ELEMENTA ALGEBRÆ PRO NOVIS TYRONIBUS

tumultuario studio

CONCINNATA,

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

In Illustri Lyceo Neapolitano

MATHEMATUM PROFESSORE

TOMUS II.

Continens librum secundum de speciosa problematum resolutione.

NEAPOLI MDCCXXV.

Ex Typographia Felicis Mosca,

EXPENSIS BERNARDINI GESSARI

Superioribus annuentibus.

PRÆFATIO

Secundi Libri Epitomem exhibens.

Secundus nostræ Algebræ Liber agit de problematum resolutione speciosâ, ostenditque, qua ratione adhibito calculo litterali, superiori libro explicato, problemata mathematica resolvantur. Jam methodum, qua utitur Algebra in resolutione problematum, visum est primo loco summatim ostendere. Quumque ea sit ipsa Veterum Analysis, alphabeti litteris administrata; quid intersit inter synthesim, & analysim, quave ratione veritates analyticè detectæ per synthesim componantur, exemplis primùm declaratur. His prælibatis summa proponitur artificii analytici, in resolutione problematum à Recentioribus usurpati, quod quia ad quatuor potissimùm reducitur operationes, earum unaquæque sigillatim exponitur.

Itaque primum, quod fieri debet in resolutione alicujus problematis, est, ut clarè distinctèque percipiatur id, quod in ipso quæritur problemate. Clara ista cognitio obtinetur, perpendendo sedulò conditiones, in problemate appositas, utpote quæ relationem nobis ostendunt, quam ad datum, sive cognitum id, quod quæritur, debet habere. Ex hujusmodi conditionibus pendet etiam problematis determinatio: unde ritè sunt evolvendæ, ut innotescat quoque, num problema propositum sit rectè determinatum, nec ne. Plerumque enim problema est deficiens, nec omnes habet conditiones, ad determinationem ejus necessarias. Aliquando verò per contrarium est redundans, & plures habet conditiones, quàm quæ ad ejus determinationem requiruntur.

Hinc cum Proclo Euclidis Commentatore, & Johanne Pellio Mathematico Anglo tria problematum genera distinguimus, determinata, indeterminata, & plusquam determinata: quæ quidem qua ra-

ratione sint dignoscenda, ex eodem Pellio docemus. Est enim problema determinatum, quum numerus datorum, à se mutuò non dependentium, quæsitorum numerum adæquat. Est verò problema indeterminatum, quum idem numerus datorum minor est, quàm quæsitorum. Et denique problema est plusquam determinatum, quum data plura fuerint, quàm quæsita.

Alterum, quod in resolutione problematis fieri debet, est nomina quantitatibus omnibus imponere. Hæc denominatio debet esse primò distincta: unde aliis litteris designandæ sunt quantitates cognitæ, aliis incognitæ; quin etiam in eorum problematum resolutione, in quibus quãtitates occurrunt diversæ speciei, juvat eas suis initialibus litteris designare, ut faciliùs possint à se mutuò distingui. Et secundò eadem denominatio debet esse compendiosa: quem in finem præstat, eam secundùm conditiones, in problemate appositas, facere. Sed ut liquidò Tyronibus constet immane quantùm afferat adjumenti distincta, & compendiosa quantitatum denominatio, exemplis ex Geometriâ petitis illud ostenditur.

Tertium porrò, quod fieri debet in resoſolutione problematis, eſt æquationes invenire inter cognitas, & incognitas quantitates. Quum problema eſt determinatum, ſemper tot licebit æquationes invenire, quot occurrunt quantitates incognitæ. Inveniuntur enim æquationes per conditiones, appoſitas in problemate. Et ad determinandum ritè problema, tot oportet in eo conditiones apponantur, quot fuerint incognitæ quantitates. At verò, quum problema eſt indeterminatum, tunc nequaquam poterunt tot æquationes inveniri, quotus eſt numerus incognitarum. Et denique, ſi problema fuerit redundans, ſive pluſquam determinatum, invenientur multò plures æquationes, quàm occurrunt quantitates incognitæ.

Inventis in reſolutione problematis determinati tot æquationibus, quotus eſt numerus incognitarum; in id deinde incumbendum, ut ex omnibus iis æquationibus alia deducatur, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam comprehendat. Hæc æquatio illa eſt, ad quam problema propr è reducitur. Sed quoniam ea non ſemper eſt apta ſolvendæ propoſitæ quæſtioni: proinde ultimum, quod fieri debet in reſo-

lutione problematis, eſt æquationem illam principalem ad ſimpliciorem expreſſionem ſubinde reducere, ut quantitates cognitæ ab incognitâ, quantùm fieri poteſt, ſeparatæ reperiantur; eandemque ita deinde reſolvere, ut valor incognitæ per ſolas quantitates cognitas expreſſus oriatur.

Æquationum legitima reductio obtinetur notiſſimis quatuor operationibus, additione, ſubtractione, multiplicatione, & diviſione. Sed interdum adhibenda eſt quoque formatio poteſtatum, ſcilicet, quum in æquatione quantitates radicales occurrunt. Quin etiam ſi contingat, omnino notum eſſe quicquid in uno æquationis membro continetur, & in altero reperiri perfectam aliquam poteſtatem, tunc per radicum extractionem æquatio reducetur. Reſolutio autem æquationum paulò difficilior deprehenditur, nec tam facilè, quemadmodum reductio, poteſt obtineri: unde indicato tantùm, qua ratione æquationes ſecundi gradus reſolvantur; deinceps materiam iſtam ex integro tractandam nobis proponimus.

Expoſitâ ſummatim methodo, qua utitur Algebra in reſolutione problematum, ga-eadem deinde exemplis certo consilio electis in Tyronum gratiam illustratur. Afferuntur autem primo loco problemata nonnulla arithmetica, quæ scilicet circa numeros, sive quantitates abstractas occupantur. Sunt quippe hujuscemodi problemata solutu valde facilia, eaque proinde Tyronibus primo loco proponēda. Neque enim aliud in horum problematum resolutione fieri debet, quàm conditiones, in iis appositas, algebraicis terminis designare. Nam eo ipso, quo id efficitur, illicò tot habentur æquationes, quot occurrunt quantitates incognitæ: adeo, ut si aliquid sit difficultatis in resolutione horum problematum, ea tota in inveniendâ problematis æquatione principali, eademque legitimè reducendâ potissimum sita sit.

Problemata arithmetica excipiunt problemata, alia, ex Geometriâ deprompta. Horum resolutio est paulò difficilioris indaginis. Quæ enim in iis quæruntur, pendent ut plurimum ex figurarum proprietatibus: proindeque, quò possit Analysta problemata geometrica ad algebraicos terminos deducere, necesse est, ut figurarū geometricarum proprietates, & accidentia perspecta habeat, ac explorata. Debet etiam

etiam Trigonometriam, Datorumque Doctrinam non ignorare. Nam contingit sæpe sæpiùs, ut in calculo peragendo non ea, quæ propriè data sunt, sed quæ ex iis consequuntur, debeant adhiberi.

Inter problemata geometrica extat & illud de inveniendâ diagonali alterâ parallelogrammi ex datis lateribus, & diagonali unâ: unde subortum nobis theorema illud, Pythagoreo longè universaliùs, quod in omni parallegrammo quadrata laterum omnium æqualia sint quadratis diagonalium. Extat etiam problema de inveniendâ diagonali alterâ quadrilateri, circulo inscripti, ex datis similiter lateribus, & diagonali unâ: unde deduximus celebre illud Ptolomæi theorema, quod in quadrilateris, circulo inscriptis, rectangulum sub diagonalibus adæquet summam eorum, quæ fiunt ex lateribus oppositis. Et denique affertur problema Pappi Alexandrini de producendo latere quadrati, nulli non cognito, cujus resolutio omnibus huc usque traditis rationibus docetur.

Post problemata geometrica, sequuntur problemata nonnulla physico-mathematica, quæ eo fine attulimus, ut intelligant Tyrones, qua ratione physico-mathethematicæ disciplinæ possint etiam calculi algebraici legibus submitti. Horum priora duo exhibent leg s, observandas in congressu corporum, juxtà sanioris Physices principia. Tertium est problema ludi trudicularis, cujus tres casus expenduntur. Quartum specimen præbet totius ferè Artis Ballisticæ. Et quintum, sive postremum est problema Torricellii de definiendâ figurâ vasis, ita ut fluidum, erumpens per foramen, factum in fundo ejus, æqualibus temporibus æqualiter quoque deprimatur; cujus solutionem exhibuit primus omnium Dominus Mariotte in suo de Aquarum motibus tractatu, gallicè scripto.

His omnibus exemplis abundè, opinor, illustratur methodus, qua utitur Algebra in resolutione problematum: proindeque plura alia congerere, superfluum duxi. Quia ergo unicum medium, quod adhibet Algebra ad problemata quæcumque resolvenda, est æquationum artificium; harum naturam, & affectiones explicandas aggredior: qua in re tria præmittuntur; primum, qua ratione æquationes dividantur in gradus, & considerentur velut congeries quantitatum, quæ simul zero, sive nihilum adæquent; alterum, quo pacto ordinari debeant æquationis termini, & à se mutuò distingui; ac tertium, quo artificio cujusque gradus æquationes ad formulas quasdam generales possint revocari.

Quoniam autem in omnibus æquationibus illud sedulò debet observari, ut termini omnes sint homogenei; de homogeneitate istâ terminorum deinde disseritur. Hanc in æquationibus numericis considerari semper posse, exinde deducitur, quod in omni numero tot semper dimensiones, quot libuerit, liceat distinguere. Eandem reperiri etiam in æquationibus litteralibus, quum nomina quantitatibus imponitur secundum propriam ipsarum naturam, exemplo ex Geometriâ petito demonstratur. Unde conficitur, tunc demum terminos æquationis non esse homogeneos, quum æquatio est litteralis, & nomina quantitatibus secundùm propriam ipsarum naturam nequaquam sunt imposita.

Sed consideratâ inter quantitates, quæ litteris designantur, unitate, eadem omnino ratione, qua inter quantitates numeris expressas consideratur; ostenditur qua ratione, quum termini æquationis nequaquam sunt homogenei, possint uni-

unitatis illius beneficio velut homogenei considerari. Cui illud etiam subjungitur, tamquam ab eo, quod agitur, non omnino alienum, quo pacto quantitates omnes velut lineæ omninò simplices concipi queant, licèt plures dimensiones habere videantur; quove item artificio, invectâ in Geometriam unitate, liceat multiplicationem, divisionem, & radicum extractionem perinde lineis perficere, ac numeris fieri solet.

Jam adhibitâ unitate productum, quod oritur ex multiplicatione duarum linearum, erit non rectangulum, ut docet Euclides in Elementis, sed linea altera simplex. Unde ne in id Tyrones impingant, ad rem visum est, advertere productum illud nec lineam esse, nec rectangulum, sed dumtaxat utroque modo posse designari. Quod equidem dum clariùs ostenditur, verus usus, quem præstat unitas in Geometriâ, aperitur, nempe quod beneficio ejus rationes, quæ ex duabus, aut pluribus componuntur, ad simplices revocentur. Unde colligimus, quod etsi unitatis artificium in Geometriâ non adhibuerint Veteres, ipsum tamen usum unitatis aliâ ratione, & fortasse præstantiori, fuerint consequuti.

Ex

Ex homogeneitate, in terminis cujusque æquationis observandâ, progredimur recto tramite ad radices æquationum, earundemque multiplices species explicandas. Radicem æquationis vocamus valorem, quem in eâ habet incognita. Unde considerando æquationes, velut congeries quantitatum, quæ simul zero, sive nihilum adæquent, deducimus radicem æquationis talem esse debere, ut si loco incognitæ scribatur, ejus conditiones adimpleat, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum evanescant. Ostenditur autem exemplis, omnem æquationem, quum plures habet dimensiones, plures item radices admittere. Cujus rei ratio subnectitur, nempe quia interdum problemata, etsi determinata, pluribus modis solvi possunt: proindeque, ut iis per singulos casus satisfieri queat, invenitur in cujusque resolutione æquatio talis, quæ tot radices admittet, quot modis problema solvi poterit.

Circa species radicum æquationis, affertur primò divisio illarum in positivas, & negativas. Huic subnectitur divisio altera in reales, & imaginarias; quæ quidem omnes radicum species exemplis ostendetſtenduntur. Qua autem ratione fiat, ut non omnes æquationis radices ſint reales, nec omnes poſitivæ, ibidem explicatur, oſtenditurque radices negativas indicare nobis problema non eſſe rite conceptum, ſed debere paulò aliter enunciari; radices autem imaginarias indicio nobis eſſe, problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem aliquam involvere, atque adeo moderandum eſſe aliquo modo, quò capax fiat ſolutionis.

Ad hæc docetur conſtitutio æquationum, quarum plures ſunt dimenſiones, & conſequenter plures radices, & oſtenditur exemplis æquationes iſtas oriri per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, quæ ipſarum radices comprehendunt; id quod primus omnium docuit Harriotus. Hinc verò deducimus, æquationem omnem, quæ plures radices admittit, dividi ſemper poſſe per binomium, compoſitum ex incognitâ minùs valore unius ex radicibus poſitivis, vel ex incognitâ plus valore unius ex radicibus negativis; quod equidem quum fit, dimenſiones æquationis minuuntur, ipſaque æquatio ad gradum deprimitur inferiorem.

Viciſſim autem oſtendimus, quod ſi æquatio aliqua dividi poſſit per binomium, conſtans ex incognitâ plus, vel minus alterâ quantitate cognitâ, quantitas iſta cognita ſit una ex radicibus æquationis; ſecus verò, ſi diviſio fieri nequeat. Unde colligimus, quod num aliqua quantitas ſit radix alicujus æquationis, nec ne, cognoſci poſſit, non modò ope ſubſtitutionis, nimirum inquirendo, num ſubſtitutâ quantitate illâ loco incognitæ, ejus conditiones adimpleat, faciendo, ut æquationis termini omnes evaneſcant; verùm etiam ope diviſionis, ſcilicet dividendo æquationem propoſitam per binomium, conſtans incognitâ plus, vel minus datâ illâ quantitate.

Ex traditâ conſtitutione æquationum, quæ plures habent dimenſiones, illud etiam oſtendimus, æquationem omnem tot radices habere poſſe, quot ſunt dimenſiones ejus, & non plures. Sed qua ratione cognoſci poſſit, quot ex iis radicibus ſint poſitivæ, & quot negativæ, quum omnes ſunt reales, regulâ à Carteſio traditâ docetur, quæ etiam extenditur ad æquationes, in quibus unus ex terminis intermediis deficit. Atque hìc etiam explicatur, quo pacto fieri poſſit, ut in unâ, eademque æquatione radices omnes

omnes, quæ negativæ erant, evadant positivæ, & ut eadem operâ omnes illæ, quæ positivæ erant, fiant negativæ.

Porrò etsi radices imaginariæ casus problematis impossibiles nobis ostendant, neque adeo, quum occurrunt, ulla earum ratio haberi debeat; earum tamen natura Analystis ignota esse non debet. Hunc in finem ostendimus, radices istas in æquationibus occurrere semper in numero pari; atq; adeo æquationes illas, quæ sunt tertii, quinti, septimi, aut alterius cujusque imparis gradus, unam ad minimum radicem realem habere; nec proinde omnino impossibilia esse posse problemata, ad quæ æquationes illæ referuntur; quum iis fieri possit satis saltem per radicem illam realem, quam illæ æquationes admittunt.

Ostendimus quoque radices imaginarias posse esse duplicis speciei, nimirum vel puras, vel mixtas. Quumque contradictio radicum imaginariarum in æquationibus non appareat, deducimus hinc, quod sicuti ex duabus radicibus alicujus æquationis nequit esse una realis, & altera imaginaria, sed debent vel ambæ esse reales, vel ambæ imaginariæ; ita quoque ex duabus alicujus æquationis radicibus imaginariis nequeat esse una pura, & altera mixta, sed debeant vel ambæ esse puræ, vel ambæ mixtæ; quum aliter contradictio non evanesceret. Atque ex eodem principio colligimus quoque, quod sicuti quum utraque radicum imaginariarum est pura, communis utrique debet esse quantitas imaginaria, sed contrariis signis affecta; ita quoque quum ambæ radices sunt mixtæ, communis esse debeat tam quantitas imaginaria, quàm quantitas realis, sed ista eodem signo, illa verò signis contrariis designata.

Hinc verò consequens fit, æquationis secundi gradus, cujus duæ radices sunt imaginariæ, ultimum terminum oportere esse semper affectum signo positivo; atque adeo in iis æquationibus secundi gradus, in quibus ultimus terminus reperitur affectus signo negativo, radices duas nequaquam posse esse imaginarias. Sed ne aliquis existimet, generaliter imaginarias esse radices duas illius æquationis secundi gradus, cujus ultimus terminus afficitur signo positivo; ad rem visum est advertere, id dumtaxat locum habere in iis æquationibus, in quibus ultimus terminus reperitur quidem affectus signo positivo, sed est major quadrato, quod fit

fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ.

Etsi autem radices alicujus æquationis non adhuc nobis innotescant, nihil tamen vetat, quominus æquatio ipsa in aliam transformetur, cujus radices habeant datam quandam relationem cum radicibus prioris. Hujusmodi æquationũ transformatio, quæ multifariam fieri potest, varios nobis suppetit usus, tum ad præparandas, ac reducendas, cum item ad resolvendas æquationes: unde de multiplici istâ æquationum transformatione tractatio suscipitur. Primò itaque explicantur transformationes æquationum, quæ fiunt additione, & subtractione; tum eæ afferuntur, quæ fiunt multiplicatione, & divisione; ac denique alii æquationes trasformandi modi, Algebristis non ita familiares, breviter indicantur.

Igitur additione, & subtractione transformantur æquationes, quum radices ipsarum datâ aliquâ quantitate augentur, vel minuuntur. Ostenditur autem, quod augendo radices æquationis, positivæ quidem augeantur, negativæ verò minuantur. Et vicissim, quod minuendo radices æquationis, positivæ quidem minuantur, negativæ verò augeantur. Nec silentio præ-

præterimus, quod augendo radices æquationis, una ex radicibus negativis possit prorsus evanescere, aut etiam ex negativâ fieri positiva; & vicissim, quod minuendo radices æquationis, una ex radicibus positivis possit in nihilum abire, aut etiam ex positivâ fieri negativa. Atque hac arreptâ occasione, modum indicamus inquirendi, intra quem terminum consistant radices, tum positivæ, cùm negativæ alicujus æquationis.

His subjungimus usum harum transformationum, nimirum quod ipsarum ope tolli semper possit secundus terminus ex omni æquatione: id, quod inservit, tum quia sublato secundo termino omnes alicujus gradus æquationes ad pauciorem numerum reducuntur, tum etiam quia resolutio æquationum secundi gradus, tollendo ex iis terminum secundum, nullo negotio obtinetur. Interim illa regula, per quam tollitur secundus terminus, multum abest, ut pro tollendis terminis aliis possit nobis usui esse. Unde, ne si id fortè fieri contingat, hæreat Analysta, ostendimus qua ratione tolli possit per analysim quisq; terminus ex quacũq; æquatione propositâ; & generaliter notamus ad id obtinendũ resolvendã semper

esse

esse æquationem talem, ut gradum ejus ostendat locus ipse, quem occupat in æquatione tollendus terminus, si unitate unâ minuatur: adeò, ut pro tollendo ultimo termino ex datâ quacumque æquatione, resolvi debeat æquatio, quæ sit ejusdem gradus cum æquatione propositâ, quæque etiam ab ipsâ non differet.

Multiplicatione, & divisione transformantur æquationes; quum ipsarum radices per datam aliquam quantitatem multiplicantur, vel dividuntur. Id autem facili negotio fieri posse ostendimus, si termini ipsius æquationis multiplicentur, vel dividantur per terminos progressionis geometricæ, quæ incipit ab unitate, & pro exponente habet datam quantitatem. Quid porrò præstent hujusmodi transformationes, deinceps explicatur; doceturque usui nobis esse posse ad tollendas fractiones, & quandoque etiam radicales quantitates ab ipsis æquationibus; item ad reddendam quantitatem cognitam alicujus termini æqualem datæ cuidam quantitati, quod ostenditur fieri etiam posse ope earum transformationum, quæ additione, & subtractione peraguntur; ac denique ad minuendas quantitates cognitas, quæ in æquationum termi-

minis singulis occurrunt, id quod in examinandis æquationibus valde conducit.

His quatuor æquationes transformandi modis tres alii subjiciuntur, quorum prior est, quum æquationes mutantur in alias, quarum radices sint quotientes, qui oriuntur, dividendo datam aliquam quantitatem per radices illarum. Ope hujus transformationis radices æquationis convertuntur in alias, quæ reciprocam ipsarum servant rationem, adeoque maxima convertitur in minimam, & vicissim minima in maximam; notaturque quod si loco datæ quantitatis unitas capiatur, radices æquationis in earum inversas mutentur. Ejusdem transformationis ope potest etiam ex omni æquatione penultimus terminus tolli, si modò priùs tollatur secundus. Et eodem modo poteris etiam antepenultimum tollere, si modò tertium priùs tollas.

Alter æquationes transformandi modus est, quum æquationes mutantur in alias, quarum radices sint residua, quæ oriuntur, subtrahendo ex datâ quantitate radices illarum. Hic modus transformandi æquationes usui nobis esse potest ad tollendum ex iis secundum terminum, quotiescumque afficitur signo negativo.

Idem inservit quoque, quum radices omnes æquationis requiruntur positivæ, & una simul coefficiens alicujus termini major esse debet datâ aliquâ quantitate. Sed si æquationis radices omnes requirantur quidem positivæ, at coefficiens unius ex terminis ejus non major, sed æqualis esse debeat alicui datæ quantitati; tunc non semper id poterit obtineri. Ac denique eodem transformandi modo illud quoque præstari potest, quod requirebat Cartesius pro construendis æquationibus sex dimensionum, nimirum ut data æquatio mutetur in aliam, in qua radices omnes sint positivæ, & unâ simul coefficiens termini tertii major sit quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato.

Tandem ultimus æquationes transformandi modus est ille, qui fit subrogando incognitam aliam in locum quadrati, cubi, aut cujuslibet alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ. Quod quidem quum fit, non modò minuuntur æquationum dimensiones, verùm etiam æquationes ipsæ mutantur in alias, quarum radices habent rationem duplicatam, triplicatam, &c. ad radices illarum. Possunt etiam æquationes transformari, mutando eas in alias, quarum radices habeant vicissim rationem subduplicatam, subtriplicatam, &c. ad radices illarum. Sed id efficitur, si vicissim loco incognitæ, in æquatione contentæ, ponatur quadratum, cubus, &c. alterius cujuslibet incognitæ; adeò, ut hac ratione non quidem minuantur, sed augeantur æquationum dimensiones.

Quum de gradibus æquationum actum est, diximus æquationes dividi in gradus ratione maximæ potestatis, ad quam ascendit in iis quantitas incognita. Sed ibidem notavimus quoque æquationem aliquam tunc demum dicendam esse illius gradus, quem ostendit maxima incognitæ potestas, quum ad gradum inferiorem deprimi non potest; nam si fortè contingat eam deprimi posse, tunc propria ejus sedes erit in gradu illo, ad quem utique deprimitur: quod quidem notare oportebat, ne problemata, unde derivantur æquationes, contra propriam naturam, generis altioris dijudicentur. Itaque ad rem visum est, priusquam de resolutione æquationum ageretur, regulas tradere, quibus instructus Analysta æquationes, in propriâ sede non existentes, deprimere possit, & ad propriam sedem illas revocare.

 Vul-

Vulgus Algebriſtarum eas æquationes docet eſſe in propriâ ſede, quæ in alias ſimpliciores dividi non poſſunt. Sed quia omnis æquatio dividi ſaltem poteſt in æquationes ſimplices, quæ ſuas continent radices; placuit rem aliter definire, nempe ut eæ tantùm æquationes in propriâ ſuâ ſede exiſtant, quæ non modò per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, in quibus earum radices continentur, verùm etiam per unicam tantùm illarum æquationum conſtitui poſſunt. Unde diſcimus, æquationes tunc demum in propriâ ſuâ ſede non exiſtere, quum vel omnes ipſarum radices ſunt rationales; vel partim rationales, partim radicales; vel denique quum omnes ſunt radicales, ſed ſedes incommenſurabilitatis nequaquam reperitur in illo gradu, ad quem attollitur in æquatione quantitas incognita.

Atque hinc, vocando ſimplices eas tantùm æquationes, in quibus incognita non modò eſt unius dimenſionis, ſed inſuper valorem habet rationalem, deducimus æquationes in propriâ ſuâ ſede non exiſtentes tripliciter componi poſſe. Omnibus enim id accidit, ut non aliter conſtitui queant, quàm per multiplicationem mutuam aliarum inferioris gradus æquationum. Sed æquationum componentium, vel unaquæque ſimplex eſſe poteſt, vel nulla gaudet hac ſimplicitate, vel denique ex iis aliquæ ſimplices eſſe poſſunt, aliquæ non item. Unde in tradendâ æquationum ad propriam ſedem reductione primò caſum conſideramus, quum inter æquationes componentes reperitur aliqua ſimplex; tum alium expendimus, ubi nulla æquationum componentium hac gaudet ſimplicitate: id, quod in iis tantùm æquationibus contingere poteſt, quæ plures, quàm tres, dimenſiones habent.

Pro reducendis æquationibus compoſitis, in quibus una, aut plures ex componentibus ſunt ſimplices, noſcenda prius eſt ratio, qua terminorum cujuſcumque æquationis coefficientes conſtituuntur. Hanc itaque docentes, exemplis oſtendimus coefficientem ſecundi termini eſſe ſummam radicum ſub ſigno contrario, coefficientem termini tertii eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis ſub ſigno proprio, coefficientem termini quarti eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis ſub ſigno mutato, atque ita deinceps: quam utique con-

constitutionem primus omnium Cartesius observavit. Unde, quum in secundo termino cujuscumque æquationis existat summa radicum sub signo mutato; deducimus, quod quotiescumque ex aliqua æquatione deficit secundus terminus, tunc summa radicum positivarum æqualis esse debeat summæ ex radicibus negativis.

Jacobus Ozanam, Mathematicus Parisiensis, in suis Algebræ Elementis conatus est problemata æquationum constitutiva, ex quorum nempe resolutione æquationes illæ orirentur, determinare, fortè ne crederent Tyrones, æquationes ad libitum sumptas fictitias esse, & ad nullum problema posse referri. Sed docuit per ambages id, quod unicâ, & simplicissimâ viâ tradi poterat. Itaque ex cognitâ ratione, qua constituuntur coefficientes terminorum cujuscumque æquationis, methodum generalem indicamus, qua mediante determinari possint problemata æquationum constitutiva, & exemplis ostendimus, sic rem concipiendam esse, ut pro unaquaque æquatione inveniendæ sint tot quantitates, quot sunt dimensiones ejus, sed ita tamen, ut data sit non modò summa ipsarum, verùm etiam summa productorum ex singulis binis, summa

ma productorum ex singulis ternis, atque ita deinceps.

Eodem in loco docemus etiam, qua ratione in omni æquatione, etsi radices ejus adhuc nos lateant, determinari possit summa quadratorum, cuborum, aliarumque altioris ordinis potestatum, quæ ex iisdem radicibus fiunt. Id primus, quem sciam, tradidit Vir summus Isaac Newtonus in Arithmeticâ suâ universali: unde limites collegit, intra quos continentur radices tum positivæ, cùm negativæ cujusque æquationis. Nam quum radicum omnium quadrata sint positiva, erit item positiva summa quadratorum, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit, quàm quadrato-quadratum radicis maximæ; & summa cubo-cuborum major, quàm cubo-cubus maximæ radicis. Quocirca si limitem desideres, quem radices nullæ transgrediantur, quære summam quadratorum ex radicibus omnibus, & extrahe ejus radicem quadratam, quæ quum sit major maximâ radice æquationis, limitem dabit optatum. Sed ad radicem maximam propiùs accedes, si quæras summam quadrato-quadratorum, & ex-

extrahas ejus radicem quadrato-quadratam; & adhuc magis, si quæras summam cubo-cuborum, & extrahas ejus radicem cubo-cubicam; atque ita deinceps.

Cognitâ ratione, qua constituuntur coefficientes terminorum cujusque æquationis, facile nobis fuit methodum excogitare, pro reducendis æquationibus compositis, in quibus aliquæ ex componentibus sunt simplices. Nam, quum inter æquationes componentes una, aut plures sunt simplices; æquatio ipsa composita necessariò unam, aut plures habere debet radices rationales: proindeque eò res redit, ut qua ratione radices istæ rationales erui possint, ostendatur. Unde, quia in ultimo termino cujuscumque æquationis reperitur id, quod ex continuâ radicum omnium multiplicatione producitur; eruentur radices rationales, si quæ sint, ex quacumque æquatione, si utique quantitatis in ultimo termino existentis divisores omnes capiantur, & inquiratur; quinam ex iis substituti in æquatione incognitæ loco, conditiones ejus adimpleant, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum evanescant; in quo quidem scrutinio peragendo substituendi sunt divisores tum signo po-

sitivo, cùm signo negativo; nam fieri potest, ut qui divisor non sit radix positiva alicujus æquationis, idem sit radix negativa.

Hæc methodus eruendi radices rationales ex æquationibus, ope divisorum quantitatis cognitæ, quæ existit in ultimo termino, duplici ex capite displicet nonnullis; primò quia non ita facile est, omnes alicujus quantitatis divisores invenire; & secundò, quia quum permulti sunt divisores, omnes tentare, tædium affert. Itaque, ut his difficultatibus occurratur, non modò methodus traditur satis expedita pro inveniendis datæ alicujus quantitatis divisoribus omnibus; verùm etiam cautiones nonnullæ indicantur pro minuendo labore substitutionis. Hujusmodi cautiones sunt quatuor. Prima, tentando, num minui possint termini æquationis, ope illius transformationis, quæ divisione peragitur; quum sic minuatur quoque numerus divisorum. Secunda, inveniendo limites, intra quos continentur radices tum positivæ, cùm negativæ; quum divisores, qui eos limites transgrediuntur, tutò negligi possint. Tertia, rejiciendo etiam divisores, qui excedunt coefficientem secundi termini, quoties-cum-

cumque radices æquationis, vel omnes sunt positivæ, vel omnes negativæ. Et quarta demum in æquationibus litteralibus negligendo quoque divisores duarum, aut plurium dimensionum, quum termini omnes sunt homogenei, & æquatio nequit transformari, ponendo incognitam aliam loco quadrati, cubi, aut alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ.

Alter casus, qui considerari debet, in reductione æquationum ad propriam sedem, est, quum nulla ex æquationibus componentibus est simplex. Casus iste in æquationibus secundi, & tertii gradus locum habere nequit. Itaque dumtaxat contingere potest in æquationibus, quæ plures habent dimensiones, quàm tres. Primò igitur rei periculum facimus in æquationibus quarti gradus. Et quoniam æquationes istæ, quum in propriâ sede non consistunt, nec tamen ad earum constitutionem ulla concurrit æquatio simplex, non aliter componi possunt, quàm per multiplicationem duarum secundi gradus æquationum; visum est, in æquationibus quarti gradus tres casus subdistinguere. Primus est, quum utraque æquationum componentium secundo termino caret. Alter, quum una caret secundo termino, alia illum admittit. Et tertius, sive postremus, quum in utraque ex æquationibus componentibus secundus terminus reperitur. Pro singulis istis casibus regulæ totidem ad praxim satis faciles, ac expeditæ traduntur. Sed earum ultima pro omnibus usui nobis esse potest; quum casus, ad quem refertur, generalitate suâ, alios quoque duos comprehendat.

Quoniam autem hæc regula ad æquationes altioris gradus nequaquam potest promoveri; proinde pro reducendis æquationibus quarti gradus, quum per duarum secundi gradus multiplicationem componuntur, visum est aliam methodum proponere, quæ generalis est, & ad omnes cujuscumque gradus æquationes potest applicari. Hæc methodus procedit, assumendo æquationes duas componentes indeterminatè, & conferendo cum æquatione propositâ eam, quæ oritur ex illarum multiplicatione; quum per mutuam istam collationem facile fit æquationum componentium utramque determinare. Itaque alterius hujus methodi periculum fit primò in ipsis æquationibus quarti gradus, tum ad æquationes

nes quinti, & sexti gradus eadem applicatur. Sed in proponendis exemplis pro reductione æquationum quarti gradus, novimus, qua ratione exprimat analysis quantitates illas, quæ plures valores habere possunt, nimirum per quotientem, qui oritur, dividendo zero per zero.

Atque hæc quidem quantitatum indeterminatarum expressio sponte suâ consequitur ex iis, quæ de naturâ, & calculo infinitesimarum priori libro exposuimus. Demonstravimus enim infinitesimarum, hoc est quantitatum indefinitè parvarum, varia genera posse considerari, sed zero esse velut infinitesimam ultimi generis, quum sit ultimus terminus, ad quem quantitates decrescendo possint perveniri. Itaque, quum ibidem ostensum sit generaliter, quotientem, qui oritur, dividendo per se mutuò duas ejusdem generis infinitesimas, quantitatem esse finitam; erit etiam quantitas finita quotiens, qui oritur, dividendo zero per zero: proindeque quia quotiens iste nullum habet valorem certum, ac determinatum; erit indeterminata, quantitas finita ab ipso designata, adeoque pluribus valoribus poterit explicari.

Æquationes, quæ duas, aut plures radi-

dices æquales habent, nequaquam existunt in propriâ suâ sede, sed semper ad gradum alterum inferiorem deprimi queunt: quod quidem verum est, non modò si radices illæ æquales sint commensurabiles, ac rationales, verùm etiam si fuerint incommensurabiles, ac radicales. Reductio istarum æquationum potest iisdem fermè regulis perfici, quibus aliarum æquationum reductio instituitur. Sed placuit, hujusmodi æquationes speciatim considerare, quia nempe per vias longè faciliores ad propriam suam deprimi possunt. Exhibemus itaque pro reducendis hisce æquationibus duplicem methodum, quarum utraque in eo consistit, ut una ex radicibus æqualibus inveniatur; nam eâ inventâ, solius divisionis ope ad propriam suam sedem æquatio deprimetur.

Prima methodus est illa, quam tradidit Cartesius in suâ Geometria, dum tangentes curvarum docuit determinare. Hæc methodus ita se habet. Assumantur indeterminatè tot radices æquales, quot æquatio proposita supponitur habere. Tum ex iis constituatur æquatio, quæ pauciores quidem dimensiones, quàm proposita, habere potest, plures autem ha-

habere non poteſt. Jam ſi æquatio iſta non habeat tot dimenſiones, quot adſunt in propoſitâ, multiplicetur ea per aliam æquationem, tot, quot ei deſunt, dimenſiones habentem. Sic enim habebitur æquatio, in qua tot erunt dimenſiones, quot propoſita complectitur. Comparentur porrò termini unius æquationis cum terminis alterius, & iſtius comparationis ope habebuntur totidem æquationes, quarum unaquæque unam ex radicibus æqualibus propoſitæ æquationis continebit.

Quum æquationes propoſitæ tot habent radices æquales, quot ſunt dimenſiones ipſarum; eruentur ex iis per comparationem illam tales æquationes, ut nullo negotio reſolvi poſſint; quippe quæ ſemper erunt puræ, hoc eſt primum tantùm, & ultimum terminum habebunt. Sed quum æquationes propoſitæ nequaquam continent tot radices æquales; tunc æquationes, quæ ex iis eruuntur, prodeunt affectæ; proindeque quæ difficultas vitanda eſt pro reducendis æquationibus propoſitis regulis antea traditis, eadem in reſolvendis aliis illis æquationibus occurrit. Itaque, ut huic difficultati occurramus, methodum proponimus val-

valde facilem, ac expeditam pro inveniendâ unâ ex radicibus æqualibus, quæ in ſingulis illis æquationibus continetur, ſcilicet quærendo communem diviſorem duarum quarumvis illarum æquationum.

Altera methodus pro reducendis æquationibus, in quibus duæ, aut plures radices æquales continentur, eſt Johannis Huddenii, eaque pendet ex hoc theoremate, quod ſi termini alicujus æquationis, duas, pluresve radices æquales habentis, multiplicentur ordine per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ, altera oriatur æquatio, in qua, unâ demptâ, eædem erunt radices æquales. Itaque, quia omnis æquatio, quæ plures habet radices æquales, in aliam converti poteſt, in qua contineantur eædem radices æquales, unâ demptâ, ſi utique omnes ejus termini multiplicentur ordine per terminos alicujus progreſſionis arithmeticæ; per diverſas hujuſmodi multiplicationes talis ſemper haberi poterit æquatio, ut unam tantùm contineat radicum æqualium. Quocirca, ſi hujus, & æquationis propoſitæ communis diviſor capiatur, ille dabit radicem æqualem optatam.

Explicatâ reductione æquationum, quæ

quæ in propriâ suâ sede non existunt, progredimur tandem ad resolutionem æquationum, in propriâ suâ sede existentium. Hujusmodi resolutio est totius artificii analytici coronis, ac complementum. Parum enim refert, in resolutione alicujus problematis æquationem invenisse, quæ singulas problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam comprehendat. Neque etiam juvat multum, æquationem istam, si fuerit composita, in suas componentes resolvisse, eandemque ad propriam suam sedem revocasse: si deinde regulæ non habeantur, quibus instructus possit Analysta æquationem, in propriâ suâ sede existentem, subinde resolvere, ut ope ejus resolutionis singulos incognitæ valores valeat eruere. Nam problema, quod proponitur, tunc dicitur resolutum, quum singuli valores magnitudinis, quæ principaliter quæritur in illo problemate, non ignorantur.

Itaque, quia æquationes, quum simplices prodeunt, nullâ egent resolutione, primùm æquationes resolvendas novas proponimus, quarum sedes in secundo gradu reperitur: Istæ, quum puræ sunt, resolvuntur nullo negotio, per solam quadratæ radicis extractionem. Sed si fuerint affectæ, propter ipsam affectionem, non erunt ita faciles resolutu. Interim pro iis resolvendis quatuor diversas rationes exhibemus; quarum prima procedit, tollendo ex iis secundum terminum, atque adeo delendo affectionem, quæ in illis occurrit. Secunda, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut una pars quadratum evadat perfectum. Tertia, assumendo radices propositæ æquationis indeterminatè, & ex iis novam æquationem constituendo. Ac quarta demum, assumendo indeterminatè, tum summam radicum, cùm earundem differentiam.

Æquationes secundi gradus affectæ, pro diversitate signorum, quibus termini ipsarum affici queunt, ad quatuor formulas possunt revocari. Itaque Tyronum utilitati consulentes, quatuor illas diversas resolvendi rationes singulis iis formulis applicamus. Ostendimus autem, quod quum ultimus æquationis terminus afficitur signo negativo, tunc radices æquationis semper sint reales; sed non item, si ultimus terminus æquationis afficiatur signo positivo; quum in hoc casu, si contingat ultimum terminum majorem esse quadrato, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, radices duæ æquationis prodeant imaginariæ. Itaque in æquationibus secundi gradus, quotiescumque ultimus terminus afficitur signo positivo, tunc demum radices duæ reales erunt, quum ultimus terminus non est major quadrato, quod fit ex semisse coefficientis secundi termini. Nec silentio præterimus, quod si idem ultimus terminus prædicto quadrato fuerit æqualis, radices duæ reales erunt, & æquales.

Resolutioni quatuor formularum, ad quas omnes secundi gradus æquationes reducuntur, subjungimus usum, quem præstant formulæ illæ in resolvendis æquationibus specialibus. Postquam enim quatuor illæ formulæ sunt resolutæ, singularumque radices inventæ; haud quidem necesse est, eadem arte æquationes resolvere speciales; sed poterit earum resolutio solius substitutionis ope obtineri, si scilicet inquiratur, ad quam ex iis formulis reducatur æquatio proposita, & in radicibus illius substituātur valores coefficientium, determinati ab ipsâ æquatione propositâ. Id igitur in unaquaque formulâ exemplis ostendimus: quo in loco illud etiam adnotamus, quod eodem artificio

ficio resolvi quoque possint æquationes secundi gradus, quarum radices sunt rationales, quæque ideo in propriâ suâ sede non existunt.

Eodem in loco ostendimus etiam resolutionem æquationum derivativarū secundi gradus, hoc est illarum æquationum, quæ talis naturæ deprehenduntur, ut tametsi dici nequeant secundi gradus, possunt nihilominus in alias secundi gradus transformari, si loco quadrati, cubi, aut alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ, incognita alia substituatur. Resolvuntur ergo hujusmodi æquationes, si radices inveniantur æquationum secundi gradus, in quas eæ transformantur. Nam si deinde ex his radicibus ea rursus radix eliciatur, quam designat potestas incognitæ principalis, in cujus locum substituta est incognita altera; jam propositarum æquationum radices habebuntur.

Resolutionem æquationum secūdi gradus excipit resolutio æquationum, quarum sedes in tertio gradu subsistit. Istæ similiter, quum puræ sunt, resolvuntur nullo negotio, per solam radicis cubicæ extractionem. Sed quoniam hac ratione unica tantùm radix eruitur, & omnis æ-

 qua-

quatio tot radices habere potest, quot maxima incognitæ potestas habet in eâ dimensiones; ostendimus, qua ratione ex æquationibus puris tertii gradus aliæ duæ radices erui possint. Id itaque obtineri posse docemus ope divisionis, nimirum si æquatio proposita dividatur per æquationem simplicem, radicem jam inventam continentem. Sic enim deprimetur ad aliam, quæ duas tantùm dimensiones habebit, & cujus adeo radices dabunt radices optatas. Sed aliæ duæ istæ radices imaginariæ oriuntur, quum in æquatione depressâ quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ minus sit ultimo termino, qui afficitur signo positivo.

Æquationes tertii gradus affectæ multiplicis speciei esse possunt. In iis namque oriri potest affectio, vel quia secundus terminus habetur, & tertius deficit; vel vicissim, quia tertius habetur, & secundus deficit; vel denique, quía tam secundus, quàm tertius terminus in iis reperitur. Interim, quia regula habetur satis expedita ad tollendum secundum terminum ex omni æquatione, satiùs duximus eas tantùm tertii gradus æquationes affectas considerare, quæ se-

cundo termino carentes, tertium dumtaxat terminum habent. Istæ æquationes, pro diversitate signorum, quibus affici possunt termini ipsarum, ad quatuor quoque formulas reducuntur, quarum proinde resolutionem sigillatim ostendimus.

Primò igitur earum formularum docemus resolutionem, in quibus tertius terminus afficitur signo positivo. Formulæ istæ unicam tantùm habent radicem realem; quæ positiva est, si ultimus terminus afficiatur signo negativo; negativa verò, si vicissim afficiatur signo positivo. Hanc radicem invenimus, constituendo novam æquationem, quæ unicam similiter contineat radicem realem, & cum istâ propositam comparando. Quumq; ea oriatur expressa duplici nomine; aliam proponimus rationem pro inveniendâ radice istâ, nimirum duo illa nomina assumendo indeterminatè, eaque deinde determinando æquationibus totidem, quæ ita quidem ad sex dimensiones ascendunt, ut tamen derivativæ secundi gradus dici debeant. Earundem formularum aliæ duæ radices imaginariæ sunt, quæ inveniuntur, si utique unaquæque ex iis formulis dividatur per æquationem sim-

simplicem, radicem suam realem jam inventam continentem.

Ostendimus deinde resolutionem illarum formularum, in quibus tertius terminus afficitur signo negativo. Hujusmodi formulæ possunt tres radices reales habere; ex quibus duæ erunt positivæ, & una negativa, si ultimus terminus afficiatur signo positivo; & vicissim duæ negativæ, & una positiva, si ultimus terminus sit affectus signo negativo. Sed radices duæ, quæ sunt ejusdem signi, possunt quandoque esse imaginariæ: scilicet si cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini minor sit quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato. Itaque tunc demum duæ istæ formulæ radices omnes reales habebunt, quum cubus ex triente coefficientis tertii termini non est minor quadrato, quod fit ex semisse ultimi termini. Nec reticemus, radices duas, quæ sunt ejusdem signi, æquales esse inter se, quum cubus ille æqualis fuerit prædicto quadrato.

Hinc in resolutione harum formularum tres casus distinguimus. Primus est, quum unicam tantùm habent radicem realem, & alias duas imaginarias. Secundus, quum omnes habent radices reales, sed

sed duæ illæ, quæ sunt ejusdem signi, æquales sunt inter se. Et tertius, quum omnes radices sunt reales, & inæquales. Ostendimus autem resolutionem istarum formularum tunc demum obtineri posse, quum vel unicam tantùm habent radicem realem, vel omnes quidem, sed duæ illæ, quæ sunt ejusdem signi, æquales sunt inter se. At verò, quotiescumque radices omnes sunt reales, & inæquales, id quod contingit, quum cubus ex triente quantitatis cognitæ secundi termini major est quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato; tunc methodum, in resolutione istarum æquationum à nobis usurpatam, deficientem deprehendimus.

Hanc impossibilitatem, quæ nobis sese obtulit in resolvendis æquationibus tertii gradus, quarum radices omnes sunt reales, norunt ipsimet Itali, qui resolutionem harum æquationum primùm tradiderũt, quemadmodum colligere licet ex litteris, quæ intercesserunt inter Cardanum, & Tartaleam. Nec equidem post inventam regulam æquationes istas resolvendi, quisque eam perficere potuit; quin imò Cartesius rem omnino deploratam existimavit: quem in finem aliâ methodo radices æquationum omnium docuit invenire, sci-

ſcilicet per longitudines linearum, quæ curvarum interſectione determinantur. Unde non immeritò gloriari poſſunt Itali, ipſos Algebram perduxiſſe ad eum uſque terminum, ad quem humani ingenii viribus poterat pervenire.

Id candidè fatetur ſolertiſſimus Auctor Hiſtoriæ Regiæ Academiæ Pariſienſis Dominus Fontanelle. Nam anno 1705 referens methodum quandam generalem, excogitatam à Domino de Lagney, pro reſolutione æquationum omnium, hæc primò præmittit: *Il eſt glorieux aux premiers Auteurs, qui ont travaillè ſur l'Algebre, que des difficultez, qu' ils n'ont pû vaincre, ne ſojent pas encore ſurmontèes. Le cas irreductible du troiſièmme degrè l'eſt encore, comme il l'ètoit du temps de Cardan, car l'Algebre n'eſt proprement connue, que depuis deux cens ans, & nous l'avons reçue des mains des Italiens.*

Jam, quum duæ iſtæ formulæ unicam tantùm habent radicem realem, reperimus eam, conſtituendo novam æquationem, quæ unicam ſimiliter contineat radicem realem, & cum iſtâ propoſitam formulam comparando. Hæc radix, perinde ac in aliis duabus formulis, oritur expreſ-

preſſa duplici nomine: unde inveniri quoque poteſt, aſſumendo duo illa nomina indeterminatè, quemadmodum in prioribus duabus formulis factum. Quum ſic radix reperitur, nulla ſupponitur relatio inter cubum, qui fit ex triente quantitatis cognitæ tertii termini, & quadratum, quod fit ex ultimo termino dimidiato. Unde arbitratus eſt clariſſimus Walliſius, eam in omni caſu radicem eſſe propoſitæ æquationis, neque adeo imperfectam eſſe reſolutionem æquationum cubicarum ab Italis traditam. Sed perperam, quia quum æquatio tres radices reales ſupponitur habere, radix illa, quæ reperitur, quantitatibus imaginariis exprimitur, nec proinde eſt vera ejus expreſſio.

Qua autem ratione radix oriatur expreſſa quantitatibus imaginariis, quum æquatio tres radices reales ſupponitur habere, exinde colligit Iſaac Newtonus in Arithmeticâ ſuâ univerſali, quia quum radices illæ eodem modo ſe habeant ad terminos æquationis, & indifferenter per incognitam deſignentur, deberent utique omnes eadem lege erui, & exprimi, qua una aliqua eruitur, & exprimitur. Unde, quia tres omnes lege præfatâ expriprimere, impossibile est, quum quantitas, quæ supponitur æqualis incognitæ, utpote linearis, multiplex esse nequeat; falsa erit hypothesis, quod incognita quantitatem illam linearem adæquet, & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

Sed hanc tanti Viri rationem, etsi primâ facie valde speciosam, improbamus; tum quia jam novimus, quantitatem, quæ multiplex esse debet, sic quidem per analysim designari, ut prodeat adhuc indeterminata; tum etiam, quia eadem conclusio impossibilis eruitur quoque ex hypothesi possibili, quemadmodum primus omnium in suis Elementis Mathematicis demonstravit Pater Præstetus. Itaque concludimus ex aliis principiis impossibilitatem hujus rei deducendam esse. Et quamquam clarissimus Wallisius non adeo deploratum casum existimet; quum etsi radix illa realis sit expressa per latera cuborum, qui quantitatem continent imaginariam, fieri tamen possit, ut expressio realis evadat, scilicet si latera illa extrahantur; nihilo tamen minus ostendimus hoc Viri summi cogitatum sibi locum vindicare dumtaxat, quum radix illa est realis simul, & rationalis: quod animadverterat jam pridem ipse Nicolaus Tartalea, Auctor resolutionis æquationum cubicarum.

Igitur in æquationibus cubicis, casus quum omnes radices sunt reales, est omnino deploratus, nec intra cancellos calculi algebraici potest contineri. Interim si radices illæ per longitudines linearum sint designandæ, ostendimus non deficere nobis Geometriam. Poterat autem id variis modis obtineri. Sed quoniam de geometricâ æquationum constructione fusiùs nobis agendum erat libro quarto; placuit eum tantùm modum afferre, quem protulit primus omnium Albertus Girardus in libello, cui titulus *Invention nouvelle en l'Algebre*, & quem in suâ Geometriâ adhibuit quoque Cartesius, ut ostenderet omnia problemata, quorum æquationes ad tres, vel quatuor dimensiones ascendunt, resolvi posse, vel inventione duarum mediarum proportionalium inter duas datas quantitates, vel etiam alicujus dati arcus trisectione.

Itaque, quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, ostendimus radices illas designari posse per chordas, quæ trientes nonnullorum arcuum subtendunt.

dunt. Si enim oporteat datum aliquem arcum trifariam partiri, invenietur in resolutione hujus problematis æquatio cubica, cujus omnes radices sunt reales. Unde vicissim, quotiescumque occurrit æquatio aliqua cubica, quæ radices omnes reales habeat, poterunt radices illæ per arcus cujusdam trisectionem geometricè designari. Qua autem ratione fiat, ut problema de dati alicujus trisectione tribus modis solvi possit, paulò accuratiùs inquiritur, ostenditurque id exinde pendere, quia quum datum aliquem arcum tripartitò oportet dividere, problema perinde resolvitur, ac si invenienda esset recta lineâ, quæ ab una arcus extremitate ter aptari possit in circuli circumferentiâ, donec ad punctum alterum perveniatur.

Cæterùm, ne circa resolutionem æquationum cubicarum aliquid, quod scitu sit dignum, Lectores nostri ignorarent, subjũgitur methodus, qua primùm Itali istarũ æquationum resolutionem tradiderunt, ejusque artificium paulò clariùs, quàm ab aliis factum est, explicatur. Res autem ab ovo, ut dici solet, ostenditur, & quibus vestigiis Itali insistentes in methodum illam inciderint, aperitur. Quumque ejus inventio synthesi potiùs, quàm analysi debeatur; illud etiam ostenditur, qua ratione methodus ista resolvendi æquationes cubicas possit analysis ope reperiri; quod quidem facile nobis fuit ostendere, quum eò res tota reducatur, ut inveniatur quantitas, per quam sic transformanda sit æquatio cubica proposita, ut non modò secundo, verùm etiam tertio termino deficiens oriatur.

Sequitur resolutio æquationum, quarum sedes in quarto gradu subsistit. Hujusmodi æquationes, ut rectè intelligatur natura prolematum, ex quibus ipsæ derivantur, in duas classes distinguimus; nam quædam sunt talis naturæ, ut affectionem cubicam contineant; aliæ vicissim ejusmodi sunt, ut ab affectione cubicâ sint prorsus immunes. Æquationes quarti gradus, quæ puræ sunt, hoc est primum tantùm, & ultimum terminum habent, ab affectione cubicâ sunt semper immunes; quandoquidem quatuor ipsarum radices per duplicem quadratæ radicis extractionem inveniuntur. Immunes sunt etiam ab affectione cubicâ æquationes quarti gradus, in quibus tum secundus, cùm quartus terminus deficit. Sunt enim hujusmodi æquationes derivativæ se-

ſecundi gradus; adeoque valores ipſarum inveniuntur, extrahendo radicem quadratam ex valoribus æquationum ſecundi gradus, ex quibus derivantur. Itaque eæ ſolæ æquationes quarti gradus poſſunt affectionem cubicam continere, in quibus adeſt, vel ſecundus terminus, vel quartus, vel etiam uterque.

Generalis æquationum quarti gradus reſolutio Bombellio debetur. Reſolvuntur autem æquationes iſtæ, derivando alias ex iis, quæ ſint trium tantùm dimenſionum. Itaque hoc primum docetur, qua ratione ex æquationibus quarti gradus poſſint aliæ trium tantùm dimenſionum derivari: qua in re ſupponimus ſublatum eſſe ex æquationibus quarti gradus terminum ſecundum; quia id regulâ ſatis expeditâ, fieri ſemper poſſe, jam ſuperiùs vidimus. Derivantur ergo ex æquationibus quarti gradus æquationes aliæ, quæ ſint trium tantùm dimenſionum, aſſumendo indeterminatè æquationes duas ſecundi gradus, & ex earum multiplicatione aliam componendo, quæ ſit ejuſdem gradus cum æquatione propoſitâ. Nam, conferendo deinde terminos unius ordine cum terminis alterius, inveniuntur totidem æquationes, quot in æqua-

æquationibus componentibus aſſumuntur quantitates indeterminatæ: proindeque ſi ex iis æquationibus alia eruatur, in qua ea ſola maneat quantitas indeterminata, quæ eſt coefficiens ſecundi termini in utraque æquationum componentium; aſcendet illa ad tres dimenſiones, adeoque erit æquatio cubica quæſita.

Jam ope hujus cubicæ æquationis ſemper determinari poſſunt æquationes duæ componentes ſecundi gradus. Unde, quum æquatio propoſita in duas illas dividatur, obtinebitur ejus reſolutio, ſi utique duæ illæ regulis antea traditis reſolvantur. Nec refert, quod in æquationibus illis ſecundi gradus coefficientes terminorum quantitates contineant radicales. Id enim reſolutioni illarum æquationum nequaquam eſſe poteſt impedimento; quia regulæ ſuperiùs traditæ æquè procedunt, quum coefficientes terminorum ſunt radicales, quàm quum ſunt commenſurabiles, ac rationales. Sed tantùm efficiet, ut radices ipſarum radicales radicalium contineant: quod mirum eſſe non debet, quum radices illæ ad æquationes quarti gradus propriè referantur.

Porrò autem mediantibus cubicis æquationibus, quæ derivantur ex æquatiotionibus quarti gradus, non modò istarum, quum fuerint in propriâ sede, resolutio obtinetur, cognosciturque num affectionem contineant cubicam, an ab eâ sint immunes; verùm etiam innotescit nobis, num æquationes quarti gradus existant in propriâ sede, an verò in duas secundi gradus sint divisibiles: adeò, ut si casum excipias, quum æquationes quarti gradus unam continent radicem rationalem, poterit earum natura perspecta fieri, ac explorata per solas æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis.

Quotiescumq; enim æquationes illæ cubicæ existunt in propriâ suâ sede, ostendimus etiam in propriâ suâ sede esse æquationes quarti gradus, easdemque affectionem quoque cubicam continere. Sed si æquationes cubicæ non sint in propriâ suâ sede, verùm valorem habeant rationalem; tunc ostendimus, quod si valor iste talis sit, ut elici exinde nequeat quadrata radix, æquationes quarti gradus existant quidem in propriâ suâ sede, sed immunes sint ab affectione cubicâ; quod si verò ejuscemodi fuerint, ut exinde quadrata radix elici possit, æquationes quarti gradus non sint in propriâ suâ sede, sed in duas alias secundi gradus sint divisibiles.

At-

Atque hac occasione notamus, quàm apposité analysis omnes rei, de qua agitur, casus nobis ostendat, & qua ratione unâ, eademque viâ singulis satisfaciat. Quotiescumque enim æquationes quarti gradus nullam habent radicem rationalem, tria contingere possunt; vel nempe, ut sint divisibiles in duas secundi gradus; vel ut existāt in propriâ suâ sede, sed immunes sint ab affectione cubicâ; vel denique ut affectionem cubicam contineant. Unde, quum æquationes cubicæ, quæ ex iis derivantur, tales sint, ut incognita in iis duplicatas habeat dimensiones: perspicuum est circa ejus valorem tria quoque contingere posse; primò, ut sit rationalis; secundò, ut sit expressus per radicalem quadratam; & denique, ut radicales cubicas comprehendat.

Jam, quum resolutio æquationum quarti gradus obtineatur, resolvendo æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis, fit hinc, ut quemadmodum non omnes æquationes cubicæ resolvi possint, sed eæ tantùm, quæ unicam habent radicem realem; ita nec omnium æquationum quarti gradus resolutio possit haberi, sed earum tantummodò, ex quibus tales derivantur æquationes cubicæ, ut & ipsæ

etiam

etiam resolvi possint. Itaque post traditam methodum resolvendi æquationes quarti gradus, ad rem visum est, ostendere, quæ inter istas æquationes tales sint, ut cubicæ æquationes, quæ ex iis derivantur, omnes habeant radices reales, nec ideo resolvi possint.

Hujusmodi sunt æquationes illæ quarti gradus, quæ vel omnes habent radices reales, vel omnes imaginarias: ex quo fit, ut eæ tantùm æquationes quarti gradus resolvi possint, quæ duas habent radices reales, & alias duas imaginarias. Sed ad rem visum est etiam ostendere, qua ratione æquationes quarti gradus, quæ radices omnes reales habent, distingui possint ab iis, quæ omnes habent radices imaginarias: idque deducimus ex æquationibus cubicis, quæ ex iis derivantur. Nam quotiescumque æquationes quarti gradus radices omnes reales habent, ipsarum æquationes cubicæ non modò radices omnes reales habebunt, verùm etiam secundum terminum affectum signo negativo, & tertium signo positivo: quod secus est, si æquationes quarti gradus radices omnes habeant imaginarias; quia tunc secundus terminus æquationum cubicarum, quæ ex iis derivantur, affici

qui-

quidem potest signo negativo, sed tali quoque signo erit affectus terminus tertius.

Quoniam autem resolutio æquationum quarti gradus adeo generaliter ostensa erat, ut quæ sint earum radices nec in formulis innotuerit, sub quibus æquationes omnes solent exhiberi; necessarium duximus ejus resolutionis in Tyronum gratiam exempla nonnulla proferre. Itaque primò exemplis illustramus resolutionem earum quarti gradus æquationum, quæ existunt quidem in propriâ sede, sed immunes sunt ab affectione cubicâ; tum exempla proferimus resolutionis æquationum quarti gradus, quæ affectionem cubicam continent, quæque tunc tantùm resolvi possunt, quum duas habent radices reales, & alias duas imaginarias.

Exemplis etiam ostendimus reductionem æquationum quarti gradus, per æquationes cubicas ex iis derivatas; atque hac occasione methodum etiam exhibemus, quam excogitavit Vir Clarissimus Hyacinthus Christophorus pro reducēdis æquationibus quarti gradus beneficio æquationum cubicarum, utpote scitu dignam, & in praxi valde facilem, ac ex-

pe-

peditam. Hac methodo usus est Auctor dumtaxat pro reducendis æquationibus quarti gradus; sed eandem censet etiam sibi locum vindicare in earundem resolutione, quum fuerint in propriâ suâ sede: quod utique si fuerit, pollicitus est nobis super eâ re epistolam scribere.

Denique ad resolutionem æquationum, quæ plures habent dimensiones, quàm quatuor, gradum facimus, non quòd eam tradere nobis animus esset, sed tantùm ut principia indicaremus, quibus ea possit obtineri. Hujusmodi principia duo sunt. Primum, quod illæ quidem æquationes, quæ dimensiones habent numero impares, tunc demũ resolvi possint, quum unam habent radicem realem, & alias omnes imaginarias; eæ verò, quæ dimensiones habent numero pares, resolvi queant tunc tantùm, quum habent duas radices reales, & reliquas omnes imaginarias. Alterum, quod radix realis cujusque æquationis, quæ secundo termino caret, generaliter tot terminos possit continere, quot sunt dimensiones æquationis, unâ demptâ.

Ex duobus hisce principiis duplicem quoque colligimus methodum generalem pro resolvendis æquationibus omnibus, quæ

quæ quidem sunt ipsissimæ illæ, quas pro resolutione æquationum cubicarum adhibuimus. Prima etenim procedit, assumendo radices æquationis indeterminatè, & cõponendo ex iis novam æquationem; quas deinde determinat per comparationem novæ istius æquationis cum illâ, de qua agitur. Altera verò procedit, inquirendo valorem unius tantummodò radicis, quam etiam indeterminatam assumit. Utraque methodus neminem latuit recentium Algebristarum, sed defectu illorum principiorum eas ad æquationes altioris gradus extendere ausus est nemo.

Itaque, quantum ad primam methodũ, ut ea omnibus cujusque gradus æquationibus possit applicari, illud porrò requiritur, ut radices assumantur tales quidem, quales esse debent, ut æquationis resolutio possit obtineri: nempe, ut una sit realis, & aliæ omnes imaginariæ, si æquationis dimensiones fuerint impares numero; & ut duæ sint reales, aliæque omnes similiter imaginariæ, si æquatio dimensiones habuerit numero pares. Id in resolutione æquationum cubicarum ostensum jam erat. Itaque hoc idem ostenditur quoque in resolutione æquationum

num quarti gradus, quæ tradita erat methodo omnino diversâ.

Quantum verò ad alteram methodum, ut ea æquationibus altioris gradus possit applicari, necesse est radicem, quam quærimus, ita quidem assumere indeterminatè, ut tot terminis constet, quot sunt dimensiones æquationis, de qua agitur, unâ demptâ. Ea autem in hunc modum assumpta determinabitur, si fiat ex ipsâ potestas æquationis gradui correspondens. Nam siquidem in hac potestate distinguantur à se mutuò partes, quæ æquationis terminis subalternis correspondent; per comparationem istarum partium cum terminis illis habebuntur totidem æquationes, quot requiruntur ad determinandas quantitates, quæ in assumptâ æquationis radice continentur. Et quoniam non ita facile est in potestate, quæ fit ex assumptâ radice juxta gradum æquationis, distinguere à se mutuò partes, quæ correspondent æquationis terminis subalternis; theorema proinde subjungimus, quo mediante distinctio ista nullo negotio fieri possit.

Hoc in loco docemus etiam, qua ratione inveniri possint limites, quibus radi-

dices cujuscumque æquationis continentur. Et quamquam id obtineri posset methodo superiùs traditâ, quia tamen methodus illa, ob difficilem calculum, non tam videtur ad praxim expedita, quin etiam dumtaxat locum sibi vindicat in æquationibus, quæ nullas habent radices imaginarias; placuit limites radicum cujusque æquationis aliâ methodo definire, quæ & facilior esset, & ad omnes æquationes se extenderet. Eodem in loco docemus etiam, qua ratione cognitis limitibus, intra quos consistit æquationis radix una, possit ad radicis illius valorem verum impossibilem propiùs semper, ac propiùs appropinquari.

Hæc methodus inveniendi limites, intra quos consistunt radices æquationis, & ad veros earum valores appropinquandi locum sibi vindicat tantùm in æquationibus numericis: unde, si æquationes propositæ fuerint litterales, quò iis possit hæc methodus applicari, necesse est litterarum loco ponere valores numericos. Sed quoniam æquationes litterales excidunt universalitate suâ, quum in iis loco litterarum numeri substituuntur; aliam proinde methodum exhibemus resolvendi per approximationem æquationes

nes litterales, nimirum beneficio serierum infinitarum: atque hac occasione explicamus, quid intelligunt Recentiores per regressum serierum; hujusque regressus exempla duo generalia ex Newtono mutuata proferimus, quæ in casibus specialibus possunt velut canones adhiberi.

Quum æquationes resolvendæ sunt puræ, omnibusque terminis intermediis carent, eò res redit, ut ex puris potestatibus radices extrahantur. Hinc siquidem radices illæ inveniri nequeunt exactè, haberi poterunt per approximationem, vel beneficio fractionum decimalium, vel ope logarithmorum. Verumtamen quia à Viro Clarissimo Edmundo Hallejo, occasione nonnullarum formularum, quas protulit Dominus de Lagney, pro extrahendâ radice cubicâ, detecta est formularum methodus quædam generalis, pro quavis potestate satis concinna, visum est methodo istâ secundo nostræ Algebræ libro finem imponere.

FINIS.

INDEX
CAPITUM, ET ARTICULORUM LIBRI SECUNDI.

De speciosa problematum resolutione.

CAP. I.

CAP. II.

CAP. III.

CAP. IV.

CAP. V.

V.

CAP. VI.

De resolutione æquationum secundi gradus.

CAP. VII.

De resolutione æquationum tertii gradus.

CAP. VIII.

De resolutione æquationum quarti gradus.

AL-

ALGEBRÆ ELEMENTORUM LIBER II.

De speciosa problematum resolutione.

EXplicato calculo litterali, sive specioso, ad problematum resolutionem speciosam gradum nunc facimus, in qua usus ejus calculi potissimùm cernitur. Et quoniam in omni problemate duo quantitatum genera continentur: nempe datæ, sive notæ, & incognitæ, sive quæsitæ; unicum medium, quo utitur Algebra ad problemata quæcumque resolvenda, est æquationis artificiũ. Æquationis etenim ope rpe subinde confert quantitates in problemate quæsitas cum aliis datis, sive notis, ut tandem æqualitatem deprehendat inter eas.

Hinc monitum Lectorem velim, quod tametsi æquationis, & æqualitatis voces indistinctè ab Algebristis accipiantur, eæque etiam à nobis promiscuè in posterum usurpentur; attamen si de propriis earum vocum significationibus sollicitos nos esse oporteat, subinde quidem æquatio distinguenda esset ab æqualitate, ut æquatio propriè deberet dici comparatio duarum quantitatum inæqualium, instituta ea ratione, ut reddantur æquales; æqualitas verò comparatio duarum quantitatum jam æqualium, hoc est ipsa earum quantitatum identitas.

Jam, ut Tyronibus nostris liquidò constet, quo demum artificio ad problemata resolvenda Algebra æquationes, sive æqualitates adhibeat, ostendemus primò summatim universam methodum resolvendi problemata per species, sive litteras Alphabeti. Neque enim eorum hac in re probo docendi rationem, qui nulla hujus methodi idea præmissa, ad æquationum naturam, & affectiones explicandas statim se conferunt. Sic namque Tyronum animi in suspenso manent, nec satis intelligunt, quorsum colliment, quæcumque traduntur.

CAP. I.

Methodus resolvendi problemata summatim ostenditur.

IN problematum resolutione duplex methodus adhiberi potest; quarum una dicitur synthesis, sive compositio; altera analysis, sive resolutio. Synthesis adhibetur, quotiescumque ex iis, quæ nobis nota sunt, eo usque componendo progredimur, donec in quæsiti cognitionem incidimus. Analysis vicissim, quum à quæsito, velut concesso, eo usque progredimur resolvendo, donec ad aliquod pervenimus jam cognitum, & exploratum.

Utramque methodum apud Veteres in usu fuisse, testatur Pappus Alexandrinus, ipsaque Veterum monumenta abundè confirmant. Unde colligi potest, quàm oscitanter nonnulli, ut Recentiores plus justò extollerent, eos artificii analytici Auctores constituant. Neque enim Veteres tantam veritatum segetem invenire potuissent, nisi iis adjumento fuisset analysis

lysis. Et quamquam veritates illas synthetica methodo ut plurimū nobis exponant; id tamen factum, quia norunt propriam methodum ad docendum synthesim esse, unde etiam methodus doctrinæ vocitatur.

Veritates autem analyticè detectas facile quidem est componere, easque synthetica methodo tradere. Analyticè quippe aliquid reperimus, quotiescumque id, quod quæritur, velut jam factum ponentes, eo usque progredimur, donec in aliquod incidimus, jam nobis cognitum, & exploratum. Quocirca vicissim assumentes, quod postremò nobis obtulit resolutio, & ordinantes secundùm naturam ea antecedentia, quæ illic consequentia erant, mutuaque illorum facta compositione, necesse est, ut tandem ad quæsiti finem perveniamus.

Quod ut liquidò constet, simulque utriusque methodi exemplum unum, aut alterum in medium afferamus, proponatur primò resolvendum hujusmodi problema: rectam lineam datam AB producere usque ad punctum C, ita ut rectangulum ACB æquale sit ei, quod super AB describitur, quadrato. Ponatur jam factum. Et quoniam rectangulum ACB

FIG. I.

est æquale rectangulo ABC unà cum BC quadrato; erit rectangulum ABC unà cum BC quadrato æquale quadrato ex AB. Sed posita BD æquali BC, AB quadratum est æquale rectangulo ABC unà cum rectangulo BAD. Quare erit BC, sive BD quadratum æquale rectangulo BAD; & propterea recta linea AB secta erit extremâ, ac mediâ ratione in puncto D.

Hinc, quia invento puncto D, invenitur etiam punctum C; componemus propositum problema, si secta recta linea data AB extremâ, ac mediâ ratione in puncto D, ita ut AD sit segmentum minus, BD segmentum majus, protrahamus AB versus C, donec fuerit BC æqualis BD. Nam quum BC, sive BD quadratum æquale sit rectangulo BAD, apposito communi rectangulo ABC, erit BC quadratum unà cum rectangulo ABC æquale rectangulo BAD unà cum rectangulo ABC, sive ABD. Sed BC quadratum unà cum rectangulo ABC est æquale rectangulo ACB; & rectangulum BAD unà cum rectangulo ABD est æquale quadrato ex AB. Quare erit rectangulum ACB æquale ei, quod super AB describitur, quadrato.

Proponatur similiter resolvendum hoc aliud

aliud problema : rectam lineam AB sectā
FIG. 2. in puncto C producere usque ad punctum D, ita ut rectangulum ADB æquale sit ei, quod super CD describitur, quadrato. Ponatur jam factum. Et quoniam rectangulum ADB æquale est CD quadrato, erit ut AD ad CD, ita CD ad BD. Unde, quia tota AD est ad totam CD, ut ablata CD ad ablatam BD, erit reliqua AC ad reliquam CB, ita tota AD ad totam CD: & propterea, si ponatur CE æqualis ipsi CB, erit convertendo, ut AD ad AC, ita AC ad AE: proindeque tota AD erit tertia proportionalis in ordine duarum AE, AC.

Hinc componetur problema in hunc modum: abscindatur ex AC portio CE æqualis ipsi CB, tum fiat ut AE ad AC, ita AC ad AD. Dico D esse punctum quæsitum. Quoniam enim AD est ad AC, ut AC ad AE, erit convertendo, ut AD ad CD, ita AC ad CE, sive CB. Unde, quia tota AD est ad totam CD, ut ablata AC ad ablatam CB; erit reliqua CD ad reliquam BD, ut tota AD ad totam CD: proindeq; quum rectangulum ADB æquale sit ei, quod super CD describitur, quadrato, erit D punctum quæsitum.

Eadem ratione si ADB sit semicirculus, cu-

cujus centrum punctum C, & demissa ad diametrum AB perpendiculari DE, quæratur num DE quadratum æquale sit rectangulo AEB, analyticè inquiremus illud hoc modo. Ponatur DE quadratum æquale rectangulo AEB. Itaque addito communi quadrato ex CE, erunt quadrata duo DE, CE æqualia rectangulo AEB unà cum CE quadrato. Jam verò junctà CD, propter triangulum rectangulum CED, quadrata duo DE, CE sunt æqualia quadrato ex CD; itemque, quia recta AB secta est bifariam in puncto C, & non bifariam in puncto E, rectangulum AEB unà cum CE quadrato est æquale quadrato ex CB. Quare erit CD quadratum æquale CB quadrato; & propterea CD ipsi CB æqualis erit. FIG. 3.

Hinc quia proprietas semicirculi ADB hæc est, ut CD ipsi CB sit æqualis, syntheticè, quod quæritur, ostendemus in hunc modum. Quoniam CD est æqualis CB, erit CD quadratum æquale CB quadrato. Sed, propter triangulum rectangulum CED, CD quadratum est æquale CE, DE quadratis; itemque, quia recta AB secta est bifariam in puncto C, & non bifariam in puncto E, CB quadratum est æquale rectangulo AEB unà cum CE quadradrato. Quare erunt quadrata duo DE, CE æqualia rectangulo AEB unà cum CE quadrato; proindeque ablato communi quadrato CE, supererit DE quadratum æquale rectangulo AEB.

Allatis igitur exemplis abundè, opinor, liquet, quæ sit methodus analytica, quæve synthetica; & quo pacto veritates analyticè detectæ possint synthetica methodo aliis ostendi. Sed licèt in resolutione problematum utramque methodum adhibuerint Veteres, & veritates primò quidem invenerint analyticè, deinde verò eas exposuerint syntheticè; dubitari tamen nequit, quin usum analysis in problematum resolutione præstantiorem reddiderint Recentiores. Quum enim felici successu quantitatibus omnibus calculum applicuerint, totamque adeo mathesim, velut quandam speciem Arithmetices, effecerint; facultatem resolvendi problemata mathematica, ita quidem facilitarunt, ac universaliorem reddiderunt, ut nihil ampliùs in ea desiderari posse videatur.

Jam artificii analytici, in resolutione problematum à Recentioribus usurpati, quatuor sunt operationes præcipuæ; quarum prima est problematis, sive quæstionis status clara, ac evidens cognitio; secunda datarum, & quæsitarum quantitatum apposita denominatio; tertia æquationis inter datas, & quæsitas quantitates inventio; & quarta demum inventæ æquationis legitima reductio, ac resolutio. Unde, ut rectè intelligant Tyrones, quo pacto problemata omnia resolvantur beneficio ejus analysis, quam Recentiores excoluerunt, singulas illas operationes sigillatim hoc capite explicare non gravabimur.

I.

Problematis, sive quæstionis status clara, ac evidens cognitio.

Resoluturus aliquod problema, illud prima fronte considerabit, qui sit propositæ quæstionis status, quidve illud, quod in ipso quæritur problemate. Id autem obtinebit, si sedulò conditiones evolvat, quæ in ipsa quæstione continentur. Nam mentis nostræ limitatio id quidem exigit, ut quod incognitum est, dumtaxat ex cognitis quibusdã conditionibus eruere valeat. Unde, ut status quæstionis clarè, ac evidenter cognoscatur, conditiones oportet considerentur in ipsa quæstione ap-

appositæ, quippe quæ relationem nobis ostendunt, quam ad datum, sive cognitum id, quod quæritur, debet habere.

Hoc pacto, si proponatur resolvendum sequens problema arithmeticum: invenire duos numeros, quorum summa sit 100, differentia autem 40; liquet in hoc problemate, duas quantitates esse cognitas, sive datas, quales quidem sunt numeri 100, & 40; alias verò duas esse incognitas, sive quæsitas, cujusmodi sunt duo numeri, qui quæruntur. Quocirca, ut statū quæstionis distinctissimè intelligamus, consideremus oportet conditiones appositas in ipso problemate, quæ exprimunt nobis relationes, quas incognitæ quantitates ad quantitates cognitas debent habere: quales quidem sunt duæ; una quod numeri inveniendi tales esse debeant, ut simul sumpti conficiant 100; altera quod iidem numeri tales etiam sint oporteat, ut minor ex majori subtractus relinquat 40.

Præstat autem, conditiones appositas in problemate seriò mente contemplari, non modò, ut statum quæstionis distinctissimè intelligamus, verùm etiam quia plerumque præter conditiones, ad problematis determinationem necessarias, aliæ etiam

etiam apponuntur, quæ ut plurimum reddunt problema impossibile, si in ejus resolutione earum ratio sit habenda. Ita si inter duas datas rectas lineas binæ mediæ proportionales proponantur inveniendæ, aut etiam datus angulus rectilineus tripartitò debeat secari; & qui ejusmodi proponit problemata hanc aliam conditionem adjungat, ut eorum resolutio Geometriæ planæ præsidio, hoc est circuli, & rectæ lineæ intersectione perfici debeat: jam problemata illa solutu impossibilia erunt, si in iis resolvēdis conditionis ultimo loco appositæ ratio velit haberi; nam Geometriæ planæ beneficio, nec angulum tripartitò secari, nec inter duas datas rectas lineas binas medias proportionales posse inveniri, nemo, nisi Geometriæ expers, ignorat.

Jam verò, quemadmodum plerumque præter conditiones, ad problematis determinationem necessarias, aliæ etiam adjunguntur omnino superfluæ, & quæ ut plurimum reddunt problema solutu impossibile; ita quandoque nec omnes apponuntur conditiones, quæ ad problematis determinationem sunt necessariæ: quo pacto problema indeterminatum redditur, infinitasque solutiones diversas admitmittit:nec alia ratione determinatum fiet, certiſque dumtaxat modis ſolvi poterit, niſi quemadmodum in primo caſu, ut problema ſit ſolubile, ſuperfluæ conditiones à problemate removentur; ſic & in iſto adjungantur, quæ deficiunt, quæque ad problematis determinationem videntur neceſſariæ.

Hinc vulgò duo problematum genera diſtingui ſolent, quorum alia dicuntur determinata, alia indeterminata. Determinata dicuntur problemata illa, in quibus conditiones appoſitæ id, quod quæritur, determinant, quæque proinde determinatum numerum ſolutionum diverſarum admittunt. Indeterminata verò vocantur ea problemata, in quibus conditiones appoſitæ quæſitas quantitates non ſatis determinant, quæque propterea infinitis modis diverſis ſolvi poſſunt. Sed his tertium problematum genus accedit, quæ pluſquam determinata dici poſſunt, qualia ſunt illa, in quibus plures apponuntur conditiones, quam quæ ad eorum determinationem requiruntur, quæque proinde ſolutu ut plurimũ ſunt impoſſibilia, quotieſcumque ad omnes illas conditiones debet attendi.

Hæc tria problematum genera nemo me-

liùs inter Recentiores diſtinxit, quàm Johannes Pellius, Rhonii diſcipulus, qui ſimul oſtendit, quomodo de expoſito problemate judicium ſit ferendum: nimirum quum numerus datorum, à ſe mutuò independentium, minor eſt, quàm quæſitorum; problema eſt indeterminatum, infinitarumque ſolutionum capax; quum verò numerus datorum, quæſitorum numerum adæquat, problema eſt determinatum, certumque numerum ſolutionum diverſarum admittit; & denique quum data plura fuerint, quàm quæſita, problema erit pluſquam determinatum, & fortaſſe impoſſibile, ſi data illa inter ſe mutuò ſint contraria. Sed eadem problematum genera conſideravit etiam inter Veteres Proclus, qui ſicut problema propriè dixit id, quod eſt perfectè determinatum; ſic vocavit problema deficiens, quod plenè determinatum non eſt; & problema excedens, ſive redundans, quod plures habet conditiones, quàm quæ ad ejus determinationem requiruntur.

Quæ quidem omnia, ut exemplis magis illuſtremus, ſit AB recta aliqua linea, quam ſubinde oporteat dividere, ut rectangulum ſub ſegmentis ejus contentum adæquet quadratum, quod ſit ex data FIG. 4.

recta

recta linea H. Jam in hoc problemate duæ existunt conditiones; una, quòd latera rectanguli inveniendi simul sumpta æqualia esse debeant datæ rectæ lineæ AB; altera, quòd idem rectangulum inveniendum æquale sit oporteat quadrato ex data recta linea H. Has autem conditiones ad quæsiti rectanguli determinationem sufficere, quotiescumque data recta linea H alterius semissem nō excedit, perspicuum quidē est Etenim si super AB semicirculus describatur ACB, & ex extremitate A erecta perpendiculari AE ipsi H æquali, agatur per punctum E recta ED, quæ eidem AB parallela, semicirculum secet in punctis C, & D; demissis quidem ad diametrum perpendicularibus CF, DG, ex proprietate circuli, erit quæsitum rectangulum tam id, quod fit ex AF in FB, quàm id, quod fit ex AG in GB.

At verò si ex eodem problemate auferatur una conditio, puta, quod latera rectanguli inveniendi æqualia esse debeant datæ rectæ lineæ AB, & dumtaxat proponatur inveniendum rectangulum, quod sit æquale quadrato datæ rectæ lineæ H; perspicuū est, propter defectum illius conditionis, problema indeterminatū evadere, & non unum, aut duo, sed infinita rectan-

ctangula exhiberi posse, quæ quæsito satisfaciant. Etenim si circulus quilibet describatur ABC, eumque contingat in puncto A recta linea AD, quæ ipsi H sit æqualis, & ex puncto D ducantur infinitæ rectæ lineæ DC, quæ circulum secent in duobus punctis B, & C; ob notissimam circuli proprietatem, palam est, unumquodque rectangulorum BDC æquale esse quadrato ex tangente AD, atque adeo ex recta linea H, cui ipsa AD est æqualis ex constructione. FIG. 5.

Et denique, si eidem problemati, præter duas illas conditiones, tertia apponatur, nempe quòd latera rectanguli inveniendi debeant esse in data ratione: adeò, ut inveniri debeat rectangulum, quod dato quadrato æquale, habeat latera in data ratione, & quæ simul sumpta datam rectam adæquēt; perspicuum est, hanc tertiam conditionem ad quæsiti rectanguli determinationem superfluam esse, quippe quod per priores duas conditiones satis aptè determinatur. Unde, si in resolutione problematis tertiæ illius conditionis ratio velit haberi, fieri fortasse potest, ut problema solutu sit impossibile: scilicet si ratio, quam habere debent latera rectanguli inveniendi, non sit ea, quam

quam utique haberent, si simul sumpta datam rectam lineam adæquent, ipsumque rectangulum dato quadrato sit æquale.

II.

Datarum, & quæsitarum quantitatum apposita denominatio.

STatu quæstionis, per conditiones in ea appositas, ritè intellecto, quo mens nostra in ejus resolutione minùs torqueatur, & imaginatio in re proposita ita quidem inhæreat, ut omnes quantitatum habitudines, sive relationes unico velut obtutu percipiantur; præstat quantitates omnes, tam datas, sive cognitas, quàm incognitas, sive quæsitas alphabeticis litteris ea quidem ratione designare, ut tamen quantitates cognitæ, sive datæ ab incognitis, sive quæsitis possint distingui. Quod etsi à primis Algebræ promotoribus ita factum sit, ut quantitates cognitæ, sive datæ vocalibus, incognitæ autem, sive quæsitæ consonantibus litteris denominentur; ab iis tamen, qui deinde secuti sunt, illud usurpatum, ut quantitates datæ, sive cognitæ prioribus alphabeti litteris, quantitates verò incognitæ, sive

sive quæsitæ litteris postremis designentur.

Hoc pacto, si quærantur duo numeri, quorum data sit tam summa, quàm differentia; considero priùs quidem attentè statum quæstionis; deinde, quia in illa quatuor occurrunt quantitates, quarum duæ sunt datæ, sive cognitæ, aliæ verò duæ incognitæ, sive quæsitæ; denomino quantitates illas alphabeticis litteris, quæ ut possint à se mutuò nullo negotio distingui, quantitates cognitas, sive datas prioribus Alphabeti litteris designo, quãtitates verò incognitas, sive quæsitas litteris postremis appello: nimirum summam numerorum inveniendorum, velut datam, designo litterâ *a*; differentiam eorundem numerorum, similiter datam, litterâ *b*; & ipsos illos numeros, quos oportet invenire, velut incognitos, sive quæsitos, designo litteris *x*, & *y*: qua peracta denominatione, jam quæstio eo reducitur, ut quantitatum *x*, & *y* summa quidem debeat esse *a*, differentia autem *b*.

Similiter, si datam rectam AB subinde quidem oporteat dividere in puncto C, ut rectangulum ACB, sub segmentis ejus contentum, æquale sit ei, quod super altera data recta linea DE describitur, qua- FIG. 6.

dra-

drato, fiet denominatio in hunc modum. Quoniam recta linea AB data est, designetur illa unâ ex prioribus litteris Alphabeti, nimirum litterâ a; & similiter quia recta linea DE est data, designetur quoque illa alterâ ex prioribus Alphabeti litteris, puta litterâ b. Veruntamen, quia segmenta AC, CB ipsius rectæ AB omninò nos latent, quum ea sint, quæ in problemate proponuntur invenienda; proinde segmenta illa postremis litteris Alphabeti designentur oportet, nimirum segmentum AC litterâ x, & segmentum alterum CB litterâ y. Atque hac facta denominatione, jam eò problema reducitur ut summa quantitatum x, & y sit a; quod verò ex mutua earum quantitatum multiplicatione producitur, sit quadratum quantitatis cognitæ c.

Jam verò, ut in denominatione quantitatum facienda, paucioribus, quantum fieri potest, litteris utamur; præstat, ipsas quantitates secundùm conditiones, in problemate appositas, denominare. Sic quum quærantur duo numeri, quorum data sit tam summa, quàm differentia, & summa eorum numerorum vocatur a, differentia b, minor verò numerus x; major numerus designari poterit, vel per

$x + b$

$x + b$, vel etiam per $a - x$. Nam differentia inter numerum majorem, & minorem est b: quare additâ differentiâ istâ numero minori x, fiet numerus major $x + b$. Et similiter summa eorum numerorum est a: quare si ex summa ista auferatur numerus minor x, supererit numerus major $a - x$. Sic etiam quum datam rectam lineã AB subinde oportet dividere in puncto C, ut rectangulum ACB sit æquale quadrato ex data recta linea DE; & data recta AB vocatur a, altera similiter data DE vocatur c, & segmentum unum AC designatur litterâ x, poterit segmentum alterum designari per $a - x$, quum sit differentia inter totam AB, & segmentum unum AC.

Quin etiam in eorum problematum resolutione, in quibus quantitates diversæ speciei occurrunt, ut faciliùs quantitates illæ possint à se mutuò distingui, juvat eas suis initialibus litteris designare. Qua ratione, si dato alicujus corporis momẽto, sive motus quantitate, datoque etiam pondere, sive quantitate materiæ ejusdem corporis, quæratur velocitas, qua corpus idem movetur; poterit quidem momentum, sive quantitas motus designari litterâ m; pondus, sive quantitas

materiæ designari litterâ p; & quæsita ve-
locitas litterâ u. Et eadem ratione si data
corporis velocitate, datoque spatio, velo-
citate illa percurso, quæratur tempus im-
pensum ad spatium illud percurrendum;
commodior erit denominatio, si velocita-
tem litterâ u, spatium litterâ s, quæsitum
verò tempus litterâ t designemus.

Cæterùm, ut intelligant Tyrones im-
mane quantum afferat adjumenti distin-
cta, & compendiosa quantitatum deno-
minatio, non abs re erit uno, aut altero
exemplo illud ostendere. Notum est apud
Geometras, quod si quatuor rectæ lineæ
proportionales fuerint, rectangulum con-
tentum sub extremis æquale sit ei, quod
sub mediis continetur; notumque est
etiam, quo longo circuitu veritatem istam
ostendat Euclides. Jam si nomina lineis
imponantur, secundùm ipsā proportiona-
litatis ideā; nihil erit tam faciliùs ostensu,
quàm veritas illius propositionis. Itaque
quia proportionalitatis idea hæc est, ut
quoties prima continetur in secunda, to-
ties tertia contineatur in quartâ; si vo-
cetur prima a, & tertia c, posito, quod
b ostendat, quoties prima in secundâ, &
tertia in quarta continetur; erit ab secun-
da, & cb quarta; atque adeo quatuor re-
ctæ

ctæ lineæ proportionales erunt a, ab, c, bc: in quibus jam clarè liquet, rectangulum contentum sub extremis æquale esse ei, quod sub mediis continetur; quum utrumque sit abc.

Hæc autem est proprietas proportionis, quæ dicitur geometrica; quod si verò proportio fuerit arithmetica, tunc accidens ejus præcipuum hoc est, ut summa extremarum æqualis sit summæ mediarum. Quod rursus facilè ostendetur, si nomina lineis imponantur secundùm ipsam alterius hujus proportionis ideam: nimirum quia proportionis hujus idea hæc est, ut quantum prima deficit à secunda, tantundem tertia deficiat à quarta; si vocetur prima a, & tertia c, ponaturque, quod b designet, quantum deficit tam prima à secundâ, quàm tertia à quartâ, erit $a + b$ secunda, & $c + b$ tertia: proindeque quatuor rectæ lineæ arithmeticè proportionales erunt a, $a + b$, c, $c + b$: in quibus liquidò constat summam mediarum, extremarum summam adæquare; quum utraque prodeat $a + b + c$.

Similiter Euclides propositione nona libri secundi suorum Elementorum longo circuitu ostendit hoc theorema: quod si recta quædā linea AB secetur bifariam in pun-

FIG. 7. puncto C, & non bifariam in puncto D, quadrata partiũ inæqualium AD, DB dupla sint quadratorũ, quæ fiunt ex dimidia AB, & portione CD, quæ inter utramq; sectionẽ interjicitur. Sed theorema istud, impositis ritè nominibus, ostendetur facillimè in hunc modum. Vocetur a semissis datæ rectæ lineæ AC, sive CB; & dicatur b portio CD, quæ interjicitur inter utramque sectionem. Erit ergo $a + b$ segmentum majus AD, & $a - b$ segmentum minus DB; atque adeò quadratum ex AD erit $a^2 + 2ab + b^2$, & quadratum ex DB erit $a^2 - 2ab + b^2$. Sed duo ista quadrata simul addita sunt $2a^2 + 2b^2$, hoc est dupla quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CB. Itaque quadrata partium inæqualium AD, DB dupla sunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & portione intermedia CD.

Eadem ratione ostendi quoque posset theorema, quod propositione decima libri secundi Elementorum continetur: nimirum quod, si recta quævis AB
FIG. 8. secetur bifariam in puncto C, eique in directum adjiciatur alia quævis BD, quadrata, quæ fiunt ex AD, & DB, hoc est ex totâ, & adjectâ, tamquam ex unicâ, & ipsâ adjectâ, dupla sint quadratorum,

rum, quæ fiunt ex AC, & CD, hoc est ex dimidiâ, & dimidiâ, & adjectâ, tamquam ex unicâ. Vocetur etenim a semissis datæ rectæ lineæ AC, sive CB, dicaturque b dimidia una cum adjectâ CD. Erit ergo $a + b$ tota, & adjecta AD; & $a - b$ adjecta sola DB: proindeque quadratum ex AD erit $a^2 + 2ab + b^2$; & quadratum ex DB erit $a^2 - 2ab + b^2$. Sed duo ista quadrata simul addita sunt $2a^2 + 2b^2$, hoc est dupla qudratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Itaque quadrata ipsarum AD, DB, dupla sunt quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD.

III.

Æquationis inter cognitas, & incognitas quantitates inventio.

IMpositis nominibus tum cognitis, cùm incognitis quantitatibus, in id deinceps incumbendũ, ut nullo facto inter quantitates illas discrimine, considerentur omnes promiscuè, velut jam notæ, & ipsius problematis conditiones eo usque evolvantur, ac inter se mutuò comparentur, donec una, eademque quantitas duobus modis diversis exprimi possit.

Nam quum binæ illæ expreſſiones uni, eidemque quantitati conveniant, valor unius, alterius valorem adæquabit: & propterea inſtituta inter expreſſiones illas æqualitate per ſignum iſtud $=$, quod æquale apud hodiernos Algebriſtas ſignificat; invenietur inter cognitas, & incognitas quantitates æquatio, cujus beneficio facilè erit unius ex incognitis quantitatibus valorem invenire.

Jam quum problema eſt determinatum, quia numerus datorum, à ſe mutuò non dependentium, incognitorum numerum adæquat, tot licebit æquationes invenire, quot occurrunt incognitæ quantitates. Iis autem inventis, in id porrò operam dandum, ut ex omnibus iis una deducatur, quæ unicam dumtaxat contineat incognitam quantitatem, cujus valor per ſolas quantitates cognitas expreſſus omninò nobis innoteſcat. Quod quidem obtinebitur, ſi in una ex iis æquationibus loco aliarum incognitarum ſubſtituantur valores ipſarum, ex æquationibus aliis deducendi. Sic enim in æquatione illa unica dumtaxat incognita quantitas remanebit, quæ quum omnes contineat problematis conditiones, ea erit, ad quam problema propriè reducitur.

Sed

Sed ut hæc omnia exemplis magis nota fiant, nec ab iis recedamus, quæ ſuperiùs propoſuimus, ſi proponantur inveniendi duo numeri, quorum data ſit, tam ſumma, quàm differentia; & inſtituta denominatione, vocetur ſumma numerorum a, differentia eorundem b, numerus major x, & numerus minor y: quia in hoc problemate duæ occurrunt quantitates incognitæ, duæ etiam ſunt inveniendæ æquationes. Quumque prima problematis conditio exigat, ut ſumma numerorum x, & y ſit a; ſecunda verò, ut differentia, quæ eſt inter majorem, & minorem, ſit b: ex illa quidem deducetur æquatio ſequens $x + y = a$; ex iſta verò eruetur hæc alia $x = y + b$. Et ſiquidem in prima harum æquationum loco quantitatis incognitæ x ſubrogetur valor ejus $y + b$, per ſecundam æquationem inventus; jam tertia orietur $y + y + b = a$; ſive $2y + b = a$, in qua unica incognita quantitas reperitur.

Similiter, ſi recta linea AB ſubinde ſecanda proponatur in puncto C, ut rectangulum, contentum ſub ſegmentis ejus, ACB æquale ſit ei, quod ſuper DE deſcribitur, quadrato; factaque denominatione, ponatur AB $= a$, DE $= b$; AC FIG. 6.

$= x$,

$=x$, & CB$=y$: jam in hoc problemate duæ occurrent quantitates incognitæ, & propterea duæ etiam æquationes erunt inveniendæ. Unde, quia in eodem problemate duæ sunt appositæ conditiones; una, quod latera rectanguli inveniendi x, & y simul sumpta æqualia esse debeant quantitati cognitæ a; altera, quod ipsum rectangulum inveniendum æquale esse debeat quadrato ex altera quantitate cognita b: ex illa quidem deducetur æquatio sequens $x+y=a$; ex ista verò eruetur hæc alia $xy=b^2$. Unde porrò, si in hac secunda æquatione loco quantitatis incognitæ x substituatur valor ejus $a-y$, qui per regulas mox tradendas ex prima æquatione deducitur; orietur æquatio tertia $ax-x^2=b^2$, quæ unicam dumtaxat continet incognitam quantitatem.

Sed hic monitum Lectorem velim, quod si nomina quantitatibus imponat secundùm ipsas conditiones appositas in problemate, ab initio inveniat æquationem, quæ unicam contineat quantitatem incognitam. Hac ratione in primo problemate, ubi quæruntur duo numeri, quorum data sit tam summa, quàm differentia, positis summâ numerorum inveniendorum $=a$, eorundem differentiâ $=b$, & nu-

& numero minori $=y$: quia ex hypothesi numerus minor differt à majori per quantitatem cognitam b, erit numerus major $=y+b$: qua peracta denominatione, jam ab initio invenietur æquatio, quæ unicam contineat incognitam quantitatem. Nam, quum ob alteram problematis conditionem, ambo numeri simul conficiant a, erit $y+y+b=a$, hoc est $2y+b=a$ æquatio quæsita.

Eadem ratione in altero problemate, ubi datam rectam lineam AB subinde oportet dividere in puncto C, ut rectangulum, sub segmentis ejus contentum, ACB æquale sit ei, quod super DE describitur, quadrato, pono rectam AB$=a$, rectam alteram DE$=b$, & segmentum unum AC$=x$. Quia ergo segmentum alterum CB est differentia, qua tota AB superat segmentum primum AC, erit CB$=a-x$: & propterea quia, propter conditionem problematis, rectangulum ACB æquale esse debet DE quadrato, erit $ax-x^2=b^2$ æquatio problematis, quæ unicam comprehendit incognitam quantitatem. FIG. 6.

In resolutione ergo problematum determinatorum tot semper licebit æquationes invenire, quot incognitæ quanti-ta-

tates occurrunt in eo. Sed si exhaustis omnibus problematis conditionibus, non inveniantur tot æquationes; tum indicio erit, in problemate non omnes appositas esse conditiones, quæ ad determinationem ejus requiruntur; & propteaea resolvi posse problema infinitis modis diversis, nimirum assumendo ad libitum quantitates incognitas, quibus nulla correspondet æquatio.

Ita, si quærantur duo numeri, quorum summa tantùm sit data, problema erit indeterminatum. Nam, propter duas incognitas quantitates, quæ in hoc problemate occurrunt, duæ etiam inveniendæ essent æquationes; quum tamen, propter unicam appositam conditionem, unica tantùm inveniri possit æquatio. Positis enim summâ numerorum inveniendorum $= a$, numero uno $= x$, & numero altero $= y$, quia id tantùm in problemate datur, ut summa ipsorum x, & y sit a; hæc dumtaxat invenietur æquatio $x + y = a$.

Jam, quod problema non sit penitus determinatum, quum non inveniuntur tot æquationes, quot in illo problemate occurrunt quantitates incognitæ, nec tamen aliqua ex conditionibus appositis omittitur,

tur, sic quidem ostenditur. In problemate determinato numerus quæsitorum adæquare debet numerum datorum. Itaque in eo tot oportet conditiones apponere, quot incognitæ quantitates occurrunt. Æquationes autem inveniuntur per ipsas conditiones, appositas in problemate, subinde quidem, ut unaquæque conditio suam nobis præbeat æquationem. Igitur in problemate determinato tot oportet æquationes invenire, quot incognitæ quantitates fuerint assumptæ: proindeque, quotiescumque percursis diligenter singulis problematis conditionibus, numerus æquationum ab incognitarum numero deficit; indicio erit, problema non esse penitus determinatum, nec omnes habere conditiones, ad determinationem ejus necessarias.

Neque verò difficile erit definire, quot in problemate addendæ sint conditiones, quò determinatum fiat, certisque dumtaxat modis solubile. Problema namque, ut sit omninò determinatum, necesse est tot in eo æquationes invenire, quot occurrunt quantitates incognitæ. Jam verò æquationes invenientur per conditiones, quæ apponuntur in problemate, in tantum, ut unaquæque conditio suam no-

nobis suppeditet æquationem. Itaque ad determinandum problema non satis determinatum, addendæ sunt in eo tot æquationes, quot sunt quantitates incognitæ, quibus nulla correspondet æquatio, hoc est quotus est numerus, per quem numerus æquationum ab incognitarum numero differt.

Cæterùm quemadmodum, quum numerus æquationum inventarum ab incognitarum numero deficit, argumento est, problema non esse penitus determinatū, nec omnes habere conditiones, ad determinationem ejus necessarias; ita vicissim, quum numerus æquationum excedit numerum incognitarum, indicio nobis esse potest, problema esse plusquam determinatum, pluresque habere conditiones, quàm quæ ad determinationem ejus requiruntur. Et sicuti etiam numerus, per quem à numero incognitarum deficit numerus æquationum, planè nobis ostendit, quot conditiones problemati adjungi debeant, ut determinatum evadat, certumque numerum solutionum diversarum admittat; ita numerus, per quem numerus æquationum excedit numerum incognitarum ostendit nobis adamussim, quot conditiones ex problemate sint removendæ, ut possit solutio ejus obtineri.

IV.

Inventæ æquationis legitima reductio, ac resolutio.

INventa æquatione, quæ singulas problematis conditiones includens unicam contineat incognitam quantitatem; quia ea, ut plurimum, non statim apta est solvendæ propositæ quæstioni, sed magna interdum præparatione indiget, quò fiat simplicissima: ea porrò debet esse Analystæ solertia, ut æquationem illam ad simpliciorem reducat expressionem, separando, quantum fieri potest, quantitates cognitas ab incognita, & transferendo ad unam partem æquationis terminos omnes, in quibus existit quantitas incognita, & ad partem alteram omnes alios, in quibus solæ cognitæ quantitates reperiuntur. Quod equidem obtinebit, vel si membra æquationis per quantitatem aliquam multiplicet, aut dividat; vel si membris illis aliquid addat, aut subtrahat.

Et primò quidem divisione, multiplicationeque reducitur æquatio ad simpliciociorem expressionem, quotiescumque conjungitur quantitas aliqua cognita cum incognitâ, vel quia in uno, eodemque termino per se mutuò multiplicatæ reperiuntur, vel etiam quia in uno, eodemque termino una per alteram divisa reperitur. Nam quotiescumque per multiplicationem sunt simul in termino aliquo conjunctæ; seperabit eas Analysta per divisionem, quæ opponitur multiplicationi, nimirum dividendo æquationis terminos omnes per cognitam quantitatem. Quotiescumque verò sunt conjunctæ in aliquo termino ad modum fractionis, separabit eas per multiplicationem, quæ opponitur divisioni, scilicet multiplicando terminos omnes æquationis per denominatorem fractionis. Nec divisione, aut multiplicatione ista alterari quicquam poterit æquatio; nam notum est, quod si æqualia dividantur, aut multiplicentur per æqualia, quæ fiunt, sint etiam æqualia.

Hac ratione, si in resolutione alicujus problematis inciderit Analysta in hanc æquationem $ax = bc$, seperabit in illa quantitatem cognitam ab incognita, dividendo utramque partem æquationis per a; quum loco ejus oriatur hæc alia $x = \frac{bc}{a}$. Et similiter, si ex aliquo problemate sequentem æquationem deduxerit Analysta $ax + cx = b^2 + a^2$, separabit in ea cognitas ab incognita, dividendo æquationis utramque partem per $a + c$; nam orietur $x = \frac{b^2 + a^2}{a + c}$. Quod si verò æquatio, ex aliquo problemate nata, sit $\frac{x^2}{a} = b + c$, fiet in ea separatio cognitæ ab incognita, multiplicando utramque partem per a; siquidem loco ejus habebitur hæc alia $x^2 = ab + ac$. Pariterque, ut in ista æquatione $\frac{ab}{x} = a + x$ possit incognita à cognitis separari, multiplicanda est utraque pars æquationis per x; quippe loco ejus habebitur hæc alia $ab = ax + x^2$.

Neque verò in hac alia æquatione $ab = ax + x^2$ separanda est quantitas cognita a ab incognita x, eo quod reperiantur per se mutuò multiplicatæ in termino ax. Nam in hujusmodi speciei æquationibus, quæ, ut suo loco dicemus, vocantur

tur affectæ, fieri nequit totalis incognitæ à cognitis separatio, nisi eæ per regulas inferiùs tradendas resolvantur: quippe si illius termini omnes dividantur per a, orietur hæc altera æquatio $b = x + \frac{x^2}{a}$ in qua adhuc cognita cum incognita conjungitur. Quocirca notetur hoc loco velim, quod sēper ac maxima incognitæ potestas, quæ in æquatione continetur, cum nulla cognitarum conjungitur, ut contingit in ista æquatione $x^3 + ax^2 = a^2x + ab^2$, tunc incognita à cognitis censenda sit sufficienter separata, nec proinde separatio alia instituenda.

Separatâ, quantum fieri potest, multiplicationis, & divisionis beneficio, quantitate cognitâ ab incognitis, transferendi deinde sunt termini omnes, in quibus incognita quantitas existit, ad unam partem æquationis, ut remaneant in altera ii omnes, qui ex solis cognitis coalescunt. Id autem obtinebitur additione, vel subtractione terminorum, qui ad hanc, vel illam æquationis partem sunt transferendi: nimirum additione, quotiescumque termini transferendi afficiuntur signo —, & vicissim subtractione, quum iidem termini

mini signo + reperiuntur affecti. Neque etiam hoc pacto alterari quicquam potest æquatio. Quum enim notum sit, quod si æqualibus æqualia addantur, aut subtrahantur, aggregata, aut residua sint etiam æqualia, semper quidem inter membra æquationis consistet æqualitas, sive iis aliquid addatur, sive ex iisdem quidpiam subtrahatur.

Itaque, ut fiat legitima terminorum transpositio in hac æquatione $x^2 - c^2 = a^2 + ax$, transfero primum ad partem alteram terminum c^2, qui quum signo — afficiatur, addendus est utrique parti æquationis, ita ut æquatio fiat $x^2 - c^2 + c^2 = a^2 + ax + c^2$. Deinde transfero ad alteram partem terminum ax, qui velut affectus signo + subtrahendus est ex utraque parte æquationis. Et quoniam hac facta subtractione æquatio evadit $x^2 - c^2 + c^2 - ax = a^2 + ax + c^2 - ax$, deletis in ista terminis omnibus, qui contrarietate signorum se mutuo destruunt, habebitur tandem æquatio reducta $x^2 - ax = a^2 + c^2$.

Ex quibus liquet, transpositionem istam terminorum fieri simpliciùs, si nulla instituatur additio, vel subtractio, sed dumtaxat ipsi termini mutatis signis ad alternas partes æquationis transferantur. Patetque etiam, quod quotiescumque in utraque æquationis parte unus idemque terminus occurrit, qui eodem quoque signo utrinque afficiatur, terminus iste ex utraq; parte sit delendus. Ita si proponatur æquatio $x^2 + ax + cx = ax + a^2$, quia terminus ax existit in utraque parte cum eodem signo, reducetur illa ad hanc aliam $x^2 + cx = a^2$.

In resolutione problematum occurrunt quandoque æquationes quædam, in quibus quantitates radicales continentur. Id quum accidit, subinde oportet æquatio reducatur, ut quantitates illæ rationales evadant. Quod quidem obtinebitur, elevando ad aliquam potestatem utramque partem æquationis. Itaque, quum una tantùm occurrit in æquatione quantitas radicalis, methodus eam reducendi hæc est. Transferantur ad partem unam æquationis quantitates omnes rationales, & relinquatur in parte altera sola quantitas radicalis. Tum elevetur utraque pars æquationis ad eam potestatem, quæ est propria sedes illius quantitatis radicalis: sicque nova habebitur æquatio, in qua nulla radicalis quantitas occurret.

Sit $\sqrt{ax} - b = a$ æquatio ex resolutione

ne alicujus problematis orta, & oporteat in ea quantitatem radicalem $\sqrt{ax}$ commensurabilem reddere. Transferatur ad alteram partem æquationis quantitas commensurabilis b, ut maneat sola quantitas radicalis in una parte. Erit igitur $\sqrt{ax} = a + b$. Deinde, quia sedes propria illius quantitatis radicalis est quadratum, sive secunda potestas, elevetur utraque pars æquationis ad secundam potestatem, & habebitur hæc alia æquatio $ax = a^2 + 2ab + b^2$, in qua nulla occurrit quantitas radicalis.

Quod si verò plures in æquatione sint quantitates radicales, tunc substitutione juvabitur Analysta in hunc modum. Sit $\sqrt{ax} = \sqrt{bx} + c$ æquatio, ex aliquo problemate nata. Ponatur $\sqrt{ax} = p$, & $\sqrt{bx} = q$. Erit igitur $ax = p^2$, & $bx = q^2$. Substituantur in æquatione proposita loco quantitatum radicalium assumpti valores, & habebitur loco ejus hæc alia $p = q + c$. Elevetur utraque pars hujus æquationis ad secundam potestatem, quæ est propria sedes utriusque quantitatis radicalis, & fiet $p^2 = q^2 + 2qc + c^2$. Erat autem $p^2 = ax$, & $q^2 = bx$. Itaque subrogatis rursus hisce valoribus, fiet $ax = bx + 2qc + c^2$, hoc est $ax - bx - c^2 = 2qc$.

$2qc$. Elevetur iterum utraque pars hujus æquationis ad quadratum, & habebitur $a^2x^2 - 2abx^2 + b^2x^2 - 2ac^2x + 2bc^2x + c^4 = 4q^2c^2$, in qua si substituatur loco q^2 valor ejus bx, orietur tandem æquatio, libera ab omni quantitate radicali.

Sit insuper $\sqrt{ax} + a = \sqrt[3]{3a^2x}$ æquatio, ex aliquo problemate nata. Ponatur $\sqrt{ax} = p$, & $\sqrt[3]{3a^2x} = q$. Erit igitur $ax = p^2$, & $3a^2x = q^3$. Substituantur in æquatione proposita loco quantitatum radicalium assumpti earum valores, & habebitur loco ejus hæc alia $p + a = q$. Elevetur utraque pars hujus æquationis ad cubum, sive tertiam potestatem, & fiet $p^3 + 3p^2a + 3pa^2 + a^3 = q^3$. Erat autem $p^2 = ax$, & $q^3 = 3a^2x$. Itaque subrogatis hisce valoribus, erit $pax + 3a^2x + 3pa^2 + a^3 = 3a^2x$, hoc est $pax + 3pa^2 = -a^3$. Elevetur rursus æquationis hujus utraque pars ad quadratum, & habebitur $p^2a^2x^2 + 6p^2a^3x + 9p^2a^4 = a^6$, in qua si loco p^2 substituatur valor ejus ax, orietur tandem æquatio $x^3 + 6ax^2 + 9a^2x = a^3$, in qua nulla existit quantitas radicalis.

Extractione radicum possunt etiam ad simpliciorem expressionem æquationes revo-

revocari. Nam quotiescumque omnino notum est quicquid in uno æquationis membro continetur, & in altero reperitur potestas aliqua perfecta; extrahendo ex utraque parte æquationis radicem ejus potestatis, æquatio longè simplicior habebitur. Ita si $x^2 = ab$ sit æquatio, ex aliquo problemate orta, extrahatur utrinque quadrata radix, & fiet $x = \sqrt{ab}$. Similiter si in resolutione alicujus problematis inciderit Analysta in hanc æquationem $x^2 + 2ax + a^2 = ac$, eliciat utrinque quadratam radicem, & habebit loco ejus hanc aliam simpliciorem $x + a = \sqrt{ac}$.

Neque verò æquationes istæ $x = \sqrt{ab}$, & $x + a = \sqrt{ac}$ sunt reducendæ, quia in iis quantitates occurrunt radicales: quippe sciendum, radicales quantitates tunc demum simplicitati æquationum officere, quum in iis incognitæ continentur. Quotiescumque etenim ex solis cognitis constant, nequaquam sunt impedimento, & potest ab iis æquatio vel solius substitutionis ope liberari. Qua ratione ex æquatione $x = \sqrt{ab}$ auferetur quantitas radicalis, ponendo $\sqrt{ab} = c$, quum oriatur $x = c$; & similiter æquatio $x + a = \sqrt{ac}$ libera fiet à quantitate radicali, si ponatur

tur $\sqrt{ac} = b$, quandoquidem loco ejus habebitur hæc alia $x + a = b$.

Sed ut æquatio ad simpliciorem expressionem extractione radicum possit revocari, necesse est interdum utrique membro æquationis aliquid apponere. Sic, ut æquatio $x^2 + 2ax = a^2$ simplicior evadat, addatur ad utramque partem a^2, ita ut fiat $x^2 + 2ax + a^2 = 2a^2$; & jam extrahendo utrinque quadratam radicem, erit $x + a = \sqrt{2a^2}$. Similiter, ut simplicior fiat æquatio ista $x^4 + 2a^2x^2 = 3a^4$, addatur utrinque a^4; & quia evadit $x^4 + 2a^2x^2 + a^4 = 4a^4$, reducetur, extrahendo quadratam radicem ex utraque parte æquationis, ad hanc aliam $x^2 + a^2 = 2a^2$, sive $x^2 = a^2$, quæ fiet simplicissima, si utrinque rursus quadrata radix extrahatur.

Atque hoc artificio jam ex omnibus æquationibus, in quibus incognita ad duas dimensiones ascendit, licebit valorem eius eruere, ipsarumque adeo æquationum resolutionem obtinere, quod est ultimum Analysis opus. Omnis etenim æquatio, in qua incognita ad duplicem dimensionem attollitur, nullâ signorum, quibus termini afficiuntur, habitâ ratione, potest sub hac forma exhiberi $x^2 + 2ax = b^2$. Et

Et profectò, si æquationis hujus utrique membro addatur a^2, hoc est quadratum ex semisse quantitatis cognitæ secundi termini, tum utrinque quadrata radix extrahatur, fiet $x + a = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sed de resolutione tum istarum, cum aliarum æquationum, velut totius Analysis complemento, fusiùs deinceps agendum.

CAP. II.

Methodus resolvendi problemata exmplis illustratur.

QUum in Arte analytica exemplis magis, quàm præceptis Tyrones adjuventur, altiusque nobis inhæreant, quæ generaliter enunciata, ad specialia applicantur, non abs re fore existimavi, si methodum resolvendi problemata, superiori capite summatim explicatam, aliquibus exemplis, certo consilio electis, in Tyronum gratiam hoc alio capite illustratam exhibeam. Et ut liquidò constet, quàm latè pateat hæc methodus per universam Matheseos disciplinam, exempla proferam, non modò ex Arithmetica, & Geometria deprompta, verùm etiam quæ ad physicomathematicas scientias pertinere videntur.

Jam

Et si quidē ea sit recta docēdi methodus, quæ progreditur à simplicioribus ad ea, quæ magis composita sunt; afferenda sunt primo loco problemata illa, quæ ad Arithmeticam pertinent, quæque circa numericam, sive quantitates abstractas occurros, sive quantitates abstractas occupantur. Sunt quippe hujuscemodi problemata adeo quidem solutu facilia, ut crediderim tempus terere, qui in eorum solutione ingenii sui vires velit exercere. Statu etenim quæstionis probè intellecto, & impositis ritè nominibus, tum notis, cùm incognitis quantitatibus, eò res tota devolvitur, ut sensus quæstionis sermone, ut ita dicam, algebraico designetur; nam conditiones ejus, ad algebraicos terminos sic translatæ, illico tot dabunt æquationes, quot ei solvendæ sufficiunt.

Hac ratione, si quærantur tres numeri arithmeticè proportionales, ita ut data sit tam summa ipsorum, quàm summa productorum ex singulis binis; considero primum attentè statum quæstionis, & conditiones, quas debent habere numeri quæsiti, sedulò perpendo. Tum quos oportet numeros invenire, voco x, y, z; sed a summam ipsorum, & b^2 summam productorum ex singulis binis. Unde quia tres numeri x, y, z tales esse debent, ut sint arithmeticè proportionales, ut summa ipsorum sit a, ac denique ut summa productorum ex singulis binis sit b^2; designentur conditiones istæ omnes terminis algebraicis, & habebuntur hoc pacto tres æquationes $x + z = 2y$, $x + y + z = a$, & $xy + xz + yz = b^2$, quarum ope facile erit, cujusque incogniti numeri valorem invenire.

Sed non perinde se res habet in resolutione eorum problematum, quæ spectant ad Geometriam. Pendent etenim ut plurimum, quæ in iis quæruntur, à variis linearum positionibus, & relationibus complexis: proindeque ulteriori egent artificio, quo ad algebraicos terminos deduci possint. Nimirum necesse est, ut Analysta Geometriæ calleat elementa, figurarumque geometricarum proprietates & accidentia perspecta habeat, ac explorata, quo possit problemata geometrica ad æquationes revocare. Sed Trigonometria, & Doctrina Datorum neque etiam eum latere debent; nam ut plurimum in calculo peragendo non ea, quæ propriè data sunt, sed quæ ex iis consequuntur, debent adhiberi.

Hæc itaque sunt, quæ resolutionem problematum geometricorum reddunt pau-

paulò difficiliorem. Unde ne statim Tyrones nostri animo concidant, exhibeam primùm iis problemata aliquot arithmetica, ut in inveniendis, reducendisque æquationibus aliquantulum instructi, possint ad problemata geometrica inoffenso pede se cōferre. Sed tam illa, quàm ista excipient tādem problemata nonnulla physico-mathematica, ut intelligant Tyrones, qua ratione physico-mathematicæ disciplinæ possint etiam calculi algebraici legibus submitti.

I.

Problemata Aritbmetica.

I. INvenire tres numeros, quorum datæ sint summæ ex singulis binis.

Vocetur primus numerorum x, secundus y, & tertius z. Designetur autem litterâ a summa ex primo, & secundo; litterâ b summa ex primo, & tertio; & litterâ c summa ex secundo, & tertio. Ergo, quia summa ipsorū x, & y est a, erit $x + y = a$; pariterque, quia summa ipsorum x, & z est b, erit $x + z = b$; ac denique, quia summa ipsorum z, & y est c, erit $y + z = c$. Quocirca designatis terminis algebraicis singulis problematis conditionibus, reducetur problema ad tres istas æquationes $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$.

Nunc ex tribus hisce æquationibus deducenda est alia, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam contineat. Id autem fieri potest in hunc modum. Quoniam in tertia æquatione habetur $y + z = c$, erit transponendo $z = c - y$. Unde si in secunda æquatione $x + z = b$ loco ipsius z substituatur valor ille, erit $x + c - y = b$, hoc est $x + c - b = y$. Denique in prima æquatione $x + y = a$ loco incognitæ y subrogetur valor inventus, & fiet $x + x + c - b = a$, sive $2x = a + b - c$. Unde divisa utraque parte æquationis per 2, habebitur tandem $x = \dfrac{a + b - c}{2}$.

Invento autem valore unius incognitæ x, valores aliarum incognitarum nullo negotio deducentur. Habetur etenim in secunda æquatione $x + z = b$, sive $z = b - x$. Itaque si in ea loco incognitæ x ponatur valor invētus, fiet $z = \dfrac{b + c - a}{2}$

Et similiter, quia in tertia æquatione habebetur $y + z = c$, hoc est $y = c - z$, si in ea loco incognitæ z substituatur valor inventus, fiet $y = \frac{a + c - b}{2}$. Unde tres numeri, quos oportet invenire, erunt $\frac{a + b - c}{2}$, $\frac{a + c - b}{2}$, & $\frac{b + c - a}{2}$.

Possunt tres isti numeri ex tribus illis æquationibus inveniri etiam hoc artificio. Quoniam æquationes, ad quas problema reductum est, sunt $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$, addantur inter se mutuò subinde æquationes illæ, ut ex omnibus incognitis fiat summa una, & summa alia ex omnibus cognitis. Erit itaque $2x + 2y + 2z = a + b + c$. Sed quum in tertia æquatione habeatur $y + z = c$, duplicando terminos omnes, erit $2y + 2z = 2c$. Quare, si in illa æquatione loco terminorum $2y + 2z$ ponatur $2c$, fiet $2x + 2c = a + b + c$, hoc est $2x = a + b - c$, & consequenter $x = \frac{a + b - c}{2}$: nec dissimiliter aliarum incognitarum valores invenientur.

Quod si denominatio incognitarum fieri

ri velit secundùm ipsas conditiones, appositas in problemate, obtineri poterit problematis resolutio multo faciliùs in hunc modum. Vocetur rursus a summa ex primo, & secundo; b summa ex primo, & tertio; & c summa ex secundo, & tertio. Ergo si primus dicatur x, quia summa ipsius cum secundo est a, summa autem ipsius cum tertio est b; erit $a - x$ secundus, $b - x$ tertius, & $a + b - 2x$ summa ex secundo, & tertio. Erat autem c summa ex secundo, & tertio: Quare instituta æqualitate inter has duas expressiones, habebitur æquatio $c = a + b - 2x$, hoc est $2x = a + b - c$, & consequenter $x = \frac{a + b - c}{2}$, prorsus ut supra.

Jam, ut indefinitam hujus problematis resolutionem exemplo uno, aut altero illustremus; ponamus, quod summa ex primo, & secundo sit 10; quod summa ex primo, & tertio sit 8; ac denique, quod summa ex secundo, & tertio sit 6. Erit itaque $a = 10$, $b = 8$, & $c = 6$. Unde quum sit $a + b - c = 12$, $a + c - b = 8$, & $b + c - a = 4$; capiendo semisses istorum numerorum, fient numeri quæsiti 6, 4, 2. Atque ita quoque si summa ma ex primo, & secundo sit 12, summa ex primo, & tertio 14, & summa ex secundo, & tertio 10; erit primus numerorum 8, secundus 4, & tertius 6.

II. Invenire tres numeros, quorum data sint producta ex singulis binis.

Esto x primus numerorum, y secundus, & z tertius. Vocetur autem a^2 productum ex primo, & secundo; b^2 productum ex primo, & tertio; & c^2 productum ex secundo, & tertio. Itaque, quia id, quod oritur ex multiplicatione ipsorum x, & y, est a^2, erit $xy = a^2$. Pariterque, quia id, quod gignitur ex multiplicatione ipsorum x, & z, est b^2, erit $xz = b^2$. Atque ita quoque, quia id, quod producitur, multiplicando y per z, est c^2, erit $yz = c^2$. Unde translatis in hunc modum ad algebraicos terminos singulis problematis conditionibus, erunt $xy = a^2$, $xz = b^2$, & $yz = c^2$ æquationes, ex quibus problematis solutio deducenda.

Ex his ergo tribus æquationibus eruenda est alia, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm incognitam comprehendat. Hoc autem obtineri potest hac arte. Quoniam in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, erit, dividendo utrumque terminum per y, $z = \frac{c^2}{y}$.

Unde, si in secunda æquatione $xz = b^2$, loco ipsius z substituatur valor ille, erit $\frac{c^2x}{y} = b^2$, hoc est $c^2x = b^2y$, sive etiã $\frac{c^2x}{b^2} = y$. Deniq; in prima æquatione $xy = a^2$ loco incognitæ y subrogetur valor inventus, & fiet $\frac{c^2x^2}{b^2} = a^2$, sive $c^2x^2 = a^2b^2$. Unde divisâ utrâque parte æquationis per c^2, & extractâ utrinque quadratâ radice, habebitur æquatio $x = \frac{ab}{c}$, quæ valorem nobis exhibet incognitæ x.

Cognito valore incognitæ x, valores aliarum incognitarum facile erit determinare. Quoniam enim in secunda æquatione habetur $xz = b^2$, sive $z = \frac{b^2}{x}$, si in ea loco incognitæ x ponatur valor inventus, fiet $z = \frac{bc}{a}$. Et similiter, quia in in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, hoc est $y = \frac{c^2}{z}$, si in ea loco incognitæ z substituatur inventus valor, fiet $y = \frac{ac}{b}$. Unde tres numeri in problemate quæsiti erunt $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$.

Possunt tres isti numeri inveniri etiam hoc alio artificio. Quoniam æquationes, ex problematis conditionibus deductæ, sunt $xy = a^2$ $xz = b$, & $yz = c^2$, multiplicentur inter se mutuò subinde æquationes illæ, ut ex omnibus incognitis fiat productum unum, & productum alterum ex omnibus cognitis. Erit itaque $x^2 y^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$, sive etiam $xyz = abc$. Sed quum in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, substituendo in æquatione illa c^2 loco ipsius yz, fiet $c^2 x = abc$, sive $cx = ab$. Quare divisâ utrâque parte æquationis per c, habebitur, ut supra, $x = \frac{ab}{c}$; nec dissimiliter valores aliarum incognitarum poterunt determinari.

Quod si nomina quantitatibus incognitis imponantur secundùm ipsas conditiones, appositas in problemate, obtineri poterit problematis resolutio multò faciliùs hac ratione. Vocetur rursus a^2 productum ex primo, & secundo; b^2 productum ex primo, & tertio; & c^2 productum ex secundo, & tertio. Itaque si primus dicatur x, quia productum ejus per secundum est a^2, productum verò ejus per tertium est b^2; erit $\frac{a^2}{x}$ secundus, $\frac{b^2}{x}$ tertius, & $\frac{a^2 b^2}{x^2}$ productum ex secundo, & tertio. Erat autem c^2 productum ex secundo, & tertio. Quare institutâ æqualitate inter duas istas expressiones, habebitur æquatio $\frac{a^2 b^2}{x^2} = c^2$, quæ reducitur ad hanc aliam $x = \frac{ab}{c}$.

Cæterùm, ut hujus problematis resolutionem generalem exemplo aliquo specialem reddamus, ponatur, quod productum ex primo, & secundo sit 10; productum ex primo, & tertio sit 12; ac denique productum ex secundo, & tertio sit 15. Erit itaque $a^2 = 10$, $b^2 = 12$, & $c^2 = 15$.

Unde quum ſit $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{12}$, & $c = \sqrt{15}$, erunt tres numeri quæſiti $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{25}{2}}$, $\sqrt{18}$. Sed ſi ponatur $a^2 = 9$, $b^2 = 36$, & $c^2 = 4$; quia fiet $a = 3$, $b = 6$, & $c = 2$, erunt tres numeri quæſiti 9, 1, 4.

III. Invenire tres numeros geometricè proportionales, ita ut datæ ſint differentiæ majoris à minoribus.

Vocetur primus, & major numerorum x; ſecundus, & minor y; tertius, & minimus z. Deſignetur autem litterâ a differentia primi à ſecundo, & litterâ b differentia primi à tertio. Itaque, quia tres numeri x, y, z ſunt geometricè proportionales, erit $xz = yy$. Et quoniam x major eſt, quàm y, quantitate cognitâ a, erit $x = y + a$. Et denique quia x ſuperat z quantitate cognitâ b, erit $x = z + b$. Quare deſignato ſtatu quæſtionis termone algebrico, reducetur problema ad tres iſtas æquationes $xz = yy$, $x = y + a$, & $x = z + b$.

Ex his autem æqnationibus ea, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam contineat incognitam quantitatem, in hunc modum erui poterit. Quoniam in ſecunda æquatione habetur $x = y + a$, erit $x - a = y$; atque adeo, quadrando utramque partem æquationis, erit $x^2 - 2ax + a^2 = y^2$. Sed in prima æquatione habetur $xz = y^2$. Quare erit $x^2 - 2ax + a^2 = xz$. Jam verò, quum in tertia æquatione habeatur $x = z + b$, erit $z = x - b$. Itaque ſi in proſtrema æquatione loco quantitatis incognitæ z ponatur valor ejus $x - b$, habebitur hæc alia $x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - bx$, ex qua infertur $x = \frac{a^2}{2a - b}$.

Invento valore incognitæ x, valores aliarum incognitarum nullo negotio inveniențur. Nam quantitas incognita x major eſt, quàm y, quantitate cognitâ a. Ergo ſi ex invento valore ſubducatur a, relinquetur valor incognitæ y. Et ſimiliter, quia incognita quantitas x ſuperat aliam z quantitate cognitâ b, ſi ex eodem illo valore ſubtrahatur b, remanebit valor incognitæ z. Hinc monitum lectorem velim, quod quum in aliquo problemate plures occurrunt incognitæ quantitates, præſtat eam primùm invenire, ex qua omnes aliæ facilè deducuntur.

Quod ſi denominatio quantitatum incocognitarum fieri velit secundùm conditiones, appositas in problemate, pervenietur ad æquationem, unicam incognitam continentem, multò faciliùs in hunc modum. Designet rursus a excessum primi à secundo, & b excessum primi à tertio. Ergo si primus dicatur x, erit $x - a$ secundus, & $x - b$ tertius. Debent autem esse tres numeri inveniendi geometricè proportionales. Quare erit, ut x ad $x-a$, ita $x - a$ ad $x - b$: proindeque, quum productum ex mediis æquale sit producto ex extremis, erit $x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - bx$: unde rursus infertur $x = \frac{a^2}{2a-b}$.

Ponamus, exempli causa, quod excessus primi supra secundum sit 10, excessus verò primi supra tertium sit 15. Erit itaque $a = 10$, & $b = 15$. Unde quum a^2 sit 100, & $2a - b = 20 - 15 = 5$; diviso 100 per 5, fiet prior numerus 20; à quo si auferas 10, habebis pro secundo 10; si verò auferas 15, habebis pro tertio 5. Erunt ergo numeri quæsiti 20, 10, 5. Atque ita quoque si a, sive primi supra secundum excessus sit 6; & b, sive excessus primi supra tertium sit 3, erunt numeri inveniendi 4, $-$ 2, 1.

IV.

IV. Invenire duos numeros, quorum data sit summa quadratorum, datumque, quod eorum multiplicatione producitur.

Esto x numerus prior, & y numerus alter. Sit autem $2a^2$ summa quadratorum ex iis, & b^2 id, quod gignitur, mutua eorum multiplicatione. Quia ergo quadrata numerorum x, & y simul addita, conficiunt $2a^2$; erit $x^2 + y^2 = 2a^2$. Et quoniam id, quod oritur, multiplicando eosdem numeros x, & y, est b^2; erit $xy = b^2$. Unde designatis terminis algebraicis singulis conditionibus problematis, reducetur problema ad duas istas æquationes $x^2 + y^2 = 2a^2$, & $xy = b^2$.

Jam, ut ex duabus istis æquationibus tertiam eliciam, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantùm contineat incognitam quantitatem, multiplico prioris æquationis $x^2 + y^2 = 2a^2$ terminos omnes per x^2, ut loco ejus habeatur hæc alia $x^4 + y^2 x^2 = 2a^2 x^2$. Et quoniam in secunda æquatione habetur $xy = b^2$, quadrando ejus utramque partem, fiet $x^2 y^2 = b^4$. Unde si in altera illa æquatione $x^4 + x^2y^2 = 2a^2x^2$ loco termini x^2y^2 ponatur valor ejus b^4, evadet illa $x^4 + b^4 = 2a^2x^2$, quæ unicam

 quan-

quantitatem incognitam continet.

Ut autem ex hac æquatione erui possit valor ipsius x, fiat primò in ea legitima terminorum transpositio, ita ut evadat $x^4 - 2a^2x^2 = -b^4$; tum ad ejus utrãque partem addatur a^4, scilicet quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut fiat $x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = a^4 - b^4$; porro extrahatur utrinque quadrata radix, & erit $x^2 - a^2 = \sqrt{a^4 - b^4}$, sive $x^2 = a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}$: & extractâ rursus ex utraque parte hujus æquationis quadratâ radice, habebitur tandem $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$.

Poterat hìc idem valor quantitatis incognitæ x inveniri etiam hoc artificio. Quoniam in secunda æquatione habetur $xy = b^2$, duplicando utramque partem, erit $2xy = 2b^2$. Sed in prima æquatione habetur $x^2 + y^2 = 2a^2$. Quare erit $x^2 + 2xy + y^2 = 2a^2 + 2b^2$, & $x^2 - 2xy + y^2 = 2a^2 - 2b^2$. Unde extrahendo quadratas radices ex partibus utriusque æquationis, erit $x + y = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$, & $x - y = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$. Unde quia

ex

ex additione illarum oritur hæc alia $2x = \sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{2a^2 - 2b^2}$, fiet tandem $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$, prorsus, ut supra.

Invento valore magnitudinis incognitæ x, valor alterius incognitæ y facili negotio invenitur. Quum enim id, quod oritur ex multiplicatione mutua ipsarũ, sit b^2; si dividatur b^2 per inventũ valorẽ, habebitur valor incognitæ y. Hunc verò valorem esse $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$, perspicuum quidem est. Habetur enim $x + y = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$, & $x - y = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$. Itaque subtrahendo æquationem istam ex illa fiet $2y = \sqrt{2a^2 + 2b^2} - \sqrt{2a^2 - 2b^2}$, eritque adeo $y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$.

Ponamus, exempli gratia, quod summa quadratorum ex numeris inveniendis sit 20; id verò, quod producitur ex mutuâ eorum multiplicatione sit 8. Erit itaque $2a^2 = 20$, & $b^2 = 8$. Unde quum

a^2

$a^2 + b^2$ sit 18, & $a^2 - b^2$ sit 2; erunt semisses istarum quantitatum 9, & 1; quumque radices quadratæ harum semissium sint 3, & 1, fient numeri quæsiti $3 + 1$, sive 4, & $3 - 1$, sive 2. Atque ita quoque, si ponatur summa quadratorum ex numeris inveniendis, hoc est $2a^2 = 16$, & productum ex eorum multiplicatione mutuâ, hoc est $b^2 = 10$, erunt numeri quæsiti $3 + \sqrt{-1}$, & $3 - \sqrt{-1}$.

V. Invenire duos numeros, ita ut data sit tum summa ipsorum, cùm summa cuborum, qui fiunt ex iis.

Esto x numerus unus, & y numerus alter. Designet autem a summam ipsorum: & ab^2 summam cuborum, qui fiunt ex iis. Itaque quia summa numerorum x, & y est a, erit $x + y = a$. Et quoniam summa cuborum, qui fiunt ex iisdem numeris, est ab^2, erit $x^3 + y^3 = ab^2$. Unde designatis sermone algebrico singulis conditionibus appositis in problemate, reducetur problema ipsum ad duas istas æquationes $x + y = a$, & $x^3 + y^3 = ab^2$.

Ex his ergo aquationibus deducenda est tertia, quæ includens omnes problematis conditiones, unicam tantùm incognitam comprehendat. Id autem fiet hac arte.

arte. Quoniam in prima æquatione habetur $x + y = a$, erit $y = a - x$, atque adeo attollendo utramque partem æquationis ad cubum, sive tertiam potestatem fiet $y^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$. Quocirca si in secunda æquatioue $x^3 + y^3 = ab^2$ loco termini y^3 valor ejus substituatur, habebitur $x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = ab^2$, sive $a^2 - 3ax + 3x^2 = b^2$, quæ quidem æquatio legitimè reducta, ac resoluta dabit valorem ipsius x; eoque invento valor alterius incognitæ y per primam problematis conditionem nullo negotio invenietur.

VI. Invenire duos numeros, ita ut data sit tam summa quadratorum, quàm summa cuborum ex iis.

Vocetur x numerus unus, & y numerus alter. Designet autem a^2 summam quadratorum, & a^2b summam cuborum ex iis. Itaque, quia quadrata numerorum x, & y simul addita conficiunt a^2, erit $x^2 + y^2 = a^2$. Et quoniam summa cuborum ex iisdem numeris est a^2b, erit $x^3 + y^3 = a^2b$. Quare designato statu quæstionis terminis algebraicis, erunt $x^2 + y^2 = a^2$, & $x^3 + y^3 = a^2b$ æquationes, ad quas problema propositum reducitur.

Et quoniam in prima æquatione habetur

tur $x^2 + y^2 = a^2$; erit $y^2 = a^2 - x^2$: quare, elevando utramque partem æquationis ad cubum, ſive tertiam poteſtatem, erit $y^6 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$. Pariterque quia in ſecunda æquatione habetur $x^3 + y^3 = a^2b$, erit $y^3 = a^2b - x^3$: quare elevando utramque partem æquationis ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem, erit $y^6 = a^4b^2 - 2a^2bx^3 + x^6$. Erat autem $y^6 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$. Quare erit $a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6 = a^4b^2 - 2a^2bx^3 + x^6$, quæ quidem æquatio legitimè reducta, ac reſoluta incognitæ x valorem exhibebit.

II.

Problemata Geometrica.

FIG. 9. I. IN triangulo rectangulo BAC, datâ hypothenusâ BC, & perpendiculo AD, invenire ſegmenta BD, DC.

Ponatur hypothenuſa BC $= a$, perpendiculum AD $= b$, & ſegmentum unum BD $= x$. Erit ergo ſegmentum alterum DC $= a - x$. Et quoniam triangulum BAC rectum habet angulum in A, erit perpendiculum AD medio loco proportionale inter ſegmenta BD, DC. Quare erit

erit ut BD ad DA, ita DA ad DC, hoc eſt in terminis algebraicis, ut x ad b, ita b, ad $a - x$. Unde, quia rectangulum ſub extremis æquale eſt ei, quod ſub mediis continetur, erit $ax - x^2 = b^2$ æquatio, ad quam reducitur problema propoſitum.

Eadem æquatio poteſt etiam inveniri hac alia ratione. Triangulum ADB rectum habet angulum in D: quare erit quadratum hypothenuſæ AB æquale quadratum quadratis crurum AD, BD. Eſt autem quadratum ex AD $= b^2$, & quadratum ex BD $= x^2$. Itaque erit quadratum ex AB $= x^2 + b^2$. Et quoniam triangulum BAC eſt rectangulum in A, erit latus AB medio loco proportionale inter hypothenuſam BC, & ſegmentum, quod ei adjacet, BD. Quare erit AB quadratum æquale rectãgulo BDC. Eſt autem in terminis algebraicis quadratum ex AB $= x^2 + b^2$, & rectangulum DBC $= ax$. Igitur inſtitutâ æqualitate inter has duas quantitates, fiet æquatio $ax = x^2 + b^2$, hoc eſt $ax - x^2 = b^2$.

Sed ad eandem æquationem aliâ rurſus ratione poteſt perveniri: nimirum quia triangulum ADB rectum habet angulum in D, erit AB quadratum æquale AD, BD quadratis: proindeque, quia quadratum

tum ex AD est b^2, & quadratum ex BD est x^2, erit quadratum ex AB $= x^2 + b^2$. Similiter, quia triangulum ADC rectum habet angulum in D, erit quadratum ex AC æquale AD, DC quadratis: proindeque, quia quadratum ex AD est b^2, & quadratum ex DC est $a^2 - 2ax + x^2$, erit quadratum ex AC $= b^2 + a^2 - 2ax + x^2$. Jam verò, propter triangulum BAC rectangulum in A, quadratum hypothenusæ BC est æquale quadratis crurum AB, AC. Itaque, quia in terminis algebraicis quadratum ex BC est a^2, quadratum ex AB est $x^2 + b^2$, & quadratum ex AC est $b^2 + a^2 - 2ax + x^2$, erit æquatio $a^2 = x^2 + b^2 + b^2 + a^2 - 2ax + x^2$, hoc est, legitimâ reductione peractâ, $ax - x^2 = b^2$.

FIG. 10. II. In parallelogrammo ABCD datis lateribus omnibus, & diagonali AC, invenire diagonalem alteram BD.

Super latere AB producto si opus demittantur perpendicula BE, CF. Et quoniam propter parallelas AB, DC angulus BAE æqualis est angulo CDF; triangula duo rectangula BEA, CFD similia erunt, & æqualia inter se: proindeque non modò erit AB æqualis DC, BE æqualis CF, verùm etiam AE æqualis DF.

Po-

Ponatur itaque latus AB, sive DC $= a$, latus BC, sive AD $= b$, & diagonalis data AC $= c$. Ponatur autem diagonalis quæsita BD $= x$, & portio AE, sive DF $= y$. Erit ergo DE $= b + y$, & AF $= b - y$. Et quoniam triangulum BEA rectum habet angulum in E, erit AB quadratum æquale AE, BE quadratis. Quare si ex AB quadrato auferatur AE quadratum, supererit BE, sive CF quadratum. Est autem quadratum ex AB $= a^2$, & quadratum ex AE $= y^2$. Itaque erit quadratum ex BE, sive CF $= a^2 - y^2$.

Porro quia triangulum BED est rectangulum in E, erit BD quadratum æquale BE, DE quadratis. Sed in terminis algebraicis BD quadratum est x^2, BE quadratum est $a^2 - y^2$, & DE quadratum est $b^2 + 2by + y^2$. Quare erit $x^2 = a^2 - y^2 + b^2 + 2by + y^2$, hoc est $x^2 = a^2 + b^2 + 2by$, sive etiam $x^2 - a^2 - b^2 = 2by$.

Ulteriùs, quia triangulum AFC rectum habet angulum in F, erit AC quadratum æquale AF, CF quadratis. Jam verò in terminis algebraicis quadratum ex AC est c^2, quadratum ex AF est $b^2 - 2by + y^2$, & quadratum ex CF est $a^2 - y^2$. Itaque erit $c^2 = b^2 - 2by + y^2 + a^2 - y^2$, hoc est $c^2 = b^2 - 2by + a^2$, sive etiam

$2by$

$2by = b^2 + a^2 - c^2$.

Erat autem $2by = x^2 - a^2 - b^2$. Quare erit $x^2 - a^2 - b^2 = a^2 + b^2 - c^2$, hoc eſt $x^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$: ex quo patet quadratum diagonalis quæſitæ æquale eſſe ei, quod remanet, ſi ex quadratis laterum ſubducatur quadratum datæ diagonalis, ut hinc inferre liceat hoc theorema, longè quidem univerſaliùs theoremate pythagorico: in omni parallelogrammo quadrata laterum omnium æqualia ſunt quadratis diagonalium.

Nec abs re erit theorematis hujus adeo univerſalis ſyntheticam demonſtrationem, Euclideo more compoſitam, hoc loco proferre: nimirum, quia triangulum BAD obtuſum habet angulum in A, erit ex elementis quadratum ex BD æquale quadratis AB, AD unà cum duplo rectanguli DAE: quare appoſito communi quadrato AC, erunt quadrata duo BD, AC æqualia tribus quadratis AB, AD, AC unà cum duplo rectanguli DAE, ſive ADF. Sed propter triangulum ADC acutangulum in D, quadratum ex AC unà cum duplo rectanguli ADF eſt æquale quadrato ex DC, unà cum quadrato ex AD, ſive CB. Igitur quadrata duo BD, AC æqualia erunt quatuor quadratis AB,

AB, AD, DC, CB.

III. In quadrilatero ABCD, inſcripto in circulo, datis lateribus omnibus, & diagonali unâ BD, invenire diagonalem alteram AC. FIG. II.

Fiat angulus CBE æqualis angulo ABD. Et quoniam angulus BCA æqualis eſt angulo BDA; æquiangula erunt triangula BEC, BAD. Quare erit, ut BC, ad CE, ita BD ad DA. Unde, ſi ponatur $BC = a$, $BD = b$, $DA = c$, & $CE = x$; erit in terminis algebraicis, ut a ad x, ita b ad c: proindeque erit $x = \frac{ac}{b}$.

Et quoniam angulus CBE æqualis eſt angulo ABD, appoſito (vel à blato) communi DBE, erit angulus CBD æqualis angulo ABE. Unde, quia angulus BAC æqualis eſt angulo BDC, æquiangula erunt triangula AEB, DBC; eritque adeo, ut AB ad AE, ita BD ad DC. Quare, poſitis $AB = d$, $DC = f$, & $AE = y$; erit rurſus in terminis algebraicis, ut d ad y, ita b ad f: proindeque erit $y = \frac{df}{b}$.

Ponatur nunc diagonalis tota $AC = z$. Et quoniam ſegmenta AE, EC ſimul ſumpta

pta conficiunt ipſam AC; erit $z = x + y$. Unde, ſi in hac æquatione loco incognitarum x, & y ponantur ipſarum valores, habebitur loco ejus hæc alia $z = \frac{ac + df}{b}$, quæ dabit valorem quæſitæ diagonalis AC.

Jam ſi in hac poſtrema æquatione, ad quam reducitur problema propoſitum, multiplicentur termini omnes per b, habebitur hæc alia $bz = ac + df$. Unde, quia bz eſt rectangulum ſub diagonalibus, & ac, df ſunt rectangula ex lateribus oppoſitis; deducetur exinde hoc theorema, quod rectangulum ſub diagonalibus adæquet ſummam illorum, quæ fiunt ex lateribus oppoſitis.

Hujuſmodi theorema protulit primus omnium Ptolomeus. Et quoniam, quum agitur de figuris inſcriptis in circulo, non rarò illud ſubveniet; non abs re erit, ejuſdem theorematis demonſtrationem ſyntheticam, Euclideo more compoſitam, afferre; eoque magis, quod ex iiſdem illis, quæ pro reſolutione propoſiti problematis oſtenſa ſunt, ſua ſponte deducatur.

Nimirum, quia propter ſimilitudinem trangulorum BEC, BAD, BC eſt ad CE, ut

ut BD ad DA; erit rectangulum ex BC in DA æquale rectangulo ex BD in CE. Et ſimiliter, quia propter triangula ſimilia AEB, DBC, AB eſt ad AE, ut BD ad DC; erit rectangulum ex AB in DC æquale rectangulo ex BD in AE. Unde rectangulum ex BC in DA unà cum rectangulo ex AB in DC æquale erit rectangulo ex BD in CE unà cum rectangulo ex BD in AE. Sed duo iſta rectangula æqualia ſunt ei, quod fit ex BD in AC. Itaque rectangulum ex AB in DC unà cum rectangulo ex BC in DA æquale erit rectangulo ex BD in AC.

IV. Ex dato puncto D ducere rectam DBC, quæ cum aliis duabus AB, AC, poſitione datis, triangulum conſtituat ABC datæ magnitudinis. FIG. 12.

Ponatur jam factum, & ducatur per punctum D recta DE parallela ipſi AB. Ergo, quia datur punctum D, & datur quoque poſitione recta AB, dabitur etiam AF diſtantia parallelarum AB, DE. Unde, quia propter lineas poſitione datas AB, AC datur angulus BAC, ſive DEC; dabuntur in triangulo AEF anguli omnes; & conſeqnenter, quum detur latus unum AF, dabitur quoque per Trigonometriā hypothenuſa AE. Denique, quia datur

 pun-

punctum D, & datur quoque positione recta AC, dabitur etiam perpendiculum DG, quod metitur distantiam puncti D à rectâ AC.

Itaque demittatur perpendicularis BH, & ponantur AE $= a$, DG $= c$, AC $= x$, & BH $= y$. Erit ergo tota CE $= a + x$. Et quoniam, propter similitudinem triangulorum CBA, CDE, AC est ad CE, ut AB ad DE; itemque, propter triangula similia ABH, EDG, AB est ad DE, ut BH ad DG; erit ex æquali, ut AC ad CE, ita BH ad DG. Unde, quum sit in terminis algebraicis, ut x ad $a + x$, ita y ad c, habebitur per notissimam quantitatum proportionalium proprietatem æquatio $ay + xy = cx$.

Et quoniam, si basis AC multiplicetur per perpendiculum BH, producitur duplum areæ trianguli ABC: proinde si area istius trianguli, velut data, vocetur bc, habebitur hæc alia æquatio $xy = 2bc$. Unde designatis terminis algebraicis singulis conditionibus, in problemate appositis, reducetur problema ipsum ad duas istas æquationes $ay + xy = cx$, & $xy = 2bc$, ex quibus deducenda est tertia, quæ singulas problematis conditiones includens, nonnisi unicam incognitam comprehendat.

Ad

Ad hanc autem commodè deducendam, multiplicentur prioris æquationis termini omnes per x, & habebitur loco ejus hæc alia $axy + x^2y = cx^2$. Jam verò in secunda æquatione habetur $xy = 2bc$. Quocirca si in illa æquatione ponatur $2bc$, ubicumque reperitur xy, fiet tandem $2abc + 2bcx = cx^2$, sive $2ab + 2bx = x^2$, quæ resoluta juxta regulas artis dabit valorem quantitatis incognitæ x.

Quod si locus puncti dati fuerit in recta AB, positione data, veluti in B, tunc longè simplicior erit æquatio, ad quam problema reducitur. Etenim, quum hoc casu detur perpendiculum BH, siquidem ponatur BH $= c$, & AC $= x$, fiet æquatio quæsita $cx = 2bc$, sive etiam $x = 2b$. Quæ quidem æquatio colligi quoque potest ex illa ipsa superiùs inventa $2ab + 2bx = x^2$. Nam, quum perpendiculum DG coincidit cum perpendiculo BH, cadet etiam recta DE super recta AB: proindeque quia evanescit recta AE $= a$, satis erit in illa æquatione delere terminum $2ab$: quo facto, relinquetur $2bx = x^2$, hoc est $2b = x$.

V. Dato quadrato ABCD, producere latus AB in directum versus E, ita ut junctâ DE, fiat intercepta portio EF da- FIG. 13.

 tæ

tæ magnitudinis.

Ponatur jam factum, & sit AB, sive AD $= a$, EF $= c$, BE $= x$, & BF $= y$. Erit ergo tota AE $= a + x$. Et quoniam similia sunt triangula ADE, BFE, erit ut AD ad BF, ita AE ad BE. Unde quum sit in terminis algebraicis, ut a ad y, ita $a + x$ ad x; habebitur per notissimam quantitatum proportionalium proprietatem æquatio $ax = ay + xy$.

Et quoniam triangulum EBF rectum habet angulum in B, erit quadratum hypothenusæ EF æquale quadratis crurum BE, BF. Unde, quia per ea, quæ superiùs posita sunt, quadratum ex EF est c^2, quadratum ex BE est x^2, & quadratum ex BF est y^2, institutâ æquatione, habebitur $c^2 = x^2 + y^2$: & propterea propositum problema reducetur ad duas istas æquationes $ax = ay + xy$, & $c^2 = x^2 + y^2$.

Ut autem ex duabus istis æquationibus tertiam eruamus, quæ includens omnes problematis conditiones, unicam incognitam comprehendat, elevetur prioris æquationis $ax = ay + xy$ pars utraque ad quadratum, sive secundam potestatem, & fiet $a^2x^2 = a^2y^2 + 2axy^2 + x^2y^2$. Unde quia in secunda æquatione habetur c^2

$c^2 = x^2 + y^2$, & consequenter $c^2 - x^2 = y^2$, si ponatur in illa $c^2 - x^2$, ubicumque occurrit y^2; habebitur hæc alia æquatio $a^2x^2 = a^2c^2 - a^2x^2 + 2ac^2x - 2ax^3 + c^2x^2 - x^4$; quæ ordinata, per legitimam reductionem, fiet $x^4 + 2ax^3 + 2a^2x^2 - c^2x^2 - 2ac^2x = a^2c^2$.

Potest etiam problema resolvi, quærendo valorem lineæ DE: nimirum positis adhuc AB, sive AD $= a$; & EF $= c$, ponatur DE $= x$. Et quoniam DE est ad EF; ut AD ad BF, si fiat; ut x ad c, ita a ad quartam; invenietur BF $= \frac{ac}{x}$. Et similiter, quoniam DF est ad EF, ut AB ad BE, si fiat ut $x - c$ ad c, ita a ad quartam, invenietur BE $= \frac{ac}{x-c}$. Unde, quia triangulũ EBF rectũ habet angulũ in B, adeoque quadratũ hypothenusæ EF est æquale quadratis crurũ BE, BF; habebitur æquatio $c^2 = \frac{a^2c^2}{x^2} + \frac{a^2c^2}{x^2 - 2cx + c^2}$, quæ legitimè reducta, ac ordinata evadet $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2cx = a^2c^2$.

 Præ-

Præstat autem in resolutione problematis quærere potius valorem lineæ DE, quàm BE. Nam quærendo valorem lineæ BE obtinetur æquatio, ex qua non ita facile ille valor eruitur. Sed quærendo valorem lineæ DE incidimus in æquationem, ex qua nullo negotio quæsitus valor infertur. Est enim æquatio, continens valorem ipsius DE, $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2cx = a^2c^2$, quæ talis quidem deprehenditur, ut si ad ejus utramque partem addatur a^4, fiet pars prior quadratum perfectum: adeoque ponendo $c^2 + a^2 = b^2$, & extrahendo hinc inde quadratam radicem, fiet $x^2 - cx - a^2 = ab$, sive $x^2 - cx = a^2 + ab$, quæ rursus si resolvatur per regulam superiùs traditam, habebitur valor incognitæ x.

Sed adhuc simplicior futura erit resolutio æquationis, ad quam problema reducitur, si sectâ EF bifariam in puncto G, quæratur valor lineæ DG. Nam positis AB, sive $AD = a$, & EG, sive $GF = b$, si ponatur $DG = x$, prodibit æquatio $x^4 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 2a^2b^2$, quæ evadet $x^4 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 + b^4 + a^4 + 2a^2b^2 = 4a^2b^2 + a^4$ si utrique ejus parti addatur $a^4 + 2a^2b^2$. Quare ponendo $4b^2 + a^2 = c^2$, & extrahendo utrinque quadratam radicem, fiet $x^2 - a^2 - b^2 = ac$, sive $x^2 = a^2 + b^2 + ac$. Unde extractâ rursus ex utraque parte alterius hujus æquationis quadratâ radice, obtinebitur tandem valor incognitæ $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ac}$.

Cæterùm in resolutione propositi problematis, sive quæratur valor lineæ BE, aut AE, sive valor lineæ DE, aut DG; semper quidem talis prima facie prodibit æquatio, ut in ea maxima incognitæ potestas ad quatuor dimensiones ascendat: ejusdemque formæ erit etiam æquatio, si quæratur valor lineæ BF, aut CF, quarum utraque problema quoque determinat. Interim poterit idem problema per tales quoque lineas determinari, ut æquationes, valores illarum linearum continentes, statim duarum dimensionum oriantur. Quod ut Tyronibus nostris fiat palam, illud hìc ostendere non gravabimur, concipiendo etiam problema paulò aliter in hunc modum.

VI. Angulum rectum EBF subtendere rectâ datâ EF, quæ transeat per datum punctum D, æquidistans à lineis, rectum angulum comprehendentibus.

Ponatur jam factum, & sectâ EF bifariam in puncto G, jungantur rectæ BG, LB, BD, Quia ergo angulus EBF rectus est, semicirculus descriptus super recta EF transibit per punctum B; proindeque tres rectæ lineæ BG, EG, FG æquales erunt inter se. Unde, quia punctum G est in circumferentiâ circuli, qui describitur centro B, & intervallo semissis ipsius EF; si super BD demittatur perpendicularis GH, quæri potest in resolutione problematis valor rectæ DH, quippe quæ determinat problema, si descripto circulo illo, erigatur ex puncto H recta ipsi DH perpendicularis, quæ circumferentiam illius circuli alicubi secet.

Jam ad inveniendum valorem rectæ DH, considero conditionem alteram, appositam in problemate; nimirum quod punctũ D æquedistet à rectis AE, BC, comprehendentibus angulum rectum EBF. Hinc enim sequitur, angulum ABD semirectum esse, atque adeo angulum HBI æ-rectum esse, atque adeo angulum HBI æqualem esse angulo BIH; sive EIG. Unde, quia angulus EBG æqualis est angulo BEG, erit totus angulus GBH æqualis duobus angulis EIG, BEG. Sed duobus istis angulis velut interioribus, & oppositis æqualis est angulus exterior DGH. Quare erit angulus GBH æqualis angulo DGH, & consequenter triangula duo re-

ctangula DHG, GHB æquiangula erunt.

Et quoniam triangula æquiangula latera habent circum æquales angulos proportionalia; erit, ut DH ad GH, ita GH ad BH. Unde GH quadratum æquale erit rectangulo DHB: ac proinde apposito communi quadrato BH, erunt quadrata duo BH, GH æqualia rectangulo DHB unà cum BH quadrato. Sed duobus quadratis BH, GH, propter angulum rectum BHG, æquale est BG quadratum. Itaque erit BG quadratum æquale rectangulo DHB unà cum BH quadrato. Unde impositis nominibus tum lineis datis DB, BG, cùm lineæ quæsitæ DH, facili negotio invenietur æquatio, quæ ipsius DH valorem exhibeat.

Ponatur enim DB $= a$, BG $= b$, & DH $= x$. Erit ergo BH $= x - a$, rectangulum DHB $= x^2 - ax$, quadratum ex BH $= x^2 - 2ax + a^2$, & quadratum ex BG $= b^2$. Ostensum est autem, rectangulũ DHB unà cum BH quadrato æquale esse quadrato, quod fit ex BG. Itaque institutâ æqualitate inter valores algebricos harum quantitatum, fiet æquatio $2xx - 3ax + a^2 = b^2$, quæ legitimè reducta, ac resoluta dabit valorem quæsitæ lineæ DH.

Quæ-

Quæri etiã potest pro resolutione problematis valor rectæ BH: quo casu tametsi æquatio ad duas dimensiones assurgat, pauciores tamen terminos involvet. Positis namque adhuc $AB = a$, & $BG = b$, ponatur $BH = x$. Erit ergo tota $DH = x + a$, rectangulum $DHB = x^2 + ax$, quadratum ex $BH = x^2$, & quadratum ex $BG = b^2$. Quocirca, quia rectangulum BHD unà cum BH quadrato æquale est ei, quod super BG describitur, quadrato; institutâ rursus æqualitate inter valores algebricos harum quantitatum, fiet æquatio $ax + 2x^2 = b^2$.

Sed videamus, num æquatio duarum dimensionum pro resolutione propositi problematis inveniri possit; quærendo valores aliarum linearum, quibus idem problema determinetur. Hunc in finem super DE erigatur perpendicularis EK, quæ conveniat cum recta DC ipsi BE parallela in puncto K. Quia ergo angulus DEK rectus est, semicirculus descriptus super recta DK transibit per punctum E. Unde, quia idem punctum E reperitur quoque in recta AB, quæri potest in resolutione problematis valor rectæ DK, quippe quæ determinat problema, si descripto super ea semicirculo, protrahatur la-

tus AB, donec semicirculi hujus circumferentiam alicubi secet.

Ad inveniendum verò valorem rectæ DK, demittatur perpendicularis EL, quæ quum sit æqualis ipsi BC, sive DC, erit etiam EK æqualis DF: (sunt etenim æquiangula triangula ELK, DCF.) Et quoniam triangula DCF, DEK sunt etiam æquiangula, erit ut DK ad DE, ita DF ad DC: proindeq; rectangulũ CDK æquale erit rectangulo EDF; & consequenter si fiat CM æqualis DC, erit rectangulum MDK æquale duplo ejus, quod fit ex ED in DF; adeoque apposito communi quadrato ex EF, erit rectangulum MDK unà cum EF quadrato æquale duplo ejus, quod fit ex ED in DF, unà quoque cum EF quadrato.

Et quoniam duplum ejus, quod fit ex ED in DF, unà cum EF quadrato, est æquale duobus quadratis DE, DF, sive etiam DE, EK; erunt quadrata duo DE, EK æqualia rectangulo MDK unà cum EF quadrato. Sed duobus quadratis DE, EK, propter angulum rectum DEK, æquale est DK quadratum. Itaque, quia DK quadratum est æquale rectangulo MDK unà cum rectangulo MKD, erit rectangulum MDK unà cum EF quadrato æquale re-

rectangulo MDK unà cum rectangulo MKD : proindeque dempto communi rectangulo MDK, supererit EF quadratum æquale rectangulo MKD.

Atque hinc modò facilè erit, æquationem invenire, quæ exhibeat valorem rectæ DK. Ponantur etenim DC, sive CM $= a$, EF $= b$, & DK $= x$. Erit itaque MK $= x - 2a$, rectangulum MKD $= x^2 - 2ax$, & quadratum ex EF $= b^2$. Ostensum est autem, rectangulum MKD æquale esse ei, quod super EF describitur, quadrato. Quare institutâ æqualitate inter valores algebricos istarum quantitatum, invenietur æquatio $x^2 - 2ax = b^2$.

Quæri etiam potest pro resolutione problematis valor rectæ CK: quo casu invenietur quidem æquatio duarum dimensionum, sed secundo termino carens. Positis namque adhuc DC, sive CM $= a$, & EF $= b$, ponatur CK $= x$. Erit itaque DK $= x + a$, MK $= x - a$, rectangulum MKD $= x^2 - a^2$, & quadratum ex EF $= b^2$. Unde quia rectangulum MKD ostensum est æquale EF quadrato, institutâ rursus æqualitate inter valores algebricos harum quantitatum, prodibit æquatio $x^2 - a^2 = b^2$, hoc est $x^2 = a^2 + b^2$.

At-

Atque ex hac æquatione deducitur veritas lemmatis, pro resolutione propositi problematis à Pappo præmissi: nimirum, quod GK quadratum æquale sit quadratis, quæ fiunt ex CD, & EF: id, quod etiam syntheticè ostendi potest in hunc modum. Quoniam rectangulum DKM ostensum est æquale quadrato, quod fit ex EF; apposito communi CD quadrato, erit rectangulum DKM unà cum CD quadrato æquale duobus quadratis CD, EF. Jam verò, quum recta linea DM secta sit bifariam in puncto C, eique in directum sit adjecta alia MK; rectangulum DKM unà cum CD quadrato æquale est quadrato, quod fit ex CK. Itaque erit CK quadratum æquale quadratis, quæ fiunt ex CD, & EF.

III.

Problemata Physico-mathematica.

I. Leges motuum in occursu corporum inertium definire.

In definiendis legibus motuum, quæ in solidorum corporum congressu locum habent, duo corporum congredientium genera distinguunt Philosophi mechanici;

ci; eorum unum, quæ vim habent elasticam, per quam compressa ad pristinum suum statum illicò se restituunt, & hujusmodi corpora vocant elastica, sive actuosa; illorum alterum, quæ tali vi sunt destituta, eaq; corporũ inertium nomine designant. Et quoniam nõ parum conducit calculus speciosus in determinandis legibus motuum, quæ in utriusq; generis corporum congressu debent observari; idcirco primò leges motuum in occursu corporum inertium definiemus; tum eas, quæ locum habent in congressu corporum elasticorum, determinabimus.

Hunc in finem ex saniori Physica mutuanda sunt priùs principia, ex quibus leges istæ depẽdent: nimirum primò, quod quantitas motus cujusq; mobilis definiatur per productum, quod oritur, multiplicãdo velocitatẽ per pondus, sive quantitatem materiæ; secundò quod velocitas sit affectio motus, per quam mobile datum spatium in dato tempore percurrit, adeò ut mensura ejus sit relatio, quam habet spatium ad tempus; & tertiò, quod actio, & reactio sint semper æquales, & contrariæ, hoc est, quod in omni corporeâ actione quantum unum corpus agit in aliud, tantundem resistentiæ ab isto patiatur.

His

His positis principiis, quæ ulteriori explicatione non egent, colligitur primò, quantitatem motus, quæ producitur, capiendo summam motuum, factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutari ab actione corporum inter se. Nam quum actio, & reactio sint semper æquales, & contrariæ; æquales item mutationes efficient in motibus versus contrarias partes. Itaque, si motus fiant ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur ex motu corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem, quæ priùs. Sin corpora obviam eant, æqualis erit subductio de motu utriusque; adeoque differentia motuum, factorum ad contrarias partes manebit eadem.

Colligitur secundò, eandem motus quantitatem, quæ producitur, capiendo summam motuum, factorũ ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, æqualem esse ei, quæ oriretur, si utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur. Sint etenim in A, & B corpora duo, quorum pondera, sive quantitates materiæ vocentur m, & n, sitque C ipsorum commune centrum gravitatis. Moveantur primùm ad ean- FIG. 14.

 dem

dem partem, & pergant eodem tempore ad puncta D, & E, in qua positione sit F commune centrum gravitatis eorundem.

Itaque, si ponatur $AB = a$, $AD = b$, & $BE = c$, quia fiet tota $DE = a + c - b$, & commune centrum gravitatis duorum corporum dividit eorum distantiam in reciprocâ suorum ponderum ratione, invenietur recta $BC = \frac{am}{m+n}$, & recta $EF = \frac{am+cm-bm}{m+n}$: Unde, quum fiat recta tota $CE = \frac{am+cm+cn}{m+n}$, erit $CF = \frac{cn+bm}{m+n}$. Jam vero longitudines AD, CF, BE, velut descriptæ eodem tempore à punctis A, C, B, designant velocitates eorum punctorum. Itaque, si inventus valor ipsius CF multiplicetur per $m+n$, designabit productum $cn+bm$ quantitatem motus, quæ oriretur, si utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur: & propterea, quia idem productum est summa ex propriis motibus eorundem corporum; liquet utique propositum.

Quod si verò corpora sibi mutuò obviam

eant, tunc iisdem positis invenietur quidem $BC = \frac{am}{m+n}$, sed erit $EF = \frac{am-cm-bm}{m+n}$. FIG. 15. Unde, quia in hoc casu habetur $CE = \frac{am-cm-cn}{m+n}$, erit $CF = \frac{bm-cn}{m+n}$: & propterea multiplicato valore isto per $m+n$, productum erit $bm - cn$: ex quo patet, non quidem summam, sed differentiam motuum, factorum ad partes contrarias, æqualem esse motui, qui oriretur, si utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur.

Atque hinc colligitur tertiò, velocitatem communis centri gravitatis duorum corporum non mutari ab actione corporum inter se. Nam quantitas motus, quæ producitur, capiendo summam motuum, factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, per mutuam corporum actionem non mutatur. Sed huic motus quantitati æqualis est illa, quæ oriretur, si utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur. Itaque hæc alia motus quantitas eadem quoque semper perseverat: quod pro-

profectò fieri non poteſt, niſi velocitas communis centri gravitatis poſt actionem corporum maneat eadem, ac invariata.

Ex quibus modò facile erit, definire leges motuum in congreſſu corporum inertium. Nam corpora inertia, utpote vi elaſticâ deſtituta, poſt occurſum unà cum communi gravitatis centro junctim movebuntur. Quocirca corpora illa poſt occurſum non aliam habebunt velocitatem, quàm eandem illam, qua fertur eorum commune centrum gravitatis. Sed ex oſtenſis velocitas communis centri gravitatis duorum corporum non mutatur ab actione corporum inter ſe. Itaque corpora inertia poſt occursū movebuntur eadem velocitate, qua ferebatur ante occurſum ipſorum commune centrum gravitatis.

Hinc retentâ eâdem denominatione, paulò ante uſurpatâ, nimirum quod m, & n ſint pondera, ſive quantitates materiæ corporum congredientium, quodque b, & c ſint velocitates eorundem corporum; velocitas communis centri gravitatis erit $\frac{bm+cn}{m+n}$, quum corpora moventur ad eandem

dem partem; & $\frac{bm-cn}{m+n}$, quum corpora ſibi mutuò obviam eunt, & bm major eſt, quàm cn. Unde motus corporum poſt occurſum erunt $\frac{bm^2+cnm}{m+n}$, & $\frac{bmn+cn^2}{m+n}$ in primo caſu; & vero erunt $\frac{bm^2-cnm}{m+n}$, & $\frac{bmn-cn^2}{m+n}$ in caſu ſecundo. Sed ſi velocitas, deſignata à litterâ c, ſit æqualis zero, ſive nihilo, ita ut quieſcat corpus, ad quod illa refertur; tunc in omni caſu erunt $\frac{bm^2}{m+n}$, & $\frac{bmn}{m+n}$ motus corporum poſt occurſum.

Itaque ſi pondus primi corporis fuerit duarum librarum, & pondus ſecundi fuerit unius tantùm libræ, ſitque præterea velocitas primi graduum ſeptem, & velocitas ſecundi gradus unius, erit $m=2$, $n=1$, $b=7$, & $c=1$. Unde ſi corpora moveantur ad eandem partem, poſt occurſum primum quidem habebit decem gradus motus, ſecundum verò gradus

quin-

quinque: Quod si fuerit quidem $m = 2$, & $n = 1$, sed sit $b = 6$, & $c = 0$, ita ut secundũ corpus quiescat, primum verò versus ipsum moveatur sex gradibus velocitatis: tunc post occursum primum habebit octo gradus motus, secundum gradus quatuor. Et denique si manentibus semper $m = 2$, & $n = 1$, ponatur $b = 7$, & $c = 2$, quodque corpora sibi mutuò obviam eant; tunc similiter post occursum primum quidem habebit octo gradus motus, secundum verò quatuor.

II. Leges motuum in congressu corporum elasticorum determinare.

Definitis legibus motuum pro corporibus inertibus, sibi mutuò occurrentibus, determinandæ sunt modò leges motuum, quæ locum habent in occursu eorum corporum, quæ dicuntur elastica, sive actuosa. Et quoniam hujusmodi corpora illa sunt, quæ vim habent elasticam, qua agente, compressa ad pristinum suum statum illicò se restituunt; id primò videndum, quid corporibus addat hæc vis elastica, & quem pariat effectum in ipso corporum congressu.

Nimirum quemadmodum corpora inertia post occursum debent eadem velocitate junctim moveri, unà cum communi centro gravitatis, quia nulla datur causa, per quam à se mutuò debeant separari; ita præcipuus elasticitatis effectus est, ut corpora congredientia à se mutuò æqualiter, hoc est æqualibus viribus resiliant, & diversis velocitatibus aliquando ad eandem, aliquando ad partes contrarias moveantur.

Sit enim corpus aliquod elasticum quiescens, & immobile, cujus superficies vi alterius corporis occurrentis introrsum comprimatur. Et quoniam statim, ac cessat vis comprimens, sive motus corporis occurrentis; alterum vi sua insita elateris in pristinam figuram se restituet, & cum ea vi urgebit corpus primum, reflectetur hinc corpus occurrens eadem velocitate, quam priùs habebat. Sed si utrumque corpus sit elasticum, eo casu vis elastica in utroque corpore æqualiter aget, & æquales motus mutationes ad contrarias partes producet, propter eam naturæ legem, quod actio, & reactio sint semper æquales, & contrariæ.

Exinde autem, quod corpora elastica post occursum ratione elateris æqualibus viribus à se mutuò resiliãt, facile erit, leges congressuum pro corporibus elasticis unâ similiter regulâ definire. Si enim supponanamus, corpora esse perfectè elastica, hoc est, eadem vi in pristinam figuram se restituere, qua comprimuntur; jam utriusque velocitas post reflexionem eadem erit cum illa, qua accesserunt ad se mutuò. Unde, quum à se invicem debeant æqualibus viribus resilire, dividenda erit ipsis hæc velocitas in reciprocâ suorum ponderum ratione: proindeque definientur leges congressuum pro corporibus perfectè elasticis, si præter illam velocitatem, quâ junctim moverentur post occursum, si velut inertia considerentur, habeatur quoque ratio velocitatum, quibus ratione elasticitatis à se mutuò reflectuntur.

Nimirum primò, si corpora duo, quorum pondera sint m, & n, ita quidem moveantur ad eandē partem velocitatibus b, & c, ut primum sit corpus insequens, secũdum corpus fugiens; velocitas, quâ illa accedunt ad se mutuò, erit $b-c$, quæ siquidem iis dividatur in reciprocâ suorum ponderum ratione, erunt $\frac{bn-cn}{m+n}$; & $\frac{bm-cm}{m+n}$ velocitates, quibus à se mutuò resiliunt. Jam verò eadem corpora, si con-

siderentur velut inertia, debent junctim moveri versus plagam, ad quam fit motus, velocitate $\frac{bm+cn}{m+n}$. Itaque si ex hac velocitate subducatur velocitas, qua reflectitur corpus insequens, & eidem addatur velocitas, qua resilit corpus fugiens, erit $\frac{bm-bn+2cn}{m+n}$ velocitas corporis insequentis, & $\frac{2bm+cn-cm}{m+n}$ velocitas corporis fugientis. Unde post occursũ motus illius erit $\frac{bm^2-bnm+2cnm}{m+n}$, motus verò istius erit $\frac{2bmn+cnm-cm^2}{m+n}$.

Secundò, si eadem corpora ita sibi mutuò obviam eant, ut primum majorem habeat motus quantitatem, quàm secundum; tunc velocitas, qua accedunt ad se mutuò, erit $b+c$, quæ siquidem iis dividatur in reciprocâ suorum ponderum ratione, erunt $\frac{bn+cn}{m+n}$, & $\frac{bm+cm}{m+n}$ velocitates,

tes, quibus à se mutuò resiliunt. Et quoniam eadem corpora, si considerentur velut inertia, debent junctim moveri versùs plagam, ad quam reflectitur secundum corpus, velocitate $\frac{bm - cn}{m + n}$: proinde si ex hac velocitate subducatur velocitas, qua reflectitur corpus primum, & eidem addatur velocitas, qua resilit corpus alterum; erit $\frac{bm - bn - 2cn}{m + n}$ velocitas corporis primi, & $\frac{2bm + cm - cn}{m + n}$ velocitas corporis secundi: Unde motus illius erit $\frac{bm^2 - bmn - 2cmn}{m + n}$, motus verò istius erit $\frac{2bmn + cmn - cn^2}{m + n}$.

Et denique si velocitas secundi corporis c ponatur æqualis zero, sive nihilo, ita ut quiescat secundum corpus, & dumtaxat primū moveatur versùs ipsū; eo casu erit b velocitas, qua accedūt ad se mutuò: proindeque divisâ ipsis hac velocitate

te in reciprocâ suorum ponderum ratione, erunt $\frac{bn}{m + n}$, & $\frac{bm}{m + n}$ velocitates, quibus à se mutuò resiliunt. Sed, si eadem corpora considerentur velut inertia, debent junctim moveri versùs plagam, ad quam reflectitur corpus quiescens, velocitate $\frac{bm}{m + n}$. Itaque si ex hac velocitate subducatur velocitas, qua reflectitur corpus mobile, & eidem addatur velocitas, qua resilit corpus quiescens; erit $\frac{bm - bn}{m + n}$ velocitas primi, & $\frac{2bm}{m + n}$ velocitas secundi: unde etiam motus istius erit $\frac{2bm^2}{m + n}$, motus verò illius erit $\frac{bmn - bn^2}{m + n}$.

Has leges generales exemplis illustrare, superfluum existimamus. Tantùm notabimus, in omnibus casibus secundum corpus post occursum moveri semper versùs eam plagam, ad quam fieret motus ejus, si utique velut iners consideretur; sed non item corpus primum, quippe quod

quod modò versùs illam, modò versùs partem contrariam moveri potest, quin etiam interdum manere potest quiescens, ac immotum. Si enim velocitas, qua per vim elasticam reflectitur, minor sit velocitate, qua movetur ratione inertiæ, non mutabitur ejus directio, sed perget adhuc moveri versùs eandem plagam; quod si verò fuerit major, mutabitur directio ejus, & tendet ab partem contrariam; ac deniq; si eidem fuerit æqualis, tunc ad neutram partem tendet, sed manebit quiescens, ac immotum. Patet autem, quod sicuti hoc postremum contingit, quum motus ejus evanescit; ita contingat primum, quum motus ejus est positivus; & accidat secundum, ubi idem motus prodit negativus.

Notabimus quoque, quod quum pondera corporum congredientium fuerint æqualia, tunc leges suorum motuum fint multò quidem simpliciores. Nam in primo casu tendent ad eandem plagam, velocitatibus permutatis; in secundo casu fiet quidem velocitatum permutatio, sed movebuntur ad plagas contrarias; ac denique in tertio casu velocitatem corporis moti excipiet corpus quiescens, ipsumque corpus, quod antea movebatur, manebit immotum. Unde colligi potest, regulam à Cartesio traditam, quod si corpus unum impingat in alterum quiescens & æquale, ei omnem suam velocitatem communicet, ipsum verò in quiete permaneat, nonnisi in corporibus perfectè elasticis sibi locum vindicare.

III. Pilam positione datam subinde trudere, ut reflexa super lateribus ludi trudicularis, aliam similiter positione datam offendat.

Repræsentet rectangulū ABCD ludum trudicularem, in quo dentur positione pilæ duæ M, & N. Oportet, pilam M subinde trudere, ut reflexa super latere AB offendat pilam alteram N. FIG. 16.

Ponatur jam factum, sitque ME linea, per quam pila trudenda, & EN linea, per quam eadem reflexa impingit in pilam alteram N. Demittantur super latere AB perpendicula MO, NP. Et quoniam pilæ M, & N dantur positione, dabuntur ipsarum distantiæ à latere AB. Dabitur ergo tam perpendiculum MO, quàm perpendiculum NP; & consequenter, quum dentur puncta O, & P, dabitur etiam distantia eorum punctorum OP.

Ponatur itaque $MO = a$, $NP = b$, $OP = c$, & $OE = x$. Erit ergo $EP = c - x$.

$- x$. Et quoniam in corporum reflexione hanc legem natura observat, ut angulus reflexionis æqualis sit angulo incidentiæ: proinde angulus MEO æqualis erit angulo NEP. Unde, quum duo triangula MOE, MPE sint æquiangula, erit ut MO ad NP, ita OE ad PE, hoc est in terminis algebraicis, ut a ad b, ita x ad $c - x$: proindeque erit $bx = ac - ax$, sive etiam $ax + bx = ac$.

Et quoniam ex hac æquatione infertur hujusmodi analogia, quod $a + b$ sit ad a, ut c ad x; perspicuum est, punctum reflexionis E inveniri, si productà OM versus Q, usque donec fuerit MQ æqualis NP, jungatur PQ, cui per punctum M ducatur recta parallela ME. Nam quum OQ sit ad MO, ut OP ad OE, propter triangula æquiangula POQ, EOM; erit ut $a + b$ ad a, ita c ad x; & consequenter punctum quæsitum illud erit, in quo ducta recta linea ME occurrit lateri AB.

FIG. 17. Oporteat nunc pilam M subinde trudere, ut post binas reflexiones, unam super latere AB, alteram super latere BC, impingat demum in pilam alteram N.

Id, quod quæritur, ponatur similiter jam factum; sitque ME linea, per quam pila trudenda; EF linea, per quam refle-

cti-

ctitur à latere AB, & incidit in latus BC; & FN linea, per quam reflexa à latere BC impingit in pilam alteram N.

Demittantur super lateribus AB, BC perpendiculares MO, NP; & ponatur $MO = a$, $NP = b$, $BO = c$, $BP = d$, & $OE = x$. Erit itaque $BE = c - x$. Et quoniam angulus incidentiæ MEO æqualis est angulo reflexionis FEB, triangula duo MOE, FBE æquiangula erunt: proindeque erit, ut MO ad FB, ita OE ad BE. Unde si fiat, ut x ad $c - x$, ita a ad quartam, invenietur $FB = \frac{ac - ax}{x}$, atque adeo $FP = \frac{dx - ac + ax}{x}$.

Similiter, quia angulus reflexionis NFP adæquat angulum incidentiæ EFB, triangula duo EBF, NPF æquiangula erunt: quare erit, ut BE ad NP, ita FB ad FP. Unde, quum in terminis algebraicis $c - x$ sit ad b, ut $\frac{ac - ax}{x}$ ad $\frac{dx - ac + ax}{x}$, sive etiam, ut $ac - ax$ ad $dx - ac + ax$; erit permutando, ut $c - x$ ad $ac - ax$, ita b ad $dx - ac + ax$. Jam verò $c - x$ est ad $ac - ax$, ut 1 ad a. Quare erit, ex

æqua-

æquali, ut 1 ad a, ita b ad $dx - ac + ax$; & propterea erit $dx - ac + ax = ab$, hoc est $dx + ax = ab + ac$.

Quoniam autem ex hac æquatione infertur hujusmodi analogia, quod $a + d$ sit ad $c + b$, ut a ad x; liquet primum reflexionis punctum E inveniri, si productis lineis OM, OB versus Q, & R usque donec fuerit MQ æqualis BP, & BR æqualis NP, jungatur QR, cui per punctum M ducatur recta parallela ME. Nam, quum propter triangula æquiangula QOR, MOE, OQ sit ad OR, ut MO ad OE, erit ut $a + d$ ad $c + b$ ita a ad x: & propterea punctum quæsitum illud erit, in quo ducta recta linea ME occurrit lateri AB.

FIG. 18. Denique pilam M subinde oporteat trudere, ut post ternas reflexiones, unam super latere AB, alteram super latere BC, tertiam super latere CD, impingat tandem in pilam alteram N.

Ponatur quoque jam factum id, quod quæritur; sitque ME linea, per quam pila trudenda; EF linea, per quam reflectitur à latere AB, & incidit in latus BC; FG linea, per quam reflectilur à latere BC, & incidit in latus CD; ac denique GN linea, per quam reflexa à latere CD impingit in pilam alteram N.

De-

Demittantur super lateribus AB, CD perpendiculares MO, NP; & ponantur $MO = a$, $NP = b$, $BO = c$, $BC = d$, $CP = f$, & $OE = x$. Erit itaque $BE = c - x$. Et quoniam angulus reflexionis FEB adæquat angulum incidentiæ MEO, triangula duo FBE, MOE æquiangula erunt: quare erit, ut FB ad MO, ita BE ad OE. Unde si fiat, ut x ad $c - x$, ita a ad quartam, invenietur $FB = \frac{ac - ax}{x}$, atque adeo $FC = \frac{dx - ac + ax}{x}$.

Eadem ratione, quia angulus reflexionis GFC æqualis est angulo incidentiæ EFB, triangula duo EBF, GCF æquiangula erunt: proindeque erit, ut FB ad FG, ita BE ad CG. Unde si fiat, ut $\frac{ac - ax}{x}$ ad $\frac{dx - ac + ax}{x}$, sive etiam, ut $ac - ax$ ad $dx - ac + ax$, hoc est, ut $a\overline{c - x}$ ad $dx - ac + ax$, ita $c - x$ ad quartam; invenietur $CG = \frac{dx - ac + ax}{a}$; atque

 adeo

adeo $GP = \frac{af - dx + ac - ax}{a}$.

Et quoniam angulus reflexionis NGP æqualis est angulo incidentiæ FGC, triangula duo FCG, NPG similiter æquiangula erunt: proindeque erit, ut FC ad NP, ita CG ad GP. Unde, quum in terminis analyticis $\frac{dx - ac + ax}{x}$ sit ad b, sive etiam $dx - ac + ax$ sit ad bx, ut $\frac{dx - ac + ax}{a}$ ad $\frac{af - dx + ac - ax}{a}$, hoc est, ut $dx - ac + ax$ ad $af - dx + ac - ax$; erit $bx = af - dx + ac - ax$, & consequenter $bx + ax + dx = af + ac$.

Ex hac autem æquatione hujusmodi infertur analogia, quod $a + b + d$ sit ad $c + f$, ut a ad x. Unde primum reflexionis punctum E invenietur, si productis lineis OM, OB versus Q, & R, usque donec fuerit MQ æqualis ipsis BC, NP simul sumptis, & BR æqualis ipsi CP, jungantur puncta Q, & R per rectam QR, cui agatur per punctum M recta parallela ME. Quum enim æquiangula sint triangula QOR, MOE; erit, ut QO ad OR

OR ita MO ad OE, hoc est, ut $a + b + d$ ad $c + f$, ita a ad x: & proinde punctum quæsitum illud erit, quod ducta recta linea ME designat in latere AB.

IV. Globum datâ velocitate ita quidem projicere, ut in suo descensu obliquo pergat ad datum locum.

Ad problematis hujus resolutionem præmittenda sunt priùs theoremata duo, quæ circa gravium descensum demonstravit primus omnium Galileus. Primum est, quod spatium à gravi, è quiete cadenti, dato tempore descriptum, dimidium sit ejus, quod velocitate ultimò acquisitâ, æquabiliter describeretur. Alterum, quod spatia, descripta à gravi, è quiete cadenti, si capiantur ab initio descensus, servent inter se eandem omnino rationem, ac quadrata temporum, quibus describuntur.

Esto itaque globus A, quem oporteat subinde projicere velocitate, quam acquirit in descensu per altitudinem BA, ut cadendo pertingat ad datum locum N. FIG. 19.

Ponatur jam factum, sitque AC linea projectionis, & AMN linea, quam describit globus, dum projectus pertingit ad datum locum N. Ergo si fiat AD æqualis BA, descendet globus vi gravitatis per AD eodem omnino tempore, quo descenderet per altitudinem BA. Sed completo parallelogrammo ADMC, debet globus tempore illo describere motu projectili rectam AC, ut per notissimam motuum compositionem reperiri possit in puncto M. Itaque per primum theorema BA, sive AD erit semissis ipsius AC.

Compleatur parallelogrammum aliud AONF, & jam eodem tempore, quo globus describit vi gravitatis rectam AO, idē motu projectili describet rectam AF. Unde, quia spatia AC, AF veluti descripta motu projectili, hoc est eadem semper velocitate, sunt, ut tempora descriptionum; & spatia AD, AO, veluti percursa vi gravitatis, sunt, ut quadrata eorundem temporum; erit ex æquali, ut AD ad AO, ita AC quadratum ad AF quadratum. Unde impositis nominibus tum notis, cùm incognitis quantitatibus, facile erit æquationem invenire, ad quam problema reducitur.

Nimirum demissâ super AO perpendiculari NQ, ponantur AD, sive BA $= a$, AQ $= b$, QN $= c$, & AO $= x$. Erit ergo AC $= 2a$, & OQ $= x - b$ (sive etiam $b - x$.) Et quoniam triangulum OQN rectum habet angulum in Q,

erit ON, sive AF quadratum æquale OQ, QN quadratis: Unde, quia OQ quadratum est $x^2 - 2bx + b^2$, & QN quadratum est c^2, erit AB quadratum $= x^2 - 2bx + b^2 + c^2$. Ostensum est autem, AD esse ad AO, ut AC quadratum ad AF quadratum. Quare erit in terminis algebraicis, ut a ad x, ita $4a^2$ ad $x^2 - 2bx + b^2 + c^2$; & propterea quæsita æquatio erit $x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = 4ax$, quæ legitimè reducta, ac resoluta, incognitæ x valorem exhibebit.

Sed notetur hoc loco velim, quod si fuerit $c^2 = 4ab$, hoc est QN quadratum æquale rectangulo quater contento sub BA, & AQ; tunc æquatio futura erit $x^2 - 2bx + b^2 + 4ab = 4ax$, cujus utrique parti si addatur $4a^2$, & transferatur ad partem alteram terminus $4ax$, habebitur loco ejus hæc altera $x^2 - 2bx + b^2 - 4ax + 4ab + 4a^2 = 4a^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis reducitur ad $x - b - 2a = 2a$, hoc est ad $x = b + 4a$. Unde patet, determinari lineam projectionis AC, si sumatur QO æqualis quadruplo ipsius BA. Sed quoniam quadrata radix ex $4a^2$ potest esse tam $2a$, quàm $-2a$, deducetur etiam exinde $x - b - 2a = -2a$, hoc ex $x = b$. Ex quo liquet, globum A pertingere quoque ad datum locum N, si secundum lineam horizontalem AE projiciatur.

Quod si locus datus fuerit in ipsâ lineâ horizontali AE, puta in E, tunc recta AQ fiet æqualis zero, sive nihilo, coincidentibus nimirum rectis AE, QN. Quocirca deletis in inventâ æquatione $x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = 4ax$ terminis omnibus, ubi b reperitur; erit $x^2 + c^2 = 4ax$ æquatio, quæ in hoc casu problemati satisfaciet. Quod quidem perspicuum est. Nam completo parallelogrammo AKEI, positisque BA, sive AD $= a$, AE $= c$, & AK, sive EI $= x$; erit quadratum ex AI $= x^2 + c^2$, & quadratum ex AC $= 4a^2$. Unde, quia AK est ad AD; ut AI quadratum ad AC quadratum, erit ut x ad a, ita $x^2 + c^2$ ad $4a^2$; & propterea erit $x^2 + c^2 = 4ax$.

Hinc verò liquet, quod si ex puncto I erigatur super AC perpendicularis IL, quæ conveniat cum AB in puncto L; tota AL sit quadrupla ipsius AB. Est enim $x^2 + c^2 = 4ax$. Itaque AI quadratum æquale erit rectangulo, quod fit ex EI in quadruplum rectæ AB. Sed propter triangulum rectangulum AIL, idem AI quadratum est æquale rectangulo, quod fit ex EI in AL. Quare erit AL quadrupla ipsius AB. Unde patet, quod, quum datum punctū est in linea horizontali AE, problema propositum ad hoc aliud purè geometricum revocari possit: nimirum in triangulo rectangulo AIL datâ hypothenusâ AL, & dato perpendiculo SI, invenire angulum LAI, qui determinat positionem lineæ AC.

Atque hoc artificio jam id omne determinari potest, quod ad motum spectat projectorum. In omni siquidem projectione quatuor considerari debent, nimirum velocitas, amplitudo, altitudo, & angulus projectionis. Ita si semita projecti sit AMN, designabit recta BA altitudinē, per quam grave corpus descendere debet, ut velocitatem acquirat, quæ in projectione requiritur; recta AE amplitudinem projectionis; recta GH, quæ bisecat ipsam AE, amplitudinem ejusdem projectionis; & CAE angulum, quem constituit cum Horizonte linea, per quam grave corpus projici debet. Unde patet, circa motum projectorum sex principaliora problemata institui posse.

Primum est, quum datis velocitate, & amplitudine projectionis, quæritur altitudo unà cum angulo. Secundum, quum da-

datis velocitate, & altitudine projectionis, quæruntur angulus, & amplitudo. Tertium quum datis velocitate, & angulo projectionis, quæruntur altitudo, & amplitudo. Quartum, quum datis amplitudine, & altitudine, quæritur velocitas unà cum angulo. Quintum, quum datis amplitudine, & angulo, quæruntur velocitas, ac altitudo. Et sextum denique, quum datis angulo, & altitudine, velocitatem, & amplitudinem oportet invenire.

Jam quemadmodū in triangulo rectangulo AIL hypothenusa AL est quadrupla rectæ lineæ AB, quæ determinat velocitatem projectionis; ita portio AS est quadrupla rectæ GH, quæ ejusdem projectionis altitudinem definit. Nam sicuti AE est dupla ipsius AG, ita erit EI dupla ipsius GR. Sed quum AI quadratum sit ad AR quadratum, ut EI ad HR, erit eadem EI quadrupla ipsius HR. Itaque bisecta erit GR in H: & propterea sicuti EI, sive AS est quadrupla portionis HR, ita quoque erit quadrupla alterius portionis GH.

Hinc quia in eodem triangulo rectangulo AIL designat perpendiculum IS amplitudinem, & ALI angulum projectionis; liquet sex illa problemata ad alia totidem purè geometrica posse revocari. Primum etenim erit, quum datis hypothenusâ AL, & perpendiculo IS, quæritur segmentum AS unà cum angulo ALI. Secundum, quum datis hypothenusâ AL, & segmento AS, quæritur perpendiculum IS unà cum angulo ALI. Tertium, quum datis hypothenusâ AL, & angulo ALI, quæritur perpendiculum IS unà cum segmento AS. Quartum, quum datis perpendiculo IS, & segmento AS, quæritur hypothenusa AL unà cum angulo ALI. Quintum, quum datis perpendiculo IS, & angulo ALI, quæritur hypothenusa AL cum segmento AS. Et sextum denique, quum datis segmento AS, & angulo ALI, quæritur hypothenusa AL cum perpendiculo IS.

Hæc problemata facili negotio resolvet quicumque vel leviter in trigonometricis est versatus. Cæterùm, quum amplitudo projectionis designetur per perpendiculum IS, patet veritas ejus, quod primus omnium prodidit Galileus, nimirum amplitudinem projectionis maximam esse, quum angulus est graduum quadraginta quinque. Sed non obscurè exinde colligi quoque potest, eandem futuram esse

esse projectionis amplitudinem, sive angulus fuerit acutus, sive obtusus, qui duos rectos cum acuto illo constituat.

V. Definire figuram vasis, ita ut fluidum erumpens per foramen, factum in fundo ejus, æqualibus temporibus æqualiter quoque deprimatur.

Hoc problema proposuit primus omnium Evangalista Torricellius; sed qui primus litterato Orbi solutionem ejus exhibuit, fuit Dominus Mariotte in suo de aquarum motibus tractatu. Pro ejus solutione præmittenda sunt priùs theoremata principaliora, circa motus fluidorum, per minora foramina erumpentium, ab Hydrostaticis demonstrata, cujusmodi sunt duo. Primum, quod quantitates fluidorum, per duo quælibet foramina eodem tempore æquabiliter erumpentium, sint ut velocitates, & foramina conjunctim. Alterum, quod velocitates, quibus fluida per foramina quævis erumpunt, sint in subduplicata ratione altitudinum fluidorum super iis foraminibus.

FIG. 20. Hisce suppositis, esto ADB curva, per cujus revolutioné circa axim AH, oritur vas quæsitum BAC. Sumantur in axe AH portiones duæ HI, IL æquales, & indefinitè parvæ. Itaque, si ducantur rectæ BC, DE,

DE, FG perpendiculares axi AH, quantitates fluidorum, inclusæ circulis, qui à rectis illis, velut diametris, in vasis genesi describuntur, erumpent per foramen A eodem tempore: proindeque, per theorema primum, quantitates illæ fluidorum erunt inter se, ut velocitates, quibus erumpunt. Jam verò, per theorema secundum, velocitates istæ sunt in subduplicata ratione altitudinum AH, AI. Quare, ex æquali, eædem illæ fluidorum quantitates erunt inter se, ut radices quadratæ altitudinum AH, AI.

Et quoniam quantitates illæ fluidorum sunt duo cylindri, æquales altitudines habentes; & ex Geometriæ Elementis notum est, cylindros, quorum æquales sunt altitudines, esse inter se, ut bases; hoc est, ut quadrata diametrorum, quæ ad bases illas referuntur: erunt duæ illæ fluidorum quantitates, ut quadrata rectarum BC, DE; sive etiam, ut quadrata rectarum BH, DI: proindeque, rursus ex æquali, quadrata rectarum BH, DI erunt inter se, ut radices quadratæ altitudinum AH, AI; & consequenter, elevando ad quadratum omnes terminos hujus analogiæ, erit, ut quadrato-quadratum rectæ BH ad quadrato-quadratum rectæ DI, ita al-

altitudo AH ad altitudinem AI.

Unde patet, curvam BDA, ex cujus revolutione circa rectam AH oritur vas quæsitum, talem esse debere, ut quadrato-quadrata rectarum, quæ ex singulis curvæ punctis perpendiculariter demittuntur ad AH, sint inter se, ut portiones, quas rectæ illæ abscindunt ex ipsa AH: proindeque eò res redit, ut qua ratione curva ista describi possit, ostendamus. Sed quoniam circa rectam AH infinitæ hujusmodi curvæ describi possunt; proinde, ut problema determinemus, aliam ei oportet conditionem adjungamus: nimirum, ut curva describenda transire debeat per datum punctum B.

Itaque si ADB sit curva quæsita, & completo rectangulo AB, sumatur in AK portio quævis AO, determinari debet punctũ D, in quo curvam secat recta linea OP, perpẽdiculariter erecta super AK. Hũc in finem ponatur BH, sive AK $= a$; AH, sive BK $= b$; AO, sive DI $= c$; & OD, sive AI $= x$. Quia igitur per curvæ naturam quadrato-quadratum rectæ BH est ad quadrato-quadratum rectæ DI, ut AH ad AI; erit in terminis algebraicis, ut a^4 ad c^4, ita b ad x: proindeque, quum productum ex mediis æquale sit producto ex extremis, erit $a^4x = c^4b$.

Hinc determinabitur punctum D, si inventâ rectâ lineâ, quæ sit quinta proportionalis in ordine duarum AK, AO, fiat ut illa habeat ad OD eandem rationem, quam habet AK ad AH. Nam, quum hujusmodi recta linea per ea, quæ superiùs posita sunt, sit $\frac{c^4}{a^3}$; erit, ut $\frac{c^4}{a^3}$ ad x, sive etiam, ut c^4 ad a^3x, ita a ad b; & propterea erit $a^4x = c^4b$, prorsus ut supra.

CAP. III.

De natura, & proprietatibus æquationum.

Postquam problema ad æquationem reductũ est, & æquatio illa per legitimam reductionem ad suam simpliciorem expressionem est revocata, forma oportet æquationis ejus consideretur. Si enim contingat, ut in æquatione illa incognita magnitudo ad unicam tantùm dimensionem ascendat; quia valor illius jam innotescit, problema quoq; jam erit resolutum: nec proinde ulteriùs progrediendum, nisi ejusdem problematis, quum fue-

fuerit geometricum, constructio desideretur. Ita si æquatio, ex aliquo problemate orta, quum fuerit ad simpliciores terminos revocata, hanc formam induerit $x = 3a - 2b$; problema jam est resolutum, quandoquidem valor incognitæ x non ampliùs ignoratur.

Quod si autem æquatio talis fuerit formæ, ut in ea incognita magnitudo non unam, sed plures habeat dimensiones; tunc rursus æquatio poterit esse vel pura, vel affecta. Vocatur pura, quum in ea unica tantùm incognitæ potestas occurrit, sive sit quadratum, sive cubus, sive quævis alia potestas superior, ut $x^2 = ab$, $x^3 = abc$, $x^4 = a^3b$, &c. Vocatur autem affecta, quum in illa duæ, aut plures incognitæ magnitudinis potestates occurrunt, ut $x^2 + ax = b^2$, $x^3 + ax^2 = abc$, $x^3 + ax^2 - c^2x = a^2b$, &c.

Quum æquatio, ad quam problema reducitur, est pura, problema rursus jam erit resolutum; quia extrahendo ex utraque parte æquationis radicem illius potestatis, ad quam ascendit incognita magnitudo, valor ejus jam obtinetur. Ita si fuerit $x^2 = ab$, extrahendo hinc inde radicem quadratam, fiet $x = \sqrt{ab}$. Et similiter si æquatio, nata ex aliquo proble-

mate, sit $x^3 = abc$, extractâ ex utraque parte æquationis radice cubicâ, habebitur $x = \sqrt[3]{abc}$. Atque ita quoque, si problema aliquod ad hanc æquationem reducatur $x^4 = a^3b$, extrahendo utrinque radicem quadrato-quadratam, erit $x = \sqrt[4]{a^3b}$.

Sed si æquatio, ad quam problema reductum est, fuerit affecta, tunc non ita facile erit, ex æquatione illâ valorem incognitæ magnitudinis inferre. Unde, ne hæreat Analysta, quum in resolutione problematum in hujusmodi æquationes inciderit; necesse est regulas tradere, quarum ope possit ex æquationibus affectis valores incognitarum eruere. Qua in re operæ pretium priùs est, æquationum omnium naturam generatim ostendere, earundemque proprietates principaliores perspicuè aperire.

I.

De gradibus, terminis, & formulis æquationum.

Æquationes dividuntur in gradus ratione maximæ potestatis, ad quam ascendit in iis quantitas incognita. Dicuntur etenim æquationes simplices, sive

sive primi gradus, in quibus incognita est linearis, hoc est ad primam potestatem ascendit. Dicuntur æquationes quadratæ, sive secundi gradus, quum in iis altior gradus, ad quem attollitur incognita, est quadratum, sive secunda potestas. Dicuntur æquationes cubicæ, sive tertii gradus, quum idem gradus est cubus, sive potestas tertia; atque ita deinceps.

Hac ratione æquatio ista $x = b + c$ vocatur simplex, sive primi gradus, quia in ea incognita x ad primam potestatem ascendit. Sed hæc æquatio $x^2 + ax = b^2$ vocatur quadrata, sive secundi gradus, quia altior gradus, ad quem in ea attollitur incognita x, est quadratum, sive secunda potestas. Atque ita quoque hæc altera æquatio $x^3 + ax^2 - abx = abc$ dicitur cubica, sive tertii gradus, quia altior gradus, ad quem in ipsa reperitur elevata incognita x, est cubus, sive potestas tertia.

Interim notetur hoc loco velim, quod æquatio aliqua tunc demum dicatur esse illius gradus, quem ostendit maximæ incognitæ potestas, quum ad gradum inferiorem deprimi non potest. Si enim contingat, quod ea per regulas inferiùs tradendas deprimi possit, tunc dicenda est illius gradus, ad quem utique deprimitur. Qua ratione æquatio $x^3 + ax^2 - abx = a^2b$ dicenda est est secundi gradus, quia scilicet per ea, quæ inferiùs dicenda sunt, deprimi potest ad hanc aliam $x^2 = ab$.

Quemadmodum autem æquationes dividuntur in gradus, ratione maximæ potestatis, ad quam incognita quantitas in iis attollitur; ita problemata dividuntur in certa genera, ratione æquationum, ad quas reducuntur. Hoc pacto vocatur problema primi generis, quod reducitur ad æquationem primi gradus; vocatur problema secundi generis, quod reducitur ad æquationem secundi gradus; atq; ita deinceps. Unde, sicuti æquatio ista $x^2 + ax = ab$ vocatur secundi gradus; ita problema, ex quo profecta est æquatio illa, secundi generis dicetur.

Atque hìc quoque notare oportet, quod sicuti æquationes dicuntur esse illius gradus, quē ostendit maxima incognitæ potestas, quum ad gradū inferiorē deprimi nō possunt; ita problemata dici debeant illius generis, quod indicat gradus æquationū, quæ in eorum problematū resolutione inveniuntur, quum propria sedes illarum æquationum in gradu illo subsistit. Unde sicuti æquatio, quum deprimi potest, dicitur esse illius gradus, ad quem utique deprimitur; ita problema, unde profluxit æquatio illa, ejus generis esse dicetur, quod eadem æquatio depressa demonstrat.

Quoniam autem æquationes nihil aliud sunt, quàm congeries quantitatum sibi mutuò æqualium, duæ in iis partes sunt distinguendæ; quarum una post legitimam reductionem terminos omnes continebit, in quibus reperitur quantitas incognita; altera omnes alios, qui ex solis cognitis coalescunt. Sic in ista æquatione $x^2 - ax = a^2 - b^2$ partem unam constituunt termini $x^2 - ax$, partem alteram termini $a^2 - b^2$. Et similiter in hac æquatione $x^3 - a^2x = abc$ pars una erit $x^3 - a^2x$, pars altera erit abc.

Sed præstat quandoque, omnes æquationis terminos ad unam partem transferre, ipsamque æquationem considerare, velut congeriem quantitatum, quæ simul zero, sive nihilo sint æquales: adeo, ut in una æquationis parte omnes ejus termini reperiantur, in parte verò altera existat dumtaxat zero, sive nihilum. Ita si fuerit $x^2 - ax = ab$, erit $x^2 - ax - ab = o$. Et similiter si habeatur $x^3 - a^2x = abc$, erit $x^3 - a^2x - abc = o$.

Hanc porro terminorum omnium ad unam

unam partem æquationis transpositionem præstat subinde quidem efficere, ut terminus ille, in quo existit maxima incognitæ potestas, reperiatur affectus signo $+$. Ita si fuerit æquatio $ax - x^2 = ab$, & fieri debeat in ea terminorum omnium ad unam partem transpositio; quia terminus, maximam incognitæ potestatem comprehendens, afficitur signo $-$, fiet transpositio ista in hunc modum $ab - ax + x^2 = o$.

Ad meliorem æquationis formam præstat quoque, omnes ejus terminos ordinare, secundùm dimensiones, quas in terminis illis habet incognita: ita nempe, ut primo loco ponatur terminus, comprehendens maximam incognitæ potestatem; tum gradatim omnes alii termini, in quibus incognita pauciores habet dimensiones; ac denique termini illi, qui ex solis quantitatibus cognitis coalescunt.

Hac ratione si fuerit æquatio $ax - x^2 = bx + a^2 - ab$, ea per transpositionem terminorum omnium ad unam partem, fiet primò $bx + a^2 - ab - ax + x^2 = o$, tum porro ordinata evadet $x^2 + bx - ax + a^2 - b^2 = o$. Et similiter si æquatio, ex resolutione alicujus problematis orta, fuerit $abx^2 + ax^3 - a^2x^2 + x^4 = cx^3 - abcx$,

$abcx - a^2bx + a^2c^2 - a^2b^2$, ordinabitur illa in hunc modum $x^4 + ax^3 - cx^3 + abx^2 - a^2x^2 + abcx + a^2bx - a^2c^2 + a^2b^2 = 0$.

Quin etiam in ordinandis æquationibus præstat, unum infra alium, ponere omnes illos terminos, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet; atque ita etiam scribere terminos illos omnes, qui ex solis cognitis coalescunt, & in quibus incognita nullas dimensiones habere reperitur. Qua ratione postrema æquatio $abx^2 + ax^3 - a^2x^2 + x^4 = cx^3 - abcx - a^2bx + a^2c^2 - a^2b^2$ ordinabitur etiam in hunc modum.

$$x^4 \begin{array}{l} + ax^3 + abx^2 + abcx - a^2c^2 \\ - cx^3 - a^2x^2 + a^2bx + a^2b^2 \end{array} = 0$$

Scribendi sunt autem in hunc modum termini omnes, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet, quia scilicet contrahi possunt, & tametsi plures, ad unum tantùm revocari. Si enim supponamus $a - c = p$, jam erit $ax^3 - cx^3 = px^3$. Atque ita quoque ponendo $ab - a^2 = q$, & $abc + a^2b = r$, erit $abx^2 - a^2x^2 = qx^2$, & $abcx + a^2bx = rx$. Unde demum si ponamus $a^2b^2 - a^2c^2 = s$, habebitur loco illius æquationis hæc alia longe simplicior $x^4 + px^3 + qx^2$

$+ qx^2 + rx + s = 0$, ubi tamen nulla signorum habenda est ratio.

Hinc in posterum omnes illos terminos æquationis, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet, velut unum reputabimus; & ea propter distinguemus terminos æquationis, attendendo ad dimensiones, quas in iis habet incognita. Ex quo colligere licet, unamquamque æquationem tot terminos habere posse, quot indicat gradus æquationis, auctus unitate unâ, & non plures: nimirum duos, si æquatio fuerit primi gradus; tres, si secundi; quatuor, si tertii; atq; ita deinceps.

Jam, distinguendo terminos æquationis in hunc modum, dicemus terminum primum, qui maximam incognitæ potestatem comprehendens, ipsius æquationis gradum ostendit; dicemus terminum secundum, in quo incognita dimensiones habet unâ pauciores; atque ita deinceps. Qua ratione vocabimus ultimum terminum æquationis, qui ex solis cognitis constans, nullam incognitæ dimensionem comprehendit. Sic in æquatione ista secundi gradus $x^2 - ax + bc = 0$ primus terminus est x^2, secundus $- ax$, & tertius, sive postremus est $+ bc$.

Sed nihil obstat, quominus aliquando

unus, vel plures ex terminis intermediis in æquatione deficiant. Ita, si oporteat inter a, & b invenire mediam proportionalem, quam voco x, habebitur æquatio secundi gradus $x^2 = ab$, sive $x^2 - ab = 0$, quæ secundo termino caret. Et similiter, si inter a, & b duas oporteat medias proportionales invenire, vocando x primam illarum, habebitur æquatio $x^3 = a^2b$, sive $x^3 - a^2b = 0$, quæ secundo, & tertio termino caret.

Terminos istos deficientes solent Algebristæ stellulis designare, ut scilicet eorum defectus statim intelligatur: unde æquationem $x^2 - ab = 0$ efferunt hac ratione $x^2 * - ab = 0$; & similiter æquationem $x^3 - a^2b = 0$ designant in hunc modum $x^3 * * - a^2b = 0$. Sed notetur hoc loco velim, quod sicuti primus terminus numquam ab æquatione abesse potest, quia is velut primus habetur, qui maximam continet incognitæ potestatem; ita neque etiam ultimus, hoc est, qui omnino notus est, deficere possit; quia si utique incognita in terminis omnibus reperiatur, potest ea per divisionem è singulis elidi, atque ita terminus haberi, qui ex solis cognitis coalescat.

Itaque in æquatione dumtaxat ex terminis intermediis unus, vel plures deficere possunt. Neque verò per defectum horum terminorum minuitur gradus æquationis, utpote qui ex dimensionibus, quas in primo termino habet incognita, debet æstimari. Interim ex defectu eorum terminorum negari non potest, quin æquatio sit longè simplicior. Nam valorem incognitæ x longè faciliùs percipi, quum habetur $x^2 * - ab = 0$; quam quum invenitur $x^2 - ax + ac = 0$, nemo non videt.

Sed quandoque defectu terminorum intermediorum licet etiam æquationem quodammodo ad gradum inferiorem deprimere. Ita, si fuerit æquatio quarti gradus $x^4 * + px^2 * - q = 0$; quæ secũdo, & quarto termino caret, poterit illa quodãmodo ad aliam secundi gradus deprimi. Nam ponendo $x^2 = y$, & scribendo in æquatione illa y pro x^2, & y^2 pro x^4, prodibit loco ejus hæc alia $y^2 + py - q = 0$, quam liquet esse secundi gradus.

Patet autem, hujusmodi artificio tunc demum æquationes deprimi posse, quum numeri dimensionum, quas in terminis æquationis habet incognita, per unum eundemque numerum dividi possunt. Quod equidem quum accidit, deprimetur æquatio, capiendo incognitam aliam, quæ adæquet eam potestatem incognitæ, in æquatione contentæ, quam maximus eorum numerorum divisor ostendit. Ita, si fuerit æquatio $x^{12} + px^8 - q = 0$, quia maximus divisor numerorum 12, & 8 est 4, fiat $x^4 = y$, & deprimetur æquatio ad hanc aliam $y^3 + py^2 - q = 0$.

Cæterùm considerando, velut unum, omnes illos terminos, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet, & distinguendo terminos æquationis, habitâ earundem dimensionum ratione; poterunt cujusque gradus æquationes ad formulas quasdam generales revocari: nimirum si scribatur p pro quantitate cognitâ secundi termini, q pro quantitate cognitâ termini tertii, atque ita deinceps. Qua ratione omnes secundi gradus æquationes, nullâ habitâ signorum, quibus termini afficiuntur, ratione, poterunt sub hac formulâ exhiberi $x^2 + px + q = 0$. Atque ita quoque æquationes omnes tertii gradus, non attendendo ad signa, quibus ipsarum termini affici possunt, sub hac generali formulâ poterunt comprehendi $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

De

II.

De homogeneitate, in terminis æquationum observandâ.

Cujuscumque sint gradus æquationes, quæ in resolutione problematū inveniuntur, illud in iis sedulò observabit Analysta, ut termini omnes sint homogenei, hoc est, ut singuli eundem dimensionum numerum habeant, quem prior terminus continet. Hæc terminorum homogeneitas in æquationibus numericis, ubi nempe quantitates cognitæ numeris exprimuntur, semper quidem potest considerari. Nam quilibet numerus fingi potest, veluti ortus ex multiplicatione aliorum quotcumque numerorum: proindeque in omni numero tot semper dimensiones, quot libuerit, distinguere licebit.

Ita, si fuerit æquatio numerica $x^3 - 2x^2 + 6x - 24 = 0$, quemadmodum in ea prior terminus x^3 tres continet dimensiones, ita & in omnibus aliis terminis tres quoque dimensiones poterunt distingui. Nam considerando numerum 2, veluti unius dimensionis, erit trium di-

dimenſionum ſecundus terminus $- 2x^2$. Et ſimiliter conſiderando numerum 6, veluti ortum ex multiplicatione numerorum 2, & 3; erit ille duarum dimenſionum, proindeque tertius terminus $6x$ tres dimenſiones habebit. Atque ita quoque ſi ultimum terminum 24 conſideremus, veluti genitum ex multiplicatione numerorum 2, 3, & 4; in eo tres item dimenſiones poterunt diſtingui.

Hæc eadem terminorum homogeneitas in æquationibus litteralibus, ubi nempe quantitates cognitæ alphabeti litteris exprimuntur, ſemper etiam obſervabitur, ſi nomina quantitatibus imponantur ſecundùm propriam ipſarum naturam, hoc eſt, ſi quantitates unius dimenſionis deſignentur unicâ litterâ; quantitates duarum dimenſionum deſignentur duabus litteris, per ſe mutuò multiplicatis, atque ita de aliis. Ita, ſi in triangulo iſoſceli quæratur perpendiculum demiſſum ſuper baſi ex datis areâ, & perimetro; invenietur hæc æquatio $x^3 - a^2x + 2abc = 0$, in qua omnes termini ſunt homogenei: ſiquidem ſemiſſis datæ perimetri, veluti unius dimenſionis, vocetur a; & area data, tanquam duarum dimenſionum, vocetur bc.

Quod

Quod ſi autem nomina quantitatibus imponantur nequaquam ſecundùm propriam earum naturam, tunc equidem æquationes, quæ pro reſolutione problematum inveniuntur, non omnes habebunt terminos homogeneos. Ita, ſi in triangulo rectangulo ex datis areâ, & hypothenuſâ quærantur crura; & vocetur a hypothenuſa data, b duplum datæ areæ, & x unum ex cruribus, prodibit hæc æquatio $x^4 - a^2x^2 + b^2 = 0$, in qua non omnes termini ſunt homogenei: quia nempe area data, veluti duarum dimenſionum, & conſequenter duplum ejus, non unicâ, ſed duabus litteris per ſe mutuò multiplicatis debet deſignari.

Sed nihil obſtat, quominus etiam hoc caſu terminos æquationis, velut homogeneos conſideremus: nimirum, ſi quemadmodum inter quantitates, numeris deſignatas, conſideratur una, ad quam omnes aliæ referuntur, quæque unitas dicitur; ita eandem unitatem conſideremus quoque inter quantitates, quæ litteris exprimuntur: adeo, ut ad eam omnes aliæ quantitates perinde ſe habeant, ac numeri omnes ad unitatem. Sic enim in æquationibus termini illi, qui pauciores, aut plures habent dimenſiones, quàm

quàm in primo termino continentur, opè unitatis fingi possunt tot dimensiones habere, quot ad servandam homogeneitatem requiruntur.

Ita, si fuerit æquatio $x^3 - bx + a^2b^2 = o$; quia in ea primus terminus x^3 tres continet dimensiones, ad servandam homogoneitatem, necesse est, ut alii termini tres itidem dimensiones contineant. Unde, quia terminus $-bx$ videtur esse duarum dimensionum, cogitari potest, terminum illum multiplicatum esse per unitatem, atque ita non duas, sed tres dimensiones habere. Pariterque, quia terminus $+a^2b^2$ videtur quatuor dimensiones comprehendere, fingi potest, terminum illum divisum esse per unitatem, atque ita non quatuor, sed tres dimensiones includere.

Non dissimiliter consideranda est etiam homogeneitas in terminis æquationum, quum sub quibusdam formulis generalibus exhibentur. Nam quotiescumque, exempli gratia, æquationes omnes tertii gradus, nullâ habitâ ratione signorum, quibus termini ipsarum affici possunt, comprehenduntur sub hac formulâ generali $x^3 + px^2 + qx + r = o$; proculdubio lex homogeneitatis nequaquam videtur observata. Sed nihilominus, considerando tertium terminum qx, veluti multiplicatum per unitatem, & terminum ultimum r, veluti ductum in quadratum unitatis; habebunt termini illi, perinde ac duo priores, tres dimensiones; atque ita omnes termini erunt inter se mutuò homogenei.

Atque hac ratione, non modò illud fieri potest, ut partes omnes unius, ejusdemque quantitatis æquè multis dimensionibus constent, verùm etiam hoc ampliùs potest obtineri, ut quantititates omnes, veluti lineæ omnino simplices concipi queant, licet plures dimensiones habere videantur. Quemadmodum enim, ut ex istâ quantitate $a^2b^2 - b$ extrahi possit radix cubica, cogitandum est, partem unam a^2b^2 divisam esse per unitatem, partem verò alteram b multiplicatam esse per quadratum unitatis; ita quoque si quantitas a^2 concipiatur divisa per unitatem, veluti simplex linea poterit haberi; & similiter quantitas a^3, si consideretur divisa per quadratum unitatis, nihil vetat, quominus pro simplici linea habeatur.

Et sanè invectâ in Geometriam unitate, licebit multiplicationem, divisiosionem, & radicum extractionem perinde lineis perficere, ac numeris fieri solet. Nimirum primò multiplicantur inter se mutuò numeri duo, quum tertius invenitur, qui sit ad unum ipsorum, ut est alter ad unitatem. Ergo ad eundem modem modum, si AB sit unitas, & oporteat multiplicare BD per BC, jungantur puncta A, & C per rectam AC, & ductâ DE ipsi AC parallela, erit BE productum hujus multiplicationis; quandoquidem propter triangula æquiangula BDE, BAC, BE est ad BD, ut BC ad BA.

FIG. 21.

Secundò dividitur numerus unus per alium numerum, quum tertius invenitur, qui sit ad dividendum, ut est unitas ad divisorem. Itaque assumptâ rursus AB pro unitate, si oporteat dividere BE per BD, jungantur puncta D, & E per rectam DE, & ductâ AC ipsi DE parallela, erit BC quotiens hujus divisionis. Nam, quum triangula BAC, BDE sint æquiangula; erit, ut BC ad BA, ita BE ad BD; atque adeò permutando erit, ut BC ad BE, ita BA ad BD.

Denique extrahitur ex aliquo numero radix quæcumque, quum inter ipsum, & unitatem tot mediæ proportionales inveniuntur, quot designat exponens radicis

cis extrahendæ, minutus unitate; hoc est una, si radix sit quadrata; duæ, si cubica; atque ita deinceps. Quare positâ semper AB, velut unitate, si oporteat radicem, exempli gratia, quadratam extrahere ex BC, ponantur in directum rectæ AB, BC, & descripto super AC semicirculo ADC, erit perpendicularis BD radix quæsita; quum, propter notissimam circuli proprietatem, AB sit ad BD, ut BD ad BC.

FIG. 22.

Non me latet, id Tyronibus nonnihil negotii facessere, utpote qui edocti ab Euclide, duas lineas per se mutuò multiplicatas rectangulum producere, non ita facile intelligunt, qua ratione ex earundem linearum multiplicatione possit alia linea simplex oriri; quum exinde illud ipsis sequi videretur, ut linea, & rectangulum à se mutuò differre non debeant. Sed sciant velim, ex multiplicatione duarum linearum nec lineam aliam simplicem, nec rectangulum oriri; verum dumtaxat productum illud designari posse, tum per rectangulum sub lineis illis contentum, cùm per lineam aliam, quæ sit ad unam illarum, ut est altera ad unitatem.

Quod ut clariùs intelligant, animadvertendum est priùs, in universâ Mathesi quan-

quantitates non quidem in se ipsis, sed prout inter se mutuò referuntur, considerari; quũ sicuti intima cujusq; rei substãtia penitus nos latet, ita quantitatis principium omnino nos fugiat. Hinc enim fit, ut quum quæritur productum, quod oritur ex multiplicatione duarum linearum, quarum unam voco a, alteram b, dumtaxat designari debeat relatio, quam productum illud habet ad aliud, genitum ex multiplicatione duarum quarumvis aliarum linearum, puta c, & d: nec de vera utriusque producti magnitudine sollicitos nos esse oportet; quum sicuti linearum, ita producti, ex earundem multiplicatione orti, vera magnitudo sciri non possit.

Itaque, quia productum ex primis ab est ad productum ex secundis cd in ratione compositâ ex a ad c, & ex b ad d; perspicuum est, unumquodque illorum productorm designari posse, tum per rectangulum, contentum sub lineis, ex quarum multiplicatione oritur; cùm per lineam aliam, quæ sit ad unam illarum, ut est altera ad unitatem. Nam primò, si fuerint rectangula duo, unum contentum sub lineis a, & b, alterum contentum sub lineis c, & d; habebunt rectangula illa

illa rationem compositam ex a ad c, & ex b ad d. Et secundò si fiat, ut unitas ad a, ita b ad m; & rursus, ut unitas ad c, ita d ad n: ratio, quam habet m ad n, componetur quoque ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d.

Horum primum patet ex Elementis, quum ostensum sit ab Euclide, parallelogramma æquiangula rationem habere, ex lateribus compositam. Sed & alterum ostendi potest in hunc modum. Ratio, quam habet m ad n, componitur ex rationibus, quæ sunt inter m, & b; inter b, & d; & inter d, & n. Itaque, quia m est ad b, ut a ad unitatem; & d est ad n, ut unitas ad c: eadem ratio, quam habet m ad n, componetur ex rationibus, quæ sunt inter a, & unitatem; inter b, & d; & inter unitatem, & c. Jam verò rationes, quæ sunt inter a, & unitatem; & inter unitatem, & c, componunt rationem, quæ est inter a, & c. Itaque ratio, quam habet m ad n, componetur ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d.

Atque hac ratione, aliud agentes, verum, quem unitas præstat in Geometriâ, usum aperuimus, nimirum rationes, quæ ex duabus, aut pluribus componuntur, ad simplices revocare: id quod etiam ostendi

 potest

potest hac ratione, quia si unitas illa vocetur b, faciendo ut b ad a, ita b ad m, & ut b ad c, ita d ad n; erit tam $ab = bm$, quàm $cd = bn$: quare erit, ut ab ad cd, ita bm ad bn. Sed ab est ad cd in ratione compositâ ex a ad c, & ex b ad d; itemque bm est ad bn, ut m ad n. Quare ratio, quam habet m ad n, componetur ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d.

Id autem consideranti liquidò patebit, quod tametsi unitatis artificium in Geometriâ non adhibuerint Veteres, ipsum tamen usum unitatis aliâ ratione, & quidem meo judicio præstantiori, fuerint consequuti. Si enim ratio composita ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d, more Veterum ad simplicem esset revocanda; assumptâ magnitudine quavis m, id quidem fieri deberet, ut a sit ad c, ut m ad k, & b sit ad d, ut k ad n; quum ratio, quam habet m ad n, velut composita ex rationibus, quæ sunt inter m, & k; & inter k, & n, componatur eo ipso ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d.

Sed notare licet hoc loco, quod sicuti in rationibus compositis ad simplices revocandis primam magnitudinem ad libitum Veteres assumebant, quam tamen deinde retinebant eandem, & invariatam; ita pro unitate, quæ illud idem præstat aliâ ratione, quælibet quantitas possit assumi, quam tamen assumptam mutare ampliùs non licet. Ubi etiam notandum, quod tametsi aliæ sint lineæ, quæ oriuntur ex multiplicationibus duarum linearum, quum assumitur quantitas una pro unitate, quàm quum assumitur quantitas altera; non hinc tamen dici possit, producta earum multiplicationum variari; quia rursus sciatur velim, lineas illas non veras productorũ magnitudines, sed tantũ rationes, quas habent inter se mutuò, designare.

Quod de unitate respectu multiplicationis dictum est, illud idem intelligi quoque debet respectu divisionis. Nam sicuti multiplicando a per b, & c per d, oriuntur producta duo, quæ rationem habent, compositam ex a ad c, & ex b ad d; ita dividendo a per b, & c per d, oriuntur duo quotientes, quorum ratio componitur ex rationibus, quæ sunt inter a, & c, & inter d, & b. Cæterùm, quia mirum alicui videri potest, quod superiùs dictum est, ex multiplicatione duarum linearum, nec lineam aliam simplicem, nec rectangulum oriri: proinde, ne in eo hæreat,

reat, animadvertat velim, quod si ex multiplicatione duarum linearum oriatur rectangulum, amplissimæ Geometriæ scientiæ jam fines esset angustissimi; quia etsi dici possit oriri solidum ex multiplicatione trium linearum, attamen, quum lineæ, quæ multiplicari debent inter se mutuò, sunt plures, quàm tres, dici nequit quid exinde oriatur; quandoquidem in rerum naturâ non est aliquid contentum pluribus, quàm tribus dimensionibus.

Id norunt etiam ex ipsis Veteribus Mathematicis nonnulli. Nam, ut ex Pappo discimus, quæstionem illam, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quisquam alius ex Veteribus resolvere penitus potuerat, quidam ad sex tantùm lineas extendebant, quia si plures essent, quàm sex, non audebant dicere, an data sit proportio cujuspiam contenti quatuor lineis ad id, quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus, quā tribus dimensionibus. Sed alii non veriti fuerunt, ad quemcumque numerum linearum quæstionem illam extendere, interpretando paulò aliter producta, quæ ex duarum, aut plurium linearum oriuntur multiplicatione: nimirum, velut quāntitates, quarum ratio ex duabus, aut pluribus rationibus componatur.

III.

De radicibus æquationum, & de earum multiplici specie.

Radicem æquationis vocamus valorem, quem in eâ habet quantitas incognita. Ita, si fuerit æquatio $x = a$, sive $x - a = 0$, radix æquationis erit quantitas a, utpote valor incognitæ x. Et similiter, si habeatur æquatio $x^2 = ab$, sive $x^2 - ab = 0$, erit $\sqrt{ab}$ radix ipsius, quia scilicet, si ex utraque parte hujus æquationis $x^2 = ab$ extrahatur quadrata radix, prodibit $x = \sqrt{ab}$.

Jam considerando æquationes, velut aggregata quantitatum, quæ omnes simul nihilo sint æquales, perspicuum est, radicem æquationis talem esse debere, ut si in eâ loco incognitæ substituatur, efficiat quantitates omnes evanescere. Unde hac ratione facile erit experiri, num quātitas aliqua sit radix æquationis, necne; quia id tantùm inquirendum, num substituendo illam loco incognitæ, æquationis termini omnes evanescant.

Quæ-

Quæratur, exempli gratia, num numerus 2 sit radix hujus æquationis numericæ $x^2 - 5x + 6 = 0$. Substituatur ipse numerus 2 loco incognitæ x, & ejus quadratum 4 loco x^2. Et quoniam hac factâ substitutione, æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruunt, quum $4 - 10 + 6$ idem sit, ac nihil; concludendum est in æquatione propsitâ valorem incognitæ x esse numerum 2, atque adeo radicem ipsius æquanis esse eundem numerum 2.

Eadem ratione invenietur, quantitatem a esse valorem incognitæ x in hac æquatione $x^2 - ax - bx + ab = 0$, atque adeo radicem ipsius æquationis; quia scilicet, si in eâ ponatur a loco incognitæ x, & a^2 loco x^2, termini omnes contrarietate signorum, quibus afficiuntur, evanescent, nec aliquid supererit. Sed ejusdem æquationis quantitas $2a$ nequaquam est radix, quia factâ substitutione, relinquitur $2a^2 - ab$, nec termini ejus sese mutuò destruunt.

Omnis autem æquatio, quum plures habet dimēsiones, plures itē radicē admittit. Sic in eâdem illâ æquatione numericâ $x^2 - 5x + 6 = 0$, si pro x scribatur numerus 3, & pro x^2 numerus 9, producetur $9 - 15 + 6$, quod idem est, ac zero, sive nihil. Unde, quia non modò numerus 2, verùm etiam numerus 3 reddit terminos illius æquationis conjunctim æquales zero, sive nihilo; consequens est, ut radix ejus æquationis sit tam numerus 2, quàm numerus 3.

Similiter æquationis hujus litteralis $x^2 - ax - bx + ab = 0$ radix, non modò est quantitas a, verùm etiam quantitas b; quia sicuti substituendo a loco incognitæ x, & a^2 loco x^2, producitur $a^2 - a^2 - ba + ab$, hoc est zero, sive nihil; ita quoque, si substituatur b loco incognitæ x, & b^2 loco x^2, producetur $b^2 - ab - b^2 + ab$, cujus partes contrarietate signorum se mutuò destruunt.

Atque ita quoq; æquationis hujus numericæ $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ radix erit quilibet numerorum 2, 3, & 4; quia, sive pro x scribatur numerus 2, sive numerus 3, sive numerus 4, producetur semper zero, sive nihil, & unusquisque eorum numerorum implebit conditionem incognitæ x, efficiendo, ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur zero, sive nihilo.

Interim, ne mirum alicui videatur, eam-eandem æquationem, quum ad plures dimensiones ascendit, posse plures item radices habere; sciendum est, unum idemque problema, tametsi determinatum, posse plures solutiones addmittere. Itaque, ut problemati, quum plurium solutionum est capax, possit per singulos casus satisfieri, invenietur in ejus resolutione æquatio talis, quæ tot radices admittet, quot modis problema solvi poterit.

Hoc pacto, si numerus quæratur, qui subductus à 5 det tale residuum, ut quod producitur ex multiplicatione ejus per eundem illum numerum, sit 6; vocando x numerum quæsitum, orietur æquatio $5x - x^2 = 6$, sive $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ sunt radices, una nempe 2, altera 3. Quod quidem exinde dependet, quia problema duobus modis solvi potest, ejusque conditiones adimplet, tam numerus 2, quàm numerus 3.

FIG. 25. Similiter si dato circulo ACB, quæratur punctum, in quo ejus circumferentia secatur à rectâ DC, quæ ducitur æquidistanter diametro AB ad datum intervallum; quia duo sunt puncta intersectionis, duo item responsa admittit problema: proindeque æquatio, intersectionem determinans, duas debet habere radices, quibus utraque intersectio determinetur: Et profectò si ponatur perpendicularis CE $= a$, diameter AB $= 2b$, & segmentum AE $= x$, invenietur æquatio $2bx - x^2 = a^2$, sive $x^2 - 2bx + a^2 = 0$, cujus pro duplici dimensione duæ item sunt radices.

Quippe sciendum, æquationem omnem tot radices, sive diversos valores habere posse, quot sunt dimensiones ejus, & non plures. Sic æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ duas habet radices 2, & 3; non autem plures: nam quilibet ex duobus illis numeris, scriptus in æquatione loco incognitæ x, efficit, ut termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruant, & præter illos nullus alius numerus potest inveniri, cujus substitutione hoc idem eveniat. Pariterque æquationis hujus $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ tres tantùm sunt radices, & non plures; quum dumtaxat numeri 2, 3, & 4 possint incognitæ x conditiones adimplere.

Radices autem æquationis duplices esse possunt, aliæ nempe positivæ, & aliæ negativæ. Sic æquationis hujus $x^2 + 3x - 10 = 0$, pro duplici dimensione, duæ quidem sunt radices, sed illarum una est po-

positiva, altera negativa. Nam ex numeris duobus, qui scripti loco incognitæ x efficiunt, æquationis terminos omnes evanescere, unus quidem est 2, alter -5: proindeque in illâ æquatione non modò 2, verùm etiam -5 esse potest valor incognitæ x.

Sic etiam in hac æquatione $x^3 - 19x + 30 = 0$, quæ pro triplici dimensione tres item radices admittit, duæ ex radicibus sunt positivæ, una verò negativa. Nam in eâ, sive scribatur 2, sive 3 loco incognitæ x, semper æquationis termini omnes contrarietate signorum evanescent. Verùm, quia hoc idem evenit quoque, si pro x ponatur -5; consequens est, ut pro valore incognitæ x assumi possit, non modò quilibet ex numeris positivis 2, & 3, verùm etiam numerus negativus -5.

Jam, quemadmodum numerus radicum, quas admittit æquatio, ostendit quot modis problema solvi potest; ita species, sive qualitas cujusque radicis indicat statum, in quo considranda est quantitas, ut per eam problemati possit satisfieri. Ita si quæratur quantum habeat in bonis, qui lucratus aureos 100 reperitur habere 60, fiet æquatio $x + 100 = 60$,

$= 60$, hoc est $x + 40 = 0$. Unde quum valor incognitæ x sit negativus, dicendum est, eum non modò nihil in bonis habere, sed ei deficere quadraginta, ut lucratus aureos 100 dici possit habere 60.

Similiter si dati spatii pedum duodecim quæratur quantum aliquis debeat percurrisse, ut possit reliquũ ejusdẽ spatii quatuor gradibus velocitatis eodem omninò tempore percurrere, quo alter percurreret totum spatium tribus gradibus velocitatis; invenietur æquatio $x + 16 = 12$, hoc est $x + 4 = 0$. Quocirca, quia valor incognitæ x est negativus, concludendum est, eum dati spatii non modò debere nihil percurrisse, verùm etiam, quod regredi debeat per quatuor pedes, quò in fine temporis possit ad datam metam pervenire.

Ex quibus patet, quod, quum in resolutione problematis invenitur æquatio, cujus radix est negativa, problema non sit rite conceptum, sed paulò aliter debeat enunciari. Qua ratione non quidem quæri debet, quantum habeat in bonis, sed quantum ei deficiat, qui lucratus 100, reperitur habere 60. Et similiter non quæri debet, quantum dati spatii debeat aliquis percurrisse, sed quantum regredi de-

debeat, quò possit quatuor gradibus velocitatis ad datum terminum pervenire eodem omnino tempore, quo alter tribus gradibus velocitatis ad eundem terminum pertingeret.

Eædem radices negativæ occurrunt etiam in æquationibus, quæ pro resolutione problematum geometricorum inveniuntur, & in hoc casu explicandæ sunt illæ per lineas, tendentes ad plagam oppositam ei, per quam diriguntur lineæ, radices positivas explicantes. Ita si recta
FIG. 24. linea AB producenda esset versus B, usque donec rectangulum ACB æquale fuerit AB quadrato; positis quidem AB $= a$, & BC $= x$, invenietur æquatio $ax + x^2 = a^2$, hoc est $x^2 + ax - a^2 = 0$, cujus duæ sunt radices, una nempe positiva, altera negativa: id quod indicat problema duas solutiones admittere, & rectam lineam AB protrahi posse non modò versus B, sed etiam versus plagam oppositã A.

Tam radices positivæ, quàm radices negativæ non semper sunt reales, sed quandoque possunt esse imaginariæ, scilicet quum eas ingreditur radix quadrati negativi. Ita æquationis hujus $x^2 - 6x + 10 = 0$, duæ quidem sunt radices, sed earum utraque est imaginaria. Nam ex nu-

numeris duobus, qui substituti in æquatione efficiunt omnes ejus terminos evanescere, unus est $3 + \sqrt{-1}$, alter est $3 - \sqrt{-1}$, quorum utrumque liquet imaginarium esse. Atque ita quoque æquationis hujus $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ tres sunt radices, sed ex iis una tantùm est realis, aliæ verò duæ sunt imaginariæ; quum numeri, qui in æquatione illâ incognitæ conditiones adimplent, sint 2, $\sqrt{-4}$, & $-\sqrt{-4}$.

Quemadmodum autem radices negativæ ostendunt nobis, problema non esse ritè cõceptum, sed debere paulò aliter enũciari; ita radices imaginariæ indicio nobis esse possunt, problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem aliquam involvere, atque adeo moderandum esse aliquo modo, quò capax fiat solutionis. Non raró enim contingit, ut id quod quæritur, etsi determinatum, nequeat inveniri iis conditionibus, quæ apponuntur in problemate. Unde, ne æquatio casus problematis impossibiles exhibeat possibiles, æquum est, ut radices, casus illos ostendentes, prodeant imaginariæ.

Id ut exemplo notissimum fiat, assumatur æquatio $x^2 - 2bx + a^2 = 0$ supe-

periùs inventa pro determinandis punctis, in quibus circulus ACB secatur à rectâ DC, quæ ducitur æquidistanter diametro AB ad datum intervallum. Jam ex duabus æquationis hujus radicibus una
FIG. 23.
est $b + \sqrt{b^2 - a^2}$, altera $b - \sqrt{b^2 - a^2}$; quum utraque harum quantitatum adimpleat conditiones incognitæ x. Sed perspicuum est, radices illas esse reales, quum a non major est, quàm b; esse verò imaginarias, quum vicissim a major supponitur, quàm b.

Itaque, quia in problemate, unde profecta est æquatio illa, duæ apponuntur conditiones; una, ut recta linea DC duci debeat æquidistanter diametro AB; altera, ut intervallum ejus ab eadem diametro debeat esse a: necesse est, ut una ex his conditionibus pugnet cum eo, quod quæritur, quotiescumque a est major, quàm b: nimirum, quia omnis recta linea, circulum secans, distat semper à cētro intervallo nō majori semidiametro; fieri nequit, ut recta DC circulum secet, quum a est major, quàm b, quia distantia ejus à centro major fiet semidiametro.

Quum ergo problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem involvat, quò fiat capax solutionis, oportet conditionem illam, quæ pugnat cum eo, quod quæritur, subinde temperare, ut evanescat contradictio, quæ antea solutioni problematis obstabat. Quod quidem perspicuum est, bifariam fieri posse, vel nempe minuendo datum intervallum, quousque non majus sit semidiametro circuli; vel, quod eodem recidit, sumendo datum intervallum ab aliâ rectâ lineâ, quàm à diametro.

Jam, quæ debeat esse hæc altera recta linea, à qua sumendum sit datum intervallum, quò problema sit semper capax solutionis, ostendit ipsa quantitas imaginaria $\sqrt{b^2 - a^2}$, quæ radicem ingreditur æquationis: nimirum ex centro circuli F erigatur super diametro AB perpendicularis FG, quæ quantitatem illam, ut realem, adæquet; & ductâ per punctum G rectâ lineâ HI ipsi AB parallela, erit HI recta linea quæsita. Nec ulli dubium esse potest, quin hoc casu recta linea DC circulum secet; nam quum fiat AG $= a$, distabit recta linea DC à centro intervallo, semper semidiametro AB minori.

Atque hinc modò patet veritas ejus, quod de quantitatibus imaginariis libro primo dictum est: nimirum, quod in Geo-

Geometriâ ficuti quantitates poſitivæ deſignantur per lineas tendentes ad plagam unam, & negativæ per lineas tendentes ad plagam oppoſitam; ita quantitates imaginariæ deſignari debeant per lineas, quæ ad plagas intermedias diriguntur. Nam in propoſito exemplo quantitas $\sqrt{b^2 - a^2}$, quæ ſumi debet ſuper diametro AB hinc inde à centro F, quum a eſt minor, quàm b; ſumenda eſt hinc inde ab eodem centro ſuper recta Gg, quæ diametrum ſecat ad rectos angulos, quum viciſſim a eſt major, quàm b.

IV.

De conſtitutione æquationum, quarum plures ſunt radices.

Æquationes, quarum plures ſunt dimenſiones, & conſequenter plures radices, conſtituuntur per mutuam multiplicationem æquationum ſimplicium, quæ radices illas continent. Ut ſi ſciendum ſit, quomodo conſtituatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ radices ſunt 2, & 3; cogitandum eſt, incognitam x ambiguè ſignificare numeros illos, & eſſe, tum $x = 2$, ſive $x - 2 = 0$, tum $x = 3$,

$x = 3$, ſive $x - 3 = 0$. Nam multiplicando deinde inter ſe mutuò duas iſtas æquationes $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$, prodibit æquatio propoſita $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Similiter, ſi quæratur, quæ ſit conſtitutio hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, in qua incognita x, tres habens dimenſiones, tres item radices admittit, quæ ſunt 2, 3, & 4; quia æquationes ſimplices, quæ illas continent radices, ſunt $x = 2$, $x = 3$, & $x = 4$, hoc eſt $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x - 4 = 0$; multiplico primum $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$; tum productum ex duabus hiſce æquationibus $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplico adhuc per $x - 4 = 0$, & habebitur tandem æquatio propoſita $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Nihilo ſecùs conſtituuntur æquationes, quarum radices ſunt negativæ. Ita æquationis hujus $x^2 + 9x + 20 = 0$, ubi incognita x eſt duarum dimenſionum, utraque radicum eſt negativa, quum una ſit -4, altera -5. Unde, ſi fiat $x = -4$, ſive $x + 4 = 0$, & $x = -5$, ſive $x + 5 = 0$, multiplicando inter ſe mutuò duas iſtas æquationes $x + 4 = 0$, & $x + 5 = 0$, prodibit æquatio propoſita x^2

$+ 9x + 20 = 0$.

Eadem ratione constituuntur etiam æquationes, quarum radices partim sunt positivæ, partim negativæ. Ut si ponatur $x = 2$, sive $x - 2 = 0$, & $x = -5$, sive $x + 5 = 0$, multiplicenturque inter se mutuò duæ istæ æquationes simplices $x - 2 = 0$, & $x + 5 = 0$, prodibit æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, ubi incognita x duas habens dimensiones, præter valorem positivum 2, habebit quoque valorem alterum negativum -5.

Sed eadem est generis æquationum, quarum plures sunt dimensiones, quotiescumque radices, sive valores incognitæ sunt incommensurabiles, ac radicales. Sic radices hujus æquationis $x^2 - 6x + 4 = 0$ sunt $3 + \sqrt{5}$, & $3 - \sqrt{5}$. Et profectò si multiplicentur inter se mutuò duæ istæ æquationes simplices $x - 3 - \sqrt{5} = 0$, & $x - 3 + \sqrt{5} = 0$, orietur ipsa æquatio proposita $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Interim, quum radices alicujus æquationis sunt incommensurabiles, ac radicales, & sedes incommensurabilitatis est in eodem illo gradu, ad quem in æquatione propositâ ascendit incognita, potest æquatio illa constitui per unicam tantùm illarum radicum, nimirum si, per regulam superiùs traditam, una ex æquationibus simplicibus, quæ continent radices illas, à radicalibus liberetur. Ita si assumatur æquatio $x - 3 - \sqrt{5} = 0$, & transferendo quantitatem radicalem ad alteram partem, attollatur utraque pars æquationis ad quadratum, fiet $x^2 - 6x + 9 = 5$, hoc est $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Ubi tamen notandum, id fieri nequaquam posse, quum sedes incommensurabilitatis non est in eodem illo gradu, ad quem in æquatione propositâ ascendit quantitas incognita. Ita æquationis hujus $x^3 - 6x^2 + 2x + 12 = 0$ radices sunt 2, $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$. Sed æquatio ista nequaquam constitui potest per æquationem simplicem $x - 2 - \sqrt{10} = 0$, vel per hanc aliam $x - 2 + \sqrt{10} = 0$, quia scilicet sedes incommensurabilitatis est quadratum, & incognita in æquatione ad tertiam dimensionem ascendit.

Sed, quæ sit sedes incommensurabilitatis, non tantùm à signis, quibus afficiuntur partes radicales, verùm etiam à numero, & constitutione ipsarum debet dijudicari. Ita una ex radicibus æquationis hujus $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, ubi incognita quatuor habet dimensiones, est $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Et quamquam radicales istæ afficiantur signo quadratæ radicis, adhuc tamen æquatio proposita constitui potest per hanc solam æquationem simplicem $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; nam ut ea liberetur à radicalibus, duæ ejus partes bis elevandæ sunt ad quadratum: ex quo fit, ut sedes incommensurabilitatis in eodem illo gradu reperiatur, ad quem in æquatione propositâ ascendit incognita.

Jam quum æquationes, quarum plures sunt radices, constituantur per multiplicationem æquationum simplicium, quæ radices illas continent; perspicuum est, æquationem omnem, quæ plures radices admittit, dividi semper posse per binomium, quod compositum sit ex quantitate incognitâ minus valore alicujus ex radicibus positivis, vel ex quantitate incognitâ plus valore alicujus ex radicibus negativis; quum id, quod multiplicatione componitur, rursus divisione resolvi posse, notissimum sit.

Ita æquationis hujus $x^2 + 3x - 10 = 0$ duæ quidem sunt radices, quarum una 2 est positiva, altera -5 est negativa. Itaque ad constituendam ipsam æquationem necesse est, multiplicare $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$. Unde sicuti id, quod producitur, multiplicando $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$, est æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$; ita dividendo ipsam æquationem $x^2 + 3x - 10 = 0$ per binomium $x - 2$, producetur $x + 5 = 0$; & dividendo eandem æquationem per hoc aliud binomium $x + 5$, orietur $x - 2 = 0$.

Hujus autem divisionis ope perspicuum est, dimensiones æquationis minui, ipsamque æquationem ad gradum inferiorem deprimi. Ita æquatio ista $x^3 - 19x + 30 = 0$, ubi incognita x tres habens dimensiones, tres item radices admittit, quæ sunt 2, 3, & -5, si dividatur per $x + 5$, hoc est per binomium constans incognitâ plus valore radicis negativæ, orietur hæc alia $x^2 - 5x + 6 = 0$, ubi incognita duas tantùm dimensiones habet. Et si rursus dividatur hæc altera per $x - 3$, hoc est per binomium, constans incognitâ minus valore unius ex radicibus positivis, remanebit æquatio simplex $x - 2 = 0$, quæ continet radicem alteram positivam.

Sed quemadmodum omnis æquatio dividi potest per binomium, compositum ex incognitâ minus valore unius ex radicibus positivis, vel ex incognitâ plus valore alicujus ex radicibus negativis.

Ita viciſſim ſi æquatio aliqua dividi poſſit per binomium, conſtans ex incognitâ plus, vel minus alterâ quantitate cognitâ, indicio nobis eſſe poteſt, quantitatem illam cognitam eſſe unam ex radicibus æquationis; poſitivam, ſiquidem conjugatur cum incognitâ ſigno —; negativam, ſi ad binomium conſtituendum ſigno † cum incognitâ conjuncta reperiatur.

Ut ſi fuerit æquatio $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$, quia dividendo eam per $x - 4$, vel per $x - 5$ diviſio fit exactè, quum in primo caſu oriatur hæc altera $x^2 - 2x - 15 = 0$, in ſecundo verò iſta $x^2 - 1x - 12 = 0$; concludo numeros 4, & 5 eſſe radices poſitivas propoſitæ æquationis. Et quia eadem æquatio dividi quoque poteſt per $x + 3$, quum oriatur in quotiente æquatio duarum dimenſionum $x^2 - 9x + 20 = 0$, erit ejuſdem æquationis radix negativa numerus 3.

Viciſſim autem, ſi æquatio aliqua dividi non poſſit per binomium, compoſitum ex quantitate incognitâ plus, vel minus certâ aliâ quadam quantitate cognitâ; argumento erit, quantitatem hanc non eſſe valorem alicujus ex ejus radicibus. Ita æquatio ſuperior $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$ dividi quidem poteſt per $x - 4$, per $x - 5$, & per $x + 3$, ſed nullo modo dividi poteſt per x plus, vel minus quocumque alio numero: id, quod oſtendit, æquationem ipſam non poſſe admittere alias radices, præter haſce tres 3, 4, & 5, quarum prior eſt negativa, aliæ verò duæ ſunt poſitivæ.

Atque hinc ad cognoſcendum, num aliqua quantitas ſit radix alicujus æquationis, nec ne, non modò illud nobis velut criterium eſſe poteſt, ſcilicet inquirere, num ſubſtitutâ quantitate illâ loco incognitæ in æquatione, ejus conditiones adimpleat, hoc eſt, efficiat æquationis terminos omnes evaneſcere; verùm etiam obtineri poteſt talis cognitio ope diviſionis, videlicet dividendo æquationem propoſitam per binomium, conſtans incognitâ plus, vel minus datâ illâ quantitate. Nam ſi diviſio fiat abſque ullo reſiduo, erit data illa quantitas una ex radicibus æquationis; ſecus verò, ſi diviſio exactè fieri nequeat.

Verùm enim verò, ne ullum hìc dubium Lectoribus maneat, demonſtratione oportet fulciamur, quod ſi utique æquatio aliqua dividi poſſit per binomiũ, compoſitum ex incognitâ plus, vel minus datâ aliquâ quantitate, quantitas ista sit una ex radicibus æquationis; positiva, quotiescumque conjungitur cum incognitâ signo —; & negativa, ubi cum incognitâ signo + conjuncta reperitur. Nam id ex ipsâ, qua constituuntur æquationes, ratione non ita est manifestum; quum quemadmodum una, eademque quantitas multipliciter componi queat: ita suspicari aliquis posset, unam eandemque summam æquationis multipliciter posse constitui.

Dabimus itaque hujus rei duplicem demonstrationem, quarum prima hæc erit. Assumatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, quæ quia dividi potest absque ullo residuo per $x - 3$. Dico fore $x - 3 = 0$, atque adeo $x = 3$. Inveniatur enim quotiens, qui oritur ex illâ divisione. Erit igitur ille $x - 2$. Itaque multiplicando $x - 2$ per $x - 3$, producitur quantitas $x^2 - 5x + 6$, quæ ex hypothesi nihilum adæquat. Quocirca duæ illæ quantitates tales esse debent, ut quod ex earum multiplicatione producitur, sit zero, sive nihilum: id quod fieri non potest, nisi fuerit tam $x - 3 = 0$, quàm $x - 2 = 0$.

Hoc idem ostendemus etiam in hunc modum. Assumatur æquatio quævis $x^2 + px + q = 0$, quæ dividi possit exactè absque ullo residuo per $x - a$. Dico fore $x - a = 0$, atque adeo $x = a$. Dividatur enim quantitas $x^2 + px + q$ per $x - a$. Et quoniam in divisione, quæ ex hypothesi fieri debet sine ullo residuo, remanet $a^2 + pa + q$, erit $a^2 + pa + q = 0$. Sed in hac æquatione si loco incognitæ a substituatur x, fient termini ejus $x^2 + px + q$, quorum summa est æqualis nihilo. Itaque, quia in æquatione $a^2 + pa + q = 0$ quantitas x adimplet conditiones ipsius a, erit $a = x$, atque adeo $x - a = 0$.

V.

Qua ratione species radicum æquationis cognosci possit, ostenditur.

Quot sint radices, sive valores in unaquaque æquatione, ex numero dimensionum ipsius æquationis dignosci posse jam superiùs indicavimus; quum omnis æquatio tot radices habere possit, quot sunt dimensiones ejus, & non plures. Et quamquam hujusmodi principium nullâ fuerit superiùs ratione suffultum; attamen ex traditâ æquationum constitutione: nimirum, quod oriantur per multiplicationem æquationum simplicium, quæ

quæ continent radices illas, facilè nunc erit illud ostendere.

Si enim fieri posset, habeat æquatio aliqua duarum dimensionum tres radices, quæ sint $x - a = 0$, $x - b = 0$, & $x - c = 0$. Itaque si multiplicetur $x - a = 0$ per $x - b = 0$, producetur eadem æquatio, quæ utique orietur, multiplicando $x - a = 0$ per $x - c = 0$. Jam verò ex illâ multiplicatione oritur æquatio ista $x^2 - ax - bx + ab = 0$, ex istâ profluit hæc altera $x^2 - ax - cx + ac = 0$. Igitur duæ istæ æquationes non erunt inter se mutuò diversæ; adeoque conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur duæ aliæ æquationes $ax + bx = ax + cx$, & $ab = ac$, ex quarum altrerutrâ infertur $b = c$, hoc est, quod tertia radix assumpta sit eadem cum secundâ.

Jam quæ sit species radicum æquationis, quotiescumque sunt reales, & non imaginariæ, hoc est; quot ex iis radicibus sint positivæ, & quot negativæ, cognosci potest per hanc regulam: nimirum in omni æquatione tot positivas haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum $+$, & $-$; & tot negativas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa $+$,

$+$, vel duo signa $-$, quæ se invicem sequuntur. Quæ æquidem regula ex ipsâ, qua constituuntur æquationes, ratione abundè colligitur.

Ut si constituenda esset æquatio, quæ duas habeat radices positivas 2, & 3, supponendum esset $x = 2$, sive $x - 2 = 0$, & $x = 3$, sive $x - 3 = 0$; tum deinde multiplicandum $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, quum quæ inde producitur $x^2 - 5x + 6 = 0$ sit æquatio quæsita. Et quoniam in hac æquatione post terminum x^2, affectum signo $+$, habetur terminus $5x$, affectus signo $-$, quæ est una signorum variatio; & post terminnm $5x$, affectum signo $-$, habetur terminus 6; affectus signo $+$, quæ est signorum variatio altera; liquet in æquatione istâ $x^2 - 5x + 6 = 0$, propter duas radices positivas, duas item signorum variationes reperiri.

Similiter, si constituere oporteat æquationem, quæ duas habeat radices negativas -2, -3, supponendum esset $x = -2$, sive $x + 2 = 0$, & $x = -3$, sive $x + 3 = 0$; tum deinde deberet multiplicari $x + 2 = 0$ per $x + 3 = 0$; quum æquatio, quæ ex hac multiplicatione producitur, $x^2 + 5x + 6 = 0$ sit illa, quam

quam oportet constituere. Et quoniam in hac æquatione post terminum x^2, affectum signo $+$, habetur terminus $5x$, similiter affectus signo $+$, post quem sequitur terminus 6, qui itidem afficitur signo $+$; perspicuum est in æquatione istâ $x^2 + 5x + 6 = 0$, propter duas radices negativas, duas esse similitudines signorum.

Atque ita quoque, si constituenda esset æquatio, ubi incognita præter radicem positivam 5, aliam habeat negativam -2, ponendum esset $x = 5$, sive $x - 5 = 0$, & $x = -2$, sive $x + 2 = 0$; tum deinde oporteret multiplicare $x - 5 = 0$ per $x + 2 = 0$, quum quæ inde producitur æquatio $x^2 - 3x - 10 = 0$ ea sit, quam oportet constituere. Et quoniam in hac æquatione post terminum x^2, affectum signo $+$, sequitur terminus $3x$, affectus signo $-$, post quem habetur terminus 10 affectus item signo $-$; liquet in æquatione istâ $x^2 - 3x - 10 = 0$, propter duas radices, positivam unam, negativam alteram, unam item signorum variationem, & unam signorum similitudinem reperiri.

Ad eundem itaque modum, si scire velim, quot sint radices positivæ, & quot negativæ in hac æquatione $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, ubi incognita ad quatuor dimensiones ascendit, & consequenter quatuor radices admittit; considero signa, quibus termini ipsius afficiuntur. Et quia in eâ tres reperio signorum variationes, & unã signorum similitudinem, concludo ex quatuor radicibus tres esse positivas, & unam negativã. Quod quidem perspicuũ est; nam radices quatuor illius æquationis sunt 2, 3, 4, & -5, quum unusquisq; horum numerorum incognitæ x conditiones adimpleat.

Sed hîc sedulò notandum est, regulam istam tunc demum sibi locum vindicare, quum radices omnes æquationis sunt reales; at ubi radices aliquæ fuerint imaginariæ, tunc regula nequaquã nobis usui esse potest. Sic in æquatione $x^2 - 2x + 10 = 0$, ubi incognita x duas radices debet habere, dispositio signorum indicat utramque illarum radicum esse positivam. Finge jam $x + 4 = 0$, & multiplica æquationem illam $x^2 - 2x + 10 = 0$ per $x + 4 = 0$, ut prioribus addatur una radix negativa, & prodibit æquatio ista $x^3 + 2x^2 + 2x + 40 = 0$, quæ deberet habere duas radices positivas, & unam negativam, quum tamen, si signa consideres, quibus termini ipsius afficiunciuntur, omnes ejus radices ſint negativæ. Quorſum itaque iſtud? nimirum quia radices duæ prioris æquationis $x^2 - 2x + 10 = 0$ non ſunt reales, ſed imaginariæ.

Cæterùm hæc eadem regula poteſt etiam applicari æquationibus, ubi aliquis ex terminis intermediis deficit: nimirum, ſi ſupponatur terminus ille deficiens primo affectus ſigno $+$, tum affectus ſigno $-$, & inveniantur in utraque hypotheſi radices, quas cum termino illo deficiente oſtendunt alii duo hinc inde exiſtentes. Quum enim perinde ſit, ſive terminum illum deficientem conſideres affectum ſigno $+$, ſive ſigno $-$, ſi ex utraque hypotheſi eædem radices eruantur, certum eſt radices illas tales eſſe, quales inveniuntur, ubi quidem æquationis radices ſunt reales; quod ſi verò radices, quæ eruuntur ex utraque hypotheſi, non ſint eædem, tunc indicio nobis eſſe poteſt, duas illas radices imaginarias eſſe.

Ut ſi ſcire velim, cujus ſpeciei ſint duæ radices, quas admittit æquatio duarum dimenſionum $x^2 - 9 = 0$, ubi ſecundus terminus deficit, ſuppono terminum illum deficientem primo affectum ſigno

ſigno $+$; deinde affectum ſigno $-$. Et quia in utraque hypotheſi una ex radicibus prodit poſitiva, altera negativa; concludo æquationem $x^2 - 9 = 0$ unam habere radicem poſitivam, alteram negativam. Quod ſi verò proponatur æquatio $x^2 + 9 = 0$, quia ſupponendo terminum deficientem affectum ſigno $+$, utraque radicum prodit negativa, & viciſſim utraque poſitiva, quum ponitur affectus ſigno $-$; conſequens eſt, ut duæ illius æquationis radices non ſint reales, ſed imaginariæ.

Similiter, ſi ſcire velim, cujus ſpeciei ſint duæ radices, quæ erui debent ex tribus prioribus terminis hujus æquationis $x^3 - 19x - 30 = 0$, ubi radices omnes ſunt reales, ſuppono primùm, quod terminus deficiens afficiatur ſigno $+$, eritque illarum radicum una negativa, & altera poſitiva. Et quia ejuſdem prodeunt ſpeciei, quum terminus deficiens ponitur affectus ſigno $-$; concludo, radices illas tales reverà eſſe, atque adeo æquationem ipſam duas habere radices negativas, & unam poſitivam. Sed ſi proponatur æquatio $x^3 + 4x - 16 = 0$, quia non eædem ſunt radices, quæ in utrâque hypotheſi ex tribus prioribus terminis eruun-

eruuntur, concludendum est, duas illas radices, non quidem reales, sed imaginarias esse.

Atque ita quoque si scire cupiam, cujus speciei sint duæ radices, quæ colligi debent ex tribus postremis terminis hujus æquationis $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, in qua omnes radices sunt reales; considero primùm terminum deficientem affectum signo $+$, eritque illarum radicum una positiva, altera negativa. Et quoniam hujus etiam oriuntur speciei, ubi terminus deficiens ponitur affectus signo $-$ concludo tales reverâ esse radices illas, ac proinde æquationem ipsam duas habere radices positivas, & unam negativam. Sed si proponatur æquatio $x^3 + 2x^2 + 32 = 0$, quia non eædem sunt radices, quæ ex tribus postremis terminis in utrâque hypothesi eruuntur, consequens est, ut duæ illæ radices sint imaginariæ, & non reales.

Ex quibus liquet, traditam regulã pro cognoscendâ specie radicum, ubi unus terminorum deficit, cõtrahi posse in hunc modum: nimirum, quod ex duabus radibus, quas termini hinc inde existentes exhibere debent cum termino deficiente, una sit positiva, & altera negativa, quum di-

versa sunt signa illorum terminorum, & æquationis radices sunt reales; at verò, quod utraque sit imaginaria, si eorundem terminorum eadem fuerint signa. Quotiescumque enim diversa sunt signa terminorum, hinc inde à deficiente termino existentium; tunc in utrâque hypothesi una ex radicibus prodibit positiva, altera negativa. Sed, quum illorum terminorum signa sunt eadem; eo casu in unâ hypothesi erunt ambæ positivæ, in alterâ ambæ negativæ.

Etsi autem sit signum certissimum, duas illas radices imaginarias esse, quum termini, hinc inde positi à termino deficiente, eadem habuerint signa; non hinc tamen indicio semper esse potest, easdem illas radices reales esse, quotiescumque eorundem terminorum diversa fuerint signa. Ita æquationis hujus $x^2 - 4x + 6 = 0$ radices duæ sunt imaginariæ: quocirca si multiplicetur per $x + 4 = 0$, quæ inde orietur æquatio $x^3 - 10x + 24 = 0$, duas habebit radices imaginarias, & unam realem negativam, quum tamen termini, hinc inde existentes à termino deficiente, diversa signa habere reperiantur. Itaque, ut concludi possit ex duabus illis radicibus unam esse positivam, alteram negativam, nequaquam sufficit, diversa esse signa terminorum, hinc inde à deficiente termino existentium; verùm etiam opus est, ut æquationis radices sint reales.

Cæterùm ex traditâ regulâ cognoscendi, quot sint radices positivæ, & quot negativæ in omni æquatione, facilè erit efficere, ut in unâ, eâdemque æquatione radices omnes, quæ negativæ erant, evadant positivæ; & ut eâdem operâ omnes illæ, quæ positivæ erant, negativæ fiant: nimirum mutando signa omnia, quæ in secundo, quarto, sexto, aliisve terminis reperiuntur, qui per numeros pares designantur; reliquis primi, tertii, quinti, similiumque terminorum, qui designantur per numeros impares, non mutatis. Ut si loco hujus æquationis $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, ubi incognita x tres habet radices positivas 2, 3, 4, & unam negativam -5, scribatur $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, habebitur æquatio, in qua una tantùm est radix posititiva, quæ est 5, & tres reliquæ, quæ antea erant positivæ, nunc sunt negativæ.

Non-

VI.

Nonnulla circa radices imaginarias æquationum ostenduntur.

PRiusquam huic Capiti finem imponamus, ostendenda sunt nonnulla circa radices imaginarias æquationum. Et primò quidem, quod istarum radicum numerus semper sit par: nimirum, quod in omni æquatione, quæ sit legitimè reducta, ac præparata, nonnisi duæ, quatuor, sex, &c. radices imaginariæ possint occurrere. Id in exẽplo superiùs adducto de rectâ lineâ, quæ ducitur æquidistanter diametro circuli ad datum intervallum, abundè liquet. Nam radices duæ, quæ determinant duo puncta sectionis, sunt ambæ reales, quum datum intervallum est minus semidiametro circuli; fiunt æquales, quum idem intarvallum est æquale semidiametro; & verò evadunt ambæ imaginariæ, quum eâdem semidiametro fuerit majus. Sed generalem oportet hujus rei demonstrationem afferamus.

Nimirum, quia æquatio supponitur legitimè reducta, ac præparata, in eâ sicuti nulla erit quantitas realis radicalis,

 ita

ita nulla erit quantitas imaginaria. Itaque radices ipsius æquationis ejusmodi debent esse, ut quum eæ ad constituendam æquationem multiplicantur inter se mutuò, evanescat incommensurabilitas, evanescat contradictio radicum. Sed quum quantitates, quæ multiplicantur inter se mutuò, sunt imaginariæ, ipsarum contradictio nequit evanescere, nisi earundem numerus fuerit par; quum nonnisi duæ quantitates imaginariæ per se mutuò multiplicatæ producant quantitatem realem; & omnis quantitas imaginaria, ducta in quantitatem realem, producat quantitatem alteram similiter imaginariam. Quare in omni æquatione numerus radicum imaginariarum par semper esse debet.

Ex eo autem, quod radices imaginariæ occurrant in æquationibus semper in numero pari; perspicuum est æquationes illas, quæ sunt tertii, quinti, septimi, aut alterius cujusque imparis gradus, unam ad minimum radicem realem habere; nec proinde omninò impossibilia esse posse problemata, ad quæ æquationes illæ referuntur; quum iis fieri possit satis, saltem per radicem illam realem, quam illæ æquationes admittunt.

An

An non ergo exinde ratio est deducenda præclari illius theorematis, quod innuit vir summus Isaac Newtonus in enumeratione linearum tertii ordinis, quod lineæ omnes ordinis primi, tertii, quinti, septimi, & imparis cujusque duo habeant ad minimum crura in infinitum versus plagas oppositas progredientia? Nam utique lineæ istæ per æquationes ejusdem gradus definiuntur, & norunt Geometræ crura linearum ad aliquem terminum sisti, nec ulteriùs progredi posse, quia ordinatæ ipsarum evadunt imaginariæ. Sed id fusiùs ostendere non est hujus loci, & sufficiat illud indicasse.

Secundò radices imaginariæ æquationum possunt esse, vel puræ, vel mixtæ, sive affectæ. Dicuntur puræ, quum nonnisi quantitates imaginarias continent. Vocantur verò mixtæ, sive affectæ, quum ex realibus, & imaginariis constant. Ita æquationis hujus $x^2 + 3 = 0$ radices duæ sunt imaginariæ, sed earum utraque est pura, quum una sit $\sqrt{-3}$, altera $-\sqrt{-3}$. Sed radices duæ alterius istius æquationis $x^2 - 4x + 6 = 0$ sunt quidem imaginariæ, verùm utraque mixta, sive affecta. Nam si transferatur ad alteram partem æquationis ultimus termi-

 nus

nus 6, & addatur utrique parti quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, extrahendo hinc inde quadratam radicem, invenietur tum $x = 2 + \sqrt{-2}$, tum $x = 2 - \sqrt{-2}$.

Quemadmodum autem ex duabus radicibus alicujus æquationis, nequit una esse realis, & altera imaginaria, sed debent vel ambæ esse reales, vel ambæ imaginariæ; ita quoque ex duabus alicujus æquationis radicibus imaginariis, nequit esse una pura, & altera mixta, sed debent vel ambæ esse puræ, vel ambæ mixtæ; quum aliter contradictio non evanesceret. Quin etiam quemadmodum, quum utraque radicum imaginariarum est pura, ad tollendam contradictionem necesse est, ut communis utrique radici sit quantitas imaginaria; ita quoque quum ambæ radices sunt mixtæ, ut evanescat contradictio, oportet communem esse utrique radici tam quantitatem imaginariam, quàm quantitatem realem.

Sed sive radices duæ imaginariæ alicujus æquationis sint puræ, sive mixtæ, semper quantitas ipsa imaginaria, utrique radici communis, contrariis signis debet in iis reperiri. Quod exinde quoque colligi potest, quia si idem in illis

lis signum haberet, contradictio non evanesceret, quotiescumque radices illæ ad constituendam æquationem multiplicantur per se mutuò. Et eâdem ratione si radices imaginariæ fuerint mixtæ, quantitas realis, utrique radci communis, debet eodem signo in iis reperiri. Ita si ponatur $x - 2 + \sqrt{-3} = 0$, & $x - 2 - \sqrt{-3} = 0$, atque duæ istæ æquationes multiplicentur per se mutuò; in ea, quæ producitur, evanescet quidem contradictio: pariterque evanascet, si æquationes simplices, quæ inter se mutuò multiplicantur, fuerint $x + 2 + \sqrt{-3} = 0$, & $x + 2 - \sqrt{-3} = 0$. Sed quocumque alio modo assumantur æquationes simplices, numquam equidem fieri poterit, ut per earum multiplicationem evanescat contradictio.

Atque hinc patet, æquationis secundi gradus, cujus duæ radices sunt imaginariæ, ultimum terminum signo + afferiæ, ultimum terminum signo + afferictum esse oportere. Nam æquationes simplices, quæ per mutuam ipsarum multiplicationem constituere possunt æquationem secundi gradus, quæ habeat duas radices imaginarias, debent esse, vel hujus formæ $x - a + \sqrt{-b^2} = 0$, & $x - a - \sqrt{-b^2} = 0$; vel etiam alterius

 istius

istius $x + a + \sqrt{-b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{-b^2} = 0$: & profectò utroque casu æquatio, quæ producitur, habebit ultimum terminum affectum signo $+$. Nam quum fuerint prioris formæ, orietur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$; quum verò fuerint formæ posterioris, producetur æquatio $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$. Atque idem liquet quoque, si radices imaginariæ fuerint puræ; nam si multiplicetur $x - \sqrt{-b^2} = 0$ per $x + \sqrt{-b^2} = 0$, prodibit æquatio $x^2 + b^2 = 0$.

Jam quum ultimus terminus æquationis secundi gradus, cujus duæ radices sunt imaginariæ, affici debeat signo $+$; perspicuum est in iis æquationibus secundi gradus, in quibus ultimus terminus reperitur affectus signo $-$, radices duas nequaquaquam posse esse imaginarias. Sed non hinc generaliter colligi debet, imaginarias esse radices duas illius æquationis secundi gradus, cujus ultimus terminus vicissim afficitur signo $+$; quandoquidem id dumtaxat locum habet in iis æquationibus, in quibus ultimus terminus reperitur quidem affectus signo $+$, sed est major quadrato, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ; ut patet in utrâque istarum æqua-

æquationum $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, & $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, in quibus radices duæ sunt imaginariæ. Nam ultimus terminus $a^2 + b^2$ major est, quàm a^2 quadratum, quod fit ex semisse quantitatis cognitæ secundi termini.

Interim radices æquationis secūdi gradus, in qua deficit secundus terminus, & ultimus afficitur signo $+$, erunt semper imaginariæ. Quod quidem, etsi ex iis, quæ articulo antecedenti dicta sunt, sua sponte sequatur, quum termini, hinc inde existentes à termino deficiente, eodem signo sint affecti; idem tamen colligi quoque potest ex regulâ mox traditâ. Sunt enim radices duæ æquationis secundi gradus imaginariæ, quum ultimus terminus afficitur signo $+$, & est major quadrato, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ. Unde quia, quum deficit secundus terminus, prædictum quadratum est etiam nullum, adeoq; ultimus terminus ipso semper est major; proinde consequens est, ut radices duæ æquationis secundi gradus, in qua deficit secundus terminus, & ultimus afficitur signo $+$, sint semper imaginariæ.

De

CAP. IV.

De multiplici æquationum transformatione.

TRansformari dicimus æquationem aliquam, quum in aliam mutatur ejuſdem gradus, cujus radices habeant datam quandam relationem cũ radicibus prioris: adeo, ut cognitis unius radicibus cognoſcantur etiam radices alterius. Hujuſmodi æquationum transformatio, quæ multifariam fieri poteſt, varios nobis ſuppetit uſus, tum ad præparandas, ac reducendas, cum item ad reſolvendas æquationes. Unde, veluti rem maximi momenti, viſum eſt illam ſeorſim hoc capite proſequi.

Etſi autem variis modis transformari poſſint æquationes, nec ſcio num omnes queant exactè recenſeri, præcipui tamen, & qui majoris uſus eſſe videntur, ii ſunt, qui fiunt additione, ſubtractione, multiplicatione, & diviſione. Etſi enim radices alicujus æquationis nos lateant, poſſunt tamen datâ aliqua quantitate augeri, vel minui; aut etiam per datam aliquam quantitatem multiplicari, vel dividi. Et profectò quum ſic augentur, vel minuuntur, aut in hunc modum multiplicantur, vel dividuntur; mutabitur ipſa æquatio in aliam, cujus radices ad radices prioris datam quandam habebunt relationem.

Itaque in hoc capite primò quidem explicabimus modos transformandi æquationes, qui fiunt additione, & ſubtractione, hoc eſt augendo, vel minuendo radices ipſarum datâ aliquâ quantitate; tum eos afferemus, qui fiunt multiplicatione, & diviſione, hoc eſt multiplicando, vel dividendo radices earundem æquationem per datam aliquam quantitatem. Sed ut intelligant Tyrones quorſum hæc omnia tendant, propriis ſuis locis uſus etiam indicabimus, qui ex hujuſmodi transformationibus deducuntur.

I.

De transformationibus æquationum, quæ fiunt additione, & ſubtractione.

ADditione, vel ſubtractione transformantur æquationes, quum radices ipſarum, quantumvis incognitæ, datâ aliquâ quantitate augentur, vel minuunnuuntur. Jam autem ad augendas, vel minuendas radices alicujus æquationis datâ aliquâ quantitate, oportet tantùm in locum incognitæ quantitatis substituere aliam auctam, vel diminutam datâ illâ quantitate; nimirum auctam, si radices propositæ æquationis minuendæ sint quantitate illâ datâ; & diminutam, si vicissim sint augendæ: atque loco prioris incognitæ hanc aliam sic auctam, vel diminutam ubique in æquatione subrogare.

Ut si augere velim numero ternario radices hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, quæ oritur ex multiplicatione trium istarum $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x - 4 = 0$, loco incognitæ x sumenda est alia y, & cogitandum aliam istã cognitam y majorem esse, quàm x, ipso numero ternario: adeo, ut habeatur $x + 3 = y$, sive $x = y - 3$. Nam si deinde in æquatione ipsâ loco x scribamus $y - 3$, loco x^2 quadratum ex $y - 3$, quod est $y^2 - 6y + 9$, & loco x^3 cubum ex $y - 3$, qui est $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$, quemadmodum factum hic vides, prodibit loco ipsius

$+ x^3$

$+ x^3$	y^3	$- 9y^2$	$+ 27y$	$- 27$
$- 9x^2$		$- 9y^2$	$+ 54y$	$- 81$
$+ 26x$			$+ 26y$	$- 78$
$- 24$				$- 24$

hæc altera $y^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$, cujus radices numero ternario superant radices illius.

Sunt enim radices propositæ æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ numeri isti 2, 3, & 4; nam quisque horum numerorum, substitutus in æquatione ipsâ loco incognitæ x, ejus conditiones adimplet, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruant. Unde si radices alterius hujus æquationis $x^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$ ternario excedant radices illius, eas utiq; non alias esse oportet, quàm 5, 6, & 7: proindeque quia quilibet horum numerorum, subrogatus in æquatione loco incognitæ y, præstat illud idem, quod præstare debet incognita, liquet utique propositum.

Similiter, si minuere velimus numero binario radices hujus æquationis $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, sumenda est loco incognitæ x alia y, putandumque hanc

aliam

aliam incognitã y majorem esse, quàm x, ipso numero binario: adeo, ut habeatur $x = y + 2$. Nam si deinde in æquatione ipsâ scribatur $y + 2$ loco x, $y^2 + 4y + 4$ loco x^2, & $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$ loco x^3, quemadmodum hìc factum vides, orietur

$$\begin{array}{llrrrr} + & x^3 & y^3 & + 6y^2 & + 12y & + 8 \\ - & 12x^2 & & - 12y^2 & - 48y & - 48 \\ + & 47x & & & + 47y & + 94 \\ - & 60 & & & & - 60 \\ \hline \end{array}$$

hæc altera $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, cujus radices numero binario deficiunt à radicibus illius.

Sunt enim radices propositæ æquationis $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ numeri isti 3, 4, & 5; quum quisque horum numerorum, substitutus in æquatione loco ipsius incognitæ x, adimpleat ejus conditiones, efficiendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruant. Itaque, si radices alterius hujus æquationis $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$ numero binario deficiant à radicibus illius, eæ utique non aliæ poterunt esse, quàm 1, 2, & 3. Unde, quia quilibet horum numerorum, substitutus in æquatione loco incognitæ y, adimplet conditiones ipsius incognitæ; consequens est, ut radices æquationis revera sint numeri 1, 2, & 3.

Jam augendo hac ratione radices æquationis, perspicuum est, quod si in æquatione radices partim sint positivæ, partim negativæ, positivæ quidem augeantur, negativæ verò minuantur eâdem quantitate. Sic in æquatione istâ $x^2 + 4x - 12 = 0$, in qua una ex radicibus 2 est positiva, altera 6 est negativa, si velim augere numero binario radices ipsius, mutabitur ea in hanc aliam $y^2 - 2y - 15 = 0$, in qua radix positiva, utpote 5, est aucta numero ternario, sed radix negativa, utpotè 3, est diminuta numero ternario.

Neque mirum; nam quantitates negativæ per additionem aliarum positivarum minuuntur, & non augentur. Sed augendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate, potest etiam una ex radicibus negativis prorsus evanescere, nimirum, si data illa quantitas aliquam ex radicibus negativis adæquet. Quin etiam si quantitas, qua augeri debent radices æquationis, fuerit major unâ radicum negativarum, tunc radix illa ex negativâ fiet positiva.

Hinc

Hinc, si quantitas, qua augentur radices æquationis, fuerit major unaquaque radicum negativarum, tunc omnes illæ radices fient positivæ, & termini illius, in quam mutatur æquatio proposita, signa +, & — alternatim habebunt. Unde vicissim, si augendo radices alicujus æquationis, alia oriatur, cujus termini habeant alternatim signa +, & —; tunc certum erit, quantitatem illam, qua augentur, unamquamque radicum negativarum excedere; atque hac ratione perspicuum est, nullo negotio cognosci posse, intra quem terminum radices negativæ alicujus æquationis consistant.

Vicissim autem minuendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate, perspicuum est, quod si æquatio radices admittat partim positivas, partim negativas, positivæ quidem minuantur, negativæ verò augeantur eâdem quantitate. Sic in æquatione istâ $x^2 - 2x - 15 = 0$, in qua una ex radicibus 5 est positiva, altera 3 est negativa, si velim minuere numero ternario radices ipsius, mutabitur ea in hanc aliam $y^2 + 4y - 12 = 0$, in qua radix positiva, utpote 2, est diminuta numero ternario, sed radix negativa, utpote 6, est aucta eodem numero ternario.

Quod rursus non mirum videri debet; nam quantitates negativæ per subductionem aliarum positivarum augentur, & non minuuntur. Sed minuendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate, fieri potest, ut una ex radicibus positivis prorsus evanescat, nimirum si data illa quantitas radicum positivarum aliquam adæquet. Quin etiam si quantitas, qua minui debent radices æquationis, fuerit major unâ ex radicibus positivis, tunc radix illa ex positivâ fiet negativa.

Hinc, si quantitas, qua minuuntur radices æquationis, fuerit major unaquaque radicum positivarum, tunc omnes illæ radices fient negativæ, & termini illius, in quam mutatur æquatio proposita, omnes afficientur signo +. Unde vicissim, si minuendo radices æquationis, alia oriatur, cujus termini omnes afficiantur signo +; certum erit, quantitatem illam, qua minuuntur, unamquamque radicum positivarum excedere: atque hac ratione facilè quoque erit inquirere, intra quem terminum consistant radices positivæ alicujus æquationis.

Cæterùm, quia non rarò usuveniet, ut ejus, in quam mutatur æquatio proposita, augendo, vel minuendo radices ipsius

ipsius, dumtaxat ultimus terminus sciri debeat; proinde non abs re erit hìc adnotare, ultimum hunc terminum nullo negotio haberi posse, si tãtùm in æquatione propositâ scribatur loco incognitæ ipsa quãtitas, qua radices augeri debent, vel minui. Sed in hac substitutione considerari debet quantitas illa, velut affecta signo —, quotiescumque radices augendæ sunt eâ quantitate; & verò consideranda est velut affecta signo †, quum radices eâdem illâ quantitate minui debent.

Hac ratione, si radices istius æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ augendæ sint numero ternario, prodibit loco ejus hæc alia $y^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$, cujus ultimus terminus est -210: & profectò si in ipsâ æquatione $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ ponatur -3, ubicumque reperitur x, fient termini ejus $-27 - 81 - 78 - 24$, quorum summa est -210. Atque ita quoque, si radices istius æquationis $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ minuendæ sint numero binario, habebitur loco ejus hæc alia $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, cujus ultimus terminus est -6; & si utique in ipsâ æquatione $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, ponatur 2, ubicumque reperitur x, fient termini ejus $8 - 48 + 94 - 60$, quorum summa tantundem valet, ac -6.

II.

Qua ratione secundus terminus æquationis tolli possit, ostenditur.

TRansformationes æquationum, quæ fiunt additione, & subtractione, hoc est augendo, & minuendo radices æquationum datâ aliquâ quantitate, varios nobis suppetunt usus; potissimùm tamen in id nobis inserviunt, quod ipsarum ope tolli semper possit secundus terminus ex omni æquatione. Si enim radices alicujus æquationis, ubi secundus terminus afficitur signo †, augeantur quantitate cognitâ secundi termini, divisâ per numerum, ipsius æquationis gradum ostendentem; jam nova orietur æquatio, in qua deficiet secundus terminus. Et similiter, si radices alicujus æquationis, in qua secundus terminus reperitur affectus signo —, minuantur eâ parte quantitatis cognitæ secundi termini, quam ostendit idem gradus æquationis, nova etiam prodibit æquatio, secundo termino carens.

Proponatur, exempli gratiâ, æquatio $x^4 + 16x^3 + 71x^2 - 4x - 420 = 0$, & oporteat illam in aliam transmutare, in qua secundus terminus deficiat. Quoniam æquatio proposita est quarti gradus, capiatur quarta pars ex quantitate cognitâ secundi termini 16, quæ erit 4. Et quoniam ipse secundus terminus afficitur signo +, augeantur radices propositæ æquationis numero quaternario, ponendo nempe $y - 4$ loco x, $y^2 - 8y + 16$ loco x^2, $y^3 - 12y^2 + 48y - 64$ loco x^3, & $y^4 - 16y^3 + 96y^2 - 256y + 256$ loco x^4. Qua ratione jam nova orietur æquatio $y^4 - 25y^2 - 60y - 36 = 0$, in qua non modò radices auctæ reperiuntur numero quaternario, verùm etiam secundus terminus deficit.

Proponatur hæc altera æquatio $x^3 - 6x^2 - 16x + 86 = 0$, & oporteat similiter eam in aliam transmutare, in qua secundus terminus desit. Quoniam æquatio proposita est tertii gradus, dividatur quantitas cognita secundi termini 6 per 3, hoc est capiatur tertia pars numeri 6, quæ erit 2. Et quoniam ipse secundus terminus afficitur signo −, minuantur radices propositæ æquationis numero binario, ponendo nempe $y + 2$ loco x, $y^2 + 4y + 4$ loco x^2, & $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$ loco x^3. Qua ratione hæc alia prodibit æquatio $y^3 - 28y + 38 = 0$, in qua non modò radices diminutæ reperiuntur numero binario, verùm etiam secundus terminus deest.

Itaque, quia radices alicujus æquationis augentur datâ aliquâ quantitate, si loco incognitæ, in æquatione contentæ, alia substituatur quãtitate illâ diminuta; & vicissim radices alicujus æquationis minuuntur datâ quâdam quantitate, si in ipsâ æquatione loco incognitæ alia subrogetur, aucta quantitate illâ: perspicuum est, quod ex unaquaque æquatione tolletur secundus terminus, si loco incognitæ ipsius æquationis substituatur incognita altera, aucta, vel diminuta eâ parte quantitatis cognitæ secundi termini, quam ostendit gradus æquationis: nimirum aucta, si secundus terminus sit affectus signo −, & vicissim diminuta, si afficiatur signo +.

Hujus regulæ rationem adscribere, superfluum existimo; quum nemo, opinor, sit, qui illam non percipiat, si sedulò attẽdat ad hæc duo. Primum, quod si quantitas quæcumque, duabus partibus constans, ad potestatem aliquam attollatur, par-

partes illæ in terminis intermediis ad omnes alias poteſtates inferiores ordine elevatæ reperiantur. Et alterum, quod in quacumque poteſtate radicis, duabus partibus conſtantis, coefficiens ſecundi termini ſit ipſe poteſtatis exponens. Ex his quippe duobus principiis, à nobis jam ſuperiùs oſtenſis, adducta regula facili negotio derivatur.

Cæterùm in examinandis æquationibus, præſtat ex iis ſecundum terminum tollere, quia hac ratione omnes alicujus gradus æquationes ad pauciorem numerum reducuntur. Ita æquationes ſecundi gradus, ſi omnibus terminis ſint repletæ, pro diverſitate ſignorum, quibus affici poſſunt ipſarum termini, ad has quatuor formulas reducuntur.

$$x^2 - px - q = 0$$
$$x^2 + px - q = 0$$
$$x^2 - px + q = 0$$
$$x^2 + px + q = 0,$$

quum tamen, ſi tollatur ex iis ſecundus terminus, vel induent hanc formam $x^2 - q = 0$, in qua una radix eſt vera, altera falſa; vel etiam hanc aliam $x^2 + q = 0$, cujus ambæ radices ſunt imaginariæ.

Si-

Similiter, ſi in æquationibus tertii gradus nullus deſit terminorum intermediorum, poſſunt omnes pro diverſitate ſignorum, quibus ipſarum termini affici queunt, ad ſequentes octo formulas revocari

$$x^3 - qx^2 + rx - s = 0$$
$$x^3 + qx^2 - rx - s = 0$$
$$x^3 - qx^2 - rx - s = 0$$
$$x^3 + qx^2 + rx - s = 0$$
$$x^3 - qx^2 + rx + s = 0$$
$$x^3 + qx^2 - rx + s = 0$$
$$x^3 - qx^2 - rx + s = 0$$
$$x^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

quum tamen ſi ex iis auferatur ſecundus terminus, reduci poterunt ad aliquam ſequentium quatuor formularum.

$$x^3 + px - q = 0$$
$$x^3 - px - q = 0$$
$$x^3 - px + q = 0$$
$$x^3 + px + q = 0.$$

Sed auferendo ſecundum terminum ex æquationibus ſecundi gradus, non modò ad pauciorem numerum reducuntur, verùm etiam hoc ampliùs obtinetur, quod earum reſolutio nullo negotio perfici

poſ-

possit. Quotiescumque enim in æquatione secundi gradus secundus terminus deficit, ipsius resolutio nullam difficultatem involvit, quum satis sit ex utraque parte æquotionis quadratam radicem elicere. Itaque si ex unaquaq; secundi gradus æquatione auferatur secundus terminus, poterit hoc artificio resolutio ejus obtineri.

Proponatur, exempli gratia, resolvenda æquatio secundi gradus $x^2 - 4x - 6 = 0$. Tollatur ex eâ secundus terminus, ponendo $y + 2$ loco x, & $y^2 + 4y + 4$ loco x^2. Prodibit itaque hac facta substitutione altera isthæc æquatio $y^2 - 10 = 0$, sive $y^2 = 10$, ex cujus utraque parte si extrahatur quadrata radix, fiet vel $y = \sqrt{10}$, vel $y = -\sqrt{10}$. Et quoniam x idem est, ac $y + 2$; erit quoque vel $x = 2 + \sqrt{10}$, vel $x = 2 - \sqrt{10}$: proindeque radices duæ æquationis propositæ erunt $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$.

Sed nolim hìc silentio præterire, quod quum secundus æquationis terminus afficitur signo $-$, possit aliâ quoque ratione ille terminus tolli nimirum si loco incognitæ, in æquatione contentæ, ponatur ea pars quantitatis cognitæ secundi termini, quàm ostendit gradus æquationis, diminuta aliâ quantitate incognitâ. Ita si proponatur æquatio $x^2 - 4x - 6 = 0$, & in eâ ponatur $y + 2$ loco x, & $y^2 + 4y + 4$ loco x^2, prodibit æquatio $y^2 - 10 = 0$, in qua secundus terminus deficit. Sed eadem æquatio invenietur etiam, si ponatur $2 - y$ loco x, & $4 - 4y + y^2$ loco x^2.

Interim notare oportet hoc loco, quod quum hac ratione tollitur secundus terminus, radices æquationis positivæ evadant negativæ, sed diminutæ quantitate illâ cognitâ, quæ ad tollendum secundum terminum adhibetur; vicissim verò radices negativæ evadant positivæ, sed auctæ eâdem illâ quantitate. Sit etenim $x - a = 0$ radix una positiva alicujus æquationis, & $x + b = 0$ radix altera negativa. Itaque si fiat $x = c - y$, erit $c - y - a = 0$, & $c - y + b = 0$, hoc est $y + a - c = 0$, & $y - b - c = 0$. Unde radix positiva a versa est in negativam, diminutam quantitate c; radix verò negativa b prodiit positiva, aucta eâdem quantitate. Differre autem hunc modum transformandi æquationes ab utroque antecedentium, etiamsi fiat subtractione, nemo non videt.

Qua

III.

Qua ratione per analysim quisque terminus æquationis tolli possit, ostenditur.

REgula mox tradita usui nobis esse potest dumtaxat, quum ex æquatione secundus terminus tolli debet: si enim oporteat, ex æquatione alium quemcumque terminum tollere, multum abest, ut eâdem regulâ illud possit obtineri. Interim ne, si id fortè fieri contingat, hæreat Analysta, ostendemus hìc, qua ratione tolli possit per analysim quilibet terminus ex quacumque æquatione propositâ. Nam regulas pro quolibet termino cudere, nec tam commodè fieri potest, nec si utique fieri posset, ad rem esse existimamus.

Hunc in finem consideremus primò, regulâ superiùs traditâ tolli secundum terminum ex qualibet æquatione, si radices ipsius æquationis augeantur, vel minuantur eâ parte quantitatis cognitæ secundi termini, quam æquationis gradus ostendit; quum hac ratione alia loco ejus oriatur, in qua secundus terminus nequaquam occurret. Quare, ut ex aliqua æquatione datus quicumque terminus tolli possit, determinari tantùm debet quantitas cognita, qua radices æquationis augendæ sint, aut minuendæ, quo terminus ille in eâ, in quam transmutatur æquatio proposita, prorsus evanescat.

Jam quantitas ista cognita, qua augeri, aut minui debent radices æquationis, ut in eâ, in quam transmutatur, deficiat terminus assignatus, determinabitur per analysim in hunc modum. Assumatur quantitas illa indeterminatè; eâque augeantur, aut minuantur radices æquationis. Quia ergo quantitas illa talis esse debet, ut per eam evanescat terminus assignatus, ponatur post transformationem æquationis terminus ille æqualis zero, sive nihilo: qua ratione habebitur æquatio, quæ quantitatis illius indeterminatæ valorem exhibebit.

Id ut clariùs intelligatur, dabimus primò hujus methodi specimen in eodem illo casu, in quo tradita superiùs regula valet, nimirum, quum secundus terminus ex æquatione tolli debet. Itaque oporteat ex æquatione istâ $x^2 - ax + b^2 = 0$ secundum terminum tollere. Fiat $x = y + c$, vel etiam $x = y - c$. Parum enim refert, quo signo ponatur affecta quan-

quantitas illa indeterminata, cum qua æquatio proposita transformanda est; nam id ipsum determinabitur etiam ab æquatione, quæ invenitur, supponendo post factam transformationem secundum terminum æqualem zero, sive nihilo.

Itaque si in æquatione propositâ $x^2 - ax + b^2 = 0$ ponatur $y + c$ loco x, & $y^2 + 2cy + c^2$ loco x^2, habebitur loco ejus hæc altera æquatio $y^2 + 2cy - ay + c^2 - ac + b^2 = 0$. Quare supponendo secundum terminum $+ 2cy - ay$ æqualem zero, sive nihilo, fiet $2cy - ay = 0$, hoc est $2cy = ay$, & $2c = a$. Unde quum quantitas c adæquet semissem ipsius a; liquet ex æquatione propositâ tolli secundum terminum, si radices ejus minuantur quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ.

Oporteat similiter ex æquatione istâ $x^3 + ax^2 - a^2x - ab^2 = 0$ secundum terminum tollere. Fiat $x = y + c$, & ponatur in ipsâ æquatione $y + c$ loco x, $y^2 + 2cy + c^2$ loco x^2, & $y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + c^3$ loco x^3. Itaque loco propositæ æquationis habebitur hæc alia $y^3 + 3cy^2 + ay^2 + 3c^2y + 2acy - a^2y + c^3 + ac^2 - a^2c - ab^2 = 0$. Unde supponendo secundum terminum æqualem zero, sive nihilo, fiet $3cy^2 + ay^2 = 0$, hoc est $3cy^2 = - ay^2$, & $3c = - a$. Unde quum quantitas c adæquet trientem ipsius $-a$, perspicuũ est ex æquatione propositâ tolli secundum terminum, si radices ejus augeantur triente quantitatis cognitæ secundi termini.

Sed applicemus modò eandem methodum aliis quoque casibus, nimirum quum alius quilibet terminus, quàm secundus, tolli debet ex æquatione. Itaque oporteat ex eadem æquatione $x^3 + ax^2 - a^2x - ab^2 = 0$ tertium terminum tollere. Et quoniam ea, in quam ipsa transmutatur, ponendo $x = y + c$, est $y^3 + 3cy^2 + ay^2 + 3c^2y + 2acy - a^2y + c^3 + ac^2 - a^2c - ab^2 = 0$, ponatur in istâ tertius terminus $3c^2y + 2acy - a^2y$ æqualis zero, sive nihilo. Itaque erit $3c^2y + 2acy - a^2y = 0$, hoc est $3c^2 + 2ac - a^2 = 0$: Unde reducendo, ac resolvendo æquationem istam, determinabitur valor ipsius c.

Nihilo seciùs tolletur per analysim quartus terminus ex istâ æquatione $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^2bx + a^4 = 0$. Ponatur enim $x = y + c$. & in ipsâ æquatione scribatur $y + c$ loco x, $y^2 + 2cy + c^2$ loco x^2, $y^3 + 3cy^2 + 3c^2y + c^3$ loco x^3, & y^4

& $y^4 + 4cy^3 + 6c^2y^2 + 4c^3y + c^4$ loco x^4. Sic enim orietur hæc altera æquatio $y^4 + 4cy^3 - ay^3 + 6c^2y^2 - 3acy^2 + a^2y^2 + 4c^3y - 3ac^2y + 2a^2cy - a^2by + c^4 - ac^3 + a^2c^2 - a^2bc + a^4 = 0$, in qua si utique ponatur quartus terminus æqualis zero, sive nihilo, fiet $4c^3y - 3ac^2y + 2a^2cy - a^2by = 0$, hoc est $4c^3 - 3ac^2 + 2a^2c - a^2b = 0$, quæ quidem æquatio legitimè reducta, ac resoluta ipsius c valorem exhibebit.

Notetur autem hoc loco velim, quod sicuti ad determinandam quantitatem, cum qua æquatio proposita debet transformari, ut ejus secundus terminus evanescat, invenitur æquatio primi gradus; sic ad determinandã eandem quantitatẽ, quum tolli debet quilibet alius terminus, invenietur semper æquatio talis, ut gradum ejus ostendat locus ipse, quem occupat in æquatione tollendus terminus, si unitate unâ minuatur. Unde quum in omni æquatione numerus terminorum designetur à numero dimensionum, aucto unitate unâ; perspicuum est ad tollendum ultimum terminum ex datâ quacumque æquatione, resolvendam esse æquationem, quæ sit ejusdem gradus cum æquatione propositâ.

Sed

Sed notatu hìc quoque dignum existimamus, quod æquatio illa, quæ invenitur pro determinandâ quantitate, cum qua transformari debet æquatio aliqua, ut ejus ultimus terminus evanescat, non modò sit ejusdem gradus cum æquatione propositâ, verùm etiam ab ipsâ non differat. Notavimus namque suprà, quod si, exempli gratiâ, in æquatione istâ $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$ loco incognitæ x ponendum esset $y + m$, ultimus terminus ejus, in quam illa transformatur, sit quantitas, quæ prodit, substituendo in ipsâ æquatione m pro x. Itaque facta hac substitutione, erit ultimus terminus $m^3 - am^2 + abm - abc$; & propterea æquatio, pro determinandã quantitate m, erit $m^3 - am^2 + abm - abc = 0$, quam liquet eandem esse cum ipsâ æquatione propositâ.

Neque verò obscura est ratio hujus rei. Nam, ut ex aliquâ æquatione ultimus terminus tolli possit, necesse est radices ejus, vel augere quantitate, quæ unam radicum negativarum adæquet, vel etiam minuere quantitate, quæ sit æqualis uni radicum positivarum; quum utroque casu evanescat in æquatione radix illa, cui æqualis est quantitas, qua radices æquaquationis augentur, vel minuuntur; atque adeo dempto ultimo termino, æquatio ipsa ad gradum inferiorem deprimatur. Itaque, ut determinetur quantitas illa, qua augendæ sunt, vel minuendæ radices alicujus æquationis, ut ultimus ejus terminus evanescat, necesse est ipsas propositæ æquationis radices invenire: quæ utique inveniri non possunt, nisi per ipsam æquationem prpositam, aut per aliam, quæ non differat ab eâ.

IV.

De transformationibus æquationum, quæ fiunt multiplicatione, & divisione.

Quemadmodum transformatur æquationes additione, vel subtractione, augendo, vel minuendo radices ipsarum datâ aliquâ quantitate; sic fiet æquationum transformatio multiplicatione, vel divisione, quotiescumque eædem radices per datam aliquam quantitatem multiplicantur, vel dividuntur. Unde, ut intelligant Tyrones, qua ratione transformentur æquationes multiplicatione, & divisione; satis erit ostendere, quo pacto radices alicujus æquationis per

per datam aliquam quantitatem multiplicari, aut dividi possint.

Itaque ad multiplicandum radices alicujus æquationis per datam aliquam quantitatem, oportet tantum in locum incognitæ quantitatis, in æquatione contentæ, aliam substituere, quæ per datam illam quantitatem sit divisa. Ut si fuerit x incognita æquationis propositæ, & data quantitas sit a, assumenda est incognita alia y, & loco x ponendum ubique $\frac{y}{a}$. Neque dubium esse potest, quin hac factâ substitutione, unaquæque radix reperiatur multiplicata per a. Nam quum ex hypothesi sit $x = \frac{y}{a}$, erit $ax = y$.

Oporteat, exempli gratia, radices hujus æquationis $x^2 - ax - bx + ab = 0$, quæ sunt a, & b, multiplicare per quantitatem cognitã c. Supponatur $cx = y$, hoc est $x = \frac{y}{c}$; tum in ipsâ æquatione ponatur $\frac{y}{c}$ loco x, & $\frac{y^2}{c^2}$ loco x^2: Quâ factâ substitutione, orietur hæc alia æquatio $\frac{y^2}{c^2} - \frac{ay}{c} - \frac{by}{c} + ab = 0$, quæ fiet $y^2 - acy - bcy + abc^2 = 0$, siquidem omnes ejus termini multiplicentur per c^2. Unde, quum radices hujus æquationis sint ac, & bc; liquet, radices æquationis propositæ in hac alterâ multiplicatas esse per datam quantitatem c.

Oporteat similiter, radices alterius hujus æquationis $x^2 - 5x + 6 = 0$, quæ sunt 2, & 3, multiplicare per numerum 4. Supponatur $4x = z$, vel quod idem est $x = \frac{z}{4}$; deinde in ipsâ æquatione substituatur $\frac{z}{4}$ loco x, & $\frac{z^2}{16}$ loco x^2: quâ peractâ substitutione, producetur hæc altera æquatio $\frac{z^2}{16} - \frac{5z}{4} + 6 = 0$, quæ fiet $z^2 - 20z + 96 = 0$, si utique omnes termini ejus multiplicentur per 16. Unde quia radices hujus æquationis sunt 8, & 12; liquet radices propositæ æquationis in hac alterâ multiplicatas esse per 4.

Sed

Sed notetur hoc loco velim, eam, in quam mutatur æquatio proposita, quum radices ipsius per datam aliquam quantitatem oportet multiplicare, posse etiam inveniri, si loco incognitæ, in æquatione contentæ, substitutâ incognitâ aliâ, multiplicetur secundus terminus per ipsam datam quantitatem, per ejus quadratum terminus tertius, per cubum terminus quartus, atque ita deinceps.

Proponatur æquatio $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$, cujus radices oprteat multiplicare per c. Jam ponendo, juxta regulam traditam, $x = \frac{y}{c}$, & scribendo in æquatione pro x valorem istum, prodibit æquatio sequens $y^3 - acy^2 + abc^2y - a^2bc^3 = 0$, quæ etiam invenietur, si ponendo in æquatione propositâ y, & quadratum ejus y^2, cubumque y^3 loco x, x^2, & x^3, multiplicetur deinde secundus terminus per c, terminus tertius per c^2, & terminus quartus per c^3.

Proponatur æquatio numerica $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, & oporteat radices ejus multiplicare per 2. Fiat juxta

 re-

regulam traditam $x = \frac{z}{2}$, & substituendo in æquatione pro x ubique valorem istum, orietur sequens æquatio $z^3 - 18z^2 + 104z - 192 = 0$. Sed hæc eadem æquatio invenietur quoque, si ponatur in æquatione proposita z, z^2, & z^3 loco x, x^2, & x^3; ac deinde multiplicetur secundus terminus per 2, terminus tertius per 4, & terminus quartus per 8.

Hujus cõpendii ratio non meliùs intelligi poteſt, quàm si paulò diligentiùs perpendatur operatio, quæ fieri debet juxta regulam traditam. Ut enim radices, exempli gratia, istius æquationis $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$ multiplicentur per c, regula id quidem præscribit, ut ponatur $\frac{y}{c}$ loco x, $\frac{y^2}{c^2}$ loco x^2, & $\frac{y^3}{c^3}$ loco x^3. Unde quia hac factâ substitutione, producitur æquatio $\frac{y^3}{c^3} - \frac{ay^2}{c^2} + \frac{aby}{c} - a^2b = 0$. & in istâ oportet multiplicare terminos omnes per c^3, ut à fractionibus liberetur; perspicuum est perinde esse, si positis y, y^2,

& y^3 loco x, x^2, & x^3, multiplicetur terminus secundus per c, terminus tertius per c^2, & terminus quartus per c^3.

Ad dividendum autem radices alicujus æquationis per datam aliquam quantitatem, oportet vicissim in locum incognitæ quantitatis, in æquatione contentæ, aliam subrogare, quæ per datam illam quantitatem sit multiplicata. Ut si fuerit x incognita æquationis propositæ, & data quantitas sit a, assumenda est incognita alia y, & loco x ponendum ubique ay. Nec etiam dubium esse potest, quin hac factâ substitutione, unaquæque radix divisa reperiatur per a. Nam quum ex hypothesi sit $x = ay$, erit $\frac{x}{a} = y$.

Oporteat, exempli gratia, radices hujus æquationis $x^2 - acx - abx - a^2bc = 0$, quæ sunt ab, ac, dividere per quantitatem cognitam a. Ponatur $x = ay$, & in ipsâ æquatione scribatur ay loco x, & a^2y^2 loco x^2. Hac enim factâ substitutione, orietur hæc alia æquatio $a^2y^2 - a^2cy - a^2by + a^2bc = 0$, quæ fiet $y^2 - cy - by + bc = 0$, siquidem omnes ejus termini dividantur per a^2. Unde quia radidices alterius hujus æquationis $y^2 - cy - by + bc = 0$ sunt a, & b; liquet, radices æquationis propositæ in hac alterâ divisas esse per a.

Oporteat similiter radices alterius hujus æquationis $x^2 - 20x + 96 = 0$, quæ sunt 8, & 12, dividere per numerum 4. Ponatur $x = 4z$, & in ipsâ æquatione scribatur $4z$ loco x, & $16z^2$ loco x^2. Hac siquidem peractâ substitutione, prodibit hæc altera æquatio $16z^2 - 80z + 96 = 0$, quæ evadet $z^2 - 5z + 6 = 0$, si utique omnes termini ejus dividantur per 16. Unde, quum radices alterius hujus æquationis $z^2 - 5z + 6 = 0$ sint 2, & 3; perspicuum est, radices propositæ æquationis in hac alterâ divisas esse per numerum 4.

Atque hìc quoque notatu dignum existimo, quod ea, in quam mutatur æquatio proposita, quum radices ipsius per datam aliquam quantitatem oportet dividere, possit etiam inveniri, si loco incognitæ, in æquatione contentæ, substitutâ incognitâ aliâ, dividatur secundus terminus per ipsam datam quantitatem, per ejus quadratum terminus tertius, per cubum terminus quartus, atque ita deinceps.

Pro-

Proponatur æquatio $x^3 - acx^2 + abc^2x - a^2bc^3 = 0$, cujus radices oporteat dividere per c. Jam ponendo, juxta regulam traditam, $x = cy$, & scribendo in æquatione pro x valorem istum ubique, prodibit æquatio sequens $y^3 - ay^2 + aby - a^2b = 0$: quæ etiam invenietur, si ponendo in æquatione propositâ y, & quadratum ejus y^2, cubumque y^3 loco x, x^2, & x^3, dividatur deinde secundus terminus per c, terminus tertius per c^2, & terminus quartus per c^3.

Proponatur æquatio numerica $x^3 - 18x^2 + 104x - 192 = 0$, & oporteat radices ejus dividere per 2. Fiat juxta regulam traditam $x = 2z$, & substituendo in æquatione pro x ubique valorem istum, orietur sequens æquatio $z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$. Sed hæc eadem æquatio invenietur quoque, si ponatur in æquatione propositâ z, z^2, & z^3 loco x, x^2, & x^3; ac deinde dividatur secundus terminus per 2, terminus tertius per 4, & terminus quartus per 8.

Atque hujus itidem compendii ratio non meliùs intelligi potest, quàm perpendendo paulò diligentiùs operationem, quæ fieri debet juxta regulam traditam. Ut enim radices, exempli gratia, istius

 æqua-

æquationis $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$ dividantur per c, regula id quidem præſcribit, ut ponatur cy loco x, c^2y^2 loco x^2, & c^3y^3 loco x^3. Unde quia hac factâ ſubſtitutione, oritur æquatio $c^3y^3 - ac^2y^2 + abc^2 - a^2b = 0$, & in iſtâ oportet dividere terminos omnes per c^3, ut maxima incognitæ poteſtas à cognitis ſeparetur; perſpicuum eſt perinde eſſe, ſi poſitis y, y^2, & y^3 loco x, x^2, & x^3, dividatur terminus ſecundus per c, terminus tertius per c^2, & terminus quartus per c^3.

V.

Uſus expoſitarum transformationum indicantur.

TRansformationes æquationum, quæ fiunt multiplicatione, & diviſione, hoc eſt, multiplicando, & dividendo radices ipſarum per datam aliquam quantitatem, uſui nobis eſſe poſſunt ad tollendas fractiones, & quandoq; etiã radicales quantitates ab ipſis æquationibus. Ut ſi habeatur æquatio $x^3 - 2x^2 + 10x - \frac{11}{8} = 0$, & ipſius loco alia deſideretur, cu-

cujus omnes termini per numeros integros exprimantur, obtinebitur id, ſi æquationis radices omnes multiplicentur per numerum 2, qui eſt radix cubica denominatoris fractionis. Nam quum ſubſtitutâ loco x incognitâ alterâ y, oporteat juxta ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſecundum terminum multipiicare per 2, terminum tertium per 4, & quartum, ſive ultimum terminum per 8; perſpicuum eſt, hac ratione oriri æquationem alteram, quæ libera erit ab omni fractione.

Similiter, ſi habeatur æquatio $x^3 - 3x^2 + \frac{8}{9}x - 10 = 0$, & tollenda ſit ex eâ fractio, quæ reperitur in tertio termino, ſatis erit omnes æquationis radices multiplicare per numerum 3, qui eſt radix quadrata denominatoris illius fractionis. Quum enim ad faciendam hanc multiplicationẽ neceſſe ſit priùs ſubſtituere loco x incognitam aliam y, tum deinde ſecundum terminum multiplicare per 3, terminum tertium per 9, & quartum, ſive ultimum terminum per 27; liquet in in hunc modum aliam oriri æquationem, in qua nulla fractio reperietur. Atque ita qua-quoque si tollenda sit fractio, quæ existit in secundo termino hujus æquationis

$$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x - 2 = 0,$$

satis erit æquationis radices omnes multiplicare per numerum 3, qui est denominator illius fractionis.

Neque aliter fit, si non una, sed plures fractiones occurrant in æquatione. Proponatur, exempli gratia, æquatio

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{35}{64} = 0,$$

& oporteat eam in aliam transmutare, cujus termini nullas fractiones involvant. Quoniam denominator fractionis in ultimo termino est 64, ad tollendum eum oportet, radices æquationis multiplicare per numerum 4, qui est radix cubica numeri 64. Et similiter, quia denominator fractionis termini tertii est 9, tolletur ille, si radices æquationis multiplicentur per numerum 3, qui est radix quadrata numeri 9. Atque ita quoque evanescet fractio secundi termini, si eædem æquationis radices multiplicentur per numerum 2, qui est denominator illius fractionis. Unde si æquationis radices multiplicentur ab initio per numerum 24, qui oritur ex multiplicatione trium numerorum 2, 3, & 4; invenietur statim æquatio, in qua nulla fractio reperiatur.

Non dissimilis est operandi ratio, si quantitates radicales ex æquationibus tolli debeant. Ut si habeatur æquatio $x^2 + 3x\sqrt{2} - 6 = 0$, & ipsius loco alia desideretur, cujus omnes termini per numeros rationales exprimantur; obtinebitur, si radices æquationis multiplicentur, aut dividantur per $\sqrt{2}$. Nam quum substitutâ in æquatione loco x incognitâ aliâ y, oporteat secundum terminum multiplicare, aut dividere per $\sqrt{2}$, & terminum tertium multiplicare, aut dividere per 2 quadratum ex $\sqrt{2}$; perspicuum est utrâque ratione æquationem alteram oriri, quæ libera erit ab omni quantitate radicali. Atque ita quoque multiplicando, aut dividendo radices omnes hujus æquationis $x^3 - 2x^2\sqrt{3} - 15x + 9\sqrt{3} = 0$ per $\sqrt{3}$, alia loco ejus orietur, in qua nulla occurret quantitas radicalis.

Et quidem hac operatione facile semper erit, fractiones ex æquationibus tollere, quum non aliud requiratur, quàm ut denominator ejus fractionis sit quadratum, si existat in tertio termino; sit cu-

cubus, si existat in quarto; sit quadrato-quadratum, si existat in quinto; atque ita deinceps: id, quod facile erit efficere, non mutato valore fractionis, siquidem aliter esse contigerit. Sed radicales quantitates non semper tollere licet, quum non rarò occurrat, ut id nullâ ratione possit obtineri. Ut si proponatur æquatio $x^3 - 3x^2 - 4x + 6\sqrt{3} = 0$, ex qua tollenda sit quantitas radicalis, oporteret radices æquationis multiplicare, aut dividere per $\sqrt{3}$: quod quidem quum efficitur, nova oritur æquatio, in qua eadem quantitas radicalis secundum terminum ingreditur.

Ope earundem transformationum fieri quoque potest, ut quantitas cognita alicujus termini in æquatione oriatur æqualis alteri cuidam datæ quantitati. Ut si habeatur æquatio $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$, & ipsius loco invenienda sit alia, in qua quantitas cognita secundi termini, nimirum ea, quæ hìc est 3, sit 2, non autem 3; id quidem fieri potest, vel multiplicando radices æquationis per $\frac{2}{3}$, vel, quod idem est, dividendo eas per

Nam

$\frac{3}{2}$. Nam ponendo ubique y pro x, prodibit utroque casu hæc altera æquatio $y^3 - 2y^2 + 8y - 16 = 0$, in qua, ut vides, coefficiens, sive quantitas cognita secundi termini est datus numerus 2.

Similiter, si habeatur æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x + 27 = 0$, & loco ejus alia quæratur, in qua quantitas cognita termini tertii non sit 9, sed 4; quia radix quadrata numeri 9 est 3, & radix quadrata numeri 4 est 2, satis erit, radices æquationis multiplicare per $\frac{2}{3}$, vel quod eodem recidit, eas dividere per $\frac{3}{2}$: sic enim substituendo y loco x, orietur æquatio $y^3 - 8y^2 + 4y + 8 = 0$, in qua coefficiens, sive quantitas cognita termini tertii est 4. Atque ita quoque si loco hujus æquationis $x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0$ alia desideretur, cujus ultimus terminus non sit 8, sed 1; obtinebitur, si radices æquationis dividantur per 2, quum ponendo y loco x oriatur hæc altera $y^3 - 2y^2 + 2y - 1 = 0$.

Sed hoc idem obtineri quoque potest

ope

ope earum transformationum, quæ fiunt additione, vel ſubtractione, hoc eſt, augendo, vel minuendo radices æquationis datâ aliquâ quantitate. Semper enim inveniri poterit quantitas talis, ut ſi eâ augeantur, vel minuantur radices æquationis, quantitas nota unius ex terminis ejus prodeat æqualis alteri cuidam datæ quantitati. Invenietur autem hæc quantitas eâdem omnino methodo, qua determinatur quantitas, qua augendæ ſunt, aut minuendæ radices æquationis, quò unus ex terminis ejus evaneſcat: nimirum ſi quantitas illa ſumatur indeterminatè, & ope ejus transformetur æquatio propoſita. Nam ſiquidem in eâ, quæ oritur illius loco, ponatur quantitas cognita termini aſſignati æqualis datæ quantitati, habebitur æquatio, quæ quantitatem illam determinabit.

Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^2 - 2x + 4 = 0$, & oporteat eam in aliam tranſmutare, in qua quantitas cognita ſecundi termini ſit $+ 4$, & non $- 2$. Ponatur $x = y + m$, & ſcribatur in ipsâ æquatione $y + m$ loco x, & $y^2 + 2my + m^2$ loco x^2. Habebitur ergo vice illius hæc altera æquatio $y^2 + 2my - 2y + m^2 - 2m + 4 = 0$. Et quoniam in iſtâ æquatione quantitas cognita ſecundi termini eſt $2m - 2$, ponatur ea æqualis 4. Erit itaque $2m - 2 = 4$, hoc eſt $2m = 6$: unde infertur $m = 3$. Si ergo fiat $x = y + 3$, & in æquatione propoſitâ ſcribatur $y + 3$ loco x, & $y^2 + 6y + 9$ loco x^2, habebitur loco ejus hæc alia $y^2 + 4y + 7 = 0$, in qua quantitas cognita ſecundi termini eſt $+ 4$, omnino ut quærebatur.

Quod ſi opus ſit eandem æquationem $x^2 - 2x + 4 = 0$ mutare in aliam, cujus ultimus terminus ſit $+ 7$, & non $+ 4$; tunc ponatur ultimus terminus ejus, quæ orta eſt ex ipſius transfomatione, hoc eſt $m^2 - 2m + 4$ æqualis 7. Sic enim habebitur $m^2 - 2m + 4 = 7$, hoc eſt $m^2 - 2m = 3$. Unde ſi utrique parti hujus æquationis addatur unitas, hoc eſt quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ, & utrinque extrahatur quadrata radix, fiet tum $m - 1 = 2$, tum $m - 1 = - 2$, hoc eſt tum $m = 3$, tum $m = - 1$. Ex quo patet, æquationem propoſitam mutari in aliam, cujus ultimus terminus ſit $+ 7$, ſi in eâ loco x ponatur vel $y + 3$, vel $y - 1$.

Denique ope illius transformationis, quæ fit diviſione, hoc eſt dividendo radices æquationis per datam aliquam quan-

quantitatem, hoc etiam potest obtineri, quod in examinandis æquationibus valde conducit, ut minuantur quantitates cognitæ, quæ in æquationis terminis singulis occurrunt. Ut si habeatur æquatio $x^3 - 9x^2 + 18x - 54 = 0$, dividendo radices ejus per 3, orietur hæc alia $y^3 - 3y^2 + 2y - 2 = 0$, quæ paulò simplicior est, si consideres quantitates cognitas terminorum. Sed quando demum id fieri possit absque eo, quod in fractiones incidatur, supervacaneum erit adnotare; quum nemo, opinor, sit, qui illud non satis percipiat, si sedulò attendat ad ea omnia, quæ hactenus dicta sunt de naturâ, & usu istarum transformationum.

VI.

Alii æquationes transformandi modi in medium afferuntur.

PRæter istos, quos modò attulimus, æquationes transformandi modos, sunt & alii quamplures, qui etsi non ita familiares sint Algebristis, quemadmodum priores quatuor, ignorari tamen non debent, quia quandoque possunt nobis usui esse. Itaque transformari ul-

teriùs possunt æquationes, mutando eas in alias, quarum radices sint quotientes, qui oriuntur, dividendo datam quantitatem per radices illarum. Ut si habeatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus radices sunt 2, & 3; poterit ea mutari in aliam, cujus radices sint 6, & 4, hoc est quotientes, qui oriuntur, dividendo eundem numerum 12 per 2, & 3 radices illius.

Fiet autem hujusmodi transformatio, si ponatur $\frac{12}{x} = y$, vel quod eodē recidit $\frac{12}{y} = x$, & scribatur in ipsâ æquatione $\frac{12}{y}$ loco x, & $\frac{144}{y^2}$ loco x^2. Hac enim factâ substitutione, mutabitur æquatio proposita $x^2 - 5x + 6 = 0$ in hanc aliam $\frac{144}{y^2} - \frac{60}{y} + 6 = 0$, quæ legitimè reducta, ac præparata evadet $y^2 - 10y + 24 = 0$. Unde, quia in hac æquatione uterque numerorum 6, & 4 adimplet conditiones incognitæ y, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruant; erunt 6, & 4 radices il-

illius æquationis ; & propterea illa, in quam æquatio proposita mutanda erat, erit $y^2 - 10y + 24 = 0$.

Ope hujus transformationis perspicuum est, radices æquationis in alias abire, quæ reciprocam ipsarum servant rationem ; adeoque maximam converti in minimam, & vicissim minimam in maximam. Sed si radices alicujus æquationis in earum inversas mutari debeant, sumenda erit unitas pro quantitate illâ, quæ dividi debet per unamquamque ex radicibus æquationis. Voco enim quantitates inversas, quæ designatæ ad instar fractionum, sibi ex contrariâ parte correspondent : quo sensu diximus alibi seriem harmonicam ex inversione numerorum naturalium oriri.

Ejusdem transformationis ope potest etiam penultimus terminus tolli, si modò priùs tollatur secundus. Sed ne in novâ æquatione fractiones occurrant, præstat pro quantitate illâ, quæ dividi debet per unamquamque ex radicibus propositæ æquationis, ultimum ipsius æquationis terminum ponere. Itaque si ex istâ æquatione $x^3 - 6x^2 + 4x + 10 = 0$ tolli debeat penultimus terminus, aufero primùm ex eâ terminum secundum, ut lo-

co ejus habeatur hæc alia $z^3 - 8z + 2 = 0$; tum istam muto in alteram, cujus radices sint quotientes, qui oriuntur, dividendo numerum 2 per radices illius ; sicque nova orietur æquatio $y^3 - 8y^2 + 4 = 0$, in qua, ut vides, penultimus terminus deficit. Sed si antepenultimum tollere cupias, id obtinebis, si modò tertium priùs tollas.

Huic æquationes transformandi modo non dissimilis est ille, quem innuimus in fine articuli secundi, & per quem æquatio data mutatur in aliam, cujus radices sint residua, quæ oriuntur, subtrahendo ex datâ quantitate radices illius. Quod enim in uno fit divisione, in altero subtractione peragitur ; & quantum ad radices positivas, si eæ non sint majores datâ quantitate, adhuc minima convertitur in maximam, & maxima in minimam. Ita si fuerit æquatio $x^2 - 3x + 2 = 0$, & in eâ ponatur $5 - y$ loco x, & $25 - 10y + y^2$ loco x^2, orietur hæc altera $y^2 - 7y + 12 = 0$. Et profectò, quemadmodum radices illius sunt 1, & 2 ; ita radices istius sunt $5 - 1$, & $5 - 2$, hoc est 4, & 3.

Hic modus transformandi æquationes, ut vidimus loco citato, usui nobis esse potest ad tollendum ex iis secundū terminum, quotiescumque afficitur signo —. Sed idem potest etiam adhiberi, quum omnes æquationis radices requiruntur positivæ: nimirum si capiatur maximus coefficiens negativus, qui in æquatione reperitur, isq; positivus, ac saltem unitate auctus statuatur pro quantitate, ex qua radices æquationis sunt subtrahendæ. Ut si fuerit æquatio $x^3 - 2x^2 - 4x + 6 = 0$, quia in eâ maximus coefficiens negativus est 4, fiat $x = 5 - y$, & debitâ substitutione peeractâ, orietur æquatio $y^3 - 13y^2 + 51y - 49 = 0$, cujus radices omnes sunt positivæ, quum termini ejus habeant alternatim signa +, & —.

Quod si æquationis radices omnes requirantur positivæ, sed una simul coefficiens alicujus termini major sit oporteat datâ aliquâ quantitate; tunc quæ sit quantitas, ex qua subtrahendæ sunt radices æquationis, determinari poterit per analysim in hunc modum. Sit $x^2 - 3x - 6 = 0$ æquatio proposita, & oporteat eam in aliam mutare, in qua non modò utraque radix sit positiva, verùm etiam quantitas cognita secundi termini, prout quantitas est, sit major numero 10.

Ponatur $m - y = x$, & scribatur in ipsâ æquatione $m - y$ loco x, & $m^2 - 2my + y^2$ loco x^2. Mutabitur ergo, hac factâ substitutione, æquatio proposita in hanc aliam $y^2 - 2my + 4y + m^2 - 4m - 6 = 0$, in qua quum secundus terminus affici debeat signo —, erit $2m$ major, quàm 4; adeoque ipsius quantitas cognita erit $2m - 4$. Hæc autem major esse debet numero 10. Itaque $2m$ major quoque erit, quàm 14, adeoque m major quàm 7: proindeque si loco m ponatur quilibet numerus, qui sit major, quàm 7, fiet quantitas cognita secundi termini major, quàm 10; atque eodem numero fiet etiam æquationis utraque radix positiva, quum maximus coefficiens negativus in æquatione contentus sit 6.

Sed si æquatio proposita sit $x^2 - 4x - 9 = 0$; tunc poterit quidem quilibet numerus, qui sit major, quàm 7, adhiberi ad inveniendam æquationem aliam, in qua quantitas cognita secundi termini sit major, quàm 10; sed ut æquationis utraque radix fiat positiva, necesse est, ut idem numerus sit major, quàm 9, quum maximus coefficiens negativus in æquatione contentus sit numerus 9. Quod si æquationis radices omnes requirantur po-

positivæ, sed coefficiens, sive quantitas cognita unius ex terminis ejus nō major, sed æqualis esse debeat alicui datæ quantitati; eo casu problema non semper solutionem admittet; sed tunc tantum, quum quaantitas, cui æqualis oritur indeterminata m, est major maximo coefficiente negativo.

Ejusdem analysis opē determinari poterit quantitas illa, ex qua subtrahendæ sunt radices æquationis, ut mutetur in aliam, in qua radices omnes sint positivæ, & una simul coefficiens termini tertii major sit quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato. Esto enim $x^3 + 6x^2 - 15x - 4 = 0$ æquatio proposita. Ergo si ponatur $x = 2m - y$, & debita fiat substitutio, mutabitur illa in hanc aliam $y^3 - 6my^2 - 6y^2 + 12m^2y + 24my - 15y - 8m^3 - 24m^2 + 30m + 4 = 0$.

Et quoniam in istâ æquatione tertius terminus affici debet signo $+$, erit $12m^2 + 24m$ major quàm 15: proindeque ejus quantitas cognita erit $12m^2 + 24m - 15$. Hæc autem major esse debet quadrato, quod fit ex $3m + 3$, semisse quantitatis cognitæ secundi termini, hoc est $9m^2 + 18m + 9$. Itaque erit $12m^2 + 24m$ major, quàm $9m^2 + 18m + 24$ atque adeo quum sit $3m^2 + 6m$ major, quàm 24; erit $m^2 + 2m$ major, quàm 8; $m^2 + 2m + 1$ major, quàm 9; $m + 1$ major, quàm 3; m major, quàm 2; & $2m$ major, quàm 4. Mutabitur ergo æquatio proposita in aliam, in qua coefficiens termini tertii sit major quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato, si loco $2m$ ponatur quilibet numerus, qui sit major, quàm 4; sed ejusdem radices omnes fient positivæ, si idem numerus sit major, quàm 15, qui est maximus coefficiens negativus æquationis.

Sed ille quoque æquationes transformandi modus, qui fit subrogando incognitam aliam in locum quadrati, cubi, aut cujuslibet alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ, etsi alibi à nobis fuerit indicatus, non abs re tamen erit, si hìc denuò referatur. Itaque si fuerit æquatio $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, ponatur $x^2 = y$, & debitâ substitutione peractâ habebitur loco ejus hæc alia $y^2 - 5y + 6 = 0$. Pariterque si habeatur æquatio $x^9 - 2x^6 + 4x^3 - 6 = 0$, fiat $x^3 = y$, & positis y, y^2, & y^3 loco x^3, x^6, & x^9, prodibit æquatio sequens $y^3 - 2y^2 + 4y - 6 = 0$. Sed quum hac ratione transformantur æquationes mutantur in alias, quarum radices habent rationem duplicatam, triplicatam, &c. ad radices illarum.

Viciſſim autem transformari poſſunt æquationes, mutando eas in alias, quarum radices habeant rationem ſubduplicatam, ſubtriplicatam, &c. ad radices illarum. Quod quidem efficitur, ſi loco incognitæ, in æquatione contentæ, ponatur quadratum, cubus, &c. alterius cujuslibet incognitæ. Ita ſi habeatur æquatio $x^2 - 2x - 3 = 0$, ponendo y^2 loco x, & y^4 loco x^2, habebitur hæc alia $y^4 - 2y^2 - 3 = 0$, cujus radices ad radices illius erunt in ratione ſubduplicatâ. Et ſi in eadem æquatione $x^2 - 2x - 3 = 0$ ponatur y^3 loco x, & y^6 loco x^2, orietur hæc altera $y^6 - 2y^3 - 3 = 0$, cujus radices ad radices illius habebunt rationem ſubtriplicatam.

CAP. V.

De reductione æquationum ad propriam ſedem.

Vidimus ſuperiùs, æquationem omnem, quæ ſit plurium dimenſionum, tot racices habere, quot ſunt dimenſiones ejus, eandemque conſtitui poſſe per multiplicationem mutuam æquationum ſimplicium, quæ illas continent radices. Sed notavimus quoque, æquationem illam, cujus radices ſunt incommenſurabiles, poſſe etiam conſtitui per unicam tantùm æquationum ſimplicium, quæ radices illas comprehendunt, modò ſedes incommẽſurabilitatis in eodem illo gradu reperiatur, ad quem aſcendit in æquatione quantitas incognita.

Ut ſi fuerit æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, ejus radices duæ ſunt 2, & 3. Et ſi ponatur $x = 2$, ſive $x - 2 = 0$, & $x = 3$, ſive $x - 3 = 0$, multipliceturque $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, prodibit æquatio ipſa $x^2 - 5x + 6 = 0$. Sed ſi habeatur æquatio $x^2 - 4x - 6 = 0$, quia iſtius radices ſunt $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$, conſtitui poteſt ea, non modò multiplicando $x - 2 - \sqrt{10} = 0$ per $x - 2 + \sqrt{10} = 0$, verùm etiam tollendo ab unaquaque iſtarum æquationum ſimplicium quantitatem radicalem.

Jam æquationem, quæ ſit plurium dimenſionum, tunc in propriâ ſuâ ſede exiſtere dicemus, quotieſcumque conſtitui poteſt, non modò per multiplicationem mu-

mutuam æquationum ſimplicium, quæ continent radices ejus, verùm etiam per unicam tantùm illarum æquationum. Sed ſi talis habeatur æquatio, ut conſtitui nequaquam poſſit per unicam tantùm æquationum ſimplicium, quæ radices ipſius comprehendunt; tunc illam in propriâ ſuâ ſede nequaquam exiſtere dicemus.

Tripliciter autem contingere poteſt, ut æquatio plurium dimenſionum in propriâ ſuâ ſede nequaquam exiſtat. Primò ſi omnes ejus radices ſint commenſurabiles, ac rationales. Secundò ſi partim ſint rationales, partim radicales. Et denique ſi omnes ſint radicales, ſed ſedes incommenſurabilitatis nequaquam reperiatur in illo gradu, ad quem attollitur in æquatione quantitas incognita. Nam in quolibet iſtorum caſuum nequit æquatio conſtitui per unicam tantùm æquationum ſimplicium, quæ continent radices ejus.

Unde etiam æquationes, quæ in propriâ ſuâ ſede nequaquam exiſtunt, tripliciter componi poſſunt. Omnibus enim id accidit, ut non aliter conſtitui queant, quàm per multiplicationem mutuam aliarum inferioris gradus æquationum. Sed

Sed æquationum componentium, vel unaquæque ſimplex eſſe poteſt, vel nulla gaudet hac ſimplicitate, vel denique ex iis aliquæ ſimplices eſſe poſſunt, aliquæ non item.

Simplicem autem nunc voco æquationem, in qua incognita non modò eſt unius dimenſionis, ſed valorem quoque habet rationalem. Ex quo patet, æquationis compoſitæ radices omnes eſſe rationales, quum æquationum componentium unaquæque ſimplex eſſe poteſt; eſſe radicales, quum nulla ex æquationibus componentibus hac gaudet ſimplicitate; & eſſe demum partim rationales, partim radicales, quum æquationum componentium aliquæ poſſunt eſſe ſimplices, aliquæ non item.

Neque verò omnes cujuſcumque gradus æquationes, quæ in propriâ ſuâ ſede non exiſtunt, poſſunt omnibus iis modis componi. Nam primò æquationes ſecundi gradus non aliter componi queunt, quàm mutuâ duarum æquationum ſimplicium multiplicatione. Et ſecundò æquationes tertii gradus conſtitui poſſunt, vel per multiplicationem mutuam trium æquationum ſimplicium, vel etiam multiplicando æquationem ſecundi gradus, quæ

quæ existat in propriâ suâ sede, per æquationem alteram simplicem.

Quantum ad alias altioris gradus æquationes, in iis quidem omnes tres illi componendi modi possunt occurrere. Æquatio namque quarti gradus, quæ non existat in propriâ suâ sede, oriri potest, vel ex multiplicatione quatuor æquationum simplicium; vel multiplicando æquationem secundi gradus, quæ sit in propriâ suâ sede, per alias duas æquationes simplices; vel multiplicando æquationem tertii gradus, in propriâ suâ sede existentem, per unicam tantùm æquationem simplicem; vel denique multiplicando per se mutuò duas secundi gradus æquationes, quarum utraque in propriâ suâ sede reperiatur.

Æquatio, quæ in propriâ suâ sede non existit, dicitur ad sedem suam propriam reduci, quum resolvitur in suas æquationes componentes. Hanc ergo æquationum reductionem tradituri, primò casum considerabimus, quum inter æquationes componentes reperitur aliqua simplex; tum alium expendemus, quum nulla æquationum componentium hac gaudet simplicitate. Sed ad eruendas æquationes simplices, si quæ sunt, ex æquationibus compositis, explicanda priùs est ratio, qua terminorum cujuscumque æquationis coefficientes, sive quatitates cognitæ constituuntur.

I.

Qua ratione coefficientes terminorum cujuscumque æquationis constituantur, aperitur.

Quemadmodum æquationes pluriū dimensionum constituuntur per multiplicationem continuam æquationum simplicium, quæ radices continent illarum; ita quantitates cognitæ terminorum cujuscumque æquationis constituuntur per varias, ac diversas rationes, quibus multiplicari possunt per se mutuò radices, quas in æquatione illâ habet incognita.

Si enim sub propriis suis signis capiantur seorsim radices æquationis, erit earum aggregatum sub signo contrario quantitas cognita secundi termini; quod si capiantur producta ex singulis binis, erit eorum aggregatum sub signo proprio quantitas cognita termini tertii; sed si sumantur producta ex singulis ternis, erit illo-

illorum aggregatum ſub ſigno mutato quantitas cognita termini quarti; & ſi porrò accipiantur producta ex ſingulis quaternis, dabit eorum ſumma ſub proprio ſigno quantitatem cognitam termini quinti; atque ita deinceps.

Id ex ipsâ æquationum generatione fit manifeſtum. Aſſumamus etenim ſimplices iſtas æquationes $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, & $x = -5$; vel quod perinde eſt $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, & $x + 5 = 0$. Jam multiplicando $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, producetur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus radices duæ ſunt 2, & 3. Et profectò in hac æquatione clarè liquet, quod quantitas cognita ſecundi termini -5 conſtituatur, capiendo ſummam radicum 2, & 3 ſub ſigno contrario; quantitas verò cognita termini tertii $+6$, capiendo ſub proprio ſigno id, quod ex earundem radicum multiplicatione producitur.

Quod ſi æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplicetur per $x - 4 = 0$, producetur hæc altera $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus ternæ radices ſunt 2, 3, & 4. Atque hìc quoque liquidò patet, quantitatem cognitam ſecundi termini -9 conſtitui, capiendo ſummam radicum 2, 3 & 4 ſub ſigno

ſigno contrario; quantitatem cognitam termini tertii $+26$, capiendo ſummam productorum ex ſingulis binis ſub ſigno proprio; & quantitatem cognitam termini quarti, capiendo id, quod ex radicum omnium multiplicatione producitur, ſub ſigno mutato.

Sed ſi æquatio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ multiplicetur porrò per $x + 5 = 0$, tunc orietur hæc alia $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, cujus radices quatuor ſunt 2, 3, 4, & -5. Ubi etiam manifeſtum eſt, quantitatem cognitam ſecundi termini -4 eſſe ſummam radicum, ſub ſigno contrario; quantitatem cognitam termini tertii -19 eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis, ſub ſigno proprio; quantitatem cognitam termini quarti $+106$ eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis, ſub ſigno mutato; & quantitatem cognitam termini quinti -120 eſſe productum, quod oritur ex multiplicatione radicum omnium, ſub ſigno proprio.

Hoc idem clariùs patebit, ſi radices æquationum litteris alphabeticis deſignemus, quum hac ratione quantitates, quæ oriuntur ſub ſignis contrariis, non ſe mutuò tollant, ſed maneant in ipſis æquaquationibus. Itaque si multiplicetur $x - a = 0$ per $x - b = 0$, orietur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, cujus radices duæ sunt a, & b. Sed evidens est in hac æquatione quantitatem cognitam secundi termini $- a - b$ esse summã radicum a, & b sub signo mutato; quantitatem verò cognitam tertii termini $+ ab$ esse id, quod producitur ex multiplicatione earundem radicum, sub signo proprio.

Quod si æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$ multiplicetur per $x + c = 0$, orietur hæc alia $x^3 - ax^2 - bx^2 + cx^2 - acx - bcx + abx + abc = 0$, cujus radices sunt a, b, & $- c$. Atque hìc quoque perspicuum est, quantitatem cognitam secundi termini $- a - b + c$ esse summam radicum sub signo mutato; quantitatem cognitam termini tertii $- ac - bc + ab$ esse summam productorum ex singulis binis sub signo proprio; & quantitatem cognitam termini quarti $+ abc$ esse id, quod ex multiplicatione radicum omnium generatur, sub signo contrario.

Jam, quum in secundo termino cujuscumque æquationis existat summa radicum sub signo mutato, perspicuum est, quod quotiescumque ex aliquâ æquatione deficit secundus terminus, tunc summa radicum positivarum æqualis fit summæ ex radicibus negativis. Neque enim aliter abire potest ex æquatione terminus secundus, nisi evanescat quantitas cognita ejus: quæ quidem evanescet, si partes, ex quibus componitur, contrarietate signorum se mutuò destruant. Ita in postremâ æquatione $x^3 - ax^2 - bx^2 + cx^2 - acx - bcx + abx + abc = 0$ evanescet secundus terminus, si fuerit $a + b = c$, hoc est, si radices duæ positivæ simul æquales fuerint radici negativæ.

Inter eos, qui Elementa Algebræ scripserunt, conati sunt nonnulli problemata æquationum constitutiva, ex quorum nempe resolutione æquationes illæ orirētur, determinare. Sano equidem consilio, ne crederent Tyrones, æquationes ad libitum sumptas fictitias esse, & ad nullum problema posse referri. Sed quorsum per ambages id, quod unicâ, & simplicissimâ viâ, quæ ex ipsâ æquationis, terminorumque ejus constitutione derivatur, tradi potest. Satis enim erat sic rem concipere, ut pro unaquaque æquatione invenienda sint tot quantitates, quot sunt dimensiones ejus, sed ita tamen, ut data sit tum summa ipsarum, tum rum summa productorum ex singulis binis, summa productorum ex singulis ternis, &c.

Ut si fuerit æquatio $x^2 - ax + b^2 = 0$, problema ejus constitutivum hoc erit: invenire duas magnitudines, quarum summa sit a, productum verò sub ipsis sit b^2. Et similiter, si habeatur æquatio $x^3 - ax^2 - abx + abc = 0$, problema ejus constitutivum in hunc modum concipi poterit: invenire tres magnitudines, ita ut summa ipsarum sit a, summa productorum ex singulis binis sit $-ab$, & id, quod ex multiplicatione omnium producitur, sit $-abc$. Atque ita quoque, si proponatur æquatio $x^4 + ax^3 - abx^2 - abcx + abcd = 0$, poterit problema ejus constitutivum hoc pacto concipi: invenire quatuor magnitudines, ita ut summa ipsarum sit $-a$, summa productorum ex singulis binis sit $-ab$, summa productorum ex singulis ternis sit $+abc$, & id, quod oritur ex multiplicatione omnium, sit $abcd$.

Neque aliter concipi debent problemata constitutiva æquationum, in quibus unus, vel plures ex terminis intermediis desunt. Ut si fuerit æquatio $x^3 - abx + a^2b = 0$, problema constitutivum hoc erit:

erit: invenire tres magnitudines, ita ut summa ipsarum sit zero, summa productorum ex singulis binis sit $-ab$, omnium verò productum sit $-a^2b$. Pariterque si habeatur æquatio $x^4 - abx^2 - a^2b^2 = 0$, problema constitutivum tale erit: invenire quatuor magnitudines, ita ut tam summa ipsarum, quàm summa productorum ex singulis ternis sit zero, sed ut summa productorum ex singulis binis sit $-ab$, & productum ex omnibus sit $-a^2b^2$.

Itaque in omni æquatione, etsi radices ejus adhuc nos lateant, summa tamen ipsarum, summa productorum ex singulis binis, summa productorum ex singulis ternis, &c. nequaquam nos fugiunt, quum designentur per ipsas quantitates cognitas terminorum æquationis sub signis mutatis in terminis paribus, & sub signis propriis in reliquis terminis. Sed quæ sit summa quadratorum, cuborum, aliarumque altioris ordinis potestatum, quæ fiunt ex iisdem radicibus, facili quoque negotio cognosci potest. Ponamus enim quantitates cognitas terminorum æquationis sub signis mutatis esse p, q, r, s, &c., hoc est p quantitatem cognitam secundi termini, q tertii, r quarti, s quin-

 ti

ti &c. Et signis terminorum probè observatis, fiat $p = a$, $pa + 2q = b$, $pb + qa + 3r = c$, $pc + qb + ra + 4s = d$, & sic in infinitum. Qua ratione erit a summa radicum, b summa quadratorum, c summa cuborum, d summa quadrato-quadratorum, atque ita de reliquis.

Ita si fuerit æquatio $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, quia quantitas cognita in secundo termino est -4, in tertio est -19, in quarto est $+106$, & in quinto est -120; ponendum erit $p = 4$, $q = 19$, $r = -106$, & $s = 120$. Et inde orietur $a = p = 4$, $b = pa + 2q = 54$, $c = pb + qa + 3r = -26$, & $d = pc + qb + ra + 4s = 978$. Quare summa radicum erit 4, summa quadratorum 54, summa cuborum -26, & summa quadrato-quadratorũ 978. Quod quidem perspicuum est. Sunt enim radices illius æquationis numeri 2, 3, 4, & -5. Et profectò summa horum numerorum $2 + 3 + 4 - 5$ est 4, summa quadratorum $4 + 9 + 16 + 25$ est 54, summa cuborum $8 + 27 + 64 - 125$ est -26, & summa quadrato-quadratorum $16 + 81 + 256 + 625$ est 978.

Rationem hujus regulæ facile intelligent, qui tum compositionem potestatum, cùm

cùm constitutionem quantitatum cognitarum, quæ in singulis terminis æquationum reperiuntur, perspectam habeant, ac exploratam. Tantùm notabimus eandem regulã valere quoque, etiam si quantititates p, q, r, s &c. non omnes in æquatione reperiantur: nimirum si quantitatum deficientium, velut æqualium nihilo, nulla ratio habeatur. Ita si fuerit æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, erit $p = 5$, $q = -6$, & omnes aliæ quantitates erunt æquales nihilo. Unde, quum sit $a = p = 5$, $b = pa + 2q = 13$, $c = pb + qa + 3r = 35$, & $d = pc + qb + ra + 4s = 97$; erit 5 summa radicum, 13 sũma quadratorum, 35 summa cuborum, & 97 summa quadrato-quadratorum. Quod rursus perspicuum est. Sunt enim radices propositæ æquationis numeri 2, & 3. Et profectò quemadmodum summa illorum numerorum $2 + 3$ est 5; ita summa quadratorum $4 + 9$ erit 13, summa cuborum $8 + 27$ erit 35, & summa quadrato-quadratorum $16 + 81$ erit 97.

II.

De reductione æquationum compositarum, in quibus aliquæ ex componentibus sunt simplices.

OStenso, qua ratione constituantur quantitates cognitæ, quæ in æquationum terminis reperiuntur; haud difficile modò erit, æquationes illas cõpositas ad propriam sedem revocare, in quibus aliquæ ex æquationibus componentibus sunt simplices. Hunc in finem consideremus oportet, quod quum inter æquationes componentes una, aut plures sunt simplices, æquatio ipsa composita, necessariò unam, aut plures habere debeat radices rationales. Unde reducetur illa ad propriam sedem, si inventis radicibus illis rationalibus, formentur ex iis tot simplices æquationes, quot sunt ipsæ radices. Nam quum istæ sint illæ eædem, ex quibus æquatio componitur, poterit semper per eas æquatio dividi, atque ita ad propriam suam sedem revocari.

Eò itaque res redit, ut qua ratione ex aliqua æquatione radices rationales, si quæ sint, erui possint, ostendamus. Et quo-

quoniam ex iis, quæ articulo antecedenti dicta sunt, liquidò patet, quantitatem cognitam, quæ in ultimo termino cujuscumque æquationis reperitur; esse id, quod ex continuâ radicum omnium multiplicatione producitur; si utique contingat, quantitatem aliquam rationalem esse radicem illius æquationis, sive positivam, sive negativam, ea dividet exactè, & absque ullo residuo quantitatem cognitam, quæ in ultimo termino æquationis continetur. Unde vicissim ad eruendas radices rationales, si quæ sint, ex aliquâ æquatione, satis erit, quantitatis cognitæ in ultimo termino existentis divisores omnes invenire, & inquirere, quinam ex iis, substituti in æquatione loco incognitæ, ejus conditiones adimpleant, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum evanescant.

In hoc autem scrutinio peragendo substituendi sunt divisores loco incognitæ, non modò signo +, verùm etiam signo —; nam fieri potest, ut qui divisor non sit radix positiva alicujus æquationis, idem sit radix negativa. Interim si termini æquationis habeant alternatim signa +, & —; tunc satis erit, divisores illos

illos substituere signo $+$, quia propter signorum alternationem certum est, nullam in æquatione radicem negativam contineri, sed omnes esse positivas. Quemadmodum etiam satis erit illos subrogare signo $-$, si omnes termini æquationis eodem signo afficiantur, quia propter hanc signorum similitudinem certum est, in æquatione nullam radicem positivam contineri, sed omnes esse negativas.

Itaque proponatur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, & oporteat redices rationales, si quas habet, invenire. Inveniantur divisores omnes numeri 6, qui est quantitas cognita ultimi termini, iique erunt quatuor, & non plures, nimirum 1, 2, 3, & 6. Et quoniam termini æquationis propositæ habent alternatim signa $+$, & $-$, substituendi sunt divisores isti loco incognitæ x dumtaxat signo $+$. Itaque quia si loco x ponatur 1, æquationis termini omnes non evanescunt, quum fiant $1 - 5 + 6$, tento divisorem alterum 2, & quia substitutione istius 2, termini evanescunt, quum evadant $4 - 10 + 6$; erit jam 2 æquationis radix una. Quumque evanescant quoque termini, si loco x ponatur divisor tertius 3, erit 3 radix altera.

Itaque radices duæ æquationis sunt 2, & 3; atque adeò æquatio ipsa componitur per multiplicationem æquationum simplicium $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$.

Proponatur æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, & inveniendæ sint radices ejus rationales, si quas habet. Inveniantur divisores omnes numeri 10, qui est quantitas cognita ultimi termini, iique erunt 1, 2, 5, & 10. Et quoniam æquatio proposita unam habet radicem positivam, alteram negativam, substituendi sunt divisores illi, tum signo $+$, cùm signo $-$. Itaque quia nec 1, nec -1 adimplet conditiones incognitæ, tento divisorem alterum 2; & quoniam quum hic substituitur signo $+$, æquationis termini omnes evanescunt, erit 2 radix positiva æquationis. Quumque hoc idem præstet divisor tertius 5, substitutus signo $-$, erit -5 radix altera. Quare radices duæ æquationis erunt 2, & -5; & propterea æquatio ipsa componetur ex multiplicatione æquationum simplicium $x - 2 = 0$, & $x + 5 = 0$.

Proponatur ulteriùs æquatio $x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$, & oporteat radices, si quas habet, rationales invenire. Capiantur divisores numeri 8, qui est quantitas co-

cognitæ ultimi termini, iique erunt 1, 2, 4, & 8. Et quoniam æquatio habet alternatim signa $+$, & $-$, substituendi erunt divisores illi tantùm signo $+$. Itaque quia substituendo divisorem primum 1 loco incognitæ x, fiunt termini æquationis $1 - 8 + 16 - 8$, qui nequaquam evanescunt, substituo divisorem alterum 2; & quia per hujus substitutionem adimplentur conditiones incognitæ, erit 2 radix una æquationis. Quumque nec 4, nec 8 efficiat æquationis terminos omnes evanescere; concludendum est, æquationem propositam unam tantùm habere radicem rationalem, nimirum 2; atque adeo ad ejus compositionem unam dumtaxat æquationem simplicem concurrere, nempe $x - 2 = 0$.

Neque aliter operabitur, si æquatio fuerit litteralis. Proponatur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, cujus ambæ radices sunt positivæ. Capiantur divisores quantitatis cognitæ ab, quæ existit in ultimo termino, iique erunt 1, a, b, & ab. Et quoniam radices aquationis sunt positivæ, substituendi sunt divisores illi dumtaxat signo $+$. Itaque quia conditiones incognitæ x adimplentur tam per quantitatem a, quàm per quantitatem b, quum utraque si loco x in æquatione substituatur, efficiat, æquationis terminos omnes evanescere, erunt a, & b radices propositæ æquationis; adeoque æquatio ipsa componetur ex multiplicatione æquationum simplicium $x - a = 0$, & $x - b = 0$.

Similiter, si æquatio fuerit $x^3 - abx - a^2x + a^2b = 0$, capiantur divisores quantitatis cognitæ in ultimo termino existentis a^2b, iique erunt 1, a, b, a^2, ab, & a^2b. Et quoniam æquatio, si signa terminorum consideres, duas debet habere radices positivas, & unam negativam; substituendi sunt divisores illi, tum signo $+$, cùm signo $-$. Verùm quia dumtaxat divisor secundus a, quum substituitur signo $+$, adimplet conditiones incognitæ x, efficiendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum se mutuò destruant, nec ullus alius hoc idem præstare potest quocumque signo substituatur; consequens est, ut æquatio proposita unam tantùm habeat radicem rationalem, nimirum a; atque adeo ad ejus compositionem unicam quoq; æquationem simplicem concurrere, videlicet $x - a = 0$.

Jam quum omnes æquationes componennentes fuerint ſimplices, ſive primi gradus, tunc propria ſedes æquationis compoſitæ erit ipſe gradus primus; quum radices omnes incognitæ in gradu illo conſiſtant, utpote rationales. Sed ſi non omnes æquationes componentes ſimplices fuerint, tunc æquatio compoſita nequaquam dicenda eſt ſimplex, ſed dijudicanda ſedes ejus ex æquatione, quæ oritur in quotiente, dividendo æquationem compoſitam per ſingulas æquationes ſimplices inventas. Ita quia dividendo æquationem $x^3 - abx - a^2x + a^2b = 0$ per æquationem ſimplicem $x - a = 0$, quæ ſola ad ejus conſtitutionem concurrit, oritur in quotiente æquatio ſecundi gradus $x^2 + ax - ab = 0$; ſedes propria illius æquationis in ſecundo gradu eſſe dicetur.

Sed notetur hìc velim, æquationem compoſitam tunc demum habere propriam ſuam ſedem in gradu illo, cujus deprehenditur æquatio, quæ oritur in quotiente, dividendo æquationem ipſam compoſitam per ſingulas æquationes ſimplices componentes, quum ſedes illius æquationis in tali fuerit gradu. Nam ſi æquatio illa oriatur, exempli gratia, quatuor dimenſionum, tametſi ex æquationibus ſimplicibus componi ulteriùs nequeat, fieri tamen poteſt, ut componatur ex multiplicatione duarum æquationum, quarum unaquæque ſit ſecundi gradus. Quod profectò quum accidit, nequaquam dicenda eſt æquatio illa quarti gradus, nec proinde dici poteſt æquationem ipſam compoſitam in quarto gradu ſuam ſedem habere.

Cæterùm ſi contingat, quantitatem cognitam ultimi termini plures diviſores hebere, tunc methodus eruendi radices rationales, per ſubſtitutionem omnium illorum diviſorum, nonnihil moleſtiæ afferet Analyſtis. Hunc in finem præſtat primò minuere terminos æquationis, ſi fieri poteſt, ope illius transformationis, quæ diviſione peragitur; quum ſic minuatur etiam numerus diviſorum. Secundò invenire limites, intra quos continentur radices tum poſitivæ, cum negativæ, ope earum transformationum, quæ fiunt additione, & ſubtractione; quum diviſores, qui eos limites tranſgrediuntur, tutò negligi poſſint. Tertiò reijcere etiam diviſores, qui quantitatem cognitam ſecundi termini excedunt, quotieſcumque radices æquationis, vel omnes ſunt poſitivæ, vel omnes negativæ. Et denique in in æquationibus litteralibus negligere quoque divisores duarum, aut plurium dimensionum, quum termini omnes sunt homogenei, & æquatio nequit transformari, ponendo incognitam aliam loco quadrati, cubi, aut alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ.

Limites autem, intra quos continentur radices, tum positivæ, cùm negativæ, inveniri quoque possunt, si priùs inveniantur summæ qradratorum, quadrato-quadratorum, cubo-cuborum, &c. ex singulis radicibus. Nam quum radicum omnium quadrata sint positiva, erit item positiva summa quadratorum, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit, quàm quadrato-quadratum radicis maximæ, & summa cubo-cuborũ major, quàm cubo-cubus radicis maximæ. Quamobrẽ si limitem desideres, quem radices nullæ transgrediuntur, quære summam quadratorum ex radicibus omnibus, & extrahe ejus radicem quadratam, quæ quum sit major, quàm maxima radix æquationis, limitem dabit optatum. Sed ad radicem maximam propiùs accedes, si quæras summam quadrato-quadratorum, & extrahas ejus radicem quadrato-quadratam; & adhuc magis, si quæras summam cubo-cuborum, & extrahas ejus radicem cubo-cubicam; atque ita in infinitum.

III.

Methodus inveniendi omnes alicujus quantitatis divisores, ostenditur.

Traditam methodum eruendi radices rationales ex æquationibus, ope divisorum quantitatis cognitæ, quæ existit in ultimo termino, duplici potissimùm ratione non omnibus probatam video; primò quia non ita facile est, omnes alicujus quantitatis divisores invenire; & secundò, quia quum permulti sunt divisores, omnes tentare, tædium affert. Jam inveniendo limitem, quem radices nullæ transgrediuntur, haud quidem necesse est divisores omnes tentare, sed sufficiet eorum periculum facere, qui limitem illum non excedunt. Itaque ne ulla supersit difficultas, ostendenda modò est methodus, qua mediante omnes alicujus quantitatis divisores possint inveniri.

Et quidem, si quantitas fuerit numerica, invenientur omnes ejus divisores in hunc

hunc modum. Dividatur ea per minimum sui divisorem, & quotus per minimum adhuc sui divisorem, idque fiat, usque donec quotus oriatur indivisibilis. Hac enim ratione omnes quantitatis divisores primi habebuntur. Et siquidem horum divisorum capiantur producta ex singulis binis, ternis, quaternis, &c., habebuntur hoc pacto omnes divisores compositi.

Ita si numeri 60 divisores omnes desiderentur, dividatur primò eum per 2, ut quotus fiat 30; tum quotum istum 30 dividatur rursus per 2, ut alius oriatur 15; porrò 15 dividatur per 3, & quia oritur quotus indivisibilis 5, erunt divisores primi 1, 2, 2, 3, 5. Sed qui ex istorum binis componuntur, sunt 4, 6, 10, 15; qui verò ex ternis sunt 12, 20, 30; quique demum ex omnibus est ipse numerus 60.

Similiter si quærantur divisores omnes numeri 100, dividatur primò ille per 2, ut fiat quotiens 50; tum quotiens iste 50 dividatur iterum per 2, ut alius oriatur 25; & quia diviso hoc alio quotiente 25 per 5 minimum ejus divisorem, oritur quotus indivisibilis 5; erunt divisores primi numeri propositi 1, 2, 2, 5, 5. Unde qui ex istorum binis componuntur, erunt 4, 10, 25; qui ex ternis, erunt 20, & 50; qui verò componitur ex omnibus, erit ipse datus numerus 100.

Hanc eandem methodum experiri quoque licet in quantitatibus litteralibus, quum vel simplices sunt, vel non adeò compositæ. Ita si quantitatis $21ab^2$ divisores omnes desiderentur, dividatur ea per 3, & quotus $7ab^2$ per 7, & quotus ab^2 per a, & quotus b^2 per b. Unde quum restet quotus indivisibilis b, erunt divisores primi quantitatis propositæ 1, 3, 7, a, b, b; sed qui ex istorum binis componuntur, sunt 21, $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, b^2; qui ex ternis, sunt $21a$, $21b$, $3ab$, $3b^2$, $7ab$, $7b^2$, ab^2; qui ex quaternis, sunt $21ab$, $21b^2$, $3ab^2$, $7ab^2$; qui verò ex quinis, est ipsa quantitas proposita $21ab^2$.

Eadem ratione, si quærantur divisores omnes quantitatis litteralis $2ab^2 - 6a^2c$; divido primò eam per 2; tum quotum $ab^2 - 3a^2c$ per a; quumque restet quotus indivisibilis $b^2 - 3ac$, erunt divisores primi quantitatis propositæ 1, 2, a, $b^2 - 3ac$. Unde qui ex binis istorum componuntur, erunt $2a$, $2b^2 - 6ac$, ab^2 —

$-3a^2c$; qui verò componitur ex ternis, erit ipsa quantitas proposita $2ab^2-6a^2c$. Et eodem modo divisores omnes quantitatis a^2b-abc erunt, a, b, $a-c$, ab, a^2-ac, $ab-cb$, a^2b-abc.

Sed si quantitas litteralis sit valde composita, ita ut divisâ per omnes suos simplices divisores, suspicio sit, eam posse divisorem aliquem compositum habere; tunc disponatur illa secundùm dimensiones unius ex litteris ejus, eademque ponatur æqualis zero, sive nihilo, ut fiat æquatio, in qua incognitæ munus subeat littera illa. Quum enim in istâ æquatione fictitiâ quantitas cognita ultimi termini non sit adeo composita, quemadmodum est summa totius æquationis, poterunt per regulam traditam divisores ejus omnes inveniri. Unde si contingat, ipsam æquationem dividi posse per binomium, constans litterâ, quæ subit vices incognitæ, plus, vel minus aliquo ex iis divisoribus; erit binomium illud divisor compositus propsitæ quantitatis.

Esto, exempli gratiâ, $b^2d-da^2+a^3-b^2d$ quotus, qui remanet, divisâ datâ quantitate per omnes suos simplices divisores, & inquirendum sit, num quotus iste admittat divisorem aliquem compositum. Disponatur quantitas illius quotiẽtis secundùm dimensiones litteræ a, & fiat $a^3-da^2+b^2a-b^2d=0$. Inveniantur divisores omnes quantitatis b^2d, quæ existit in ultimo termino hujus æquationis, iique erunt 1, b, d, b^2, bd, b^2d. Et quoniam æquatio dividi potest exactè, & absque ullo residuo per binomium $a-d$, ut patet, si loco a substituatur d, quum æquationis termini omnes evanescant; erit $a-d$ divisor compositus illius quotientis. Et quia factâ divisione, oritur quotus indivisibilis a^2+b^2, hic erit ejusdem quotientis divisor alter compositus: nec præter hos duos alius quispiam poterit exhiberi.

Similiter si fuerit $11a^2-7a^3-30+a^4+13a$ quotus, qui superest, dividendo datam quãtitatem per omnes suos simplices divisores, dispono partes ejus secundùm dimensiones litteræ a, & ex iis constituo æquationem $a^4-7a^3+11a^2+13a-30=0$. Tum quia divisores numeri 30, qui reperitur in ultimo termino, sunt 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, tento, num æquatio illa dividi possit per binomium, compositum ex litterâ a plus, vel minus aliquo ex iis divisoribus. Et quoniam reperio, dividi eam posse tum per bi-

binomium $a - 2$, cùm per binomium $a - 3$, ut patet, si in æquatione loco litteræ a substituatur tum 2, cùm 3; erunt duo ista binomia divisores duo compositi illius quotientis. Quumque factâ utrâque divisione, relinquatur quotus indivisibilis $a^2 - 2a - 5$, habendus est quotus iste pro tertio divisore cōposito, nec præter hos tres alii poterunt exhiberi, nisi qui ex illorum binis, aut ternis componuntur.

Jam si dispositâ quantitate secundùm dimensiones cujuslibet ex litteris, in eâ contentis, numquam talis habeatur æquatio, ut dividi possit per aliquod binomium, compositum ex litterâ illâ plus, vel minus uno ex divisoribus ultimi termini; concludendum erit, quantitatem illam non admittere divisores compositos unius dimensionis. Sed si quantitas ipsa sit plurium, quàm trium dimensionum, poterit fortasse divisores admittere compositos plurium item dimensionum. Verùm divisores istos invenire, inutile erit, quia in æquationibus litteralibus homogeneis, quæ deprimi non possunt, substituendo in locum incognitæ potestatem quamvis alterius incognitæ, quales ut plurimum esse solent æquationes, ii tantùm divisores sunt eligendi, qui sunt unius

unius dimensionis.

Interim si desiderentur, in iis inveniendis non hærebit Analysta. Nam quemadmodum ad inveniendos divisores compositos unius dimensionis, satis erit disponere partes datæ quantitatis secundùm dimensiones unius ex litteris ejus, & formatâ ex iis æquatione, inquirere methodo jam traditâ, num ad constitutionem istius fictitiæ æquationis, aliæ concurrant æquationes simplices; ita ad inveniendos divisores compositos duarum, aut plurium dimensionum, ordinatâ rursus quantitate secundùm dimensiones unius ex litteris in eâ contentis, & institutâ æquatione ex partibus ejus, satis erit methodo mox tradendâ investigare, num æquatio illa fictitia in duas alias gradus inferioris deprimi queat.

Sed nolim hìc reticere, quod aliquando divisores isti compositi faciliùs, quàm per has regulas, possint investigari. Ut si littera aliqua in quantitate propositâ sit unius tantùm dimensionis; quærendus erit maximus communis divisor terminorum, in quibus littera illa reperitur, & relquorum terminorum, in quibus illa non reperitur. Hujusmodi namque divisor communis dividet quoque totam quantitatem; & si nullus erit talis divisor communis, nullus item erit divisor totius. Ita si fuerit quantitas $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - cx^3 + acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c - 8a^4$, quæratur communis divisor terminorum $- cx^3 + acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c$, in quibus c est unius tantùm dimensionis, & terminorum reliquorum $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$, ac divisor ille, qui erit $x^2 + 2ax - 2a^2$, dividet totam quantitatem.

IV.

De reductione æquationum compositarum quarti gradus, in quibus nulla ex componentibus est simplex.

Postquam innotuerit, ope divisorum, æquationem secundi, aut tertii gradus nullam habere radicem rationalem, nec ad ejus constitutionem æquationem ullam simplicem concurrere; concludendum est, propriam sedem propositæ æquationis in gradu illo subsistere, nec proinde ad gradum inferiorem absque eo, quod in radicales incidatur, deprimi posse. Sed hoc idem de æquationibus quarti, aut ulterioris gradus nequit asseverari: enim verò

verò tametsi ad earum constitutionem nulla æquatio simplex interveniat, adhuc tamen fieri potest, ut ad gradum inferiorem deprimi queant; nimirum si ex duabus, aut pluribus æquationibus componantur, quæ tametsi non sint simplices, inferioris tamen gradus deprehendantur.

Itaque in reductione æquationum quarti, aut ulterioris gradus ad propriam sedem, hunc alium oportet casum contemplemur. Et ut ab æquationibus quarti gradus ordiamur, perspicuum est, quod quum istæ in propriâ sede non consistunt, nec tamen ad earum constitutionem ulla concurrit æquatio simplex, non aliter componi queant, quàm per multiplicationem duarum æquationum, quarum unaquæque sit secundi gradus. Sed circa duas istas æquationes componentes tria contingere possunt. Primum; ut utraque secundo termino careat. Alterum; ut una careat secundo termino, alia illum admittat. Et tertium; sive postremum, ut tam una, quàm altera secundo termino gaudeat.

Quantum ad primum, nempe quum æquationum componentium utraque secũdo termino caret, ponamus æquationes illas esse $x^2 + a = 0$, & $x^2 + b = 0$. Itaque

que si duæ istæ æquationes mutiplicentur inter se, prodibit æquatio tertia $x^4 + ax^2 + bx^2 + ab = 0$, quæ secundo, & quarto termino caret. Unde discimus, tunc quidem æquationes quarti gradus componi posse ex multiplicatione duarum æquationum secundi gradus, quarum unaquæque secundo termino careat, quum in iis, non modò secundus, verùm etiam quartus terminus deficit. Sed quando demum id fieri queat, & qua ratione datâ æquatione compositâ possint æquationes duæ componentes determinari, haud difficile erit inquirere.

Nimirum, quia in æquatione compositâ $x^4 + ax^2 + bx^2 + ab = 0$, si fiat quadratum ex $a + b$, quantitate cognitâ tertii termini, eique mutato signo addatur quadruplum ultimi termini omninò noti, oritur quantitas $a^2 - 2ab + b^2$, quæ est quadratum perfectum; dividetur æquatio quarti gradus, quæ secundo, & quarto termino caret, in alias duas secundi gradus, si quadratum ex quantitate cognitâ termini tertii, adsciscens quater terminum ultimum sub signo mutato, maneat adhuc quadratum. Quumque radix quantitatis $a^2 - 2ab + b^2$ sit $a - b$, quæ addita cum $a + b$ dat $2a$, ex illâ verò

subducta relinquit $2b$; invenientur quantitates cognitæ æquationum componentium, si capiantur semisses summæ, & differentiæ, quæ oriuntur addendo, & subtrahendo quantitati cognitæ termini tertii radicem illius novi quadrati.

Ita si fuerit æquatio $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$, quia quadratum ex quantitate cognitâ tertii termini est 25, addendo ei quater quantitatem cognitam ultimi termini sub signo mutato, habebitur 1 quadratum perfectum. Unde quia radix hujus quadrati, quæ est similiter 1, addita ad -5 dat -4, exinde verò subtracta relinquit -6, & semissis summæ est -2, semissis verò differentiæ est -3; erunt æquationes componentes $x^2 - 2 = 0$, & $x^2 - 3 = 0$. Atque ita quoque si habeatur æquatio $x^4 + 3x^2 - 40 = 0$, quia quadratum ex quantitate cognitâ termini tertii est 9, addendo ei quater quantitatem cognitam ultimi termini sub signo contrario, habetur 169 similiter quadratum perfectum. Quocirca quia radix hujus quadrati 13 addita ad $+3$ dat 16, exinde verò subducta relinquit -10, & semissis summæ est 8, semissis verò differentiæ est -5, erunt æquationes duæ componentes $x^2 + 8 = 0$, & $x^2 - 5 = 0$.

Quan-

Quantum ad secundum, nimirum quum æquationum componentium, una secundo termino caret; altera non item, sit $x^2 + a = 0$ æquatio, quæ caret secundo termino, & $x^2 + bx + c = 0$ æquatio, quæ terminis omnibus est repleta. Itaque si multiplicentur inter se duæ istæ æquationes; prodibit æquatio tertia $x^4 + bx^3 + cx^2 + ax^2 + abx + ac = 0$, in qua tãtùm terminus tertius, utpote cõpositus, deficere potest. Et quoniam in istâ æquatione secundus, & quartus terminus simul, si sub propriis signis ponantur æquales nihilo; restituunt nobis æquationem componentem, quæ secundo termino caret: proinde æquatio quarti gradus, quæ sic componitur, resolvetur in suas æquationes componentes; si dividatur per æquationem secundi gradus; quæ oritur, ponendo secundum, & quartum terminum simul sub propriis signis æquales zero; sive nihilo. Et siquidem hæc divisio fieri nequit, tunc certum erit æquationem propositam, vel in propriâ suâ sede reperiri; vel eo, qui supponitur, modo nequaquam compositam esse.

Hoc pacto si habeatur æquatio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$; quia positis secundo, & quarto termino simul æqualibus nihilo, fit $-2x^3 + 6x = 0$, hoc est $x^2 - 3 = 0$, & æquatio proposita dividitur exactè per æquationem istam $x^2 - 3 = 0$, quum oriatur in quotiente $x^2 - 2x - 4 = 0$; erunt æquationes duæ componentes $x^2 - 3 = 0$, & $x^2 - 2x - 4 = 0$. Atque ita quoque si habeatur æquatio $x^4 + ax^3 + a^2bx - a^2b^2 = 0$, quia ponendo $ax^3 + a^2bx = 0$, habetur æquatio secundi gradus $x^2 + ab = 0$, quæ dividit exactè, & absque ullo residuo æquationem propositam; quum det in quotiente $x^2 + ax - ab = 0$; erunt illius æquationes componentes $x^2 + ab = 0$, & $x^2 + ax - ab = 0$. Sed æquatio ista $x^4 + ax^3 - abx^2 + a^2cx - a^4 = 0$ vel est irreducibilis, vel nequaquam hoc modo componitur, quum dividi non possit per æquationem $x^2 + ac = 0$, quæ oritur, ponendo secundum, & quartum terminum sub propriis signis æquales zero, sive nihilo.

Quoniam autem divisio tædium afferre solet, evitabitur illa, si ex reliquis æquationis propositæ terminis institutâ æquatione aliâ, inquiratur ope substitutionis, num in eâ valor incognitæ sit ille idem, qui eruitur ex priori æquatione. Si enim hoc contigerit, certum erit æquaquationem eo, qui supponitur, modum compositam esse; secus verò, si alium valorem habere reperiatur. Sic in æquatione $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$, quæ constituitur ex reliquis terminis æquationis $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$, quia ponendo 3 loco x^2, & 9 loco x^4, termini ejus fiunt $9 - 21 + 12$, qui contrarietate signorum se mutuò destruunt, erit in æquatione illâ revera $x^2 - 3 = 0$. Et similiter, quia in æquatione $x^4 - a^2b^2 = 0$, quæ formatur ex reliquis terminis æquationis $x^4 + ax^3 + a^2bx - a^2b^2 = 0$, x^2 habet eundem valorem, ac in æquatione istâ $x^2 + ab = 0$, consequens est, ut revera in æquatione illâ sit $x^2 + ab = 0$, atque adeo, ut per istam exactè dividi possit.

Quantum ad tertium, videlicet, quum æquationum componentium utraque terminis omnibus est repleta, sit $x^2 + ax + c = 0$ æquatio una, & $x^2 + bx + d = 0$ æquatio altera. Itaque si duæ istæ æquationes multiplicentur inter se, prodibit æquatio tertia $x^4 + ax^3 + bx^3 + cx^2 + dx^2 + abx^2 + adx + bcx + cd = 0$. Et quoniam in istâ æquatione quantitates c, & d, componentes mutuâ multiplicatione ultimum terminum, si mutatis signis addantur quantitati cognitæ tertii termini $c + d + ab$, fiet illa ab, cujus quadruplum si addatur sub signo mutato quadrato ex quantitate cognitâ secundi termini $a + b$, orietur $a^2 - 2ab + b^2$ similiter quadratum perfectum; discimus hinc æquationem quarti gradus componi eo modo, quem supponimus, si ultimus terminus tales admittat divisores, ut duo, qui simul multiplicati eum terminum producant, additi sub signis contrariis quantitati cognitæ tertii termini, dent talem aliam quantitatem, ut quadratum quantitatis cognitæ secundi termini, adsciscens quadruplum illius, sub signo mutato, maneat adhuc quadratum.

Jam si hoc contigerit, æquationes componentes determinabuntur in hunc modum. Quoniam quantitates c, & d, quæ mutuâ multiplicatione componunt ultimum terminum cd, sunt ultimi termini æquationum componentium; erunt divisores, qui effectum illum producunt, ultimi termini in æquationibus componentibus. Et quoniam radix novi illius quadrati $a^2 - 2ab + b^2$ est $a - b$, quæ addita ad $a + b$ dat $2a$, exinde verò subtracta relinquit $2b$, habebuntur quantitates cognitæ, repræsentatæ per a, & b in se-

secundis terminis æquationum componentium, si radix novi illius, quod producitur, quadrati, primò addatur, deinde subtrahatur quantitati cognitæ secundi termini, capianturque semisses summæ, & differentiæ. Denique quæ quantitates ponendæ sint in unâ æquatione, quæ verò in alterâ; id tentando poterit determinari.

Sed notetur hoc loco velim, quod tametsi certò concludi possit, æquationem propositam nequaquam componi eo modo, qui supponitur, quum nulli sunt divisores, qui eum producunt effectum; non hinc tamen vicissim adstruenda compositio illa, quum reperiuntur tales divisores, quia fieri adhuc potest, ut æquatio proposita illam compositionem non admittat. Neque id mirum videri debet. Nulla enim hactenus habita à nobis est ratio quantitatis cognitæ quarti termini: & profectò quum aliquid debet determinari, conditiones ejus omnes sunt evolvendæ. Itaque, num æquatio proposita sit composita, nec ne, constabit nobis, si rei periculum fiat, hoc est, si multiplicentur inter se æquationes inventæ.

Proponatur æquatio $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 22x + 20 = 0$.

Jam ultimi termini divisores sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20; adeoque qui mutuâ multiplicatione eum componere possunt, sunt vel 1, & 20; vel -1, & -20; vel 4, & 5; vel -4, & -5; vel 2, & 10; vel -2, & -10. Sed quoniam dumtaxat divisores duo -4, & -5 hujusmodi sunt, ut additi signis mutatis quantitati cognitæ tertii termini, producant effectum illum; proinde ii tantùm sunt eligendi. Itaque quia quantitas cognita tertii termini, eorum sub contrariis signis additione, fit $+6$, & quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini est 25: erit 1 quadratum, quod oritur, addendo ad 25 quadruplum ipsius 6 sub signo mutato. Unde quum radix hujus quadrati, quæ similiter est 1, addita ad $+5$ det $+6$, exinde verò subtracta relinquat $+4$; erit $+3$ semissis summæ, & $+2$ semissis differentiæ: proindeque, si æquatio sit composita, æquationes componentes erunt, vel $x^2 + 3x - 4 = 0$, & $x^2 + 2x - 5 = 0$; vel $x^2 + 3x - 5 = 0$, & $x^2 + 2x - 4 = 0$.

Hæc eadem regula valet etiam, si aliquis ex terminis intermediis, cujus quantitas cognita ad calculum poni debet, desit fit in æquatione; nimirum fingendo quantitatem cognitam illius termini esse zero, sive nihilum. Ita si æquatio fuerit $x^4 - 8x - 32 = 0$, quia divisores -4, $+8$, qui simul multiplicati componunt ultimum terminum -32, additi sub signis contrariis ad zero, quantitatem cognitam tertii termini, dant -4, cujus quadruplum si addatur sub signo mutato quantitati cognitæ secundi termini, quæ similiter est zero, fit 16 quadratum perfectum: proinde invenientur æquationes componentes, si utique æquatio proposita sit composita, extrahendo radicem quadratam ex 16, & ejus sub utroque signo semisses capiendo, quæ erunt $+2$, & -2. Sic enim æquationes componentes erunt vel $x^2 + 2x - 4 = 0$, & $x^2 - 2x + 8 = 0$; vel $x^2 + 2x + 8 = 0$, & $x^2 - 2x - 4 = 0$.

Cæterùm, quia divisores, qui producunt effectum illum, debent esse ultimi termini æquationum componentium; perspicuum est, quod si æquatio fuerit litteralis, omnesque ejus termini fuerint homogenei, ii tantùm divisores possint effectum illum præstare, qui similiter sunt homogenei, hoc est, qui sunt duarum dimensionum. Ita si fuerit æqua-

tio $x^4 - a^2x^2 + 2a^2bx - a^2b^2 = 0$, tametsi divisores ultimi termini sint 1, a, b, a^2, b^2, ab, a^2b, ab^2, & a^2b^2; attamen qui reductioni æquationis possunt inservire, sunt, vel $+a^2$, & $-b^2$, vel $-a^2$, & $+b^2$, vel $+ab$, & $-ab$.

V.

Reductio æquationum compositarum quarti gradus alia methodo instituitur.

Regula mox tradita, pro reducendis æquationibus quarti gradus, quum ambæ æquationum componentium terminis omnibus sunt repletæ, etsi sit valde facilis, ac expedita, attamen ad æquationes altioris gradus nequaquam potest promoveri. Hunc in finem, pro reducendis hujusmodi æquationibus, aliam hìc placet methodum proponere, quæ generalis erit, & ad omnes cujuscumque gradus æquationes poterit applicari. Est autem summa hujus methodi hæc: nimirum assumantur æquationes duæ componentes indeterminatè, & quæ ex earum multiplicatione componitur, conferatur cum æquatione propositâ: nam factâ mutuâ terminorum collocatione, habebuntur totidem aliæ æquationes, quarum ope facile erit, æquationes componentes determinare.

Hanc methodum experiamur primò in ipsis æquationibus quarti gradus. Itaq; si $x^2 + ax + c = 0$, & $x^2 + bx + d = 0$ referant æquationes componentes, erit æquatio composita $x^4 + ax^3 + bx^3 + cx^2 + dx^2 + abx^2 + adx + bcx + cd = 0$. Unde si æquatio proposita fuerit $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + f = 0$ (quam etiam indeterminatam assumimus, ut possit omnes quarti gradus æquationes repræsentare) conferendo terminos unius cum terminis alterius; habebuntur quatuor aliæ æquationes, nempe $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = ad + bc$, & $f = cd$.

Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $p = a + b$, erit transponendo $p - a = b$, adeoque multiplicando terminos omnes per c, erit $pc - ac = bc$. Quare substituendo in tertiâ æquatione $r = ad + bc$ loco bc valorem suum $pc - ac$, habebitur $r = ad + pc - ac$; atque adeo multiplicatis rursus terminis omnibus per c, erit $rc = adc + pcc - acc$. Est autem in quartâ æquatione $cd = f$. Itaque erit $rc = af + pcc$

$- acc$: unde infertur $a = \dfrac{rc - pcc}{f - cc}$.

Quare cognito valore quantitatis c, cognoscetur etiam valor ipsius a, & consequenter determinabitur prior ex æquationibus componentibus $x^2 + ax + c = 0$: qua utique determinatâ, altera ope divisionis poterit definiri.

Jam quantitas c, quum dividat exactè ultimum terminum; (est enim $cd = f$), poterit tentando inveniri: nimirum assumendo pro eâ successivè divisores omnes ultimi termini. Itaque reducentur hac methodo æquationes quarti gradus, si ex divisoribus ultimi termini talis possit inveniri, ut determinando secundùm eum æquationem $x^2 + ax + c = 0$, hæc talis evadat, ut dividat exactè, & absque ullo residuo æquationem propositam. Sed divisores tentandi sunt sub utroq; signo; & si æquatio proposita fuerit litteralis, omnesque ejus termini fuerint homogenei, ii tantùm sunt tentandi, qui sunt duarum dimensionum.

Proponatur, exempli gratiâ, reducenda æquatio $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 6 = 0$. Jam divisores ultimi termini sub utroque signo sunt $1, 2, 3, 6, -1, -2,$

-3, -6. Ponatur -2 pro c. Et quia in æquatione propositâ p est -7, r est $+18$, & s est $+6$, erit $a = \frac{rc - pcc}{s - cc} = \frac{-36 + 28}{6 - 4} = -4$: proindeque æquatio $x^2 + ax + c = 0$ fiet $x^2 - 4x - 2 = 0$. Et quoniam æquatio proposita $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 6 = 0$ dividitur exactè, & absque ullo residuo per hanc aliam $x^2 - 4x - 2 = 0$, quum oriatur hæc altera in quotiente $x^2 - 3x - 3 = 0$; consequens est, ut proposita æquatio sit composita, & ut ejus æquationes componentes sint $x^2 - 4x - 2 = 0$, & $x^2 - 3x - 3 = 0$.

Proponatur similiter æquatio $x^4 - d^2x^2 + 2d^2bx - d^2b^2 = 0$. Et quoniam æquatio ista est litteralis, omnesque ejus termini sunt homogenei, capiendi sunt dumtaxat divisores ultimi termini, qui duas habent dimensiones, nempe d^2, b^2, db. Itaque, quia in æquatione propositâ p est zero, r est $+2d^2b$, & s est $-d^2b^2$, ponendo $-db$ pro c, fiet $a = \frac{rc - pc^2}{s - c^2} = \frac{-2d^3b^2}{-2d^2b^2} = d$; adeoque æquatio $x^2 + ax$

$+ c = 0$ evadet $x^2 + dx - db = 0$. Unde quia æquatio proposita $x^4 - d^2x^2 + 2d^2bx - d^2b^2 = 0$ dividitur exactè per æquationem istam $x^2 + dx - db = 0$, quum oriatur in quotiente hæc altera $x^2 - dx + db = 0$, concludendum est, propositam æquationem compositam esse, ejusque æquationes componentes esse $x^2 + dx - db = 0$, & $x^2 - dx + db = 0$.

Sed proponatur ulteriùs æquatio $x^4 - 11x^3 + 38x^2 - 44x + 16 = 0$. Hæc si reducenda esset methodo superiùs tradita, invenietur pro æquationibus componentibus $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$; quum 4, & 4 sint divisores, qui additi ad quantitatem cognitam tertii termini sub signis mutatis, dent talem aliam quantitatem, ut quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ termini secundi, adsciscens quadruplum illius, sub signo contrario, maneat adhuc quadratum. Itaq; si eadem æquatio reducenda esset hac aliâ methodo, necesse foret pro c ponere 4. Jam verò quum p sit -11, r sit -44, & s sit $+16$, invenitur $a = \frac{rc - pc^2}{s - c^2} =$

$$\frac{-176+176}{16-16} = \frac{0}{0}$$. Fallit ergo in hoc exemplo methodus, & quæ sit una ex æquationibus componentibus ope ejus nequaquam erui potest.

Quum primum id mihi sese obtulit, dicere vix possum, quantum animo conciderim. Veritatem namque methodi perspectam habebam, ac exploratam, nec poteram de illâ dubitare; æquationem autem propositam compositam esse, & in duas alias secundi gradus divisiblem, jam aliunde notum mihi erat. Itaque, cur falleret in illâ æquatione methodus, ex solidis principiis deducta, comprehendere sanè non poteram. Calculum denuò, atque iterum institui, ne in eo error subesset. Sed idem semper erat eventus, & quæ primò sese obtulit impossibilitas, eadem semper occurrebat. Interim re pressiùs consideratâ, mysterii hujus rationem illicò novi.

Nimirum, quia æquationes componentes sunt $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$, perspicuum est, eas in ultimo termino eandem quantitatem cognitam habere. Itaque, quum pro c assumitur 4, æquatio $x^2 + ax + c = 0$ ad utram-

utramque æquationum componentium, ut ita dicam, inclinat; adeoque nulla ratio est, cur in unam potiùs, quàm in alteram debeat converti. Necesse est ergo, ut quum determinatur æquatio illa, in utramque simul degeneret; quod utique fieri non potest, nisi pro quantitate a duplex valor inveniatur. Hinc itaque fit, ut fallat methodus in exemplo proposito; quia nempe secundum methodum illam unicus tantum valor quantitatis a potest inveniri.

Sed crediderim, tantùm abesse, ut deficiat nobis methodus in hoc exemplo, ut potiùs rem nobis sub oculos ponat, & quid in eâ latitet, fideliter nobis aperiat. Invenitur quippe pro quantitate a beneficio illius methodi quotiens, qui oritur, dividendo zero per zero, hoc est infinitesimam ultimi generis per aliam ejusdem generis infinitesimam. Sed nonne ex principiis supra positis, quum duæ ejusdem generis infinitesimæ per se mutuò dividuntur, quotiens, qui exinde oritur, est quantitas finita? Adumbrat itaque methodus valorem quantitatis a, verùm quia illum nobis exhibet indeterminatè, quid aliud exinde arguendum, nisi quod a multiplex esse debeat?

 Jam,

Jam, ut in hujus generis æquationibus reducendis methodus procedat, determinanda est quãtitas a ope alterius c tali æquatione, ut duplex exinde valor colligi possit: id, quod factu facile erit. Quum enim habeatur $q = c + d + ab$, erit $d = q - c - ab$; atque adeo multiplicando terminos omnes per c, erit $cd = qc - cc - abc$. Sed habetur quoque $cd = s$. Itaque erit $qc - cc - abc = s$. Jam verò in æquatione $p = a + b$, transponendo, est $b = p - a$, & $abc = pac - aac$, si utique termini omnes multiplicentur per ac. Quare si in æquatione $qc - cc - abc = s$ loco abc ponatur valor inventus $pac - aac$, erit $qc - cc - pac + aac = s$, quæ ordinata juxta dimensiones litteræ a, fiet $a^2 - pa - c + q - \frac{s}{c} = 0$, ubi littera a, propter duas dimensiones, duplicem valorem admittit.

Videamus itaque modò, num determinando valorem ipsius a ope hujus æquationis, methodus procedat in reducendâ æquatione superiùs propositâ $x^4 - 11x^3 + 38x^2 - 44x + 16 = 0$: nimirum assumendo divisorem 4 pro c, & subrogando in æquatione illâ indeterminatâ loco

$p, q,$

$p, q,$ & s valores suos, mutabitur in hanc aliam $a^2 + 11a + 30 = 0$. Jam verò valores incognitæ a in istâ æquatione sunt -6, & -5; quum uterque istorum numerorum, substitutus in æquatione loco incognitæ a, efficiat æquationis terminos omnes evanescere. Itaque quum pro c, assumitur 4, a esse potest vel -6, vel -5. Unde inferuntur æquationes duæ componentes $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Cæterùm hac eadem methodo determinari quoque possunt æquationes componentes, quotiescumque secundo termino carent. Multiplicetur etenim æquatio $x^2 - 3 = 0$ per hanc aliam $x^2 - 2x - 2 = 0$; jam producetur æquatio quarti gradus $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 6 = 0$. Assumatur -3 pro c, & factâ debitâ substitutione, invenietur $a = \frac{rc - pcc}{s - cc} = \frac{-18 + 18}{6 - 9} = \frac{0}{-3}$. Sed quum zero dividitur per quantitatem finitam, quotiens, qui inde oritur est etiam zero; quum ex principiis supra positis, multiplicando, vel dividendo infinitesimam aliquam per quantitatem finitam, producatur infinitesima ejusdem generis. Est

igi-

igitur valor ipsius a nullus, & ea propter æquatio $x^2 + ax + c = 0$ mutabitur in hanc aliam $x^2 - 3 = 0$, quæ est æquatio componens, secundo termino carens.

Interim, si multiplicetur $x^2 - 3 = 0$ per $x^2 - 2x - 3 = 0$, ut producatur æquatio quarti gradus $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 9 = 0$; tunc ad inveniendas æquationes componentes, necesse est, ut valorem ipsius a eruamus non quidem ex æquatione simplici $a = \frac{rc - pcc}{f - cc}$, sed ex æquatione compositâ $a^2 - pa + q - c - \frac{f}{c} = 0$. Nam ponendo -3 pro c, æquatio quidem simplex dabit pro a valorem indeterminatum, hoc est quotientem, qui oritur, dividendo zero per zero; æquatio verò composita mutabitur in hanc aliam $a^2 + 2a = 0$, ubi valores incognitæ a sunt zero, & -2, tales nimirum, quales esse debent quantitates cognitæ in secundis terminis æquationum componentium. Quod exinde etiam repeti debet, quia in æquationibus componentibus eadem est quantitas cognita ultimi termini.

Ea-

VI.

Eadem reducendi methodus ad æquationes compositas altioris gradus extenditur.

In reducendis æquationibus compositis, quæ plures habent, quàm quatuor dimensiones, varii quoque casus essent distinguendi: sed quum particularia sub universalibus contineantur, satius erit, eum casum expendere, quando æquationes componentes terminis omnibus sunt repletæ. Itaque, si æquatio composita fuerit quinti gradus, nec ad ejus constitutionem ulla concurrat æquatio simplex, non aliter ea componi poterit, quàm per multiplicationem mutuam duarum æquationum, quarum una sit secundi gradus, altera tertii. Unde assumptis æquationibus illis indeterminatè, & aliâ per earum multiplicationem compositâ, conferendi sunt termini istius cum terminis æquationis propositæ, ut possint æquationes illæ componentes determinari.

Nimirum si $x^2 + ax + c = 0$, & $x^3 + bx^2 + dx + f = 0$ sint æquationes duæ componentes, indeterminatè sumptæ, mul-

multiplicando eas per ſe mutuò, erit æquatio compoſita $x^5 + ax^4 + bx^4 + cx^3 + dx^3 + abx^3 + fx^2 + bcx^2 + adx^2 + cdx + afx + cf = 0$. Unde ſi æquatio propoſita ſit $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, quam itidem indeterminatam accipimus, ut poſſit omnes quinti gradus æquationes repræſentare, conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur quinque aliæ æquationes, nempe $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = f + bc + ad$, $s = cd + af$, & $t = cf$.

Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $p = a + b$; erit tranſponendo $p - a = b$; atque adeo, multiplicando terminos omnes per a, erit $pa - aa = ba$. Unde ſi in ſecundâ æquatione $q = c + d + ab$ loco ab ponatur valor iſte $pa - aa$, erit $q = c + d + pa - aa$; hoc eſt, tranſponendo, $q - c - pa + aa = d$, adeoque, multiplicando terminos omnes per c, erit $qc - cc - pac + aac = cd$. Jam verò quum in quartâ æquatione habeatur $s = cd + af$, erit $s - af = cd$. Quare erit etiam $qc - cc - pac + aac = s - af$; & conſequenter, multiplicatis terminis omnibus per c, erit $qc^2 - c^3 - pac^2 + a^2c^2 = cs - acf$. Quumque in ultimâ æquatione habeatur $t = cf$,

erit tandem $qc^2 - c^3 - pac^2 + a^2c^2 = cs - at$, hoc eſt $a^2 - pa + \frac{ta}{c^2} - c + q - \frac{s}{c} = 0$.

Hinc cognito valore ipſius c, qui tentando poteſt inveniri, quum ſit diviſor exactus ultimi termini, facile erit, ope hujus æquationis, valorem quantitatis a invenire, ipſamq; adeo æquationem componentem $x^2 + ax + c = 0$ determinare. Hac autem determinatâ, dividatur per eam æquatio propoſita. Et ſiquidem contingat, diviſionem fieri poſſe exactè, & abſque ullo reſiduo; certum erit, æquationem propoſitam eſſe revera compoſitam, & habebitur in quotiente æquatio altera tertii gradus. Quod ſi verò tentatis omnibus diviſoribus, nequeat æquatio illa ſubinde determinari, ut per eam dividi poſſit æquatio propoſita; concludendum eſt, propoſitam æquationem in propriâ ſuâ ſede exiſtere, nec proinde ad gradum inferiorem deprimi poſſe.

Proponatur, exempli gratiâ, æquatio $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 14x + 6 = 0$, in qua habetur $p = -2$, $q = -2$, $r = 11$, $s = -14$, & $t = 6$. Itaque ſi pro si pro c ponatur 2, qui est unus ex divisoribus ultimi termini, invenietur $a = -2$: proindeque æquatio $x^2 + ax + c = 0$ fiet $x^2 - 2x + 2 = 0$. Et quoniam divisâ æquatione propositâ $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 14x + 6 = 0$ per æquationem istã secundi gradus $x^2 - 2x + 2 = 0$ divisio fit exactè, & absque ullo residuo, quum oriatur in quotiente æquatio tertii gradus $x^3 - 4x + 3 = 0$; concludendum est, æquationem propositam compositam esse, ejusque æquationes componentes esse $x^2 - 2x + 2 = 0$, & $x^3 - 4x + 3 = 0$.

Sed pro determinando valore quantitatis a, ope alterius c, potest alia æquatio inveniri: nimirum, quia in primâ illarum æquationum habetur $p = a + b$; erit rursus transponendo $p - a = b$, adeoque, multiplicando terminos omnes per c, erit $pc - ac = bc$. Unde si in tertiâ æquatione $r = f + bc + ad$, loco bc ponatur valor ille $pc - ac$, erit $r = f + pc - ac + ad$, hoc est $r - f - pc + ac = ad$, atque adeo $cr - cf - pc^2 + ac^2 = acd$. Sed in quartâ æquatione habetur $f = cd + af$, hoc est $f - af = cd$, sive etiam $af - a^2f = acd$. Itaque erit $cr - cf - pc^2 + ac^2 = af - a^2f$,

& consequenter $c^2r - c^2f - pc^3 + ac^3 = acf - a^2cf$. Quumque in ultima æquatione habeatur $t = cf$, erit demum $c^2r - ct - pc^3 + ac^3 = acf - a^2t$, hoc est $a^2 + \frac{c^3a}{t} - \frac{cfa}{t} - \frac{pc^3}{t} + \frac{c^2r}{t} - c = 0$, quæ est æquatio altera duarum dimensionum.

Quod si æquatio composita fuerit sexti gradus, nec ad ejus constitutionem ulla concurrat æquatio simplex, poterit illa tripliciter componi, vel nimirum ex multiplicatione trium æquationum, quarum unaquæque sit secundi gradus; vel ex multiplicatione duarum æquationum, quarum una sit secundi gradus, altera quarti; vel denique ex multiplicatione duarum æquationum, quarum quælibet sit tertii gradus. Sed satis erit duos istos postremos casus expendere; nam semper ac æquatio componitur ex multiplicatione trium æquationum, quarum unaquæque sit secundi gradus, componi quoque poterit ex multiplicatione duarum æquationum, quarum una sit quarti gradus, altera secundi; quum duæ ex æquationibus componentibus multiplicatæ simul componant æquationem quarti gradus.

Po-

Ponamus itaque æquationem propoſitam ſexti gradus compoſitam eſſe ex multiplicatione duarum æquationum, quarum una ſit ſecundi gradus, altera quarti. Ergo ſi æquationes componentes fuerint $x^2 + ax + c = 0$, & $x^4 + bx^3 + dx^2 + fx + g = 0$, erit æquatio ex iis cōpoſita $x^6 + bx^5 + ax^5 + cx^4 + abx^4 + fx^3 + cbx^3 + adx^3 + gx^2 + afx^2 + cdx^2 + cfx + agx + cg = 0$. Sit autem æquatio propoſita $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$, quam indeterminatam ſemper accipimus, ut poſſit omnes ejus, de quo agitur, gradus æquationes repræſentare. Itaque conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur ſex aliæ æquationes $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = f + cb + ad$, $s = g + af + cd$, $t = cf + ag$, & $u = cg$.

Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $p = a + b$, erit $p - a = b$, atque adeo $pa - a^2 = ab$. Unde ſi in ſecundâ æquatione $q = c + d + ab$ loco ab ponatur valor ille, erit $q = c + d + pa - a^2$, hoc eſt $a^2 - pa - c + q = d$, adeoque $ca^2 - cpa - c^2 + qc = cd$. Jam verò, quum in quartâ æquatione habeatur $s = g + af + cd$, erit $s - g - af = cd$. Quare erit etiam $ca^2 - cpa - c^2 +$

$qc = s - g - af$, & conſequenter $c^2a^2 - c^2pa - c^3 + qc^2 = cs - cg - acf$. Eſt autem in quintâ $t = cf + ag$, hoc eſt $t - ag = cf$. Itaque ſubſtituto in illâ loco cf valore iſto, erit $c^2a^2 - c^2pa - c^3 + qc^2 = cs - cg - ta + ga^2$, atq; adeo $c^3a^2 - c^3pa - c^4 + qc^3 = c^2s - c^2g - cta + cga^2$. Quumque in ultimâ habeatur $u = cg$, erit tandem $c^3a^2 - c^3pa - c^4 + qc^3 = c^2s - cu - cta + ua^2$, ope cujus æquationis, cognito valore ipſius c, facile erit valorem alterius a invenire, atque adeo determinare æquationem componentem $x^2 + ax + c = 0$.

Sed pro determinando valore quantitatis a, cognito valore alterius c, poteſt etiam altera æquatio reperiri, in qua tamen ipſa quantitas a ad tres dimenſiones aſcendet. Nimirum, quia in primâ illarum æquationum habetur $p = a + b$, erit rurſus $p - a = b$, adeoque $cp - ca = cb$. Unde ſi in tertiâ æquatione $r = f + cb + ad$ loco cb ponatur valor ille $cp - ca$, erit $r = f + cp - ca + ad$, atque adeo $cr - cf - c^2p + c^2a = acd$. Sed in quartâ habetur $s = g + af + cd$, hoc eſt $sa - ga - fa^2 = acd$. Itaque erit $cr - cf - c^2p + c^2a = sa - ga - fa^2$, &

conſequẽter $c^2r - c^2f - c^3p + c^3a = csa - cga - cfa^2$. Eſt autem in quintâ $t = cf + ga$, hoc eſt $t - ga = cf$. Quare ſubrogando in illâ loco cf valore iſto $t - ga$, erit $c^2r - ct + cga - c^3p + c^3a = csa - cga - ta^2 + ga^3$, adeoq; $c^3r - c^2t + 2c^2ga - c^4p + c^4a = c^2sa - cta^2 + cga^3$. Et quoniam in ultimâ habetur $u = cg$, proinde ſubſtituendo ubique u loco cg, habebitur tandem $c^3r - c^2t + 2cua - c^4p + c^4a = c^2sa - cta^2 + ua^3$, in qua, ut vides, quantitas a ad tres dimenſiones aſcendit.

Ponamus ſecundò æquationem ſexti gradus compoſitam eſſe ex multiplicatione mutuâ duarum æquationum, quarum quælibet ſit tertii gradus. Itaque ſi æquationes componentes fuerint $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, & $x^3 + dx^2 + fx + g = 0$, erit æquatio ex iis compoſita, $x^6 + ax^5 + dx^5 + bx^4 + fx^4 + adx^4 + cx^3 + gx^3 + bdx^3 + afx^3 + cdx^2 + agx^2 + bfx^2 + cfx + bgx + cg = 0$. Quocirca ſi $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$ repræſentet propoſitam æquationem, conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur ſex aliæ æquationes, nempe $p = a + d$, $q = b + f + ad$, $r = c + g + bd + af$, $s = cd + ag + bf$, $t = cf + bg$, & $u = cg$; quarum ope, cognito

valore quantitatis c, ita quidem determinari debet valor ipſius a, ut ſimul innoteſcat valor alterius b; quandoquidem æquatio indeterminata $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ determinari nequit, niſi definitis valoribus ſingularum quantitatum a, b, c.

Itaque, quia in primâ illarum æquationum habetur $p = a + d$, erit $p - a = d$, atque adeo $pa - a^2 = ad$. Unde, ſi in ſecundâ æquatione $q = b + f + ad$ loco ad ponatur valor ille $pa - a^2$, erit $q = b + f + pa - a^2$, hoc eſt $a^2 - pa - b + q = f$, atque adeo $ca^2 - cpa - cb + cq = cf$. Jam verò, quum in quintâ æquatione ſit $t = cf + bg$, erit $t - bg = cf$. Quare erit $ca^2 - cpa - cb + cq = t - bg$, & conſequenter $c^2a^2 - c^2pa - c^2b + c^2q = ct - bcg$. Eſt autem in ultimâ æquatione $u = cg$. Itaque ſubſtituendo in illâ u loco cg, erit $c^2a^2 - c^2pa - c^2b + c^2q = ct - bu$: unde infertur $b = \dfrac{c^2a^2 - c^2pa + c^2q - ct}{c^2 - u}$: qua mediante æquatione, cognitis valoribus quantitatum a, & c, cognoſcetur item valor alterius b.

Sed ad determinandam quantitatem b, cognitis valoribus ipſarũ a, & c, alia rursus æquatio potest inveniri : nimirum, quia in tertiâ illarum æquationum habetur $r = c + g + bd + af$, multiplicando terminos omnes per c, erit $cr = c^2 + cg + cbd + caf$. Est autem in ultimâ æquatione $cg = u$. Itaque ponendo in illâ u loco cg, erit $cr = c^2 + u + cbd + caf$. Jam verò in secundâ æquatione habetur $q = b + f + ad$, hoc est $q - b - ad = f$, sive etiam $caq - cba - ca^2d = acf$. Quare ponendo rursus in illâ loco acf valorem istum, erit $cr = c^2 + u + cbd + caq - cba - ca^2d$, in qua si demum ponatur loco d valor ejus $p - a$, qui eruitur ex primâ æquatione $p = a + d$, fiet $cr = c^2 + u + cbp - cba + caq - cba - pca^2 + ca^3$: ex qua æquatione infertur

$$b = \frac{ca^3 - pca^2 + caq + c^2 + u - cr}{2ca - cp}.$$

Habemus itaque duas æquationes pro determinanda quantitate b, cognitis valoribus ipsarum a, & c. Sed æquatio pro determinanda quantitate a, cognito valore ipsius c, habebitur, si æqualitas instituatur inter $\dfrac{ca^3 - pca^2 + caq + c^2 + u - cr}{2ca - cp}$

&

& $\dfrac{c^2a^2 - c^2pa + c^2q - ct}{c^2 - u}$, utpote valores unius ejusdemq; quantitatis b. In hac æquatione quantitas a ad tres dimensiones ascẽdit; sed alia poterit inveniri, ubi tamẽ eadem quantitas a erit quatuor dimensionum. Itaque assumpto loco c uno ex divisoribus ultimi termini propositæ æquationis, qui debet esse trium dimensionum, si æquatio sit litteralis, & homogenea, determinanda est primùm quantitas a, tum deinde quantitas b: qua ratione determinabitur æquatio $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, per quam dividi debet æquatio proposita.

Non dissimiliter determinandæ sunt æquationes componentes, quum æquatio composita plures, quàm sex, dimensiones habet; & omnino superfluum existimo, super hac re ulteriùs labores nostros extendere. Illud hìc nolim reticere, quod si in æquatione aliqua litterali loco cujuslibet ex litteris posito numero aliquo, talis prodeat æquatio numerica, ut reduci non possit, nec ipsa æquatio litteralis sit reducibilis: cujus rei ratio hæc est, quia litteræ alphabeti possunt omnes quascumque quantitates repræsentare. Quod si verò æquatio numerica, quæ inde oritur,

S 3 tur,

tur, reduci queat, non inde concludi debet, æquationem ipsam litteralem reducibilem esse; quia fortasse fieri potest, ut æquatio litteralis in eâ tantùm hypothesi sit reducibilis.

VII.

De reductione æquationum, in quibus duæ, aut plures radices sunt æquales.

Æquationes, in quibus duæ, aut plures radices sunt æquales, in propriâ suâ sede nequaquam existunt, sed semper ad gradum alterum inferiorem deprimi possunt. Id difficultatem nullam involuit, quotiescumque radices æquales sunt commensurabiles, ac rationales; nam perspicuum est, ad constitutionem ipsarũ æquationũ tot simplices æquationes concurrere, quotus est numerus radicũ æqualium. Quod si verò radices æquales sint incommensurabiles, ac radicales, tunc res fiet manifesta, si ex duabus, aut pluribus radicibus, quæ sint æquales, & incommensurabiles, æquatio constituatur; nam liquidò patebit, æquationem ad altiorem quidem gradum ascendere, quàm incommensurabilitas cujusque radicis ostendit.

Jam reductio istarum æquationum, in quibus duæ, aut plures radices sunt æquales, iisdem fermè regulis perfici potest, quibus omnium aliarum æquationum reductio instituitur. Sed nihilominus placet nobis, hujusmodi æquationes speciatim considerare, quia nempe longe faciliùs aliâ ratione ad propriam suam sedem deprimi possunt. Dabimus ergo pro reducendis huiusmodi æquationibus duplicem methodum, quarum utraque in eo consistit, ut una ex radicibus æqualibus inveniatur. Eâ etenim inventâ, vel solius divisionis ope æquationem deprimi posse, nemo non videt.

Prior itaque methodus hæc est. Assumantur indeterminatè tot radices æquales, quot æquatio proposita supponitur habere. Tum ex iis constituatur æquatio, quæ pauciores quidem dimensiones, quàm proposita, habere potest, plures autem habere non potest. Jam si æquatio ista non habeat tot dimensiones, quot proposita, multiplicetur per aliam æquationem, totidem, quot ei desunt, dimensiones habentem. Sic enim habebitur æquatio, in qua tot erunt dimensiones, quot proposita complectitur. Comparentur porrò termini unius æquationis cum ter-

terminis alterius, & istius comparationis ope unaquæque ex radicibus æqualibus determinabitur.

Proponatur, exempli gratiâ, æquatio duarum dimensionum $x^2 - 6x + 9 = 0$, in qua radices duæ sunt æquales. Designetur unaquæque illarum radicum litterâ m. Itaque si fiat $x - m = 0$, & multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, habebitur æquatio similiter duarum dimensionum $x^2 - 2mx + m^2 = 0$. Comparentur termini istius cum terminis æquationis propositæ, & habebuntur æquationes duæ, una $2m = 6$, altera $m^2 = 9$, ex quarum alterutrâ infertur $m = 3$. Quare æquationes, ex quibus componitur æquatio proposita $x^2 - 6x + 9 = 0$, erunt $x - 3 = 0$, & $x - 3 = 0$.

Multiplicetur æquatio $x^2 - 6x + 9 = 0$ per $x + 2 = 0$, & oporteat æquationis inde ortæ $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ radices duas æquales definire. Designetur rursus litterâ m unaquæque illarum radicum. Itaque si multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, habebit æquatio $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ duas radices æquales. Multiplicetur ista per æquationem simplicem $x + a = 0$, ut alia oriatur trium

trium dimensionum $x^3 - 2mx^2 + ax^2 - 2amx + m^2x + am^2 = 0$. Conferantur termini istius cum terminis æquationis propositæ, & habebitur $2m - a = 4$, $2am - m^2 = 3$, & $am^2 = 18$. Unde quum in primâ istarum æquationum sit $2m - 4 = a$, ponendo tum in secundâ, cùm in tertia loco a valorem illum, una fiet $3m^2 - 8m = 3$, altera $2m^3 - 4m^2 = 18$, ex quarum alterutrâ infertur $m = 3$.

Esto nunc æquatio trium dimensionum $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$, in qua omnes radices sunt æquales. Designet quoque littera m unamquamque illarum radicum. Itaque, si multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$, & quod producitur $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ multiplicetur rursus per $x - m = 0$, orietur æquatio trium dimensionum $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione propositâ, quum similiter omnes habeat radices æquales. Comparentur ergo termini unius cum terminis alterius, & habebitur $3m = 9$, $3m^2 = 27$, & $m^3 = 27$. Unde, quia ex unaquaque istarum eruitur $m = 3$, erit in propositâ æquatione numerus 3 valor cujusque radicis.

Sed

Sed eadem æquatio $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$ multiplicetur per $x + 2 = 0$, & oporteat æquationis inde ortæ $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$ tres radices æquales determinare. Constituatur rursus æquatio indeterminata $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, quæ tres habeat radices æquales; tum quia æquatio ista est una dimensione minor, quàm proposita, multiplicetur adhuc per æquationem simplicem $x + a = 0$, ut alia oriatur quatuor dimensionum $x^4 - 3mx^3 + ax^3 + 3m^2x^2 - 3amx^2 - m^3x + 3am^2x - am^3 = 0$. Conferantur jam termini unius cum terminis alterius, & habebitur $3m - a = 7$, $3m^2 - 3am = 9$, $3am^2 - m^3 = 27$, & $am^3 = 27$. Unde, quia in primâ istarum æquationum fit $3m - 7 = a$, ponendo in aliis loco a valorem istum, una fiet $-6m^2 + 21m = 9$, altera $8m^3 - 21m^2 = 27$, & ultima $3m^4 - 7m^3 = 27$, ex quarum unaquaque eruitur $m = 3$.

Jam, quum æquatio tot habet radices æquales, quot sunt dimensiones ejus, æquationes particulares, quarum ope determinanda est quantitas m, sunt semper puræ, adeoque nullo negotio resolvi possunt. Sed quum nequaquam tot continet radices æquales, tunc æquationes illæ particulares prodeunt affectæ, adeoque, quæ difficultas vitanda est pro reducenda æquatione principali regulis superiùs traditis, eadem in resolvendis æquationibus illis particularibus occurrit. Interim, si consideremus in omnibus illis æquationibus quantitatem m unum eundemque valorem habere, facilè apparebit, quod ad determinandam quantitatem m satis sit duarum ex illis æquationibus communem divisorem invenire, nec proinde oporteat, singulas illas æquationes resolvere.

Altera methodus, pro reducendis hujusmodi æquationibus, pendet ex hoc theoremate, quod si termini alicujus æquationis, duas, aut plures radices æquales habentis, multiplicentur ordine per terminos alicujus progressionis arithmeticæ, altera oriatur æquatio, in qua, unâ demptâ, eædem erunt radices æquales. Hujus theorematis veritas abundè liquet, quum omnes æquationis radices sunt æquales. Etenim si termini æquationis $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, quæ duas continet radices æquales, multiplicentur ordine per terminos istius progressionis a, $a + b$, $a + 2b$, quæ omnes quascumque

que progressiones arithmeticas repræsentare potest, prodibit æquatio $ax^2 - 2amx - 2bmx + am^2 + 2bm^2 = 0$, quæ dividi potest exactè per $x - m$. Et si æquatio fuerit $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, multiplicatis terminis ejus ordine per terminos progressionis a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, alia orietur, quæ dividi poterit exactè per $x^2 - 2mx + m^2$; atque ita de aliis.

Quum verò non omnes æquationis radices sunt æquales, ostendetur idem theorema, si sedulò consideretur, quantitatem, quæ dividi potest per alteram datam quantitatem, per eandem adhuc dividi posse, tametsi per tertiam aliam quantitatem multiplicetur. Ut si fuerit quantitas $ac + bc$, quæ dividi potest per $a + b$, multiplicando eam per $m + n$, producetur quantitas $acm + bcm + acn + bcn$, quæ adhuc dividi poterit per $a + b$. Ex quo fit, ut si termini alicujus æquationis, cujus omnes radices sunt æquales, multiplicentur, non modò singuli per singulos terminos alicujus progressionis arithmeticæ, verùm etiam omnes per aliam quandam quantitatem, æquatio, quæ producitur, easdem habeat radices æquales, unâ demptâ.

Jam

Jam æquatio, cujus non omnes radices sunt æquales, considerari potest, velut producta, multiplicando æquationem, omnes radices æquales habentem, per aliam, cujus radices ab iis sunt diversæ. Ut si æquatio fuerit tertii gradus, & in eâ duæ tantùm radices sint æquales, considerari ea poterit, veluti orta ex multiplicatione æquationis $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, duas radices æquales habentis, per æqationem simplicem $x + n = 0$, cujus radix sit ab iis diversa. Unde, quia ex hac multiplicatione duo oriuntur producta partialia, unum ex $x^2 - 2mx + m^2$ in x, alterum ex $x^2 - 2mx + m^2$ in a; perspicuum est, unumquodque istorum productorum non aliud esse, quàm æquationem, omnes radices æquales habentem, per aliam quandam quantitatem multiplicatam; atque adeo verum esse theorema, si cum singulis hisce productis nobis solummodo res esset.

Et quidem tametsi duo illa producta in æquatione propositâ tertii gradus inter se conjuncta reperiantur; perinde tamen res est, ac si cum iis seorsim ageretur. Ut enim duo illa producta constituant simul æquationem tertii gradus, debent ita quidem disponi quemadmodũ hìc vides.

x^3

$$x^3 - 2mx^2 + m^2x$$
$$+ nx^2 - 2mnx + m^2n.$$

Quare multiplicando terminos istius æquationis ordine per terminos progressionis arithmeticæ a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$; jam termini prioris producti $x^3 - 2mx^2 + m^2x$ multiplicantur per terminos progressionis a, $a+b$, $a+2b$; & termini alterius producti $nx^2 - 2mnx + m^2n$ multiplicantur per terminos $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, qui similiter progressionem arithmeticam constituunt. Perinde itaque res est, ac si cum productis illis seorsim ageretur. Unde, quia factâ multiplicatione, unumquodque illorum productorum debet unam continere radicem æqualem; continebit etiam radicem unam æqualem æquatio, quæ ex iisdem productis constituitur.

Eadem autem est demonstratio, quum æquatio est plurium, quàm trium, dimensionum, & plures item, quàm duas, continet radices æquales. Sed videamus modò, qua ratione ope hujus theorematis inveniri possint radices æquales æquationis propositæ, & ipsa æquatio ad propriam suam sedem deprimi: nimirum, quia

quia omnis æquatio, quæ plures habet radices æquales, in aliam converti potest, in qua contineantur eædem radices æquales, unâ demptâ; si utique omnes ejus termini multiplicentur ordine per terminos alicujus progressionis arithmeticæ, per diversas hujusmodi multiplicationes talis semper haberi poterit æquatio, ut unã tantùm contineat radicum æqualiũ. Unde si istius, & æquationis propositæ communis divisor capiatur, ille dabit radicem æqualem optatam.

Itaque, quum in aliquâ æquatione tres fuerint radices æquales, ad inveniendam æquationem alteram, quæ unicam tãtùm contineat illarum radicum, necesse est terminos illius bis quidem multiplicare per terminos alicujus progressionis arithmeticæ; atque ita quoque multiplicandi sunt ter, si radices æquales fuerint quatuor; quater, si quinque; atque ita deinceps: nam per singulas hujusmodi multiplicationes una tantùm radicum æqualium tollitur. Cæterùm, si in æquatione desit aliquis terminus, is designandus est stellulâ, quo suum quoque habeat terminum progressionis correspondentem. Nec abs re erit hìc adnotare, quod si ea semper progressio arithmetica eligatur, quæ

quæ vel incipit à zero, vel in zero desinit; æquationes, quæ inveniuntur, sint semper uno saltem gradu inferiores iis, quarum terminos per terminos progressionis arithmeticæ oportet multiplicare.

CAP. VI.

De resolutione æquationum secundi gradus.

PRoximum jam est, ut æquationum, in propriâ suâ sede existentium, resolutionem ostendamus: quæ quidem resolutio est totius artificii analytici coronis, ac complementum. Neque enim satis est in resolutione alicujus problematis æquationem invenire, quæ unicam incognitam comprehendens, singulas problematis conditiones includat, & æquationem illam, si fuerit composita, in suas componentes resolvere, eandemque ad propriam suam sedem revocare: nisi deinde regulæ habeantur, quibus instructus possit Analysta æquationem, in propriâ sua sede existentem, subinde resolvere, ut ope ejus rosolutionis singulos incognitæ valores valeat eruere. Nam problema, quod proponitur, tunc dicitur resolutum,

quum

quum singuli valores magnitudinis, quæ principaliter quæritur in illo problemate, non ignorantur.

Itaque resolutio æquationum, quam modò explicādam aggredimur, in hoc differt à resolutione, traditâ superiori capite, quod per eam æquationes compositæ, & in propriâ suâ sede non existentes, in suas componentes resolvuntur, atque ita ad propriam suam sedem revocantur; per istam æquationes, jam existentes in propriâ suâ sede, resolvuntur eâ quidem ratione, ut qui sint valores, quos in iis habet incognita, nobis innotescat. Ordiemur autem à resolutione æquationum secundi gradus, hoc est earum, quarum propria sedes in secundo gradu reperitur. Hujusmodi æquationes possunt esse duplicis generis; vel enim sunt puræ, cujusmodi sunt illæ, quæ secundo termino carent; vel affectæ, quales sunt eæ, quæ secundum terminum habent. Puræ nonnisi duplicis formæ esse possunt; nam vel induunt hanc formam $x^2 - q = 0$, vel etiam hanc aliam $x^2 + q = 0$. Sed æquationes affectæ ad sequentes quatuor formulas reducuntur.

x^2

$$x^2 - 2px - q = 0$$
$$x^2 + 2px - q = 0$$
$$x^2 - 2px + q = 0$$
$$x^2 + 2px + q = 0.$$

Quantum ad æquationes puras, earum resolutio solâ radicis quadratæ extractione potest obtineri. Si enim habeatur $x^2 - q = 0$, erit $x^2 = q$; atq; adeo extrahendo hinc inde quadratam radicem, erit vel $x = + \sqrt{q}$, vel $x = - \sqrt{q}$: proindeque radices duæ illius æquationis erunt $+ \sqrt{q}$, & $- \sqrt{q}$, quarum liquet unam esse positivam, alteram negativam. Et similiter si habeatur $x^2 + q = 0$, erit $x^2 = - q$; atque adeo, extractâ ex utraque parte æquationis quadratâ radice, fiet vel $x = + \sqrt{-q}$, vel $x = - \sqrt{-q}$: Unde radices duæ alterius hujus æquationis $x^2 + q = 0$ erunt $+ \sqrt{-q}$, & $- \sqrt{-q}$, quarum utramque liquet imaginariam esse.

Quantum ad æquationes affectas, propter ipsam affectionem, non est ita facilis illarum resolutio, sed necesse est, vel delere ex iis affectionem, tollendo methodo superius traditâ secundum terminum, quum hac ratione evadant puræ; vel ad utramque partem æquationis addere quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut una pars evadat quadratum perfectum. Utraq; hujusmodi æquationes resolvendi ratio jam superiùs obiter à nobis fuit exposita. Sed utramque nunc rursus afferemus, nec alias præteribimus rationes, quibus earundem æquationum resolutio potest obtineri.

I.

Resolutio primæ formulæ $x^2 - 2px - q = 0$.

Æquationes secundi gradus, quæ continentur sub primâ formulâ $x^2 - 2px - q = 0$, duas admittunt radices, unam positivam, alteram negativam. Est enim in iis una signorum varietas, & una item signorum similitudo. Sed in iisdem æquationibus radix positiva major est semper radice negativâ. Nam quantitas cognita secundi termini in omni æquatione, ut superiùs vidimus, est summa radicum sub signo mutato. Itaque quia in hisce æquationibus secundus terminus afficitur signo —, erit vicissim in iis summa radicum positiva: quod equidem fieri non potest, nisi radix positiva

 tiva

tiva major sit radice negativâ.

Jam radices istius æquationis $x^2 - 2px - q = 0$ possunt primo loco inveniri, si ex ea deleatur affectio, tollendo secundum terminum methodo superiùs traditâ. Hunc in finem ponatur $x - p = y$, sive $x = y + p$. Et siquidem scribatur $y + p$ loco x, & $y^2 + 2py + p^2$ loco x^2, orietur æquatio $y^2 - p^2 - q = 0$, quæ, ut vides, secundo termino caret. Itaque, quum habeatur $y^2 = p^2 + q$, extrahendo hinc inde radicem quadratam, erit tum $y = + \sqrt{p^2 + q}$, tum $y = - \sqrt{p^2 + q}$; adeoque subrogando loco y valorem suum $x - p$, habebitur tam $x - p = + \sqrt{p^2 + q}$, quàm $x - p = - \sqrt{p^2 + q}$, ex quibus infertur, & $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $x = p - \sqrt{p^2 + q}$.

Itaque radices duæ propositæ æquationis $x^2 - 2px - q = 0$ sunt $p + \sqrt{p^2 + q}$, & $p - \sqrt{p^2 + q}$, quod exinde etiam liquere potest, quia utraque substituta in æquatione loco incognitæ x facit æquationis terminos omnes evanescere. Illarum primam positivam esse, nemo non videt; sed & alteram negativam esse, facile percipiet, quicumque advertet radicem

cem quadratam ex $p^2 + q$, majorem esse, quàm p. Ipsam porrò radicem positivam ratione quantitatis majorem esse radice negativâ, ultrò etiam liquet, quum illa exprimatur per summam quantitatum p, & $\sqrt{p^2 + q}$, hæc per differentiam earundem quantitatum. Inventæ sunt ergo radices propositæ æquationis, & tales quidem, quales exigit ipsa æquationis natura: nempe, ut una sit positiva, altera negativa; & insuper, ut radix positiva major sit radice negativâ.

Eædem æquationis radices possunt secundo loco inveniri, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut una pars quadratum fiat perfectum. Itaque, quum sit $x^2 - 2px - q = 0$; erit $x^2 - 2px = q$; adeoque addendo ad utramque partem quadratum, quod fit ex p, semisse quantitatis cognitæ secundi termini, erit $x^2 - 2px + p^2 = p^2 + q$: quare extractâ ex utraque parte æquationis radice quadratâ, fiet tum $x - p = + \sqrt{p^2 + q}$, tum $x - p = - \sqrt{p^2 + q}$, ex quibus rursus infertur, & $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $x = p - \sqrt{p^2 + q}$.

Possunt ulteriùs radices eædem inveniri

ri hac aliâ methodo. Ponatur illarum radicum una esse $+ a$, & altera $- b$. Itaque si multiplicetur $x - a = 0$ per $x + b = 0$, erit æquatio $x^2 - ax + bx - ab = 0$ ejusdem formæ cum æquatione proposita $x^2 - 2px - q = 0$. Conferantur jam termini unius cum terminis alterius, & erit $a - b = 2p$, & $ab = q$. Quia ergo habetur $a - b = 2p$, quadrando utramque partem hujus æquationis, erit $a^2 - 2ab + b^2 = 4p^2$. Est autem $ab = q$, hoc est $4ab = 4q$. Quare addendo simul duas hasce æquationes, erit $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2 + 4q$, atque adeo per extractionem quadratæ radicis fiet $a + b = 2\sqrt{p^2 + q}$. Unde quum habeatur $a - b = 2p$ & $a + b = 2\sqrt{p^2 + q}$, erit $a = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $- b = p - \sqrt{p^2 + q}$.

Denique radices eædem determinari quoque possunt in hunc modum. Esto $2a$ summa ipsarum, & $2b$ earundem differentia. Itaque radix una erit $a + b$, & radix altera erit $a - b$: proindeque si multiplicetur $x - a - b = 0$ per $x - a + b = 0$, erit æquatio $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ejusdem formæ cum æquatione proposita $x^2 - 2px - q = 0$. Quare conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebitur $2a = 2p$, & $b^2 - a^2 = q$. Itaque quum sit $2a = 2p$, erit $a = p$, & $a^2 = p^2$. Unde si in æquatione $b^2 - a^2 = q$ loco a^2 ponatur valor ejus p^2, fiet $b^2 - p^2 = q$, sive $b^2 = p^2 + q$, atque adeo $b = \sqrt{p^2 + q}$. Unde erit $a + b = p + \sqrt{p^2 + q}$, & $a - b = p - \sqrt{p^2 + q}$.

II.

Resolutio secundæ formulæ $x^2 + 2px - q = 0$.

Ex radicibus æquationum, quæ comprehenduntur sub secundâ formulâ $x^2 + 2px - q = 0$; similiter una est positiva, altera negativa. Nam in iis quoque una reperitur signorum similitudo, & una item signorum varietas. Sed in hisce æquationibus radix positiva ratione quantitatis minor est semper radice negativâ. Est enim in omni æquatione quantitas cognita secundi termini summa radicum sub signo mutato. Quare, quia in his æquationibus secundus terminus afficitur signo $+$, erit vicissim in iis summa radicum negativa: quod sanè fieri non potest, nisi radix positiva minor sit radice negativâ.

 Ra-

Radices autem istius æquationis $x^2 + 2px - q = o$ inveniemus primò, tollendo ex eâ affectionem, sive secundum terminum, juxtà regulam superiùs traditam. Ponatur ergo $x + p = y$, sive $x = y - p$; & siquidem in æquatione propositâ $x^2 + 2px - q = o$ scribatur $y - p$ loco x, & $y^2 - 2py + p^2$ loco x^2, orietur hæc altera $x^2 - p^2 - q = o$, quæ secundo termino caret. Itaque quum sit $y^2 = p^2 + q$, extrahendo hinc inde radicem quadratam, erit tum $y = + \sqrt{p^2 + q}$, cùm $y = - \sqrt{p^2 + q}$. Erat autem $x = y - p$. Quare erit, tam $x = - p + \sqrt{p^2 + q}$, quàm $x = - p - \sqrt{p^2 + q}$: proindeque radices duæ propositæ æquationis erunt $- p + \sqrt{p^2 + q}$, & $- p - \sqrt{p^2 + q}$.

Harum radicum secundam negativam esse, nemo non videt. Sed & primam positivam esse, facilè apparebit, si consideremus radicem quadratam ex $p^2 + q$ majorem esse, quàm p. Quod verò radix positiva ratione quantitatis minor sit radice negativâ, liquidò etiam patet; nam radix positiva exprimitur per differentiam quantitatum, p & $\sqrt{p^2 + q}$, radix verò negativa designatur per summam earundem quantitatum, licèt sub signo mutato. Inventæ sunt igitur radices propositæ æquationis tales quidem, quales invenire oportebat: nempe, ut una sit positiva, altera negativa; & insuper, ut radix positiva minor sit radice negativâ.

Easdem radices inveniemus secundò, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ, ut una pars evadat quadratum perfectum. Itaque quum sit $x^2 + 2px - q = o$, erit $x^2 + 2px = q$, atque adeò addendo ad utramque partem quadratum, quod fit ex p, semisse quantitatis cognitæ secundi termini, erit $x^2 + 2px + p^2 = p^2 + q$. Unde per extractionem quadratæ radicis erit, vel $x + p = + \sqrt{p^2 + q}$, vel $x + p = - \sqrt{p^2 + q}$, ex quibus eruitur, ut antea, & $x = - p + \sqrt{p^2 + q}$, & $x = - p - \sqrt{p^2 + q}$.

Sed ad determinandas easdem radices utemur etiam hac methodo. Fingamus illarum radicum unam esse $+ a$, alteram $- b$. Itaque si multiplicetur $x - a = o$ per $x + b = o$, erit æquatio ex harum multiplicatione orta $x^2 - ax + bx - ab = o$

$= 0$ ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 + 2px - q = 0$. Conferantur ergo termini unius cum terminis alterius, & erit $b - a = 2p$, & $ab = q$. Quia itaque habetur $b - a = 2p$, quadrando utramque partem, erit $b^2 - 2ab + a^2 = 4p$. Eſt autem $ab = q$, hoc eſt $4ab = 4q$. Quare additis ſimul duabus hiſce æquationibus, erit $b^2 + 2ab + a^2 = 4p^2 + 4q$; atque adeo per extractionem quadratæ radicis fiet $b + a = 2\sqrt{p^2 + q}$. Unde, quum ſit $b - a = 2p$, & $b + a = 2\sqrt{p^2 + q}$, erit $a = -p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-b = -p - \sqrt{p^2 + q}$.

Denique ejuſdem æquationis radices determinabimus etiam hoc artificio. Eſto $-2a$ ſumma ipſarum, & $+2b$ earundem differentia. Itaque radix una erit $-a + b$, & radix altera erit $-a - b$: proindeque ſi multiplicetur $x + a - b = 0$ per $x + a + b = 0$, erit æquatio ex his genita $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ejuſdem formæ cum æquatione propoſitâ $x^2 + 2px - q = 0$. Quare factâ mutuâ terminorum collatione, erit $2a = 2p$, & $b^2 - a^2 = q$. Ergo, quum ſit $2a = 2p$, erit $a = p$, & $a^2 = p^2$. Quocirca, ſi in æquatione $b^2 - a^2 = q$, loco a^2 ſcribatur valor ejus p^2, erit

erit $b^2 - p^2 = q$, hoc eſt $b^2 = p^2 + q$, & conſequenter $b = \sqrt{p^2 + q}$. Unde erit $-a + b = -p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-a - b = -p - \sqrt{p^2 + q}$.

III.

Reſolutio tertiæ formulæ

$x^2 - 2px + q = 0$.

Sequitur, ut reſolutionem tertiæ formulæ $x^2 - 2px + q = 0$ oſtendamus. Et quidem, quia in hac formulâ duæ ſunt ſignorum variationes, nec ulla occurrit ſignorum ſimilitudo; palam eſt, radices æquationum, quæ ad hanc formulam reducuntur, ambas eſſe poſitivas. Sed hæ interim radices non ſemper erunt reales. Quum enim ultimus terminus afficiatur ſigno $+$, ſi contingat quadratum ex quantitate cognitâ ſecundi termini dimidiatâ minus eſſe ultimo termino, tunc radices illæ fient imaginariæ, quum radicem contineant quadrati negativi.

Ut autem inveniamus radices hujus æquationis $x^2 - 2px + q = 0$, tollamus ex eâ affectionem, delendo ſecundum terminum juxtà methodum ſuperiùs traditam. Hunc in finem ponamus $x - p = y$,

$= y$, five $x = y + p$. Et fiquidem in æquatione propofitâ $x^2 - 2px + q = 0$ fcribamus $y + p$ loco x, & $y^2 + 2py + p^2$ loco x^2, orietur hæc altera $y^2 - p^2 + q = 0$, quæ, ut vides, fecundo termino caret. Itaque, quum fit $y^2 = p^2 - q$, erit tum $y = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $y = - \sqrt{p^2 - q}$. Habetur autem $x = y + p$. Quare erit tam $x = p + \sqrt{p^2 - q}$, quàm $x = p - \sqrt{p^2 - q}$: & propterea radices duæ propofitæ æquationis erunt $p + \sqrt{p^2 - q}$, & $p - \sqrt{p^2 - q}$.

Harum radicum primam pofitivam effe, nemo non videt; ambæ enim ejus partes afficiuntur figno $+$. Sed & alteram itidem pofitivam effe, liquidò patebit, fi confideremus radicem quadratam ex $p^2 - q$ minorem effe, quàm p. Has eafdem radices imaginarias evadere, quum quadratum ex quantitate cognitâ fecundi termini dimidiatâ p^2 minus eft ultimo termino q, ultro etiam liquet. Eft enim hoc cafu $p^2 - q$ quantitas negativa; adeoque $\sqrt{p^2 - q}$ quantitas erit imaginaria. Sed fi fuerit $p^2 = q$, tunc quia evanefcet quantitas $p^2 - q$, erunt ambæ æquationis radices æquales femiffi quantitatis cognitæ fecundi termini, atque adeo æquales inter fe.

Poffunt eædem radices inveniri quoque, addendo ad utramque partem æquationis quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ fecundi termini dimidiatâ, ut una pars quadratum evadat perfectum; nimirum, quum æquatio fit $x^2 - 2px + q = 0$, erit $x^2 - 2px = - q$, atque adeo addito ad utramque partem quadrato, quod fit ex p, femiffe quantitatis cognitæ fecundi termini, erit $x^2 - 2px + p^2 = p^2 - q$. Unde per extractionem quadratæ radicis fiet, tum $x - p = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $x - p = - \sqrt{p^2 - q}$; ex quibus infertur, ut fupra, & $x = p + \sqrt{p^2 - q}$, & $x = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Ulteriùs ad inveniendas eafdem radices adhiberi etiam poteft ea methodus, per quam radices illæ affumuntur indeterminatè. Si enim a fit una radix, & b radix altera, multiplicando $x - a = 0$ per $x - b = 0$, orietur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, quæ erit ejufdem formæ cũ æquatione, de qua agitur, $x^2 - 2px + q = 0$. Quare conferendo terminos unius ordine cũ terminis alterius, habebitur $a + b = 2p$, & $ab = q$. Quia ergo habetur $a + b = 2p$,

$= 2p$, quadrando utramq; partem erit $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2$. Est autem $ab = q$, hoc est $4ab = 4q$. Itaque subducendo æquationem istam ex illâ, erit $a^2 - 2ab + b^2 = 4p^2 - 4q$; atque adeo per extractionem quadratæ radicis fiet $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$. Unde, quum sit $a + b = 2p$, & $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$, erit $a = p + \sqrt{p^2 - q}$, & $b = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Denique determinari quoque possunt eædem radices, mediante hoc artificio. Esto $2a$ summa radicum, & $2b$ earundem differentia. Itaque radix una erit $a + b$, radix verò altera erit $a - b$: proindeque si multiplicetur $x - a - b = 0$ per $x - a + b = 0$, orietur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione propositâ $x^2 - 2px + q = 0$. Conferantur ergo termini unius ordine cum terminis alterius, eritque $2a = 2p$, & $a^2 - b^2 = q$. Itaque, quum sit $2a = 2p$, erit $a = p$, & $a^2 = p^2$. Unde si in æquatione $a^2 - b^2 = q$, loco a^2 ponatur valor ejus p^2, fiet $p^2 - b^2 = q$, hoc est $b^2 = p^2 - q$, atque adeò per extractionem quadratæ radicis erit $b = \sqrt{p^2 - q}$: proindeque erit $a + b = p + \sqrt{p^2 - q}$, & $a - b = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Re-

IV.

Resolutio quartæ formulæ $x^2 + 2px + q = 0$.

Reliquum est, ut ostendamus resolutionem quartæ, & ultimæ formulæ $x^2 + 2px + q = 0$. Et quidem, quia in istâ formulâ nulla est signorum varietas, sed termini omnes afficiuntur signo $+$, radices æquationum, quæ ad eam reducuntur, erunt ambæ negativæ. Sed hìc quoque radices istæ non semper sunt reales. Nam si contingat, quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ minus esse ultimo termino, tunc utraque radicum fiet imaginaria, quum in utraque radix occurrat quadrati negativi.

Hujus formulæ radices quatuor quoque modis investigabimus. Prior autem sit ille, qui procedit delendo ex eâ affectionem, hoc est secundum terminum, juxtà methodum superiùs traditam. Itaque, si ponatur $x + p = y$, & in æquatione propositâ $x^2 + 2px + q = 0$ scribatur $y - p$ loco x, & $y^2 - 2py + p^2$ loco x^2, orietur hæc altera $y^2 - p^2 + q = 0$, quæ se-

secundo termino caret. Et quoniam habetur $y^2 = p^2 - q$, erit tum $y = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $y = - \sqrt{p^2 - q}$. Unde, quum sit $x = y - p$, erit tam $x = -p + \sqrt{p^2 - q}$, quàm $x = -p - \sqrt{p^2 - q}$: proindeque radices duæ propositæ æquationis erunt $-p + \sqrt{p^2 - q}$, & $-p - \sqrt{p^2 - q}$.

Harum radicum secundam negativam esse nemo non videt, quum utraque pars ejus sit quantitas negativa; sed primam quoque negativam esse, facilè apparebit, si consideretur, quod radix quadrata quantitatis $p^2 - q$ minor sit, quàm p. Utramque porrò radicem imaginariam fieri, quotiescumque quadratum ex semisse quantitatis cognitæ secundi termini p^2 minus est ultimo termino q, liquidò etiam patet. Fit enim hoc casu $p^2 - q$ quantitas negativa, adeoque $\sqrt{p^2 - q}$ velut radix quadrati negativi quantitas erit imaginaria. Sed si fuerit $p^2 = q$, tunc evanescente quantitate $p^2 - q$; erunt ambæ æquationis radices æquales semissi quantitatis cognitæ secundi termini, atque adeo æquales inter se.

Alter modus determinandi radices æqua-

quationis $x^2 + 2px + q = 0$ ille sit, qui unam partem æquationis quadratum reddit perfectum, addendo ad utramque partem quadratum, quod fit ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ. Itaq; quum habeatur $x^2 + 2px + q = 0$, erit $x^2 + 2px = -q$, adeoque addito ad utramque partem quadrato, quod fit ex p, semisse quantitatis cognitæ secundi termini, erit $x^2 + 2px + p^2 = p^2 - q$. Unde per extractionem quadratæ radicis fiet, tum $x + p = + \sqrt{p^2 - q}$, cùm $x + p = - \sqrt{p^2 - q}$; ex quibus eruitur, ut antea, & $x = -p + \sqrt{p^2 - q}$, & $x = -p - \sqrt{p^2 - q}$.

Tertius modus investigandi radices ejusdem æquationis sit ille, qui eas assumit indeterminatè. Itaque si $-a$ sit radix una, & $-b$ radix altera, multiplicando $x + a = 0$ per $x + b = 0$, producetur æquatio $x^2 + ax + bx + ab = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^2 + 2px + q = 0$. Quare conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, erit $a + b = 2p$, & $ab = q$. Quia ergo habetur $a + b = 2p$, erit $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2$, si utraque pars æquationis ad quadratum elevetur. Est au-

autem $ab = q$, hoc est $4ab = 4q$. Itaque si æquatio ista ex illâ subducatur, erit $a^2 - 2ab + b^2 = 4p^2 - 4q$: proindeque per extractionem quadratæ radicis fiet $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$. Unde, quum sit $a + b = 2p$, & $a - b = 2\sqrt{p^2 - q}$, erit $-a = -p - \sqrt{p^2 - q}$, & $-b = -p + \sqrt{p^2 - q}$.

Denique investigari possunt radices ejusdem æquationis $x^2 + 2px + q = 0$, assumendo indeterminatè radicum illarum tum summam, cùm differentiam. Si enim $-2a$ sit summa radicum, & $-2b$ earundem differentia, erit $-a - b$ radix una, & $-a + b$ radix altera. Quare multiplicando $x + a + b = 0$ per $x + a - b = 0$, producetur æquatio $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione propositâ $x^2 + 2px + q = 0$: proindeque, conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, erit $2a = 2p$, & $a^2 - b^2 = q$. Itaque, quum sit $2a = 2p$, erit $a = p$, atque adeo $a^2 = p^2$. Unde, si in æquatione $a^2 - b^2 = q$ loco a^2 ponatur valor ejus p^2, fiet $p^2 - b^2 = q$, hoc est $b^2 = p^2 - q$: proindeque per extractionem quadratæ radicis erit $b = \sqrt{p^2 - q}$, eritque adeo $-a - b = -p - \sqrt{p^2 - q}$, & $-a + b = -p + \sqrt{p^2 - q}$.

V.

Usus formularum in resolvendis æquationibus secundi gradus.

Nunc qui debeat esse usus formularum, quum aliqua secundi gradus æquatio resolvenda proponitur, oportet breviter explicemus. Itaque postquam quatuor illæ formulæ sunt resolutæ, & singularum radices inventæ, haud quidem necesse est, eadem arte æquationes speciales resolvere, sed poterit earum resolutio solius substitutionis ope obtineri. Inquiratur enim, ad quam ex iis formulis proposita æquatio reducatur, eaque cognitâ, siquidem in radicibus inventis illius substituantur valores litterarum p, & q, determinati ab æquatione propositâ, istius jam radices habebuntur.

Proponatur, exmpli gratiâ, resolvenda æquatio secundi gradus $x^2 - 4x - 6 = 0$. Hæc propter signa, quibus termini afficiuntur, reducitur ad primam formulam $x^2 - 2px - q = 0$. Itaque factâ terminorum mutuâ collatione, erit $2p = 4$, atque adeo $p = 2$, eritque etiam $q = 6$. Unde, quum radices primæ formulæ sint $p + \sqrt{p^2 + q}$, & $p - \sqrt{p^2 + q}$, substituendo loco p, & q valores illos, fient radices propositæ æquationis $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$, quarum liquet unam esse positivam, alteram negativam.

Proponatur secundò resolvenda æquatio $x^2 + 6x - 10 = 0$. Hæc, si signa considerentur, quibus termini ipsius afficiuntur, reducitur ad secundam formulam $x^2 + 2px - q = 0$. Quare, conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, erit $2p = 6$, sive $p = 3$, & $q = 10$. Jam verò radices secundæ formulæ sunt $-p + \sqrt{p^2 + q}$, & $-p - \sqrt{p^2 + q}$. Itaque substituendo in radicibus illis loco p, & q valores suos, fient radices propositæ æquationis $-3 + \sqrt{19}$, & $-3 - \sqrt{19}$, ex quibus una quidem est positiva, altera negativa.

Proponatur ulteriùs resolvenda æquatio $x^2 - 6x + 4 = 0$, quæ reducitur ad tertiam formulam $x^2 - 2px + q = 0$, quum in utraque secundus terminus afficiatur signo $-$, & tertius, sive postremus signo $+$. Itaque si termini unius ordine comparentur cum terminis alterius, invenietur $p = 3$, & $q = 4$. Quare, quum radices tertiæ formulæ sint $p + \sqrt{p^2 - q}$, & $p - \sqrt{p^2 - q}$, substituendo in radicibus illis loco p, & q valores suos, fient radices propositæ æquationis $3 + \sqrt{5}$, & $3 - \sqrt{5}$, quarum utramque liquet positivam esse.

Denique oporteat, resolvere æquationem $x^2 + 10x + 15 = 0$, quæ continetur sub quartâ, & ultimâ formulâ $x^2 + 2px + q = 0$, quum in utraque termini omnes afficiantur signo $+$. Jam radices hujus formulæ sunt $-p + \sqrt{p^2 - q}$, & $-p - \sqrt{p^2 - q}$. Itaque quia conferendo terminos unius æquationis ordine cum terminis alterius, fit $p = 5$, & $q = 15$, substituantur in radicibus illis loco p, & q valores isti, & erunt radices propositæ æquationis $-5 + \sqrt{10}$, & $-5 - \sqrt{10}$, quarum utraque est negativa.

Cæterùm nolim hìc reticere, quod hoc artificio resolvi quoque possint æquationes secundi gradus, quarum radices sunt rationales, quæque ideo in propriâ suâ sede non existunt. Si enim multiplicetur $x - 2 = 0$ per $x - 4 = 0$ producetur æquatio secundi gradus $x^2 - 6x + 8 = 0$, quæ

quæ reducitur ad tertiam formulam $x^2 - 2px + q = 0$. Unde quum radices istius formulæ sint $p + \sqrt{p^2 - q}$, & $p - \sqrt{p^2 - q}$, substituendo in iis loco p, & q valores correspondentes, fient radices compositæ æquationis $3 + \sqrt{1}$, & $3 - \sqrt{1}$, hoc est 4, & 2, omninò, ut assumptæ sunt in æquationibus componentibus $x - 2 = 0$, & $x - 4 = 0$.

VI.

Resolutio æquationum derivativarum secundi gradus.

Ad hunc locum pertinet quoque resolutio æquationum derivativarum secundi gradus. Voco autem æquationes derivativas secundi gradus, quæ talis sunt naturæ, ut tametsi dici nequeant secundi gradus, possunt nihilominus in alias secundi gradus transformari: si scilicet loco quadrati, cubi, aut alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ, incognita alia substituatur.

Hac ratione æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$, tametsi ad quatuor dimensiones ascendat, dicenda est tamen derivativa secundi gradus; quia nempe, si fiat $x^2 = y$, & in ipsâ æquatione scribatur y loco x^2, & y^2

& y^2 loco x^4, habebitur loco ejus hæc alia $y^2 - 6y - 4 = 0$, quæ, ut vides, est duarum dimensionum, adeoque secundi gradus.

Similiter, si habeatur æquatio $x^6 - 4x^3 - 9 = 0$, in ea quidem incognita ad sex dimensiones assurgit. Verumtamen, quia si fiat $x^3 = y$, & scribatur in ipsâ æquatione y loco x^3, & y^2 loco x^6, mutabitur illa in hanc aliam $y^2 - 4y - 9 = 0$; in qua incognita est duarum dimensionum; dicenda est æquatio proposita derivativa secundi gradus.

Generaliter autem omnis æquatio, quæ continetur sub hac formulâ $x^{2m} + px^m + q = 0$, ubi m significat numerum quemcumque, & in qua nulla habetur ratio signorum, quibus termini afficiuntur, dicenda est derivativa secundi gradus; quia nempe si ponatur $x^m = y$, & scribatur y loco x^m, & y^2 loco x^{2m}, habebitur æquatio secundi gradus $y^2 + py + q = 0$.

Unde patet, æquationes derivativas secundi gradus tres tantùm terminos continere, & potestatem, ad quam ascendit incognita in primo termino, esse quadratum illius, ad quam attollitur in termino intermedio. Ex quo licet etiam inferre, in iisdem æquationibus derivativis, primum terminum tantundem distare ab intermedio, quantum hic distat ab ultimo; vel quod eodem recidit, tot terminos deficere inter primum, & intermedium, quot inter hunc, & ultimum desunt.

Harum ergo æquationum resolutio iisdem poterit regulis exerceri, quibus perficitur resolutio æquationum secundi gradus. Si enim habeatur æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$, ponendo $x^2 = y$, reducetur illa ad æquationem secundi gradus $y^2 - 6y - 4 = 0$, cujus radices sunt $3 + \sqrt{13}$, & $3 - \sqrt{13}$. Itaque, quum sit $x = \sqrt{y}$, si capiantur radices quadratæ quantitatum $3 + \sqrt{13}$, & $3 - \sqrt{13}$, habebuntur radices propositæ æquationis.

Eâdem ratione, si fuerit æquatio $x^6 - 4x^3 - 9 = 0$, ponatur $x^3 = y$, ut factâ substitutione habeatur æquatio secundi gradus $y^2 - 4y - 9 = 0$. Et quoniam radices huius æquationis sunt $2 + \sqrt{13}$, & $2 - \sqrt{13}$, siquidem ex his quantitatibus extrahantur radices cubicæ, propter $x = \sqrt[3]{y}$, erunt cubicæ illæ radices valores propositæ æquationis $x^6 - 4x^3 - 9 = 0$.

Itaque generaliter methodus resolvendi æquationes derivativas secundi gradus hæc

hæc est. Transformetur primò æquatio proposita in aliam secundi gradus, ponendo loco quadrati, cubi, aut alterius potestatis incognitæ, in æquatione contentæ, incognitam aliam; deinde æquationis hujus radices inveniantnr. Et siquidem ex his radicibus ea rursus radix eliciatur, quam designat potestas incognitæ principalis, in cujus locum substituta est incognita altera, jam ipsius propositæ æquationis radices habebuntur.

CAP. VII.

De resolutione æquationum tertii gradus.

Ostensâ resolutione æquationum secundi gradus, ad earum nunc æquationum resolutionem gradum facimus, quarum sedes in tertio gradu subsistit. Istæ similiter, si sint puræ, vel reducuntur ad hanc formulam $x^3 - q = 0$, vel etiam ad hanc aliam $x^3 + q = 0$. Utriusque formulæ radix una facili negotio invenitur per solam radicis cubicæ extractionem. Quum enim in primâ habeatur $x^3 - q = 0$, hoc est $x^3 = q$, erit extrahendo hinc inde radicem cubicam $x = \sqrt[3]{q}$. Et similiter, quum habeatur in in secundâ $x^3 + q = o$, hoc est $x^3 = -q$, extrahendo quoque ex utraque parte cubicam radicem, fiet $x = \sqrt{3} - q$, vel quod idem est $x = -\sqrt{3}\, q$. Unde patet, prioris formulæ radicem esse positivam, posterioris verò negativam.

Quoniam autem omnis æquatio tot radices habere potest, quot in eâ maxima incognitæ potestas habet dimensiones, & non plures; habebit utraque illarum formularum, præter inventam radicem, duas alias, quum in iis incognita x ad tres dimensiones ascendat: unde qua ratione ex iisdem formulis aliæ duæ illæ radices erui possint, non abs re erit ostendere. Id itaque fit ope divisionis, nempe si unaquæque formula dividatur per æquationem simplicem, inventam suam radicem continentem. Sic enim deprimetur ad aliam, quæ duas tantùm dimensiones habebit, & cujus adeò radices dabunt radices optatas.

Hac ratione, quum in primâ formulâ habeatur $x^3 - q = o$, & æquatio simplex, quæ continet radicem suam inventam, sit $x - \sqrt{3}\, q = o$, dividere oportebit $x^3 - q = o$ per $x - \sqrt{3}\, q = o$, vel etiam $x^3 - a^3 = o$ per $x - a = o$, siquidem ponatur $q = a^3$. Itaque, quia factâ istâ divisione, quotiens oritur $x^2 + ax + a^2$, erit $x^2 + ax + a^2 = o$, æquatio secundi gradus, quæ ducta in æquationem simplicem $x - a = o$, producit æquationem propositam $x^3 - a^3 = o$. Quare inventis duabus radicibus hujus æquationis $x^2 + ax + a^2 = o$, quæ prodeunt imaginariæ, quum quadratum ex quantitate cognitâ secundi termini dimidiatâ minus sit ultimo termino, qui afficitur signo $+$; erunt eæ aliæ duæ radices æquationis $x^3 - a^3 = o$.

Eâdem ratione, quia in secundâ formulâ habetur $x^3 + q = o$, & æquatio simplex, quæ continet radicem suam inventam, est $x + \sqrt{3}\, q = o$, dividere oportebit $x^3 + q = o$ per $x + \sqrt{3}\, q = o$, sive etiam $x^3 + a^3 = o$ per $x + a = o$, siquidem ponatur, ut in antecedenti, $q = a^3$. Quocirca, quia quotiens hujus divisionis est $x^2 - ax + a^2$, erit $x^2 - ax + a^2 = o$ æquatio secundi gradus, quæ multiplicata per æquationem simplicem $x + a = o$, producit æquationem tertii gradus $x^3 + a^3 = o$. Unde inventis radicibus duabus hujus æquationis $x^2 - ax + a^2 = o$, quæ similiter prodeunt imaginariæ, quia quadratum ex semisse quantitatis cognitæ secundi termini minus

nus est ultimo termino, qui reperitur affectus signo +; dabunt eæ alias duas radices æquationis $x^3 + a^3 = 0$.

Æquationes tertii gradus affectæ multiplicis speciei esse possunt. In iis namque oriri potest affectio, vel quia secundus terminus habetur, & tertius deficit, ut in hac æquatione $x^3 + ax^2 - abc = 0$; vel vicissim, quia tertius habetur, & secundus deficit, ut in hac aliâ $x^3 - a^2x + abc = 0$; vel denique quia tam secundus, quàm tertius terminus in iis reperitur, ut contingit in hac æquatione $x^3 + ax^2 - abx + abc = 0$. Omnes istos casus expendere, longiùs nos ducet, quàm nostrum est animus. Itaque, quum regula habeatur satis expedita, per quam tolli possit ex omni æquatione secundus terminus, satius erit eas tantùm tertii gradus æquationes affectas considerare, quæ secundo termino carentes, tantùm tertium terminum habent. Hæ autem æquationes ad has quatuor sequentes formulas reducuntur.

$$x^3 + 3px - 2q = 0$$
$$x^3 + 3px + 2q = 0$$
$$x^3 - 3px - 2q = 0$$
$$x^3 - 3px + 2q = 0.$$

Un-

Unde non secus, ac factum est in æquationibus secundi gradus, qua ratione quatuor istæ formulæ resolvi possint, sigillatim ostendemus.

I.

Resolutio primæ formulæ $x^3 + 3px - 2q = 0$.

Quoniam in hac primâ formulâ $x^3 + 3px - 3q = 0$ termini hinc inde existentes à termino deficiente eodem signo afficiuntur, radices duæ, quas ii cum illo constituunt, erunt imaginariæ: proindeque formula ipsa unicam tantùm continebit radicem realem, eamque positivam, quæ eruitur ex duobus postremis terminis, quorum signa sunt contraria. Sed nihilominus radices duæ imaginariæ tales esse debent, ut summa ipsarum sit quantitas realis negativa, eaque æqualis radici positivæ. Deest enim in æquatione secundus terminus, ubi radicum omnium summa sub signo mutato continetur.

Itaque pro resolutione hujus formulæ sint $x + a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas imaginarias. Quia igitur summa harum radicum est quantitas

tas realis negativa, nimirum $-2a$, erit $x-2a=0$ æquatio simplex, quæ continet radicem realem positivam. Multiplicentur inter se mutuò priores duæ simplices æquationes $x+a-\sqrt{-3b^2}=0$, & $x+a+\sqrt{-3b^2}=0$, & æquatio, quæ exinde oritur $x^2+2ax+a^2+3b^2=0$, multiplicetur porrò per alteram æquationem simplicem $x-2a=0$. Producetur ergo æquatio tertii gradus $x^3+3b^2x-3a^2x-2a^3-6ab^2=0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, siquidem fuerit $3b^2$ major, quàm $3a^2$, hoc est b major, quàm a.

Comparentur jam termini unius æquationis ordine cum terminis alterius, & habebuntur hoc pacto duæ æquationes, nimirum $3b^2-3a^2=3p$, & $2a^3+6ab^2=2q$. Itaque, quia in primâ istarum æquationum habetur $3b^2-3a^2=3p$, hoc est $b^2-a^2=p$, erit, attollendo utramque partem ad cubum, $b^6-3a^2b^4+3a^4b^2-a^6=p^3$. Et similiter, quia in secundâ æquatione habetur $2a^3+6ab^2=2q$, hoc est $a^3+3ab^2=q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6+6a^4b^2+9a^2b^4=q^2$. Quare per additionem utriusque æquationis fiet $b^6+6a^2b^4+9a^4b^2=p^3+q^2$; atque

adeò

adeò extrahendo hinc inde quadratam radicem, erit $b^3+3a^2b=\sqrt{p^3+q^2}$.

Habemus ergo duas istas æquationes $a^3+3ab^2=q$, & $b^3+3a^2b=\sqrt{p^3+q^2}$. Itaque, si eas in unum addamus, fiet $a^3+3ab^2+b^3+3a^2b=q+\sqrt{p^3+q^2}$; adeoque, per extractionem radicis cubicæ, erit $a+b=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}$. Jam verò, subductis à se mutuò iisdem æquationibus, erit $a^3+3ab^2-b^3-3a^2b=q-\sqrt{p^3+q^2}$. Quare, extrahendo rursus hinc inde radicem cubicam, erit $a-b=\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$: ex quibus eruitur $2a=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$. Est ergo quantitas ista radix realis æquationis $x^3+3px-2q=0$, quam positivam esse nemo non videt.

Potest ejusdem radicis valor alio quoque modo designari. Habetur enim $b^2-a^2=p$. Itaque, quum inventum sit $a+b=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}$, dividendo partes illius æquationis per correspondentes par-

tes

tes istius, fiet $b - a = -\frac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}$: proindeque, si æquatio ista ex illâ subducatur, erit $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} - \frac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}$: id, quod exinde etiam liquere potest; quia si pars secunda prioris expressionis, quæ est quantitas integra, multiplicetur per denominatorem fractionis, quæ constituit secundam partem alterius hujus expressionis, id, quod producitur, fit $-p$, hoc est numerator ejusdem fractionis.

Inventa radice reali æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$, aliæ duæ radices imaginariæ determinari possunt, vel inveniendo valorem quantitatis b, id quod nullo negotio effici potest, vel etiam dividendo æquationem, de qua agitur, per æquationem simplicem, inventam radicem continentem. Hæc divisio Tyronibus nonnihil molestiæ afferet; sed poterunt substitutione adjuvari. Si enim radicem inventam vocemus c, dividere oportebit $x^3 + 3px - 2q = 0$ per $x - c$ $= 0$,

$= 0$. Oriri autem ex hac divisione æquationem secundi gradus $x^2 + cx + c^2 + 3p = 0$, cujus radices duæ sunt imaginariæ, facilè patebit, si consideremus, quod etsi divisione usque ad hunc terminum peractâ, videatur superesse residuum $c^3 + 3pc - 2q$, hoc tamen residuum idem sit, ac zero, sive nihil; quum subrogatâ loco c incognitâ x, cujus valorem repræsentat, restituat nobis terminos æquationis, de qua agitur, $x^3 + 3px - 2q$, quorum summa est æqualis zero, sive nihilo.

Cæterùm radix realis æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$ potest etiam inveniri hoc artificio. Ponatur $x = y - z$. Itaque, elevando utramque partem æquationis ad cubum, erit $x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$. Et quoniam $-3y^2z + 3yz^2$ designant productum, quod oritur, multiplicando $y - z$ per $-3yz$; proinde, si loco $y - z$ ponatur x, fiet $-3y^2z + 3yz^2 = -3yzx$: unde erit $x^3 = y^3 - 3yzx - z^3$, hoc est $x^3 + 3yzx + z^3 - y^3 = 0$. Conferantur jam termini istius æquationis ordine cum terminis illius, de qua agitur, & erit $3yz = 3p$, & $z^3 - y^3 = 2q$, quarum æquationum ope facilè erit determinare tum y, cùm z.

Quum enim in primâ habeatur $3yz = 3p$,

$3p$, hoc est $yz = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $y^3z^3 = p^3$. Et quoniam in secundâ habetur $z^3 - y^3 = 2q$, multiplicando terminos omnes tum per z^3, cùm per y^3, fiet $z^6 - y^3z^3 = 2qz^3$, & $y^3z^3 - y^6 = 2qy^3$: proindeque substituendo in duabus hisce æquationibus loco y^3z^3 valorem suum p^3, una fiet $z^6 - p^3 = 2qz^3$, hoc est $z^6 - 2qz^3 - p^3 = 0$, altera $p^3 - y^6 = 2qy^3$, hoc est $y^6 + 2qy^3 - p^3 = 0$. Unde, quia duæ istæ æquationes sunt derivativæ secundi gradus, facilè erit eas resolvere, atque adeò valores incognitarum y, & z determinare.

II.

Resolutio secundæ formulæ $x^3 + 3px + 2q = 0$.

Similiter in hac secundâ formulâ $x^3 + 3px + 2q = 0$, quia termini hinc inde positi à termino deficiente eodem signo sunt affecti, radices duæ, quas ii cum illo constituunt, imaginariæ erunt: quocirca formula ipsa unicam tantùm continebit radicem realem, eamque negativam, quæ eruitur ex duobus postremis terminis, quorum signa sunt similia. Sed quia

quia hìc etiam deest secundus terminus, cujus coefficiens in omni æquatione est summa radicum sub signo mutato, necesse est, ut hìc quoque radices imaginariæ hujusmodi sint, ut summa ipsarum sit quantitas realis positiva, eaque æqualis radici negativæ.

Itaque pro resolutione alterius hujus formulæ sint $x - a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas imaginarias. Quia igitur summa harum radicum est quantitas realis positiva, nimirum $2a$, erit $x + 2a = 0$ æquatio simplex, quæ continet radicem realem negativam. Multiplicentur inter se mutuò priores duæ simplices æquationes $x - a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-3b^2} = 0$; quæ verò exinde oritur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$, multiplicetur porrò per æquationem alteram simplicem $x + 2a = 0$. Producetur ergo æquatio tertii gradus $x^3 + 3b^2x - 3a^2x + 2a^3 + 6ab^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, siquidem fuerit $3b^2$ major, quàm $3a^2$, hoc est b major, quàm a.

Comparentur jam termini unius æquationis ordine cum terminis alterius, & ha-

& habebuntur hoc pacto duæ æquationes $3b^2 - 3a^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$. Quia ergo in primâ istarum æquationum habetur $3b^2 - 3a^2 = 3p$, hoc est $b^2 - a^2 = p$; erit, elevando utramque partem ad cubum, $b^6 - 3a^2b^4 + 3a^4b^2 - a^6 = p^3$. Et similiter, quia in secundâ æquatione habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc est $a^3 + 3ab^2 = q$, erit, elevando utramque partem ad quadratum, $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Quare, per additionem utriusque æquationis, fiet $b^6 + 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = p^3 + q^2$; atque adeò, extrahendo hinc inde quadratam radicem, erit $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$.

Et quoniam habentur duæ istæ æquationes $a^3 + 3ab^2 = q$, & $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$; erit per earum additionem $a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2b = q + \sqrt{p^3 + q^2}$: Quare, extrahendo ex utraque parte radicem cubicam, fiet $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$. Jam verò, si ex æquatione $a^3 + 3ab^2 = q$ auferatur hæc alia $b^3 + 3a^2b = \sqrt{p^3 + q^2}$, orietur $a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b = q - \sqrt{p^3 + q^2}$. Itaque, si ex utraque parte alterius hujus æquationis extrahatur quoque radix cubica, fiet vicissim $a - b =$

$\sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$: unde eruitur $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$: & propterea radix realis æquationis $x^3 + 3px + 2q = 0$, repræsentata per $-2a$, erit $-\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} - \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$, quam negativam esse nemo non videt.

Potest eadem radix aliâ quoque ratione designari, nimirum, si utamur æquatione superiùs inventâ $b^2 - a^2 = p$. Quum enim habeatur $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$, dividendo $b^2 - a^2$ per $a + b$, itemque p per $\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$, quia quantitates æquales per alias æquales dividuntur, fiet quotiens unius divisionis æqualis quotienti, qui ex divisione alterâ deducitur, nimirum $b - a = \dfrac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}$: unde erit $-2a = -\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \dfrac{p}{\sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}}$: quod exinde etiam colligi potest, quia si pars altera prioris expressionis multiplicetur per denominatorem fractionis, quæ constituit partem alteram secundæ hujus expressionis, producatur quantitas p, hoc est numerator ejusdem fractionis.

Inventâ radice reali æquationis $x^3 + 3px + 2q = 0$, radices duæ imaginariæ determinari possunt, vel inveniendo quantitatem b, id quod nullo negotio effici potest, vel etiam dividendo æquationem ipsam $x^3 + 3px + 2q = 0$ per æquationem simplicem, inventam radicem continentem. Sed hìc quoque, ad divisionis tædium evitandum, vocari poterit radix inventa $-c$, atque adeo dividere $x^3 + 3px + 2q = 0$ per $x + c = 0$. Et quamquam ex hac divisione, invento quotiente $x^2 - cx + c^2 + 3p$, videatur superesse residuum $-c^3 - 3pc + 2q$; attamen residuum illud nullius esse valoris exinde liquet, quia si loco $-c$ substituatur valor ejus x, prodibunt termini ipsius æquationis $x^3 + 3px + 2q = 0$. Est itaque $x^2 - cx + c^2 + 3p$ quotiens exactus illius divisionis; & propterea æquatio, quæ continet radices duas imaginarias æquationis principalis, erit $x^2 - cx + c^2 + 3p = 0$.

Cæterùm radix realis æquationis $x^3 +$

$3px + 2q = 0$ potest etiam inveniri hoc artificio Ponatur $x = y - z$. Itaque, elevando utramque partem hujus æquationis ad cubum, fiet $x^3 = y^3 - 3zy^2 + 3z^2y - z^3$. Jam verò termini duo $-3zy^2 + 3z^2y$ continent id, quod producitur, multiplicando $y - z$, hoc est x per $-3zy$. Quare erit $-3zy^2 + 3z^2y = -3zyx$ & propterea fiet $x^3 = y^3 - 3zyx - z^3$, hoc est $x^3 + 3zyx - y^3 + z^3 = 0$. Comparentur jam termini istius æquationis cum terminis æquationis, de qua agitur, $x^3 + 3px + 2q = 0$, & habebuntur hoc pacto duæ aliæ æquationes, nimirum $3zy = 3p$, & $z^3 - y^3 = 2q$, quarum æquationum ope facilè erit determinare utramque quantitatum y, & z.

Quum enim in primâ habeatur $3zy = 3p$, hoc est $zy = p$, erit elevando utramque partem hujus æquationis ad cubum $z^3y^3 = p^3$. Est autem in secundâ $z^3 - y^3 = 2q$, hoc est $z^3y^3 - y^6 = 2qy^3$, vel etiam $z^6 - z^3y^3 = 2qz^3$. Itaque, si in duabus hisce æquationibus loco z^3y^3 ponatur valor ejus p^3, una fiet $p^3 - y^6 = 2qy^3$, hoc est $y^6 + 2qy^3 = p^3$, & altera $z^6 - p^3 = 2qz^3$, hoc est $z^6 - 2qz^3 = p^3$. Unde quum duæ istæ æquationes sint derivativæ secundi gradus, facilè erit eas resolvere, & consequenter invenire valores quantitatum y, & z, quarum differentia $y - z$ est æqualis incognitæ x.

III.

Resolutio tertiæ formulæ $x^3 - 3px + 2q = 0$.

Quum in hac tertiâ formulâ $x^3 - 3px + 2q = 0$ termini hinc inde positi à termino deficiente contrariis signis afficiantur; radices, quas ipsi cum illo constituunt, poterunt quidem esse reales, quales utique si fuerint, una erit positiva, altera negativa. Unde, quum eadem æquatio propter postremos duos terminos, contrariis item signis affectos, aliam habeat radicem realem positivam; poterit æquatio ipsa tribus radicibus realibus explicari, duabus quidem positivis, & unâ negativâ. Quumque deficiat in æquatione secundus terminus, cujus coefficiens est summa radicum sub signo mutato; perspicuum est, radices positivas tales esse debere, ut summa ipsarum æqualis sit radici negativæ.

Interim non negamus, radices duas positivas istius æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ posse quandoque imaginarias evadere, nimirum quum fuerit cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini minor quadrato, quod fit ex semisse quantitatis cognitæ, quæ ultimum terminum constituit, hoc est p^3 minor, quàm q^2. Quocirca tunc demum omnes hujus æquationis radices reales erunt, quum p^3 non est minor, quàm q^2, sed vel major, vel æqualis. Nec silentio præteribimus, quod quum fuerit p^3 æqualis q^2, tunc radices duæ positivæ sint æquales inter se, atque adeo æquatio ipsa per regulas superiùs traditas semper deprimi possit.

Hæc omnia ut ostendamus, sint $x - a - \sqrt{3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices positivas, ponendo nempe a majorem, quàm $\sqrt{3b^2}$. Itaque, quia summa istarum radicum est $2a$, atque huic propter secundum terminum deficientem æqualis esse debet radix negativa, erit $x + 2a = 0$ æquatio simplex, quæ continet radicem negativam. Multiplicentur ergo inter se mutuò priores duæ simplices æquationes $x - a - \sqrt{3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{3b^2} = 0$; ea verò, quæ exinde producitur $x^2 - 2ax + a^2 - 3b^2 = 0$ multiplicetur

tur per tertiam æquationem simplicem $x + 2a = 0$: qua ratione orietur æquatio tertii gradus $x^3 - 3a^2x^2 - 3b^2x + 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px + 2q = 0$, quum ex hypothesi $2a^3$ major sit, quàm $6ab^2$: proindeque factâ mutuâ terminorum collatione, habebitur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Ergo quia in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, erit $a^2 + b^2 = p$. Quare, attollendo utramque partem ejus ad cubum, sive tertiam potestatem, fiet $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et quoniam in secundâ æquatione habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, erit $a^3 - 3ab^2 = q$; atque adeò, elevando utramque ejus partem ad quadratum, sive secundam potestatem, fiet $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Subducantur jam partes hujus æquationis ordine ex partibus illius, & habebitur hæc altera $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, cujus ope facilè patebit, radices duas positivas æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ reales esse, & inæquales, quum fuerit p^3 major, quàm q^2; esse verò reales, & æquales, quum habetur $p^3 = q^2$; ac denique imaginarias esse, quotiescumque p^3 minor est, quàm q^2.

Ra-

Radices namque duæ positivæ æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ designatæ sunt per $a + \sqrt{3b^2}$, & $a - \sqrt{3b^2}$. Itaque, quum radices istæ sunt reales, & inæquales, erit $3b^2$ quantitas positiva, & minor quidem, quàm a^2: quod profectò quum contingit, positiva erit quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, & consequenter positiva quoque quantitas $p^3 - q^2$, cui illa est æqualis: proindeque p^3 major erit, quàm q^2. At verò quum radices illæ sunt reales, & æquales, necesse est, ut quantitas $3b^2$ evanescat: quod utique quum accidit, evanescit quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, atque adeo evanescente $p^3 - q^2$, erit $p^3 = q^2$. Et denique, quum radices illæ sunt imaginariæ, erit $3b^2$ quantitas negativa: quo casu erit etiam negativa quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, & consequenter quum sit quoque negativa quantitas $p^3 - q^2$, erit p^3 minor, quàm q^2.

Nunc videamus, quâ ratione radices illæ erui possint: qua in re singulos oportet casus prosequamur. Et primò quidem, quum radices duæ positivæ sunt imaginariæ, sint $x - a - \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas. Itaque si æquasi æquatio ex illarum multiplicatione orta $x^2 - 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x + 2a = 0$, quæ continet radicem realem negativam, erit $x^3 - 3a^2x + 3b^2x + 2a^3 + 6ab^2 = 0$ ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px + 2q = 0$. Quare, factâ mutuâ terminorum collatione, habebuntur duæ aliæ æquationes $3a^2 - 3b^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$.

Quia ergo in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 - 3b^2 = 3p$, hoc est $a^2 - b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 = p^3$. Et rursus, quia in secundâ habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc est $a^3 + 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Unde, si ex partibus istius subducantur ordine partes illius, orietur hæc altera æquatio $9a^4b^2 + 6a^2b^4 + b^6 = q^2 - p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis, fiet $3a^2b + b^3 = \sqrt{q^2 - p^3}$. Habetur autem $a^3 + 3ab^2 = q$. Itaque per additionem erit $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$, per subtractionem verò $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3}$; ex

ex quibus quum inferatur per extractionē radicis cubicæ $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, & $a - b = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$: proindeque radix realis negativa æquationis erit hæc eadem quantitas contrariis signis affecta.

Nec silentio præteribimus, posse hanc eandem radicem, non secus, ac in superioribus formulis factum, aliâ quoque ratione designari, nimirum si repertâ æquatione $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, per partes istius dividamus ordine partes alterius hujus æquationis $a^2 - b^2 = p$ superiùs inventæ. Cæterùm inventâ radice reali negativâ, radices duæ imaginariæ determinari possunt, vel inveniendo valorē quantitatis b, vel etiam ope divisionis. Sed quotiens, qui ex divisione oritur, erit $x^2 - cx - 3p + c^2 = 0$, si fuerit $x + c = 0$ æquatio simplex, quæ continet radicem inventam. Etsi enim dividẽdo $x^3 - 3px + 2q = 0$ per $x + c = 0$, videatur divisio peragi non posse, quum invento quotiente $x^2 - cx - 3p + c^2$ supersit $- c^3 + 3pc + 2q$; attamen residuum illud idem va-

valet, ac zero, sive nihil, quia si loco $-c$ subrogetur valor ejus x, prodibunt ipsi termini æquationis dividendæ $x^3 - 3px + 2q$, quorum summa nihilum adæquat.

Quod si radices duæ positivæ æquationis fuerint reales, & æquales, tunc earum inventio facilis erit. Sint etenim $x - a = 0$, & $x - a = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas. Itaque si æquatio ex illarum multiplicatione orta $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x + 2a = 0$, quæ continet radicem negativam, fiet æquatio $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px + 2q = 0$. Unde, factâ mutuâ terminorum collatione, erit $3a^2 = 3p$, & $2a^3 = 2q$, hoc est $a^2 = p$, & $a^3 = q$. Unde dividendo partes istius ordine per partes illius, invenietur $a = \frac{q}{p}$: adeo, ut habebitur unaquæque radicum æqualium, si semissis quantitatis cognitæ, quæ constituit ultimum terminum, dividatur per trientem quantitatis cognitæ termini tertii.

Denique, si radices duæ positivæ æquatio-

tionis sint quidem reales, sed inæquales; tunc methodus eas eruendi procedere debet in hunc modum. Sint $x - a - \sqrt{3b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas, fingendo, quod a major sit, quàm $\sqrt{3b^2}$. Ergo, si æquatio, quæ ex illarum multiplicatione oritur, $x^2 - 2ax + a^2 - 3b^2 = 0$, multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x + 2a = 0$, quæ continet radicem negativam, orietur æquatio $x^3 - 3a^2x - 3b^2x + 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione $x^3 - 3px + 2q = 0$. Quocirca conferendo terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur duæ aliæ æquationes $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, hoc est $a^2 + b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et rursus, quia in secundâ habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, hoc est $a^3 - 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Jam verò duæ istæ æquationes nec additione, nec subductione mutuâ possunt nobis usui esse: nam primò additione oritur æquatio $2a^6 - 3a^4b^2 + 12a^2b^4 + b^6 = q^2 + p^3$, ex qua nihil colligi potest, quum neutra pars ejus sit potestas perfecta; & secundò subductione unius ex alterâ producitur æquatio $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis fit quidem $3a^2b - b^3 = \sqrt{p^3 - q^2}$, sed combinari nulla ratione potest cum alterâ $a^3 - 3ab^2 = q$ ad inveniendam tum summam, cùm differentiam quantitatum a, & b. Deficit ergo in hoc casu methodus, quam in resolutione aliarum æquationum adhibuimus, & radices æquationes $x^3 - 3px + 2q = 0$, quum omnes sunt reales, & inæquales, ope ejus erui non possunt.

IV.

Resolutio quartæ formulæ $x^3 - 3px - 2q = 0$.

Tandem ostendenda nobis est resolutio quartæ, & ultimæ formulæ $x^3 - 3px - 2q = 0$. Et quoniam in istâ æquatione duo termini, qui hinc inde existunt à termino deficiente, similiter signa habent contraria; radices, quas ipsi cum illo constituunt, poterunt hìc quoque

que esse reales, quales equidem si fuerint, una erit positiva, altera negativa. Quumque eadem æquatio, propter postremos duos terminos, qui eodem signo afficiuntur, aliam habeat radicem negativam; poterit æquatio ista tres radices reales habere, duas quidem negativas, & unam positivam. Et denique, quia deest in æquatione secundus terminus, ubi radicum omnium summa sub signo mutato debet reperiri; perspicuum est, radices duas negativas tales esse debere, ut summa ipsarum adæquet radicem positivam.

Sed hìc quoque monitum Lectorem velim, radices duas negativas æquationis hujus $x^3 - 3px - q = 0$ non semper esse reales, sed quandoq; posse imaginarias evadere. Si enim contingat, cubum ex triente quantitatis cognitæ tertii termini minorem esse quadrato, quod fit ex semisse quantitatis cognitæ, quæ ultimum terminum constituit, hoc est p^3 minorem, quàm q^2; tunc equidem radices duæ negativæ non erunt reales, sed imaginariæ. Itaque tunc demum æquatio, de qua agitur, omnes radices reales habebit, quotiescumque non fuerit p^3 minor, quàm q^2, sed vel major, vel æqualis. Nec silentio prætereundum,

 quod

quod quum p^3 est æqualis q^2, tunc radices duæ negativæ sint quidem reales, sed æquales, atque adeo commensurabiles: ita, ut in hoc casu æquationis resolutio possit per regulas superiùs traditas obtineri.

Jam, ut hæc omnia suis demonstrationibus nota fiant, ac explorata, sint $x + a + \sqrt{3b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas negativas, ponendo, quod a minor sit, quàm $\sqrt{3b^2}$. Itaque, quia summa istarum radicum est $-2a$, erit $x - 2a = 0$ æquatio simplex, quæ continet radicem positivam: proindeque, si tres istæ æquationes simplices multiplicentur inter se, æquatio, quæ inde oritur, $x^3 - 3a^2x - 3b^2x - 2a^3 + 6ab^2 = 0$ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px - 2q = 0$. Conferantur ergo termini unius ordine cum terminis alterius, & habebuntur ope hujus comparationis aliæ duæ æquationes, nimirum $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, erit $a^2 + b^2 = p$; proindeque elevando utramque partem hujus æquationis ad cubum, erit a^6

$a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et rursus, quia in secundâ æquatione habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, erit $a^3 - 3ab^2 = q$: quare elevando utramque partem alterius hujus æquationis ad quadratum, habebitur $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Unde si porrò partes hujus æquationis ordine subducantur ex partibus illius, orietur hæc altera $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, cujus quidem æquationis ope facile erit ostendere, radices duas negativas æquationis, de qua agitur $x^3 - 3px - 2q = 0$, esse reales, & inæquales, quum p^3 major est, quàm q^2; esse reales, & æquales, quum p^3 est æqualis q^2; & esse demum imaginarias, si fuerit p^3 minor, quàm q^2.

Radices namque duæ negativæ æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$ designatæ sunt per $-a - \sqrt{3b^2}$, & $-a + \sqrt{3b^2}$. Itaque, quum radices istæ sunt reales, & inæquales, erit $3b^2$ quantitas positiva, & minor quidem, quàm a^2: quod profectò quum contingit, positiva est etiam quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$; & consequenter existente quoque positivâ quantitate $p^3 - q^2$, quæ illam adæquat, erit p^3 major, quàm q^2. At verò, quum radices illæ sunt reales, & æquales, nulla erit

erit quantitas $3b^2$; quod utique, quum accidit, nulla etiam erit quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$; atque adeo evanescente quoque quantitate $p^3 - q^2$, fiet $p^3 = q^2$. Et denique, quum radices illæ sunt imaginariæ, eadem quantitas $3b^2$ erit negativa: unde, quum fiat negativa similiter quantitas $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6$, erit itidem negativa quantitas illi æqualis $p^3 - q^2$, & consequenter p^3 minor erit, quàm q^2.

Sed videamus modò, qua ratione inveniri possint radices æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$: qua in re, non secus, ac factum in tertiâ formulâ, singulos oportet casus prosequamur. Itaque, quum radices duæ negativæ sunt imaginariæ, sint $x + a + \sqrt{-3b^2} = 0$, & $x + a - \sqrt{-3b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices illas. Ergo si duæ istæ æquationes multiplicentur inter se, & quæ inde oritur $x^2 + 2ax + a^2 + 3b^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x - 2a = 0$, quæ continet radicem realem positivam, orietur æquatio $x^3 - 3a^2x + 3b^2x - 2a^3 - 6ab^2 = 0$, quæ erit ejusdem formæ cum ipsa æquatione $x^3 - 3px - 2q = 0$. Quocirca si termini unius ordine comparentur cum terminis alterius, habebuntur aliæ duæ istæ æquationes $3a^2 - 3b^2 = 3p$, & $2a^3 + 6ab^2 = 2q$.

Quia igitur in primâ istarum æquationum habetur $3a^2 - 3b^2 = 3p$, hoc est $a^2 - b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 = p^3$. Et rursus, quia in secundâ æquatione habetur $2a^3 + 6ab^2 = 2q$, hoc est $a^3 + 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Unde si ex partibus istius ordine subducantur partes illius, erit $9a^4b^2 + 6a^2b^4 + b^6 = q^2 - p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis fiet $3a^2b + b^3 = \sqrt{q^2 - p^3}$. Sed habetur quoque $a^3 + 3ab^2 = q$. Itaque erit $a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$, & $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3}$; atque adeo, quum per extractionem radicis cubicæ ex duabus istis æquationibus una fiat $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, altera $a - b = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit radix realis positiva æquationis designata per $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$.

Atque hìc quoque nolim silentio præterire, posse eandem radicem aliâ item ratione designari, nimirum si inventâ æquatione $a + b = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$ per partes istius dividamus ordine partes alterius hujus æquationis $a^2 - b^2 = p$. Cæterùm si inventâ radice reali, desiderentur radices duæ imaginariæ, poterunt eæ inveniri, non modò determinando quantitatem b, verùm etiam dividendo æquationem ipsam $x^3 - 3px - 2q = o$ per æquationem simplicem, inventam radicem continentem. Et siquidem radix ista vocetur c, ita ut æquatio, quæ subit munus divisoris, sit $x - c = o$, erit quotiens prædictæ divisionis $x^2 + cx + c^2 - 3p = o$; nam tametsi productâ usque ad hunc terminum divisione, videatur superesse $c^3 - 3pc - 2q$, attamen residuum istud zero, sive nihilum adæquare, exinde liquere potest, quia si in eo loco c substituatur valor ejus x, prodeunt termini æquationis $x^3 - 3px - 2q$, quorum summa est æqualis zero, sive nihilo.

Quod si radices duæ negativæ æquationis $x^3 - 3px - 2q = o$ fuerint quidem reales, sed æquales inter se, tunc methodus eas eruendi hæc est. Sint $x + a = o$.

& $x + a = o$ æquationes simplices, quæ continent radices illas. Itaque si æquatio, ex harum multiplicatione orta, $x^2 + 2ax + a^2 = o$ multiplicetur per hanc aliam æquationem simplicem $x - 2a = o$, quæ continet radicem positivam, producetur æquatio $x^3 - 3a^2x - 2a^3 = o$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - 3px - 2q = o$. Quare factâ mutuâ terminorum comparatione, erit $3a^2 = 3p$, & $2a^3 = 2q$, hoc est $a^2 = p$, & $a^3 = q$: proindeque per mutuam istarum æquationum divisionem invenietur $a = \frac{q}{p}$: ex quo patet, quantitatem radicis negativæ inveniri, si quantitas cognita ultimi termini dimidiata dividatur per trientem quantitatis cognitæ termini tertii.

Denique, si radices duæ negativæ fuerint reales, & inæquales, tunc ad eas inveniendas sic methodus procedere deberet. Sint $x + a + \sqrt{3b^2} = o$, & $x + a - \sqrt{3b^2} = o$ æquationes simplices, quæ continent radices illas, ponendo nempe, quod $\sqrt{3b^2}$ minor sit, quàm a. Ergo si duæ istæ æquationes multiplicentur inter se, & quæ inde oritur $x^2 + 2ax + a^2 -$

$3b^2 = 0$ multiplicetur per hanc aliam æquationem ſimplicem $x - 2a = 0$, quæ continet radicem poſitivam, producetur æquatio $x^3 - 3a^2x - 3b^2x - 2a^3 + 6ab^2 = 0$, quæ erit ejuſdem formæ cum ipsâ æquatione $x^3 - 3px - 2q = 0$. Unde comparando terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur duæ æquationes $3a^2 + 3b^2 = 3p$, & $2a^3 - 6ab^2 = 2q$.

Quia ergo in primâ iſtarum æquationum habetur $3a^2 + 3b^2 = 3p$, hoc eſt $a^2 + b^2 = p$, erit elevando utramque partem ad cubum $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$. Et rurſus quia in ſecundâ habetur $2a^3 - 6ab^2 = 2q$, hoc eſt $a^3 - 3ab^2 = q$, erit elevando utramque partem ad quadratum $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$. Jam verò duæ iſtæ æquationes nec additione, nec ſubductione mutuâ uſui nobis eſſe posſũt; nã primò additione oritur æquatio $2a^6 - 3a^4b^2 + 12a^2b^4 + b^6 = q^2 + p^3$, ex qua nihil colligi poteſt, quum neutra pars ipſius ſit poteſtas perfecta; & ſecundò ſubductione unius ex alterâ, producitur æquatio $9a^4b^2 - 6a^2b^4 + b^6 = p^3 - q^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis evadit quidem $3a^2b - b^3 = \sqrt{p^3 - q^2}$, ſed nulla ratione combinari poteſt

poteſt cum alterâ $a^3 - 3ab^2 = q$ ad inveniendam tum ſummam, cùm differentiam quantitatum a, & b. Deficit ergo ſimiliter in hac formulâ, quum radices omnes ſunt reales, methodus in reſolutione aliarum æquationum adhibita, & radices illæ ope ejus erui non poſſunt.

V.

Caſus irreſolutus æquationum cubicarum pleniùs expenditur.

EX iis, quæ hactenus dicta ſunt de reſolutione æquationum tertii gradus, abundè liquet, in hiſce æquationibus duos caſus ſedulò diſtinguendos eſſe; primum, quum in iis una tantùm radix eſt realis, & aliæ duæ imaginariæ; alterum, quum omnes radices ſunt reales. Nam quum una tantùm radice reali gaudet æquatio: (id, quod contingit, vel quum in æquatione una cum ſecundo termino deficit tertius, vel quum terminus tertius reperitur affectus ſigno +, vel denique quum afficitur ſigno −, ſed cubus ex triente ſui coefficientis minor eſt quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato;) tunc radix illa poteſt ſemper in-

inveniri per methodum à nobis adhibitam. Sed quum in æquatione omnes radices, sunt reales: (id quod accidit, quum æquationis terminus tertius afficitur signo $-$, & cubus ex triente sui coefficientis major est quadrato ultimi termini dimidiato;) eo casu eadem illa methodus deficiens deprehenditur, nec ope ejus radices illæ possunt inveniri.

Qui resolutionem istarum æquationum tradiderunt, fingendo $x = y - z$, arbitrati sunt etiam in hoc secundo casu posse unam ex tribus radicibus perinde designari, ac designatur radix realis in casu primo: in quantum hac alterâ methodo inveniatur valor incognitæ x generaliter, ac indefinitè; hoc est absque eo, quod aliqua supponatur relatio inter cubum, qui fit ex triente quantitatis cognitæ tertii termini, & quadratum, quod fit ex ultimo termino dimidiato. Elevando etenim utramque partem hujus æquationis $x = y - z$ ad cubum, fit $x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 = z^3$. Jam verò $-3y^2z + 3yz^2$ idem valet, ac $-3yzx$; ut patet si utraque pars ejusdem æquationis $x = y - z$ multiplicetur per $-3yz$. Itaque factâ debitâ substitutione, erit $x^3 = y^3 - 3yzx - z^3$, hoc est $x^3 + 3yzx - y^3$

$+ z^3 = 0$; & propterea comparando terminos hujus æquationis ordine cum terminis æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$, habebuntur duæ aliæ æquationes $3yz = -3p$, & $y^3 - z^3 = 2q$.

Et quoniam in primâ istarum æquationum habetur $3yz = -3p$, hoc est $yz = -p$, erit elevando utramque partem ad cubum $y^3z^3 = -p^3$. Et rursus quia in secundâ habetur $y^3 - z^3 = 2q$, erit tum $y^6 - y^3z^3 = 2qy^3$, cùm $y^3z^3 - z^6 = 2qz^3$. Quare si in utraque istarum æquationum loco y^3z^3 ponatur valor ejus $-p^3$, una fiet $y^6 + p^3 = 2qy^3$, hoc est $y^6 - 2qy^3 + p^3 = 0$, altera $-p^3 - z^6 = 2qz^3$, hoc est $z^6 + 2qz^3 + p^3 = 0$. Quumque duæ istæ æquationes sint derivativæ secundi gradus, facilè erit eas resolvere per regulas superiùs traditas. Unde quia illas resolvendo, invenitur $y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, & $z = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 - p^3}} = -\sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit $x = y - z = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$: proindeque quantitas ista in omni casu designabit radicem unam æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$.

Non

Non dissimiliter rem ostenderunt in æquatione $x^3 - 3px + 2q = 0$. Sed multum abest, ut quantitas illa possit esse una ex radicibus æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$, quotiescumque radices omnes sunt reales. Quum enim hoc casu p^3 major esse debeat, quàm q^2, erit $q^2 - p^3$ quantitas negativa: atque adeo $\sqrt{q^2 - p^3}$ erit quantitas imaginaria: unde radix, quæ suâ naturâ realis esse debet, quantitatibus imaginariis exprimitur; proindeque non est vera ejus expressio. Falsum est igitur, quod resolvendo æquationes cubicas, fingendo $x = y - z$, methodus sit generalis, nec ullum casum excludat; nam etiam per hanc methodum earum tantùm æquationum cubicarum resolutio obtinetur, in quibus duæ ex radicibus sunt imaginariæ.

Qua autem ratione fiat, ut quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, eæ erui non possint, fingendo $x = y - z$, exinde colligit Auctor Arithmeticæ Universalis, Londini æditæ anno 1707, qui creditur Vir summus Isaac Newtonus, quod quum radices illæ eodem modo se habeant ad terminos æquationis, & indifferenter per incognitam designentur, deberent utique omnes eadem lege erui, & exprimi, qua una aliqua eruitur, & exprimitur. Unde quia tres omnes lege præfatâ exprimere, impossibile est, quum quantitas $y - z$, qua x designatur, multiplex esse nequeat; falsa erit hypothesis, quod x in casu, ubi triplex esse debet, sit æqualis $y - z$, & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

Quum primum in hanc Viri clarissimi rationem inciderim, illam ut alia ejusdem Auctoris inventa expansis ulnis excepi, & rem acu, ut dici solet, attigisse, mihi suasi. Sed quamquam ejus in hisce rebus auctoritas multò magis apud me valeat, quàm aliorum omnium simul, nunc tamen dicere non vereor, hìc nihil docuisse, quin potiùs à vero aberrasse. Nonne enim in reductione æquationum quarti gradus, aliâ methodo institutâ, quam primò docuimus, novimus, quantitatem determinandam per æquationem simplicem, quum multiplex esse debet, sic per analysim designari, ut prodeat adhuc indeterminata? Itaque quum hìc quoque quantitas $y - z$, qua x designatur, multiplex esse debeat, eam non impossibilem, sed indeterminatam exhibere deberet analysis.

Sed

Sed præterea, si conclusio idcirco sit impossibilis, quia colligitur ex hypothesi impossibili, erit vicissim possibilis conclusio illa, quæ eruitur ex hypothesi possibili. Hunc in finem ad inveniendas radices æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$ ubi omnes sunt reales, formetur rursus æquatio ejusdem naturæ $x^3 - 3a^2x - 3b^2x - 2a^3 + 6ab^2 = 0$, ponendo scilicet, quod $-a + \sqrt{3b^2}$ sit radix una negativa, & quod $-a - \sqrt{3b^2}$ sit radix altera similiter negativa, & $+2a$ radix tertia positiva. Itaque, factâ mutuâ terminorum collatione, invenietur, ut antea, $a^2 + b^2 = p$, & $a^3 - 3ab^2 = q$; ex quibus eruitur $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = p^3$, & $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = q^2$; atque adeo per mutuam istarum æquationum subductionem, habebitur $-9a^4b^2 + 6a^2b^4 - b^6 = q^2 - p^3$.

Jam ex partibus istius æquationis, naturâ suâ negativis, eliciatur ope quantitatum imaginariarum radix quadrata. Itaque erit $\overline{3a^2b - b^3}\sqrt{-1} = \sqrt{q^2 - p^3}$. Unde, quum habeatur $a^3 - 3ab^2 = q$, habebitur per additionem $a^3 - 3ab^2 + \overline{3a^2b - b^3}\sqrt{-1} = q + \sqrt{q^2 - p^3}$, eritque per subtractionem $a^3 - 3ab^2$ —

$- \overline{3a^2b + b^3}\sqrt{-1} = q - \sqrt{q^2 - p^3}$. Quumque, per extractionem cubicæ radicis, istarum æquationum una fiat $a + b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$, & altera $a - b\sqrt{-1} = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, erit radix realis positiva designata per $2a = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$, quæ quidem tametsi deducta sit ex hypothesi possibili, & naturæ æquationis conformi, quia tamen est illa eadem, quæ invenitur, fingendo $x = y - z$, adhuc iisdem difficultatibus subjacet.

Ex aliis ergo principiis impossibilitas hujus rei est deducenda, quæ quidem nec quisque investigavit adhuc, nec à nemine unquam investigari posse, facile mihi persuadeo. Non me latet, nonnullos non adeo deploratum casum existimasse; quia etsi radix illa realis sit expressa per latera cuborum, qui quantitatem continent imaginariam, fieri tamen potest, ut expressio realis evadat, nimirum, si latera illa extrahantur; quum sic quantitas imaginaria, velut contrariis signis in cubis illis affecta, evanescat, nec ampliùs occurrat: quem in finem eò vires omnes in-

intenderunt, ut qua ratione elici possit radix cubica, etiam ex binomiis imaginariis, ostenderent.

Sanè non irritum laborem istorum existimo, quin magnum eorum conatum summoperè suspicio. Sed id consequuti sunt, quod aliâ viâ potest obtineri; nam optatum finem sunt adepti tunc tantùm, quum una ex radicibus æquationis est realis simul, & rationalis. Nec equidem aliter res esse poterat. Quum enim binomia, ex quibus radices cubicæ sunt extrahendæ, unam contineant partem rationalem, alteram radicalem; tales quoque erunt radices cubicæ illorum binomiorum. Unde, quum in summâ istarum radicum se mutuò destruant partes radicales, in quibus latet quantitas imaginaria, remanebunt tantùm partes rationales, atque adeo summa tota commensurabilis erit.

Sed exemplo hoc ostendamus, simulque methodum indicemus, qua procedendum est analyticè in extractione radicum ex binomiis. Itaque, si æquatio fuerit $x^3 - 15x - 4 = 0$, erunt $2 + \sqrt{-121}$, & $2 - \sqrt{-121}$ binomia, ex quibus radices cubicæ sunt extrahendæ. Assumatur binomium $2 + \sqrt{-121}$, ejusque radix cu-

bica repræsentetur per $a + \sqrt{-b}$. Quia ergo cubus istius est $a^3 - 3ab + \overline{3a^2 - b}\sqrt{-b}$, erit pars ejus rationalis $a^3 - 3ab = 2$, & pars radicalis $\overline{3a^2 - b}\sqrt{-b} = \sqrt{-121}$. Eleventur ad quadratum partes utriusque æquationis, & una fiet $a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 = 4$, altera $9a^4b - 6a^2b^2 + b^3 = 121$. Unde, quum additæ simul dent æquationem istam $a^6 + 3a^4b + 3a^2b^2 + b^3 = 125$, fiet hæc per extractionem radicis cubicæ $a^2 + b = 5$, ex qua eruitur $b = 5 - a^2$.

Jam in æquatione $a^3 - 3ab = 2$ ponatur loco b valor ejus $5 - a^2$. Fiet igitur $4a^3 - 15a = 2$, quæ reducetur ad hanc aliam $c^3 - 15c = 4$, siquidem divisis terminis omnibus per 4, multiplicentur, ad tollendas fractiones, radices ejus per 2. Et quoniam termini hujus æquationis $c^3 - 15c - 4 = 0$ evanescunt, si loco c ponatur 4; erit proinde $c = 4$; atque adeo, quum sit $2a = c$, erit $a = 2$, & consequenter b, cujus valor est $5 - a^2$, fiet æqualis unitati. Unde radix binomii $2 + \sqrt{-121}$, repræsentata per $a + \sqrt{-b}$, erit $2 + \sqrt{-1}$. Eâdem ratione radix alterius binomii $2 - \sqrt{-121}$, erit $2 - \sqrt{-1}$. Quocirca, quum summa utriusfutriusque radicis sit 4, erit 4 radix æquationis propositæ $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Hæc itaque est methodus, qua radices ex binomiis extrahuntur analyticè; & cujus ope expressio imaginaria mutatur in realem. Sed qui eam attentè perpendet, facilè percipiet mutationem istam tunc demum fieri posse, quum radix per quantitates imaginarias expressa est realis simul, & rationalis; quandoquidem æquatio, per quam determinanda est quantitas a, una ex partibus radicis extrahendæ, non modò est ejusdem formæ cum æquatione principali, verùm etiam relationem quandam habet ad illam. Unde qui per extractionem radicis cubicæ ex binomiis credunt difficultatem omnem superari, quæ deprehenditur in resolutione æquationum cubicarum, ii non satis rem perpendisse videntur. Quem in finem concludere licet, casum, quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, esse omninò deploratum, nec intra cancellos calculi algebraici posse contineri.

VI.

Vires Geometriæ in subsidium irresoluti casus accersuntur.

ETsi casus, quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, sit omninò deploratus in Algebrâ; attamen si radices illæ per longitudines linearum sint designandæ, non deficiet nobis Geometria. Si enim oporteat, datum aliquem arcum trifariam partiri, invenietur in resolutione hujus problematis æquatio cubica, cujus omnes radices sunt reales. Unde vicissim, quotiescumque occurrit æquatio aliqua cubica, quæ radices omnes reales habeat, poterunt radices illæ per arcus cujusdam trisectionem geometricè designari.

Id autem ut liquidò constet, detur circulus ADE, cujus centrum sit punctum F; & assumptâ in ejus circumferentiâ portione quavis AB, oporteat illum in tres partes æquales dividere. Quod quæritur, ponatur jam factum, sintque AB, BC, CD partes quæsitæ. Ducantur radii AF, BF, CF, DF; & junctis chordis AB, BC, CD, agatur per punctum B re- FIG. 25.

cta BG, parallela ipsi CF, quæ conveniat cum chordâ arcus dati AD in puncto G; ponaturque radius dati circuli AF $= a$, chorda arcus similiter dati AD $= 2b$, & chorda arcus quæsiti AB $= x$.

Itaque, quia angulus BFD duplus est, tam anguli BAD, quàm anguli BFA, erit angulus BAD æqualis angulo BFA: proindeque triangula duo BFA, BHA æquiangula erunt; eritque adeo, ut AF ad AB, ita AB ad BH. Et quoniam propter parallelas BG, CF angulus GBF æqualis est angulo BFC, sive BFA; erit idem angulus GBF æqualis quoque angulo BAD: quare triangula duo ABH, BGH æquiangula erunt; & consequenter erit, ut AB ad BH; ita BH ad HG. Sunt ergo continuè proportionales quatuor rectæ lineæ AF, AB, BH, HG: proindeque quum sit AF $= a$, & AB $= x$, erit BH $= \frac{x^2}{a}$, & HG $= \frac{x^3}{a^2}$.

Ulteriùs, quum triangula duo BFA, BAH ostensa sint æquiangula, & trianguli BFA æqualia sint latera AF, BF; erunt quoque trianguli BAH æqualia latera AB, AH. Unde quum eâdem ratione æqualia sint etiam latera CD, DK trianguli CDK; erit AD unà cum GH æqualis tribus AB, BC, CD simul sumptis: proindeque, quia tres istæ inter se sunt æquales, erit AD unà cum GH tripla unius AB. Quare institutâ æqualitate inter valores istarum linearum, fiet $2b + \frac{x^3}{a^2} = 3x$ hoc est $2ba^2 + x^3 = 3a^2x$; quæ quidem æquatio quum ordinata sit $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$, liquet eam esse ejusdem formæ cum æquatione $x^3 - 3px + 2q = 0$.

Jam autem, quod in istâ æquatione $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ radices omnes sint reales, facilè erit ostendere. Quum enim AD sit linea in circulo inscripta, ea diametro AL æqualis quidem esse potest, major autem esse non potest. Itaque prætermittendo casum æqualitatis, utpote specialem, AL major est, quàm AD: proindeque quum sit AL $= 2a$, & AD $= 2b$; erit $2a$ major, quàm $2b$; adeoque a major, quàm b. Est igitur in æquatione $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ cubus ex triente quantitatis cognitæ termini tertii major quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato; & idcirco per ea, quæ superiùs osten-

ostensa sunt, tres ejus radices omnes reales erunt.

Quæ verò in schemate sint lineæ, quæ radices istas designant, non ita liquidò patet. Eæ autem habebuntur, si secetur in tres partes æquales, tam arcus DMA, qui est complementum ad circulum ipsius ABD, quàm arcus DIL, qui est complementum ad semicirculum ejusdem ABD. Si enim DM, MN, NA sint partes arcus prioris DMA, & DO, OI, IL sint partes arcus alterius DIL; designabit recta AB radicem unam, recta AN radicem alteram, & recta AI radicem tertiam. Quumque ex tribus radicibus æquationis $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ duæ quidem sint positivæ, & una negativa; erunt rectæ AB, AN valores radicum positivarum, & recta AI valor radicis negativæ. FIG. 26.

Et quidem rectam AN esse radicem æquationis $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ perinde, ac est recta AB, facili negotio unusquisque sibi persuadet, quia quotiescumque trifariam secandus proponitur arcus AD, potest hìc esse tam arcus ABD, quàm arcus AND, quum istorum uterque incipiat ab A, & terminetur ad D. Sed quod ejusdem æquationis radix sit etiam

etiam recta AI, quæ nec subtendit trientem arcus ABD, nec trientem arcus AND, id equidem non ita facilè quisque sibi in animum inducet, quia quam relationem habeat recta AI cum problemate de trisectione arcus AD, sanè non apparet. Id itaque, ne ullus Tyronibus nostris scrupulus maneat, oportet ostendamus; eoque magis, quod de hac re altum apud alios silentium reperitur.

Etsi enim Vir clarissimus Isaac Newtonns in Artithmeticâ suâ universali, aliud agens, hanc reddat rationem, cur quærendo quintam partem arcus APB inveniatur æquatio quinque dimensionum, cujus quinque sunt radices: nimirum quia quamvis animum fortè advertas tantùm ad arcum APB, tamen æquatio, qua quæstio solvetur, determinabit quintam partem arcuum omnium, qui terminantur ad puncta A, & B, nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æquè ac quintam partem arcus APB. Nihilominus facilè videre est, rationem istam, prout à Viro Clarissimo affertur, rem in propatulo non ponere, quin etiam falsitatis posse redargui; quia scilicet arcus, qui terminantur ad puncta A, & B, vel FIG. 27.

 sunt

ſunt duo tantùm, vel etiam numero infiniti.

Itaque, ut genuinam hujus rei rationem intelligamus, methodum oportet conſideremus, per quam procedimus in reſolutione problematis, in quo arcus inter duo data puncta interceptus in certum æqualium partium numerum dividendus proponitur. Nimirum, quum in reſolutione prædicti problematis procedamus, inveniendo valorem chordæ, quæ unam ex iis partibus ſubtendit; perſpicuum eſt, problema ipſum eò quidem redire, ut inveniatur valor rectæ lineæ, quæ incipiendo ab uno puncto, toties poſſit in circuli circumferentiâ applicari, donec perveniatur ad punctum alterum, quot ſunt partes, in quas dividere oportet arcum, qui inter duo illa puncta intercipitur.

Atque hac ratione facile modò intelligimus, cur æquatio $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ tres habeat radices reales, deſignatas per rectas AB, AN, AI. Orta eſt
Fig. 26. namque æquatio illa ex reſolutione problematis, in quo arcus interceptus inter puncta A, & D in tres partes æquales proponitur dividendus. Itaque, ut illi æquationi ſatisfiat, rectam lineam oportet invenire, quæ à puncto A ter poſſit aptari in circumferentiâ circuli, donec ad punctum alterum D perveniatur. Jam verò unaquæque rectarum AB, AN, AI quæſiti conditiones adimplet; nam ſiquidem extendatur DF ad E, & fuerit EQ tertia pars arcus AE, æquales erunt rectæ lineæ AI, IQ, QD æquè, ac æquaquales ſunt, tam rectæ AB, BC, CD, quàm rectæ AN, NM, MD. Quare valor incognitæ x in æquatione $x^3 - 3a^2x + 2ba^2 = 0$ erit unaquæque rectarum AB, AN, AI.

Porrò, quod in eadem æquatione rectæ AB, AN ſint valores radicum poſitivarum, & recta AI ſit valor radicis negativæ; id equidem facilè conſtabit, ſi oſtendamus rectam AI ipſis AB, AN ſimul ſumptis æqualem eſſe. Deeſt enim in æquatione ſecundus terminus; adeoque radix negativa talis eſſe debet, ut adæquet ſummam radicum poſitivarum. Id autem oſtendemus, præmiſſo priùs hoc lemmate: nempe quod ſi in circulo aliquo ABC deſcribatur triangulum æquilaterum BCD, & ex uno trianguli angulo, Fig. 28.
veluti C, ducatur recta linea CA, quæ terminata ad circuli circumferentiam ſecet latus oppoſitum BD in puncto E, quod in-

inquam recta ista CA ipsis AB, AD simul sumptis sit æqualis.

Hujus lemmatis veritas ostendi poterit in hunc modum. Angulus DAC, velut æqualis angulo DBC, æqualis est etiam angulo BDC. Itaque duo triangula CDE, CAD æquiangula erunt; adeoque erit, ut CD ad DE, ita CA ad AD. Eadem ratione angulus BAC, velut æqualis angulo BDC, æqualis est etiam angulo DBC. Itaque duo triangula CBE, CAB æquiangula erunt; adeoque erit, ut CB, ad BE, ita CA ad AB. Et quoniam CD est ad DE, ut CA ad AD; & CB, sive CD est ad BE, ut CA ad AB: erit ut CD ad summam ipsarum DE, BE, ita CA ad summam ipsarum AD, AB. Unde quemadmodum CD ipsis DE, BE simul sumptis est æqualis, ita CA ipsas AD, AB simul acceptas adæquabit.

FIG. 26. Hoc lemmate præmisso, facilè nunc erit, ostendere rectam AI ipsis AB, AN simul sumptis æqualem esse. Quum enim arcus AB sit tertia pars arcus ABD, & arcus AN sit tertia pars arcus AND; erit arcus BAN tertia pars totius circumferentiæ. Et quoniam arcus BD continet duas tertias partes arcus ABD, & arcus DI continet similiter duas tertias partes arcus DIL; continebit arcus BDI duas tertias partes semicircumferentiæ ADL; proindeque tertia pars erit totius circumferentiæ. Æquales ergo sunt arcus BAN, BDI, IMN. Itaque si puncta B, I, N tribus rectis lineis jungantur, triangulum sub iis comphehensum æquilaterum erit; & consequenter per ostensum lemma recta AI ipsis AB, AN simul sumptis æqualis erit.

Jam igitur, quum in problemate de trisectione arcus AD inveniatur æquatio $x^3 - 3a^2x + 2a^2b = 0$, cujus omnes radices sunt reales, & valores istarum radicum designentur per rectas AB, AN, AI; haud difficile modò erit intelligere, qua ratione per trisectionem alicujus arcus possint geometricè designari radices cujuscumque æquationis cubicæ, quotiescumque istæ omnes sunt reales. Assumatur enim æquatio generalis $x^3 - 3px + 2q = 0$. Et quia comparando terminos istius ordine cum terminis illius, invenitur $\sqrt{p} = a$, & $\frac{2q}{p} = 2b$; perspicuum est, quod si describatur circulus ABL, cujus semidiameter sit $\sqrt{p}$, & in eo ap-

applicetur recta linea $AD = \frac{2q}{p}$, valores radicum positivarum sint rectæ lineæ AB, AN, quæ subtendunt trientes arcuum ABD, AND, valor autem radicis negativæ sit recta linea AI, quæ subtendit trientem arcus ABDNABD.

Quod si autem æquatio fuerit $x^3 - 3px - 2q = 0$, in qua duæ sunt radices negativæ, & una positiva; tunc iisdem peractis, designabunt rectæ AB, AN valores radicum negativarum, & erit recta AI valor radicis positivæ. In omni enim æquatione, si terminorum locis paribus existentium signa mutentur, radices positivæ fient negativæ, & vicissim negativæ evadent positivæ. Itaque quia in æquatione $x^3 - 3px - 2q = 0$ mutatis signis terminorum locis paribus existentium, habetur loco ejus hæc alia $x^3 - 3px + 2q = 0$, radices istarum æquationum sibi ipsis ex contraria parte correspondent, hoc est negativæ unius erunt positivæ alterius, & vicissim positiva unius erit alterius negativa. Unde, quia æquationis $x^3 - 3px + 2q = 0$ radices duæ positivæ designantur per rectas AB, AN, & radix negativa designatur per rectam AI; erunt eædem rectæ AB, AN valores radicum negativarum æquationis $x^3 - 3px - 2q = 0$, & recta AI valor radicis positivæ ejusdem æquationis.

VII.

Methodus vulgata resolvendi æquationes cubicas ostenditur.

In resolutione æquationum cubicarum aliam solet methodum vulgus Algebristarum adhibere, quam quidem visum est hoc loco subjungere, simulque ejus artificium paulò clariùs, quàm ab aliis factum est, aperire, ne eam Lectores nostri ignorarent; eòque magis, quod quum primùm Algebristæ resolutionem æquationum cubicarum sunt aggressi, non aliam, quàm istam methodum usurpaverint. Ostendemus itaque primùm, quo artificio in hanc methodum inciderint, & quibus principiis insistentes eam excogitaverint. Quumque ejus inventio synthesi potiùs, quàm analysi debeatur, ostendemus quoque, qua ratione eadem methodus analyticè possit inquiri.

Ut ergo ab ovo, ut dici solet, rem ordiamur, primi Algebræ promotores, qui

qui Arabes fuerunt, difficultatem, quæ in resolvendis æquationibus secundi gradus occurrit, non aliunde norunt oriri, quàm quia secundus terminus adest in iis. Itaque quia per compositionem quadrati, ostensam ab Euclide in suis Elementis, facilè fuit eis secundum terminum ab istis æquationibus tollere, difficultatem omnem removerunt, & æquationum secundi gradus resolutionem feliciter tradidere. Sed quum deinde ad æquationes cubicas, sive trium dimensionum gradum fecerint, difficultatem hìc majorem esse deprehenderunt, ob duos terminos, qui impedimento sunt resolutioni istarum æquationum: proindeque non ausi fuerunt ulteriùs progredi.

Quum primum Itali Algebræ studio operam dederint, quia norunt in æquationibus secundi gradus nihil ampliùs posse desiderari, in id statim vires suas intenderunt, ut ostenderent, qua ratione resolutio æquationum tertii gradus posset obtineri. Nodum difficultatis & ipsi etiam sunt experti. Sed quum pro comperto habuerint, Arabes resolutionem æquationum secundi gradus obtinuisse, propter cognitam quadrati compositionem; crediderunt posse ipsos resolutionem

nem æquationum cubicarum consequi, si utique cubi compositionem exploratam haberent. Hanc ergo inquirentes, deprehenderunt, quod sicuti quadratum ex duabus partibus componitur ex quadratis partium, duploque ejus, quod mutuâ partium multiplicatione producitur; ita cubus ex duabus partibus constet ex cubis istarum partium, triplo ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per secundam, & triplo ejus, quod producitur, multiplicando quadratum secundæ per primam.

Cognitâ cubi compositione, nec id, quod erat in votis, statim sunt assecuti. Nam ope ejus non aliud primâ facie visum est eis posse obtineri, quàm, ut secundus tantùm terminus ex æquationibus cubicis tolleretur. Manebat itaque terminus tertius, qui non minùs resolutioni æquationum cubicarum obstabat solitarius, quàm si cum secundo jungeretur. Unde in re adeo arduâ parum, aut nihil progressos fuisse, ipsimet norunt. Hoc utique per cognitam cubi compositionem saltem effectum crediderunt, quod quum ope ejus facilè esset, secundum terminum ex æquationibus cubicis tollere, difficultates, quæ ascendunt ad cubum,

bum, ad pauciora, ut ipsi loquebantur, capitula possent revocari, nimirum ad eas tantùm formulas, in quibus secundus terminus deest: quod deinde non parum adjumenti eis fuit in inveniendâ resolutione æquationum cubicarum.

Quum enim ea tantùm capitula examinanda susceperint, quæ constant ex cubo, rebus, & numero, hoc est, quæ primum, tertium, & quartum terminum habent; norunt eò quidem totum negotium redigi, ut ex istis capitulis ita quidem tollendus esset tertius terminus, ut secundus jam deficiens rursus non occurreret. Itaque, quum cubi compositionem paulò diligentiùs fuissent contemplati, observarunt in eâ ter occurrere, tum productum, quod oritur multiplicando quadratum primæ partis per secundam, cùm productum, quod gignitur multiplicando quadratum secundæ partis per primam. Unde miro quidem conatu id, quod quærebant, obtineri posse deprehenderunt, si loco incognitæ, in æquatione contentæ, substituatur incognita altera, aucta, vel diminuta quotiente, qui oritur, dividendo trientem quantitatis cognitæ tertii termini per hanc aliam incognitam.

Verum quidem est, hoc artificio non illi-

licò oriri æquationem cubicam, quæ secundo, & tertio termino carens, cubum tantùm, & numerum contineat; quia ea, in quam transformatur æquatio principalis, tantùm abest, ut constet cubo tantùm, & numero, ut neque etiam cubica dici possit, utpotè quæ ad sex dimensiones ascendit. Sed nihilominus, quia æquatio ista sic ad sex dimensiones attollitur, ut tamen naturâ suâ dicenda sit derivativa secundi gradus; facilè fuit eis, hac mediante, illam, quam propriè quærebant, obtinere; nimirum resolvendo æquationem inventam iisdem fermè regulis, quibus æquationes secundi gradus resolvuntur. Hac igitur methodo tradiderunt Itali resolutionem æquationum cubicarum, quam clarioris intelligentiæ ergo uno, aut altero exemplo nunc illustrabimus.

Proponatur resolvenda æquatio cubica $x^3 + 3px - 2q = 0$. Assumatur loco x incognita alia y, diminuta quotiente, qui oritur, dividendo p per y; ita nempe, ut habeatur $x = y - \frac{p}{y}$. Fiant debitæ substitutiones, & loco propositæ æquationis habebitur hæc alia $y^3 - \frac{p^3}{y^3} - 2q = 0$, hoc est $y^6 - 2qy^3 = p^3$, quæ tametsi ad sex dimensiones ascendat, est tamen derivativa secundi gradus. Addatur ad utramque partem hujus æquationis quadratum ex q, & erit $y^6 - 2qy^3 + q^2 = q^2 + p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis fiet $y^3 - q = \sqrt{q^2 + p^3}$, hoc est $y^3 = q + \sqrt{q^2 + p^3}$: Denique ex utraque parte hujus æquationis extrahatur radix cubica, & habebitur $y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}}$: unde substituto in æquatione simplici $x = y - \frac{p}{y}$ loco y valore isto, invenietur valor incognitæ x.

Proponatur ulteriùs resolvenda æquatio $x^3 - 3px - 2q = 0$. Assumatur loco x incognita alia y aucta quotiente, qui oritur, dividendo p per y, ita nempe, ut habeatur $x = y + \frac{p}{y}$; & debitâ substitutione peractâ, loco propositæ æquationis ha-

habebitur hæc alia $y^3 + \frac{p^3}{y^3} - 2q = 0$, hoc est $y^6 - 2qy^3 = -p^3$, quæ ita quidem ascendit ad sex dimensiones, ut tamen dicenda sit derivativa secundi gradus. Ad utramque partem hujus æquationis addatur quadratum ex q, eritque $y^6 - 2qy^3 + q^2 = q^2 - p^3$, quæ per extractionem quadratæ radicis fiet $y^3 - q = \sqrt{q^2 - p^3}$, hoc est $y^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}$. Denique extrahatur ex utraque parte hujus æquationis radix cubica, & erit $y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$: proindeque substituendo in æquatione simplici $x = y + \frac{p}{y}$ loco y valorem istum, invenietur valor incognitæ x.

Sed videamus modò, qua ratione hæc methodus resolvendi æquationes cubicas, quæ secundo termino carent, possit analysis ope reperiri. Et quoniam eò res tota reducitur, ut inveniatur quantitas, per quam sic transformanda est æquatio cubica, ut non modò secundo, verùm etiam tertio termino deficiens oriatur; inveniemus analyticè traditæ methodi ar-

artificium, si utique quantitatem illam assumamus indeterminatè. Sit igitur $x^3 - 3px - 2q = 0$ æquatio proposita. Itaque faciendo $x = y + a$, erit $x^3 = y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3$: proindeque, ut transformatione oriatur æquatio, secundo, & tertio termino carens, necesse est, ut duo termini $3ay^2 + 3a^2y$ tantundem valeant, ac tertius terminus æquationis $3px$.

Instituatur ergo æquatio inter $3ay^2 + 3a^2y$, & $3px$, eritque $3ay^2 + 3a^2y = 3px$, hoc est $ay^2 + a^2y = px$. Et quoniam ex hypothesi habetur $y + a = x$, multiplicando terminos omnes per ay, erit $ay^2 + a^2y = ayx$. Unde erit $ayx = px$, hoc est $ay = p$; adeoque divisâ utrâque parte hujus æquationis per y, fiet $a = \frac{p}{y}$. Est igitur quantitas a æqualis quotienti, qui oritur, dividendo p per y. Quocirca ad transformandam æquationem $x^3 - 3px - 2q = 0$ eâ quidem lege, ut alia loco ejus oriatur, quæ secundo, & tertio termino careat; necesse est loco incognitæ x aliam substituere, auctam quotiente, qui oritur, dividendo trientem quantitatis cognitæ tertii termini per hanc aliam incognitam.

Eadem ratione ostendetur, quod ad transformandam æquationem $x^3 + 3px - 2q = 0$ eâ lege, ut alia loco ejus habeatur secundo, & tertio termino carens, substituenda sit loco incognitæ x incognita alia, diminuta quotiente, qui oritur, dividendo trientem quantitatis cognitæ tertii termini per hanc aliam incognitam. Etenim si ponatur $x = y + a$, erit rursus $x^3 = y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3$; adeoque ut transformatione oriatur æquatio, quæ secundo, & tertio termino careat, necesse est, ut duo termini $3ay^2 + 3a^2y$ destruantur per tertium terminum æquationis $3px$. Est ergo $3ay^2 + 3a^2y + 3px = 0$, hoc est $ay^2 + a^2y = -px$. Jam verò, quum habeatur ex hypothesi $y + a = x$, multiplicando terminos omnes per ay, fiet $ay^2 + a^2y = ayx$. Erit igitur $ayx = -px$: unde infertur $a = -\frac{p}{y}$.

Atque ita jam id omne mihi videor tradidisse, quod ad resolutionem spectat æquationum cubicarum; nec vereor dicere, multò plura hìc reperiri, multòque clariùs nonnulla explicari, quàm apud alios factum invenies. Ostendendus esset modò usus quatuor illarum formularum in resolutione æquationum specialium; sed quum res perinde peragi debeat, ac fieri diximus in resolutione æquationum specialium secundi gradus, id per exempla ostendere, superfluum existimamus. Itaque ad resolutionem æquationum quatuor dimensionum gradum nunc facimus, quam subinde etiam ostendere conabimur, ut omnia Lector habeat, quæ ad eam pertinere videntur.

CAP. VIII.

De resolutione æquationum quarti gradus.

ÆQuationes, quarum sedes in quarto gradu subsistit, in duas classes distinguimus. Quædam enim sunt talis naturæ, ut affectionem cubicam contineant; aliæ vicissim ejusmodi sunt, ut ab affectione cubicâ sint immunes. Dicimus æquationem quarti gradus affectionem cubicam continere, quotiescumque in radicibus ejus radicales cubicæ continentur; dicimus verò eandem æquationem immunem esse à cubicâ affectione, quum radices ejus non cubicas, sed quadratas radicales comprehendunt.

Id ut clariùs intelligatur, juvabit in antecessum advertere, radices æquationum quarti gradus, quum istæ resolvuntur, sic expressas oriri, ut una ipsarum parte contineant semper radicem quadratam, ex multinomio aliquo extrahendam. Itaque si multinomium istud radicales contineat cubicas, tunc æquatio quarti gradus dicetur similiter affectionem cubicam continere; quod si verò multinomium illud contineat tantùm radicales quadratas; eo casu æquatio quarti gradus ab affectione cubicâ immunis esse dicetur.

Hanc distinctionem ponimus in æquationibus quarti gradus, ut rectè intelligatur natura problematum, ad quæ æquationes illæ referuntur. Unumquodque etenim problema, cujus æquatio naturâ suâ ad quartum gradum ascendit, quarti gradus esse dicetur. Sed interim si æquatio immunis fuerit ab affectione cubicâ, poterit illud velut problema secundi gradus haberi; quod si verò affectionem cubicam contineat, tamquam problema tertii gradus poterit considerari.

Æquationes quarti gradus ab affectione cubicâ sunt semper immunes, quotiescumcumq; primum tantùm, & ultimum terminum habent, hoc est quum non affectæ, sed puræ deprehenduntur. Hujusmodi æquationes, vel reducuntur ad hanc formam $x^4 - q = 0$, vel etiam ad hanc aliam $x^4 + q = 0$. Prioris formæ æquationes duas habent radices reales, & alias duas imaginarias, estque ex radicibus realibus una quidem positiva, altera negativa. Æquationes verò alterius formæ omnes radices imaginarias habent. Sed in utriusque formæ æquationibus inveniuntur radices istæ, extrahendo bis radicem quadratam.

Si enim habeatur $x^4 - q = 0$, hoc est $x^4 = q$; per unam quadratæ radicis extractionem, orientur duæ istæ æquationes secundi gradus $x^2 = +\sqrt{q}$, & $x^2 = -\sqrt{q}$. Quare extrahendo rursus ex utraque istarum quadratam radicem, fiet $x = +\sqrt{+\sqrt{q}}$, $x = -\sqrt{+\sqrt{q}}$, $x = +\sqrt{-\sqrt{q}}$, & $x = -\sqrt{-\sqrt{q}}$: proindeque radices quatuor æquationis $x^4 - q = 0$ erunt $+\sqrt{+\sqrt{q}}$, $-\sqrt{+\sqrt{q}}$, $+\sqrt{-\sqrt{q}}$, & $-\sqrt{-\sqrt{q}}$, ex quibus liquet duas priores esse reales, earumque unam positivam, alteram negativam, alias verò duas imaginarias esse.

Similiter si habeatur $x^4 + q = 0$, hoc est $x^4 = -q$; per unam quadratæ radicis extractionem orientur duæ istæ æquationes secundi gradus $x^2 = +\sqrt{-q}$, & $x^2 = -\sqrt{-q}$. Unde si rursus ex utraque istarum quadrata radix extrahatur, habebuntur quatuor æquationes simplices $x = +\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $x = -\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $x = +\sqrt{-\sqrt{-q}}$, & $x = -\sqrt{-\sqrt{-q}}$: proindeque radices quatuor æquationis $x^4 + q = 0$ erunt $+\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $-\sqrt{+\sqrt{-q}}$, $+\sqrt{-\sqrt{-q}}$, & $-\sqrt{-\sqrt{-q}}$, quas omnes liquet imaginarias esse.

Ab affectione cubicâ immunes quoque sunt semper æquationes quarti gradus, in quibus tum secundus, cùm quartus terminus deficit, quæque nullâ habitâ signorum ratione sub hac formulâ generali $x^4 + 2px^2 + q = 0$ possunt comprehendi. Sunt namque hujusmodi æquationes derivativæ secundi gradus; adeoque valores ipsarum inveniuntur, extrahendo radicem quadratam ex valoribus æquationum secundi gradus, ex quibus derivantur.

Ex eo autem, quod æquationes quarti gradus, comprehensæ sub hac formulâ $x^4 + 2px^2 + q = 0$, deriventur ex æquationibus

bus secundi gradus, per hanc formulam designatis $y^2 + 2py + q = 0$; cognitâ istarum naturâ, facile erit naturam quoque illarum investigare. Si enim radices duæ æquationis $y^2 + 2py + q = 0$ sint reales, & positivæ; erunt radices quatuor æquationis $x^4 + 2px^2 + q = 0$ similiter reales, sed duæ positivæ, & duæ negativæ. Quod si vero radices duæ æquationis $y^2 + 2py + q = 0$, sint quidem reales, sed una positiva, altera negativa; tunc ex radicibus quatuor æquationis $x^4 + 2px^2 + q = 0$ duæ erunt reales, & duæ imaginariæ, eritque ex realibus una positiva, altera negativa. Et denique si radices duæ æquationis $y^2 + 2py + q = 0$ vel sint negativæ, vel imaginariæ; eo casu radices quatuor æquationis $x^4 + 2px^2 + q = 0$ omnes imaginariæ erunt.

Itaque eæ solæ æquationes quarti gradus possunt cubicam affectionem continere, in quibus adest, vel secundus terminus, vel quartus, vel etiam uterque. Quando autem id contingat, ipsa hujusmodi æquationes resolvendi ratio nobis ostendet, quæ etiam indicabit, num æquatio quarti gradus dividi possit in duas alias secundi gradus, necne. Et quoniam resolvuntur æquationes istæ secundi gradus, alias ex iis derivando, quæ sint trium tantùm dimensionum: proinde id primum ostendendum nobis erit, quâ ratione ex æquationibus quarti gradus possint aliæ trium tantùm dimensionum derivari: qua in re supponemus, sublatum esse ex æquationibus quarti gradus terminum secundum, quia id, regulâ satis expeditâ, fieri semper posse, jam superiùs vidimus.

I.

Æquationum cubicarum ex æquationibus quarti gradus derivatio ostenditur.

ETsi æquationes quarti gradus, quas hìc examinandas nobis proponimus, in propriâ suâ sede existant, nec proinde in alias simpliciores dividi possint; nihil tamen vetat, quominus eas quoque consideremus, velut compositas ex multiplicatione mutuâ duarum secundi gradus æquationum. Omnis etenim æquatio constituitur per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, quæ suas continent radices. Itaque, quia æquatio quarti gradus quatuor habet radices, æquationes quatuor simplices, in quibus radices illæ continentur, mul-

multiplicatæ simul dabunt æquationem quarti gradus; & propterea quum duæ ex iis æquationibus componant æquationem, ubi incognita est duarum dimensionum, poterit & ipsa æquatio quarti gradus, velut orta ex duarum secundi gradus æquationum multiplicatione considerari.

Neque verò considerando æquationem quarti gradus, quæ sit in propriâ suâ sede, velut genitam ex multiplicatione mutuâ duarum secundi gradus, sequitur ipsam revera in duas alias secundi gradus divisibilem esse. Sic enim dicendum esset, eandem æquationem quarti gradus dividi posse in quatuor æquationes simplices, quum constituatur per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, quæ suas continent radices. Itaque quemadmodum hoc postremum dici nequit, quia quatuor illæ æquationes apparenter tantùm sunt simplices, reverà autem illarum unaquæq; ipsam æquationem quarti gradus nobis restituit; ita neque etiam primum rectè infertur, quia quælibet ex iis æquationibus secundi gradus apparenter tantùm est duarum dimensionum, reverà autem sedes ejus in quarto gradu subsistit.

Et

Et sanè non aliâ de causâ in definiendis æquationibus, quæ in propriâ suâ sede existunt, discessimus à vulgo Algebristarum; qui pro talibus solent habere æquationes illas, quæ in alias simpliciores dividi nequeunt, quàm quia non satis res definita nobis videbatur. Si enim hoc criterio uti velimus, jam nulla æquatio, quæ sit plurium dimensionum, existet in propriâ suâ sede, quia dividi saltem potest in æquationes simplices, quæ suas continent radices. Quod si reponas, æquationes istas apparenter tantùm esse simplices, reverà tamen esse æquè compositas, ac æquationem ipsam, quam componunt. Jam ad id cognoscendum novum cogeris criterium proferre. Dicamus itaque, eas tantùm æquationes existere in propriâ suâ sede, quæ non modò per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, in quibus earum radices continentur, verùm etiam per unicam tantùm illarum æquationum constitui possunt; & hac ratione res satis definietur, nec opus erit aliud quidpiam adjicere.

Jam considerando eas quoque æquationes quarti gradus, quæ in propriâ suâ sede existunt, veluti ortas ex multiplicatiotione mutuâ duarum secundi gradus æquationum, haud difficile erit ex iis æquationes cubicas, quas optamus, derivare. Assumantur enim indeterminatè æquationes duæ secundi gradus, quæ per mutuam multiplicationem producunt æquationem quarti gradus, de qua agitur. Et jam, quum æquatio ex illarum multiplicatione orta debeat esse ejusdem naturæ cum æquatione propositâ, comparentur termini unius ordine cum terminis alterius: qua institutâ comparatione, invenientur totidem æquationes, quot in æquationibus componentibus quantitates indeterminatæ fuerunt assumptæ. Unde si ex iis æquationibus alia eruatur, in qua ea sola maneat quantitas indeterminata, quæ est coefficiens secundi termini in utraque æquationum componentium, ascendet illa ad tres dimensiones, adeoque erit æquatio cubica quæsita.

Id ut ostendamus, sit $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ æquatio quarti gradus, ex qua eruenda est alia cubica. Eam autem indeterminatam assumimus, ut possit omnes quarti gradus æquationes repræsentare. Sint porrò $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$ æquationes duæ secundi gradus, quæ multiplicatione mutuâ

tuâ illam producunt. Atque has taliter etiam accipimus, ut secundus terminus sit idem in utraque, sed contrariis signis affectus, quò æquatio, quam componunt, secundo termino deficiens oriatur. Et quoniam æquatio quarti gradus, quæ producitur per mutuam multiplicationem æquationum $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$, est $x^4 + ax^2 + bx^2 - y^2x^2 - ayx + byx + ab = 0$; erit ista ejusdem naturæ cum æquatione propositâ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Unde comparando terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur comparatione istâ tres aliæ æquationes $a + b - y^2 = p$, $by - ay = q$, & $ab = r$.

Nunc ex istis æquationibus alia est deducenda, in qua non alia occurrat quantitas indeterminata, quàm y, quæ est coefficiens secundi termini in utraque æquationum componentium. Id autem obtineri potest in hunc modum. Quoniam in primâ æquatione habetur $a + b - y^2 = p$, erit transponendo $a + b = p + y^2$, atque adeo multiplicando terminos omnes per y, erit $ay + by = py + y^3$. Jam verò habetur in secundâ $by - ay = q$. Itaque erit per additionem $2by = py + y^3 + q$, & per subtractionem $2ay = py + y^3$

$+ y^3 - q$: proindeq; multiplicando ſimul duas iſtas æquationes, fiet $4aby^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$. Eſt autem in tertiâ æquatione $ab = r$, hoc eſt $4aby^2 = 4ry^2$. Quare erit $4ry^2 = p^2y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$, hoc eſt $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - q^2 = 0$, in quâ non alia occurrit quantitas indeterminata, quàm y. Et quamquam æquatio iſta ad ſex dimenſiones aſcendat, quia tamen numeri dimenſionum, quas in ſingulis terminis habet incognita, dividi poſſunt per binarium, poterit velut æquatio trium tantùm dimenſionum haberi.

Hæc igitur eſt æquatio cubica, quæ derivatur ex æquatione propoſitâ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Et quoniam iſta generalis eſt; omneſque quarti gradus æquationes, quæ ſecundo termino carent, poteſt repræſentare, ſatis erit in inventâ æquatione cubicâ loco p, q, & r correſpondentes valores ſubſtituere, quum aliqua ſpecialis æquatio proponitur. Ita ſi fuerit æquatio $x^4 - 3x^2 + 2x - 8 = 0$, quia hic p eſt -3, q eſt $+2$, & r idem valet, ac -8, æquatio cubica æquationi huic correſpondens erit $y^6 - 6y^4 + 41y^2 - 4 = 0$. Et ſimiliter, ſi æquatio fuerit $x^4 + 2x^2 - 5x + 6 = 0$, quia p eſt $+2$, q eſt

— 5

-5, & r eſt $+6$, invenietur pro ipſius æquatione cubicâ $y^6 + 4y^2 - 20y^2 - 25 = 0$. Atque ita quoque, ſi proponatur æquatio $x^4 - a^2x^2 + abcx + a^2bc = 0$, quia p eſt $-a^2$, q eſt $+abc$, & r eſt $+a^2bc$, habebitur pro ejus æquatione cubicâ $y^6 - 2a^2y^4 + a^4y^2 - 4a^2bcy^2 - a^2b^2c^2 = 0$.

II.

Reſolutio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas explicatur.

OStenſo, quo artificio ex æquationibus quarti gradus aliæ deriventur, quæ ſint trium tantùm dimenſionum, videamus modò, qua ratione, iſtis mediantibus, poſſit illarum reſolutio obtineri, unàque ſimul earum natura cognita fieri. Et quidem, ſicuti conſiderando æquationem quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, veluti genitam ex multiplicatione duarum ſecundi gradus æquationum $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$, deducta eſt æquatio cubica $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$; ita ſi ope hujus cubicæ æquationis invento valore incognitæ y, determinentur duæ illæ æquationes ſecundi gradus $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 -$

 yx

$yx + b = 0$, facile erit resolutionem obtinere ipsius æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, ejusque adeo radices quatuor determinare, quum eò res redeat, ut duæ illæ æquationes secundi gradus resolvantur.

Hunc in finem ostendendum est nobis primo loco, qua ratione cognito valore incognitæ y ope cubicæ æquationis, determinentur æquationes duæ secundi gradus $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$, ex quarum multiplicatione oritur æquatio $x^4 + px^2 + qx + r = 0$: nimirum, quum duæ illæ æquationes multiplicatæ simul producant æquationem $x^4 + ax^2 + bx^2 - y^2x^2 - ayx + byx + ab = 0$, comparando, ut supra, terminos istius ordine cum terminis ipsius æquationis, de qua agitur, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $a + b - y^2 = p$, hoc est $a + b = p + y^2$, sive etiam $ay + by = py + y^3$, & $by - ay = q$. Unde quum per additionem fiat $2by = py + y^3 + q$, & per subtractionem $2ay = py + y^3 - q$; erit

$$b = \frac{py + y^3 + q}{2y}, \quad \& \quad a = \frac{py + y^3 - q}{2y}:$$

proindeque in duabus illis æquationibus $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$ positis loco a, & b valoribus istis, fient

$$x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0, \quad \& \quad x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0,$$

quæ utique determinatæ evadunt, cognito valore incognitæ y.

Jam valor incognitæ y inveniendus est ope cubicæ æquationis $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, inquirendo primùm ope divisorum, num æquatio ista aliquem habeat valorem rationalem, & deinde eam juxtà regulas superiùs traditas resolvendo, si utique in propriâ suâ sede constiterit; sed quemadmodum quum æquatio est litteralis, & homogenea, ii tantùm divisores sunt tentandi, qui sunt duarum dimensionum, quia in æquatione cubicâ inventâ dimensiones incognitæ y sunt duplicatæ, adeoque valores ejus non ad y, sed ad y^2 referuntur, ita si æquatio cubica extiterit in propriâ suâ sede, necesse est ex eâ secundum terminum tollere, quò possit resolutio ejus obtineri. Interim si æquatio quarti gradus fuerit $x^4 + qx + r = 0$, hoc est talis, ut careat secundo, & tertio termino, tunc æquatio cubica erit $y^6 - 4ry^2 - qq = 0$, quæ quum careat secundo ter-

termino, absque ulla præparatione statim resolvi poterit. Sed in resolutione cubicæ æquationis notare etiam oportet, quod valor, qui invenitur, non ad incognitam y, sed ad quadratum ejus referatur. Unde, ut habeatur valor incognitæ y, necesse est ex valore illo quadratam radicem extrahere.

Invento valore incognitæ y ope cubicæ æquationis, substituatur valor ille tum in æquatione $x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$, cùm in æquatione $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$, ut ambæ evadant determinatæ. Et quoniam hæ duæ æquationes multiplicatæ simul producunt æquationem quarti gradus, de qua agitur, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, continebunt eædem æquationes radices quatuor istius: proindeque eas resolvendo secundùm regulas superiùs traditas, habebuntur radices quatuor æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Nec refert, quod in æquationibus illis secundi gradus coefficientes terminorum quantitates contineant radicales. Id enim resolutioni illarum æquatio-

tio-

tionum nequaquam esse potest impedimento, quum regulæ superiùs traditæ æquè procedant, quum coefficientes terminorum sunt radicales, quàm quum sunt commensurabiles, ac rationales; sed tantùm efficiet, ut radices ipsarum radicales radicalium contineant, quod mirum esse non debet, quum radices illæ ad æquationem quarti gradus propriè referantur.

Quoniam autem æquationes quarti gradus, in propriâ suâ sede existentes, in duas classes distribuimus, & alias diximus tales esse, ut contineant affectionem cubicam, alias verò ejuscemodi, ut immunes sint à cubicâ affectione; videamus modò, qua ratione unæ ab aliis distingui possint, etiam non cognitis earum radicibus. Itaque si contingat, æquationes cubicas derivatas in propriâ suâ sede existere, itaut radices ipsarum radicalibus cubicis exprimi debeant; tunc æquationes quarti gradus continebunt affectionem cubicam, earumque radices radicales quoque cubicas comprehendent. Quod si verò æquationes illæ cubicæ non existant in propriâ suâ sede, sed valorem habeant rationalem, eo casu æquationes quarti gradus immunes erunt ab affe-

 ctio-

ctione cubicâ, earundemque radices non-nisi radicales quadratas continebunt.

Innotescit ergo nobis natura æquationum quarti gradus, in propriâ suâ sede existentium, beneficio æquationum cubicarum, quæ ex iis derivantur. Sed mediantibus iisdem æquationibus cubicis, cognosci quoque potest, num æquationes quarti gradus existant in propriâ suâ sede, an verò in duas secundi gradus sint divisibiles: adeo, ut si casum excipias, quum æquationes quarti gradus unam continent radicem rationalem, poterit earum natura perspecta fieri, ac explorata, per solas æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis.

Quotiescumque enim æquationes illæ cubicæ existunt in propriâ suâ sede, tunc etiam in propriâ suâ sede erunt æquationes quarti gradus, quibus hoc ampliùs accedet, quod affectionem cubicam contineant. Sed si æquationes cubicæ non sint in propriâ suâ sede, verùm valorem habeant rationalem; tunc rursus vel valor iste talis est, ut elici exinde nequeat quadrata radix, & isto casu æquationes quarti gradus existent quidem in propriâ suâ sede, sed immunes erunt ab affectione cubicâ; vel est ejusce-

cemodi, ut exinde quadrata radix elici possit, & quum hoc contingit æquationes quarti gradus non erunt in propriâ suâ sede, sed in duas alias secundi gradus dividi poterunt.

Neque verò difficile erit horum omnium veritatem ostendere, si consideremus, quod omnis æquatio quarti gradus, repræsentata per æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, juxta ea, quæ mox ostensa sunt, considerari possit veluti orta ex multiplicatione istarum secundi gradus æquationum $x^2 + yx \frac{+py+y^3-q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \frac{+py+y^3+q}{2y} = 0$.

Hinc enim clarè liquet, æquationem quarti gradus esse semper divisibilem in duas alias, quarum sedes est in gradu secundo, quotiescumque valor incognitæ y est rationalis; esse verò in propriâ suâ sede, quum idem ille valor est radicalis. Patetque etiam, eandem æquationem quarti gradus continere affectionem cubicam, quum valor incognitæ y continet radicales cubicas; esse verò à cubica affectione prorsus immunem, quum idem

idem ille valor per radicalem quadratam designatur.

Unde obiter notetur hìc velim, quàm benè analysis omnes rei, de qua agitur, casus nobis ostendat, & qua ratione, unâ eâdemque viâ, singulis satisfaciat. Quotiescumque enim æquatio quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ nullam habet radicem rationalem, tria contingere possunt; vel nempe, ut sit divisibilis in duas secundi gradus; vel, ut existat in propriâ suâ sede, sed immunis sit ab affectione cubicâ; vel denique, ut affectionem cubicam contineat. Pro unoquoq; casu suppeditat nobis analysis hanc cubicam æquationem $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, in qua quum duplicatæ sint dimensiones incognitæ y, perspicuum est, circa ejus valorem tria quoque contingere posse, primò ut sit rationalis, secundo ut sit expressus per radicalem quadratam, & denique, ut radicales cubicas comprehendat.

Dis-

III.

Quæ æquationes quarti gradus resolvi possint, demonstratur.

Quemadmodum non omnes æquationes cubicæ resolvi possunt, sed eæ dumtaxat, quæ unicam habent radicem realem; ita nec omnium æquationum quarti gradus resolutio potest obtineri, sed earum tantummodò, ex quibus tales derivantur æquationes cubicæ, ut & ipsæ etiam resolvi possint. Obtinetur namque resolutio æquationum quarti gradus, resolvendo æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis. Quocirca si contingat, cubicas istas æquationes resolvi non posse, quia fortè omnes habeant radices reales, tunc nec ipsa æquationum quarti gradus resolutio poterit obtineri.

Hinc illud nobis ostendendum est, quæ nimirum inter æquationes quarti gradus tales sint, ut cubicæ æquationes, quæ ex iis derivantur, omnes habeant radices reales, nec ideo resolvi possunt. Qua in re notare priùs oportet, quod quum radices imaginariæ in æquationibus occurrant sem-

semper in numero pari, æquationes quarti gradus pro qualitate radicum trium tantùm specierum esse possint; vel enim omnes habent radices reales; vel duas reales, & duas imaginarias; vel denique omnes radices imaginarias habent. Itaque, ut cognoscamus, quæ sint æquationes illæ quarti gradus, quarum cubicæ radices omnes reales habent, singulos hos casus oportet prosequamur.

Et primò quidem si æquatio quarti gradus omnes habeat radices reales, sint $x-a-b=0$, $x-a+b=0$, $x+a-c=0$, & $x+a+c=0$ æquationes quatuor simplices, quæ continent radices illas. Itaque quia productum ex duabus primis est $x^2-2ax+a^2-b^2=0$, & productum ex duabus reliquis est $x^2+2ax+a^2-c^2=0$; erit $x^4-2a^2x^2-b^2x^2-c^2x^2-2ab^2x+2ac^2x+a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2=0$ æquatio quarti gradus, quæ ex illarum omnium multiplicatione producitur: proindeque comparando terminos ipsius cum terminis æquationis $x^4+px^2+qx+r=0$, erit $p=-2a^2-b^2-c^2$, $q=2ac^2-2ab^2$, & $r=a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2=0$; atque adeo substitutis valoribus istis in æquatione cubicâ y^6+2py^4

$+p^2y^2$

$+p^2y^2-4ry^2-qq=0$, fiet ista $y^6-4a^2y^4-2b^2y^4-2c^2y^4+8a^2b^2y^2+8a^2c^2y^2-2b^2c^2y^2+b^4y^2+c^4y^2-4a^2c^4+8a^2c^2b^2-4a^2b^4=0$.

Jam cubicæ hujus æquationis radices omnes reales sunt. Evanescit etenim æquatio, sive loco y^2 ponatur $4a^2$, sive $b^2+2bc+c^2$, sive demum $b^2-2bc+c^2$. Unde quotiescumque æquatio quarti gradus omnes habet radices reales, æquatio cubica, quæ ex ea derivatur, omnes item radices reales habebit: proindeque sicuti ista resolvi non potest, ita nec illius resolutio poterit obtineri. Nec ad rem facit, quod æquatio cubica reperta secundum terminum habeat, & quum ea est resolvenda, oporteat terminum illum tollere. Nam tollendo secundum terminum ex æquatione aliquâ, radices ejus augentur quidem, vel minuuntur, nequaquam verò ex realibus evadunt imaginariæ.

Quod si æquatio quarti gradus duas habeat radices reales, & alias duas imaginarias, sint $x-a-b=0$, & $x-a+b=0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas reales, & $x+a-\sqrt{-c^2}=0$, & $x+a+\sqrt{-c^2}=0$ æquationes simplices, quæ continent radi-

di-

dices duas imaginarias. Itaque quia productum ex duabus primis est $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex duabus secundis est $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + c^2x^2 - 2ab^2x - 2ac^2x + a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ producitur ex illarum omnium multiplicatione. Quare comparando terminos istius ordine cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fiet $p = c^2 - b^2 - 2a^2$, $q = -2ab^2 - 2ac^2$, & $r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$: proindeque substitutis valoribus istis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 4a^2y^4 - 2b^2y^4 + 2c^2y^4 + 8a^2b^2y^2 - 8a^2c^2y^2 + 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 - 8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0$.

Hæc autem æquatio cubica duas habet radices imaginarias, & unam realem. Evanescit etenim æquatio, non modò si loco y^2 ponatur quantitas realis $4a^2$, verùm etiam si ponâtur quantitates imaginariæ $b^2 - c^2 + \sqrt{-4b^2c^2}$, & $b^2 - c^2 - \sqrt{-4b^2c^2}$. Itaque quotiescumque æquatio quarti gradus duas habet radices reales, & alias duas imaginarias; æquatio cubica, quæ ex illâ derivatur, unam tan-

tantùm continebit radicem realem, & duæ aliæ ipsius radices imaginariæ erunt. Quocirca sicuti æquatio ista cubica resolvi potest, ita & ipsius æquationis quarti gradus resolutio poterit obtineri.

Denique si æquatio quarti gradus omnes habeat radices imaginarias, sint $x - a - \sqrt{-b^2} = 0$, & $x - a + \sqrt{-b^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent duas illarum radicum, & $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes simplices, quæ cōtinent alias duas. Itaque quia productum ex duabus primis est $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, & productum ex duabus reliquis est $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + 2ab^2x - 2ac^2x + a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, quæ ex illarum omnium multiplicatione producitur. Quare comparando terminos istius ordine cum terminis æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = b^2 + c^2 - 2a^2$, $q = 2ab^2 - 2ac^2$, & $r = a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$: proindeque substitutis valoribus istis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 4a^2y^4 + 2b^2y^4 + 2c^2y^4 - 8a^2b^2y^2 - 8a^2c^2y^2 - 2b^2c^2y^2 + b^4y^2 + c^4y^2 - 4a^2c^4 +$

$8a^2$

$8a^2c^2b^2 - 4a^2b^4 = 0.$

Hujus autem cubicæ æquationis radices omnes ſunt reales ; nam evaneſcunt contrarietate ſignorum termini æquationis, ſive loco y^2 ponatur $4a^2$, ſive $-b^2 - 2bc - c^2$, ſive $-b^2 + 2bc - c^2$. Quocirca quotieſcumque æquatio quarti gradus omnes habet radices imaginarias, æquatio cubica, quæ ex eâ derivatur, radices omnes reales habebit: proindeque ſicuti æquatio iſta cubica reſolvi nequit, ita nec ipſius quarti gradus æquationis reſolutio poterit obtineri.

Patet itaque, eas tantùm æquationes quarti gradus reſolvi poſſe, quæ duas habent radices reales, & alias duas imaginarias. Nam quotieſcumque vel omnes radices ſunt reales, vel omnes imaginariæ, derivantur ex iis tales æquationes cubicæ, ut omnes ipſarum radices ſint reales: proindeque ſicuti iſtæ reſolvi non poſſunt, ita nec illarum reſolutio poterit haberi. Sed videamus modò, qua ratione æquationes quarti gradus, in quibus radices omnes ſunt reales, diſtingui poſſunt ab iis, quæ omnes habent radices imaginarias; nam tam illæ, quàm iſtæ ſuppetunt nobis æquationes cubicas, quarum radices omnes ſunt reales.

Et

Et quidem ſemper ac in æquatione quarti gradus, quæ ſecundo termino caret, tertius terminus afficitur ſigno +; per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, certum eſt, æquationem illam radices duas imaginarias habere. Unde ſi contingerit hoc caſu, æquationem cubicam, quæ exinde derivatur, talem eſſe, ut omnes ejus radices ſint reales; tunc eadem illa æquatio quarti gradus non duas tantùm, ſed radices omnes habebit imaginarias. Verumtamen, quia æquationes, quæ ſecundo termino carent, poſſunt radices imaginarias continere, etiamſi in iis tertius terminus afficiatur ſigno −; proinde quod quærimus criterium non ex ipſis æquationibus quarti gradus, ſed ex æquationibus cubicis, quæ ex iis derivantur, repeti debet: quod equidem haud difficile erit invenire, ſi ad conſtitutionem æquationum cubicarum ſedulò attendatur.

Ad eam enim attendentes, inveniemus, quod quum æquatio quarti gradus omnes habet radices reales, tunc æquatio ejus cubica ſecundum terminum habeat affectum ſigno −, tertium verò ſigno +; ſed quotieſcumque æquationis quarti gradus radices omnes ſunt ima-

imaginariæ, & æquationis cubicæ exinde derivatæ ſecundus terminus afficitur ſigno —, eo caſu tertius terminus itidem ſigno — affici debeat. Itaque habebit æquatio quarti gradus radices omnes reales, ſi utique ejus æquatio cubica, non modò radices omnes reales habeat, verùm etiam ſecundum terminum affectum ſigno —, & tertium ſigno +; at ſi æquatio cubica habeat quidem radices omnes reales, ſed ſecundum terminum, vel habeat affectum ſigno +, vel etiam affectum ſigno —, ſed tali quoque ſigno ſit affectus terminus tertius, tunc æquatio quarti gradus radices omnes habebit imaginarias.

IV.

Reſolutio æquationum quarti gradus exemplis illuſtratur.

ÆQuationum quarti gradus reſolutio adeo quidem generaliter à nobis eſt oſtenſa, ut quæ ſint earum radices, neq; etiam in formulis, ſub quibus æquationes omnes ſolent exhiberi, nobis innotuerit. Dabimus ergo in Tyronum gratiam exempla nonnulla hujus reſolutionis, ut noſcant, qua ratione ad praxim

ſint revocanda, quæcumque omnia circa rem iſtam generaliter à nobis ſunt enunciata. Et quoniam æquationes quarti gradus, quæ exiſtunt in propriâ ſuâ ſede, duplicis ſunt ſpeciei, quum aliæ contineant affectionem cubicam, aliæ ab illâ ſint immunes; proindè exempla afferemus pro utraque ſpecie æquationum, qua in re ordiemur ab iis, quæ immunes ſunt à cubicâ affectione, utpote quæ ſemper, & longè faciliùs reſolvuntur; cujuſmodi ſunt illæ, quarum æquationes cubicæ valorem habent rationalem.

Proponatur itaque primùm reſolvenda æquatio quarti gradus $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$, quæ ſi utique repræſentetur per æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = -12$, $q = +12$, & $r = -3$. Quoniam æquatio cubica, derivata ex æquatione generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eſt $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, poſitis in iſtâ loco p q, & r valoribus ſuis, fiet $y^6 - 24y^4 + 156y^2 - 144 = 0$, in qua quum y^2 perinde valeat, ac 12, erit $y = 2\sqrt{3}$: proindeque æquationes duæ $x^2 + yx \dfrac{+ py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \dfrac{+ py + y^3 + q}{2y} = 0$,

$= 0$, ex quarum multiplicatione fingitur orta æquatio quarti gradus $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fient $x^2 + 2x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$. Unde, quia radices illius sunt $-\sqrt{3} + \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, & $-\sqrt{3} - \sqrt{3 + \sqrt{3}}$, istius verò radices sunt $+\sqrt{3} + \sqrt{3 - \sqrt{3}}$, & $+\sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{3}}$; erunt quatuor istæ radices valores æquationis propositæ $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$.

Proponatur secundò resolvenda æquatio quarti gradus $x^4 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$. Quoniam in istâ æquatione p est -8, q est $+16$, & r idem valet, ac p, hoc est -8; æquatio cubica $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, derivata ex æquatione generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fiet in casu nostro $y^6 - 16y^4 + 96y^2 - 256 = 0$. Et quoniam in hac æquatione y^2 idem valet, ac 8; erit $y = 2\sqrt{2}$; adeoque æquationes duæ $x^2 + yx \frac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \frac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$, fient $x^2 + 2x\sqrt{2} - \sqrt{8} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{2} + \sqrt{8} = 0$, Unde quum radices prioris æquationis sint $-\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{8}}$, & $-\sqrt{3} - \sqrt{2 + \sqrt{8}}$, radices verò alterius æquationis sint $+\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{8}}$, & $+\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{8}}$, erunt quatuor istæ radices valores propositæ æquationis $x^4 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$.

Proponatur ulteriùs resolvenda æquatio litteralis quarti gradus $x^4 - 4abx^2 + 4abcx - abc^2 = 0$. Repræsentetur ea per formulam generalē $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eritque $p = -4ab$, $q = +4abc$, & $r = -abc^2$. Substituantur valores isti in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, derivatâ ex formulâ illâ generali, jamque habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 8aby^4 + 16a^2b^2y^2 + 4abc^2y^2 - 16a^2b^2c^2 = 0$. Et quoniam in cubicâ istâ æquatione y^2 idem valet, ac $4ab$, erit $y = 2\sqrt{ab}$: proindeque æquationes duæ $y^2 + yx \frac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $y^2 - yx \frac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$ fient $x^2 + 2x\sqrt{ab} - c\sqrt{ab} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{ab} + c\sqrt{ab} = 0$. Quocirca, quia prioris æquationis radices sunt $-ab\surd + \sqrt{ab + c\sqrt{ab}}$, & —

& $-\sqrt{ab} - \sqrt{ab + c\sqrt{ab}}$; radices verò alterius æquationis ſunt hæ duæ $\sqrt{ab} + \sqrt{ab - c\sqrt{ab}}$, & $+\sqrt{ab} - \sqrt{ab - c\sqrt{ab}}$; erunt quatuor iſtæ radices valores propoſitæ æquationis $x^4 - 4abx^2 + 4abcx - abc^2 = 0$.

Atque hæc ſufficiant exempla, quum æquationes quarti gradus immunes ſunt à cubicâ affectione. Demus modò unum, aut alterum exemplum, quum eædem æquationes quarti gradus affectionem cubicam continent, id quod contingit, quum æquationes cubicæ, quæ ex iis derivantur, valorem rationalem non habent. Proponatur itaque æquatio $x^4 - 6x + 3 = 0$, in qua non modò ſecundus, verùm etiam tertius terminus deficit. Hæc continetur ſub formulâ generali $x^4 + qx + r = 0$, cujus æquatio cubica eſt $y^6 - 4ry^2 - qq = 0$. Et quoniam, factâ terminorum comparatione, habetur $q = -6$, & $r = 3$; proinde ſubſtitutis valoribus iſtis, fiet æquatio illa cubica $y^6 - 12y^2 - 36 = 0$, quæ quum nullum habeat valorem rationalem, indicio nobis eſſe poteſt, æquationem propoſitam affectionem cubicam continere.

Jam ſi cubicam iſtam æquationem, quæ

quæ ſecundo termino caret, reſolvamus methodo ſuperiùs traditâ inveniemus $y^2 = \sqrt[3]{18 + \sqrt{260}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{260}}$; atque adeo erit ipſa incognita $y = \sqrt{\sqrt[3]{18 + \sqrt{260}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{260}}}$. Quocirca ſi in duabus æquationibus $x^2 + yx \dfrac{+y^3 - q}{2y} = 0$, & $y^2 - yx \dfrac{+y^3 + q}{2y} = 0$, ex quarum multiplicatione fingitur oriri æquatio $x^4 + qx + r = 0$, loco y ponamus valorem inventum, ſimulque loco q ſubrogemus valorem ſuũ, jam utraque illarum æquationum determinabitur. Unde non aliud reſtat, quam ut illarum æquationum ſic determinatarum radices capiantur, quum eæ dent valores propoſitæ æquationis. Sed nec æquationes eâ ratione determinatas, nec earundem radices hìc exhibemus, quia prolixæ earum expreſſiones Typographo noſtro moleſtiam non exiguam afferunt.

Proponatur deinde reſolvenda æquatio quarti gradus $x^4 - 3x^2 + 8x - 3 = 0$, quæ ſecundo tantùm termino caret. Jam ſi hæc repræſentetur per formulã generalẽ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, erit $p = -3$, $q = +8$, & $r = -3$. Unde quum æ-

 qua-

quatio cubicâ, derivata ex æquatione illâ generali, fit $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, debitis substitutionibus peractis, fiet illa $y^6 - 6y^4 + 21y^2 - 64 = 0$, quæ quia valorem rationalem non admittit, consequens est, propositam æquationem $x^4 - 3x^2 + 8x - 3 = 0$ affectionem cubicam continere. Resolvenda est ergo methodo superiùs traditâ æquatio cubicâ $y^6 - 6y^4 + 21y^2 - 64 = 0$; sed quum in eâ reperiatur secundus terminus, à quo utique immunis semper esse debet æquatio cubica resolvenda, illum primò oportet auferamus.

Hunc in finem ponamus $y^2 - 2 = z^2$, & jam si scribamus $z^2 + 2$ loco y^2, $z^4 + 4z^2 + 4$ loco y^4, & $z^6 + 6z^4 + 12z^2 + 8$ loco y^6, orietur æquatio $z^6 + 9z^2 - 38 = 0$, quæ ut vides secundo termino caret. Et quoniam æquatio ista resoluta per regulas traditas dat $z^2 = \sqrt[3]{19 + \sqrt{361}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{361}}$, erit $y^2 = 2 + \sqrt[3]{19 + \sqrt{361}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{361}}$, adeoque per extractionem quadratæ radicis fiet incognita $y = \sqrt{2 + \sqrt[3]{19\sqrt{361}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{361}}}$. Unde si loco y scribamus valorem istum in

æqua-

æquationibus $x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$; & $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$, ex quarum multiplicatione oriri ponitur æquatio generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, simulque loco p, & q subrogemus valores suos; jam utraque illarum æquationum determinabitur: proindeque earundem radices dabunt valores quatuor propositæ æquationis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

V.

Reductio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas exemplis demonstratur.

Diximus beneficio æquationum cubicarum, quæ derivantur ex æquationibus quarti gradus, non modò istas resolvi posse, quum consticerint in propriâ suâ sede, verùm etiam posse amplius inquiri, num eædem æquationes quarti gradus deprimi queant, dividendo eas in alias duas, quæ sint duarum tantùm dimensionum. Si enim æquationes illæ cubicæ nullum habeant valorem ratio-

Cc 4 tio-

tionalem; tunc æquationes quarti gradus, ex quibus sunt derivatæ, existunt in propriâ suâ sede, & insuper affectionem cubicam continent. Quod si verò habeant quidem valorem rationalem, sed talem, ut ex eo elici non possit quadrata radix; eo casu æquationes quarti gradus existunt quidem in proprià suâ sede, sed immunes sunt à cubicâ affectione. Et denique, si eædem æquationes cubicæ non modò habeant valorem rationalem, sed etiam valor ille hujusmodi sit, ut elici exinde possit quadrata radix; tunc æquationes quarti gradus non existunt in propriâ suâ sede, sed semper in duas alias, quæ sint duarum tantùm dimensionum, deprimi possunt.

Jam ex iis tribus, quæ contingere possunt in æquationibus cubicis, derivatis ex æquationibus quarti gradus, priora duo satis, superque exemplis explicuimus. Sed ut eorum omnium, quæ à nobis dicta sunt, veritas innotescat, non abs re erit, tertium quoque, sive postremum aliquibus exemplis ostendere. Proponatur itaque æquatio quarti gradus $x^4 - 17x^2 + 12x + 12 = 0$, & mediante æquatione cubicâ, quæ ex illâ derivatur, oporteat inquirere, num deprimi queat, dividendo eas in alias duas, quæ sint duarum tantùm dimensionum. Repræsentetur æquatio illa per formulam generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eritque $p = -17$, $q = +12$, & $r = +12$. Substituantur valores isti in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, derivatâ ex æquatione illâ generali; & habebitur loco ejus hæc alia $y^6 - 34y^4 + 241y^2 - 144 = 0$, in qua y^2 perinde valet, ac 9.

Quum igitur æquatio cubica, derivata ex æquatione propositâ $x^4 - 17x^2 + 12x + 12 = 0$, non modò habeat valorem rationalem, verùm etiam talem, ut elici exinde possit quadratâ radix; consequens est, propositam æquationem non existere in propriâ suâ sede, sed in duas alias secundi gradus divisibilem esse. Neque verò difficile erit, duas istas æquationes exhibere. Posuimus enim æquationem generalem $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ oriri ex multiplicatione mutuâ istarum æquationum $x^2 + yx + \frac{py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx + \frac{py + y^3 + q}{2y} = 0$. Itaque, quum sit $y^2 = 9$, erit $y = 3$, adeoque si in iis æqua-

æquationibus loco p, q, & y ponantur valores correſpondentes, una fiet $x^2 + 3x - 6 = 0$, altera $x^2 - 3x - 2 = 0$, patetque duas iſtas æquationes per ſe mutuò multiplicatas producere æquationem propoſitam $x^4 - 17x^2 + 12x + 12 = 0$.

Proponatur ſecundò æquatio quarti gradus $x^4 - 10x^2 - 4x + 8 = 0$, & inquirendum ſit etiam, num æquatio iſta in duas alias ſecundi gradus ſit diviſibilis, nec ne. Comparentur termini hujus æquationis cum terminis æquationis generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, eritque $p = -10$, $q = -4$, & $r = +8$. Ponantur valores iſti in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$. derivatâ ex generali illa æquatione, & prodibit loco ejus hæc alia $y^6 - 20y^4 + 68y^2 - 16 = 0$. Unde, quum in iſtâ æquatione y^2 tantundem valeat, ac 4, erit valor ejus non modò rationalis, verùm etiam quadratus: proindeque concludendum erit, propoſitam æquationem in duas alias ſecundi gradus dividi poſſe, quæ quidem erunt $x^2 - 2x - 4 = 0$. & $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Sed oſtendamus id etiam in æquationibus litteralibus: quem in finem proponatur ulteriùs æquatio quarti gradus litte-

ralis $x^4 - a^2x^2 - c^2x^2 + b^2x^2 + ac^2x + ab^2x - b^2c^2 = 0$, & oporteat inquirere, num ea exiſtat in propriâ ſuâ ſede, an verò in duas alias ſecundi gradus ſit diviſibilis. Conferantur termini ipſius cum terminis æquationis generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, & erit $p = b^2 - a^2 - c^2$, $q = ac^2 + ab^2$, & $r = -b^2c^2$. Subſtituantur valores iſti in æquatione cubicâ derivatâ ex æquatione generali $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, & fiet iſta $y^6 + 2b^2y^4 - 2a^2y^4 - 2c^2y^4 + b^4y^2 - 2b^2a^2y^2 + a^4y^2 + 2b^2c^2y^2 + 2a^2c^2y^2 + c^4y^2 - a^2c^4 - 2a^2c^2b^2 - a^2b^4 = 0$, quæ quum valorem habeat rationalem, & quadratum: (eſt enim $y^2 = a^2$;) conſequens eſt, æquationem propoſitam non exiſtere in propriâ ſuâ ſede, ſed in duas alias ſecundi gradus dividi poſſe.

Quæ verò ſint duæ iſtæ æquationes ſecundi gradus, in quas eſt diviſibilis æquatio propoſita $x^4 - a^2x^2 - c^2x^2 + b^2x^2 + ac^2x + ab^2x - b^2c^2 = 0$, ſic quidem invenietur. Quoniam habetur $y^2 = a^2$, erit $y = a$. Unde, ſi in duabus æquationibus $x^2 + yx \dfrac{+py + y^3 - q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx \dfrac{+py + y^3 + q}{2y} = 0$, ex quarū multitiplicatione mutuâ ponitur oriri æquatio generalis $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, scribamus a loco y, & una simul loco p, & q subrogemus valores suos, signis probè observatis; fiet illarum æquationum una $x^2 + ax - c^2 = 0$, & altera $x^2 - ax + b^2 = 0$. Quocirca, quia duæ istæ æquationes multiplicatæ simul producunt æquationem propositam; eæ erunt, in quas æquatio proposita vicissim dividi poterit, & non aliæ.

Ex adductis igitur exemplis abundè liquet, quod beneficio æquationum cubicarum, quæ derivantur ex æquationibus quarti gradus, non modò istarum resolutio, quum fuerint in propriâ suâ sede, possit obtineri, verùm etiam hoc ampliùs cognosci queat, num eædem æquationes quarti gradus existant in sede suâ propriâ, an verò in duas alias secundi gradus sint divisibiles: adeo, ut mediantibus cubicis illis æquationibus natura æquationum quarti gradus fiat nobis omninò cognita, ac explorata. Excipiendus est autem casus, quum æquatio quarti gradus unum habet valorem rationalem. Tunc enim illa non existit in sede suâ propriâ, quum ad aliam tertii gradus, invento valore illo rationali, deprimi pos-

possit; & tamen æquatio cubica exinde derivata, quia nullum valorem rationalem admittit, indicabit nobis existere illam in propriâ suâ sede, itemque cubicam affectionem continere.

Quod equidem, ut exemplo aliquo ostendamus, assumatur æquatio cubica $x^3 + 3x^2 - 9x - 23 = 0$, quæ existit in propriâ suâ sede, eaque multiplicetur per æquationem simplicem $x - 3 = 0$, ut oriatur æqnatio quarti gradus secundo termino carens $x^4 - 18x^2 + 4x + 69 = 0$, quæ unum habeat valorem rationalem. Jam conferendo terminos hujus æquationis cum terminis æquationis generaralis $x^4 + px^2 + qx + r = +0$, erit $p = -18$, $q = +4$, & $r = 69$. Quare substitutis valoribus istis in æquatione cubicâ $y^6 + 2py^4 + p^2y^2 - 4ry^2 - qq = 0$, deductâ ex generali illâ æquatione, prodibit loco ejus hæc alia $y^6 - 36y^4 - 48y^2 - 16 = 0$; quæ profectò, siquidem rei periculum fiat, nullum valorem rationalem habere invenietur.

Et sanè fieri nullâ ratione potest, ut isto casu æquatio cubica valorem admittat rationalem. Id enim si contingeret, æquatio quarti gradus, vel esset in propriâ suâ sede, sed immunis ab affectione cu-

cubicâ, vel etiam in duas secundi gradus esset divisibilis; quorũ utrumq; repugnat, quum ex hypothesi componatur ex æquatione simplici, & aliâ cubicâ in propriâ suâ sede existente. Et quamquã ex eo, quod æquatio cubica exinde derivata nullum habeat valorem rationalem, non rectè deducatur existere illam in propriâ suâ sede, optimè tamen infertur affectionem cubicam continere, quia tres ex ejus radicibus per latera cuborum debent designari. Unde crediderim, saltem ex hoc capite defendi posse, cur æquatio cubica, quæ derivatur ex æquatione quarti gradus, in qua unus tantùm valor est rationalis, nullum valorem rationalem admittat.

VI.

Reductio æquationum quarti gradus per æquationes cubicas ex iis derivatas aliâ methodo instituitur.

Quemadmodum æquationum cubicarum resolutionem Italis omnes acceptam ferunt; ita ab iisdem Italis excogitatam fuisse regulam derivandi æquationes cubicas ex æquationibus quarti gradus, nemo est, qui illud in dubium revocabit. Sed hanc regulam pro reducendis æquationibus quarti gradus, quæ naturâ suâ in alias duas secundi gradus sunt divisibiles, nemo meliùs explicavit, & ad umbilicum perduxit, quàm Vir clarissimus Hyacinthus Christophorus, insigne Italiæ decus, cui, si quid Ego in hisce studiis profecerim, id omne libenter acceptum refero. Et quamquam ipsemet methodum suam in lucem ediderit in epistolâ directâ ad doctissimum Virum Nicolaum Galitia, in Lycæo nostro Neapolitano summum Canonum Professorem, gratissimâ memoriâ non uno nomine mihi semper recolendum; ne tamen aliquid prætermissum videatur, quod scitu sit dignum, ejus artificium hìc breviter, ac perspicuè aperire non gravabimur.

Nimirum si utraque pars æquationis quarti gradus quadratum esset perfectum, liceret per extractionem quadratæ radicis æquationem illam ad aliam secundi gradus deprimere. Itaque, quum æquatio aliqua quarti gradus naturâ suâ deprimi potest, nec tamen ejus utraque pars quadratum perfectum deprehenditur; in id incumbendum, ut aliquid ad utramque partem addatur, quò utraque perfectum quadratum evadat. Sit ergo $x^4 = 2px^2 + 4qx$

$+ 4qx + r$ æquatio quarti gradus naturâ suâ in duas alias secundi gradus divisibilis. Apponatur ad utramque partem quantitas aliqua, ut utraque fiat quadratum perfectum; & jam si fuerit $x^2 + y$ radix quadrata partis prioris erit $2yx^2 + y^2$ id quod utrique parti debet apponi. Unde eò res redit, ut qua ratione determinari debeat quantitas y, investigemus.

Hunc in finem consideremus hanc quadrati proprietatem, nulli non cognitam: nimirum, quod si fiat quadratum ex radice binomiâ, illud constabit ex tribus terminis, eritque id, quod producitur ex extremorum multiplicatione, æquale quadrato, quod fit ex termino medio dimidiato. Ita quadratum ex $a + b$ est $a^2 + 2ab + b^2$; & id, quod producitur, multiplicando a^2 per b^2, adæquat quadratum, ex ab, semisse termini medii $2ab$. Quocirca quia addendo $2xy^2 + y^2$ ad utramque partem assumptæ æquationis, fit $x^4 + 2yx^2 + y^2 = 2px^2 + 2yx^2 + 4qx + r + y^2$, in qua non modò pars prior $x^4 + 2yx^2 + y^2$, verùm etiam pars altera $2px^2 + 2yx^2 + 4qx + r + y^2$ debet esse quadratum; erit in istâ id, quod oritur, multiplicando $2px^2 + 2yx^2$ per $r + y^2$, æquale quadrato, quod fit ex $2qx$. Un-

Unde institutâ æqualitate, eademque per traditas regulas ordinatâ, erit $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ æquatio, per quam determinari debet quantitas y.

Jam, quum æquatio quarti gradus $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$ naturâ suâ in duas alias secundi gradus est divisibilis, habebit quantitas y in inventâ æquatione cubicâ $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ talem valorem rationalem, ut si secundùm eum determinetur quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, poterit ista per extractionem quadratæ radicis semper ad aliam secundi gradus deprimi. Unde vicissim, si invento valore incognitæ y, contigerit æquationem propositam traditâ methodo deprimi non posse; indicio erit, eam in duas alias secundi gradus non esse divisibilem. Cæterùm æquatio illa, ad quam deprimitur æquatio proposita, una erit ex æquationibus componentibus; & si utique per eam dividatur eadem æquatio proposita, fiet divisio absque ullo residuo, & habebitur in quotiente æquatio componens altera.

Proponatur æquatio quarti gradus $x^4 = 8x^2 - 4x - 3$, & oporteat juxta hanc methodum inquirere, num ea in duas alias se-

secundi gradus sit divisibilis. Comparentur termini ejus ordine cum terminis æquationis generalis $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, eritque $p = 4$, $q = -1$, & $r = -3$. Substituantur valores isti in æquatione cubicâ $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$, & prodibit loco ejus hæc alia $y^3 + 4y^2 - 3y - 14 = 0$. Unde, quia in istâ æquatione y idem valet, ac -2; quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $-4x^2 + 4$. Quumque per additionem istius quantitatis æquatio proposita evadat $x^4 - 4x^2 + 4 = 4x^2 - 4x + 1$, quæ per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 - 2 = 2x - 1$, hoc est $x^2 - 2x - 1 = 0$; erit æquatio proposita, in duas secundi gradus divisibilis, quarum una erit $x^2 - 2x - 1 = 0$, altera $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Quod si in æquatione propositâ deficiat non modò secundus terminus, verùm etiam tertius, aut quartus; eadem methodus adhuc quoque sibi locum vindicabit. Sit enim $x^4 = 12x + 5$ æquatio quarti gradus. Itaque, quia comparando terminos istius cum terminis æquationis generalis $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, fit $p = 0$, $q = 3$, & $r = 5$; æquatio cubica $y^3 + py^2$

$py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ mutabitur isto casu in hanc aliam $y^3 + 5y - 18 = 0$. Unde, quia in istâ æquatione y idem valet, ac 2; quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $4x^2 + 4$. Quocirca, quia per additionem istius quantitatis æquatio proposita fit $x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$, eademque per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 + 2 = 2x + 3$, hoc est $x^2 - 2x - 1 = 0$; erit æquatio proposita in duas alias secundi gradus divisibilis, earumque una erit $x^2 - 2x - 1 = 0$, altera $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Proponatur ulteriùs æquatio quarti gradus $x^4 = 12x^2 - 16$, quæ secundo, & quarto termino caret. Et quoniam cõparatis terminis istius ordine cum terminis æquationis generalis $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, fit $p = 6$, $q = 0$, & $r = -16$; subrogatis hisce valoribus, mutabitur æquatio cubica $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ in hanc aliam $y^3 + 6y^2 - 16y - 96 = 0$: proindeque, quia in istâ æquatione y idem valet, ac -4; quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $-8x^2 + 16$. Unde, quia per additionem istius quantitatis æquatio proposita evadit x^4 $-8x^2$

$-8x^2 + 16 = 4x^2$, atque hæc per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 - 4 = 2x$, hoc est $x^2 - 2x - 4 = 0$, erit æquatio proposita in duas alias secundi gradus divisibilis, earumque una erit $x^2 - 2x - 4 = 0$, altera $x^2 + 2x - 4 = 0$.

Atque hac occasione notetur hoc loco velim, quod etsi, quum utraque æquationum componentium secundo termino caret, æquatio composita non modò secundo, verùm etiam quarto termino careat; non hinc tamen vicissim, quum æquatio composita caret secundo, & quarto termino, æquationes componentes secundi termini expertes esse debeant. Æquatio enim $x^4 - 12x^2 + 16 = 0$ secundo, & quarto termino caret, & tamen ejus æquationes componentes sunt $x^2 - 2x - 4 = 0$, & $x^2 + 2x - 4 = 0$, quæ terminis omnibus sunt repletæ. Sed fieri quoq; potest, ut æquatio quarti gradus habeat tantùm primum, & ultimũ terminũ, componaturque nihilominus ex duabus æquationibus secundi gradus, in quibus nullus desit terminorum. Sic duæ istæ æquationes secundi gradus $x^2 - 2x + 2 = 0$, & $x^2 + 2x + 2 = 0$ terminis omnibus sunt repletæ, & tamen multiplicatæ simul componunt æquationem quarti gradus $x^4 + 4 = 0$, in qua desunt omnes termini intermedii.

Neque verò methodus, quàm præ manibus habemus, deficiet nobis in isto casu. Si enim æquatio $x^4 = -4$ repræsentetur per æquationem generalem $x^4 = 2px^2 + 4qx + r$, fiet $p = 0$, $q = 0$, & $r = -4$: proindeque subrogatis valoribus istis in æquatione cubicâ $y^3 + py^2 + ry + pr - 2qq = 0$ prodibit loco ejus hæc alia $y^3 - 4y = 0$, hoc est $y^2 - 4 = 0$. Unde, quum sit $y = 2$, quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, fiet $4x^2 + 4$; adeoque per additionem istius quantitatis evadet æquatio proposita $x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2$, quæ per extractionem quadratæ radicis deprimitur ad hanc aliam $x^2 + 2 = 2x$, hoc est $x^2 - 2x + 2 = 0$, quæ erit æquatio componens una; & si utique dividatur $x^4 + 4 = 0$ per $x^2 - 2x + 2 = 0$, habebitur in quotiente æquatio componens altera $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Itaque semper, ac æquatio quarti gradus est composita, sive in eâ deficiat tantùm secundus terminus, sive cum secundo deficiat quoque tertius, aut quartus, sive demum deficiant termini omnes

omnes intermedii; semper inquam per hanc methodum poterunt æquationes componentes inveniri. Sed eadem methodus potest nobis usui esse, etiam quum æquatio quarti gradus terminis omnibus est repleta: nimirum si terminus secundus jungatur cũ primo, & in inveniendâ quantitate, quæ ad utramque partem æquationis addi debet, ut utraque quadratum evadat, ejus quoque ratio habeatur. Verum id sufficiat indicasse, & qui plura cupit, adeat laudatam Auctoris epistolam, quæ reperitur in calce sui tractatus de doctrina triangulorum, editi Venetiis anno 1720.

CAP. IX.

De resolutione æquationum altioris gradus.

Resolutio æquationum, quæ plures habent dimensiones, quàm quatuor, inaudita est apud Vulgus Algebristarum, non quod earum nõ ita frequens sit usus in Algebrâ, quemadmodum ipsi jactitant; sed quia, si particulares quosdam casus excipias, nemo hactenus pro illarum resolutione methodum protulit generalem.

Non

Non is ego sum, qui ausu quodam gigante lapidem istum movere possim, nec à me tale quicquam jure debet expectari, utpote qui è proprio tyrocinio vix dum egressus, multum abest, ut cum aliis, qui huic rei operam navarunt, possim comparari. Præstabo tamen, quod possum, & nisi resolutionem tradam istarum æquationum, saltem principia, quibus ea possit obtineri, hoc capite breviter indicabo.

Primò igitur accuratè velim distinguantur æquationes, quarum dimensiones sunt numero impares, ab æquationibus, quæ dimensiones habent numero pares. Quemadmodum enim eæ tantùm æquationes tertii gradus resolvi possunt, quæ unam habent radicem realem, & alias duas imaginarias; ita generaliter semper ac resolvenda proponitur æquatio aliqua, cujus dimensiones sunt numero impares, tunc demũ obtineri poterit ejus resolutio, quum una tantùm radix est realis, & reliquæ omnes imaginariæ sunt: proindeque æquationum, quæ dimensiones habent numero impares, frustra instituitur resolutio, quotiescumque in iis plures, quàm una, radices reales extiterint.

 Sed

Quantum verò ad æquationes, quæ dimensiones habent numero pares, istæ progrediuntur eâdem omnino lege, qua incedunt æquationes, quæ sunt quatuor dimensionum: nimirum quemadmodum hujusmodi æquationes tunc demum resolvi possunt, quotiescumq; duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; ita generaliter semper, ac resolvenda proponitur æquatio aliqua, cujus dimensiones sunt numero pares, tunc tantùm licebit resolutionem ejus obtinere, quum duæ ipsius radices sunt reales, & aliæ omnes imaginariæ: quocirca æquationum, quæ dimensiones habent numero pares, frustra tentatur resolutio, ubi in iis plures, quàm duæ, radices reales occurrunt.

Verùm, quod hìc, & alibi dictum est, æquationes quarti gradus tunc demum resolvi posse, quotiescumque duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; id velim intelligatur de æquationibus quarti gradus, quæ affectionem cubicam continent. Si enim æquationes quarti gradus immunes fuerint à cubicâ affectione, adeò ut dividi possint in alias duas, in quibus coefficientes terminorum non alias radicales, quàm quadratas contineant; tunc poterit earum resolu-

tio

tio obtineri, etiamsi radices omnes habeant reales. Et generaliter omnis æquatio, quæ dimensiones habet numero pares, si dividi possit in alias duas beneficio radicalium quadratarum, resolvi quandoque poterit, tametsi plures contineat radices reales, quàm duas.

Secundò circa radices æquationũ omniũ hoc velim theorema sciatur, à nemine adhuc adnotatum: nempe, quod radix cujuscumque æquationis, quæ terminis omnibus sit repleta, generaliter tot terminos continere possit, quot sunt dimensiones ipsius æquationis, & non plures, hoc est unum, si æquatio fuerit primi gradus; duos, si secundi; tres, si tertii; quatuor, si quarti; atque ita deinceps. Neque verò inficiamur, posse quandoque pauciores terminos includere. Nam quemadmodum fieri potest, ut in æquatione unus, aut plures ex terminis intermediis deficiant; ita contingere quoque potest, ut in radice ipsius æquationis unus, aut plures ex iis terminis desint.

Jam ex terminis, quos continet radix cujuscumque æquationis, unus debet semper adæquare eam partem quantitatis cognitæ secundi termini, quam ostendit gradus ipsius æquationis; nimirum se-

mis-

missem, si æquatio fuerit secundi gradus; trientem, si tertii; quadrantem, si quarti; atque ita continuò: Ex quo fit, ut si in æquatione desit secundus terminus, tunc itidem in radice terminus ille deficiet. Et quoniam facile est, ex qualibet æquatione secundum terminum tollere; proinde si eas tantùm æquationes resolvendas nobis proponemus, quæ secundo termino carent, radices ipsarum non plures poterunt terminos continere, quàm sunt dimensiones æquationum, unâ demptâ: adeo, ut generaliter erit monomium radix, quæ refertur ad æquationem secundi gradus; binomium radix, quæ respicit æquationem tertii gradus; trinomium radix, quæ eruitur ex æquatione quarti gradus; atque ita deinceps.

Hæc itaque sunt principia, quibus generalem æquationum omnium resolutionem oportet instituere, nec dicere vereor, defectu istorum principiorum, non adhuc fuisse excogitatam in Algebrâ methodum generalem pro resolutione omnium æquationum. Jam ex hisce principiis duplex mihi videtur colligi posse methodus generalis pro resolvendis æquationibus omnibus, quæ quidem sunt ipsissimæ illæ, quas pro resolutione æquationum cubicarum superiùs adhibuimus. Utramque hìc explicabimus, sed tam unius, quàm alterius nonnisi in resolutione æquationum quarti gradus, jam aliâ methodo à nobis institutâ, periculum faciemus; nam exigua nostri operis moles non sinit, ut ulteriùs progrediamur; quum in resolvendis æquationibus altioris gradus calculus crescat in immensum.

I.

Prima methodus pro resolvendis æquationibus omnibus explicatur.

PRo generali æquationum omnium resolutione prima methodus ex iis, quas hìc explicandas nobis proposuimus, procedit, assumendo radices æquationis indeterminatè, & componendo ex iis novam æquationem, quas deinde determinat per comparationem novæ istius æquationis cum illâ, de qua agitur. Hæc methodus neminem latuit recentium Algebristarum, sed eam ad æquationes altioris gradus extendere ausus est nemo; quum omnes ignari fuerint illius principii, quod non omnes æquationes resolvi possint analyticè; sed eæ tantùm, quæ vel

vel unam habent radicem realem, si dimensiones ipsarum fuerint impares numero; vel duas, si dimensiones habuerint numero pares.

Itaque hæc methodus id amplius exigit, ut radices assumantur tales quidem, quales esse debent, ut æquationis resolutio possit obtineri: nempe ut una sit realis, & aliæ omnes imaginariæ, si æquationis dimensiones fuerint impares numero; & ut duæ sint reales, aliæque omnes similiter imaginariæ, si æquatio dimensiones habuerit numero pares. Id quum fit, semper quidem determinari poterunt radices illæ, componendo ex iis novam æquationem, & comparando terminos ejus ordine cum terminis æquationis, de qua agitur. Quod si secus radices illæ assumantur; tunc methodus ista deficiens semper deprehendetur.

Hujus rei veritatem jam satis, superque vidimus in resolutione æquationum cubicarum. Quotiescumque enim radices tres istarum æquationum tales assumebantur, ut una esset realis, & aliæ duæ imaginariæ; semper quidem licebat valores invenire quantitatum, quibus radices illæ designabantur. At verò quum omnes earum æquationum radices ponebantur reales, tunc illæ nequaquam poterant determinari. Et quamquam beneficio quantitatum imaginariarum, ad hunc quoque casum placuerit methodum extendere; vidimus tamen radices illas sic expressas oriri, ut tametsi reales, quantitates tamen imaginarias involverunt, nec proinde legitimas esse earum radicum expressiones.

Hoc idem ostendemus modò in resolutione æquationum quarti gradus, quam alia methodo superiori capite docuimus. Sit enim $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ æquatio quarti gradus, & ponamus primò æquationem istā duas habere radices reales, & alias duas imaginarias. Sint $x - a - b = 0$, & $x - a + b = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas reales, sintque $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, & $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes simplices, quæ continent radices duas imaginarias. Itaque, quia ex multiplicatione primarum oritur æquatio $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & ex multiplicatione secundarū producitur æquatio $x^2 + 2ax + a^2 + c^2 = 0$, multiplicando rursus per se mutuò duas istas æquationes secundi gradus, prodibit æquatio quatuor dimensionum $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + c^2x^2 - 2ab^2x$ —

$-2ac^2x + a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0$, quæ erit ejusdem naturæ cum æquatione propositâ $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$: proindeque factâ terminorum mutuâ collatione, erit $4p = c^2 - b^2 - 2a^2$, $8q = -2ab^2 - 2ac^2$, & $4r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$.

Quia ergo in primâ istarum æquationum habetur $4p = c^2 - b^2 - 2a^2$, erit transponendo $4p + 2a^2 = c^2 - b^2$, atque adeò multiplicando terminos omnes per $2a$, erit $8pa + 4a^3 = 2ac^2 - 2ab^2$. Et quoniam in secundâ habetur $8q = -2ab^2 - 2ac^2$, erit primò per additionem $8pa + 4a^3 + 8q = -4ab^2$, hoc est $2pa + a^3 + 2q = -ab^2$, & secundò per subtractionem $8pa + 4a^3 - 8q = 4ac^2$, hoc est $2pa + a^3 - 2q = ac^2$. Quare multiplicatis simul duabus hisce æquationibus, fiet $4p^2a^2 + 4pa^4 + a^6 - 4qq = -a^2b^2c^2$. Erat autem $4p + 2a^2 = c^2 - b^2$, hoc est $4pa^4 + 2a^6 = a^4c^2 - a^4b^2$. Itaque adddendo partes istius æquationis cū partibus illius, fiet $4p^2a^2 + 8pa^4 + 3a^6 - 4qq = a^4c^2 - a^4b^2 - a^2b^2c^2$. Quumque in ultimâ æquatione habeatur $4r = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$, hoc est $4ra^2 = a^6 - a^4b^2 + a^4c^2 - a^2b^2c^2$; erit per substitutionem $4ra^2 = 4a^6 + 4p^2a^2 +$

$8pa^4$

$8pa^4 - 4qq$, hoc est $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$.

Itaque quum æquatio ista sit derivativa tertii gradus, facile erit ope ejus quantitatis a valorem invenire: quo utique invento, innotescent quoque valores quantitatum b, & c, quum habeatur $2pa + a^3 + 2q = -ab^2$, & $2pa + a^3 - 2q = ac^2$. Quocirca per hanc methodū semper poterunt determinari, tum radices duæ reales, cùm radices duæ imaginariæ propositæ æquationis $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$. Neque dicas inventam æquationem $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$, utpote tertii gradus, non semper resolvi posse; quum si contingat illam existere in propriâ suâ sede, omnesq; radices reales habere, per ea, quæ superiùs ostensa sunt, nequeat resolutio ejus obtineri. Nam notetur velim, casum istum contingere nequaquam posse, quandoquidem posuimus, æquationem quarti gradus $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ duas habere radices reales, & alias duas imaginarias.

Id autem ut liquidò constet, memoriâ recolendum est, quod si utique æquationis $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ capiatur æquatio cubica per methodum superiori capite explicatam, hæc semper resolvi pos-

possit, quotiescumque æquatio illa duas habet radices reales, & alias duas imaginarias. Itaque, quia multiplicando radices inventæ æquationis cubicæ $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$ per numerum quaternarium, habetur loco ejus hæc alia $y^6 + 8py^4 + 16p^2y^2 + 16ry^2 - 64qq = 0$, quæ est ipsissima illa, quæ ex æquatione propositâ $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ methodo superiori capite traditâ derivaretur, consequens est, ut in hypothesi, quod æquatio quarti gradus duas habeat radices reales, & alias duas imaginarias, inventa æquatio cubica semper resolvi possit, nec unquam fieri queat, ut in casum incidat irresolutum æquationum cubicarum.

Ponamus secundò, æquationem $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ radices omnes reales habere. Quem in finem sint $x - a - b = 0$, & $x - a + b = 0$ æquationes simplices, quæ continent duas ex radicibus illis, sintq; $x + a - c = 0$, & $x + a + c = 0$ æquationes simplices, quæ alias duas radices comprehendunt. Itaque, quia productum ex primis est $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, & productum ex secundis est $x^2 + 2ax + a^2 - c^2 = 0$; erit $x^4 - 2a^2x^2 - b^2x^2 - c^2x^2 - 2ab^2x + 2ac^2x + a^4$ —

$- a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$ æquatio quarti gradus, ad quam radices illæ referuntur. Unde, quum ista sit ejusdem naturæ cum æquatione propositâ $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$, factâ terminorum collatione mutuâ, invenietur $4p = -2a^2 - b^2 - c^2$, $8q = 2ac^2 - 2ab^2$, & $4r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2$.

Quia igitur in primâ istarum æquationum habetur $4p = -2a^2 - b^2 - c^2$, erit transponendo $4p + 2a^2 = -b^2 - c^2$, atque adeò multiplicando terminos omnes per $2a$, erit $8pa + 4a^3 = -2ab^2 - 2ac^2$. Et quoniam in secundâ habetur $8q = 2ac^2 - 2ab^2$, erit primò per additionem $8pa + 4a^3 + 8q = -4ab^2$, hoc est $2pa + a^3 + 2q = -ab^2$, & secundò erit per subtractionem $8pa + 4a^3 - 8q = -4ac^2$, hoc est $2pa + a^3 - 2q = -ac^2$. Quare multiplicatis simul duabus hisce æquationibus, fiet $4p^2a^2 + 4pa^4 + a^6 - 4qq = a^2b^2c^2$. Erat autem $4p + 2a^2 = -b^2 - c^2$, hoc est $4pa^4 + 2a^6 = -a^4b^2 - a^4c^2$. Itaque addendo partes istius æquationis cum partibus illius, fiet $4p^2a^2 + 8pa^4 + 3a^6 - 4qq = a^2b^2c^2 - a^4b^2 - a^4c^2$. Quumq; in ultimâ æquatione habeatur $4r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2$, hoc est $4ra^2 = a^6 - a^4b^2 -$

$a^4c^2 + a^2b^2c^2$, erit per ſubſtitutionem $4ra^2 = 4a^6 + 4p^2a^2 + 8pa^4 - 4qq$, hoc eſt $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$.

Itaque quum æquatio iſta ſit quidem derivativa tertii gradus, ſed ſit illa eadem, quæ inventa eſt paulò ante, quum æquatio propoſita $x^4 + 4px^2 + 8qx + 4r = 0$ duas ponebatur habere radices reales, & alias duas imaginarias; perſpicuum eſt, ope ejus nequaquam poſſe inveniri valorem quantitatis a, neque ideò determinari poſſe radices propoſitæ æquationis. Si enim ex æquatione propoſitâ eruamus æquationem cubicam methodo ſuperiori capite traditâ, hæc, ut ibidem oſtenſum eſt, incidit in caſum irreſolutum æquationum cubicarum, quotieſcumque æquatio illa radices omnes reales habet. Itaque, quia inventa æquatio cubica $a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - ra^2 - qq = 0$ transformatur in eam, quæ aliâ illâ methodo derivaretur, ſi utique radices ejus multiplicentur per numerum quaternarium; conſequens eſt, ut in hypotheſi, quod æquatio propoſita omnes radices reales habeat, inventa æquatio cubica incidat quoque in caſum irreſolutum æquationum cubicarum, nec ideo reſolutio ejus poſſit obtineri.

Vi-

Vides ergo, per hanc methodum, ſemper quidem reſolvi poſſe æquationes quarti gradus, quum duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; ſed non item, quum in iis radices omnes ſunt reales. Cæterùm hìc quoque notetur velim, in inventâ æquatione cubicâ quantitatem a duplicatas habere dimenſiones ob tria illa, quæ contingere poſſunt in æquationibus quarti gradus: indeque eſt, ut cubica illa æquatio inveniatur quoque, quum æquationis quarti gradus radices omnes reales ſupponuntur. Nam tametſi æquatio quarti gradus, quæ radices omnes reales habet, reſolvi nequeat, quum exiſtit in propriâ ſuâ ſede, & affectionem cubicam continet; attamen reſolutio ejus ſemper poteſt obtineri, ſi in duas ſecundi gradus ſit diviſibilis, vel naturâ ſuâ, vel etiam beneficio radicalium quadratarum.

Itaque qui per hanc methodum reſolutionem æquationem altioris gradus tentare velit, is radices ponat oportet tales quidem, quales eſſe debent, ut æquatio, de qua agitur, reſolvi poſſit. Ita quia æquationes quinti gradus unam tantùm radicem realem habere debent, quò ipſarum reſolutio poſſit obtineri, cogitandum eſt, æquationes illas ortas eſſe ex mu-

 tuâ

tuâ multiplicatione iſtarum æquationum $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, $x^2 + 2cx + c^2 + d^2 = 0$, & $x - 2a - 2c = 0$; quandoquidem in duabus primis continentur quatuor radices imaginariæ, in tertia verò radix realis includitur. Atque ita quoque, quia æquationes ſexti gradus tunc demum reſolvi poſſunt, quum duas habent radices reales; proinde in illarum reſolutione, putandum eſt, eas ortas eſſe ex multiplicatione mutuâ iſtarum æquationum $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, $x^2 + 2cx + c^2 + d^2 = 0$, & $x^2 - 2ax - 2cx + a^2 + 2ac + c^2 - f^2 = 0$, nam duæ primæ continent quatuor radices imaginarias, tertia verò radices duas reales comprehendit.

Verum quidem eſt, in æquationibus, quarum dimenſiones ſunt numero pares, id quod invenitur in hypotheſi, quod duas tantùm habeant radices reales, poſſe etiam in quacùnque aliâ hypotheſi reperiri. Sed id non aliunde fit, quàm quia in hujuſmodi æquationibus varia contingere poſſunt, quibus oportet, ut æquè ſatisfiat per analyſim, quemadmodum videre licet in æquationibus quarti gradus. Res autem longè ſecus comperietur in æquationibus, quæ dimenſiones habent impares numero. In iſtis ſiquidem tunc tantùm methodus procedet, quum una dumtaxat radix aſſumitur realis, & tametſi beneficio quantitatum imaginariarum ad alios quoque caſus poſſet methodus extendi, attamen eventus perinde erit, ac in reſolutione æquationum cubicarum, nimirum radix ſubinde orietur expreſſa, ut etſi realis, quantitates tamen imaginarias involvet.

II.

Altera methodus reſolvendi æquationes omnes aperitur.

Altera methodus pro reſolutione æquationum omnium, procedit inquirendo valorem unius tantummodo radicis, quam etiam indeterminatam aſſumit. Hac methodo uſi ſunt Itali in reſolutione æquationum cubicarum, quam deinde alii etiam uſurparunt. Sed ea ad reſolutionem æquationum altioris gradus à nemine huc uſque promota fuit, quia nemini innotuit theorema illud, quod radix realis cujuſcumque æquationis, quæ ſecundo termino caret, tot terminos generaliter debeat continere, quot ſunt dimenſiones æquationis, unâ demptâ.

Itaque, qui per hanc methodum æquationes omnes resolvere cupit, is radicem, quam quærit, ita quidem assumere debet indeterminatè, ut tamen tot terminis constet, quot sunt dimensiones æquationis, de qua agitur, unâ demptâ: adeo ut quemadmodum in resolutione æquationum cubicarum ponitur $x = a + b$, ita in resolutione æquationum quarti gradus ponendum sit $x = a + b + c$, & $x = a + b + c + d$ in resolvendis æquationibus quarti gradus, atque ita deinceps.

Quum sic proceditur in resolutione æquationum semper quantitas a, quæ designat primum terminum radicis extrahendæ, invenitur per æquationem unâ dimensione minorem illâ, quæ resolvenda proponitur: nimirum per æquationem quadratam, si proposita fuerit tertii gradus; per æquationem cubicam, si proposita fuerit quarti gradus; per æquationē quadrato-quadratam, si proposita fuerit quinque dimensionum, atque ita deinceps: adeo ut æquatio, exempli gratiâ, noni gradus resolvi non poterit, nisi priùs fuerit resoluta æquatio gradus octavi.

Determinatâ quantitate a, quantitates reliquæ determinabuntur per æquationes

nes adhuc simpliciores, nimirum secunda per æquationem duplici dimensione minorem, tertia per æquationem tribus dimensionibus minorem, atque ita continuò: unde per hanc methodum æquatio cujuscumque gradus resolvi nequaquam poterit, nisi prius innotuerit, qua ratione resolvi debeant æquationes omnes, quæ sub gradu illo continentur: adeo ut in resolvendis æquationibus, nisi gradatim procedatur, nihil beneficio hujus methodi profici poterit.

Sed videamus modò, qua ratione per hanc methodum resolutio æquationum institui debeat. Id in æquationibus cubicis jam superiùs à nobis præstitum est; sed ut artificium hujus methodi paulò clariùs intelligatur, non gravabimur earum resolutionem hìc denuò proferre. Sit igitur $x^3 = 3px + 2q$ æquatio cubica resolvenda. Ponatur $x = a + b$. Erit itaque $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; adeoque quum sit ex hypothesi $x^3 = 3px + 2q$, erit $3px + 2q = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Unde eò res redit, ut ex cubo radicis binomiæ $a + b$ separentur termini, qui æquari debent $3px$, à terminis, qui æqualitatem servare debent cum $2q$.

Hæc

Hæc separatio, ut rectè fiat, notare priùs oportet, quod quum $2q$ sit quantitas omnino rationalis, & $3px$ contineat quantitatem radicalem x; radix binomia $a+b$ talis esse debeat, ut cubus ejus duabus similiter partibus constet, quarum una sit omnino rationalis, altera contineat quantitatem radicalem $a+b$, cui ex hypothesi est æqualis incognita x. Sic enim prior pars omninò rationalis æquabitur $2q$, pars verò altera, in qua continetur quantitas radicalis $a+b$, ponenda erit æqualis $3px$.

Ut autem radix binomia $a+b$ hunc præstet effectum, perspicuum est, quantitates a, & b debere esse radicales cubicas, & tales quidem, ut id, quod est sub signo radicali in unâ, sit quadrata radix ejus, quod sub eodem signo radicali reperitur in alterâ. Hac siquidem ratione termini duo a^3+b^3, utpote cubi quantitatum a, & b, constituent partem rationalem, quæ æquari debet cum $2q$; at verò alii duo termini $3a^2b+3ab^2$, quia oriuntur multiplicando quantitatem rationalem $3ab$ per radicalem $a+b$, constituent partem alteram, quæ poni debet æqualis $3px$.

Habemus itaque duas æquationes $3ab$

=

$=3p$, & $a^3+b^3=2q$, quarum ope facilè modò erit determinare quantitates a, & b. Est enim in primâ $3ab=3p$, hoc est $ab=p$. Itaque elevando utramque partem ad cubum, erit $a^3b^3=p^3$. Et quoniam in secunda habetur $a^3+b^3=2q$; multiplicando terminos omnes per a^3, erit $a^6+a^3b^3=2qa^3$; adeoque si loco a^3b^3 ponatur valor ejus p^3, fiet $a^6+p^3=2qa^3$, hoc est $a^6-2qa^3+p^3=0$, quæ quum sit derivativa secundi gradus, haud difficile erit ope ejus valorem quantitatis a determinare: quo utique cognito, innotescet quoque valor alterius b, quum habeatur $ab=p$.

Hanc eandem methodum applicemus modò æquationibus quarti gradus. Sit ergo $x^4=4px^2+8qx+4r$ æquatio quarti gradus resolvenda. Ponatur $x=a+b+c$. Erit itaque $x^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4a^3c+12a^2bc+12ab^2c+4b^3c+6a^2c^2+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4$; adeoque quum sit ex hypothesi $x^4=4px^2+8qx+4r$, erit $4px^2+8qx+4r=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4a^3c+12a^2bc+12ab^2c+4b^3c+6a^2c^2+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4$. Unde eò res redit, ut ex quadrato-quadrato radicis trinomiæ

miæ $a + b + c$ ſeparentur termini, qui æquari debent $4r$, tam à terminis æquandis cum $4px^2$, quàm à terminis, qui æqualitatem ſervare debent cum $8qx$.

Hæc ſimiliter ſeparatio ut rectè fiat, notare prius oportet, quod quum $4r$ ſit quantitas omnino rationalis, $8qx$ contineat quantitatem radicalem x, & $4px^2$ ejusdem quantitatis radicalis quadratum comprehendat; radix trinomia $a + b + c$ talis eſſe debeat, ut ejus quadrato-quadratum tribus ſimiliter partibus conſtet, quarum una ſit omnino rationalis, altera contineat quantitatem radicalem $a + b + c$, cui ex hypotheſi eſt æqualis incognita x, & tertia contineat quadratum ejuſdem quantitatis radicalis. Sic enim pars prior æquabitur $4r$, pars altera æquabitur $8qx$, & pars tertia ponenda erit æqualis $4px^2$.

Sed perſpicuum eſt, quod ut radix trinomia $a + b + c$ hunc præſtet effectum, quantitates a, b, c debeant eſſe radicales quadrato-quadratæ, & tales quidem, ut id, quod eſt ſub ſigno radicali in unâ, veluti in a, ſit radix quadrata ejus, quod eſt ſub ſigno radicali in altera, puta in b, & radix cubica illius, quod ſub eodem ſigno radicali reperitur in tertia c. Hac enim ratione ſemper in quadrato-quadrato

to

to illius radicis trinomiæ $a + b + c$ diſtinguere licebit tres partes, quarum una ſit omninò rationalis, altera contineat radicalem $a + b + c$, & tertia quadratum ejuſdem radicalis comprehendat.

Pars quippe, quæ continet radicalem $a + b + c$, erit $4a^3b + 4a^2b^2 + 4a^2bc + 4abc^2 + 4b^2c^2 + 4bc^3$, quum oriatur, multiplicando quantitatem rationalem $4a^2b + 4bc^2$ per $a + b + c$. Pars verò, quæ continet quadratum ejusdem radicalis $a + b + c$, erit $2a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4 + 8ab^2c + 4b^3c + 2b^2c^2 + 4a^3c + 8a^2bc + 8a^2c^2 + 8abc^2 + 4ac^3$; quum producatur, multiplicando quantitatem rationalem $2b^2 + 4ac$ per quadratum, quod fit ex $a + b + c$. Et denique pars omninò rationalis eſt $a^4 + c^4 - b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2ac$, quæ unà cum duabus primis conſtituit quadrato-quadratum radicis trinomiæ $a + b + c$.

Diſcretis à ſe mutuò tribus iſtis partibus, habebimus totidem æquationes, nimirum $4a^2b + 4bc^2 = 8q$, $2b^2 + 4ac = 4p$, & $a^4 + c^4 - b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2ac = 4r$, quarum ope facile erit definire valores quantitatum a, b, c. Eſt enim in ſecundâ $2b^2 + 4ac = 4p$, hoc eſt $4b^2ac = 4pb^2 - 2b^4$. Itaque in tertiâ æquatio-tione $a^4 + c^4 - b^4 - 2a^2c^2 + 4b^2ac = 4r$, ſi loco $4b^2ac$ ponatur valor iſte $4pb^2 - 2b^4$, prodibit loco ejus hæc alia $a^4 + c^4 - 3b^4 - 2a^2c^2 + 4pb^2 = 4r$, ſive etiam $a^4b^2 + c^4b^2 - 3b^6 - 2a^2c^2b^2 + 4pb^4 = 4rb^2$.

Et quoniam in primâ æquatione habetur $4a^2b + 4bc^2 = 8q$, hoc eſt $a^2b + bc^2 = 2q$; elevando utramque partem ad quadratum, erit $a^4b^2 + 2a^2c^2b^2 + c^4b^2 = 4qq$, hoc eſt $a^4b^2 + c^4b^2 = 4qq - 2a^2c^2b^2$: proindeque ſi in æquatione illâ, in quam mutata eſt tertia, loco $a^4b^2 + c^4b^2$ ponatur $4qq - 2a^2c^2b^2$, fiet $4qq - 3b^6 - 4a^2c^2b^2 + 4pb^4 = 4rb^2$. Et denique, quia ex ſecundâ æquatione eruitur $4a^2c^2b^2 = 4p^2b^2 - 4pb^4 + b^6$, ponendo in eadem æquatione loco $4a^2c^2b^2$ valorem iſtum, habebitur $4qq - 4b^6 - 4p^2b^2 + 8pb^4 = 4rb^2$, hoc eſt $b^6 - 2pb^4 + p^2b^2 + rb^2 - qq = 0$.

Quum itaq; æquatio iſta ita quidem ad ſex dimenſiones aſcendat, ut tamen derivativa tertii gradus dicenda ſit, haud difficilè erit ope ejus quantitatis b valorem invenire. Hoc autem invento valores quantitatum a, & c in promptu erunt. Habetur enim in primâ illarum æquationum $4a^2b + 4bc^2 = 8q$, hoc eſt

$4a^4b$

$4a^4b + 4ba^2c^2 = 8qa^2$. Itaque, quum in ſecundâ habeatur $2ac = 2p - b^2$, hoc eſt $4ba^2c^2 = 4p^2b - 4pb^3 + b^5$; fiet per ſubſtitutionem $4a^4b + 4p^2b - 4pb^3 + b^5 = 8qa^2$, quæ ordinata juxta dimenſiones litteræ a ita quidem ad quatuor dimenſiones attollitur, ut tamen derivativa ſecundi gradus dici debeat. Et denique invento valore quantitatis a, determinabitur valor alterius c per æquationem ſimplicem $2ac = 2p - b^2$.

Eâdem omninò methodo inſtituenda eſt reſolutio æquationum altioris gradus: nimirum æquationis, de qua agitur, aſſumptâ radice ita quidem indeterminatè, ut tot terminis conſtet, quot ſunt dimenſiones æquationis, unâ demptâ, fiat ex radice illâ poteſtas, æquationis gradui correſpondens; hoc eſt quadrato-cubus, ſi æquatio fuerit quinque dimenſionum; cubo-cubus, ſi æquatio ad ſex dimenſiones aſcendat; atque ita deinceps. Deinde in hac poteſtate diſtinguantur à ſe mutuò partes, quæ æquationis terminis ſub alternis correſpondent, & per comparationem iſtarum partium cum terminis illis, habebuntur totidem æquationes, quot requiruntur ad determinandas quantitates, quæ in aſſumptâ æquationis radice continentur.

Quia

Quia verò totum hujus methodi artificium in eo potiſſimùm ſitum eſt, ut in poteſtate, quæ fit ex aſſumptâ radice juxta gradum æquationis, diſtinguantur à ſe mutuò partes, quæ correſpondent æquationis terminis ſubalternis; proinde nolim hìc ſilentio prætèrire præclarum iſtud theorema, quod radix realis cujuſcumque æquationis, quæ ſecundo termino caret, non modò tot terminos comprehendat, quot ſunt dimenſiones æquationis, unâ demptâ, verùm etiam, quod termini illi debeant eſſe radicales ejus gradus, ad quem aſcendit æquatio, & tales quoque, ut id, quod eſt ſub ſigno radicali in termino primo, ſit quadrata radix ejus, quod eſt in ſecundo; cubica illius, quod eſt in tertio; quadrato-quadrata ejus, quod eſt in quarto; atque ita deinceps.

Hujus namque theorematis ope, haud difficilè erit in quacumque poteſtate partes illas à ſe mutuò diſtinguere; nam ejus beneficio facilè apparebit, quæ quantitates ſint rationales, quæve ſecus. Illud unum monitum hìc volo, quod tametſi generaliter termini, ex quibus conſtat radix æquationis, debeant eſſe radicales ejus gradus, ad quem aſcendit æquatio, fieri

fieri tamen poſſit, ut unus, aut plures ex iis ſint radicales gradus inferioris, quia fortè ad illas deprimi poſſunt. Sic ex tribus partibus a, b, c, ex quibus conſtat radix æquationis quarti gradus, nonniſi duæ extremæ a, & c ſunt radicales quadrato-quadratæ; nam media b eſt tantùm radicalis quadrata, quia id, quod continetur ſub ſigno ejus, eſt quadratum illius, quod comprehenditur ſub ſigno in parte priori a.

Atque hac ratione factum, ut in definiendis quantitatibus a, b, c, quibus radix æquationis quarti gradus deſignatur, non a, ſed b primo loco determinaverimus. Si enim definienda prius erat a, quia quantitas iſta eſt radicalis quadrato-quadrata, oriebatur quidem æquatio derivativa tertii gradus, ſed ad duodecim dimenſiones naturâ ſuâ aſcendebat; quum tamen in determinandâ quantitate b, quæ eſt tantùm radicalis quadrata, comperta fuit æquatio, ita quidem derivativa tertii gradus, ut ad ſex tantùm dimenſiones aſcenderet: quæ quidem æquatio eſt ipſiſſima illa, quæ priori æquationes reſolvendi methodo nobis ſeſe obtulit.

Quo

III.

Qua ratione limites radicum cujuscumque æquationis inveniantur, explicatur.

AD generalem æquationum omnium resolutionem spectat etiā inventio limitū, quibus radices cujuscumq; æquationis continentur. Nam etsi hac ratione veri earum radicum valores nobis non innotescant; dubitari tamen nequit, quin eos præter propter assequi liceat. Id igitur obtineri potest methodo superiùs traditâ pro inveniendo limite, quem radices nullæ transgrediantur. Etsi enim beneficio illius methodi videatur dumtaxat inveniri posse limes pro maximâ radice æquationis; quia tamen radix quælibet, augendo, vel minuendo radices omnes, fieri potest minima, deinde minima converti in maximam, facilè erit, eandem methodum ad radices omnes applicare. Interim, quia methodus illa, ob difficilem calculum, non tam videtur ad praxim expedita, quin etiam dumtaxat locum sibi vindicat in æquationibus, quæ nullas habent radices imaginarias, proinde aliâ

aliâ ratione limites, intra quos continentur radices cujuscumque æquationis, invenire docebimus, quæ nimirum, & facilior sit, & ad omnes æquationes se extendat.

Alterius autem hujus methodi summa hæc est: multiplicentur termini æquationis propositæ per numeros dimensionum, quas in illis habet incognita, & ex iis, qui oriuntur, nova formetur æquatio, quæ dividi semper poterit per incognitam, quum ultimus terminus prioris æquationis multiplicari debeat per zero, sive nihilum, utpote qui nullas continet incognitæ dimensiones. Deinde novæ hujus æquationis multiplicentur adhuc termini omnes per numeros dimensionum, quas in ipsis tenet incognita, & ex iis, qui prodeunt, nova itidem formetur æquatio, quæ ob eandem rationem etiam semper dividi poterit per incognitam. Et sic multiplicando continuò per numeros dimensionum terminos subortæ æquationis, novamque per incognitam dividendo, pergatur donec tandem æquatio occurrat linearis.

Omnes istæ æquationes, quæ sic per multiplicationem, divisionemque ex propositâ æquatione deductæ sunt, unà cum

cum ipsâ æquatione propositâ, ostendent nobis limites, intra quos continentur radices æquationis tam positivæ, quàm negativæ: unde non immeritò æquationes limitum poterũt appellari. Qui enim numerus positivus scriptus loco incognitæ in singulis illis æquationibus efficit, ut summa ex terminis cujuscumque æquationis sit ubique positiva; is erit major omni radice positivâ æquationis, adeoque limes, quem nulla ex radicibus positivis transgredietur. Qui verò numerus negativus, scriptus in iisdem æquationibus incognitæ loco, efficit, ut summa terminorum sit positiva in æquationibus, quæ dimensiones habent numero pares, & negativa in iis, quæ dimensiones habent impares numero; is erit major omni radice negativâ æquationis, adeoque limes, quem nulla ex radicibus negativis præteribit.

Exempli loco proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$. Multiplicentur ejus termini omnes per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita x, eritque nova æquatio $5x^5 - 8x^4 - 30x^3 + 60x^2 + 63x = 0$, quæ siquidem dividatur per x, fiet $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$.

Alterius hujus æquationis multiplicentur adhuc termini omnes per numeros dimensionum incognitæ, & divisis prodeuntibus per x, habebitur nova æquatio $20x^3 - 24x^2 - 60x + 60 = 0$, quæ fiet $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$, si quisque terminus dividatur per 4. Ex novâ istâ æquatione per similem terminorum multiplicationem, divisionemque orietur hæc alia $15x^2 - 12x - 15 = 0$, sive $5x^2 - 4x - 5 = 0$; atque ex hac tandem habebitur æquatio linearis $10x - 4 = 0$, hoc est $5x - 2 = 0$.

Itaque ex propositâ æquatione $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ deductæ sunt quatuor aliæ æquationes, quarum prima est $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$, secundâ $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$, tertia $5x^2 - 4x - 5 = 0$, & quarta, sive postrema $5x - 2 = 0$: proindeque ad indagandum limitem, intra quem continentur omnes radices positivæ propositæ æquationis, tentandum est, quinam numerus positivus, scriptus in iis quinque æquationibus loco incognitæ x, efficiat, ut summa terminorum omnium sit ubique positiva. Et quoniam tentando unitatem, fit quidem $5x - 2 = 3$, sed $5x^2 - 4x - 5 = -4$;

 limes

limes quæsitus major erit, quàm 1. Itaque tentandus est numerus aliquis unitate major; quumque tentando binarium, fit in singulis æquationibus summa terminorum positiva, erit numerus 2 major unaquaque radice positivâ.

Ad indagandum verò limitem, intra quem continentur radices omnes negativæ ejusdem æquationis, inquirendum est, quinam numerus negativus, scriptus in iisdem quinque æquationibus loco incognitæ x, efficiat, ut summa terminorum omnium sit positiva in æquationibus, quæ dimensiones habent numero pares, & negativa in iis, quæ dimensiones habent impares numero. Et quoniam nec -1, nec -2 hunc præstat effectum, tento -3. Itaque quia posito -3 loco incognitæ x fit $5x-2=-17$, $5xx-4x-5=52$, $5x^3-6x^2-15x+15=-129$, $5x^4-8x^3-30x^2+60x+63=234$, & $x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=-274$, hoc est summa terminorum in æquationibus parium dimensionum prodit positiva, in æquationibus dimensionum imparium prodit negativa; erit -3 limes, quem nulla ex radicibus negativis præteribit.

præ-

Vides ergo per hanc methodum, limites, intra quos continentur radices tum positivæ, cum negativæ cujuscumque æquationis, ita quidem determinari, ut radices maximas neque etiam unitate excedant. Quocirca si augendo, vel minuendo radices æquationis propositæ, quælibet radix fiat minima, tum ex minimâ convertatur in maximam; jam licebit per hanc methodum cujuscumque radicis talem limitem invenire, ut radice ipsâ sit proximè major, neque eam excedat unitate. Et siquidem idem limes unitate minuatur, habebitur limes alter proximè minor, qui neque etiam unitate à radice ipsâ deficiet. Sic æquationis $x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=0$ maxima radix positiva est inter 1, & 2; maxima verò radix negativa est inter -2, & -3.

Hujus artificii pro limitibus inveniendis ratio pendet à methodo radicum æqualium, superiùs à nobis ostensâ. Si enim æquatio proposita omnes habeat radices æquales, jam aliæ æquationes limitum, quæ exinde derivantur, pro numero suarum dimensionum easdem radices æquales continebunt. Quocirca, si radices illæ fuerint positivæ, omnis numerus positivus,

 qui

qui scriptus in singulis illis æquationibus efficit, ut summa terminorum non evanescat, sed ubiq; prodeat positiva, erit major radicibus illis. At verò, si radices fuerint negativæ, erit iis major omnis numerus negativus, qui scriptus incognitæ loco efficit, ut summa terminorum sit positiva in æquationibus, quæ dimensiones habent numero pares, & negativæ in æquationibus, quæ dimensiones habent impares numero.

Quum ex radicibus æquationis, vel nullæ, vel non omnes sunt æquales, utiq; aliæ æquationes limitũ pro numero suarũ dimensionum radices easdem non continebunt. Sed nihilominus unaquæque ex radicibus ipsarum non excedet æquationis propositæ radicem maximam ejusdem speciei. Unde si maxima ista radix fuerit positiva, quemadmodum omnis numerus positivus eâ major efficit, ut in æquatione propositâ summa terminorum sit positiva, ita idem numerus præstabit hoc idem in aliis æquationibus limitum. Et quemadmodum si maxima illa radix fuerit negativa, omnis numerus negativus eâ major efficit, ut summa terminorum propositæ æquationis sit positiva, si dimensiones habeat numero pares, & nega-

tiva, si dimensiones habeat impares numero; ita idem numerus in aliis æquationibus limitum eundem pariet effectum.

Jam cognitis limitibus, intra quos consistit radix æquationis, licebit per hanc methodum ad veram impossibilem propiùs semper, ac propiùs appropinquare. Sit $x^3 - 2x - 5 = 0$ æquatio proposita, quia limes proximè minor maximæ radicis positivæ est 2, pono $2 + p = x$, & substituto in æquatione loco x hoc ejus valore, nova prodibit æquatio $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, neglectisque terminis $p^3 + 6p^2$, ob parvitatem ipsius p, fiet $10p - 1 = 0$, adeoque assumpta quantitas p ampliùs, quàm unam decimam adæquabit. Unde rursus si decima ista una cum q ponatur æqualis p, & debitis substitutionibus peractis, quantitatis q valor propè veritatem inveniatur, propiùs appropinquabitur ad valorem ipsius p, & consequenter ad valorem incognitæ x.

Potest etiam ad verum valorem incognitæ appropinquari, adhibendo limitem proximè majorem. Sic in eadem æquatione $x^3 - 2x - 5 = 0$ limes proximæ major maximæ radicis positivæ est 3. Itaque pono $3 - p = x$, & substituto

tuto in æquatione loco incognitæ x hoc ejus valore, prodibit hæc alia $p^3 - 9p^2 + 25p - 16 = 0$, sive etiam $25p - 16 = 0$, neglectis terminis $p^3 - 9p^2$ ob parvitatem ipsius p: unde quantitas p circiter duas tertias unitatis adæquabit. Ponatur deinde valor iste unà cum q æqualis p, & siquidem factis debitis substitutionibus, inveniatur eadem methodo valor quantitatis q prope veritatem, appropinquabitur propiùs ad valorem ipsius p, atque adeo ad valorem incognitæ x.

Quoniam autem in hac methodo termini nonnulli negliguntur in inveniendis quantitatibus p, q &c., fieri quandoque potest, ut valor assumptæ quantitatis prodeat negativus, atque adeo tantùm absit, ut ad verum valorem appropinquetur, ut potiùs ab eo discedamus. Id quum accidit, nolim animo concidatis; tum quia fieri potest, ut id, quod antea lucratum est, sit justo majus, atque adeò restituatur per novum valorem negativum; tum etiam quia id, quod in eâ operatione fit jacturæ, potest in operationibus sequentibus lucrari. Instituatur ergo pluries, ac pluries hæc operatio, & ad veram radicem impossibilem propositæ æquationis propiùs semper, ac propiùs appropinquabitur.

Cæterùm hæc methodus inveniendi limites, intra quos consistunt radices æquationis, & ad veros earum valores appropinquandi, locum sibi vindicat tantùm in æquationibus numericis: unde si æquationes propositæ fuerint litterales, necesse est loco litterarum ponere valores numericos, quò iis possit hæc methodus applicari. Interim, quia æquationes litterales excidunt universalitate suâ, quum in iis loco litterarum numeri substituuntur; proinde aliam hìc methodum exhibebimus resolvendi per approximationem æquationes litterales, nimirum ope serierum infinitarum, de quibus fusè actum est libro primo.

IV.

Qua ratione æquationes litterales resolvi possint per series infinitas, ostenditur.

Ut æquationes litterales resolvi possint beneficio serierum infinitarum, assumenda est series aliqua indeterminata, eaque ponenda æqualis incognitæ quantitati, quæ in æquatione continetur. Hu-

Hujus autem ſeriei termini duo quidem debent continere; primo nempè poteſtates unius ex litteris cognitis propoſitæ æquationis, quæ tales eſſe debent, ut earum exponentes progreſſionem conſtituant arithmeticam, ipſique adeò ſeriei termini ratione earundem poteſtatum progreſſionem componant geometricam; & ſecundo litteras quaſdam indeterminatas pro ſuis coefficientibus, quas tamen confuſionis vitandæ gratiæ aſſumere oportet diverſas ab iis, quæ in æquatione propoſitâ continentur.

Hac ratione ſi x fuerit incognita æquationis, & m una ex litteris cognitis, quæ in eadem æquatione continentur, ſupponendum eſt $x = am^0 + bm^1 + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5$ &c., in cujus quidem ſeriei terminis, præter poteſtates litteræ m, quarum exponentes conſtituunt progreſſionem arithmeticam, continentur etiam litteræ a, b, c, d, e, f &c., quas ſuppono diverſas eſſe ab iis, quæ reperiuntur in æquatione propoſitâ. Et notetur hoc loco velim, quod primus ſeriei terminus am^0 idem valeat, ac a; nam m^0 veluti poteſtas, cujus exponens eſt zero, ſive nihil, tantundem valet, ac unitas, quum ſit primus terminus progreſſionis geometricæ m^0, m^1, m^2, m^3 &c.

Aſſumptâ ſerie iſtâ indeterminatâ pro valore incognitæ x, eò deinde res redit, ut coefficientes terminorum ejuſdem ſeriei determinentur, quò ſcilicet & ipſa ſeries evadat determinata. Id autem obtinebitur, ſi ſcribatur in ipsâ æquatione ſeries illa loco incognitæ x, ejus quadratum loco x^2, ejus cubus loco x^3, atque ita deinceps. Quum enim hac ratione prodeat æquatio infinita, cujus termini ſunt diſtinguendi ſecundùm dimenſiones illius litteræ, cujus poteſtates continent termini aſſumptæ ſeriei; ſi utique ponatur quiſque terminus novæ hujus ſeriei æqualis zero, ſive nihilo, habebuntur totidem æquationes ſpeciales, quarum ope facile erit coefficientes illos determinare.

Demus hujus rei exemplū in æquationibus quadratis. Proponatur æquatio litteralis ſecundi gradus $x^2 - 2mx - n^2 = 0$, & oporteat valorem incognitæ x per ſeriem infinitam invenire. Ponatur $x = am^0 + bm^1 + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5$ &c., hoc eſt $x = a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5$ &c. Erit itaque $x^2 = a^2 + 2abm + b^2m^2 + 2acm^2 + 2adm^3 + 2bcm^3 + c^2m^4 + 2bdm^4 + 2aem^4 + 2cdm^5 + 2bem^5 + 2afm^5$ &c.; & $-2mx = -2am - 2bm^2$ —

$- 2cm^3 - 2dm^4 - 2em^5 - 2fm^6$ &c. Unde ſubrogatis valoribus hiſce in æquatione propoſitâ $x^2 - 2mx - n^2 = 0$, diſtinctiſq; terminis novæ æquationis ſecundum dimenſiones litteræ m; habebitur $a^2 - n^2 + 2abm - 2am + b^2m^2 + 2acm^2 - 2bm^2 + 2adm^3 + 2bcm^3 - 2cm^3 + c^2m^4 + 2bdm^4 + 2aem^4 - 2dm^4 + 2cdm^5 + 2bem^5 + 2afm^5 - 2em^5$ &c. $= 0$.

Ponatur unuſquiſque terminus novæ hujus æquationis æqualis zero, ſive nihilo: qua ratione ſequentes habebuntur æquationes $a^2 - n^2 = 0$, $2ab - 2a = 0$, $b^2 + 2ac - 2b = 0$, $2ad + 2bc - 2c = 0$, $c^2 + 2bd + 2ae - 2d = 0$, $2cd + 2be + 2af - 2e = 0$ &c. Et quoniam in primâ iſtarum æquationum habetur $a^2 - n^2 = 0$, erit $a^2 = n^2$, atque adeo $a = n$. Quumque in ſecundâ æquatione habeatur $2ab - 2a = 0$, erit $2ab = 2a$, ac proinde $b = 1$. Unde, quum in tertiâ æquatione ſit $b^2 + 2ac - 2b = 0$, ſubſtitutis in eâ valoribus ipſarum a, & b jam inventis, fiet $2nc - 1 = 0$, hoc eſt $c = \frac{1}{2n}$. Atque ita quoque invenietur in quar-

quartâ æquatione $d = 0$, in quintâ $e = -\frac{1}{8n^3}$, atque ita deinceps. Quocirca aſſumpta ſeries $a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5$ &c. fiet $n + m + \frac{m^2}{2n} - \frac{m^4}{8n^3}$ &c. evaneſcentibus terminis, ubi reperitur m^3, m^5, m^7, &c.

Poſſunt etiam in terminis aſſumptæ ſeriei, poni poteſtates litteræ n; ſed hoc in caſu tollendus eſt primò ex æquatione ſecundus terminus, locoque ejus reſolvenda hæc alia $y^2 - m^2 - n^2 = 0$. Ad quam item reſolvendam, non quidem poni debet $y = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4 + fn^5$ &c., ſed $y = a + bn^2 + cn^4 + dn^6 + en^8 + fn^{10}$ &c., quorum omnium rationes facilè intelliget, quicumque velit contrarii periculum facere. Jam ponendo $y = a + bn^2 + cn^4 + dn^6 + en^8 + fn^{10}$, fiet $y^2 = a^2 + 2abn^2 + b^2n^4 + 2acn^4 + 2adn^6 + 2bcn^6 + 2aen^8 + c^2n^8 + 2bdn^8 + 2afn^{10} + 2ben^{10} + 2cdn^{10}$ &c. Unde loco propoſitæ æquationis $y^2 - m^2 - n^2 = 0$ prodibit hæc alia $a^2 - m^2 + 2abn^2 - n^2 + b^2n^4 + 2acn^4 + 2adn^6$

$2adn^6 + 2bcn^6 + 2aen^8 + c^2n^8 + 2bdn^8 + 2afn^{10} + 2ben^{10} + 2cdn^{10}$ &c.

Ponantur in hac æquatione termini omnes, distinguendi litterâ n, æquales zero, sive nihilo, eritque primò $a^2 - m^2 = 0$, hoc est $a^2 = m^2$, sive etiam $a = m$; secundò $2ab - 1 = 0$, hoc est $2mb = 1$, atque adeo $b = \frac{1}{2m}$; tertiò $b^2 + 2ac = 0$, hoc est $2mc = -\frac{1}{4m^2}$, adeoque $c = -\frac{1}{8m^3}$; quartò $2ad + 2bc = 0$, hoc est $2md = \frac{1}{8m^4}$, ac proinde $d = \frac{1}{16m^5}$; quintò $2ae + c^2 + 2bd = 0$, hoc est $2me = -\frac{5}{64m^6}$, & consequenter $e = -\frac{5}{128m^7}$; atque ita deinceps. Unde series assumpta pro valore incognitæ y mutabitur in hanc aliam $m + \frac{y^2}{2m} - \frac{y^4}{8m^3} + \frac{y^6}{16m^5} - \frac{5y^8}{128m^7}$ &c.: proindeque, quum propter sublatum secundum terminum sit $x = y + m$,

fiet $x = 2m + \frac{y^2}{2m} - \frac{y^4}{8m^3} + \frac{y^6}{16m^5} - \frac{5y^8}{128m^7}$ &c.

Quod si resolvenda proponatur æquatio litteralis secundi gradus $x^2 - 2mx + n^2 = 0$, in qua ultimus terminus afficitur signo $+$; hoc casu necessariò in terminis assumendæ seriei poni debent potestates litteræ n, quum si utique ponerentur in iis potestates litteræ m, primus seriei terminus, omnesq; adeo alii orirentur imaginarii. Unde propositæ æquationis resolutio non aliter beneficio serierum infinitarum potest obtineri, quàm tollendo ex eâ secundum terminum. Itaque tunc demum in terminis seriei poni possunt indistinctè potestates, tum litteræ m, cùm litteræ n, quotiescumque ultimus æquationis terminus afficitur signo $-$. Nec silentio præteribimus, quod sicuti tollendus est secundus terminus ex æquatione, quum potestates litteræ n ponuntur in terminis seriei; ita si secundus ille terminus reperiatur affectus signo $+$, & adhibitis potestatibus litteræ m, nolit analysta eum terminum tollere, primus seriei terminus assumi debeat affectus signo $-$.

Istæ

Istæ eædem difficultates, quæ occurrunt in resolvendis æquationibus litteralibus secundi gradus per series infinitas, quandoque sese offerunt etiam in æquationibus altioris gradus. Unde magnâ opus est solertiâ, quum radix alicujus æquationis per seriem infinitam exprimi debet. Cæterùm, quum resolutio confici potest, quæcumque ex litteris æquationis assumatur pro eâ, quæ distingui debet terminos seriei, præstat illam semper eligere, quæ est omnium minima. Sic enim series erit convergens, ejusque termini fient semper minores, ac minores: qua ratione ad verum valorem incognitæ istius citiùs appropinquabitur, quum satis sit primos seriei terminos in unum colligere.

Hæc methodus resolvendi æquationes per series infinitas, usum habet insignem in æquationibus, quæ relationem exprimunt inter duas quantitates incognitas. Neque enim in hisce æquationibus potest unius incognitæ valor per limites inveniri, quia etsi litteris, quantitates cognitas designantibus, numeri substituantur, adhuc tamen duæ supersunt litteræ, quæ duas illas quantitates incognitas exprimunt. Itaque si valor unius

unius incognitæ per approximationem desideretur, necessariò valor ille per seriem infinitorum numero terminorum exprimi debet: quo casu præstat seriei terminos per incognitam alteram à se mutuò distinguere.

Nescio autem, an operæ pretium sit hìc adnotare, nonnulla adesse problemata, in quibus relatio, quam habet una quantitas ad aliam, non aliter algebraicè definiri potest, quàm per æquationem infinitam. Ut si quæratur, exempli causâ, relatio, quam habet quilibet arcus circuli ad suam tangentem, & vocetur x arcus, y tangens, & a circuli radius, fiet æquatio $x = y - \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} - \frac{y^7}{7a^6}$ &c. Pariterque si scire cupiam relationem, quam quilibet arcus circuli habet ad suum sinum, iisdemque positis vocetur z sinus arcui correspondens; relationem illam non aliter cognoscere potero, quàm per æquationem istam infinitam $x = z + \frac{z^3}{6a^2} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6} + \frac{35z^9}{1152a^8}$ &c.

Quum valor unius incognitæ exprimitur

tur per seriem infinitam, cujus termini incognitâ aliâ distinguuntur à se mutuò, potest vicissim valor alterius hujus incognitæ designari per aliam seriem infinitam, cujus terminos distinguat à se invicem incognita prior. Sic in istâ æquatione $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c. valor incognitæ x designatur per seriem infinitam, cujus termini distinguuntur incognitâ y; sed alia potest infinita series inveniri, cujus terminos distinguat incognita x, & quæ sit valor incognitæ y. Invenitur autem hæc alia series eadem omnino methodo, qua radix cujuscumque æquationis finitæ per seriem infinitam designatur. Et alterius hujus seriei inventio illud est, quod serierum regressum appellant Recentiores.

Dabimus hujus serierum regressus duo exempla generalia, quæ in casibus specialibus possunt velut canones adhiberi. Itaque si fuerit primò $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c., erit vicissim

$$y = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}z^4 + \frac{3a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd - 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5$$

&c. Et secundò si fuerit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9$ &c., erit regressus hujus seriei

$$y = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e}{a^{13}}z^9$$

&c. Hinc si proponatur æquatio specialis $z = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c., per canonem primum erit $y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$ &c. Et similiter si æquatio specialis fuerit $z = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7$ &c., erit per canonem secundum $y = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$ &c.

V.

De radicibus purarum æquationum per approximationem inveniendis.

QUum æquationes, quæ resolvendæ proponuntur, sunt puræ, omnibusque terminis intermediis carent, eò res redit, ut ex puris potestatibus radices extrahantur, quæ siquidem inveniri nequeunt exactè, haberi poterunt per approximationem, vel per fractiones decimales, vel etiã ope logarithmorum. Sed quoniam Vir Clarissimus Edmundus Hallejus, Geometriæ Professor Savilianus, occasione nonnullarum formularum, quas protulit Dominus de Lagney, Mathematicus Parisiensis, pro extrahendâ radice cubicâ, incidit in formularum methodum quandam generalem pro quavis potestate satis concinnam; visum est methodo istâ huic secundo nostræ Algebræ libro coronidem imponere, utpote quæ hujuscemodi nobis exhibet formulas ad verum appropinquantes, ut nec logarithmorum artificio, ne fractionibus decimalibus tam facilè cedant.

Primò itaque afferemus formulas, quas

protulit Dominus de Lagney pro extrahendâ radice cubicâ: nimirum, quod si a^3 sit maximus cubus, qui continetur in numero proposito, & $2b$ sit id, quod remanet, cubo illo subducto, radix cubica totius quantitatis $a^3 + 2b$ sit inter $a + \frac{2ab}{3a^3+2b}$, & $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a}}$: adeo, ut una formularum sit omnino rationalis, altera partim rationalis, partim radicalis. Ex his autem formulis aliquantò propiùs ad scopum collimat posterior, quæ peccat in excessu, quàm prior, quæ peccat in defectu: licèt ob rationalitatem in praxi ista sit longè facilior, ac expedita, quàm illa.

Utramque harum formularum ex ipsâ cubi genesi mirè deduxit Hallejus. Posito enim, quod $a + x$ sit radix cubica totius quantitatis $a^3 + 2b$, erit $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + 2b$, hoc est $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$. Et quoniam a^3 ex hypothesi est maximus cubus, qui continetur in $a^3 + 2b$, erit x multò minor, quàm a; proindeque in æquatione $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$ respectu ipsius $3a^2x$ negligi potest, non modò terminus x^3, verùm

rùm etiam terminus $3ax^2$. Jam autem neglecto utroque istorum terminorum, habetur $3a^2x = 2b$, hoc est $x = \frac{2b}{3a^2}$; neglecto verò dumtaxat termino x^3 habetur $3a^2x + 3ax^2 = 2b$, hoc est $x = \frac{2b}{3a^2 + 3ax}$. Itaque, si in denominatore hujus fractionis loco x ponatur alter ille valor, fiet $x = \frac{2ab}{3a^3 + 2b}$; adeoque radix cubica quæsita, designata per $a + x$, erit $a + \frac{2ab}{3a^3 + 2b}$.

Ex eodem fonte derivatur quoque formula altera partim rationalis, partim irrationalis. Iisdem namque positis, invenietur, ut antea, $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$: proindeque neglecto, ob parvitatem, termino x^3, erit $3a^2x + 3ax^2 = 2b$, hoc est $x^2 + ax = \frac{2b}{3a}$. Quare addito ad utramque partem hujus æquationis quadrato, quod fit ex semisse ipsius a, & ex-

tractâ hinc inde quadratâ radice, invenietur $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a}}$. Unde radix cubica ejusdem quantitatis $a^3 + 2b$, designata per $a + x$, erit $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a}}$, quæ quidem propiùs ad scopum collimabit, quum in hac operatione dumtaxat terminus x^3 negligatur.

Jam eodem hoc artificio exhibuit idem Hallejus binas formulas pro unaquaque potestate. Ita si de quadratâ radice agatur, ponaturque a^2 esse maximum quadratum, quod continetur in numero proposito, & $2b$ id, quod remanet, quadrato illo subducto, erit quadrata radix totius quantitatis $a^2 + 2b$ inter $a + \frac{2ab}{2a^2 + b}$, & $\sqrt{a^2 + 2b}$. Posito enim, quod $a + x$ sit radix quadrata quæsita, erit $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + 2b$, hoc est $2ax + x^2 = 2b$: proindeque neglecto ob parvitatem termino x^2, fiet $2ax = 2b$, hoc est $x = \frac{b}{a}$. Jam verò si in æquatione illâ nul-

nullus terminus negligatur, habetur $x = \frac{2b}{2a + x}$. Itaque, si in denominatore hujus fractionis loco x ponatur alter iste valor, fiet $x = \frac{2ab}{2a^2 + b}$; atque adeò radix quadrata quæsita, designata per $a + x$, erit $a + \frac{2ab}{2a^2 + b}$.

Quantum ad alteram formulam ejusdem quadratæ radicis, derivatur ea ex resolutione æquationis inventæ $2ax + x^2 = 2b$. Si enim ad ejus utramque partem apponatur a^2, fiet $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + 2b$; quare extractâ hinc inde quadratâ radice, invenietur $a + x = \sqrt{a^2 + 2b}$. Unde patet, alteram istam formulam non modò respectu prioris aliquantò propiùs ad scopum collimare, verùm etiam quæsitæ radicis verum valorem impossibilem continere; quandoquidem in ejus inventione nullus terminus negligitur: id, quod exinde quoq; liquet, quia $\sqrt{a^2 + 2b}$ non est aliud, quàm quadrata radix propositæ quantitatis $a^2 + 2b$.

Si-

Similiter si agatur de radice quadrato-quadratâ, ponaturque a^4 esse maximum quadrato-quadratum, quod continetur in numero proposito, & $2b$ id, quod relinquitur per illius quadrato-quadrati subductionem; erit radix quadrato-quadrata totius quantitatis $a^4 + 2b$ inter $a + \frac{2ab}{4a^4 + 3b}$, & $\frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$. Posito enim, quod $a + x$ sit quæsita radix quadrato-quadrata, erit $a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = a^4 + 2b$, hoc est $4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = 2b$: proindeque neglectis tribus terminis $6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$ ob suam parvitatem, fiet $4a^3x = 2b$, hoc est $x = \frac{b}{2a^3}$. Jam verò, si negliguntur duo postremi termini dumtaxat, habetur $4a^3x + 6a^2x^2 = 2b$, hoc est $x = \frac{2b}{4a^3 + 6a^2x}$. Itaque si in denominatore hujus fractionis ponatur loco x alter ille valor, fiet $x = \frac{2ab}{4a^4 + 3b}$; adeoque radix

qua-

quadrato-quadrata, designata per $a + x$, erit $a + \frac{2ab}{4a^4 + 3b}$.

Et quoniam habetur $4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = 2b$, neglectis rursus duobus terminis $4ax^3 + x^4$, remanebit $4a^3x + 6a^2x^2 = 2b$, adeoque divisâ utraque parte æquationis per $6a^2$, fiet $\frac{2}{3}ax + x^2 = \frac{2b}{6a^2}$. Unde si ad hujus utramque partem addatur $\frac{1}{9}a^2$, & deinde utrinque quadrata radix extrahatur, habebitur $\frac{1}{3}a + x = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$: proindeque radix quadrato-quadrata, designata per $a + x$, erit $\frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$, quæ quidem propiùs ad verum accedet, quàm formula prior rationalis; quandoquidem in ejus inventione duo tantùm termini negliguntur.

Iisdem vestigiis insistentes inveniemus, quod

quod si a^5 sit maximus quadrato-cubus, qui continetur in quantitate propositâ, & $2b$ sit id, quod remanet post illius quadrato-cubi subductionem; radix totius quantitatis $\overline{a^5 + 2b}$ sit inter $a + \frac{2ab}{5a^5 + 4b}$, & $\frac{3}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{2b}{10a^3}}$. Eademque ratione pergere licebit in infinitum, & pro unaquaque altiorum potestatum binas semper formulas cudere, unam omninò rationalem, quæ peccet in defectu, alteram partim rationalem, partim radicalem, quæ peccet in excessu, & aliquãtò propiùs collimet ad verum. Istæ autem formulæ eo ordine, quo ad suas potestates referuntur, ita se habent, si utique fuerit $a^m + 2b$ quantitas proposita, & a^m sit maxima potestas ejus ordinis, de quo agitur, quæ in quantitate illâ continetur.

$a +$

$$a + \frac{2ab}{2a^2 + 1b} \qquad \frac{0}{1}a + \sqrt{\frac{1}{1}a^2 + \frac{2b}{1a^0}}$$

$$a + \frac{2ab}{3a^3 + 2b} \qquad \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{2b}{3a^1}}$$

$$a + \frac{2ab}{4a^4 + 3b} \qquad \frac{2}{3}a + \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{2b}{6a^2}}$$

$$a + \frac{2ab}{5a^5 + 4b} \qquad \frac{3}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{2b}{10a^3}}$$

$$a + \frac{2ab}{6a^6 + 5b} \qquad \frac{4}{5}a + \sqrt{\frac{1}{25}a^2 + \frac{2b}{15a^4}}$$

Unde liquet, eas miro quidem ordine progredi in infinitum, neque adeo necesse sit, tradito artificio singulas invenire. Nam quantùm ad formulas omninò rationales, eæ duabus partibus constant, quarum una est radix maximæ potestatis, quæ in quantitate propositâ continetur; altera est fractio, cujus numerator est eadem radix ducta in reliquam partem ejusdem quantitatis; denominator verò est

est ipsa maxima potestas toties sumpta, quotus est ejus exponens, unà cum dimidio dictæ reliquæ partis toties etiam accepto, quotus est idem exponens, unitate minutus.

Quantum verò ad formulas partim rationales, partim radicales, earum constitutio hæc est: nempe primò pars cujusque rationalis est quantitas, quæ ad radicem maximæ potestatis eam servat rationem, quam habet ejus exponens, duplici unitate minutus, ad eundem exponentem, unâ tantùm unitate multatum. Et secundò pars radicalis est quadrata radix, extrahenda ex binomio, cujus unus terminus est quadratum, quod fit ex eâ parte radicis maximæ potestatis, quam designat ejus exponens, unitate minutus; terminus verò alter est fractio, cujus numerator est pars reliqua propositæ quantitatis, denominator verò est radix maximæ potestatis ad potestatem aliâ duplici dimensione minorem evecta, & toties sumpta, quotus est numerus, qui oritur ex collectione continuâ numerorum naturalium ab unitate usque ad exponentem potestatis, de qua agitur, exclusivè.

Cæterùm si quantitas proposita fuerit a^m

$a^m - 2b$, ita ut a^m sit poteſtas non quidem proximè minor, ſed proximè major ejus ordinis, de quo agitur; eo caſu, ut illæ formulæ exhibere poſſint radicem quæſitam, neceſſe eſt in iis mutare ſigna terminis omnibus, ubi quantitas b reperitur. Qua ratione radix cubica quantitatis $a^3 - 2b$ erit inter $a - \frac{2b}{3a^3 - 2b}$, & $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{2b}{3a}}$. Præſtat autem quandoque, in eliciendis radicibus ex poteſtatibus puris, uti potiùs formulis, quæ referuntur ad $a^m - 2b$, quàm iis, quæ pertinent ad $a^m\ 2b$: nimirum ſi ad quantitatem propoſitam magis accedat poteſtas proximè major, quàm poteſtas proximè minor ejus ordinis, de quo agitur.

FINIS LIBRI SECUNDI.

Er-

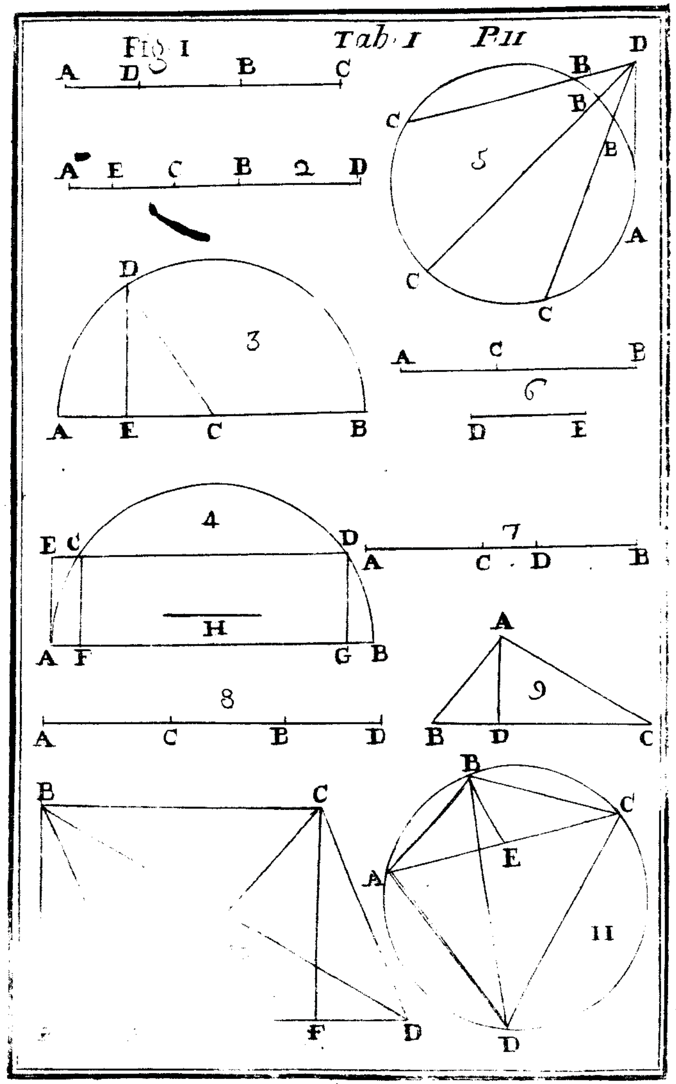
Errata graviora, quæ in hoc ſecundo irrepſerunt libro, ſic corrigat Lector Benevolus.

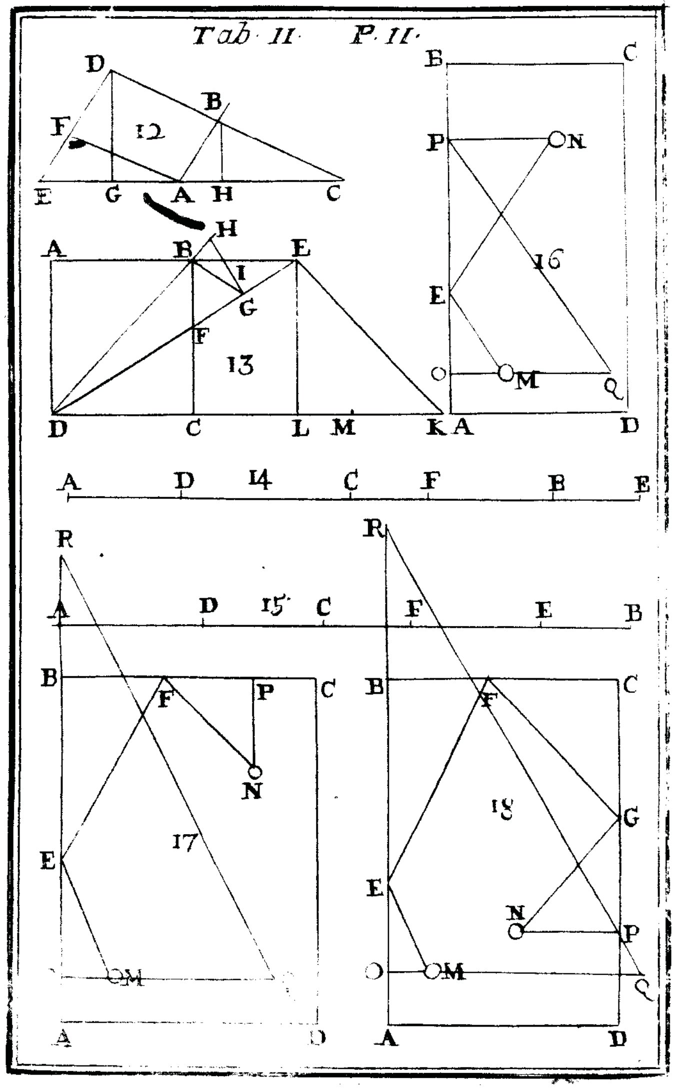
PAg. 18. l. 19. pro c lege b. Pag. 22. l. 4. pro AB lege AC. Pag. ead. l. 16. pro CB lege CD. Pag. 23. l. 6. pro $a - b$ lege $b - a$. Pag. 26. l. 14. pro x lege y. Pag. ead. l. 15. pro $a - y$ lege $a - x$. Pag. 62. l. 22. pro AB lege AD. Pag. 67. l. 17. dele x^2. Pag. 79. l. 4. pro GK lege CK. Pag. 89. l. 11. pro $\frac{2bmn + cnm - cm^2}{m + n}$ lege $\frac{2bmn + cn^2 - cmn}{m + n}$. Pag. 101. l. 4. pro AB lege AF. Pag. 174. l. 1. pro *majorem* lege *minorem*. Pag. 175. l. 12. pro *binario* lege *ternario*. Pag. 197. l. 19. pro $-a^2bc$ lege $+a^2bc$. Pag. 212. l. 14. pro -49 lege -61. Pag. ead. l. 23. pro $-3x$ lege $-4x$. Pag. 242. l. 25. pro b^2d l. b^2a. Pag. 253. l. 7. poſt *componi* addatur *poſſe*. Pag. 272. l. 8. poſt cx^4. addatur dx^4. Pag. 282. l. 17. pro $am^3 = 27$ lege $am^3 = 54$. Pag. ead. l. 22. pro 27. lege 54. Pag. 285. l. 16. pro a lege n. Pag. 296. l. 9. pro x^2 lege y^2. Pag. 317. l. 8. pro $-3q$ lege $-2q$. Pag. 330. pro $-3a^2x^2$ lege $-3a^2x$. Pag. 337. l. 16. pro $-q$ lege $-2q$. Pag. 346. l. 24. pro $3yz^3 = z^3$ lege $3yz^2 - z^3$. Pag. 355. l. 20.

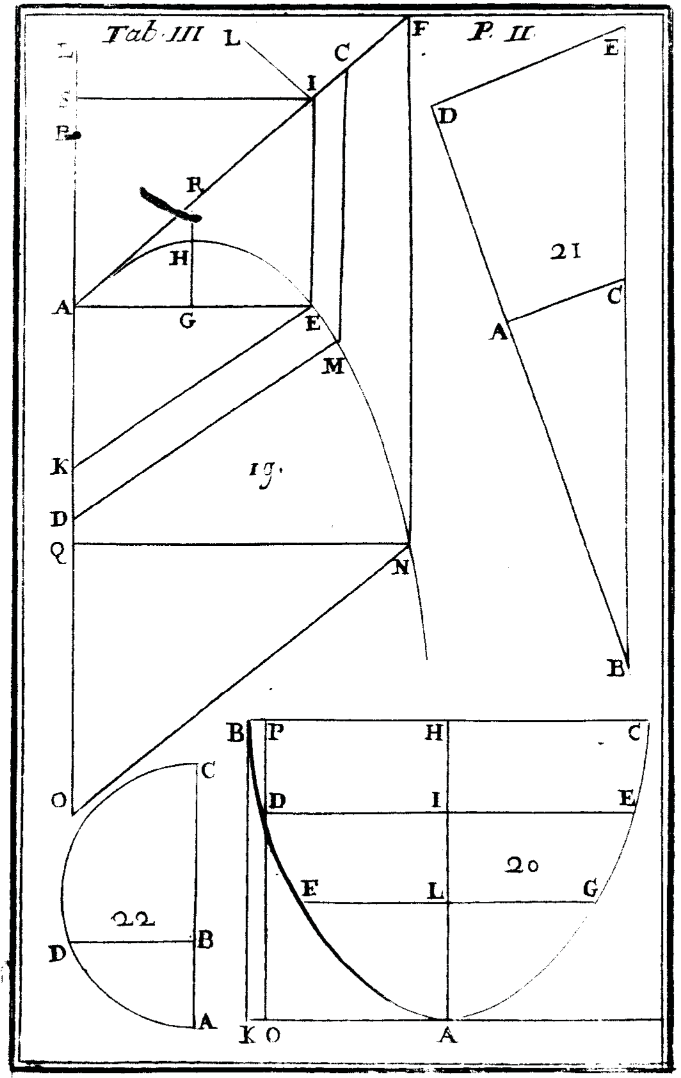
l.20.pro AB lege AD. Pag.403.l.20.& 22. pro y^2 lege x^2. Pag.ead.lin.25.pro $- ab\surd$ lege $- \surd ab$. Pag.405.l.6.pro y^2 lege x^2. Pag.406.l.21.& seqq. pro 361. lege 388. Pag. 413. l. 42. pro $-$ 48. lege $+$ 48.

MONITUM.

Pag.321, ubi radix realis æquationis $x^3 + 3px - 2q = 0$ invenienda proponitur, fingendo $x = y - z$, instituta est æqualitas inter $z^3 - y^3$, & $2q$, quum tamen instituenda erat inter $z^3 - y^3$, & $-2q$. Hinc verò factum, ut totus qui sequitur, calculus sit erroneus, qui tamen corrigetur, si termini omnes, in quibus reperitur $2q$, contrariis signis afficiantur.




Tab. II. P. II.
12
13
14
15
16
17
18


Tab. III P. II.
19
20
21
22

Tab. IV. P II