliqui erunt magis, quàm semirecti.

COROLLARIVM IV.

PErspicuum quoque fit. Quemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes anguli recti vel tertiam partem duorum rectorum. Quia omnes tres inter se æquales, exæquant duos rectos.

COROLLARIVM V.

FIt etiam manifestum. Quòd si ab vno angulo A trianguli æquilateri BAC perpendicularis AD ad latus oppositum BC ducatur, constitui duo triangula Scalena ADC, & BDA; quorum cuiuslibet angulus ad D rectus erit duo B, & C quisque duas tertias anguli recti; reliquorum verò ad A; vtpote partes æquales vnius anguli in æquilatero vnam partem tertiam anguli recti quisque continebit. Quamobrem si super latus AC perpendicularis ab A eleuetur EA ex propos. 9. habebis angulum rectum inter crura EA, & AC diuisum in tres partes æquales, vt sunt EAB, & BAD, & DAC anguli.



COROLLARIVM VI.

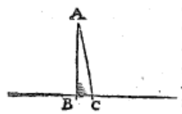
CViuscumque trianguli duos angulos duobus rectis esse minores omnifariam sumptos; Quia tres duobus rectis sunt æquales. Ergo duo tantùm erunt minores.

COROLLARIVM VII.

COlligitur quoque angulum externum superare hunc, siue illum internorum reliquo angulo opposito. V.g. NAC externum in fig. prop. superare oppositum internum ACB tantùm, quantùm est angulus B niger. Et etiam, quod duo anguli interni cuiuscumque trianguli deficiunt à duobus rectis reliquo angulo interno.

COROLLARIVM VIII.

HInc etiam manifestum est ex Proclo. Ab eodem puncto ad eandem rectam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quã vnam. Quod si fieri potest ducãtur ex A puncto ad rectam BC duæ perpendiculares; nempe AB, & AC, facientque triangulum ABC; In quo, quia AB est perpendicularis faciet angulum B internum nigrum rectum: Rursusque, quia AC perpendicularis præsupponitur, faciet angulum C album internum rectum; quòd militat contra præced. prop. in qua ostensum est, angulos duos internos cuiuscumque trianguli esse duobus rectis minores; cùm tres sint æquales duobus rectis.

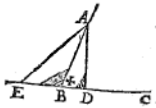


COROLLARIVM IX.

SEquitur quoque ex præc. propos. omnia triangula habentia vnum angulum rectum, vel obtusum reliquos obtinere acutos: cùm enim duo anguli interni sint duobus rectis minores, sequitur; vt si vnus sit rectus, aut obtusus, nempe maior recto; quod reliqui sint recto multò minores, nempe acuti; namque si reliqui, vel vnus eorum esset æqualis recto, vel maior, iam haberemus contra preced. propos. duos angulos in triangulo duobus rectis, aut maiores, aut æquales, sequitur quoque, quod vnus sit alterius complementum cum ambo vni recto sint æquales si tertius sit rectus.

COROLLARIVM X.

SEquitur quoque, quod si linea recta cum aliâ rectâ angulos faciat hinc, inde, obtusum vnum, alterum acutum, lineam perpendicularem à quouis eius puncto ad aliam rectam demissam, cadere ad partes anguli acuti. Faciat enim linea AB recta cum rectâ consimili DB angulum, nigrum quidem obtusum, album verò cruce notatum, acutum, & à puncto A demittatur perpendicularis AD. Cadet vtique ad partem anguli acuti albi cruce insigniti; nam si caderet ad aliam partem anguli obtusi nigri, vt facit linea altera AF; iam duo anguli interni essent duobus rectis maiores; nempe,



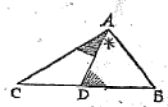
nempe, quia vnus, quem perpendicularis efficere, esset rectus, alius verò, vt niger esset obtusus ad B contra positam propositionem. Itaque si perpendicularis rectum angulum internum nigerrimum efficit ad D, alius debebit esse acutus, vt est albus cruce notatus B; sic enim positi simul minores erunt duobus rectis, vt oportet esse duos angulos internos.

THEOR. XI. PROP. XVIII. Euc. 15.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

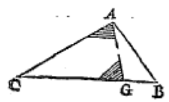
MVltâ declaratione non indiget propositio, cùm clarum sit, dici illud latus angulum aliquem subtendere, quod è regione illius est, & coniungit duo latera angulum illum comprehendentia; ita C B subtendit angulum A constantẽ medietate nigrâ, & albâ; quia è regione eius est, & copulat duo latera A C, & AB, quę illum angulum nigrum, & album A comprehendunt. Igitur ponatur, triangulum A C B habere latus C B maius alijs, *dicit, & angulum* A *nigrum, albumq; esse alijs maiorem*; nempe angulo C, aut angulo B. Et priùs probat de angulo C, & ad id pręstandum ex docum. 3. propos. detruncetur latus in D tali modo; vt recta B D æqualis sit lateri B A; ducaturque recta A D.

Probatur. Quia A B est æqualis B D, anguli ad basim A D, vt pote trianguli Isoscelis, quales sunt ad D nigerrimus, & ad A albus stellula notatus erunt inuicem æquales ex 14. prop. Sed angulus nigerrimus ad D ex Coroll. I. prop. 17. vtpote externus trianguli A D C est maior interno, & opposito C: Quamobrem, & angulus albus A stellula notatus; cùm sit æqualis nigerrimo ad D; erit maior angulo C; Sed iste est pars totius anguli A albo, nigroque constantis; Ergo iste angulus niger, albusque maior est angulo C.



Sed, vt probetur, angulum A esse quoque maiorem angulo B, replicetur idem triangulum, & à C B latere maiori detrũcetur æqualis lateri C A sitque C G, trahaturque A G: eodemq; genere argumenti ostendetur, angulum nigrum, albumque A esse maiorem angolo B.

Probatur itaque. Nam angulus niger A, nigerrimusque G sunt æquales ex propos. 14. eo quod triãgulum A C G Isosceles sit. Vnde & anguli ad basim, quales sunt nigerrimus G, nigerque A, sunt æquales. Sed angulus nigerrimus externus respectu trianguli A G B est maior opposito, & interno B. Quare etiam niger A æqualis nigerrimo G maior erit ipso angulo B: Sed angulus niger A est pars anguli A nigri albique totius trianguli A C B: Ergo erit multò maior angulo B. *Et ecce tibi ostensum angulum* A, *album nigrumque esse maiorẽ alijs angulis, cui maius latus* B C *subtensum est.*



COROLLARIVM.

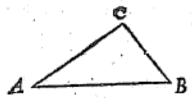
SEquitur hinc omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales. Triangulum enim Scalenum est illud, quod habet tria latera inæqualia, vt est suprapositum A C B. Si autem maius latus maiorem angulum subtendit sequitur, vt angulus A sit maior reliquis C, vel B. Iterumq; quia latus A C est maius, quàm A B, erit quoque maior angulus B angulo C: Vnde omnes erunt inæquales, maximus quidem A, minor verò B, minimus tandem C.

THEOR. XII. PROP. XIX. Euc. 19.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

PRopositio conuertit pręcedentem; Tunc autem angulus maiori lateri subtenditur, cùm è regione illius est, & super eo aperitur; ita vt ei maius latus deseruiat pro basi, eiusque latera nectat. Sit itaque triangulum A B C, cuius angulus maior C subtensus sit lateri A B, *dicit latus* A B *necessariò omnibus alijs debere esse maius.*

Prob. Nam si A B non est maius, aut latus A C, aut latus C B ei, aut æquales erunt, aut eo maiora: Hoc verò esse non potest; & primò ostendemus id de latere A C, quòd silicet, nec æquale lateri A B, nec eo maius esse possit. Nam si dicatur æquale etiam angulus B cui subtenditur, erit æqualis angulo C ex demonstratis in pręcedenti propositione, in quâ ostendimus *latus maius, maiorem angulum subtendere*, & per consequens æquale, æqualem. Iam verò in hypothesi, & propos. supposuimus angulum C omnibus alijs esse maiorem. Quòd si dicas latus A C esse maius latere A B; tantò magis vrgebit argumentum. Nam angulus B consequenter erit maior angulo C, ex 18. propos. eo quod pręsumas A C latus subtensum esse maius; & tamen in hypothesi supponimus non angulum B, sed C esse maiorem.

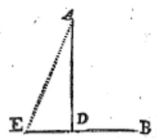


Sed modo probemus latus A C esse quoque maius latere C B, & eodem modo argumentandi vtemur. Nam si C B non est minus, sequetur vel esse maius, vel esse æquale. Sed posito B C latere maiori, vel æquali, angulus A, cui subtenditur, ex propos. antec. erit quoque angulo C, aut maior, aut æqualis contra pręsuppositum, & hypothesim. *Maior itaque angulus in sua aperitione maiorem lineam requirit; cui subtendatur, & è regione sit.*

COROLLARIVM.

SEquitur ex hac propositione lineam perpendicularem esse breuissimam inter omnes, quę à dato puncto ad subiectam lineam deducuntur.

Ducatur ex A perpendicularis, quæ vnica, (vt ex Prop. 17. Coroll. 8 cum Proclo deduximus) esse potest; & postmodum alię ab eodem puncto descendant super E B. Breuissima omnium perpendicularis erit A D: Nam si statuatur, aliam esse, V.g. A E. In triangulo itaque A D E, cum angulus D sit rectus, alius E erit acutus, cùm duo anguli in nullo triãgulo possint esse duobus rectis æquales,



ex Coroll. 6. Propos. 17. Quare ex hac Prop. 19. cùm angulus rectus D sit maior, quàm E, obtinebit quoque latus, cui subtenditur, nempe A E maius, quàm latus, cui subtenditur angulus E acutus, quod latus est perpendicularis A D: Ergo hęc perpẽdicularis minor est crure E A: quòd semper eodem pacto concludes positis alijs, alijsque lineis ab A cadentibus super E B, vt manifestum est.

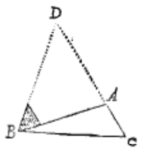
THEOR. XIII. PROP. XX. Euc.20.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora quomodocumque sumpta.

DIcit, quod si sumatur simul *duo latera trianguli* cuiuscumque; siue hęc, siue illa assumas, vt tibi placet, *comparata cum reliquo semper esse eo maiora*.

Ad quod ostendendum Euclides facit triangulum quodcumque A B C: Prolungatque vnum ex lateribus, quod libuerit, V.g. A C in D, & quod ex documentis 6. propos. perficit, A D æqualem facit lineę A B, coniungitque rectã D B: Ita quod triangulum constituatur A D B duo latera habens æqualia A B, & A D.

Probatur. Nam cùm in triangulo A B D duo latera ex constructione constituta sint æqualia; nempe B A, & D A sit (vt ex probatis in 14. propofit. constat) quòd anguli B niger, & D sint æquales, vt sunt in Isosceli bus anguli super basim: Quamobrem, cùm B niger angulus sit pars anguli nigri, albique B, trianguli D B C, fiet, vt angulus B niger albusque sua parte nigra maior, erit quoque maior angulo D, huic parti nigrę æquali. Hinc verò enascetur, quod latus D C, vtpote oppositum maiori angulo B albo, nigroque, erit maius, quàm latus B C oppositum minori angulo D (vt ex probatis in anteced. prop. constat) at tota D C est æqualis duobus lateribus trianguli A B C, nempe, quod pars C A sit vnum latus, & pars A D ex cõstructione sit æqualis lateri A B. Quamobrem si tota D C est maior latere B C, etiam malus erit latus B A, & A C eodem latere B C. Et eodem modo argumentum contexes de quibuscunque alijs duobus lateribus respectu tertij reliqui. *Quapropter omnis trianguli duo latera reliqua erunt maiora*, &c.

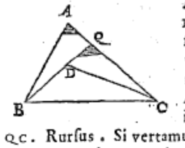


THEOR. XIV. PROP. XXI. Euc.21.

Si super trianguli vno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interiùs constitutæ fuerint: Hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt; maiorem verò angulum continebunt.

DVas partes hęc propositio habet: Prima, quę depẽdet in Probatione ab anteced. dicit. Quod si ab extremitatibus vnius lateris, puta B C duę lineę ducantur in angulum D intra triangulum A B C couenientes. *Illæ erunt minores exterioribus lateribus A B, & A C*. Dicit autem ab extremitatibus vnius lateris esse trahẽdas predictas lineas interiores, quia potest esse, si trahatur à medio E C vna earum (vt in triangulo, rectangulo, vel amblygonio) quod lineę interiores simul sumptę, sint maiores, vt prob. Proclus. Secunda verò pars est, quæ in Coroll. 6. prop. 14. fundatur; quod angulus D, quem conuenientes in apice lineę ab extremitatibus lateris vnius B C protractę, efficiunt, erit maior angulo exterioribus comprehenso, vt est angulus A in triangulo A B C. Debent autem, & hic lineę protrahi ab extremitatibus; quia angulus tunc, quem constituunt lineę non ab extremis ductę, sed ab intermedijs partibus, vt idem Proclus ostendit, potest esse maior, aut æqualis angulo exterioribus cruribus effecto.

Ad ostendendũ verò id, quod propositio proponit. Altera earum, V.g. B D continuanda est; vsque ad latus alterum ad Q. Quo facto: ita primum assertum in propositione ostendetur:



Quoniam ex propos. antecedenti duo latera A B, & A Q trianguli B A Q maiora sunt latere B Q. Si addamus vtrisque latus Q C remanebunt latera B A, & A Q cum Q C adhuc maiora; quàm duo B Q, & Q C. Rursus. Si vertamus considerationem ad aliud triangulum D Q C ex eadem propos. anteced. concludemus duo latera D Q, & Q C esse maiora latere D C, & si addamus huic D C sicut, & duobus D Q, & Q C, latus D B: Maiora adhuc erunt hęc duo D Q, & Q C cum addito D B; quàm D C, cum addito eodem B D. Modò reassumamus id, quod probatum est primò, nempe duo latera B A, & A C esse maiora, quàm B Q, & Q C. Quod si verum est; cùm B Q, & Q C sint maiora, quàm B D, & D C sequitur illa, nempe B A, & A C esse latera multò maiora: *Nempe externa, internis ab eisdem extremitatibus ductis*.

Secunda verò pars ostenditur quoque: Nimirum, quòd sit maior angulus D, quàm angulus A. Nam angulus niger Q externus respectu triãguli A B Q est maior; quàm eius internus niger A sibi oppositus: sed angulus D externus respectu alterius trianguli D Q C, est maior interno, & opposito nigro Q in eodem triangulo D Q C; *Ergo angulus D erit multò maior, quàm angulus niger A, siquidem superat nigrum Q superantem nigerrimum A*.

EXPENSIO V.

De comparatione triangulorum ad inuicem.

COmparantur hic triangula prout, aut lateribus, aut angulis talibus constant, propter quę euadant æqualia (Nam infra, vt partes parallelogrammorum comparationem quoque subibunt) & demonstratur quod datis aliquibus lateribus, aut angulis æqualibus, sequitur deinde, totum triangulum toti esse æquale.

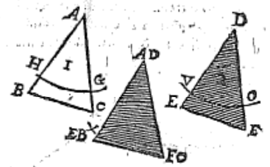
THEOR.

THEOR. I. PROP. XXII. Euc.4.

Si duo triangula habent crus vnum vni, & alterum alteri æquale, & angulum ijs comprehensum æqualem; basim quoq; habebunt æqualem.
Et totum triangulum toti erit æquale.

SIt triangulũ D E F nigrum, cuius angulus niger D sit æqualis albo A trianguli B A C crusque vnum E D vni A B, alterum D F alteri A C sit æquale. *Dicit, quòd basis E F quoque basi B C erit æqualis; & totum triangulum toti albo æquabitur.*

Probat Euclides superpositione. Nam si intelligantur vnum alteri superponi, vt E B, A D, F C, trianguli angulus D angulo A congruet, & fiet vnus angulus A D, crus verò vnum D E æquale vni A B congruet quoque, & in idem punctum finiet in E B; Sic & alterũ latus D F alteri A C ęquale finiet in idem punctum F C. Ergo basis, tum vnius, tum alterius in eadem duo puncta E B, & F C, finiet. Ergo ex 10. Axiomate erit eadem linea; Quia duę lineę in eadem puncta terminantes latitudinem non faciunt, qualis esset, si terminaret altera ex ipsis ad x.



THEOR. II. PROP. XXIII. Euc.8.

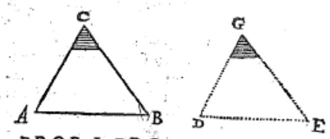
Si duo triangula, dua latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vnum vni, alterum alteri; habuerint verò & basim basi æqualem. Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt; Totumque triangulum toti æquale erit.

HÆc propositio conuertit antecedentem: Nam ibi ab æqualitate vnius anguli, & duorum crurum conclusimus æqualitatem basis, & ideò totius trianguli, hic ab æqualitate basis, & duorum crurum concludimus æqualitatẽ anguli.

Sit itaque datum triangulum, cuius basis A B basi D E alterius, & crus vnum A C vni D G, alterum B C alteri G E sit æquale. *Dico angulum C nigrum nigro G esse æqualẽ* lateribus A C, & G D æqualibus, atque C B, & G E item æqualibus contentos.

Probatur basis æqualis A B basi ęquali D E superponatur; Tunc ab eodem puncto extremo basis D, & etiam A duo latera exient æqualia D G, & superpositum A C. Sic à puncto E, idemque B duo crura æqualia prodibunt versùs easdem partes s. crus E G, & superpositum B C. Ergo ex prop. 16. in idem punctum terminabunt C, & C erit idem, ac G. Ergo eundem angulum constituent; & ideò totum triangulum toti erit æquale.

Possent autem hæ duę propositiones colligi ex dictis: hęc ex Coroll. propos. 3. illa ex propos. 4. Verùm euidentiùs, & vniuersaliùs hic rem concludimus.



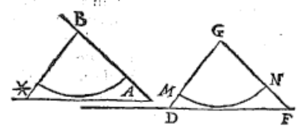
PROB. I. PROP. XXIV. Euc.23.

Ad datam rectam lineam; datumque in ea punctum constituere æqualem angulum, atque etiam triangulum alicui dato angulo rectilineo, siue triangulo.

HOc Problema parum difert à prop. 3. Tantùmque in eo aliquod discrimen patitur, quod præsuponat datas duas lineas angulum facientes, & tertiam, quæ debeat trahi, aut tractam triangulum complentem, quę tres lineę in illa dantur, vt partes vnius lineę, & absque eo quod faciant triangulum.

Sit itaque Angulus B comprehensus lineis A B, & A *, compleatur (si non sit completum) triangulum, & trahatur B *, & postmodum tracta linea indefinita diuiditatur in tres partes, singulę singulis cruribus æquales, ex prop. 6. & ex prop. 2. super eam constituatur triangulum, quod obtineat latera tribus trianguli iam facti lateribus æqualia, nempe G D lateri B *, & D F alteri * A, & tandem F G postremo A B. Nam hoc prestito *angulus F erit æqualis angulo A*.

Ratio est, quia ex propos. anteced. hęc triangula duo latera duobus lateribus vtrunque, vtrique sibi correspondenti, vt basim basi æqualem adipiscuntur. Quare & omnes angulos correspondentes æquales habebunt, & ideò angulus A erit æqualis angulo F.



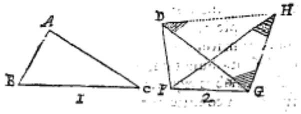
Verùm faciliùs praxis hęc fiet, si in B, & G posito centro fiat ad interuallum quodlibet circulus, sumaturq; in dato * B A portio circuli, quę intercipitur inter B *, & B A, & transferatur in altera portione circuli M N; Nam, si per puncta M, N trahas G D, & G F, à G habebis angulum G æqualem angulo B. Docet Clauius hic.

THEOR. XV. PROP. XXV. Euc.24.

Si triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque, vtrique: Angulum verò angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: & basim basi maiorem habebunt.

SIt triangulum A B C, cuius angulus A, cum angulo D trianguli alterius D F G comparatus dignoscatur maior, cùm tamen latera ambientia hunc angulum, qualia ſunt A B, & A C, ita lateribus alterum angulum D claudentibus correſpondeant, vt vnum ſit æquale vni, V.g. A B, & D F, & alterum alteri; vt A C, & D G. Concludit Euclides, *quod hoc triangulum A B C baſim quoque ſuam B C maiorem conſequitur, quàm alterius baſis ſit, nempe F G, quod vt probetur.*

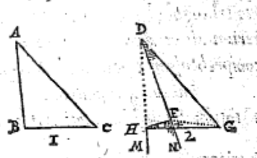
Fiat ex antecedenti propoſ. angulus D æqualis prædicto angulo maiori A trianguli A B C trahendo latus punctatum D H. Hoc autem latus ſemper cadet extra triangulum, quia angulus ad D ſit maior. Sitque hic angulus maior ad D albus, & niger; Longitudo autem huius lateris punctati D H ſit æqualis lateri D C: Trahaturque F H, quæ triplicem occupare ſitum poteſt ſecundùm diuerſitatem triangulorum, quæ ſiunt, nimirum ſupra F G, vt eſt in propoſito triangulo; In ipſam F G, ità vt vna linea ſiat. Vel infra F G ad partes exteriores, qui tres caſus diuerſam probationem requirunt. Vnde in tres partes probatio diuidenda eſt. Primò itaque ponimus cadere ſupra versùs ipſum triangulum, vt eſt F H. Coniungenda itaque ſunt extrema H, & G lineâ H G. Quò poſito ſic Euclides contexit argumentum.



Probatur. Quoniam enim latus D F eſt æquale lateri A B, ſicut & DH pūctatum lateri A C angulus quoque D ex albo nigroque integratus angulo A prioris trianguli. Sequitur ſecundùm documenta 22 propoſ. quod & baſis punctata F H ſit æqualis baſi B C prioris trianguli. Rurſus oportet conſiderare, quòd & latus D G, vt preſuponimus eſt æquale lateri punctato D H; Quare anguli ad baſim niger G, & ſeminiger H, ex doct. 14. prop. erunt æquales. At pars nigra huius anguli H, ex 6. pron. eſt minor, quàm totum ipſum nimirum, quàm pars nigra ſimul cum alba. Ergo, & angulus niger G toti H æqualis, eſt maior, quàm eius pars nigra: Sed ſi addatur angulo nigro G altera pars alba ſtellulâ notata, multò maior euadet eadem parte nigra, anguli eiuſdem H. Igitur ex doct prop. 19. ſubtendet maius latus, quod eſt F H, quàm pars nigra anguli ad H, cuius latus ſubtenſum eſt G F. Linea verò F H æqualis eſt, vt in principio oſtendimus baſi B C prioris trianguli. *Igitur F G baſis poſterioris trianguli erit minor ipſa* B C, quod probare oportebat.

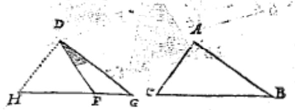
Caſus ſecundus. Sit triangulū primū A B C acutangulum, aliudq; D F G ſecundum, habens angulū D nigrum minorem angulo A, huic verò angulo D nigro addatur talis pars, vt ſiat æqualis angulo A, ex anteced. propoſ. trahendo latus punctatum D H vſque ad M. Abſcindaturque æqualis ex 6. prop. lateri D F, & ſit D H. Coniungantur deinde ſimul H, & G linea, quę cadet infra baſim F G. Rurſus coniungatur H F, & tandem prolungetur latus D F vſque ad N.

Patet itaque in primis H G baſi B C æqualem eſſe, ex prop. 22. quod angulus D albus, nigerque ſit æqualis angulo A, & latera ſecundi lateribus primi trianguli ſibi correſpondentibus æqualia, nimirum D H lateri A B, & D G lateri A C. Cùmque, & latus D F, prout ſupponimus, ſit æquale lateri punctato D H, ex 14. prop. fit, quòd anguli infra baſim, quales ſunt H niger, & albus, &



angulus alter H F N totus niger ſint æquales. Vnde hic totus niger F erit maior parte nigerrima anguli H: Angulus verò idem F niger, eſt pars anguli totius comprehenſi lineis H F, & F G, & altera eius compars cruce notata eſt, quare totus F nimirū pars nigra, & altera cruce notata ſimul, erunt multò maiores, quàm pars nigerrima anguli H. Quamobrem totus angulus F, ex documentis 19. propoſ. habebit ſubtenſum maius latus, nempe H G lineam, quàm pars nigerrima H cui ſubtenditur F G: Sed iam in principio dictum eſt H G eſſe æqualem baſi B C. Igitur F G baſis trianguli D F G, eſt minor, quàm baſis B C.

At ſi tertius caſus detur, nimirum, Quod F H neque cadat infra, neque ſupra F G, ſed in ipſam, vt fiat vna linea. Facilis eſt probatio. Nam cum angulus niger ad D ſit minor angulo A, ſi fiat æqualis addendo partem albam, & trahendo D H. Patet ex doct. propoſ. 22. quòd ſubtendet baſim H G æqualem baſi C B, & conſequenter maiorem, quàm F G.

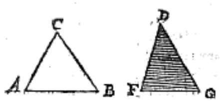


THEOR. XVI. PROP. XXVI. Euc. 25.

Si duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunq; vtrique; baſim verò baſi maiorem: & angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVo latera A C, & C D trianguli albi ſint æqualia duobus trianguli nigri D F, & D G quodlibet ſuo correſpōdenti: baſis autem A B triāguli albi maior ſit, quàm nigri F G. Dicit, & angulum C albi trianguli, qui clauditur inter lineas C A, & C B eſſe maiorem angulo D, qui lineis D F, & D G continetur.

Probatur autem faciliter. Nam ſi angulus C non eſt maior angulo D; erit, aut æqualis, aut minor ipſo. Sed ſi eſt æqualis, ſequitur ex doctr. 22. prop. quòd baſis quoque A B ſit æqualis baſi F G contra præſuppoſitum. Quia iam, quoque præſupponimus latera, quodlibet ſuo correſpondenti eſſe æqualia; tum nigri, tum albi trianguli; Quod ſi dicatur angulū C eſſe minorem angulo



lo D, tantò magis abſurdum ſequitur; Nempe, quòd & baſis A B ſit minor baſi F G. Cum aſſeramus eſſe maiorem; quia cùm præſupponamus quoque latera ſibi correſpondentia, tum albi, tum nigri trianguli eſſe æqualia, ſequitur ex propoſ. antecedenti, baſim etiam A B eſſe minorem baſi F G; ſicut angulo D minorem ſingunt angulum C. Quare cùm non poſſit eſſe angulus C aut minor, aut æqualis angulo D; neceſſariò eum debebimus fateri maiorem.

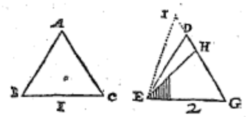
THEOR. XVII. PROPOS. XXVII. Euc. 26.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque quodlibet latus alteri lateri æquale; & reliqua latera reliquis, vtrumque vtriq; correſpondenti æqualia conſequuntur.

DEntur duo triangula. Primum ABC. Secundum DEG. Primum habeat angulum C æqualem angulo G, & alium quoque angulum, V.g. B æqualē alteri ſibi correſpōdenti ſeminigro DEG. Inſuper, & latus obtineat, ſiue quod æqualibus angulis adiacet, ſiue quod alicui ex eis ſubtenditur. Et ſit, quod adiacet BC æquale alteri G E adiacenti (vt priùs propoſitionem oſtendamus de hoc.) Dicit igitur, datis omnibus iſtis conditionibus fore quoque æqualia reliqua latera; quodlibet nempe ſuo correſpondenti, ſcilicet BA primi trianguli lateri DE alterius, & latus CA lateri GD exæquari.

* Neget igitur aliquis, quod res ita ſe habeat; tunc iſte debebit aſſignare latus, V. g. G D, quòd ſit, vel maius, vel minus latere AC. Si dicat eſſe maius; detruncetur per propoſ. 6. G H portio æqualis, & ducatur recta E H.

Probatur itaque propoſitio. Quoniam iam habemus ex hypotheſi angulum C æqualem angulo G, & B æqualem angulo D E B, etiam ex Cor. 2. propoſ. 17. angulus reliquus A erit æqualis reliquo D. Sed BC latus ex hypotheſi ęquat latus EG, & GH æquat latus AC iuxta id quod effecimus ex aduerſariorum ſententia: quare ex 22. h. cum hęc latera ſingula ſingulis correſpondentibus ęqualia ſtringant angulos C, & G ęquales etiam angulus H æquabitur angulo A, ſed angulus A æquatur angulo D, ergo etiam angulus H æquabitur angulo D contra prop. 21. huius, nam linea EH interior facit maiorem angulum H, quam D. Quod ſi dicatur latus GD eſſe minus latere AC addatur punctata DI, vt tota GI æqualis ſit ipſi AC. Et idem abſurdum ſequetur dum totus angulus punctato latere I E, & EG clauſus eſſet æqualis angulo D, quia æquatur angulo A, vt dixi, eo quod ſit i angulus ad baſim trianguli, cuius latus I G æquatur lateri AC iuxta aduerſarios, & EG ipſi BC ex hypotheſi, & G angulus angulo C, ideoque etiam angulus I æquaretur angulo D contra prop. 21. h. At faciamus, quod latus æquale datum ſit ex illis, quæ ſubtenduntur vni ex angulis æqualibus V. g. ſit EG æquale lateri BC, & oppoſitus ei angulus A



æquetur angulo D, & C angulus angulo G, tunc etiam tertius angulus B æquabitur ex Coroll. 2. propoſ. 17. angulo DEG; ſi ergo ſit latus aliquod DG maius, quam CA detruncetur GH crus æquale cruri CA, & ducatur FH. Tunc ſequetur idem abſurdum H. Quia enim EG crus æquatur cruri BC, & GH crus cruri AC ex aduerſarijs, & angulus G angulo C eſſet angulus H æqualis angulo A, & ideo ipſi æquali ex hypotheſi angulo D contr. propoſ. 21. huius.

Quod ſi ex aduerſarijs ſit minus, tunc addatur ID punctata portio, ita vt latus GI æquetur cruri CA, & ducatur EI. Quia itaque G æquatur angulo C, & crus EG oppoſitū angulo vni æqualiū D ęquatur ex hypotheſi cruri BC, & I G latus ex aduerſarijs fecimus æquale lateri AC etiam angulus H ad baſim ex prop. 22. huius æquabitur angulo A, & ideo ipſi A æquali ex hypotheſi angulo I contra 21. prop. huius.

Poſſet etiam probari propoſitio demonſtrando ſecuturum illud abſurdum, quòd pars HEG anguli DEG eſſet æqualis toti ipſi DEG ſi dicatur aliquod latus DG eſſe maius, quàm CA, vel anguli IEG pars DEG eſſet æqualis ipſi IEG toti. Si latus GD ab aduerſarijs dicatur minùs. Nam angulus DEG eſſet æqualis angulo ABC, cui æquaretur: & angulus HEG, vel IEG ex aduerſaris ob latus BC æquale lateri EG, & latus GH, vel GI aſſertum ab ipſis æquale lateri CA claudentia angulos C, & G æquales.

COROLLARIVM.

SEquitur ex demonſtratione huius Theorematis, tota etiam triangula quoad areas eſſe æqualia; Nam ſi latera A B, & BC lateribus DF, & FG æqualia ſunt; continuentque ex hypotheſi angulos æquales B, & F, ex propoſ. 22. huius erunt quoque tota triangula æqualia inuicem.

EXPENSIO VI.

De ſitu linearum ſe mutuò, nec ſecantium, nec tangentium.

CVm iam viſa triangulorum comparatione velit triangula ipſa parallelogrammis comparare Euclides; neceſſe eſt, vt hanc comparationum cognitionem, duæ notiones procedant; Prima eſt de parallelis lineis, quomodo ſe habeant ad inuicem, & deinde ex hac parallelygrammorum hauriat cognitionem; quibus cognitis, inde poſſit parallelogramma triangulis comparare, vel vt eorum partes dignoſcere.

THEOR. I. PROP. XXVIII. Euc. 27.

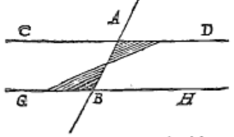
Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt lineæ.

IN duas rectas, quę ſint in eodem plano (hoc enim libro, vt notat Clauius, agitur de planis) incidat linea; nempe eas ambas ſecet, vt facit incidens AB in lineas CD, & G H: Et hæc faciat angulos alternos, nempe hinc, inde, vnus adiaceat parallelæ C D niger; & inde alter adiaceat alteri lineę parallelę G H, vt eſt nigerrimus,

faciat

faciat inquam hos angulos ęquales; *Dicit illas lineas esse parallelas, & semper æquidistantes.*

Quod, si aliquis hoc neget; Igitur adinuicem semper fient propinquiores V. g. versùs H,& D: quare tandem cõuenĩẽt; quod si cõuenient; facient triãgulum, cuius vertex erit vbi conueniunt; basis verò erit AB, & angulus B nigerrimus erit externus; angulus verò niger oppositus A, & internus, qui ex hypothesi inueniuntur æquales contra probata in Coroll. 1. propos. 17. vbi ostendimus in omni triangulo externum angulum quolibet opposito, & interno esse maiorem.



Quare maior debebit esse angulus nigerrimus ad B, vtpote externus, & oppositus; quam niger apud A eo casu, quò conueniant: Cùm itaque sint æquales anguli; lineæ CD, & GH non conuenient. Quod autem lineæ rectæ; quæ sibi inuicem appropinquãt, tandem sint coiturę in communem verticem; inter principia posuimus, cum Euclide, & verè principium censendum est, cùm nulla in oppositum hęsitatio animum pulset, si de approximatione per partes æquales agatur, vt ibi declarauimus. Licet Proclus, & Clauius nimis scrupulosè dubitent, & ostensionem astruant ad id probandum.

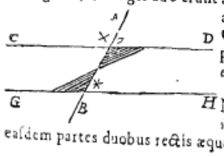
THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 26.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem efficit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales, Parallelæ inter se erunt ipsæ rectæ lineæ.

Sit angulus externus factus ab incidente AB, & linea CD cruce signatus; Angulus internus, & oppositus, sed ad easdem partes, non autẽ, vt in anteced. prop. hinc, inde, qui est niger apud B factus ab incidente AB, & lineâ alterâ GH. Dicit. *Quod, si hi anguli sunt æquales; & lineas æquidistantes. & parallelas futuras esse.*

Dicit quoque. Quòd si eadem AB cadens super rectas CD, & GH fecerit angulos internos, & ad easdem partes, vt est angulus niger, & angulus albus asterismo notatus, duobus rectis æquales; adhuc illæ parallelæ erunt.

Prob. verò 1. pars. Cùm namque angulus nigerrimus apud B sit ęqualis angulo cruce notato ex hypothesi; isq; cruce notatus sit æqualis angulo nigro, ex documentis prop. 12. (Namque linea AB secat CD; vnde anguli ad verticem, vt est niger, & cruce notatus æquales sunt.) Internus angulus niger ad B, & niger ad O erunt æquales, qui sunt anguli alterni: Quare ex pręced. prop. *lineæ* CD, GH *erunt parallelæ.*



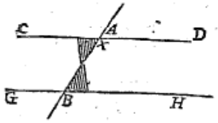
Prob. 2. pars. Nempe, si faciat internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales, incidens linea AB super duas CD, & GH; eas etiam esse parallelas: Sint itaq; angulus internus niger O, & alter asterismo insignitus duobus rectis æquales. Sunt quoque ex 10. propos. angulus niger O, & alter comprehensus lineis AO, & DO duobus rectis æquales; quòd linea DO insistat super AB. Quamobrem ablato angulo nigro communi, qui cum angulo O duos rectos æquat, & item cum angulo asterismo notato (vt præsupponimus) remanebunt angulus externus AOD, internusque, & oppositus asterismatus, æquales. Quarę ex præcedenti propositione *lineæ* CD, *&* GH *erunt parallelæ.*

THEOR. III. PROPOS. XXX. Euc. 29.

Si in parallelas rectas lineas recta incidat linea, alternatim angulos inter se æquales efficit, etiã externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem.
Et internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales facit.

Hæc propositio duas antecedentes conuertit, vt perspicuum est; tresque partes habet. Namque intendit probare primò. Quod si in duas parallelas CD, & GH incidat linea AB *angulos alternos nigrum apud* A, *& nigrum apud* B *æquales efficiat.*

Prob. sic per reductionem ad impossibile. Si isti duo anguli niger, & nigerrimus non sunt æquales, maior cõsequenter erit vnus illorum. Is itaque, V. g. dicatur niger apud A. Vtrisque per imaginationem addatur angulus cruce impressus, eruntque niger apud A, & cruce notatus simul maiores nigro apud B cum eodem angulo cruce signato. Sed niger A, & cruce signatus ex 10. propos. sunt æquales duobus rectis; Quare niger apud B, & cruce signatus erunt minores duobus rectis. Vnde ex propos. 28. coibunt illæ lineę; quia tunc interni nigri æquales non essent duobus rectis. Quod est absurdum, cùm CD, & GH ponantur parallelæ.



Secunda pars intendit ostendere; angulum A externum ęqualem esse interno, & ad easdẽ partes, vt est niger apud B, qui sunt ad eandem partem dextram. Si lineę CD, & GH sint parallelæ.

Probatur ex modo demonstratis. Nam angulus niger apud A est æqualis angulo nigro apud B, idemque ex propos. 12. est æqualis angulo A externo: Ergo angulus A externus est æqualis angulo interno opposito, & ad easdem partes nigro apud B.

Tertio intendit demonstrare angulum internum cruce notatum, & angulum nigrum B esse æquales duobus rectis. Si CD, & GH parallelæ constitutæ sint.

Nam angulus externus A, & cruce signatus internus sunt æquales, ex 10. propos. duobus rectis. Quòd linea AD cadat, & insistat super lineam AB; Sed iam ostensum est, angulum A externum esse æqualem angulo nigro apud B opposito, & ad easdem partes lineæ AB. Quare angulus cruce signatus, & niger apud B duobus rectis remanebunt æquales.

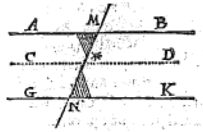
THEOR.

THEOR. IV. PROP. XXXI. Euc. 30.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ sunt, & inter se sunt parallelæ.

Presupponatur, quod lineę AB, & GK in eodem plano existentes sint alteri, vt punctatę CD, parallelę. *Dicit. Illas inter se debere esse parallelas.* Quòd, vt ostendat, super eas trahit lineam, vtcunque, quæ sit MN.

Probatur propos. Nam anguli alterni niger apud M, & stellula notatus sunt æquales, siquidem lineę AB, & CD ex constructione presupponũtur parallelę, & ideò facientes angulos alternos æquales, ex propositione antecedenti. Secundò angulus niger ad N est æqualis angulo eidem stellula notato: Quia CD, & GK ex constructione presupponuntur parallelę. Quare ex propos. antecedenti angulus internus niger ad N erit æqualis ei angulo stellulâ notato, externo, & opposito, vt patet.



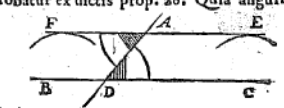
Quare concluditur, quod, cũ duo anguli nigerrimus ad M, & niger ad N sint æquales tertio, sint quoque inter se æquales: sed sunt quoq; alterni. Quapropter ex propos. 28. erunt AB, & GK lineę inuicem parallelę.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXII. Euc. 31.

A dato puncto parallelam lineam ducere datæ rectæ lineæ.

A Puncto A ducenda sit parallela lineę BC. Ducatur ex A ad BC recta AD, faciens angulum quemcunque, V. g. nigrum, huicque angulo æqualis constituatur alternus niger, ex documentis propos. 24. trahendo lineam FE: *Dicit. Lineas esse parallelas.* Vbi aduerte punctum A debere esse extra lineam BC, vt ad eam linea duci possit.

Probatur ex dictis prop. 28. Quia anguli alterni niger apud A, & niger apud D per constructionem æquales sunt. Nota parallelas faciliùs duci. Si tracta linea BC eodem interuallo, & apertione circini super duo puncta quæcumque distantia, vt sunt B, & C facto centro ducantur duę portiones circulorum æqualium, vt sunt F, & E. Et postea ducatur linea eas portiones tangens, vt linea FE. Hęc enim erit parallela; Quia puncta C, & E distant eodem interuallo, vt puncta B, & F ob radios circulorum ęquales.

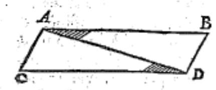


PROB. VI. PROP. XXXIII.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas ad easdem partes coniungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint rectę lineę AB, & CD æquales, atque parallelę, quę coniungantur ad easdem partes rectis; ita vt, quę à sinistrâ parte discedit lineę CD, coniungat sinistram partem lineę AB; sicut, & quę à dextra discedit lineæ CD, annectat quoque dextrã partem alterius AB; vt faciunt AC, & BD. *Dicit. Has lineas coniungentes, & esse æquales, & esse parallelas.* Quod, vt probet, oportet trahere diametrum AD ab A in D, incidetque lineis AB, CD, & AC, BD.

Probatur itaque. Nam, cùm AD incidat in parallelas AB, & CD; ex probatis in 30. propos. angulus niger ad A, & angulus niger ad D erunt æquales. Quoniam sunt alterni, qui, vt ibi demonstratum est, æquales sunt: Quapropter triangula ABD, & CDA æqualia erunt. Quoniam ex 22. propos. ea sunt triangula æqualia, quę habent vnum angulum alteri æqualem, vt est angulus niger A, & niger D, & latera eiusdem anguli sibi correspondentia æqualia; vt hic euenit; nam ex hypothesi AB, & DC sunt æquales rectæ; diameter verò AD est idem latus, quod deseruit vtrisque. Hęc inquam triangula basim quoque basi æqualem possident. *Quamobrem* AC, *&* BD *erunt æquales*; Quod erat primo probandum.



Probatur itaque. Quod etiam sint parallelæ ex eadem propos. 22. In dictis triangulis ACD, & ABD habentibus angulum angulo, & latera lateribus vtrunq; vtriq; suo correspondẽti ęqualia, etiam totum triangulum est toti triangulo æquale. Quare angulus albus ad D, & angulus albus ad A erunt æquales. Sed hi sunt alterni respectu linearum AC, & BD, ergo *hæ lineæ* AC, *&* BD *erunt quoque parallelæ*, ex propos. 28.

EXPENSIO VII.

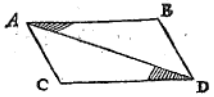
De Parallelogrammis, & Trapezijs.

Hæc Expensio diuiditur in tres partes. Prima agit de proprietatibus parallelogrammorum, tum in se, tum diametro diuisorum. Secunda comparat inuicem parallelogramma. Tertia docet quadratum constituere pręcipuam inter parallelogramma figuram.

THEOR. I. PROP. XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum anguli, & latera æqualia sunt inter se; quæ ex aduersò sibi sunt; illa verò spatia diameter bifariam secat.

Sit Parallelogrammum ABCD habens quatuor latera, quorum duo sibi aduersa sint paparallela, vt sunt latera AB, & CD. Item AC, & BD. Dicit primò. Quod hęc figura possidet quoque *hæc latera, quæ sibi ex aduersò sunt æqualia*, nempe æqualia esse AC, & BD; sicut AB, & CD. Deinde dicit quoque *angulos sibi ex aduersò existentes esse æquales*, nempe B, & C sicut & A, & D albus nigerque. Postremò diametrum quoque, si ducatur, vt AD, diuidere spatium contentum à paral-



à parallelogrammo in duas partes æquales; & hęc vno, eodemque argumento ostendit.

Probatur. Quoniam diameter inter parallelas A B, & D C reperitur, erunt angulus niger ad A, nigerque ad D æquales, ex prop. 30. vtpotè alterni. Et quia A D est etiá inter parallelas A C, & B D eodem modo angulus albus ad A, & angulus albus ad D, ex propos. eâdem 30., quia sunt alterni, erunt æquales. Quapropter trianguli A B D, & A C D duos angulos æquales duobus angulis, quilibet suo correspondenti; insuper, & latus idem possident; nempe diametrum A D, & hinc ex demonstratis in 27. propos. latera correspondentia ad inuicem æqualia quoque erunt, nempe A B, & C D opposita ad inuicem; sicut A C, & B D opposita inuicem. Quod est primum.

Probatur secunda pars. Nam angulus B, & angulus C oppositi erunt æquales, ex eadem propos. 27. Et quia supra niger apud A nigro apud D, & albus apud A albo apud D ostensi sunt equales, si simul componátur niger albusque apud A erit æqualis angulo apud D nigro, & albo, quod est secundum propositum.

Prob. tertia pars. Nam sequitur quoque ex Coroll. propos. 27. totum triangulum A B D toti A C D esse æquale. Quare spatium parallelogrammi diuisum est bifariam à diametro A D; nempe in duo triangula æqualia A B D, & A C D.

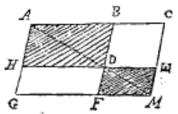
THEOR. II. PROP. XXXV. Euc.43.

In omni Parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt inter se sunt æqualia.

VIde in definit. 37. Quid sint consistentia circa diametrum, & complementa.

Dicit ergo propositio. Quod complementa nimirum in parallelogrammo A G M C parallelogramma alba H F, & D C sint æqualia.

Probatur. Quoniam ex propos. præced. triangula A C M, & A G M, quę diuidit diameter sunt æqualia. Eademque ratione in parallelogrāmo nigro maiori H B duo triangula A B D, & A H D sunt æqualia; vtpote à diametro bisecta. Sic etiam in parellelogrammo minori nigriori D M duo triangula D F M, & D E M sunt æqualia. Deme ergo à triangulis totis maximis A C M, & A G M partes æquales, nempe huic A C M triangulum nigrum, & nigrius, & deme deinde alteri triangulum quoque nigrū, & nigrius, quę primò demptis æquiualent, & residua H F, & D C complemēta remanebunt æqualia, vt in 2. pronunt.

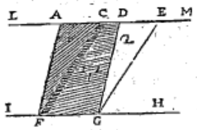


THEOR. III. PROP. XXXVI. Euc.35.

Parallelogramma super eadem basi, in iisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

DIcitur. Aliquod parallelogramum esse cum alio inter easdem parallelas, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum; vt latus A D, & C E partes sunt parallelę L M, sicut, & F G est pars parallelę I H. Dicitur verò esse super eandem basim, cùm latus alternum in parallela commune vtrisque est, vt F G. Dicit itaque hæc parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad latera, & angulos, sed quoad capacitatem, & aream: Propositio verò habet tres casus. Quare requirit tres probationes.

Probatur. Sint duo parallelogramma super basi F G eadem, & inter parallelas L M, & I H; nimirum A D F G, & C E F G, cadatque latus F C secundi suo extremo C inter latera primi inter puncta A, & D.

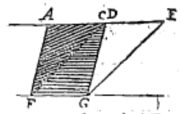


Nam cùm latus A D primi, & C E secundi sint æqualia suę basi communi, laterique opposito F G, ex preced. propos. sit vt sint æqualia inter se. Aufer itaque mente lineam C D; quę vtrisque descruit, eisque est communis, remanebunt adhuc æqualia A C, & D E segmenta.

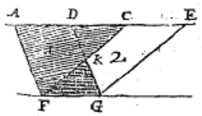
Progress. 2. Similiter iam constat ex prop. 34. latus A F nigerrimi trianguli esse æquale lateri D G albi trianguli 2; vtpote latera parallelogrammi seminigri nigerrimique.

Progr. 3. Angulus verò A nigerrimus est equalis angulo albo D ex propos. 30. quòd vnus sit externus, alter internus inter parallelas A F, & D G. Cùm itaque habeamus duo latera, quodlibet suo sibi correspondenti æqualia, nimirum A C, & D E inuicem ex 1. Prog. Sicut A F, & G D ad inuicē, ex 2. Prog. Angulumque A nigerrimum angulo D albo æqualem, ex 3. Prog. Ex 22. propos. duo triangula nigerrimum A C F, & secundum album D E G erunt æqualia, quibus vtrisque si addatur commune Trapezium nigrum C D F G, cum vtrisque idem addatur; adhuc erunt æqualia. Quare triangulum nigerrimum, & trapezium integrantes parallelogrāmū A D F G Trapezio, atq; triāgulo albo integrātibus parallelogrāmū secundū C F G E equabūtur, quod demōstrare oportebat.

Secundus casus est. Si F C latus secundi parallelogrammi cadat in D. Tunc enim ex eadem ratione A D, & D E rectæ erunt (vt primo Prog. ostensum est) æquales sicut & A F, & G D, (vt secundo) Et angulus A nigerrimus angulo D albo æqualis. Quare duo triangula nigerrimum D A F, & E D G album æqualia erunt. Addito itaque, tàm vni, quàm alteri commune triāgulum nigrum D F G complens, tàm cum nigerrimo, quàm cum albo triangulo parallelogramma nigrum, & semialbum; Ea remanebunt adhuc æqualia, nimirum A D F G, & E D F G, parallelogramma.



Tertius casus est si F C cadant extra punctum D, ita vt secet latus G D in K. Cùm itaque rectę A D, & C E ex supradicta ratione 1. Prog. æquales sint. Si vtrisque addatur D C inter eas medians. Linea A D cum addita D C, & C E cum eâdem additā D C erunt æquales. Sicut & F A, & G D ex prop. 34. Et etiam, supradicta ratione 3. Prog. angulus D niger, s. C D K externus, & angulus A niger internus æquales erunt. Quare triangulum E D G, & C A F erunt æqualia. Aufer itaque triangulum nigrum D C K per imaginationem commune vtrisque, remanebuntque duo trapezia primum subnigrum A D F K, & secundum album C E K G adinuicem æqualia. Vt itaque fiant parallelogramma æqualia, adde vtrisque mente commune triangulum nigerrimum F G K, & habebis ea æqualia, nempe A D F G, & C E F G; quod demonstrandum erat.

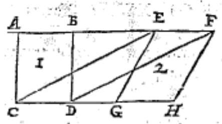


THEOR. IV. PROP. XXXVII. Euc.36.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelas constituta inter se sunt æqualia.

SInt duo parallelogramma. Primum A B C D. Secundum verò F E G H inter parallelas A F, & H C constituta, & super æqualibus basibus C D, & F E sita. *Dicit hæc esse æqualia*. Quod, vt probet, coniungit basim primi cum latere basi opposito secundi, nimirum puncta extrema ad eandem partem, V. g. sinistram, vt sunt E, & C recta C E. Similiterque duo puncta terminatiua ad partem dextram F, & D rectâ D F.

Probat verò ostendendo priùs, has lineas postremò tractas C E, & D F cum basi primi parallelogrammi C D, & basi secundi F E facere parallelogrammum, ex 34. propos. Nam cum E F basis secundi, & C D basis primi sint parallelę, & æquales sit, vt ibi diximus. Quod C E, & F D postremò tractæ sint parallelæ, & æquales, & ideò, quod C D F E sit parallelogrammum, cùm eius definitio requirat tales prorsus conditiones. Quo posito sic astruitur intentum. Quę eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia: Sed parallelogrammum primum A B C D, ex pręced. propos. est ęquale parallelogrāmo postremò facto C D E F; Eidemque est æquale ex eadē parallelogrammum secundum E F G H, ob basim eādē E F; ergo hęc nēpe primum, & secundum erunt inter se æqualia.



COROLLARIVM.

COlligitur trapezia quoque, quorum opposite bases inter se æquales, sint inter parallelas, inter se æqualia esse; nam trapeziū A E G C est æquale trapezio B D F H siquidem duo parallelogramma 1, & 2 sunt inuicem æqualia. Trapezium verò B D E G vtrisque commune: Vnde etiam idem dicendum erit si alterum latus alteri sit idem, & opposita latera sint æqualia.

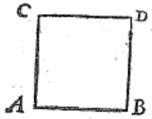
PROB. V. PROP. XXXVIII. Euc.46.

A data recta linea quadratum describere.

SIt data recta linea A B, super quam quadratum describere necesse sit.

E duobus punctis A, & B ipsi A B geminę perpendiculares erigantur, per 8. propos. & sint æquales per propos. 6. ipsi A B, & pūcta C D connectantur, *& quadratum erit constitutum*.

Probatur, quia illud erit quadratum. Quod æquiangulum, & æquilaterum est, sed figura ex facto habet æqualia latera duo nempe A C, & B D ipsi A B; Tertium verò nimirū D C, quod reperiatur inter perpendiculares A C, & B D, & ideò parallelas, ex prop. 29. quòd anguli A, & B sint duo recti. Quamobrem D C, vtpote parallelas coniungens, & æquales erit æqualis ipsi A B, & parallela, ex propos. 33. Omnia itaque latera sunt æqualia, & parallela.



Probatur secundò de angulis, nam iam duo A, & B sunt recti; quare & alij duo, D, & C, vtpote oppositi istis, ex propos. 34. erunt recti; cùm constitutum, sit quoque parallelogrammum.

EXPENSIO VIII.

De triangulorum cum parallelogrammis trapeziisque parallelis constantibus comparatione.

PArallelogramma in triangula diuiduntur. Vnde iam incipit comparare triangula; cum toto, quòd primò, & immediatè componunt; Cæterę enim figurę, licet, ex triangulis componantur; plura tamen ea componunt: Trapezia verò, & parallelogramma tantùm duo.

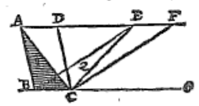
THEOR. I. PROP. XXXIX. Euc.41.

Triangulum parallelogrammi inter easdem parallelas, & eâdem basi constituti, dimidium est.

SIt Parallelogrammum seminigrum B A D C, & triangulum B C E inter parallelas A E, & B O & super eandem basim B C constitutum. *Dico esse triangulum* B E C *dimidium parallelogrammi seminigri* A D B C.

Quod vt probetur ex propos. 32. à dato puncto C ducatur parallela ipsi B E lateri trianguli, & erit factum parallelogrammum B C E F, cuius diameter C E. Diuidatur deinde parallelogrammum seminigrum bifariam ducto diametro A C. Quo posito sic propositio probatur.

Nam, cùm parallelogramma album, & semialbum sint super eamdem basim, & inter easdem parallelas, ex prop. 36. sunt inter se ęqualia; Sed illorum parallelogrammorum æqualium dimidia sut triāgula nigrum 1, & 2, ex prop. 34 Eo quia latera eorum A C primi, & E C secundi sint parallelogrammorum diametri. Quæ verò æqualium sunt dimidium, ex pronunc. 7. inter se necessariò æqualia sunt. Quapropter triangula primum nigrum, & secundum album inter se æqualia erūt. Sed nigrum est parallelogrammi seminigri dimidium. Ergo etiam triangulum album 2 erit eiusdem parallelogrammi dimidium.



COROLLARIVM I.

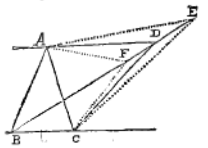
HInc patet quod triangula super eandem basim, & inter easdem parallelas constituta sint inuicem æqualia: Nam sunt triangula nigrum 1, & album 2 dimidia æqualium parallelogrammorum A C seminigri, & alterius albi B F, vt in serie demonstrationis ostensum est.

COROLLARIVM II.

ETiam esse veram propositionem conuersam, nempe *triangula æqualia super eādem basim, & ad easdem partes constituta esse inter parallelas.*

Nam sint triangula B A C, & B D C æqualia super eandem basim constituta B C, & ducta per eorum vertices A D linea, non sit parallela basi B C: Ducatur parallela; hæc cadet, vel infra, vel supra lineam vertices coniungentem A D.

Cadat primum supra, & sit A E, & producta B D, in E coniungatur C E. Itaque triangulum B C E; quod inter parallelas exaduersarijs sit, erit æquale triangulo B C A. Sed eidē ex hypothesi est æquale triangulum B D C: Ergo triangulum B E C maius esset æquale minori B D C, vtpote quod sint



vni tertio B A C æqualia, quod est absurdum.

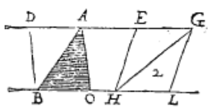
Quod si cadat infra ad F, vbi incidit, ducatur C F, & erit triangulum B C F æquale triangulo B A C eo quod ex aduersarijs sint parallelæ A F, & B C, & consequenter minus B F C, æquale triangulo B C D maiori; quod esse nequit.

THEOR. II. PROP. XXXX.

Triangulum parallelogrammi inter easdem parallelas, & æquali basi constituti dimidium est,

SIt triangulum L H G notatum numero 2, & parallelogrammū seminigrum D B A C inter parallelas D G, & B L, & constituta super æquales bases B C, & H L; Dico triangulum 2 esse dimidium parallelogrammi seminigri.

Trahatur H E parallela lateri trianguli L G à puncto H, ex propos. 32., & erunt duo parallelogramma, ex 37. prop. æqualia, & erit H G parallelogrammi



albi diameter. Trahatur quoque diameter B A in seminigro parallelogrammo.

Quo facto probatur propos. Triangula nigrū, & album 2, vtpote dimidia æqualium parallelogrammorum semialbi, & albi inuicem sunt æqualia. Ergo triangulum 2 erit etiam medietas parallelogrammi semialbi,

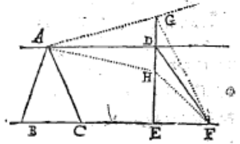
COROLLARIVM I.

COlligitur hinc; triangula super æqualem basim, & inter easdem parallelas esse inuicem æqualia. Quia sunt dimidia æqualium parallelogrammorum seminigri, & albi.

COROLLARIVM II.

ESse quoq; veram propositionem conuersam præced. Coroll. *Nempe triangula æqualia super æqualem basim ad easdem partes constituta esse inter parallelas.*

Nam eadem ratio militat, quæ superiori 2. Coroll. preceden. propos. Nam si A D ducta per vertices triangulorum B A C, & E D F æqualium non est parallela lineæ



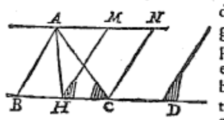
B F; erit altera; quę si cadet super A D, vt A G, ducta F G, fiet triāgulū E F G, quod ex dictis per aduersarios æquabitur triangulo A B C, & cōsequenter sibi ex hypothesi æquali E F, maius minori; quod esse nequit; Et si cadat infra, vt A H. Efficietur triangulum E H F, quod vtpote inter parallelas A H, & B F erit æquale triangulo B A C, & ideò sibi æquali triangulo E D F; minus maiori; Quod esse nequit.

PROB. I. PROP. XXXXI. Euc. 42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

DAtum triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oporteat autem facere parallelogrammum, quod sit æquale triangulo: Sed quod obtineat angulum internum aliquem æqualem angulo D. Sic efficere oportebit. Trianguli dati aliquod latus, V. g. B C diuidatur per medium in H, ex propos. 7. & per doct. propos. 24. à puncto dato H fiat angulus æqualis angulo D; trahaturque H M, vt lubet, siue ad dextram, vt in exemplo, siue ad sinistram, si commoditas postulet. Deinde per propos. 32. trahatur parallela A M ad B C à puncto dato A. Rursusque per eandem propos. 32. ducatur à puncto dato C parallela ad H M; quę occurrat parallelæ primo tractę A M, & prolungatę si oportuerit in N. Eritque factum *parallelogrammum* M N H C *æquale triangulo* A B C; quòd vt probetur linea A H coniungatur punctum H cum vertice trianguli A.

Probatur. Nam parallelogrammum H C M N duplum est trianguli A H C, propos. 39.; siquidem est super eandem basim H C; & inter parallelas A N, & B C. Sed trian-



gulum A H C est dimidium triāguli totius B A C, eo quòd duo triangula, in quę diuisum est, sint æqualia, vtpote super æquales bases B H, & H C, & inter easdem parallelas A N, & B C constituta, ergo totum triangulum A B C erit æquale parallelogrammo M N H C, vtpote ambo eiusdem trianguli A H C dupla.

COROLLARIVM.

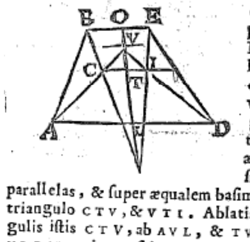
COlligitur ex Pelletario; quòd eodem pacto potest constitui triangulum in dato angulo, quod sit æquale dato alicui parallelogrammo, vt in figura huius propos. datum parallelogrammum sit M N H C, ex C puncto dato fiat angulus nigerrimus, in quo postulatur, vt fiat triangulum. Trahendo A C, & prolungato latere parallelogrammi M N, vsque dùm occurrat in A lineæ anguli dati nigerrimi A C; assumatur in linea B G, B H ęqualis lineæ H C, trahaturq; à puncto B linea A B, quę compleat triangulum B A C, quod est duplum parallelogrammi M N H C, vtpote ex probatione superioris propositionis constat.

THEOR. III. PROP. XXXXII.

Triangula Trapezijs bipartitis, duobusque lateribus parallelis clausa inter se sunt æqualia.

SInt duo triangula A B C, & I E D clausa Trapezijs bipartitis, & parallelis duobus lateribus, vt sunt A C I D, & B C E I, & A B E D, quæ habent latera A D, & C I, & B E parallela, & bipartita linea L O. *Dico hæc triangula esse æqualia.*

Probatur Trapezium A C I D linea T L latera bipartiente est diuisū in duas partes æquales. Nam productis lateribus |, vt conueniant in V, erit triangulum A V L triangulo V L D æquale; quòd sit inter easdē



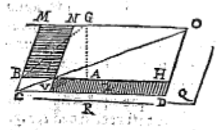
parallelas, & super æqualem basim; sic dicas de triangulo C T V, & V T I. Ablatis ergo triangulis istis C T V, ab A V L, & T V I à triangulo V L D trapezium residuum A C T L erit æquale residuo T L I D. Et idem dicendum de parte C T B O, quòd sit æqualis parti T O E I in trapezio B I; & de parte A B O L; quòd sit æqualis parti L O E D, in trapezio B D; Si ergo ab istis partibus æqualibus trapezij magni auferātur partes æquales trapeziorum C O, & C A L T, hinc ab A O; inde T E, & L T I D ab O D, remanebunt residua triangula æqualia A B C, & I E D, quod erat ostendendum.

PROB. II. PROP. XXXXIII. Euc. 44.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

SIt triangulum datum punctatum B A G; angulus verò datus Q; linea verò data R. Iam nosti ex propos. 41. facere parallelogrammum æquale triangulo dato B A G, quod parallelogrammum angulum æqualem angulo dato obtineat. Fiat igitur, & sit parallelogrammum nigrum M N B L, habens angulum L ęqualē dato Q; ipsum verò totum secundùm aream æquale sit triangulo dato punctato B A G. Extendetur ita que B L in H, ita vt L H sit æqualis datæ R. Deinde per punctum H extremum ducta parallela H O ad B M occurrat rectę M N parallelę B H, in O: Eritq; factum parallelogrammū album N H, quod diametro O L bifariam diuidatur, & producatur vltra L in C, donec occurrat lateri B M nigri parallelogrammi producto in C, deinde ex C ducatur parallela ad B H, vsque ad latus O H, productum in D. Postremò producatur latus N L parallelogr. N L nigri in V. Eritque alterum parallelogrammum nigrum longius, cuius latus L H, vel V D est æquale datæ R. Probandum verò est quod & angulus nigerrimus ad L sit æqualis dato Q, & ipsum V H triangulo dato punctato B G A.

Probatur itaque primò de angulo. Nam ex prop. 12. angulus ad L nigerrimus secundi parallelogrammi nigri lōgioris est æqualis angulo L alterius nigri primi pa-



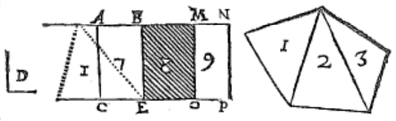
rallelogrammi, quod sint anguli ad verticem. Sed angulus L est æqualis ex constructione angulo dato Q: Ergo & angulus L nigerrimus secundi V H est æqualis eidem Q.

Probatur secundò, quod totum parallelogrāmum nigrū secundum V H sit quoad aream æquale triangulo dato G B A; nam cùm sit vnum ex complementis eorum parallelogrammorum, quę circa diametrum sunt, fit, quòd ex propos. 35. sit æquale parallelogrāmo primo nigro B N: At illud est æquale ex constructione dato triangulo B G A. Ergo & parallelogrammum secundum nigrum eidem æquale erit, quod oportebat demonstrare.

PROB. III. PROP. XXXXIV. Euc. 45.

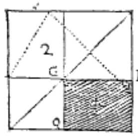
Dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

VVlt hic Euclides docere modum, quo quælibet figura rectilinea etiam si triangularis, & inæqualis, tum angulis, tum lateribus possit ad figuram parallelam reuocari. Sit itaque figura quæcunque rectilinea 1, 2, 3, quę in totidem triangula resoluenda est, per lineas ad vnum angulum protractas; Ex inde fit angulus D iuxta quem parallelogrammum æquale ijs triangulis 1, 2, & 3 oporteat costituere: ad id verò efficiendum obseruanda est primò regula, & praxis, quam in 41. propos. docuimus, & constituendum est parallelogrammum A B C E album habens angu-

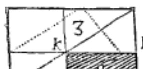


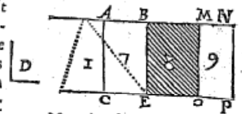
lum C æqualem dato angulo D, secundò triangulum 2 reducendum est ad parallelogrammum nigrum per regulas propos. antecedentis, vt vides factum in sequenti figura signata numero 2, quod angulum nigerrimum ad G dato angulo D æqualem possideat, & latus insuper G H æquale lateri

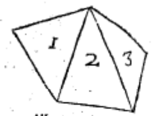
B E consequatur : Hocque transferendum est ad 3 figuram inter A B, & C E parallelas prolungatas, ita vt G H conueniat, & idem fiat cum latere B E : quod autem hoc effici possit, ex probatione constabit ; Tertiò de 3 triangulo idem efficiendum est, reducendo illud ex institutione præcedentis Prop. ad parallelogrammum nigrum, vt in tertia figurâ factum est, faciendo angulum nigrū ad K æqualem angulo dato D, & latus K L æquale lateri B E; deinde inter parallelas A B, & C E prolungatas quantum opus sit, constituendum ; ita vt apud parallelogrammum secundum nigrum collocetur, & K L cum latere M O idem fiat. Factumque erit parallelogrammum A N C P quod constabit tribus parallelogrammis 7, 8, nigro, & 9 æqualibus tribus triangulis, quodque nempe suo rectilineo, & per cōsequens toti rectilineo 1, 2, 3.



Quod ergo hic probationem reposcit est, quod parallelogrammum secundæ figuræ nigrum possit transferri inter parallelas A N, & C P, illud simul adaptando, vt precepimus lateri B E. Et priùs quod latus G H parallelogrammi nigri in secunda figura possit adaptari lateri B E patet ; quia huic B E per constructionem fecimus æquale latus G H : Quare cum eo congruet. At quia angulus G nigerrimus est æqualis angulo dato D, cui quoque æqualem fecimus angulum C, & per consequens, & angulum externū E nigrum in 1. fig. ex prop. 30. angulus G niger secundę figurę capiet prorsus, & se æquabit cum angulo E nigro, & latus G Q incedet super E O. Sic angulus H nigerrimus secundę figurę capiet adamussim, & conueniet prorsus cum angulo nigro B primæ figuræ, eo quia angulus B sit complementum anguli E ad æquandos duos rectos, siquidem ambo simul, vtpote ambo interni inter parallelas, & ad easdem partes sunt, ex prop 30. æquales duobus rectis. Et hanc eandem conditionem habet respectu anguli nigri G, & consequenter respectu anguli sibi ęqualis E in alterâ figura, angulus H nigerr. in hac figura secunda in parallelogrāmo G R cū sint inter parallelas Q G, & H R. Quare & etiam ipse erit complementum anguli E ad duos rectos æquandos, & ideò ipsi B æqualis. Vnde angulus H conueniet, & idem spatium æquabit, ac angulus B, & H R incedet cum parallela B M. Quare si fiat E O æqualis H R tracto parallelo latere M O erit B E O parallelogrammum æquale nigro G R figurę secundę. Eademque probatio applicabitur parallelogrammo nigro 3. figuræ ostendendo K L ex constructione conuenire cum M O : Angulum nigerrimum K bene collocari, & occupare idem spatium, ac angulus O exterior albus in prima figura, & angulum L nigerū in fig. 3. benè conuenire, & esse ęqualē angulo M albo in prima figura ; Quia tàm vnus, quàm alius compleant æquales angulos, nēpe nigrum K, & album O, ad duos rectos. Vnde euenit, quod parallelogrammo 8 nigro possit superaddi perallelogr. 9 album inter parallelas A N, & C P, & fieri totum parallelogrāmum A N C P æquale rectilineo 1, 2, 3.







Ne mireris ; nos hic primum librum finire ; necessè enim fuit, vt Propositionem 47. Euclidis cum alijs eiusdem generis poneremus in fine secundi Libri.

TRACTATVS V.

In secundum Librum Euclidis de æquipotentia linearum.

IN hoc secundo libro agit Euclides de linearum æquipotentium diuersis generibus. Dicuntur autem lineæ æqualiter posse ; Cùm super ipsas potest fieri quadratum æquale alteri, vel quadrato, vel parallelogrammo à duobus lineis effecto. Quando autem duę lineę dicuntur æqualiter posse, de quadratis intelligitur. Quoniam, quando non intelligitur de quadratis, tunc exprimitur, quòd possit æquè, ac rectangulum tale, vel tale. In quatuor verò expensiones tantùm hunc tractatum secabimus. In prima agemus de principijs. Secunda potentias linearum, vt sunt latera quadratorum ostendet. Tertia quatenus sunt latera triangulorum ; Et tandem ducere lineas æquipotentes, vel eas secare docebimus. Superfluum verò est texere huius libri laudes, & vtilitates enumerare. Cùm experimentum demonstraturum sit, nihil ferè sine hac doctrina in Mathematicis posse probari.

EXPENSIO I.

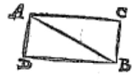
De principijs huic libro inseruientibus.

NE laboremus in singulis propositionibus ostendendo parallelogramma parua, quæ in rectangulo maiori à parallelis ad ipsius latera fiunt esse rectangula. Hic id duximus ostendendum semel ; vt hęc vnica demonstratio singulis demonstrationibus infra ponendis deseruiat. Aduerte autem parallelogrāmum rectangulū solo nomine rectanguli ab Euclide appellari.

THEOR. I. PROPOS. I.

In parallelogrammo omnes anguli recti sunt, si vnus sit rectus.

PRobatur eo quod omnia latera parallelogrammi sint parallela ex eius definit. Posito itaq; A angulo recto ; cùm A C incidat parallelis A D, & C B, ex prop. 30. l. 1. anguli interni erunt duobus rectis æquales : Sed A est rectus, ex hypothesi ; Ergo etiam C, Quòd si A, & C recti sunt : Ergo etiam oppositi D, & B anguli, ex propos. 34. primi.



THEOR. II. PROPOS. II.

Si sit rectangulum, & intra ipsum ad latera parallelæ ducantur, quæ se intersecando faciunt sunt rectangula parallelogramma.

SIt rectangulū A B magnum contentum lateribus A C, & C B : *Dico, quod si ad latera hæc ducantur parallelæ* I N, & H M, & rursus E O, & F N, *se intersecando efficere rectangula.*

Probatur primò, quòd habeat latera æqualia parallelogrammum quodlibet inclusum, V. g. N E. Nam latus O E, est æquale lateri F N, quod sit inter parallelas O N, & E F. Sic O N, & E F sunt æquales ; quòd sint inter parallelas E O, & F N, ex prop. 33. primi.

Erunt quoque omnes anguli recti : Dùm C angulus albus rectus est ex hypothesi : Ergo etiam angulus E niger, quòd ex propos. 30 sint æquales, vtpote internus, & externus. Quare ex prop. anteced. etiam omnes reliqui O, N, F. Idcircò, cùm latera omnia probata sint æqualia, & anguli ostensi sint æquales ; erit O E N F parallelogrammum rectangulum. Quod autem dicitur de hoc parallelogrammo ; dicatur etiam de alijs, cùm par sit ratio.

COROLLARIVM I.

SEquitur ex hac propos. Duas parallelas, quæ ab æqualibus partibus laterum angulum rectum comprehendentium, hinc, inde proueniunt, se decussare in segmenta æqualia : quia ab æqualibus segmentis procedunt, & ideò efficere quadrata. Talis est figura seminigra M O, quia enim E F, & H I sunt æquales ; M N, & O N sunt quoque æquales, & ideò est quadrata.

DEFINITIO.

OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duobus lineis angulum rectum comprehendentibus.

Sit parallelogrāmū rectangulū A C B D prop. 1.

Dicitur hoc parallelogrãmũ duobus rectis cõtineri; Namq; licet quatuor lineis verè cõprehẽdatur, duę tamen ſunt, quę inæquales inuicem; Illud à quadrato diſtingunt. Sic, & vnum angulum, licet ſint quatuor, ſufficit nominare; quia per rectum angulum ſecernitur à Rhombis, & à Rhomboidibus, quę nullum angulum rectum obtinent. Patet autem definitio ex propoſ. 4. in quâ demonſtrauimus, quòd in parallelogrammo, ſi vnus angulus ſit rectus, omnes alij tres ſint recti quoque.

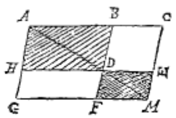
COROLLARIVM II.

SEquitur autẽ ex hac antecedẽti definitione, & propoſitione omnia parallelogramma, à parallelis ad latera in parallelogrammo maiori illa continente facta, contineri, vel ſub ipſis ſegmentis, vel ſub æqualibus ad ipſa ſegmenta à quibus illę parallelę ductę ſunt. V. g. rectangulum ſeminigrũ HE dicitur cõcludi ſub ſegmentis CH, & CE; Patet, ex definit. quia angulum C rectum concludunt; quòd verò MO ſeminigerrimum concludatur ſub æqualibus HI, & EF, patet; quia latus ON æquatur EF, cùm ſit inter parallelas; & NM latus lateri HI eâdem ratione.

DEFINITIO II.

IN omni parallelogrammo vnumquodque eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

Dicit in parallelogrammo AGCM, vnum parallelogrammum diametrum AM ambiens, V. g. nigrum cum duobus complementis albis DC, & DG vocandum eſſe *Gnomonem*; Vel alterum nigerrimum minus, cum duobus complementis ijſdem *Gnomonem* appellari. Igitur tolle mente à parallelogrammo toto ACGM vtrumlibeat parallelogrammorum nigrorum diametrum ambientium, & reliqua remanens figura Gnomon vocabitur. Sic deme parallelogrammum nigrum AD, reliquum erit Gnomon HMB, vel nigerrimum DM, & reliquum erit Gnomon EAF.



EXPENSIO II.

De potentijs linearum diuerſimodè ſectarum ad æquanda ſuorum ſegmentorum rectangula.

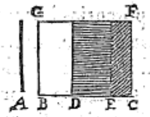
POtentię linearum ſumuntur, vel totæ, vt eorum quadrata, & rectangula æquè poſſint, ac ſegmentorũ quadrata, atq; rectangula, vel totę cũ aliquo ſegmenti, vel quadrato, vel rectangulo, vel non totę; ſed partis alicuius potentia, nimirum eius quadratum, dicitur æquale, vel ſolum, vel cum aliquo rectangulo, alijs ſegmentorum rectangulis. De iſtis ergo potentijs, ideſt quadratis, quę lineę poſſunt efficere, iuxta tres aſſignatas comparationes agemus in hac expenſione.

THEOR. I. PROP. III. Euc. 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera, in quotcumque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub duobus illis rectis lineis æquale eſt omnibus rectangulis, quæ ſub non ſectâ, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur.

SInt duę rectę A, & BC, quarum BC in ſegmenta aliqua diuidatur, vt libuerit, V. g. in partes BD, & DE, & EC. Dico, quòd ſi ex omnibus iſtis partibus fiant rectangula, à ſingulis, & non ſectâ lineâ A comprehenſa; Hæc omnia erunt æqualia rectangulo, quod ſub lineâ A non ſectâ, & lineâ rectâ ſectâ BC continetur.

Praxis 1. Conſtitue itaque parallelogrammum rectangulum erigendo duas perpendiculares ęquales lineæ A ab extremis B, C, & rectarum extremitates G, & F rectâ coniũgantur. Nam, vt probatum eſt propoſ. 38. primi de quadrato, omnia latera oppoſita erunt parallela, & æqualia, & omnes anguli recti. Quare erit factum rectangulum ſub A non ſectâ, & ſectâ BC totâ comprehenſum.

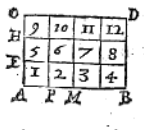


Praxis 2. Deinde ex diuiſionibus D, & E trahe parallelas alteri perpendicularium vſque ad alterum latus oppoſitum GF. Nam ex propoſ. 33. primi erunt æquales perpendicularibus, vel GB, vel CF, & conſequenter lineæ A non ſectæ: Vnde erunt conſtituta rectangula ſuper partes rectę BC, album, nigrum medium, & alterum nigrum EF, ex partibus BD, DE, EC, & lineis æqualibus datæ lineæ A.

Quare facili oſtenſione, quæ ex ipſa effectione eruitur, oſtenditur propoſitio. Rectangula album, nigrum medium, & alterũ EF ſunt conſtituta ex partibus lineę ſectę BC, & linea A non ſecta, vt 2. praxi oſtenſum eſt; Sed hæc omnia integrant rectangulum à totâ rectâ BC, & non ſectâ A comprehenſum, & idem ſpatium occupant. Quare ei erunt æqualia.

COROLLARIVM.

HInc colligit Commandinus. Idem ſequi, etiam ſi altera linearum in quotcumque ſegmenta diuidatur. Nam rectangula facta à partibus, ſegmentiſque, tum vnius, tum alterius, æquatur toti rectangulo à lineis illis duabus integris conſurgente. Id verò patet. Nam diuiſa AO in quotcumque ſegmenta, & AB pariter, & à ſingulis diuiſionum partibus ductis parallelis ſe inſecabunt, & illis interſectionibus ſe diuident in partes illis ſegmentis ęquales, à quibus ducuntur; erũtq; rectangula, ex pr. 2. Quare, cũ omnia ea rectangula, vt 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. à rectangulo toto, lineis AB, & AO comprehẽſo, cõcludantur, illi erunt æqualia.

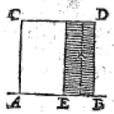


THEOR. II. PROPOS. IV. Euc. 2.

Si recta linea ſecta ſit vtcumque, rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt illi, quod à tota ſit, quadrato.

SIt recta AB diuiſa vtcunque in E, & ſuper eam conſtituatur quadratum ABCD. Dicit *hoc quadratum fore æquale rectangulis à tota BA, & parte AE, & à tota BA, & altera parte EB comprehenſis.*

Trahatur à diuiſione E parallela ad alterum laterum; factaque erunt duo rectangula, de quibus ſermo eſt, nigrum, & album; quæ ex 2. propoſ. 2. Coroll. continebuntur nigrum ſub ſegmento EB, & tota AB, vel æquali BD, & album ſub tota AB, vel æquali AC, & ſegmento AE.



Quapropter cum hæc rectangula album, & nigrum in quadrato CB contineantur, eiq; commenſurentur; patet eſſe æqualia. Vel prob. ex pręced. quia AB ſecta eſt, vtcumque, & AC data æqualis ipſi AB, vnde rectangula nigrum, & album, ex tota, & ſegmentis AB, erunt æqualia rectangulo BC à ſecta, & non ſecta comprehenſo.

COROLLARIVM.

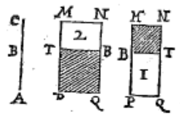
ELicies. Quod licet propoſitio de vnica ſectione loquatur; adhuc tamen verificatur de pluribus ſectionibus, ne dum vnius lineæ, ſed vtriuſque; eadem enim hæc prop. quæ 3, eſt, niſi quòd ambæ lineæ, quæ dantur, hic ponuntur æquales, quæ comprehendunt angulum rectum, & ideò hic faciunt quadratum, ibi verò inæquales, & faciunt rectangulum. Vnde quæ verificantur de pręcedenti, etiam de hac vera ſunt.

THEOR. III. PROP. V. Euc. 3.

Si recta linea ſecta ſit, vtcumque; rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, eſt æquale rectangulo, quod ſub ambobus ſegmentis continetur, & quadrato, quod ab ipſo ſegmento efficitur.

DIuidatur linea AC vtcumque in B, & eligatur, quæ pars magis placuerit, V. g. BC; fiatque rectangulum comprehẽſum à tota CA, & ſegmento BC; quod ſit I ſemialbum. Deinde à puncto diuiſionis B menſurato in PM ducatur parallela BT. Nam, quia BP eſt æqualis parti BA, & PQ parti BC erit rectangulum album I illud ſub ſegmentis contentum, de quo loquitur propoſ. Pariter cùm BM, & MN ſint æqualia ſegmento BC, rectangulum nigrum MT erit quadratum illius ſegmenti, ſub quo, & tota, rectangulum continetur nimirum MQ. *Dico itaq; rectangulum BQ ex ſegmentis, & quadratũ MT ex ſegmento, eſſe æqualia rectangulo MQ contento ab ipſo ſegmento MN; nimirum æquali BC, & tota PM æquali lineæ CA.*

Probat ex 3. propoſ. Quia linea PM ſecta eſt, vt nobis placuit, iuxta menſuram CB, & data eſt altera non ſecta æqualis, vt placet ipſi CB, nimirum MN. Vnde rectangula album, & nigrum ex non ſecta MN, & ſegmentis PB, & BM contenta æqualia erunt ex 3. huius rectangulo ex tota ſecta PM, & non ſecta MN comprehenſo; Probatur etiam alio modo. Quia rectangulum I ex ſegmentis, & quadratum nigrum ex ſegmento BC ex conſtructione continentur in rectangulo MQ. Et idem erit, ſi eligas alterum ſegmentorum, & fiat eodem modo rectangulum MQ, quod eſt 2.



COROLLARIVM.

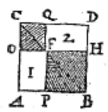
HInc eſt, ſi totum rectangulum I, & rectangulum 2 componerentur; quòd facerent quadratum, dummodo ſecundùm latera longiora NQ, vel PM fieret compoſitio. Patet, quia latera longiora, V. g. PM conſtant ex duobus ſegmentis maiori AB, & minori BC. Sed minora latera ſunt duo eadem ſegmenta maius rectanguli 2, minus rectanguli I. Quare, ſi componatur facient totum latus PM; Vnde latera erunt æqualia totius compoſiti, & ideò totum compoſitum ex duobus rectangulis I, & 2, integratum erit quadratum.

THEOR. IV. PROP. VI. Euc. 4.

Si recta linea ſecta ſit vtcumque, Quadratum, quod à tota deſcribitur, æquale eſt illis quadratis, quæ deſcribuntur à partibus, & inſuper duobus rectangulis, quæ à partibus comprehenduntur.

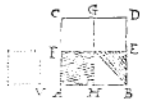
SI linea AB, vt libet, diuidatur in P. Dico; quòd, ſi ex parte AP fiat quadratum, & aliud ex alia parte PB, & ex ijſdem partibus AP, & PB duo rectangula fiant; *hæc omnia fore æqualia quadrato, quod à tota deſcribitur.*

* Probatur ex præceden. propoſ. Nam ſi fiat ex tota AB, & parte PB rectangulum QB, & in eo per parallelam HF à puncto H æquali ſegmento PB deſcribatur quadratum, habebimus quadratum nigrum ex ſegmento, & rectangulum 2 ex ſegmentis, & totum QB ea continens. Item, ſi id fiat ex parte minori AP, habebimus quadratum nigrum, & rectangulum I, ex ſegmentis, & hæc continens QA. Quæ rectangula I, 2, & quadrata nigra ęquant comprehenſa ſub tota, & partibus, vt ſunt rectangula ea continentia QB, & QA: Sed, & Coroll. propoſ. anteced. ea ſi coniungantur, faciunt quadratum æquale quadrato ex tota AB deſcripto; Ergo duo quadrata ex partibus deſcripta, & duo rectangula ab ijs comprehenſa ęquantur quadrato ex tota AB deſcripto.



COROLLARIVM.

Hinc elicitur, lineas duplas facere quadrata sui quadruplicia. Nam si detur linea V. & dupla A B, super quam fiat quadratum A B C D; & diuisis lateribus singulis per medium, trahātur parallele ad latera F E, & H G: quę se intercipiendo ex 2. huius propos. Cor. æqualia



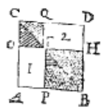
efficient segmenta, quod sint dimidia æqualium laterum quadrati magni C B. Sequitur omnia quadrata esse, & æqualia inuicem, & consequenter quadrato V punctato, cui ob lateris A H, quod sit dimidium A B æqualitatem, ex eis vnum, V. g. nigrum quadratum æquatur; Ergo & omnia: Sed hęc quadrata sunt quatuor. Ergo quadratum illi continens C B quadruplum est quadrati punctati V.

COROLLARIVM II.

Elicitur quoque è contra; quòd si quadratum sit quadruplum alteri; latus maioris esse duplum minoris lateri: Quia, cùm quadratum nigrum in minori quadrato sit ęquale minori pūctato V, sequitur; vt latera quoque sint ei æqualia: Quare A H æquale erit lineę V. Sed A H est æquale lineę H B; quòd quadratum eius seminigrum sit æquale ex hypothesi nigro. Ergo etiā latus H B est æquale lateri V. Quaderè totum latus A B erit duplum lateris V.

COROLLARIVM III.

Hinc quoque manifestatur. Parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata: Quia demonstrabitur ductam diametrum in figura propositionis, C F, & F B in quadratis nigris esse vnam, & eandem lineam; si rectangula C F, & Q B componantur, ita vt partes ęquę commensurentur. Nam tunc latus P F rectanguli, & Q F alterius coincident, & eandem lineam fiēt cum lateribus rectangulorum nigrorum; Vnde quadrata nigra se tangent in puncto F, quare, & diameter C F, & F B se tangent in eodem puncto. Erunt etiam in directum, quia anguli apud F recti à diametro bifariam diuiduntur, ex propos. 34. & latera subtensa sunt æqualia, vtpote latera quadratorū: Cum itaq; anguli C F Q, & H F B nigri sint semirecti, & angulus F rectus; Ergo lineę C F, & F B incidentes in lineam, V. g. Q F faciunt angulos semirectum nigrum, & album cum altero semirecto ad eandem partem nigro duobus rectis æquales; Quare illi ex prop. 11. lib. 1. diameter C F, & F B in directum erunt, & erit vna linea; & ideò diameter quadrati C B maioris. Ergo parallelogramma nigra circa diametrum quadrati C B magni erunt quadrata.

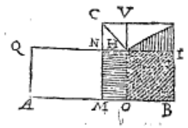


THEOR. V. PROP. VII. Euc.5.

Si recta linea secetur in partes æquales, & inæquales, rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vnà cum quadrato, quod nascitur ab intermedia sectionum, æquale est ei quadrato, quod à dimidia describitur.

Diuidatur linea A B in partes æquales, vt in M, & non æquales in O: Superque medietatem M B fiat quadratum; tractoque diametro B C, ab o puncto inæqualium partium, excitetur parallela O V lateri quadrati, V. g. C M, & vbi secat diametrum in H ducatur Q I parallela ad A B, & ducta ab A ei perpendiculari A Q, erit rectangulum O Q ex parte nigrum segmentis inæqualibus A O, & O B contentum, *de quo dico; quod cum quadrato ex M O inter media sectionum s. quadrato C H, sit æquale quadrato à medietate descripto C B.*

Probatur. Nam pro Progress. primò ex Coll. 3. anteced. prop. Rectangula nigrius, & album sunt quadrata, vtpote circa diametrum C B consistentia. Quadratum verò paruum album, ex prop. 2. Coroll. 1. huius



factum super N H, dicitur etiam factum super M O intermedia sectionum; & latus O H rectanguli Q O ex parte nigri æquatur ipsi O B: Vnde habemus rectangulum Q O, & quadratum paruū C H, de quibus loquitur propositio, & dicit esse æqualia quadrato B C ex dimidiâ.

Progress. 2. Considerandum deinde complementa nigrum, & seminigrum, ex propos. 35. primi inuicem esse æqualia, quibus vtrisque, si addas quadratum nigerrimum per imaginationem adhuc remanebunt æqualia.

Progress. 3. Complementum autem alterum nigrum N O, cum quadrato nigro addito æquatur rectangulo albo M Q, vtpote ex propos. 37. primi inter parallelas, & super æquales bases A M, & M B posita.

Progress. 4. Idcircò concluditur, quod si complementum semialbum, cum quadrato nigro, ex 2. Progress. æquatur complemento nigro, & eidē quadrato nigro: At huic tertio, ex 3. Progr. æquatur rectangulum album; quod etiam sint æqualia inuicem rectangulum videlicet album, quadrato nigro, cùm complemento semialbo.

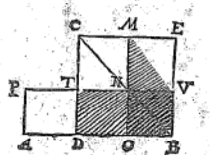
Progress. 5. Adde itaque vtrisque æqualia, nempe rectangulo albo complementum nigrum, & fit rectangulum ex segmentis inæqualibus O Q, & quadrato nigro, complementoque seminigro idem complementum nigrum, vt fiat Gnomon N B V: Eritque rectangulum ex segmentis inæqualibus Q O æquale Gnomoni N B V: Adde rursus vtrisque quadratum album C H, *eritque rectangulum Q O cum quadrato C H, æquale Gnomoni N B V cum quadrato eodem C H complente quadratum, nimirum C B, ex dimidia*, quod erat probandum.

THEOR. VI. PROPOS. VIII. Euc.6.

Si recta linea data bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehensum à totâ datâ, & additâ, tamquam vno latere, & adiectâ solùm, tamquam alio, vnà cum quadrato, quod describitur à dimidia; æquale est quadrato, quod à medietate, & adiuncta; tamquam vnâ lineâ, describitur.

Si data linea A O diuisa per medium in D, & ei alia addita sit O B. Dicit propositio, quòd si à dimidia, & addita simul, nimirum D B, fiat quadratum C B, & ex tota A O data, cum adiecta tamquam vnâ lineâ A B, & adiectâ solùm pro alio O B; vel æquali B V, fiat rectangulum P B; *Quod hoc rectangulum sit æquale illi quadrato C B, non tamen se solum; sed cum quadrato N C, quod fieret ex D O dimidia.*

Progress. 1. Ductâ lineâ O M; & diametro C B per N. Rectangulum A V habet latus B V æquale adiectæ O B, ex hypothesi; Ergo nigerrimum rectangulum, ex Coroll. 3. propos. 6. est circa dia-



metrum, & ideò quadratum: Ergo latus O B est æquale lateri B V: Alterum verò latus A B est tota data A O, cum adiecta O B, ideò est rectangulum, de quo loquitur propos.

Sic C N est quoque quadratum, quòd sit circa diametrum, & ex Coroll. 2. propos. 2. dicitur contineri à linea D O dimidiâ; Ergo est quadratum, quod cum rectangulo predicto æquale probandum est quadrato C B ex dimidia D O, & adiecta O B, tamquam vno latere confecto, vt vult propositio.

Progress. 2. Nunc considerandum est complementa inuicem, ex propos. 35. primi esse æqualia nigrum T O, & seminigrum. Sed complemento nigro est æquale rectangulum album P D, vtpote in parallelis, & super æquales bases A D, & D O, ex propos. 37. primi. Ergo rectangulum album, erit æquale complemento seminigro.

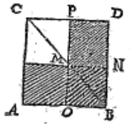
Progress. 3. Addamus complementum nigrum T O, & quadratum nigrum rectangulo albo, & fiet rectangulum P B de quo loquitur propositio: Addamus quoque eadem, nigrum complementum, & quadratum nigrum complemento semialbo, & fiet Gnomon T B M: Vnde additis vtrinque ijsdem, rectangulum P D æquale priùs, ex 2. Progress. complemento seminigro, erit æquale Gnomoni T B M.

Adde rursus quadratum C N album, ex dimidia; ipsi Gnomoni fiet quadratum C B: Adde quoque rectangulo P B etiam hoc quadratum album C N; & erit æquale, quadrato C B, quemadmodum priùs erit æquale Gnomoni; quod volebat propositio.

THEOR. VII. PROP. IX. Euc.7.

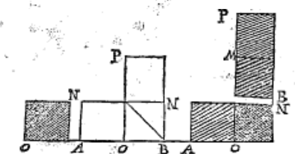
Si recta linea secetur vtcumque; quod à tota, quodq; ab vno segmentorum vtraque simul quadrata fiunt æqualia sunt illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit quadrato.

Sit data A B, quę vtcumque secta sit in O. Dico, quod, si fiant duo quadrata, vnum minus ex segmento, quod eligeris, vt B O; alterum maius C B ex tota: Deinde fiant duo rectangula, vt A N, & B P sub tota, & eodem segmento comprehensa, *erunt illis quadratis æqualia addito tamen rectangulis quadrato alterius segmenti* A O.



Progress. 1. Si rectangula A N, & P B superponantur, & latus maius ponatur super minus efficietur pars O N quadrata, cùm O B, & B N sint æquales parti minori O B; & ideò inter se, quare efficietur Gnomon A B P æquale duobus rectangulis non solùm tamen; sed addito quadrato nigro O N, cùm causā superpositionis illud quadratum O N nigrum, quod in duplici rectangulo erat duplex, in Gnomone factum sit vnicum.

Progress. 2. Adde deinde Gnomoni A B P qua-



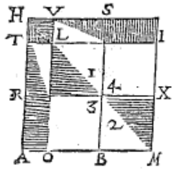
dratum ex reliquo segmento, ex prop. 2. Coroll. 2. complebit quadratum magnum C B, nam ex eo Coroll. quadratum C M est idem, ac quadratum ex A O: Itaque quadratum C B magnum cum quadrato nigro O N ex segmento est æquale duobus rectangulis A N, & P B nigris; sed non solis; verùm addito illis ipso quadrato C M ex A O altero segmento. Quod vult propositio.

THEOR. VIII. PROP. X. Euc.8.

Si recta linea secetur vtcumq; rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tamquam ab vna linea, describitur quadrato.

Sit linea A B secta vtcumque in O. Dicit, quòd si fiant quatuor rectangula comprehensa à tota A B, & altera portionum, quam volueris, V. g. O B; & postea ex reliqua portione A O fiat quadratum: hæc omnia fore æqualia quadrato ex tota A B, & portione, quæ pro rectangulis comprehendendis electa est. Nimirum O B, ſi lineę toti hęc pars inſuper adderetur, & fieret A M.

Facto quadrato ſuper A M, quod ſit M H, ab extremo datę B, & ſectionis pũcto O ecci-tentur perpendiculares O V, & B S; perque puncta 4, & L in quibus ſecant diametrum agantur parallelę R X, & T I.



Probatur modo propoſitio, ex ipſa conſtructione.

Progreſſ. 1. Itaque inprimis rectangula H L nigrum, & ſemialbum 1, & 2 ſunt quadrata, vtpote circa diametrum exiſtentia, ex propoſ. 6. Coroll. 3. Et ex Coroll. 2. propoſ. 2. ſunt facta ex O B: Ergo etiam reliqua duo alba, ex defin. 1. quia eorum angulus 3, & 4, continetur æqualibus lateribus ſeminigrorum quadratorum, erunt quadrata.

Progreſſ. 2. Rectangula quoque nigra, & ſeminigra, vt O R, & alia tria ſunt æqualia inuicẽ; ſiquidem æqualibus duobus lateribus comprehenduntur A O. & O B, ex Coroll. 2. prop. 2. huius, vt per ſe patet: Nam L V eſt æqualis T L, &c. Sic A R æquatur lateri V S, &c.

Progr. 3. Adde itaque rectangulum O R, quadrato O 3 eritq; rectãgulum R A B 3 cõprehenſum ſub tota A B, & ſegmẽto O B; & ſi reliquis ſingulis quadratis addas ſingula rectangula quadratis ſemialbis ſemialba rectangula, & albis quadratis nigra rectangula, erunt quatuor rectangula; de quibus loquitur propoſitio ſub tota A B, & ſegmento O B comprehenſa, quæ cum quadrato H L nigro alterius ſegmenti A O integrant quadratum magnum ex tota A M confectum, & ei adæquantur, quod erat oſtendendum.

EXPENSIO III.

De potentiâ laterum Triangulorum.

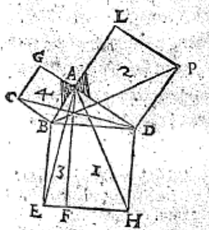
EXcerpſimus propoſitionem 47. & 48. à primo libro; & hic ſub ſuo titulo appoſuimus; vt ordo ſeruaretur materiarum, ſpretis numeris: Vnde audacię venia dabitur, quę in melius ceſſerit. Eximiam autem hęc Expenſio conſequitur vtilitatem: quòd in ipſâ menſura triangulorum, quoad areas fundetur, & ferè vniuerſa Mathematica maximè in hac inixa ſit; vt vllus tractatus in ea vix reperiatur; qui multas ex hac Expenſione probationes, principiaque non deſumat.

THEOR. I. PROP. XI. Euc. 47. Primi.

In triangulis rectangulis quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt duobus quadratis, quæ à lateribus angulum rectum continentibus deſcribuntur.

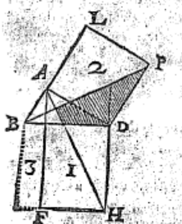
Fiat rectangulum habens rectum angulum A; duo verò latera quomodocumque, ſeu æqualia, ſeu inæqualia A B, & A D angulum A claudentia, baſiſque ſubtenſa angulo recto A ſit B D. Fiat itaque ex propoſ. 38. primi, quadratum 4 ſuper A B, & aliud 2 ſuper A D, & ex baſi B D fiat aliud quadratum 1 3. *Dicit itaque propoſitio; Quod quadratum 1 3 baſis ſit æquale quadratis 2, & 4 laterum angulum rectum ſtipantium.*

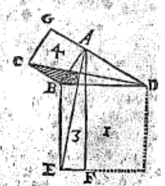
Quod, vt probet, ſecundùm documenta propoſ. 32. à puncto dato A: nempe vertice anguli recti ducit parallelam A F lineę B E, quę diuidat quadratum 1 3 in duas partes 1, & 3. Deinde ab angulis quadratorum ad angulos trianguli oppoſitos rectæ ducuntur, vt C D, & B P, & etiam E A, & H A ab angulis quadrati baſis ad angulum rectum A. Quæ ductæ faciunt triangula hinc quidem C B D, & E B A: Inde verò A D H, & B D P infra conſideranda.



Probatio autem in tres conſiderationes ſecernitur. Vnde Progreſſus 1. intendit probare latera quadratorum ex cruribus, quæ angulo recto adiunguntur in vnam eandemque lineam conuenire, cum cruribus ipſis trianguli angulum rectum claudentibus, quale eſt latus C A quadrati 4, & A L quadrati 2; nimirum vnicam lineam eſſe B A, & A L ſicut A D, & A G. Hoc autem ſic oſtenditur. Crus A B incidens in crus A D angulum rectum A trianguli efficit, & latus quoque quadrati A L incidens in idem crus A D angulum rectum nigrum efficit quadrati. Ergo hæ duę lineę incidentes in eandem; & facientes duos angulos rectos in directum erunt, ex prop. 11. pr. & vnam rectam B L efficient. Et idem erit de linea G A reſpectu lineę A D, quę incidentes in lineam B A angulos rectos efficiunt quadrati nigrum, & trianguli A. Vnde G A, & A D erit vna recta linea G D.

Progreſſ. 2. Vergit ad probandum triangula





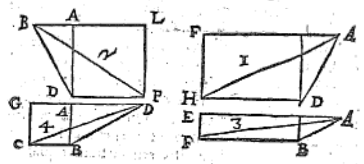
C B D, & A B E eſſe æqualia. Similiterque B D P, & A D H: quę claritatis gratiâ in duas figuras diuiſimus: Itaque in maiori figurâ 2. habemus triangulum A D H, & D B P, de quibus dico. Equalia eſſe. Si quidem illa triangula ſunt inuicem æqualia, ex propoſ. 22. Primi; quorum vnum crus vni, & alterum alteri eſt, & angulũ concluſum æqualem obtinent; quod de triãgulis B D P, & A D H propoſitis verificatur. Quoniam latus D P vnius eſt æquale lateri A D alterius, cùm ſint eiuſdem quadrati 2, & latus B D prioris lateri D H alterius poſterioris; quod ſint latera eiuſdem quadrati 1 3. Angulus quoque A D P niger, eſt alteri angulo albo B D H ęqualis, vtpote recti ambo, & ſpa-

& ſpatium B A D nigriùs commune vtriſque, quare totus angulus niger apud D addito ſpatio B D A æquabit totum angulum album apud D, addito illo ſpatio eodem B D A, qui ſunt anguli triangulorum æqualibus cruribus concluſi: Quare ipſa triangula erunt quoq; æqualia B D P, & A D H.

Hæc autem eadem probatio oſtendit etiam æqualitatem triangulorum C D B, & A B E in altera figura minori 4. Quoniam latera A B vnius, & B C alterius ſunt æqualia, vtpote latera eiuſdem quadrati 4. Item latera E B vnius, & B D alterius, quod ſint latera quadrati 1 3. Duo quoque anguli A B D æquales; quoniam, quidem angulus trianguli ad B nigrior communis vtriſque reliquus verò niger, in quo hic non occupat alterum album apud B angulus rectus eſt, ſicut & albus. Quare triangula C B D, & E B A erunt æqualia.

Progreſſ. 3. Comparat triangula cum quadratis; & intendit oſtendere quadrata quoad continentiam, & aream eis eſſe duplicia: Pro quo reminiſcendum eſt id, quod diximus in primo Progreſſ. nimirum G A, & D A, & ſimiliter A L, & A B eſſe lineas in directum poſitas, & vnam lineam rectam conficere. Deinde reducendum eſt ad memoriam. Quod fecerimus lineam A F parallelam lateribus B E, & D H quadrati 1 3, & ideò diuidere illud in duo parallelogramma 1, & 3.

Quo poſito conſideremus priùs parallelogrammum 1 comparando illud ad triangulum H D A, & videbimus ambo ſuper baſim H D, & eſſe inter parallelas F A, & H D: Quare concludemus ex propoſ. 39. Lib. 1. parallelogrammum 1 eſſe duplum trianguli D H A. Eodemq; argumento vtemur ad probandum paruum parallelogrammum 3 eſſe duplo maius, quam ſuum triangulum F B A.



Eodemque methodo probabimus de quadratis, nimirum eſſe dupla ſuorum triangulorum. Sic quadratum maius 2 eſt inter parallelas D P, & B L (B L enim eſt vna recta, vt oſtendimus Progreſſ. 1.) & ſuper eandem baſim D P. Vnde quadratum 2 erit duplo maius trianguli B D P.

Idem quoque argumentum vrgebit de quadrato 4 reſpectu ſui trianguli C B D: Nam inter parallelas G D, & C B, & ſuper eandem baſi C B collocatum, duplum erit trianguli C B D.

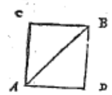
Progreſſ. 4. Quibus omnibus oſtenſis argumentum clauditur oſtendendo parallelogramma quadratis, quodlibet ſuo correſpondenti, & ad eandem partem rectanguli cõſtituto æquari. V.g. Parallelogrammum 1 cum quadrato 2, & parallelogrammum 3 quadrato 4.

Hoc verò deducitur à Progreſſ. 3. Nam, cum triangula facta ſuper baſim parallelogrammi 1, & quadrati 2, ſcilicet B D P, & A D H, ſint probata æqualia: Ergo etiam parallelogrammum 1, & quadratum 2, vtpote dupla triangulorum erunt æqualia ad inuicem. Et tale erit parallelogrammum 3, & quadratum 4, vtpote dupla ſuorum triangulorum æqualium.

Quoniam itaque quadrata 4, & 2 ſunt æqualia parallelogrammis 3, & 1, quæ integrant totum quadratum 3 1 factum ex baſi B D; Ergo *quadratum ex B D angulum rectũ ſubtendente æquatur duobus quadratis factis ex lateribus B A, & A D angulum rectum concludentibus.*

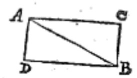
COROLLARIVM I.

EX hac propoſitione, quadratum diametri duplum quadrati lateris, arguitur. Quoniam angulus, cui diameter A B ſubtenditur, qui V.g. eſt C, rectus eſt, & triangulum A C B rectangulum eſt; Quare quadratum diametri eſt æquale quadrato duorum laterum; ſed illa laterum quadrata ſunt inuicem æqualia; Ergo quadratum diametri erit duplum vnius eorũ ſeorſim ſumpti.



COROLLARIVM II.

ELicitur quoque quadratum diametri figuræ altera parte longioris æquale eſſe duobus quadratis laterum A C, & C B: Quia diameter A B ſubtendit angulum rectum C.



THEOR. II. PROP. XII. Euc. 48. l. 1.

Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur æquale eſt eis, quæ à reliquis lateribus trianguli deſcribuntur, quadratis, angulus comprehenſus ſub reliquis trianguli lateribus rectus eſt.

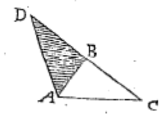
COnuertit hęc propoſ. antecedentem ad hoc, vt oſtendat ſecurum fore argumentum ab æqualitate quadrati baſis, & laterum ad rectitudinem anguli.

Sit itaq; triangulum A B C. Dicit, quòd ſi quadratum confectum ſuper latus maius A C, ſit æquale quadratis ſimul ſumptis crurum A B, & B C, *angulum B fore rectum.*

Vt autem id oſtendat erigit ſuper vtrumlibet laterum, V.g. A B à puncto B anguli, qui maiori lateri opponitur, verſus partes exteriores perpendicularẽ B D æqualem reliquo lateri eiuſdem anguli B C: Poſtea coniungit extremum D cum extremo lateris B A, ſuper quod perpendicularis erecta eſt.

Prob. Progr. 1. Baſis A D trianguli nigri deſcribit quadratum æquale duobus quadratis, quę deſcribuntur à lateribus A B, & B D angulum rectum A, ex effectione, claudentibus; vt pręced. propoſ. oſtenſum eſt.

Itaque quadrato eidem ex baſi erunt æqualia quadrata ex cruribus A B, & B C albi trianguli; quòd crus B C ſit ex effectione æquale cruri B D, & crus A B commune.



Idcirco etiam quadratum ex baſi C A æquale quadratis crurum albi trianguli, ex hypotheſi, conſequenter æquabitur

quadrato

quadrato ex basi nigri trianguli, vtpote æquali æqualibus quadratis crurum.

Progress. 2. Cùm itaque quadrata basium A C, & A D sint æqualia; ipsę quoque lineę erunt ęquales A D, & A C, quòd quadrata æqualia æqualibus etiam constent lateribus.

Quadere ex propos. 23. lib. 1. angulus apud B albus erit æqualis nigro. Quia crura cruribus singula singulis, & basis basi ostensa est æqualis; Sed angulus niger apud B rectus est ex effect., ergo etiam albus B erit rectus.

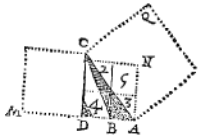
THEOR. III. PROP. XIII. Euc. 12.

In Amblygonijs triangulis quadratum, quod fit à basi angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à cruribus eundem angulum comprehendentibus rectangulo basis comprehenso sub altero ex istis cruribus, in quod perpendicularis à vertice cadat, & sub adiuncta linea, quæ inter perpendicularem, & crus alterum intercipitur.

SIt triangulum Amblygonium A B C, & angulus apud B niger, obtusus, & perpendicularis C D cadat extra triangulum in crus A B prolungatum in D; nempe ad partem anguli acuti, vt Coroll. 10. prop. 17. (posset etiam cadere in latus B C ab A, si placeret.) Dico, quod quadratum descriptum ab A C basi angulo obtuso subtensâ *est maius, quàm duo simul, quæ describuntur iuxta mensuram laterum* A B, & B C angulum obtusum ambientium; *& excedit illa rectangulis duobus*, quę fiunt à crure A B, in quod productum perpendicularis ducta est, & à segmento exteriori D B, quod est inter C B crus alterum, & C D perpendicularem.

Progress. 1. Probatur itaque, cùm enim recta A D diuisa sit vtcumque in B, ex propos. 6. erit quadratum rectę totius A D, æquale quadratis segmentorum 2, & 3, & rectangulis duobus 4, & 5 in segmentis comprehensis: Ex pręced. verò propos. quadratum A Q ex basi obtusum angulum subtendente punctatum, est æquale duobus punctatis C M, & D N crurum perpendicularium C D, & D A; quòd angulus niger D sit rectus. Quapropter quadratum A Q ex basi erit æquale quadrato C M perpendicularis C D, & duobus quadratis 3, & 2 ex segmentis, simul cum rectangulis duobus 4, & 5 segmentorum ipsorum.

Progress. 2. Quadratum verò cruris C B angulum obtusum B ambientis (quòd tibi mente supplendũ est) erit æquale duobus quadratis C M ex perpendiculari D C, & quadrato ex B D, nimirum quadrato 2 ex eadem antecedenti



propositione, quòd sit subtentum latus angulo nigro D recto. Pone itaque illud mente conceptum ex C B pro istis duobus ex D B, & C D adhuc quadratum maximum pũctatum A Q ex latere A C erit ęquale quadrato imaginato ex C B quadratoq; 3 ex B A duobusque rectangulis 4, & 5 ex segmentis. Quapropter *quadratum* A Q *basis erit maius quadratis Crurum angulum obtusum claudentium* C B, *&* B A, *duobus rectangulis 4, & 5, quæ sub segmentis* D B, *&* B A *continentur*, quod erat ostẽdẽdũ.

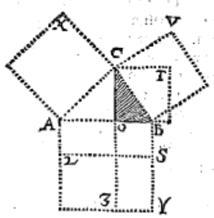
THEOR. IV. PROP. XIV. Euc. 13.

In omni triangulo Oxigonio Quadratum lateris angulum acutum subtendentis, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus illum acutum comprehendentibus rectangulis duobus comprehensis ab eo latere, in quod perpendicularis cadit, & segmento eiusdem inter perpendicularem, & angulum acutum intercepto.

SIt triangulum A B C, quod crus, V. g. A C oppositum angulo dato acuto B nigro habeat. Dico quod hæc basis describit quadratum A X minus quadratis B V, & A Y crurum illum angulum ambientium A B, & B C; Quantitas autem, quâ inuenitur minus, sunt duo rectangula, quę comprehenduntur pro vno latere à toto crure ex ijs, quę acutum angulum ambiunt, V. g. A B, in quod perpendicularis cadat, & pro alio latere claudatur ab eo segmento, quod intercipitur inter punctum O, & verticem B; Nimirum inter punctum illud, in quod cadit perpendicularis, & acutum angulum. Itaque quadratum punctatum A X minus est quadratis A Y, & B V punctatis rectangulis A S, & O Y.

Progess. 1. Deductâ perpendiculari ad alterum crurum ex ambientibus, puta A B: Latus A B erit sectum vtcumque in O. Quamobrem ex propos. 9. huius rectangula duo punctata A S, & O Y comprehensa à crure toto A B, & portione O B, vel æquali B S, & quadratum 3 2 ex A O sunt simul æqualia quadrato toti A Y, sed non soli, verùm simul cum quadrato O S. Quamobrem addito quadrato O T punctato ex perpendiculari O C vtrinque, adhuc hęc illis remanebunt æqualia; nempe rectangula A S, & O Y qudratum 3 2, & O T nuper additum æquabuntur eidem O T, & quadrato A Y, & quadrato O S.

Progress. 2. Quadratum factum super crus C B alterum ambientium angulũ nigrum acutum B, nempe B V, ex propos. 11. huius est æquale duobus; nempe ei O T, quod à perpendiculari fit, & alteri minimo O S propter angulum nigrũ rectum O, cui sub-



tenditur. Quapropter B V poterit substitui loco horum duorum, quibus æquatur. Et hinc emerget quod rectangula illa duo A S, & O Y, quæ cum quadratis O T, & 2 3 erant æqualia tribus quadratis in Progr. 1. nimirum A Y, & O S, & O T sic nunc cũ ijs sint æqualia duobus; nimirũ quadrato B V ex crure, & quadrato A Y ex altero crure angulum acutum B ambientibus.

Pro-

Progress. 3. Quadratum A X ex basi A C subtensa angulo acuto B, ex propos. 11. æquale est quadrato 2 3, & quadrato O T ex perpendiculari. Quare si ei adderentur rectangula A S, & O Y quadratum A X esset quoque ęquale quadrato maximo A Y ex crure, & B V quadrato ex altero crure ambientiũ angulum acutum B: Quoniam ex 2. Progress. illa duo quadrata 2 3, & O T cum rectangulis istis duobus, quadratis A Y, & B V ex cruribus erant æqualia: Vnde vice quadratum 2 3, & O T posito quadrato A X ex basi A C cũ rectãgulis ijsdem, quadratis ex cruribus æquabitur, & propterea quadratũ AX ex AC basi erit minus quadratis crurum A B, & B C duobus rectangulis A S, & O Y, quod erat probandum.

EXPENSIO IV.

De reperiendis æquipotentibus lineis.

LIcet ad plenam huius inquisitionis cognitionem particularis tractatus institutus sit; vt infra. Hìc tamen illius primę bases iaciuntur, & docet Euclides dato aliquo rectilineo reperire lineam, quę possit efficere quadratum illi æquale; Vel etiam ita secare lineam, vt segmenta æquè possint. Quod fuit necessarium pręcognoscerę maximè ob 10. Libri plenam cognitionem.

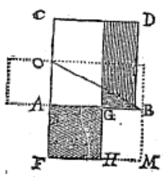
PROB. I. PROP. XV. Euc. 11.

DAtam lineam rectam ita secare, vt rectangulum sub tota, & altero segmentorum minori comprehensum, æquale sit quadrato, quod fit à reliquo segmento.

Data sit recta A B, quam ita oporteat secare, vt tota cum segmento minori possit comprehendere rectangulum æquale quadrato, quod à maiori segmento describitur.

Describatur ex A B quadratum A D, & illud latus, quod cum data A B angulum rectum claudit, vt est C A diuidatur in duas partes æquales in O. Trahaturque recta O B ab angulo B ad illud dimidium O, Et æquale ipsi O B prolungetur latus bifariam diuisum C A ab O medietate vsque in F. Et excedet medietatem O A portione A F: Huic ergo portioni A F detruncetur æqualis ex AB datâ portio A G, & iam id fecimus, quod postulat propositio, *siquidem quadratum ex* A G *maiori portione erit æquale rectangulo ex* A B *&* G B *tota, & minori portione.*

Quòd verò A G possit detruncari patet, quia A O, & A B duo crura sunt maiora, quam O B crus tertiũ ex prop. 20. Vt autẽ probetur propositio, fiat super A G maius segmentum quadratum A H à puncto G, & rectangulum G D, ex tota, & minori segmento: Et dico hoc quadratum nigrum rectangu-



gulo nigro esse æquale.

Progress. 1. Quoniam ex 8. propos. huius rectangulum, quod à tota cum adiecta pro vno latere, & ab adiecta solùm pro alio vnà cum quadrato dimidię totius æqualia sunt quadrato, quod describitur à dimidia simul cum adiuncta: hinc est, quòd quadratum punctatum ex medietate A O cum rectangulo C H ex tota C A cum adiecta A F, pro vno latere, & alio latere ab adiecta A F, vel F H comprehenso erit æquale quadrato O M ex dimidiâ O A, & adiectâ A F, vt vna, constituto.

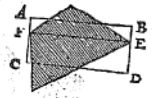
Progress. 2. Quadratum verò O M est illud, quod fieret super O B; quia latus eius O F æquatur ex constructione lateri O B. At quadratum ex O B ob rectum angulum apud A album, ex propos. 11. æquatur quadrato ex A O dimidiâ, & quadrato C B ex A B tota, ergo etiam æqualibus rectangulo C H, & ipsi quadrato A O, æquabitur ipsum A O quadratum, & C B, ex A B datâ quadratum.

Progress. 3. Abijce itaque mente ab vtrisque quadratum A O nimirum à rectangulo C H, & quadrato C B, & adhuc remanebunt æqualia, vt priùs erant associata cum illo. Rursus deme à rectangulo eodem C H, & quadrato eodem C B commune spatium album C G, *& quadratum nigrum*, ex A G segmento *rectangulumque nigrum*, ex tota B D, & altero segmento G B *restabunt æqualia*, quod erat ostendendum.

PROB. II. PROP. XVI. Euc. 14.

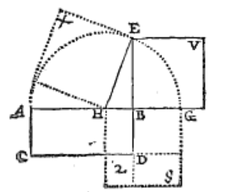
Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

SIt Trapezium nigrum: quod ex documentis propos. 44. primi reducatur ad rectangulum A B C D. Quod facilimè efficies si eũ diuidas in duo triangula recta F E; quorum diuiso bifariam latere, per eam diuisionem agantur parallelę ad F E; nempe A B, & C D, & eas perpendicularibus cõiungas ab extremis F, E. Verùm si in rectilineo plura capiant triangula ea bina, & bina ad parallelogramma reduces, & inde per proposit. 44. in vnicum parallelogrammum ea compones.



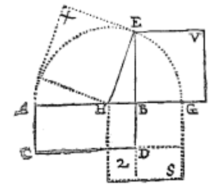
Sit ergo latus huius rectanguli A B: quod prolungetur in G; itaut B G pars prolungata alteri lateri B D æqualis sit. Deinde diuidatur per medium tota A G. Si medietas reperitur in puncto B erunt æqualia latera A B, & B G. Vnde rectangulum erit quadratum: nec aliud hoc casu faciendum erit. Quod si punctum B non sit medium, per medium diuidatur linea A G in H, & centro H fiat semicirculus A E G, ad interuallum medietatis. Postea prolungetur alterum latus B D, in quo centrum non est vsque ad E circuli circumferentiam, eritque linea B E perpendicularis, & hęc erit illa, quę quęritur, ex qua si fiat *quadratum* B V *hoc erit æquale rectangulo* A D.

Ad quod ostendendum à centro ad E eius extremitatem ducatur H E, eritque triangulum H E B habens angulum rectum B.



Pro-

Progreſſ. 1. Linea A G diuiſa eſt in æqualia in H, & non æqualia in B. Vnde ex propoſ. 7. huius rectangulum comprehenſum ſub ſegmẽtis inæqualibus, vt eſt A D, cuius latus B D æquatur ipſi B G, ex effectione, hoc, inquam, rectangulum, & quadratum ex intermedia H B, quod eſt punctatum paruum 2 ſimul, eſt æquale quadrato magno punctato H S ex dimidia.



Progreſſ. 2. Quadratum quoqne H X erectum ſuper H E baſi æquatur quadrato 2 ex intermedia, & quadrato B V ex perpendiculari, ex prop. 11. huius: Sed hoc quadratum H X eſt æquale quadrato H S; Quia ſcilicet eorum latera H E, & H G ſunt æqualia, vtpote radij eiuſdem circuli: Ergo quadratum H X ex baſi erit æquale quadrato 2 ex intermedia, & rectangulo A D ſiquidem ex 1. Progreſſu quadrato H S ea oſtenſa ſunt æqualia.

Progreſſ. 3. Cum itaque quadratum 2 ex intermedia, & B V ex perpendiculari ſint æqualia quadrato HX; Rurſuſque idem quadratum 2 ex rectangulum A D ſint æqualia quadrato H X. Ergo inter ſe erunt æqualia quadratum B V cum quadrato 2, & rectangulum A D cum quadrato item 2 Aufer itaque commune quadratum 2, *& rectangulum* AD *reſtabit æquale quadrato ex* BV, quod erat oſtendendum.

TRACTATVS VI.

In Euclidis Librum tertium de Circulis.

EGIT in duobus primis Libris Euclides de primo genere ſuperficierum; nimirum de rectilineis, & non quidem de omnibus; ſed ſolùm de præcipuis, & quæ alias figuras planas integrant, & componunt, vt ſunt triangula, & quadrangula, nimirum, vt eas ſolùm, quæ erant elementares attingeret: In hoc verò tertio Libro agit de circulis, quæ figura eſt origo, & principium omnium linearum flexarum, puta Hyperbolæ, Parabolæ, Ellipſis, aliarumque ſimilium, vt ſicuti rectilineorum Elementa, & flexorum quoque doceat, his enim principijs ferè omnia fundantur, quæ tum de ſphera, tum de ſectionibus conicis oſtenduntur. Obiectum verò huius Libri eſt idem, quod primi, & ſecundi, nempe de ſola circulorum æqualitate, vel actuali, vel potentiali, vel linearum in ipſo deſcriptarum, peragere.

EXPENSIO I.

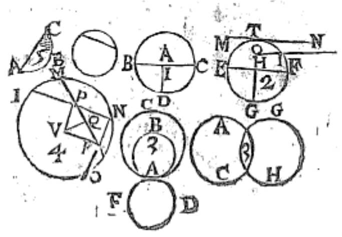
De Principijs.

LIcet aliquę Definitiones ad initium primi Libri traditæ ſint ad circulum ſpectantes, vt diametri, ſemicirculi, &c. Illæ tamen tantùm exhibitę ſunt, quę ad illum Librum pertinebant: Modò ſuperadduntur alię, quę propriè huius loci ſunt.

DEFINITIO I.

ÆQuales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum radij ſunt æquales.

Cùm enim ex ductu lineę, E. g. A D altero extremo A manente, tanquam clauo affixo, dùm extremum alterum ſe mouet vſque ad illud punctum, à quo diſceſſit, circulus conſurgat, & ab hoc ductu efficiatur, patet circulos fore æquales; quorum radius, vel ſemidiameter A D alteri G H fuerit æqualis, vel quorum diameter nimirum B C fuerit æqualis, ipſi E F, quod faciliter poteſt oſtendi ex ſuperpoſitione; Nam omnia puncta circumferẽtiarum, ſi circuli 1, 2 ſuperponerentur, itaut centrum centro conueniret, & idem fieret, ſibi inuicem inciderent, & eandem circumferentiam integrarent ob ęqualem diſtantiam ab eodem puncto medio.



DEFINITIO II.

REcta linea circulum tangere dicitur, quæ cùm circulum tangat producta illum non ſecat.

Vt recta M N circulum 2. E G F T tangit in T, quia producta vltra T in alteram partem non ſecat circulum, vt eum tangit N I, quę producta vltra I in O ſecat ipſum circulum, & ideò non dicitur tangens, quia tangeret ſolùm actu in I, potentia tamen eum ſecaret in ſui productione.

DEFINITIO III.

CIrculi ſe mutuò tangere dicuntur, qui ſe ſe mutuò tangentes ſe ſe mutuò non ſecant.

Vt eſt circulus 3. B A interiùs tãgens, vel D F exteriùs tangens circulum C A, qui illum non ſecat, vt facit circulus H G, qui ſecat circulum A C.

DEFINITIO IV.

IN circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares ad ipſas à centro ducuntur æquales, & magis diſtare illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

Sic quia in duas I N, & M Q perpendiculares P V, & V Q cadentes à centro V ſunt æquales, lineę predictę I N, & M Q ſunt æquali diſtantiâ à centro remotę: At linea O N magis diſtabit; quam Q M; quia perpendicularis V R in eam cadens maior eſt, perpendiculari V Q, vt in 4. fig.

DEFINITIO V.

CIrculi ſegmentum eſt figura, quæ ſub recta linea, & parte peripheria comprehenditur.

DEFINITIO VI.

SEgmenti verò angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehendatur.

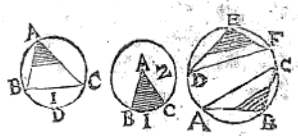
Segmétum itaque circuli est fig.5.portio circuli A B C. Angulus verò, niger est C: Quia tùm figura, tùm angulus circuli peripherię portione A B C, & linea recta A C concluduntur.

DEFINITIO VII.

IN segmento anguli sunt, cùm crura claudentia circumferentiam, vertice attingunt, & basim habent, rectam segmentũm efficiens.

Illi verò peripherię insistere dicuntur, quam crura angulum claudentia intercipiunt.

Angulus itaque niger apud A, est in segmento B A C, quòd eius vertex sit in circumferentia in A, & pro basi B C lineã, quę segmentũ B A C facit, obtineat: At angulus idem niger insistere dicitur in peripheria B D C, quam crura se se aperientia A B, & A C concludunt.



DEFINITIO VIII.

SEctor circuli est figura comprehensa à duobus radijs angulum facientibus, & peripheria ab illis comprehensa.

Sector itaque circuli est A B C duobus radijs B A, & A C, & peripheriã B I C comprehensus.

DEFINITIO IX.

SImilia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales; aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

Videtur aliquibus; quòd hic Euclides anticipauerit, & definitionem ponat, quę ostensione indigeret à 6. Libro dependente. Verùm, quia definitiones à Mathematicis non ostenduntur; sed accipiuntur tamquam nominum explicationes: hinc est, quòd hęc Definitio, licet quoad probationem dependeret à 6. Libro, si proponeretur tamquam propositio. Quia tamen tamquam Definitio exhibetur, à nullo dependet: nisi à sola explicatione: Sint itaque duo circulorum segmenta A B C, & D E F, quę excipiant angulos nigros æquales B, & E. Dicit quod illa segmenta debebunt appellari similia. Nec tamen hic intendit Euclides agere de similitudine, vel proportione siue circulorum, seu segmentorum; sed tantùm de æqualitate, ad quam ostendendum erat necessaria hęc Definitio.

EXPENSIO I.

De punctis, tum centri, tum contactuum.

PVnctũm duplici modo potest sumi, aut in medio circuli, aut in circumferentia. Si in medio, & sic aut erit centrum, aut extra centrũ. Si in peripheria, & tunc erit aut contactus, aut sectionis. In hac itaque expensione agemus de punctis, tum meditulij, tum circumferentiæ quatenus tamen referuntur ad circulos: Nam de punctis contactuum, aut sectionum rectę lineę cum circulo sequenti expensione peragemus.

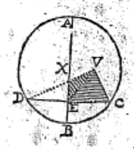
PROBL. I. PROP. I. Euc.1.

Dati circuli centrum reperire.

SIt datus circulus A B C D, cuius centrum oporteat inuenire.

Ducatur linea vtcumque D C, ex prop7.lib.1. diuidatur bifariam in E, & ab eo puncto eleuetur perpendicularis, quę extremis suis punctis circumferentiam attingat, & sit B A. Postea hęc quoque bifariam diuidatur in X. *Nam illud punctum diuisionis, erit centrum, quod quæritur.*

Probatur. Nam si punctum X centrum non est. Assignetur ab aduersarijs. Assignabiturque, vel in ipsâ linea B A, vel alibi.



Non in ipsa linea B A; Quia omne aliud pũctum diuidit eam inæqualiter, & consequenter, contra Definitionem centri, non vtrinquè à circumferentia distaret æqualiter. Sed nec assignabitur extrà lineam prædictam. Nam si potest, assignetur, & sit punctum V. Ducantur itaque ad illud ab extremis D, & C, & medio E lineę C D primo ductę, alię tres D V, & C V, & E V; Quo facto ita exordiemur probationem per reductionem ad impossibile.

Progress. 1. Trianguli E V C nigri, & D E V seminigri duo crura ex effectione sunt inuicem æqualia, nempe medietates D E, & E C. Crus verò E V commune, & deseruit vtrique: Reliqua verò crura D V, & V C licet verè inæqualia; Aduersarij tamen debent ea dicere æqualia, vtpote radij ob centrum positum in V. Quamobrem ex propos. 23. primi anguli apud E niger, & semialbus, quę predictis radijs D V, & V C insistunt, deberent esse æquales. Quare illi anguli erunt recti, ex 10. defin.

Progress. 2. Cum itaque angulus seminiger D E V dicatur rectus: Et eiusdem pars alba apud E sit quoque angulus rectus ex effectione, erunt æquales anguli albus, & semialbus, pars & totũ, quod esse nequit. Idem verò semper potest ostendi de omnibus punctis, quæ alibi assignarentur: Quaderè, cùm non possit esse alibi, quam in medio lineę B A; punctum X erit centrum circuli.

COROLLARIVM.

HInc manifestum est; si in circulo aliqua recta linea bifariam simulque ad angulos rectos secet aliquam aliam rectam in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod A B recta rectam D C, bifariam, & rectangulè secet ostẽsum fuit punctum eius medium esse circuli centrum.

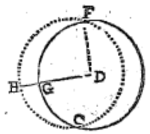
THEOR. I. PROP. II. Euc.5.

Si duo circuli se se mutuo secant, non erit illorum idem centrum.

SEcent se mutuo duo circuli punctatus, & non punctatus; Dico *eos idem centrum non possidere*, & ostenditur per reductionem ad impossibile. Assi-

Assignetur itaque punctum aliquod ab aduersarijs, quod sit centrum commune vtriusque circuli, & sit D. Ducatur itaque ab hoc centro D ad intersectionem circulorum F linea punctata D F & ad peripheriam punctatam H D; quæ secet alteram in G.

Probatur itaq; propositio D centrum est commune vtrique circulo, vt mendaciter affirmatur. Ergo radius circuli nõ punctati G D erit æqualis radio F D pũctato, & ita H D eidẽ radio F D æqualis cũ punctatus sit radius vtriusque in F intersectionẽ circulorum pertingens. Ergo H D, & D G essent æquales, pars, & totum, quod esse nequit. Ideoque centrum D non erit vtriusque centrum, & sic probabis de quolibet alio puncto. Vnde *non poterit esse vllum punctum centrum vtrisque commune*.

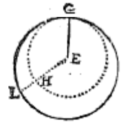


THEOR. II. PROPOS. III. Euc.6.

Si duo circuli se se mutuo interiùs tangant; non erit illorum idem centrum.

HÆc Propositio præcedenti similis omninò est. Sit ergo circulus punctatus, qui tangat continuum in G. Dico quod non possit obtinere idem centrum; quod ostendetur per reductionem ad impossibile.

Ostendatur itaque ab aduersarijs, quodnam centrum sit commune vtrique circulo. Sit V. g. E. Ducaturq; ad contactum G recta E G, & ad peripheriam circuli continui punctata linea L E, quæ secet in H circulum punctatum; quo facto.



Prob. propos. E G est radius vtriusque circuli punctati, & non punctati, vtpote pertingens ad commune punctum G in peripheria ipsorum. Quapropter H E radius punctati, ei radio communi E G erit æqualis, rursusque L E radius continui circuli eidem radio communi E G erit æqualis; ergo inter se L E, & H E essent æquales, pars, & totum, quod repugnat; Ergo assignatum E centrum non erit circulorum commune. Quod dicas de quocumque alio assignabili.

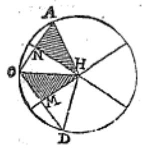
THEOR. III. PROP. IV. Euc.9.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & à circumferentia ad illud cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

SI punctum datum H, ad quod à circumferentiã A O D sint tractæ plures; quam duę rectæ lineę æquales. V.g. tres A H, & O H, & D H. Dico, quod illud erit centrum circuli.

Quod, vt demonstret, connectit puncta rectis A O, & O D, quas medias diuidit in M, & N, super punctum diuidens erigit perpendiculares punctatas M H, & N H quo prestito.

Prob. Nam ex constructione. Crus A N nigri trianguli est æquale cruri correspondenti N O albi, crus verò aliud N H vtrisque deseruit. Bases quoque H A, & H O præsupponũtur æquales. Quare angulus ad N niger huius, & albus illius trianguli erunt ęquales, nempe recti, ex propos. 10. primi.



Eodem modo constabit angulũ ad M nigrum, & album tum huius albi, tum alterius nigri esse æquales; Quare rectę NH, MH, quę rectangulè, & bifariã diuidunt A O, & O D transibunt per centrũ. *Vnde* H *erit centrum.* Si enim esset aliud punctum nõ transiret vtraque per centrum, vt prop.1. vult, cùm vnicum solùm sit, & duæ rectæ non nisi in puncto H conuenire possint.

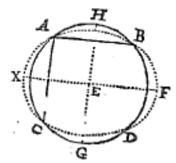
THEOR. IV. PROP. V. Euc.10.

Circulus circulum in pluribus punctis, quàm duobus non secat.

SIt circumferentia punctata, quæ secet circulum continuum in punctis pluribus, quàm duobus A, B, C, D. *Dico eam circumferentiam, circulum esse non posse.*

Quod, vt ostendatur tres ex ijs intersectionibus connectendæ sunt nimirum A, & B, & C rectis A C, & A B, Quæ diuidendæ bifariam, & per diuisiones agendæ punctatę perpendiculares, H G, & X F, quæ ostendent centrum esse in E, ex propos. præced.

Probatur propositio. Quia si E centrum est, deseruiet pro cẽtro vtrique tum punctatæ peripheriæ, tum circulo, cùm tria puncta A, B, & C sint vtrisque communia. Sed circuli se secantes, propos. 3. huius non habẽt idem centrum; ergo non possunt esse ambo simul circuli, sed alter eorum circulus non erit, V. g. circumferentia punctata.



THEOR. V. PROP. VI. Euc.11.

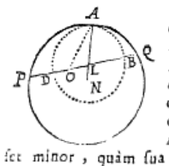
Si duo circuli intùs se se contingant, atque accepta fuerint eorum centra. Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta in contactum circulorum cadet.

SI duo circuli continuum, & punctatum se tangant in A interiùs existendo vnus intra alium, & ducta sit linea L N, quæ connectat eorum centra L, & N. Dico, quòd si hæc producatur vsque ad circumferentiam in contactum terminabit.

Quod per reductionem ad impossibile ostenditur. Si enim ita non est. Sit aliud pũctum centrũ circuli continui, quodcumque eligant aduersarij, V. g. O, per quod transiens recta P Q, & per centrum L non cadat in contactum, sed alibi, puta

puta in Q, vel in P. Ducantur ergo à centro L, & à centro mendaciter ſtatuto O ad contactum A duæ rectæ, eritq; conſtitutum triangulum A O L. Quo exhibito Propoſ.

Probatur. Nam ſi O eſt centrum circuli non punctati A O baſis, & recta O Q debebunt eſſe æquales vtpote radij à ſuo centro ad ſuam peripheriam ducti. Hoc autem eſſe non poteſt; quòd O B, quæ eſt eius pars, deberet eſſe maior, quàm A O baſis: Quare O Q eſſet minor, quàm ſua pars O B.



Quod autem O B debeat eſſe maior; quam A O baſis punctata, patet: Nam eius pars O L eſt crus trianguli, aliud verò crus A L eſt æquale reliquę portioni L B, cum L ſit centrum circuli punctati; eò quòd ducatur à ſuo centro L, quare tota O B deberet eſſe maior baſi O A ſicut latera O L, & L A, ex 20. propoſ. 1. ſunt baſi punctata O A maiora. Quamobrem O B pars eſſet maior, quàm O A, & conſequenter, quàm O Q tota, eidem baſi punctatę æqualis (vt dictum eſt) Et ſemper eodem modo argumentabitur, quibuſcumque punctis aſſignatis, quæ non ſint L N. Ergo per L N ducta N A in contactum A cadit.

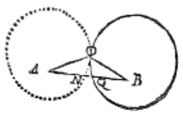
THEOR. VI. PROP. VII. Euc. 12.

Si duo circuli ſe ſe exteriùs contingant linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur per contactum tranſibit.

PRobatur hæc Propoſitio per reductionem ad impoſſibile tali modo.

Nam datis duobus circulis ſe tangentibus pũctatum, & continuum, & recta A B, quæ centra prout volunt aduerſarij A, & B nectat, & tamen per contactum O non tranſeat, ſed inferiùs. Ad hoc vt oſtendatur, id eſſe falſum; ad contactum à centris præſumptis A, & B trahantur rectæ A O, & B O, & ecce tibi abſurdum, quod ſequitur.

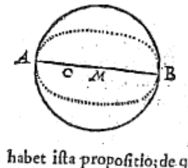
Namque A O B triangulum eſt, & conſequẽter ex propoſ. 20. primi duo crura A O, & B O debent eſſe maiora, quàm baſis A B. Hæc verò ex alio capite debet eſſe maior. Nã cum B mendaciter dicatur cẽtrum, pars eius P Q vtpote à cẽtro ad peripheriam ducta eſſet æqualis cruri O B. Sicque alia pars A N, vt radius à centro A, vt falſo aſſeritur, ad ambitum ductus æqualis eſſet cruri A O. Quare nedum tota A B non eſſet dictis cruribus minor; ſed potius maior. Quoniam portio quoque inter circumferentias intercepta N Q ſuperadderetur.



THEOR. VII. PROP. VIII. Euc. 13.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno ſiue intùs, ſiue extrà tangat.

REducitur quoque hæc propoſitio ad impoſſibile, duaſque partes poſſidet. Prima enim loquitur de contactu interiori, ſecunda de exteriori. Ponamus itaque circumferentiam punctatam tangere circulum in duobus punctis A, & B, & trahatur recta per duo centra O, & M.



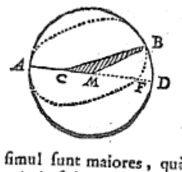
Vel ergo hæc recta tranſiens per centra, tum punctati circuli, vt mendaciter prẹſupponitur, tum cõtinui trãſit per ambos contactus, vel per neutrum, vel per alterum eorum, & ſic tres caſus habet iſta propoſitio; de quorum ſingulis intexere oportet probationem.

Caſus 1. Itaque dicatur rectam A B contactus ipſos coniungere, & hoc non poteſt eſſe, quia ſic eadem linea diuideretur per medium in duobus punctis; quòd eſt abſurdum; cùm enim puncta contactus; quia ſunt communia, diſtent æqualiter à ſuis centris, clarum eſt, quòd quodlibet centrum aſſignatum diuideret eam æqualiter, & bifariam. Vnde duo centra in quatuor medietates eam ſecarent A O, & O B. A M, & M B.

Caſus 2. At ſi velit aduerſarius, quòd linea tranſiens per centra, vt eſt punctata in contactus non cadat, hoc eſt contra 6. propoſ. huius, quare ſaltem in vnum contactum incidet, elige itaque quod vis.

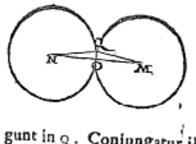
Caſus 3. Si eligis contactum A. Ad alterum contactum B duo centra copulabis, lineis C B, & B M, & eadem forma argumenti valebit ad oſtendendam impoſſibilitatem, ac vſi ſumus in 6. propoſ. huius.

Nam ſequeretur, quòd M A deberet eſſe maior, quàm M B; quæ tamen eſt ei æqualis, vtpote, quòd ſint radij à centro M ducti ad circumferentiam circuli nõ pũctati in A, & B; Quod verò A M deberet eſſe maior, quàm M B patet. Quoniam C M, & C B ſimul ſunt maiores, quàm M B, ex 20. propoſ. primi; ſed C B, & A C, vtpote radij ſpurij circuli punctati ſunt æquales ex aduerſarijs. Adde C M ipſi A C: Fietque tota A M maior; quàm M B, vtpote, quod ſit ſecundùm ſui partem C M crus, & ſecundùm alterã partem A C ęqualis cruri C B ſimul maioribus, quã M B baſis trianguli nigri.



Quod & concluditur per idem argumentum etiam ſi duo contactus ponantur vicinius, quã in ſecunda figura punctum A, & punctum B, vt probauimus Expenſ. 2. Tractatus Præliminaris de Quantitate Continua.

2. Pars probatur. Quod ſi exteriùs ſe tangant, non ſe tangant in duobus punctis. Nã ſi tangunt in puncto O ex 6. huius linea recta coniungens centra M N per contactũ O tranſibit. Quod, & ſi ſe quoque tangunt in Q. Coniungatur ille contactus ad centra per rectas N Q, & M Q. Eritque triangulum M Q N, cuius duo crura ſimul, erunt radijs in baſi N O, O M ęqualia, vtpote, quia sũt radij, à cẽtris in punctum Q vtriuſque circumferentię deſinentes, & eadem



& eadem ipſi N O, O M debebũt eſſe maiora; quia ex propoſ. 20. primi duo latera cuiuſcunque trianguli quomodocumque ſumpta reliquo maiora ſunt; Vnde implicantia admitteretur.

EXPENSIO II.

De ſegmentis Circulorum.

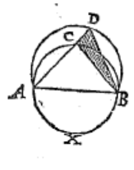
PAtebit hic traditam fuiſſe inter principia ſegmentorum ſimilium definitionem, non ad hoc, vt eorum conſideratio circa ſimilitudinem, eorumque proportionem verſaretur, ſed tantùm, vt ea ſimilitudo mediante definitione ſatis declaratâ pręberet fundamenta ad oſtendendas ſegmentorum longè diuerſas affectiones à proportione.

Fuit verò neceſſarium agere de ſegmentis, quòd poſſemus ex ſegmentis ipſos circulos agnoſcere; & angulos quoque in ſegmentis, aut efficere, aut eorum proprietates agnoſcere.

THEOR. I. PROP. IX. Euc. 23.

Super eâdem rectâ lineâ duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ad eaſdem partes.

REducit hic Euclides demonſtrationem ad impoſſibile demonſtrando fore, & non fore ſimilia ſegmenta ſimilia, & inæqualia ſuper eâdem rectâ effecta: Quod vt oſtendat fiant (inquit) ſuper datam A B duę portiones circulorum ſimiles A C B, & A D B (ſi tamen id fieri poteſt) Manifeſtum eſt ex dictis 5. propoſ. huius, quod ſolùm ſe interſecabunt in duobus punctis, vt in A, & B; Quoniam circuli, nonniſi in duobus punctis ſe interſecant. Quare peripheria vnius erit extra peripheriam alterius. Quo poſito trahatur recta A D ſecans vtraſque circumferentias in C, & D, & ex ijs punctis duæ rectæ deducantur, nimirum C B, & D B: Habemuſque triangulum nigrum cuius angulus D neceſſariò, ex propoſ. 17. Coroll. 1. primi, minor eſt externo albo C.



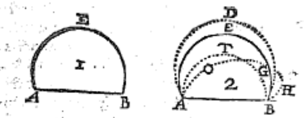
Probatur autem. Nam ſegmenta ſimilia ſunt illa, quæ capiunt angulos ęquales, ex definitione 9. huius; Sed angulus niger D internus eſt maior albo C externo. Ergo A C B, & A D B ſimilia nõ sũt; alioquin angulus D niger eſſet angulo C æqualis, vt volunt, & minor, vt eſt oſtenſum, quod eſt impoſſibile.

Quare colligit Clauius, & ſi anguli non fiant ad eaſdem partes, idem ſequi, quòd æquali ſegmento ei, V. g. A X B, quod eſt ad alteram partem, ad eandem partem conſtituto; idem abſurdum ſequatur.

THEOR. II. PROP. X. Euc. 24.

Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

HÆc propoſitio oſtenditur faciliter ſuper poſitione; nempe imaginando, vel ponendo vnum ſuper aliud ſegmentum papyro deſcriptum. Sint ergo duo circuli ſegmenta ſimilia A B E primum, & A B E ſecundum.



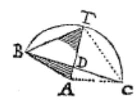
Et ad probandum ponatur vnum ſuper aliud per imaginationem, vel propriè deſcribendo alterum eorum, & circùm reciſa charta ſuper aliud realiter ponatur, vel congruet, itaut curuitas vnius eodem loco inexiſtat, & feratur, ac curuitas alterius, vel non. Si non, vel intra curuabitur, vt punctatum ſegmentum A T B, vel ſupra, & extra, vt aliud punctatum A D B, & ſic incidemus in abſurdum propoſ. antecedentis. Quod ſimilia ſegmenta caperent angulos inæquales contra defin. 9.; Vel partim ſupra partim infra, vt facit circũferentia pũctata A O G H B, & ſic contra 5. propoſ. huius circulus ſecaret circulum in pluribus punctis; quàm duobus, nempe in A, G, B.

PROB. I. PROP. XI. Euc. 25.

Circuli ſegmento dato deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

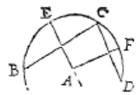
SIt ſegmentum quodcumque B T C, vel maius, vel minus, vel æquale ſemicirculo: connectanturque puncta B C rectâ, cui diuiſæ per medium in D: in puncto D erigatur perpendicularis D T, & indefinitè prolungetur verſus A. Deinde trahatur à puncto, vel B, vel C, quæ rectâ copulauimus, ad punctum T, vbi perpẽdicularis modo ducta circumferentiam ſecat recta B T, quæ angulum faciet nigrum ad T. Huic itaque angulo nigro alius angulus ad B niger, & albus conſtituatur æqualis, ducendo lineam B A, quæ, vel cadet extra lineam B C, & adiunget partem nigram, vt hic vbi portio data ſemicirculo eſt minor, vel intra, vt cum ſemicirculo maius eſt ſegmentum datum, & ideò portione nigra diminuit angulum B, vel ſupra ipſam B C cùm ſemicirculus eſt ſegmentum datum, & ſic nec diminuit, nec addit. Sed quomodocumque id accidat ſemper angulus B fiat æqualis angulo T, ex 24. prop. & A erit centrum oſtmodum trahatur linea A C.

Probatur. Nam tres lineæ B A, nimirum A C, & A T ſunt æquales, quare ex propoſ. 4. huius A erit centrum circuli. Quia illud eſt centrum, vt ibi probatur in quod plures, quàm duæ lineæ æquales cadunt. Quòd verò tres lineæ dictæ B A, nempe A C, & A T ſint æquales conſtat: Nam in triangulo B T A angulus niger ad T, & angulus B ſeminiger ex cõſtructione ſunt æquales; Ergo ſubtendunt baſes æquales T A, & A B, vt ex propoſ. 15. Deinde punctata A C eſt æqualis rectæ B A quia ſunt æquales duo trianguli niger, & albus, ſiquidem anguli ad D niger, & albus recti ſunt ob perpendicularem D A: Ideò æquales, & quia habent D A crus commune, & alterum crus D C, alteri D B ex conſtructione æquale; eaderè, & baſes

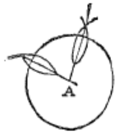


bases B A, & A C erunt æquales. Vnde tres lineæ A B, scilicet A G, & A T radij erunt, & A centrum.

Sed expeditiùs datam circumferentiæ portionem circularem, vtcumque in B, C, D diuide, & rectis B C, & C D punctum diuisionis cum extremis punctis, vel quibuslibet alijs B, & D coniunge; diuisisque rectis bifariam trahe perpendiculares F A, & E A per puncta diuisionis, & in A erit centrum. Probatur, quia ex Coroll. propos. primæ duæ perpendiculares transeunt necessariò per centrum, quòd cùm sit vnicum necessariò in eo conuenire debebunt; quare punctum A, in quo conueniunt erit centrum circuli.



Sufficit quoque excitare perpendicularem sine tractione linearum B C, & C D si ex punctis C, B, D trahantur portiones circulorum se decussantes, & per eas duæ rectæ ducantur; quia non aliter fieret: Si super lineas iam tractas essent perpendiculares erigendæ, vtpote ex prop. 8. primi; Vnde licet non ducantur C D, & C B eadem operatio valebit.



EXPENSIO III.

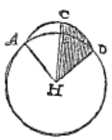
De lineis intra circulum ductis.

COgnitio linearum intra circulum ductarum deseruit tù ad cognitionem sinuũ, tum ad cognitionem Parallaxium, tum ad cognitionem Excentricitatũ, & ad multa alia, quare in Elementis aliquas primas cognitiones haurire oportet, vt facilior ad ea sublimiora pateat aditus.

THEOR. I. PROP. XII. Euc.2.

Si in circuli peripheriam duo quælibet puncta electa fuerint. Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur tota intra circulum cadet.

HÆc propositio, quasi est principium, & per se nota. Vnde breuiùs eam probabimus. In circulo A O B sumantur duo puncta, quæ recta copulentur, *hæc recta intra circulum cadet*. Quod si non cadit, cadet in ipsam, vel extra ipsam circumferentiam. Quod si dicatur, aut idem erit cum circumferentia A C D, aut magis flexa, quàm ipsa, vt A C D. Quod si adhuc obstinatiùs asseratur recta, vt eos ita dicentes conuincamus, ducantur ad extrema huius lineæ A C D, rectæ à centro H A, & H D, & ducatur inter ipsas H C eis vtrique, aut æqualis, aut maior, cum vel exeat, vel terminet ad circumferentiam; sed hæc eadem necessariò est minor, si A C D, vt mendaciter asseritur, est recta. Ergo recta, & non recta, quòd est absurdum.



Probandum est itaque, quod debeat esse minor. Id verò à prop. 14. primi eruitur. Nam ibi habemus angulos ad basim Isosceliũ esse æquales, vt niger D, & albus A in triangulo æquicruri A D H, cùm basis curua ab aduersarijs dicatur absurdè recta.

Secundò angulus albus ad C, vtpote externus est maior angulo interno, & opposito D nigro, ex Coroll. I. prop. 17. primi. Quare, & erit maior angulo huic æquali ad A. Sed ex propos. 19. primi, maior angulus maius etiam latus subtendit. Ergo A H erit maior, vtpote subtensa angulo maiori albo apud C, quàm H C, quæ subtenditur angulo minori ad A. Quare H C, eã A H erit minor, sed supra dictum est, quod esset maior, aut æqualis, quod est absurdum.

THEOR. II. PROP. XIII. Euc.3.

Si in circulo quædam recta linea per centrum extensa, quamdam non per centrum bifariam secet, eam quoque ad angulos rectos secabit, & si secet ad angulos rectos bifariam quoque eam secabit.

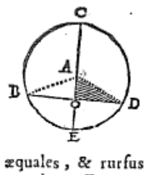
PEr centrum A circuli B C D transeat C E, secetque aliam quamcunque in circulo existentem B D non transeuntem per centrum, per medium; Dicit propositio, quòd & ad angulos rectos secabit, & hæc est prima pars huius propositionis.

Ad quod demonstrandum à punctis circumferentię extremisque lineę B D, trahantur ad centrum A rectę A D, & A B punctatę; quo facto.

Probatur prop. Latus D O trianguli nigri est ex hypothesi æquale albi trianguli cruri O B; bases quoque punctatæ B A, & A D vtpote radij sunt æquales. Crus vero O A commune: Ergo ex propos. 23. primi, angulus ad o niger erit æqualis albo, item ad o: Ergo erunt anguli recti.

Secunda pars est, quod si linea per centrum ducta C E alteri non per centrum ductæ, vt B D ad angulos rectos sit; quod B D etiam secta erit bifariam.

Probatur. Nam crura punctata, vtpote radij sunt æqualia. Quare totum triangulum semialbum B A D habebit angulos B, & D ad basim æquales; sunt quoque ex hypothesi niger ad o, & albus ad o æquales; Ergo in duobus triangulis habemus duo crura punctata æqualia, & anguli D niger, & B albus æquales, & rursus anguli ad o niger, & albus æquales; Ergo ex 27. propos. primi, reliqua quoque latera reliquis lateribus erunt æqualia, nempe B O, & O D.



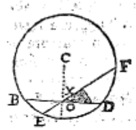
THEOR. III. PROP. XIV. Euc.4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se mutuò secent non per centrum deductæ, se se mutuò bifariam non secabunt.

DVæ rectæ lineæ se mutuo secent, V.g. B D, & E F in circulo E D F, quæ per centrum non sint deductæ; dicit numquam posse euenire, vt se in duas partes æquales diuidant. Licet enim vna ex ipsis possit esse bifariam diuisa, altera tamen nequaquam in partes æquales remanebit diuisa.

Probatur. Et si vna ex istis transeat per centrum alia non, clarum est, quod transiens per centrum bifariam non secatur: Eò, quia in centro solùm bifariam diuidatur, ex prop. I.

At si neutra transeat per centrum. Tunc ad eam sectionem ducatur perpendicularis à centro inuento, ex prop. I. huius, quod si nequeat deduci; est clarum, ex prop. anteced., neutram secari bifariam, cùm ad nullam ex ipsis transiens per centrum perpendicularis duci queat. Quod si ducatur ad alteram ipsarum, vt B D. Tunc dico alteram E F bifariam non esse sectam: Nam si secta E F bifariam est; Ergo etiam cum E F à centro cadens C O faciet angulos rectos, ex prop. anteced. Quare angulus X albus rectus erit æqualis recto seminigro C O D; quod esse nequit, cùm angulus albus X sit pars anguli seminigri C O D.



THEOR. IV. PROP. XV. Euc.7.

Si in circuli diametro sumatur punctum, quodcumq; quod circuli centrum non sit, & ab eo in peripheriam lineæ rectæ cadant; maxima erit ea quæ per centrum ducitur.

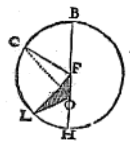
Minima verò reliqua, quæ in directum ad oppositam partem tendit.

Aliarum verò semper maior est, quæ propinquior est maximæ.

Et illi duæ æquè propinquæ, tantummodò æquales erunt.

QVatuor partes enumerat hæc propositio. Prima est illa, quæ ait; quòd si eligatur aliquod punctum in diametro, quod nõ sit centrum, V. g. O, & ex eo ducatur per centrum F ad circomferentiam B recta O B, illam fore maximam omnium. Ad quod probandum ducatur quælibet alia, quæ placuerit, V. g. O C punctata. Et puncta C, & F rectâ iungantur. Nam ostendetur O B esse maiorem, quàm O C, quam elegisti.

Prob. In triangulo C O F duo crura C F, & F O sunt maiora basi punctata, ex propos. 20. primi, Sed hæc duo latera sunt æqualia rectæ per centrum ductæ O B; cùm crus O F sit eius pars, & F C sit æquale reliquæ F B, vtpote radij. Ergo tota O B, vtpote ęqualis duobus cruribus est maior basi punctata O C.



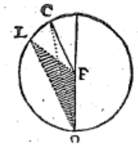
Secunda pars est. Quòd O H sit omnibus alijs minor, quæ ab O indirectũ maximæ O B ducitur, & sit vna cum illâ. Ad quod ostẽdendum ducatur O L, & coniungatur L F, & probabitur O L esse maiorem, quàm O H.

Prob. Nam basis L F est minor cruribus L O, & F O, ex propos. 20. primi in triangulo nigro; sed tota basis L F est æqualis F H, vtpote radius; Et F O est crus parsque lineæ F H, ergo reliquum O H erit minus crure L O.

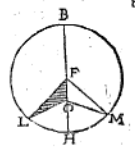
Tertia pars est. Quòd ex lineis ab O ductis, quæ sunt propinquiores maximæ, reliquis remotioribus sint maiores. Sic O C erit maior, quàm L O, quod sit propinquior maximæ O B.

Prob. Nam duo crura F C, & F L, quæ ducuntur à centro ad circumferentiam sunt æqualia, vtpote radij. Crus verò O F idem pro ambobus triangulis deseruit albo, & nigro. Sed angulus ad F seminiger maior est angulo ad F nigro; cùm sit niger eius pars: Ergo ex prop. 25. primi maior erit basis C O, quàm O L. Quod & verificatur etiam si punctum O, sit in circumferentiâ ipsâ, vtpote in figurâ appositâ L C O.

Dicit tandem ab eodem puncto duci posse tantummodo duas lineas æquales ad inuicem, hinc inde. Quod, vt demonstret, ad idem punctum F faciendus est angulus albus æqualis nigro; & sit O F M ducendo crus F M, & postea crus O M. Nam ostendetur O M esse æqualem lineę O L.



Probatur verò sic. Quia crura nigri trianguli, & albi sunt æqualia vnum quidem commune F O, aliud verò L F, alteri M F, vtpote radij, æquale, angulus quoque albus ex effectione æqualis nigro est. Ergo ex propos. 22. primi, bases quoque L O, & O M erunt æquales. Quod verò nulla alia præter istas possit esse istis ęqualis colligitur ex probatis. Nam quęlibet alia erit, vel ijs maximæ propinquior, vel remotior, & ideò nulla istis L O, & O M erit æqualis. Cùm istæ sint æquidistantes ob æqualem angulum nigrum, & album; qui ab ęquali circumferentia subtenditur L H, & H M.



THEOR. V. PROP. XVI. Euc.14.

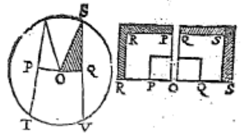
In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, & quæ æqualiter distant à centro æquales sunt inter se.

SInt intra circulũ R S T V, cuius centrum O duæ rectæ æquales T R, & S V. Dicit prima pars propos. æqualiter à centro distare.

Et ad hoc, vt assumptum probetur; ducantur duæ perpendiculares P O, Q O à centro O ad prędictas rectas R T, & S V, quæ ex propos. 13 secabuntur ab ipsis in duas partes æquales. Deinde à punctis peripherię, & extremis datarum rectarum R, & S rectę ad centrum ducantur, & erunt facta triangula duo album, & nigrum.

Probatur autem ex propos. II. secundi. Nam cùm hæc duo triangula sint rectangula, quadrata facta super basim subtensam angulo recto erunt æqualia duobus quadratis factis à lateribus angulum rectum continentibus, quapropter quadratum ex O R basi, quod seorsim delineauimus, erit æquale duobus in ipsis descriptis à cruribus P R mediocri, & minimo P O. Et idem asseras de alio quadrato facto super basim O S, quod est æquale duobus inclusis ex cruribus Q S, & O Q.

Secundò. Duo quadrata maiora inter se sunt æqualia ob æqualitatem basium à centro ad circumcumferentiam ductarũ o s, & o r. Sed & duo quadrata mediocria sunt æqualia inuicem, vtpote super medietates p r, & s q, æqualium datarum in praxi facta. Siquidem r t, & s v præsuppositæ sunt æquales.



Quamobrem, si quadrata minima ex p o, & o q cùm mediocribus iuncta erant æqualia maximis, & per consequens inter se, ijs mediocribus ablatis per imaginationem; quę erant inuicem æqualia, adhuc quadrata minima remanebunt æqualia, & consequenter eorum latera p o, & o q, quæ, cùm sint perpendicularia, mensurant distantiam linearum datarum r t, & s v à centro, vt constat ex Defin. 4. huius Libri, & ideò æquales rectæ r t, & s v æqualiter distabunt à centro.

Dicit quoque inuertendo primam partem. Quod datis rectis, V. g. r t, & s v; quę æquidistent à centro; quòd hæ lineę inter se erunt æquales. Ad quod ostendendum ducendę rursus sũt perpẽdiculares po, & o q, quę ex Def. 4. huius erunt æquales insuper, & rectas datas r t, & s v bifariam diuident, quòd perpendiculariter ducantur à centro, vt ex 13. propos. huius, deinde trahendę r o, & o s. Quò posito.

Probatur propos. eodem tenore, ac pars antecedens probata est. Nam bases r o, & o s, vtpote æquales radij, dant quadrata ęqualia maxima quæ sunt r o, & o s; quę etiam sunt æqualia ijs, quę includunt mediocribus r p, & q s, & minimis o q, & o p; si tamen vnà mediocre, & minimum ad maximum includens referantur, & hoc, quia proueniunt à cruribus triangulorum nigri, & albi angulum rectum q, & p concludentibus, vt ex propos. 11. secundi constat; maxima verò à basi. Minima autem quadrata æqualia sunt inuicem; Quia describuntur à perpendicularibus æqualibus o p, & o q. Ergo sublatis istis minimis per imaginationem quadrata mediocria inter se æqualia remanebunt, & per consequens latera eorum æqualia. Hæc verò sunt crura in triangulis albo p r, & nigro s q, quæ, &, vt diximus, sunt quoque medietates datarum r t, & s q. Vnde si medietates sunt æquales; sequitur etiam; quòd integrę lineę datę æquidistantes à centro r t, & s v sint æquales, quod oportebat ostendere.

THEOR. VI. PROP. XVII. Euc. 15.

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro remotiore, semper maior.

SI detur circulus, in quo dentur duę protractę quomodocumq; V. g. z q, & t v, & quę transeat per centrum s r. Omnium maximam dicit esse s r, quę per centrum transit, reliquas, quò ei propinquiores, eò maiores. Quod vt probetur ad datas non transeuntes per centrum z q, & t v deducãtur perpendiculares ab ipso centro, quæ sint p l, & p n, quę enim remotior est, vt z q, ex Defin. quarta huius maiorem perpendicularem habebit. Detruncabis itaque alteri minori perpendiculari ab hac maiori æqualem portionem, quæ erit p m, & per hoc punctum m, ages aliam perpendicularem y x huic p l, & puncta, in quibus circumferentiam tangit rectis y p, & p x cum centro p connectes. Idemque fiat de remotiori data z q connectendo puncta extrema in circumferentiam desinentia, cum centro p rectis p z, & p q.

Probatur primo, quod data per centrum transiens s r sit maior quacunque assignetur, & sit assignata z q. Crura trianguli nigri in centrum desinentia p z, & p q simul sunt æqualia, vtpote radij medietatibus s p, & p r diametri, & per centrum transeuntis s r, quæ, & radij sunt. Sed duo crura cuiuscumque trianguli, ex propos. 20. primi sunt maiora basi; ergo, & diameter æqualis cruribus istis erit maior, quàm basis z q, & ita probabitur de omni alia linea assignabili, quæ tamen per centrum non transeat, vt patet.

Probatur quoque; quod propinquiores centro sint maiores distantioribus.

Duę lineę c t v assignata est æqualis protractę punctatę y x; quia æqualiter distant à centro ob perpendiculares æquales protractas p m, & p n: & ex propos. anteced. quę æquidistant à centro æquales sunt inuicẽ. Sed assignata remotior z q est minor, quàm punctata y x: Ergo, & minor quàm assignata t v. Quod verò sit minor, patet ex propos. 25. primi. Nam crurą trianguli nigri, & alterius y x p, vtpote, quod omnes sint radij sunt æqualia. Angulus verò ad centrum p niger minor se comprehendente y p x. Ergo, & basis z q, quę est assignata remotior est minor, quàm punctata y x, & consequenter minor, quàm altera assignata huic æqualis t v.

EXPENSIO IV.

De lineis circulum tangentibus exteriùs.

VIsis proprietatibus linearum intra circulum, remanent exteriorum proprietates examinandę verè mirabiles propter angulum cõtactus; qui, cũ sit in infinitũ augumẽtabilis, non tamen minimum angulum acutum rectilineum superare potest, nec angulus rectilineus quantumlibet diminutus, eo potest esse minor.

THEOR. I. PROP. XVIII. Euc. 16.

Quæ ab extremo cuiuscumque diametri ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum ducetur.

Et in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum altera recta linea duci non poterit.

Et semicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior est.

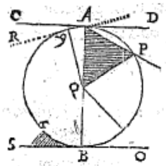
Reliquus verò minor.

MVltas partes complectitur propositio, quas singulis declarationibus illustrare opus est prima

prima est, quod si adsit diameter a b ad cuius extremum a ducatur perpendicularis d a c. Dicit hanc extra circulum cadere. Et probatur per reductionem ad impossibile.

Si namque possibile existimatur, quod intra circulum trahi queat. Trahatur a p coniungaturque eius extremum centro recta p q.

Probatur. Nam angulus niger ad a per aduersarios, cùm mendaciter asserant a p esse perpendicularem, est rectus; Sed angulus ad p est ei æqualis, vtpote æquicruri trianguli anguli ad basim, ex propos. 14. primi propter æquales radios, cruraque q p, & q a. Ergo triangulum a p q duos angulos a, & p rectos haberet, quod est impossibile, quia ex propos. 17. primi, omne triangulum omnes suos tres angulos duobus tantùm rectis æquales obtinet.



Prob. etiam hęc pars positiuè hoc pacto. Nam assumpto in perpendiculari b o quolibet puncto, V. g. o iunguntur o q; cùm ergo huius trianguli albi angulus ad b rectus sit erit angulus ad o minor recto, ex propos. 17. primi, quare erit maior q o basis, vtpote subtensa angulo maiori recto, ex propos. 19. primi, quàm b q angulo o subtensa, & consequenter punctum o extra circulum erit, & idem erit de quolibet alio puncto assignabili.

In secundâ hac parte asserit inter circũferentiã a p, & perpendicularem ad extremum diametri, a d, rectam aliam non posse trahi à puncto a, quę circumferentiam non ingrediatur ex parte. Et probatur per reductionem ad impossibile. Nam si hoc euenire potest ducatur, & sit punctata a r, ad quam à puncto q ducatur perpendicularis q y ad quodlibet eius punctum y.

Probatur angulus ad y rectus est, quia q y facta est perpendicularis; ergo angulus ad a erit minor, ex propos. 17. primi. Sed ex propos. 19. primi, maiori angulo maius latus subtenditur. Ergo recta a q subtensa angulo maiori y erit maior quàm y q subtensa angulo minori a. Sed illa est semidiameter; ergo q y minor semidiametro, & tamen si punctata a r non intra circulũ caderet, sed extra deberet esse maior semidiametro ad hoc, vt punctum y, quod esset extra, copularet; quãobrem punctum y intra erit.

Tertia pars affirmat quoque angulum interiorem factum à circumferentia, & diametro, vt est angulus q b t esse maiorem quolibet acuto rectilineo.

Probatur. Nam linea faciens quemlibet acutum angulum, nempe minorem recto, esset veluti punctata a r, vel quęlibet alia similis ei, quę à puncto a inter perpendicularem, & circulum, istis minorem angulum efficeret. Sed iam ostensum est a r, & quamlibet aliã intra circumferentiam cadere, ergo portio circumferentię remanet foras, V. g. y a. Sed hæc portio circuli facit angulum internum dictum circumferentia diametroque conclusum. Ergo hìc angulus erit maior quàm acutus ad a à punctata diametroque conclusus.

Dicit tandem angulum contingentiæ, qui dicitur, & angulus Reliquus, qualis est angulus niger t b s circumferentia b t, & linea circumferentiam tangente in b comprehensus, qui est reliquus anguli interni à peripheriâ diametroque conclusi. Dicit inquam hunc angulum contingentiæ, & reliquum, omni acuto rectilineo esse minorem.

Probatur. Nam sequitur ex dictis. Etenim angulus internus est maior omni acuto angulo, sed hìc est reliquus eius ad complendum rectum. Ergo minor omni acuto angulo, qui possit vsque ad rectum, alium acutum rectilineum complere.

COROLLARIVM.

HInc manifestum est rectam à diemetri extremitate orthogonaliter ductam ipsum circulũ tangere. Ostensum enim est cadere extra circulum, quare in solo illo extremo diametri circulum attingit, & si prolungetur, cum & prolungata orthogonalis sit ad diametrum, cadet extra circulum. Vnde non secabit. Quare tangentem ad quodcumque punctu m circumferentię ducemus, si tracto ad illud diametro, perpendicularem ad eius extremum excitabimus.

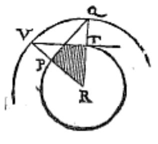
PROB. I. PROP. XIX. Euc. 17.

A dato puncto extrinseco rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

TAngens linea ea dicitur ex 2. Def. huius, quæ circulũ tangens, etiam producta, non secat, quod scilicet exteriorem circumferentiam radat, vt in anteced. propos. esset s o; intendit ergo hìc docere modum quo hęc trahatur.

Sit itaque circulus, cuius centrum r, & sit punctum datum v, à quo hęc tangens deducenda sit. Connectatur centrum r, cum puncto dato v secante v r, & à puncto vbi secat p excitetur perpendicularis p q. Deinde centro r ad interuallum r v portio sufficiens circuli ducatur, ad cuius circumferentiam prolũgetur perpendicularis p q vsque dum secet, & à puncto, vbi secat q ad centrum r recta ducatur q r. Quę secabit circulum datum minorem in t. A puncto igitur dato v ad hoc punctum sectionis t, recta ducatur: & hæc erit tangens quæsita, quę tanget circulum datum in t.

Probatur angulus ad t niger rectus est; ergo quę exposcitur t v ad angulos rectos ad diemetrum t r incidit. Itaque est tangens.



Quod verò angulus niger ad t sit rectus probatur. Nam angulus ad p niger rectus est. Sed hi anguli sunt æquales; ergo, & angulus t est rectus. Quod verò sint æquales, patet ex 22. prop. 1. Nam triangula v t r, & aliud q p r habent crus vnum minus p r æquale alteri r t, vtpote semidiametri circuli minoris, & aliud v r alteri r q, vtpote semidiametri circuli maioris. Angulus verò niger ad centrũ r, est vtrisq; communis. Ergo secundùm eam propositinẽ 22. primi triangula tota erunt æqualia, & anguli quoque, qui sibi correspondent, æquales, vt est angulus niger p, & angulus niger t. Quare erunt recti, cùm niger p vnus eorũ talis sit, ex effect. Vnde t v perpendicularis erit, & ideò tangens.

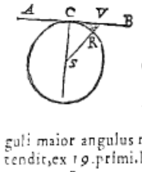
THEO-

THEOR. II. PROP. XX. Euc.18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea; à centro verò ad contactum adiungatur recta quædam linea, quæ adiuncta fuerit ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

TAngat recta A B circulum in C, & ab hoc puncto contactus, ducatur ad centrum, C S. Dicit esse perpendicularem ipsi A V. Quòd probabitur per reductionem ad impossibile. Nam ducatur quęlibet alia, quę sit perpendicularis, & hęc V. g sit S V.

Si itaque S V, vt aduersarij fabulantur perpendicularis est, erit angulus niger ad V rectus, reliqui verò ad C, & ad S oportebit, quod sint minores recto, cũ 2. Coroll. prop. 17. primi in omni triãgulo 3. anguli, solùm duobus rectis æquẽtur. Sed quia omnis trianguli maior angulus maiorem basim, latusq; subtendit, ex 19. primi. Erit itaque S C angulo nigro, quem rectum appe lant, basis subtensa maior, quam S V minori angulo C subtensa, at C S est, vt semidiameter, æqualis semidiametro S R, quæ est pars totius S V. Ergo pars esset totâ maior; quod est absurdum.

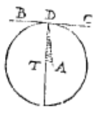


THEOR. III. PROP. XXI. Euc.19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea: à contactu verò ad angulos rectos recta linea ipsi tangenti excitetur, in excitata erit centrum circuli.

SIt circulus, quem tangat recta B C in puncto D, & ab eo puncto erigatur perpendicularis D T. Dicit in hac centrum reperiri. Quod si aliquis negauerit, ostendetur quodlibet punctum ab eo assignatum pro centro impossibilitatem inuoluere. Assignetur itaque, & sit punctum A, ad quod ducatur à contactu D recta A D, quę ex eis, quę ostendimus in pręcedenti propos. erit quoque perpendicularis.

Probatur itaque facilitèr. Quia cùm D A ad centrum A fictum ducta sit, perpendicularis erit, facietque angulos hinc inde rectos. Sed etiam D T ducta est ad angulos rectos. Quare, cùm omnes recti sint æquales, angulus lineis D C, & D A clausus albus esset æqualis angulo cruribus D C, & D T seminigro comprehenso. Qui albo CDA parte nigrâ maior est. Quare totum esset suę parti æquale, quod repugnat.



THEOR. IV. PROP. XXII. Euc.8.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, & ab eo ducantur rectæ, vna per centrum transiens, reliquæ aliæ in cauam peripheriam, vel conuexam.

Earum, quæ in cauam protenduntur transiens per centrum, maxima; cæteræ, quò viciniores sunt lineæ transeunti per centrum eò, maiores.

Earum autem, quæ in conuexam terminant, minima est illa, quæ inter punctum exterius aßumptum, & peripheriam conuexam interponitur tendendo ad centrũ.

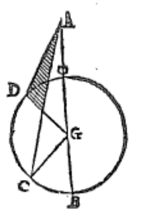
Reliquæ, quò huic viciniores, eò minores.

Duæ verò æquales solùm in peripheriam cadunt vtrinque maximæ, vel minimæ.

HÆc Propositio quinque partes habet, & in omnibus, vt 15. propos. eisdem principijs innititur, excepta 4. probatione, & eodem modo argumentandi procedit, vnde ex ea facilis, & expedita euadit. Dicit primò itaque; quod si eligatur aliquod punctum, V.g. A extra circulum, & ex eo in concauam peripheriam cadens recta transeat per centrum G: Hæc erit maior omnibus, quę possint in dictam concauam peripheriam cadere.

Quiod, si negetur, trahatur quęcumque linea à puncto A in cauam peripheriam, & sit A C. De hac enim, & de qualibet alia, quę assignetur, probabitur esse minorem linea per centrum ductâ A B. Ad qnod ostendendum ducatur à puncto C peripherię, quę ab ea tangitur ad centrum recta G C.

Probatur duo crura sunt maiora reliquo nimirum basi C A in triangulo albo ACG, ex prop. 20. primi. Sed crus à cẽtro ad circunferentiam terminans C G est æquale portioni G B linee A B per cẽtrum transeuntis: Crus verò aliud est idem, ac A G alia portione eiusdem per centrum transeuntis lineę. Ergo tota A B per centrum transiens est maior, quia A C, quę per centrum non transit, & sic probabitur de omni aliâ, quę posset assignari.



Secunda pars est; quòd portio A O, quę cadit in peripheriam conuexam, & si protendatur, in centrum caderet, sit omnium minima, quę in circumferentiam conuexam cadunt. Quod si nõ credatur, assignetur quęcumque, & sit A D. Coniungaturque punctum D, vbi peripheriam tangit, ad centrum linea G D, habemusque triangulum seminigrum D A G.

Probatur itaq;. In hoc triangulo basis G A est minor ex propos. 20. cruribus simul sumptis G D, & A D. Sed G D est æqualis portioni G O, cùm vtraque à centro ad circumferentiam pertingat. Ergo O A est minor, quàm A D; quod volebam

ostendere,

õstendere, & valebit in qualibet aliâ lineâ, quæ assignetur, idem argumentum.

Tertia pars est. Quod si alię rectę pręter A B transeuntem per centrum, in cauam peripheriam protendantur, vt A C, & A M, illam esse maiorem, quę magis propinquat transeunti per centrum A B. Quod, vt ostendatur coniungatur C G, & GM, eruntque duo triangula seminigrum A G C, & totum album A G M.

Probatur autem. Nam crus trianguli seminigri C G est æquale cruri triãguli albi M G: Sunt enim ambo radij; nimirum ducti à centro ad peripheriam: Crus verò aliud A G in ambobus triangulis idem est. Sed angulus ad G trianguli albi, cùm sit pars, est minor angulo ad G trianguli seminigri; quod insuper addat portionem nigram: Ergo ex propos. 19. primi basis A M erit minor, quàm A C.

Quarta pars asserit insuper. Quod, quę sunt viciniores portioni lineę transeuntis per centrũ extra circulum A O sint minores remotioribus; quę à dicto puncto A in conuexam peripheriam cadunt, vt sunt A P, & A Q. Nam linea A P erit breuior, quàm A Q; quòd sit vicinior.

Probatur. Nam ductis à centro ad circumferentiam rectis G P, & G Q ad puncta, vbi pręd ictę A P, & A Q eam contingunt; erunt æquales. Sed intra triangulum maius A Q G ab extremis A, & G duę rectę cadũt G P, & P A, quę ex prop. 21. sunt minores duabus A Q, & G Q cruribus trianguli A Q G. At iam duo radij G P, & G Q sunt æquales: Si itaque auferantur, remanebit A P minor, quàm A Q. Et sic ostendetur de quibuscunque alijs, quę possent duci.

Quinta pars est tandem. Quòd duę rectę lineę, hinc, & inde duci possint ad lineam transeuntem per centrum æquidistantes, quæ sint æquales. Inspice figuram Coroll. sequen.

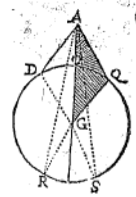
Quod, vt demonstretur, fiat angulo ad centrum G albo, angulus æqualis niger, item ad G, & trahatur A Q. Et probatur sic propositio.

Nam duo crura G D albi, & Q G nigri trianguli, vtpote radij, sunt æqualia. Anguli verò ad G, tum niger, tum albus sunt æquales, & crus G A commune; Ergo ex prop. 22. primi, bases A Q, & A D erunt æquales.

Quòd verò nulla alia possit esse istis æqualis; patet ex eo, quia deberet trahi, vel remotiùs, vel propinquiùs ad lineam centralem G A, & iam probatum est lineas rectę transeunti per centrũ propinquiores esse minores; remotiores verò maiores.

COROLLARIVM.

COllige, quod licet Euclides solùm demonstrarit de lineis cadentibus in circumferentiam conuexam, eadem tamen demonstratio valet in lineis cadentibus in concauam, vt patet de lineis R A, & S A.



COROLLARIVM II.

COlligitur 2. Quod licet Euclides demonstrarit de lineis cadentibus ad vnam partem; verificatur tamen etiam de lineis cadentibus hinc, & inde; cùm sit par argumenti ratio; dummodo vna sit remotior alterâ.

EXPENSIO V.

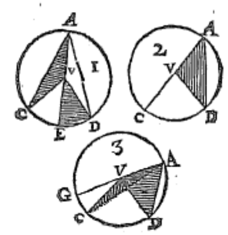
De Angulis in circulis inexistentibus.

DVplex est angulus rectilineus in circulo inexistens, alius est ad centrum, alius est ad circumferentiam. Comparat verò istos angulos, tum inter se, tum prout sunt in segmentis, tum in peripherijs, quibus insistunt, tum angulis, quos facit contingens cùm aliquâ lineá intrinsecâ, & omnes istę propositiones verè fundamentales sunt; cùm ex ipsis multa, multaque deducantur ad Parallaxes pręcipuè spectantia, & ad figuras describendas, ad sinus inueniendos, &ç.

THEOR. I. PROP. XXIII. Euc.20.

In circulo angulus ad centrum duplex est anguli ad circumferentiam, cùm fuerit eadem circuli circumferentia basis angulorum.

TRibus modis potest accidere; quòd eadem circumferentia sit basis angulorum duorum, quorum vertex vnius ad centrum terminet, alius verò vsq; ad circumferentiam extendatur. Nam potest euenire, quòd crura incipientia ab ijsdem punctis peripherię, V.g. C D exterius, ferantur, vt in prima figura crura A C, & A D anguli ad peripheriam C A D cadunt extra angulum ad centrum C V D. Vel potest euenire, quòd vnum crus feratur super aliud, vt in secunda figura C A ducitur super C V, eãdemque lineam facit. Vel tandem potest euenire; quòd vnum crus anguli ad circumferentiam secet aliud anguli ad centrum, vt in tertia figura C A secat crus V D. Sed quomodocumque id eueniat, affirmat Euclides; quod semper angulus ad centrum: nempe C V D est duplus anguli ad circumferentiam C A D.



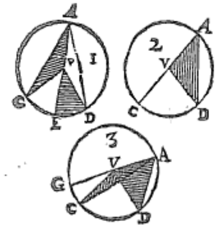
Probatur primò quoad primum casum trahendo lineam A E, quę per vtrumque verticem V, & A transeat, & diuidat vtrosque in duas partes: Et primò probabimus de vna parte.

Triangulum itaq; nigrum A V C habet ex prop. 14. primi angulos ad A, & C inuicẽ æquales, cùm ſit triangulum Iſoſceles ob crura duo V A, & V C, quæ ſunt ſemidiametri. Sed ipſi ijdem anguli C, & A ex propoſ. 17 primi ſunt æquales externo albo ad centrum V: Ergo angulus V albus ad cētrum eſt duplus angulo nigro A; qui eſt ad circumferentiam.

Deinde idem quoque oſtendetur de aliâ parte ſimili prorſus argumentatione. Triangulum album A V D Iſoſceles ob crura, & radios æquales A V, & V D habet angulos A, & D æquales. Sed angulus externus ad V niger eſt æqualis iſtis duobus: Ergo eſt duplus vni eorum, V. g. angulo albo A: Sed angulus niger, & albus ad A angulum totum integrant ad peripheriam; ſicut angulus niger, & albus ad V integrāt angulum ad centrum: igitur ſi partes anguli V erant duplæ partibus anguli A; & totum erit duplum toti.

Probatur in ſecundo caſu eodem prorſus argumento. Nam triangulum nigrum A V D in 2. figura eſt Iſoſceles. Quare anguli ad baſim æquales ſunt; ſed angulus V albus ad centrum, vtpote externus eſt æqualis illis duobus, ex propoſ. 17. primi. Ergo eſt duplus vni eorum; nimirum angulo A.

Progreſſ. I. Probatur quoque in tertio caſu. Nam tracta à puncto A per centrum V recta A G. Fient duo anguli, vnus ad centrum G V D, alius ad peripheriam G A D, ſuper eandem circumferentiam G D. Et eadem prorſus, quæ in ſecundâ figurâ de hac dicemus. Nam crus G A deſeruit pro vtriſque. Vnde idem argumentum valebit, & angulo nigro ad D, feminigerrimoq; ad A erit æqualis angulus ad centrum ſemialbus G V D, & ideo duplus ipſi A.



Progreſſ. 2. Trianguli quoque, partes dictorum maiorum ſunt eiuſdem rationis, ac in ſecundo caſu, nempe albus G V C, & nigerrimus V A C. Nam crus G A deſeruit vtriſque; Quare albus ad centrum V eſt duplus nigerrimi ad peripheriā A.

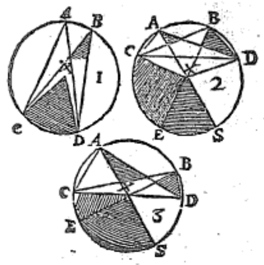
Cum itaque hæc pars alba externa apud V ſit dupla parti nigerrimę apud A internę in triangulo C V A, & ex Progr. I. totus quoq; angulus G V D externus ſit duplus angulo toti interno G A D in triangulo V A D; ſi auferatur, tum ab angulo toto ad centrum G V D externo pars alba, tum ab angulo toto ad circumferentiam interno nigro apud A nigerrima pars: quod reſiduum erit angulus niger C V D ad centrum erit, & reſtabit duplus quoque anguli nigri C A D ad circumferentiam.

THEOR. II. PROP. XXIV. Euc. 21.

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, ſunt inuicem æquales.

HÆc propoſitio tres caſus poteſt habere. Segmentū enim circumferentiæ, vel poteſt eſſe maius ſemicirculo, vt in prima figura ſegmentum C A B D. Vel minus, vt in ſecunda C A B D. Vel ei æquale, vt in tertia figura ſegmentū C A B D.

Sit itaque hoc ſegmentum ſemicirculo maius vt in prima, in quo ſint duo anguli A albus, & B niger ad circumferentiam. Superque eam circumferentiam, ſuper quam inexiſtunt, vt C D iuxta propoſ. antecedentem fiat angulus X ad centrum totus niger trahendo crura C X & X D.



Probaturque propoſitio. Angulus A albus ad circumferentiam iuxta pręced. propoſ. eſt ſemiſſis anguli nigri X ad centrum: Sed eiuſdem nigri X ad centrum eſt quoque ſemiſſis angulus B niger ad circumferentiam. Ergo cùm B niger, & albus A ſint medietas eiuſdē, inter ſe erunt ęquales.

Ad probandam ſecundam, & tertiam partem ſimul neceſsè eſt diuidere angulos A, & B per lineas tranſeuntes per centrum A S, & B E quemlibet in duas partes nigram, & albam. Inſuper & trahere ſemidiametros C X, & X D, & iam vides angulum partialem ad A album, tàm ſecundę, quàm tertię figurę habere angulum ad centrum ex nigro, nigerrimoque integratum C X S. Sed eundem nigerrimum, & album E X D obtinere quoq; alteram portionem nigram anguli B. Portionem verò albam anguli B in vtraque figura habere pro angulo ad centrum angulum nigrum C X E: Sicut & anguli A portio nigra obtinet pro angulo ad centrum angulum album D X S. His perceptis.

Probatur ſic. Duo anguli ad centrum niger, & nigerrimus C X S ſunt dupli, ex pręced. propoſitione portioni albę anguli A. Angulus verò albus ad centrum D X S eſt portioni nigrę ad A duplus. Ergo niger nigerrimus, & albus ſimul eſt duplus toti angulo nigro alboque ad circumferentiam A. Sed hi tres albus niger nigerrimuſque ad centrum ſunt dupli quoque totius anguli B ad circumferentiam: Siquidem niger eſt duplus eiuſdem B portionis albę; nigerrimus, & albus E X D ad cētrum portionis nigrę ad B. Quare angulus B niger albuſque totus, & angulus A albus nigerque totus ſunt ſemiſſis anguli totius portionibus alba, nigerrima, nigraque conſtantis ad centrum. Quare inter ſe erunt æquales.

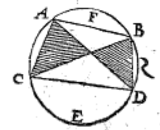
THEO-

THEOR. III. PROP. XXV. Euc. 22.

Quadrilaterorum in circulis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

DIcit; quod ſi quadrilaterum quodcumque circulo inſcribatur C A B D illius anguli oppoſiti, quales ſunt B, & C, aut A, & D ſunt duobus rectis æquales. Quod, vt probet, trahit duas diagonales lineas A D, & C B, quę angulos in duas portiones diuidunt.

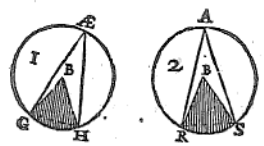
Probatur. Nam anguli A pars nigra eſt æqualis parti nigrę anguli B, ex pręc. propoſ. quòd ſint in eodē ſegmento C A B D. Similiter etiam pars alba anguli A, quòd ſit in eodem ſegmento B A C E D, erit æqualis parti albę anguli C. Igitur totus angulus A ſeminiger æquatur duabus portionibus nigrę B, & albę C. Sed addamus iſtis portionibus albę C, & nigrę B angulum D ſeminigrum totum erunt iſti, ex propoſ. 17. primi duobus rectis æquales; Siquidē ſunt interni triangulo C B D. Quamobrem angulus totus A niger, albuſque vice harum portionum, quibus æquatur, nigræ B, & albę C ſubſtitutus, cum angulo D ſeminigro. Faciet duos angulos duobus rectis æquales: Eodem modo procedet demonſtratio in oppoſitis B, & C. Quare patet propoſitio.



THEOR. IV. PROP. XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

SI ſint duo circuli æquales, quibus fiant duo anguli ęqui, vel ad centra, vt ſunt nigri, vel ad circumferentias, vt albi. Dico illos angulos ſubtendere portiones circulorum æquales, vel eis inſiſtere. Quod eſt idem.



Probatur primò de angulis æqualibus ad centrum. Nam ſegmentum primi G Æ H æquale eſt ſegmento ſecundi R A S; & toti circuli pręſupponuntur æquales. Ablatis ergo à circulis æqualibus ſegmentis æqualibus portiones æquales remanebunt; nimirum G H, & R S.

Quod verò ſegmenta G Æ H, & R A S ſint æqualia probatur. Quia ex defin. 9. ea ſegmenta ſunt æqualia, quæ angulos æquales includunt: Sed Æ, & A ſunt æquales. Siquidem dimidij ſunt, ex propoſ. 23. huius æqualium angulorum nigrorum ad centrum. Quamobrem circulorum portiones G Æ H, & R A S, in quibus inſunt, erunt æquales.

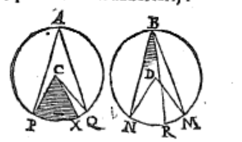
Quare ſequitur quoque ſecunda pars. Nam ſi fiant anguli ad peripherias æquales Æ, & A inſiſtent ęqualibus ſegmentis ex eadem defin. 10. Quare ijs ſegmentis à circulis æqualibus ablatis portiones circulorum G H, & R S remanebunt æquales.

THEOR. V. PROPOS. XXVII.

In æqualibus circulis, anguli qui æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

HÆc propoſitio conuertit antecedentem. Sed alio pacto oſtenditur. Nempe per reductionem ad impoſſibile. Dētur itaque duo circuli æquales, & anguli in illis A, & B, vel ad centrum C, & D, qui inſiſtant peripherijs æqualibus, P Q, & M N. Dicit *eos angulos fore æquales*.

Nam ſi non ſunt, ducatur punctata C X, quę faciat angulum nigrum ad centrum C primi circuli æqualem angulo albo ad D centrum ſecundi circuli, prout volunt aduerſarij.

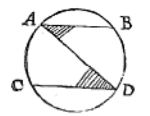


Tunc probatur angulus niger ad C centrum, vt falſo mentiuntur aduerſarij eſt æqualis angulo D albo ſecundi circuli. Ergo inſiſtant peripherijs æqualibus, ex propoſ. anteced. Quare portio peripherię P X eſt æqualis portioni M N ſecundi circuli. Sed eidem ex ſuppoſitione eſt æqualis portio P Q. Ergo portio P Q erit æqualis ſuę parti P X. Quod eſt impoſſibile.

Eodem modo probatur de angulis ad peripheriam A, & B. Nam, ſi non ſunt æquales. Aduerſarius faciat eos æquales tracta linea B R: Eritque angulus niger ad B, ęqualis angulo albo ad A. Quare peripherię portiones, quibus inſiſtunt, N R, & P Q erunt æquales. Sed quoque portio M N eſt æqualis eidem P Q. Ergo portio minor N R eſſet æqualis maiori N M. Quod eſt abſurdum.

COROLLARIVM I.

COlligitur hinc primo. Quod ſi duę lineę in circulo, vt A B, & C D intercipiant duas æquales portiones circuli, vt C A, & B D fore inuicem parallelas, quia tracta A D incidente anguli nigri alterni ſunt æquales ob portiones æquales, quibus inſiſtunt ex pręmiſsâ: Quando verò anguli alterni fiunt ab incidente, vt eſt A D æquales, duæ ſuper quas cadit, parallelę ſunt, ex propoſ. 28. primi.

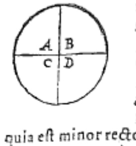


COROLLARIVM II.

ELlicitur rurſus duarum linearum ſe rectangulè decuſſantium, & per centrum tranſeuntium. Angulos ad centrum quartę circuli inſiſtre. Nam, cùm faciant quatuor rectos A B C D,

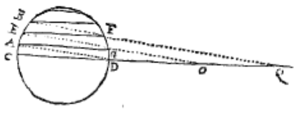
& om-

& omnes recti æquales ſint, oportebit, etiam circumferentias, quibus inſiſtunt eſſe æquales: Et ideò circumferentiam in quatuor portiones eſſe diuiſam, quę dicuntur quadrantes. Quare quoq; euidens eſt; omnem angulum acutum inſiſtere minori portioni quadrantis; quia eſt minor recto: Obtuſum verò maiori circumferentię, quàm quadrans ſit; quia eſt maior recto.



COROLLARIVM III.

COlligitur item. Quod illę, quę in circulo coniungunt parallelas æquales arcus intercipiẽtes ad partes oppoſitas, vt ſunt AD, EG, & EF punctatę coniungentes parallelas arcus ęquos intercipientes CD ad AG, & AG ad EF, adhuc eſſe parallelas. Ratio eſt, quia, cùm AG ſit incidens in punctatas, & anguli alterni ſint æquales ob æqualitatem portionum circuli GD, & AC, quibus inſiſtunt, ex propoſ. 30. primi, punctatæ quoque æquidiſtantes erunt.



COROLLARIVM IV.

DEducitur etiam. Quod ſi EC punctata protendatur, & ſimiliter diameter vſque dum occurrant in O, æqualem futurã diametri portionem, quę extra circulum prolungatur, vt eſt DO, & lineam AG in circulo ei æquidiſtantem. Ratio eſt, quia EO, & AD punctatę ſunt parallelę ſimiliter, & OD, & AG. Quare AOGD erit parallelogrammum, ex def. 35 primi. Quare ex propoſ. 34. primi, latera aduerſa erunt inter ſe æqualia. Vnde OD erit æqualis rectę AG, & ſi alias protendas eodem modo idem ſequetur. Quare diameter productum extra circulum æquabitur omnibus in circulo exiſtentibus ſibi parallelis, vt eſt CQ, quę æquatur tribus in circulo exiſtentibus, & ſibi parallelis CD, & AG, & EF.

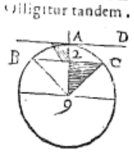
COROLLARIVM V.

COlligitur quoque rectę BC portionẽ circuli ſubtendenti eſſe parallelam lineam AD tãgentem punctum medium peripherię ſubtenſę BAC, quale eſt A. Quia illę ſunt parallelę, ſuper quas recta cadens angulum facit externum, & internum oppoſitum, & ad eaſdem partes æqualem. Sed angulus A niger, & B 29. albus ſunt æquales, cùm recti ſint, vt dictum eſt.

Ergo ſunt tangens AD, & ſubtendens BC parallelę; vt figura ſequenti.

COROLLARIVM VI.

COlligitur tandem. Quod ſi BC ſecetur per medium per aliquam lineam à centro prouenientem, & portionem circuli, quam ſubtendit ſecari per medium, & viceuerſa.



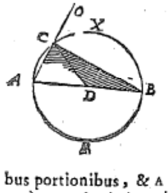
Nam anguli ad centrum æquales æqualium triangulorum, qualia ſunt oſtenſa album, & nigrum ad 9 habent etiam baſes æquales, ex 22. primi 2B, & 2C, & æqualibus peripherijs inſiſtunt, vt AC, & AB, ex pręced. & ideò erunt æquales portiones BA, & CA.

THEOR. VI. PROP. XXVIII. Euc. 31.

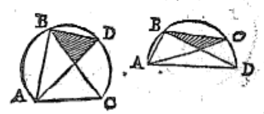
In circulo angulus, qui in ſemicirculo rectus eſt, qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui autem in minore maior eſt recto. Inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt, minoris verò ſegmenti angulus minor eſt recto.

HÆc propoſitio quinque partes habet. Sed quę, primâ oſtenſâ cęterę faciles euadant. Primam itaque partem primò declarabimus. Dicit itaque, quod angulus in ſemicirculo, vt eſt C, niger nigerrimuſque ſimul, cuius vertex in circumferentia eſt, baſis verò illum ſubtendens totus diameter AB, rectus eſt. Quod, vt oſtendatur, ducenda eſt recta CD, & prolungandum latus CA in O.

Probatur angulus externus albus C eſt æqualis angulis internis, & oppoſitis A, & B totius trianguli ACB, ex propoſ. 17. primi. Ergo eſt etiam equalis angulo interno ad C, qui nigerrimus nigerque ſimul.



Probatur. Nam angulus A, & angulus B ſunt æquales eius duobus portionibus, & A quidem nigrę, angulus verò B portioni nigerrimę: Ergo & eędem portiones sũt æquales angulo externo albo C. Quod verò angulus A ſit æqualis portioni nigrę, patet ex propoſ. 14 primi. Nam ſunt anguli ad baſim in triangulo Iſoſcele ACD, cùm duo crura ſint ſemidiametri AD, & CD. Quod verò B ſit æqualis portioni, & angulo nigerrimo C, eodem argumento probatur. Nam triangulum totum nigrum ob crura, quę ſunt ſemidiametri eſt Iſoſceles, vnde B, & C nigriores, vt anguli ad baſim ſunt æquales.



Dicit quoque. Quod ſi in maiori ſegmento ſit ABC angulus erit minor recto, & ſi angulus ABO, ſit in minori ſegmento erit recto maior. Quod, vt probetur, trahatur à puncto A diameter in vtriſque ſegmentis AD. Trahaturque crus BD faciens, ex pręced. probat angulum rectum BAD. Nam angulo in maiori ſegmento ABC, addit partem nigrã; vnde ABC minor erit recto, at angulo in minori ABO parte nigra minor eſt idem rectus, quare ABO maior erit recto.

Dicit tandem circumferentiam maioris ſegmenti facere cum recta ſubtenſa, angulũ recto maiorem: At minoris ſegmenti recto minorem, ad

Ad quod oſtendendum inſpiciatur prima figura. Nam CB erit ſubtenſa, & peripheria ſegmenti maioris CRB, minoris verò CXB, cùm ergo angulus C rectus ſit, & recta CA intra circulum cadat: Patet; quòd circumferentia extra cadens CA faciat ſuum angulum, cùm recta CB maiorem recto. At in minori ſegmento peripheria CX lineam CO foras relinquit: Quare facit cum CB angulum recto minorem; quia angulus OCB maior rectus eſt, vt prima parte huius propoſ. eſt oſtenſum.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quod ſi fiat triangulum rectangulum quodcumque, & maior eius baſis bifariam diuiſa aſſumatur pro centro interuallũ medietate eius prębente, circulum neceſſariò per tres vertices extremos angulorum rectanguli eſſe tranſiturum. Quoniam, ſi non tranſiret, vel ſecaret, vel ſupra, ſe fleteret: Si ſecaret, ergo iam intra illud rectangulum triangulum ęquale ei poſſet conſtitui contrà propoſ. 21. primi: Si ſuper tranſiret, poſſet conſtitui triangulum angulum rectum comprehendens, & tunc angulus rectus rectanguli, vtpote comprehenſus, ex propoſ. 21. primi eſſet maior.

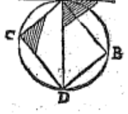
THEOR. VII. PROP. XXIX. Euc. 32.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea. A contactu verò producatur aliqua recta linea circulum ſecans; Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt illis angulis, qui in alterni circuli ſegmentis conſiſtunt.

SIt tangens circulum GL in puncto A, à quo recta educatur, quę ſecet circulum in duo ſegmenta, vt eſt AD, Hęc vel per centrum tranſibit, vel non. Si tranſibit per centrum, erit primus caſus, de quo primò demonſtratio erit.

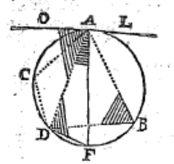
Caſus 1. Aſſerit itaque, quòd hęc tranſiens per centrum AD faciet angulum, cum tangente æqualem angulo, qui comprehenditur ab alterno ſegmento; nempe angulum nigrum ad A dextrũ angulo C nigro ſiniſtri ſegmenti: Angulum verò ſiniſtrum ad A album angulo ſegmenti dextri B albo.

Probatur verò. Omnes recti anguli ſunt ęquales. Sed anguli ſegmentorum C, & B recti ſunt, ex pręced. & anguli GAD, & LAD, quos perpendicularis per centrum tranſiens facit, cum tangente ſunt, ex propoſ. 20. huius recti: Ergo omnes ſunt æquales.



Caſus 2. Dicit quoque idem eſſe, & euenire. Si linea à puncto A egrediens non tranſeat per centrum, vt in hac ſecunda figura. Nam angulus dexter albus nigerrimuſque ad A à ſecante AD tangenteque OL factus eſt æqualis angulo C ſegmenti ſiniſtro, ſicut & alius niger ad A eſt æqualis alteri nigro B. Quod, vt probetur trahenda eſt AF, quę tranſeat per centrum, & tracto crure DF conſtituendum eſt rectangulum triangulum ADF.

Probatur propoſ. Angulus niger OAD eſt æqualis angulo apud F in triangulo ADF. Sed iſte angulus F eſt æqualis angulo nigro B. Ergo angulus B niger, & niger apud A ſunt inuicem æquales. Probatur ex propoſ. 24. huius, quòd angulus F in triãgulo ADF ſit æqualis nigro B: Quia eſt in eodem ſegmento ABFD. Probatur quoq; quod idem angulus F, ſit æqualis nigro A: Quia niger D ex anteced. rectus eſt, quare ex propoſ. 17. primi, reliqui nigerrimus apud A, & apud F vni recto erunt æquales: Sed angulus niger, nigerrimuſque apud A rectus eſt: Ergo ablato angulo nigerrimo, cum quo angulus apud F, & niger apud A æquantur vni recto, reſtabunt inuicem anguli F, & A niger æquales. Quamobrem angulus B angulo F æqualis, æquabit quoque angulum nigrum apud A.



Sic probatur de angulo dextro LAD, quod ſit æqualis angulo ſiniſtro ACD in ſegmento: Nam B niger, & C albus in quadrilatero CADB, ex propoſ. 25. huius æquantur duobus rectis, & ſimiliter anguli niger, & LAD apud A æquantur duobus rectis; Sed iam oſtenſum eſt angulum B nigrum eſſe æqualem angulo A nigro. Ergo reliquum nigerrimum, & album ipſius erit æquale angulo albo C in triangulo ACD ſegmenti.

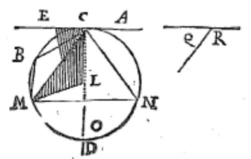
PROB. V. PROP. XXX. Euc. 33.

Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli; quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DOcet hîc conſtituere quodlibet ſegmentum ſuper quamlibet rectam, quodcapiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Et quidem ſi angulus rectus datus ſit, non oportebit, niſi diuidere lineam, V. g CD bifariam, & ibi centro poſito in L deſcribere ſemicirculum. Nam ex dictis propoſ. 28. capiet angulum rectum, qui erit ęqualis dato; cùm omnes recti ſint ęquales. Sed ſi non ſit rectus, at acutus, vt Q, tunc magis operis requiritur.

Sit itaque angulus datur Q acutus, cui æqualis capax ſuper lineã CM facere oporteat aliquòd ſegmentum circuli. Ducatur ad initium eius C linea EA, quę faciat angulum acutum nigrum ęqualem angulo dato Q, & ad eam erigatur perpendicularis, exiens à puncto C, quę ſit OC, & portione nigerrima compleat angulum rectum, & ab altero extremo M punctata alia ducatur



verſus perpendicularem, quæ faciat angulum ad M nigrum ęqualem angulo nigerrimo ad C. Hę namque punctatę CL, & LM, vt ſubtenſę angulis ęqualibus æqu alibus, ex propof.15. primi erunt æquales. Quare facto centro in L interuallo L C deſcribi poterit circulus, qui tranſibit per M, vtpote per ſemidiametrū æqualem. Si itaque in hoc ſegmento C N M ſuper lineam C M conſtituatur angulus N. *Iſte erit æqualis angulo acuto nigro ad* C. Qui eſt æqualis angulo Q dato.

Probatur autem ex præmiſſa propoſitione faciliter. Nam angulus ad C niger E C M eſt angulus ad contingentem. Ergo erit æqualis angulo alterni ſegmenti, qui eſt angulus N.

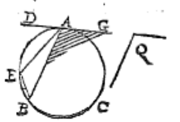
Quòd ſi velimus facere angulum obtuſum, V. g. R. Fiat angulus eodem pacto, quo ſupra A C M ei angulo R æqualis, & facto circulo è centro L in ſegmento C B M fiat angulus B. Nam, cùm ſit ex præcedenti propoſ. in ſegmento alterno C B M erit æqualis angulo obtuſo A C M; & R.

PROB. VIII. PROP. XXXI. Euc.34.

A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

SIt datus angulus Q, & oporteat à circulo dato A B C abſcindere portionem, quæ capiat angulum æqualem dato angulo Q. Ducatur recta D G tangens circulum in puncto A, & à puncto A ducatur recta A B, quæ faciat cum tangente D G angulum æqualem angulo Q, prout docet propoſ. 24. primi, & ſegmentum alternum A E B capiet angulum E æqualem angulo Q.

Probatur. Nam ex 29. propoſ. huius angulus in ſegmēto alterno A E B capiens eſt æqualis angulo nigro ad A. Sed angulus niger ad A factus eſt æqualis angulo dato Q: Ergo ſegmentum A E B capit angulum æqualem dato angulo Q.



EXPENSIO VI.

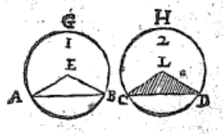
De Peripherijs.

HIc agimus de Peripherijs eas comparando ad inuicem, & oſtendendo quales ſint æquales, qualeſque non ſubeant æqualitatem. Docemus etiam peripheriam, atque adeò circulū biſariam ſecare: Et, licet hæc expenſio ſit facilior præcedenti, oportuit tamen poſponere, cùm dependeat in aliquibus à demonſtrationibus angulorum præhabitis.

THEOR. I. PROP. XXXII. Euc.28.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt maiorem quidem peripheriam æqualem maiori alterius, minorem verò vnius æqualem minori alterius.

DIcit lineas æquales in circulis æqualibus (quòd etiam intelligitur de eodem, vt notat Clauius,) vt ſunt A B, & C D in æqualibus circulis primò, & ſecundò auferre ſegmenta æqualia ſcilicet diuidere qualibet ſuum circulū in duas portiones, quæ & ſi non ſint æquales, inuicē illæ, quæ ſunt eiuſdem circuli, comparanda eſt maior primi circuli, cum maiore ſecundi, & hæ circuli portiones erunt inuicem æquales; ſicut & minor primi comparata minori ſecundi.



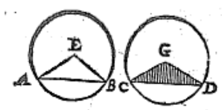
Probatur. Nam anguli ad centrum E, & L triangulorum albi, & nigri ſunt æquales. Ergo inſiſtunt ſegmentis, & peripherijs æqualibus minoribus A B, & C D, ex propoſ. 26. huius, quæ albatæ ab æqualibus circulis per imaginationem relinquent portiones peripheriæ maiores A G B, & C H D æquales.

Probatur verò; quod anguli E albus, & L niger ad centrum ſunt æquales, quoniam baſes A B, & C D, ex præſuppoſitione ſint æquales: Latera verò, vt ſemidiametri æqualium circulorum æquales ſunt, totum igitur triangulum nigrum, toti albo æquale eſt. Quare & angulus ad centrum, ex prop.23. primi E albus erit æqualis nigro L.

THEOR. II. PROP. XXXIII. Euc.29.

In æqualibus circulis rectæ lineæ, quæ æquales peripherias ſubtendunt, ſunt æquales.

ESt conuerſa præcedentis, & ſequitur à 27. huius, quę & ipſa conuertit 26. Sint itaque peripheriæ æquales A B, & C D, quę rectis ſubtendantur, fiantque anguli ad centrum E, & G tractis ſemidiametris A E, & E B conficientibus triāgulum album, & alijs G C, & G D nigrum delineantibus.



Probatur. Quia peripheriæ C D, & A B, V. g. minores præſupponūtur æquales, anguli E albus, & G niger ad centrum, ex 27. propoſ. huius ſunt æquales; Sed & crura ſunt æqualia; Quia omnia ſunt ſemidiametri. Ergo ex propoſ.22. primi, & baſes æquales erunt quales ſunt A B, & C D.

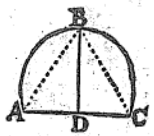
THEOR. III. PROP. XXXIV. Euc.30.

Datam peripheriam biſariam ſecare.

AD hoc vt peripheria A B C biſariam ſecetur. Ducatur recta ſubtendens A C, & diuidatur biſariam in D, & ab ea diuiſione D erigatur perpendicularis D B vſq; ad peripheriā protenſa; hæc namque diuidet eam in duas partes æquales, ad quod probandum ducendæ ſunt duæ lineæ nimirum A B, & B C.

Probatur

Probatur lineę modò tractę ſunt æquales. Ergo ex prop. 32. huius, & peripherię, quas ſubtendunt A B, & B C æquales ſunt.



Probatur, quòd ſubtenſę ſint æquales. Nam baſes ſunt triangulorum æqualium A B D, & B D C. Hęc verò triangula probantur æqualia, ex prop. 22. primi: Quia crus B D eſt commune: alterum verò crus D C ex constructione fecimus æquale D A alteri cruri: At anguli ad D, A D B, & B D C recti ſunt. Quare & baſes A B, & B C æquales.

EXPENSIO VII.

De Rectis circulo inſcriptis, & circumſcriptis.

QVemadmodum egit Euclides Libro ſecundo de potentijs laterum trianguli, tum recti anguli, tum obtuſanguli ad æqualia quadrata, & rectangula conſtituenda.

Sic hic agit de potentijs linearum, aut in circulo ſe ſecantium, aut circulum tangentium ad æqualia quadrata, rectangulaque deſcribenda. Vtiliſſima omnium cognitio; quippe qui conicis maximè deſeruiat, tangentibuſque reperiendis, & ſecantibus maximè proſit, & ſolidis ipſis ſphęricis, conicisque ad inueniendam eorum ſoliditatem aditum ſternat.

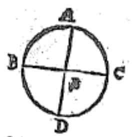
THEOR. I. PROP. XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuò ſecuerint rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur.

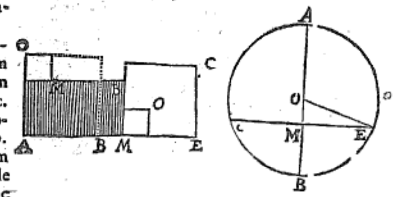
QVatuor caſus propoſitio hęc enumerat. Nam vel ambę lineę, quę ſe in circulo ſecant ſunt diametri, & eſt primus caſus. Vel vna earum; ſed ſe inuicem ſecant ad angulos rectos; & ecce ſecundus. Vel vna earum diameter eſt; ſed non ſe ſecant ad angulos rectos; & erit tertius. Vel tandem neutra earum tranſit per centrum, ſiue ad angulos rectos, ſeu ad non rectos ſecet, & erit quartus caſus: Qui ſinguli diuerſas probationes expoſcunt.

Primus caſus. Sit igitur circulus A B C D, in quo duo diametri A D, & B C ſe ſecent in E dicit rectangula, ex ſegmentis B E, & E C vnius, & ex ſegmentis alterius A E, & D E facta inuicem eſſe æqualia.

Patet, quia cùm ſegmenta ſint ſemidiametri ſunt omnia æqualia. Vnde & æqualia rectangula conſtituent.

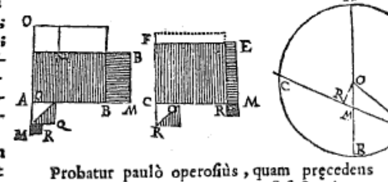


Caſus 2. Sit in circulo C E B, linea, quę rectè ſecet diametrū in M. Dicit, quòd *quadratum factum ex* M E, & M C, *eſt æquale rectangulo* facto, ex A M portione diametri, & M B alia diametri portione. Quod vt demonſtretur trahendus eſt ſemidiameter O E.



Probatur verò ex propoſ. 7. ſecundi rectangulum nigrum factum ex A M, & M B vna cum quadrato paruo O M ex intermedia O M eſt æquale quadrato ex dimidia, quale eſt punctatum B O; quòd diameter A B ſectus ſit in æqualia in O, & non æqualia in M. Sed huic eidem quadrato ex dimidiâ æquale eſt quadratum ex dimidia M E; quale eſt M C iuncto tamen eidem quadrato M O. Ergo ſi hoc quadratum M O, tum à rectangulo nigro, tum à quadrato M C auferatur remanebunt quadratum rectangulumque nigrum inter ſe æqualia. Remanet probanda minor, quod duo quadrata M C, & M O paruum æquentur quadrato punctato B O, hoc autem patet. Nam quadratum O B eſt æquale quadrato O E cùm ſint ſemidiametri, & lineę æquales, ſed quadratum ex O E cùm ſit baſis ſubtenſa angulo recto M, ex propoſ. 11. ſecundi eſt æquale quadratis ex M E, quod eſt M C, & M O paruo. Ergo eiſdem quoque eſt æquale quadratum punctatum ex O B. *Quare rectangulum nigrum erit æquale quadrato* M C, quod probandum erat.

Caſus 3. Dicit tertiò. Quòd ſi linea C E ſecuerit A B diametrum, & non ad angulos rectos, adhuc vera erit propoſitio; Et quod rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, V. g. ſub C M, & M E erit æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis alterius, nēpe diametri M B, & M A. Quod, vt probet, trahit perpendicularem à medietate lineę C E; nempe à puncto R, quę cadet ex propoſ. 1. huius Coroll. in centrum O. Deinde coniungit centrum cum extremo E rectâ O E.



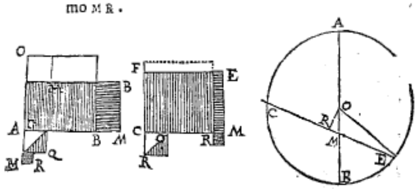
Probatur paulò operoſiùs, quam precedens propoſitionis pars. Diameter A B eſt ſectus in O, in æqualia, & in M in non æqualia: Quapropter rectangulum ſub partibus inęqualibus A M, & M B contentum, quale eſt nigrum M A B, & quadratū A Q ex intermedia M O ſeminigrum ſimul ſunt æqualia quadrato ex medietate diametri O B, ex propoſ. 7. ſecundi, quale eſt O B, & quod idem eſt propter æqualitatē linearum quadrato ex O E. Sed hoc quadratum ex O E, vel O B eſt quoque æquale propter propoſ. 11. ſecundi quadratis C R ex O R hoc eſt, ſeminigro, & ex R E punctato F R.

Ergo quadratum hoc R F punctatum vna cum quadrato ſeminigro annexo erit ęquale rectāgulo nigro

nigro A M B ex ſegmentis diametris iuncto cum quadrato Q A ex O M.

Sed modò hoc quadratum Q A, ex propoſ. 11. ſecundi eſt æquale duobus O R ſeminigro, & M R minimo nigerrimo ob angulum rectum R.

Quapropter poterimus ſubſtituere loco illius Q A hęc duo, ſeminigrum ex O R, & M R minimū nigerrimum. Quare quadratum punctatum R F, vt diximus, cum quadrato ſeminigro erit æquale huic rectangulo nigro A M B aſſociato cum quadrato eodem ſeminigro O R, & minimo nigerrimo M R.

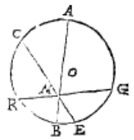


Abijciatur itaque ab vtriſque comes iſte ſeminiger O R, & remanebūt adhuc æqualia rectangulum nigrum A M B cum minimo nigerrimo quadrato, quod remanſit, & quadratum punctatum R F factum ex dimidia R E.

Sed huic quadrato punctato R F facto ex dimidia R E eſt æquale rectangulum nigrum factum ex ſegmentis inęqualibus C M, & M E lineę C E, nimirum C E vnà, cum quadrato ex intermedia R M facto, quod eſt minimum nigerrimum R M, ex propoſ. 7. ſecundi; Siquidem linea C E eſt diuiſa in æqualia in R, & non æqualia in M. Quare duo rectangula nigra A B M nimirum ex ſegmentis diametri, & C E ex ſegmentis alterius aſſociata duobus quadratis minimis nigerrimis ſunt æqualia vni tertio; nempe quadrato R F ex R E. Vnde erunt æqualia inuicem. Tolle itaque illa quadrata minima nigerrima, cùm ſint eiuſdem quantitatis, vtpote eiuſdem intermediæ R M, *& remanebunt æqualia rectangulum nigrum, ex ſegmentis diametri* A M B; *& ex ſegmentis alterius nigrum rectangulum* C E.

Caſus 4. Sint tandem duę rectę, quę in circulo quomodocumque ſe ſecent C E, & G R in M. Ducaturque per punctum M ad centrum diameter A B. Dicit; quòd *rectangulum* ex ſegmentis lineę C E *æquale* eſt *rectangulo* ex ſegmentis lineę R G.

Probatur. Nam ex precedenti tertia parte rectangulum ex ſegmentis C M, & M E lineę C E eſt æquale rectangulo ex ſegmentis diametri A M, & M B. Sed ex eādem rectangulum ex ſegmentis G M, & M R lineę G R eſt eidem rectangulo ex ſegmentis diametri A M, & M B æquale. Ergo rectangulum ex ſegmentis lineę C E, & rectangulum ex ſegmentis lineę R G ſunt æqualia inuicem.



COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quomodo datis duobus lineis in æqualibus poterimus eas ita ſecare, vt ex earum ſegmentis rectangula componantur æqualia. Nam ſi eas in circulo accomodamus, ita ut ſe inuicem ſecent; certum erit, quòd rectangula ex ſegmentis ijs confecta æquabuntur ad inuicem.

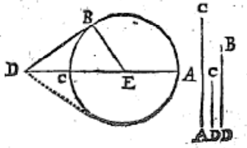
THEOR. II. PROP. XXXVI.

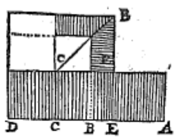
Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum tangat, altera ſecet. Rectangulum, quod ſub tota ſecante, & portione exterius inter punctum aſſumptum, & conuexam peripheriam intercepta comprehenditur, æquale eſt ei quadrato, quod deſcribitur à tangente.

DVos caſus hæc propoſitio enumerat. Nam ſecans, vel per centrum tranſit, vel non. Si per centrum tranſeat, vt eſt in appoſita figura D A.

Primus caſus erit, & intendit demonſtrare rectangulum ſub tota D A, & ſub portione D C, quę inter peripheriam conuexam, & punctum aſſumptum mediat, comprehenſum nigrum eſſe æquale quadrato rectę tangenti D B; Quod, vt perficiat, à puncto contactus ad centrum ducit B E, quę ex 20. tertij perpendicularis erit.

Ex propoſ. 8. ſecundi cùm diameter ſectus ſit in E in partes æquales, & ei adiecta fuerit recta exteriùs D C, rectangulū, quod eſt nigrū D A comprehenſum à tota D A, & adiecta D C, cum quadrato ex dimidia C E nimirum radio, quod eſt C B, cuius Gnomon niger eſt æquale quadrato ex D E dimidia, & adiecta confecto, nimirum maximo D B.



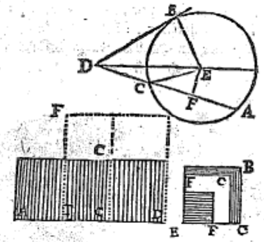


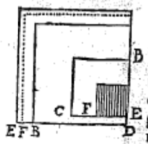
Sed huic quoque maximo D B; ex propoſ. 11. ſecundi ſunt ęqualia duo quadrata punctatū ex D B, & alterum ex radio B E, quod eſt idem, ac illud, cuius Gnomon niger C E B.

Ergo rectangulum nigrum D A iuncto eodem quadrato C E B, cuius Gnomon niger eſt, æquale inuenitur iſtis duobus, punctato nimirum iuncto eodem C E B. Quare, ſi hoc C E B auferatur ab vtriſque *remanebunt rectangulum nigrum* D A, *& quadratum punctatum ex* D B *tangente æqualia*.

Dicit quoq; hanc propoſitionem verificari quiuis *recta ſecans per centrum non tranſeat*, vt eſt in ſeq. figura D A. Nam tota D A, & portio D C exterius intercepta faciet rectangulum æquale quadrato tangentis B D. Vt verò probet. In primis trahit à puncto contactus ad centrum perpendicularem B E, ex 20. huius. Rurſuſque diuiſâ C A biſariam in F, ab eo ducit perpendicularem ad centrum E, ex 13. huius. Deinde ducit radium C E.

Prob. Quadratum punctatum ex D F dimidiâ, & adiectâ eſt ęquale rectangulo nigro ex tota A D, & adiecta D C, comite quadrato ex dimidia C F ex propoſ. 8. ſecundi, & addito vtrinque quadrato minimo E F, quadratum E F cum punctato F D, & rectangulum nigrum cum eodem E F, & alio quadrato C F iam ſibi comite remanebunt æqualia.





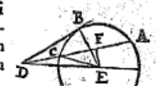
Hęc autem duo quadrata comitantia rectangulum nigrum, vtpote ex cruribus C F, & F E æquantur quadrato ex ſemidiametro quale eſt C E B, cuius Gnomon niger, ob rectum angulum F, ex propoſ. 11. ſecundi.

Ergo poſſumus ſubſtituere hoc pro illis, & ſic rectangulum nigrum quadrato hoc E C B comite æquatur quadrato D F punctato, & addito minimo nigro F E.

At hęc duo punctatum, & nigrum minimum æqualia ſunt maximo quadrato D E, vtpote facto ex baſi, & ſubtenſa angulo recto F, ex prop. 11. ſecundi. Quamobrem, & rectangulum nigrum comite quadrato E C B ex radio E C nuper ſubſtituto æquabitur ipſi maximo E D. Sed & huic idē eſt æquale quadratum ex tangente D B, & quadratum E C B ex radio E B, ex propoſ. 11. ob rectum angulum B. Ergo & rectangulo nigro vna cum quadrato E C B erunt æqualia.

Tolle itaque ab vtriſque quadratum E C B ex radio B E, aut E C, quod idem eſt; *remanebuntque æqualia quadratum* D B, *& rectangulum nigrum ex* D A, *&* D C.

Quod & verificabitur ſi linea D A non cadat ad alteram partem, ſed ad eaſdem partes, vt in figura ſecunda videre licet.



COROLLARIVM I.

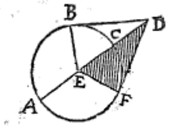
HInc manifeſtatur; Quod ſi plurimę lineę cadant ſecantes circulum, omnia rectangula à totis ijs lineis, & earum partibus extra circulum remanentibus inter ſe eſſe æqualia; quoniam ſunt æqualia omnia vni tangentis alicuius ab eodem puncto exeuntis quadrato.

COROLLARIVM II.

MAnifeſtum quoq; eſt tangentes ab eodem puncto ductas inuicem æquales exiſtere. Ratio eſt; quia omnes lineę, quæ tangunt, faciunt ſuum quadratum rectangulo alicui ſecantis æquale; Propterea, & quadrata debebunt eſſe æqualia. Quare & latera eorum quadratorum æqualia eſſe debebunt.

COROLLARIVM III.

COnſtat quoque ab eodem puncto extra circulum aſſumpto non; niſi duas, tangentes duci poſſe: Alioquin; ſi alia duceretur, aut infra B D, aut ſupra caderet, & ſic ducta B E eius contactum coniungente eſſet maior, vel minor, quòd eſſe nequit, & angulus ad B eſſet maior, vel minor recto, quod, nec eſſe poteſt.



COROLLARIVM IV.

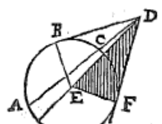
COnſtat quoque, quòd ſi duę rectę æquales à quolibet puncto exteriùs aſſumpto in conuexam peripheriam incidant, & vna earum ſit tangens, alteram quoque tangere; Quia ſi non tangeret, ſecaret. Quare ad alteram partem punctata tangens duci poſſet, quę, & eſſet æqualis tangenti alteri, V.g. D B. Quare in circumferentiam ab eodem puncto inciderent tres æquales contra documenta propoſ. 22. huius.

THEOR. III. PROP. XXXVII.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat. Sit autem, quod ſub totâ ſecante, & exteriùs inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato, incidens ipſa circulum tanget.

EXtra circulum datum ſumatur punctum D, & ex puncto duæ rectæ in circulum cadant, quarū vna ſecet, & faciat rectangulū ſub ſuo ſegmento D C, & tota A D comprehenſum æquale quadrato ex tota alterius incidentis, V.g. ex B D. Dicit *eam* B D *circulum tangere in* B. Quod, vt demonſtretur, ducenda eſt tangens aliqua, V.g. D F, & coniungenda ſunt cum centro punctum contactus huius recta E F, & punctum B incidentię alterius lineę rectâ B E; Et ſi non tranſeat ſecans D A per centrum, ducenda eſt altera ſecans, quę per centrum tranſeat, quę ſit D E.

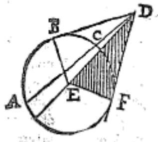
Probatur. Nam triangula album, & nigerū ęqualia ſunt lateribus ſibi correſpondentibus: Quare ex 23. primi anguli F, & B erunt ęquales; Sed angulus F rectus eſt, ex propoſ. 20. quod D F circulum tangat. Ergo & angulus B rectus erit, & cōſequēter ex Coroll. prop. 18. D B *circulum tanget*.



Remanet probandum. Quòd triangula latera habeant correſpondentia ęqualia. Nam baſis D E commu-

communis est, crus B E; & E F radius est: Quare remanet probandum de altero crure D B, & D F, id verò ostenditur. Nam quadratum factum ex D F est ęquale rectangulo facto ex tota A D, & segmento exterius inter peripheriam, punctumque assumptum intercepto D C. Sed & huic eidem rectangulo ponitur in propos. hac ex suppositione ęquale quadratum ex B D: Sed quadrata ęqualia facta sunt ex ęqualibus lateribus. Ergo, & latus, crusque D B est ęquale cruri D F.

Collige hinc lineam à puncto exterius assumpto per centrum ductam diuidere angulum B D F comprehensum à tangentibus ab eodem puncto nascentibus bifariam. Ratio est, quia probata sunt duo triangula hinc, inde ęqualia. Quare, & è conuersò recta diuidens bifariam angulum D B F necessariò per centrum transibit; Quòd si non transiret per centrum alibi transiret. Vnde ducta, quę transiret per centrum, D E, angulum D B F bifariam diuideret: Est autem impossibile, quòd angulus in duobus locis bifariam diuidatur.



TRACTATVS VII.

In Librum quartum Elementorum. De inscriptione, & circumscriptione figurarum in circulo.

LIBER quartus agit de descriptione figurarum respectiuè ad circulum; licet enim triangula, & quadrata possint sine circulo describi, commodiùs tamen cum reliquis figuris, aut intra circulum, aut circa circulum describuntur. Vsus verò huius Libri pernecessarius est, tum solidis in sphæra inscribendis, & circumscribendis, tum ad comparationem externæ figuræ solidæ, cum interna, ex qua Archimedes soliditatem sphæræ adinuenit, tum ad lineas, chordasque arcuum inueniendas, & tandem ad Militares delineationes fortalitiorum.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam propositiones ipsas aggrediamur aliqua principia, definitionesque ad hunc librum, spetialiter spectantes oportet agnoscere; istæ verò sunt.

DEFINITIO I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cùm singuli eius figuræ, quæ inscribitur anguli singula latera eius, in qua inscribitur tangunt.

Cùm debeat agere Euclides de figurarum inscriptionibus, & circumscriptionibus paucis declarat, quid sit figura inscribi, & circumscribi: Quare dicit; quòd, si sit triangulum A B C, cuius vertices omnes angulorum tangant latera alterius, vt tangit triangulum prædictum latera figurę E F G in punctis A, B, & C; quòd figura tangens in verticibus suis erit inscripta, altera tacta in lateribus vocabitur circumscripta.

DEFINITIO II.

Similiter etiam figura circumscribi figuræ dicitur cum circumscriptæ latera singula tangunt angulos singulos inscriptæ.

Hæc Definitio est opposita pręcedenti; definitque circumscriptam E F G, quę dicitur talis eò quod latera eius tangant angulos A, B, & C alterius inscriptæ.

DEFINITIO III.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum figuræ inscriptæ singuli anguli tangunt circuli peripheriam.

Sic triangulum A B C circulo inscribi dicetur; quia extremi apices angulorum C B A eũ tangunt.

DEFINITIO IV.

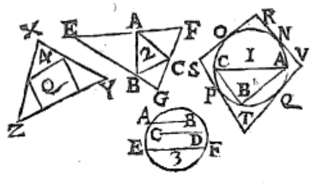
Figura verò rectilinea circulo circumscribi dicitur; cùm singula eius, quæ circumscribitur, latera tangunt circuli peripheriam.

Sic quadrilaterum R V S T circumscribitur circulo; quia eius latera circulum tangunt in punctis N O P Q, vt fig. 1.

Quare patet; quòd quadratum in triangulo, nec quęlibet figura possit inscribi in alia; cùm aliquod latus inscriptę, est idem cum circumscribentis latere, vt quadratum Q tangit circumscriptam figuram X Z Y: Hanc tamen Inscriptionem licet impropriam admittit Clauius in fine Lib. 6. num 16.

DEFINITIO V.

Similiter circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera figuræ circumscriptæ contingit.



DEFINITIO VI.

Circulus autem circa figuram rectilineam describi cum circuli peripheria tangit singulos angulos figuræ inscriptæ.

Sic circulus N O P Q erit circumscriptus triangulo; quòd apices eius tangat in A B C: At inscriptus quadrilatero R V S T; quòd eius latera tangat in punctis N O P Q.

DEFINITIO VII.

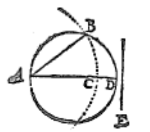
Recta linea circulo accomodari, seu coaptari dicitur; cùm eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Ita nec recta A B, nec C D est coaptata circulo; quòd eius duo extrema non tangant circulum ; sed solùm E F ; quòd eius duo extrema circulum tangant , & in circulo sint vt fig. 3.

LEMMA PROBLEMATICVM PROP. I.

In dato circulo rectam lineam accomodare , quæ circuli diametro non sit maior .

COaptanda sit in circulo A B D recta æqualis rectę E, quæ esse debet nõ maior diametro; quia diameter est maxima linearum , quæ in circulo capere possunt, vt docuit 17. propos.tertij. Ducatur itaque diameter A C D. Et si fuerit diametro æqualis data E, factum erit quod quæritur. Nam coaptatus , & accomodatus diameter equalis rectæ est. Si verò E minor fuerit ; Ex diametro abscindatur ei æqualis, vt A C , & centro A , interuallo verò C , circulus punctatus describatur secans circulum priorem B: *Nam ducta recta* A B *accomodata circulo* A B D *æqualis erit datæ* E.



Probatur, quia est æqualis , ipsi portioni diametri A C , quàm detruncauimus;sunt enim & A C, & A B radij , & semidiametri .

EXPENSIO II.

De mutua circuli , & trianguli inscriptione , & circumscriptione .

HÆc Expensio vtilis admodum est precipuè quod 5. propos. aperuerit ianuam , datis tribus punctis peripheriam , quæ transit per illa, Inueniendi; & data portione circuli centrum reperiendi , quæ inuentio immensos vsus habet .

PROBL. I. PROP. II.

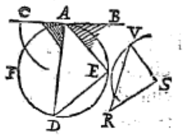
In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum .

SIt describendum in circulo A D E triangulum A E D æquiangulum dato triangulo cuicumq; V. g. V S R.

Ducatur recta tangens circulum in A , quę sit C B , & à puncto A contactus recta ducatur A D faciens angulum nigerrimum apud A cum tangẽte æqualem angulo S ; ducatur quoque alia ab eodem puncto contactus , quę sit A E , quę faciat cum tangente angulum n grum æqualem angulo R , coniungaturque E D ; *Eritque triangulum constitutum æquiangulum triangulo* V S R.

Dices. Lineas A E,& A D posse cadere vnã super aliam , aut vnã vltra aliam ; itaut non cadat in E; sed ad alteram partem , V. g. F. Respondetur enim id non posse euenire . Quia duo anguli nigerrimus , & niger sunt minores duobus rectis , quod sint æquales duobus anguli R , & S , qui in quocumque triangulo sunt minores duobus rectis , cum omnes tres anguli sint æquales duobus rectis , ex propos. 17. primi . Deberent autem esse duobus rectis æquales,si vna linea caderet super aliam , ex propos. 10. primi , quia tunc insisteret tangenti C B , quamobrem maiores esse quoque deberent , si altera , V. g. A E in alterius partem transiret , puta inter A C , & A D in F . Soluto hoc scrupulo, propositio

Probatur . Quę sunt æqualia vni tertio, sunt æqualia inuicem . Sed angulus S ex constructione est æqualis angulo nigerrimo apud A , & eidem nigerrimo est quoque æqualis angulus albus E in alterno segmento A E D , ex prop. 29. Lib.3. Ergo inter se angulus S , & E erunt æquales.



Eodem modo angulo nigro apud A est æqualis ex constructione angulus R , eidemque nigro apud A est æqualis angulus apud D in segmẽto A F D E alterno, ergo R, & D anguli inter se erunt æquales .

Sed insuper anguli trianguli cuiuscumq; sunt æquales duobus rectis. Quare etiam horum duorum triangulorum A E D , & V S R anguli duobus rectis æquabuntur. Ablatis itaque à quolibet duobus æqualibus , à dato V R S angulis R , & S , & ab inscripto A E D angulis E , & D correspondenter æqualibus , reliqui albus apud A , & V erunt inuicem æquales . Quamobrem omnes anguli A, E, & D trianguli inscripti erunt æquales omnibus angulis V, S, & R trianguli dati, prout oportebat ostendere .

PROBL. II. PROP. III.

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum .

SIt datum triangulum nigrum , & circulus E A B ; oporteatque circa hunc circulum describere triangulum æquiangulum triangulo nigro dato .

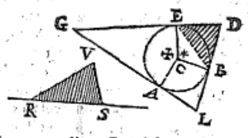
Prolongetur basis R S , vt eueniant duo anguli exteriores albi R, & S ; Repertoque iuxta 1. prop. tertij centro C , ducatur vtcumque recta E C ; Et deinde alia , nempe A C è centro C educatur , quæ cùm primo ducta capiat angulum ad cẽtrum cruce notatum æqualem angulo externo albo R dati trianguli nigri . Rursusque alia ducta C B cum hac alium angulum C efficiat ad centrum æqualem alteri angulo exteriori albo dati trianguli nigri ad S . Quibus tribus semidiametris ducantur perpendiculares , quę ex Coroll. propos. 18. tertij erunt quoque tangentes , quę productę conuenient inuicem in punctis G, D, L, *Et constituent triangulum* G D L *circumscriptum dato triangulo nigro æquiangulum* .

Dices . Lineas G E , & L B non coituras in D .

Respondetur enim spatium ad centrum clausum rectis C B , & C E stellula notatum esse angulum , & consequenter tractam rectam punctatam F E . (Debet enim, si sic videbitur, trahi) incidentem in dictas rectas C E , & B D facere angulos ad B , & E nigros minores duobus rectis ; cũ radij C B, & C E angulos rectos constituant ijs maiores , vt vides : Quare ex def. 12. primi necessariò conuenient in D lineę G E, & B L ; quod idem poterit ostendi de linea G A , & B D . Quæ conuenient in L , propter quod spatium C ad centrum sit angulus ex constructione , & de linea L A , & D E ; quę conueniet in G ; quòd spatiũ cruce signatũ ex cõstructione angulus factus fuerit.

Quod

Quod verò etiam spatium stellula notatum angulus sit , quod prę̨suppósui , sic ostenditur . Nam Coroll. 2. propos. 12 ; primi , totum spatium circa centrum , quod litera C , cruce , stellula notatum est , quatuor rectis æquale est. Item anguli ad R. albus externus , nigerque internus sunt æquales duobus rectis , ex propos. 10. sicut & anguli ad S externus albus , & internus niger sunt æquales duobus rectis , qui duo, & duo simul sunt quatuor . Quamobrem , cùm angulus ad centrum cruce signatus , & alius litera C notatus facti sint æquales albis , & externis ad S , & R; spatium stellula notatum erit æquale duobus nigris internis ad S , & R. Sed illi duo interni sunt minores,ex prop.17. duobus rectis ; Ergo & spatium stellula notatum minus erit duobus rectis . Quare lineę E C, & C B à puncto centri ductę non erunt in directum , ex propos.11. primi ; Sed facient angulum , & quidem non versus crucem . vel C illi enim anguli maiores sunt duobus rectis . Quare angulum efficient versus stellulam lineis E C , & C B conclusum.



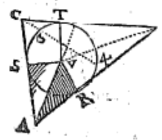
Probatur modò . Quòd hoc triangulum sit æquiangulum. Nam quadrilineum G E A C , quatuor angulos habet æquales 4. rectis vt 17. pr. . Quare ablatis duobus rectis A , & E per imaginationem, reliqui duo remanebunt duobus rectis æquales . Sed & anguli dati trianguli ad R externus albus internus niger sunt duobus rectis æquales ; Ergo erunt æquales inuicem simul sumpti . Sed angulus cruce notatus est æqualis , quòd ita fecerimus angulo externo ad R dati trianguli ; Ergo oppositus G erit æqualis nigro ad R interno. Eodem modo probabitur de angulo L ; quòd sit æqualis angulo nigro ad S.

Sed omnes anguli cuiuscumque trianguli sunt duobus rectis æquales . Ergo , cùm duo interni S, & R sint æquales duobus G , & L ; *Reliquus* D *circumscripti* angulo reliquo V dati trianguli remanebit æqualis . *Quare anguli* G L D *æquabuntur angulis* R V S . Quod , &c.

PROBL. III. PROP. IV.

In dato triangulo Circulum describere .

SIt describendus Circulus in dato triangulo A B C . Diuidantur per punctatas A V, V B duo quilibet anguli bifariam angulus A ,& angulus B, & à puncto V , in quo se intersecant punctatæ ducantur rectæ lateribus perpendiculares , quæ sint V T, & V S, V R . Quæ probabuntur æquales. Vnde per earũ,extrema tamquam semidiametrorum poterit peripheria transire S T R.



Probatur itaque lineas perpendiculares ad latera V R, & V S, primò esse æquales . Anguli ad A albus , & niger per diuisionem, quam linea punctata facit, sunt æquales, angulus quoque niger R, & niger S sunt æquales ; cum recti sint , basis vero A V eadem in vtrisque triangulis nigro, & semialbo .

Sed si duo triangula habeãt duos angulos ęquales insuper , & alios duos item æquales, latusq; aliquod æquale, æqualia quoque esse , quoad reliquos angulos, & latera ex propos. 27. primi constat .

Ergo latera V R, & V S ęqualia erunt inuicem. Idemque demonstrabitur de V R, & V T . Quare tres lineæ S V, & T V, & R V erunt æquales; poteruntq; deseruire pro semidiametris , & V in quo conueniunt pro centro . Quare descriptus ex V circulus tanget puncta S T R laterum trianguli. Vnde triangulo erit inscriptus.

COROLLARIVM I.

COllige ex Io. Baptista Benedicto duo latera superare reliquum lineis, & segmentis suis tangentibus circulum v. g. duo latera C B, & A C, alterum A B superare segmentis tangentibus C T, & C S . Nam demonstratum est basim A R esse æqualem basi A S ob æqualitatem suorum triangulorũ, & quia sunt tangentes,vt ex Corol. 2. prop. 36. tertij, & idem dicas de basi T B, & B R. Quare hæc duo segmẽta A S, & B T reliquum crus A B integrabunt , & residua remanebunt, quibus excedunt S C, & C T, quæ etiam sunt tangentes, & consequenter æquales , & si angulus C rectus esset, quod hic non est, equales etiam semidiametris S V, & V T.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque quòd, cùm segmenta excessus huius C S, & C T sint tangentes ; eorum quadratum , si quodlibet segmentum sumatur seorsim , erit æquale ex propos. 36. tertij rectangulo facto, & tota secante C 4. & segmento extra circulum remanente C 3. etiamsi C 4. transiret per centrum . Quare sequitur quoque si super duo segmenta excesus , tamquam vna linea fiat quadratum . Illud sit eidem rectangulo quadruplum : Quoniam est quadruplum quadrati ex vnico segmento facti vt colleg. ad propos. 6. secundi . Quod si angulus C rectus sit , erit hoc quadratum ex duobus segmentis factum æquale quadrato ex diametro descripto . Quoniam hæc duo segmenta ei diametro æquantur ea ratione , vt dixi in primo Corol. quod ęquantur duobus semidiametris .

PROBL. IV. PROPOS. V.

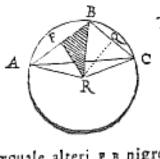
Circa datum triangulum circulum describere.

SIt triangulum A B, & B C, circa quod debeat circulus duci . Diuidantur bifariam quælibet duo eius latera, & (non quod sit necessarium, sed facilitatis gratia) assumantur duo latera,quæ maiorem angulum claudant, vt A B, & B C, à punctisque diuisionis duæ perpendiculares excitentur F R, & R Q quæ conuenient in R ; vt patet , si duceretur recta ab R in Q . Nam facerent, cum punctatis perpendicularibus angulos minores rectis. Quare ex prop. 18. pr conuenient Coniungantur itaque vertices trianguli rectis A R, &

B R, &

B R, & C R. *Nam cum hæ ſint omnes æquales poterunt deſeruire p o ſemidiametris peripheriæ* ABC, *& punctum* R *pro centro Pro circulo circa vertices extremos trianguli* ABC *tranſeunte*.

Probandum itaque primò eſt; quod rectæ A R, & R B ſint æquales.



Triangula nigrum, & album ſunt æqualia. Quare, & baſes A R, & B R erunt æquales. Quòd vero triangula ſint æqualia, probatur. Nam vnum crus A F nempe albi eſt æquale alteri F B nigro ſibi correſpondenti. Crus autem F R punctatum commune. Anguli quoq; ad F niger & albus æquales, eo quod recti. Ergo ex propoſ. 22. primi tota triangula nigrum nempe, & album erunt æqualia.

Probatur deinde, quòd etiam linea R C ſit æqualis lineæ R B, & ideo æqualis quoque lineæ R A Quoniã triangula R B Q, & R Q C habent crus B Q, & Q C; æqualia; crus verò R Q commune angulosque ad Q rectos. Vnde baſes ſubtenſæ R B, & R C erunt æquales. *Et ſic circulus centro* R *per* A B C *tranſibit*, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc ellicitur. Quod ſi cẽtrũ intra triangulũ cadat, omnes anguli triãguli dati ſint acuti. Quia ſunt in maiori circuli ſegmento. Si verò centrum cadat in aliquo laterum angulum oppoſitum huic lateri eſſe rectum. Quod ſit in ſemicirculo, & latus in quo centrũ ſit diameter. Si verò cadat intra triãgulũ, angulũ lateri, cui cẽtrũ prope, eſt oppoſitũ, eſſe obtuſũ: quia eſt in minori ſegmento, quæ omnia patent ex propoſ. 28. l. 3.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque ſequitur, id quod ſupra diximus propoſ. 11 l. 3. quomodo datis tribus punctis non in directum poſitis inueniatur circumferentia, quæ tranſeat per ea puncta: nam ſi cogites apices trianguli A B C eſſe tria puncta data, & ea iungas lateribus BC, & BA, & cætera præſtes vt in propoſ. propoſitum exequeris, & eadem probatio militabit. Vide quæ citata prop. 11. l. 3. diximus.

EXPENSIO III.

De mutua quadrati, & circuli inſcriptione, & ciscumſcriptione.

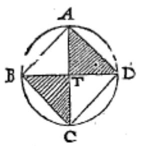
Sicut facilis eſt hæc quæſtio; ita non admodum vtilitatibus abundat: vnde in illa immorandum non eſt.

PROBL. I. PROPOS. VI.

In dato circulo quadratum deſcribere.

Sit datus circulus A B C D, cuius centrum T, in quo deſcribendum ſit quadratum. Ducantur duo diametri ſecantes ſe ad angulos rectos A C, & B D Iunganturque extrema eorum quatuor lineis, vt A B, & B C, & C D, & D A. *faciantque quadratum in dicto circulo inſcriptum*.

Probatur triangula alba, & nigra ſunt æqualia ex 14. propoſ. primi propter æqualitatem laterũ, qui ſunt ſemidiametri, & angulorum ad centrum T albi, & nigri æqualitatem cum omnes fecerimus rectos; quare, & baſes B A, & A D, ſic B C, & C D erunt æquales.



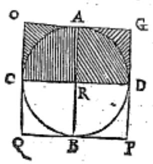
Aut breuiùs anguli ad centrum ſunt omnes æquales. Quare ex 26. tertij arcus quibus inſiſtunt, & ſubtentæ ijs erunt æquales. Inſuper, & anguli omnes A, & B, & C, & D ſunt æquales; cum ſint in ſemicirculis. Ergo figura A B C D erit quadratum.

PROB. II. PROPOS. VII.

Circa datum circulum quadratum deſcribere.

In circulo ducantur duo diametri ad rectos angulos A B, & C D; ad quorum extrema ducantur perpendiculares O G, & G P, & P Q, & Q O, quæ conuenient in quatuor punctis, *& conſtitent quadratum* O G Q P *circumſcriptũ circulo* A C B D.

Probatur latera poſtremò tracta ſunt lineæ perpendiculares diametris, pro vt fecimus, ſicuti, & illi ſibi inuicem ſunt perpendiculares. Quare latera erunt diametris parallela ex 28. primi, cum anguli interni v. g. nigri R, & D ſint recti. Propterea ex prop. 31 inuicem quoq; erunt parallela hæc latera, & ſpatium nigrum; erit parallelogramum ſicut, & album.



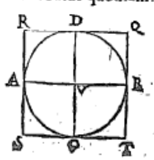
Sed omne parallelogramum ex propoſ. 34. primi habet angulos oppoſitos æquales: Ergo anguli O, & C nigri Q, & P albi ſunt recti. Quoniam anguli oppoſiti nigri ad C, & D, ac albi ad D, & C eis oppoſiti ſunt recti. Inſuper ex eadem propoſ. & latera oppoſita æqualia. Quare latera O G, & Q P, ſicut vt O Q, & G P æqualia erunt diametris, & ideo inter ſe. Vnde figura O G Q P erit quadratum circulo circumſcriptum.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

In dato quadrato circulum deſcribere.

Sit quadratum R Q S T, in quo neceſſe ſit deſcribere circulum. Diuidantur ſingula latera bifariam in A D C B, rectæque ducantur A B, & C D. Et vbi ſe decuſſant in V fiat centrum interuallo, vt placet v. g. V B. *Nam circulus tranſibit per omnia alia puncta* D, A, C *ea lambendo*.

Probatur quoniam V B lineæ V A, V C, & V D. ſunt æquales: Ergo pro diametris deſeruire poſſunt. Quod verò ſint æquales, patet, ſunt enim inter parallelas æquales, & ſimul ſunt parallelæ æqualium, cũm de medietate in medietatem ductæ ſint

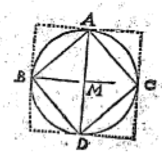


ſint: Quapropter ſicut ſunt æquales dimidio laterum, ita erunt æquales inter ſe. Nam ex propoſ. 33. primi, quæ parallelas, & æquales ad eaſdem partes coniungunt, inter ſe æquales, & parallelæ ſunt.

PROB. IV. PROPOS. IX.

Circa datum quadratum circulum deſcribere

Trahantur in quadrato dato A B C D duo diametri ad angulos rectos A D, & B C: Et puncto M, in quo ſe ſecant facto *centro* interuallo M C ducatur circulus. Iſte enim per vertices B, & A, & D tranſibit, & ideo erit circa datum quadratum, circulus circumſcriptus.



Probatur Angulus B A C rectus, & latera B A & A C æqualia. Ergo anguli ad baſim B, & C æquales in triangulo B A C. Ideo ſemirecti ex propoſ. 17 Cor. 3 primi. Idem oſtendetur de alijs angulis B A M, &c. Quadere lineæ B M, & M C, ſicut, & A M, & M D erunt æquales, vtpote baſes æqualium angulorum habentium angulos æquales, nimirum ſemirectos: Ergo centro M circulus ductus per A B C D vertices tranſibit: Vnde erit circumſcriptus circulus quadrato B A C D.

COROLLARIVM.

Colligitur hinc. Quadratum circumſcriptũ eſſe duplum quadrati inſcripti; Eo quod latera inſcripti ſint diagonales quatuor quadratorum, in quæ diuiſum eſt circumſcriptum punctatum. Vnde illa ex prop. 34. lib. 1. diuidunt bifariam. Cum ergo quadratum inſcriptum occupet quatuor medietates circumſcripti ſolummodo: Circumſcriptum erit quatuor medietatibus maius, Propterea erit duplum.

EXPENSIO IV.

De Pentagoni, circuliq; mutua inſcriptione, & circumſcriptione.

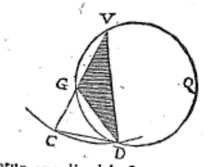
Difficilior eſt hæc quæſtio, quam præcedens: ſed cum maiori vtilitate coniuncta eſt, ſi quidem fundamentum eſt Icoſaedri ſphæra inſcribendi, & inueniendi chordas, quamplurimas, vt ſuo loco docebimus, in trigonometria neceſſarias.

LEMMA. PROPOS. X.

Iſoſceles triangulum conſtituere, quod habeat vtrumque eorum, quæ ad baſim ſunt, angulorum duplum reliqui.

Linea quæcumque mediâ, & extremâ ratione ſecetur, vt docet 15. prop. ſecundi; Ita vt rectangulum ſub ſegmento, & tota cõprehenſum C G, & C V æquale ſit quadrato ex maiori ſegmento facto, nimirum G V. In hoc itaque extremo maioris ſegmenti V facto centro deſcribatur circulus ad interuallum totius V C, & ab extremo C accomodetur in hoc circulo æqualis linea maiori ſegmento V G, quæ ſit C D coniunganturq; extrema V, & D crure V D. Factumque erit *triãgulũ, cuius duo anguli ad baſim* C, *&* D *reliquo* V *ei inſiſtenti erunt duplicia*. Quod repoſcit propoſitio.

Quod vt oſtendatur ducenda eſt D G punctata, & per tria puncta V nimirum G, & D ducendus eſt circulus, ex 5. propoſ. huius.



Probatur anguli ad baſim C, & D in omni triangulo æquicruro ſunt æquales ex 14. propoſ. primi, Sed vnus ex iſtis, nimirum D eſt duplus anguli V. Ergo, & alter.

Probatur minor. Quod D ſit duplus anguli V. Siquidem angulus V eſt æqualis parti albæ anguli D. Sed pars alba eſt medietas anguli totius D: Ergo angulus V eſt minor dimidiò angulo toto, vtpote eius medietati æqualis.

Si neges maiorem propoſitiouem. Nempe angulũ V eſſe ęqualem parti albę D anguli; ita oſtendetur.

Linea C D tangens eſt. Quare angulus albus ad D à tangente C D, & ſecante G D factus ex propoſ. 29 tertij ęquabitur angulo V. alterni ſegmenti G V Q D (ſiquidem D G peripheria remanet pro alio ſegmento) Quare erit ęqualis ei. Quod verò C D tangens ſit, non eſt dubitandum ex propoſ. 37. tertij. Quoniam rectangulum ſub tota ſecante V C, & ſegmento exterius aſſumpto G C eſt ęquale quadrato facto, ex C D. Nam D C fecimus ęqualem lineę G V, quę talis eſt, vt eius quadratum ſit ęquale rectangulo ſub tota V C, & portione C G comprehenſum.

Si vero neges minorem; nimirum albam partem eſſe medietatem totius anguli D.

Probatur. Triangulum nigrum eſt ęquicrurum; Ergo anguli nigri V, & D ad baſim ſunt ęquales. Sed angulus ad D albus eſt ęqualis angulo V, vt diximus. Ergo eſt medietas totius anguli D, & pars nigra alia medietas: Cùm tum pars alba, tum nigra anguli D ipſi angulo V ęquentur, & ideo inter ſe.

Quod verò triangulum nigrum ſit ęquicrurum; probatur. Angulus C eſt ęqualis angulo D, vt diximus, ãgulus D eſt ęqualis ſuę parti nigrę & angulo nigro V, vt probauimus. Sed angulus albus G vtpote exterior, eſt ęqualis ex propoſ. 17. primi iſtis duobus nigris interioribus, & oppoſitis ad V, & ad D. Ergo eſt etiam ęqualis angulo C quamobrem, ex prop. 15. primi, angulus C, & angulus G, tanquam ęquales, habebunt baſes ęquales C D, & G D. Sed C D eſt ęqualis cruri V G ex effectione; Ergo, & G D erit crus eidem ęquale.

CO-

COROLLARIVM.

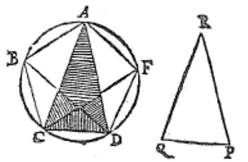
QVare si partiamur duos rectos angulos in 10. partes angulus V duas partes sibi vsurpabit. Reliqui verò ad basim quilibet ex eis continebit quatuor partes. Quia omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales, ex prop. 17. primi. Quare cum C, & D ad basim contineant duplum, vt ostensum est; si angulus ad A assumat duas partes; reliqui, vt 10. partes duorum rectorum compleant, quilibet quatuor partes sibi vsurpare debebit.

PROB. I. PROP. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

AD describendum in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum construatur triangulum Isosceles R Q P habens duos angulos ad basim duplos reliqui iuxta præcedentem propos. & in circulo A B C D F dato triangulum fiat habens angulos omnes ei æquales, vt ex propos. 2. huius efficere potes, & secundum documenta propos. 4. primi diuide angulos C, & D bifariã rectis CF, & DB coniungeque puncta rectis A B, & B C, & rursus alia rectis A F, & F D. *Eritq; hæc figura pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.*

Pars 1. Probatur, nempe quod sit equilaterum.



Duæ partes anguli D nigra, & nigerrima, sicut, & aliæ duæ anguli C nigra, & nigerrima sunt æquales nigro angulo ad A: Siquidem ambæ sumptę simul duplę ei sunt. Ergo ex propos. 26. tertij, & arcus, super quos insistunt. Vnde, & rectæ hos arcus subtendentes, nempe latera pentagoni A B, & B C & cæt. sunt inuicem æquales.

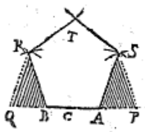
Probatur 2. Pars de angulis. Nam æqualibus quoque perispherijs insistunt. Ergo ex propos. 27. tertij inter se sunt æquales. v. g. angulus pentagoni A clausus lateribus A B, & A F insistit perispheriæ constanti tribus partibus F D, & B C, & C D, quæ est æqualis perispheriæ ABLD; cui insistit angulus pentagoni F quoniam æqualibus circuli portionibus A B, BC, DC, vt dictum est in prob. primæ partis insistit.

COROLLARIVM I.

COlligitur angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti sex partes ex decem, in quas duo anguli recti diuiderentur. Nam tres anguli ad D niger nigerrimus, & albus æquales sunt inuicem, vt æqualibus arcubus insistentes. Quare cum ex coroll. propos. præced. duo nigerrimus, & niger quatuor ex decem partibus occupent, albus additus duas superaddet, vt fiant sex: vnde totus sex partes occupabit, in quas anguli duo recti diuiderentur.

COROLLARIVM II.

SI quis tamen velit construere pentagonum facilius super datam rectam AB; diuidatur, vt superius in C iuxta documenta propos. 15. secundi, deinde prolungetur, & sic ista additio æqualis maiori segmento A C, ita vt punctatæ additæ ei sint æquales; Interuallo denique datæ AB facto centro in punctis extremis Q, & B, duo arcus describantur; qui se intersecent in R, sic eodem interuallo facto centro in A, & P duo alij arcus se intersecent in S; factoque centro in ijs intersectionibus R, & S eodem interuallo manente describantur duo alij arcus, qui se intersecent in T; coniunganturque rectis puncta intersectionum T, S, R, B, & A. Eritque constitutum pentagonum.



Quod erit quidem æquilaterum, eo quod omnia latera sint protracta eodem interuallo B A, Insuper, cum duo triangula A P S, & Q R B sint æquicrura, & A P, vel Q B basis sit maius segmentum iuxta 10. propos. huius angulus P, V.g. continebit duplum, quam angulus S. Quare angulus exterior A, albus, qui est pentagoni continebit ex propos. 17. primi duos internos, & oppositos S P. Propterea continebit 6. partes ex decem, in quas duo recti diuisi essent, quibus 6. partibus æquantur, vt in corolli dictum est, duo anguli P, & S. Quare A angulus erit angulus pentagoni. Et si hic est, reliqui quoq; erunt, quod debeant istis æquales esse. Nam si non essent, possent fieri; Et si fierent, latera eorum, vel caderent supra, vel infra lineas R T, & T S. Quamobrem, ex propos. 21. primi, essent maiora, vel minora lineis R T, & T S: Vnde deinde pentagonum non esset equilaterum.

PROB. II. PROPOS. XII.

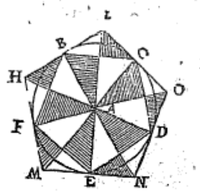
Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

NOn potest circumscribi circulo pentagonum; Nisi priùs in eo inscribatur: Quare dato circulo C E B D, in quo sit, ex antecedenti propos. inscriptum pentagonum, poterit deinde circa illum ita pentagonum circumscribi.

Reperto eius centro A ad angulos pentagoni ducantur semidiametri AB, AC, AE, AD &, A F, & eis ducantur perpendiculares circulum tangentes. Nam hæ productæ hinc inde se mutuò occurrent ex defin. 12. primi, cum anguli albus & niger E, &c. sint rectis minores, quos facit linea V. g F B incidens in duas H L, & H M, & sic de ceteris. *Quæ de re constituent pentagonum requisitum æquilaterum, & æquiangulum*; vt autem id probetur ducendæ sunt rectæ à centro ad puncta H, & L, &c. in quæ postremò ductæ conueniunt.

Pro-

Probatur itaq; prima pars, quòd sit æquilaterum.



Nam quadratum factum super AH est ex prop. 11. l. 2. æquale duobus quadratis factis ex F A, & F H; similiter quadratis A B, & H B propter angulos rectos nimirum B, & F semialbos. Sed quadrata semidiametrorum B A, & F A sunt ęqualia inuicem. Ergo, & quadrata ex H B, & H F, & consequenter ipsę quoque lineæ B H, & H F. Et hoc pro prima parte probationis.

Nam modo ostendendum est, has lineas B H, & H F esse medietates laterum, quorum portiones sunt, & consequenter omnia latera H L, & H M, & cętera esse æqualia, vtpote ex medietatibus æqualibus confecta.

Triangula tota seminigra H B A, & H F A habent æqualia latera, quæ sibi correspondent; ergo ex prop. 8. primi, & anguli correspondentes ęquales sunt. Ideo anguli in eis albus, & niger ad centrum A erunt æquales, sicut, & anguli albus, & niger ad H, & sic in omnibus alijs. Angulus autem ad centrum A totus albâ, nigrâque portione integratus est ex propos. 27. l. 3. ęqualis omnibus quatuor alijs ad centrum; cum insistant æqualibus basibus, & peripherijs F B, & B C, & cæt. pentagoni inscripti. Quare, & eorum portiones inuicem ęquales tum nigræ, tum albæ erunt. Propterea que angulus V. g. ad centrum H A F niger, qui probatus est æqualis angulo albo ad centrum H A B, est ęqualis etiam angulo albo ad centrum F A M. Sed anguli quoque ad F in triangulis H F A, & M F A, vtpote recti à radio tangente quæ effecti sunt ęquales; radiusque A F est crus commune ambobus triangulis adiacens. Ergo ex propos. 27. primi, etiam latus M F erit ęquale lateri F H.

Idem quoq; argumentum valebit in triangulo B L A, cuius latus B L erit ęquale lateri B H. Quare totum latus H L erit ęquale toti H M; Sicq; probabitur de alijs successiuè. quapropter pentagonum circumscriptum erit ęquilaterum.

Probatur quoq; esse ęquales angulos. Ablatis ęqualibus, quę remanēt, sunt ęqualia: sed in triãgulis quibuscunque H F A, & F A M, & cęt. omnes anguli ad centrum A tum albi, tum nigri ostensi sunt ęquales in probatione primę partis. Anguli quoque F, & B, & C facti à radio A F tangenteque F H, & cęt. sunt recti, & ideo æquales: ergo ablatis istis, reliqui ad M, H, &c. tum albi, tum nigri sunt ęquales. Quoniam omnes trianguli tres anguli sunt inuicem ęquales, cùm omnes ex prop. 17. pr. sint duobus rectis ęquales. Et ideo cum omnnes anguli H, & L, & O, &c. sint compositi ex medietatibus albis, nigrisque ęqualibus, omnes inuicem erunt ęquales.

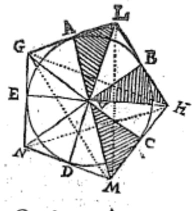
COROLLARIVM.

SEquitur hinc illud. Si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula descripta sit, & semidiametri de centro ad angulos singulos protrahantur, hisque perpendiculares ducantur circulum tangentes describi figuram similem inscriptæ æquilateram, & ęquiangulam. Siquidem probabitur ductis ad earum mutuum concursum à centro rectis, vt in pentagono factum est eius angulos, & latera inter se esse æqualia.

PROB. III. PROPOS. XIII.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum describere.

* PEntagoni dati duo latera bifariam diuidantur in A, & B, & à punctis perpendiculares rectę trahantur, quæ se mutuo intersecabunt in V. Ibi ergo facto centro, si vsque ad intercapedinē perpēdicularium V.g. V B, extendatur interuallum, & describatur eo interuallo circulus: Is circulus erit inscriptus, & tanget latera in punctis A B C D E.



Quod vt probetur cæteræ quoq; à dimidijs lateribus C, D, E ducendæ ad centrum, vt CV, DV, & deinde ad angulos G V, & V L, &c. Et rursus punctatæ G H, & L M, &c.

Pro probatione obseruandum est, nos hic adibuisse eandem regulam: quam suprà dedimus propos. 5. huius ad circumscribendum circulum triangulo, velut triangulo G L H. Ideoque tres ductę G V, & V L, & V H erunt ex probatione propos. 5. æquales. Latera quoque A L, & B H sunt æqualia, vtpote dimidia æqualium laterum pentagoni, anguli vero adiacentes nigri A, & B æquales, quòd recti sint: Ergo triangula nigra A L V, & V H B erunt æqualia ex propos 22. lib. 1. & crus V A cruri V B.

Idem argumentum valebit in triangulo L H M. Quare V C erit æqualis lineæ V B, & consequenter æqualis, vt ostensum est lineæ V A, Idem quæ argumentum in alijs vrgebit. Cum ergo omnes lineę, quas fecimus perpendiculares, nimirum V D, & V E, & prædictæ inuicem sint æquales poterit fieri centrum in V, & interuallo vna earum V. g. V B circulus circumduci, qui lambat puncta A B C D E.

COROLLARIVM I.

* COllige primò: quomodo etiam circulus possit circũscribi, Nam cum ex 5. prop. lineę V G, & V L, & V H sint æquales ad apices trianguli G L H ductę, & eadem ratione M V, & H V, & V L ductę ad apices trianguli L H M, sequitur; vt omnes sint æquales, & consequenter; quòd facto centro in V interuallo vna earum V. g. V H transeat circulus ductus per vertices L, H, & alios.

COROLLARIVM II.

* COlligitur secundo hoc valere, ne dum in pentagono; sed etiam in qualibet alia figurâ ęquilaterâ, & ęquiangulâ; quod valeat idem argumentum in omnibus facta eadem operatione ob latera ęqualia, & angulos ęquales, quę

constituunt omnia triangula, in quę per operationem diuiditur, ęqualia.

PROB. IV. PROPOS. XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

INspice figuram præcedentis propositionis. Si reperiatur pentagonum, circa quod necesse sit describere circulum. Diuidemus omnes eius angulos bifariam rectis H V, & M V, &c. quas dicimus futuras esse æquales. *Quare facto centro in V interuallo V H poterit describi circulus, qui transiens per apices H, L, G, N, M, pentagonum circumscribet.*

Probatur vero, quod G V, & cæteræ ductæ debeant esse æquales alio modo, ac in coroll. præcedenti. Nam anguli niger ad L est æqualis nigro ad H; cùm sit dimidium æqualium angulorum pentagoni, angulus verò A, & B sunt recti; Crus autem A L cruri B H æquale cum sint dimidium æqualium laterum: Ergo ex propos. 27. lib. 1. triangula ad A, & B nigra æqualia erunt, & erit L V æquale crus cruri V H. Idem dicetur de triangulo nigro V M C, quod erit æquale eadem ratione triangulo V B H, & crus V M cruri V H, & ideo cruri V L, & sic de alijs N V, & G V: cum ergo sint omnes æquales V L, &c. ad angulos pentagoni pertingentes, circulus per earum extrema duci poterit.

COROLLARIVM

HInc ellicies idem valere in qualibet alia figura æquilatera, & æquiangula. Vnde eadem arte circa eam circulus describetur.

EXPENSIO V.

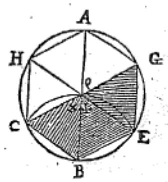
De Exagoni, & Quindecagoni in circulo inscriptione.

CIrcumscriptionem exagoni circulo, & circuli inscriptionem, & circumscriptionem pretermitit Euclides, & per accidens agit de quindecagono, vtpote de figura consurgente, ex triangulo æquilatero, & Pētagono: de alijs autem figuris plurium laterum non agit: Nam quæ vtiles sunt, ex prædictis facile colliguntur; quæ vero difficiles, aut fortè inuentu impossibiles, aut inutiles, vt figura septem laterum, prætermittuntur; sed de istis cum de sinubus ampliora agemus: suffecit Euclidi rudimenta primarum figurarum tradere.

PROB. I. PROPOS. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

OPorteat in dato circulo hexagonum describere. Ducto diametro AB eodem interuallo, quo descriptus est circulus facto centro in circumferentia in B portio circuli ducatur, quæ in C, & E circumferentiam secet, à quibus punctis per centrum transeuntes duo diametri ducantur. *Si ergo extrema horum diametrorum rectis coniungas, vt sunt B E, & B C, &c. erit hexagonum inscriptum æquiangulum, & æquilaterum.*



Prob. Primo, quod omnia latera sint æqualia. Tres anguli nigri ad Q centrum, ab insistentibus Q E, & Q B super diametrum C G effecti, sunt inuicem æquales. Ergo ex propos. 26. tertij circumferentię, quibus insistunt sunt inuicem æquales: Vnde ex propos. 33. tertij subtentæ C B, & B E, & E G sunt inuicem æquales. Sed istis, quælibet suæ oppositæ, lineæ A G, & A H, & H C sunt æquales. Ergo omnes æquales, & æquilaterum est hexagonum. Id autem ostenditur, quia insistunt arcubus æqualibus. Et arcus ęquales sunt. Quia super eos ascendunt anguli tres albi ad centrum Q æquales, Sunt autem æquales: Quia ęqualibus nigris æquantur, quilibet suo, cui est ad verticem ex prop. 12. primi. Remanet itaque ostendendum, quod tres anguli nigri ęquales sint. Id autem

Probatur. Nam sunt facti super diametrum C G ab insistentibus Q B; & Q E, & ideo ex propos. 13. primi æquantur omnes duobus rectis, sed duo ex istis nimirum ✠ notati quilibet occupat tertiam partem duorum rectorum, ergo tertius reliquus tertiam partem reliquam, quare omnes æquales erunt.

Quod verò duo cruce insigniti tertiam partem duorum rectorum occupent ostenditur. Quia quodlibet triangulum C Q B, nempe, & B Q E est æquilaterum, vtpote quorum latera sunt semidiametri. Ideoque ex propos. 14. primi, & æquiangulum. Sed omnes tres anguli cuiuscunque trianguli sunt duobus rectis æquales; Ergo quilibet angulus tertiam partem duorum rectorum occupabit, & sic anguli cruce notati quilibet erit tertia pars duorum rectorum.

COROLLARIVM I.

HInc manifestum est hexagoni latus æquale esse semidiametro. Nam C B latus est semidiameter circuli C Q E; & ideo æquale semidiametro Q B.

COROLLARIVM II.

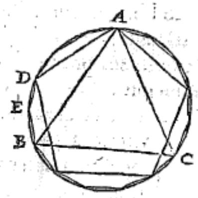
COllige quomodo possit inscribi triangulum æquilaterum, & æquiangulum in dato circulo. Nam si coniungas vertices C, A, E, id erit factum; erit enim æqualis quilibet angulus, & latus. Quia circunferentijs æqualibus ille insistit, hoc subtentitur, vt sunt C B E, & E G A, &c.

PROB. II. PROPOS. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

DEscribatur in circulo triangulum æquilaterum, & æquiangulum ABC, vel ex Coroll. præcedenti, vel ex 2. huius propos.

Rursusque describatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ex propos. 11. huius applicando eius angulum aliquem vertici trianguli cui placuerit, V. g. A. Deinde arcus interceptus inter primum latus pentagoni incipiendo ab A; & primum latus trianguli, nempe inter A D, & A B, qui est arcus B D, diuidatur in duas partes æquales. Ducanturque rectę D E, & E B, *& duo latera quindecagoni habebimus; quorum alios 13. capiet circumferentia, vt 15. latera compleantur.*



Probatur tres arcus, quibus anguli trianguli insistunt, vel quibus latera ęqualia subtenduntur, ex propos. 26. vel 32. tertij sunt ęquales. Ergo si circumferentia tota sit diuisa in quindecim partes quilibet arcus, vt AB quinque earum comprehendet, vtpote eius tertia pars.

Sed, & arcus quibus quinque latera pentagoni subtenduntur sunt ęquales, ergo ex ijsdem partibus 15. tres quilibet arcus comprehendet, vtpote quinta pars totius circuli; quapropter arcus AD tres partes totius peripheriæ continebit, at AB quinque. Vnde arcus A E intermedius duas continebit. Quare eius medietas vna ex quindecim partibus erit. Recta, itaque DE subtendet decimam quintam partem totius circumferentię. Propter eaque cętere quoque applicatę quęlibet decimam partem subtēdet, & anguli omnes erunt ęquales, vtpote in ęquali segmento, insistentes, nempe in segmento D E B, qui duas totius periphèrię partes ęquales comprehendit.

COROLLARIVM.

COllige hic cum Clauio. Quod tali modo possumus reperire figuras multilateras, æquilateras, & ęquiangulas; Quia enim A B denominatur à ternario, quod sit latus trianguli, & A D à quinario, quod sit latus pentagoni possumus describere figuram 15. laterum; nimirum consurgentem ex multiplicatione ternarij cum quinario; Et quia ternarius exceditur à quinario duabus vnitatibus, ideo arcus interceptus inter extremum lateris trianguli dat duo latera quindecagoni. Tali quoque ratione in alijs lateribus aliarum figurarum idem eueniet.

Nam latera pentagoni, & hexagoni facient figuram 30. laterum; nimirum consurgentem, ex multiplicatione 5. cum 6. & quia sexagonus excedit quinarium vnitate, ideo arcus interceptus inter extremum lateris pentagoni, & hexagoni subtendet lineā, quę erit latus figurę laterum 30.

Sic latus quadrati, & sexagoni relinquet arcum, qui subtendet duo latera figurę 24. Quoniam 4. multiplicatus cum 6. reddit 24. & differentia inter 4. & 6. est 2. Sic latus quadrati, & pentagoni relinquet inter sua extrema arcum, cui subtendetur vnicum latus figurę 20. laterum, & sic de cęteris.

TRACTATVS VIII.

ARITHMETICA SIMPLEX,

& Generalis integrorum numerorum.

CVM iam de quantitatis continuæ æqualitate satis cognitionis, quæ ad elementum sufficere possit, ediderit Euclides in 1.2. & 3. libro, & Lineas æquales, Angulos æquales, Triangula æqualia, Parallelogramma æqualia, Linearum quoque potentias æquales, tum laterum parallelogrammorum, tum triangulorum tradiderit; Insuper ex quarto libro docuerit figurarum inscriptionem, quæ pluribus, quàm duobus triangulis constabant. Iam aliam prouinciam aggreditur, & *Proportionem Inæqualitatis* præcipuè considerare, vel saltem iam ab æqualitate præscindere incipit.

Verùm; quia Arithmetica ita miscetur Geometriæ, vt alrera sine altera claudicet, & manca euadat; ideo antequam ad vlteriora progrediamur, Arithmeticam generalem tradere oportuit, quòd proportiones inæqualitatis rationales meliùs explicentur numeris, quàm quantitate continua: Vnde; quia adhibendi erant numeri in proportionibus declarandis; proinde hic de Arithmetica generali primùm agere oportuit, tanquam primus aditus ad proportiones quascumque benè cognoscendas; cum ipsa faciliùs proportiones explicet, & maximè si de numeris integris agitur.

EXPENSIO I.

De principijs.

QVod sit numerus vidimus, & ipsius essentiam iam speculati sumus Tract. 2 præliminari. Vnde hìc solùm numerorum Definitiones sunt explicandæ, & illæ sunt, quas Euclides 7. libro exponit; siquidem, cum ad præsentem tractatum deseruiant, hìc transcribere oportuit.

DEFINITIO I.

VNitas est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

In qua aduertendum, quòd, sicut punctum abstractum est indiuisible, sic vnitas abstractiuè sumpta vnum est. Nam quodlibet, quod dicitur vnum, semper consideratur abstractè, vt vnum in se, & diuisum à quocumque alio: alioquid, si acciperetur, vt à parte rei, iam, cùm nihil sit plures, seu partes, seu rationes non obtinens, plurificatum esset.

DEFINITIO II.

NVmerus est ex vnitatibus composita multitudo.

Hinc euenit; quòd omnis numerus sit commensurabilis; cùm habeat partes assignabiles, secundùm quas vnumquodq; numerus dicitur; V. g. 8. componitur ex octo vnitatibus, & 7. ex septem. Vnde vnitas omniũ numerorum erit communis mensura, quâ omnes mensurari poterunt.

DEFINITIO III.

PArs est numerus minor ipsius maioris numeri, qui metitur ipsum maiorem.

Significat, quòd minor numerus sit appellandus pars numeri maioris, qui multiplicatus totum metitur; ita vt nihil supersit, neque deficiat. Sed ex æquo illi commensuretur. Sic 6. metitur numerum 18. quia multiplicatus per 3. euadit in numerũ eundem, nihil addendo, vel diminuendo. Omnis verò pars assumit nomen ab eo numero, per quem multiplicata metitur maiorem, vt 6. dicitur tertia pars numeri 18. quia 6. multiplicatus per 3. metitur numerum 18.

DE-

DEFINITIO IV.

PArtes autem; cùm non metitur.

Numerus, qui alium maiorem adamussìm non metitur; sed aliquid remanet, dicitur non pars, sed partes; quia scilicet saltem comprehendit tot vnitates ipsius, quæ sunt omnium numerorum communes partes, V. g. 5. erit non pars, sed partes numeri 18. quia comprehendit quinque vnitates, quarum quelibet est decima octaua pars numeri 18. Partes verò nomen accipiunt ab eis numeris, qui, & partes, & totum adamussìm metiuntur per eundẽ numerum, V.g. 6. est partes numeri 10. &, quia 2. metitur 6. per 3. & totum per 5. indè 6. dicetur esse tres quintas partes numeri 10. quia tres metiuntur 6. numerum, & quinque numerum 10. per eandem mensuram, quæ est 2.

DEFINITIO V.

MVltiplex autem maior minoris, cum minor metitur maiorem.

Sicut numerus minor dicitur pars maioris; sic maior dicitur multiplex minoris. Sed tantùm, cùm minor fuerit maioris pars, non verò partes. Sic 18. dicitur multiplex numeri 6. quòd ex æquo mensuretur ab eo: Non autem numeri 5. quia, licet illius vnitates, quæ numeri 5. partes sunt contineat, non tamen à numero 5. adamussìm mensuratur.

DEFINITIO VI.

NVmerus par est, qui bifariam diuidi potest.

Vt numerus 2. 4. 6. 8. sunt pares, quia in duas partes æquales diuidi queunt.

DEFINITIO VII.

IMpar verò, qui bifariam non diuiditur, vel qui vnitate differt à pari.

Vt numeri 11. 13. 17. 7. quia non possunt diuidi bifariam, vel quia differunt à paribus 10. 12. 18. 6. solâ vnitate, dicuntur impares.

DEFINITIO VIII.

PAriter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

V. G. 8. quia 2. & 4. metiantur, ipsum 8. dicitur pariter par: Nam 4. est par, qui paribus vicibus acceptus, nempe duabus, facit 8, ideoq; dicitur numerus 8. pariter par.

DEFINITIO IX.

PAriter impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum parem.

Numerus 30. quem 15. Impar numerus metitur multiplicatus per 2. numerum parem dicetur pariter impar. Aduertendum est autem, quòd idem numerus potest esse pariter par, & pariter impar, vt 12. Nam metitur, & numero 6. multiplicatus per 2. & sic est pariter par, & numero 3. multiplicatus per 4. & sic est pariter impar.

DEFINITIO X.

IMpariter autem numerus impar est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Vt numerus 15. quem metitur 3. & 5. ambo impares numeri dicitur impariter impar.

DEFINITIO XI.

PRimus numerus est, quem vnitas sola metitur.

Si detur namque numerus, qui neque à pari, neque ab impari patiatur dimensionem, sed à sola vnitate ille numerus dicetur primus, vt 2. 3. 7. 11.

DEFINITIO XII.

PRimi numeri inter se sunt, quos vnitas sola metitur.

Licet enim quilibet possit dimetiri per parem, seu imparem, nisi ille numerus mensurans sit communis dimensor vtriusque, dicentur illi numeri inter se primi, V. g. 8. & 9. Quamuis etenim 2. multiplicans 4 numerum 8. mensuret, & 3. multiplicans 3. mensuret 9. quia tamen, nec 4. nec 2. mensurat alterum 9. nec 3. huius numeri 9. mensura, illum numerum 8. mensuret: ideo illi numeri primi inter se dicendi.

DEFINITO XIII.

COmpositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

Silicet exceptâ vnitate, quam Euclides non voeat numerum. Perspicuum autem est omnes numeros pares præter binarium esse compositos; quia saltem binarius eos metitur, ex quò etiam euenit omnes numeros primos, rempto binario, esse impares. Nam ex paribus binarius solus est primus.

DEFINITIO XIV.

COmpositi numeri inter se sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

Igitur sunt compositi inter se illi numeri, qui ad differentiam primorum inter se, aliquam habent communem mensuram, vt 24. & 18. pro communi mensura sortiuntur numerum 6.

DEFINITIO XV.

NVmerus numerum multiplicare dicitur; cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis alius.

Vt

Vt numerus 5. dicetur multiplicare numerum 6. cum toties sumitur numerus 6. quot sunt vnitates in numero 5. & 6. quinquies acceptus producat alium, nempe 30.

DEFINITIO XVI.

NVmerus numerum diuidere dicitur, cùm numerus alius acceptus fuerit, indicans suis vnitatibus vices, penes quas diuidens numerus in diuiso continetur.

Vt Numerus 6. dicetur diuidere numerum 18. cum accipitur alius numerus, V. g. 3. indicans suis vnitatibus vices iuxta, quas 6. continetur in 18. nempe tribus vicibus.

DEFINITIO XVII.

RAtio est duorum numerorum mutua in ratione mensurantis, & mensurati relatio.

V. g. quia 4. metitur 4. vnica vice acceptus, & 2. metitur 4. gemina vice, & 3. vnica vice, & $\frac{4}{3}$, ideo dicuntur numeri isti Rationem habere. Omnis autem numerus obtinet Rationem cum quocunque alio, etiam rationalem; quia, vt diximus, alium saltem per vnitates, quæ in ipso sunt, metitur.

DEFINITIO XVIII.

PRoportio similis, seu ratio inter numerot est, cum primus ad secundum in simili mensura sunt, ac tertius respectu quarti.

Proportio similis, & Ratio est quædam similitudo, non numerorum; sed ipsarum Rationum in ratione continentis, & contenti, seu metti, & mensurantis. Si ergo duo numeri sint; qui se contineant, vel mensurentur, vt duo alij. Eg. 2. metiatur 4. vt numerus 3. metitur 6. dicetur ita 3. ad 6. in proportione, ac 2. ad 4. quia sicuti 4. dualitatem gemina vice continet, sic, & 6. ternarium gemina vice complectitur.

Vnde hinc colligas; quòd numerus multiplicans habet eam proportionem ad vnitatem; quã genitus habet ad multiplicatum, V. g. multiplicati 2. per 4. faciunt 8. numerus itaque multiplicans 2 ita se habet ad vnitatem, vt 8. genitus ad 4. multiplicatum; quia ex def. 15. tot vicibus genitus continet multiplicatum, quod multiplicans vnitatem.

Secundo, quod numerus diuisus habet ad diuidentem eam proportionem, quam quotiens, seu diuidens habet ad vnitatem, quia quot vicibus diuidens continet vnitatem, tot quoque diuisus diuidentem complectitur ex definitione 16.

DEFINITIO XIX.

NVmerus numerum metiri dicetur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum metitum producit.

Postponitur ista definitio prædictis; cùm debuisset anteponi, quia definiuimus multa per mutuam commensurabilitatem; sed quia, & hæc illas supponebat; nempe definitionem multiplicationis saltem, ideo postposita est, cùm hoc liceat in Mathematicis definitionibus, quæ non probantur.

POSTVLATA.

Postuletur cuilibet numero, quoslibet posse sumi æquales, vel multiplices.

Secundò quolibet numero posse sumi maiorem.

AXIOMATA.

I.

Qui numeri, vel æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè multiplex est, vel quorum duo multiplices sunt æquales, illi inter se quoque sunt æquales.

III.

Qui numeri, æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, inter se sunt æquales.

IIII.

Quorum idem numerus, vel numeri æquales fuerint pars, vel partes eædem, illi inter se æquales sunt.

V. g. quia 5. est eadem pars numeri 10. ac numeri cuiusdam Equorum, numerus Equorum erit æqualis numero 10. Quod si 5. numerus sit dimidia pars, tum numeri 10. tum numeri Equorum, numeri Equorum, & 10. erunt æquales. Sic si 5. & numerus quidam Ouium, sit tertia pars numeri 15. numerus Ouium, & 5. sunt æquales numeri. Et si numerus 10. & numerus Ouium sint eædem partes nempe 2. ex tribus partibus numeri 15. numerus Ouium, & 10. erunt æquales.

V.

Vnitas omnem numerum per vnitates, quæ in ipso numero sunt metitur.

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per vnitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum; multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Si namque 4. multiplicet 3. producet 12. & 4. per 3. nempe tribus vicibus acceptus, & 3. similiter per 4. idest quatuor vicibus acceptus producet 12.

VIII.

Si numerus numerum metiatur, numerus vices numerans, eundem quoque mensuratum numerum metietur, & numerus metiens, vices huius numerabit per suas vnitates.

SIc si 4. mensuret 20. vices numerabit numerus 5. quinquies enim numerus 4. continetur in numero 20. & hoc per suas vnitates nempe per 5. vnitates. Et iste numerus 5. vices numerans mensurabit quoque ipsum 20. sed alter primo metiens nempe 4. numerabit vices huius, iuxta quas continetur in 20. quia quater capit 5. in numero 20; Et hoc per suas vnitates, quæ in numero 4. quatuor sunt.

IX.

Numerus numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metietur.

V. g. si 2. mensuret 4. & 6. mensurabit quoq; 10. qui componitur ex 4. & 6.

X.

Numerus numerum metiens metitur, quoque omnem numerum, quem ille metitur.

V. g. si 2. mensuret 4. mensurabit quoque numerum 12. 16. & 20. quos 4. metitur.

XI.

Si numerus numerum metiens, eum per quem metitur multiplicet, vel ab eo multiplicetur, producet eum, quem mensurat.

Sit Eg. 4. qui mensuret 24. per 6. dicit, quod si 4. multiplicet 6. vel à numero 6. multiplicetur, producet 24. quem mensurat per numerum 6.

EXPENSIO I.

De integrorum numeratione.

EXprimere quantitatem numerorum multorum, non quilibet sine aliqua regula facilè potest: Vnde de hoc primo agendum.

THEOR. I. PROP. I.

Omnes numeri procedunt, & continuantur per proportionem decuplam.

PRobatur ea est proportio numeri; quando tot vicibus sumitur, quot in numero proportionem denominante sunt vnitates, V. g. illa est proportio; quam habet 3. ad 1., quæ assumit alium numerum, V. g. 4. toties, quot in 3. sunt vnitates, vt est numerus 12. vt ex 18. definit. collegimus: sed in dispositione numerorum assumitur toties 1. quot vnitates sunt in 10. & faciunt 10. Iterũ assumitur 10. toties quot vnitates sunt in 10. & faciunt 100. Iterumque assumitur 100. toties, quot vnitates sunt in 10. & fiunt 1000. Iterum assumitur tot vicibus 1000. quot vnitates reperiuntur in 10. & faciunt decem millia: Ergo crescit, & propagatur per proportionem decuplam omnis numerus naturalis.

PROBL. I. PROP. II.

Cognitis vicibus proportionum, & nominibus earum, facilè quilibet numerus exprimi potest.

PRæsuponendum est *locum*, in quo numerus est, vices proportionum ex instituto hominum significare, V. g. si sint 124. numerus 4. primo loco existens (dexter enim apud Arithmeticos primus locus est) significat vices vnitatum, quę acceptæ sunt. Nempe vnitates quatuor esse acceptas. Secundus locus n. 2. significat vices decimarum; nempe pro vnitatibus acceptas fuisse decimas vnitatum, ita vt 2; quia est secundo loco non duas vnitates, sed duas decimas vnitatum exprimat. Tertius verò locus numeri 1. est centũ multiplicati per 10. idest significat, non iam acceptas fuisse pro vnitatibus decimas; sed centesimas vnitatum; ita vt 100. vnitates pro vna vnitate accipiantur. Numerus autem ipse significat vices, quo vnitates, vel decimæ, vel decimæ decimarum, idest centesimæ acceptæ fuerint, Quod si sola zifra adsit, significat nullas proportionum vices illi loco cõueniẽtes exprimẽdas reperiri, sic si adsit numerus 200. nihil erit vnitatum, nec decimarum; sed solum numerus erit centesimarum, & quia est 2. duæ erunt centesimæ.

Secundò nomina proportionum cognoscere necesse est; hoc autem ex hac serie cognoscetur.

Si vnitas accipiatur decies, decem vocatur.
Si decem accipiatur decies, centum vocatur.
Si centum accipiatur decies mille vocatur.
Si mille decies assumantur, decẽ millia dicitur.
Si mille centies sumatur, centũ millia dicitur.
Si mille millies sumatur, millio vocatur.

Deinde assumuntur iterum milliones, tanquã vnitates, & incipimus iterum à capite.

Si millio decies sumatur, decẽ milliones dicunt
Si millio centies sumatur, centum milliones.
Si millies assumatur, mille milliones.

Si millio sumatur decem vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.

Si millio centum vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.

Si millio sumatur mille vicibus millies, duellio vocatur, & ita dueliones, triliones, quadriliones incipiẽdo rursus ab vnitate in infinitum.

Ita ergo legendus est numerus 10000. quia 1. est in quinto loco, & cęteri omnes non sunt numeri, sed zifrę; ideo non significant, nisi locum numeri; & hoc deseruit, vt numerus suo loco positus significet vices proportionum, quæ illi loco conueniunt. Igitur 1. quinto loco positus significat 4. ordines proportionum præcedere primus numerorum simplicium in primo 0. secundus decimarum in secunda zifra, tertius centesimarum in tertia zifra, quartus decimarum cẽtesimarum nempe milliarium in quarta zifra quibus locis licet numeri non adsint, adest tamen zifra; quę locum seruat, & operatur, quòd 1. vim quinti loci obtineat, & ideo, quòd 1. significet decimas millialiorũ, nempe decẽ millia, quòd si esset 2. essent viginti millia, si 3. triginta millia.

Et quia, vt dictum est, primus locus in quo numerus existit, significat vnitates ad decimas ascendentes. Secundus verò numerus significat decimas vnitatum acceptas tanquam, si essent

vnitates

vnitates ascendentes ad centesimas, & quia, vt potest videri à serie superposita, placuit hominibus ad quamlibet proportionē tricies acceptam, mutare nomina proportionum; ideo facillorem regulam ad legendum reddere possumus, dispositis per ordinem numeris, primo incipiendo ad dextram, & ad omnes tertios duobus intermissis applicare punctum, vt vides in hoc exemplo

2 1

. . . . . .

345648010490071 2. & deinde super quodlibet secundum punctum incipiendo ab vnitate applicare numerum tali ratione, vt primo nihil apponatur, neque secundo puncto, tertio apponatur vnitas, & vno intermisso puncto, quinto apponatur 2. & sic consequenter. Nam hoc modo sciemus, vbi primum punctum reperitur esse numerum simplicem. Vbi secundum esse milliaria accepta tanquam vnitates. Vbi numerus esse milliones accepti tanquam vnitates, & vbi duo esse duelliones. & sic consequenter augendo in infinitum. Et ita numerus superpositus pronuntiabitur. Nimirum

3 4 5 6
Tria millia, & quatercentum quinquaginta sex duel-
4 80 10
liones; quatercentum octuaginta millia, & centum
4 900 7
quatuor milliones, nongenta millia, & septingenta
12
duodecim vnitates.

Vbi iterum aduertendum, quòd nullum nomen zifris attribuitur; quia non significant; nisi locū numeri, vt numerus suo loco positus vices proportionū significet, quibus vnitas est assumpta. Vt in hoc numero 100. duæ zifræ, quæ vnitatem præcedunt, solùm demonstrant illam vnitatem non significare vnitatem simplicem; sed neque significare vnitatem decimarum, sed vnitatem centesimarum expromere, nempe proportionem 10. gemina vice acceptam. Nam si vnitatem multiplico per 10. facit 10. quam decimam, si adhuc multiplico per 10. facit centum. Ecce gemina vice assumpta proportio. Quare, si omnes numeri præcedentes essent o nihil significarent, at si ante sequeretur eos sola vnitas ad sinistram significaret iuxta locum, in quo reperitur. V. g.

2 1

. . . . .

1000000000000. iste numerus significat duellionem, quia nimirum zifræ antecedentes reiciunt illam vnitatem ad decimum tertium locum, qui est locus duellionis: & hæc de numeratione.

EXPENSIO II.

De integrorum collectione;

QVatuor præcipuæ operationes, & vniuersalissimæ circa numeros integros, & naturales exercentur, quæ omnes sub vno nomine *Algorythmi* cōprehenduntur; atque istæ sunt *additio, subtractio, multiplicatio*, & *diuisio*. Hic agimus de additione, quæ datis pluribus numeris eos in vnam summam redigit, atque aliás appellatur *collectum*, & *totum*.

THEOR. I. PROP. III.

Cuilibet numero quilibet alius numerus competens addi potest.

* PRob. Nam iam concessum est in postulato secundo numerum posse sumi alio numero maiorem sint ergo numeri simul addendi 3. & 4. summo ergo numerum æqualem istis duobus simul nimirum 7. & iam facta est additio, namque 7. continet 4. & 3. Probatur vero, me duobus numeris posse sumere æqualē, nā ex 2. Post posū sumere vni illorū vtlibet maiorem, & ex 1. Post cuilibet æqualem, ergo possum sumere maiorem tribus vnitatibus, ita vt hæc maioritas sit æqualis numero 3. & iam duobus numeris 3. & 4. sumpsi æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Numeri dissimiles dissimilibus nō addendi.

* SInt numeri decimas significantes 40. & sint significantes numeros simplices 5. Dico 5. numero 40. addi non posse; Nam si fieri potest, addatur: Erit ergo vel 9. vel 90. zifra apposita, sed nec 9. nec 90. esse potest; ergo neque addi potest, quod verò neque 90. neque 9. esse possit probatur. Nam non 90. quia quinque vnitates super quadraginta vnitates non addunt, nisi id quod sunt; nempe quinque, ergo erit 45. & non 90. Sed nec 9. quia quatuor decimæ sunt magis, quam quatuor numeri simplices, sed quatuor simplices, additi 5. simplicibus faciunt nouem: ergo quatuor decimæ magis, quam nouem.

PROB. I. PROPOS. V.

Si similes numeri, & eandem proportionem significantes addantur similibus numeris, eandem proportionem significantibus erit optimè facta additio.

CVm ergo certum sit ex præced. addendos numeros accipiendos esse eiusdem proportionis; iuxta eorum proportionem ita disponendi sunt, vt singulæ proportiones addendæ loco correspondeant, & dignitate vt videre est in hoc exemplo.

1945
7329
405
——
9679

Nam omnes, qui sunt in primo loco ad inuicem sibi, & per rectam lineam respondent, & ita, qui in cæteris locis. Quo facto lineola subducta distinguendi sunt numeri addendi à numeris additis supponendis. Postea addantur simul tres primi ordinis 5. 9. & 5. incipiendo ab inferiori, & faciunt 19. & quia habes duos numeros, quorum primus 9. est eiusdem speciei, cum illis, qui erant addendi; ideo sub ipsis rectà pono 9. tanquam ad primum collectum ordinem pertinens; & trasfero 1. qui est decimarum, tanquam ad secundum ordinem spectans; & addo simul hoc 1. & deinde cæteri secundi ordinis 0. 2. 4. & faciunt 7. (nam 0. nihil addit,) & quia est numerus simplex decimarum, pono sub hoc secundo ordine, spectans ad

ad decimas. Deinde, assumo 4. 3. 9. tertij ordinis, qui simul additi faciunt 16. & quia obtinui duos numeros, primum 6. eiusdem ordinis, quare illum pono apud 7. sub tertio, ad quem spectat, ordine; & trasfero secundum 1. ad ordinem altiorem, & sequentem: addo igitur simul 171. & faciunt 9. apud 6. ponendum. Habeoque numerum collectum 9679. æquiualentem illis tribus ordine positis. Quod promissum est in problemate, & ex antecedentibus Theorematibus sequitur.

EXPENSIO III.

De subductione numerorum integrorum.

SVbductio, aut subtractio est, cùm duobus numeris datis minor aufertur à maiore ad obtinendum residuum, qui numerus etiam appellatur *Quæsitus*, & *Reliquus*.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Quilibet numerus minor, à quolibet maiori correspondenti extrahi potest.

CVm namq; ex defin. omnē numerū vnitates mensurent; in numero maiori erunt tot vnitates, quot in numero minori, & ampliùs. Sed ex 1. post. cuilibet numero licet accipere equalem. Sumam igitur ex numero maiori æqualem alicui numero minori, V. g. à 5. possum sumere numerum æqualem numero 4. quo ablato, quod residuum erit, numerus à subtractione residuus erit, qui exquiritur.

COROLLARIVM I.

QVòd, si simul addantur 4. & 1. efficent, quod erat; cum sint partes ipsius 5.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Numerus à numero similis proportionis subducendus est.

* PRobatur. Nam si possunt diuerse proportionis numeri auferri; minor à maiori auferantur, V. g. 5. à 70. Quia ergo abstuli à 70. residuus erit numerus 20. Sed addantur simul rursus iuxta dicta prop. 5. anteced. 20. & 5. faciūt 25. Sed debebant efficere, quod priùs erat, nempe numerum 70. ex Coroll. præced. Ergo non potest fieri subductio numerorum: nisi sint eiusdem dignitatis.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Si à numeris maioribus, & eandem proportionem habentibus numeri minores, & eandem proportionem habentes, ac ipsi, demantur, fiet optimè subtractio.

SIt subtrahendus numerus æqualis huic 678. à numero 1257. Quia proportionales à proportionalibus sunt auferendi, ita collocandi sunt vt loco, ideoque proportione respondeant, vt in hoc exemplo. Et subducta lineolâ distinctionis gratiâ, deinde assumatur à superiore numerus æqualis numero primo 8. & si non possit id fieri, quòd 7. minor sit; à numero secundo proximo accipiatur vnitas decimarum, & sint 17. deducaturq; ab eo numero 8 æqualis, & residuus erit 9. Qui, vt numerus vnitatum, sub vnitatibus scribendus. Iamque accedimus ad secundum numerum subducendum, & quia sustulimus à 5. vnitatem decimarum; ideo euasit 4. Videatur ergo; an 7. secundus subducendus à numero 4. auferri queat, & cum non possit, iterum à præcedenti assumatur vnitas decimarum, & sint 14. ex quibus 7. ablatus relinquit 7. igitur subscribo 7. numeris secundi ordinis apud 9.

1257
678
——
579

Et quia à præcedenti 2. abstuli 1. ideo remansere 1. à quo 6. auferri nequeunt; igitur vnitas præcedens, quæ est centesimarum addatur, & fiant 11. ablatus 6. restituit 5. Itaque residuus erit 579. subducto 678. à maiore numero 1257.

Quòd si in præcedenti non reperiretur, nec quidem vnitas, sed zifra: tunc accipienda est adhuc vnitas, non quidem ab illo loco, sed à superiori saltem virtualiter, vt in istis terminis.

100
8
——
92

Si enim volo subducere 8. à primo 0. nequeo; quia numerus non est, accipio itaque vnitatem decimarum ab antecedenti; sed nequeo; quia est 0. Accipio ergo ab antecedenti; qui licet sit 1. est tamen numerus vnius decimæ decimarum, idest centesimarum; ideoque subduco 8. à 10. residuus erit 2. at verò 10. iam non erit 10. sed 9. quod vna decima ablata sit; Ideoque residuus erit 92.

Poterit quoque facilitatis gratia vnitas ablata numero sequenti restitui, V. g. si sic fiat 2. à 0. nequit fieri, sed mutuò accepta vnitate à maiori fiet, 10. à quo subductus 2. residuus erit 8. sed quia ab antecedenti abstuli vnitatem, ideo secundo 7. ei addo, & fient 8. demo itaque 8. à 10. eodem modo, & fiunt 2. & quia abstuli vnitatem, ideo eam subduco à residuo 10. & fiunt 9. & sic habetur residuus 928. Illud enim augmentum, quod subtrahendo numero fit, æquiualet diminutioni factæ in numero, à quo aufertur. Nam ita est, si auferantur 8. à 10. quam si auferantur 7. à 9. In prima verò regula cogitauimus numerum, à quo subducitur diminutum: hic verò numerum subtrahendum augemus vnitate; vt idem relinquat; ibi cogitatur iam ablata vnitas; hic tanquam, si non esset ablata, cum numero subducendo aufertur.

1000
72
——
928

Potest etiam fieri alio modo, vt si auferendi sint à numero 2081. numeri 479. dispono, vt supra, & quia 9. ex 1. auferri nequit, ideo differentiam, quæ est inter 9. & 10.; nimirum 1. assumo, & eam addo numero superiori silicet numero 1. & fiunt 2. quos subscribo. Ita 7. secundum aufero à 7. & numero superiori (est enim 7. non 8. ob vnitatem ablatam) & nihil remanet: Vnde scribo 0. ad hoc, vt seruetur locus. Deinde quia 4. nequit deduci à 0. assumo differentiam inter 4. & 10. remanent 6. quam numero superiori non addo, cùm zifræ non possit fieri additio, & ideo scribo 6. & deinde scribo 1. ita enim remansit, quòd vnitas ablata sit à numero 2. propter 10. mutuò assumptos priùs. Qui omnes modi in idem recidunt.

2081
479
——
1602

EXPENSIO IV.

De numeris multiplicandis.

MVltiplicatio est duplex, alia simplex, alia composita. Simplex est, cùm vnus simplex numerus per alium multiplicatur, composita verò, cùm vel plures numeri per vnum multiplicantur, vel plures per plures. Agemus priùs de prima, vtpote de faciliori.

THEOR. I. PROP. VIIII.

Quilibet numerus potest multiplicari.

PRobatur multiplicare est sumere toties alium numerum, quot numerus multiplicans habet vnitates; cumque liceat alteri numero addere quantum quisque vult ex post 1: si V. g. assumam 4. licebit mihi addere, quantum volo. Addam ergo ei rursus 4. & rursus 4. toties quot vnitates sunt in 3. & sic habebo 4. ter acceptos. Quod est multiplicare ex definit. 15.

THEOR. II. PROPOS. X.

Si sit numerus, vel medietas decimæ, vel medietatem decimæ excedens, multipliceturq; per alium excedentem vnitatem, cum fuerit multiplicatus, vel æquabit decimam, vel decimam superabit;

PRobatur facilè; quia minus, quàm 2. assumi nequit; nec minus 5. pro numero multiplicando, quæ faciunt 10. Quare, si alij assumantur, patet decimam superaturos.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Si sint duo numeri se se mutuo multiplicantes; quorum vnius medietas simul cum toto alio posita sit magis, quam medietas decimæ, illi numeri multiplicati decimam superabunt.

PRobatur facilè. Nam, iste numerus 4. adiunctus numeri multiplicantis 3. medietati quę sit 1. $\frac{1}{2}$ facit 5. $\frac{1}{2}$. Quare si tantùm addatur iterum 4. & 1. $\frac{1}{2}$ multiplicando per 2. facient magis, quam 10. Quia gemina vice accipientur. Ergo tanto magis si multiplicatur 4. per 3. aut quemlibet alium maiorem.

COROLLARIVM

HInc habes numeros tales generare numeros ad duas proportiones pertinentes, vel ad vnam tantùm; sed semper superiorem. Sic 3. & 4. generant duos numeros 12. quorum primus 2. est eiusdem proportionis, ac multiplicati, secundus verò 1. proportionis immediatè sequentis decimarum. Sic si 5. multiplicentur per 6. generabunt numerum 30. qui ternarius non erit numerus simplex: sed ternarius decimarum, nempe ordinis immediatè sequentis.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

Numerus simplex multiplicans numerum simplicem non potest generare numerum, nisi proportionis altioris immediatè sequentis.

PRob. Quia numerus maximus simplicium est 9. qui multiplicatus per 9. maximum item simplicium producet numerum, nouies numerum 9. continentem; sed proportio altioris ordinis, quã proportionis immediatè sequentis numeros simplices continet decimas decies. Maior autem est numerus continens partes plures, & maiores, quàm qui continet pauciores, & minores. Ergo erit minor numerus continens nouies nouem; quàm decies decem. Ergo non poterit efficere proportionem istã tertiam. Quod si maximus simplicium id nequit, Ergo nec cæteri.

COROLLARIVM

HInc est, quòd, etiam si numerus multiplicans alium significet decimas, vel decimas decimarum; quòd eadem ratio erit, & producere nequibunt numerum pertinentem; nisi ad proportionẽ immediatè sequentem, vt patet, quià eadem ratio sit de numeris, vel sumptis, vt vnitates simplices, seu, vt vnitates decimarum, seu vt centesimarum, &c.

THOR. V. PROPOS. XIII.

Omnes numeri se se multiplicantes faciunt numerum, qui comprehendit, tum vnius, tum alterius partes.

PRobatur. Quia id vnumquodque continet, ex quo componitur: Ergo cùm numerus sit compositus ex multiplicatione, tum vnius, tum alterius, debet eorum partes in se habere.

THEOR. VI. PROPOS. XIV.

Si numerus simplex multiplicet non simplicem, numeri geniti simplices non erunt: sed eius proportionis, cuius est multiplicatus, vel immediatè sequentis.

SIt 3. numerus, qui multiplicet 5. numeri 250. Dico, quòd in genito 15. numerus 5. non est simplex; sed eius proportionis, cuius est 5. in numero 250.

Prob. Nam in numero 150. numerus 5. qualibet vnitate decimam significat. Ergo qualibet eius vnitas tricies accepta decimarum erit. Igitur etiam, si toties 5. simul sumatur genitus decimarum erit ex propos. 12. Coroll. numerus uero 1. in genito 15. ex propos. 11. Coroll. significabit proportionem immediatè sequentem.

THEO-

THEOR. VII. PROPOS. XV.

Si numerus non simplex multiplicet non simplicem producet eam proportionem, quæ tum vnius, tum alterius ab vnitate distantiâ conficitur.

SIt numerus 7. in numero 70. & numerus 5. in numero 50. qui se inuicem multiplicent. Dico quod numerus genitus erit eius proportionis, quæ ex distantiâ, tum unius, tum alterius à primo numero uersùs sinistram recedit; & quia loca per zifras notata sunt. Ideo dico recedere zifris, tum huius, tum alterius numeri nimirum duabus zifris, eritque 3500.

Probatur. Quia ex antecedenti numerus simplex primus multiplicans secundum generat numerum secundo loco ponendum. Ergo secundus multiplicans secundum generabit numerum tertio loco ponendum, & ideo secundus multiplicans tertium generabit numerum quarto loco ponendum, & hinc tertius multiplicans tertium generabit numerum quinto loco ponendum, & sic de cæt.

ABC

Quod, ut magis pateat, sit numerus 323. &

DEF

222. Quia 3. A est tertio loco, si illum multiplicet F 2. erit genitus ex 2. tertio loco ponendus ex propos. anteced. & ostendet tres centesimas, ut unitates fuisse acceptas. Quod si multiplicet 2. E numerum A 3. eundem, significabit tres centesimas non iam bis acceptas, sed dualitate decimarum, idest uigesies acceptas. Ergo genitus non iam significat unitates centesimarum; sed decimas centesimarum. Ideo secundo loco post primum collocandus, idest quarto loco ponendus; Et si illum D 2. multiplicat; iam non erunt decimæ centesimarũ. Sed centesimæ centesimarum, ideo numerus genitus tertio loco ponendus post primum, idest quinto loco collocandus; & sic, si alij adsint argumentabitur.

PROB. I. PROPOS. XVI.

Si omnes numeri simplices in quadratam seriem ita disponantur, vt prima series sit continua additio vnitatum, secunda dualitatum, & sic consequenter vsque ad 10. Tabula talis ordinata erit, quæ numerorum simplicium multiplicationem exibebit.

DVcantur lineæ æquidistantes undecim, & istas decussantes aliæ undecim. Deinde ascribantur numeri in prima serie ponendo unitates sibi inuicem additas; in secunda dualitates sibi superadiunctas; In tertia triadas, & sic de cæteris. Nam tabula erit confecta, quæ à Pythagora primò inuenta est, & ab eius nomine Pythagorica uocatur: Quam dico numerorum simplicium exibere multiplicationem.

Probatur multiplicare est sumere numeros multiplicandos tot uicibus, quot sunt in numero multiplicante unitates: cum ergo quilibet numerus simplex additus sit alteri tot uicibus, quot numeros habet ipsa decima, V. g. unitas unitati 10. uicibus addita est, dualitasque dualitati, trias triadi, &c hæc erit numerorum simplicium multiplicatio.

							A		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
			D				C		
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Vsus etiam clarus est. Nam, si reperio à latere sinistro numerum multiplicantem, & in superiore parte multiplicatum in eo quadrangulo, ubi series inuicem concurrunt, erit numerus genitus. Sic 8. per 3. multiplicatus erit 24. ubi series A, & B occurrunt in C. Obseruaque ex propos. 11. numerum tabulati D excedere simplices numeros, & proportionem sequentem induere.

* Verum quia non semper hæc tabula in promptu est, & quandoque in multiplicationibus numerorũ maiorum potest suboriri difficultas; ideo hæc regula poterit obseruari ad facilitatem sectandam.

Volo Eg. cognoscere 8. multiplicatum per 9. quem numerum gignat: Video, quot numeris distet minor numerus 8. à 10. & video esse 2. differentiam. Accipio ergo 9. gemina vice, & subduco à 9. addito 0. nempe à 90. & residuum 72. est numerus quæsitus; Sic 7. per 6. differentia est 4. quam multiplico per 7. & faciunt 28. subduco à 70. & dant 42. numerum genitum ex multiplicatione 7. in 6. Et ratio est; quia 70. est 7. decies acceptus. Quòd, si auferatur ab eo 7. quater acceptus, clarum est, quòd remanet 7. sexties acceptus, nempe per 6. multiplicatus: hęc autem regula cõmodior est in magnis numeris: cum differentiæ à 10. paruæ sunt, & in illis deseruit.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datis duobus numeris non simplicibus inuicem multiplicandis, si quilibet numerus per alium multiplicetur, & seruetur proportionum locus vbique, & summa cuiuslibet multiplicationis colligatur, erit facta multiplicatio compositorum numerorum.

VIsa facili multiplicatione numerorum simplicium, videndum est quomodo ex eis numeri maiores multiplicentur. Sint ergo multiplicandi 254. per 43. cùm sit seruandus proportionis locus, debet minor sub maiore subscribi tali modo, 254

vt numerus vnitatum sub vnitatibus, 43

N 2 de-

decimarum sub decimis, & omnes alij numeri correspondenter collocentur. Et quia quilibet per alium multiplicari debet, & iam cognosco quomodo multiplicentur numeri simplices. Ideo multiplico 3. per 4. & faciunt 12. scilicet ex propos. 10. & 11. numeros gemine proportionis, primum simplicium vnitatum, secundum numerorum decimarum, & proportionis immediatè sequentis: ideo 2. vnitatibus subscribo, at 1. decimis. Postea 3. per 5. sequentem numerum multiplico, & faciunt 15. quorum primus 5. locum ex propos. 14. proportionis eiusdem, quæ est numeri 5. debet occupare nempe secundum. Vnde numero 1. subscribendus, vt vides, & 1. numeri 15. ad tertium locum pertinebit, cum sit proportionis immediatè sequentis. Deinde multiplico 3. per 2. & faciunt 6. numerum tertij loci.

254
43
12
15
6
16
20
8

Itaque iam prima figura inferioris numeri multiplicata est per omnes figuras numeri superioris: Modo multiplicanda est secunda figura; ideoque accipio 4. & multiplico per 4. & faciunt 16. & quia 4. est secundi ordinis in numero 43. ideo genitus ad eundem locum spectat ex propos. 14. nempe secundum. Quare ipsius 1. ad tertium deuenit ex propos. 15. Postmodum iterum multiplico 5. per 4. & faciunt 20. cuius primus 0. ex propos. 15. debet occupare tertium locum, & ideo subscribo tertio loco 0. & 2. quarto. Deinde 2. per 4. & faciunt 8. quarto loco ponendus. Tandem congrego omnes simul, eritque summa numeri ex multiplicatione geniti 10922.

10922

Practici tamen breuitatis gratia non omnes numeros distinctè scribunt; sed transferunt ad alios anteriores, V. g. in præcedenti exemplo, non scribent numerum 12. sed 2. quidem scilicet numerum verò 1. mente retinebunt, donec multiplicent sequentem 5. per 3. & producant 15. cuius numero 5. addent illam vnitatem mente retentam, & scribent 6. & alterum 1. mente conseruabunt, donec iterum per 3. multiplicent 2. & faciunt 6. cui addent 1. mente seruatum, & sic scribent 7. & sic in secunda multiplicatione numeri 4. efficiunt vt hic videre licet. Nam solum scribet 6. & 1. coniungent cum 20. vt sint 21. & scribent 1. & 2. coniungent cum numero 8. vt sint 10. quem tandem scribent. Deinde, vt priùs, summa colligitur

254
43
762
1016
10922

Si quando numerus zifris constat, sufficit ponere tot zifras, quot sunt in numero, tum multiplicato, tum multiplicante, & deinde vltimum numerum multiplicare inferioris, cum superiori, & erit facta multiplicatio, V. g. sint multiplicandi 20000. per 300. Quia sunt 6. zifræ in vtroque eas omnes scribo, deinde multiplico 3. cum 2. & vltimo loco pono 6. & erit fine summa confecta multiplicatio.

20000
300
6000000

Quod si numerus alter constet zifris, at alter nequaquam; alter per alterum multiplicandus est: Et confecta multiplicatione summæ eius addendæ sunt tot nullæ, quot sunt in altero ipsorum, vt vides in exemplo.

33000
35
165
99
1155000

EXPENSIO V.

De numerorum integrorum diuisione.

DIuisio est inuentio numeri, qui suis vnitatibus demonstret, quoties numerus minor continetur in maiore; & metiatur maiorem. Duplex est autem, alia enim est numeri simplicis quemcunque alium diuidentis, alia numeri compositi alium pariter diuidentis.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Quilibet numerus maior cuiuslibet proportionis per quemlibet alium numerum partiri potest.

SIt numerus proportionis decimarum 80. Dico quod per quemlibet alium numerum minorem, seu æqualem diuidi queat.

Probatur primò de minori, qui sit V. g. 4. Vtique ego possum assumere huic numero 4. æquè multiplicem, vt mihi placet, ex post. 2. Accipiam ergo numerum multiplicem, qui 80. non excedat proximè, ita vt, si semel adhuc multiplicem, excedat; Iterum possum exprimere numerum multiplicitatis, idest quot vicibus assumpserim. Si enim assumo multiplicem, etiam quot vicibus assumpserim ignorare non debeo. Si ergo exprimam, expressus numerus erit ille, qui quæritur, & appellabitur Quotiens, idest indicans, quot vicibus contineatur 4. in 80. qui numerus vicium erit 20.

Probatur etiam de equali; quia, si est æqualis cōmensuratur ipsi, ergo vnica vice capiet in ipso.

Quare patet. Quod numerus cuiuslibet proportionis per quemlibet diuidi possit, cum per minorem, & æqualem, vt libet diuidatur.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Quilibet numerus minor, vt minor, per maiorem partiri nequit.

PRobatur ex definitione 16. Minor nullis vicibus continet maiorem; Ergo vices secundum quas continet, exprimi nequeunt. Quare nec diuidi.

Dixi autem, *numerus minor, vt minor*, quia numeri minoris, vtpote quantitatis in partes designabiles plures secari poterit quælibet vnitas, & sic augeri numero. Quare auctus numero, diuidi poterit.

THEOR. III. PROPOS. XX.

In qualibet figura numerica, non potest eiusdem proportionis maior numerus capere, quam 9.

PRobat. Nam capiat maior numerus. Iam euadit 10. idest alterius proportionis, nempe vnitas decimarum.

THEO-

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Non omnis numerus per alium, ita diuidi potest manendo eiusdem rationis, vt non supersit aliquid.

PRobatur diuidere est cognoscere, quot vicibus numerus datus contineatur in diuidendo: sed non omnis numerus ex æquo omnem numerum metitur, cum non sit eius pars, sed multoties partes ex defin. 4. Ergo tunc aliquid remanere debet.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Illud, quod remanet, semper est aliqua pars numeri diuidentis.

PRobatur. Nam ex Axiom. 6. omnis numerus seipsum per vnitatem metitur: Ergo quemlibet alium ex Axiomate 9. per vnitatem metietur, quia numerus quemcūq; numerū metiēs metitur etiam omnem numerum, quem ille metitur: Quare, cùm vnitas metiatur omnem numerum saltem per vnitatem, numerus remanens metietur numerum diuisorem saltem per vnitatem. Propterea hoc erit exprimendum.

COROLLARIVM

QVoniam numerus residuus à diuisione est pars numeri diuidentis. Ideo erit numerus fractus, idest non erit totum; sed aliqua pars. Vnde hìc necessariò docendum erit; quomodo fracti scribantur, & quomodo partes eorum nominentur: Numerus itaque fractus necessariò exprimendus duobus numeris; quia ex præced. prop. cùm nō sit numerus absolutus; sed relatiuus, & se habeat tanquam pars ad totum. Relatiua verò ex Arist. sint simul cognitione consequenter exprimendum erit totum, & pars tali modo $\frac{3}{6}$ cognoscetur enim 3. numerum superiorem concludere in se tres partes numeri 6. Ideoque 3. numerus superior dicetur numerator, quòd numeret partes: at inferior denominator, qui exprimit totum, & indicat, cuius totius partes sint super lineolam numeri descripti, lineola vero interijcitur distinctionis gratia. Superior quoque numerus potest esse maior, & inferior minor; quia aliquando necesse est exprimere habitudinem, & relationem numeri superioris ad inferiorē, vt $\frac{5}{3}$ vnde more fractorum id fit: quòd in fractis exprimatur relatio totius, & partis.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII.

Residuum numeri alicuius vnitatis maioris potest habere tot vnitates in minori proportione acceptas, quòd possit diuidi per eundem numerum, quo prior diuisus est.

SIt diuidendus numerus 90. per 8. Iam certum est 8. in 9. vnica vice capere, & residuam esse vnitatem, quæ non capit 8: sed, quia illa est vnitas decimarum, si decima accipiatur tanquam numerus simplex, & proportionis immediatè inferioris, iam habebit numeros 10. capaces semel numeri 8. cum residua vnitate.

PROB. VII. PROP. XXIV.

Si videatur quoties numerus minor contineatur in numeris maioris cuiuslibet proportionis: Deinde successiuè in alijs minoris proportionis cum residuo remanente à diuisione numeri maioris, & hæ vices scribantur per ordinem erit facta diuisio.

QVoniam, vt dictum est propos. 18. in hac operatione proportio non est seruanda. Sed quilibet numerus alium diuidere potest, cuiuscumque proportionis sit: Ideo ponemus numerū diuidentem. V. g. 34. sub numero diuidendo 7828. absque respectu loci, & quia residuum maioris numeri potest iterum diuidi ex prop. 23. in minori sequenti proportione: ideo ponemus numerum diuidentem sub maiore numero diuidendo, ad hoc vt ex eo diuiso remaneat residuum iterum diudendum, sed acceptum in minori proportione tali modo, & ducatur lineola. Video quot vicibus numerus primus diuisor 3. capiat in 7. & cognosco vicem esse duplicem, simulque etiam aspicio, si eadem gemina vice numerus 4. possit capere in numero sequente 8. cum eo, quod remanet à primo numero 7. Sed hic potest capere; ideo scribo 2. seorsim. Et ad hoc, vt sciam numerum subtrahendum multiplico 2. per 3. & faciunt 6. quos subduco à 7. & remanet 1.

7828
34

Scribo itaque 1. residuum super 7. deleoque 7. tali modo, vt possit cognosci, lineolâ super 7. ductâ. Iterumque multiplico 4. per 2. & faciunt 8. quos subduco ab 8. & nihil remanet. Quare scribo super 8. zifrā, & deleo 8. Deleoque etiam totum numerum 34. vt nihil iam amplius eo loco deseruiens, quòd numeri illius proportionis iam sint diuisi. Quamobrem scribo loco immediatè inferiori sub residuo numeri diuisi ad diuidendam proportionem inferioris ordinis, & considero, quot vicibus capiat 3. in residuo 10. tanquam numerum inferioris proportionis accepto; & video tricies. Scribo ergo 3. apud 2. seorsim, & eodem modo multiplico 3. per 3. & faciunt 9. quos subduco à 10. & remanet 1. Deleo igitur 1. in numero 10. & zifræ deletæ superpono 1, quæ cum 2. facit 12. multiplico itaque 4. per 3. rursus, & faciunt 12. subduco itaque 12. à 12. & nihil remanet: Vnde deleo 1. & 2. & superpono 0. eoquòd nihil remaneat. Deleo quoque numerum diuisorem, tanquam non amplius eo loco deseruientem, sed ad vlteriorem locum promouendum. Quare scribo sequenti loco numerum diuisorem; hac enim mutatione loci fit, vt accedat ad numerum residuum acceptum in minori proportione ex preced. propos. 23. & ideo diuidi possit: Si tamen aliquid remaneat sufficiens. Hìc autem nihil remanet sufficiens, cùm tantùm relinquatur 8. numerus

primus

primus simplicium vnitatum, in quo numerus 34. capere nequit, & ideo in quotiente apud 3. pono o. eò quòd in vltimo numero vltimi loci nulla diuisio potuerit fieri, quòd semper seruandum est, quotiescumque occurrerit numerum diuisorem in aliqua proportione non capere: sed diuisorem esse promouendum adhuc ad minorem numerum.

Residuum verò 8. est pars numeri diuidentis ex propos. 22. ideo scribendus est apud alios, sed vt minutia, nempe superiùs 8. & interiecta lineola numerus diuisor 34. quare diuiso numero 7828 per 34. quotiens erit 230. $\frac{8}{34}$ nempe 230. & insuper ex triginta *quater partibus in quibus vnitas diuisa est 8. partes*.

Quod si aliquando occurrat in vltimo ipso numero versùs sinistram, qui primus omnium diuidendus est non capere numerum diuisorem, vel vltimum capere: sed non penultimum, vel antepenultimum; tunc ad secundum locum inferiorem prououendus est.

Sit numerus diuidendus 7930. per 794. quia 4. primus diuisoris non capit in 3. ideo assumenda est proportio minor, & prima diuisione non debeo diuidere 793. quia nequit. Sed numerum 7930. Considero itaque quot vicibus capiat 7. in 79. & video; quod nouem vicibus, (neque enim amplius capere potest, vt suprà propos. 20. quam 9 in qualibet proportione, licet aliquando minus) ideoque multiplico per 9. diuisorem 794. & fiunt 7146. auferendi à diuidendo 7930. & facta erit diuisio. Quod si iste defectus eueniat non in principio, sed in medio, vt si 7945. diuidantur per 73. Tunc apposita apud quotientem zifra, ad locum inferiorem diuisor promouendus. Sic semel 73. capit in 79. ideoque quotiens est 1. & residuum est 6. qui cum 4. numero sequentis proportionis facit 64. in quo deberet capere diuisor numerus 73. Cum ergo non capiat, ad aliam proportionem transeundum est, priùs appositâ zifrâ apud quotientem, vt significet 10. Et est deinde diuidendus numerus 646. per 73. Et quia 7. capit in 64. nouem vicibus, & 3. non capit in residuo 16. nouem quoq; vicibus; ideo dico octo vicibus capere, & pono 8. apud quotientem; vt fit 108. & facta multiplicatione eueniunt 584. quos subduco à 646. & fiunt 62. residui pro fractis ponendi. Quare quotiens erit 108. $\frac{62}{73}$.

Alius modus tutissimus diuidendi erit. Multiplicare priùs sensim numeros diuisoris per numeros simplices, vsque quo eorum summa eueniat maior, quam correspondentis figuræ numeri diuidendi: deinde extrahere summam proxime minorem à numero diuidendo.

V. g. sit diuidendus numerus 993470 per 247. Priùs per numeros simplices multiplico diuisorem 247. hoc modo hic latteraliter apposito priùs per 1. deinde per 2. &c. vsque quo perueniam ad numerum 1235. maiorem numero 993. constante tribus vltimis figuris diuidendi, quæ debent primo diuisori correspondere. Quo facto video, an reperiatur 993. in his numeris ita multiplicatis: Et si non reperio, summo proximè minorem; nempe 988. deducoque à 993. & remanent 5. & quia 4. apposui apud 988. notando quod 988. est 247. quater acceptus; idcirco appono pro quotiente 4.

247	1
494	2
741	3
988	4
1235	5

993 | 4
988
5

Deinde assumo aliam figuram à numero diuidendo, nempe sequentem 4. & pono apud 5. & considero in numeris multiplicatis, & genitis à diuisore per numeros simplices ducto; an adsit hic numerus, & video non adesse, nec quidem proximè minorem, sed omnes maiores, vnde apud 4. quotientem pono zifram, & assumo aliam figuram nempe 7, & video, an in serie numerorum adsit hic numerus 547. & video nec hic quidem reperiri: sed proxime minorem 494. ergo quotienti 40. appono 2. lateralem, & deduco à prædicto 547. numerum 494. & residuum est 53. deinde vltimam figuram assumo, nempe o. à diuidendo, & appono ad 53. & faciunt 530. Reperioq; numerum proximè minorem esse 494. quem deduco à 530. & apud quotientem, item 2. lateralem appono & facta subtractione residuum est 36. quam more residuorum apud quotientem adscribo. Eritque quotiens 4022. $\frac{36}{247}$.

547 | 40
547 | 402
494
53
530 | 4022
494
36

Sed licet tutissima sit hæc regula; Attamen prolixa est. Quare poterit deseruire in aliquo magno numero diuidendo per alium aliquem magnum numerum; cùm enim ibi error sit maximi dispendij temporis, & laboris; opportuniùs erit hoc modo operationem contutari; Et nota ex præced. Prop. 20. multiplicationem numeri diuisoris non esse continuandam vltra 9. quia magis, quàm nouem vicibus non potest contineri figura diuidens in diuidenda.

Tertius modus apud Italos vsitatus est talis; Sit diuidendus numerus 4680. per numerum 37. Posito numero diuisore seorsum, trahatur infra ipsum lineola. Deinde video, vt supra feci, quot vicibus 3. capiat in 4. nimirum quòd vnica vice; ideo pono 1. pro quotiẽte super lineolâ, & per illum 1. multiplico diuisorem, & numerum genitum sub duabus vltimis figuris diuidendi subscribo.

Et ex inde subduco, & residuum noto sub lineola. Multiplicatis ergo 37. per 1. generat 37. quos deduco à 46. & reliquunt 9. Assumo deinde aliam figuram, nempe 8. à diuidendo, & pono apud 9. Et video, quot vicibus capiat 37. in 98. Cognoscoque capere bis; quia licet 3. capiat ter in 9. non tamen capit 7. in 8. ter: quare dico bis, & sic 7. capit in 8. cum residuo ex 9. etiam bis; & licet capiat magis; nil interest. Ergo apud quotientem 1. appono 2. & multiplico per diuisorem 37. & faciunt 74. quos deduco à 98. & residuum est 24. Assumo rursus vltimam figuram o. & appono apud 24. faciuntq; 240. Video igitur, quot vicibus capiat 3. in 24 & cognosco, quod octies: Verùm 7. in o. nullo modo capit. Assumo itaque minus, & dico 3. in 24. capere septies, remanentq; 30. in quibus 7. septies non capit. Assumo itaq; rursus minus, & dico capere 3. in 24. sexties, & residuum est 60. in quibus sexties vtique 7. capit; quia 7. multiplicatus per 6. facit solum 42. Ideo

4680 | 1
37 37
98

4680 | 12
37 37
98
74
240

apud quotientem 12 adscribo numerum 6. significantem sex vicibus numerum diuisorem in diuidendo contineri: multiplicoque per 6. diuisorem 37. & genitus est 222. quos deduco à 240. & residuum est 18. quem numerum more residuorũ apud quotientem scribo. Estque quotiens 126. $\frac{18}{37}$

4680 | 126
37 37
98
74
240
222
18

EXPENSIO VI.

De Probationibus.

QVoniam in calculandis numeris non raro eueniunt errores; nunc modus tradendus est, quo in vnaquaque regulâ operationes factæ examinentur.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Ablato 9. ex qualibet proportione integra remanet numerus simplex denominans eam proportionem.

* DEtur numerus 70. à quo auferatur 9. quoties auferi potest. Dico quod remanebit numerus denominans eam proportionem, & quia denominabatur à 7. Ideo remanet numerus 7.

Probatur. Nam V. g. 70. significat septem decimas; si autem ex decima qualibet dematur 9. in qualibet decima supererit 1. cùmque sint 7. decimæ, erunt residuæ septem vnitates, quę constituunt numerum 7.

COROLLARIVM.

* HInc est, quod siue numeri assumantur, vt significantes decimas, siue decimas decimarum, &c. semper æquali modo idem remansurum simplicem proportionis denominatorem; ac si, vt numeri simplices accepti fuissent. Nam ex qualibet ablatione cuiuscumque proportionis semper remanet vnitas; vt si ex 102. auferatur 9. tot vicibus, quot potest auferri, remanet numerus 12. à quo deductus 9. relinquitur numerus 3. ille ipse; qui restaret, si numerus 1. & 2. tanquam simplices vnitates in numero 102. acceptæ fuissent. Item à numero 730. aufero 9. quoties fieri potest, idest vicibus 80. residuum erit 10. à quo si aufero 9. remanet 1. idem numerus, qui remanet à 7. & 3. vt simplicibus acceptis.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Si numerus decimarum multiplicetur per numerum quemcumque, & à multiplicato auferatur 9. quoties fieri potest, relinquetur numerus, ac si simplices numeri fuerint inuicem multiplicati.

SI numerus 80. multiplicatus per 3. & generet 240. Dico, quòd si à 240. auferatur 9. quantùm fieri potest, relinquetur numerus talis; ac si 8. simpliciter per 9. fuerit multiplicatus.

Probatur. Nam relinquitur numerus denominans eam proportionem, & anteced. ideoq; à 100. auferatur 9. quantũ fieri potest remanet 1. & à 200. restat 2. & à 40. remanet 4. Quare ablato 9. à 240. quantũ fieri poterit remanet 24. nempe numerus ille, qui factus, & genitus fuisset; si 8. fuisset multiplicatus per 3. Sed sit numerus multiplicans, & multiplicatus decimarum V. g. 80. & 30. adhuc idem succedet. Nam producet 2400. à quo ablatus 9. relinquit numerum 24. quem produxissent, si fuissent simplices.

COROLLARIVM

HInc est: Quod, si à numero aliquo genito à simplicibus auferatur 9. quantùm fieri potest; quod relinquetur idem residuũ; ac si fuisset numerus genitus à numeris decimarum; si à 24. relinquitur 6. & à 2400. relinquitur adhuc 6.

Quòd, si sit coniunctus cum aliquo simplici, idem eueniet; si ab eis priùs auferatur 9. quantũ fieri potest; nimirũ à 75. octies remanent 3. & ab 86. nouies, remanent 5. qui simplices numeri inuicem multiplicati generabunt talem numerum, à quo ablatus 9. quantùm fieri potest, idem residuum relinquet; ac si in sua specie, & ab illorum genito ablatus 9. fuisset, quantùm fieri potuisset. Sic 3. & 5. inuicem multiplicati faciunt 19. & ablato 9. relinquũt 6. quod residuum à genito 6450. ex numeris 75. & 86. restat. Ratio est; quia assumptus 7. & 5. vel 8. & 6. vt simplices, idem relinquunt, ac assumpti; vt decimas significantes, sic 7. & 5. faciunt 12. & ablato semel 9. remanet 3. quòd remanet ablato 9. octies à 75. & ab 8. & 6. vt simplices; nempe à 14. idem residuum remanet ablato semel 9. ac remanet ab 89. nouies ablato 9.

Quare ex præced. multiplicatis inuicem istis residuis 3. & 5. si à genito dematur 9. idem residuum dabit, ac si à genito ab eorum primitiuorũ 75. & 86. mutua multiplicatione 9. quoties fieri potest auferatur. Oportet verò ab illis priùs auferre 9. quantùm fieri potest, alioquin, si semel posset auferri, non essent simplices; sed decimas significantes.

THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Si à numero collecto in vnam summam auferatur aliquis numerus, & à colligendo idem numerus auferatur debent residua, tum collecti, tum colligendi remanere æqualia.

	A
Probatur. Nam sit summa B 169. &	42
numerus colligendus sit priùs 42. & 37.	37
& 81. & 9. qui sunt notati litera A, & au-	81
feratur idem numerus ab vtrisque, V. g.	9
81. *Dico quod residua erunt æqualia*.	
Probatur. Nam si ab æqualibus æqua-	169 B

lia demas; quæ remanent sunt æqualia, sed numerus colligendus A, & collectus B sunt æquales: Ergo ablato eodem numero 81. ab vtrisque erunt adhuc residua æqualia.

PROB. I. PROPOS. XXVII.

Collectionem; an ſit benè facta, examinare.

AVferatur à numero collecto, & colligendo 9. quantum fieri poteſt, numeris, vt ſimplicibus ad ſectandam facilitatem aſſumptis, ex coroll. propoſ. 4. Nam, ſi idem numerus remanet, facta, tum à collecto, tum à colligendo, ablatione, bona erit collectio.

A
39
51
15
19
124 B

7 7

Sit numerus colligendus A, & à primo 39. auferatur 9 quoties poteſt, remanent 3 qui cum 5. faciunt 8. & cum 1. faciunt 9. qui abjciatur; & deinde aſſumatur 1. cum 5. faciunt 6 & cum 1. faciunt 7. & cum 9. eueniunt 16. à quibus abijcio 9. reſiduum eſt 7. quem ſcribo ſeorſum.

Deinde ad ſummam B accedo nimirum 124. & addo 1. ad 2 faciunt 3. & 3 ad 4. & faciunt 7. æqualis nimirum numerus alteri 7. iam ſcripto. Vnde benè erit facta diuiſio.

Dices aufertur maior numerus à numero colligendo ab A, quàm à collecto B: nam ex numero A multoties aufertur 9. at à collecto nulla vice: quare non poſſunt reſidua remanere æqualia ex propoſ. 26.

Reſpondetur poſſe occurrere quandoque errorem illo ſolo caſu, ſi error in colligendo commiſſus ſit intermiſſo, aut ſuperaddito 9. vt patet in numero C, & eius ſumma G, quæ falſa eſt; eò quia 9. ſit intermiſſus, & tamen idem numerus 7. remanet.

49 C
51
15
19
9
G 124

7 7

Cæterum, cum hîc error rarò occurrat, hinc eſt; quòd regula ſit bona; quia licet 9. auferatur pluribus vicibus à numero colligendo A, quàm à collecto B, nihil tamen intereſt; cùm idem ſit auferre 9. à numero A, & non auferri à numero B, vt ſimplex, dum tamen auferri poſſit in ſua proportione acceptus, vt Corol. prop. 24. Et patet. Nam idem numerus remanet, ſi auferatur 9. ab 80. octies, ab 8. ſumpto, vt 8. nulla vice. Semper enim remanet 8. propter proprietatem numeri 9. quæ oſtenſa eſt Propoſ. 24.

PROB. II. PROPOS. XXVIII.

Subtractionem examinare: vtrum bene fuerit confecta.

AVferatur 9. Quantum fieri poteſt à ſubtracto, & reſiduo, & id quod remanet notetur, & ſimiliter à numero, à quo deducitur, ſubtrahatur 9 quantum fieri poteſt. Nam, ſi reſidua ſint æqualia, bona erit ſubtractio. Sit numerus à quo facienda eſt ſubtractio, numerus ſubductus B reſiduum verò ſit C. Accipio reſiduum C; & aufero 9 quoties fieri poteſt, dicendo 3. & 2. faciunt 5. & 3. faciunt 8. & 6. faciunt 14. à quibus ablato 9. remanet 5. & ſcribo ſeorſum ad latus crucis. Deinde aſſumo numerum B ſubductum, nempe 4. cum 3. faciunt 7. & 9. abijcio ſcribo 7. ad alterũ latus crucis. Addo hoc 7. cum numero priori ſeorſim ſcripto 5. & faciunt 12. à quibus deductus 9. reſtant 3. & ſcribo ſuper crucem. Deinde accedo ad numerum A, & 3. addo numero 6. & faciunt 9. quem abijcio, & 5 & 7 faciunt 12. à quo abijcio, 9. & remanent 3. vt priùs. Ideoque ſubtractio optima eſt.

3675 A
439 B
3236 C

3
5 7
3

Ratio eſt. Quia numerus ſubtractus cum reſiduo æquatur numero, à quo fit ſubtractio. Vnde 9. ab vtriſque æqualiter deductus debet relinquere idem reſiduum.

PROB. III. PROPOS. XXIX.

Multiplicationem explorare: an bene ſibi conſtet.

AVferatur 9. tum à numero multiplicante, tum à numero multiplicato, quoties fieri poteſt, & à reſiduis quoq; inuicem multiplicatis 9. auferatur quoties fieri poteſt, & reſiduum notetur. Iterumque à numero genito auferatur 9. quantùm fieri poteſt. Si reſiduum ſit æquale reſiduo præcedenti iam notato, multiplicatio benè ſe habebit, & abſoluta conſiſtet: Pro exemplo ſit numerus 3792. multiplicandus per 97. Aufero 9. aſſumendo priùs 3. & deinde 7. & faciunt 10. abiecto 9. remanet 1. abijcioque ſequentem 9. & 1. cum 2. faciunt 3. quem ſcribo.

Abijcioque à multiplicatore 97. ſemel 9. & reſiduum eſt 7. multiplico quoque 7. per 3. & faciunt 21. abiectis 9. relinquitur rurſus 3. quos ſcribo, vt vides 7. ad partem crucis, 3. ad alteram partem, & vltimum 3. ſuper crucem.

3792
97
26544
34128
367824

Deinde accedo ad numerum genitum; & dico 3. & 6. faciunt 9. quem abijcio; hinc 7. & 8. faciunt 15. & abiecto 9. ſunt 6. & cum 2. ſunt 8. & cum 4. faciunt 12. à quo abiecto 9. remanet 3 numerum infra crucem collocãdum quia ergo 3. infra crucẽ cũ 3. ſupra crucem æquales numeri ſunt; ideo multiplicatio bene ſe habet.

3
7 3
3

Probatur. Nam ſi aſſumpſimus numerum multiplicatum, & multiplicantem, vt numeri ſimplices: Numeri verò ſimplices inuicem multiplicati producunt ex coroll. propoſ. 25. numerum, à quo ablatus 9. quoties poteſt demi relinquit numerum æqualem reſiduo; quod à genito reſtat, ſi ab eo ſimiliter 9. auferatur.

Quòd, ſi occurreret ipſum 9 relinqui; abijciatur tamen, & ad latera crucis, & ſuper crucem 0. ponatur. Nam, & 0. infra crucem collocabitur genito, ablato 9. nihil relinquente. Sic 54. & 39 inuicem multiplicatis faciunt 2106. Ablato itaque à 54. 9. remanet 0. & ablato à 39. idem 9. remanet 3. qui multiplicatus cum 0. producit 0. ziffrã ſupra crucem ponendam. Quare, & genitus 2106. ablato 9. relinquit 0.

0
0 3
0

PROBL. IV. PROP. XXX.

Diuiſionem examinare.

EOdẽ modo fit, ac in multiplicatione, & eadẽ ratio valet. Sit V. g. 7945. diuiſus per 35. & quotiens ſit 227. Auferatur à 35. numerus 9. quoties fieri poteſt, & ſunt 8. & à 227. remanent 2. multiplicentur inuicem fiunt 16. à quibus ablatus 9. relinquit 7. Deinde à numero diuidendo 7945. auferatur 9. vt ſupra dictum eſt, & relinquet 7. Quare bene ſtabit diuiſio: At ſi adſint minutiæ V. g. ſi diuidendus numerus eſſet 7950. & diuiſor 35. & quotiens 227 $\frac{5}{35}$; tunc numerator 5. cum quotiente ſumendus, & ab eo 9. quoties fieri poteſt demendus, & relinquetur 7. qui multiplicatus cum 8. reſiduo diuidentis, dat 56. à quo ſubductus 9. quantùm fieri poteſt, relinquit 2. & à numero diuidendo 7950. reiectis 9. prout fieri poteſt, relinquitur 2. Vnde facta diuiſio benè ſe geret.

7
8 2
7

2
8 7
2

PROB. V. PROPOS. XXXI.

Cuiuſcumque regulæ operationem per aliam examinare.

SVmma numerorum ſubtractione collectorum probatur. Sic ſumma 117. examinatur ſubtrahendo 39. & 42. & 117. Nam ſi remanet 36. erit bene facta collectio. Et è contra ſubtractio numerorum collectione examinatur; ſic, ſi reſiduum 17. à ſubtractione numeri 32. à 24. remanens colligatur cum numero 32. qui à maiori ſubducitur, & efficiat 49. vt priùs, ſubtractio recta erit.

36
42
39
117

49
32
17

Ratio patet. Quia ſi auferatur id, quod additum eſt, quod eſt ſubducere relinquitur neceſſariò id, quod erat, & ſi addatur id, quod ablatum eſt, idem, quod erat, integratur. Quare ſi benè erit facta collectio, ſubtractione idem reſtituetur, quod priùs, & ſi bona eſt ſubductio, additione, quod priùs erat, integrabitur.

Multiplicationem numerorum ex diuiſione experimur. Nam ſi multiplicationis ſumma per numerum, vel multiplicatum, vel multiplicantem diuidatur, neceſſe eſt alterum ex ipſis prouenire, quòd, ſi non proueniat, ſignum eſt collectionem, vel multiplicationem non fuiſſe exactam.

Partitio quoque examinatur multiplicatione: Nam ſi numerus quotiens cum numero diuidente multiplicetur, additis, ſi fortè fuerint, reliquijs, debet ſumma multiplicationis æquare numerum diuiſum; quòd ſi non æquet, ſignum eſt diuiſionem non eſſe perfectam, ſed in aliquo deficere.

Ratio eſt, quia diuidere eſt numerum in tot partes ſecare, quot ſunt in diuidente vnitates, & multiplicare eſt numerum integrare ex alio numero, tanquam pars aſſumpto toties, quot ſunt in multiplicante vnitates, ex def. 15. & 16. Vnde dato multiplicante, qui quotiens erat, & multiplicato, qui erat diuidens, neceſſe eſt, vt idem numerus rurſus integretur. Sicut dato eodem genito, & integrato, & eodem diuidente neceſſe eſt, vt idem quotiens numerus reſtituatur, qui multiplicatus fuerat.

TRACTATVS IX.

IN V. LIBRVM EVCLIDIS

PARS PRIMA.

De Proportionum Notione.

CVM definitiones, quas ad initium Quinti libri tradit Euclides multa luce indigeant, vt percipiantur, visum est earum explicationem profusiùs prosequi, & ne dum eas, vt Mathematicorum mos est, tanquam nomina explanare; sed proportionum, quam explicant, essentiam probare, diuisiones, modumq; eas cognoscendi, & in eis argumentandi exponere: vt hac cognitione præuia, quæ deinde 5. libro ostenduntur genericę proportionum habitudines faciliori captu comprehendantur.

EXPENSIO I

Quid sit Ratio.

RAtio est quædam quantitatiua relatio. Relatio secundùm nostra principia philosophica expens. 4. de relatioe concl. 5. & expens. 7. concl. 3. est quædam dependentia obiectorum in eis cognoscendis, quæ fundatur in aliqua positiua, seu dependentia, seu saltem applicatione vnius rei ad aliam. Ideoque Ratio erit quædam relatio quantitatis orta ex applicatione reali, aut possibili ad minùs quantitatis ad aliam quantitatem; vt inuicem commensurentur, vel saltem inuicem se contineant, aut se superent, & hæc possibilis quantitatum commensuratio, vel actualis est illa, ob quam intellectus considerat alteram quantitatem dependenter ab altera, & inter eas respectum, & relationem recognoscit. Cum ergo Ratio in relatione partis, & totius consistat, & commensurationis, operæ prætium est priùs partis, & totius definitionem declarare.

DEFINITIO I.

P*Ars est magnitudo minor alia magnitudine, quæ multiplicata eam adeo mensurat, vt nihil mensuratæ maioris magnitudinis supersit.*

Duplex ex pars alia *Aliquota*, alia *Aliquanta*. Aliquota hic definitur, quæ talis est, vt tot vicibus capiat in maiori, sint illæ vices, quot, quot sint, vt nihil supersit tale, quod illi adamussim nō commensuretur: Sed totum multiplicatis illis vicibus penitùs correspondeat. Sic vncia, seu digitus metitur lineam 4. digitorum quater acceptus, & lineā sexdecem digitorum sex decies acceptus: sed si aliquid supersit in toto, quod mensuranti quantitati non adæquetur, sed eius alicui parti, tunc dicitur pars aliquanta, de qua definitio non est: Sic digitus, lineæ 4. digitorum, & $\frac{1}{4}$ dicetur pars aliquanta; quia id quod superest quatuor digitorum, & vnica quarta pars ipsius digiti mensurantis.

DEFINITIO II.

M*Vltiplex est autem maior minoris, cùm minor metitur maiorem.*

Esse partis est relatio minoris quantitatis ad maiorem; Multiplicitas verò est relatio maioris quantitatis ad minorem; Intelligitur verò multiplicitas non respectu partis aliquantæ, sed aliquotæ ita, vt vices quibus mensura adhibetur æquent pluries replicatæ tandem maiorem, & sibi multiplicem.

DEFINITIO III.

Æ*Quèmultiplices illæ magnitudines dicuntur cum æqualibus numero vicibus à minori quātitate mensurantur.*

Duæ lineæ quatuor palmorum dicuntur æque multiplices vnius palmi; quia palmus quatuor vicibus adhibitus successiuè, & hanc, & alias mensurat.

DEFINITIO III.

R*Atio est duarum magnitudinum eiusdem generis secundùm quantitatem habitudo.*

Quùm duæ quantitates; sint illæ, seu lineæ, seu superficies, seu solida inuicem comparantur, & sunt eiusdem generis secundùm quòd vna maior est, quā alia, seu minor, seu æqualis; tunc illæ magnitudines inter se Rationem consequi dicuntur, & hæc collatio, seu comparatio dicitur Ratio, ab aliquibus etiam Proportio; Quare patet; cur debeant esse eiusdem generis: quia scilicet, vt inquit Arist. 10. Methaph. tex. 4. *mensura eiusdem generis est, magnitudinum* namque *magnitudo, & secundum vnumquodque longitudinis longitudo, latitudinis latitudo, vocum vox, grauitatis grauitas; &c.*

&c. Cum ergo magnitudines inuicem referātur prout vna excedit, vel æquat, vel ab alia deficit, hinc est, quod debeant eiusdem generis esse: alioquin inter ea, quæ diuersi generis sunt, nec maius quid, nec minus, nec æquale est; siquidem numerus non potest dici æqualis alicui superficiei, aut maior, aut minor: cùm in eodem genere non reperiatur, & ratio fundamentalis est, quia inter ea, quæ diuersi generis sunt non potest fieri realis applicatio; vnde habitudo, quæ in reali, seu possibili applicatione fundatur, inter ea reperiri nō potest. Maximè quòd mēsura debet nos inducere in cognitionem rei mensuratæ; at quomodo id eueniet, si quod mensuratur alterius generis est; nec suæ mensuræ conforme reperitur.

Dicitur quoque secundum quantitatem: quia comparatio penes qualitatem Ratio non vocatur; nec lineæ referri Ratione, quòd ambæ, V. g. sint albæ, aut nigræ. Sic dicitur *habitudo* in genere, nec explicatur, in quo consistat ista relatio; an in ratione mensurantis, & mensurati: quia licet hanc proportionem dicant inuicem aliquæ quantitates, quæ dicuntur rationales: non tamen omnes id habitudinis assequuntur, cùm quædam dictæ irrationales nullam commensurationem adipiscantur, sed earum proportio in eo consistat: quòd ampliùs non sint respectu alterius, quam quod sunt, & nihil vltra quantitatis obtineant ad alteram collatæ; quàm quòd consequuntur.

Verum fundamentum huius relationis dicitur à Mathematicis antecedens terminus verò consequens. Sic linea 3. palmorum collata ad lineam 6. palmorum dicetur antecedens; & linea 6. palmorum subsequens, & è contrariò quoque linea 6. palmorum relata ad lineā trium palmorum dicetur antecedens, sicut illa trium palmorum consequens.

DEFINITIO IV.

P*Roportio est rationum similitudo.*

Proportio dicitur etiam analogya; ab Euclide autem vocantur quoque proportio, & est in ratione continentis, vel contenti, vel maioris, & minoris, aut æqualis similitudo. Ita quod fundamenta huius relationis non sint quantitates ipsæ; sed quantitatum habitudines.

Cum ergo reperiuntur duæ magnitudines, vt 2. ad 6. quæ se respiciant in ratione maioris, & minoris, vel æqualis, vt aliæ, V. g. vt 4. ad 12. tunc duæ illæ 2. & 6. dicentur consequi eandem analogyam, & proportionem, quam 4. & 12. Dixi autem in ratione maioris, & minoris, vel æqualis, non in ratione mensurantis, & mensurati: quia sunt aliquæ quantitates, vt innui supra, & sequenti expens. pleniùs dicam, quæ irrationales nulla cōmensuratione inuicem referantur: Quare similitudo earum ita erit, vt V. g. quantitas A collata ad quantitatem B sit tanta, & non amplius, vt quantitas C respectu quantitatis D, ita quòd licet vices, quibus A mensurat B, aut vices, quibus C, mensurat D, non possint exprimi, adhuc tamen similes sint: sed ad pleniorem huius rei declarationem videamus. Vnde dignoscatur in quantitatibus Analogya.

EXPENSIO II.

In quantitatibus quænam sint proportionis, notiones.

SCiendum est quantitates respectu alterius, alias irrationales esse, alias rationales. Rationales quantitates sunt duę, vel plures, in quarum vna reperitur aliqua pars æqualis alteri parti alterius, quę mensuret ambas seu per æqualem replicationē illius partis mensurantis, seu per inæqualē. V. g. rationales dicentur lineæ duæ, quarū vna sit 7. palmorū altera 20. palmorū: quia palmus in vtrisq; est pars ęqualis, per quam ita metiri potest linea 7. palmorū, vt nihil remaneat ex ea, cum tota longitudo 7. palmis æqualis sit, sicut, & linea 20. palmorum vigesies multiplicatos palmos cōplectitur, vt nihil remaneat. Irrationales verò sunt tales quædam, lineæ, vel quantitates, in quibus pars nulla reperitur, quæ sit æqualis parti alterius quantitatis; per quam ita metiatur, tum vna, tum alia; vt nihil remaneat. V. g. diameter quadrati, & latus sunt lineæ incommensurabiles; Quia nec palmus, nec semipalmus, nec quarta pars palmi, nec aliqua alia mensura; quæ ex æquo mensuret vnam V. g. latus, vt nihil ex eo supersit, mensurabit, & alteram: quia semper, aut aliquid superabit, aut aliquid deficiet, & (quia faciliora sunt antè proponenda) ponemus primò definitionem habitudinis rationalis vnius quantitatis ad aliam.

DEFINITIO V.

R*Ationem habere dicuntur rationales magnitudines, cùm vna alterius partes aliquotas continet.*

Partes aliquotas appellamus eas, quæ multiplicatæ totam quantitatem æquant, vt diximus.

Cùm ergo aliqua quantitas continet partes alterius, illa respectu alterius dicitur habere rationem, & habitudinem. Diximus verò partes, non assignando quot sit; quia siue partes, quas continet, prima quantitas A, mensurent quantitatem alteram B per eundem numerum, seu eam superent, seu minus sint; nihil interest; & ita linea 7. palmorum habet Rationem lineæ 6. palmorum, & lineæ 7. palmorum, & lineæ 20. palmorum, seu 30. licet tamen non eiusdem speciei.

DEFINITIO VI.

I*Rrationales quantitates inuicem habitudine referuntur, & relatione, cùm multiplicatæ se inuicem continere possunt.*

Ratio huius definitionis est, quia per continentiā partium nequaquam poterat definiri; cùm nulla pars in vna sicut nec in altera detur; quę pro communi mensura deseruire possit. Vnde præcedens definitio non poterat deseruire: licet enim, & hæc definitio rationalibus quantitatibus quoque conueniat; non tamen illas per hanc definitionem, quæ parum obscurior est, definire cōueniens visum est ob facilitatem sectandam; licet Euclides id fecerit.

Quod autem quantitates, quorum vna multiplicata superare potest aliam V. g. duo latera diametrum vnum, sicut diametri duo latera duo, & sic continuè, habitudinem dicant, patet. Nam secundum magis, & minus se inuicem excedunt,

& ideo habitudinem talem habent; vt ſaltem quoad multiplicationẽ comparabiles ſint: Nam multiplicatæ ſaltem poterunt eſſe fundamentum proportionis, & ita ſpeculationi Mathematicæ ſubijci. V. g. circumferentia ad diametrum proportionem habet, ſed irrationalem; ideoque poteſt eſſe fundamentum proportionis. Nam poterit dari aliqua alia linea recta irrationalis ad quam ſe habeat diameter, vt ad circumferentiam. Si verò multiplicata non ſuperet aliqua quantitas, aut non ſuperetur, habitudo inter illas non eſt. Sic infinita quantitas non habet relationem aliquam quantitatiuam ad alteram quantitatem infinitam; quia infinitum, quantumuis multiplicatum, infinitum non ſuperat. Quòd autem hic mutuus exceſſus proportionalium quantitatum ſit fundamentum ſimilitudinis alicuius patet. Quia quantitates duæ A, V. g. ad B in omni multiplicatione quantitatis A, quæ adhibeatur poſſunt inuicem ſe habere, ac duæ alię C, & D, ſi & ipſæ tot vicibus multiplicentur nimirum fundamenta, vel termini ęquo numero vicium multiplicata aſſumantur: nam poteſt eſſe, quòd ſi fundamentũ A multiplicatũ 20. vicibus minus inueniatur quam B terminus ſuus; quòd ſic quoque fundamentũ C 20. vicibus multiplicatum minus inueniatur, quàm ſuus terminus D: Vel ſi multiplicetur fundamentum A 21. vicibus, & maius inueniatur, quã ſuus terminus B: Quod ſic quoque fundamentum C 21. vicibus aſſumptum ſuo termino D maius inueniatur.

At ſi è contra termini multiplicentur duabus vicibus, & fiat maior B fundamento A, & deinde terminus alter D multiplicetur duabus vicibus, quòd ſimiliter euadat maior quam C, & ſic ſemper in omni multiplicatione æquis vicibus adhibita, aut fundamenti, aut termini ſuccedat. Omnino in hoc A, & B quantitates ſe reſpicient ſimiliter, ac C, & D, & fundamentũ primum habitudinis ad ſuum terminum habebit ſimilitudinis relationem eandem, quam fundamentum ſecundum ad ſuum terminum; quia ſimili

A * B
C D

modo in omni multiplicatione, quæ poſſit fieri fundamentum primum excedit ſuum terminum, ſicut aliud ſecundum fundamentum excedit quoque ſuum: Vel ſi ęquatur primum, æquatur quoque ſecundum, vel ſi primum fundamentum termino ſuo ſit minùs, hoc quoque ſecundum fundamentum relationis ſuo termino eſt minùs. Ecce ergo in iſtis fundamentis, quæ multiplicata ſuperant ſuos terminos, vel ſuperantur ab ipſis, aliqua in hac mutuâ termini, fundamentiq; ſuperatione, ſimilitudo: cùm, & aliud fundamentum æquali multiplicatione multiplicatum ſuperet quoque ſuum terminum.

At ſi daretur aliqua quantitas, V. g. angulus contactus tanquam fundamentum, qui ad ſuum terminum angulum rectilineũ comparatus ſemper minor inueniretur, hæc habitudo alteri habitudini, V. g. alterius anguli contactus cum altero angulo rectilineo comparari nequit. Nam angulus primus contactus nunquam poteſt, aut æquare, aut ſuperare ſuum terminum rectilineum; ſicuti nec alter angulus contactus poteſt vnquam ſuperare ſuum; & ideo nullam aliam habent fundamenta, cum ſuis terminis ſimilitudinem, niſi quòd minus ſunt; at ſi ſint minus eodem modo, & ſimili ratione, ſeu habitudine diſſimili dignoſci nequit: cùm nec ſint quoad ſuas partes comparabiles, eò quòd ſint irrationales; neque earum ſimilitudo proportionum quò ad omnem, multiplicationem, & genericam ſimilitudinem probari poſſit.

Patet itaque, cur habitudo duarum proportionum irrationalium definiatur per earum mutuã ſuperationem; ſi multiplicentur: Quia hoc tantùm præbet fundamentum ſimilitudinis ipſarum proportionum. Et hæc ſimilitudo proportionum eſt illa, quæ ſpeculationi, & argumentationi Mathematicæ deſeruit.

EXPENSIO III.

Quænam quantitates proportionem conſequantur.

OPeræ pretium eſt cognoſcere, quænam ſint illæ quantitates, quæ proportione, & ideo analogya gaudeant; ne aliquando ſumamus eas quantitates, quæ nulla proportione aſſimilari poſſunt, tanquam in ea ſimiles; & ſic ab euidentia in manifeſtos errores incidamus.

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Infiniti ad infinitum nulla eſt proportio.

PRobatur, quoniam infinitum multiplicatum non poteſt ſuperare aliud infinitum; neque illud continere. Siquidem infinitum, vt voluere antiquiores eſt illud, quod in ſe continet, quidquid eſt conceptibile illius; ſi vero multipiicaretur, iam eſſet aliud infinitum, cum quo multiplicitatem conſtitueret.

Deinde iuxta Ariſt. eſt illud infinitum, in quo eſt ſemper aliquod vltra accipere; ſi autem infinitum non adæquaret infinitum multiplicatum, in eo iam non eſſet vltra quid acciperetur; ſiquidẽ acceptũ eſſet quid quid eius eſſet dum aliũ adęquare nequit, ergo infinitum non poteſt habere aliud iufinitum maius ſe, & ideo multiplicatum erit.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

Finitum nullam dicit rationem cum infinito.

PRobatur, quia finitum, ſi maneat finitum nũquam aut ęquabit, aut ſuperabit infinitum; ſed ille quantitates inuicem dicunt proportionẽ; quæ ſe mutuo poſſunt ſuperare, ergo finitum infinito nulla proportione conformatur.

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Puncta, quæ ſunt in aliqua quantitate nullam dicunt proportionem Mathematicam, & cognoſcibilem, cum punctis, quæ ſunt in alia.

PRob. Ea enim, vel finita ſunt, vel infinita. Si infinita ex præcedenti nullam dicunt inuicem rationem, ſi finita; vel ſunt indiſtinguibilia, & indetermina, vel non. Si indetermina iam

iam nequeunt ſe inuicem ſuperare: Nam quòd indeterminatum eſt multiplicari nequit; cùm eius neque hæc, neque illa pars adſit, nec ſi multiplicetur, quantitas illius multiplicationis agnoſcitur.

Si determinata ſunt, vel ſunt æqualia quantitate, & hoc eſt falſum: Nam omnes lineæ eſſent cõmenſurabiles, vel quantitate inæqualia: At earum quantitas non agnoſcitur, nec determinata eſt. Nam quantitas puncti ſaltem ſub indiuiſibilitate ſenſibili latet: Ergo multiplicata, incertum erit, an ſe ſuperent, aut æquent, ſiue non.

2. Probatur. Nam demoſtrationi Mathematicę deſeruire non poſſunt; cùm ad hoc lis inter Phyloſophos pendeat; an ſint puncta, vel partes; an ſint finita, vel infinita; an diſtincta, ſeu indiſtincta; an æqualia, ſeu inæqualia. Quare nec vlla proportio, ſi qua eſſet, certa reperiretur, & indubitabilis, quæ fundamentum demoſtrationi Geometricæ firmum præberet.

CONCLVSIO IV. PROP. IV.

Inter puncta, & lineas. Inter lineas, & ſuperficies. Inter ſuperficies, & corpora nulla proportio intercedit.

PRobatur. Nam nec punctum quantumuis multiplicatum lineam adæquare poteſt, nec linea ſuperficiem; nec ſuperficies corpus, cùm vel infinitæ ſint, vel indeterminatæ, nulloque certo numero comprehendantur; Quare ęquè multiplicari non poſſunt, cum earum numerus non agnoſcatur.

COROLLARIVM

HInc habes, quòd ea Geometria; quæ in indiuiſibilium proportionibus fundatur omnino ſuſpecta ſit; licet enim concluſiones, quas deducit verè reperiantur: non inde tamen hinc illa certitudinem acquirit, vel in principijs, vel in illationibus; cum à præmiſſis falſis verùm ſequi poſſit, vt Logici fatentur, vt patet ex hac omnis homo eſt bellua; omnis bellua eſt viuens, ergo omnis homo eſt viuens.

EXPENSIO IV.

De diuiſione Rationum.

RAtio apud Mathematicos vocatur etiam proportio: quia ſumunt fundamentum proportionis pro ipſa proportione. Vnde diuiſiones, quæ ſequuntur Rationum, vocantur etiam proportionum.

CONCLVSIO I. PROPOS. V.

Proportio rationalis diuiditur in duas, inæqualitatis, & æqualitatis.

PRobatur: Quia aliqua quantitas ita continet aliam, vt ab ea contineatur, vt duæ lineę 7. palmorum ſe inuicem commenſurant. Alia verò continet magis aliam; quàm quòd contineatur ab ea: vt linea 7. palmorum continet lineam 3. palmorum, & ampliùs: at linea trium palmorum non continet lineam ſeptem palmorum: niſi ſecundũ quid, & quoad aliquos palmos.

CONCLVSIO II. PROP. VI.

Ratio inæqualitatis quæcumque etiam irrationalis; quæ ſemper inæqualitatis eſt, diuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis.

PRob. Nam quantitatũ inæqualium, vel maior confertur ad minorẽ, & hæc maioris inæqualitatis eſt, vel minor ad maiorem, & hæc eſt inæqualitatis minoris. Neque tibi videatur maior ad minorem eâdem relatione referri, quâ minor ad maiorem; eſt enim diuerſa relatio, & proportio. Quoniam quantitas maior V. g. quinque palmorum linea ad minorem trium palmorum habet maiorem proportionem, quàm minor ad ſe, cũ eã contineat ſemel, & inſuper ipſius duas tertias partes: & minor ad maiorẽ collata minorem proportionem habet, cum minus ipſius contineat; ſiquidem nec totam quidem continet; ſed tantum tres partes ex quinque, quibus conſtat.

Cum ergo maioris ad minorem maior proportio ſit, quam minoris ad maiorem patet eſſe diuerſas, & ideo diſtingui.

CONCLVSIO III. PROP. VII.

Ratio rationalis maioris inæqualitatis ſecatur in ſex genera. Si proportionem Æqualitatis multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem *in* multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem. *At minoris inæqualitatis in eaſdem ſpecies quoque ſe recipit verùm ad diſtinguendum, & indicandum; quòd ſit minoris inæqualitatis additur particula* ſub *: ita dicitur ſubmultiplex, ſubparticularis, ſub partiens, &c.*

PRobatur, & ſimul ſingulæ proportiones aſſignatæ explicantur.

Nam maior continet minorem, aut ſemel, aut pluries. Si maior continet minorem pluribus vicibus ex æquo, vt nihil ſuperſit, ita vt minor maioris pars aliquota ſit, vt palmus eſt pars decima lineæ, quæ ſit decem palmorum; dicitur multiplex. Multiplicaturque ſecundùm vices, quas continet minorem V. g. dicitur dupla, tripla, quadrupla, quæ continet minorem bis, ter, quater. At ſi minor conferatur ad maiorem dicitur ſubdupla, ſubtripla, ſubquatrupla; quòd minor contineatur, à maiore bis, ter, quater, &c. At ſi continet pluribus vicibus, & aliquid inſuper remaneat; tunc, aut id, quod remanet, facit vnã partẽ aliquotã minoris, aut nõ, ſed plures partes, ſi facit vnam partem aliquotam minoris; tunc dicitur multiplex ſuper particularis; Sic 9. ad 4.

ad 4. habet proportionem multiplicem ſuper particularem; quia bis 4. continet, & inſuper quartam ipſius partem: ita 26. ad 6. habet rationem multiplicem ſuper particularem; cùm quater ſex contineat, & inſuper 2. nimirum tertiam eius partem.

At ſi ne dum pluries contineat; ſed inſuper plures partes eius, quæ non conficiant vnam partem aliquotam. Tunc eſt multiplex ſuper partiens V. g. 27. ad 5. comprehendit enim quinquies 5. & inſuper duas eius partes, quæ aliquotam partem non conficiunt, cum non menſurent numerũ 5 ex æquali; ſi autẽ conficerent vnam partem aliquotã, iam illa eſſa Ratio multiplex ſuperparticularis propter vnicã partem aliquotam, quę ſupereſſet, vt eſt 26. ad 6. nam 2. qui ſuperſunt tertiam partem numeri 6. conficiunt.

Faceſſunt autem hæ duæ Rationes in diuerſas ſpecies, quæ denominantur iuxta partes, quas cõtinent E. g. ſi multiplex ſupparticularis talis ſit, vt maior bis contineat minorẽ, & remaneat pars dimidia dicitur dupla ſeſquialtera, ſi bis, & tertiam partem minoris, dicitur dupla ſeſquitertia; ſi ter, & inſuper quartam partem, dicitur tripla ſeſquiquarta, &c.

Ceterum ſi Ratio eſſet minoris inæqualitatis tunc adderetur particula *ſub*; & diceretur ſubdupla ſeſquialtera ſubtripla ſeſquiquarta.

At ſi de multiplici ſuperpartiente loquamur, hęc quoq; denominatur iuxta vices, quas maior cõtinet minorem, & iuxta id, quod inſuper continet V. g. Si quinquies minorem contineat, & inſuper 3. ex quatuor partibus, quibus minor conſtat, vt eſt 23. ad 4. dicitur Ratio quintupla ſuper tripartiens quartas, ſic ſi eſſet 22. ad 5. diceretur quadrupla ſuperbipartiens quintas, &c. Et hoc quoad multiplicem proportionem maioris inæqualitatis. Verùm ſi ſit minoris inæqualitatis idem dicendum prorſus; niſi quòd particula *ſub* eſt addenda pro *ſuper* V. g. quadrupla ſubbipartiens quintas, Tripla ſub tripartiens octauas, &c.

At ſi maior contineat minorem ſemel tantùm; tunc eſt equalitatis. Verùm ſi contineat ſemel, & inſuper vnam eius partem aliquotam; tunc dicitur ſuperparticularis, V. g. 8. ad 9. habet Rationem ſuperparticularem; quia 9. continet 8. ſemel, & inſuper octauam eius partem; ſic 10. ad 8. Rationem ſuperparticularem tenet; quia 10. ſemel continet numerum 8. & inſuper eius quartam partem, quæ eſt 2.

Quæ in ſpecies multas ſecatur iuxta diuerſas partes, quas inſuper maior continet minoris quãtitatis: Nam ſi minorem quantitatẽ contineat ſemel, & eius dimidiam dicitur ſuperparticularis ſeſquialtera, ſi tertiam partem, dicitur ſeſquitertia, &c.

At ſi ſemel contineat, & inſuper aliquas partes amplectatur vnam aliquotam non integrantes, vt 9. continet 7. ſemel, & inſuper duas partes, quæ 7. non diuidunt ex æquo, nec ſunt eius partes aliquotę; tunc eſt Ratio ſuperparticularis partiẽs.

Quæ, & habet diuerſas ſpecies iuxta partes, quas continet maior minoris vltra continentiam totalem ipſius maioris; Sic ſi contineat maior minorem ſemel, & 3. partes, ex 10. vt ſe habet 13. ad 10. dicitur Ratio ſuperparticularis tripartiens decimas, & ita de alijs. Et hę ſunt Rationes maioris inęqualitatis: at minoris inęqualitatis sũt ipſæ eędem: niſi quòd pro particula *ſuper* additur particula *ſub*. Sic Ratio 2. ad 3. erit ſubparticularis ſeſquialtera, ſic 8. ad 10. erit proportio ſubparticularis ſeſquiquarta. Sic 5. ad 7. erit Ratio ſubparticularis bipartiens quintas, &c.

PROB. I. PROPOS. VIII.

Datis duobus numeris reperire, quam Rationem ex aſſignatis dicant.

Dentur primo 5. & 20. de quibus volumus agnoſcere, in quâ Ratione inuicem ſint; diuidatur maior per minorem, & quotiens erit 4. quia ergo eſt numerus plurium vnitatum, & nihil remanet. Dico quod eſt Ratio multiplex, & dicitur quadrupla, quia 5. numeri 20. eſt quarta pars aliquota: Igitur 5. ad 20. erit Ratio multiplex ſubquadrupla, & 20. ad 5. erit Ratio multiplex quadrupla.

Detur ſecundo 15. & 35. Diuido rurſus maiorem per minorem, & quotiens eſt 2. remanentq; 5. diuido rurſus per hoc reſiduum numerum minorem, & quotiens eſt 3. Quia itaque primus numerus quotiens eſt 2. dico eſſe rationem multiplicem duplam; quia verò ſecundus eſt 3. pars aliquota numeri 15. dico eſſe duplam ſeſquitertiam.

Verum ſi aliquid adhuc remaneret V. g. ſi eſſet datus nnmerus 16. & 35. tunc primus quotiens eſſet 2. & ideo Ratio eſſet dupla, & reſiduum eſſent 3. per quod diuiſus numerus minor 16. aliquid remanet nempe 1. ideo dicitur Ratio tertij generis multiplex, & ſuperpartiens, nec ſecundus quotiens quæritur, cùm reſiduum numeri minoris pars aliquota non ſit, ſed vterque numerus, minor, & reſiduum exprimitur, & dicitur *dupla tripartiens* ob 3. reſiduum, *decimas ſextas* ob 16. numerum minorem. Vnde 35. ad 16. habet proportionem multiplicem duplam tripartientẽ decimas ſextas, ideſt complectentem bis minorem, & inſuper tres partes ex 16. quas numerus minor continet.

Eodem modo agendum eſt; ſi eſt Ratio ſuperparticularis; vel ſuperparticularis partiens. Sic ſi quæratur, quę ſit Ratio 10. ad 8. diuidendus eſt numerus maior 10. per 8. & quotiens eſt 1. remanentq; 2. quo diuiſus 8. dat per quotientem 4. dico itaque proportionem 10. ad 8. eſſe ſuperparticularem ſeſquiquartam; at ſi numerus minor non diuideretur ex æquo, & aliquid remaneret: tunc non eſſet ſuperparticularis; ſed ſuperpartiens, vt ſi quæratur Ratio 10. ad 7. Iam quia 7. diuidit 10. ſemel, & quotiens eſt 1. dicitur ſuperparticularis, at quia 3. remanent, per quem ex æquo non diuiditur 7. & aliquid remanet: Ideò eſt ſuperparticularis tripartiens ob 3. reſiduum, ſeptimas, quod inuit numerum minorem 7.

COROLLARIVM

Si quis volet exprimere Rationes per numeros. Si ſint maioris inæqualitatis multiplicis eam exprimet eo modo, quo ſolent fractiones exprimi, ponendo tamen ſi ſit maioris Inæqualitatis numerum maiorem ſuper lineam, & minorem infra eam, V. g. ſcribet proportionem duplam, ſic $\frac{2}{1}$ triplam $\frac{3}{1}$ quadruplam $\frac{4}{1}$

At, ſi ſit multiplex ſuper particularis, exprimet per integrum, & fractionem, vt quintupla ſeſquiquarta $5\frac{1}{4}$ vel reducendo totum numerum in fractionem $\frac{21}{4}$

Si autem ſit multiplex ſuperpartiens exprimetur nihilominùs per integrum, & fractionem eodem modo vt 2. & $\frac{3}{7}$ exprimit Rationem duplam tripartientem ſeptimas, vel etiam poterit exarari reducendo totum in fractionem ſcribendo $\frac{17}{7}$. Et ita agendum eſt in ſuperparticulari exprimendo eam per vnitatem tanquam per Integrum, & per fractiones, vt Ratio 8. ad 10. nempe ſuperparticularis ſeſquiquarta exprimitur, vel numero $1\frac{1}{4}$, vel per $\frac{10}{8}$ vel per $\frac{5}{4}$

Idem obſeruabitur in exprimendo ſuperparticulari multiplici, & efficietur $1\frac{3}{7}$ vel $\frac{10}{7}$ quæ eſt Ratio ſuperparticularis tripartiens ſeptimas.

At ſit exprimenda Ratio, quam habet numerus minor ad maiorem numerus minor ponetur ſuper lineolam, & maior infra.

Sic ſubmultipla erit $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$, &c. multipla ſubparticularis erit $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ Multipla ſubpartiens $\frac{7}{27}$ ſubparticularis $\frac{8}{10}$ ſubpartiens $\frac{7}{10}$

EXPENSIO V.

De rationum compoſitione.

Cvm proportiones, Rationumque ſimilitudines debeamus declarare pręmittenda eſt earum compoſitio; quæ eam immutat ſimiles proportiones, vel diſſimiles componendo.

Obſerua aliam eſſe proportionem duplam, triplam, &c. aliam duplicatam, triplicatam, aliam compoſitam.

Proportio tripla, quadrupla, &c. eſt, cùm quantitas maior continet maiorem ter, quater, quinquies, &c. vt 2. continetur à 4. vel 6. vel 10. At proportio duplicata, triplicata, quadruplicata eſt; cùm numerus, vel quantitas multiplicat ſe, & ſuum productum, & productum producti, & ſic ſucceſſiuè: Quoties enim interuenit hæc multiplicatio, tot vicibus dicitur multiplicata, ſic ſi ſemel fiat eſt ſimplex; ſi gemina vice, eſt duplicata; ſi ter, eſt triplicata; vt ſi 2. multiplicet ſe, & fiat 4. hæc eſt proportio ſimplex: at ſi iterum 2, multiplicet 4. & fiant 8. eſt duplicata, & ſi iterũ 2. multiplicet 8. & fiant 16. eſt triplicata, & 32. quadruplicata eſt proportio huius numeri ad 2. At ſi hæc multiplicatio non per eandem proportionem fiat dicitur compoſita, V. g. ſi 2. ad 6. dicat proportionem, & 6. ad 9. proportio 9. ad 2. dicitur compoſita ex proportione 2. ad 6. & 6. ad 9. in nulloque alio differt à duplicata; niſi quod illa ſemper eadem eſt, & continua hic verò proportio non continua: ſic 3. 9. 27. ſunt numeri, qui continua proportione progrediuntur; ideoq; 27. ad 3. dicitur habere proportionem duplicatam. Nimirum gemina vice repetitam; At 3. 6. 9. ſunt numeri, qui continua proportione non correſpondent; neque enim ſimilis Ratio eſt 3. ad 6. quam 6. ad 9. cùm prima ſit ſubdupla, nempe 1. ad 2. Secunda verò ſubparticularis ſeſquialtera nimirum 2. ad 3. & ideo 9. dicitur habere ad 3. proportionem compoſitam.

Itaque proportio tripla: quadrupla, &c. eſt propriè Ratio: at verò duplicata, triplicata; vel etiam compoſita eſt Proportio poſſibilis: nempe inter 2. V. g. & 16. poſſunt intercipi, & interſeri duo proportionales numeri dicentes inuicem ſimilem proportionem, & Analogiam ſilicet 4. & 8. inter 2. & 16. & erunt 2. 4. 8. 16. & triplex ſimilitudo intermediabit nimirum 2. ad 4. prima, 4. ad 8. ſecunda, 8. ad 16. tertia. Sic compoſita eſt proportio poſſibilis, quæ poteſt intercepi inter duos numeros; ſed diſſimilis, & diuerſa, ſi inter eos plures numeri interijciatur. Sic 2. ad 10. habet proportionẽ cõpoſitã: quia duo intermedij diuerſam proportionem dicent, vt 2. 4. 6. 10. Nam proportio 2. ad 4. eſt differens ab ea, quam habet 6. ad 10. cùm hæc ſit ſubparticularis quadripartiens ſextas, at illa ſubdupla.

Aduerte autem vnius quantitatis ad alteram non eſſe vnicam compoſitam proportionem; ſed multis poſſe eam reſpicere compoſitis proportionibus pro vt ſunt quantitates, quæ inter vnam, & alteram mediant, quæ ſunt infinitæ, ita 9. dicit proportionem compoſitam ad 3. eius; quã habet 6. ad 3. ſed etiam erit compoſita quam 4. ad 3. & quam 5. ad 3. Sic inter 100. & 5. multæ, multæque proportiones interponi poſſunt, ex quibus omnibus dicitur componi proportio 100. ad 5. vt 100. 20. 5. 100. 50. 5. 100. 30. 5. 100. 10. & 5. ſic tot erunt compoſitæ proportiones, quot numeri poſſunt interponi inter 100. & 5.

Vnde proportio compoſita eſt etiam ſimplex; prout eam animaduertes: Nam, ſi V. g. 10. compares ad 5. erit ſimplex; at reſpectu 5. & 7. erit compoſita ex proportione 5. ad 7. & 7. ad 10.

Ratio verò; cur inter vnam quantitatem, & aliã poſitâ quantitate intermediâ extrema ex illâ dicãtur componi eſt: quia cum V. g. 100. habeat in ſe eas partes, quas 50. poſſidet tot vicibus contentas prout continetur in 100. V. g. duabus vicibus neceſſe erit; quod, & obtineat omnes partes ſecundum quas numerus ipſe 50. continet 5. quę ſunt 10. ideoque 5. decies acceptus componit 50. & etiam in duplo maiore proportione ſumptus; nempe ſecundùm eam, quâ 100. reſpicit 50. componet numerum 100. Sic proportio 10. ad 5. componitur ex proportione alicuius numeri intermedij, vt 8. Nam 5. ad 8. eſt vt $1\frac{3}{5}$ vel $\frac{8}{5}$ nimirũ quãtitas 5. cum tribus vnitatibus, vel partibus accepta æquat 8. at 8. eſt ad 10. ut $\frac{4}{5}$ nempe; ſi ad 8. addatur quarta eius pars æquat 10. Ergo quantitas 5. aucta tribus partibus ipſius 5. nempe 3. & quarta parte ipſius 8. nempe 2. æquabit 10. Quare proportio 10. ad 5. conſtat ex proportione; ſeu partibus, quibus 8. continet 5. & his quibus ipſa quantitas 10. continet 8. comparata ad 5. & 8. ſecùs verò ſi ad vnum ſimplicem numerum.

Et hinc licet definitiones harum proportionum colligere.

DEFINITIO VII.

Proportio replicata eſt; cum trium magnitudinum, vel plurium, eadem eſt ratio primæ ad mediam, quæ mediæ ad tertiam, & tertiæ ad quartã prima enim dicitur duplicatã habere proportionem ad tertiam; triplicatam ad quartam, & ſic conſequtiuè donec termini extiterint.

DEFINITIO VIII.

Ratio compoſita eſt, cum rationum quantitates aliquam effecerint rationem inter ſe multiplicatæ.

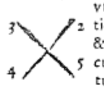
Rationum quantitates ſunt denominatores Rationum V. g. rationis A B $\frac{3}{6}$ denominator eſt 3. quia indicat ſuis vnitatibus quomodo 6. contineat 2. vel quot partes ipſius 6. in ſe contineat 2. nempe tertiam. Si ergo denominatores multiplicentur

centur inuicem alicuius proportionis nimirum 3. denominator proportionis A B $\frac{2}{6}$ & C D $\frac{3}{12}$ denominator, qui est 4. producunt 12. denominatorem, qui denominat proportionem compositam ex A B, & C D nimirum H F $\frac{6}{72}$ & exprimit quod 6. in 72. contineatur vicibus duodecim, quia ergo denominator proportionis $\frac{6}{72}$ est 12. Et 12. producitur ex multiplicatione denominatorum 3. & 4. qui denominant proportionem; 3. quidem rationis A 2. ad B 6. & 4. rationis C 3. ad D 12. ideo proportio H F $\frac{6}{72}$ producitur à proportionum compositione A B, & C D.

PROB. I. PROPOS. IX.

Datis duabus proportionibus quatuor numeris, expressis reperire tres terminos easdem proportiones habentes.

Sit data gemina proportio, nimirum 3. ad 4. & 2. ad 5. Oporteatq; reperire tres numeros eandem proportionem exprimentes. Disponãtur, vt vides.



Deinde fundamenta Rationum 3. & 2. inuicem multiplica & fient 6. Postea fundamẽtũ vnius, cum termino alterius multiplicetur, vt 3. cum 5. & fient 15. Tandem ipsi termini multiplicentur inuicem, & fient 20. Dico quod 6. 15. & 20. habent eandem proportionem, quam 3. ad 4. & 2. ad 5.

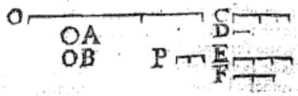
Probatur. Nam cùm numero 3. multiplicauerimus 2. & 5. producti 6. & 15. constabunt tot ternarijs, quot vnitates erant in 2. & 5. ex defin. 15. Tract. 8. Ideo dicent eandem proportionem ex defin. 5. huius, quam 2. & 5. Deinde quia 5. multiplicauit 3. & 4. productis 20. & 15. constabit tot quinarijs, quot vnitates erant in 3. & 4. ex cit. defin. Ideoq ex defin. 5. huius dicent 15. & 20. eandem proportionem, quam 3. & 4. quòd tot quinarij sint in vtroque multiplicato, quot priùs erant in multiplicandis vnitates: Quare ita erit in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5. quòd sicut 5. continet 5. vnitates, & 2. duas, sic 15. continent 5. ternarios, & 6. duos, & sicut 4. continet quatuor vnitates, & 3. tres: sic 20. continet 4. quinarios, & 3. tres quinarios: Quare ita erit 2. ad 5. vt 6. ad 15. & 15. ad 20. vt 3. ad 4. quod erat præstandum.

PROB. II. PROPOS. X.

Datis duabus proportionibus, quibus proportio alicuius quantitatis erga aliam constat, cognoscere; quænam sit ipsius ad aliam proportio.

Sit data proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ dicatur composita ex duabus proportionibus; quam nimirum habet linea, vel numerus 3. ad 2. & linea, seu numerus 4. ad 1. vt cognoscatur quænam sit A ad B quantitates quaecumque proportio: Inueniantur ex præcedenti tres numeri eiusdem proportionis, vt sunt 2. 3. 12. vt sit 12. ad 3. vt 4. ad 1. & 3. ad 2. vt priùs erant. Dico, quòd ea est proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ est 12. ad 2. nihil curando de intermedio 3.

Probatur. Quia 12. numerus habet proportionem compositam eam, quam 12. ad 3. & 3. ad 2. quæ est ea, quam habet 4. ad 1. & 3. ad 2. sed hęc est gemina proportio, ex qua componitur proportio quantitatis A ad quantitatem B ex suppositione. Ergo proportio quantitatis A ad quantitatem B est illa quam habet 12. ad 2.



COROLLARIVM I.

* Hinc ergo ellucet: Quomodo proportio composita dignoscatur: nimirum si comparentur extrema relictis medijs. Vnde neque erit necesse reperire tres numeros; sed solum duos extremos inter quos composita proportio reperiatur, hoc autem fiet ex præced. 9. propos. si multiplicemus simul, Rationũ antecedentia, seu fundamenta, V. g. 2: Et 3. & 4. & 5. terminos: Nam numeri producti 6. & 20. habebunt proportionem compositam, quam 3. ad 4. & 2. ad 5. Ita quoque in lineis poterit fieri. Nam si detur proportio E ad F, & C ad D non eadem, & multiplicetur C fundamentum tot vicibus, quot partes aliquotæ sunt in antecedenti, seu fundamento E, & fiat O iterumque consequens D multiplicetur, seu terminus secundum partes, quę sunt in consequenti, seu termino F, & secundum quas dicit proportionem, & fiat P; dico O ad P habere proportionem compositam; cum idem fiat quod in numeris effectum est. Vnde si quantitas A dicatur habere proportionem compositam ad B lineæ C ad D, & E ad F habebit eam proportionem quam O ad P.

COROLLARIVM II.

* Hinc etiam est: Quod si dentur plures proportiones; quam duæ ex quibus aliqua alia proportio componatur, idem agendum sit multiplicando fundamenta inuicem, deinde terminos, vt si sit proportio 3. ad 4. & 1. ad 5. & 2. ad 7. & 4. ad 5. multiplicabimus omnia antecedentia ducendo primum in secundum, deinde tertium in productum ex primis vt fiant 24. deinde eodem modo consequentes terminos, & fient 700. Ergo proportio 700. ad 24. est composita ex proportionibus assignatis omnibus; quod etiam potest fieri reperiendo quantitates, quæ continuè sint proportionales.

COROLLARIVM III.

Idem prorsus agendum, & faciliùs, cum proportio est eandem, quæ multiplicanda sit, vt inueniatur proportio replicata, sic 2. ad 4. & 5. ad 10. inuenietur proportio duplicata 10. ad 40. vt patet in istis numeris 10. 20. 40. inter quos est eadem proportio primi ad medium, quæ medij ad vltimum.

EXPEN-

EXPENSIO VI.

Quænam quantitates proportionem consequantur, & quam obtineant.

Cvm acturi simus de modo argumentandi de vna proportione ad alteram, & vis argumentationis in earundem similitudine consistat; ideo priùs quænam sit, & inter quas quantitates reperiatur proportio cognoscere oportet.

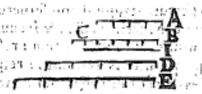
DEFINITIO IX.

In eadem ratione magnitudines dicuntur esse; cùm primæ, & tertiæ, idest fundamentorum æquè multiplicia à secundæ, & quartæ, idest terminorum æquè multiplicibus, aut æquantur, aut superantur, aut superant iuxta omnem multiplicationem, quæ adhibeatur.

Quia dantur quædam quantitates, nempe irrationales, vt supra diximus, quæ nulla communi mensura possunt mensurari. & ideo neque earum proportio indiuidua manifestari; cùm non cognoscatur: ideo in hac definitione proportio tantùm generica exprimitur, quam omnis proportio possidet, seu rationalis, seu irrationalis: nempe, quòd si multiplicentur fundamenta ęquè idest per eundem numerum, & termini æquè idest per eundem numerum; non tamen necessariò, quem adhibuimus in fundamẽtis, & reperiatur, quòd fũdamenta semper simul excedunt, aut æquent, aut minus sint, adhibitâ quacumque multiplicatione, dicendum esse fundamenta ad suos terminos simili proportione referri.

Ratio est: Quia impossibile est, quod fundamenta cum terminis non sint in eadem proportione, deinde semper æquo pacto respectu terminorum se habeant data qualibet multiplicatione possibili.

Nam sit maior A, quàm B particulâ C, quæ deberet abesse, vt esset similis proportioni D ad E: ita quòd, si illa deficeret, tunc proportio A ad B esset similis proportioni D ad E. Certum est, quòd si A, & D fundamentorum æquè multiplicia sumantur, & etiam B, & E terminorum: Quod terminus B crescet magis; quàm E respectu fundamentorũ, & non simili augmento, quia semper C particula abundans, & similitudinem auferens



etiam ipsa multiplicabitur. Cùm ergo crescat magis B; quàm E, & non similiter augeatur, necessariò aliquando eueniet, quòd si E proximè ęquetur suo fundamento D in aliquâ multiplicatione, vt clarum est posse euenire, data qualibet multiplicatione; ita vt deficiat solùm pars C, vel minus, quam C, eueniet inquam, quòd BC iam ęquabitur suo fundamento A, vel etiam superabit: Quapropter, tũc terminus BC æquabitur suo fundamento A, vel illud superabit; dum terminus E non est maior, nec æquat suum fundamentum D. Exemplum sit in numeris, & dicantur

esse fundamenta	4 ad 6		
	vt		terminos
	3 ad 5		

Sumanturque æquè multiplices fundamentorum, 8. fundamenti 4. & 6. fundamenti 3.

Sic quoque terminorum 12. termini 6. & 10. termini 5. Videtur, quòd sit proportio, quòd terminorum ambo æque multiplicia superent pari consensu fundamentorum æquè multiplicia. Verùm alia multiplicatio adhibeatur, & fundamenta quinquies accipiantur, eruntque multiplicia fundamentorum 20 & 15. Termini verò sumantur tricies; eruntque terminorum æquè multiplicia 15. & 18. Vides ergo iam quomodo multiplex 15. termini 5. tricies acceptus æquet multiplicem fundamenti 3. quinquies accepti: at termini 6. tricies accepti multiplex 18. fundamenti sui multiplicem 20. quinquies accepti non æquet; igitur inter hos numeros similis proportio non erit, eo quia inuentum sit aliquando fundamentum esse maius suo termino, cùm aliud fundamentum suo termino non sit maius, cùm fundamenta equalibus vicibus, tum termini æqualibus vicibus, licet non eiusdem numeri, ac fundamentorum, fuerint multiplicati.

Dices omnis possibilis multiplicatio est infinita. Ergo numquam possumus scire: an in aliqua multiplicatione contrarium eueniat; cum omnis multiplicatio adhiberi ob suam infinitatem non possit.

Respondeo in vnaquaque materia suppere tales probationes, quæ ostendunt: quòd idem eueniet in omnibus possibilibus multiplicationibus, quod euenit in multiplicationibus de presenti adhibitis, & quòd semper res ita procedet. Quoniam par sit ratio de omni multiplicatione possibili, ac de illis, quæ in præsentiarum adhibentur.

DEFINITIO X.

Eandem verò habentes rationem magnitudines proportionales dicũtur. Hoc per se clarum est.

DEFINITIO XI.

Cvm fundamentum primum iuxta aliquam multiplicationem excedit suum terminum, & fundamentum secundum, suum terminum non excedit; tunc primum fundamentum habet maiorem proportionem ad suum terminum; quam secundum ad suum terminum.

Ratio huius rei est: Quia si aliquando contingat, quòd fundamentum B. crescat, ita quòd superet terminum A, altero fundamento E suum terminum D non superante, in aliquo erit maior B V. g. in C, quam requireretur ad hoc, vt diceret eandem proportionem ad A; quàm E ad D ex anteced. Linea autem maior dicit maiorem proportionem ad aliam, quam linea minor eò, quòd requiritur, vt similes sint. Namque sit linea I ad A, vt E ad D illa erit minor, quam B: cùm B deberet detruncari, vt supponitur, si ad similem proportionem E ad D deberet reduci. Cùm ergo B sit maior, quàm I dicet etiam maiorem proportionem, quam I, quia linea maior B continet plus, vel plures partes lineæ A, quàm linea I, & ideo continebit etiam magis de linea A, quàm E contineat de linea D, quę tantũ de ea contineat, quãtũ I de A.

F CO-

COROLLARIVM.

CVm ergo duæ quantitates inæquales comparantur ad maiorem V. g. Pes 12. vnciarum palmus 6. & paſſus 72. Pes dicitur habere maiorem rationem ad paſſum, quam palmus eo, quòd plures partes eius contineat; nempe 12. cum palmus ſolum 6. contineat ex vncijs 72. At ſi paſſum compares cùm pede, & palmo, nempe cum minoribus, paſſus habet minorem proportionem cum maiori nempe cum pede, quàm cum minori, nimirum cum palmo; quia pedem continet ſolum ſex vicibus, at palmum 12. vicibus; & ideo eſt maior proportio paſſus ad palmum, quàm ad pedem; minor, verò ad pedem, quam ad palmum.

Si verò duas quantitates inæquales compares cùm minori V.g. paſſum, & pedem cum palmo. Maior eſt proportio maioris, quam minoris ad eam; quia plus continet maior de ea V.g. paſſus de palmo, quàm minor, nempe pes de ipſo palmo. At è contra minor comparata cum duabus inæqualibus, ſe maioribus; Minor hæc ad minorem V. g. palmus ad pedem maiorem proportionem habet, quam ad maiorem, cùm de illa minori contineat magis, quòd palmus pedis contineat medietatem; at verò paſſus 12. partem.

Si tandem mediocris comparetur, cum maiori ſe, & cum minori, vt pes cum palmo, & cum paſſui mediocris magis continet de minori; cum eam totam contineat, & inſuper aliquid ampliùs quã de maiori, quam nec totam contineat. Vnde habet maiorem proportionem cum minori, quam cum maiori. At, ſi minor, & maior ad mediocrem comparentur, maior dicet ob eandem cauſam maiorem proportionem ad mediocrem, quàm minor ob continentiam maiorem, quam habet cum totam eam contineat; non autem minor mediocrem.

DEFINITIO XII.

P*Roportio in tribus terminis ad minus conſiſtit;* Quia cùm ſit proportio Relationum quantitiuarum, & Rationum ſimilitudo, & ad relationem requiratur fundamentum, & terminus ad hoc, vt inuicem comparentur relationes, & ſimiles inueniantur, oportebit aſſignare fundamentum, & terminum hinc, inter quæ reperiatur vna relatio; & fundamentum, & terminum inde; in quibus conſiſtat alia relatio, quæ relationes, & & habitudines, deinde ſimiles dicantur. Verum, quia eadem quantitas poteſt reſpectu vnius eſſe fundamentum; vt 4. ad 8. & reſpectu alterius terminus, vt 2. ad 4. in quo 4. eſt terminus reſpectu minoris, & fundamentum reſpectu maioris: ideo proportio, & rationum ſimilitudo in tribus terminis ad minus conſiſtit.

DEFINITO XIII.

H*Omologæ, ſeu ſimiles ratione magnitudines ſunt, antecedentes quidem antecedentibus, ideſt fundamenta fundamentis, & conſequentes conſequentibus, ideſt termini terminis,*

Docet ne dum dari ſimilitudinem rationum, ſeu habitudinum vnius quantitatis ad aliam, quæ relationes ſunt fundamenta proxima ſimilitudinis, ſed etiam fundamenta remota, ideſt ipſas quantitates Rationem dicentes in ſimilitudine cum alia proportione conuenientem, dici, & ipſa ſimilia in hoc; quod duæ quantitates deſeruiant pro fundamentis, & in ratione fundamentorum conueniant, & duæ pro terminis deſeruiant, quæ non eſt ſimplex denominatio: ſed neceſſe eſt fundamenta in hoc conuenire, quòd aut ambo ſint æqualia terminis, aut ambo maiora, aut ambo minora, alioquin ſi vnum eſſet maius, aliud minus ſuo termino non eſſet eadem proportio cum vna eſſet maioris inæqualitatis, altera minoris.

DEFINITIO XIV.

O*Rdinata proportio eſt; cùm in duplici ſerie quantitatum proportionem dicentium eædem quantitates mediæ deſeruiunt pro fundamento, & termino Rationis.*

Sint duæ ſeries quantitatum proportionalium,

Prima	2	3	4
Secunda	4	6	8

Referaturq; 2. ad 3. vt refertur 4. ad 6. & rurſus 3. ad 4. vt 6. ad 8. ita quòd termini 3. & 6. deſeruiant etiam pro fundamentis; Et ſint quidem termini reſpectu proportionis antecedentis; fundamenta verò reſpectu ſequentis; Quamuis proportio antecedens non ſit eadem, ac ſequens; ſed diuerſa; nihil intereſt, dicit quod hæc erit ordinata proportio. Quoniam eodem ordine diſpoſiti termini inuicem ſe reſpiciunt procedendo verſùs extremos terminos 4. & 8.

DEFINITIO XV.

P*Erturbata proportio eſt; cùm in duplici ſerie quantitatum proportionem dicentium medius terminus vnius deſeruit pro fundamento reſpectu extremæ quantitatis; at fundamentum alterius deſeruit pro termino reſpectu primæ quantitatis.*

Sint duæ ſeries quantitatum proportionalium,

Prima	2	3	4
Secunda	6	8	12

Ordo verò earum perturbatus ſit, & referatur 2. ad 3. vt 8. ad 12. Deinde referatur 3. terminus, vt fundamentum ſumptus ad 4. vt alia quantitas 6. refertur ad fundamentum 8. Ita quòd terminus primæ ſeriei 3. deſeruiat pro fundamento ad aliud tertium; at fundamentum ſecundæ ſeriei 8. deſeruiat pro termino ad aliud ſumptum, vt fundamentum. Si ergo ita ſint ordinati termini vocabitur proportio perturbata; & oportebit ponere illud aliud in prima ſerie pro vltima quantitate, vt in ſecunda pro prima. Vocatur autem proportio perturbata, quòd non ſeruetur idem ordo, cùm in prima ſerie media, & ſecunda quantitas ſit terminus, & fundamentum: reſpectu quidem primę quantitatis terminus; reſpectu verò aſſumptæ extremæ fundamentum. At in ſecunda ſerie ſecunda quantitas ſolum terminus eſt reſpectu primæ; at prima eſt fundamentum, & terminus; terminus quidem reſpectu antepoſitæ aſſumptæ, fundamentum verò reſpectu ſecundæ ſuę quantitatis.

EXPENSIO VII.

De modis arguendi in proportionibus.

PRius agendum eſt de modo arguendi in genere; deinde de ſingulis modis in ſpetie.

Præſupponendum ex Logica. Solùm ſyllogiſmum inter argumenta à Logicis enumerata efficaciter concludere: Vnde, vt argumenta in proportionibus fundata vim adſtrictiuam adipiſcantur, & intellectum euidentiâ conuincant, oportet, licet Enthymematis modo prolata; quòd tamẽ ad ſyllogiſmum reduci poſſint. Syllogiſmus verò conſtat tribus propoſitionibus: Primæ duæ dicuntur Præmiſſæ, & earum prima eſt Maior, ſecunda Minor, vltima dicitur Concluſio. Prẹmiſſę verò conſtant ex Subiecto, & Prẹdicato terminis, & Copula: Et terminus, qui replicatur in maiori, & minori dicitur, *Medius terminus*. Sic, ſi dicatur *omnis homo eſt animal*, hæc eſt maior propoſitio, & *homo* eſt ſubiectum *eſt* copula *animal* Prædicatum, cui additur minor. *Sed omne animal eſt viuens*; quæ, vt prima componitur ex ijſdem partibus, ſed ſubiectũ eſt medius terminus nempe *animal*, quod replicatur in maiori, & minori; & ambæ hæ propoſitiones dicuntur *Præmiſſæ*. Tandem deducitur Concluſio euidens. *Ergo omnis homo eſt viuens*. Quæritur itaque in argumentis proportionum, quænam ſint partes ad ſyllogiſmum neceſſariæ?

CONCLVSIO I. PROPOS. XIII.

Argumenta proportionum duo extrema, & medium terminum poſſident ipſas Rationes; copula eſt proportio aſſerta, quæ particula vt *explicatur.*

PRobatur Sit argumentum Mathematicum *numerus* 1. *eſt ad* 2. *vt* 3. *ad* 6. *Sed vt* 3. *ad* 6. *ita eſt* 4. *ad* 8. Ergo 1. ad 2. eſt vt 4. ad 8.

Numeri ipſi non ſunt termini: nã, tunc argumentum conſequeretur ſex terminos, vt ſunt ſex diuerſi numeri: argumentum verò conſtans pluribus terminis; quam tribus, non concludit ex Logicis; ſed fallax eſt, & deficit in forma.

Quare erit terminus ipſa proportio, quæ inter duos terminos reperitur.

Confirmaturque. Nam propoſitiones modales pro terminis integra propoſitione gaudent vt *neceſſe eſt hominem eſſe animal*, illud enim *neceſſe* eſt ſubiectum, at hominem eſſe animal, eſt prædicatum. Sic, [& hìc 1. *eſt* ad 2. ſubiectum eſt, & 3. *ad* 6. eſt Prædicatum, nempe duæ relationes altera, quæ eſt inter 1. & 2. altera verò, quæ militat inter 3. & 6. medius verò terminus erit proportio media 3. *ad* 6. quæ reperitur in maiori, & minori.

Probatur ſecunda pars. Nam copula eſt illa, quæ ſemel eſt in maiori, ſemelque in minori, & in conſequentia. Sed talis eſt particula *vt* ſi ſit aſſertiua, vel negatiua, nempe iuncta cum verbo *eſt*, vel *non eſt*; quoniam reperitur in omnibus tribus propoſitionibus. Ergo, *vt eſt* erit copula.

Probatur ſecundò. Quoniam tota vis argumenti ex proportionibus deducti, vt propoſ. 16. huius conſiſtit in identitate ſimilitudinis proportionum: Et ex eo, quòd proportiones duæ ſint ſimiles alicui tertię, arguitur, eſſe idem ſimilitudine inter ſe. In hoc enim probauimus vniuerſaliter in noſtris Placitis Phyloſophicis vim ſyllogiſticam ſtatuendam: Sed *vt eſt* ſignificat hanc relationem ſimilitudinis, & indicat proportiones eſſe idem in ſimilitudine; Ergo in eâ particulâ copula latebit; cum copula ſit illa, quæ ſignificat identitatem Prædicati, & Subiecti.

Sed iam accedamus ad particulares modos explicandos, quibus vtuntur Mathematici; qui ſex ſunt *Alternatio, Inuerſio, Compoſitio, Diuiſio, Conuerſio, Æquatio*. Et licet ſint alij modi, vt explicabimus, hos tamen particulariter proprijs definitionibus illuſtrauit Euclides, vtpote dificiliores; & in quibus, vt plurimùm termini, & fundamenta ſedes mutarẽt, & alterum vices alterius in deductione concluſionis ſubiret. V. g. antecedens, & fundamentũ A in prẹmiſſis ponitur in concluſione, tanquã terminus, & conſequens. At nos alios etiam modos, in quibus nulla terminorum, fundamentorumque viciſſitudo reperitur, perſpicuitatis gratia explicabimus.

Modi itaque argumentandi ſunt quædam enthimemata conſtantia ex duplici propoſitione perfectâ, & affirmatiuâ; quorum conſequentiâ ſemel probatâ, ex inde efficaciam ſyllogiſticam conſequuntur, & euidenter oſtendunt. Quia omne Enthymema, cuius conſequentia probata ſit, vim ſyllogiſticam conſequitur; vt *iſte angulus eſt in ſemicirculo, ergo rectus eſt*. Si aliũde conſtet, omnem angulũ eſſe rectũ in ſemicirculo, erit ac ſi integrum ſyllogiſmum conficeres, & *diceres Omnis angulus in ſemicirculo rectus eſt. Iſte in ſemicirculo reperitur: Ergo rectus erit.* Quapropter, & modi arguendi Mathematici in proportionibus ſunt efficaces, quia licet ſint Enthymemata, eorũm tamen conſequentiam eſſe bene deductam in 5. libro Euclid. oſtenditur.

Iſtis itaque perceptis, obſeruandum eſt, duplicem eſſe modum argumentandi: Alium abſolutum, cùm quantitates dicunt quidem proportionem ſimilem, ſed non ſe habent inuicem, vt continens, & contentum; vt pars; & totum. Alium verò eſſe relatiuum, in quo quantitates ſumuntur, tanquam dicentes relationem totius, & partis. Primò itaque explicabimus modos argumentandi abſolutos à reſpectu partis, & totius. Deinde relatiuos.

DEFINITIO XVI.

A*Lterna, ſeu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis, ſeu fundamenti, & termini vnius proportionis tanquam fundamenta in concluſione, vt ſe referentia ad fundamentum, & terminum alterius proportionis, tanquam ad ſuos terminos.*

Iſte modus eſt: Cùm ponitur fundamenti ad ſuum terminum ſimilis proportio, quæ eſt alterius fundamenti ad ſuum terminum: Et deinde infertur. Quod fundamentum, ad fundamentum eâdem ſimili habitudine refertur, vt terminus ad terminum. Sic ſi ponantur eſſe.

	2	ad	4
vt	3	ad	6

Deinde poterit deduci, Ergo erit etiam Fundamentum 2. ad fundamentum 3. pro termino ſumptum, Vt terminus 4. pro fundamento ſumptum ad terminum 6.

Qui modus argumentandi efficaciter concludens demonſtratur propoſ. 19. lib. 5 Quod intelligitur, ſi fundamenta, & termini ſint eiuſdem generis. Non enim rectè inferetur ex eò, quòd linea A ad lineam B eſſet in proportione, vt numerus 2. ad numerum 3.; quod deinde eſſet etiã linea A ad numerum 2. vt linea B ad numerum 3. vt clarum eſt; cum nulla ſit proportio lineæ ad numerũ. Hanc verò argumentationẽ Doctores exprimunt, cum eâ vtuntur, dicendo; ſi 2. ad 4. vt 3. ad 6. ergo permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6.

DEFINITIO XVII.

Inuerſa ratio eſt, cùm fundamenta, antecedentiaque proportionum aſſumuntur pro terminis, & termini, ſeu conſequentia aſſumuntur in concluſione pro fundamentis.

Si aliquis argueret: Quoniam eſt fundamentum 2. ad ſuum terminum 4. vt fundamentum 3. ad terminum 6. Ergo etiam erit terminus 4. ad fundamentum 2. vt terminus 6. ad fundamentum 3. vſurpando in concluſione terminos pro fundamentis, & fundamenta collocando pro terminis: hic modus dicitur *inuerſa ratio*, & hunc modum eſſe demonſtratiuum conſtabit ex Coroll. pr. 4. par. ſequentis, Exprimiturque dicendo. Ergo permutando, &c.

DEFINITIO XVIII.

Arguere ex æqualitate eſt, cum ſunt plures quantitates, quam duæ ordinatam, ſeu perturbatam proportionem dicentes, & arguitur, eſſe eã proportionem inter fundamentum, & vltimum terminum vnius ſeriei, ac inter fundamentum, & terminum alterius vltimum, relictis intermedijs.

Dentur plures magnitudines; quàm duæ dicentes proportionem, veluti aliæ eiuſdem numeri, ſeu proportione pturbatâ, ſeu ordinatâ, & ſint

Ordinata 1. 2. 6. Perturbata 4. 8. 12.
vt 3. 6. 18. vt 2. 3. 6.

Si ergo relinquantur media aſſumptis extremis in concluſione, & primum fundamentum 1. dicatur referri ad vltimum terminum 6. vt fundamentum 3 ad vltimum terminum 18. ex eo, quod ſint 1. ad 2. ſic 3. ad 6. & 2. ad 6. ſic 6. ad 18. bona erit illatio in ordinata proportione; & bona quoque in perturbata; & ex eo, quod ſit 4. ad 8. vt 3. ad 6. & 8. ad 12. vt 2. ad 3. efficaciter deducetur concluſio, eſſe quoque 4. ad 12. vt 2. ad 6. In qua proportione, vt valeat, ritè ordinandi ſunt termini: nam ſi 2. poneretur vltimo loco poſt 6. in ſecundâ ſerie, tunc vltima relictis medijs, vt patet, non ſumerẽtur. Quod ſi ſint plures termini, quàm tres, valet adhuc argumentum; ſic ſi ſint.

Ordinata 1. 2. 6. 8. Perturbata 4. 8. 12. 18.
3. 6. 18. 24. 2. 3. 6. 9.

Licebit adhuc in proportione ordinata arguere, vt 1. ad 8. ſic 3. ad 24. & perturbata vt 4. ad 18. ſic 2. ad 9. Hunc verò modum eſſe efficacem in omni proportione etiam irrationali; licet ſint ſeries diuerſi generis oſtenditur pr. 24. & 23. lib. 5. & cum ſignificant in arguendo. Ergo *ex æquo*, vt, &c.

MODI ADDITI.

DEFINITIO XIX.

Enumeratio rationis poteſt dici, cùm pluribus quantitatibus ordinatis, quæ dicant eandem proportionem, aſſumuntur omnia fundamenta, vt dicentia eam proportionem ad omnes terminos, vt vnum ad vnum.

Si dentur multæ proportiones ordinatæ, & ſint

1. vt 3. 4. 5.
ad ad ad ad
2. 6. 8. 10.

Et illis poſitis, deinde inferatur eſſe 13. nempe omnia fundamenta ad 26. omnes terminos ſimul, vt fundamentum aliquod, V. g. 3. ad terminum ſuum 6. iſte modus poteſt vocari Enumeratio; eo quia ad ſimilitudinem enumerationis Dialecticæ poſitis pluribus particularibus proportionibus cõcluſio deducatur, quę concludat omnes; & probatur propoſ. 17. lib. 5.

DEFINITIO XX.

Collectio eſt, cum plurium quantitatum proportionem ordinatam dicentium aſſumuntur fundamenta, & termini vnius ſimul, vt fundamentum, & antecedens ad fundamenta, & terminos alterius proportionis tanquam ad conſequentem, & terminum, & arguitur, ita eſſe omnia ad omnia; vt fundamentum aliquod ad aliud fundamentum.

Sit proportio ordinata propoſita

1. ad 2. & hoc ad 6. & hoc ad 8.
vt 3. ad 6. & hoc ad 18. & hoc ad 24.

Si hac poſitione inferatur. Quod etiam omnia fundamenta, terminique 1. 2. 6. 8. nempe 17. ſint ad alterius ſeriei fundamenta, terminoſque 3. 6. 18. 24. nimirum 51. vt aliquod ipſorum 2. ad aliud correſpondens 6. bona erit illatio, & oſtendetur Coroll. 2. propoſ. 19. Poteſt verò hæc illatio eſſe integra, & dimidiata: Nam omnia fundamenta, & termini poſſunt colligi, vel eorum aliquot in prima ſerie; dummodo colligantur correſpondentia in ſecunda ſerie.

Sic ſi colligantur extrema 8. & 1. in prima ſerie, & fiant 9. & item in altera ſerie correſpondentia 3. & 24. & fiant 27. erit eadem proportio 9. ad 27. quæ 2. ad 6. vel 1. ad 3. vel 6. ad 18.

Verùm hic quoque fundamenta, & termini debent eſſe eiuſdem rationis, & ſpeciei alioquin ſicut in permutata, rectè illatio non fieret.

DEFINITIO XXI.

Reſiduatio eſt modus argumentandi, in quo totum ponitur, ad totum proportione reſpondens, vt pars ad partem, & deinde arguitur ex hoc quoque, eſſe reſiduum ad reſiduum, vt totum, ad totum.

Sit V. g. proportio 15. ad totum 3. vt pars 5. primi totius ad partem alius 1: Erit quoque reſidui 10. primi totius, proportio ſimilis proportioni, quæ eſt ad alteram partem reſiduam 2. alius.

Iſte verò modus arguendi eſt diuerſus ab ijs, de quibus acturi ſumus, qui ſe referunt; vt totum, & pars. Nam hic pars non confertur cum toto ſuo; ſed cum parte alius totius. Propterea que non eſt proportio partis, vt partis propriè; cùm non reſpiciat ſuum totum; ſed partem alteram, non ſibi compartem, alterius totius. Iſte verò modus oſtenditur propoſ. 22.

DE-

DEFINITIO XXII.

Replicari poteſt dici modus arguendi; cùm terminus, & fundamentũ replicata æquè ſumuntur, & ad fundamentum, et terminum conferuntur, vel æquè replicatos, vel ſimplices, alterius combinationis.

Sit V. g. 3. ad 4
Vt 6. ad 8

Poſſum arguere eſſe quoque multiplex 3. nempe 9. ad ſuum terminum 12. multiplicem æquè numeri 4. quemadmodum eſt 6. ad ſuum terminum 8, quod oſtendetur propoſ. 18. lib. 5. Idemq; argumentum valebit, ſi quoque combinationis alterius æquè multiplicia ſumantur, V. g. 24. numeri 8. & 18. numeri 6, erit namque 9. ad 12. vt 18. ad 24.

DEFINITIO XXIII.

Detractio poteſt dici modus argumentandi, cùm ex antecedenti, et conſequenti partes proportionales detrahuntur, et arguitur eſſe reſiduum fundamenti ad reſiduum termini, vt aliud fundamentum ad alium terminum, vt priùs erat totum fundamentum ad ſuum terminum totum.

Dicatur quod 8. ſit ad 24.
velut 1. eſt ad 3.

Si ex 8. & ex 24 detrahantur partes proportionales 3. & 9. remanebunt 5. & 15. Si ergo arguatur, quòd 5. ſit ad 15. vt 1. ad 3. iſte modus poterit vocari *Detractio*; & oſtenditur valere in proportione multiplici propoſ. 6. lib. 5. in quacumq; proportione Coroll. prop. 25. eiuſdem.

DEFINITIO XXIV.

Reflexio poteſt dici modus argumentandi, cùm duo fundamenta; ſeu antecedentia ſeorſim referuntur ad vnicum terminum, ſimili proportione, vt alia duo fundamenta, ſeu antecedentia ad ſuum terminum, ſeu conſequens; Deinde fundamenta prima ſimul ſumũtur, & arguitur obtinere eandem proportionem; quam alia duo fundamenta ſimul ſumpta ad ſuum terminum.

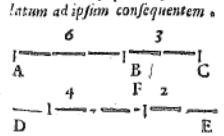
Dentur duo fundamenta 3. & 2. qui referantur ad terminum 6. & alia duo 6. & 4. qui referantur ſimili proportione; ac prædicta ad ſuum terminum 12. Si deinde arguatur eſſe quoque duo fundamenta ſimul, ſeu antecedentia 3. & 2. nempe 5. ad ſuum terminum 6. vt fundamenta 6. & 4. nempe 10. ad ſuum terminum 12.; erit bona deductio, & efficaciter concludet.

Probatur verò iſte modus propoſ. 25. lib. 5.

Modi, qui inuoluunt rationem totius, & partis.

DEFINITIO XXV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis cum conſequente, ſeu vnius; & hoc totum collatum ad ipſum conſequentem.



Sit proportio AB partis ad BC partem; vt proportio alterius partis DF, ad alteram partem FE, & colligatur, eam quoque eſſe proportionem totius AC; nempe antecedentis cum conſequente, fundamenti, & termini proportionis ſimul ad ipſam conſequentem, ſeu terminum BC; vt aliud totum DE fundamentum, terminuſque alterius proportionis ad ſuum terminum EF; dicetur huiuſmodi argumẽtum Compoſitio rationis eo, quod ex conſequente, & antecedente componatur aliud nouum antecedens, ſeu fundamentum, Demonſtraturque hic modus argumentandi propoſ. 21. lib. 5. Euclid. & quando illo vtuntur Mathematici; ita arguunt, vt AB ad BC; ſic DF ad FE, ergo *componendo*, vt AC ad CB; ſic DE ad FE. Sed forte explicabitur melius iſte modus argumentandi; Quod ſit: à proportionis partis ad cõpartẽ totius eiuſdem ſimilitudine proportioni alterius partis ad cõpartẽ alterius totius, deinde deducere, quod etiam totum prius ſit ad partem ſuam, ſicut totum poſterius ad partem ſuam, quæ partes fuerint ambæ, vel termini, vel fundamenta, & è contrà.

V. g. ſit pars 1. ad partem 2. totius A;
Veluti pars 1. ad partem 2. totius B;
Erit etiam componendo totum A ad ſuam partem 2; vt totum B ad ſuam partem 2.
Vel; ſi ſit pars 1. ad partem 2. totius A,
Velut pars 1. ad partem 2. totius B:
Erit quoque totum A ad ſuam partem 1;
Vt totum B ad ſuam partem 1.
Vel è contrariò.
Si ſit pars 1. ad partem 2. totius A;
Vt pars 1. ad partem 2. totius B.
Erit quoq; pars 1. ad totum ſuum A;
Vt pars 1. ad totum ſuum B;
Vel etiam erit pars 2. ad totum ſuum A.
Sicut pars 2. ad totum ſuum B.

DEFINITIO XXVI.

Diuiſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſum conſequentem.

Sit proportio, vt in præc. figura, AC totum ad BC partem vt DE totum ad FE partem, ſi deinde arguatur, quod exceſſus quoque AB, quo antecedens; nempe totum AC ſuperat conſequens, ſit ad ſuam partem BC conſequentem. Velut exceſſus DF, quo item antecedens DE ſuperat conſequentem FE, nimirum totum ſuam partem, ad ipſam FE conſequentem, iſte modus arguendi appellabitur diuiſio rationis, eò quod diuidantur antecedentia, ſeu fundamenta proportionum in ſuas partes, & oſtenditur iſte modus propoſ. 20. lib. 5. Eucl. In diuiſione autem rationis, dum deducunt concluſionem, ita loquuntur auctores *ergo diuidendo*, &c.

Diuiſio itaq; rationis ad hoc, vt rem clariùs explicemus, eſt cũ à ſimilitudine proportionis partis cum toto ſuo ad proportionẽ partis cum alio toto ſuo, quę partes ſint ambæ homologæ ſcilicet, vel fundamenta, vel termini, deducitur ſimilitudo proportionis compartis alteri parti eiuſdem totius ad proportionem compartis alteri parti alterius totius.

V. g. ſit totum A ad ſuam partem 2.
Vt totum B ad ſuam partem 1.
Erit ergo *Diuidendo* compars 2. ad ſuam compartem 1. totius A.

vt

vt compars 2. ad suam compartem 1. totius B.
Vel vt totum A ad suam partem 1.
Sic totum B ad suam partem 1.
Ergo erit, vt 1. pars ad compartem 2. totius A;
Sic 1. pars ad compartem 2. totius B:
Vel etiam sic vt 1. pars ad A suum totum;
Sic 1. pars ad B suum totum:
Ergo vt pars 1. ad partem 2. totius A;
Sic pars 1. ad partem 2. totius B.

DEFINITIO XXVII.

COnuersio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsum consequentem.

Veluti in præcedenti figura ex eo, quod sit AC ad BC, vt DE ad FE; Ergo eadem tota AC ad excessum AB; sic altera tota DE ad excessum DF: iste modus arguendi dicitur *Conuersio rationis*, & ostenditur propos. 19. lib. 5. & cum illo vtuntur Mathematici, sic inferunt; Igitur per Conuersionem rationis, &c.

Itaque Conuersio rationis propriè est arguere à similitudine proportionis totorum cum suis partibus, ad similitudinem proportionis totorum cum reliquis suis partibus.

V.g. vt totum A ad suam partem 1.
Sic totum B ad suam partem 1.
Ergo conuertendo vt totum A ad reliquam partem suam 2.
Sic totum B ad reliquam partem suam 2.

Tandem aduerte, quòd præter compositionem rationis assignatam datur etiam alius modus argumentandi, qui est compositio ipsarum proportionum, & differt propter hoc ab allata; quòd illa sit compositio ipsarum quantitatum proportionem dicentium; hæc verò ipsarum rationum. Si enim sint duæ proportiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, & duæ aliæ istis similes $\frac{4}{6}$, & $\frac{8}{10}$, & ex primis modo, quo docuimus propos. 11. vnica proportio componatur $\frac{8}{15}$, item ex secundis, & fiant $\frac{32}{60}$ erit adhuc eadem proportio 8. ad 15. quæ 32. ad 60. vtpote ex ijsdē pportionibus cōposita; si ergo prob. proportionem A ad B esse compositam ex ijsdem proportionibus ex quibus est composita proportio quantitatis C ad D; bene arguetur esse A ad B, vt C ad D. Vnde dabitur quoque alia diuisio rationis, nempe; ablatis rationibus similibus à similibus, quòd etiam residua habebunt eandem proportionem; sic ablata proportione $\frac{2}{3}$ à proportione $\frac{4}{5}$; & item proportione $\frac{4}{6}$ à proportione $\frac{8}{10}$, remanebunt residuum primæ $\frac{2}{3}\frac{0}{2}$, residuum secundæ $\frac{4}{4}\frac{0}{8}$ qui similem proportionem dicent ad inuicē, eritque 10. ad 12. vt 40. ad 48. Vnde si quis probet, ablatas fuisse à similibus proportionibus A ad B, quæ est C ad D proportiones similes; residua quoque (poterit deducere) esse inuicem similia: quod ostendemus agentes de proportionalitatibus Rationum.

TRACTATVS IX. IN V. LIBRVM EVCLIDIS PARS SECVNDA.

De Proportionibus in genere.

COgnitis Rationum, Proportionumque definitionibus, modumq; illas tractandi, & in illarum cognitione se exercendi, ad proprietates earum genericas, & vniuersalissimas accedimus. Estq; hic tractatus veluti Metaphysica apud Philosophos. Nam sicut illa entia vniuersalissimè accepta cognitione intuetur; Sic iste liber proportiones, atque earum similitudines sub tota vniuersalitate animaduertit. Primòque agit, vtpote notiori de proportione multiplici: secundò de proportione plurium quantitatum ad vnam comparatarum, tertiò de pluribus quantitatibus ad plures collatis in ordine ad cognoscendam earum in proportionibus dissimilitudinem, & tandem de plurium quantitatum ad plures in Rationibus similitudine, in quibus modi argumentandi fundantur. Iste verò Tractatus à primis quatuor libris nullatenùs dependet; sed tantum ab antecedenti Tractatus parte: verùm, quia eius cognitio ad sextum necessaria est, cui, & primus, & secundus liber deseruiunt; conueniens erit primum, secundumque librum legisse saltem, vt mens illis libris exercitata faciliùs per huius propositiones excurrat.

EXPENSIO I.

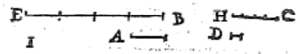
De similitudine multiplicium quantitatum.

QVoniam proportio multiplex facilis est, conueniens fuit, vt ipsa ad percipiendam similitudinem cuiuscumque proportionis aditum sterneret.

THEOR. I. PROP. I.

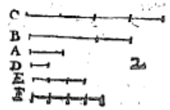
Si sint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æquè multiplices; Quàm multiplex est vnius vna magnitudo; tam multiplices erunt, & omnes omnium.

SI dentur quotcumque magnitudines; nimirum duæ; A quidem vnius palmi; at D vnius digiti, & dentur deinde æqué multiplices aliæ æquales numero, V.g. BE ipsi A, & HC ipsi D. Dicit propositio, *quòd si omnes simul ponātur, multiplices nempe hinc* EB, *&* HC, *& simplices inde* A, *&* D, *quòd adhuc illæ compositæ simul, istis simul compositis, eruntæquè multiplices, vt erant priùs.*



Nempe; quod vt quatuor palmi continebant priùs *quater* lineam palmarem; sic nunc quatuor palmorum linea, & quatuor digitorum *quater* continet lineam palmi, & digiti vnius.

Probatur ex defin. 3. præc. Tract. Illæ dicuntur æquè multiplices quantitates; cùm æquis numero vicibus vna continetur in alia. Quaexre A quater continebitur in BE, & D quater in HC. Si ergo diuidatur, in suasque partes distribuatur EB, & HC singulæ partes palmares erunt ex EB effectæ, singulæ digitales ex HC. Addantur itaque singulæ partes digitales palmaribus singulis; hæ singulæ lineis simplicibus compactis simul A, & D, æquiualebunt. Ex 2. enim pronunc. l. 1. æqualia addita equalibus equalitatem non tollunt. Quapropter A, D simul singulis palmis, digitisq; æquiualebit, cumque sint quatuor digiti, & quatuor palmi ex hypotesi, quòd sint æqué multiplices. Ergo A, & D vnitæ lineæ continebuntur quater in lineis multiplicibus EB; & HC simul. Vt priùs continebantur sumptæ seorsim in singulis seorsim sumptis.



THEOR. II. PROPOS. II.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, ac tertia quartæ; fuerit autem, & quinta secundæ, atque sexta quartæ, erit & composita prima cum quinta, æquè multiplex secundæ, sicut est tertia cum sexta quartæ.

SIt duplex ordo linearum; Prior, in quo sint tres magnitudines, nimirum prima, & antecedens palmorum 2. sequens palmorum 4. subsequens C palmorum 8. Deinde sit posterior series trium quoque magnitudinum; quæ antecedenti suæ D sint æquę multiplices; vt sunt prioris ordinis magnitudines antecedenti suæ A. V.g. si antecedens D est digitus, erit E sequens duorum digitorum, & F subsequens quatuor digitorum. Dicit propositio *compositas quoque subsequentem* C *extremam, & sequentem* B primæ A primi ordinis, esse *æquè multiplices*, vt in posteriori ordine cū mediâ E, & sequenti *extrema* F *composita, est* primæ D.

Probatur, Nam linea A mensurat lineam sequentem B bis: Quater verò subsequentem C. Ergo si addantur simul B, & C bis, quaterque nimirum sex vicibus eadem A. ambas mensurabit.

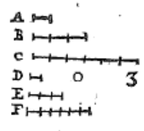
Sed in posteriori ordine antecedens D ex hypothesi mensurat quoque bis sequentem E, & subsequentem F quater. (quia mensurat suas sequentes, vt in priori ordine antecedens suas sequentes mensurabat) Ergo hìc quoque antecedens D suas sequentes E, & F simul positas bis, quaterq; mensurabit, nimirum sexties; vt faciebant sequens, & subsequens compositæ in priori ordine, quod erat ostendendum.

Aduerteque primam esse B, secundam A, quintam C; tertiam E, quartam D, & sextam F, sed, quia iste modus explicandi videtur non adeo perspicuus, illum vitauimus; licet alioqui laudatissimus.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si sit prima secundæ æquè multiplex, ac tertia quartæ; Sumantur verò æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt ex æquo sumptarum multiplex, altera quidem secundæ, altera verò quartæ.

SIt duplex ordo magnitudinum, Prior, in quo sit prima B, & sequens pal. 3. multiplex secundæ A, quæ sit 1. palmi; huic verò sumatur subsequens C, quæ sit sequenti multiplex, & eam V.g. contineat bis.



Deinde Posterior Ordo sumatur magnitudinum eadem multiplicitate continentiarum conformis priori Ordini. Cuiusque sequens E sit trium digitorum respectu primæ D vnius digiti. Illi autem sequenti E sumatur æquemultiplex F, nempe bis, vt in priori Ordine.

Dicit propositio *has subsequentes* C, *&* F, *tum prioris, tum posterioris ordinis esse etiam æquemultiplices suis antecedentibus* A, *&* D.

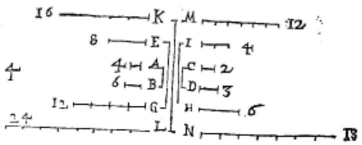
Probatur. Nam si C subsequens primi ordinis, & F subsequens ordinis secundi ex hypothesi bis multiplicant suas partes æquales super sequentes B, & E, quælibet ex illis, veluti F Q, æquabitur suæ sequenti E, & C O suæ item sequenti B. Sed istæ sequentes ex hypothesi quoque sunt æque multiplices antecedentium A, & D, & quælibet V. g. B multiplicat tot partes æquales super A, quot E multiplicat partes æquales super D. Ergo etiam partes subsequentium C O, & F Q, vtpote sequentibus æquales: Sed aliæ partes residuæ in his lineis subsequentibus C, & F sunt prædictis C O, & F Q, æquales. Ergo additæ istis adhuc facient totam lineam, quam complent, æquè multiplicem ex ant. propos. 2. Vnde C toties continebit A, quoties F continebit D; quę sunt multiplices primæ, & tertiæ; quod erat probandũ.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam: etiam æquè multiplices ipsarum quantitatum iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem; si prout inuicem respondent; ita sumptæ fuerint.

SInt duæ combinationes magnitudinum A C prior, B D posterior, sitque A ad C, vt B ad D; nempe A in C contineatur, veluti continetur B in D. Sitque A prima, C secunda, B tertia, D quarta. Sumãturque horum fundamentorum A, & B æquè multiplices quantitates E, quę contineat A tricies, & G, quæ contineat B tricies. Terminis quoque C, & D iuxta quamuis multiplicationem à prima fundamentorum diuersam, sumantur duæ aliæ æquè multiplices inter se nimirum I, quę bis continet C, & H, quæ bis continet D. Dicit itaque propositio, *quod istæ multiplices inuicem respondentes dicunt eandem proportionem inter se, quam dicebant quantitates simplices.* Et sic, quod ita referatur E multiplex magnitudinis A, ad I multiplicẽ magnitudinis C veluti multiplex G magnitudinis B refertur ad multiplicẽ H magnitudinis D Itaq; multiplicia fũdamẽtorũ, vt fũdamẽta referentur ad multiplicia terminorum tanquam terminos. Quod, vt probetur; istis quoque assumendæ sunt æquemultiplices, fundamentis quidem F, & G multiplices K, & L, & terminis H, & I, aliæ æquemultiplices M, & N.

Probatur modo propos. Secundum par combinationum E, & G est æque multiplex fundamẽtis A, B, & I, H est æque multiplex terminis C:



& D. Quare ex definitione 9. aut æqualiter crescent, aut æqualiter decrescent, aut æquabuntur; Multiplicia fundamentorum, respectu multiplicium terminorum: Itaque crescente E super I, crescet & G super H: at deficiente E, ab I; deficiet quoque G ab H, & si æquentur E. & I æquabuntur G, & H, eo quia ex hypothesi simplices quantitates, quibus multiplices sunt, inuicem proportionem dicant, & ex def. 9. illæ quantitates, quæ proportionem dicunt, habent suas multiplices hac conditione crementi, decrementi, & æqualitatis præditas.

Tertium verò par K, L est quoque multiplex respectu fundamentorum A, B, & aliud M, & N respectu terminorum C, & D, ex anteced. prop. Quod quælibet linea in his tertijs paribus multiplex sit suæ correspondenti in secundo pari. (& quælibet harum correspondentium secundarum parium sit æque multiplex fundamentis, & terminis sibi correspondentibus. Vnde K erit multiplex A, & L ipsius B, at M ipsius C, tandem N ipsius D.

Propterea que etiam ipsæ magnitudines tertiæ eam conditionem consequentur crementi, decrementi, vel æqualitatis in omni multiplicatione, quam secundę multiplices E, G, & I, H. Crescenteque N respectu M crescet L super N, & decrescente decrescet, se æquante æquabitur.

Cum itaque ipsę secundę multiplices Sil. fundamenta E, & G termini quoque H, I habeant tertias multiplices K, L fundamentorum; M N terminorum illius conditionis, quæ requiritur in def. 9. ad similitudinem proportionum, crementi, decrementi, æqualitatis, erunt proportionales, & ita erit E ad I, vt G ad H.

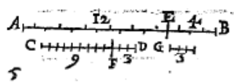
COROLLARIVM

HInc est quod si quantitatum duæ combinationes dentur, & antecedens A ad sequentem C dicat eam proportionem, quam antecedens B dicit ad sequentem D; quod dicent etiam proportionem è cõtrariò C ad A, vt D ad B. Ratio est: Quia si E, & G multiplices fundamentorum A, & B, vel simul superant, vel simul æquant, vel simul deficiunt, à multiplicibus terminorum iuxta quamuis multiplicationem, & ideo est A ad C, vt B ad D; Pariter quoque multiplices terminorum I, & H simul deficiunt, vel simul æquant, vel simul superant iuxta quamcumque multiplicationem multiplices fundamentorum E, & G: Vnde eadem ratione C erit ad A, vt D ad B.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, vt ablata ablatæ; etiam reliqua reliquæ erit multiplex, vt tota totius.

SI sint duæ magnitudines A B maior, & C D minor, quibus singulis auferantur duæ par-



tes A E, & C F, quæ inuicem eam multiplicitatem dicant, quam totæ inuicem dicebant; Licet cum suis totis non essent illæ partes commensurabiles, aut certè ijsdem partibus non componerentur; Multiplicitas enim attendenda est vnius partis respectu alterius; sicut, & totius ad aliud totum, non totius respectu partis. Sint itaque ablata pars A E, ita multiplex respectu C F ablatæ, vt est multiplex E A totum respectu C D totius. Asserit propositio. *Quod etiam residuum maioris erit multiplex respectu residui minoris, vt erat totum maius multiplex A B respectu totius minoris C D.*

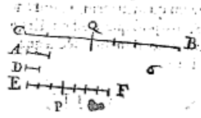
Ad id probandum assumitur aliqua alia quantitas G, cui sit multiplex E B residuum, vt est residuum multiplex maius A E respectu minoris residui C F. Certum est; quod, si addatur hæc quantitas G portioni ablatæ C F totius minoris, ita erit multiplex totum maius A B ad totum hoc compositum denuò, vt est pars ablata maioris A E respectu ablatæ minoris C F. Sed hoc totum maius A B est ex suppositione, ita multiplex ad totum minus C D, vt erat ablata portio A E à maiori toto respectu ablatæ portionis C F à minori. Ergo hoc totũm minus C D & rursus eius pars ablata C F associata cum assumptâ G, inuicem æquabuntur; vtpote quibus sit totum A B æque multiplex ex 6. pronunc. Aufer itaque ablatã portionẽ CF; & id quod remanet F D, & G quantitates remanebunt æquales, vtpote, quòd ab vtraque eadem C F ablata fuerit, quæ priùs quidem cum C D totum minus integrabat, at cum G associata fuerat.

Sed huic assumptæ G, ita est multiplex residuũ E B totius maioris, vt ablatum A E ad ablatum C F, ex hypothesi. Ergo, & huic residuo D F, ita est multiplex E B residuum maioris, vt ablatum A B ad ablatum C F, & consequenter, vt totum A B ad totum C D.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiplices, & quædam detractæ sint earum æquè multiplices, & reliquæ earundem, aut æquales erunt, aut æquæ multiplices.

SI sint duæ magnitudines C B, & E F, quarum prima sit æquè multiplex alicui A, sicut, & altera E F est multiplex alteri alicui D, V. g. sepcies. Et auferantur, tum à prima C B, tum ab altera E F, æqué multiplices portiones earundem A, & D,



nimirum Q B, & P F. Dicit *residua* C Q, *&* E P *eisdem* A, *&* D *remanere, aut æqualia, aut æquemultiplicia, quòd libet suæ correspondenti* Q C *ipsi* A, *&* E P *ipsi* D.

Probatur. Quoniam propos. 2. probatum est, quòd si duę, ęqué multiplices duarum; vt C Q multiplex A, & E P multiplex D, & alię duę Q B, & F P earundem A, & D æqué multiplices componantur duæ; & duæ, quæ respectu eiusdem quantitatis multiplices sunt, etiam compositæ C B, & E F remanebunt æqué multiplices respectu earundem A, & D. Ergo etiam detractæ æquemultiplices Q B, & P F ab æqué multiplicibus totis, quæ remanent erunt æqué multiplices; aut saltem æquales, cum quælibet pars multiplicium sit æqualis eis quantitatibus, quibus sunt multiplices. Vnde detractis æqué multiplicibus Q B, & P F; aut plures partes restabunt in C Q, & E P; ideoque erunt æqué multiplices residuæ E P, & Q C, aut vna; & ideo erunt æquales ipsis A, & D, quibus priùs ante detractionem erant æqué multiplices.

EXPENSIO II.

De proportione ad vnicam quantitatem relata.

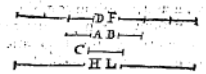
HIc agimus de pluribus ad vnicam comparatis, & ipsas quantitates, vt se habent, ad aliquam quantitatem examinamus: Si quidem faciliùs est duarum quantitatum ad vnicam collatio (cùm multiplicitas sæpé sæpiùs confusionem inducat) quam plurium quantorum inuicem comparatio. Agemus autem primò de similitudine deinde de dissimilitudine in duabus quantitatibus ad vnam conferendis, vt magis ex dissimilitudine ipsa similitudo nota euadat.

THEOR. I. PROP. VII.

Æquales ad eandem eandem habent rationem, & eadem eandem rationem consequitur ad æquales.

SInt A, & B æquales. Dicit *consequi eandem rationem ad aliam* C. Quod vt probet recurrit ad æquè multiplices, quæ V. g. eas contineant ter, vt D, & F. Lineæ verò C assumantur æquè multiplices duæ H, & L, quæ erunt æquales, vtpote eiusdem æquè multiplices, ex pronunc. 6.

Probatur. Nam, cùm multiplices D, & F æqualium sint inuicem æquales simul crescent, decrescent, & æquabuntur respectu multiplicium vnius C secundò assumptarum H, & L inuicem quoque æqualium, & hoc iuxta omnem multiplicationem. Quapropter, quantitates, quibus multiplices sunt, eandem dicent proportionem, & A ad C proportionabitur; vt B ad idem C. Pariterque etiam C ad A eandem habebit rationem, quam idem C ad B; quia eiusdem multiplices H, & L ad multiplices D, & F habent conditionem, quam multiplices quantitatum in proportione similium requirunt, vel æqualitatis simultaneæ, vel diminutionis, vel augmentationis.



THEOR. II. PROPOS. VIII.

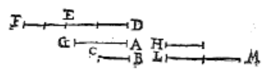
Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem rationem habet, quàm minor, & eadem ad minorem maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

MAiorem rationem habere est magis de quantitate æquali alterius quantitatis in se continere, quam de alia V. g. 6. palmi continent 4. palmos, ideoque ad lineam 4. palmorum maiorem proportionem habent, quam ad 5. palmos

mos, cum 4. palmos contineat semel, & dimidio, non autem 5. palmos.

Duas verò partes habet hæc propositio. Prima est: *Si dentur duæ lineæ, quarum vna sit maior vt A alia minor, vt B: & comparentur ad aliam, quamlibet, vt H: Maior dicetur habere maiorem rationem ad eam H, quàm minor B*

Diuidatur A ita vt CA sit æqualis minori quantitati B: Sumaturq; parti minori, siue sit C A, siue reliquum G C, multiplex F E, adeoque replicetur, vt euadat, vel maior, vel saltem æqualis ipsi H, & eidem multiplici F E addatur multiplex D E tot vicibus replicata, quot est ipsa F E, quæ tamen replicet, & multiplicet maiorem partem C A, eritq; D E maior, quam F E, & consequenter maior, quam H, quòd F E ei, vel æqualem fecerimus, vel maiorem. Sumatur verò quantitatis H multiplex talis L M, quæ sit proximè maior, quam E D, ita vt E D, non excedat, nisi ad summum quantitate H; tunc enim M L non poterit superare D F, quia excessus, vel equalis ipsi H, vel minor non potest superare F E, quæ æquat, vel superat H, & sic D F multiplex A G non erit minor, quam M L, & E D minor, quam M L. Linea D F verò



ex 1. huius est multiplex quantitatis A G; eo quia componatur ex multiplici ipsi CA, & ex multiplici ipsi GC. Sic ED est multiplex quãtitatis AC ex effectione, & ideo quantitatis B ei æquali. (Vel si mauis F E erit multiplex G C, quæ æquabitur ipsi B; si B fuerit taliter assumpta, quæ relinquat C A maiorem, quàm B.)

Probatur. Multiplex antecedentis A G, nimirum D F excedit multiplicem L M suæ sequentis H in prima combinatione. At multiplex D E antecedentis B multiplicem L M quantitatis H iterum pro sequente sumptæ in posteriori combinatione non excedit. Ergo est maior proportio A G ad H, quam B ad H ex def. 11. præc. part. quia contingit aliquando quod multiplex antecedentis AG excedat multiplicē sequẽtis LM, quãdo multiplex ED anteced. B eandē multiplicē non excedit.

Probatur quoque secunda pars; *quòd H dicat maiorem proportionem ad minorem B; quàm ad maiorem A G*, mutando solum combinationem.

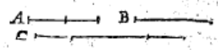
Nam L M multiplex H, vt antecedens sumpta maior est multiplici D E sequentis minoris B, quum eadem multiplex L M eiusdem H, etiam hìc pro antecedente sumpta, non sit maior in hac posteriori combinatione multiplici D F sequentis A G. Ergo H dicit maiorem proportionem ad B, quam ad A G ex def. 11. præc. part.

THEOR. III. PROPOS. IX.

Quæ ad eandem possident eandem rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem; istæ quoque sunt inter se æquales.

HÆc propositio ostenditur per reductionem ad impossibile, & conuertit vtramque partem Theor. 1. huius.

Assumantur itaque duæ lineæ A, & B, quæ dicant eandem proportionem ad C. Dicit propositio, *quòd A, & B sunt inuicem æquales*,



Quòd, si non sunt æquales. Sit A maior, & B minor. Erit ergo ex præced. propositione maior proportio maioris A, quàm minoris B ad eandem C contra hypothesim.

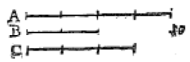
Probatur quoque secunda pars. Quoniam, si C respicit per eandem proportionem A, & B, & non sunt equales: Ergo ex 2. parte præced. prop. C diceret maiorem proportionem ad B, quàm ad A contra hypothesim.

THEOR. IV. PROPOS. X.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam verò eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HÆc propos. conuertit duas partes propos. 8. & ipsa quoque probatur per reductionem ad impossibile.

Sit A, quæ maiori ratione referatur ad B, quàm C refertur ad ipsam B, Dicit A esse quoque maiorem; quàm C.



Probatur, Nam, si forent æquales A, & C, haberent ex præmissa propos. eandem rationem ad B, quòd est contra Hypothesim. Si verò A, quæ maiorem rationē habet esset minor, quàm C, consequeretur contra præsuppositum minorē rationem ad B, quàm C ex propos. 8. Ergo erit A maior, quàm C.

Secundo; si eadem B respicit proportione maiori C, quàm A. Dicit esse minorem C, quàm A. Quod ostenditur: Nam non erunt æquales, quoniam B ad easdē ex 9. propos. eandē rationem haberet. Rursus non maior C, quàm A minor; quia B tunc ad A minorem quantitatem, maiorem rationem haberet ex 8. propos. quàm ad C: Ergo erit C minor, quàm A: cum non sit, nec æqualis ipsi A, nec maior ipsâ.

EXPENSIO III.

De plurium quantitatum ad plures quantitates dissimili comparatione.

VTilis admodum euadit hæc speculatio ad ostendendos modos argumentandi in omni genere proportionum etiam irrationalium; ita vt huius propositiones sint veluti quædam Lemmata ad propositiones de plurium quantitatum proportionalium similitudine ad aliam item plurium quantitatum proportionalium similitudinem percipiendam, per quam, deinde veritatem, & firmitatem argumentorum Mathematicorum cognoscimus.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XI. Euc. 13.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit; quam quinta ad sextam.

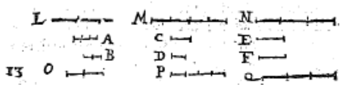
ASsumantur tres combinationes quantitatum A, B, & C, D, & E, F, quarum duæ nimirum A, B, & C, D, dicant proportionem; ita vt A, quæ dicitur prima, & antecedens ad B suam sequentem cõparata, ita se gerat in eâ continēda, vt secundę combinationis C antecedens ad D sequẽtem relata. Hæc verò antecedens secundæ combinationis, nimirum C ad sequentem suam D collata maiorem proportionem dicat, quam tertię combinationis antecedens E ad sequentem suam F. Asserit, *quòd, & antecedens primæ combinationis A dicet maiorem proportionem ad sequentem suã B, quàm combinationis tertiæ antecedens E ad suam sequentem F.*

Probatur. Accipiantur multiplices antecedentium, seu fundamentorum in singulis combinationibus L M N, & multiplices sequentium idest terminorum O, P, Q, quæ singulæ fundamentorum sint sibi æqué multiplices; sicut etiam terminorum sint sibi æqué multiplices, licet differant à multiplicitate priorum.

Si itaque antecedens secundæ combinationis C ad suam sequentem D dicit eam proportionem, quam primæ combinationis antecedens A dicit ad suam sequentem B; Ergo multiplices earum antecedentium ex 9. defin. pr. p. huius crescent simul semper decrescent, æquabuntur adhibitâ qualibet multiplicatione respectu sequentium; ita vt, cùm superat vna antecedens sequentem suam, superet, & alia antecedens sequentem suam; si æquat, æquet; si vna deficit, deficiat, & alia.

Sed huius secundę combinationis antecedens C ad sequentem D maiorem proportionem habet; quàm antecedens tertiæ combinationis E ad suam sequentem F: Ergo ex 11. defin. euenire potest aliquando; quòd crescat multiplex M fundamenti C secundæ combinationis, & consequenter cum eo multiplice L suæ simplicis A prioris combinationis se augendo pariter super multiplices terminorum O, & P, & non crescat tamen N super Q.

Quia ergo non creuit N magis, quàm Q, cum creuit M magis, quã P, at cũ creuit M, magis quam P, creuit semper L in priori combinatione magis, quam O, & semper L sequitur M, non autem N: Ergo horum multiplicium simplices dicent ma-



iorem proportionem, & si dicit maiorem proportionem C ad D. quam E ad F, etiam ex 11. definit. dicet maiorem proportionem A ad B, quam E ad F; quòd multiplex L simplicis A simul cùm multiplici M simplicis C maior inuenta sit aliquãdo, quam multiplex O, & P terminorum suorum; non autem N multiplex E maior inuenta sit multiplici Q termini sui F.

COROLLARIVM

HOc etiam argumentum demonstrat, quòd si secundæ combinationis fundamentum C ad terminum D dicat minorem proportionem, quàm dicat E ad F; eam quoque dicere A ad B: cùm sicut M multiplex minor sit, quam P, sic, & L multiplex minor sit, quam O; cùm tamen N aliquando maior sit, vel æquet Q.

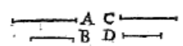
THEOR. II. PROPOS. XII. Eucl. 14.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; Prima verò, quàm tertia sit maior; etiam secunda maior erit, quàm quarta: Quod si fuerit æqualis prima tertiæ, erit etiam æqualis secunda quartæ, si fuerit prima minor, quam tertia erit etiam secundà minor, quam quarta.

TRes partes propositio enumerat, quæ tamen singulæ faciliter probantur. Si sint duæ combinationes, quarum antecedens A, quam dicit primam ad sequentem B, quam vocat secundam ita comparetur in proportione, vt alterius combinationis C tertia ad sequentem D quartam. Dicit propositio; *Quòd qualis altera antecedentiũ fuerit respectu alterius antecedentis: Etiam altera sequentium respectu suæ sequentis* talis erit, si maior antecedens A antecedente C; maior erit quoque sequens B sequente D, si æqualis, æqualis; si minor A, quàm C, minor quoque erit B, quàm D.

Quoniã ponitur maior A ãtecedẽs antecedẽte C, erit maior proportio A ad B, quã C ad B. Itaq; sunt tres cõbinationes quantitatum; prima est C ad D, quę ita refertur, vt in secũda cõbinatione A ad B: Verùm hæc secunda A ad B nõ ita refertur, vt tertia C ad B: sed maior est proportio A ad B secundę combinationis; quam C ad B tertiæ, vt in principio dixi: Ergo ex præcedenti maior erit quoque proportio in prima combinatione C ad D; quam in tertia C ad B. Cum ergo eadem C dicat maiorem rationem ad D, quam ad B; ideoque minorem ad B, quàm ad D, ideo ex 8. propos. maior erit B, quàm D.

Probatur secunda pars. Quia ponitur æqualis antecedens A antecedenti C, erit eadem proportio A ad B; quam C ad B: Cùm ergo ex hypothesi sit A ad B, vt C ad D, erit etiam eadem proportio C ad D; quam C ad B: Ideoque D, & B ex propos. 9. inuicem erunt æquales.



Tertia quoque pars patet ex Coroll. propos. præced. Nam si minor est A, quam C: erit minor proportio A ad B, quam C ad B. Itaque instituemus tres combinationes: Eritque prima C ad D in eadem proportione, quam A ad B; sed hæc secunda A ad B non erit in eadem proportione, quã in tertia C ad B: Verùm minor erit proportio A ad B; quàm C ad B: Ergo ex præced. Coroll. minor quoque erit proportio C ad D, quam C ad B. Ideoque C ad B habebit maiorem proportionem, quàm ad D, quare ex 9. propos. B erit minor quàm D.

COROLLARIVM I.

CLarum autem est ob æqualitatem proportionum; Quod si antecedens A sua sequente B sit maior; quòd etiam antecedens C sua sequente D futura sit maior: Quia alioquin si A esset maior, quàm B, & C minor quam D, aut æqualis ipsi D illa quantitas A diceret proportionem maioris inæqualitatis ad B, at quantitas C diceret ad D proportionem, aut minoris inæqualitatis, aut æqualitatis. Et idem asseras si A sit minor, quàm B, etiam C futuram esse minorem, quàm D, & si æqualis sit A, & B, & alias quoque quantitates C, & D eadem equalitate potiri.

COROLLARIVM II.

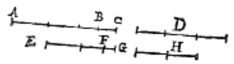
COlligitur quoque, Quod si B, & C sit eadem; vel sint æquales; quòd, si A ponatur maior, quàm C, ipsa C etiam erit maior, quàm D, dummodo sit A ad B, vt C ad D; quia, cùm B sit maior, quam D ex prop. 11. & C sit ei B æqualis, erit etiam ipsa C maior, quam D.

THOR. III. PROPOS. XIII. Eucl. 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

SInt duæ magnitudines AC, & D, quæ se inuicem proportione ea respiciant, quâ aliæ duę EG, & H. Sitque AC maxima earum, & H minima. Dicit; quod, si istæ simul addantur; facient quantitatem maiorem, quàm reliquæ mediocres simul compositæ, nimirum D, & EC. Nam si ex AC maxima detruncetur pars AB æqualis lineæ D, & ex media EG portio equalis EF lineæ minimæ H, cùm sint æquales additæ simul AB, cum H pro primo toto, & D cum EF pro secundo toto æqualia erunt. Siquidem ipsi H prioris totius æqualem detruncauimus EF partem additam ipsi D, & ipsi lineæ D posterioris æqualem fecimus BA additam partem ipsi H.

Sed portiones residuæ BC maximæ, & FG mediæ sunt inæquales, maiorque est maximæ residuum, quàm mediæ; Ergo, si hæc residua addantur, residuum nempe BC priori toti AB, & H, & mediæ FG posteriori toti EF & D, maius erit priùs compactum ex maximâ, & minimâ, quàm posterius totum compositum ex medijs.



Remanet itaque ostendendum, quod residuum maximæ BC, sit maius, quam mediæ FG. Id verò probatur. Tota AC maxima, est ad suam mediocrem EG, vt D mediocris ad minimam H: Ergo partes ablatæ à maximâ pars AB, & ex mediâ EF eandē dicent proportionē; quia mediocri D, & minimæ H sunt equales; Quare ex prop. 6. residua BC, & FG eandem dicent proportionem, quàm sua tota. Totum verò AC maius ponitur eò, quod sit maximum; quam EG; ergo, & residuum BC, erit maius; quàm FG. Alioquin si esset æquale, aut minus non diceret BC ad FG eandem proportionem maioris inæqualitatis quam AC ad EG, sed vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis.

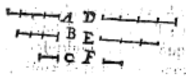
Propositio autem verificatur pro nunc tantùm de proportionalibus multiplicibus ob propos. 6. in qua fundantur; sed infra extendetur ad quascumque proportionales Coroll. propos. 22.

THEOR. IV. PROPOS. XIV. Eucl. 20.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales, numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo verò prima maior fuerit, quàm tertia, etiam quarta maior erit; quam sexta; si fuerit æqualis, erit quoque quarta sextæ æqualis; si fuerit illâ minor, hæc quoque istâ minor erit.

SVmantur tres magnitudines A, & B, & C, & aliæ tres D, E, & F, quarum combinationes in eadem ratione sint A ad B prioris ternarij, vt D ad E posterioris, & B ad C prioris, vt E ad F. posterioris. Dicit primo; quòd si prima A, sit maior tertia C in priori ternario, quòd etiam prima D erit maior, quàm tertia F in posteriori.

Probatur. Nam, quòd A ex hypothesi ponatur maior, quàm C, erit ex propos. 8. maior proportio A ad B, quàm C ad B; & quia eadem est proportio B ad C, quàm E ad F, & ideo ex Coroll. propos. 4. C ad B, quam F ad E; dicet quoque A ad B maiorem proportionem, quàm F ad E; Sed A ad B est eadem proportio, quam D ad E ex hyp. Ergo D quoque dicet maiorem proportionem ad E, quàm F ad E: Ergo ex prop. 10. erit maior D, quam F.



Probatur secunda pars: Nempe, si sit æqualis prima A tertię B prioris ternarij; quòd etiam talis sit posterioris ternarij prima D ad tertiam F, hoc est æqualem, eodem argumento.

Quoniam sunt æquales A, & C, ex 7. huius A antecedens ad sequentem primi ternarij B erit, vt sequens, & tertia C ad ipsam mediam B: sed, vt hæc media B est ad vltimam, & tertiam C; sic est media alterius ternarij E ad suam extremam F, & è contrà ex Coroll. propos. 4. huius, nempe vt C ad B, sic F ad E; Sed dictum est, quòd C ad B, est vt A prima ad B mediam, & ex hypothesi, vt A ad B; ita D posterioris ternarij ad E mediam; Ergo, vt D prima ad E mediam, ita F tertia ad E eandem mediam. Quare ex 9. propos. erit D æqualis ipsi F, quod erat probandum.

Probatur quoque tertia pars, eodem argumento, quo pars prima, nempe si sit minor A, quàm C, futuram esse quoque minorem D, quàm F.

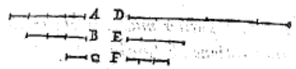
THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XV. Eucl. 23.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; fuerit verò perturbata earum proportio; ex æquo autem prima tertiâ maior fuerit, erit quarta maior, quàm sexta; Si æqualis prima tertiæ, etiam quarta sextæ erit æqualis; sin illa minor, & hæc minor erit.

SIt ternarium linearum A, B, C, & aliud ternarium D, E, F; Quarum proportio sit perturbata nimirum relatio, & proportio, quæ intercedit inter primam A, & secundam B prioris ternarij imitetur proportionem, quæ est in posteriori secundæ E ad tertiam F. Quæ verò proportio reperitur inter secundam B, & tertiam C prioris ternarij similis sit proportioni, quam habet D primò posita ad secundam E.

Dico; quòd, si in priori ternario prima maior erit, quàm tertia; etiam in posteriori prima, quā Euclides vocat quartam, maior erit, quàm tertia, quam vocat sextam.



Probatur hæc prima pars: Quoniam maior ponitur A prima, quàm C tertia: Ergo maior erit proportio primæ A ad mediam B, quàm tertię C ad eandem mediam B; Sed in eadem proportione reperitur B ad C, in qua D ad E, & ideo ex Coroll. propos. 4. C ad B, quàm E ad D. Ergo maior proportio A ad B, quàm E ad D: vt erat maior quā C ad B. Rursus eadem proportio reperitur A ad B, quā E ad F. Ergo est maior proportio E ad F; quàm E ad D. Igitur ex prp. 10. D erit maior, quā F.

Probatur secunda pars de æqualitate; nempe; si A ponatur æqualis ipsi C, quòd D erit æqualis ipsi F.

Quoniam A, & C sunt æquales: Ergo ex prop. 7. eandem rationem habent A, & C ad B; sed ratio, quâ B respicit C, est eadem, quâ D respicit E; & ex Coroll. 4. eadem quoque ratio est C ad B, quàm E ad D; Igitur eadem ratione A refertur ad B, quâ E ad D: Sed rursus A proportionem dicit ad B, vt E ad F. Ergo E refertur ad D eadem proportione, ac ad F: Ergo F, & D erunt æquales, ex propos 9. huius.

Probatur quoque tertia pars eodem prorsus argumento, quo prima pars ostensa est; Quod scilicet posito A minori, quàm C in priori ternario, minor quoque in posteriori sit D, quàm F. Quia enim minor est A, quàm C dicet minorem proportionem ad B, quàm C ex 8. propos. Sed A ad B est, vt E ad F: Ergo E ad F dicet minorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt est B ad C, ita est D ad E, & ex Coroll prop. 4. C ad B, vt E ad D: Quare erit minor proportio E ad F, quàm E ad D; vnde D erit minor, quàm F.

EXPENSIO IV.

De modis argumentandi; seu similitudine proportionum.

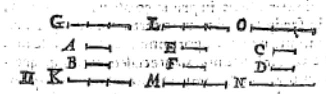
HVcusque comparauimus quantitates secundùm, quòd, aut maiorem, aut minorem proportionem dicebant, & semper dissimilem, & fundamenta proiecimus, quibus modos supra descriptos argumentandi in proportionibus ostendamus optimos, & euidentes: Nunc ad ipsas ostensiones horum modorum animus delegandus.

Obseruandum est. *Conuersionem rationis*, iam supra Coroll. 4. propos. fuisse ostensam; Nam fuit demonstratum; quòd si sint duæ combinationes quantitatum, in quarum prima sit A ad B, vt in secunda C ad D, quòd etiam è conuersò erit B ad A, vt D ad C. Vnde licebit arguere: si est A ad B, vt C ad D; erit etiam D ad C, vt B ad A conuertendo. Hìc itaque alij modi erunt ostendendi.

THEOR. I. PROPOS. XVI. Eucl. 11.

Quæ eidem rationi sunt æedem rationes, & inter se sunt æedem rationes.

SInt proportionales inuicem quantitates A B in prima combi natione, & quantitates E F in secunda. Istisque quantitatibus E F sint item proportionales quantitates tertiæ combinationis C, D, ita vt similitudo proportionum; quæ est inter combinationes primam, & secundam non sit diuersa, sed eadem; quæ est inter proportiones secundæ, & tertiæ combinationis. Dicit propositio; quòd hæ proportiones quantitatum primæ combinationis sint similes proportionibus ter-



tiæ combinationis, & ponitur vniuersale fundamentum, & generale arguendi in proportionibus; siquidem omne efficax argumentum fundatur in hoc, vt proportiones sint similes alicui tertiæ proportioni, ex quo deducitur esse similes inuicem.

Ad id ergo probandum assumantur alia paria combinationum singulis istis combinationibus multiplicium, ita, vt multiplices fundamentorum æquali vicium numero constent; Terminorum quoque licet non cum primis, inuicem tamen sint æquè multiplices, itaque Fundamentorum, seu antecedentium A, E, C, sint æquè multiplices G, L, O, Terminorum verò sint æquè multiplices K, M, N.

Prob. Cum ponamus primam combinationem A, & B dicere proportionem eandem secundæ cōbinationis quantitatibus E, & F: Ergo ex defin. 9. Crescente multiplici aliqua G in omni multiplicatione ipsius fundamenti A super aliam correspondentem multiplicem K termini B, vel decre-

scente

ſcente, vel illi ſe æquante, creſcet decreſcet, æquabitur ſimul, & altera fundamenti E multiplex L ſuper ſuam correſpondentem M termini F.

Verùm, quia ponitur quoque eadem proportio inter quantitates tertiæ combinationis, & ſecundæ; eſtque E, ad F, vt C ad D, multiplices fundamentorum creſcent, decreſcent, æquabuntur pariter reſpectu multiplicium terminorum, & L, V. g. ſuperante multiplicem M, ſuperabit quoque O multiplicem ſuam N, vel hæc æquabitur, illâ ſe æquante, vel deficiet illâ deficiente.

Itaque multiplices G, O fundamentorum A, & C combinationum extremarum concordabunt ſimul in creſcendo, decreſcendo, & ſe æquando reſpectu multiplicium K, N terminorum B, & D: dum concordant in eodem cremento, decremento, & æquatione cum media L multiplici fundamenti E, reſpectu multiplicis M ſui termini F.

Itaque, cùm A, & C fundamenta habeant ſuas multiplices O, & L reſpectu multiplicium K, & N terminorum ſuorum B, & D creſcentes ſimul, ſimulque decreſcentes, & ſimul ſe æquantes, habebunt fundamenta ad ſuos terminos ſimilem proportionem, & A erit ad B, vt C ad D.

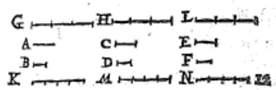
THEOR. II. PROPOS. XVII. Euc. 12.

Si ſint magnitudines quotcumque proportionales; quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium; ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

IN prima huius demonſtratione hoc Theorema oſtenditur in proportione multiplici; Modo verò hic oſtenditur in proportione quacumque etiam irrationali. Dicitur itaque, quòd ſi dentur tres combinationes, aut etiam plures; quarũ antecedens ad ſequentes ſuas, fundamẽtaq; proportionum terminis eandem obtineant proportionem, & ſit in prima combinatione A ad B, vt in ſecunda C ad D, vt in tertia E ad F, quæ omnes ſimilitudine proportionum correſpondeant. Dicit, quòd, ſi omnes antecedentes ſimul accipiantur A, C, E, & comparentur ad omnes ſequentes ſimul B, D, F, omnes antecedentes, ad omnes ſequentes ſimili proportione correſpondebunt, vt aliqua antecedens, ex ipſis V. g. C ad ſuam ſequentem D proportionatur.

Prob. Nam acceptis ęqué multiplicibus G, H, L ad omnes antecedentes A, C, E, erunt omnes ſimul æquè multiplices ad omnes antecedentes A, C, E, ſimul ſumptas vt vna ſcilicet G vni earum A ex prima propoſ. huius. Acceptis quoque æquè multiplicibus K, M, N, ſequentium B, D, F, erunt omnes multiplices ſimul collectæ K, M, N, ad omnes ſequentes B D F item ſimul ſumptas, vt vna multiplex K ad vnam ſuã ſequentem B. Sed, & antecedentes ſingulæ proportionẽ conſequuntur eandem ad ſuas ſequentes ex hypotheſi. Ergo ex defin. 9 part. pr. huius æquabitur ſimul, decreſcet creſcetque multiplex vnius antecedentis A reſpectu multiplicis ſuæ, ſequentis B cum multiplices omnes G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, in omni multiplicatione conſimili gradu, vel decreſcunt, vel creſcunt, vel æquantur reſpectu multiplicium K, M, N, ſimul ſuarum ſequentium B, D, F.

Si itaque omnes multiplices G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, relatæ ad multiplices omnes K, M, N, omnium ſequentium B, D, F, creſcunt, decreſcunt, æquantur quemadmodum vna V. g. G relata ad ſuã correſpondentem K. Igitur ex definitione 9. omnes antecedentes A, C, E, ſimul iunctæ ad omnes ſequentes B, D, F, ſimul vnitas dicent proportionem eandem, veluti vna antecedens, nempe A ad ſuam ſequentem B comparata. Quod erat probandum.

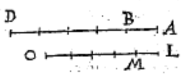


Hic oſtenditur modus argumentandi, quem addidimus, primus; cum enumeratis multis combinationibus, quæ eandem proportionem habeant, ex inde arguitur omnia fundamenta eſſe ad omnes terminos, vt vnum fundamentum ad ſuum terminum: & eſt Enthimemma, quod alia probatione non indiget, cùm remaneat hìc probatum, & redactum ad prima principia, & totalem euidentiam, vt patet.

THEOR. III. PROPOS. XVIII. Euc. 15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi ſumantur pro vt inuicem reſpondent.

SInt ſuarum partium A B, & L M, æquè multiplices lineæ A D, & L O dicit ſingulas eſſe proportionales; inuicem. Si ita ſumantur prout correſpondent, nempe ſi referatur pars ad partem, ita totum, ad totum.



Probatur. Nam ſingulę partes lineæ A D ſunt æquales inuicem; Ergo ex 7. propoſ. omnes ad vnam earum V. g. ad A B eandem habent rationem, ſic, & in linea L O omnes, cum ſint æquales, ad vnam eandem earum V. g. ad L M habent eandem rationem.

Igitur, vt ſe habet vna antecedentium A B ad vnam conſequentiũ L M V. g. ita ſe habebunt omnes ſimul antecedentes, idest tota linea A D ad omnes conſequentes, nimirum L O, ex pr. 17.

THEOR. IV. PROP. XIX. Eucl. 16.

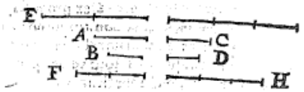
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

HIc demonſtratur alterna, ſeu permutata proportio, quæ tradita eſt def. 16. Si namque ſint duæ combinationes, quarum in vna antecedens A ad ſequentem B eam proportionem dicat, quam in ſecunda combinatione antecedens C dicit ad D.

Dico quoque eam proportionem dicere ambo antecedentes inuicem A, & C, quam ſequentes inuicem dicũt B, & D, quod tamen intelligendum, quũ proportiones ſunt in eodẽ genere, vt patebit.

Ad

Ad id vero probandum in prima combinatione antecedenti A, & ſequenti B ſumantur multiplices E F, quæ complectantur numerum partium equalem, & idem fiat in ſecunda combinatione aſſumendo multiplices G, & H, quæ licet non cum primis, adhuc tamen ſaltem inuicem partes ęqualis numeri habeant.



Probatur. Nam antecedẽtium multiplices E, & G creſcent, ęquantur, decreſcunt, vt ſequentium multiplices F, & H. Ergo ipſę inuicem antecedentes A, & C proportionem dicunt eam, quam conſequentes B, & D. Probatur, quod creſcant, decreſcant, ęquentur multiplices antecedentium, vt multiplices ſequentium ex defin. 9. quia dicunt inuicem proportionem. Quòd verò dicant proportionem patet; quia eidem dicunt proportionem: nam ex propoſ. præced. ita proportionatur multiplex E multiplici F ſequentis, ſicut antecedens A proportionata eſt ad ſequentem B; ſed præſupponitur quod antecedens A ad ſequentem B in prima combinatione dicant eam proportionem, quam antecedens ſecundæ combinationis C dicit ad D. Ergo, & multiplex E antecedentis proportionem dicit cum F multiplice ſequentis, vt antecedens C ſecundæ combinationis ad ſequentem D.

Sed idem quoque ex præmiſſa propoſ. de multiplici G reſpectu ſuæ antecedentis C, & de multiplici H reſpectu ſuæ ſequentis D, in ſecunda combinatione aſſerendum nempe, quòd dicant eam proportionem, quę reperitur inter antecedentem C, & ſequentem D huius ipſius ſecundæ combinationis. Ergo multiplices in prima combinatione inuicem, & multiplices ſecundæ combinationis inuicem eam proportionem dicunt, quam antecedens C, & ſequens D. Quare dicent, ex 16. huius eandem proportionem inter ſe duę E ad F, vt duæ G ad H: Æquabuntur, itaque creſcent, & decreſcent æqualiter ex 12. propoſ. huius in omni multiplicatione. Vnde, & quantitates, quibus ſunt multiplices, nimirum antecedentes A ad C, & ſequentes B ad D inuicem dicent eandem proportionem ex defin. 9. part. primæ.

COROLLARIVM I.

VNde colligas poſſe mutari rationem alternè ſolum in proportionibus eiuſdem generis, quia ſi eſſent diuerſi generis non poſſent dici, multiplices primæ combinationis, & ſecundę vnquam æquari, vel eſſe maiores, vel minores; quia quantitates diuerſi generis ſicut æqualitatem non habent, ita nec poſſunt dici maiores, vel minores.

COROLLARIVM II.

HInc, & ex propoſ. 17. illum modum, quem aſſignauimus ſupernumerarinm, & definit. 20 appellauimus Collectionem probare poſſumus. Nam diſpoſitis terminis.

2	3	4
6	9	12

Ita vt ſit 2. ad 3. vt 6. ad 9. & 3. ad 4. vt 9. ad 12. erit etiam permutando 2. ad 6. vt 3. ad 9. & 3. ad 9. vt 4. ad 12. Quamobrem ex propoſ. 17. poterimus colligere omnia fundamenta ſimul in hac proportione permutata 2. 3. 4. nempe 9. comparando ad omnes terminos ſimul 6. 9. 12. ſcilicet 27. & dicere, quòd, ità ſit 2. ad 6. vt 9. ad 27. nempe vt fundamentum aliquod 2. ad ſuum terminum 6. ita omnia fundamenta 9. ad omnes terminos ſcilicet 27.

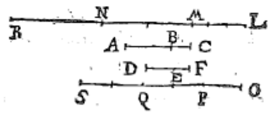
PROB. V. PROPOS. XX. Eucl. 17.

Si Cõpoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoq; diuiſæ proportionales erunt.

DEmonſtratur his modus argumentandi, in proportionibus, qui dicitur diuiſio rationis. Namque ſi tota magnitudo A C, ſit proportionata ad ſuam partem B A, veluti tota D F ad ſuam partem E D.

Dicit quoq; diuiſſas eandem ſeruare rationem, & adhuc eſſe, vt pars A B ad eiuſdem partem alteram B C, ita pars D E ad eiuſdem totius partem alteram E F.

Quod vt probetur aſſumendę ſunt duarum partium A B, & B C æquè inuicem multiplices, quæ erunt L M, & M N. Deinde duarum partium alterius quantitatis D E, & E F æquè multiplices inuicẽ, & cũ primis O P, & P Q. Vbi conſiderandũ eſt, ex prima prop. huius, quòd iſtæ multiplices partium ſimul poſitæ, vt O Q, & L N, ſunt quoque æquè multiplices totorũ AC, & DF: Quo notato, rurſus accipiantur æquè multiplices partiũ A B, & D E, & addantur primis ipſarum met aſſumptis multiplicibus ſimulq; poſitę ex ſecunda prop. huius erunt adhuc æquè multiplices, nimirum M N R, quantitati AB, & P Q S, quantitati D E.



Quoniam N M prima in priori ſerie ex multiplex ſecundæ A B, vt in poſteriori Q P eſt multiplex ſecundæ D E: & N R tertia prioris ſeriei, ita eſt multiplex ſuæ ſecundæ A B, vt tertia Q S in poſteriori ſerie eſt multiplex ſuę ſecundę D E; ideo, vt ibi docetur, ſimul compoſitæ prima, tertiaque M R erit etiam ita multiplex ſecundæ A B prioris ſeriei, & poſterioris prima cum tertia P S ſuæ ſecundæ D E.

Quo poſito, Aſſumantur pro prima combinatione totæ quantitates A C, & D F, quæ vt ſupponitur dicunt ſimilem proportionem cum ſuis partibus B A, & D E, quę pro ſecunda combinatione aſſumendæ ſunt, & ita ſit A C tota ad A B partem, vt D F tota ad D E partem; quare earum multiplices ſimul, æquantur, creſcunt ſimul, atque decreſcunt in omni multiplicatione ex 9. defin. nimirũ L N & O Q totorum, & fundamentorum reſpectu M N R, & P Q S, quæ ſunt multiplices partium, & terminorum, ſed compoſitæ, vt diximus. Ablatis itaque partibus iſtis, ex quibus componuntur ab æquè multiplicibus M N hinc & P Q, inde, quæ ſunt communes, tum multiplicibus totorum, tum multiplicibus partium; cùm creſcunt, creſcent

adhuc

adhuc, cùm deficiunt, deficient quoque; cùm æquantur, similiter æquabuntur remanentes multiplices hinc LM, & OP residuę totorum, respectu quantitatum similiter residuarum partium RN, & QS. Sed hæ remanentes sunt etiam multiplices partium nimirum LM partis CB, & PO partis FE ex hypothesi, in prima combinatione; At in secunda RN ex ostens. est multiplex partis AB, & SQ partis ED. Ergo partes AB ad BC inuicem proportionem dicunt vt DE ad EF, ex 9. defin. cùm earum æquè multiplices simul crescant, decrescant, & æquantur iuxta quamlibet multiplicationem antecedentiū respectu consequentium.

COROLLARIVM.

Collige hinc posse argumentari, quòd, si pars ad totum proportionem dicit, vt alia pars ad suum totum, etiā pars ad partem, vt altera pars ad alteram partem dicat proportionem, tam rectè, quam conuersè argumentando; nimirum ne dum rectè dicendo, vt AC ad AB, ita DF ad DE: Ergo vt AB ad BC, ita DE ad EF; sed etiam conuersè, ergo, vt CB ad AB ita EF ad DE.

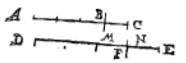
COROLLARIVM.

Deducitur secundò, nihil interesse, quod summantur pro prima combinatione, partes maiores, aut minores; quia æquo modo valet argumentum, vt patet. Nec quòd assumantur priùs maiores partes; vt totis proportionales, ex quo arguatur; quod etiam partes eædem maiores sint residuis partibus proportionales, vt si dicatur vt AB, ad AC; ita DE ad DF. Ergo vt AB ad BC; ita DE ad EF.

THEOR. VI. PROPOS. XXI. Euc. 18.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque compositæ erunt proportionales.

Hæc propositio demonstrat illum modum argumentandi in proportionibus esse bonum, quo deducitur vt definitione 24. quòd, si diuisæ magnitudines sint proportionales, coniūctas quoque eandem proportionem seruare, qui modus arguendi apellatur *Compositio rationis*. Si dentur itaque diuisæ magnitudines; nimirum AB, & BC proportionales; vt sunt DF ad FE.



Dicit compositas quoq; esse simili proportione correspondentes, & totum AC, ad partem BC referri, vt totum DE ad partem FE.

Probatur. Si enim totum AC non est proportionatum parti suæ BC; vt alterum totum DE suæ parti FE; erit saltem in aliquo toto eorum aliqua pars, cui correspondeat totum suum, vt parti suæ alterum totum refertur.

Assignetur itaque, & sit in linea DE pars N *minor*; Sitque iuxta aduersarios AC totum ad BC partem, vt DE totum ad NE partem, quò posito sequitur absurdum tali modo.

Si enim est, vt AC totum ad BC partem, ita DE totum ad NE partem: Erit quoque diuidendo AB pars ad BC partem ex præced. vt AN pars ad NE partem: sed ex hypothesi, vt est AB pars ad BC partem, sic quoque est DF pars ad FE partem: Ergo ex 16. propos. huius pars DN ad partem NE assignatam obtinebit eandem proportionem, quā pars DF ad partem FE primo positam: quòd eaurum proportiones sint similes tertię proportioni; nimirum AB ad BC. Sed antecedens DN ponitur maior, quàm antecedens DF; ergo etiam sequens NE erit maior sequente FE ex propos. 13. hoc autem absurdum est, quia ponitur minor ab aduersarijs. Quod si pars EM maior statuatur ipsā FE, & velint aduersarii, quòd ED totū ad ME partē, sit in eadē proportione, quā reperitur AC totum ad BC partem, incidimus adhuc in idē absurdum: Nam tunc erit minor ME, quam EF, quæ ME est assignata ab ipsis maior.

Et probatur simili argumento. Quoniam enim ex aduersarijs est AC totum ab BC partem; sic DE totum ad ME partem; poterimus diuidere ex anteced. & assere, quòd AB pars sit ad BC partem; sic DM pars ad ME partem. Verum etiam pars DF est ad partem FE, vt pars AB ad partem BC ex hypothesi: qua de rē DM simili proportione consentiet ad ME, ac DF ad FE; quòd eorū proportiones tertiæ proportioni, quæ militat inter BA, BC sint similes; Sed antecedens DM ponitur minor, quàm antecedens DF: Ergo etiam, & consequens ME minor esset sequente FE, & tamen maior EM ab aduersarijs constituta est quàm EF.

COROLLARIVM I.

Collige, quòd nihil interest; an arguas priùs conuertendo terminos, & vtendo conuersione, V. g. dicendo, si proportionem dicit AB ad sequētem partem in prima combinatione BC, quam dicit DF antecedens in secunda combinatione ad suā sequentem FE, igitur conuertendo terminos erit sequens BC ad suam antecedentem AB in prima cōbinatione, vt sequens FE ad antecedentem secundæ combinationis DF: Deinde sequaturis arguendo compositione rationis; Ergo, & erit tota AC antecedens ad sequentem AB suam partem vt est antecedens DE tota ad sequentem DF suam partem. Imo possum, & adhuc contrario modo sumere terminos, & arguere sequentem quoque, quæ est pars AB se habere ad totam AC antecedentem, vt pars DF sequens ad antecedentem totam DE.

COROLLARIVM II.

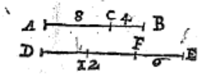
Collige hinc illum modum argumentandi in proportionibus cōfirmari, quo arguitur ex proportionis similitudine, quam habet prior linea AB cùm sua parte BC, comparata proportioni, quam habet tota posterior linea DE, cum sua parte FE, quod etiā tota prior AB ad suam reliquam partem AB simili proportione referatur, quam tota posterior DE ad suam reliquam partem DF. Quod ergo iste modus argumentandi bonus sit.

Probatur. Nam cùm totā prior, AC se habeat ad suam partem BC, vt posterior DE tota ad suam partem EF, poterit quoque argumentari *diuidendo* ex 20. huius, & assumendo residua pro totis, quare reliqua pars AB, in priori linea erit ad ablatam CB; quo pacto est DF reliquū in posteriori linea ad ablatam FE: Quamobrem, & poterimus conuertere propositionem, & ē contra dicere, quod ablata CB in priori linea ad residuum AB est, sicut ablata EF ad residuam DF. Iterumque Componendo ex propos. 21. huius, quòd sicut se habet tota AC prior ad suā partē residuā AB, ita se habeat tota DE posterior ad DF suam residuam partem.

THEOR. VII. PROP. XXII. Eucl. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit.

Supra id quoque ostensum est ab Eucl. in proportione multiplici, vt quid faciliùs, licet demonstratio ab illa nullo pacto dependeat, cùm tamen à multis antecedentibus, vel mediatè, vel immediatè dependentiam obtineat. Hic itaque generaliter ostendit, & dilatat propositionem etiam ad proportiones irrationales. Si itaque reperiatur aliqua quantitas AB, quæ tota ad aliam DE similis in proportione sit, vt eius aliqua pars BC, est proportionata alterius parti EF. Dicit quoque reliquum AC ad reliquum DF similem proportionem consequi.



Probatur. Nam ex propos. 16. si in prima cōbinatione tota antecedens prior linea AB ad sequentem posteriorem totam DE, vt pars à priori linea BC antecedens in secunda combinatione ad sequentem EF partem ablatam alterius posterioris, licebit permutare terminos; & affirmare ex propos. 19. *permutando*; Antecedentem quoque totam AB ad antecedentem BC, quæ est sua ablata pars, dicere eam proportionem, quam sequens tota DE dicit ad sequentem EF, quæ est sua à se ablata pars. Iterumque ex propos. 20. poterimus arguere *diuidendo*, & dicere; Quod si eandem proportionē, quam dicit tota antecedens AB, in priori linea ad antecedentem BC, quę est ablata sibi pars, dicit quoque tota sequens DE in posteriori linea ad ablatam sui partem EF; Quod etiam reliqua pars AC prioris lineæ ad BC residuum in eadem proportione sint; quam posterior DF ad posteriorem FE dicebat: Quare rursus *permutando* erit, vt AC fundamentum ad DF fundamentum, vt terminus BC ad terminum FE: hoc est, vt tota AB ad totam DE, quæ ex hypoth. vt BC ad EF comparatur.

COROLLARIVM

Hinc apparet propositionem 13. esse intelligendam vniuersaliter; cùm vniuersaliter sit verum, quòd, si sit totum ad totum, vt ablatum ad ablatum; etiam reliquum ad reliquum, ita erit vt totum ad totum; & ideo, quòd, cum sit AC maior, quam EG, quod etiam sit residuum BC maius quam FG adhibita figur. propos. illius.

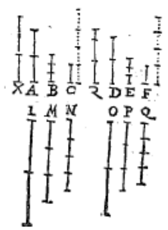
THEOR. VIII. PROPOS. XXIII. Euc. 22.

Si sint quotcumque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero; quæ binæ in eadem ratione sumantur; etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Demonstrauit superius Euclides in propos. 14. quòd binæ sumptæ in eadem ratione quantitates essent, vel æquales, vel minores, vel maiores alijs quantitatibus sumptis, vt binæ pariter secundum proportionem similem ad primas: nunc demonstrat esse etiam proportionales, ex quo desumitur modus argumētandi ex Æqualitate vocatus.

Sint itaque magnitudines ABC, & alię tres DEF. Sitque prima, & antecedens A ad suam secundam, & sequentem B, in priori ternario, vt in posteriori prima D, & antecedens est ad secundam, & sequentem E. Sit quoque B modo, vt antecedens posita ad tertiam C suam sequentem in priori ternario, vt in posteriori secunda E sumpta, vt antecedens, est ad tertiam F sequentem suam. Dicit *ex æqualitate primā* A *ad tertiam* C in priori ternario *ita referri*, vt in posteriori *prima* D *ad tertiam* F intermissis medijs terminis B, & E.

Quod, vt ostendatur, accipit singulis quantitatibus prioris ternarij singulas lineas L, M, N, quarum quęlibet, ita multiplex suæ cuique lineæ assumantur, vt assumuntur in posteriori ternario multiplices O, P, Q, correspondentibus lineis; Lineæ itaque L, & O, sint æquè multiplices primarum A, & D, V. g. duplæ: M verò, & P sint æquæ multiplices secundarum B, & E, V. g. triplæ: N Q tandem sint æquè multiplices tertiarum V. g. quadruplæ.



Probatur. Nam tum in priori, tum in posteriori ternario primarū multiplices L, O, relatæ ad tertiarum multiplices N, & Q crescunt decrescunt pariter ad quācumque multiplicationem, vel etiam eis æquātur. Ergo primæ A, & D quibus sunt multiplices ex 9. definitione in eadem proportione erunt respectu tertiarum C, & F.

Remanet antec. probanda. Probatur autem ex 14. propositione huius. Nam multiplices binæ in eadem proportione sumuntur, ita, vt in priori ternario multiplicium, ita respiciat prima multiplex L secundam suam M, sicut in posteriori multiplicium ternario prima multiplex O, respicit suā multiplicē P, & idē dicas de secunda multiplici M relata ad multiplicem tertiā N, quæ ita se habet ad eam, vt in posteriori ternario multiplicium secunda P ad suam tertiam Q comparata.

Ratio huius ex propos. 4. huius desumitur. Quòd multiplices antecedentes ad sequentes suas eam habeant proportionem, quam habent simplices antecedentes, quibus multiplices sunt ad suas sequentes simplices. Quare, cùm antecedens A ad sequentem B in priori simplicium linearum ternario

nario sit, vt in posteriori antecedens D ad sequentem E ex hypothesi, sequitur, vt tali quoque proportionis similitudine afficiantur earum multiplices ita, vt sit L ad M, vt O ad P. Rursus cum pariter ex hypothesi B ad C prioris ternarij sit, vt E ad F; quod earum multiplices quoque in proportione similitudinem dicant ita, vt sit M ad N, vt P ad Q. Cum itaque ita sit L ad M, vt O ad P; & M ad N, vt P ad Q erit perpetuus nexus, & simultas ex propos. 14. huius L, & O in cremento decremento, & æquatione respectu extremarum N, & Q. Quare ex defin. 9. simplices eandem dicent proportionem, & A erit ad C, vt D ad F.

COROLLARIVM I.

QVòd si sint, seu maiores, seu minores eodem pacto probatur V.g. ponamus in priori ternario adesse X, quæ se habeat ad A, vt in posteriori Z ad D, erit quoque ex eodem argumento X sumpta vt prima ad B quæ tunc erit tertia, vt in posteriori Z prima habet ad E, quæ tunc erit tertia, & eodem modo de alijs quibuscumque, vel antecedentibus, vel sequentibus ostendetur.

COROLLARIVM II.

COlligitur secundo esse bonum illum modum arguendi, quo deducitur; quòd ex eo, quia proportionem similem habeant B ad C, vt E ad F, quod etiam similem proportionem linea B ad lineam pũctatam ipsâ C quadruplo, vel vt libet maiorem habebit, ac altera D ad lineam punctatam, quadruplo, vel vt libet ęquè maiorem, Maiores enim istæ, cùm sint in proportione multiplici eâdem, possunt sumi, vt tertiæ; vnde ex æqualitatis argumentatione licebit inferre earum proportionem, cùm primis, & dicere: ex eo, quod C sit ad B, vt F ad E, multiplicem quoque C esse ad B, vt multiplex ipsius F ad E.

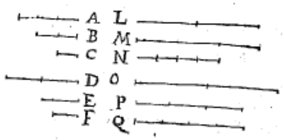
THEOR. IX. PROP. XXIV. Eucl. 23.

Si sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eâdem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstratur hic argumentationem ex ęqualitate esse bonam, etiamsi proportio fuerit perturbata: Sit ergo ternarium prius linearum A B C, & aliud posterius D E F, in quorum priori proportio primę A ad secundam B assimiletur proportioni, quam habet secunda E in posteriori ternario ad tertiam F, at quàm proportionem habet prima D huius posterioris ternarij ad secundam suam E; habeat quoque secunda B prioris ternarij ad tertiam C. Dicit; *quòd prima A ita proportione referetur ad tertiam C in priori ternario; sicut in posteriori prima D ad tertiam F refertur.*

Quòd vt probet, assumit æquè multiplices in singulis ternarijs ita, vt primæ A, & D æquè multiplices habeant L, & O, V.g. duplas; secundæ verò B, & E æquè multiplices obtineant V.g. triplas M, & P: At tertiæ C, & F æquè multiplices nanciscantur N, & Q, V.g. quadruplas.

Probatur ternarium multiplicium cum alio multiplicium ternario in ratione perturbata conuenit; ita vt prioris prima L ad secundam M referatur similiter, ac in secunda P ad tertiam Q in posteriori ternario: huius vero prima O ad secunda P referatur, vt in priori secunda M ad tertiã N.



Sed iam probatum est 15. propos. huius, quòd in ratione perturbata primæ V.g. O, & L crescunt decrescunt æquantur simul, & vnâ in qualibet multiplicatione & respectu quantitatum N, & Q, inuicem in crescendo, & decrescendo, vel sequando semper indiuisibiles comites eodem modo se gerunt.

Ergo lineæ simplices nimirum A prima dicet eam proportionem cum tertia C in priori ternario; qualem dicit prima D ad vltimam F in posteriori.

Probandum remanet itaque, quod multiplices tum huius, tum alterius ternarij in ratione perturbata conueniant, ex propos. 18. quia partes cum pariter multiplicibus in eâdem ratione sunt, si sumantur prout inuicem respondent: Cum igitur simplices sint partes multiplicium, quòd earum partibus sint æquales, patet, quòd si simplices in ratione perturbata sibi correspondent, eodem pacto, & multiplices sibi correspondebunt in eadem ratione perturbata: Vnde ita L erit ad M, sicut P ad Q, & O ad P, vt M ad N.

THEOR. X. PROPOS. XXV. Euc. 24.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: habuerit autem, & quinta, ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVod demonstratum est 2. propos. de proportione multiplici, modò hìc de omni proportione etiam irrationali ostenditur.

Si sint tres magnitudines in priori ternario, quarum prima A ad mediam B eam dicat rationem, quam in posteriori prima D ad secundam E, & rursus ad has medias nimirum ad B in priori ternario tertia C eam proportionem dicat, quam in posteriori tertia F ad mediam E habet: Affirmat *compositas quoque primam A, & tertiam C*, quod in pũctatis expressum est prioris ternarij simili proportione respicere B, sicut compositas primam D & tertiam F posterioris ternarij ipsam E.

Probatur itaque obseruando priùs; quòd cùm tertia dicat proportionem ad secundam tum in vno, tum in alio ternario ex hypothesi, *conuersè* arguendo etiam media in quolibet corũ erit proportionalis tertię, ita vt B sit ad C eodem modo,

ac

E est ad F: quia ex hypothesi C est ad B, quemmodum E est ad F.

Quo supposito, iam possumus arguere ex ęqualitate secundùm documenta propos. 23. quia habemus binas in vnoquoque ternario, tum priori, tum posteriori sibi proportione simili respondentes; namque ita est A ad B in priori ternario, vt D est ad E in posteriori, & ita B est ad C in priori, sicut E est ad F in posteriori.

Ergo ex *æqualitate*, ita prima A in priori ternario proportionabitur ad tertiam C, vt in posteriori prima D proportionatur tertiæ F. Et iam poteris arguere *componendo* ex documentis prop. 21. & addendo A primæ linea C, quod per punctatam exprimitur, dicere quod tota AP nimirum continua, & C punctata, ad C dicat similem proportionem; vt dicit tota DQ nimirũ continua cum F punctata ad F.

At ad hoc, vt tandem deueniamus ad conclusionem oportet constituere aliam argumentationem ex æqualitate. Iam enim habemus ex dictis vsque adhuc A primam cum C punctata s. AP proportionatam ad C sicut prima D Q proportionatur ad F; Sed ex hypothesi quoque C est ad B proportionata, vt est F ad E. Ergo ita erit ex æqualitate tota AP, nimirum continua AC cum CP punctata ad B; vt est proportionata tota DQ, nimirum continua DF cum FQ punctata ad E.

COROLLARIVM

COlligit hic Clauius; quod hoc modo argumentandi, quo vsi sumus posse, & demonstrari, id quod ostensum est propos. 6. de proportione multiplici conuenire omni proportioni. Nimirum, quod si duæ magnitudines ad duas eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habent ad easdem eandem proportionem, & reliquas, quę remanent, ad easdem eandem proportionem habituras. Nam positâ eadem figurâ assumes pro prima prioris ternarij totam AC cum pũctata CP, & pro posterioris ternarij prima DF cũ punctata FQ. Si ergo auferatur C, & F, & ponantur rursus pro tertijs, ita quod ad secũdas suas B, & E eam habeant proportionem, quam habebant, quando erant coniunctæ. Reliquę AC, & DF ad easdem secundas B, & E eam proportionem habebunt, quam priùs habebant integræ ad B, & E. Pr. Nam C est ad B, vt F, ad E: Ergo conuertendo, vt fecimus priùs, B erit ad C, vt E ad F, Quare ex æqualitate tota ACP erit ad C, vt tota DFQ est ad F; Erga diuidendo ita est AC ad C, vt DF ad F; Et quia ex hypothesi ita est C ad B, vt F ad E; Ideo AC, & DF poterunt poni pro primis C, & F pro medijs, & B, & E pro tertijs, & ex æquali argumentari, ita esse AC ad B, vt DF ad E, quod est propositum.

TRACTATVS X.

IN VI. LIBRVM EVCLIDIS

De proportione quantitatis continuæ.

Visis proportionibus genericis ad particulares descendimus iuxta diuersitatem materiæ, quibus præcipuè applicantur; Nam alia est proportio numerorum, alia est quantitatis continuæ; Quantitatis verò continuæ duplex est, alia rationalis, alia irrationalis. Modò verò agimus de quantitatis continuæ proportione prout præscindit ab irrationali, seu rationali.

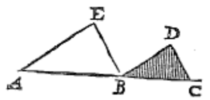
EXPENSIO I.

De principijs huic tractatui spectantibus.

Principia, quæ huic expensioni maximè deseruiunt sunt definitiones quædam figurarum, quę proportiones fundant.

DEFINITIO I.

Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circa angulos æquales proportionalia.



Figuræ illæ similes dicuntur, quæ angulos æquales habent, vt sunt B niger angulo A, & D angulo E, & C angulo B albo, & latera proportionalia circa æquales angulos; ita vt sit trianguli nigri crus C D ad alterum B D eiusdem; Veluti crus B E albi ad crus A E eiusdem, quæ complectuntur angulum E album æqualem angulo D nigro, quem crura prædicta DC, & B D complectuntur, & sic de alijs cruribus. Quapropter quadratum, & figura altera parte longior non sunt similes figurę; quia latera quadrati habent circa quemlibet angulum rectum proportionē æqualitatis; at figuræ altera parte longioris proportionem inęqualitatis, licet alioquin, tum vnius, tum alterius figuræ, anguli sint æquales, vtpote recti. Vnde etiam constat omnes figuras, quæ rectilineæ sunt, æquilateræ, & æquiangulæ, & numero eodem, tum laterum, tum angulorum constant, esse inuicem similes, licet maximè sint inæquales.

DEFINITIO II.

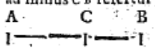
Reciprocæ figuræ sunt, cùm in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini sunt,

Idest, cùm in prima figura fuerit fundamentum proportionis, & in secunda terminus proportionis eiusdem: in eadem verò secundâ fundamentum reperiatur alterius proportionis correspondentis, & huius terminus in primâ, ita vt duarum proportionum similium nulla sit tota in vnica figura; sed fundamentum sit in vna terminus in alia: hæ dicuntur figuræ reciprocæ. Sic in fig. præced. si sit A E ad B D, vt B C ad B A dicerentur illa duo triangula figuræ reciprocæ, quia AE est fundamentum vnius proportionis, & B A terminus alterius in triangulo albo, sic & B D est terminus primæ proportionis, & BC fundamentum secundę proportionis in triangulo nigro.

DEFINITIO III.

Secundùm extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cùm, vt tota ad maius segmentum, ita maius segmentum fuerit ad minus.

Si linea data A B, ita diuidatur in C, vt correspondeat eadem proportione simili tota ad maius segmentum A C, vt idem maius segmentum A C ad minus C B refertur; tunc dicitur secta in C extrema, & mediâ ratione.



DEFINITIO IV.

Altitudo cuiuslibet figuræ est, perpendicularis à vertice ad basim deducta.

Ptolomæus in libro de Analemmate Inquit. Mensuram debere esse certam, & determinatam. Propterea, cùm omnes rectæ lineæ; quę à vertice alicuius figuræ ducuntur incertæ sint, & indeterminatæ, meritò sola perpendicularis rationem mensurę sibi vendicat, & altitudinem cuiuslibet figuræ metitur; sic figuræ Q C A P altitudo est PC cadens in latus QA. Potest tamen quodlibet aliud latus constitui pro basi, & linea perpendicularis à remotiori angulo deducta (acumen enim illius

an-

anguli, vertex est) dicitur altitudo figuræ illius, sic V A in latus C Q demissa erit altitudo quoque figuræ. Nota definitione de compositione Rationum, quam ponit hic Euclides esse supra explicatam Tract. 9. Exp. 5. Def. 7. part. 1.

DEFINITIO V.

Parallelogrammum secundùm aliquam rectam lineam applicatum deficere dicitur parallelogrammo; quando non occupat totam lineam; Excedere verò quando occupat maiorem lineam, quam sit ea secundùm quam applicatur; ita tamen, vt parallelogrammum, quod deficit, vel excedit illi applicato candem habeat altitudinem, quam ipsum parallelogrammum applicatum; & constituat cum eo totum vnum parallelogrammum.

Sit data recta linea A B, super quam constituatur parallelogrammum A C D E, cuius latus A C totam longitudinem lineæ AB non æquet, sed desit C B; tunc parallelogrammum A E erit deficiens,

& si interrogetur, quo defectu? hic defectus erit parallelogrammum E B nigrum, occupans reliquū lineæ C B, & eandem altitudinem cum deficiente A E obtinens, & cum eo parallelogrammum vnicum, vt D B constituens. Deinde sit linea A C, & ei applicetur parallelogrāmū maius B D, quod ipsā excedat latere AB in parte CB; tunc parallelogrammum erit abundans, aut excedens; Excessus autem erit parallelogrammum nigrum E B habens eandem altitudinem, cum prædicto BD, & cum eo idem parallelogrammum constituens DB.

DEFINITIO VI.

Homologæ sunt quantitates, cùm, vna, fundamenta, & antecedentia proportionem, altera terminos continet, vel consequentes.

Cum itaque aliqua quantitas habet in se fundamenta, & antecedentia rationum, alia terminos correspondentes, illę quantitates dicuntur homologæ.

V. g in fig. def. 1. Si sit crus AB albi ad crus BC alterius nigri, vt AE albi ad BD nigri; dicuntur triangula figuræ homologæ cum fundamenta ambo AB, & AE, sint in albo, termini BC, & BD ambo in nigro.

EXPENSIO II.

De proportione laterum triangulorum.

Cum triangula principium figurarum sint, & ea ex quibus figuræ reliquæ constituuntur: Hinc est, quòd in primis de proportione laterum agatur, quæ ea ambiunt, atque constituunt.

THEOR. I. PROPOS. I. Euc. 1.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

Cum triangula, & parallelogramma ex def. 4. habeant altitudinem eandem, cum fuerint constituta inter easdem parallelas, ob eandem perpendicularem, quam consequuntur. Constituantur primo duo triangula nigra inter parallelas AD, & BG. Dicit, quòd hæc triangula proportionem similem ad inuicem possident, quam bases.

Quod vt probetur in parallela, quâ bases insunt, assumendæ sunt basibus æquales, nimirum basi BH trianguli BHA vna æqualis, quæ sit H C, coniungendæque sunt C & A, fietque triangulum H A C æquale triangulo nigro sibi contermino ex 1. Coroll. propos. 39. primi.

Rursusque alteri basi F R trianguli nigri assumendæ sunt æquales, V. g. duæ R O, & O G, coniungendæque sunt rectis O D, & D G, facientq; triangula ROD, & ODG ex Coroll. 2. prop. 40. primi æqualia nigro FDR.

Probatur. Bases triangulorum alborum equales sunt basibus nigrorum triangulorum; ipsaq; triangula suis triangulis conterminis probata sunt ex Coroll. 1. propos. 40 primi æqualia: Ergo sunt æquè multiplicia basis, & triangulum album basi suæ conterminæ, & nigro triangulo B A H pro priori pari. Sicut triangula duo, duoq; eorum bases RO, & OG sunt æquè multiplices eiusdem basis F R, & trianguli nigri F D R pro secundo pari: nimirum bases quidem basibus multiplices, sicut triangula triangulis.

Cum ergo in quacunque multiplicatione basis BH, & trianguli BAH æquè multiplices in primo pari crescant, vel decrescant, vel æquentur pariter relatæ ad æquè inuicem multiplices basis FR, & trianguli nigri FDR in secundo pari; dicendum est ex defin. 9. tract. 9. triangulum nigrum BAH ad nigrum F D R eam habere proportionem, quam habet basis BH ad basim FR, & ideo, quòd basium ad bases, & triangulorum ad triangula sit proportio similis.

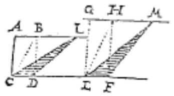
Probatur quoque de parallelogrāmis. Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione ex 18. lib. 5. Sed triangula sunt dimidia parallelogrammorum ex propos. 39. primi: Ergo cum triangulis in eadem sunt ratione; Sed triangula in eadem sunt ratione, vt bases; Ergo, & parallelogramma. Et erit parallelogrammum BQ ad parallelogrammum RP, vt basis BH ad basim FR.

COROLLARIVM.

Colligitur ex Commandino; quòd, si triangula habeant æqualem, vel eandem basim se habere ad inuicem, vt altitudines, V. g. triangulum C D L nigrum, & triangulum E M F nigrum erunt inuicem, vt altitudines, nempe perpendicu-

lares

lares punctatæ BD, & HF; Namque, si trahatur FH,& CB erunt triãgula punctata CED,& HEF, vt altitu lines BD, & HF pro basibus vsurpatę, siquidem erunt inter parallelas AC, & DB, & inter FH, & EG:



Sed triangula punctata sunt æqualia nigris ex prop.39. 1. Coroll. vtpote inter easdem parallelas, & super eandẽ basim constituta: Ergo nigra triangula in eadem proportione sunt, ac altitudines,& vt altitudo BD ad altitudinem FH,sic CDL ad EMF; quòd & dicendum est de parallelogrammis, cùm sint dupla triangulorum, prout in probatione propositionis dictum est.

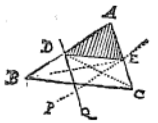
THEOR. II. PROPOS. II. Eucl. 2.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea,hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera;& si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones iuncta fuerit; recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

ASserit; quòd, si in aliquo triangulo, vt in triangulo ABC ducatur parallela ad aliquod laterum V.g. DE, *hæc proportionaliter secabit crura reliqua* AB,& AC, & hoc pro prima parte.

Ad quod demonstrandum ducit lineas DC, & EB punctatas, quæ faciunt duo triangula minora super eandem basim DE constituta, & inter parallelas BC, & DE, nimirum triangulum DEB, & aliud DEC, quæ ex propos.39. 1.Cor.1. erunt æqualia.

Probatur triangulum nigrum est ad punctatum DEB, vt basis AD ad basim DB;



Rursus idem triangulum nigrum est ad aliud punctatum DEC in eadem proportione veluti est basis AE, ad basim EC ex prop.1. huius.

Sed, vt triangulum nigrum se habet ad vnum ex triangulis punctatis V.g. BDE, ita se habet ad aliud DEC, ex propos.7. quinti, cum vt dictum est hæc triangula sint æqualia; Ergo vt se habet basis trianguli nigri DA ad basim punctati DB; ita se habet eiusdem trianguli basis AE ad basim punctati EC. Quare crus AB est sectum proportionaliter in D eã proportione, quã sectum est crus AC proportionaliter in E.

Secunda verò pars conuertit priorem, & dicit, quod si trianguli latera ABC secta fuerint proportionaliter in D, & E *linea,quæ puncta coniunget erit parallella*.

Probatur verò ex eò, quòd triangula DEC, & DEB sint æqualia; Ergo ex Coroll. 2. propos.39. primi inter easdem parallelas DE,& BC sunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem triangulo nigro sunt proportionalia. Sunt etiam proportionalia eidem nigro ex prima huius propos. quia habent bases eiusdẽ nigri, basibus similiter proportionales,& est DA ad DB,vt AE ad EC ex hyp. & insuper sunt inter easdem parallelas AB,&PE,& inter AC,& DQ; siquidem cum desinant in eundem verticem; etiam inter parallelas easdem erunt. Ergo vt basis DA ad basim DB; sic triangulum nigrum ad triangulum BDE: & vt AE ad EC bases; sic triangulum nigrum ad triangulum DEC: Ergo alibi DEC, & BDE erunt inuicem æquales ex 9. quinti. Quare ex Coroll.2. propos.39. erunt inter parallelas.

THOR. III. PROPOS. III. Eucl.3.

Si trianguli angulus bifariam sectus fuerit; secans autem angulum recta linea secuerit,& basim; basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera.

Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem deducitur,bifariam secat ipsum angulum.

SIt triangulum ADC; diuidaturque aliquis angulus eius V. g. A bifariam per rectam AB, affirmat primò, *quod hæc in B puncto secat basim DC in duas portiones, quæ inuicem ita proportionatæ sint, vt sint connexa sibi crura*, V. g. ita est DB ad BC, vt DA ad AC. Quòd, vt probet, ad AB à puncto D ducit parallelam DH; deinde prolungat latus AC vsque quo coeat in H. Probat autem coituras has lineas, quia anguli niger, albusque simul ad D,equalis angulo B nigro ob parallelas ex prop.30. & niger ad C ex Coroll.6. prop.17. sunt minores duobus rectis, (vt in omni triangulo euenit) deberent verò esse æquales ex propos.29. ad hoc, vt DH, & HC essent parallele, & ideo non possent coire.

Ad hoc autem, vt propositio immediatè probetur,probandũ est priùs, quòd crura DA, & AH sint inuicem æqualia.

Id ostenditur ex æqualitate angulorum. Nam, cùm crus DA incidat in parallelas DH, & AB, faciet angulos alternos equales; nimirum nigrũ ad D,& album cruce signatũ ad A ex propos. 30. primi. Rursusque cùm crus HA incidat in easdem parallelas HD,& BA faciet angulum externum nigrum ad A opposito, & interno H æqualem ex propos.30. primi. Sed angulus niger, & cruce notatus ex hypothesi facti sunt æquales; Ergo, & angulus H, & D niger erunt æquales. Quare ex propos.15. primi latera hos angulos æquales subtendentia erunt æqualia; Quo supposito probatur propositio.

Eam proportionem, quam habet portio AH ad AC eandem habet, cum sit crus ei æquale, DA ad AC ex propos.7. quinti. Sed pars basis DB, vtpote inter parallelas DH, & AB intercepta, parti alteri BC simili proportione refertur, quã HA ad AC ex 2. huius propositione. Ergo BD ad CB dicit etiam similem proportionẽ, quam dicit crus DA ad AC.

Se-

Secunda pars est opposita primæ, dicitque è contrariò, quòd si basis secta sit in partes proportionales eã proportione, quam latera inter se habent, *quòd angulus A sectus erit bifariam*, suppositaque praxi antecedenti trahendi parallelam HD, & prolungandi latus AH, ita probat. Angulus ad A cruce signatus est equalis angulo alterno nigro ad D, alterq; niger ad A est æqualis angulo H externus interno ex prop.30.Sed isti niger D,& H sunt inuicem æquales: Ergo, & angulus cruce signatus; & niger ad A sunt inuicem æquales; Quare angulus ad A trianguli DAC propositi sectus est bifariam. Angulus autem H, (quòd probandum est) æqualis inuenitur angulo nigro ad D ex 14.prop.primi; Quia latera ijs subtensa DA, & AH æqualia sunt. Sunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem AC eandem dicunt rationem: Eandem verò dicunt rationem ad AC ex 11.quinti: quia dicunt eandem rationem ad AC, quam pars basis DB ad partem BC. & linea DA quidem ex hypotesi, HA vero ex 2. huius, quod sit inter parallellas, vt pars DB; parallelæ enim sunt ex constructione DH, & AB.

THEOR. IV. PROPOS. IV. Euc.4.

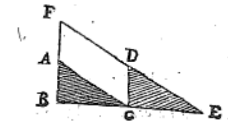
Æquiangulorum triangulorum, proportionalia sunt latera; quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

AD probandam hanc propositionem aliqua priùs in ipso probationis apparatu,& praxi præsupponenda sunt,& etiam probanda. Itaq; si dẽtur duo triãgula nigrũ nigriusq; quę habeant angulos correspondentes æquales V.g.angulũ ad A nigerrimum angulo ad D nigro, angulum ad C nigerrimum B angulo nigro ad C. Dicit, quòd *crura,quæ claudunt æquales angulos,sint inuicem proportionalia*, pro prima parte propositionis: nimirum dicere V. g. crus BC ad AC similem proportionem, quam dicit quoque CE ad ED; quoniam claudunt æquales angulos nigerrimum ad C & nigrum E,& sic dicas de alijs. Quod, vt ostendatur ponenda sunt duo triangula super vnam rectam BE, & prolunganda sunt latera BA, & DE ad hoc, vt fiat triangulum maius BFE: namque supponit necessariò conuenire in F, eo quòd præsupponat angulum B, & angulum E ambos non posse esse rectos, & consequenter ex propos. 29. primi non posse esse parallela prolungata crura BF,& EF. Anguli verò illi recti ambo esse nequeunt; quia cuiuscunque trianguli duo anguli sunt duobus rectis minores; si autem B ponatur rectus nigerrimus ad C erit minor recto, & consequenter angulus ei æqualis E.

Sed antequam probetur propositio probandum est primò quoque, rectas BF, & CD esse parallelas. Id verò ostendetur. Si consideretur BC, quæ incidit in eas,& facit angulum DCE nigrum externum angulo ad B nigerrimo interno, & ad easdem partes, vt ex hypotesi constat, æqualem; Quare ex probatis 29.primi BF,& CD parallelæ sunt; cùm incidens in eas BE faciat angulum externum interno, & easdem partes æqualem.

Probandum quoque est secundo lineas AC, & FE esse parallelas ob eandem prorsus causam, Nam eadem linea BE incidens in eas in punctis C, & E facit angulum ACB nigerrimum nigro E æqualem,vt ex hypothesi constat: Vnde spatium illud album FADC erit parallelogrammum, vtpote parallelis contentum. Quare,& latera correspondentia FD, & AC erunt æqualia ex 34. propos. primi, necnon, & latera FA, & DC.

Progres. 1. Probatur propositio lineæ FB, & DC parallelæ sunt. Ergo ex 2. propos. huius DE antecedens ad DF sequentem, vt CE antecedens ad BC sequentem proportione referuntur. Quare *permutando*, vt ex 19. propos. quinti, vel ex



def.16.ipsa crura triãguli nigri,quę fecimus antecedentia erunt ad inuicem, vt partes FD, & BC quas posuimus tanquam consequentes, & erit DE ad CE, vt FD ad BC: Sed pars FD æquatur ex prædictis cruri AC: Ergo crus DE erit ad crus CE nigri trianguli, vt crus AC cruri BC nigerrimi. ambientia angulos æquales E nigrum, & C nigerrimum.

Progres. 2. Idem eodem argumento probabitur de cruribus AB, & BC, quæ inuicem eã proportione consentiant,quã CD,& CE. Nam AC est parallela ipsi FE: Quare portio cruris CE,vt antecedens ita respondebit proportione ad aliam BC sequentem, vt AF pars alterius cruris, vt antecedens ad aliam partem BA sequentem. Quare *permutando*, ita erunt antecedẽtes inuicem CE ad AF, vt sequentes inuicem BC ad BA: sed AF est equalis cruri CD: Ergo CE ea proportione respicit CD, quã BC respicit BA. Et iam de cruribus angulos æquales C nigrum, & B nigerrimum ambientibus propos. ostensa est; probatur tandem de cruribus æquales angulos D,& A ambientibus. Vtendo argumento ex *æqualitate*, quod docet 23. propos. quinti.

Progres. 3. Nam iam habes primam quantitatem cruris DB habere ad secundam CE eam proportionem in priori triangulo nigro, quam habet prima quantitas CA ad secundam BC in secundo triangulo nigerrimo ex primo progressu. Et ex secundo,quòd secunda quantitas primi nigri triãguli CE respicit DC tertiam ea proportione, qua secundi nigerrimi, trianguli quantitas lineæ CB respicit tertiam BA. Ergo ex æqualitatis argumento prima cruris quantitas nigri DE, ita refertur ad tertiam DC, vt trianguli nigrioris secundi quantitas AC relationem dicit ad AB.

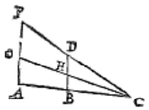
Secunda verò pars patet ex definitione 6. homologarum quantitatum; nempe similium,similes enim quantitates dicuntur illæ, quæ geminæ in aliqua quantitate possunt summi; vt antecedentes, vel vt consequentes. Hoc autem habent latera triangulorum æquiangulorum, cum æqualibus angulis subtenduntur. Nam, vt potes considerare in processu probationis, latera, quæ vt antecedentia sumpta, vel consequentia sunt, fuere semper ea, quæ æqualibus angulis subtensa fuere, & ideo crus AC est simile cruri DE; quia considerata fuerunt, vt antecedentia; nempe,vt fundamenta proportionis,quę angulis æqualibus ad C ad C nigro, & B subtenduntur. Sic CE, & EC sunt similia. homologa; quia vt sequentia possunt assumi: nempe, vt termini proportionis, sunt autem subtensa angulis A, & D æqualibus, & ita de alijs duobus DC, & AB.

COROLLARIVM I.

HInc fit. Lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Nam in triangulo EBF, Cùm lineæ FB, & DC parallelæ sint, incidens in eas recta FE faciet angulum nigrum externum D interno F, & ad easdem partes ex 30. 1. æqualem. Rursus incidens BE idem præstabit faciendo angulum externum C nigrum æqualem interno B, & ad easdem partes; angulus verò E est communis. Ergo erit æquiangula pars nigra CDE toti triangulo FBE. Quare habebit latera æquales angulos ambientia proportionalia, & proinde ex def. 1. huius similia erunt triangula.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque: Quod si basi V. g. AF parallela BD agatur, & ab angulo C, cui subtensa est, V. g. recta ad basim ducatur, quæ parallelam diuidat, & basim; eas diuidere in partes proportionales, esseque DH ad HB, vt PO ad OA. Nam ex præcedenti Coroll. triangulum totum CAP, & triangulum eius pars DBC sunt similia. Rursusque triangula OPC, & pars eius DHC. Et



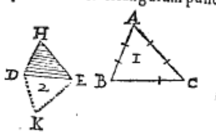
sic triangula HBC, & OAC similia sunt. Itaque ea proportione respiciet CD crus CP, quà DH refertur ad PO. Rursusque eadem CD ad eandem CP referetur, vt BD ad PA itaque ex 16. lib. 5. erit DH ad PO, velut DB ad PA. Quamobrem *permutando* fundamentum, & pars DH respiciet fundamentum, & totum DB, vt terminus, & pars PO respicit terminum, & totum PA. Quare diuidendo eādem proportionem dicet pars DH ad partem HB, vt pars PO, ad partem OA.

THEOR. V. PROPOS. V. Eucl. 5.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula quoque erunt, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

SIt triangulum ABC primum. Aliudque DHE nigrum, cuius latera sint lateribus primi proportionalia, idest sit DH ad DE, vt BA ad AC V. g. comprehendant duas tertias partes, quorumlibet correspondentium. Dicit, quod hoc triangulum nigrum erit primo æquiangulum.

Quòd, vt probet facit triangulum punctatum



DEK triangulo primo æquiangulum BAC.

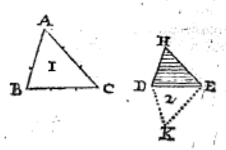
Probatur. Nam crus AB ex 4. huius dicit eam proportionem ad basim BC primi trianguli vt crus punctatum DK ad suam basim DE.

Sed ad eandem basim dicit quoque ex hypothesi eam proportionem, quam BA ad BC crus DH trianguli nigri. Ergo æqualia erunt hæc crura DH, & DK ex 9. quinti. Eodem modo argumentum procedet de crure punctato EK, quod erit æquale cruri HE trianguli nigri; quia dicunt eandem proportionem ad suam basim DE, quam crus CA primi trianguli ad basim suam BC. Ergo ex 21. prop. primi angulus K angulo H est æqualis; siquidem basis est communis, & crura correspondentia æqualia. Quare, & anguli ad basim correspondentes erunt æquales nimirum niger, & albus ad D, & niger, & albus ad E. Sed anguli trianguli punctati ex constructione sunt equales angulis primi trianguli BAC: nimirum angulus D albus angulo B. Ergo, & angulus correspondēs niger D. Item angulus E albus angulo C: Ergo & correspondens niger E eidem erit æqualis. Et tandem K angulo A quare, & angulus H niger eidem A erit æqualis vnde triangulū DHE nigrum angulos primo BAC eos æquos habet, qui homologis cruribus insunt.

THEOR. VI. PROPOS. VI. Eucl. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt triangula, æqualesque angulos habebunt sub quibus homologa latera subtenduntur.

HOc est quasi idem Theorema, ac antecedens, siquidem eodem argumenti methodo probatur, similique praxi initur. nihilque aliud diuersi habet; nisi quod diuersam conditionem supponit; nempe vnum angulum vni æqualem, lateraque proportionalia, quæ hunc angulum ambiunt. Si itaque triangulum BAC primum, & aliud nigrum, quod habeat angulum ad D nigrum angulo primi B æqualem; sintque latera illud concludentia DH, ad DE lateribus, BA, ad BC proportionalia. Dicit reliquos angulos reliquis esse æquales. Nam sic verificabitur quoque secunda pars, nempe similia, & homologa esse illa latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur: nimirum BA, & DH, qui subtendunt angulos æquales E nigrum, & C album esse similes, vt antecedentes proportionum, & BC, & DE bases, quæ angulo A, & H subtenduntur esse quoque similes, V. g. terminos proportionum. Vt autem id probetur, faciendus est punctatis lineis angulus ad D albus æqualis angulo B, & angulus ad E albus æqualis angulo C, vt in præcedēti propos. angulusque K ex Coroll. 2. propos. 17. primi erit æqualis angulo A: Quare triangulum punctatum erit æquiangulum primo triangulo BAC.



Probatur. Nam triangulum punctatum est æquiangulum triangulo primo. Sed triangulo huic

huic punctato est æquiangulum triangulum nigrum; Ergo triangulum nigrū est æquiangulum triangulo primo. Quod autem triangulum nigrum sit æquiangulum triangulo punctato, probatur eundo per singulos angulos sufficienti singulorum enumeratione, angulus ad D niger est ex hypothesi æqualis angulo B primi trianguli; vt eidem angulus albus punctati ad D ex constructione est æqualis; Ergo albus, & niger ad D inuicem æquales sunt. Reliqui verò anguli probabuntur æquales ex æqualitate laterum correspondentium. Nam ex 22. propos. primi, triangula habentia crura duo equalia ambientia angulum æqualem, æqualia quoque sunt quoad basim, & reliquos angulos. Hæc autem triangula habent duo crura duobus æqualia. Crus enim DE in his triangulis punctato, & nigro est commune; quare remanet solum probandum de crure DK, & DH, quòd sint æqualia.

Probatur verò; quia DK eam proportionem dicit ad DE; quam dicit BA ad BC primi trianguli ex 4. huius propos. cum sint æquiangula: ex effectione: Sed eam proportionē, quam dicit BA ad BC, & ideo, quā DK ad DE ex 16. l. 5. imitatur quoq; ex hyp. proportio DH ad DE in nigro triangulo. Ergo ex prop. 9. l. 5. equalia sunt inuicem DH, & DK, vtpote vni basi ED eandem proportionem dicentia.

Quapropter, cùm iam habeamus duo crura punctati; & duo nigri trianguli angulos ad D nigrum, & albū ambientia æqualia, anguli reliqui ad E niger, & albus, & angulus H, & K erunt æquales ex prop. 22. primi, & ideo duo triangula nigrum, & punctatum erunt æquiangula.

THEOR. VII. PROPOS. VII. Eucl. 7.

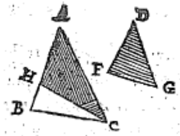
Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem; circa verò alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum autem simul vtrumque, aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

DEntur duo triangula semialbum, & nigrum, quę habeant angulos nigros æquales E. g. A, & D, & crura alios angulos C, & G ambientia proportionalia, scilicet BC ad CA in semialbo proportionetur, veluti FG ad GD in nigro. Reliqui verò anguli spetie non dissonent; sed sint aut simul minores recto, aut simul non minores.

Idest reliquus angulus albus B sit acutus, si F est acutus; aut si B sit obtusus, talis quoque sit F; aut si B est rectus, talis quoque sit F. Nam si spetie dissentiunt, & vnus esset acutus, alter obtusus, hac sola vltima conditione defficiente propositio non verificaretur.

Probatur verò ostendendo datis ijs conditionibus duorum angulorum æqualium, & laterum proportionalium circa alios duos, & speciei eiusdem reliquorum, reliquos specie solum notos esse inuicem æquales, & consequenter ex propos. 27. lib. primi etiam reliquos duos proportionalibus lateribus septos, esse equales, & hoc ostendendo alterū eorū, nec maiorē esse posse, nec minorē.

Casus 1. Sit itaque angulus A angulo D æqualis, anguli B, & F specie noti, nimirum minores recto, & angulus C sit clausus cruribus proportionalibus, & sit AC, ad CB, vt anguli G crus DG ad crus FG.



Dico angulū C angulo G esse æqualem. Quod si non credatur: Sit, vt inquiunt aduersarij, semialbus angulus C maior; quam G, qui vt esset æqualis ipsi G, sufficeret pars nigra C. Igitur triangula nigra inuicem erunt æquiangula; quod habeant omnes angulos æquales, & quidem A, & D ex hypothesi; anguli verò G, & C ex aduersarijs; anguli H niger, & F ex necessariâ consequentiâ ob prop. 17. l. 1. Cor. 2. Quāobrem habebunt latera proportionalia ex propos. 5. huius, & CA erit ad CH, vt DG ad GF: Sed vt AC ad BC, ita proportionatur ex hypothesi DG ad GF: Ergo ex prop. 16. quinti, vt AC refertur proportione ad CH: Sic idem AC refertur ad BC: Quare ex 9. quinti, cùm eadē eis eandē dicant proportionem, crura HC, & CB erunt æqualia; ideoque ex propos. 14. primi H, & B anguli albi, vtpote æqualibus subtensi cruribus, æquales. Sed angulus B ex hypothesi est minor recto: Ergo H albus erit minor recto, & consequenter niger H maior recto: Sed ostensum est angulum nigrum H esse ęqualē angulo F nigro, & ideo minorē recto. Ergo esset minor, & non minor recto, quod esse nequit.

Casus 2. Sit deinde ABC niger, & angulus A in ipso æqualis angulo D, & sit AC, ad CH; vt DG ad GF, & ponantur, vt priùs H angulus niger, & F, minores recto, & dicatur ab aduersarijs, angulum nigrum C esse minorem angulo G, qui, vt esset æqualis, deberet esse semialbus C. Tunc triangulū BAC semialbū nigro erit æquiangulū, & B angulo F ex prop. 17. l. 1. Cor. 2. ob angulos A, & D æquales ex hypothesi, & semialbum C, & nigrum G ex aduersarijs.

Ergo erit ex 5. huius AC, ad BC, vt DG ad GF. Sed ex hypothesi est etiam AC, ad CH, vt DG ad GF; Ergo erit AC ad BC, vt AC ad HC: Erunt itaque æquales ex 9. quinti HC, & BC. Sed angulus H niger est æqualis angulo F minori recto, ex hypotesi; ergo H albus maior recto, & B ei æqualis ob laterum, quibus insistunt æqualitatem ex propos. 14. maior quoque recto contra ostensa: Ostensus est enim æqualis angulo nigro F, qui ponitur minor recto.

Casus 3. Sint deinde angulus B, & augulus F non minores duobus rectis idest, vel sint recti, vel obtusi, & dicatur ab aduersarijs, angulum C semialbum esse maiorem angulo G, qui, vt esset æqualis, deberet esse niger C. Itaque vt priùs triangula nigra erunt æquiangula, ob angulum A ex hypothesi angulo D nigro æqualem, & angulum nigrum C ob dictum aduersariorum angulo G æqualem; & ideo angulus H niger erit æqualis angulo F: lateraque erunt proportionalia, eritque AC ad CH, vt DG ad FG, & ex hypothesi AC ad CB, ita DG ad GF. Igitur erit AC ad CH, ita AC ad CB: ex 16. l. 5. Erunt ergo equales ex prop 9 l. 5. CH, & CB. Ideoque angulus albus H erit æqualis angulo albo B. Sed angulus B ponitur, vel rectus, vel maior recto. Ergo talis esset angulus H albus, & sic cōtra propos. 17. duo anguli trianguli essent æquales duobus rectis, vel eis maiores, & angulus niger H esset minor recto, qui ostensus est maior.

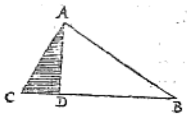
Casus 4. Sic quoque ostendetur propositio; si dicant aduersarij angulum ad C esse minorem angulo C, vt supra ostensum est in simili casu 2.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII. Eucl.8.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit, quæ fiunt à perpendiculari triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC angulus BAC sit rectus, à quo ad basim perpendicularis agatur AD. Dicit duo triangula, in quæ à perpendiculari CAB triangulum partitur album, & nigrum *esse similia toti semialbo, & etiam inuicem*.

Probatur. In triangulo toto angulus totus semialbus A rectus est; Et pariter rectus est angulus D albus trianguli penitùs albi: Angulus verò ad B est communis ergo ex Coroll. 2. propos. 17. reliquus niger C albo apud A erit æqualis: Vnde triangulum CAB totum erit æquiangulum suæ parti albæ DAB.



Cùm itaque hæc triangula sint æquiangula; homologa erunt ex propos. 4. huius ea crura, quæ angulis æqualibus subtenduntur. Ideoque sicut est BC basis angulo recto opposita, vt antecedens sumpta ad crus CA in semialbo triangulo: Sic est BA basis albi trianguli angulo recto opposita ad crus DA angulo B oppositum, & sicut BA crus ad AC crus maioris trianguli sic DB crus ad DA in minori. Quare latera, quæ æqualibus angulis opponuntur erunt homologa: Quia bases angulis rectis oppositæ deseruiunt pro fundamentis, dicitur enim, sic est CB basis ad crus CA, vt basis BA ad crus DA sicut etiam crura pro terminis.

Probatur quoque de parte nigra eodem modo. Nam si in triãgulo nigro angulus D niger angulo A semialbo æquatur; cùm ambo recti sint: angulus C niger cõmunis: Ergo reliquus niger apud A reliquo angulo B ex Coroll. 2. prop. 17. erit æqualis. Cum ergo triangulum nigrum, & semialbum totum CAB sint æquiangula; patet esse similia. Vnde, cùm album, & nigrum sint similia semialbo toti; erunt etiam similia inuicem.

COROLLARIVM I.

MAnifestum hinc euadit perpendicularem ab angulo recto in basim cadentẽ esse mediam proportionalẽ inter duo basis segmenta, & eã proportionem dicere BD ad AD: quam AD ad CD. Siquidem, qualis est proportio AB ad AC, talis est proportio DB ad DA. Rursusque qualis est proportio BA ad AC, talis reperitur proportio DA ad DC: Ergo ex prop. 16. lib. 5. eadem proportione refertur DB ad DA quâ DA ad DC, & id euenit, quod DA sit crus minus respectu albi, & respectu nigri sit crus maius, & duo munia obeat.

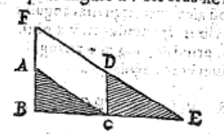
COROLLARIVM II.

FRuitur quoque; Crus quodlibet esse medium proportionale inter totam basim, & illam basis partem, cui vnitur. Nam ostensum est; quòd ita se habet BC basis ad crus BA in triãgulo maiori, vt eadẽ BA basis in minori ad DB crus. Sic quoq; se habet basis CB ad crus CA, sicut se habet idem crus CA, & basis ad crus CD: Et hoc euenit. Quia CA, AB crura sunt, simul bases, & duplici munere funguntur, ob quod possunt deseruire pro termino, & fundamento.

THEOR. IX. PROPOS. IX. Euc.32.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, & secundùm vnum angulum componantur, ita vt homologa latera sint etiam parallela, tunc tertium vtriusque latus in rectam lineam coibit.

SIt triangulum propos. 4. BAC nigerrimum, & CDE nigrum, & ita collocentur, vt AB oppositum angulo apud C, sit parallelum cruri CD oppositum æquali angulo E. Sic crus AC parallelum



cruri DE, quæ æqualibus angulis nigerrimo apud B, & nigro apud C opponuntur. Et ita erunt crura homologa parallelè posita; quòd crura angulis opposita æqualibus sint proportionum, aut fundamenta, aut termini. Dico crus BC & CE, quæ remanent in vnam rectam extendi, quæ est BE.

Probatur: Angulus apud A nigerrimus, qui æquatur albo apud C, quòd AC incidat in parallelas BF, & CD ex 30. primi. Angulus item apud B nigerrimus, qui nigro apud C æqualis est. Angulus tandem nigerrimus apud C, hi tres faciunt, cũ sint anguli eiusdẽ triãguli duos angulos rectos, ergo nigerrimus apud C, & albus æqualis nigro A, & niger æqualis nigerrimo apud B etiam ipsi erunt ęquales duobus rectis. Ergo ex prop. 14. l. 1. lineæ BC, & CE in directum erunt; cum efficiant, cum linea AC, vel CD angulos duobus rectis æquales.

EXPENSIO III.

De reciprocatione laterum in figuris.

LIcet hic solùm Euclides de parallelogrammis, & triangulis agat, cùm tamen sint hæ figuræ omnium figurarum initia, hæc expensio videtur ad omnes posse extendi, vtpote omnium reciprocationem pertractans. Reciprocatio verò est vt diximus, cùm fundamentum proportionis est in vna figura, terminus verò eiusdem in alia, & in hac alia fundamentum similis proportionis reperitur, & terminus in priori, ita vt quælibet combinatio partim in vna figura sit, partim in alia.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 14.

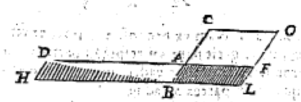
Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos.

Et quorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circum æquales angulos, & vnus angulus alteri æqualis, illa sunt æqualia.

DVas partes habet hęc propositio, & secunda primam conuertit. Prior itaque est, quod si dentur duo parallelogramma æqualia, quę insuper angulum angulo æqualem obtineant, hęc habitura quoque latera, quæ sunt circa æquales angulos reciproca.

Sint itaque rectangula duo albũ AO, & DO semialbum. Dicit latera horum esse reciproca, quæ ambiunt angulos æquales, & ita esse DA huius semialbi ad AF alterius albi, vt alterius latus AC est ad huius latus BA.

Ad probationem verò præsupponendum est, quòd, si duo parallelogramma vniantur in vertice æqualiũ angulorũ, ita poterũt cõstitui, vt latera in vnã rectã coeant, & latus DA v. g. parallelogrãmi DB semialbi vnam rectam faciat cum latere AF alterius albi. Hoc verò colligitur à propos. 12. lib. 1. vbi dicitur lineas rectas angulos æquales ad verticem efficere, cùm vnã coeunt. Ideoque cum anguli albi apud A huius sint æquales tum parallelogrammi DB, tum alterius AO, & latus DA, cum AF penes rectam lineam sit positum, necesse est, vt etiam aliud latus AC in directum sit cum latere AB;



alioquin sequeretur angulos ad verticem apud A esse æquales, & lineas in directum nequaquam positas esse.

Quo supposito, producendum est latus EH vsq; dum occurrat lateri OF producto in L, & iam habemus parallelogrammum nigrum AL.

Et sic Probatur propos. Parallelogrammum nigrum est eiusdem altitudinis, ac album AO. Ergo ex 1. propos. huius erunt inuicem vt bases, & ita erit parallelogrammũ AO ad nigrum, vt AC basis ipsius ad AB basim nigri, & alterius DB communis. Eodem pacto philosophare de semialbo respectu nigri. Nam, cùm sit eiusdem altitudinis cum ipso nigro, respiciet illud, vt sua basis DA, nigri respicit basim albo parallelogrammo communem AF, eritque semialbum ad nigrum, vt DA ad AF.

Sed ex 7. quinti, cùm alba parallelogrãma æqualia sint inuicem, ex hyp. eidẽ nigro eandem dicunt proportionem. Ergo, & basis CA ad basim AB eandem dicet proportionem, quam basis DA ad basim AF. Quare latera reciprocè se respiciunt. Secunda pars primam conuertit; asseritque, quòd si latera DA, & AF; sic AC, & AB circa angulos æquales apud A reciproca fuerint in proportione ita vt proportionem, quæ est CA, ad AB imitetur proportio, quæ est DA ad AF, rectangula ipsa fore æqualia. Supponitque probatio eandem constructionem, quæ peracta est.

Probatur ex 9. quinti, si parallelogramma albũ AO, & DB semialbum ad nigrum eandem dicent proportionem, æqualia erunt: sed eam dicunt: Ergo æqualia sunt. *Minor* verò argumenti constat: Quia parallelogramma eiusdem altitudinis eam dicunt proportionem, quam suæ bases ex 1. huius. Ergo parallelogrammum AO album, aliud nigrum eâ proportione spectabit, quâ sua basis AC, spectat basim AB nigri cùm sit eiusdem altitudinis, ac nigrum. Ideoque asseras de parallelogrammo semialbo DB, quòd cùm sit eiusdem altitudinis cum nigro eodem, eam dicet proporportionem, quam sua basis AD ad basim AF.

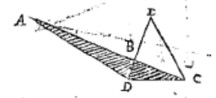
Sed basium DA, & AF proportio, quâ se respiciunt ex præsuppositione eadem est, ac basium AC, & AB, Ergo, & parallelogramma album AO, & semialbum DB eadem proportione respicient nigrum idem. Quare sunt æqualia ex propos. 9. lib. 5. citata.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl.15.

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, quæ circa æquales angulos.

Et quorum triangulorum, vnum angulum vni æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

DEntur duo triangula æqualia BEC album, & nigrum ADB habentia angulos, qui ad B æquales; Asserit, & crura fore reciproca in proportione; nimirum esse albi crus EB ad crus nigri BD, vt crus AB eiusdem nigri ad crus BC trianguli albi. Quod, vt probet; collocandi sunt tali modo triangula se in verticibus tangentia, vt crura vnius, cum cruribus alterius vnam rectam efficiant V. g. AB, & DC sicut crus EB, & BD. Hoc autem poterit fieri, vt in precedenti diximus propter angulos æquales ad B album, & nigrum, Coniunganturque D, C, & fiat triangulum nigerrimum DBC.



Probatur. Nam nigrum, & nigerrimum triangulum sunt eiusdem altitudinis, cùm conueniant in vertice D, Ergo ex propos. 1. huius, eam proportionem, quam triangula dicunt ad inuicem nigrum ad nigerrimum, dicent, & bases AB ad BC. Idem dicas de triangulo albo, & nigerrimo sunt enim eiusdem altitudinis, quòd conueniant in puncto C: Quare ex eadem prima huius, basis EB albi ad basim BD nigerrimi eandem dicet proportionem, quam album triangulum ad nigerrimum. Sed tum triangulum album, tum nigrum ex prop. 7. quinti, eo, quòd ex hypothesi sint æqualia candem dicunt proportionem ad nigerrimum: Ergo,

& crus EB, ad crus DB eandem dicet proportionem, quam AB ad BC.

Secunda verò pars Theorematis est conuersa præcedentis, & dicit; quòd si crus EB ad aliud reciprocum ED, dicat eandem proportionem, quâ refertur AB ad BC, æqualia fore triangula: Nam vt bases ita ex prop. 1. huius erunt quoque triangula album, & nigrum ad nigerrimum, cum sint eiusdem altitudinis: Quare, cum ex prop. 9. quinti, quæ eidem eandem dicunt rationem æqualia sint, sequitur vt æqualia quoque sint triangula album, & nigrum cum bases AB ad BC, & BE ad BD ex præsuppositione eandem proportionem dicant.

EXPENSIO IV.

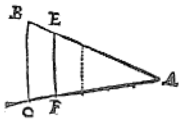
De lineis proportionaliter secandis.

VIdimus primo libro sectionem linearum in partes æquales: modo hìc illam intuebimur in partes proportionales; nec tamen sectionum modi omnes hac expensione concludemus: plurimi enim sunt; qui, cum non sint elementares, & tanquam principia generalia nō se habeant, nec necessarij ad elementa ipsa percipienda sint: imo multorum cognitionem supponant non dum haustam, vt queant intelligi, ideo ea in proprium tractatum reiecimus. Fuit autem necessarium, vt primo lib. fecimus, agere priùs de triangulis; vt hę operationes secandarū linearū ostēderētur.

PROB. I. PROPOS. XII. Eucl. 9.

A datâ rectâ lineâ imperatam partem auferre.

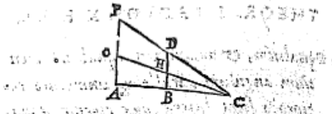
IMperetur, vt ex linea AB auferratur, V. g. quinta pars. Ex A ducatur recta AC, vtcunque, quę tamen angulum aliquem efficiat in A, & in hac linea AC tot partes ab A incipiendo signentur æquales assignatæ ad placitum magnitudini, quota pars est ea, quæ desideratur detruncari, vt in proposito exemplo, assumendæ sunt quinque partes, quia quinta detrahenda est, & ab vltima parte C ducenda est linea, quæ extremum alterius B coniungat, ita vt fiat triangulum ACB. Huic autem à puncto penultimo F parallela agatur FE, eritque EB pars quinta lineæ AB abscisa.



Probatur. Nam ex propos. 2. huius ea proportione, quâ refertur AE, ad EB, eâ ipsâ AF respicit FC. Ergo componendo, vt docuit argumentari 21. propos. quinti, ita respicit AB tota partem suam BE, sicut AC tota partem suam CF. Sed CF est quinta pars totius AC. Ergo & BE erit quinta pars totius AB.

COROLLARIVM

HInc deducitur, & à Coroll. 2. prop. 4. Posse quoque ab aliqua V. g. DB partes, quascunque placuerit, auferri. Si lineam ducas ei parallelam maiorem aliquam, quę sit AP, eamque diuidas in partes quascumque, E. g. in duas in O, de-

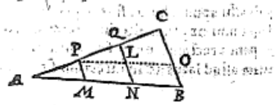


inde extrema, & omnia pūcta diuisionum ad idem quodcumque punctum C ducas, quod sit vltra lineam diuidendam minorem DB ita quòd in medio ipsa remaneat, & lineæ in punctum C conuenientes per eam transeant, vt sunt PC, & OC, & AC. Istæ enim diuident lineam propositam DB in partes proportionales ijs partibus, quas in PA fecimus: Eritque DH, & HB in linea DB, vt PO ad AO in linea PA; quod ostenditur in ipso Coroll. 2. propos. 4. cuius figuram hìc adhibemus.

PROB. II. PROPOS. XIII. Eu. 10.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

HÆc ferre est eadem, quæ superiori problemate, Sit recta AB secanda in tot partes, quæ proportionem eam inter se seruent, quam partes alicuius alterius datæ inter se conseruant. Constituatur itaque recta assignata AC tali modo, vt faciat cum diuidenda angulum A, & iunctis extremitatibus linea BC, ad hanc AB à pūctis diuisionū P, & Q ducantur parallelæ PM, & QN. Nam linea AB erit diuisa, vt propos. reposcit, in partes similes lineæ AC, vtque id probetur, ducatur PO punctata ad AB parallela.



Probatur. Nam ex propos. 2. huius, vt est AP ad PQ, ita se gerit pars AM respectu partis MN, ergo proportionales sunt eadem proportione AM, & MN, quá erant partes AP ad PQ.

Eodem modo valet argumentum de parte PQ, & QC, quæ inuicem eam proportionem seruabunt, quam in linea punctata partes PL, & LO ob eandem propos. huius 2.

Sed partes punctatæ PL, & LO sunt æquales partibus MN, & NB ex propos. 33. primi, quod in parallelis lineis signatæ sint, & à parallelis effectæ. Ergo etiam PQ, & QC ita sunt proportionales, vt MN, & NB.

COROLLARIVM

COlligitur hoc modo posse secari AB secundum proportionem quamcumque datam: Nimirum, si priùs signemus in AC indeterminata eas partes habentes eam proportionem, quam volumus, & cętera præstentur, vt priùs, quando linea AC vt in propositione, præsupponebatur iā diuisa.

COROLLARIVM

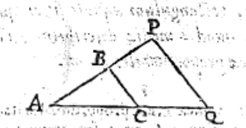
COlligitur quoque lineas duas proportionaliter in geminis punctis diuisas habere quoq; inter medias sectionum proportionales V. g. diuisa AC in Q nimirum in duas tertias partes, & in P nimirum in suam tertiam partem intermedia sectionū erit PQ, quę eam dicet proportionē cum AP, seu QC; quam dicit intermedia sectionum MN ad

ad AM, vel NB, si & AB similiter in easdem proportionales partes secetur in M, & N. Nam iunctis istis lineis, vt faciant angulum in A idem; quod in propositione explicauimus, valebit argumentum, vt patet, cùm sit eadem figura.

PROB. III. PROPOS. XIV. Eucl. 11.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

SInt duæ rectæ AB, & AC, ita dispositæ, vt angulum in A constituant, producaturque ea, quam volumus constituere pro antecedenti V. g. AC, & in parte productâ capiatur CQ æqualis alteri AB, quam volumus esse sequentem. Ducta deinde recta ad extremitates BC, ei à puncto Q parallela agatur QP, quæ inueniat in P lineam AB productam. Affirmat propositio, BP *tertiam proportionalem esse*: nimirum eam dicere proportionem AC antecedentem ad AB sequentem quâ respicit ipsa AB sequens tertiam subsequentem BP.



Probatur. Nam ex propos. 2. huius; Ita proportione refertur AC antecedens, ad CQ sequentem in priori crure AQ, vt AB ad BP refertur in secundo crure AP; Sed antecedens AC ita refertur proportione ad CQ velut ad AB antecedens in posteriori crure (siquidem AB, & CQ ex constructione sunt æquales). Ergo eam proportionem ex 7. quinti, quam dicit antecedens AC ad AB, sequentem suam dicet quoque AB antecedens etiam ipsa ad BP sequentem, & sic AB erit media proportionalis: Nimirum sequens respectu AC antecedentis, & pariter antecedens respectu subsequētis BP. At PB tertia proportionalis, erit, vt vul. prop.

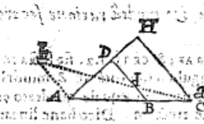
COROLLARIVM.

COllige eodem modo, & quartam proportionalem, & quascunque alias posse inueniri; nimirū si posterioribus duabus, tertia inueniatur proportionalis regulâ præced. Inuenta enim, cum tribus priùs inuentis, quatuor erunt proportionales, & sic si alias cupias semper eadem praxi vteris.

PROB. IV. PROPOS. XV. Euc. 12.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

DVas habeas lineas AB, & BC, quas in directum collocabis ita vt vnam rectā constituant AC; reliqua verò AD ita collocetur, vt faciat angulum quemcumque in A cum prima AB. Sit verò reperienda quarta proportionalis ita, quòd, sicut AB proportionē habet ad BC, ita reliqua angulum faciens AD, cum aliâ reperiendâ proportionata existat. Coniunge itaque extremitates D, & B rectâ BD, & huic coniungenti à puncto C duc parallelam, quæ occurrat lineæ AD productam in H. Nam DH erit quarta, quæ quę ritur ita, vt eodem modo, quo se habet antecedens AB prioris cruris ad sequentem eiusdem BC. Sic referatur antecedens posterioris cruris AD ad sequentem DH in proportione.



Probatur faciliter ex 2. propositione huius: Cùm enim DB sit ex constructione parallela ad CH. Ergo sicut refertur AB ad BC in priori crure; Sic refertur AD ad DH in posteriori.

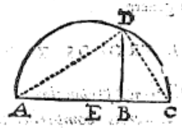
COROLLARIVM.

COllige cum Pappo. Quomodo reperire possis quartam proportionalem, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam inuerso ordine. Nam inuerso ordine tertia AD erit coniungenda non ad extremum primæ A, sed ad extremum C a secundæ, vt per lineas punctatas factum vides, & literis minusculis notatū; est enim eadem AD, quę a d. Nam tunc ex eadem propos. 2. sicut antecedens, & prima AB se habet ad B a secundam, ita quarta h, d se habet ad tertiam d a.

PROB. V. PROPOS. XVI. Eucl. 13

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

SIt duæ rectæ AB, & BC, quibus media proportionalis inuenienda sit. Disponantur in directum ita, vt fiant vna linea AC, quam bipartiês in E, & in sectione E facto centro interuallo vsque ad extremitatem alterutrius extenso V. g. A, semicirculus describatur ADC. Deinde super B erigatur perpendicularis BD. Nam hæc erit media proportionalis inter AB, & BC, quod vt probetur ducendæ sunt rectæ AD, & DC, quæ ex propos. 28. tertij facient angulum rectum in D.



Probatur verò propositio ex Coroll. propos. 8. Nam D B cadit super basim angulo recto toti D subtensam: quare inter duas eius portiones AB, & BC erit media proportionalis. Angulus verò D punctatis factum rectus est, quòd in semicirculo ex propos. 28. tertij existat.

COROLLARIVM

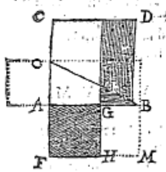
HInc est. Quòd perpendicularis excitata super diametrum à quocunque puncto eius, sit medium proportionale inter duo diametri segmēta, vt clarè constat, cùm ex propos. 28. tertij semper ADC angulus rectus sit; quoquo puncto circumferentiæ vertex eius, reperiatur.

PROB.

PROB. VI. PROP. XVII. Eucl. 30.

Propoſitam rectam lineam terminatam extremâ, & mediâ ratione ſecare.

SIt recta AB; & ex 15. l. 2. ſit ſecta in G ita, vt rectangulum ſub totâ AB, & minori ſegmẽto GB contentum, ſit æquale quadrato ex maiori ſegmento AG erectum. Dico hanc lineam extremâ, & mediâ ratione eſſe ſectam, eſſeque AB totam, ad ſegmentum maius AG, vt ſegmentum idem AG ad minus BG in proportione reperitur.



Probatur. Quoniã enim quadratum, ſeu parallelogrãmum nigrum ex maiore ſegmento AH eſt æquale rectangulo nigro ex minore ſegmento, & tota effecto GD erit BD tota reciprocè ex propoſ. 10. huius ad GH maius ſegmentum, vt GA, idest æqualis GH ad GB ſegmentum minus. Vnde cùm tota ita ſe habeat ad ſegmentum maius, vt ſegmentum maius ad minus, linea AB in G erit ſecta extremâ, & mediâ ratione ex huius def. 3.

EXPENSIO V.

De æquipotentia proportionalium linearum.

HIc agitur; datis lateribus proportionalibus, vel quatuor, vel tribus, quòd poſſint duo rectangula æqualia conſtituere, vel quadratum, & rectangulum licet inuicem ſint inæqualia. Pertractatur itaque de linearum proportionalium æquipotentia in genere.

THEOR. I. PROPOS. XVIII. Euc. 16.

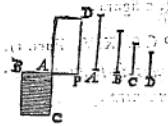
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum eſt æquale illi, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo.

Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur rectangulo, illæ quatuor rectæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ proportionales A, B, C, D. Dico primò, ſi ex A, & D extremis rectangulum componatur, vt eſt album DA, & ex medijs aliud rectangulum nigrum BC, hæc duo rectangula fore æqualia.

Probatur. Anguli ſunt æquales niger, & albus ad A, vtpote recti latera quoque reciproca proportionalia ex hypotheſi, nempe ſimili proportione refertur ex def. 2. huius PD ad AC, vt BA ad AP, quia ſic in vtraque figura terminus, & fundamentum relationis eſt. Ergo ex 10. huius parte 2. rectangula album, & nigrum erunt æqualia.

Probatur ſecũda pars, quæ eſt conuerſa prioris; nimirum, quòd rectangula æqualia habeant rectas ſub quibus continetur proportionales. Colligitur verò probatio ex prima parte prop. 10. Nam cum hic habeamus angulos ad A nigrum, & album æquales, & reciproca latera, nimirum ſe ſimili proportione reſpicientia PD lineam AC, vt BA lineam AP; patet lineas eſſe proportionales, & PD eſſe ad AC, vt BA ad AP.



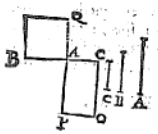
THEOR. II. PROPOS. XIX. Eucl. 17.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum, quod ſub extremis comprehenditur, æquale eſt ei quadrato, quod comprehenditur ſub media.

Et è contrariò ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei quadrato, quod à media deſcribitur, illæ tres lineæ proportionales erunt.

SInt tres lineæ A, B, C proportionales ita, vt qua proportione reſpicit A ſequentem B, ſequens quoque reſpiciat ſubſequentem C. Dicit, quòd ſi ex extremis A, & C fiat rectangulum PC, & ex media C fiat quadratum QB; Quadratum, & rectangulum futura eſſe æqualia.

Probatur. Quia accipiam punctatam AQ æqualem mediæ B. Quare eam proportionem, quam dicit A ad punctatam, dicet, & B ad C. Cum ergo ſint iã quatuor proportionales, patet ex præcedẽti propoſitione, rectangulum quadratũ BQ ex punctatã, & lineã B, æqualibus, & medijs conſtitutum, eſſe æquale rectangulo ex extremis C, & A conſtituto ex ant.



Secunda pars conuertit priorem eodem fundamento lineæ punctatæ præſuppoſito, & eodem argumento, quâ ſecunda pars præced. Theorem. probata eſt; cùm enim æqualia ſint quadratum, & rectangulum, erit proportio PA ad punctatam AQ, qualis eſt BA, ad AC, ſed punctata, & BA equales ſunt, ergo erit AP ad BA, vt BA ad CA, nimirum trium proportionalium A, B, C.

EXPENSIO VI.

De proportione duplicata, & compoſita, quam figuræ inter ſe poſſident reſpectu laterum homologorum.

COmparantur in hac Expenſione latera figurarum, tum ſimilium, tum diſſimilium inuicem, & quam proportionem obtineant conſideratur, vt ex inde cognito genere figuræ, & proportione laterum, faciliter etiam inoteſcat proportio ipſarum figurarum, vel è contrà.

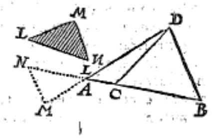
THOR. I. PROPOS. XX. Eucl. 19.

Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

DVo triangula, vel duas figuras habere duplicatam proportionem laterum homologorũ, nihil aliud eſt, quàm quòd ita ſit figura ad figuram proportionata, ſicut inter tres lineas proportionales prima linea proportionatur ad tertiã, ita enim proportio duplicatur gemina vice, nam dicitur ſicut eſt antecedens ad ſequentem, & eccê prima proportio, ita eſt ſequens ad ſubſequentem ecce ſecunda: V. g. ſi baſis, quæ ponitur antecedens triangulorum ſimilium ſint vt 1. ad 2. ſequentem, triangula erunt inuicem vt 1. ad 4. nimirum repetendo proportionem geminã vice: nam ſicut ſe habet 1. ad 2. ita proportionatur 2. ad 4.

Duplex autem poteſt eſſe caſus. Nam vel latera homologa ſunt æqualia, & ſic etiam figuræ erunt æquales, cùm æqualia repetitis proportionibus ſemper æquo modo ſe habeant, & ſi volo reperire alium numerum, qui dicat proportionem, quam dicit 2. ad 2. non poſſum reperire; niſi 2. at cum proportio eſt inæqualitatis, tunc difficultas eſt, & id demonſtrare oportet.

Sint ergo duo triangula ſimilia nigrum, & album ADB, abſcindaturque ex propoſ. 14. baſibus AB, & LN tertia proportionalis ex latere AB, & ſit AC, ducaturque recta DC, eritque triangulum ADC probandum priùs, & demonſtrandum æquale triangulo nigro antequam ipſam propoſitionem probemus.



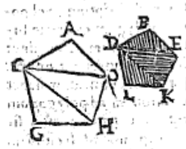
Probatur. Ex hypotheſi, vt eſt AD ad AB, ita eſt LM ad LN ergo *permutando* ex 19. lib. 5. erit fundamentum AD ad fundamantum LM, vt terminus AB ad terminum LN; Sed vt eſt AB ad LN, ita fecimus LN ad AC proportionata crura. Ergo proportione correſpondebit AD ad LM, vt LN ad AC. Ergo hæc triangula NLM, & ADC habebunt latera reciproca. Siquidem fundamentum primæ cõbinationis, & terminus alterius eſt in vno triangulo AD, & AC, & terminus primę, fundamentumq; ſecundæ eſt in alio triangulo, nimirum NL, & LM. Quamobrem ex 11. huius erunt triangula æqualia punctatum, quod æquale fecimus nigro (claritatis gratia,) & triangulum ADC: quo ſuppoſito ita propoſitio

Probatur. Tres lineæ, nimirum AB baſis, baſi LN, & LN baſi AC continuam dicunt proportionẽ; Vnde ſecundum ſuperiùs explicata AB ad AC duplicatam dicet proportionem: Sed triangulum album maius ADB eam ad nigrum refertur proportione, quà baſis AB ad baſim AC: Ergo duplica ad illud proportione refertur. *Minor* vero *argumenti* oſtenditur, nimirum quod triangulum ADB ad nigrum referatur, vt baſis AB ad baſim AC. Quia triangulum maius album dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit ad triãgulum ACD; quia iam hæc duo triangula nigrum, & ACD probata ſunt æqualia, ſed ad triangulum ACD dicit proportionem, quam baſis AB, ad baſim AC ex prima huius, quod in eundem verticem D finiant, Ergo refertur quoque ad nigrum eâ proportione, quâ baſis AB ad baſim AC duplicatâ AB ad baſim LN.

THEOR. II. PROPOS. XXI. Eucl. 20

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis, & polygona duplicatam habent eam rationem, quam habet latus homologum ad latus homologum.

SInt polygona ſimilia album, & nigrum habentia angulos æquales ſingula alba ſingulis nigris, vt A angulo B, & C angulo D, &c. Sic & latera proportionalia circa angulos ęquales V g. ſit AC, ad BD, vt AQ ad BE. Dicit pro prima parte *hæc duo polygona diuidi in triangula ſimilia, & numero æqualia.*



Nam ducantur rectæ ab vno angulo ad alios oppoſitos, vt ab angulo D lineæ DE, DK, ſic ab angulo C rectæ CH & CQ, eruntque triangula numero æqualia, vt patet. Probatur itaque, quòd hæc triangula ſint ſimilia: Nam primò DLK nigro eſt ſimile triangulum CGH albi polygoni. Ratio eſt quia angulus L niger eſt æqualis albo G, & circa illos latera, ex hypotheſi ſunt proportionalia. Ergo ex prop. 6. & def. 1. triangulum DLK, eſt ſimile triangulo CGH. Vnde etiam anguli reliqui erunt æquales V. g. apud K, & H in dictis triangulis, & ex propoſ. 4. huius latera DK, & CH, vtpote angulis æqualibus in æquiangulis triangulis oppoſita erunt homologa, ideo erit DK ad CH, vt LK ad GH. Sed ob ſimilitudinem polygonorum, vt eſt LK ad GH, ita eſt KE ad HQ: Ergo ex ęquo erit vt DK ad CH, ſic KE ad HQ. Sic quoque angulus apud K totus eſt æqualis angulo toti H; pars quoque anguli K verſus L eſt æqualis parti H verſus G. Ergo reliqua pars DKE erit æqualis reliquę CHQ. Quare ex propoſ. 6. triangulum DKE nigrũ erit ſimile albo CHQ: quod angulum apud K habeat æqualem angulo apud H, & latera circa ipſos proportionalia, & ſic de reliquis alijs argumentabitur.

Prob. 2. eſſe homologa totis. Nã triangula nigrum DLK, & CGH album ſunt ſimilia inter ſe, ideoque habebunt duplicatam rationem laterum homologorum DK, & CH ex pręc. & etiam eandem habebunt duplicatam rationem triangula ſimilia DEK nigrum, & CQH album, quod eodem latere DK, triangula nigra, & eodem CH triangula alba prædicta inexiſtant. Quare triangula DLK nigrum ad album CGH eam habebit rationem, quam triangulum nigrum DEK ad album CQH, vtpote eiuſdem proportionis lateris ad latus duplicatam vt diximus Tract. 9. Def. 27. in fine, & idem fiet argumentum de reliquis. Cum ergo ſint proportionalia triangula polygoni nigri triangulis albi, ita vt omnia fundamenta proportionum, ſeu antecedentia ſint in vno, & conſequentia, ſeu termini in altero. Ex propoſitione verò 17. quinti, vt eſt

vnum

vnum antecedens ad vnum consequens, sic sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia, erunt omnia triangula nigri polygoni ad omnia albi, nempe totum ad totũ in eadem ratione, vt aliquod nigrum triangulum suo correspondenti albo.

Probatur tandem tertia pars; Quod polygonum ad polygonum sit in duplicata ratione lateris homologi ad latus homologum. Probatur, inquam. Quia ita est polygonum nigrum ad album, vt triangulum V. g. DLK nigrum ad album simile CGH: Sed similia triangula laterum homologorum duplicatam habent rationem ex præced. Quare etiã polygonum nigrum ad album duplicatam habebit rationẽ laterum homologorũ V. g. KL ad GH.

COROLLARIVM

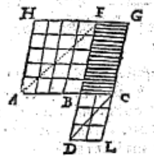
Hinc est, quod si fuerint tres lineæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum descriptum simile super secundã ad polygonum super tertiam descriptum, vel polygonum super primam ad polygonum simile super secundam descriptum; quia enim prima linea ad tertiam duplicatam habet secundæ rationem: Polygonum verò super primam delineatum habet duplicatam primæ lineæ rationem ad polygonum super secundam formatum; patet; cùm sit eiusdem proportionis lineæ primæ ad secundam duplicata proportio primæ eiusdem lineæ ad tertiam, & polygoni super primã ad polygonũ super secũdã duplicata quoq; quòd erit eadẽ lineę primę ad lineam tertiam, quam polygoni ad polygonum proportio.

THEOR. III. PROPOS. XXII. Euc. 23.

Æquiangula parallelogramma inter se eam habent rationem, quæ ex proportione laterum componitur.

QVantitas compositam respectu alterius habet rationem, cùm ne dum illam secundùm vnam proportionem respicit, sed secundùm plures, V. g. linea dicit proportionem ad aliam tanquam 10. ad 5. ita vt minorem superet medietate. Deinde hæc minor ad minorem se, dicit proportionem tanquam 5. ad 3. Illa itaque maior 10. partium ęqualium habet ad lineam trium partium rationem compositam; nimirum eam, quæ est inter 5. & 3. & inter 5. & 10. ita, vt respiciat illam, ne dum superando eam medietate, vt superat 5. sed insuper eam superando duobus quintis vt 5. superat 3. vt diximus tract. 9. pr. part. def. 7. Dicit itaque Euclides, quòd *parallelogramma æqualium angulorum eam proportionem habent*, quæ ex lateribus componitur: nimirum aream rectilinei ABHE; ne dum esse maiorem rectilineo DC paruo proportione, quæ est inter AB, & BC hoc est dupla: sed & ea, quæ est inter EB, & BD, quæ est E. g. 5. ad 3. Quamobrem, si DC minus rectilineum continet 6. Rhombos, ne dum AB continebit 10. Rhombos, quæ est proportio 5. ad 3. Sed insuper alios 10. nimirum 20. quæ est proportio 2 & 1. Et ita Rhombus AE, dicit proportionem multiplicem, quia bis continet Rhombum DC, & insuper proportionem superparticularem bipartientem sextas, idest semel, & duas exelus sex partibus.

Potest etiam fieri comparatio inter AB, & BD latus pro vna proportione, & EB, & BC pro alia, & idem eueniet, vt sunt 20. 8. 6. vel 6. 15. 20. Primi namque proportionem habent, quam 5. ad 2.



& 4. ad 3. secundi vero proportionem habent, quam 2. ad 5. & deinde 3. ad 4. Vt autem propositionem demonstret, coniungit rectilinea ad apicem B, angulorum æqualium, ita vt in rectam vnam conueniant, vt fecimus supra propos. 10. latera reciproca AB, & BC sicut latus BD cum BE: prolungenturque eodem modo latera LC, & HE, donec sibi occurrant in G, & constituatur rectilineum nigrum BG.

Probatur rectilieum maius ex 1. huius dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit latus AB ad BC. Nigrum vero dicit eam proportionem ad minus, quã dicit EB ad BD, ob eandem altitudinẽ; sed ex pr. p. 5. def. 8. rectilineũ maius ad minus dicit proportionẽ compositam ex sua proportione ad nigrum, & nigri ad minus: Ergo dicit etiam proportionem compositam ex lateribus AB ad BC pro prima proportione componente, EB, ad BD pro secunda.

COROLLARIVM I.

COllige, Quod eadem est ratio in triangulis habentibus vnum angulum alteri æqualem, vt est videre in triangulis BDC, & ABE, cùm enim triangulum sit medietas rectilinei in eadem basi, & eiusdem altitudinis sequitur, vt triangula eundem angulum habentia eodem pacto, ac rectilinea se habeant ad inuicẽ, cùm ita se habeat duplum ad duplum, sicut medietas ad medietatem ex propos. 18. lib. 5.

COROLLARIVM II.

* COlligitur quoq; quòd, cùm triangula omnia eiusdẽ altitudinis, & basis sint æqualia, sicut, & parallelogramma, sequitur; quòd triangulum V. g. BCD se habeat ne dum ad triangulum ABE; sed etiam ad quodcunque aliud eiusdem altitudinis, & basis, vtpote illi æqualibus eodem modo; sicut, & quæcunque triangula eiusdem altitudinis, ac triangulum maius ABE, quia sunt ipsi æqualia, respicient BCD triangulum minus, & quòdcunque illi æquale, vt sunt ea omnia, quæ cùm hoc minori eiusdem altitudinis sunt, & basis eãdem ratione: quare verum erit illud, quòd difficiliori argumento demonstrat Commandinus, triangula inter se rationem habere compositam ex proportione basium, & altitudinum, & idem dicas de parallelogrammis.

EX-

EXPENSIO VII.

De similium figurarum notione, & effectione.

TOta hæc quæstio de figuris similibus cognoscendis est, & id ex quadruplici principio, seu loco, scilicet, vel ex cognitione laterum; vel ex similis alterius comparatione, quòd duæ alteri sint similes, & ideo inter se; vel quòd pars similiter sit descripta, ac suum totum; vel tandem quòd figuræ ipsę similes efficiantur, & ideo in primis docet eas efficere, & datam figuram imitari.

THEOR. I. PROPOS. XXIII. Euc. 18.

A data recta linea describere rectilineum simile similiterque positum, ac alterum rectilineum.

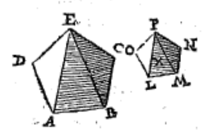
SIt rectilineum paruum X, cui oporteat super datam rectam AB describere rectilineum simile, similiterque positum, nimirum quod habeat angulos æquales, & latera proportionalia paruo rectilineo X.

Sic itaque faciendum est: resoluatur figura parua X in triangula nigrius, nigrum, & album, siue etiam in plura, si pluribus lateribus, quàm assignata, constet. Deinde super AB ad A fiat angulus niger æqualis angulo nigro L, similiterque ad B fiat angulus alius niger ęqualis angulo nigro M, & ex 27. primi angulus E niger angulo nigro P æqualis erit.

Rursus idem fiat super lineam AE faciendo angulum album ad A angulo albo ad L æqualem. Pariterque angulum album ad E angulo albo ad P æqualem; reliquusque D reliquo O æqualis erit. Tandem idem efficiatur de angulis nigerrimis ad B. & E; quæ æquentur angulis nigerrimis M, P, & C eueniet æqualis angulo N. Et ita rectilineum AB, rectilineo X erit simile, similiterque positum.

Probatur. Nam anguli eodem ordine æquantur, & latera proportionalia sunt. Ergo sunt similia.

Probatur itaque de angulis; quòd ęquentur,



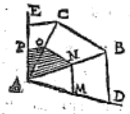
Nam pars alba ad A parti albæ ad L, sicut nigra alia A, & L nigra æquales sunt; Ergo totus angulus A toti angulo L æqualis erit. Idem philoso, hare de partibus anguli E, quæ partibus anguli P æquantur, sic de partibus B partibus M æqualibus, & hoc ex constructione: itaque probatum est angulum D angulo O, & angulum C angulo N esse æqualem; quamobrem omnes anguli eodem ordine in vtraque figura æquales sunt.

Probatur quoque de lateribus. Nam æquiangula sunt triangula ex constructione. Ergo, & latera erũt proportionalia ex 4. huius, prout æquales ambiunt angulos. Quapropter, vt se habet in proportione AB ad BE, & BE ad BC, ita se habet in triangulo paruo LM ad MP, & MP ad MN. Vnde ex *æquo* ita proportionabitur AB ad BC, vt LM ad MN; Et ex 4. huius, vt est BC ad CE, ita MN ad NP: Ergo hæc tria latera AB, & BC. & CE inuicem similiter se habent ac tria correspondentia in figura X, quæ sunt LM, & MN, & NP.

Idẽ autẽ prorsus argumẽtũ valet de alijs tribus AB, & AD, & DE figuræ maioris, quæ eodem ritu probabuntur proportionalia tribus figuræ X; nimirum lateribus LM, & LO, & OP; Ergo rectilineũ maiùs minori est simile, similiterque positum.

COROLLARIVM

COllige ex Clauio angulos quoque ęquales fieri diuidendo figuram in triangula, duo nigra, & album, & productis lineis diuidentibus AC, & AB sicut, & lateribus, anguli A, ex quo prodeunt AD, & AB singulis reliquis lateribus ON, MN, OP parallelas ducẽdo DB, & BC, & CE. Ita

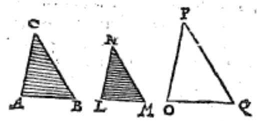


enim triangula maiora inclusis, & minoribus (vt ex Coroll. propos. 4. erunt proportionalia V. g. album maius ABD, albo minori, ANM, &c. consequenter tota figura maior constans ex triangulis similibus, similis erit figuræ minori inclusæ.

THEOR. II. PROP. XXIV. Eucl. 21.

Quæ eidem rectilineo sunt similia; & inter se sunt similia.

SInt duo rectilinea album, & nigrum nigerrimo LMN similia. Asserit *esse etiam inter se similia*.



Probatur faciliter. Nam duo anguli correspondentes A, & O sunt æquales angulo L. Ergo & inter se. Item B, & Q angulo M; item C, & P angulo N: vnde & æquales inter se: lateraque angulos æquales amplexantia ex 4. propos. huius erunt proportionalia. Siquidem CA est ad CB, vt LN ad NM, & LN est ad NM, vt PO ad PQ. Ergo ex æquo CA erit ad CB, vt PO ad PQ. Et idem dicas de alijs cruribus; atque adeò per definitionem. Similia erunt triangula nigrum, & album, quòd sint similia nigerrimo LNM.

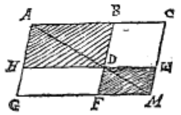
THEOR. III. PROPOS. XXV. Euc. 24.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti & inter se sunt similia.

ADsit parallelogrammum AGMC, in quo ducatur diameter AM, & per quodlibet eius

T pun-

punctum D ducantur duæ parallelæ ad latera GM, & MC; quæ ſint BF,& HE. *Dicit parallelogramma, quæ circa diametrum ſunt nigrum, & nigerrimum eſſe inter ſe ſimilia.*

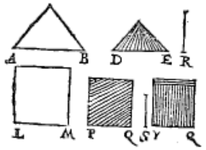


Probatur, quia conſtituuntur triangulis, quę parallelæ auferunt. Vnde ex Coroll. propoſ. 4. huius, triangula ea erunt ſimilia triangulis totius, V.g. parallelogrammum maius nigrum conſtituitur duobus triãgulis æqualibus ex prop. 41. l. I. ſed quorũ quodlibet, vt ABD eſt ſimile vni ex duobus triangulis, ex quibus conſtituitur totum, ideſt triangulo ACM ob parallelam BD ipſi CM: triangulum quoque nigerrimum minoris DEM ſimile eſt eidem toti triangulo AMC. Ob parallelam DE, ipſi AC, Ergo parallelogramma quoque nigerrimum, & nigrũ, vtpote eis triangulis dupla erũt ſimilia toti Quare & ſimilia inter ſe erũt ex pręced. vel ex 16. lib 5. quæ enim vni tertiæ ſunt eędem rationes, & inter ſe ſunt eædem rationes.

THEOR. IV. PROP. XXVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & ab eis rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta proportionalia erunt.
Et ſi à rectis lineis ſimilia, ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint, etiam ipſæ lineæ proportionales erunt.

PRima pars huius Theorematis eſt. Quod ſi ſint quatuor lineæ, cuius antecedẽs AB in prima cõbinatione ad ſequentẽ DE ratione refferatur ſimili rationi, quâ in poſteriori combinatione refertur LM antecedens ad ſequentẽ PQ, & conſti-



tuantur ſuper rectas primæ combinationis duo rectilinea inuicem ſimilia, ſimiliterque poſita V.g. duo triangula album, & nigrum. Rurſuſque ſuper rectas ſecundæ combinationis alia rectilinea diuerſi, etiam generis à primis; ſed tamen inuicem ſimilia, ſimiliterque deſcripta V g. duo quadrata album, & nigrum. Affirmat, *quòd hæc rectilinea erunt proportionalia*, ita, vt, ſicut triangulum album ad nigrum referatur, ita quadratum album ad nigrum refertur, quod vt probetur.

Inuenienda eſt tertia proportionalis rectis primæ combinationis, quæ erit R. Sicut, & poſterioris combinationis reperienda eſt tertia proportionalis S, ſecundum documenta 14. propoſ. huius hoc poſito.

Probatur ex propoſ. 21. Coroll. vt eſt baſis AB ad tertiam proportionalem R, ita eſt triangulum album ad nigrum.

Pariterque vt eſt latus LM ad tertiam proportionalem S ita ex eodem Coroll. eſt quadratum album ad nigrum.

Sed baſis AB trianguli dicit ad ſuam proportionalem R ſimilem proportionem, quam dicit LM ad S. Ergo, & triangulum album reſpicit nigrum eâ proportione, quâ quadratũ albũ reſpicit nigrũ.

Minor argumenti conſtat ex 23. quinti nimirum quod AB ſit ad R veluti LM eſt ad S. Quoniam, cùm R, & S ſint tertiæ proportionales, ex æquo; argumentando, eam proportionem, quam dicet AB ad ſuam proportionalem R, eandem dicet LM ad ſuam tertiam proportionalem S: Quoniam dicebant eandem proportionem ad ſuas ſequentes DE, & PQ, ex hypotheſi.

Secunda vero pars vertit primam, & præſupponit ad probationem inueniendam tribus AB, nimirum DE, & LM quarta proportionalis YZ; ſuper quam conſtituendum eſt rectangulum ſimile, ſimiliterque poſitum; ac rectilineum LM, de quo probandum eſt priùs, quòd ſit æquale rectilineo PQ, ad hoc, vt conuertatur propoſitionis prima pars, & probetur, quòd rectilinea rectilineis ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis proportionalia, lineis conſtent proportionalibus.

Probatur autem, quòd ſint æqualia duo quadrata nigra. Quia ad ipſa dicit eandem proportionem quadratum albũ; quam dicit AB ad DE, & quidem ad quadratum nigrum PQ ex ſuppoſitione; ad quadratum verò YZ ex eo quod ſit ſuper quartam proportionalem YZ, vt ex antecedenti probatione huius propoſitionis conſtat, vnde erit triangulum album ad nigrum, ita quadratum album ad nigrum eo quia ſit AB ad DE vti LM ad YZ. Quare ex propoſ. 9. quinti cum eiſdem quadratis nigris eandem dicat proportionem album quadratum, erunt æqualia quadrata nigra.

Probatur modo ſecunda pars propoſ. Duo quadrata nigra ſunt in duplicata ratione ſuorum laterum ex 20. huius; ſed hæc probata ſunt æqualia; Ergo, & latera PQ, & YZ erunt æqualia. Sed latus LM dicit eandem proportionem ad latus YZ; quam baſis AB ad baſim ED. Ergo etiam eamdem dicit proportionem latus ML ad latus PQ, quam baſis AB ad baſim ED.

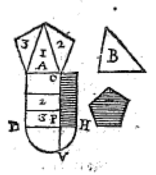
THEOR. V. PROPOS. XXVII. Euc. 25

Dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum, rectilineũ & alteri dato æquale conſtituere.

SIt datum rectilineum A V.g. pentagonum, cui conſtituendum ſit rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum: ſed alteri dato æquale V.g. triangulo B. Itaque ſecundùm doctrinam propoſ. 43. primi rectilineum parallelogrammum D C æquale rectilineo A cõſtituatur ſuper latus quodlibet eiuſdem rectilinei imitandi A, & huic rectilineo parallelogrammo fiat aliud nigrum ſimile ſuper latus alterum CP ideſt CH; ſed æquale rectilineo B. Inueniatur ergo lateribus DP, & PH parallelogrammorum nigri, & albi, quæ æqualia non ſunt, media proportionalis ex propoſ. 16. huius PV, & ſuper hanc PV rectilineum conſtituatur nigrum ſimile priori iuxta regulas propoſ. 23. & hoc erit illud, quòd quæritur.

Nam pentagonum nigrum, iam fecimus ſimile,

ſimiliterq; conſtitutũ dato A. Quare ſolum remanet demonſtrandum; quòd triangulo B ſit æquale, id verò oſtenditur. Nam eſt æquale rectangulo nigro CH, ſed hoc eſt æquale *prout fecimus* triangulo B. Ergo, & pentagonum nigrum eſt æquale triangulo B.



Maior probatur. Nam dicit eandem proportionem pentagono A; quam dicit rectilineum CH; quæ verò eidem eandem dicunt proportionem, inuicem æqualia ſunt ex propoſ. 9. quinti.

Quod verò nigrum pentagonum, & nigrum parallelogrammum dicant eandem proportionem pentagono A oſtenditur: Nam dicunt eandem proportionem, quam parallelogrammo D C: Sed hoc pentagono A eſt æquale. Ergo, & pentagono A, ex 7. quinti eandem dicunt proportionem.

Probandum eſt. Quod parallelogrammo DC eandem dicant proportionem nigrum pentagonũ, & nigrum parallelogrammum. Nigrum parallelogrammum ad parallelogrammum DC ea proportione refertur ex prop. I. huius, cum ſint eiuſdem altitudinis, qua baſes DP, & PH. Sed ea proportione, quâ referuntur baſes DP, & PH, pentagonum nigrum ad idem parallelogrammum refertur: Ergo refertur ad C D proportione eâdem pentagonũ nigrum, qua rectangulum nigrum CH.

Patet hæc *minor* figuræ ſimiles, ſimiliterque poſitæ ſuper primam, & mediam lineam referuntur, vt refertur prima ad tertiam ex Coroll. prop. 21. Sed pentagonum nigrum eſt poſitum ſuper mediam PV: ergo dicit ad pentagonum A, cui ſimile eſt, & ſimiliter poſitum eam proportionem, quam dicit prima PH ad tertiam DP. Sed pentagonum A ex conſtructione eſt æquale parallelogrammo DC. Ergo ad hoc parallelogrammum dicit ex 7. quinti eam proportionem, quam prima, quæ eſt baſis HP dicit ad tertiam, quę eſt baſis PD; quod erat tandem probandum. Quare pentagonum nigrum ad parallelogrammum album referetur, vt PH ad DP, ſed taliter etiam nigrum parallelogrammum ad albũ maius refertur: Ergo nigro parallelogrammo nigrum pentagonum erit æquale; quare, & ipſi B triangulo.

EXPENSIO VIII.

De ſimilium figurarum additione, & ſubtractione.

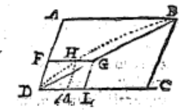
PRimo parallelogrammorum deficientium, vel abundantium proprietates ponit, ex inde docet addere, vel ſubducere alicui parallelogrammo, & applicare datæ lineæ, vel cum defectu, vel cum exceſſu, vt placet, deſeruitque hæc doctrina maximè lineis irrationalibus, de quibus lib. 10. agit Euclides.

THEOR. I. PROPOS. XXVIII. Euc. 26.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit ſimile toti, & ei ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circa idem diametrum, ſicut totum, conſiſtit.

DIcit. Quod, ſi à maiori parallelogrammo ABDC auferatur parallelogrammum minus DFGL, quod deinde ipſi accommodetur, vt angulus ſuper æqualem angulum ſitus ſit, vt vides in D. Dicit hoc paruum parallelogrãmum conſiſtere circa diametrum totius DB; quod probat per reductionem ad impoſſibile.

Nam ſi dicatur. Quod DG, & GB in vnam re-



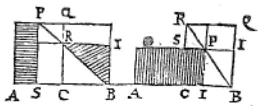
ctam non conueniant, & ideo, quòd non poſſit eſſe diameter idem trahatur diameter, & ſit punctata, quæ tranſeat non in G, ſed per aliquod aliud pũctũ. Itaque E.g. trãſibit per H, & tracta HM parallelogrammum FHDM erit ſimile toti DABC ex 25. huius, quia ex aduerſarijs circa diametrum ſunt: Quamobrem latera inuicem erunt proportionalia, ita vt quâ proportione DA reſpicit latus totiùs DC, ſic latus minoris DF reſpiciat DM; ſed & idem latus DF reſpicit DL eadem proportione, quâ DA reſpicit DC; quia parallelogrammum FGDL eſt ſimile toti ex 25. huius: Ergo cùm ad idem DF eandem dicant proportionem ex 9. quinti eſſent æquales DM, & DL pars, & totum. quod repũgnat.

THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 27.

Omnium parallelogrammorum ſecundùm eandem rectam lineam applicatorum deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, ſimiliterque poſitis, parellogrammum maximum eſt id, quod à dimidia deſcribitur, dummodo defectus quorùmcunque aliorum ſimiles exiſtant defectui, quo deficit parallelogrammum prædictum à dimidia deſcriptum.

DEtur recta AB, cui applicetur parallelogrammum nigrum AP deficiens ad complendam, occupandamque totam lineam AB portione PB. Aſſerit, quod, ſi huic deficientię PB ſuper dimidiam CB conſtitutum ſit ſimile parallelogrammum, quale eſt ex prop. 25. huius RB, cum ſit circa diametrum BP deficientis ſuperficiei. Aſſerit inquam iſtud parallelogrammum ex dimidia, ſed deficienti ſuperficiei ſimile, eſſe maius parallelogrammo nigro AP, & quocunque alio cum dictis conditionibus facto.

Probatur pars A S nigri parallelogrammi fig. ad dexteram est ęqualis parti CI parallelogrāmi BR ex medietate descripti BR : Reliqua verò pars C P



parallelogrammi nigri, cùm sit complementum æquatur, & suppletur per aliud complementū PQ, quod ex prop. 35. l. 1. ei est æquale, ergo rectilineū ex medietate BR superat parallelogrammum nigrum AP reliquo parallelogrammo RP. Ita etiam euenit; si parallelogrammum nigrum AP fieret altius paralelogrāmo ex medietate descripto BR, dummodo hoc parallelogrammum, vt supra dixi, esset simile defectui BP, nempe existens circa diametrum superficiei deficientis nigro rectilineo ad occupandam totam lineam AB, vt potes videre in altera figura.

Probatur eodem modo. Nam AQ est æquale parallelogrammo BQ; ablatis itaque ab vtrisque complementis æqualibus IQ, & SR remanebunt æquales adhuc residuæ partes, nimirum hinc seminigra BR, inde parallelogrammum AP nigrum adiuncto ei paruo rectilineo PR: Ergo nigrum parallelogrammum AP est minus seminigro RB & deficit ab eius ęqualitate hac portione ei additâ RP.

PROB. I. PROPOS. XXX. Eucl. 28.

Ad datam rectam lineam applicare parallelogrammum æquale dato rectilineo deficiens tali superficie parallelogrammā, quæ sit similis alteri parallelogrammo dato. Dummodo datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non sit maius eo, quod à dimidia describi quiret, simile defectui dato.

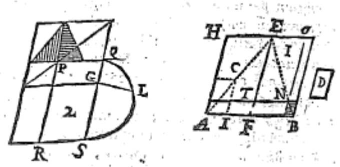
SI tibi exibeatur recta linea AB, ad quam applicandum sit parallelogrammum æquale triangulo nigro; sed quòd deficiat ad totam lineam cōplendam in sua superficie, portione tali, quæ sit similis alteri datæ D.

Est primo aduertendum, quod hoc triangulum non debet esse maius; quàm illud rectangulum, quod describeretur à medietate: namque deffectus deinde non posset similis rectilineo dato D constitui; quòd, vt probauimus in pręced. propos. rectilinea applicata, quæ deficiunt simili defectu rectilineo dato ea, quæ sunt super medietatem, sunt maxima omnium. Vnde si esset rectilineum maius, quàm quod super medietatem posset fieri, deinde deffectus similis non esset rectilineo dato.

Præceptum 1. Describatur itaque super AB rectilineum D, quod sit punctatum AC, tractoq; diametro EA indefinitè, erigatur à puncto medio F parallela lateri punctato CI, quæ occurrat diametro EA in E, fiatquè totum rectilineum AFHE super medietatem: de quo primo videndum est: an sit æquale triangulo nigro per operationem, quam vides, & quam docuit Euclides propos. 41. primi. Siquidem facto rectilineo PG in dato angulo A secundùm longitudinem lineæ AF, æquale triangulo nigro, prolungatisque lateribus RP, & QS, transferendum est rectilineum AE ex medietate super illud: nam si excedatur à rectilineo PG, operatio non potest fieri, vt dictum est: si eidem rectilineo commensuretur, & sit ei æquale, nihil aliud exposcitur, factum enim est, quod quæritur, & defectus EB erit similis rectilineo dato D, at si maius sit rectilineo PG.

Præceptum 2. Tunc ex doct. propos. 27. huius inueniatur excessui inuento GR parallelogrammum æquale EN, & ad id reperiatur inter QG latus rectilinei triangulo æqualis, & latus GS latus excessus media proportionalis GL, super quam traslatam in EO fiat parallelogrammum EN simile, similiterque positum, ac defectus EB; producāturque latera ON, & NT. Iamque erit applicatum linęę AB rectilineum AN æquale triangulo nigro; sed quod deficit rectilineo nigro NB similis rectilineo D.

De quo duo probanda sunt. Primum, quòd sit simile rectilineo D defectus niger NB: secundo, quòd rectilineum AN sit æquale triangulo nigro.



Prog. 1. Similitudo itaque probatur. Quia figura deficiens EB est similis figuræ ex medietate AHEF, quæ est contermina. Sed hæc facta est similis figuræ D, Ergo etiam illa deficiens EB similis erit figuræ D. Sed huic quoque est similis deficiens figura minor inclusa TO, Ergo, & reliqua nigra BN. Patet consequens, quia ex prop. 28. h. est circa idem diametrum totius BE, quæ verò circa diametrum sunt ex propos. 25. huius, & toti, & inter se sunt similia.

Progress. 2. Quod verò parallelogrammum AN, æquale sit triangulo nigro, Probatur. Nam AN est æquale rectilineo PG, in 2. fig. Sed illud PG est æquale triangulo nigro ex constructione: Ergo, & rectilineum AN est æquale triangulo nigro.

Probatur maior propositio. Quòd parallelogrammum AN æquale sit rectilineo PG, nam est æquale gnomoni TBO. Sed hic est equalis rectilineo PG, quòd sint gnomon TBO, & PG residua ex æqualibus vt ex 1. & 2. præcep. PS, & BE. Ergo AN est quoque ei PG æquale. Quod verò AN sit æquale gnomoni ostenditur. Nam pars FN, cùm sit complementum, est æqualis parti NO, ex prop. 35. primi. Pars autem AT, cum sit super equali basi, & inter easdem parallelas est æqualis ex prop. 37. primi alteri parti TB. Ergo AN æquatur gnomoni TBO. Quapropter, cum AN rectilineum applicatum lineæ AB sit æquale gnomoni TBO; hic verò gnomon TBO sit æqualis rectilineo PG, quòd, vt dixi, ambo residua sint æqualium EN, & GR rectilineorum ab æqualibus EB, & PS ablatorum. Rectilineum verò PG sit æquale ex effectione triangulo nigro; Etiam AN rectilineum erit ei nigro triangulo æquale, applicatum autem erit lineæ AB, & deficiet rectilineo nigro NB simile rectilineo D.

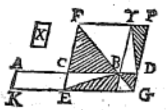
PROB.

PROB. II. PROPOS. XXXI. Eu. 29.

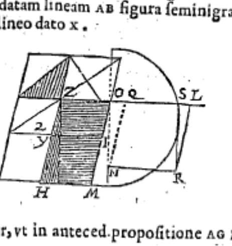
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

EXibita tibi sit linea AB, ad quam oporteat applicare æquale triangulo seminigro parallelogrāmum excedens ipsam figura parallelogramma, nimirum GB, quæ similis sit parallelogrammo alicui dato V. g. X.

Construatur itaque super dimidiam AB, idest CB parallelogrāmum CFYB, sed simile parallelogrāmo X, similiterque positum, quo facto reperiatur quadratum æquale huic parallelogrammo, simulque triangulo seminigro; quod exequemur, vt vides in secunda figura, primo ex doct. 44. primi constituendo in dato angulo rectilinei X super latus ZO æquale lateri CB rectilineum nigrum ZOIY æquale triangulo seminigro, & iuxta illud ponemus rectilineum YHMI simile, & æquale rectilineo CYFB. Hoc enim poterimus facere ex propos. 44. primi propter æqualitatem angulorum correspondentium, & lateris YI, quo facto OH totū redigemus in rectangulū punctatū æquale ex propos. 37. primi, vtpote inter easdem parallelas, & super eandem basim. Huic verò rectangulo faciemus quadratum ęquale ONRS ex prop. 16. secundi. Tandemque huic quadrato fiat rursus parallelogrammum æquale ex prop. 37. vel ex prop. 43. primi; sed simile, similiterque positum, ac parallelogrammum X, scilicet QNRL.



Hoc itaque parallelogrammum simile est alteri seminigro CY ex medietate facto simile, similiterque posito, vt X; sed tamen maius, quòd ne dum huic CY rectilineo seminigro, sed etiam triangulo seminigro æquale sit. Quare ob similitudinem, & similem positionem poterit describi super BF; ita vt excessus sit versus Y, & E, & excedat tribus partibus seminigris gnomonis CGY, vt perspicuum est. Tracto itaque latere AK parallelo ipsi AB, & CF producto in E, erit parallelogrammum KD, requisitum; quod erit æquale triangulo seminigro excedens datam lineam AB figura seminigra BG simili rectilineo dato X.



Probatur, vt in anteced. propositione AG rectilineum est æquale gnomoni CGY; quoniam pars KC est æqualis parti EB, vtpote duo dimidia totius KB, & ideo complemento BP æquali ipsi EB. Sed gnomon CGY est ęqualis triangulo seminigro: Ergo AG rectilineum est æquale triangulo seminigro.

Quod autem gnomon sit æqualis triangulo seminigro, ostenditur: nam est æqualis rectilineo YO nigro, quod EP, & HO duo tota sint æqualia, & CY, MY duę partes eorū sint æquales, ex construct. Ergo gnomon CGP, & rectilineum YO partes remanentes ex totis æqualibus erunt æquales. Cum itaque gnomon CGY, & rectilineum YO sint æqualia. Rectilineum verò YO ex constructione sit æquale triangulo seminigro. Ergo, & AG rectilineum applicatum æquale gnomoni, & ideo rectilineo nigro YO erit tandem æquale triangulo seminigro.

Patet autem; quod excedat lineam AB datam, rectilineo BG simile rectilineo X; quod totum EP sit ex constructione ei simile; ergo talia erunt etiam rectilinea circa diametrum ex propos. 28. huius. Circa verò diametrum reperitur BG rectilineum.

EXPENSIO IX.

De laterum figurarum proportionali potentia.

LIcet supra egerimus de potentia proportionalium linearum, quam habent ad constituendum alteri ęquale rectilineum; non tamen lineas considerauimus, vt in aliqua figura existentes ad constituendum rectilineum proportionale. Modo hic eas consideramus, vt latera alicuius figurę proportionalis alteri quacumque proportione. Et primo considerabimus, tanquam latera trianguli rectanguli; deinde tanquam latera alicuius quadrati, vt fecimus secundo libro. Euclides quidem hoc 6. libro de solâ potentia agit trianguli rectanguli, de potentia verò laterum alicuius quadrati lib. 12 tractat, sed nos existimauimus hìc esse propriū earū propositionum locum.

THEOR. I. PROPOS. XXXII. Euc. 31.

In rectangulis triangulis figura quælibet à latere angulum rectum subtendente descripta æqualis est figuris sibi ipsi similibus, similiterque positis, quæ à lateribus describuntur.

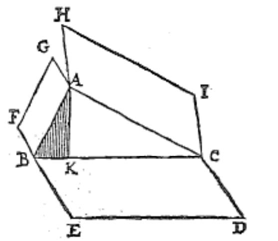
TRiangulum sit rectangulum ABC. Describaturque super BC quæcumque figura rectilinea BD, cui similes, similiterque positæ constituantur super crura BA figura BG, & CA figurá CH. Dico figuram BD super basim *esse æqualem figuris super crura* BG, *&* CH.

Prob. Sicut est ex CA quadratum prima quantitas ad quadratum ex CB secundam quantitatem in prima serie; ita est rectilinem CH prima quantitas ad rectilineum BD secundam quantitatem in posteriori serie (debes autem imaginari super latera rectanguli descripta quadrata l. id. fig. non exprimat.)

Hoc autem patet; quòd similiter quadrata, &

figuræ

figuræ se habeant,eo quòd sit ex prop.21. quadratum ad quadratum,vt figura ad figuram; quia sunt

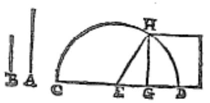


eorum proportiones duplicatæ eiusdem proportionis laterum AC ad CB. Et ob hanc eandem rationem quadratum ex EA in prima serie tertia quantitas ad quadratum ex BC in eadem serie secundã quantitatẽ est, sicut rectilineum BG tertia quãtitas seriei posterioris ad BD rectilineum item secundam quantitatem eiusdem seriei posteriosis. Qua propter ex propos. 25. lib.5. Composita prima quantitas cum tertia prioris seriei, nempe quadrata ex CA, & BA erit ad secundam; nimirum quadratum ex BC, vt in posteriori serie prima quãtitas rectilineum CH cum tertia quantitate rectilineo BG simul sumpta ad rectilineum BD. Sed quadrata ex BA, & AC dicunt proportionem æqualitatis quadrato ex BC ex 11. l.2:Ergo etiã rectilinea BG, & CH dicent proportionem ęqualitatis rectilineo BD ex BC.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duabus lineis inæqualibus reperire, quid possit plus maior, quam minor in ordine ad similes figuras constituendas.

DEntur duę lineæ A maior,&B minor. Accipiatur alia quædã dupla maioris,vt CD, & eâ diuisâ per medium in E, eo in puncto centro facto, interuallo eius medietatis ED, ducatur semicirculus. Inde à centro E mensurata longitudine minoris datæ B vsque ad G, ibi erigatur perpendicularis, & deducatur vsque ad circumferentiam, & punctum contactus H centro E rectâ EH coniungatur. Dico enim, quòd si fiat figura ex GH similis figuræ ex A effectæ *illud est spacium, quò figura ipsa ex A effecta superat figurã sibi similem ex linea B erectam*, & ideo quod A est in potentia maiori, quàm B ad quamcunque figuram constituendam cuiuscunque formæ, seu magnitudinis tota linea GH.



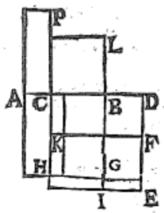
Probatur ex propos. præced. Subtensa angulo recto G, scilicet HE,est æqualis lineæ datæ A, ideo quòd singulæ sint æquales radio EC, & A quidem ex constructione; HE verò, quòd sit radius. Quare eius figura similis, similiterque posita, erit æqualis duobus figuris similibus, similiterque positis ex GH, & ex EG. Quamobrem figura ex A æqualis figuræ ex EH similis, similiterque posita erit maior figurâ ex EG, & ideo ex B sibi æquali totâ figurâ ex GH simili, similiterque posita; quod erat probandum.

THOR. III. PROPOS. XXXIV. Eu.13.

Si recta linea secetur secandùm mediam, & extremam rationem, maius segmentum, cum dimidio totius iunctum, quintuplum potest efficere quadratum maius, quàm à dimidia totius describitur.

SEcetur recta AB in C media, & extrema ratione. Sitque maius segmentum BC; Prolongetur in D, & sit BD dimidia totius AB. Dico *quadratum ex CD; nimirum CE ex maiori segmento, & dimidio totius esse quintuplum maius, quàm quadratum ex sola dimidia BD, quod est BF.*

Probatur. Quadratum AG, ex AB totâ effectum, & ideo dupla lineæ BD, est quadruplum quadrati ex ipsa dimidia BD, ex propos.6. l.2. Et hnic quadrato æqualia sunt rectangula duo, vnum AH sub tota, & minore segmento, alterum CG ex tota, & maiore segmento ex prop.4. l.2.



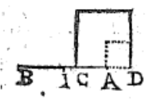
Primo quidem rectangulo AH, vel AP ex tota,& minore segmento ęquale est quadratũ ex maiore segmento CB, quòd est CL, vel KI ex propos.15.l.2. Alteri verò rectangulo CG,ex tota,& maiore segmento sunt æqualia duo rectangula ex CB, & BD qualia sunt BK, & KG ex maiori segmento, & dimidiâ totius effecta, & ideo æqualia inuicem. Loco tamen rectanguli KG substituamus æquale FI,quod sit complementum rectanguli BK in quad, CF,& ideo ex prop.35.l.1.ei æquale,& hinc ęquale, rectangulo KG. Igitur quadratum AG ex tota est æquale rectangulis duobus ex maiore segmento, & dimidia BK, & FI, & quadrato CL, idest æquali KI ex segmento maiori. Ideo hæc omnia erunt quadruplicia quadrato ex dimidia BF, vt est ostensum, tale esse quadratum AG, cui ęquantur. Adde omnibus istis simul rectangulis BK, & FI, & quadro KI quadratũ BF ipsum ex dimidia BD,& omnia erunt quintuplicia ipsius quadrati BF. Hæc autem omnia simul, nempe duo rectangula cum duobus quadratis, ex dimidia, & ex maiore segmento faciunt ex 6. l. 2. quadratum ex CD, idest CE erectum super segmento maiori CB, & addita medietate BD; hoc est super CD: Ergo hoc quadratum erit quintuplum quadrati BD.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV. Eu.3.l.11.

Si recta linea secundùm mediam, & extremam rationem sit secta, minus segmentum dimidio maioris additum; quintuplum potest eius, quod à dimidio maioris segmenti describitur.

SIt data recta AB secta secundùm extremam, & mediam rationem in C; Sitque minus segmentũ AC,cui adijciatur dimidium DA maioris CB Dico DC posse efficere *quadratum quintuplo maius, quàm* AD.



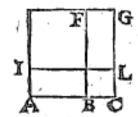
* Probatur. Ita proportionatur tota AB ad CB maius segmentum, vt CB ipsum ad AC.

Qua de re ex 18.l.5.etiam medietas totius ad medietatem segmenti maioris se habebit, vt segmentum maius CB ad minus CA, & ideo conuertendo minus CA ad maius CB segmentum se habebit,vt dimidiũ AD segmenti maioris ad dimidium AI totius AB. Vnde ex 17.lib. 5. minus CA cum dimidio maioris segmenti se habebit eodem modo ad maius CB cum dimidio AI totius AB,vt segmenti maioris dimidiũ AD ad dimidium totius AI. Ideoque etiam quadrata harum linearum taliter se habebunt ex prop. 26.h. Atq; adeo erit quadratum segmenti minoris simul,cum dimidio maioris segmenti, tanquam vna linea,& latere ad quadratum maioris segmenti cum dimidio totius lineæ AB tanquã vno latere, vt quadratum dimidij DA segmenti maioris ad quadratũ dimidiæ totius AI. Ergo etiã permutando erit quadratum minoris segmenti cum dimidio maioris, tanquam vno latere, ad quadratum dimidij segmenti maioris, vt quadratum maioris segmenti cum dimidio totius, tanquam vno latere ad quadratum dimidię totius: sed hoc quadratum ex pręcedenti est quintuplum quadrati dimidiæ totius. Ergo etiam quadratũ ex DC minore segmento, & dimidio maioris effectum erit quintuplum quadrato segmenti DA dimidij maioris, quod erat probandum.

THEOR. V. PROPOS. XXXVI. Eu.4.l.11.

Si recta linea secetur secundùm extremam, & mediam rationem; Quod à tota, quodque à minore segmento vtraque simul quadrata tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrato.

SIt AC secta secundum mediam, & extremam rationem in B. Dico quadratum AG totius AC, & quadratum BL minoris segmenti esse tripla quadrato IF maioris segmenti.



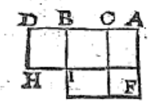
Probatur. Nam ex 15. lib 2. Rectangulum sub tota AC, & minore segmento BC, nimirum AL, est æquale quadrato maioris segmenti IF. Itaque IF,vtpote pars quadrati AG iam ęquat se met, vtpote quadratum maioris segmenti, & insuper quadratum AG ex tota continet rectangulum AL ex tota,& minore segmento ipsi IF quadrato maioris segmenti æquale. Et insuper FL rectãgulum, cui, si addas quadratum minoris segmenti BL, erit æquale rectangulo AL, & consequenter AG quadratum cum BL iam tertio æquat quadratũ IF maioris segmẽti. Vnde quadratum totius CA cum quadrato BL minoris triplum faciunt quadrati à maiore segmento descripti, quòd propositum fuit.

THEOR. VI. PROP. XXXVII.

Si recta linea secundum extremam, & mediam rationem secetur. Apponaturque ei æqualis maiori segmento; hoc fit minus segmentum respectu totius maioris, quæ modo se habet tanquam maius segmentum.

SIt AB secta secundùm extremam, & mediam rationem in C; addaturque ei DB æqualis maiori segmento. Dico *quod* DA *est recta quoque secundùm mediam, & extremam rationem in* B: *esse minus segmentum* DB; *maius verò* BA.

Prob. Rectangulum IF contentum sub tota,& minore segmento ex 15. l. 2. est æquale quadrato DI maioris segmenti DB additi. Adde itaque vtrisque spatium, quod eis est cõmune: Eruntq; æqualia rectãgulum AH, & quadratum BF. Rectangulum verò continetur sub tota DA, & maiore segmento DB addito At quadratum ex linea BA, quæ erat à principio. Ergo ex 17 l. huius ita erit DA ad BA, vt BA ad BD; ideoque DA erit secta extremâ, & mediâ ratione.



COROLLARIVM

QVare ita potens erit AB, cum dimidio DA ad quintuplum quadrati dimidij DA ex pr.34. huius, & ex propos.35. dimidium AB cum DB simul quintuplum poterit dimidij AB & ex præced. DA, & BD distinctæ poterunt duo quadrata simul triplum quadrati ex BA.

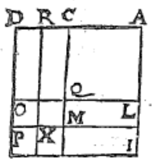
THEOR. VII. PROPOS. XXXVIII.

Si recta linea media, & extrema ratione secetur, & ei addatur minus segmentum; Quod tota cum hac additione potest efficere quadratum, quintuplum est eius, quod à maiore segmento efficitur.

SIt linea AR secta in C secundùm mediam, & extremam rationem & addatur ei minus segmentum DR. Dico totum DA quintuplo maius efficere quadratum; quàm CA maius segmentum.

Probatur. Quadratum AQ vt sæpius dixi, ex maiore segmento,& rectangulum CX ex tota RA, & minore segmento RC æquantur inuicem. Hoc autem

autem rectangulum ter ſumptum, vt CX, & XI & PR cum quadrato AQ quater æquant AQ; adde tandem rectangulum ML cum quadrato PX, & addes æquale vni ex prædictis partibus CX: Cùm LM æquet RQ, rectangulum, & PX quadratum XQ; vnde totum erit æquale rectangulo toti CX ex tota, & minore ſegmento; & propterà quinta quãtitas erit æqualis quadrato QA: Sed hæc omnia rectangula cum duobus quadratis æquant quadratũ AP totius AD, vt conſtat ex propoſ. 10. lib 2. Ergo quadratum ex DA quintuplum eſt quadrati ex CA.



EXPENSIO VIII.

De proportionibus circuli, & partibus ipſius.

QVamuis Euclides vnicam propoſitionem de Circulo ſolùm adferat, adhuc plures, illaſque elementares eſſe neceſſarias, experimentum docet. Cum & ea, quæ de parallelis in Coſmographia, & de figuris Iſoperimetris, & multa alia, hæc fundamenta expoſcant. Et ſanè cùm 3. lib. multa de æqualibus circulis, angulis, figuriſq; circulo inſcriptis dicta ſint, hic etiam de proportionalibus circuli partibus lautiùs agendum videbatur.

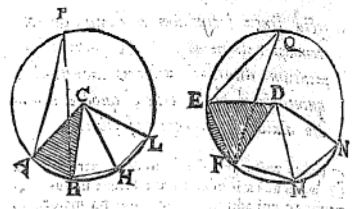
THEOR. I. PROPOS. XXXIX. Eucl. 33.

In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias conſtituti ſint. Inſuper, & ſectores.

SInt duo circuli ęquales, quorum centra C, & D, ſintque in ipſis duo anguli nigri ad cẽtra ſubtendentes arcus, AP, & EF; ſectoreſque ACB, & EFD. Dicoque itaque *ita eſſe angulum nigrum apud C, ad angulum nigrum apud* D, *vt arcus* AB *ad arcum* EF, *& vt ſectorem* ACB, *ad ſectorem* EDF. Ducantur AB, & EF rectæ & in circulo vtroque aliæ iſtis ſubtenſis æquales accommodentur in circulo C lineæ BH, & HL, &c. vſque dum placet, & in circulo D, aliæ tot numero, ac præcedentes; ſed æquales EF, eruntque arcus ſubtenſi, circuli quidem C equales arcui AB ex 32. tertij, & ex 26 anguli quoque albi apud C nigro C, vt ſinguli albi circuli D erunt æquales nigro, D necnõ, & arcus ſubtenſi FM, & MN erunt equales arcui EF.

Probatur itaque propoſ. Quam multiplex eſt aggregatum angulorum apud C, quod eſt ACL, anguli nigri C, tã multiplex eſt arcus AL, arcus AB, & ſector ACL ſectoris nigri. Item quam multiplex eſt aggregatum angulorum EDN anguli nigri D in circulo D, tã multiplex eſt arcus EN arcus EF, & ſector EDN ſectoris nigri.

Quare, ſi angulus ACL ſit æqualis angulo nigro, etiam arcus ſubtenſus AL arcui AB æqualis erit, & ſi maior angulus, maior erit arcus, ſi minor angulus minor quoque arcus. Et ita dicas de angulo EDN, & arcu EN; ſi enim angulus EDN æquet nigrũ angulum D, arcus EN æquabit EF arcum, ſi minor ſit, erit minor, excedet ſi excedat, vnde ex def. 9. Tract. 9 ſi angulus nig. C ponatur prima quãtitas, & D ſecunda & terminus in priori combinatione; At in poſteriori, Arcus AB circuli C pro fundamento, & arcus EF circuli D pro termino: fundamenta, nempe angulus, & arcus circuli C. æquali paſſu excedent terminos, ideſt angulum, & arcum circuli D, æquabuntur, vel deficient, & hoc iuxta quamlibet multiplicationem. Quare ex illa definitione ſicut eſt prima magnitudo ad ſecundam, nempe angulus niger apud C ad nigrum apud D, ita aſt arcus AB, ad arcum EF.



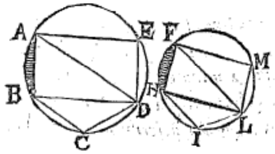
Et eodem argumento probabitur de ſectoribus; quòd ita ſit ſector ACB, ad ſectorem EDF, vt angulus niger in C ad angulum nigrum apud D quòd vt faciunt arcus, vnà cum angulis creſcant, decreſcant, & æquentur. Et quia anguli ad circumferentias dimidij ſunt angulorum ad centrum, ex prop. 9. tertij ita erit ex 17. quinti, angulus ad circumferentiam P ad angulum ad circumferentiam Q; vt arcus AB, ad arcum EF, &c.

THEOR. II. PROPOS. XL.

Quæ in circulis ſimilia polygona inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

SInt Polygonum in circulo ABCDE, & FHILM in minori circulo; Dico *ita eſſe polygonum* ſuper AB ad polygonum ſuper FH, vt quadratum ex diametro AD, ad quadratum ex diametro LF.

Ducto enim diametro AD, & FL, nec non, & BD ſubtensã, & HL, erunt triangula BDA, & FHL ſimilia, cùm ſint in ſimilibus ſegmentis ob ſimilitudinẽ præſuppoſitam polygonorum. Quare BA erit ad AD diametrum ex 4. ſexti, vt FH, ad FL; & permutando erit BA ad FH, vt diameter AD ad diametrũ FL, ſed ex prop. 26. h. cùm baſium proportionem duplicatam habeant, vt eſt baſis ad baſim; ita polygona ſimilia ex ijs baſibus conſtituta: Vnde ita erit polygonum ſuper BA ad polygõnum ſuper EH, vt quadratum ex AD, ad quadratũ ex FL.



COROLLARIVM

HInc ellicies idem dicendum de quocumque alio latere comparatum ad aliud ſibi correſpondens AE V.g. ad FM.

THEOR. III. PROPOS. XLI.

Circuli inter ſe ſunt, vt ex diametris quadrata.

* PRobatur. Nam ſi polygona ſimilia in circulis BCE, & FLM præced. propoſ. multiplicentur, vſque dum queant multiplicari, ſemper eorum latera æqué multiplicando erunt ad inuicem, vt quadrata diametrorum: ſed circulus polygonum, cuius latera multſplicata ſint quouſque multiplcari queant, non excedit. Nam ſi excederet, adhuc in ſegmẽto circuli, vt eſt pars nigra BA. & HF poſſent latera delineari. Ergo erit etiã circulus BACDE, ad circulum FHILM, vt quadratũ ex diametro AD ad quadratum ex diametro FL.

THEOR. IV. PROPOS. XLII.

Ambitus ſimilis Polygoni circulo inſcripti eſt ad ambitum alterius, vt diameter vnius ad diametrum alterius.

* PRobatur vtendo eadem fig. Nam BA prima quãtitas eſt ad AD ſecũdã; vt FH tertia ad FL quartam. Habet autem quinta BC ad ſecundam AD eandem proportionem; quam HI ſexta ad FL quartam. Ergo ex propoſ. 25. quinti compoſita quoque BA prima cum quinta BC habebit eandem proportionem ad AD ſecundam, quam tertia FH cum ſexta HI ad quartam FL, & ita dicas de omnibus alijs lateribus replicando idem argumentum. Sic quia quantitas prima ABC habet eandem rationem ad AD ſecundam, & diametrum; vt FHI tertia ad quartam, nempe diametrum FL: habet autem CD quinta eandem proportionem ad diametrum AD, nempe ad ſecundam quantitatem, quam IL, ſexta ad quartam nempe ad diametrum FL: habebit etiam quantitas compoſita prima cum quinta ABC, & CD, ad diametrũ AD; nempe ad ſecundã eandem rationẽ quã IFH, & IL ſexta cũ tertia ad quartam, nempe ad diametrum FL, & ſic de ceteris lateribus argumẽtũ vrgebit donec totus ãbitus ſit cõpletus. Cùm ergo ambitus poligoni ſit ad diametrum circuli, in quo eſt, vt ambitus alterius ad ſuum diametrum; erit etiam *conuertendo* Ambitus polygoni circulo inſcripti ad ambitum polygoni ſimilis in alio circulo inſcripti, vt diameter ad diametrum.

THEOR. V. PROPOS. XLIII.

Circulorum circumferentiæ inter ſe ſunt, vt diametri.

* PRobatur. Nam ſi polygona ſimilia in circulis fig. prop. 40. ABCDE, & FHILM multiplicentur, vſque dum multiplicari poſſunt; ſemper eorum latera ſimiliter numero augendo erunt ad inuicem ex præced. vt diametri: Sed polygonus multiplicatus in ſuis lateribus, vſque dum multiplicari poteſt, æquat ambitum circuli: nam ſi non æquaret in ſegmentis circuli, quibus excedit poligonum, alius polygonus poſſet inſcribi pluribus lateribus præditus contra hypotheſim; quæ ſupponit vltimum, qui poſſit inſcribi eſſe inſcriptum: Ergo ambitus circuli ad ambitum alterius circuli eſt, vt diameter ad diametrum.

THEOR. VI. PROP. XLIV.

Chorda vnius circuli ad chordam ſimilem alius alterius circuli eſt, vt diameter ad diametrum.

PRobatur ex prop. proximè pręced. 40. Nam ibi probatum eſt AB eſſe ad FH, vt diameter AD ad diametrum FL ob ſimilitudinem triangulorum ABD, FHL.

THEOR. VII. PROPOS. XLV.

Arcus cuiuſlibet circuli ad arcum ſimilem alterius circuli eandem habent proprotionem; quam chorda ad chordam: Et è contra.

* PRobatur. Qua vt in fig. propſ. 40. arcus ſunt ſimiles: Erit arcus BA ad arcum HF, vt circumferentia ABCDE ad circumferentiã FHILM: Sed circumferentia ABCDE ad circumferentiam FHILM eſt, vt diameter AD ad diametrum FL ex prop. huius 43. & chorda AB eſt ad chordam FH, vt diameter AD ad diametrum FL ex propoſ. 44. Ergo ex æquo erit, vt arcus BA ad arcum HF, ita chorda ſubtenſa arcui BA ad chordã ſubtẽſam arcui HF; Quod argumentum facilè etiam ad probandum proportionem conuerſam valebit.

COROLLARIVM

SEquitur hinc ſi arcus non ſint ſimiles, eos non habere inuicem, eandẽ proportionẽ: Si namq; eam haberent eſſent ſimiles; *conuertendo*, vt chorda ad diametrum, ita arcus ad circumferentiam.