And. Maillar Scul.

ELEMENTA
ALGEBRÆ
PRO NOVIS TYRONIBUS
tumultuario ſtudio
CONCINNATA,
AUCTORE
NICOLAO DE MARTINO
In Illuſtri Lyceo Neapolitano
MATHEMATUM PROFESSORE
TOMUS I.

Continens librum primum de calculo litterali, ſive ſpecioſo.

NEAPOLI MDCCXXV.
Ex Typographia Felicis Moſca,
EXPENSIS BERNARDINI GESSARI
Superioribus annuentibus.

ILLUSTR.^{MO}, ET NOBILISS.^{MO} VIRO

DOMINO
D. ALEXANDRO
RICCARDO,

In Supremo Cæsaris Consilio Regenti, & Fisci Patrono.

MOS jamdudum invaluit apud Bibliopolas, ut quum bono publico opus aliquod à Celeberrimo quodam Auctore compositum, in lucem ab ipsis esset emittendum, illud submitterent, ac nuncuparent nomini alicujus, qui tum supremâ aliquâ dignitate præfulgeat, tum in Republicâ litterariâ summam auctoritatem obtineat. Horum utrumque, quàm raró accidat, ut in uno, eodemque Viro consistere videatur, explorata profectò res est. Qui enim litteris, iisque gravioribus dant operam, aliàs ipsorum mente avocatâ, vix in publicis negotiis obeundis, & ad Rempublicam administrandam videntur accomodati. Qui verò dignitate, honoribusq; precellunt, fastu sublimes, arrogantesque sibi, suisque Imaginibus indignum putant litteras profiteri. Tu autem, Vir Illustrissime, communi omnium suffragio, unus

unus inter paucissimos es, in quo egregiâ emulatione utrumque fulget, ac splendet. Tibi enim ita in primis litteræ sunt charæ, ut dum ab Augustissimo nostro Principe aliis subinde, atque aliis dignitatibus identidem insigniris, earum non modò non oblivisceris, sed eas ita foves, ac excolis, ut earundem studiosis materiam pariter, & stimulos subdas. Tuque etiam talem mentis aciem, & judicium acerrimum à Naturâ sortitus es, ut dum optimarum litterarum studio seriò operam navas, graviora Invictissimi nostri Principis negotia pari diligentiâ geris, ac tractas. Quemadmodum verò in his obeundis non privatæ ambitioni, sed publicis utilitatibus servis,

vis; nec aliam laborum tuorum metam tibi proponis, quàm ipſius Principis famam, & gloriam. Ita in litteris excolendis nihil ad fumum, & oſtentationem, ſed omnia ad veritatem refers; nec alium exinde fructum colligere ſtudes, quàm plenam, ſolidamque veritatis cognitionem, quæ adeo tibi cordi eſt, ut non verearis maxima quæque pericula ſubire, quò eam defenderes, ac vindicares adverſus quoſcumque, eandem viribus omnibus ſupprimere ſtudentes. Neque enim vana, & ſuperficiaria eſt ea, quam profiteris litteratura, quippe qui unà cum litteris, quas vocant humanis, & multiplici linguarum diverſitate, quas inter potiſſimum eminent hetruſca, la-

tina,

tina, græca, & hæbraica, conjungis etiam ſtudium tum Philoſophiæ, aliarumque ſcientiarum, quæ huic ancillantur; tum Theologiæ, aliarumq; diſciplinarum, quæ ad hanc referuntur; tum denique Artis illius, quæ bonum, & æquum reſpiciens, Juriſprudentia communiter audit. Hæc igitur, quum ita ſint, non alium te aptiorem potueram invenire, ſub cujus auſpiciis nova iſta Algebræ Elementa poſſent, citra omnem invidiæ morſum, tutò, feliciterque prodire. Nec verebor rem tibi ingratam facturum, quod ea nomini tuo nuncupata in lucem emittam; tum propter eorum argumentum, quod magnitudine, & dignitate ſuâ ſatis commendari non poteſt; tum pro-

pter

pter Auctorem ipsum, quem eximia ejus in sublimioribus hisce studiis peritia omni fecit laude majorem. Hoc unum etiam, atque etiam abs te rogo, ut quod tibi in præsentiarum offerro, velut perpetuum meæ erga te observantiæ τεκμήριον velim accipias; quandoquidem ad id non aliud me adegit, quàm ut singulis testatum facerem, quantâ cum veneratione sim.

Tui

Addictissimus Famulus
Bernardinus Gessari.

AD
LECTOREM.

QUæ me ad hoc opus conscribendum potissimum impulerint, visum est paucis hic tibi, Benevole Lector, aperire. Parabatur Typis Neapolitanis nova editio Elementorum Arithmeticæ Patris Tacqueti. Hæc ut accuratior prodiret, ac emendatior, rogavit me Bibliopola, ut ei, quantum possem, operam darem; sed onus mihi etiam adjunxit, ut si quid eidem adjiciendum existimarem, illud adjicere non gravarer. Hinc prima hujus operis origo nata. Quum enim animo mecum re-

vol-

volverem, ac sedulò cogitarem, quid novæ illi editioni adjungere possem, quod studiosæ Juventuti aliquid utilitatis afferret, & ab ea expeteretur; nihil utiliùs, nihil optabilius sese obtulit, quàm ut brevi quodam specimine Algebræ numerosæ editionem illam ornarem. Jam, quum ad specimen illud conscribendum me accinxerim, statim novi aliquid ampliùs me confecturum, quàm optabat Bibliopola. Neque enim aliud hìc expetebat, quàm ut aliquid adjicerem, quod viginti, aut triginta paginis posset includi, ne libri moles, ac volumen admodum excresceret. Unde, quia specimen, quod Animo revolvebam, multò plures, quàm triginta paginas exigebat, loco ejus opusculum de permutationibus, & combinationibus composui, eoque passus sum, ut meo nomine nova illa editio auctior prodiret. Interim Bibliopola, occasionem nactus, à rogando non destitit, ut specimen Algebræ numerosæ, quod mente conceptum habebam, conscribere non gravarer, quo nempe posset illud separatim in lucem emitti. Hinc itaque factum, ut non Numerosæ tantùm, sed totius Algebricæ Scientiæ Elementa componere fuerim aggressus. Nam, quum separatim opus in lucem esset emittendum, visum fuit non abs re futurum Algebram universam eo in opere comprehendere. Hanc porro provinciam eò lubentiùs suscepi, quia nemo hactenus, quem sciam, Scientiæ hujus propemodum divinæ Elementa sic conscribere curavit, ut ad om-

omnes laboris sui fructum aliquem optaverit pervenire. Cui & alia accessit quoque ratio, eaque fortassis praecipua, scilicet, ut Tyronibus nostris mathematicis consulerem, qui inopiâ librorum parùm, aut nihil in hisce studiis proficiebant. Habet quippe haec nostra Civitas, non secùs, ac Anglia, Gallia, vel Germania, suos, quos ostentat Christophoros, Galitias, Cyrillos, & Arianos; nec iidem desunt inter Patricios. Sed tantis Ducibus vix unus, aut alter inter Juvenes ad summae hujus disciplinae fastigium pervenire visus est; non quidem culpâ illorum, qui tantam in docendo facilitatem ostendunt, quantam in agendo humanitatem; nec culpâ ipsius Juventutis, quae ut ad haec studia parata, sic ad eadem apta

nata

nata deprehenditur; sed unicè, quia non adeo facile erat studiosis, libros ad haec studia collimantes sibi comparare. Tantum itaque abest, ut in his concinnandis elementis, iisdemque in lucem evulgandis alicujus gloriolae cupido me adduxerit, ut libenter ab iis me abstinuissem, nisi haec omnia illud mihi suasissent. Caeterùm si noverim, Candide Lector, non ingrato animo te suscepturum hoc qualecumque meum opus, alia & fortasse majora non gravabor in lucem emittere. Jam enim triennium est, & quod excurrit, ex quo opus composui, à pluribus quidem per partes tentatum, sed à nemine, quem sciam, omnibus suis numeris absolutum, nimirum tractatum integrum de naturâ, & proprietatibus curva-

rum.

rum. Etsi enim Recentiores longe diligentiùs, quàm Veteres, excoluerint partem istam Geometriæ, quæ de lineis curvis edisserit; ei tamen id incommodi accidit, quod quæcumque ad eam pertinent, hinc inde apud varios Auctores, diversis methodis tradita, sparsa reperiantur. Itaque, ut pars ista Geometriæ pervia, & cuique comparabilis fieret, eam ex integro tractare suscepi: unde opus composui, in quatuor libros diremptum, quorum primus agit de curvis geometricis, secundus de curvis mechanicis, tertius de calculo differentiali, & quartus, sive postremus de calculo integrali. Suscepi etiam tractatum alium physicomathematicum conscribere, in quo motus corporum omnium sic expendere mihi proposui, ut quæcumque à Galilæo usque ad nostra tempora circà hanc materiam excogitata sunt, ex iisdem principiis essent ostensa, ac derivata, cujus equidem tractatus, nondum ad umbilicum perducti, specimina aliquot sub nomine Staticæ, Hydrostaticæ, & Aerostaticæ brevi lucem adspicient; quum jam primæ eorum paginæ sub prælo reperiantur. Neque verò hìc meorum laborum finis erit: Adeo enim Mathematicarum Scientiarum cognitio me delectat, tantamque ex iis capio voluptatem, ut etsi præter meum votum aliis quoque studiis, ab iis longè dissitis, operam dare coactus sim, Mathesi tamen numquam supersedeam, sed in eâ excolendâ quotidiè aliquid temporis suffurabor. Vale.

Omne, quod de re bonâ dilucidè dicitur, mihi præclarè dici videtur; istiusmodi autem res dicere ornatè velle, puerile est; planè autem, & perspicuè expedire posse, docti, & intelligentis Viri.

Cic. de Finib. bon. & mal. lib. 3. cap. 5.

EMINENTISSIMO SIGNORE

Felice Mosca supplicando espone à V. Em. come desidera dare alle stampe un'Opera Matematica intitolata: *Elementa Algebræ pro novis Tyronibus tumultuario studio concinnata*; composta dal Sig. Nicolò di Martino, Publico Lettore di Matematica in questa Università di Napoli. La supplica per tanto à commettere la censura di essa à chi meglio li parerà, e l'haverà à grazia, ut Deus &c.

Adm. Rev. D. Cajetanus de Mari revideat, & referat. Die 23. Jun. 1725.

ANTONIUS CAN. CASTELLI VIC. GEN.

D. Thomas Faenza pro Reverendiss. Can. Dep.

EMINENTISSIME DOMINE

E*Lementa Algebræ pro novis Tyronibus tumultuario studio concinnata* à D. Nicolao de Martino in Regio hujus Urbis Archigymnasio Mathematum Professore, jussu Eminentiæ Vestræ sedulis cum perlustraverim oculis, nihil non modò occurrit, quod aut fidei divinæ, aut moribus christianis possit officere; verùm etiam magnâ animi voluptate facultatis ejus utilissimas æquè, ac difficillimas præceptiones clarâ adeò, & distinctâ suspexi methodo enucleatas, ut nullo ferè sit cuique negotio integrum, ea inde colligere, quibus vel aditum sibi, gradumque jaciat ad penitiores illius passim subeundos recessus, latebrasque adstrusiores, vel in his ipsis, si fortè jam appulerit, quodammodò spatiari: quapropter operæ pretium duxerim, publico bono in lucem edi, si Em.V. annuerit. Datum Neap. v. Kal. Jul. A. christianæ æræ MDCCXXV.

Em. V.

Humillimus, & obsequentiss. famulus
Cajetanus Mari.

Attenta supradicta relatione Rever. D. Revisoris, Imprimatur. Neap. 29 Julii 1725.

ANTONIUS CAN. CASTELLI VIC. GEN.
D. Petrus Marcus Giptius Can. Dep.

EMI-

EMINENTISSIMO SIGNORE

F Elice Mosca supplicando espone à V. Em. come desidera dare alle stampe un'Opera Matematica, intitolata: *Elementa Algebræ pro novis Tyronibus tumultuario studio concinnata*, composta da Nicolò di Martino, Publico Lettore di Matematica in questa Università di Napoli. La supplica pertanto à commettere la censura di essa à chi meglio li parerà, e l'averà à grazia, ut Deus &c.

Mag. A. M. D. Nicolaus Cyrillus videat, & in scriptis referat.

MAZZACCARA REG.	ALVAREZ REG.
GIOVENE REG.	PISACANE REG.

Provisum per S. Em. 4. Julii 1725.

Mastellonus.

EMI-

EMINENTISSIME DOMINE

JUſſu Em. Tuæ legi Librum, cui Titulus: *Elementa Algebræ pro novis Tyronibus tumultuario ſtudio concinnata à Nicolao de Martino in Regiâ Univerſitate Neapolitanâ Matheſeos Profeſſore*: atque in eo nil prorſus inveni, quod Regiæ Juriſdictioni adverſetur. Imò ſummam admiratus ſum Juvenis in ſalebroſâ materiâ complanandâ diligentiam, & [illegible]: ut Algebræ Elementa haud *tumultuario ſtudio concinnata*, ſed potiùs exactiſſimâ limâ expolita, & ad Cleanthis lucernam elaborata videantur: atque adeò non ſolùm ad Tironum manuductionem, ſed etiam ad provectiorum Geometrarum admirationem excitandam accommodata. Publici igitur juris quàm citiſſimè facienda eſſe cenſeo, ſi Eminentiæ Tuæ nutus non abſuerit. Neapoli VIII. Calend. Sextil. MDCCXXV.

Em. Tuæ

Addictiſſimus Famulus

Nicolaus Cyrillus Profeſſor Regius.

Viſa relatione imprimatur, & in publicatione ſervetur Regia Pragmatica.

MAZZACCARA REG. ALVAREZ REG.

GIOVENE REG. PISACANE REG.

Proviſum per S. Em. 30. Julii 1725.

Maſtellonus.

Er-

Errata graviora, quæ in hoc primo irrepſerunt libro, ſic corrigat Lector Benevolus.

IN Præfatione pag. v. lin. 2. pro *quam* leg. *quæ*. In ipſo verò Opere pag. 62. lin. 14. pro *indicem* leg. *multiplicem*. Pag. 144. lin. 13. pro $a^3 - b^3$ leg. $a^3 + b^3$. Pag. 146. lin. 19. pro $c - 3\sqrt[3]{abc}$ leg. $c + 3\sqrt[3]{abc}$. Pag. 192. in fine pro $\sqrt{a + c + 2\sqrt{ac}}$ leg. $\sqrt{a^2 + c + 2\sqrt{a^2c}}$. Pag. 226. lin. 18. pro $\sqrt{-15}$. leg. $\sqrt{15}$. Pag. 235. lin. 20. pro $\sqrt{-5} - \sqrt{3}$ leg. $\sqrt{-5} - \sqrt{-3}$. Pag. 322. lin. 11. pro 3 *ad* 4 leg. 4 *ad* 3. Pag. 325. lin. 9. pro *dupla* leg. *ſubdupla*. Pag. 329. lin. 4. pro $\frac{1}{4}$ leg. $\frac{1}{2}$. Pag. 360. in fine pro $\frac{a^{-2}}{bc}$ leg. $\frac{a^{-1}}{bc}$. Pag. 362. lin. 14. pro $\frac{}{ac}$ leg. $\frac{}{a^2}$.

MONITUM I.

IN fractionibus, quæ ſunt exponentes poteſtatum imperfectarum, omiſſa eſt datâ operâ lineola, quæ inter numeratorem, & denominatorem apponi ſolet. Eam itaque calamo ſuppleat Lector Benenevolus, priusquam operis lectionem aggrediatur.

MONITUM II.

Unumquemque librum horum Elementorum in Epitomen contractum Præfationis loco exhibere visum est, ut Tyrones semel opere perlecto possint Præfationes illas adire, si aliquid ipsis è memoriâ exciderit, quod in hisce studiis non rarò solet evenire.

PRÆFATIO

Libri Primi Epitomem exhibens.

Quæ vulgò Algebra dicitur, eadem græcè Analysis appellatur, velut Ars, quæ in eo, quod quæritur, inveniendo, non synthesi, sive compositione, sed analysi, sive resolutione procedit. Est autem Algebra nomen ab Arabibus derivatum, quod secundum vim suam idem audit, ac Ars restituendi, sive reintegrandi. Nec equidem à munere hujus Artis isthæc abhorret denominatio. Est enim ipsius hoc munus præcipuum, ut postquam ignota quantitas per varias operationes sic fuerit deformata, ut æqualis notæ cuidam quantitati prodierit, debeat ex æqualitate istâ verus illius quantitatis valor excerpi. Unde, quæ primò deformatur quantitas, eadem deinde reintegratur, ac velut in justum ordinem restituitur.

Hanc porrò Artem vocamus Algebram arabico nomine, quia tametsi apud alias quoque Nationes fuerit exculta, eam tamen ab Arabū manibus propriè mutuati sumus, à quibus etiam accepimus maximam partem græcæ litteraturæ. Neque enim latinas, quas habemus, versiones Euclidis, Apollonii, Ptolomæi, aliorumque Græcorum, putandum est ex græcis originalibus fuisse primò deproptas. Nam ad nostras manus pervenisse priùs eorum versiones arabicas, quàm ipsa Græcorum originalia; notius est, quàm ut possit inficiari.

Algebrâ in Europam delatâ, Itali primum eam excoluerunt, nec ullus, opinor, erit, qui primatum istum Nobis audet disputare. Jam inter Italos primus, qui de Algebra scripsit, est Lucas Pacciolus, dictus etiam Lucas de Burgo. Et quamquam memoret ille Leonarduīn Pisanum, aliosque se antiquiores, à quibus didicerat; eorum tamen opera Typis edita non habentur. Pacciolum secutus est Stiphelius, aliique ab ipso citati. Sed omnes isti

isti iis tantùm operam collocarunt, quibus Arabes Algebram perduxerunt.

Qui Algebram evehere longiùs inter Italos studuit, is omni dubio procul est Nicolaus Tartalea. Etsi enim resolutionem æquationum cubicarum sub nomine Ludovici Ferrariensis erudito orbi impertiverit Cardanus; eam tamen Tartaleæ tribuendam esse, jam norunt Nasutiores. Tartaleam excipit Bombellius, qui quum docuerit, qua ratione æquationes quarti gradus ope alterius cubicæ in duas quadratas dividi queant, methodum simul suppeditavit, qua resolutio æquationum quarti gradus possit obtineri.

Dum hisce Itali, Arabum vestigiis insistentes, incumbebant, in lucem prodiit Diophantus Alexandrinus, antiquioribus quidem Græcis non accensendus, sed neque etiam adeo ab iis remotus, quemadmodum nonnulli suspicantur. Opus istud Diophanteum, etsi non integrum, sat quidem ostendit, quousque à Græcis perducta fuerit Algebra. Quumque voces à Diophanto usurpatæ diversæ sint ab iis, quibus Arabes utebantur; conjicere licet, hos aliunde, quàm à Diophanto, Algebram accepisse suam: eoque magis, quod multò plura in Diophanphanto reperiantur, quàm quæ Arabes Italis nostris tradiderunt.

Horum omnium Algebra erat quidem figurata, sive symbolica, sed vix alias, quàm quantitates ignotas, solebant certis notis, sive symbolis designare. Datas enim, sive cognitas quantitates numeris tantùm exprimebant. Unde saltem ex hoc capite numerosa adhuc ipsorum Algebra dici merebatur. Sub finem decimisexti sæculi novam in Galliâ protulit Algebræ speciem Franciscus Vieta, quæ scilicet alphabeti litteris quantitates omnes, sive datas, sive incognitas designabat: ex quo factum, ut Algebra litteralis, sive speciosa diceretur.

Vietam secuti sunt Angli, quos inter duo potissimùm eminent, Oughtredus, & Harriotus. Ambo Algebram, à Vieta excogitatam, insigniter promoverunt; sed potissimùm in id operam dedit Harriotus, qui primus omnium docuit æquationes altioris gradus cõponi ex simplicioribus inter se multiplicatis, adeoque in easdem illas posse resolvi. Magnum sanè principium, unde natura, ac proprietates æquationum omnium, velut ex fonte uberrimo, prono alveo profluunt.

Etsi autem Algebra Vietea, utpote litteralis, ac speciosa, universalior esset eâ, quam antea obtinebat; reverâ tamen nihil aliud erat, quàm ipsa vetus Algebra, alphabeti litteris administrata. Quam enim regulam docuerunt Arabes pro resolvendis æquationibus quadratis, eandem adhibuit quoque Vieta. Quam item tradidit Tartalea pro resolvendis æquationibus cubicis, eandem Vieta etiam assumpsit. Et quam demum excogitavit Bombellius pro dividendis æquationibus quadrato-quadratis in duas, quæ tantùm quadratæ essent, eandem & Vieta itidem usurpavit.

Hinc iisdem difficultatibus, quibus vetus Algebra scatebat, nova etiam erat obnoxia, & sicuti imperfecta erat olim resolutio æquationum cubicarum ab Italis tradita, sic etiam mansit apud Vietam. Hoc unum docuit Franciscus Vieta, ante ipsum à nemine traditum, nimirum qua ratione linearum ope designari possint radices æquationis. Sed quoniam non aliam voluit in Geometriam lineam curvam admittere, quàm circumferentiam circuli; imperfectam quoque materiam istam nobis reliquit; quandoquidem dumtaxat constructionem exhibuit illarum æquationum, quarum radices cir-

circuli, & rectæ lineæ intersectione possunt inveniri.

Exorto Cartesio, litterarii orbis egregio restauratore, cæpit ex Algebrâ, & Geometriâ ita quidem unum conflari corpus, ut una ab alterâ ampliùs divelli non posset. Quum enim noverit Cartesius imperfectam esse resolutionem æquationum cubicarum, ab Italis excogitatam, remque esse omnino deploratam; illam ad umbilicum perducere; ad rem esse existimavit, hac viâ prætermissâ, radices æquationum per longitudines linearum designare. Itaque invectis in Geometriam cum conicis Veterum sectionibus, cùm lineis aliis curvis, sectionibus conicis magis compositis; illarum cum circumferentiâ circuli intersectione æquationum omnium docuit constructionem.

Id autem ab iis, qui deinceps sunt secuti, non modò non improbatum, sed à nemine, quem sciam, expansis ulnis non acceptum. Nam quum singulis innotuerit, radices æquationum non meliùs designari posse, quàm intersectione curvarum; in id omnes dederunt operam, ut non ampliùs resolutionem æquationum algebraicam, sed earundem constructionem geometricam excolerent. Qua ratione

ne abdicatâ severâ illâ lege, absque ullo fundamento latâ, quod id tantùm geometricum esset, quod circulo, & rectâ lineâ perficitur; non tantùm Algebram, sed ipsam quoque Geometriam promoverunt, & ad suam amplitudinem revocarunt.

Hæc igitur est historica narratio ortûs, & progressus ejus disciplinæ, quæ Algebra dicitur. Unde colligitur, Algebram dupliciter pertractari posse; vel scilicet independenter à Geometriâ, prout exculta fuit ab iis, qui Cartesium præcesserunt; vel eam cùm Geometriâ conjungendo, prout factum à Cartesio, aliisque, qui Cartesium secuti, vestigia ejus premere voluerunt. Priori modo pertractata, erit valde imperfecta, ac limitata, & angustis admodum limitibus coarctabitur. At verò si secundo modo tradatur, licebit progredi in infinitum; neque usquam terminus invenietur.

Hinc Algebræ Elementa pro novis Tyronibus traditùri, utroque modo illam pertractabimus. Quem in finem in quatuor libros universum nostrum opus partiemur. Primus etenim erit de calculo litterali, sive specioso, & docebit qua ratione algorithmus quantitatum possit per alphabeti litteras exerceri. Secundus aget de problematum resolutione speciosâ, & methodum tradet inveniendi radices æquationum independenter à Geometriâ. Tertius erit veluti Isagogicus pro intelligendâ æquationum geometricâ constructione, quum locorum geometricorum compositionem exhibeat. Et quartus demum aget de ipsâ æquationum constructione geometricâ, ostendetque qua ratione radices æquationum possint per linearum longitudines designari.

Itaque primus nostræ Algebræ liber agit de calculo litterali, sive specioso, ostenditque, qua ratione algorithmus quantitatum possit per alphabeti litteras exerceri. Quantitates Veteres designabant, vel per numeros, vel per longitudines linearum. Utraque designandi ratio suas habet utilitates, sed utraque sua etiam patitur incommoda. Utile namque est, quantitates per numeros designare, quia sic facili negotio ad calculum poni possunt; displicet verò ex alio capite, quia per numeros non omnes quantitates exprimi queunt. Sed vicissim utile est, per longitudines linearum quantitates exprimere, quia hac ratione omnes omnino quantitates possunt designari; displi-

plicet verò ex aliâ parte, quia quantitates sic designatæ non ita facilè possunt ad calculum poni.

Hinc tertia quantitates designandi ratio excogitata, quæ habet quidem utriusque utilitates, nullius verò incommodum patitur. Fit enim per litteras alphabeti, quibus calculus perinde perficitur, ac numeris fieri solet, & quibus omnes omnino quantitates peræquè designantur, ac lineis exprimi possunt. Itaque, qua ratione quantitatum calculus fieri debeat, quum per alphabeti litteras, quantitates ipsæ designantur, priori libro docemus. Sed in tradendis regulis hujus calculi supponimus, Lectores non ignorare calculum arithmeticum, ubi quantitates numeris exprimuntur, quin imò requirimus, ut in eo exercendo magnam habeant promptitudinem, ac facilitatem.

Calculum autem litteralem traditturi, illud in limine præmittimus, quod sicuti quantitates omnes possunt per alphabeti litteras designari, ita earundem multiplices, aut partes quælibet figuris arithmeticis non incongruè designentur. Præmittimus, etiam, quod in calculo litterali, præter ipsas litteras, quibus quantitates exprimuntur, adhibeantur quoque

que ſigna duo, quorum unum utpote poſitivum ſignificat plus, alterum utpote negativum ſignificat minus. Horum ſignorum diſpar eſt ratio; nam quod per unum ponitur, per alterum aufertur. Unde illud etiam viſum eſt in ipſo limine adnotare, quod quum plures occurrunt quantitates iis ſignis connexæ, iiſdemque litteris deſignatæ, contrahendæ ſint illæ, habitâ ſignorum, quibus afficiuntur, ratione.

Quantitatum litteris deſignatarum duas ſpecies diſtinguimus; quarum alias vocamus ſimplices, alias compoſitas. Simplices ſunt illæ, quæ vel unicâ litterâ, vel pluribus litteris nullo ſigno copulatis deſignantur. Compoſitæ verò, quæ duabus aut pluribus litteris ſigno aliquo conjunctis exprimuntur. Oſtendimus autem primò loco calculum quantitatum ſimplicium; tum deinde progredimur ad calculum quantitatum compoſitarum, quæ ex ſimplicium additione, vel ſubtractione oriuntur. Et quoniam ex diviſione tum iſtarum, cùm illarum ſubnaſcuntur fractiones, ſive quantitates fractæ; harum proinde calculus poſtea ſubnectitur.

Ad hæc docemus formationem poteſtatum. Qua in re primò quidem oſtendi-

mus

mus quid veniat nomine poteſtatis, & qua ratione diſtinguantur in ordines; deinde tradimus elevationem quantitatum ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem; porrò explicamus elevationem quantitatum ad cubum, ſive tertiam poteſtatem; & denique qua ratione quantitates ad poteſtates altiores eleventur, ſummatim aperimus. Eodem in loco oſtendimus etiam, quo artificio conſtitui poſſint tabulæ, quæ contineant poteſtates omnes numerorum naturalium.

Formationem poteſtatum excipit earundem reſolutio, ſive extractio radicum. Itaque primò docemus, qua ratione extrahi poſſit quadrata radix; deinde quo pacto extrahenda ſit radix cubica; & denique quo artificio omnes aliæ radices extrahi debeant. Quumque ad poteſtates elevari poſſint non modò quantitates integræ, verùm etiam fractiones; docemus quoque, quo pacto extrahendæ ſint radices ex fractionibus: qua in re methodum priùs oſtendimus, qua mediante fractiones ad quamcumque datam poteſtatem debeant attolli.

Hoc in loco explicamus etiam geneſim quantitatum incommenſurabilium, quatenus conſiderantur in Arithmetica, & o-

ſten-

ſtendimus oriri hujuſmodi quantitates, quum radicem oportet extrahere ex quantitate, quæ nequaquam ſit poteſtas perfecta ejus ordinis, de quo agitur. Quantitates iſtæ ſolent quoque vocari radicales, quia ſcilicet deſignantur, adhibito ſigno radicali. Eædem à Recentioribus vocantur etiam poteſtates imperfectæ, quia nempe ad inſtar poteſtatum poſſunt deſignari, adhibitis fractionibus, velut exponentibus, atque hac occaſione generaliorem poteſtatum ideam exhibemus.

Vocamus etenim poteſtatem, omnem quamcumque quantitatem, cui à tergo, velut exponens, numerus aliquis ſit adſcriptus. Unde quia numerus iſte poteſt eſſe, vel poſitivus, vel negativus; itemque, vel integer, vel fractus: duas hinc poteſtatum diviſiones proferimus; unam nempe in poſitivas, & negativas; alteram in perfectas, & imperfectas. Vocamus enim poteſtates poſitivas, quæ exponentes habent poſitivos; vocamus verò poteſtates negativas, quæ viciſſim habent exponentes negativos. Et ſimiliter dicimus poteſtates perfectas, quarum exponentes ſunt numeri integri; dicimus verò poteſtates imperfectas, quarum exponentes ſunt numeri fracti.

Pro

Pro intelligendâ harum omnium poteſtatum naturâ, explicamus primò naturam progreſſionis arithmeticæ, & geometricæ, itemque analogiam, quæ inter utramque progreſſionem intercedit, oſtendimus. His prælibatis, quid interſit inter poteſtates poſitivas, & negativas, quidve inter poteſtates perfectas, & imperfectas, aperitur: qua ratione in propatulo ponitur natura tam poteſtatum poſitivarum, & negativarum, quàm poteſtatum perfectarum, & imperfectarum. Denique ſubnectitur calculus poteſtatum per exponentes; nam multiplicatio, diviſio, formatio poteſtatum, & extractio radicum, quotieſcumque circa omnes recenſitas poteſtates, quæ ad unam, eandemque quantitatem referuntur, debent inſtitui, longe faciliùs expediuntur adhibitis exponentibus, quàm aliâ quavis ratione.

Quantitates porrò incommenſurabiles, ſive radicales quia in reſolutione problematum frequenter occurrunt, accidit ſæpè ſæpiùs, ut & ipſæ etiam ad calculum poni debeant. Itaque, ne, quum id contingit, hæreant Tyrones; ad rem viſum eſt, earum quoque calculum oſtendere. Et quoniam de hujuſcemodi quantitatum

tum calculo nihil fermè traditur in Arithmeticâ vulgari; de eo proinde paulò accuratiùs differitur: quem in finem exempla ejus calculi afferuntur, non modò in quantitatibus, quæ alphabeti litteris designantur, verùm etiam in iis, quæ per numeros, sive cyphras arithmeticas exprimuntur.

Quantitates radicales, perinde ac rationales, dividi possunt in simplices, & compositas: unde primò agitur de calculo radicalium simplicium, tum deinde de calculo radicalium compositarum. Quantitates radicales dicuntur simplices, quotiescumque unicum habent terminum, eumque affectum signo radicali. Ad harum quantitatum calculum intelligendum, præmittimus primò, quod siquidem aliquam ipsarum oporteat aliquoties sumere, satis sit ei ante signum radicale congruentem numerum præfigere; ac proinde, quod si cuilibet quantitati radicali quævis quantitas rationalis præfigatur, intelligenda sit illa toties sumpta, quot sunt partes in istâ.

Quantitates, quæ sunt extra signum radicale, sive sint numericæ, sive litterales, vocamus coefficientes earum, quæ sub signo reperiuntur. Docemus autem, qua

qua ratione possint eæ quoque sub signo collocari, scilicet si elevatæ ad potestatem, designatam ab exponente signi radicalis, multiplicentur per quantitates, sub signo existentes. Et quoniam quandoque ex quantitatibus sub signo existentibus, possunt vicissim nonnullæ extra signum collocari; docemus etiam, quo artificio fieri id possit, nempe si ex quantitatibus illis extrahi queat radix, à ridicali signo denominata.

Quum ex quantitatibus, sub signo existentibus, nonnullæ extra signum collocantur, quantitates radicales longè simpliciùs oriuntur expressæ. Quocirca, ut eædem quantitates, ad simpliciores suas expressiones reducantur, hanc regulam tradimus, scilicet, ut extra signum collocentur eæ omnes quantitates, ex quibus elici potest radix, à signo denominata. Sed methodum etiam indicamus, qua vulgus utitur Algebristarum; nimirum dividendo quantitates, sub signo existentes, per maximam potestatem, à radicali signo denominatam, quæ in iis continetur.

Per istam quantitatum radicalium ad simpliciores suas expressiones reductionem, innotescit nobis, num quantitates duæ

duæ radicales sint communicantes inter se, hoc est rationem habeant ad invicem commensurabilem. Si enim contigerit, illas reductas ad simpliciores suas expressiones eandem sub signis radicalibus quantitatem habere, erit earum ratio commensurabilis, ac rationalis, utpote quæ illa eadem, quæ inter earundem coefficientes existit; secus verò, si sub signis radicalibus diversas habeant quantitates.

His præmissis, ad ipsum radicalium simplicium calculum devenimus. Et primò quidem ad addendas duas, aut plures radicales simplices, reducendæ sunt eæ methodo traditâ ad simpliciores suas expressiones. Nam siquidem contigerit, eas sic reductas eandem sub signo radicali quantitatem habere; fiet additio, conjungendo simul coefficientes ipsarum, & scribendo summam, velut coefficientem ejusdem quantitatis radicalis. Quod si verò quantitates radicales propositæ, reductæ ad simpliciores suas expressiones, non habeant eandem quantitatem sub signo radicali; tunc fiet additio, adhibito signo plus.

Sed absque ulla reductione aliâ quoque methodo docemus fieri posse additionem

nem radicalium simplicium, quam commodiorem existimamus in quantitatibus numericis: nimirum, si capiantur quantitates, sub signis existentes, & dividatur major per minorem. Nam siquidem contigerit, ex hac divisione talem oriri quotientem, ut extrahi exinde possit radix, quam radicale signum ostendit; eliciatur radix ista, eaque unitate aucta fiat coefficiens quantitatis minoris, sub signo positæ, & habebitur summa quæsita. Quod si verò ex illo quotiente extrahi nequeat prædicta radix; tunc facienda est additio signo plus: quemadmodum fiat oportet, si quantitati radicali addenda sit quantitas alia commensurabilis, ac rationalis.

Secundò, ut ex unâ quantitate radicali subtrahi possit altera quantitas radicalis, reducendæ sunt etiam ambæ ad simpliciores suas expressiones. Nam siquidem contigerit, eas sic reductas eandem sub signo radicali quantitatem habere; fiet subtractio, subducendo coefficientem unius ex coefficiente alterius, & scribendo residuum, velut coefficientem ejusdem quantitatis radicalis. Quod si verò quantitates ad subtrahendum propositæ, reductæ ad simpliciores suas expressiones, non ha-

habeant ſub ſigno radicali eandem quantitatem; tunc fiet ſubtractio, adhibito ſigno minus.

Sed abſque ullâ reductione ſubtractionem quoque quantitatum radicalium aliâ methodo docemus, quæ commodior deprehenditur in quantitatibus numericis: nimirum capiendo quantitates, ſub ſignis radicalibus exiſtentes, & dividendo majorem per minorem. Nam ſiquidem contigerit, ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut exinde elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; fiat radix iſta, unitate minuta, coefficiens quantitatis minoris, ſub ſigno ſuo poſitæ, & habebitur reſiduum quæſitum. Quod ſi verò ex illo quotiente extrahi nequeat prædicta radix; tunc facienda eſt ſubtractio, adhibito ſigno minus: quemadmodum fiat oportet, quotieſcumque inſtitui debet inter quantitates duas, quarum una ſit rationalis, altera radicalis.

Tertiò ad multiplicandas per ſe mutuò quantitates ſimplices radicales, nullâ opus eſt earum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductione, ſed ſatis eſt quantitates, ſub ſignis exiſtentes, inter ſe mutuò multiplicare, productoque idem radicale ſignum præfigere; quod ſi verò

quantitates radicales ſuos habeant coefficientes, neceſse eſt eos quoque inter ſe mutuò multiplicare. Sed oſtendimus productum, quod oritur ex mutuâ quantitatum radicalium multiplicatione, non ſemper eſse quantitatem aliam radicalem, verùm fieri poſse, ut quandoque ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis: ſcilicet ſi quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe mutuò multiplicatæ, producant quantitatem, ex qua elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit. Id enim quum accidit, eliciatur prædicta radix, eaque per coefficientes quantitatum propoſitarum multiplicata, productum quæſitum exhibebit.

Quartò ad dividendas per ſe mutuò quantitates ſimplices radicales, neque etiam opus eſt, eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare, ſed ſufficiet quantitates, ſub ſigno exiſtentes, per ſe mutuò dividere, & quotienti idem radicale ſignum præfigere; quod ſi verò quantitates radicales ſuos habeant coefficientes, neceſse eſt eos quoque per ſe mutuò dividere. Sed hic etiam notamus, quotientem, qui oritur ex mutuâ quantitatum radicalium diviſione, non ſemper eſse quantitatem aliam radicalem, verum fieri posse, ut quandoque sit quantitas commensurabilis, ac rationalis: scilicet si quantitates, sub signis existentes, per se mutuò divisæ producant quotientem, ex quo elici possit radix, quam radicale signum ostendit. Id namque si contingit, eliciatur prædicta radix, eaque multiplicata per quotientem, qui oritur ex mutuâ coefficientium divisione, quæsitum quotientem exhibebit.

Quotiescumque quantitas rationalis multiplicari debet per quantitatem radicalem, illa huic præfigenda, nullo signo interjecto; vel etiam, si quantitas radicalis suum habeat coefficientem, multiplicandus est iste per quantitatem rationalem propositam. Verumtamen, si inter quantitatem radicalem, & quantitatem aliam rationalem instituenda sit divisio; tunc ad hanc commodiùs peragendam, primò quidem attollenda est quantitas rationalis ad eam potestatem, quam ostendit radicale signum alterius, tunc deinde divisio facienda. Cæterùm, si ex divisione quantitatum fractio oriatur, ex qua elici non possit radix, de qua agitur; tunc radicale signum, vel præfigendum toti fractioni ad modum unius, vel etiam tam numeratori, quàm denominatori. Sed si ex

numeratore, denominatoreve elici possit, non item ex alio; eo casu, ex quo elici potest, eliciatur; ex quo verò elici nequit, ei radicale signum seorsim præfigatur.

Quintò, quemadmodum nullâ est opus reductione, quum quantitates simplices radicales per se mutuò multiplicantur, aut dividuntur, ità neque etiam ulla requiritur reductio, quotiescumque quantitates radicales ad datam quamcumque potestatem sunt elevandæ, quum satis sit ad potestatem illam attollere quantitates ipsas, sub signis existentes, iisdemque idem radicale signum præfigere; quod si verò quantitates radicales suos habeant coefficientes, necesse est, eos quoque ad datam potestatem attollere. Atque hic quoque notamus, potestatem, ad quam attollitur quantitas aliqua radicalis, non semper esse quantitatem aliam radicalem, sed fieri posse, ut quandoque sit quantitas commensurabilis, ac rationalis; veluti si potestas, ad quam elevanda est quantitas radicalis, sit illa eadem, quam radicale signum ostendit. Tunc enim ipsa quantitas, sub signo existens, per quæsitam coefficientis potestatem multiplicata, id quod quæritur exhibebit.

Denique ad extrahendas radices ex radicalibus ſimplicibus neque etiam neceſſe eſt, eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare; quum ſufficiat illas extrahere ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus, iiſque idem radicale ſignum præfigere; ſed ſi quantitates radicales, ex quibus radix quæcumque extrahi debet, ſuos habeant coefficientes, neceſſe eſt, ex iis quoque radicem illam extrahere. Quotieſcumque autem ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, extrahi nequit radix, de qua agitur; tunc multiplicari debet exponens ſigni radicalis per exponentem quæſitæ radicis. Et ſiquidem quantitates radicales ſuos habeant coefficientes, ex quibus extrahi nequeat quæſita radix; tunc meliùs erit coefficientes quoque ſub ſignis radicalibus reponere, & radicem methodo mox traditâ ex quantitatibus illis extrahere.

Cæterùm formatio poteſtatum, & extractio radicum in radicalibus ſimplicibus multò faciliùs perficiuntur, ſi quantitates ipſæ radicales velut poteſtates imperfectæ conſiderentur. Nam quantum ad formationem poteſtatum, ſatis erit exponentes ipſarum duplicare, ſi elevandæ ſint ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem; triplicare, ſi ad cubum, ſive tertiam

tiam

tiam poteſtatem; quadruplicare, ſi ad quadrato-quadratū, ſive quartā poteſtatē; atq; ita deinceps. Quantum verò ad extractionem radicum, ſatis erit ex exponentibus ipſarum ſumere ſemiſſem, ſi quæratur radix quadrata; trientem, ſi radix cubica; quadrantem, ſi radix quadrato quadrata; atque ita in infinitum.

Oſtendimus autem in extractione radicum ex radicalibus ſimplicibus; quod quæcumque radix proponatur extrahenda ex quantitate aliquâ radicali; ſemper radix illa debeat eſſe quantitas altera radicalis, nec unquam eſſe poſſit commenſurabilis, ac rationalis. Nam ut talis exiſtat, neceſſe foret, ut extractâ ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, radice quæſitâ, talis oriatur quantitas, ut exinde extrahi quoque poſſit radix, à ſigno radicali denominata: quod profectò quum contingit, jam ab initio ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, extrahi poterat radix, quam radicale ſignum oſtendit, nec proinde erat quantitas incommenſurabilis, ac radicalis.

In calculo radicalium ſimplicium illud ſemper ſuppoſuimus; ut quantitates radicales inter ſe mutuò addendæ, ſubtrahendæ, multiplicandæ, aut dividen-

dæ

dæ ſint ejuſdem denominationis, ſive idem habeant ſignum radicale. Unde, quia ſæpeſæpiùs occurrit, ut operationes iſtæ inſtitui debeant inter radicales diverſæ ſpeciei, ſive denominationis; ſubjungimus proinde modum, quo mediante radicales diverſi nominis poſſint ad eandem denominationem revocari. Hunc in finem quantitates ipſas radicales velut poteſtates imperfectas conſideramus. Sic enim ſatis erit ad eandem denominationem reducere fractiones, quæ ſunt exponentes earum poteſtatum; quum hac ratione propter communem eorum exponentium denominatorem, eadem quoque erit quantitatum radicalium denominatio.

Hoc autem agentes, incidimus in regulam, quam vulgus adhibet Algebriſtarum pro reducendis radicalibus ad eandem denominationem: nempe, ut primò elevetur quantitas, ſub cujuſque ſigno exiſtens, ad poteſtatem, à ſigno alterius denominatam; tunc proprius cujuſque ſigni index multiplicandus ſit per indicem alterius. Interim, ſi index ſigni unius quantitatis radicalis exactè contineatur in indice ſigni alterius quantitatis; tunc elevetur ſola illa quantitas radicalis ad po-

poteſtatem, denominatam à numero, qui oſtendit, quoties unus index in altero continetur, & per hunc eundem numerum multiplicetur index ſigni ejuſdem quantitatis. Nam hac ratione jam idem erit ſignum utriuſque quantitatis radicalis, nec altera quantitas à ſede ſuâ mutabitur.

Oſtenſo calculo radicalium ſimplicium, progredimur ad calculum radicalium compoſitarum, quem facili negotio intelliget quicumque regulas prioris calculi ritè perceperit. Quantitates radicales dicuntur compoſitæ, quum duos, aut plures terminos habent affectos ſigno radicali. Unde ſicuti commenſurabiles compoſitæ oriuntur ex additione, & ſubtractione commenſurabilium ſimplicium; ita quoque ex additione, & ſubtractione radicalium ſimplicium ſubnaſcuntur radicales compoſitæ. In harum quantitatum calculo expediendo illud etiam aſſumimus, ut quantitates, in quibus operationes ſunt inſtituendæ, ex ejuſdem ſpeciei radicalibus conſtent. Quocirca ſi quantitates offerantur, quæ radicalibus conſtent diverſæ ſpeciei; eæ mutandæ ſunt priùs in alias, quarum radicales omnes eandem habeant denominationem. Ita-

Itaque primò radicalium compoſitarum additionem in hunc modum commodè fieri poſſe docemus : reducantur primò ſingulæ cujuſque quantitatis addendæ partes ad ſimpliciores ſuas expreſſiones ; deinde conjungantur ſimul iiſdem omnino ſignis , quibus afficiuntur: & ſiquidem plures occurrant partes , quæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes , iiſdem ſignis ſint affectæ , addantur eerum coefficientes in unum ; quod ſi verò habeant quidem ſub ſigno radicali eandem quantitatem , ſed ſigna ſint contraria , earundem coefficientes à ſe mutuò ſubtrahantur . Quod ſi inter quantitates radicales aliæ exiſtant commenſurabiles , ac rationales , eæ quoque cum aliis ſuis propriis ſignis ſunt conjungendæ ; verùm , quia cum radicalibus contrahi nequeunt , ſatis erit, quum fieri poteſt, inter ſe mutuò illas contrahere.

Non diſſimiliter ſubtractionem radicalium compoſitarum inſtituendam eſſe decernimus : reducantur namque primò ſingulæ cujuſque quantitatis partes ad ſimpliciores ſuas expreſſiones ; deinde conjungantur ſimul , mutatis ſignis partibus omnibus quantitatis ſubtrahendæ. Et ſiquidem hac factâ conjunctione, plures

occurrant partes , quæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes , iiſdem ſignis ſint affectæ , addantur earum coefficientes in unum ; quod ſi verò habeant quidem ſub ſigno radicali eandem quantitatem , ſed ſigna ſint contraria , earundem coefficientes à ſe mutuò ſubducantur . Quod ſi inter partes radicales quantitatis ſubtrahendæ aliæ exiſtant commenſurabiles , ac rationales , eæ quoque mutatis ſignis adjungendæ ſunt partibus quantitatis , ex qua fieri debet ſubtractio ; verùm , quia cum radicalibus ipſius contrahi nequeunt , ſatis erit eas contrahere cum aliis commenſurabilibus , ſi quæ ſunt , in hac altera quantitate.

Quantum ad multiplicationem radicalium compoſitarum , eam inſtituimus eadem omnino ratione, qua quantitatum commenſurabilium compoſitarum perficitur multiplicatio : nimirum multiplicando ſingulas partes unius per ſingulas partes alterius , & ſcribendo producta ſigno poſitivo , quum quantitates ad invicem multiplicandæ iiſdem ſignis afficiuntur, & viciſſim ſigno negativo, quum ſignis contrariis ſunt affectæ. Quamquam autem pro multiplicatione quantitatum ra-

radicalium haud quidem necesse sit, eas ad simpliciores suas expressiones revocare; attamen, ut faciliùs cognosci possit, quæ producta oriantur rationalia, vel irrationalia, quæque itidem peractâ multiplicatione sunt simul conjungenda, aut à se mutuò subtrahenda; præstat quantitates omnes radicales ante multiplicationem ad simpliciores suos terminos reducere.

Similiter quantitates radicales compositas elevamus ad quamcumque datam potestatem eadem omnino ratione, qua ad eam attolluntur quantitates compositæ rationales: nimirum capiendo quadrata partium, duplumque ejus, quod oritur ex mutuâ earum partium multiplicatione, si ad quadratum sint elevandæ; vel sumendo cubos partium, triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ per secundam, triplumque ejus, quod producitur, multiplicando quadratum secundæ per primam, si elevandæ sint ad cubum; atque ita deinceps; & considerando quoque velut unam omnes priores partes, quotiescumque propositæ quantitates ex pluribus, quam duabus, partibus constant. Sed observamus hoc loco, quod quotiescumque signa quan-

quantitatum radicalium eosdem habent indices cum potestate, ad quam illæ sunt elevandæ, tot semper termini necessariò oriantur rationales, quot sunt partes in quantitatibus propositis.

Ad divisionem radicalium compositarum commodiùs peragendam, ostendimus primò, qua ratione inveniri possit quantitas contraria cujuscumque datæ radicalis. Vocamus autem datæ alicujus radicalis contrariam quantitatem, quæ talis est, ut si per eam data quantitas radicalis multiplicetur, id quod producitur, sit quantitas alia commensurabilis, ac rationalis. Hæc quantitas contraria facili negotio invenitur, quum data quantitas radicalis est simplex. Elevetur siquidem data quantitas ad potestatem, cujus index sit unitate unâ minor indice signi radicalis, & erit potestas ista quantitas contraria quæsita; quæ tamen, ut simplicior habeatur, contrahi quandoque poterit, si quantitas sub signo existens dividatur per maximam potestatem à signo denominatam, quæ in illâ continetur.

Quod si data quantitas radicalis sit composita, eademque duas habeat partes, invenimus ejus contrariam quantitatem hoc

hoc artificio: mutamus uni ejus parti signum, quo affecta reperitur, tum facta hac mutatione elevamus quantitatem totam ad potestatem, cujus index sit unitate unâ minor indice signi radicalis: nam si deinde ex terminis hujus potestatis deleantur coefficientes, hoc est numeri designantes, quoties termini illi sumi debeant in potestate; erit ipsa illa potestas, ex cujus terminis deleti sunt coefficientes, quantitas contraria quæsita. Atque hæc regula, non dissimilis ab illâ, quam in magno suo opere arithmetico docet Nicolaus Tartalea, locum etiam obtinet, si una ex duabus partibus radicalis propositæ sit commensurabilis, ac rationalis.

Sed si quantitas radicalis tres partes habeat, paulò difficilior erit contrariæ quantitatis inventio, & nonnisi analysis ope illa poterit inveniri. Interim in Tyronum gratiam duas regulas valde faciles, ac expeditas proferimus: quarum una locum sibi vindicat in iis quantitatibus, quæ constant ex radicalibus quadratis, & in quibus index signi radicalis est binarius; altera locũ obtinet in quantitatibus, quæ constant ex radicalibus cubicis, quæque pro indice signi radicalis ternarium habent.

Osten-

Ostenso, qua ratione inveniri possit quantitas contraria datæ alicujus radicalis, divisionem explicamus radicalium compositarum. Et quidem interdum quantitates radicales compositæ dividi possunt per se mutuò eadem quoque ratione, qua fit divisio quantitatum commensurabilium. Sed generaliter divisio harum quantitatum longe faciliùs perficitur, faciendo, ut divisor unicum terminum contineat. Id autem obtinetur, capiendo quantitatem contrariam divisoris, & per eam tam divisorem, quàm quantitatem dividendam multiplicãdo; nam hac ratione divisor evadet rationalis, adeòque unicum tantummodo terminum continebit. Necesse est verò, per quantitatem contrariam divisoris tam divisorem, quàm quantitatem dividendam multiplicare, ut divisio proposita non alteretur, & quæsitus exinde quotiens deducatur.

Divisorem radicalium compositarum excipere debebat extractio radicum ex iisdem quantitatibus; sed operatio ista digna nobis visa est, ut peculiari capite pertractetur. Itaque de eâ seorsim agentes, notamus primò radicales simplices vocari possim monomia, quasi quantitats unius

no-

nominis, five termini ; & ob eandem rationem radicales compofitas vocari multinomia, quia fcilicet plura nomina, five terminos continent ; fed fpeciatim dici binomia, quum duos terminos habent; trinomia, quum tres; quadrinomia, quum quatuor ; atque ita deinceps.

Notamus quoque, diverfitatem terminorum in radicalibus compofitis repetendam effe à diverfitate quantitatum, quæ in iis terminis, ad fimpliciores expreffiones revocatis, fub radicali figno continentur: unde fi in radicalibus compofitis duæ, aut plures radicales fimplices occurrant, quæ reductæ ad fuas fimpliciores expreffiones, eandem habeant fub radicali figno quantitatem ; eæ non totidem terminos, fed unicum conftituere dicuntur. Nec reticemus, radicales compofitas vocari binomia, trinomia, aut quadrinomia, etiam fi in iis aliquis terminus fuerit commenfurabilis, ac rationalis. Sed quemadmodum omnes illæ partes radicales, quæ eandem fub figno radicali continent quantitatem, pro uno, eodemque termino computantur ; ita etfi plures fuerint partes commenfurabiles, ac rationales, omnes tamen pro uno, eodemque termino fumi debent.

Quo-

Quoniam autem in refolutione problematum non alius ferè cafus occurrit, quàm ut radices extrahantur ex iis quantitatibus radicalibus, quæ duos terminos habentes, dicuntur binomia ; idcircò de extractione radicum ex binomiis dumtaxat agendum aggredimur. Sed binomia, ex quibus radices extrahimus, non ex cujufcumque generis radicalibus conftant, fed ex iis tantùm, quæ figno quadratæ radicis afficiuntur. Cujus rei ratio eft, tum quia hujufmodi potiffimum binomia occurrunt nobis in problematum refolutione, tum etiam quia ex aliis binomiis non ita facile eft radices extrahere. Quin etiam radices horum binomiorum tales itidem optamus, ut nonnifi ejufdem generis, hoc eft quadratas radicales comprehendant ; quia quum fic non oriuntur expreffæ, arbitramur meliùs facturum, qui ingenuè fatetur, eas extrahi non poffe, eafdemque exhibet, adhibito alio figno radicali, quod quantitatem totam comprehendat.

Itaque primò docemus, qua ratione extrahi poffit quadrata radix ex binomiis : qua in re oftendimus ante omnia, quod ut ex aliquo binomio ejufmodi quadrata radix extrahi poffit, ut nonnifi radicales quadratas comprehendat, unus ex terminis ejus debeat esse rationalis, alter incommensurabilis, ac radicalis: sed ostendimus deinde, præter id, alia duo requiri; primum, ut terminus rationalis major sit termino radicali; & alterum, ut differentia quadratorum utriusque termini sit etiam quadratum: quæ quidem quum habentur, extrahetur quadrata radix, capiendo differentiam quadratorum, quæ fiunt ex terminis propositi binomii, ejusque quadratam radicem primò addendo termino rationali, deinde ex eodem subtrahendo; quippe, si postea capiantur semisses summæ, & residui erunt radices harum semissium termini quæsitæ radicis.

Neque verò silentio præterimus, quod si in radicibus extrahendis parum curemus, si eæ radicales contineant quadratas, aut alterius cujusque speciei, possit eâdem regulâ etiam ex binomio, cujus uterque terminus sit radicalis, extrahi quandoque quadrata radix. Sed ostendimus, quod, ut id fieri possit, necesse sit, binomium illud hujusmodi esse, ut differentia quadratorum ex terminis ejus non quidem sit quadratum, sed ut ejus quadrata radix rationem habeat commensurabilem, ac rationalem cum aliquo ex terminis propositi binomii, quò scilicet, & addi, & subtrahi possit ex termino illo.

Secundò docemus, qua ratione ex binomiis extrahi possit radix cubica. Atque hìc ostendimus in primis, radicem cubicam, quæ sit ejus naturæ, qualem optamus, extrahi posse, non modò ex binomio, cujus unus terminus est rationalis, alter radicalis, verùm etiam ex binomio, cujus uterque terminus sit radicalis. Sed ostendimus quoque, quod cujuscumque sit formæ binomium propositum, ut ex eo extrahi possit radix cubica, quæ nonnisi radicales quadratas comprehendat, hujusmodi esse debeat, ut differentia quadratorum ex terminis ejus non quidem sit quadratum, sed cubus perfectus; atque hujus radix cubica erit differentia quadratorum ex terminis quæsitæ radicis, quum ista extrahi potest. Unde pro extrahendâ radice cubicâ ex binomio, cujus unus terminus sit rationalis, alter radicalis, hanc regulam deducimus.

Capiatur radix cubica proximè major binomii propositi, sed quæ non ampliùs, quàm semisse unitatis differat à verâ radidice, quæ præter propter cognosci potest; tum ex differentiâ quadrarorum, quæ fiunt est terminis ejusdem binomii, eliciatur radix cubica, eaque per radicem illam proximè majorem dividatur. Jam si terminus rationalis major fuerit termino radicali, quotiens, qui exinde oritur, addatur cum eadem illâ radice proximè majori; & siquidem summæ hujus capiatur semissis sine fractione, à cujus quadrato subducatur radix cubica prædictæ quadratorum differentiæ, erit semissis illa pars rationalis, radix verò quadrata residui inde orti pars radicalis quæsitæ radicis. Quod si autem terminus rationalis minor fuerit termino radicali, quotiens, qui ex illâ divisione producitur, subducatur ex radice illâ proximè majori; & siquidem residui hujus capiatur adhuc semissis sine fractione, cujus quadrato addatur radix cubica prædictæ quadratorum differentiæ, erit rursus semissis illa pars rationalis, radix verò quadrata summæ inde ortæ, pars radicalis quæsitæ radicis.

Notamus autem, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, non semper esse radicem propositi binomii, sed tunc demum, quum hæc ex illo extrahi potest; atq; id insuper non aliter cognosci posse, quàm si rei periculum fiat. Nam etsi, quum differentia quadratorum ex terminis propositi binomii, nequaquam est cubus perfectus, extrahi illa non possit; non hinc tamen concludendum est, vicissim extrahi illam semper posse, quum prædicta differentia cubus prodit perfectus. Sed notamus quoque, quod si de qualitate radicum solliciti nequaquam nos esse velimus, extrahi quandoque possit radix cubica etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus nequaquam sit cubus perfectus. Nam si termini istius binomii multiplicentur per differentiam illam, novum producetur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus cubus erit perfectus: quocirca si ex novo isto binomio radix cubica extrahi possit, eadem divisa per radicem cubicam prioris differentiæ, dabit radicem cubicam prioris binomii.

Atque hac ratione ostendimus, radicem cubicam extrahi quandoque posse ex binomio, cujus termini fractiones involvant, scilicet si per multiplicationem tollantur fractiones illæ, & deinde novi binomii radix cubica dividatur per radicem cubicam ejus quantitatis, quæ vices

ces gessit multiplicatoris. Nec dissimili ratione docemus extrahi posse radicem cubicam ex binomio, cujus uterque terminus est radicalis: nimirum si multiplicationis ope unus ex terminis ejus fiat rationalis, & deinde radix cubica novi binomii dividatur per radicem cubicam illius quantitatis, quæ multiplicatoris vices obtinuit. Sed si radix cubica extrahenda non alias radicales, quàm quadratas, debeat continere; elicietur illa, si termini propositi binomii ita simpliciùs exprimi possint, ut summa coefficientium sit quadrupla summæ quantitatum, sub signis existentium; differentia verò eorundem coefficientium sit dupla differentiæ, quæ inter easdem quantitates existit: nam deletis coefficientibus, dabunt ipsi termini quæsitam radicem.

Denique docemus, qua ratione ex binomiis extrahi possint radices aliæ superiores; sed hac in re visum est nobis tantùm rationem exponere, qua extrahi possint radices illæ, quæ referuntur ad potestates numeri imparis; nam quantum ad eas, quæ referuntur ad potestates numeri paris, haberi possunt per extractionem, vel solius radicis quadratæ, vel quadratæ simul, & cubicæ sæpiùs repe-

petitam. Et quamquam hoc eodem artificio extrahi quoque possint quam plures radices, quæ ad potestates numeri imparis referuntur; veluti exempli gratiâ radix, quæ refertur ad potestatem nonam, quippe quæ haberi potest per duplicem radicis cubicæ extractionem: eas nihilominus excipere non existimavimus; tum quia regula à nobis afferenda non est dissimilis ab illâ, quam attulimus pro extractione radicis cubicæ; tum etiam, quia inter radices numeri paris, & radices numeri imparis non leve discrimen intercedit.

Itaque radices numeri imparis regulariter ex iis tantùm binomiis extrahi possunt, quæ unum habent terminum rationalem, alterum radicalem; sed ad eas extrahendas necesse est, ut differentia quadratorum ex terminis ejus sit potestas perfecta ejusdem ordinis cum illâ, de qua agitur; ejusque radix erit differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis extrahendæ radicis, quum hæc taliter elici possit, qualem regulariter optamus. Unde pro extrahendis radicibus numeri imparis ex binomiis, quorum unus terminus sit rationalis, alter radicalis, regulam colligimus non dissimilem ab ea, quam tradidimus pro extractione radicis cubicæ. Eadem namque per omnia sunt peragenda, nisi quod, ubi illic elicienda erat radix cubica, hìc radix oportet eliciatur ejusdem ordinis cum illâ, de qua agitur.

Cæterùm hìc quoque notamus, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, tunc demum esse radicem quæsitam, quum hæc ex proposito binomio extrahi potest; pariterque non aliâ ratione cognosci posse, num propositum binomium radicem admittat, quàm si rei periculum fiat. Nam etsi, quum differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propositi binomii, nequaquam est potestas perfecta ejusdem ordinis cum illâ, de qua agitur, indicio nobis esse possit, propositum binomium radicem non admittere; non hinc tamen argumento nobis esse debet, quod radicem admittat, quum vicissim differentia illa prodit illius ordinis potestas perfecta.

Neque etiam reticemus, quod si qualitatis radicalium nulla ratio haberi velit, extrahi quandoque possit optata radix etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus nequaquam sit illius ordinis potestas perfecta.

Ete-

Etenim si termini propositi binomii multiplicentur per illius differentiæ potestatem aliquam, hoc est per quadratum, si quæratur radix quinta; per cubum, si radix septima; per quadrato-quadratum, si radix nona; atque ita deinceps, novum producetur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus potestas erit perfecta illius ordinis, de quo agitur: proindeque, si ex novo isto binomio radix extrahatur, eadem divisa per radicem cognominem illius quantitatis, quæ vices gessit multiplicatoris, prioris binomii radicem exhibebit.

Atque hoc artificio pariter notamus, extrahi quandoque posse quæsitam radicem, tum ex binomio, cujus termini fractiones involvant, tum itidem ex binomio, cujus uterque terminus sit radicalis: scilicet si multiplicationis ope in primo casu tollantur fractiones, in secundo verò unus ex terminis propositi binomii fiat rationalis. Nam utroque in casu, si novi binomii radix illius ordinis, de quo agitur, dividatur per radicem cognominem ejus quantitatis, quæ multiplicatoris vices obtinuit; erit quotiens hujus divisionis radix propositi binomii.

Quemadmodum autem ad designandam

dam radicem, quæ ex quantitate aliqua rationali elici nequit, præfigitur quantitati ſignum radicale; ita quoque, quum ex aliquo binomio radix quæcumque extrahi non poteſt, deſignatur illa ope ejuſdem ſigni radicalis. Et quoniam ſignum iſtud radicale ad utrumque binomii terminum ſe extendit; hinc factum, ut quantitas illa, radicalis univerſalis diceretur. Hujuſmodi radicales univerſales, rarò accidit, ut ad calculum poni debeant; ſed ne, quum id contingit, Tyrones noſtri animo concidant, oſtendimus calculum ipſarum iiſdem omnino regulis peragi poſſe, quibus aliarum radicalium calculus perficitur.

Inde verò ad quantitates progredimur imaginarias, quæ non aliud ſunt, quàm radices numeri paris, extrahendæ ex quantitatibus negativis: ſic dictæ, quia creditur in vulgus, eas verè, ac realiter non exiſtere, ſed tantùm fingi, ac imaginari; quum radix numeri paris quantitatis negativæ concipi nullo pacto poſſit, utpote quæ neque eſſe poteſt poſitiva, neque negativa. Sed ad cognoſcendam meliùs impoſſibilitatem quantitatum imaginariarum, viſum eſt paulò clariùs oſtendere, quid ſibi velint quantitates nega-

ga-

gativæ, ex quibus eæ nobis ſubnaſcuntur.

Et quidem natura quantitatum negativarum facilè intelligitur, quum eæ quantitatibus aliis poſitivis, iiſq; majoribus adhærent; ſed quid eædem ſibi velint, quum vel ſolæ ponuntur, vel quantitatibus aliis adhærent, quæ etſi ſint poſitivæ, iis tamen ſunt minores; hoc utiq; concipi non poteſt. Id igitur explicamus primò mediantibus debitis, & creditis; deinde motu locali, in quo progreſſus dici poteſt motus poſitivus, regreſſus motus negativus. Ex utroque autem exemplo, illud deducimus, quantitates, quæ dicuntur negativæ, non minùs reales eſſe, quàm quæ vocantur poſitivæ; ſed omne diſcrimen inter eas in eo poſitum eſſe, quod quantitates negativæ interpretandæ ſint ſenſu contrario ei, quo poſitivas quantitates interpretamur.

Hac ratione in Geometriâ, ubi quantitates per longitudines linearum deſignantur, ſi linea verſus plagam aliquam ducta, habeatur tamquam poſitiva, erit viciſſim negativa, quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Et eadem ratione in Arithmeticâ, ubi quantitates per numeros exprimuntur, quemadmodum numeri, qui à zero progrediuntur, dicuntur

po-

positivi, ita dicendi ſunt negativi, qui viciſſim à zero regrediuntur. Sed quoniam non ita facilè concipi poteſt, numeros negativos perinde reales eſſe, ac poſitivos; quum numerorum ea videatur eſſe natura, ut omnes à zero progrediantur: proinde ne hoc in loco hæreant Tyrones, realitatem numerorum negativorum, contra Veterum ſententiam, viſum eſt paulò clariùs oſtendere.

Oſtensâ naturâ quantitatum negativarum, facile nobis fuit, impoſſibilitatem oſtendere earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ. Et quoniam quantitates iſtæ non aliud ſunt, quàm radices numeri paris extrahendæ ex quantitatibus negativis, illud primò præmittimus, radicum extractiones perfici poſſe, inveniendo inter duas datas quantitates unam, aut duas medias proportionales; nempe unam, quum extrahenda eſt radix quadrata; duas, quum extrahenda eſt radix cubica; tres, quum quæritur radix quadrato-quadrata; atque ita deinceps. Hinc enim patebit impoſſibilitas quantitatum imaginariarum, ſi utique oſtendi poſſit inter quantitatem poſitivam, & negativam unam, tres, aut quinque medias proportionales nequaquam poſſe reperiri. Ad

Ad id autem oſtendendum neceſſe nobis erat, certum ſtatuere criterium, quo mediante facili negotio cognoſci poſſet, num quatuor quantitates ſint proportionales, necne; nam ea, quæ paſſim afferuntur, ſupponunt, quantitates, quæ comparantur inter ſe mutuò, eſſe vel omnes poſitivas, vel omnes negativas. Itaque, quia quatuor quantitates tunc quidem dicendæ ſunt proportionales, quotieſcumq; antecedentes reſpectu ſuorum conſequentiũ eadem lege progrediuntur; non aliud velut criterium certum proportionis ſtatuimus, quàm ut dicamus, tunc demum proportionales eſſe quatuor quantitates, quotieſcumque quicquid efficitur ab uno antecedentium, ut conſequentem ſuum adæquet, id omne fieri debeat ab alio antecedente, ut ſuum pariter conſequentem adæquet.

Atque hoc mediante criterio colligimus, quod ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, qua quantitates, proportio earum non perturbetur, ſi duæ quævis ſumantur unius ſtatus, & aliæ duæ ſtatus oppoſiti; perturbetur verò, ſi tres quidem ſumantur unius ſtatus, & quarta ſtatus contrarii. Unde facili negotio oſtendimus inter quantitatem poſititivam, & negativam unam, tres, aut quinque medias proportionales non posse reperiri; quia sic ex quatuor terminis unius ejusdemque analogiæ, tres essent unius status, & quartus status oppositi.

Hac igitur ratione ex proprio suo fonte deduximus impossibilitatem earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ. Sed notamus impossibilitatem istam in eo tantùm consistere, quod quantitates istæ nec positivæ esse possint, nec negativæ. Unde non ideo eas omnino fictitias dicendas esse arbitramur, quia fingi potest tertius quidam status, qui sit medius inter positivum,& negativum, & in quo quantitates illæ sint reponendæ; & facilè nobis persuademus, quod in Geometriâ sicuti quantitates positivæ, & negativæ explicatur per lineas tendentes ad plagas oppositas, ita quantitates, quæ dicuntur imaginariæ,explicari possint per lineas,quæ ad plagas tendunt intermedias.

Hæc nostra de quantitatibus imaginariis opinio, in quam Clarissimus Wallisius videtur inclinare, eo magis confirmatur ex calculo ipsarum. Exinde enim discimus, quantitates imaginarias non aliter realibus opponi, quàm negativæ positivis. Itaque quemadmodum oppositio,

sitio, quæ est inter quantitates positivas, & negativas, nihil obstat, quominus negativæ sint perinde reales, ac positivæ: sic etiam ex oppositione,quæ est inter quantitates reales, & imaginarias, haud quidem inferri debet, quantitates, imaginarias dictas, absolutè impossibiles esse; sed tantùm colligere licet, quod sicuti quantitates negativæ sunt impossibiles in statu positivarum, ita quantitates imaginariæ impossibilitatem involvant in utroque eorum statuum, in quibus reales quantitates considerantur.

Ex eadem oppositione, quæ deprehenditur inter quantitates reales, & imaginarias, adstrui quoque potest modus ille designandi quantitates imaginarias in Geometriâ. Nam si lineæ, quæ tendunt ad plagam unam, sint positivæ; lineæ, quæ tendunt ad plagam oppositam, quia prioribus sunt contrariæ, debent esse negativæ. Jam verò plagæ intermediæ prioribus illis opponuntur ex diametro; adeoque lineæ, tendentes ad plagas intermedias, sunt contrariæ lineis, quæ tendunt ad plagas priores. Itaque si istæ sint reales, illæ ratione oppositionis imaginariæ esse debent. Quod etiam ex eo confirmamus, quia sicuti quantitatum, quæ

quæ dicuntur vulgò reales, aliæ sunt positivæ, aliæ negativæ; ita quantitates, quæ vocantur imaginariæ, non modo esse possint positivæ, verùm etiam negativæ.

Jam, quod quantitates imaginariæ perinde realibus opponantur, ac positivis negativæ; id ex ipsarum calculo deducimus. Nam primò quemadmodum multiplicando, aut dividendo quantitatem positivam per negativam, producitur quantitas alia similiter negativa; ita multiplicando, aut dividendo quantitatem realem per quantitatem imaginariam, producitur quantitas alia similiter imaginaria. Et secundò sicuti id, quod producitur ex duabus quantitatibus negativis per se mutuò multiplicatis, aut divisis, est quantitas positiva; ita id, quod gignitur ex multiplicatione, aut divisione duarum quantitatum imaginariarum, est quantitas non quidem imaginaria, sed realis.

Non me latet, Jacobum Ozanamum in suis Algebræ Elementis docere, quantitates duas imaginarias per se mutuò multiplicatas, vel divisas quantitatem aliam imaginariam producere. Sed eum deceptum esse ostendimus, tum quia ex ipsâ genesi quantitatum imaginariarum notum est, id quod producitur ex multiplicatione unius quantitatis imaginariæ per se ipsam, quantitatem esse realem, quod equidem ipse Vir Clarissimus fatetur; tum etiam, quia in confesso est apud omnes, idem esse ex producto, vel quotiente duorum quadratorum quadratam radicem elicere, quàm ipsas eorum quadratorum radices per se mutuò multiplicare, vel dividere.

Cæterùm, si vera sit hæc nostra de quantitatibus imaginariis opinio, illud exinde colligi potest, inter quantitates, qua quantitates, nullam contrarietatem reperiri, sed oppositionem omnem oriri ex eo, quod quædam concipi debeant in statu uno, & aliæ in statu contrario: indeque ortas eas quantitatum distinctiones, quod aliæ sint positivæ, aliæ negativæ, quodque etiam quædam sint reales, aliæ imaginariæ. Sed fatendum est quoque, diversum hunc statum nihil obstare, quominus positivæ cum negativis, reales cum imaginariis comparentur; quum is, quantum in se est, nequaquam efficiat, ut quantitates dici debeant diversi generis. Unde procul est, ut assentiar doctissimo Viro Christiano Wolphio, erroris eos redarguenti, qui censent quantitates poſitivas ejuſdem generis eſſe cum negativis, adeoque poſſe inter ſe mutuò rationem habere.

Ne in primo noſtræ Algebræ libro quicquam deficeret, quod ad calculum pertineat litteralem, ſive ſpecioſum, ſubnectimus his omnibus doctrinam de ſeriebus infinitis. Pro clariori autem earum intellectu, explicamus primò diviſionem quantitatum in indefinitè magnas, & indefinitè parvas, & oſtendimus infiniteſimarum, ſive quantitatum indefinitè parvarũ varia genera poſſe conſiderari. Deinde docemus, qua ratione cognoſci poſſit, cujus generis ſint infiniteſimæ, quæ oriuntur ex multiplicatione, vel diviſione aliarum infiniteſimarum, & oſtendimus id non aliâ meliori ratione cognoſci poſſe, quàm adhibitis ipſis infiniteſimarum exponentibus, hoc eſt numeris, qui oſtendunt, cujus generis ſint infiniteſimæ per ſe mutuò multiplicandæ, vel dividendæ.

Et ſanè regula iſta pro cognoſcendo genere infiniteſimarum, quæ ex aliarum multiplicatione, vel diviſione oriuntur, deficit in Analyſi indefinitè parvorum, quam Illuſtriſſimus Marchio Hoſpitalius, hauſtam ex variis ſummorum Viro-

rorum monumentis, erudito orbi maximo diſciplinarum mathematicarum emolumento impertivit. Eam ſupplere aggreſſus eſt Johannes Petrus de Croſa in ſuis, quas ad calculum in præfatâ Analyſi contentum nuper edidit, notis, ſed irrito quidem conatu; tum quia rem generaliter non concipit, tum etiam, quia multa profert, quæ nec inter ſe, nec cum rei veritate congruere videntur; quemadmodum ante nos obſervavit Illuſtris noſtri Lycæi Neapolitani Mathematum Profeſſor Eximius Auguſtinus Arianus, cujus provinciam vicario jure quatuor ab hinc annis ſuſtinemus.

Ex traditâ porrò regulâ didicimus, præter infiniteſimas, quarum exponentes ſunt poſitivi, dari infiniteſimas alias, quarum exponentes ſunt negativi. Nec difficile nobis fuit, harum aliarum infiniteſimarum naturam inquirere; nam ex oppoſitione, quæ eſt inter poſitivum, & negativum, ſponte ſuâ conſequitur, quod ſicuti infiniteſimæ, exponentes poſitivos habentes, deſignant quantitates indefinitè parvas, ita infiniteſimæ, quæ habent exponentes negativos, deſignare debeant quantitates indefinitè magnas. Nec equidem aliter res eſſe poterat: enim verò, ſicuti descendendo à quantitate finitâ varia infinitesimarum genera distingui possunt, ita vicissim ascendendo varia genera infinitorum poterunt considerari.

Hæc diversa genera infinitorum, diversis infinitesimarum generibus correspondentia, apertè indicat Vir summus Isaac Newtonus in suo de quadraturâ curvarum tractatu. Sed Petrus Varignonius, Mathematicus Parisiensis, in observationibus suis circa spatia plusquam infinita Wallisiana, quæ reperiuntur in monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ anni 1706, non veritus est afferere, quantitates istas plusquam infinitas, quæ superiora infinitorum genera constituunt, contradictionem involvere: qua in re summoperè decipitur; nam sicuti non repugnant diversa genera infinitesimarum, ita neque etiam infinitorum diversa genera contradictionem ullam involvunt, quemadmodum adversùs eundem Varignonium solidè demonstravit egregius Mathematicus Abbas Guido Grandius.

Jam eâdem regulâ, ostendimus & ipsas quantitates infinitas posse tam inter se, quàm cum ipsis infinitesimis multiplicari, aut dividi; si scilicet recordemur, exponentes ipsarum esse negativos, ad differen-

rentiam infinitesimarum, quarum exponentes sunt positivi. Unde sequens theorema deducimus, quod si quantitas infinita cujusque generis multiplicetur per infinitesimam generis non dissimilis, ipsumque adeo absolutum infinitum per nihil absolutum, productum sit semper quantitas finita: id quod ne mirum alicui videretur, notamus eandem quantitatem finitam designari posse per seriem infinitam, hoc est infinitorum numero terminorum, nec ideo in infinitum abire; atque hac occasione doctrinam de seriebus infinitis aggredimur.

Primò itaque docemus genesim serierum infinitarum, & ostendimus series infinitas suam originem habere, vel à divisione, vel à radicum extractione. Nam primò, quemadmodum in divisione numerorum, quotiescumque divisor non est pars aliquota dividendi, procedi potest per fractiones decimales in infinitum; ita quoque quotiescumque in divisione quantitatum, quæ alphabeticis litteris sunt designatæ, divisor, qui pluribus partibus constet, non est instar partis aliquotæ in dividendo, divisio in infinitum per fractiones simplices poterit continuari. Et secundò sicuti, quum radix extrahi debet ex numero aliquo, qui non ſit poteſtas perfecta ejus ordinis, de quo agitur, procedi quoque poteſt per fractiones decimales in infinitum, ſicque radix exhiberi, quæ propiùs ſemper, ac propiùs in infinitum ad veram impoſſibilem accedat; ita quoque quotieſcumque ex quantitate aliquâ compoſitâ litterali quæſita radix extrahi nequit, adhibitis fractionibus ſimplicibus exprimi illa poterit per ſeriem infinitorum numero terminorum rationalium, quibus ita continuò ad quæſitam radicem accederetur, ut errror tandem datâ quavis quantitate minor fieret, totaque ſeries exactum quæſitæ radicis valorem exhiberet.

Atque hinc deducimus, quantitatem infinitam in ſeriem infinitorum numero terminorum convertere, problema eſſe, quod nullam difficultatem involvit; quum quælibet quantitas conſiderari poſſit, non modò velut quotiens ortus ex imperfectâ diviſione duarum aliarum, verùm etiam velut radix alterius quantitatis, quæ non ſit poteſtas perfecta ordinis aſſumpti. Sed converſum hujus problematis, nimirum ſeriei infinitorum numero terminorum ſummam finitam invenire, non ſolùm paulò difficilius deprehenditur, ſed hujuſmodi etiam, ut non ſemper ſolutionem admittat. Et quoniam, ſi quem uſum in reſolutione problematum habent ſeries infinitæ, is maximè cernitur, quotieſcumque illarum ſerierum finita ſumma invenitur; proinde oſtensâ geneſi ſerierum infinitarum, operæ pretium nobis viſum eſt de earundem ſummâ finitâ nonnihil ſubjungere.

Itaq; ſecundò conſiderandas nobis proponimus ſeries illas, quarum termini infiniti progreſſionẽ conſtituunt geometricã; nam quotieſcumque termini decreſcunt, ita ut unuſquiſque ſit data quævis pars ſui antecedentis, facile erit eorum omnium ſummam finitam invenire. Hunc in finem hoc quidem oſtendimus theorema generale, quod ſi datæ alicujus quantitatis ſumatur pars ab aliquo numero denominata, hujuſque iterum pars denominata ab eodem numero, atque ita continuò, quod inquam ſumma omnium ſit ejuſdem datæ quantitatis pars denominata ab eodem numero, unitate minuto. Unde colligimus ſummam totius ſeriei eſſe æqualem datæ quantitati, quum numerus partem denominans eſt binarius; eſſe verò æqualem illius ſemiſſi, trienti, aut qua-

quadranti, prout idem ille numerus fuerit ternarius, quaternarius, aut quinarius.

Ergo, si talis constituatur progressio geometrica, ut primus terminus sit pars ab aliquo numero denominata datæ alicujus quantitatis, & omnis alius sit ea pars sui antecedentis, quam idem numerus designat; vi ostensi theorematis summa omnium infinitorum terminorum erit æqualis fractioni, cujus numerator est data quantitas, denominator verò est idem ille numerus, unitate minutus. Quocirca quemadmodum hæc fractio evadit infinita, quum numerus ille unitatem adæquat; & verò manet quidem finita, sed mutatur in negativam, quum idem numerus est major unitate: ita quoque necesse est, ut summa omnium infinitorum terminorum illius progressionis geometricæ sit quantitas infinita, quum numerus partem denominans est æqualis unitati; & ut sit quantitas finita negativa, quum idem ille numerus ponitur minor unitate.

Horum primum liquidò patet; nam quotiescumque numerus partem denominans unitatem adæquat, termini progressionis geometricæ haud quidem proportionaliter decrescunt, sed iidem semper perseverant: proindeque summa omnium erit infinita, quum non sit aliud, quàm eadem quantitas infinities sumpta. Sed alterum non ita liquet abundè; nam quotiescumque idem ille numerus partem denominans ponitur unitate minor, termini progressionis geometricæ, velut crescentes in infinitum, constituunt simul collecti quantitatem infinitam positivam; adeoque si illud verum esset, necesse foret, ut quantitas finita negativa tantundem valeat, ac quantitas infinita positiva.

Et quidem ratione oppositionis, quæ inter quantitatem positivam, & negativam reperitur, rem non aliter se habere primò judicavi, eòque magis, quod eodem artificio colligere quoque licet, quantitatem finitam positivam tantundem valere, ac quantitas infinita negativa. Sed deinde genesim illius seriei infinitæ, cujus termini progressionem geometricam crescentem videntur constituere, sedulò considerans, novi naturam ejus hanc esse, ut ad quemcumque terminum elevetur, semper ab eodem per totidem terminos negativos regredi debeat, usque donec perveniat ad terminum pri-

primum, ubi neque etiam sistit, sed descendit adhuc per terminos negativos: qua ratione omnes ejus termini simul collecti constituunt quantitatem finitam negativam.

Regressus iste seriei, quum fractio, ex qua suam originem habet, denominatorem habet negativum, latuit Clarissimum Wallisium: unde arbitratus est summam illius seriei, ipsamque adeo fractionem quantitatem esse, non quidem finitam negativam, sed plusquam infinitam. In hunc autem errorem eò magis eum induxit vulgaris de quantitatibus negativis opinio, quod essent nihilo minores. Nam, quum noverit, quantitatem per fractionem designatam esse infinitam, quum denominator ejus evanescit; facile sibi persuasit esse plusquam infinitam, quum idem denominator evadit negativus. Unde, quum contrarium constet, concludendum est, quantitates negativas esse nihilo majores, perinde ac sunt quantitates positivæ, & zero, sive nihilum esse ultimum terminum, ad quem quantitates decrescendo possint perveniri.

Atque hinc porrò nata spatia Wallisiana plusquam infinita, adversùs quæ scripsit Petrus Warignonius, Mathematicus Parisiensis. Nam, quum dimensionem quæreret spatiorum, quæ hyperbolæ, sive potiùs hyperbolismi cum suis asymptotis cōtinent; novit eorum nonnulla designari per fractiones, denominatores negativos habentes: unde collegit, spatia illa esse plusquam infinita. Et quamquam laudatus Warignonius errorem detexerit Wallisii circa spatia ista; quum solidè ostenderit hæc ad partem contrariam sumenda esse, indeque fieri, ut fractionibus exprimerentur, denominatores negativos habentibus; attamen neque ipse novit regressum serierum, quæ ex istis fractionibus oriuntur, quandoquidem in monumentis Regiæ Scientiarū Academiæ anni 1715 cautiones nonnullas proponit pro usu serierum infinitarum, quas utique fuisset neglecturus, si ei regressus ille innotuisset.

Tertiò consideramus series, quarum termini progressionem constituunt arithmeticam. Nam etsi summa infinitorum terminorum istarum serierum, velut infinita, nequeat inveniri; attamen quam summam constituant quamplures termini simul collecti, facile est quidem definire. Itaque cognito priori termino progressionis arithmeticæ crescentis, & cognitâ item

item differentiâ , qua termini progrediuntur , ostendimus summam quotcumque terminorum haberi posse per hanc regulam : capiatur prior terminus toties , quot sunt termini in unum addendi , tunc ei addatur differentia progressionis toties , quoties designat semissis producti ex eodem numero terminorum in se ipsum unitate multatum , & habebitur summa quæsita. Sed si progressio arithmetica fuerit decrescens , tunc quidem ostendimus , differentiam illam progressionis toties sumptã , quoties designat semissis dicti producti , subducendam esse ex priori termino toties accepto, quot sunt termini in unum addendi , ut habeatur summa quæsita terminorum.

Hæc autem ostendentes , inopinatò in hoc incidimus theorema universalitate sua à nemine adhuc adnotatum , quod summa omnium infinitorum terminorum cujuscumque progressionis arithmeticæ , sive crescentis , sive decrescentis, sit ad summam terminorum totidem maximo æqualium in ratione subduplâ. Etsi enim elegans istud theorema iis , qui infinitorum tractarunt Arithmeticam , innotuerit in uno casu speciali , nempe quum termini progressionis arithmeticæ sunt numeri naturales ; universalitatem tamen ejus , quantum sciam , nemo hactenus adnotavit. Et quoniam in numeris naturalibus veritas præfati theorematis pendet ex hac illarum proprietate , quod quum ii incipiunt à nihilo, summa quotcumque terminorum sit ad summam terminorum totidem maximo æqualium, ut unitas ad binarium ; visum est non abs re esse eodem in loco proprietatis hujus numerorum naturalium rationem paucis innuere ; ubi etiam notamus , proprietatem istam numeris naturalibus non aliâ ratione competere , quàm quia constituunt progressionem arithmeticam, cujus prior terminus est zero , sive nihilum.

Quartò consideramus series infinitas, quarum termini sunt numeri , qui vulgò dicuntur figurati ; sed priùs exhibemus brevem quandam ideam istorum numerorum , quorum consideratio profecta est ex contemplatione numerorum multangulorum, ab ipsis Veteribus factâ. Itaque docemus numeros multangulos , sive polygonos Veteres dixisse illos , qui oriuntur ex continuâ collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium ; & pro diversitate hujus intervalli varias distinxisse species numerorum mul-

multangulorum : nam vocarunt eos triangulos, quum intervallum est unitas; vocarunt quadratos, quum intervallum est binarius; vocarunt pentagonos, quum idem intervallum est ternarius; atque ita deinceps. Sed subjungimus quoque, qua ratione hujusmodi numeros multangulos, sive polygonos Veteres appellarunt: nempe, quia ipsorum unitates per æqua intervalla in polygoni æquilateri formam disponi possunt.

Docemus deinde, quod sicuti Veteres consideraront numeros, qui oriuntur ex continuâ collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, eosque vocarunt multangulos, sive polygonos, quia unitates ipsorum per æqua intervalla dispositæ, multangulum, sive polygonum æquilaterum repræsentant; sic Recentiores ulteriùs progressi consideraverint numeros alios, qui generantur ex continuâ ipsorum multangulorum, aliorumque inde ortorum numerorum additione, vel collectione; & tam hos, quàm illos figuratos appellaverint, quia scilicet unitatibus ipsorum, per æqua intervalla dispositis, diversimodè possunt cōfigurari. Unde quum numeri figurati dicantur nō modò ii, qui oriutur ex continuâ collectio-

ctione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, verùm etiam, qui ex continuâ inde ortorum numerorū additione generantur; deducimus hinc numeros figuratos non modò in varia genera distingui posse, pro diversitate intervalli, quo numeri genitores, hoc est ab initio assumpti ab unitate progrediuntur; sed & ipsos cujusque generis numeros in varios ordines dividi posse, pro diversâ ratione, qua ex iisdem illis numeris genitoribus, sive ab initio assumptis generari intelliguntur.

Interim non de omnibus numeris figuratis agendum aggredimur, sed de iis tantùm, qui sut generis primi, quique oriuntur à numeris, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur. Atque hos in certos ordines ita dividimus, ut quemadmodum dicuntur genitores ipsi illi numeri, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur; ita dici debeant figurati ordinis primi, qui oriuntur ex additione continuâ ipsorum genitorum; figurati ordinis secundi, qui oriuntur ex collectione continuâ figuratorum primi ordinis; atque ita deinceps. Et quamquam cujuscumque sint ordinis numeri figurati, ii in infinitum continuati

nuati constituant simul collecti quantitatem infinitam; consideramus tamen series infinitas, quarum termini, aut etiam coefficientes terminorum sunt numeri isti: quia sicuti in unum colligere licet quotcumque numerorum naturalium, ex quibus ii suam originem habent; ita poterit quotcumque eorum numerorum finita semper summa inveniri.

Jam ad has numerorũ figuratorũ summas inveniendas, præmittimus primò hanc ipsorum proprietatem, quod sicuti in numeris natururalibus præfixo unitati, sive primo termino unico zero, summa terminornm aliquot est ad summam terminorum totidem maximo æqualium in ratione subduplâ; ita in numeris figuratis, si primo termino tot zero præfigantur, quot designat exponens ordinis numerorum auctus unitate unâ, summa terminorum aliquot sit ad summam ex totidem terminis, quorum quisque maximum adæquet, ut unitas ad eundem exponentem auctum duabus unitatibus: qua proprietate suppositâ, invenimus summas prædictas, faciendo duas progressiones arithmeticas, ambas ascendentes per unitatis incrementum, unam quidem à multitudine terminorum in unam sum-

summam colligendorum, alteram ab unitate, & utramq; tot terminorum, quot designat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus; nam multiplicando deinde inter se mutuò, tam terminos prioris progressionis, quàm terminos alterius, & dividendo productum ex primis per productum ex secundis, habebitur in quotiente summa quæsita.

Proprietatis hujus numerorum figuratorum primus, qui demonstrationem dederit universalem, & scientificam, fuit Jacobus Bernoullius, Mathematicus Celeberrimus; sed quum ejus suo Fratri Johanni Bernoullio copiam fecisset, animadvertit istę posse demonstrationem eleganter abbreviari; quam rursus nitidiorem nos reddere conati sumus, præmisso velut lemmate theoremate quodam generale. Cæterùm, quemadmodum summa numerorum omnium naturalium est ad summam terminorum totidem maximo æqualium in ratione subduplâ; ita quoque ex eadem illâ proprietate deducimus summam numerorum omnium figuratorum cujusque ordinis esse ad summam ex totidem terminis, quorum quisque maximum adæquet, ut est unitas ad exponentem ordinis eorum numerorum, duabus unitatibus auctum.

Quartò consideramus series infinitas, quarum termini sunt potestates, hoc est quadrata, cubi, quadrato-quadrata numerorum naturalium; nam tametsi hujusmodi series tales sint quoque, ut in infinitum continuatæ numquam possint finitam summam exhibere; utilis tamen est earum contemplatio, quia tametsi summa omnium infinitorum terminorũ, velut infinita, haberi nequeat, nihilominus quæ summa oriatur ex quamplurium terminorum additione, haud difficile est definire. Utimur autem ad has summas definiendas summis jam determinatis numerorum figuratorum. Nam etsi Wallisius, aliique, qui infinitorum tractarunt Arithmeticam, primò summas quadratorum, cuborum, aliarumque potestatum numerorum naturalium investigaverint, deinde verò ad definiendas summas numerorum figuratorum pertransierint; nihilominus notante Jacobo Bernoullio naturæ rei longè meliùs convenire videtur, si primò quidem numerorum figuratorum summæ determinentur, postea verò ad potestatum summas investigandas descendatur.

Jam quemadmodum summa numerorum

rum omnium naturalium est ad summam terminorum totidem maximo æqualium in ratione subduplâ; ita ostendimus summam quadratorum omnium, quæ fiunt ex numeris naturalibus, esse ad summam totidem maximo æqualium in ratione subtriplâ; & summam cuborum omnium, qui fiunt ex iisdem numeris naturalibus, esse ad summam totidem æqualium maximo in ratione subquadruplâ; atque ita deinceps: ex quibus plura alia theoremata colligimus, proportionem inter numeros figuratos, & potestates numerorum naturalium exhibentia, quæ nescio an adhuc ab Auctore aliquo sint adnotata. Nec reticemus pulcherrimam proprietatem, quam in summis indefinitis tam potestatum, quàm numerorum figuratorum Jacobus Bernoullius observavit: nempe quod si propriis suis signis addantur in unum fractiones illæ, quæ in summis illis sunt terminorum coefficientes, summa, quæ inde oritur, fit ubique unitas.

Denique serierum infinitarum exempla alia proferimus. Et primò quidem ostendimus, quod tametsi series infinitæ, quarum termini sunt, vel numeri naturales, vel numeri figurati numerorum na-

naturalium, in infinitum continuatæ, numquam possint finitas summas exhibere; nihilominus si termini earum serierum dividantur ordine per terminos alterius seriei, cujus termini crescendo geometricè progrediantur, vel quod eodem recidit, multiplicentur per terminos novæ seriei, progredientes geometricè decrescendo, quod inquam id, quod oritur ex infinitorum illorum terminorum collectione, sit semper quantitas finita. Et quamquam hujus rei veritatem ostendamus, determinando speciatim summas illas pro unoquoque ordine numerorum figuratorum; deinde tamen regulam proferimus generalem, quæ ad omnes casus se extendit.

Ostendimus etiam circa numeros istos figuratos, quod etsi summa ipsorum, cujuscumque sint ordinis, sit infinita, attamen si invertantur, & fiant denominatores fractionum, quarum unaquæque unitatem habeat pro suo numeratore, iidem simul collecti summam exhibeant finitam. Reducimus autem hanc numerorum figuratorum proprietatem ad istud theorema generale, quod in numeris figuratis inversis summa omnium terminorum, qui primùm excipiunt, eam unitatis partem adæquet, quam designat exponens ordinis numerorum. Notamusque, quod si ipsi numeri naturales inter ordines numerorum figuratorum eâ ratione collocentur, ut exponens ordinis ipsorum sit zero, sive nihilum, possit idem theorema iis etiam numeris applicari: adeo, ut si invertantur numeri naturales, & constituatur ex eorum inversione series harmonica, dici possit, quod termini omnes hujus seriei, qui primùm excipiunt, simul collecti eam unitatis partem adæquent, quam designat zero, sive nihilum; adeoque, quod summa omnium illorum terminorum sit quantitas infinita, quum dividendo finitum per zero, sive nihil, infinitum oriatur.

Infinitam autem esse summam terminorum omnium constituentium seriem harmonicam deprehendit primò Johannes Bernoullius ex absurditate manifestâ, quæ sequeretur, si summa seriei harmonicæ finita statueretur. Idem deinde demonstravit aliâ ratione Jacobus Bernoullius, Jacobi Frater. Sed id velut prorsus memorabile tripliciter quidem à nobis ostenditur; primò demonstrando seriem harmonicam talem esse, ut à se ipsâ primo termino multatâ non differat; secundò dò ostendendo seriem, quæ oritur ex inversione numerorum imparium, æqualem esse seriei, ortæ ex numeris paribus inversis; & tertiò demonstrando summam seriei harmonicæ hujusmodi esse, ut abscissâ ex eâ unitate unâ, alia rursus, atque alia in infinitum possit abscindi: quorum quidem omnium unumquodque in propatulo ponit, summam terminorum omnium, seriem harmonicam constituentium, quantitatem esse infinitam.

Tandem ostendimus summam finitam illius seriei, quæ oritur ex inversione quadratorum unitate minutorum, indicatam à Viro Clarissimo Gulielmo Gotofredo Leibnitio occasione mirabilis suæ quadraturæ circuli in principio Auctorum Lipsiensium publicatæ. Nam, quum hujusmodi series sit semissis ejus, quæ oritur, subtrahendo ex terminis seriei harmonicæ terminos ejusdem seriei duobus primis multatæ; perspicuum est, summam omnium suorum terminorum esse semissem duorum priorum seriei harmonicæ, atque adeo tres quartas partes unitatis adæquare. Sed ostendimus etiam, quod si ex eadem serie excerpas terminos loco pari positos, summa seriei reliquæ semissem unitatis adæquet. Verumtamen si ex

ex postremâ istâ serie excerpas adhuc terminos loco pari collocatos, relinquetur series, cujus summa finita, nullo numero exprimibilis, erit vera magnitudo circuli posito, quod quadratum circulo circumscriptum adæquet semissem unitatis.

Quoniam autem in explicandâ serierum infinitarum doctrinâ longè quidem morati sumus, quàm nostrum erat animus, & suscepti operis ratio exigere videbatur: proinde, ut pateret non omninò inutilia esse, quæ prætermitti potuisse facile quisque sibi persuadet; operæ pretium nobis visum est, doctrinæ de seriebus infinitis formulam quandam generalem subnectere, qua mediante vel solius substitutionis ope possit quæcumque quantitas duabus partibus constans ad datam quamcumque potestatem elevari; atque hac quidem potestatum formulâ primò nostræ Algebræ libro finem imponimus. Itaque præmisso prius qua ratione potestates generaliter, ac indefinitè designari possint in quantitatibus simplicibus; ostendimus deinde, qua ratione hoc idem fieri possit in quantitatibus compositis, hoc est in iis, quæ duabus partibus constant. Et quoniam potestates quantitatum compositarum plures terminos involvolvunt, quorum singuli suos habent coefficientes; propterea primò quidem ostendimus, qua ratione designari debeant generaliter, ac indefinitè termini cujuscumque potestatis ex radice aliquâ binomiâ, tum quo pacto designandi sint itidem generaliter, ac indefinitè coefficientes eorum terminorum.

Expressis generaliter, ac indefinitè tum terminis cujuscumque potestatis ex radice aliquâ binomiâ, cum coefficientibus eorundem terminorum; facile deinde nobis fuit formulam potestatum generalem exhibere, nimirum afficiendo ordine singulos terminos propriis suis coefficientibus, eosque iis signis inter se mutuò conjungendo, quæ multiplicationis exigunt regulæ. Hæc autem formula etsi pro iis tantùm potestatibus constructa videatur, quæ dici debent perfectæ positivæ, potest nihilominus aliis etiam potestatibus applicari. Quod ut liquidò constet, primò quidem ostendimus, qua ratione formulæ illius beneficio elevetur radix aliqua, cujus duæ sunt partes ad potestatem, quæ exponentem habeat numerum integrum negativum; tum deinde quo pacto elevetur ad potestatem, cujus exponens sit numerus fra-

ctus, sive positivus, sive negativus. Unde compertum unicuique fit ejusdem formulæ generalis beneficio, nullo negotio fieri posse series infinitas, quæ cùm à divisione, tum à radicum extractione suam trahunt originem.

Primum hunc Algebræ librum quum transmisissem ad Virū Clarissimum Cesarem Cinque, qui apud Monachos Cassinenses Medicinæ Artis praxim profitetur; Auctor ipse mihi fuit, ut eodem in libro Appendicis instar agerem de numeris figuratis aliorum generum, & de eorundem summis indefinitis, ne quicquam horum numerorum fugeret Lectores. Itaque, quia tanto Viro, non modò Medico, & Philosopho eximio, verùm etiam Mathematico præstantissimo, non poteram morem non gerere; proinde Appendicem illam adornare statim cogitavi. Quocirca detectâ in aliis istis numeris figuratis mirâ quadam proprietate, per quam facili negotio ex iis, qui sunt primi generis, deducuntur; facile nobis fuit beneficio illius proprietatis definire summas numerorum, qui in aliis generibus singulos figuratorum ordines constituunt, quæ quidem summæ nescio num ab Auctore aliquo hucusque fuerint determinatæ.

IN-

INDEX

CAPITUM, ET ARTICULORUM

LIBRI PRIMI.

De calculo litterali, sive specioso.

CAP. I.

CAP. II.

III.

CAP. III.

CAP. IV.

CAP. V.

I. *Ex-*

CAP. VI.

Potestatum idea generalior exhibetur.

CAP. VII.

Calculus radicalium simplicium.

VI.

CAP. VIII.

Calculus radicalium compositarum.

CAP. IX.

Extractio radicum ex binomiis.

CAP.

AL-

ALGEBRÆ ELEMENTORUM
LIBER I.

De Calculo litterali, sivè specioso.

UT regulæ calculi litteralis, sivè speciosi meliùs intelligantur, illud in limine præmittendum, quòd sicuti omnes quãtitates possunt per alphabeti litteras designari; ità earundem multiplices, aut partes quælibet, adhibitis figuris arithmeticis, non incongruè designentur.

Hac ratione, si aliqua quantitas vocetur a; erit ejus duplum $2a$; triplum $3a$; quadruplum $4a$; atque ita deinceps. Et similiter quantitatis, designatæ per b, erit

se-

ſemiſſis $\frac{1}{2}b$, triens $\frac{1}{3}b$, quadrans $\frac{1}{4}b$, atque ita de aliis.

Præmittendum eſt quoque, in calculo litterali, præter ipſas litteras, per quas quantitates deſignantur, adhiberi etiam hæc duo ſigna $+$, & $-$, quorum primum ſignificat plus, alterum ſignificat minus: qua ratione $a+b$ idem valet, ac a plus b; & $c-d$ idem, ac c minus d.

Et quemadmodum ultrò liquet $a+a$ idem eſſe, ac $2a$; $3a+2a$ idem, ac $5a$; ita quoque liquidò conſtat $5a-3a$ idem eſſe, ac $2a$; $3b-2b$ idem, ac b; & $c-c$ idem, ac zero, ſive nihilum: undè quum plures occurrunt quantitates, iis ſignis connexæ, iiſdemque litteris deſignatæ, contrahendæ ſunt illæ, habitâ ſignorum, quibus afficiuntur, ratione.

Hoc pacto ſeries iſta quantitatum $5a-3b+5b-2a$ reducitur ad $3a+2b$: nam $5a-2a$ eſt idem, ac $3a$; & $-3b+5b$ eſt idem, ac $+2b$. Similiter ſeries iſta quantitatum $5m-6n+4n-3m$ reducitur ad $2m-2n$: nam $5m-3m$ eſt idem, ac $2m$; & $-6n+4n$ idem eſt, ac $-2n$. Atque ita quoque ſeries quantitatum $8a-2c-3c+4a$

$+4a$ reducitur ad $12a-5c$: nam $8a+4a$ ſunt $12a$; & $-2c-3c$ ſunt $-5c$.

CAPUT I.

Calculus quantitatum ſimplicium.

Quantitatum duæ ſpecies diſtinguuntur, quarum aliæ dicuntur ſimplices, aliæ compoſitæ. Quantitates ſimplices ſunt illæ, quæ vel unicâ litterâ, vel pluribus litteris nullo ſigno copulatis deſignantur, ut a, b, c; vel etiam ab, bc, cd. Quantitates verò compoſitæ, quæ pluribus litteris ſigno $+$, vel $-$ conjunctis exprimuntur. Hinc primò calculum quantitatum ſimplicium, tum calculum quantitatum compoſitarum oſtendemus.

I.

Additio quantitatum ſimplicium.

Quum una quantitas alteri addenda proponitur, nihil aliud fieri debet, quàm unam plus alterâ ſumere. Hinc adduntur in unum duæ, aut plures ſimplices quantitates, conjungendo eas ſigno

+. Sic ad addendum a cum b, ſcribo $a+b$; pariterque ad addendum a cum b, & c, ſcribo $a+b+c$: neque aliter fiet, ſi addi debeant in unum $2a$, $3b$, $3c$; nam ſumma erit $2a+3b+3c$.

Eâdem ratione, ſi addenda proponatur quantitas a cum ſe ipſa, hoc eſt cum alia quantitate a, ſumma erit $a+a$. Sed quoniam utraque quantitas eâdem litterâ deſignatur, ſcribi poterit loco ejus $2a$. Et ſimiliter ad addendum $3a$ cum $4a$, ſcribi poterit, vel $3a+4a$, vel etiam ſimpliciùs $7a$. Atque ita quoque erit, vel $3c+2c+4d$, vel $5c+4d$ ſumma trium quantitatum $3c$, $2c$, $4d$.

II.

Subtractio quantitatum ſimplicium.

Quum ex una quantitate alteram oportet ſubducere, nihil aliud fieri debet, quàm unam minus alterâ ſumere. Hinc ex una quantitate altera ſubducitur, quotieſcumque conjunguntur ita quidem ſigno —, ut ſignum iſtud præcedat quantitatem ſubtrahendam. Ita ad ſubtrahendum b ex a, ſcribo $a-b$; pariterque ad ſubtrahendum

c ex

c ex a, ſcribo $a-c$: neque aliter fiet, ſi ex $3a$ ſubtrahi debeat $2c$; nam reſiduum erit $3a-2c$.

Eâdem ratione, ſi ex quantitate $5a$ ſubtrahenda proponatur quantitas $3a$, reſidum erit $5a-3a$. Sed quoniam utraque quantitas eâdem litterâ deſignatur; ſcribi poterit loco ejus $2a$. Et ſimiliter, ad ſubtrahendum $4c$ ex $7c$, ſcribi poterit, vel $7c-4c$, vel etiam $3c$. Atque ita quoque reſiduum, quod oritur, ſubtrahendo $4m$ ex $9m$, erit, vel $9m-4m$, vel ſimpliciùs $5m$.

III.

Multiplicatio quantitatum ſimplicium.

Quantitates ſimplices multiplicantur per ſe mutuò, conjungendo eas, nullo ſigno interjecto. Ita, ſi a multiplicetur per b, productum erit ab; & ſimiliter ſi a multiplicetur per c, productum erit ac; pariterque erit aa productum, quod oritur, multiplicando a per a.

Sed quemadmodum expreſſio $a+a$ contrahitur, & loco ejus ſcribitur $2a$; ita expreſſio aa contracta deſignatur per a^2:

 qua

qua ratione *aaa* designatur etiam per a^3; *aaaa* per a^4; atque ita deinceps: adeò ut semper ac quantitas aliqua occurrit, cui à tergo numerus aliquis sit adscriptus, intelligenda sit quantitas illa toties per multiplicationem posita, quot habet ille numerus unitates.

Hinc sedulò notetur hîc velim, magnum esse discrimen inter quantitatem, cui numerus aliquis est præfixus, & inter eandem quantitatem, cui idem numerus est adscriptus à tergo; veluti inter $2a$, & a^2; inter $3a$, & a^3; inter $4a$, & a^4. Nam expressiones istæ $2a$, $3a$, $4a$ significant quantitatem *a* bis, ter, quater positam esse per additionem; quum tamen hæ aliæ expressiones a^2, a^3, a^4 significent eandem quantitatem *a* bis, ter, quater positam esse per multiplicationem.

Jam autem, quum a^2 idem sit, ac *aa*; & a^3 idem, ac *aaa*: liquet, ad multiplicandum a^2 per a^3, scribendum esse a^5; nam juxta regulam generalem, si *aa* multiplicetur per *aaa*, productum erit *aaaaa*, quod idem valet, ac a^5. Atque ita quoque a^3 erit productum, quod oritur, multiplicando *a* per a^2; & a^7 productum, quod provenit, multiplicando a^2 per a^5. Sed si multiplicari debeat a^2 per b^3, productum erit $a^2 b^3$.

Quòd si quantitates, ad invicem multiplicandæ, numeros ante se habeant; multiplicandi sunt ii, ut in vulgari Arithmetica: qua ratione multiplicando $2a$ per $3c$, producitur $6ac$; & similiter multiplicando $3a$ per $4b$, producitur $12ab$; atque ita quoque erit $8a^5$ productum, quod oritur, multiplicando $4a^2$ per $2a^3$.

IV.

Divisio quantitatum simplicium.

Divisio destruit id, quod componit multiplicatio: unde sicuti multiplicando *a* per *b*, producitur *ab*; ita dividendo *ab* per *a*, quotiens oritur *b*: proindeque divisio quantitatum simplicium fieri debet, delendo divisorem ex dividendo: adeò ut diviso *abc* per *a*, quotiens erit *bc*; & diviso a^5 per a^3, quotiens fiet a^2.

Quòd si autem divisor deleri nequeat ex dividendo; tunc lineola interjecta scribatur infra illud ad instar fractionis. Sic dividendo *ab* per *c*, quotiens oritur $\frac{ab}{c}$; & similiter dividendo *bd* per *a*, quotiens producitur $\frac{bd}{a}$: neque aliter instituentuenda eſt diviſio, quum dividere oporteet a^3 per c^2; nam fiet quotiens $\frac{a^3}{c^2}$.

Sed ſi diviſor, partim deleri poſſit ex dividendo, partim non item; tunc deleatur, quod deleri poteſt; & lineola interjecta ſubſcribatur, quod eſt indelebile: qua ratione quotiens, qui oritur, dividendo abd per ac, erit $\frac{bd}{c}$; & ſimiliter erit $\frac{ab}{m}$ quotiens, qui producitur dividendo abc per cm; atque ita quoque erit $\frac{a^2}{c}$ quotiens, qui oritur dividendo a^3 per ac.

Quod ſi quantitates, ad dividendum propoſitæ, numeros ante ſe habeant præfixos: dividendi ſunt ii, ut in Arithmetica vulgari: qua ratione dividendo $6ac$ per $2a$, quotiens oritur $3c$; pariterque dividendo $12ab$ per $3a$, quotiens producitur $4b$; atque ita etiam erit $4am$ quotiens, qui oritur, dividendo $12a^2m^2$ per $3am$.

CAP. II.

Calculus quantitatum compoſitarum.

Oſtenſo calculo quantitatum ſimplicium; ſequitur, ut oſtendamus calculum quantitatum compoſitarum, quæ ex ſimplicium additione, vel ſubtractione oriuntur. Et quoniam quantitates compoſitæ dicuntur illæ, quæ pluribus litteris ſigno +, vel — conjunctis deſignantur; duæ hinc in iis quantitatum componentium ſpecies diſtingui ſolent. Nam aliæ dicuntur poſitivæ, cujuſmodi ſunt illæ, quas ſignum + præcedit; aliæ negativæ, quales quidem ſunt eæ, quæ ſigno — afficiuntur.

Vulgatum eſt apud Algebriſtas, quantitates poſitivas eſſe nihilo majores, quantitates negativas nihilo minores. Id igitur, ut rectiùs intelligatur, ſciendum eſt zero, ſive nihilum, quantitatibus additum, earum valorem nec augere, nec minuere: quocirca quod potis eſt alicujus quantitatis valorem augere, id nihilo majus dicendum eſt; quod verò minuere, nihilo minus dici debet: unde quia quantitas poſitiva, alteri addita, auget valorem ejus, & viciſſim negativa minuit; idcirco quantitas poſitiva erit nihilo major, quantitas negativa nihilo minor.

Ex quo patet, quantitates dici poſitivas, vel negativas, non quidem propter ſe, ſed in ordine ad eas, de quibus valorem ſuum affirmant, vel negant; nam cæteroqui nemo, opinor, ibit inficias, quin omnis quantitas in ſe ipſa ſpectata ſit poſitiva, ſeu nihilo major. Cæterùm, quia illæ quantitates, quæ nullo ſigno afficiuntur, idem præſtant, quod quantitates affectæ ſigno +; proinde in calculo quantitatum compoſitarum quantitates ſimplices, quæ nullo ſigno afficiuntur, conſiderantur, velut affectæ ſigno +.

I.

Additio quantitatum compoſitarum.

Quantitatum compoſitarum additio fit, conjungendo eas iiſdem omnino ſignis, quibus partes ipſarum ſunt affectæ, & obſervando ſemper hæc tria. I, ut quantitates illæ, quæ nullo ſigno afficiuntur, tamquam affectæ ſigno + debeant conſiderari. II, ut quantitates illæ, quæ iiſdem litteris expreſſæ, iiſdem quoque ſignis afficiuntur, debeant addi in unam ſummam, adhibitis notis arithmeticis. Et III, ut illæ quantitates, quæ iiſdem litteris deſignatæ, contrariis ſignis afficiuntur, debeant à ſe mutuò ſubduci.

Hoc pacto, ſi quantitati $a + b$ addenda ſit quantitas $c + d$, fiet ſumma $a + b + c + d$. Et ſimiliter ſi quantitati $a - b$ addenda ſit quantitas $c - d$, ſumma orietur $a - b + c - d$. Sed ſi quantitas $a - b$ addenda ſit quantitati $a + b$, ſumma erit $2a$: nam per regulam generalem ſumma earum quantitatum eſt $a - b + a + b$, ſed $a + a$ eſt $2a$, & $- b + b$ eſt zero, ſive nihilum: quare eadem ſumma erit ſimpliciter $2a$. Atque ita quoque ſumma quantitatum $2a - 3b$, & $3a + b$, erit $5a - 2b$; quemadmodum $6a - 4c$ erit ſumma quantitatum $4a - 6c$, & $2a + 2c$; & $5a - 6d$ erit ſumma quantitatum $3a - 4d$, & $2a - 2d$.

II.

Subtractio quantitatum compoſitarum.

Quantitatum compoſitarum ſubtractio fit, conjungendo quidem eas, ut in additione; ſed mutando ſigna omnia quantitatibus ſubducendis: qua in re tria

tria etiam oportet observentur. I, ut quantitates illæ, quæ nullo signo afficiuntur, considerari debeant velut affectæ signo +. II, ut quantitates illæ, quæ facta subtractione reperiuntur iisdem litteris expressæ, iisdemque signis affectæ, addi debeant in unam summam, adhibitis notis arithmeticis. Et III, ut siquidem plures occurrant quantites, quæ iisdem litteris expressæ, contrariis signis afficiantur, eæ debeant à se mutuò subduci.

Hoc pacto, si ex quantitate $a+b$ subducenda sit quantitas $c+d$, residuum fiet $a+b-c-d$; & similiter si ex quantitate $a-b$ subducenda sit quantitas $c-d$, residuum orietur $a-b-c+d$. Sed si ex quantitate $a+b$ subducenda sit quantitas $b-a$, residuum fiet $2a$; nam per regulam generalem residuum, quod oritur ex mutua earum quantitatum subductione, est $a+b-b+a$; sed $a+a$ idem est, ac $2a$; & $+b-b$ est quantitas zero æqualis: quare idem residuum erit simpliciter $2a$. Atque ita quoque, si ex quantitate $3a-2b$ subducenda sit quantitas $2a+3b$, residuum erit $a-5b$; & similiter, si ex quantitate $4a+5b$ subducenda sit quantitas $2a-3b$, residuum orietur $2a+8b$.

Un-

Unde liquet, quòd mediante subtractione, quemadmodum quantitates positivæ fiunt negativæ, ita vicissim negativæ evadant positivæ. Nam ex quantitate $a+b$ subducta quantitate altera $c-d$, juxta regulam datam, residuum fit $a+b-c+d$; & profectò quemadmodum quantitas c ex positiva abiit in negativã, ita vicissim quantitas d ex negativa versa est in positivam. Quod autem ad subducendam quantitatem $c-d$ ex altera $a+b$, mutanda sint signa quãtitatibus subducendis, & pro residuo scribendum $a+b-c+d$; id facilè demonstratur. Nam quum ex quantitate $a+b$ subducenda sit quantitas c, diminuta quantitate d; utiquè, si ex $a+b$ subducatur tota quantitas c, plus justo tollitur, & residuum $a+b-c$ minus erit justo residuo quantitate altera d; adeoque ad verum residuum obtinendum, oportet ei addere quantitatem d, & scribere $a+b-c+d$.

Mul-

III.

Multiplicatio quantitatum compositarum.

Multiplicatio quantitatum compositarum fit, multiplicando singulas unius partes per singulas partes alterius, & scribendo producta signo $+$, quum quantitates ad invicem multiplicandæ iisdem signis afficiuntur, & vicissim signo $-$, quum contrariis signis sunt affectæ. Atque hìc quoque tria illa sunt observanda, quæ in additione, & subtractione voluimus observata: nempe I, ut quantitates, nullo signo affectæ, considerari debeant, velut affectæ signo $+$. II, ut si facta multiplicatione plura occurrant producta partialia, quæ iisdem litteris expressa, iisdem quoque signis afficiantur, addi ea debeant in unum, adhibitis notis arithmeticis. Et III, ut si plura occurrant producta partialia, quæ iisdem litteris expressa, signa habeant contraria, ea debeant à se mutuò subduci.

Hac igitur ratione, si quantitas $a-b$ multiplicanda sit per aliam $c - d$, multiplico primùm a per c; & quia utraque quan-

quantitas afficitur signo $+$, productum ac etiam signo $+$ affici debet. Deinde multiplico b per c; & quia quantitates istæ contrariis signis afficiuntur, productum bc signo $-$ afficio. Porrò multiplico a per d; & quia harum quantitatum contraria itidem sunt signa, productum ad etiam signo $-$ subscribo. Denique multiplico b per d; quumque istæ quantitates iisdem signis sint affectæ, productum bd notari debet signo $+$: qua ratione productum totius multiplicationis erit $ac - bc - ad + bd$.

Similiter, si quantitas $2a+3b$ multiplicanda sit per quantitatem $3c - 2d$, productum fiet $6ac + 9bc - 4ad - 6bd$. Sed si quantitas $a+b$ multiplicari debeat per se ipsam, hoc est per $a+b$, productum erit $a^2+2ab+b^2$; quandoquidem per regulam generalem productum oritur $a^2+ab+ab+b^2$, & $+ab+ab$ idem est, ac $+2ab$. Quod si verò quantitas $a+b$ multiplicari debeat per $a - b$, productum erit $a^2 - b^2$; nam per regulam generalem debet esse $a^2 + ab - ab - b^2$, & $+ab - ab$ est quantitas, quæ idem valet, ac zero, sive nihilum.

Quòd autem productum affici debeat signo $+$, quum quantitates ad invicem mul-

multiplicandæ iisdem signis afficiuntur; & vicissim signo —, quum contrariis signis sunt affectæ: haud difficile est hujus rei rationem reddere. Nam primò, quod quantitas $a - b$, multiplicata per c, producat $ac - bc$, ostenditur sic: quoniam per quantitatem c multiplicanda est quantitas a, diminuta quantitate b; fit hinc, ut si a per c multiplicetur, productum ac majus sit justo producto, ea quidem quantitate, quæ producitur multiplicando b per c, nimirum quantitate bc: quocirca si quantitas ista bc subducatur ex ac, residuum $ac - bc$ verum productum designabit.

Secundò, quod quantitas $a - b$, multiplicata per quantitatem $c - d$, producat $ac - bc - ad + bd$, demonstratur eadem ratione: quoniam per quantitatem $c - d$ multiplicanda est quantitas a, diminutâ quantitate b; fit hinc, ut si a per $c - d$ multiplicetur, productum, quod oritur $ac - ad$, majus sit justo producto, eâ quidem quantitate, quæ producitur multiplicando b per $c - d$, nimirum quantitate $bc - bd$: quocirca, si quantitas ista $bc - bd$ subtrahatur ex $ac - ad$, residuum $ac - ad - bc + bd$ verum productum designabit.

Cæ-

Cæterùm nolim hîc silentio præterire, utilè plerumque esse, multiplicationem quantitatum compositarum nequaquam prædicto modo instituere; sed tantùm eam indicare, interposito inter ipsas quantitates signo isto x, quod significat hac de causa in, vel per. Ita, si multiplicanda proponatur quantitas ista $a + b$ per quantitatem aliam $c - d$, exhiberi poterit productum hac ratione $\overline{a + b} \times \overline{c - d}$. Et similiter, si quantitas $a + b$ multiplicanda sit per se ipsam, hoc est per aliam quantitatem $a + b$, designari poterit productum hujus multiplicationis in hunc modum $\overline{a + b} \times \overline{a + b}$, vel etiam hac alia ratione $\overline{a + b}^2$: non secus, ac ad multiplicandas simul tres quantitates, quarum quælibet sit $a + b$, scribi poterit, vel $\overline{a + b} \times \overline{a + b} \times \overline{a + b}$, vel etiam $\overline{a + b}^3$.

IV.

Divisio quantitatum compositarum.

Divisio quantitatum compositarum fit eâdem ratione, ac in Arithmetica

tica

tica vulgari. Proponatur exempli causa dividenda quantitas $ac + bc + ad + bd$ per aliam $a+b$. Divido primùm ac per a; & quia multiplicato divisore $a + b$ per quotientem c, producitur quantitas $ac + bc$, quæ subtracta ex quantitate dividenda, relinquit $ad + bd$: divido secundò ad per a; quumqne quantitas, quæ producitur, multiplicando divisorem $a + b$ per alium istum quotientem d, fit $ad + bd$, quæ subducta ex illo residuo, relinquit nihil; concludo quotientem totius divisionis esse $c + d$.

Non dissimiliter fieri debet divisio, si quantitates, ad dividendum propositæ, numeros sibi habeant præfixos. Ita, si velim dividere quantitatem $8a^2 + 12ab + 6ac + 9bc$ per aliam $2a + 3b$, divido primùm $8a^2$ per $2a$; & quia quotiens hujus divisionis est quantitas $4a$, quæ multiplicata per divisorem $2a + 3b$, dat pro producto quantitatem $8a^2 + 12ab$, subtraho quantitatem istam ex quantitate dividenda; & quia relinquitur $6ac + 9bc$, divido secundò $6ac$ per $2a$; quumque multiplicato quotiente istius divisionis $3c$ per divisorem $2a + 3b$, oriatur quantitas $6ac + 9bc$, quæ subducta ex illo residuo, relinquit zero, sive nihilum; proinde quo-

quotiens propositæ divisionis erit $4a + 3c$.

Quoniam autem quantitates, ad dividendum propositæ, non modò signo $+$, sed etiam signo $-$ affici possunt; fit hinc, ut neque etiam quotiens, qui oritur ex divisione duarum quantitatum, affici semper debeat signo $+$; sed quandoque signo $+$, quandoque verò signo $-$: unde quoad signa, quibus afficiendi sunt quotientes, qui ex quantitatum divisionibus oriuntur, hæc regula perpetuò est observanda; ut quotiescumque quantitates, quæ inter se mutuò dividuntur, iisdem signis sunt affectæ, quotiens signo $+$ affici debeat; quotiescumque verò sunt affectæ signis contrariis, tum quotiens signo $-$ sit afficiendus: qua ratione si quantitas $a^2 - b^2$ dividenda sit per quantitatem $a + b$, quotiens erit $a-b$: nam diviso a^2 per a, multiplicatoque quotiente a per divisorem $a + b$, producitur $a^2 + ab$, quod utique productum, subductum ex quantitate dividenda, relinquit $- ab - b^2$: unde quia diviso $- ab$ per a, multiplicatoque quotiente $- b$ per divisorem $a + b$, producitur $- ab - b^2$, quod subtractum ex illo residuo, nihil ampliùs relinquit; proinde quotiens propositæ di-

divisionis erit $a - b$.

Neque verò difficile est hujus regulæ rationem intelligere. Nam quotiens, per divisorem multiplicatus, producere semper debet quantitatem dividendam. Itaque quotiens tali semper signo affici debet, ut ex multiplicatione ejus per divisorem oriatur semper quantitas dividenda. Jam verò, ex superiùs ostensis, quantitas positiva producitur ex multiplicatione duarum quantitatum, eodem signo affectarum; & viciffim quantitas negativa ex mulriplicatione duarum quantitatum, quæ contrariis signis afficiuntur. Igitur, quum quantitas dividenda est positiva, quotiens affici debet eodem signo, quo divisor afficitur; & viciffim, quum quantitas dividenda est negativa, quotiens affici debet signo contrario ei, quo divisor affectus reperitur: proindeque afficiendus erit quotiens signo $+$, quum quantitates ad invicem dividendæ afficiuntur iisdem signis; & viciffim signo $-$, quotiescumque contrariis signis sunt affectæ.

Quod si accidat, ut divisio quantitatum compositarum tali modo fieri nequeat; eo casu quantitati dividendæ poterit ad instar fractionis divisor ipse subscribi: qua ratione, dividendo quantitatem $a^2 + c^2$ per $m + n$, designari poterit quotiens in hunc modum $\dfrac{a^2 + c^2}{m + n}$.

CAP. III.

Calculus Fractionum.

Quemadmodum ex additione, & subtractione quantitatum simplicium oriuntur quantitates compositæ; ita ex divisione quantitatum, tam simplicium, quàm compositarum oriuntur fractiones, sive quantitates fractæ. Unde quum calculus quantitatum, tùm simplicium, cùm compositarum abundè à nobis sit explicatus; ostendendus est modò calculus fractionum, quæ ex illarum divisione proficiscuntur.

Fractiones itaque sunt quantitates, designantes quotientes earum divisionum, quæ peragi non possunt. Ita, quia quantitas ab dividi nequit per c, fiet quotiens hujus divisionis fractio $\dfrac{ab}{c}$. Et similiter quia quantitas $a^2 + c^2$ dividi non potest per

per $m+n$, fiet quotiens talis diviſionis fractio $\frac{a^2+c^2}{m+n}$. Sed perinde, ac in Arithmetica vulgari, dicetur in poſterum numerator fractionis quantitas ſupra lineolam exiſtens, & denominator quantitas, quæ infra lineolam exiſtit. Ita in fractione $\frac{ab}{c}$ dicetur numerator quantitas ab, & denominator quantitas c.

Quin etiam, quemadmodum in vulgari Arithmetica quilibet numerus in formâ fractionis exprimi poteſt, ſubſcribendo ei pro denominatore unitatem; ita quoque quælibet quantitas algebraica ad modum fractionis poteſt repræſentari, ſi ei tamquam denominator eadem unitas ſubſcribatur: qua ratione repræſentabitur quantitas ab ad modum fractionis, ſcribendo $\frac{ab}{1}$; & ſimiliter quantitas a^2+c^2 exhibebitur ad inſtar fractionis, ſi pro ea ſcribatur $\frac{a^2+c^2}{1}$.

Sed ſi quantitas aliqua integra ad fra-

ctio-

ctionem dati nominis reduci debeat, id fiet quoque, ut in Arithmetica vulgari: nimirum multiplicando datam quantitatem per datum nomen, & producto ipſum datum nomen ſubſcribendo: qua ratione, ſi quantitas a reducenda ſit ad fractionem, cujus denominator ſit c, fiet fractio $\frac{ac}{c}$; & ſimiliter, ſi quantitas $m+n$ reducenda ſit ad fractionem, cujus denominator ſit a, fiet fractio $\frac{am+an}{a}$.

Occurrunt quandoque fractiones, quæ ad integras quantitates poſſunt revocari: unde, qua ratione id fieri poſſit, non abs re erit oſtendere. Id itaque fit, dividendo numeratorem fractionis per denominatorem; nam ſi diviſio fieri poſſit, quotiens hujus diviſionis erit quantitas integra quæſita. Ita ſi fractio $\frac{ac}{c}$ ad quantitatem integram ſit reducenda, divido numeratorem ac per denominatorem c; & quia diviſio fieri poteſt, indeque oritur quotiens a, erit a quantitas integra quæſita. Et eâdem ratione erit $m+n$

quan-

quantitas integra, ad quam reducitur fractio $\frac{am + an}{a}$.

In calculo fractionum oportet sæpe sæpius, duas, pluresve fractiones, quæ diversos habent denominatores, ad eandem denominationem reducere. Illud itaque obtinebitur, si numerator cujusque fractionis multiplicetur per denominatores aliarum, & cuique producto subscribatur id, quod ex denominatorum omnium multiplicatione producitur: qua ratione fractiones $\frac{a^2}{c}$, & $\frac{m^2}{n}$, reductæ ad eandem denominationem, erunt $\frac{a^2n}{cn}$, & $\frac{m^2c}{cn}$.

Et similiter fractiones $\frac{a^2}{c}$, $\frac{b^2}{m}$, $\frac{d^2}{n}$, si ad eandem denominationem reducantur, fient $\frac{a^2mn}{cmn}$, $\frac{b^2cn}{cmn}$, $\frac{d^2cm}{cmn}$.

Ad-

I.

Additio Fractionum.

Additio fractionum duos habet casus: vel enim fractiones addendæ sunt ejusdem denominationis, vel denominationis diversæ. In primo casu additio fit, conjungendo simul numeratores fractionum, & subscribendo summæ communem earum denominatorem. In secundo autem casu primò quidem fractiones propositæ reducendæ sunt ad eandem denominationem, tum addendæ sunt simul, ut in primo casu.

Hac ratione summa fractionum $\frac{bc}{a}$, & $\frac{bd}{a}$ erit $\frac{bc + bd}{a}$. Et similiter summa fractionum $\frac{bd}{m}$, & $\frac{ac - ad}{m}$ erit $\frac{bd + ac - ad}{m}$.

Sed si proponantur in unum addendæ fractiones $\frac{ab}{c}$, & $\frac{bd}{m}$, summa erit $\frac{abm + bdc}{cm}$; nam reductæ ad eandem denominatio-

nem

nem fiunt $\frac{abm}{cm}$, & $\frac{bdc}{cm}$. Pariterque si in unum addi debeant fractiones $\frac{a^2}{c}$, & $\frac{b^2-d^2}{m}$, summa erit $\frac{a^2m+b^2c-d^2c}{cm}$; quandoquidem si eæ ad eandem denominationem reducantur, fient $\frac{a^2m}{cm}$, & $\frac{b^2c-d^2c}{cm}$.

Quod si conjungenda sit quantitas integra cum aliqua fractione; tunc reducenda est primùm quantitas illa integra ad fractionem ejusdem nominis, deinde facienda est additio, ut in casu primo. Ita si quantitati integræ a addenda sit fractio $\frac{b^2}{c}$, reduco quantitatem integram a ad fractionem, cujus denominator sit c; quumque jam addendæ sint simul fractiones duæ ejusdem nominis $\frac{ac}{c}$, & $\frac{b^2}{c}$, fiet summa $\frac{ac+b^2}{c}$. Similiter, si quantitati integræ $a+b$ addenda sit fractio $\frac{d^2}{m}$, erit summa $\frac{am+bm+d^2}{m}$.

II.

Subtractio Fractionum.

Subtractio fractionum duos etiam casus habet: vel etenim fractiones propositæ sunt ejusdem denominationis, vel denominationis diversæ. In primo casu subtractio fit, subducendo ex numeratore unius numeratorem alterius, & residuo denominatorem communem subscribendo. In secundo autem casu primò quidem fractiones propositæ reducendæ sunt ad eandem denominationem, tum porro facienda subtractio, ut in casu primo.

Hac ratione id, quod remanet, subtrahendo ex fractione $\frac{bc}{a}$ fractionem aliam $\frac{bd}{a}$, erit $\frac{bc-bd}{a}$. Et similiter id, quod remanet, subtrahendo ex fractione $\frac{bd}{m}$ fractionem aliam $\frac{ac-ad}{m}$, erit $\frac{bd}{}$

$\frac{bd-ac+ad}{m}$. Sed, si ex fractione $\frac{ab}{c}$ subtrahi debeat fractio $\frac{bd}{m}$, residuum erit $\frac{abm-bdc}{cm}$; nam reductæ ad eandem denominationem fiunt $\frac{abm}{cm}$, & $\frac{bdc}{cm}$. Pariterque, si ex fractione $\frac{aa}{c}$ subtrahi debeat fractio $\frac{b^2-d^2}{m}$, residuum fiet $\frac{a^2m-b^2c+d^2c}{cm}$; quandoquidem si eæ ad eandem denominationem reducantur, fient $\frac{a^2m}{cm}$, & $\frac{b^2c-d^2c}{cm}$.

Quod si ex quantitate integra subtrahenda sit fractio aliqua, vel etiam ex fractione aliqua subtrahenda sit quantitas integra; tunc reducenda est primùm quantitas illa integra ad fractionem ejusdẽ nominis, deinde facienda est subtractio, ut in casu primo. Ita, si ex quantitate integra a subtrahenda sit fractio $\frac{b^2}{c}$, redu-

co quantitatẽ integram a ad fractionem, cujus denominator sit c; quumque jam ex fractione $\frac{ac}{c}$ subtrahenda sit fractio $\frac{b^2}{c}$, fiet residuum $\frac{ac-b^2}{c}$. Similiter si ex fractione $\frac{b^2}{c}$ subtrahenda sit quantitas integra a, residuum orietur $\frac{b^2-ac}{c}$.

III.

Multiplicatio fractionum.

In multiplicatione fractionum duo sunt casus distinguendi: aut enim fractio per fractionem, aut fractio per quantitatem integram est multiplicanda.

In priori casu multiplicandi ad invicem sunt fractionum, tam numeratores, quàm denominatores; nam quæ producuntur, dabunt respectivè numeratorem, denominatoremque alterius fractionis, quæ productum quæsitum exhibebit: qua ratione fractio $\frac{ab}{c}$, multiplicata per fractionem $\frac{bd}{m}$, producet $\frac{ab^2d}{cm}$; pariterque fra-

fractio $\frac{ab + ad}{c}$ multiplicata per fractionem $\frac{am}{n}$, dabit pro producto fractionem aliam $\frac{a^2bm + a^2dm}{cn}$.

In secundo autem casu scribatur quantitas integra ad instar fractionis, ei unitatem subscribendo; & iam quia multiplicandæ ad invicem sunt duæ fractiones, fiet rursus multiplicatio, ut in casu primo. Ita, si multiplicanda sit quantitas integra a per fractionem $\frac{ab}{c}$, subscribo quantitati integræ a unitatem, ut ipsa quoque formam induat fractionis; tum quia multiplicanda est fractio $\frac{a}{1}$ per fractionem $\frac{ab}{c}$, fiet productum fractio alia $\frac{a^2b}{c}$.

Unde patet, quod ad multiplicandam quantitatem integram per fractionem aliquam, sufficiat multiplicare quantitatem integram per numeratorem fractionis, & producto denominatorem subscri-

be-

bere. Ita ad multiplicandam quantitatem integram a per fractionem $\frac{ab}{c}$, multiplico primum quantitatem integram a per numeratorem fractionis ab, tum producto a^2b subscribo denominatorem c; eritque $\frac{a^2b}{c}$ productum quæsitum. Similiter si quantitas integra $a + b$ multiplicari debeat per fractionem $\frac{c^2}{m}$, fiet productum $\frac{ac^2 + bc^2}{m}$; quandoquidem, multiplicata quantitate integra $a + b$ per numeratorem fractionis c^2, & producto $ac^2 + bc^2$ subscripto denominatore m, oritur fractio $\frac{ac^2 + bc^2}{m}$.

IV.

Divisio fractionum.

IN divisione fractionum tres oportet casus distinguamus. Primus erit, quum dividenda est fractio per fractionem.

nem. Secundus, quum quantitas integra per fractionem dividenda proponitur. Et tertius, quum viciſſim fractio per quantitatem integram dividi debet.

In primo caſu, in quo dividenda eſt fractio per fractionem, multiplicetur numerator illius per denominatorem iſtius, & viciſſim numerator iſtius per denominatorem illius; nam producta dabunt reſpectivè numeratorem, denominatoremque alterius fractionis, quæ quotientem quæſitum exhibebit. Ità ſi dividenda ſit fractio $\frac{ab}{n}$ per fractionem $\frac{cd}{m}$, multiplico primùm numeratorem illius ab per denominatorem iſtius m; deinde multiplico viciſſim numeratorem iſtius cd per denominarorem illius n; denique producto, ex priori multiplicatione orto, abm ſubſcribo productum cdn, ortum ex multiplicatione ſecunda; eritque fractio $\frac{abm}{cdn}$ quotiens propoſitæ diviſionis.

In ſecundo caſu, in quo quantitas integra per fractionem eſt dividenda, ſcribatur quantitas integra ad inſtar fractionis, ei unitatem ſubſcribendo; & jam quia dividenda eſt fractio per fractionem, fiet rurſus diviſio, ut in caſu primo. Ita, ſi dividenda ſit quantitas integra a^2 per fractionem $\frac{mn}{c}$, ſubſcribo quantitati integræ a^2 unitatem, ut ipſa quoque induat formam fractionis; tum quia dividenda eſt fractio $\frac{a^2}{1}$ per fractionem $\frac{mn}{c}$, fiet quotiens diviſionis $\frac{a^2c}{mn}$.

Ex quo patet, ad dividendam quantitatem integram per fractionem ſufficere, ſi multiplicetur quantitas integra per denominatorem fractionis, & producto numerator ſubſcribatur. Ita, ad dividendam quantitatem integram a^2 per fractionem $\frac{mn}{c}$, multiplico primùm quantitatem integram a^2 per denominatorem fractionis c; deinde producto a^2c ſubſcribo numeratorem mn, eritque fractio $\frac{a^2c}{mn}$ quotiens propoſitæ diviſionis.

Denique in tertio caſu, in quo viciſſim dividenda eſt fractio per quantitatem integram, ſcribatur ſimiliter quantitas integra ad inſtar fractionis, ei unitatem ſubſcribendo; quumque jam dividenda ſit fractio per fractionem, fiet adhuc diviſio, ut in caſu primo. Ita, ſi dividenda ſit fractio $\frac{a^2b}{c}$ per quantitatem integram m, ſubſcribo quantitati integræ m unitatem, ut ipſa quoque fractionis induat formam; tum quia dividenda eſt fractio $\frac{a^2b}{c}$ per fractionem $\frac{m}{1}$, fiet quotiens propoſitæ diviſionis fractio alia $\frac{a^2b}{cm}$.

Unde patet, quod ad dividendam fractionem per quantitatem integram ſufficiat, ſi multiplicetur denominator fractionis per ipſam quantitatem integram, & productum numeratori ſubſcribatur. Ita, ſi fractio $\frac{a^2b}{c}$ dividenda ſit per quantitatem integram m, multiplico primùm denominatorem fractionis c per quantitatem integram m, deinde productum

cm

cm ſubſcribo numeratori a^2b; eritque fractio $\frac{a^2b}{cm}$ quotiens propoſitæ diviſionis.

V.

Reductio fractionum ad minimos terminos.

IN calculo fractionum accidit nonnunquam, ut fractio aliqua quantitatibus adeò compoſitis exprimatur, ut commodè, non mutato ejus valore, quantitatibus ſimplicioribus exprimi poſſit: unde priuſquam ex calculo fractionum ad ulteriora progrediamur, ad rem erit, hîc breviter oſtendere, quo pacto fractiones ad minimos terminos ſint reducendæ. Hunc in finem tradenda priùs eſt methodus, qua inveniri poſſit maxima communis menſura duarum quantitatum: qua in re duos caſus oportet diſtinguamus.

Nam primò, ſi utraque quantitatum, vel una ad minimum ſit ſimplex, capiantur litteræ, quæ ſingulis ſunt communes, & productum ex iis erit maxima communis menſura quæſita. Ita, ſi quantitates propoſitæ ſint *abcd*, & *acm*; erit *ac*

 maxi-

maxima earum communis mensura. Similiter, si quantitates propositæ sint $abcd$, & $abd + abm$; erit illarum maxima communis mensura ab. Atque ita quoque erit am maxima mensura communis quantitatum abm, & $acm + adm$.

Quod si utraque quantitatum sit composita; auferantur primò litteræ singulis utriusque partibus communes; deinde subducantur quoque litteræ, quæ in singulis cujusque partibus reperiuntur; denique dividatur major per minorem: & siquidem divisio fiat exactè, erit ipsa quantitas minor, per litteras singulis utriusque partibus communes multiplicata, maxima communis mensura.

Hoc pacto, si invenienda sit maxima communis mensura duarum quantitatum $ab^2c - ad^2c$, & $abm - adm$; aufero primùm litteram a, quæ in singulis partibus utriusque quantitatis existit, earumque una fiet $b^2c - d^2c$, altera $bm - dm$. Deinde ex illa deleo quantitatem c, singulis ejus partibus communem; ex ista aufero quantitatem m, quæ in singulis ipsius partibus reperitur: unde illa evadet $b^2 - d^2$, hæc fiet $b - d$. Denique divido $b^2 - d^2$ per $b - d$; & quia divisio fit exactè, erit maxima mensura communis quantitas $ab - ad$, quæ producitur, multiplicando $b - d$ per a.

Sed si divisâ majori per minorem, divisio non fiat exactè; auferantur ex residuo litteræ, in singulis ejus partibus existentes, & minor per hoc residuum dividatur. Nam, si hæc altera divisio prodibit exacta, erit residuum illud, per litteras singulis utriusque partibus communes multiplicatum, maxima communis mensura. Sed si neque etiam hæc altera divisio exactè fieri possit; auferantur rursus ex residuo alterius hujus divisionis litteræ, quæ in singulis ejus partibus existunt; & diviso residuo primo per secundum, continuetur hæc operatio, usque donec nihil in divisione remaneat.

Hac ratione, si invenienda sit maxima communis mensura quantitatum $m^4 + 2am^3 + a^2m^2 + abm^2 + a^2bm$, & $cm^3 + 2acm^2 + a^2cm$; aufero primùm litteram m, quæ in singulis utriusque partibus existit, & fiet una $m^3 + 2am^2 + a^2m + abm + a^2b$, altera $cm^2 + 2acm + a^2c$. Deinde, quia in partibus primæ nihil existit commune, nihil ex iis detrahi debet; sed ex partibus secundæ detraho litteram c, quæ in omnibus reperitur: unde fiet $m^2 + 2am + a^2$. Divido porro primam $m^3 + 2am^2$

$2am^2 + a^2m + abm + a^2b$ per ſecundam $m^2 + 2am + a^2$; & quia diviſio fieri nequit exactè, ſed remanet $+ abm + a^2b$, auſero ex hoc reſiduo litteras a, & b, quæ in ambabus ejus partibus exiſtunt, ut fiat $m + a$. Tum divido ſecundam $m^2 + 2am + a^2$ per hoc reſiduum $m + a$; quumque diviſio prodeat exacta, erit maxima communis menſura quantitas $m^2 + am$, quæ producitur, multiplicando $m + a$ per litteram m, quæ in ſingulis utriuſque quantitatis propoſitæ partibus exiſtebat.

Jam tradita methodo inveniendi maximam communem menſuram duarum quantitatum; haud difficile modò erit fractiones ad minimos terminos reducere, quotieſcumque id fieri poteſt. Inveniatur namque maxima communis menſura numeratoris, & denominatoris propoſitæ fractionis, per quam tam ille, quàm iſte dividatur; & quoniam utraque diviſio perficitur exactè, erunt quotientes reſpectivè numerator, & denominator novæ fractionis: qua ratione fractio $\frac{abcd}{acm}$ mutabitur in hanc aliam $\frac{bd}{m}$, ſi reducenda ſit illa ad minimos terminos quandoquidem numeratoris $abcd$, & denominatoris acm maxima communis menſura eſt ac. Et ſimiliter fractio $\frac{ab^2c - ad^2c}{abm - adm}$, ſi reducatur ad minimos terminos, erit $\frac{bc + dc}{m}$; ſiquidem numeratoris $ab^2c - ad^2c$, denominatoriſque $abm - adm$ maxima communis menſura, juxta regulam ſuperiùs traditam, eſt $ab - ad$.

CAP. IV.

Formatio poteſtatum.

Quantitatis proprietates omnes reſpiciunt, vel incrementum ejus, vel ejuſdem decrementum: unde quatuor circa eam inſtituuntur operationes, additio, ſubtractio, multiplicatio, & diviſio. Augeri etenim quantitas aliqua poteſt, vel ei aliam addendo, vel eandem accipiendo toties, quot ſunt partes in altera. Et eadem ratione poteſt aliqua quantitas minui, vel ex ea aliam ſubducendo ſe-

ſemel, vel toties, quoties hæc altera in illa continetur. Jam, quo pacto quatuor iſtæ operationes inſtituantur, tam in quantitatibus ſimplicibus, & compoſitis, quàm in fractionibus, ſive quantitatibus fractis; hactenus explicuimus. Sed quoniam ex multiplicatione duarum, aut plurium quantitatum æqualium oriuntur producta quædam, quæ poteſtatum nomine ſolent inſigniri; ſequitur proinde, ut poteſtatum harum compoſitionem, & reſolutionem tantiſper contemplemur.

I.

Definitio, ordo, ac geneſis poteſtatum.

Poteſtatem itaque vocamus id, quod evadit quantitas aliqua, quum ſemel, aut pluries per ſe ipſam multiplicatur; & dicimus indicem, ſive exponentem poteſtatis numerum illum, qui quantitati à tergo adſcriptus deſignat, quoties quantitas illa per multiplicationem poni debet. Ita quantitas a^2, quæ producitur, multiplicando a ſemel in ſe ipſam, vocabitur poteſtas ipſius a; ejuſque index, ſive exponens dicetur numerus 2. Et ſimiliter quantitas a^3, quæ producitur, multiplicando a bis in ſe ipſam, vocabitur poteſtas ejuſdem a; ſed ejus index, ſive exponens erit numerus 3.

Ratione hujus indicis, ſivè exponentis variæ diſtingui poſſunt poteſtates. Dicemus ſiquidem poteſtatem primam, cujus index eſt unitas; vocabimus poteſtatem ſecundam, cujus index eſt binarius; atque ità quoque poteſtas tertia erit illa, cujus index eſt ternarius; poteſtas quarta, quæ habet quaternarium pro ſuo indice; & ſic deinceps in infinitum: qua ratione a, ſive a^1 erit prima poteſtas ipſius a; aa, ſive a^2 erit poteſtas ſecunda; a^3 poteſtas tertia; a^4 poteſtas quarta; atque ita deinceps.

Veteres has poteſtates propriis ſuis nominibus decorarunt. Dixerunt etenim primò radicem, ſive latus primam poteſtatem; hoc eſt ipſam illam quantitatem, quæ per multiplicationem repetita, ad ſuperiores evehitur poteſtates. Deinde verò vocarunt ejus lateris quadratum, poteſtatem ſecundam; cubum, poteſtatem tertiam; quadrato-quadratum, poteſtatem quartam; quadrato-cubum, poteſtatem quintam; cubo-cubum, poteſtatem ſextam; atque ita deinceps. Sed quoniam per hæc nomina non adeò clara nobis ſubo-

ſuboritur poteſtatum harum idea ; ſatiùs erit, eas ſecundùm indices ipſarum mòdo jam dicto à ſe mutuò diſtinguere.

Jam, quod ſpectat ad geneſim harum poteſtatum ; ex iis, quæ modò dicta ſunt, facilè quidem ea colligi poteſt. Nam ſi nulla fiat quantitatis in ſe ipſam multiplicatio, ſed ipſa quantitas accipiatur, habebitur poteſtas prima ; ſi verò quantitas ſemel in ſe ipſam multiplicetur, habebitur poteſtas ſecunda; ſi bis, tertia; ſi ter, quarta ; atque ita deinceps : quocirca, ut quantitas aliqua ad poteſtatem dati nominis elevetur, ſatis erit toties eam per ſe ipſam multiplicare, quot habet unitates datum nomen, unâ demptâ.

Hinc, quum multiplicatio in quantitatibus ſimplicibus nullam difficultatem involvat, facile erit ad quamcumque poteſtatem eas elevare. Ita quadratum, ſive ſecunda poteſtas quantitatis ab eſt a^2b^2 ; quandoquidem ſi quantitas ab ſemel per ſeipſam multiplicetur, orietur quantitas a^2b^2. Pariterque cubus quantitatis ac erit a^3c^3 ; quandoquidem ſi quantitas ac bis per ſe ipſam multiplicetur, orietur quantitas a^3c^3. Sed quoniam reiterata in quantitatibus compoſitis multiplicatio nonnihil difficultatis tyronibus faceſſit; aliam proinde placet hìc methodum proponere, prò elevandis quantitatibus compoſitis ad datam quamcumque poteſtatem : quam quidem eo lubentiùs afferam, quia exinde earundem poteſtatum reſolutio nullo negotio deducitur. Oritur namque ea methodus ex ipſa earum poteſtatum compoſitione : qua proinde cognita facile & ipſa reſolutio innoteſcet.

II.

Elevatio quantitatum ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem.

UT igitur quælibet quantitas compoſita ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem multò faciliùs elevetur, quàm eam per ſe ipſam multiplicando ſemel ; ſciendum eſt priùs quadratum alicujus quantitatis, quæ duabus ex partibus coaleſcit, componi ex quadratis partium, & duplo ejus, quod fit ex mutua earum partium multiplicatione: id, quod ipſius multiplicationis ope quis poterit experiri ; nam, multiplicando $a + b$ per $a + b$, producitur $a^2 + 2ab + b^2$: quod productum, ut vides, continet quadrata partium a, & b ; duplumque ejus, quod pro-

producitur, multiplicando a per b.

Hoc posito theoremate, quod geometricè ostenditur ab Euclide propositione quarta libri secundi Elementorum; facilè modò erit quamcumque compositam quantitatem ad quadratum elevare. Nam primò, si quantitas illa composita duabus tantùm partibus constet; sumenda sunt quadrata earum partium, duplumque ejus, quod producitur ex mutua earum partium multiplicatione. Quod si verò quantitas proposita tribus ex partibus constet; considerentur priores duæ tamquam una, & similiter sumatur quadratum tàm hujus, quàm partis alterius, unà cum duplo ejus, quod producitur, multiplicando priores duas, velut unam consideratas, in partem tertiam. Nec aliter fieri debet, si quantitas oblata constet ex quatuor partibus; nam consideratis ut una prioribus tribus, sumenda sunt quadrata istius, & partis quartæ; quemadmodum & duplum ejus, quod oritur ex multiplicatione primarum trium in quartam.

Ita, si quantitas composita, ad quadratum elevanda, sit $a + b$; fiet quadratum $a^2 + 2ab + b^2$. Sed si ad quadratum elevanda sit quantitas $a + b + c$; fiat primò quadratum ex duabus prioribus partibus, velut una consideratis, $a + b$: id quod erit $a^2 + 2ab + b^2$; deinde sumatur duplum ejus, quod producitur, multiplicando easdem priores partes $a + b$ per partem tertiam c: id quod erit $2ac + 2bc$; denique fiat quadratum c^2 ex parte tertia c: atque hac ratione additis in unum omnibus istis quantitatibus, fiet quadratum quantitatis propositæ $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$.

Quod si ad quadratum sit elevanda quantitas $a + b + c + d$, quæ quatuor ex partibus constat; fiat primò quadratum ex primis tribus, tamquam unica consideratis, $a + b + c$: quod erit $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$; tum sumatur duplum ejus, quod oritur ex multiplicatione earundem partium $a + b + c$ in partem quartam d: nimirum $2ad + 2bd + 2cd$; denique fiat quadratum d^2 ex parte quarta d: & additis in unum omnibus istis quantitatibus, erit quadratum quantitatis propositæ $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$.

Quoniam autem fieri potest, ut partes propositæ quantitatis signo — afficiantur; notetur proinde velim quadrata ipsarum partium semper quidem afficiencienda esse signo $+$, quomodocumque partes illæ sint affectæ; at verò producta alia tunc quidem affici debere signo $+$, quum ambæ partes, ex quarum multiplicatione oriuntur, eodem signo sunt affectæ. Ita quadratum ex $a - b$ erit $a^2 - 2ab + a^2$; & quadratum ex $a - b - c$ erit $a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2$; & quadratum ex $a - b - c + d$ erit $a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2 + 2ad - 2bd - 2cd + d^2$: id, quod ex ipso opere multiplicationis, superiùs tradito, facili negotio colligere quis poterit.

Hinc illud inferre licet, quod si numero quadrato a^2 addatur duplum suæ radicis $2a$, unà cum unitate; summa $a^2 + 2a + 1$ sit etiam numerus quadratus, cujus radix unitate una superat radicem illius; quandoquidem, si fiat quadratum ex $a + 1$, erit illud juxta regulam traditam $a^2 + 2a + 1$. Unde modò facilè erit tabulas componere, quæ contineant quadrata omnia numerorum naturalium. Nam quadratum unitatis est etiam 1; cui si addatur duplum suæ radicis, hoc est 2, unà cum ipsa unitate, fiet 4 quadratum binarii; atque huic porro addito duplo ipsius binarii, hoc est 4, unà cum unitate, habebitur 9 pro quadrato ternarii; sicque so-

lius additionis ope aliorum omnium numerorum naturalium quadrata successivè invenientur.

III.

Elevatio quantitatum ad cubum, sive tertiam potestatem.

Similiter, ut quælibet quantitas composita ad cubum, sive tertiam potestatem multò faciliùs elevetur, quàm eam bis per se ipsam multiplicando; sciendum est priùs, cubum alicujus quantitatis, quæ duabus ex partibus coalescit, componi ex cubis partium; ex triplo ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis in alteram; & ex triplo ejus, quod nascitur, multiplicando quadratum secundæ partis in primam: id, quod ipsius multiplicationis ope potest ostendi: etenim si $a + b$ bis in se ipsam multiplicetur, producitur $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: quod productum, ut vides, continet cubos partium a, & b; triplum ejus, quod producitur, multiplicando a^2 per b; triplumque ejus, quod oritur, multiplicando b^2 per a.

Hoc posito theoremate, quod ad instar ejus,

ejus, quod continetur in propositione quarta libri secundi Elementorum, geometricè posset ostendi; haud difficile modò erit, quamcumque compositam quantitatem ad cubum, sive tertiam potestatem elevare. Nam primò si quantitas duabus ex partibus constet; sumantur oportet cubi earum partium; triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ per secundam; triplumque ejus, quod producitur, multiplicando quadratum secundæ per primam. At verò si propositæ quantitatis tres fuerint partes; considerentur duæ priores tamquam una, & similiter factis cubis istius, & partis tertiæ, sumatur porro tam triplum ejus, quod gignitur, multiplicando quadratum ex primis duabus in partem tertiam, quàm triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum partis tertiæ in priores duas: neque aliter fiet, si quantitas composita ex quatuor, aut multò pluribus partibus constet.

Ita, si quantitas composita, ad cubum, sive tertiam potestatem elevanda, sit $a + b$; erit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Sed si ad cubum oporteat elevare quantitatem $a + b + c$, quæ tribus ex partibus constat; fiat primò cubus ex duabus primis

mis partibus $a + b$; qui erit $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; tum sumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicãdo $a^2 + 2ab + b^2$, quadratum duarum primarum partium $a + b$, in partem tertiam c: nimirum $3a^2c + 6abc + 3b^2c$; porro accipiatur triplum ejus, quod producitur, multiplicando c^2, quadratum partis tertiæ c, in duas priores $a + b$: scilicet $3ac^2 + 3bc^2$; & denique fiat cubus c^3 ex parte tertia c: qua ratione, additis in unum omnibus istis quantitatibus, fiet cubus quantitatis propositæ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$.

Quod si ad cubum elevanda sit quantitas $a + b + c + d$, quæ quatuor ex partibus constat; fiat primò ex primis tribus, tamquam unica consideratis, $a + b + c$ cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$; tum sumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, quadratum trium primarum partium $a + b + c$, in partem quartam d: nimirum $3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d$; porro capiatur triplum ejus, quod gignitur, multiplicando d^2, quadratum quartæ partis d, in tres priores $a + b + c$: scilicet $3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2$; & denique

D

que fiat cubus d^3 ex parte quarta d: nam additis in unum omnibus istis quantitatibus, fiet cubus quantitatis propositæ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3$.

Quoniam autem fieri potest, ut partes propositæ quantitatis signo $-$ afficiantur; proinde notetur velim, cubos ipsarum partium afficiendos esse semper eodem signo, quo ipsæ partes afficiuntur; producta verò illa, quæ oriuntur, multiplicando quadratum unius partis in aliã, tunc demum afficienda esse signo $-$, quum hæc alia pars signo $-$ afficitur; & denique producta illa, quæ ex trium partium multiplicatione oriuntur, afficienda esse signo $-$ tunc tantùm, quum earum partium vel unaquæque, vel una tantummodò afficitur signo $-$: qua ratione cubus ex $a - b - c$ erit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2c + 6abc - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 - c^3$: id, quod ex ipso multiplicationis opere abundè colligitur.

Jam ex dictis illud modò fit manifestum, quod si alicui numero cubo a^3 addatur primo triplum quadrati suæ radicis $3a^2$, deinde triplum ipsius radicis $3a$, ac denique unitas; summa $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ sit etiam uumerus cubus, cujus radix untiate unâ superat radicem illius; quandoquidem si fiat cubus ex $a + 1$, erit ille juxta regulam traditam $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$: unde modò facile erit, tabulas construere, quæ contineant cubos omnes numerorum naturalium: nam cubus unitatis est etiam 1, cui si addatur triplum quadrati suæ radicis 3, itemque triplum ipsius radicis, quod est similiter 3, ac denique unitas, fiet 8 cubus binarii: atque huic porro addito quadrato suæ radicis triplicato 12, itemque triplo ipsius radicis 6, ac denique unitate, fiet 27 cubus ternarii; neque aliter aliorum omnium numerorum naturalium cubi poterunt successivè inveniri.

IV.

Elevatio Quantitatum ad potestates superiores.

NOn dissimili methodo poterunt quantitates compositæ ad quamcumque aliam potestatem altiorem elevari; nam satis erit ope ipsius multipli-

ca-

cationis semel invenire, ex quibus partibus componatur potestas proposita alicujus quantitatis, cujus duæ sint partes; & eas semper partes assumere, quotiescumque aliqua quantitas ad illam potestatem sit elevanda: considerando primas omnes tamquam unam, quotiescumque quantitas proposita ex pluribus, quàm duabus partibus, constat.

Hac ratione, si quantitas aliqua ad quadrato-quadratum, sive quartam potestatem sit elevanda; considero priùs quadrato-quadratum ex quantitate composita $a + b$, quæ duabus partibus constat, esse $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; atque adeò componi ex quadrato-quadratis ipsarum partiũ; ex quadruplo ejus, quod producitur, multiplicando cubum primæ per secundam; ex quadruplo ejus, quod oritur, multiplicando cubum secundæ per primam; ac denique ex sextuplo ejus, quod nascitur, multiplicando quadratum primæ per quadratum secundæ: proindeque hujus theorematis ope facile erit, quamcumque compositam quantitatem ad quadrato-quadratum elevare.

Eadem ratione, si quantitas aliqua ad quadrato-cubum, sive quintam potestatem sit elevanda; considerare priùs oportet

tet, quadrato-cubum ex quantitate $a + b$, cujus duæ sunt partes, esse $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; atque adeò componi ex quadrato-cubis ipsarum partium; ex quintuplo ejus, quod oritur, multiplicando quadrato-quadratum primæ in secundam, ex quintuplo ejus, quod fit, multiplicando quadrato-quadratum secundæ in primam; ex decuplo ejus, quod nascitur, multiplicando cubum primæ in quadratum secundæ; ac denique ex decuplo ejus, quod producitur, multiplicando cubum secundæ in quadratum primæ: quo quidem invento theoremate, facili negotio quælibet quantitas composita ad quadrato-cubum elevabitur.

Jam his inventis theorematibus, poterunt & alia ipsis correspondentia inveniri, quibus facili negotio construi possent tabulæ, quæ numerorum omnium naturalium quadrato-quadrata, quadrato-cubos &c. cõtinerent. Sic ex theoremate, quadrato-quadrati compositionem ostendente, manifestum est, quod si alicui numero quadrato-quadrato a^4 addatur primò quadruplum cubi suæ radicis $4a^3$, deinde sextuplum quadrati ejusdem radicis $6a^2$, porro quadruplum ipsius radicis $4a$, ac denique unitas; summa omnium $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ fit etiam numerus quadrato-quadratus, cujus radix superat unitate unâ radicem illius; quandoquidem si fiat quadrato-quadratum ex $a + 1$, erit illud juxta theorema superiùs inventum $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$: quare huic insistendo theoremati, facile erit numerorum omnium naturalium quadrato-quadrata successivè invenire.

Similiter ex theoremate, quadrato-cubi compositionem ostendente, perspicuum est, quod si alicui numero quadrato-cubo a^5 addatur primò quintuplum quadrato-quadrati suæ radicis $5a^4$, secundò decuplum cubi ejusdem radicis $10a^3$, tertiò decuplum quadrati ejusdem adhuc radicis $10a^2$, quartò ipsamet radix quintuplicata $5a$, & denique unitas; quod inquam summa omnium $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$ fit etiam numerus quadrato-cubus, cujus radix unitate unâ superat radicem illius; quandoquidem si fiat quadrato-cubus ex $a + 1$, erit ille juxta theorema superiùs inventum $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$: unde hujus canonis beneficio in proclive erit, numerorum omnium naturalium quadrato-cubos successivè invenire.

CA-

CAP. V.

Extractio radicum.

Quemadmodum quum quantitas aliqua semel, aut pluries per se ipsam multiplicatur, id quod producitur, vocatur potestas illius quantitatis; ita quoque ipsa illa quantitas, ex cujus reiterata multiplicatione potestas producitur, vocatur radix illius potestatis. Et rursus, quemadmodum potestates distinguuntur in ordines secundùm indices, sive exponentes ipsarum; ita quoque radices earundem potestatum, habitâ illorum exponentium ratione, possunt in varios ordines distingui.

Nimirum, sicuti potestas prima est illa, cujus index est unitas; potestas secunda, sive quadratum, cujus index est numerus binarius; potestas tertia, sive cubus, cujus index est numerus ternarius; atque ita deinceps. Ita quoque dici potest radix prima, quæ refertur ad potestatē primam; radix secunda, sive quadrata, quæ refertur ad quadratum, sive potestatem secundam; radix tertia, sive cubica, quæ refertur ad cubum, sive potestatem tertiam; atque ita deinceps.

 Jam

Jam radices extrahere ex poteſtatibus quantitatum ſimplicium, Problema eſt, quod nullam difficultatem involvit. Nam, quemadmodum quantitas ab, multiplicata ſemel per ſe ipſam, producit quadratum a^2b^2; ſic & radice quadratâ extracta ex a^2b^2, proveniet rurſus ipſa quantitas ab. Et inſuper, quemadmodum quantitas ab, bis per ſe ipſam multiplicata, producit cubum a^3b^3; ita quoque extractâ radice cubicâ ex a^3b^3, orietur rurſus eadem quantitas ab. Verumtamen quum poteſtates plures terminos involvunt, atque adeò ad quantitates compoſitas referuntur, radicum extractio non ita facilis deprehenditur: quocirca, ut methodum eas extrahendi addiſcant tyrones, primò illam experiemur in extractione radicis quadratæ, deinde in extractione radicis cubicæ, ac denique quo pacto extractioni aliarum radicum debeat applicari, breviter oſtendemus.

I.

Extractio radicis quadratæ.

UT ex quantitate quantumlibet compoſita quadrata radix extrahatur,

conſideremus oportet radicem illius quantitatis duabus ex partibus conſtare; atque adeò in poteſtate illa contineri quadrata earum partium, itemque duplum ejus, quod producitur ex mutua earum partium multiplicatione. Hinc enim methodus eam extrahendi talis erit.

Nempe primò ex termino aliquo, qui ſit quadratus perfectus, eliciatur quadrata radix; ſecundò per duplum hujus radicis dividantur termini omnes, in quibus eadem radix includitur; tertiò eidem radici addatur inventus quotiens ſuis propriis ſignis; & quartò demum fiat ex tota ſumma quadratum, quod ſubducatur ex quantitate propoſita. Nam ſi hac facta ſubductione contigerit nihil relinqui, indicio erit, quantitatem propoſitam eſſe quadratum perfectum, ejuſque radicem eſſe ſummam illam inventam; ſecus verò ſi ex ea ſubtractione aliquid ſupererit: ſiquidem argumento erit, quantitatem propoſitam non eſſe quadratum perfectum, ſed ſubducendum eſſe ex ea reſiduum illud, quò quadratum evadat.

Hac ratione, ſi quæratur quadrata radix quantitatis $a^2 + 2ab + b^2$, extraho primùm radicem ex a^2 quadrato, per cujus

jus duplum $2a$ divido, deinde terminum $+ 2ab$, in quo illa reperitur; tum quia quotiens inventus $+ b$, additus eidem radici a, dat pro summa $a + b$, cujus quadratum $a^2 + 2ab + b^2$, subductum ex quantitate proposita, relinquit nihil; concludo quantitatem propositam esse quadratum perfectum, ejusque radicem esse $a + b$.

Eâdem ratione, si proponatur invenienda quadrata radix hujus quantitatis $a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$; extraho primùm radicem ex quadrato a^2; deinde per duplum ejus $2a$ divido terminos $+ 2ab - 2ac$, in quibus includitur radix illa; & quia quotiens hujus divisionis $+ b - c$, additus radici a, dat pro summa $a + b - c$, cujus quadratum $a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$, subductum ex quantitate proposita, dat nihil pro residuo; concludendum est, quantitatem propositam quadratum esse perfectum, ejusque radicem esse $a + b - c$.

Quod si autem extrahenda proponatur quadrata radix ex $a^2 + 2ab + b^2 - 2ac$, elicio similiter radicem ex quadrato a^2, per cujus duplum $2a$ divido quoque terminos $+ 2ab - 2ac$, in quibus illa reperitur. Sed quoniam quotiens hujus divi-

visionis $+ b - c$ additus radici a dat pro summa $a + b - c$, cujus quadratum, subtractum ex quantitate proposita, dat pro residuo $+ 2bc - c^2$; concludo quantitatem illam non esse quadratum perfectum, sed fieri talem, si ex ea subducatur residuum istud $+ 2bc - c^2$.

II.

Extractio radicis cubicæ.

Similiter, ut ex quantitate quantumlibet composita radix cubica eliciatur, considerare oportet radicem illius quantitatis, velut compositam ex duabus partibus; atque adeò quantitatem ipsam continere cubos earum partium; triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ per secundam; triplumque ejus, quod gignitur, multiplicando quadratum secundæ per primam. Hinc enim methodus radicem illam eruendi talis erit.

Nempe primò ex termino aliquo, qui sit cubus perfectus, eliciatur radix cubica; secundò per triplum quadrati hujus radicis dividantur termini omnes, in quibus quadratum illud reperitur; tertiò quo-

quotiens inventus propriis suis signis adjungatur eidem radici; ac denique fiat cubus ex tota summa, qui subducatur ex quantitate proposita. Nam si hac facta subductione nihil relinquetur, indicio erit quantitatem propositam esse cubum perfectum, ejusque radicem esse summam illam inventam; secus verò, si ex ea subductione aliquid supererit; quandoquidem argumento erit, quantitatem propositam non esse cubum perfectum, sed talem evadere, si ex ea residuum illud subducatur.

Hoc pacto, si quæratur radix cubica quantitatis hujus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; extraho primùm radicem ex cubo a^3, per cujus quadrati triplum $3a^2$ divido deinde terminum $3a^2b$, in quo quadratum illud reperitur; tum quia quotiens inventus $+ b$ additus radici a, dat pro summa $a + b$, cujus cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, subductus ex quantitate proposita, relinquit nihil; concludo quantitatem propositam esse cubum perfectum, ejusque radicem esse $a + b$.

Similiter, si proponatur invenienda radix cubica hujus quantitatis $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$; extraho primum radicem cubicam ex cubo a^3, deinde per triplum sui quadrati $3a^2$ divido terminos $+ 3a^2b - 3a^2c$, in quibus quadratum illud continetur; & quoniam quotiens hujus divisionis $+ b - c$ additus radici a dat pro summa $a + b - c$, cujus cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$, subductus ex quantitate proposita, dat nihil pro residuo; concludendum est, quantitatem propositam esse cubum perfectum, ejusque radicem esse $a + b - c$.

Verumtamen si extrahenda proponatur radix cubica ex quantitate $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c + 3ac^2$; elicio similiter radicem ex cubo a^3, per cujus quadrati triplum $3a^2$ divido quoque terminos $+ 3a^2b - 3a^2c$, in quibus quadratum illud reperitur. Sed quoniam quotiens hujus divisionis $+ b - c$, additus radici a, dat pro summa $a + b - c$, cujus cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$, subtractus ex quantitate proposita, dat pro residuo $+ 6abc + 3b^2c - 3bc^2 + c^3$, concludo quantitatem illam non esse cubum perfectum, sed talem fieri, si residuum istud ex ea subducatur.

III.

Extractio aliarum radicum.

Quod ad aliarum radicum attinet extractionem, methodus generalis hæc est. Primò ex termino aliquo, qui eam contineat poteſtatem, de qua agitur, eliciatur quæſita radix. Secundò radix iſta elevetur ad poteſtatem, quæ ſit una dimenſione minor poteſtate illa, ad quam prius erat evecta. Tertiò ſumatur toties iſta poteſtas, quot ſunt unitates in indice illius, ad quam ſua radix erat priùs elevata. Quartò per hunc ejus poteſtatis indicem dividantur omnes illi termini, in quibus eadem illa poteſtas reperitur. Quintò quotiens hujus diviſionis addatur propriis ſuis ſignis inventæ radici. Et ſextò demum fiat ex tota ſumma poteſtas, de qua agitur, eademque ſubducatur ex quantitate propoſita. Nam, ſi hac facta ſubtractione nihil remaneat, erit quantitas propoſita poteſtas perfecta, ejuſque radix erit ſumma inventa; ſecus verò ſi aliquid ſuperſit: quandoquidem id indicabit, quantitatem propoſitam non eſſe perfectam poteſtatem, ſed talem evadere, ſi ex ea reſiduum illud ſubducatur.

Hac ratione, ſi extrahenda ſit radix quarta, ſive quadrato-quadrata ex quantitate $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; extraho primùm radicem ex quadrato-quadrato a^4, deinde per quadruplum ſui cubi $4a^3$ divido terminum $4a^3b$, in quo cubus ille reperitur; & quoniam quotiens hujus diviſionis $+b$, additus radici a, dat pro ſumma quantitatem $a+b$, cujus quadrato-quadratum $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, ſubductum ex quantitate propoſita, relinquit zero, ſive nihil; concludo quantitatem illam eſſe quadrato-quadratum perfectum, ejuſque radicem eſſe ſummam illam inventam $a+b$.

Sed ſi radix quarta, ſive quadrato-quadrata extrahenda ſit ex quantitate $a^4 - 4a^3b - 4ab^3 + b^4$, elicio ſimiliter radicem ex quadrato-quadrato a^4, per cujus cubi quadruplum $4a^3$ divido quoque terminum $-4a^3b$, in quo cubus ille reperitur. Verumtamen, quia ex hac diviſione oritur quotiens $-b$, qui additus radici a dat pro ſumma $a-b$, cujus quadrato-quadratum $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$, ſubtractum ex quantitate propoſita, dat pro reſiduo $-6a^2b^2$; conclucludendum eſt, quantitatem illam non eſſe perfectum quadrato-quadratum; ſed fieri talem, ſi reſiduum iſtud ex ea ſubtrahatur.

Eâdem ratione, ſi extrahenda ſit radix quinta, ſive quadrato-cubica ex quantitate $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; elicio primum radicem ex quadrato-cubo a^5, deinde per quintuplum ſui quadrato-quadrati $5a^4$ divido terminum $+ 5a^4b$, in quo illud quadrato-quadratum reperitur; & quoniam quotiente hujus diviſionis $+ b$ addito radici a, habetur pro ſumma quantitas $a + b$, cujus quadrato-cubus $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ſubductus ex quantitate propoſita dat nihil pro reſiduo; concludo quantitatem illam eſſe quadrato-cubum perfectum, ejuſque radicem eſſe ſummam illam inventam $a + b$.

Verumtamen, ſi elicienda ſit radix quinta, ſive quadrato-cubica ex quantitate $a^5 - 5a^4b - 10a^2b^3 - d^5$; extraho ſimiliter radicem ex quadrato-cubo a^5, perque quintuplum ſui quadrato-quadrati $5a^4$ divido quoque terminum $- 5a^4b$, in quo illud quadrato-quadratum reperitur. Sed quoniam quotiente hujus diviſionis $- b$ addito radici a, habetur

pro ſumma quantitas $a - b$, cujus quadrato-cubus $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ ſiquidem ſubtrahatur ex quantitate propoſita, relinquitur $- 10a^3b^2 - 5ab^4 - d^5 + b^5$; concludendum eſt, quantitatem illam non eſſe quadrato-cubum perfectum, ſed talem fieri, ſi ex ea reſiduum iſtud ſubducatur.

IV.

Extractio radicum ex fractionibus.

AD poteſtates elevari poſſunt non modò quantitates integræ, verùm etiam fractæ, ſive fractiones: unde quum de extractione radicum ex poteſtatibus quantitatum integrarum actum fuerit huc uſque; ſequitur, ut breviter oſtendamus, quo pacto extrahi poſſint radices ex poteſtatibus fractionum.

Et quidem quemadmodum innotuit nobis methodus extrahendi radices ex poteſtatibus quantitatum integrarum, cognita ratione, qua ipſæ quantitates integræ ad poteſtates elevantur; ita non meliùs intelligi poterit, quo pacto ex poteſtatibus fractionum radices extrahantur, quàm intellecto priùs, qua ratione ipſæ fractiones ad potestates evehuntur.

Itaque elevantur fractiones ad datam quamcumque potestatem, si attollatur ad potestatem illam tam numeratores, quàm denominatores fractionum, & ex iis novæ fractiones constituantur. Ita fractio $\frac{ab + ac}{m + n}$, si ad quadratum debeat elevari, fiet $\frac{a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2}{m^2 + 2mn + n^2}$; nam quadratum numeratoris $ab + ac$ est $a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2$, & quadratum denominatoris $m + n$ est $m^2 + 2mn + n^2$. Pariterque fractio $\frac{a + c}{m + n}$ ad cubum elevata evadet $\frac{a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3}{m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3}$; quandoquidem cubus numeratoris $a + c$ est $a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3$, cubus verò denominatoris $m + n$ est $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$.

Hinc vicissim extrahitur quæcumque radix ex qualibet data fractione, si extrahatur illa tam ex numeratore, quàm ex denominatore fractionis, & ex iis nova fractio constituatur. Ita radix quadrata fra-

fractionis $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{c^2}$ est $\frac{a + b}{c}$; quandoquidem quadrata radix numeratoris $a^2 + 2ab + b^2$ est $a + b$, & quadrata radix denominatoris c^2 est c. Pariterque radix cubica fractionis $\frac{a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3}{27m^3}$ est $\frac{a + c}{3m}$; quandoquidem cubica radix numeratoris $a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3$ est $a + c$, & cubica radix denominatoris $27m^3$ est $3m$.

Sed interdum, ut radices ex fractionibus extrahi possint, oportet priùs fractiones illas ad minimos terminos reducere. Ita ex fractione $\frac{4ab^2}{ac^2}$ quadrata radix extrahi nequit, quippe quæ nec ex numeratore $4ab^2$, nec ex denominatore ac^2 extrahi potest. Sed si ea ad minimos terminos reducatur, facile erit, ex ipsa quadratam radicem elicere; nam quum fiat $\frac{4b^2}{c^2}$, erit ejus quadrata radix $\frac{2b}{c}$. Si-

 mi-

militer ex fractione $\frac{8ab^3}{ac^3}$, his terminis expressa, radix cubica extrahi non potest; sed quia reducta ad simpliciorem suam expressionem fit $\frac{8b^3}{c^3}$, invenietur pro ejus radice cubica fractio alia $\frac{2b}{c}$.

V.

Genesis quantitatum incommensurabilium.

Vulgò duæ quantitatum species distingui solent; quarum aliæ dicuntur quantitates commensurabiles, sive rationales; aliæ quantitates incommensurabiles, sive irrationales. Has duas quantitatum species consideraruntˀ hactenus Mathematici in Arithmetica tantummodo, ubi quantitates per numeros designantur: quem in finem vocarunt quantitates commensurabiles, sive arithmeticè rationales, quæ numeris possunt designari; vocarunt verò quantitates incommensurabiles, sive arithmeticè irrationales, quæ nullis numeris exprimi possunt.

Sed nihil obstat, quominus eandem quantitatum distinctionem consideremus etiam in Geometria. Quemadmodum etenim quantitates in Arithmetica per numeros, ita & in Geometria per longitudines rectarum designantur: unde sicuti dicuntur arithmeticè rationales, quæ numeris possunt designari; & arithmeticè irrationales, quæ nullis numeris exprimi queunt: ita quoque dicendæ sunt geometricè rationales, quæ per longitudines rectarum exprimi possunt, & geometricè irrationales, quæ nullis possunt rectis lineis definiri.

Atque hac quantitatum tùm in Arithmetica, cùm in Geometria admissa distinctione, jam Problemata omnia mathematica in tria poterunt summa genera dispesci. Unum namque erit eorum, in quibus quantitates quæsitæ numeris perinde ac lineis rectis designantur; qualia sunt illa, quæ vulgò simplicia, sive arithmetica dicuntur. Alterum illorum, in quibus quantitates quæsitæ non quidem ullis numeris, sed per solas lineas rectas exprimuntur. Et tertium denique Problemata illa comprehendet, in quibus quæ-

quæsitæ quantitates neque ullis numeris, neque ullis rectis lineis possunt designari.

Jam unde fiat, ut in Geometria quædam quantitates sint geometricè rationales, quædam geometricè irrationales; alibi, quum dabitur occasio, ostendemus. Hic tãtum genesim quantitatum incommensurabilium, quatenus considerantur in Arithmetica, aperire nobis est animus. Itaque oriuntur hujusmodi quantitates, quum radicem oportet extrahere ex quãtitate aliqua, quæ nequaquam sit potestas perfecta. Nam si velim, exempli gratia, extrahere quadratam radicem ex numero 10, quia nullus numerus inveniri potest, qui ductus semel in se ipsum producat 10, jam quæsita radix nullo poterit numero designari: proindeque quantitas erit incommensurabilis, sive arithmeticè irrationalis.

Sed ex eodem fonte oriuntur etiam quantitates incommensurabiles in Algebra, ubi magnitudines non numeris, sed alphabeticis litteris designantur. Nam si quæratur quadrata radix quantitatis *ab*, jam nulla erit quantitas sic exprimibilis, ut ducta semel in se ipsam producat *ab*: quocirca in Algebra quadrata radix quantitatis *ab* non minus est quantitas incommensurabilis, quàm quadrata radix numeri 10 in Arithmetica. Et ob eandem rationem, non minus erit quantitas incommensurabilis in Algebra radix cubica qaantitatis *abc*, quàm in Arithmetica radix cubica numeri 25.

Cæterùm, quum ex aliqua quantitate radix extrahi non potest, designatur communiter illa præfigẽdo quantitati signum istud $\surd$, quod hac de causa signũ radicale appellatur. Usurpatur autem tale signum ad designandam quamcumq;radicem, sive quadratam, sive cubicam, sive cujuslibet alterius potestatis. Sed ad illam distinguendam apponitur communiter signo radicali numerus, qui est index, sive exponens potestatis, de qua agitur. Sic $\surd^2$ est signum radicis quadratæ, $\surd^3$ signum radicis cubicæ, atque ita de aliis: quamquam mos invaluerit, ut quotiescumque alicui quantitati simpliciter signum radicale apponitur, de quadrata radice intelligi debeat. Verumtamen, quia quantitates incommensurabiles considerari possunt, tamquam potestates imperfectæ quantitatum; alia quoque ratione nos eas designabimus: quæ tamen ut meliùs intelligatur, exhibenda da eſt priùs idea paulò generalior poteſtatum.

CAP. VI.

Poteſtatum idea generalior exhibetur.

Poteſtatem ſuperiùs appellavimus id, quod producitur, quum quantitas aliqua ſemel, aut pluries per ſe ipſam multiplicatur; & indicem, ſive exponentem poteſtatis diximus numerum illum, adſcriptum à tergo quantitati, qui deſignat, quoties quantitas illa per multiplicationem poni debet. Jam, ut hæc poteſtatum idea generalior reddatur, vocabimus in poſterum poteſtatem omnem quantitatem, cui à tergo numerus aliquis ſit adſcriptus; & ſimiliter dicemus exponentem, ſive indicem poteſtatis numerum illum, quem quantitas adſcriptum habet à tergo: qua ratione non minus dicenda erit poteſtas, cujus exponens eſt numerus integer, quàm illa, cujus exponens eſt numerus fractus; & ſimiliter non magis merebitur nomen poteſtatis, quæ habet pro ſuo indice numerum poſitivum, quàm quæ pro exponente habet numerum negativum.

Hac poteſtatum idea generaliori ſuppoſita, perſpicuum eſt, poteſtates omnes bifariam dividi poſſe; primò nempe in poſitivas, & negativas; ſecundò in perfectas, & imperfectas. Quæ etenim exponentes habent poſitivos, poteſtates erunt poſitivæ; quæ verò negativos, negativæ. Et ſimiliter poteſtates illæ, quarum exponentes ſunt numeri integri, dici poterunt poteſtates perfectæ; eæ verò, quarum exponentes ſunt numeri fracti, poteſtates imperfectæ poterunt appellari. Sic a^2, a^3, a^4 erunt poteſtates poſitivæ perfectæ; & $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ erunt poteſtates poſitivæ imperfectæ. Sed a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} erunt poteſtates perfectæ negativæ; & $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$, $a^{-\frac{1}{4}}$ erunt poteſtates negativæ imperfectæ. Cæterùm, ut harum omnium poteſtatum natura meliùs intelligatur; explicanda eſt priùs natura progreſſionis arithmeticæ, & geometricæ; itemque analogia eſt oſtendenda, quæ inter utramque progreſſionem intercedit.

I.

De natura progressionis arithmeticæ, & geometricæ.

Quantitates comparari possunt inter se mutuò duplici quidem ratione; primò nempe ratione excessus, vel defectus; & secundò ratione continentiæ. Conferuntur duæ quantitates ratione excessus, vel defectus; quum quæritur, quantum una excedit alteram, vel ab altera deficit. Conferuntur ratione continentiæ; quum quæritur, quoties una continet alteram, vel in altera continetur.

Quocumque ex his modis duæ quantitates inter se mutuò conferantur, semper ipsa quantitatum comparatio rationis vocabulo designatur. Sed propter duplicem modum, quo conferri possunt quantitates inter se mutuò, duplex etiam distinguitur species rationis; & una, quæ dicitur Arithmetica, quantitates comparat ratione excessus, vel defectus; altera, quæ dicitur geometrica, confert quantitates ratione continentiæ.

Proportio autem est duarum rationum æqualitas: unde quatuor quantitates dicuntur proportionales, quum ratio inter primam, & secundam æqualis est rationi inter tertiam, & quartam. Sed & ipsa proportio alia est arithmetica, alia geometrica: nam æqualitas duarum rationum arithmeticarum vocatur proportio arithmetica; æqualitas verò duarum rationum geometricarum proportio geometrica appellatur.

Jam proportionis arithmeticæ illud est accidens præcipuum, ut summa extremorum æqualis sit summæ mediorum. Si etenim a sit primus terminus progressionis arithmeticæ, & c terminus tertius: posito, quod b sit excessus, quo secundus superat primum, & quartus superat tertium; erit $a + b$ secundus terminus, & $c + b$ terminus quartus: unde quum a, $a + b$, c, $c + b$ sint quatuor termini proportionis arithmeticæ, liquet summam extremorum $a + c + b$ æqualem esse summæ mediorum $a + b + c$.

Proportionis autem geometricæ ea est proprietas præcipua, ut productum ex multiplicatione extremorum æquale sit producto ex multiplicatione mediorum. Nam si a sit primus terminus proportionis geometricæ, & c terminus tertius: posito,

ſito, quod b deſignet, quoties ſecundus continet primum, itemque quartus continet tertium; erit ab ſecundus terminus, & cb terminus quartus: unde, quum a, ab, c, cb ſint quatuor termini proportionis geometricæ, liquet productum ex multiplicatione extremorum acb æquale eſſe producto ex multiplicatione mediorum abc.

Tam arithmetica, quàm geometrica proportio quatuor terminos requirunt; quum utraque ſit æqualitas duarum rationum, quarum unaquæque duos terminos exigit. Sed poſſunt etiam ſub tribus conſiſtere, ſcilicet quum terminus medius bis ſumitur. Id quum accidit, proportio dicitur continua: & perſpicuum eſt, in proportione continua arithmetica ſummam extremorum æqualem eſſe duplo termini medii; in proportione continua geometrica productum ex multiplicatione extremorum æquale eſſe quadrato, quod ſit ex termino medio.

Quum non tres, ſed plures habentur quantitates continuè proportionales, dicentur eæ progreſſionem conſtituere. Atque hæc rurſus erit, vel arithmetica, vel geometrica: prout nempe quantitates, progreſſionem conſtituentes, ſunt vel arith-

arithmeticè, vel geometricè proportionales. Ita ſeries numerorum 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c. conſtituunt progreſſionem arithmeticam; quia eadem ubique differentia. Et viciſſim ſeries numerorum 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c. conſtituit progreſſionem geometricam; quia eadem ubique continentia.

Hinc, quum inter terminos progreſſionis arithmeticæ eadem ubique differentia ſervetur, & quantum primus terminus deficit à ſecundo, tantundem ſecundus deficiat à tertio, tertius à quarto, atque ita deinceps; perſpicuum eſt, quod ſi in hujuſmodi progreſſione primus terminus dicatur a, & exceſſus, quo ſecundus ſuperat primum, dicatur b, ſit $a + b$ ſecundus terminus, $a + 2b$ terminus tertius, $a + 3b$ terminus quartus, atque ita in infinitum: qua ratione progreſſionis arithmeticæ termini omnes ſic poterunt exhiberi a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, $a + 4b$, $a + 5b$ &c.

Et ſimiliter, quia inter terminos progreſſionis geometricæ eadem ubique continentia ſervatur, & quoties primus terminus continetur in ſecundo, toties ſecundus continetur in tertio, tertius in quarto, atque ita de aliis; perſpicuum eſt, quod

quod ſi in hac alia progreſſione primus terminus dicatur a, & deſignet b, quoties ſecundus continet primum, ſit ab ſecundus terminus, ab^2 terminus tertius, ab^3 terminus quartus, atque ita deinceps: qua ratione progreſſionis geometricæ termini omnes ſic poterunt efferri a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5 &c.

Ex quibus modò facilè erit, utriuſque progreſſionis proprietates principaliores intelligere. Nam in progreſſione arithmetica evidens eſt, hæc duo eſſe accidentia præcipua. Primum, quod ſumma duorum quorumvis terminorum æqualis ſit ſummæ ex duobus aliis, æqualiter hinc inde diſtantibus ab iis. Alterum, quod duplum unius termini adæquet ſummam duorum aliorum, qui utrinque æquè diſtent ab eo.

In progreſſione autem geometrica has duas licet principaliores cernere proprietates. Prima eſt, quod productum ex duobus terminis, inter ſe mutuò multiplicatis, æquale ſit ei, quod producitur ex multiplicatione mutua duorum aliorum, utrinque ab iis æqualiter diſtantium. Altera, quod quadratum unius termini æquale ſit ei, quod oritur, multiplicando ſimul duos alios terminos, qui hinc inde æqualiter diſtent ab illo.

Ana-

II.

Analogia inter progreſſionem arithmeticam, & geometricam.

OStenſa natura progreſſionis tum geometricæ, cùm arithmeticæ; oſtendenda eſt modò analogia, quæ inter utramque progreſſionem intercedit. Hæc potiſſimum conſiſtit in eo, quod quemadmodum termini progreſſionis arithmeticæ additione, & ſubtractione; ita termini progreſſionis geometricæ multiplicatione, & diviſione inveniantur. Analogiam iſtam novit primus omnium, vel ſaltem paulò diligentiùs conſideravit Johannes Neperus Scoto-Brittannus; & ex ea collegit mirificum logarithmorum inventum, compendium arithmeticum numquam ſatis deprædicandum.

Jàm ex hac analogia illud ſpontè ſua conſequitur, quod ſi termini, progreſſionem artithmeticam conſtituentes, aſſumantur velut indices, ſive exponentes eorum, qui conſtituunt progreſſionem geometricam, & in iſta capiantur quatuor termini geometricè proportionales, ſumma ex exponentibus extremorum æqualis

lis sit summæ ex exponentibus mediorum. Nam ex hypothesi exponentes eorum terminorum sunt termini totidem arithmeticè proportionales. Sed quatuor terminorum arithmeticè proportionalium illud est accidens præcipuum, ut summa extremorum æqualis sit summæ mediorum. Itaque, si capiantur in progressione geometrica quatuor termini geometricè proportionales, summa ex exponentibus extremorum adæquabit summam ex exponentibus mediorum.

Quod si verò in progressione geometrica capiantur tres termini geometricè proportionales, tunc summa ex exponentibus extremorum æqualis erit duplo exponẽtis termini medii. Nam ex hypothesi exponentes trium illorum terminorum sunt termini totidem arithmeticè proportionales. Sed trium terminorum arithmeticè proportionalium ea est proprietas præcipua, ut summa exremorum æqualis sit duplo termini medii. Itaque, si in progressione geometrica capiantur tres termini geometricè proportionales, summa ex exponentibus extremorum adæquabit duplum exponentis, qui refertur ad terminum medium.

Atque ex his utriusque progressionis si-

mul junctæ proprietatibus, aliæ etiam colligi possunt. Nam si progressio geometrica incipiatur ab unitate, progressio verò arithmetica à zero, sive nihilo, quod proinde sit index, sive exponens unitatis; consequitur primò, summam ex exponentibus multiplicandi, & multiplicatoris, producti exponentem adæquare. Etenim ex multiplicationis definitione, unitas est ad multiplicatorem, ut multiplicandus ad productum: quare ex ostensis summa ex exponentibus multiplicandi, & multiplicatoris æqualis erit summæ ex exponentibus unitatis, & producti. Sed ex hypothesi exponens unitatis est zero, sive nihilum. Itaque summa ex exponentibus multiplicandi, & multiplicatoris solius producti exponentem adæquabit.

Consequitur secundò, differentiam exponentium dividendi, & divisoris, quotientis exponẽtem adæquare. Nam ex definitione divisionis, divisor est ad dividendum, ut unitas ad quotientem: quare ex ostensis summa ex exponentibus divisoris, & quotientis æqualis erit summæ ex exponentibus dividendi, & unitatis. Jam verò ex hypothesi exponens unitatis est zero, sive nihilum. Itaque summa exponentium divisoris, & quotientis adæqua-

bit

bit exponentem solius dividendi: & propterea, si ex exponente dividendi subducatur exponens divisoris, dabit residuum, sive differentia exponentem quotientis.

Consequitur tertiò, duplum exponentis alicujus quantitatis adæquare exponentem sui quadrati, triplum exponentem sui cubi, quadruplum exponentem sui quadrato-quadrati, atque ita deinceps. Nam quum quadratum oriatur, multiplicando latus per se ipsum; erunt unitas, latus, & quadratum in geometrica proportione: ac proinde summa exponentium unitatis, & quadrati, hoc est exponens solius quadrati æqualis erit exponenti lateris duplicato. Et eâdem ratione, quia ex ipsa cubi genesi unitas, latus, quadratum, & cubus sunt in geometrica proportione; erit summa exponentium unitatis, & cubi, hoc est exponens solius cubi æqualis summæ exponentium lateris, & quadrati, hoc est exponenti solius lateris triplicato.

Et denique consequitur, semissem exponentis alicujus quantitatis æqualem esse exponenti suæ radicis quadratæ, trientem exponenti suæ radicis cubicæ, quadrantem exponenti suæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps. Nam ex iis, quæ

quæ modò ostensa sunt, exponens alicujus quantitatis est æqualis duplo exponentis suæ quadratæ radicis, triplo exponentis suæ radicis cubicæ, quadruplo exponentis suæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps: quare erit per contrarium semissis exponentis ejusdem quantitatis æqualis exponenti suæ quadratæ radicis, triens æqualis exponenti suæ radicis cubicæ, quadrans æqualis exponenti suæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita in infinitum.

III.

Natura potestatum positivarum, & negativarum.

JAm cognita analogia, quæ existit inter progressionem arithmeticam, & progressionem geometricam; haud difficile modò erit, naturam omnium potestatum intelligere. Itaque quum prima potestatum divisio, superius à nobis proposita, sit in positivas, & negativas; hoc est in illas, quæ exponentes habent positivos; & eas, quarum exponentes sunt negativi: videamus primò, quæ sit natura harum potestatum, quave ratione negatitivæ à positivis sint distinguendæ.

Et quidem circa potestates positivas, quarum exponentes sunt numeri integri, jam illud ab initio statuimus, eas exponentibus suis designare, quoties quantitas per multiplicationem poni debet: ita nempe, ut a, sive a^1 designet ipsam quantitatem a semel positam; a^2 eandem quantitatem a positam bis, hoc est productum, quod oritur, multiplicando a semel per seipsam; a^3 eandem adhuc quantitatem a positam ter, hoc est id, quod oritur, multiplicando a bis per se ipsam; atque ita de aliis.

Ex quo id porro consequitur, potestates istas omnes positivas, si ordine scribantur, progressionem geometricam constituere; quandoquidem a^1 est ad a^2, ut a^2 ad a^3; a^2 est ad a^3, ut a^3 ad a^4; a^3 est ad a^4, ut a^4 ad a^5; atque ita deinceps: quum in unaquaque istarum proportionum productum ex terminis mediis æquale esse ei, quod ex extremorum multiplicatione producitur; ex ipsa earum potestatum assumpta constitutione sit manifestum.

Hinc, quia exponentes earumdem potestatum sunt numeri totidem, qui si ordine quoque scribantur, progressionem con-

stituunt arithmeticam, jam quod de utraque progressione simul juncta paulò ante ostensum est, iis poterit applicari: quocirca si in serie illa potestatum capiantur tres, vel quatuor termini geometricè proportionales; summa ex exponentibus extremorum adæquabit, vel summam ex exponentibus mediorum, vel duplum exponentis termini medii.

Huic autem principio insistentes, cognoscemus primò, quod si seriem illam potestatum incipiamus ab unitate, utpote quæ cum ipsis illis potestatibus adhuc progressionem constituit, exponens ejus debeat esse zero, sive nihilum. Unitas quippe est ad a^1, ut a^1 ad a^2. Itaque summa exponentium, qui referuntur ad a^2, & unitatem, æqualis erit duplo exponentis, qui refertur ad a^1. Jam verò exponens solius a^2 adæquat duplum exponentis, qui refertur ad a^1. Itaque exponens unitatis debet esse zero, sive nihilum.

Verumtamen, quia quum exponens unitatis est zero, sive nihilum, tunc summa exponentium multiplicandi, & multiplicatoris, producti exponentem adæquat; cognoscemus secundò a^5 esse productum, quod oritur, multiplicando a^2 per a^3; a^7 id, quod oritur, multiplicando do a^3 per a^4; atque ita deinceps. Quumque in eadem hypotheſi exponens diviſoris, ſubductus ab exponente dividendi, relinquat exponentem quotientis; cognoſcemus quoque a^3 eſſe quotientem, qui oritur, dividendo a^5 per a^2; a^4 eum, qui oritur, dividendo a^7 per a^3; atque ita de aliis.

Unde haud difficile modò erit, naturam poteſtatum negativarum intelligere. Nam quemadmodum a^3 eſt quotiens, qui oritur, dividendo a^5 per a^2; ita a^{-3} deſignare debet quotientem, qui producitur, dividendo viciſſim a^2 per a^5, quandoquidem ſi ex exponente dividendi a^2 ſubducatur exponens diviſoris a^5, reſiduum erit $2-5$, hoc eſt -3. Et ob eandem rationem ſicuti a^4 eſt quotiens, qui oritur, dividendo a^7 per a^3; ita a^{-4} erit quotiens, qui producitur, dividendo viciſſim a^3 per a^7.

Quocirca poteſtates negativæ nihil aliud erunt, quàm fractiones, quæ tamquam numeratores habebunt unitatem, tamquam denominatores verò ipſas illas poteſtates, velut poſitivas conſideratas.

Nam ex oſtenſis a^{-3} deſignat quotientem, qui oritur, dividendo a^2 per a^5. Sed diviſo a^2 per a^5, quotiens producitur $\frac{1}{a^3}$. Itaque a^{-3} idem erit, ac $\frac{1}{a^3}$. Atque ita quoque a^{-1} idem planè erit, ac $\frac{1}{a}$; a^{-2} idem, ac $\frac{1}{a^2}$; a^{-4} idem, ac $\frac{1}{a^4}$; ſicque in infinitum.

Ex quo patet, ope poteſtatum negativarum fractiones poſſe quodammodo ad quantitates integras revocari. Nam in fractione $\frac{a^3}{c^2}$ quantitas a^3 reperitur multiplicata per $\frac{1}{c^2}$: proindeque, quia $\frac{1}{c^2}$ idem eſt, ac c^{-2}, ſcribi poterit loco ejus fractionis $a^3 c^{-2}$. Et ſimiliter, quia in fractione $\frac{b^4}{a^2}$ quantitas b^4 reperitur multiplicata per $\frac{1}{a^2}$, hoc est per a^{-2}; designari poterit fractio illa ad instar quantitatis integræ in hunc modum $b^4 a^{-2}$.

Sed vicissim ope earumdem potestatum, poterunt quantitates integræ quodammodo ad fractiones revocari. Nam quantitas integra a^3c^2 producitur dividendo a^3 per $\frac{1}{c^2}$: proindeque, quia $\frac{1}{c^2}$ idem est, ac c^{-2}, scribi poterit loco ejus $\frac{a^3}{c^{-2}}$. Et similiter, quia quantitas integra b^4a^2 oritur dividendo b^4 per $\frac{1}{a^2}$, hoc est b^4 per a^{-2}; designari ea poterit ad instar fractionis in hunc alium modum $\frac{b^4}{a^{-2}}$.

IV.

Natura potestatum perfectarum, & imperfectarum.

Altera potestatum divisio, superiùs à nobis proposita, est in perfectas, & imperfectas; hoc est in potestates, quarum exponentes sunt numeri integri, & potestes, quæ fractiones pro suis exponentibus habent. Quum itaque ostensa jam sit natura potestatum positivarum, & negativarum; sequitur, ut aliarum harum potestatum naturam explicemus, & quid discriminis intersit inter potestates perfectas, ac imperfectas ostendamus.

Hunc in finem consideremus rursus, potestates perfectas positivas, ordine dispositas, progressionem geometricam constituere; earundemque indices, sive exponentes, ordine quoque collocatos, progressionem alteram arithmeticam componere. Et quoniam ostensum jam est, quod si seriem illam potestatum incipiamus ab unitate, exponens ejus debeat esse zero, sive nihilum: proinde quæ §.II. hujus capitis de utraque progressione simul juncta postremo loco à nobis sunt demonstrata, jam vera erunt de potestatibus illis relatè ad suos exponentes.

Itaque de illis potestatibus in ordine ad suos exponentes illud porro statui potest, quod duplum exponentis alicujus potestatis adæquet exponentem sui quadrati, triplum exponentem sui cubi, quadruplum exponentem sui quadrato-quadrati, atque ita deinceps: unde potestatis hujus a^2 quadratum erit a^4, cubus a^6, quadrato-quadratum a^8, atque ita de aliis; & similiter alterius hujus potestatis a^3 quadratum erit a^6, cubus a^9, quadrato-quadratum a^{12}, atque ita in infinitum..

Sed illud etiam de iisdem potestatibus relatè ad suos exponentes velut certum potest assumi, quod semissis exponentis alicujus potestatis adæquet exponentem suæ quadratæ radicis, triens exponentem suæ radicis cubicæ, quadrans exponentem suæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps: qua ratione potestatis hujus a^{12} quadrata radix erit a^6, radix cubica a^4, radix quadrato-quadrata a^3, atque ita de aliis. Et similiter alterius hujus potestatis a^{24} radix quadrata erit a^{12}, radix cubica a^8, radix quadrato-quadrata a^6, atque ita in infinitum.

Un-

Unde modò facile erit; naturam potestatum imperfectarum intelligere. Nam quemadmodum a^2 est quadrata radix potestatis a^4, ita $a^{\frac{1}{2}}$ designare debet quadratam radicem, quæ elicitur ex a, sive a^1; quippe sicuti exponens ipsius a^2 est semissis exponentis alterius a^4, ita exponens ipsius $a^{\frac{1}{2}}$ adæquat semissem exponentis alterius a^1. Et similiter sicuti a^2 est radix cubica potestatis a^6, ita $a^{\frac{1}{3}}$ erit radix cubica, quæ extrahitur ex a^1; quandoquidem non minus exponens ipsius a^2 est tertia pars exponentis alterius a^6, quàm exponens ipsius $a^{\frac{1}{3}}$ est tertia pars exponentis alterius a^1.

Ob eandem rationem $a^{\frac{3}{2}}$ designabit quadratam radicem ipsius a^3; $a^{\frac{2}{3}}$ radicem cubicam ipsius a^2; $a^{\frac{3}{4}}$ radicem quadrato-quadratam ipsius a^3; atque ita de aliis: quocirca potestates imperfectæ, sive quæ fractiones pro suis exponentibus habent, nihil aliud erunt, quàm radices designasignatæ à denominatoribus fractionum, & extractæ ex potestatibus, quarum exponentes sunt soli numeratores earundem fractionum: ut $a^{\frac{1}{2}}$, quæ est radix secunda ipsius a^1; $a^{\frac{2}{3}}$, quæ est radix tertia ipsius a^2; $a^{\frac{3}{5}}$, quæ est radix quinta ipsius a^3; atque ita deinceps.

Jam autem, quum potestates perfectæ negativæ, & ipsæ quoque ordine dispositæ, progressionem geometricam constituant; earumdemque exponentes, ordine collocati, progressionem quoque alteram componant arithmeticam; & exponens unitatis in ordine ad eas sit etiam zero, sive nihilum: perspicuum est, quæcumque de potestatibus perfectis positivis dicta sunt, ea omnia vera esse quoque de potestatibus perfectis negativis.

Quocirca quemadmodum potestatis hujus perfectæ positivæ a^2 quadratum est a^4, cubus a^6, quadrato-quadratum a^8, atque ita de aliis; ita quoque potestatis hujus perfectæ negativæ a^{-2} quadratum erit a^{-4}, cubus a^{-6}, quadrato-quadratum

tum a^{-8}, & sic deinceps in infinitum. Pariterque quemadmodum potestatis hujus perfectæ positivæ a^{12} quadrata radix est a^6, radix cubica a^4, radix quadrato-quadrata a^3, & sic deinceps; ita quoque potestatis hujus perfectæ negativæ a^{-12} quadrata radix erit a^{-6}, radix cubica a^{-4}, radix quadrato-quadrata a^{-3}, atque ita in infinitum.

Unde porro sicuti $a^{\frac{1}{2}}$ est quadrata radix ipsius a^1, $a^{\frac{1}{3}}$ radix cubica ejusdem a^1. Ita $a^{-\frac{1}{2}}$ erit quadrata radix ipsius a^{-1}, & $a^{-\frac{1}{3}}$ radix cubica ejusdem a^{-1}. Et præterea quemadmodum $a^{\frac{3}{2}}$ est radix quadrata ipsius a^3, $a^{\frac{2}{3}}$ est radix cubica ipsius a^2; ita $a^{-\frac{3}{2}}$ erit radix quadrata potestatis negativæ a^{-3}, & $a^{-\frac{2}{3}}$ radix cubica

po-

potestatis negativæ a^{-2}: proindeque quia a^{-2}, a^{-3} idem sunt, ac $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$; erit $a^{-\frac{3}{2}}$ radix quadrata fractionis $\frac{1}{a^3}$, & $a^{-\frac{2}{3}}$ radix cubica fractiouis $\frac{1}{a^2}$.

Ex quibus jam liquet id, quod in calce capitis antecedentis dicebamus: nimirum quantitates incommensurabiles considerari posse velut potestates imperfectas quantitatum, & proinde ad instar potestatum perfectarum alia posse ratione designari: quocirca quadratam radicem quantitatis a designabimus deinde non modò per $\sqrt{a}$, verùm etiam per $a^{\frac{1}{2}}$; & similiter radicem cubicam quantitatis a^2 ostendemus non modò per $\sqrt[3]{a^2}$, verùm etiam per $a^{\frac{2}{3}}$. Sed quemadmodum quadrata radix quãtitatis cõpositæ $a+c$ designatur vulgò per $\sqrt{a+c}$, hoc est lineola posita super partibus quantitatis; ita ostendetur etiam à nobis per $\overline{a+c}^{\frac{1}{2}}$: un-

unde monitũ Lectorem hîc volo, non idem esse $\overline{a+c}^{\frac{1}{2}}$, & $a+c^{\frac{1}{2}}$; nam expressio illa idem valet, ac $\sqrt{a+c}$; ista verò idem significat, ac $a+\sqrt{c}$.

V.

Calculus potestatum per exponentes.

Natura potestatum omnium explicata, traditaque differentia, quæ reperitur tam inter potestates positivas, & negativas, quàm inter potestates perfectas, & imperfectas; non abs re fore puto, hîc breviter ostendere, quo pacto earumdem potestatum calculus possit per exponentes institui. Itaque operationes, quæ circa potestates omnes, adhibitis exponentibus, alia ratione, & quidem longè faciliori institui possunt, sunt multiplicatio, divisio, formatio potestatum, & extractio radicum.

Et quidem, quantum ad multiplicationem duarum potestatum unius, ejusdemque quantitatis, instituitur illa, addendo simul exponentes datarum potestatum, & scribendo summam pro exponente producti. Cujus equidem ratio exinde dependet, quia quotiescumque index, sive ex-

po-

ponens unitatis est zero, sive nihilum, tum summa exponentium multiplicandi, & multiplicatoris producti exponentem adæquat.

Hac ratione ad multiplicandum a^2 per a^3, scribendum est a^5; quia exponentes 2, & 3 simul additi conficiunt 5. Similiter ad multiplicandum a^5 per a^{-3}, scribendum est a^2; quia summa exponentium 5, & -3 est $5-3$, hoc est 2. Atque ita quoque ad multiplicandum a^2 per $a^{\frac{1}{2}}$, scribi debet $a^{\frac{5}{2}}$; quum 2, & $\frac{1}{2}$ simul sint $\frac{5}{2}$. Pariterque erit $a^{-\frac{3}{2}}$ productum, quod oritur multiplicando a^{-2} per $a^{\frac{1}{2}}$; quandoquidem -2, & $\frac{1}{2}$ simul sunt $-\frac{3}{2}$.

Quantum ad mutuam duarum potestatum unius, ejusdemque quantitatis divisionem, instituitur illa, subducendo à se mutuò exponentes datarum potestatum, & scribendo residuum, sive differentiam pro exponente quotientis. Quod quidem exinde dependet, quia quum index, sive exponens unitatis est zero, sive nihilum,

tum exponens divisoris, subtractus ab exponente dividendi, relinquat exponentem quotientis.

Hoc pacto ad dividendum a^5 per a^2, scribendum est a^3; quia exponens 2, subductus ab exponente 5, relinquit 3. Similiter ad dividendum a^2 per a^{-3}, scribendum est a^5; quia si ex exponente 2 subtrahatur exponens -3, residuum erit $2+3$, hoc est 5. Atque ita quoque ad dividendum $a^{\frac{5}{2}}$ per a^2, scribi debet $a^{\frac{1}{2}}$; quia si ex $\frac{5}{2}$ subtrahatur 2, residuum fiet $\frac{1}{2}$. Pariterque erit a^{-2} quotiens, qui oritur, dividendo $a^{-\frac{3}{2}}$ per $a^{\frac{1}{2}}$; quum $\frac{1}{2}$, subtractus ex $-\frac{3}{2}$, relinquat -2.

Quantum ad formationem potestatum, fiet ea, si exponens datæ potestatis toties accipiatur, quot sunt unitates in indice, sive exponente potestatis, ad quam illa est elevanda. Cujus etiam ratio exinde est repetenda, quia ubi exponens unitatis est zero, sive nihilum, tum duplum exponentis alicujus quantitatis adæquat exponentem ſui quadrati, triplum exponentem ſui cubi, quadruplum exponentē ſui quadrato-quadrati, atque ita deinceps.

Sic quadratum poteſtatis perfectæ poſitivæ a^2 erit a^4, cubus a^6, quadrato-quadratum a^8, atque ita de aliis. Et ſimiliter poteſtatis perfectæ negativæ a^{-2} quadratū erit a^{-4}, cubus a^{-6}, quadrato-quadratū a^{-8}, & ſic deinceps in infinitū. Sed eādē ratione poteſtatis imperfectæ poſitivæ $a^{\frac{1}{2}}$ quadratum erit a^1, cubus $a^{\frac{3}{2}}$, quadrato-quadratum a^2. Atque ita quoque poteſtatis imperfectæ negativæ $a^{-\frac{1}{2}}$ quadratum erit a^{-1}, cubus $a^{-\frac{3}{2}}$, quadrato-quadratum a^{-2}.

Denique quantum ad radicum extractionem, inſtituetur ea, ſi ex exponente datæ poteſtatis ea pars capiatur, quam denominat index, ſive exponens radicis extrahendæ. Quod exinde etiam repeti debet, quia quum exponens unitatis eſt zero,

zero, ſive nihilum, tum ſemiſſis exponentis alicujus quantitatis adæquat exponentem ſuæ quadratæ radicis, triens exponentem ſuæ radicis cubicæ, quadrans exponentem ſuæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps.

Hac ratione radix quadrata poteſtatis perfectæ poſitivæ a^2 erit a^1, radix cubica $a^{\frac{2}{3}}$, radix quadrato-quadrata $a^{\frac{1}{2}}$. Et ſimiliter poteſtatis perfectæ negativæ a^{-2} radix quadrata erit a^{-1}, radix cubica $a^{-\frac{2}{3}}$, radix quadrato-quadrata $a^{-\frac{1}{2}}$. Sed ob eandem rationem radix quadrata poteſtatis imperfectæ poſitivæ $a^{\frac{1}{2}}$ erit $a^{\frac{1}{4}}$, radix cubica $a^{\frac{1}{6}}$, radix quadrato-quadrata $a^{\frac{1}{8}}$. Atque ita quoque poteſtatis imperfectæ negativæ $a^{-\frac{1}{2}}$ radix quadrata erit $a^{-\frac{1}{4}}$, radix cubica $a^{-\frac{1}{6}}$, radix quadrato-quadrata $a^{-\frac{1}{8}}$.

Cæterùm, quum fractiones mediantibus exponẽtibus negativis possint quodãmodo ad quãtitates integras revocari; nolim hîc silẽtio præterire, hujusmodi artificio posse calculũ fractionũ iisdem omnino regulis perfici, quibus calculus quantitatum integrarum instituitur. Sed quia ex hactenus dictis id cuique satis liquere arbitror, sufficiat illud adnotasse, & omnino superfluum existimo diutiùs in hisce immorari.

CAP. VII.

Calculus radicalium simplicium.

Quoniam quantitates incommensurabiles, quæ etiam radicales dicuntur, sæpe sæpiùs & ipsæ ad calculum poni debent: proinde, ne quum id contingit, hæreant Tyrones, earum quoque calculum oportet ostendamus. Quod equidem eò accuratiùs à nobis fieri debet, quia de hujusmodi calculo nihil fermè traditur in Arithmetica vulgari. Hunc in finem non modò in quantitatibus litteralibus, verùm etiam in quantitatibus numericis lubet ejus periculum facere. Et quoniam quantitates radicales, perinde ac rationales, sive commensurabiles, dividi possunt in

in simplices & compositas; idcirco primò agemus de calculo radicalium simplicium, tum de calculo radicalium compositarum verba faciemus.

Quantitates radicales dicuntur simplices, quotiescumque unicum habent terminum, eumque effectum signo radicali, ut $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{ac}$. Harum quantitatum calculus ut meliùs intelligatur, præmittendum est primò, quod sicuti ad designandum duplum, triplum, quadruplum quantitatis commensurabilis a, scribitur $2a$, $3a$, $4a$; sic ad designandum duplum, triplum, quadruplum quantitatis radicalis $\sqrt{a}$, scribendum sit $2\sqrt{a}$, $3\sqrt{a}$, $4\sqrt{a}$: proindeque quemadmodum $2a + 3a$ idem sunt, ac $5a$; & $5a - 3a$ idem, ac $2a$: ita quoque $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$ idem erunt, ac $5\sqrt{a}$; & $5\sqrt{a} - 3\sqrt{a}$ idem, ac $2\sqrt{a}$.

Quin etiam, quemadmodum si quantitas a toties accipienda sit, quot sunt partes in c, scribitur ca; ita quoque $c\sqrt{a}$ designabit, quantitatem incommensurabilem $\sqrt{a}$ toties accipiendam esse, quot sunt partes in c: qua ratione multiplicabitur quævis quantitas radicalis per quamlibet quantitatem commensurabilem, ac rationalem, scribendo illam post istam nul-

 la

lo ſigno interjecto; ut ad multiplicandum $\sqrt{b}$ per a, ſcribo $a\sqrt{b}$; & ſimiliter ad multiplicandum $\sqrt{5}$ per 3, ſcribo $3\sqrt{5}$.

Jam quantitates, quæ ſunt extra ſignum radicale, ſive ſint numericæ, ſive litterales, dicentur in poſterum coefficientes earum, quæ ſub ſigno reperiuntur. Sed facilè erit, eas quoque ſub eodem ſigno radicali reponere: ſcilicet ſi elevatæ ad poteſtatem, deſignatam ab exponente ſigni radicalis, multiplicentur per quantitates, ſub ſigno exiſtentes: qua ratione $2\sqrt{3}$ idem erit, ac $\sqrt{12}$; & $c\sqrt{a}$ idem, ac $\sqrt{ac^2}$: pariterque $3\sqrt[3]{2}$ idem erit, ac $\sqrt[3]{54}$; & $c\sqrt[3]{a}$ idem, ac $\sqrt[3]{ac^3}$.

Sed viciſſim ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus, poterunt quandoque nonnullæ extra ſignum collocari: ſcilicet ſi ex iis extrahi poſſit radix, à ſigno radicali denominata. Ita quia in $\sqrt{ac^2}$ reperitur ſub ſigno radicali quantitas c^2, ex qua extrahi poteſt quadrata radix; proinde collocabitur illa extra ſignum, ſcribendo $c\sqrt{a}$. Et ſimiliter, quia in $\sqrt[3]{54}$ numerus 54 oritur, multiplicando 27 per 2, & ex 27 extrahi poteſt radix cubica; idcirco collocabitur numerus 27 extra ſignum, ſcribendo $3\sqrt[3]{2}$.

Atque hac ratione perſpicuum eſt, quan-

tita-

titates radicales longè ſimpliciùs deſignari. Quocirca, ut eædem quantitates ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur, præſtat extra ſignum collocare eas omnes quantitates, ex quibus elici poteſt radix, à ſigno denominata. Ita, quia in $\sqrt{4ac^2}$ quadrata radix elici poteſt, non modò ex c^2, verùm etiam ex 4; ſimplicior quantitatis propoſitæ expreſſio erit $2c\sqrt{a}$. Et ſimiliter, quia in $\sqrt[3]{27ac^3}$ extrahi poteſt radix cubica non ſolùm ex c^3, verùm etiam ex 27; ſimplicior ejus quantitatis expreſſio erit $3c\sqrt[3]{a}$.

Vulgò Algebriſtæ, ad reducendas quantitates radicales ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, dividunt eas per maximam poteſtatem, à radicali ſigno denominatam, quæ in iis continetur. Ut quia maximum quadratum, quod continetur in $4ac^2$, eſt $4c^2$, cujus radix eſt $2c$; proinde diviſo $4ac^2$ per $4c^2$, reducetur quantitas radicalis $\sqrt{4ac^2}$ ad hanc aliam $2c\sqrt{a}$. Et ſimiliter quia maximus cubus, qui continetur in $27ac^3$, eſt $27c^3$, cujus radix eſt $3c$; idcirco diviſo $27ac^3$ per $27c^3$, mutabitur quantitas radicalis $\sqrt[3]{27ac^3}$ in hanc aliam $3c\sqrt[3]{a}$.

Jam reductis quantitatibus radicalibus

ad

ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, cognoſci poteſt, num ratio, quæ inter eas exiſtit, ſit commenſurabilis, necne. Si enim contigerit, illas eandem ſub ſignis radicalibus quantitatem habere, erit earum ratio commenſurabilis, ac rationalis, utpote quæ illa eadem, quæ inter earundem coefficientes exiſtit; ſecus verò, ſi ſub ſignis radicalibus diverſas habeant quantitates: qua ratione $2\sqrt{3}$ ad $4\sqrt{3}$ erit, ut 2 ad 4, ſive ut 1 ad 2; pariterque $2a\sqrt{b}$ ad $2c\sqrt{b}$ erit, ut $2a$ ad $2c$, ſive ut a ad c.

I.

Additio radicalium ſimplicium.

UT duæ, aut plures radicales ſimplices addantur in unum, reducendæ ſunt eæ methodo jam tradita ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Nam ſi cõtigerit, eas ſic reductas eandem ſub ſigno radicali quantitatem habere, fiet additio, conjungendo ſimul coefficientes ipſarum, & ſcribendo ſummam velut coefficientem ejuſdem quantitatis radicalis.

Hac ratione, ſi addendæ ſint ſimul quantitates duæ radicales $\sqrt{8}$, & $\sqrt{72}$; reduco primùm eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, earumque una fiet $2\sqrt{2}$, altera $6\sqrt{2}$: unde quia ſic reductæ eandem ſub ſigno radicali habent quantitatem, addo ſimul earum coefficientes 2, & 6; eritque ſumma quæſita $8\sqrt{2}$, ſive $\sqrt{128}$.

Similiter ſi proponantur in unum addendæ quantitates duæ radicales $\sqrt[3]{24}$, & $\sqrt[3]{648}$; reduco primùm illas ad ſuas ſimpliciores expreſſiones: & quia earum una fit $2\sqrt[3]{3}$, altera $6\sqrt[3]{3}$; erit ſumma quæſita $8\sqrt[3]{3}$, ſive $\sqrt[3]{1536}$. Atque ita quoque ſumma quantitatum radicalium $\sqrt{4a}$, & $\sqrt{9a}$, erit $5\sqrt{a}$, ſive $\sqrt{25a}$; pariterque erit $7c\sqrt{a}$, ſive $\sqrt{49ac^2}$ ſumma quantitatum radicalium $\sqrt{4ac^2}$, & $\sqrt{25ac^2}$.

Quod ſi autem quantitates radicales propoſitæ, reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, non habeant eandem quantitatem ſub ſigno radicali; tum fiet additio, adhibito ſigno $+$: qua ratione, quia quantitates radicales $\sqrt{12}$, & $\sqrt{18}$ reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones fiunt $2\sqrt{3}$, & $3\sqrt{2}$; erit ſumma ipſarum, vel $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$, vel $\sqrt{18} + \sqrt{12}$.

Sed accidit interdum, ut etſi quantitates, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocatæ, eandem habeant quantitatem ſub ſigno radicali, adhuc tamen additio fieri debeat, adhibito ſigno $+$: ſcilicet ſi quantitates ſint litterales, & coefficientes litteras habeant diverſas. Ut ſi ſimul addere velim quantitates duas radicales $\sqrt{ac^2}$, & $\sqrt{ab^2}$; eæ reductæ ad ſimpliciores ſuos terminos eandem continent ſub ſigno radicali quantitatem; nam evadunt $c\sqrt{a}$, & $b\sqrt{a}$. Sed quia c cum b non aliter conjungi poteſt, quàm ſigno $+$; erit ſumma earum quantitatum, vel $c\sqrt{a} + b\sqrt{a}$, vel etiam $\overline{c + b}\sqrt{a}$.

Fieri quoque poteſt additio radicalium ſimplicium ſine ulla reductione hac alia methodo, quæ commodior erit in quantitatibus numericis: capiantur quantitates, ſub ſignis radicalibus exiſtentes, & dividatur major per minorem. Nam ſi contigerit, ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut exinde elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; eliciatur radix iſta, eaque unitate aucta fiat coefficiens quantitatis minoris, ſub ſigno exiſtentis, & habebitur ſumma quæſita.

Oporteat, exempli gratia, addere in unum quantitates duas radicales ſimplices $\sqrt{8}$, & $\sqrt{72}$: capiantur quantitates ſub ſignis exiſtentes 72, & 8; deinde

deinde dividatur major 72 per minorem 8: & quia habetur 9 pro quotiente, cujus quadrata radix eſt 3; augeatur radix iſta unitate; & erit $4\sqrt{8}$, ſive $\sqrt{128}$ ſumma propoſitarum quantitatum.

Proponantur ſimiliter addendæ in unum quãtitates duæ radicales ſimplices $\sqrt[3]{24}$, & $\sqrt[3]{648}$: quoniam quantitates ſub ſignis exiſtentes ſunt 24, & 648; dividatur major 648 per minorem 24: quumque pro quotiente habeatur 27, cujus radix cubica eſt 3; augeatur radix iſta unitate, & erit $4\sqrt[3]{24}$, ſive $\sqrt[3]{1536}$ ſumma datarum quantitatum.

Quod ſi autem diviſa majori per minorem, non habeatur talis quotiens, ut exinde elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; tunc facienda eſt additio, adhibito ſigno $+$: qua ratione, quia ex quotiente, qui oritur dividendo 12 per 8 elici nequit quadrata radix; idcirco ſumma duarum quantitatum radicalium $\sqrt{8}$, & $\sqrt{12}$ erit $\sqrt{8} + \sqrt{12}$.

Jam ſi quantitati radicali addenda ſit quantitas aliqua commenſurabilis, ac rationalis, fiet additio conjungendo eas ſigno $+$. Sic ad addendum 5 cum $\sqrt{14}$, ſcribo $5 + \sqrt{14}$; pariterque ad addendum 3 cum $\sqrt[3]{10}$, ſcribo $3 + \sqrt[3]{10}$: neque

que aliter fiet, si addi debeat, vel b cum $\sqrt{a}$, vel b cum $\sqrt[3]{a}$; quandoquidem summa erit, vel $b + \sqrt{a}$, vel $b + \sqrt[3]{a}$.

II.

Subtractio radicalium simplicium.

Similiter, ut ex una quantitate radicali subtrahi possit alia quantitas radicalis; reducendæ sunt eæ methodo superiùs tradita ad simpliciores suas expressiones. Nam si contigerit, eas sic reductas eandem sub signo radicali quantitatem habere, fiet subtractio, subducendo coefficientem unius ex coefficiente alterius, & scribendo residuum velut coefficientem ejusdem quantitatis radicalis.

Hoc pacto, si ex quantitate radicali $\sqrt{72}$ subducenda sit quantitas altera radicalis $\sqrt{8}$; reduco primùm eas ad simpliciores suas expressiones, earumque una fiet $6\sqrt{2}$, altera $2\sqrt{2}$: unde quia sic reductæ eandem sub signo radicali habent quantitatem, ex coefficiente unius 6 subtraho coefficientem alterius 2, eritque residuum quæsitum $4\sqrt{2}$, sive $\sqrt{32}$.

Eadem ratione, si ex quantitate radicali

$\sqrt[3]{648}$ proponatur subtrahenda quantitas altera radicalis $\sqrt[3]{24}$; reduco primùm illas ad simpliciores suas expressiones: & quia earum una fit $6\sqrt[3]{3}$, altera $2\sqrt[3]{3}$, erit residuum quæsitum $4\sqrt[3]{3}$, sive $\sqrt[3]{192}$. Atque ita quoque id, quod remanet, subtrahendo $\sqrt{9a}$ ex $\sqrt{25a}$, erit $2\sqrt{a}$, sive $\sqrt{4a}$; pariterque erit $c\sqrt{a}$, sive $\sqrt{ac^2}$ id, quod remanet, subducendo $\sqrt{4ac^2}$ ex $\sqrt{9ac^2}$.

Quod si verò quantitates, ad subtrahendum propositæ, reductæ ad simpliciores suas expressiones, non habeant sub signo radicali eandem quantitatem; tunc fiet subtractio, adhibito signo $-$: qua ratione, quia quantitates radicales $\sqrt{18}$, & $\sqrt{12}$, reductæ ad simpliciores suas expressiones, fiunt $3\sqrt{2}$, & $2\sqrt{3}$; erit vel $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, vel $\sqrt{18} - \sqrt{12}$ id, quod relinquitur, subtrahendo unam ex alia.

Sed contingit ut plurimum, ut tametsi quantitates, ad simpliciores suas expressiones revocatæ, eandem habeant quantitatem sub signo radicali, adhuc tamen subtractio fieri debeat, adhibito signo $-$: nimirum si quantitates sint litterales, & coefficientes litteras habeant diversas. Ut si velim ex $\sqrt{ac^2}$ subtrahere $\sqrt{ab^2}$, eæ reductæ ad simpliciores suos termiminos eandem ſub ſigno radicali continent quantitatem; nam evadunt $c\sqrt{a}$, & $b\sqrt{a}$. Sed quia b ex c non aliter ſubtrahi poteſt, quàm per ſignum —; erit reſiduum propoſitæ ſubtractionis, vel $c\sqrt{a} - b\sqrt{a}$, vel etiam $\overline{c-b}\sqrt{a}$.

Fieri quoq; poteſt ſubtractio radicaliũ ſimplicium ſine ulla reductione hac alia methodo, quæ commodior erit in quantitatibus numericis: capiantur quantitates, ſub ſignis radicalibus exiſtentes, & dividatur major per minorem. Nam ſi contigerit, ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut exinde elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; fiat radix iſta, unitate diminuta, coefficiens quantitatis minoris, ſub ſigno ſuo exiſtentis, & habebitur reſiduum quæſitum.

Oporteat, exempli gratia, ex quantitate radicali $\sqrt{72}$ ſubducere quantitatem aliam radicalem $\sqrt{8}$: capiantur quantitates ſub ſignis exiſtentes 72, & 8; deinde dividatur major 72 per minorem 8: & quia habetur 9 pro quotiente, cujus quadrata radix eſt 3; minuatur radix iſta unitate, & erit $2\sqrt{8}$, ſive $\sqrt{32}$ reſiduum propoſitæ ſubtractionis.

Oporteat ſimiliter, ex quantitate radi-

cali $\sqrt[3]{648}$ ſubtrahere quantitatem alteram radicalem $\sqrt[3]{24}$: quoniam quantitates ſub ſignis exiſtentes ſunt 648, & 24; dividatur major 648 per minorem 24: quumque pro quotiente habeatur 27, cujus radix cubica eſt 3; minuatur radix iſta unitate, & erit $2\sqrt[3]{24}$, ſive $\sqrt[3]{192}$ reſiduum ſubtractionis propoſitæ.

Quod ſi verò diviſa majori per minorem, non habeatur talis quotiens, ut elici exinde poſſit radix, quam oſtendit ſignum radicale; tunc facienda eſt ſubtractio, adhibito ſigno —: qua ratione, quia ex quotiente, qui oritur, dividendo 12 per 8, elici nequit quadrata radix; erit $\sqrt{12} - \sqrt{8}$ id, quod remanet, ſubducendo $\sqrt{8}$ ex $\sqrt{12}$.

Jam ſi ex quantitate commenſurabili ſubducenda ſit quantitas radicalis, vel viciſſim ex quantitate radicali ſubducenda ſit quantitas commenſurabilis; fiet ſubtractio, conjungendo eas ita quidem ſigno —, ut ſignum iſtud præcedat quantitatem ſubtrahendam. Sic ad ſubtrahendum $\sqrt{14}$ ex 5, ſcribo $5 - \sqrt{14}$; pariterque ad ſubtrahendum 3 ex $\sqrt[3]{50}$, ſcribo $\sqrt[3]{50} - 2$: neque aliter fiet, ſi ſubtrahi, debeat vel $\sqrt{a}$ ex b, vel viciſſim

b ex $\sqrt{a}$; nam erit residuum, vel $b - \sqrt{a}$, vel $\sqrt{a} - b$.

III.

Multiplicatio radicalium simplicium.

UT quantitates simplices radicales per se mutuò multiplicentur, nulla opus est earum ad simpliciores suas expressiones reductione, sed satis est quantitates, sub signis existentes, inter se mutuò multiplicare, productoque idem radicale signum præfigere. Ut si oporteat $\sqrt{a}$ multiplicare per $\sqrt{b}$, multiplico primùm a per b, tum producto ab præfigo idem signum radicale, & quantitas radicalis $\sqrt{ab}$ erit productum quæsitum; similiter productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{2}$ per $\sqrt{5}$, erit $\sqrt{10}$; atque ita quoque erit $\sqrt[3]{30}$ id, quod producitur, multiplicando $\sqrt[3]{3}$ per $\sqrt[3]{10}$.

Quod si quantitates radicales, ad multiplicandum propositæ, suos habeant coefficientes, necesse est eos quoque inter se mutuò multiplicare: qua ratione productum, quod oritur, multiplicando $2\sqrt{a}$ per $3\sqrt{b}$, erit $6\sqrt{ab}$; pariterque id, quod producitur, multiplicando $3\sqrt{5}$ per $4\sqrt{10}$

erit $12\sqrt{50}$; atque ita quoque erit $ac\sqrt{ab}$ productum, quod gignitur, multiplicando $a\sqrt{a}$ per $c\sqrt{b}$.

Jam autem productum, quod oritur ex mutua quantitatum radicalium multiplicatione, non semper est quantitas alia radicalis; sed fieri potest, ut quandoque sit quantitas commensurabilis, ac rationalis: scilicet, si quantitates, sub signis existentes, per se mutuò multiplicatæ, producant quantitatem, ex qua elici possit radix, quam radicale signum ostendit. Id namque quum accidit, eliciatur prædicta radix, eaque per coefficientes quantitatum propositarum multiplicata, productum quæsitum exhibebit.

Hoc pacto si multiplicare oporteat $2\sqrt{ab^2}$ per $4\sqrt{a}$; multiplico primum inter se mutuò quantitates sub signis existentes ab^2, & a; deinde, quia ex hac multiplicatione productum oritur a^2b^2, cujus quadrata radix est ab, multiplico radicem istam per coefficientes propositarum quantitatum, hoc est primò per 2, deinde per 4; & erit $8ab$ productum, quod gignitur, multiplicando $2\sqrt{ab^2}$ per $4\sqrt{a}$.

Eâdem ratione ad multiplicandum $2\sqrt[3]{a^2}$ per $3\sqrt[3]{a}$, multiplico primum quan-

quantitates, ſub ſignis exiſtentes : & quoniã ex hac multiplicatione producitur a^3, cujus radix cubica eſt a, multiplico deinde per coefficientes propoſitarum quantitatum 2, & 3 radicem iſtam a; eritque $6a$ productum, quod quæritur. Atque ita quoque erit 24 productum, quod oritur, multiplicando $3\sqrt{8}$ per $2\sqrt{2}$; & 12 id, quod producitur, multiplicando $3\sqrt[3]{4}$ per $2\sqrt[3]{2}$.

Quo pacto quantitas radicalis multiplicari debeat per quantitatem aliam commenſurabilem, ac rationalem; jam ſuperiùs innuimus: nimirum ſcribendo primam poſt ſecundam, nullo ſigno interjecto. Hac ratione ad multiplicandum $\sqrt{a}$ per c, ſcribo $c\sqrt{a}$; pariterque ad multiplicandum $\sqrt[3]{b}$ per a, ſcribo $a\sqrt[3]{b}$. Atque ita quoque erit $5\sqrt{2}$ productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{2}$ per 5; & $4\sqrt[3]{10}$ id, quod producitur, multiplicando $\sqrt[3]{10}$ per 4.

Sed ſi quantitas radicalis, quam oportet per aliam commenſurabilem, ac rationalem multiplicare, ſuum habeat coefficientem; multiplicandus eſt iſte per quantitatem commenſurabilem. Quo pacto erit $ac\sqrt{a}$ productum, quod oritur, multiplicando $a\sqrt{a}$ per c; & $ba\sqrt[3]{b}$ productum, quod gignitur, multiplicando $b\sqrt[3]{b}$ per a. Atque ita quoque erit $20\sqrt{2}$ id, quod producitur, multiplicando $4\sqrt{2}$ per 5; & $12\sqrt[3]{4}$ id, quod oritur, multiplicando $3\sqrt[3]{4}$ per 4.

IV.

Diviſio radicalium ſimplicium.

Similiter, ut quantitates ſimplices radicales per ſe mutuò dividantur, haud quidem opus eſt, eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare; ſed ſufficiet quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe mutuò dividere, & quotienti idem radicale ſignum præfigere. Ut ſi oporteat $\sqrt{ab}$ dividere per $\sqrt{a}$, divido primùm ab per a, tum quotienti b præfigo idem ſignum radicale, & quantitas radicalis $\sqrt{b}$ erit quotiens quæſitus; pariterque quotiens, qui oritur, dividendo $\sqrt{10}$ per $\sqrt{5}$, erit $\sqrt{2}$; atque ita quoque erit $\sqrt[3]{c}$ quotiens, qui producitur, dividendo $\sqrt[3]{c^2}$ per $\sqrt[3]{c}$; & $\sqrt[3]{3}$ quotiens, qui gignitur, dividendo $\sqrt[3]{30}$ per $\sqrt[3]{10}$.

Quod ſi quantitates radicales, ad dividendum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes; neceſſe eſt, eos quoque per ſe mutuò

tuò dividere : qua ratione quotiens, qui oritur, dividendo $6\sqrt{ab}$ per $2\sqrt{a}$, erit $3\sqrt{b}$; pariterque quotiens, qui producitur, dividendo $12\sqrt{50}$ per $4\sqrt{10}$, erit $3\sqrt{5}$; atque ita quoque erit $a\sqrt{a}$ quotiens, qui gignitur, dividendo $ac\sqrt{ab}$ per $c\sqrt{b}$.

Jam autem quotiens, qui oritur ex mutua quantitatum radicalium divisione, non semper est quantitas alia radicalis; sed fieri potest, ut quandoque sit quantitas commensurabilis, ac rationalis: scilicet, si quantitates, sub signis existentes, per se mutuò divisæ, producant quotientem, ex quo elici possit radix, quam radicale signum ostendit. Id namque si contingit, eliciatur prædicta radix, eaque multiplicata per quotientem, qui oritur ex mutua coefficientium divisione, quæsitum quotientem exhibebit.

Hac ratione, si dividere oporteat $8\sqrt{ab^2}$ per $2\sqrt{a}$, divido primùm per se mutuò quantitates, sub signis existentes, hoc est ab^2 per a; deinde, quia ex hac divisione quotiens oritur b^2, cujus quadrata radix est b, multiplico radicem istam per 4 quotientem, qui oritur, dividendo coefficientem unius quantitatis radicalis 8 per coefficientem alterius 2: quumque sic multiplicata evadat $4b$, erit

erit $4b$ quotiens, qui gignitur, dividendo $8\sqrt{ab^2}$ per $2\sqrt{a}$.

Eâdem ratione. ad dividendum $6\sqrt[3]{ab^3}$ per $2\sqrt[3]{a}$, divido primum quantitates, sub signis existentes, hoc est ab^3 per a: & quoniam ex hac divisione producitur quotiens b^3, cujus radix cubica est b; multiplico deinde b per 3, quotientem genitum ex divisione coefficientis unius quantitatis radicalis 6 per coefficientem alterius 2; eritque $3b$ quotiens quæsitus. Atque ita quoque erit 9 quotiens, qui oritur, dividendo $6\sqrt{18}$ per $2\sqrt{2}$; & 8 quotiens, qui gignitur, dividendo $4\sqrt[3]{16}$ per $\sqrt[3]{2}$.

Quod si divisio institui debeat inter quantitatem radicalem, & quantitatẽ aliã commensurabilem, ac rationalem; attollatur quantitas commensurabilis ad eam potestatem, quam ostendit radicale signum alterius; tum deinde fiat divisio. Ut si dividere velim $\sqrt{ab^2}$ per b, divido ab^2 per quadratum ipsius b, hoc est per b^2; eritque $\sqrt{a}$ quotiens quæsitus. Pariterque si dividere oporteat a per $\sqrt[3]{a}$, divido cubum ipsius a per quantitatem, existentem sub signo radicali, hoc est a^3 per a, eritque $\sqrt[3]{a^2}$ quo-

 tiens

tiens propositæ divisionis.

Cæterùm notetur hoc loco velim, quod si ex divisione quantitatum radicalium oriatur fractio aliqua, ex qua elici non possit radix, de qua agitur; tunc radicale signum, vel præfigendum toti fractioni ad modum unius, vel etiam tam numeratori, quàm denominatori: qua ratione quotiens, qui producitur, dividendo $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{c}$, erit vel $\sqrt{\frac{ab}{c}}$, vel etiam $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$; & similiter quotiens, qui gignitur, dividendo $\sqrt{5}$ per $\sqrt{6}$ erit, vel $\sqrt{\frac{5}{6}}$, vel etiam $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Sed si ex numeratore, denominatoreve fractionis elici possit radix, de qua agitur, non item ex alio; tunc ex quo extrahi potest radix illa, extrahatur; ex quo vero extrahi non potest, ei radicale signum præfigatur. Ita quia dividendo a^2b per cb, oritur fractio $\frac{a^2}{c}$, ex cujus numeratore a^2 elici potest quadrata radix: proinde, si dividere oporteat $\sqrt{a^2b}$ per

$\sqrt{cb}$ quotiens erit $\frac{a}{\sqrt{c}}$; atque ita quoque erit $\frac{\sqrt{bd}}{c}$ quotiens, qui producitur, dividendo $\sqrt{abd}$ per $\sqrt{ac^2}$.

V.

Formatio potestatum in radicalibus simplicibus.

Quemadmodum nulla est opus reductione, quum quantitates simplices radicales per se mutuò multiplicantur, aut dividuntur; ita neque etiam ulla requiritur reductio, quotiescumque quantitates radicales ad datam quamcumque potestatem sunt elevandæ; quum satis sit, ad potestatem illam attollere quantitates ipsas, sub signis existentes, iisdemque idem radicale signum præfigere. Ita si oporteat, ad quadratum attollere quantitatem radicalem $\sqrt[3]{a}$, fiat primò quadratum ex a, tum huic præfigatur idem signum radicale, & erit $\sqrt[3]{a^2}$ id, quod quæritur. Atque ita quoque quantitas radicalis $\sqrt{a}$, ad cubum elevata, erit $\sqrt{a^3}$.

Quod ſi quantitates radicales, quæ ad datam quamcumque poteſtatem debent elevari, habeant ſuos coefficientes; neceſſe eſt, eos quoque ad datam illam poteſtatem attollere. Qua ratione quadratum ex $2\sqrt[3]{a}$ erit $4\sqrt[3]{a^2}$; & cubus ex $2\sqrt{a}$ erit $8\sqrt{a^3}$. Atque ita quoque quadratum ex $3\sqrt[3]{5}$ erit $9\sqrt[3]{25}$; & cubus ex $2\sqrt{4}$ erit $8\sqrt{64}$.

Sed hoc loco illud etiam notare oportet, poteſtatem, ad quam attollitur quantitas aliqua radicalis, non eſſe ſemper quantitatem aliam radicalem; ſed fieri poſſe, ut quandoque ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis: veluti ſi poteſtas, ad quam elevanda eſt quantitas radicalis, ſit illa eadem, quam radicale ſignum oſtendit. Tunc enim ipſa quantitas, ſub ſigno exiſtens, per quæſitam coefficientis poteſtatem multiplicata, id quod quæritur exhibebit.

Hoc pacto, ſi ad quadratum ſit elevanda quantitas radicalis $c\sqrt{a}$, multiplico quantitatem, ſub ſigno exiſtentem, per quadratum coefficientis, hoc eſt a per c^2, & erit ac^2 quadratum quæſitum. Similiter ſi ad cubum debeat elevari quantitas radicalis $2\sqrt[3]{a}$, multiplico quantitatem, ſub ſigno exiſtentem, per cubum coefficientis, hoc eſt a per 8, & erit $8a$ cubus quæſitus. Atque ita quoque quantitas radicalis $2\sqrt{a}$, ad quadratum elevata, erit $4a$.

Cæterùm quantitates ſimplices radicales multò faciliùs ad quamcumque datam poteſtatem elevabuntur, ſi conſiderentur illæ, velut poteſtates imperfectæ; quandoquidem per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſatis erit exponentes ipſarum duplicare, ſi elevandæ ſint ad quadratum, ſeu ſecundam poteſtatem; triplicare, ſi ad cubum, ſeu tertiam poteſtatem; quadruplicare, ſi ad quadrato-quadratum, ſeu quartam poteſtatem; atque ita deinceps.

Ita ſi oporteat, ad cubum elevare quantitatem radicalem $\sqrt{a}$, quia conſiderata illa, velut poteſtate imperfecta, exprimitur in hunc modum $a^{\frac{1}{2}}$, triplico exponentem ejus, & erit cubus quæſitus $a^{\frac{3}{2}}$, hoc eſt $\sqrt{a^3}$. Similiter quia $\sqrt[3]{a^2}$ eſt idem, ac $a^{\frac{2}{3}}$, duplicato exponente ejus, fiet $a^{\frac{4}{3}}$, hoc eſt $\sqrt[3]{a^4}$ quadratum illius. At-

que

que ita quoque erit $a^{\frac{8}{3}}$, five $\sqrt{3}\ a^8$ quadrato-quadratum quantitatis radicalis $\sqrt{3}\ a^2$, quæ exprimitur etiam in hunc modum $a^{\frac{2}{3}}$; & $a^{\frac{5}{3}}$, five $\sqrt{3}\ a^5$ quadrato-cubus quantitatis radicalis $\sqrt{3}\ a$, quæ designatur etiam hac ratione $a^{\frac{1}{3}}$.

VI.

Extractio radicum ex radicalibus simplicibus.

AD extrahendas radices ex radicalibus simplicibus neque etiam necesse est, eas ad simpliciores suas expressiones revocare; quum sufficiat, illas extrahere ex quantitatibus, sub signo existentibus, iisque idem radicale signum præfigere. Ita si oporteat, quadratam radicem extrahere ex $\sqrt{3}\ a^2$, eliciatur primò quadrata radix ex quantitate, sub signo existente a^2, tum huic præfigatur idem signum radicale, & erit $\sqrt{3}\ a$ radix quadrata quæsita. Atque ita quoque radix cubica quantitatis radicalis $\sqrt{a^3}$ erit $\sqrt{a}$.

Sed si quantitates radicales, ex quibus radix quæcumque extrahi debet, suos habeant coefficiētes; necesse est, ex iis quoque quadratam radicem extrahere: qua ratione quadrata radix quantitatis radicalis $9\sqrt{3}\ a^2$ erit $3\sqrt{3}\ a$; radix cubica quantitatis radicalis $8\sqrt{a^3}$ erit $2\sqrt{a}$; pariterque erit $2\sqrt{3}\ 2$ radix quadrato-quadrata quantitatis radicalis $16\sqrt{3}\ 16$.

Jam si sub signo talis existat quantitas, ut exinde elici nequeat radix, de qua agitur; tum, ut melius intelligatur, quo pacto extrahenda sit quæsita radix, præstat, quantitatem ipsam radicalem, velut potestatem imperfectam, considerare. Nam per ea, quæ superiùs ostensa sunt, semissis sui exponentis dabit exponentem radicis quadratæ, triens exponentem radicis cubicæ, quadrans exponentem radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps.

Ita ex quantitate radicali $\sqrt{3}\ a$ extrahi nequit methodo superiùs tradita quadrata radix: quocirca ad illam extrahendā considero quantitatem radicalem $\sqrt{3}\ a$, velut potestatem imperfectam: & quia hoc pacto considerata, exprimitur in hunc modum $a^{\frac{2}{3}}$, sumo semissem sui exponentis, & erit $a^{\frac{1}{6}}$, five $\sqrt{6}\ a$ radix quadrata quæsita.

ſita. Atque ita quoque, quia $\sqrt{a}$ eſt idem, ac $a^{\frac{1}{2}}$; erit $a^{\frac{1}{4}}$, ſive $\sqrt[4]{a}$ radix quadrata quantitatis radicalis $\sqrt{a}$.

Ex quo patet, quod quotieſcumque ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, extrahi nequit radix, de qua agitur, multiplicari debeat exponens ſigni radicalis per exponentem quæſitæ radicis. Sic ad extrahendam radicem quadratam ex quantitate radicali $\sqrt[3]{a}$, multiplico 3 exponentem ſui ſigni radicalis per 2 exponentem quæſitæ radicis, & erit $\sqrt[6]{a}$ radix quæſita. Pariterque ad extrahendam radicem cubicam ex quantitate radicali $\sqrt{a}$, multiplico 2 exponentem ſui ſigni radicalis per 3 exponentem radicis quæſitæ, & fiet $\sqrt[6]{a}$ radix cubica, quam oportet invenire.

Quod ſi quantitates radicales ſuos habeant coefficientes, & ex iis extrahi nequeat quæſita radix; tum meliùs erit, coefficientes quoque ſub ſignis radicalibus reponere, & radicem methodo mox tradita ex quãtitatibus illis extrahere. Ita quia ex coefficiente quantitatis radicalis $3\sqrt{2}$ extrahi nequit radix cubica, proinde repono illum ſub ſigno radicali, & erit $\sqrt[6]{18}$ radix cubica quæſita.

Cæte-

Cæterùm quæcumque radix extrahenda proponatur ex quantitate aliqua radicali, ſemper radix illa erit quantitas altera radicalis, nec unquam eſſe poterit commenſurabilis, ac rationalis. Nam ut talis exiſtat, neceſſe eſt, ut extracta ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, radice quæſita, talis oriatur quantitas, ut exinde extrahi quoque poſſit radix, à ſigno radicali denominata: quod profectò quum contingit, iam ab initio ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, extrahi poterat radix, quam radicale ſignum oſtendit; nec proinde erat quantitas incommenſurabilis, ac radicalis.

VII.

Reductio radicalium ſimplicium ad eandem denominationem.

In calculo radicalium ſimplicium illud ſemper ſuppoſuimus, quod quantitates radicales inter ſe mutuò addendæ, ſubtrahendæ, multiplicandæ, aut dividendæ ſint ejuſdem denominationis, ſive idem habeant ſignum radicale: unde quia ſæpe ſæpiùs occurrit, ut operationes iſtæ inſtitui debeant inter radicales diverſæ ſpeciei, ſive denominationis; proinde prius priùs quàm ad alia sermonem convertamus, non abs re erit, hìc breviter ostendere, quo pacto radicales diversi nominis possint ad eandem denominationem revocari.

Verùtamen, ut melius intelligatur, quo demum artificio radicales diversi nominis ad eandem denominationem revocentur, conducit plurimum, quantitates ipsas radicales, velut potestates imperfectas, considerare. Sic enim satis erit, ad eandem denominationem reducere fractiones, quæ sunt exponentes earum potestatum; quum hac ratione, propter communem eorum exponentium denominatorem, eadem quoque erit quantitatum radicalium denominatio.

Ita si, exempli gratia, ad eandem denominationem sint reducendæ quantitates duæ radicales $\sqrt{a}$, & $\sqrt[3]{b}$, considero illas, velut potestates imperfectas: & quia tali pacto consideratæ, exprimuntur in hunc modum $a^{\frac{1}{2}}$, & $b^{\frac{1}{3}}$; reduco ad eandem denominationem fractiones duas $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, quæ sunt exponentes earum potestatum: & quoniam eæ sic reductæ

ctæ

ctæ fiunt $\frac{3}{6}$, & $\frac{2}{6}$; erunt $a^{\frac{3}{6}}$, & $b^{\frac{2}{6}}$; hoc est $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{b^2}$ quantitates radicales propositæ, reductæ ad eandem denominationem.

Ex quo patet, ad reducendas radicales duas ad eandem denominationem, primò quidem elevandam esse quantitatem, sub cujusque signo existentem, ad potestatem à signo alterius denominatorem; tum proprium cujusque signi indicem multiplicandum esse per indicem alterius. Nam in adducto exemplo radicalis $\sqrt{a}$ abiit in $\sqrt[6]{a^3}$, & radicalis $\sqrt[3]{b}$ versa est in $\sqrt[6]{b^2}$: in quibus clarè liquet quantitatem, sub cujusque signo existentem, elevatam esse ad potestatem, denominatam à signo alterius; & proprium indicem cujusque signi per indicem alterius esse multiplicatum.

Sed quemadmodum in reductione fractionum ad eandem denominationem, ut simplicioribus quantum fieri potest terminis habeantur expressæ, præstat priùs inquirere, num denominator unius exactè contineatur in denominatore alterius; quum si id contingat, sufficiat illius tam numeratorem, quàm denominatorem

rem

rem multiplicare per numerum, qui ostendit, quoties denominator unus alterum continet: ita quoque in reductione radicalium ad idem nomen, non abs re erit, aliquid non dissimile priùs inquirere.

Nimirum quæratur primò, num index signi unius quantitatis radicalis contineatur exactè in indice signi alterius quantitatis. Id namque si contingat, elevetur sola illa quantitas radicalis ad potestatem, denominatam à numero, qui ostendit, quoties unus index in altero continetur, & per hunc eundem numerũ multiplicetur index signi ejusdem quantitatis. Nam hac ratione jam idem erit signum utriusque quantitatis radicalis, nec altera quantitas à sede sua mutabitur.

Ut si velim, ad eandem denominationem reducere quantitates duas radicales $\sqrt{c}$, & $\sqrt[6]{a}$; quia index illius 2 continetur ter in indice istius 6, multiplico indicem illum per 3, & elevata quantitate c ad potestatem, cujus index sit etiam 3, erunt $\sqrt[6]{c^3}$, & $\sqrt[6]{a}$ quantitates illæ radicales, ad eandem denominationẽ reductæ; atque ita quoque quantitates duæ radicales $\sqrt[3]{a}$, & $\sqrt[6]{c}$, reductæ ad eandem denominationem, erunt $\sqrt[6]{a^2}$, & $\sqrt[6]{c}$.

CAP.

CAP. VIII.

Calculus radicalium compositarum.

Quantitates incommensurabiles, sive radicales dicuntur compositæ, quum duos, aut plures terminos habent, affectos signo radicali, ut $\sqrt{a} + \sqrt{c}$, vel $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Unde sicuti commensurabiles compositæ oriuntur ex additione, & subtractione commensurabilium simplicium; ita quoque ex additione, & subtractione radicalium simplicium nascuntur radicales compositæ.

Jam, qui rite perceperit calculum radicalium simplicium, facili quoque negotio & calculum radicalium compositarum intelliget. Hinc monitum Lectorem velim, ut nisi priùs promptitudinem, & facilitatem quandam in calculo radicalium simplicium acquirat, ad compositarum calculum nequaquam se conferat: nam oleum, & operam perdit, qui simplicioribus, & facilioribus non rite intellectis ad ea, quæ sunt magis composita, ac difficilia, animum convertit.

In harum porro quantitatum calculo expediendo illud etiam assumemus, ut

 quanti-

quantitates, in quibus operationes ſunt inſtituendæ, ex ejuſdem ſpeciei radicalibus conſtent. Quocirca ſi quantitates offerantur, quæ radicalibus conſtent diverſæ ſpeciei; eæ per regulam, in calce capitis antecedentis traditam, mutandæ ſunt in alias, quarum radicales omnes eandem habeant denominationem.

I.

Additio radicalium compoſitarum.

Radicalium compoſitarum additio ſic commodè poterit inſtitui: reducantur primò ſingulæ cujuſque quantitatis addendæ partes ad ſimpliciores ſuas expreſſiones; deinde conjungantur ſimul iiſdem omnino ſignis, quibus afficiuntur: & ſiquidem plures occurrant partes, quæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, iiſdem ſignis ſint affectæ, addantur earum coefficientes in unum; quod ſi verò habeant quidem ſub ſigno radicali eandem quantitatem, ſed ſigna ſint contraria, earundem coefficientes à ſe mutuò ſubtrahantur.

Ita ſi quantitati $\sqrt{12a} - \sqrt{8b}$ addenda ſit quantitas $\sqrt{27a} + \sqrt{50b}$, ſumma erit

erit $\sqrt{75a} + \sqrt{18b}$. Nam reductis ſingulis partibus primæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, fiet illa $2\sqrt{3a} - 2\sqrt{2b}$; & ſimiliter reductis ad ſimpliciores ſuos terminos ſingulis ſecundæ partibus, evadet ea $3\sqrt{3a} + 5\sqrt{2b}$. Quare ſumma utriuſque quantitatis erit $2\sqrt{3a} - 2\sqrt{2b} + 3\sqrt{3a} + 5\sqrt{2b}$. Jam verò $2\sqrt{3a} + 3\sqrt{3a}$ idem ſunt, ac $5\sqrt{3a}$; & $-2\sqrt{2b} + 5\sqrt{2b}$ ſunt idem, ac $+3\sqrt{2b}$. Itaque eadem ſumma erit ſimpliciùs $5\sqrt{3a} + 3\sqrt{2b}$, hoc eſt $\sqrt{75a} + \sqrt{18b}$.

Eadem ratione ſumma, quæ oritur ex additione quantitatum $\sqrt{20a} - \sqrt{18c}$, & $\sqrt{45a} - \sqrt{32c}$, erit $\sqrt{125a} - \sqrt{98c}$. Nam ſi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur ſingulæ partes, tam primæ, quàm ſecundæ quantitatis; fiet una $2\sqrt{5a} - 3\sqrt{2c}$, & altera $3\sqrt{5a} - 4\sqrt{2c}$. Quare ſumma utriuſque quantitatis erit $2\sqrt{5a} - 3\sqrt{2c} + 3\sqrt{5a} - 4\sqrt{2c}$: & propterea, quia $2\sqrt{5a} + 3\sqrt{5a}$ idem ſunt, ac $5\sqrt{5a}$, & $-3\sqrt{2c} - 4\sqrt{2c}$ ſunt idem, ac $-7\sqrt{2c}$; erit eadem ſumma ſimpliciùs $5\sqrt{5a} - 7\sqrt{2c}$, hoc eſt $\sqrt{125a} - \sqrt{98c}$.

Quod ſi inter quantitates radicales aliæ exiſtant commenſurabiles, ac rationales, id quod frequenter contingere ſolet; tum eæ quoque ſuis propriis ſignis

I 2 cum

cum aliis sunt conjungendæ ; sed quia cum radicalibus contrahi non possunt, satis erit, quum fieri potest, inter se mutuò illas contrahere : qua ratione quantitas $2a + 3\sqrt{bc} + 4\sqrt{ac} + 3c$, addita quantitati $3a - 5\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} - 5c$, dabit pro summa quantitatem $5a - 2\sqrt{bc} + 6\sqrt{ac} - 2c$; & similiter quantitas $7\sqrt{2c} - 2\sqrt{3a} - 5c$, addita quantitati $5\sqrt{3a} - 4\sqrt{2c} + 8c$, dabit pro summa quantitatem $3\sqrt{2c} + 3\sqrt{3a} + 3c$.

II.

Subtractio radicalium compositarum.

Similiter subtractio radicalium compositarum in hunc modum commodè poterit institui : reducantur primò singulæ cujusque quantitatis partes ad simpliciores suas expressiones ; deinde conjungantur simul, mutatis signis partibus omnibus quantitatis subtrahendæ: & siquidem hac facta conjunctione plures occurrant partes, quæ eandem sub signo radicali quantitatem habentes, iisdem signis sint affectæ, addantur earum coefficientes in unum ; quod si verò habeant quidem sub signo radicali eandem quanti-

titatem, sed signa sint contraria, earundem coefficiẽtes à se mutuò subducantur.

Hoc pacto, si ex quantitate $\sqrt{75a} + \sqrt{18b}$ subtrahenda sit quantitas $\sqrt{12a} - \sqrt{8b}$, residuum erit $\sqrt{27a} + \sqrt{50b}$. Nam reductis singulis partibus primæ ad simpliciores suas expressiones, fiet illa $5\sqrt{3a} + 3\sqrt{2b}$; & similiter reductis ad simpliciores suos terminos singulis secundæ partibus, mutabitur ea in hanc aliam $2\sqrt{3a} - 2\sqrt{2b}$. Quare, subtrahendo istam ex illa, residuum erit $5\sqrt{3a} + 3\sqrt{2b} - 2\sqrt{3a} + 2\sqrt{2b}$. Jam verò $5\sqrt{3a} - 2\sqrt{3a}$ idem sunt, ac $3\sqrt{3a}$; & $+ 3\sqrt{2b} + 2\sqrt{2b}$ sunt idem, ac $+ 5\sqrt{2b}$. Itaque idem residuum simpliciùs erit $3\sqrt{3a} + 5\sqrt{2b}$, hoc est $\sqrt{27a} + \sqrt{50b}$.

Eâdem ratione residuum, quod oritur, subtrahendo quantitatem $\sqrt{20a} - \sqrt{18c}$ ex quantitate $\sqrt{125a} - \sqrt{98c}$, erit $\sqrt{45a} - \sqrt{32c}$. Nam si ad simpliciores suas expressiones reducantur singulæ partes, tam primæ, quàm secundæ quantitatis, fiet una $2\sqrt{5a} - 3\sqrt{2c}$, & altera $5\sqrt{5a} - 7\sqrt{2c}$. Quare, subtrahẽdo illam ex ista, residuum erit $5\sqrt{5a} - 7\sqrt{2c} - 2\sqrt{5a} + 3\sqrt{2c}$. Unde quia $5\sqrt{5a} - 2\sqrt{5a}$ idem sunt, ac $3\sqrt{5a}$; & $- 7\sqrt{2c} + 3\sqrt{2c}$ sunt idem, ac $- 4\sqrt{2c}$; erit idem residuum simpliciùs

$3\sqrt{5a} - 4\sqrt{2c}$, hoc est $\sqrt{45a} - \sqrt{32c}$.

Quod si inter partes radicales quantitatis subtrahendæ aliæ existant commensurabiles, ac rationales, id quod non rarò solet evenire; tum eæ quoque, mutatis signis, adjungendæ sunt partibus quantitatis, ex qua fieri debet subtractio; sed quia cum radicalibus illius contrahi non possunt, satis erit eas contrahere cum aliis commensurabilibus, si quæ sint in hac altera quantitate: qua ratione quantitas $2a + 3\sqrt{bc} + 4\sqrt{ac} + 3c$, subtracta ex quantitate $5a - 2\sqrt{bc} + 6\sqrt{ac} - 2c$, dabit pro residuo quantitatem $3a - 5\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} - 5c$; atque ita quoque erit $7\sqrt{2c} - 2\sqrt{3a} - 5c$ residuum, quod oritur, subtrahendo quantitatem $5\sqrt{3a} - 4\sqrt{2c} + 8c$ ex quantitate altera $3\sqrt{2c} + 3\sqrt{3a} + 3c$.

III.

Multiplicatio radicalium compositarum.

Quantitates radicales compositæ multiplicantur per se mutuò eadem planè ratione, qua fit multiplicatio quantitatum commensurabiliũ compositarũ: nimirum multiplicãdo singulas partes unius per singulas partes alterius; & scri-

scribendo producta signo $+$, quum quantitates ad invicem multiplicandæ iisdem signis afficiuntur; & vicissim signo $-$, quum contrariis signis sunt affectæ.

Hac ratione si quantitas $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ multiplicanda sit per aliam $\sqrt{c} - \sqrt{d}$; multiplico primùm $\sqrt{a}$ per $\sqrt{c}$, eritque productum $\sqrt{ac}$; deinde multiplico $-\sqrt{b}$ per $\sqrt{c}$, & orietur exinde productum $-\sqrt{bc}$; ad hæc multiplico $\sqrt{a}$ per $-\sqrt{d}$, & producetur $-\sqrt{ad}$; denique multiplico $-\sqrt{b}$ per $-\sqrt{d}$, eritque $+\sqrt{bd}$ id, quod ex hac multiplicatione producitur: qua ratione additis in unum omnibus istis quantitatibus, fiet productum totius multiplicationis $\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}$.

Eadem methodo instituenda est etiam multiplicatio, quotiescumque inter quantitates radicales aliæ existunt commensurabiles, ac rationales. Ut si velim multiplicare $a + \sqrt{ab}$ per $c - \sqrt{ac}$, multiplico primùm a per c, deinde $+\sqrt{ab}$ per c, postea a per $-\sqrt{ac}$, ac denique $+\sqrt{ab}$ per $-\sqrt{ac}$: qua ratione orietur productum $ac + c\sqrt{ab} - a\sqrt{ac} - a\sqrt{bc}$. Atque ita quoque productum, quod oritur, multiplicando $3 + \sqrt{8}$ per $5 - \sqrt{3}$, erit $15 + 5\sqrt{8} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$.

Quamquam autem pro multiplicatione quantitatum radicalium haud quidem necesse sit, eas ad simpliciores suas expressiones revocare; attamen ut faciliùs cognosci possit, quæ producta partialia, peracta multiplicatione, sunt simul conjungenda, aut à se mutuò subtrahenda, præstat quantitates omnes radicales, ante multiplicationem, ad simpliciores suos terminos reducere.

Ita si multiplicari debeat $\sqrt{72} - \sqrt{45}$ per $\sqrt{60} - \sqrt{24}$, productum erit $\sqrt{4320} - \sqrt{2700} - \sqrt{1728} + \sqrt{1080}$, in quo non ita facilè apparet, num partes ejus inter se mutuò contrahi possint. Sed reductis ad simpliciores suas expressiones singulis utriusque quantitatis partibus radicalibus, quia una fit $6\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$, altera $2\sqrt{15} - 2\sqrt{6}$, erit productum ex ipsarum multiplicatione $12\sqrt{30} - 6\sqrt{75} - 12\sqrt{12} + 6\sqrt{30}$: in quo non modò ultrò liquet, $12\sqrt{30} + 6\sqrt{30}$ idem esse, ac $18\sqrt{30}$; sed facilè etiam percipitur, contrahi quoque posse inter se $-6\sqrt{75} - 12\sqrt{12}$, quum illa, ulteriùs reducta, fit $-30\sqrt{3}$, hæc $-24\sqrt{3}$: adeo ut ambæ simul idem valeant, ac $-54\sqrt{3}$.

Sed præstat quoque, quantitates omnes radicales, ante multiplicationem, ad simpliciores suos terminos reducere, ut faciliùs cognosci possit, quæ producta oriantur rationalia, quæve irrationalia. Ita multiplicando $\sqrt{180}$ per $\sqrt{125}$, non aliter cognosci potest, num productum inde ortum $\sqrt{22500}$ sit rationale, nec ne, quàm extrahendo radicem quadratam ex 22500. Sed reductis radicalibus illis ad simpliciores suos terminos, quia una fit $6\sqrt{5}$, altera $5\sqrt{5}$; clare liquet, productum, quod ex earum multiplicatione oritur, rationale esse, quum sit 150.

IV.

Elevatio radicalium compositarum ad quamcumque potestatem.

Similiter quantitates radicales compositæ elevantur ad quamcumque datam potestatem eadem omnino ratione, qua ad eam attolluntur quantitates compositæ rationales: nimirum capiendo quadrata partium, duplumque ejus, quod oritur ex mutua earum partium multiplicatione, si ad quadratum sint elevandæ; vel sumendo cubos partium, triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ per secundam, triplumplumque ejus , quod producitur , multiplicando quadratum secundæ per primam , si elevandæ sint ad cubum ; atque ita deinceps : & considerando quoque velut unam omnes priores partes , quotiescumque propositæ quantitates ex pluribus , quàm duabus , partibus constant.

Hac ratione si quantitas radicalis composita , ad quadratum elevanda , sit $\sqrt{a} + \sqrt{c}$; fiat primò quadratum ex $\sqrt{a}$, id quod erit a ; deinde sumatur duplum ejus , quod producitur multiplicando $\sqrt{a}$ per $\sqrt{c}$, id quod erit $2\sqrt{ac}$; denique fiat quadratum c ex parte altera $\sqrt{c}$: & additis in unum omnibus istis quantitatibus, fiet quadratum quantitatis propositæ $a + 2\sqrt{ac} + c$. Sed si ad quadratum sit elevanda quantitas $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, quæ tribus ex partibus constat ; fiat primò quadratum ex duabus prioribus partibus, velut una consideratis , $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, quod erit $a + 2\sqrt{ab} + b$; tum capiatur duplum ejus , quod oritur , multiplicando easdem priores partes $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ per partem tertiam $\sqrt{c}$, nimirum $2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$; denique fiat quadratum c ex parte tertia $\sqrt{c}$: & additis simul omnibus istis quantitatibus , erit quadratum quantitatis propositæ $a + 2\sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} + c$.

Ea-

Eadem ratione , si quantitas radicalis composita , ad cubum elevanda , sit $\sqrt{a} + \sqrt{c}$; fiat primò cubus ex $\sqrt{a}$, qui erit $\sqrt{a^3}$; tum sumatur triplum ejus, quod oritur , multiplicando a , quadratum primæ partis $\sqrt{a}$, in partem alteram $\sqrt{c}$, nimirum $3a\sqrt{c}$; porro accipiatur triplum ejus, quod producitur, multiplicando c, quadratum alterius partis $\sqrt{c}$, in partem primam $\sqrt{a}$, scilicet $3c\sqrt{a}$; denique fiat cubus ex parte altera $\sqrt{c}$, qui erit $\sqrt{c^3}$: qua ratione additis in unum omnibus istis quātitatibus, fiet cubus quantitatis propositæ $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{c} + 3c\sqrt{a} + \sqrt{c^3}$. Sed si ad cubum sit elevanda quantitas $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, quæ tribus ex partibus constat ; considerentur duæ priores velut una , & sumptis iisdem quantitatibus , prodibit cubus quæsitus $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3} + 3a\sqrt{c} + 6\sqrt{abc} + 3b\sqrt{c} + 3c\sqrt{a} + 3c\sqrt{b} + \sqrt{c^3}$.

Etsi autem in exemplis adductis signa quantitatum radicalium assumpta fuerint quadrata ; eadem tamen erit operandi ratio , si signa fuerint cubica , aut alterius cujuscūque speciei. Ita si ad quadratum sit elevanda quantitas radicalis composita $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}$, fiat quoque quadratum, tam ex $\sqrt[3]{a}$, quàm ex $\sqrt[3]{c}$, capiaturque etiam duplum ejus , quod ex

ea-

earum partium multiplicatione producitur; & erit $\sqrt{3}\ a^2 + 2\sqrt{3}\ ac + \sqrt{3}\ c^2$ quadratum quæsitum. Similiter si ad cubum oporteat attollere eandem quantitatem radicalem $\sqrt{3}\ a + \sqrt{3}\ c$; fiat etiam cubus, tam ex $\sqrt{3}\ a$, quàm ex $\sqrt{3}\ c$; capiaturque adhuc, tum triplum ejus, quod producitur, multiplicando quadratum primæ partis per secundam, cum triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum secundæ per primam; & erit $a + 3\sqrt{3}\ a^2c + 3\sqrt{3}\ ac^2 + c$ cubus, qui quæritur.

Interim, etsi eadem sit operandi ratio, quodcumque signum habeant quantitates radicales; illud tamen hìc velim observetur, quod quotiescumque signa quantitatum radicalium eosdem habent indices cum potestate, ad quam illæ sunt elevandæ, tot semper termini necessariò oriantur rationales, quot sunt partes in quantitatibus propositis. Ita quadratum ex $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $a + 2\sqrt{ab} + b$, ubi duo sunt termini rationales; & similiter quadratum ex $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ est $a + 2\sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} + c$, ubi tres occurrunt termini rationales. Atque ita quoque cubus ex $\sqrt{3}\ a + \sqrt{3}\ b$ est $a + 3\sqrt{3}\ a^2b + 3\sqrt{3}\ ab^2 + b$, qui duos rationales terminos continet; pariterque cubus ex

$\sqrt{3}\ a$

$\sqrt{3}\ a + \sqrt{3}\ b + \sqrt{3}\ c$ est $a + 3\sqrt{3}\ a^2b + 3\sqrt{3}\ ab^2 + b + 3\sqrt{3}\ a^2c + 6\sqrt{3}\ abc + 3\sqrt{3}\ b^2c + 3\sqrt{3}\ ac^2 + 3\sqrt{3}\ bc^2 + c$, in quo tres existunt termini rationales.

V.

Præparatio ad divisionem radicalium compositarum.

Ut divisio radicalium compositarum commodè peragi queat, tradenda priùs est methodus, qua inveniri possit quantitas contraria cujuscumque datæ radicalis. Voco autem datæ alicujus radicalis contrariam quantitatem, quæ talis est, ut si per eam data quantitas radicalis multiplicetur, id, quod producitur, sit quantitas alia commensurabilis, ac rationalis. Sic quantitatis radicalis $\sqrt{3}\ a$ erit $\sqrt{3}\ a^2$ quantitas contraria; quia si duæ istæ quantitates multiplicentur per se mutuo, prodibit quantitas rationalis a. Et similiter quantitatis radicalis $\sqrt{a} + \sqrt{c}$ erit $\sqrt{a} - \sqrt{c}$ quantitas contraria; quia id, quod producitur ex mutua istarum quantitatum multiplicatione, est $a - c$.

Jam quum data quantitas radicalis est sim-

ſimplex; facile erit ejus quantitatem contrariam invenire. Elevetur ſiquidem data quantitas ad poteſtatem, cujus index ſit unitate una minor indice ſigni radicalis; & erit poteſtas iſta quantitas contraria quæſita. Qua ratione ſi $\sqrt{a}$ ſit data quantitas radicalis, erit ejus quantitas contraria ipſamet quantitas data $\sqrt{a}$; quippe, propter indicem ſigni radicalis 2, elevanda eſt ad poteſtatem, cujus index ſit 1. Sed ſi data quantitas radicalis ſit $\sqrt[3]{a}$, erit ejus quantitas contraria $\sqrt[3]{a^2}$; quandoquidem, propter indicem ſigni radicalis 3, elevanda eſt quantitas data $\sqrt[3]{a}$ ad poteſtatem, cujus index ſit 2, hoc eſt ad poteſtatem ſecundam, ſive quadratum.

Hujus regulæ ratio eſt adeo clara, ut crediderim Lectori moleſtiam afferre, ſi vel ſaltem indicare eam hìc vellem. Tantùm notabo, quantitatem contrariam, quæ per hanc regulam invenitur, contrahi quãdoque poſſe: ſcilicet quum quantitas radicalis data ad poteſtatem aliquam elevata ſub ſigno reperitur. Ita ſi radicalis data ſit $\sqrt[3]{a^2}$, & quæratur ejus quantitas contraria, ea per regulam traditam erit $\sqrt[3]{a^4}$; ſed perſpicuum eſt, poſſe etiam hoc munere fungi quãtitatem $\sqrt[3]{a}$. Quo-

circ

circa, ut quantitas contraria, quantum poteſt, ſimplicior habeatur; contrahi ea poterit, dividendo quantitatem, ſub ſigno exiſtentem, per maximam poteſtatem, à ſigno denominatam, quæ in illa continetur.

Quod ſi data quantitas radicalis ſit compoſita, eademque duas habeat partes, invenietur ejus quantitas contraria hoc artificio: mutetur uni ejus parti ſignum +, aut —, quo affecta reperitur, & facta hac mutatione, elevetur quantitas tota ad poteſtatem, cujus index ſit unitate una minor indice ſigni radicalis: quippe ſi deinde ex terminis hujus poteſtatis deleantur coefficientes, hoc eſt numeri deſignantes, quoties termini illi ſumi debeant in poteſtate; erit ipſa illa poteſtas, ex cujus terminis deleti ſunt coefficientes, quantitas contraria quæſita.

Hac ratione ſi quantitas data radicalis ſit $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, erit ejus quantitas contraria $\sqrt{a}-\sqrt{b}$: nam quum index ſigni radicalis ſit 2, elevanda eſt quantitas $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ad poteſtatem, cujus index ſit 1; & propterea quantitas contraria quæſita erit ipſamet quantitas $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Sed ſi data quantitas radicalis ſit $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, erit ejus contraria quantitas $\sqrt[3]{a^2}-$

$\sqrt[3]{ab}$

$\sqrt{3}\,ab + \sqrt{3}\,b^2$: nam quum index ſigni radicalis ſit 3, elevanda eſt quantitas $\sqrt{3}\,a - \sqrt{3}\,b$ ad poteſtatem, cujus index ſit 2, hoc eſt ad poteſtatem ſecundam, ſive quadratum: proindeque, deletis coefficientibus ex terminis ejus, fiet $\sqrt{3}\,a^2 - \sqrt{3}\,ab + \sqrt{3}\,b^2$ quantitas contraria quæſita.

Nec obſcura erit hujus regulæ ratio, ſi conſideremus, quod ſicuti multiplicato $a + b$ per $a - b$, producitur $a^2 - b^2$; ſic multiplicato $a + b$ per $a^2 - ab + b^2$, productum oriatur $a^3 - b^3$; & multiplicato $a + b$ per $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, productum fiat $a^4 - b^4$; atque ita deinceps. Hinc enim clarè liquet, quod ſi $a + b$ referat quantitatem radicalem, ejus quantitas contraria debeat eſſe $a - b$, quum index ſigni radicalis eſt 2; $a^2 - ab + b^2$, quum ille index eſt 3; $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, quum idem index eſt 4; atque ita de aliis: quandoquidem facta unius per aliam multiplicatione, habebuntur dumtaxat in producto ipſarum a, & b eæ poteſtates, quas index ſigni radicalis oſtendit.

Eadem autem eſt operandi ratio, ſi una ex duabus partibus radicalis propoſitæ ſit commenſurabilis, ac rationalis: nam ſem-

ſemper producta alia, contrarietate ſignorum, ſeſe mutuò deſtruunt, & dumtaxat remanent ipſarum partium poteſtates illæ, quas index ſigni partis radicalis oſtendit: qua ratione ſi quantitas radicalis data ſit $a + \sqrt{c}$, & quæratur ejus quantitas contraria, erit illa $a - \sqrt{c}$; & ſimiliter ſi data quantitas radicalis ſit $a + \sqrt{3}\,c$, erit ejus contraria quantitas $a^2 - a\sqrt{3}\,c + \sqrt{3}\,c^2$.

Quod ſi quantitas radicalis tres partes habeat, paulò difficilior erit contrariæ quantitatis inventio. Interim pro iis, in quibus index ſigni radicalis eſt 2, inveniri poteſt hac arte. Sit $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ quantitas propoſita. Mutetur uni ejus parti, puta $\sqrt{c}$, ſignum, quo affecta reperitur; multipliceturque $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ per $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$. Et quoniam ex hac multiplicatione producitur quantitas $a + b - c + 2\sqrt{ab}$, in qua unicus tantùm terminus afficitur ſigno radicali; conſiderari iſta poterit, veluti radicalis duabus partibus conſtans: & propterea ſi rurſus multiplicetur per contrariam ipſius $a + b - c - 2\sqrt{ab}$, orietur tandem quantitas omnino rationalis $a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$. Unde quia quantitas propoſita evadit rationalis, multi-

K pli-

plicando eam primò per $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$, & deinde per $a + b - c - 2\sqrt{ab}$; erit ejus quantitas contraria productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ per $a + b - c - 2\sqrt{ab}$.

Pro iis autem, in quibus index signi radicalis est 3, juvabitur Tyro noster hac regula. Sit $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ quantitas proposita. Sumantur tam quadrata partium omnium, quàm producta ex singulis binis earundem partium, illa quidem propriis suis signis, hæc signis omnino mutatis; tum addantur omnia in unum, & per summam, quæ inde oritur, $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bc}$ multiplicetur quantitas proposita $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$. Quum enim ex hac multiplicatione producatur quantitas $a - b + c - 3\sqrt[3]{abc}$, in qua unicus tantùm terminus afficitur signo radicali; considerari hæc poterit, veluti radicalis duabus partibus constans: quocirca, si per ejus contrariam quantitatem multiplicetur summa illa superiùs constituta, erit productum quantitas contraria quæsita

Jam quemadmodum pro radicalibus, quæ plures habent partes, quàm tres, inutile est regulas cudere, quibus earum con-

contrariæ quantitates possint inveniri; quum tantùm non impossibile sit, ut iis quandoque uti debeamus. Ita neque etiam necessarium existimo, regulas afferre pro inveniendis quantitatibus contrariis earum radicalium, quæ habent quidem tres partes, sed index signi radicalis ternarium excedit; quum non ita frequens sit usus ipsarum, & quum requiruntur, possint facillimè per analysim inveniri. Unde, ne Lectorem diutiùs detineam, ad divisionem radicalium compositarum, ubi cernitur hujus doctrinæ usus, gradum facio.

VI.

Divisio radicalium compositarum.

Quantitates radicales compositæ dividi possunt per se mutuò eadem quoque ratione, qua fit divisio quantitatum commensurabilium. Proponatur, exempli causa, dividenda quantitas radicalis $\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}$ per quantitatem aliam radicalem $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Divido primùm $\sqrt{ac}$ per $\sqrt{a}$: & quia multiplicato divisore $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ per quotientem $\sqrt{c}$, producitur quantitas $\sqrt{ac} - \sqrt{bc}$, quæ subtracta ex quantitate dividendenda, relinquit $-\sqrt{ad}+\sqrt{bd}$, divido ſecundò $-\sqrt{ad}$ per $\sqrt{a}$: quumque quantitas, quæ producitur, multiplicando diviſorem $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ per alium iſtum quotientem $-\sqrt{d}$, ſit $-\sqrt{ad}+\sqrt{bd}$, quæ ſubducta ex illo reſiduo, relinquit nihil; concludo, quotientem totius diviſionis eſſe $\sqrt{c}-\sqrt{d}$.

Similiter, ſi dividenda proponatur quantitas radicalis $\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{15}+\sqrt{10}$ per quantitatem aliam radicalem $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; divido primum $\sqrt{18}$ per $\sqrt{3}$: & quoniam quotiens hujus diviſionis eſt quantitas $\sqrt{6}$, quæ multiplicata per diviſorem $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, producit quantitatem $\sqrt{18}-\sqrt{12}$, ſubtraho quantitatem iſtam ex quantitate dividenda: & quia relinquitur $-\sqrt{15}+\sqrt{10}$, divido ſecundò $-\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$: quumque, multiplicato quotiente iſtius diviſionis $-\sqrt{5}$ per diviſorem $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, oriatur quantitas $-\sqrt{15}+\sqrt{10}$, quæ ſubducta ex illo reſiduo, relinquit zero, ſive nihilum; proinde quotiens propoſitæ diviſionis erit $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Jam ſi fieri poſſit, ut diviſor unicum terminum contineat, haud dubiè longè faciliùs diviſio perficietur. Ut ſi velim, exempli gratia, dividere $\sqrt{12}+\sqrt{15}-\sqrt{6}$

$\sqrt{6}-\sqrt{21}$ per $\sqrt{3}$, nulla occurret in diviſione difficultas; quia eò res redit, ut quatuor radicales ſimplices per unam, eandemque radicalem quoque ſimplicem dividatur. Id itaque poteſt obtineri, ſi methodo, ſuperiùs tradita, inveniatur quantitas contraria diviſoris, per quam tam diviſor, quàm quantitas dividenda multiplicetur. Nam quum diviſor evadat rationalis, unicum tantummodo terminum continebit; & proinde res, quò velimus, reducetur.

Multiplicari verò debet per quantitatem contrariam diviſoris, tum diviſor, tum quantitas dividenda, ut diviſio propoſita non alteretur, & unus idemque quotiens utraque operandi ratione inveniatur. Notum quippe eſt, diviſione non aliud quæri, quàm quoties una quantitas in alia contineatur, ſive quæ ratio inter duas quantitates exiſtat: proindeque, quia duæ quantitates eandem inter ſe retinent rationem, quotieſcumque ambæ per eandem quantitatem multiplicantur; perſpicuum eſt, mutuam duarum quantitatum diviſionem non alterari, quum tam diviſor, quàm quantitas dividenda per unam eandemque quantitatem multiplicatur.

Hac ratione quotiens, qui oritur, dividendo 12 per 3, est 4; qui etiam reperitur, si multiplicetur tam 12, quàm 3 per unum eundemque numerum 5, & dividatur 60 per 15. Similiter quotiens, qui oritur, dividendo ab per a, est b; & si utique multiplicetur tam a, quàm ab per c, dividaturque abc per ac, prodibit idem quoque quotiens b. Quocirca quotiescumque quantitas radicalis, quæ locum tenet divisoris, multiplicatur per contrariam ejus quantitatem, ut fiat rationalis; ne proposita divisio alteretur, multiplicanda est etiam per eandem quantitatem contrariam quantitas dividenda.

Proponatur itaque dividenda quantitas $\sqrt{24} + \sqrt{8}$ per $\sqrt{5} + \sqrt{3}$. Capiatur quantitas contraria divisoris, quæ per regulam, superiùs traditam, erit $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. Multiplicetur per eam, tam quantitas dividenda $\sqrt{24} + \sqrt{8}$, quàm quæ divisoris locum tenet $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; & fiet una $\sqrt{120} + \sqrt{40} - \sqrt{72} - \sqrt{24}$; altera 2, sive $\sqrt{4}$. Denique dividatur $\sqrt{120} + \sqrt{40} - \sqrt{72} - \sqrt{24}$ per $\sqrt{4}$; & erit $\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{18} - \sqrt{6}$ quotiens propositæ divisionis.

Proponatur similiter dividenda quantitas

titas

titas $\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{15} + \sqrt{10}$ per $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Capiatur quantitas contraria divisoris, quæ juxta regulam, superiùs traditam, erit $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Multiplicetur per quantitatem istam, tum quantitas dividenda $\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{15} + \sqrt{10}$, cùm illa, quæ stat loco divisoris, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Denique dividatur productum, quod oritur ex priori multiplicatione, $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$, per productum, quod oritur ex secunda. Et quia productum istud est unitas, quæ sicuti multiplicatione non auget quantitatem multiplicandam, ita nec divisione minuit dividendam; erit quotiens propositæ divisionis $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$.

Ne autem hæreant Tyrones, quod ex eadẽ divisione, alia operandi ratione, ortus sit quotiens $\sqrt{6} - \sqrt{5}$, sciant velim, quod si termini quantitatis $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$ contrahantur, & ad simpliciores suas expressiones revocentur, prodibit ipsa quantitas $\sqrt{6} - \sqrt{5}$. Termini namque $\sqrt{54} - \sqrt{24}$ contracti fiunt $3\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$, hoc est $\sqrt{6}$; termini verò $-\sqrt{45} + \sqrt{20}$, quum ad simpliciores suas expressiones reducuntur, evadunt $-3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$, hoc est $-\sqrt{5}$. Quare quantitas tota $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$ idem

erit

erit, ac $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

Jam proponatur dividenda quantitas $\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}$ per $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Sumatur quantitas contraria divisoris, quæ per regulam, superiùs traditam, erit $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Multiplicetur per quantitatem istam, tum quantitas dividenda $\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}$, cùm quantitas $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, quæ locum tenet divisoris; & una fiet $\sqrt{a^2c} - \sqrt{a^2d} - \sqrt{b^2c} + \sqrt{b^2d}$, altera $a - b$. Denique dividatur $\sqrt{a^2c} - \sqrt{a^2d} - \sqrt{b^2c} + \sqrt{b^2d}$ per $a - b$; sed ad divisionem istam peragendam reducantur termini illius ad simpliciores suas expressiones, ut loco ejus habeatur hæc alia $\overline{a-b}\sqrt{c} - \overline{a+b}\sqrt{d}$: quo facto clarè liquet, quotientem ex divisione oriundum fore $\sqrt{c} - \sqrt{d}$, scilicet eundem illum, qui alia operandi ratione paulò ante fuit inventus.

CAP. IX.

Extractio radicum ex Binomiis.

Diximus, quantitatum radicalium alias esse simplices, alias compositas; & simplices quidem vocari, quæ unicum habent terminum, eumque affectum

ctum signo radicali; compositas verò, quæ plures terminos involvunt. Jam radicales simplices dicuntur passim monomia, quasi quantitates unius nominis, sive termini; & ob eandem rationem radicales compositæ dici solent multinomia, quia scilicet plura nomina, sive terminos continent. Sed propter multitudinem terminorum distinguuntur radicales compositæ in binomia, trinomia, quadrinomia, &c. Quæ enim duos habent terminos, dicuntur binomia; quæ tres, trinomia; quæ quatuor, quadrinomia; atque ita deinceps.

Diversitas autem terminorum à diversitate quantitatũ, quæ in iis terminis, ad simpliciores suas expressiones revocatis, sub radicali signo continentur, repeti debet. Nam si in radicalibus cõpositis duæ, aut plures radicales simplices occurrant, quæ reductæ ad suas simpliciores expressiones, eandem habeant sub radicali signo quantitatem; eæ nõ totidem terminos, sed unicum constituere dicuntur: qua ratione quantitas radicalis composita $3\sqrt{3} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ censeri debet binomium, & non trinomium; quia scilicet partes duæ $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$, velut eandem sub signo radicali quantitatem habentes, reducuntur ad unam

unam $5\sqrt{3}$; atque adeo non duos, ſed unicum terminum conſtituunt.

Quod quidem non modò in iis radicalibus locum habet, in quibus fieri poteſt hujuſmodi contractio, hoc eſt, in quibus vel coefficientes ſunt numerici, vel iiſdem litteris deſignantur; verùm etiam in iis, quorum coefficientes diverſis litteris exprimuntur. Sic etiam quantitas radicalis compoſita $a\sqrt{a} + c\sqrt{b} + c\sqrt{a}$ cenſenda eſt binomium, & non trinomium. Nam etſi partes duæ $a\sqrt{a} + c\sqrt{a}$, eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, inter ſe mutuò contrahi nequeant, quippe quæ diverſas litteras pro ſuis coefficientibus habent; adhuc tamen pro unico termino ſumi debent, & ſimpliciùs exprimi poſſunt, vel in hunc modum $\overline{a + c}\sqrt{a}$, vel etiam in hunc alium $d\sqrt{a}$, ſubſtituendo ſolam litteram d loco ipſarum $a + c$.

Neque verò, ut radicales compoſitæ dicantur binomia, trinomia, aut quadrinomia, neceſſe eſt, ut omnes ipſarum termini radicalibus ſignis afficiantur. Iiſdem quippe nominibus deſignandæ ſunt etiam, ſi in iis aliquis terminus fuerit commenſurabilis, ac rationalis

nalis. Sed quemadmodum omnes illæ partes radicales, quæ eandem ſub ſigno radicali continent quantitatem, pro uno eodemque termino computantur; ſic etiam, etſi plures fuerint partes commenſurabiles, ac rationales, omnes tamen pro uno eodemque termino ſumi debent: qua ratione quantitas $a + b + \sqrt{c}$ binomium erit, & non trinomium; quia ſcilicet partes duæ a, & b, utpote rationales, nonniſi unicum terminum componunt.

Calculum radicalium compoſitarum ſuperiori capite complexi ſumus; ſed in eo dumtaxat additionem, ſubtractionem, multiplicationem, formationem poteſtatum, & diviſionem hujuſmodi quantitatum explicuimus: nimirum quia extractio radicum ex iiſdem quantitatibus res digna nobis viſa fuit, quæ peculiari capite pertractetur. Eam igitur explicādam aggreſſi ſumus hoc alio capite. Sed quoniam in reſolutione problematum, quorſum hæc omnia tendunt, non alius fere caſus occurrit, quàm, ut radices extrahantur ex iis quantitatibus radicalibus, quæ duos terminos habentes, dicuntur binomia; idcirco de extractione radicum ex binomiis dumtaxat hìc verba faciemus.

Bino-

Binomia autem, ex quibus radices erunt extrahendæ, non ex cujuſcumque generis radicalibus conſtabunt, ſed ex iis dumtaxat, quæ ſigno quadratæ radicis afficiuntur. Cujus rei ratio eſt, tum quia hujuſmodi potiſſimum binomia in problematum reſolutione nobis occurrunt, tum etiam, quia ex aliis binomiis non ita facile eſt, radices extrahere. Sed radices horum binomiorum tales etiam optamus, ut nonniſi ejuſdē generis radicales comprehendant. Nam etſi nequaquam nos lateat, radicem exempli gratia quadratam binomii $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ exiberi poſſe in hunc modum $\sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$; arbitramur tamen meliùs facturum, qui ingenuè fatetur, eam extrahi non poſſe, eandemque exhibet, adhibito alio ſigno radicali, quod quantitatem totam comprehendat.

I.

Extractio radicis quadratæ ex binomiis.

Circa radicem quadratam, ex binomio aliquo extrahendam, duo caſus fingi poſſunt. Primò, quod radix illa ſit binomium aliud, in quo utrūque nomen eſt quantitas radicalis. Secundò, quod eadem illa radix ſit binomium, cujus nomen unum eſt quantitas radicalis, nomen verò alterum quantitas commenſurabilis, ac rationalis.

Quantum ad primum, repræſentet $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ radicem binomii propoſiti. Itaque ſi fiat quadratum ex $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, erit $5 + 2\sqrt{6}$ ipſum binomium propoſitum: in quo, ut vides, unus terminus eſt rationalis, alter incommenſurabilis, & radicalis.

Quantum ad ſecundum, referat binomii propoſiti radicem $2 + \sqrt{5}$. Quocirca ſi fiat quoque quadratum ex $2 + \sqrt{5}$, erit $9 + 2\sqrt{20}$ binomium propoſitum: quod ſimiliter, ut vides, unum continet terminum rationalem, alterum incommenſurabilem, & radicalem.

Hinc itaque diſcimus, quod ut ex aliquo binomio ejuſmodi quadrata radix extrahi poſſit, quæ nonniſi radicales quadraticas comprehendat, unus ex terminis ejus debeat eſſe rationalis, alter incommenſurabilis, ac radicalis. Nam ſi uterque terminus radicali ſigno ſit affectus, nullum binomium fingi poterit, cujus quadratum producat binomium propoſitum.

Neque

Neque verò ex omnibus hujuſmodi binomiis, in quibus unus terminus eſt rationalis, alter radicalis, quadratam radicem eruere licet, qualiter eam optamus. Quocirca, ut innoteſcat, quæ ulteriùs requirantur, referat indefinitè $\surd a + \surd b$ radicem alicujus binomii. Itaque ſi fiat quadratum ex $\surd a + \surd b$, erit $a + b + 2\surd ab$ binomium iſtud: in quo $a + b$ eſt terminus rationalis, & $2\surd ab$ terminus radicalis.

Et quoniam $\surd ab$ eſt medio loco proportionalis inter a, & b; erit terminus rationalis $a + b$ major termino radicali $2\surd ab$; quandoquidem oſtenſum eſt ab Euclide, in omni proportione maximum, & minimum terminum duobus reliquis majores eſſe: proindeque ut ex aliquo binomio quadrata radix extrahi poſſit, non modò unus ejus terminus debet eſſe rationalis, alter radicalis; verùm etiam terminus rationalis debet eſſe major termino radicali.

Præterea, quia terminus radicalis $2\surd ab$ eſt duplum ejus, quod fit ex mutua multiplicatione quantitatum, quarum quadrata ſunt a, & b; perſpicuum eſt, quod ſi ex quadrato termini rationalis $a^2 + 2ab + b^2$ ſubducatur quadratum termini radicalis $4ab$, reſiduum $a^2 - 2ab + b^2$ ſit etiam quadratum. Quocirca, ut ex aliquo binomio quadrata radix extrahi queat, illud quoque requiritur, ut differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejus, ſit etiam quadratum.

Extrahetur itaque ex aliquo binomio ejuſmodi quadrata radix, quæ nonniſi radicales quadraticas comprehendat ſi binomium illud tribus hiſce cōditionibus gaudeat; primò, ut unus ejus terminus ſit radicalis, alter commenſurabilis, ac rationalis; ſecundò, ut terminus commenſurabilis major ſit termino radicali; & tertiò, ut differentia quadratorum ex terminis ejus ſit etiam quadratum.

Jam regula extrahendi radicem quadratam ex binomio, quod his conditionibus ſit præditum, hæc eſt: capiatur differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propoſiti binomii; ejuſque radix quadrata primò addatur termino rationali, deinde ex eodem ſubducatur: capiantur porro ſemiſſes ſummæ, & reſidui; eruntque radices harum ſemiſſium termini quæſitæ radicis.

Proponatur, exempli cauſa, extrahenda quadrata radix ex binomio $8 + \surd 60$. In hoc binomio jam adſunt tres illæ conditiotiones. Nam primò unus ejus terminus est rationalis, alter radicalis; secundò terminus rationalis 8 excedit terminum radicalem $\sqrt{60}$, quum quadratũ illius sit 64, quadratum verò istius 60; & tertiò differentia quadratorum ex terminis ejus est etiam quadratum, quum sit numerus 4.

Capiatur itaque differentia ista 4, ejusque quadrata radix 2, primò quidem addatur termino rationali 8, ut habeatur summa 10; deinde verò ex eodem termino subtrahatur, ut oriatur residuum 6. Quumque semissis summæ sit 5, semissis verò differentiæ sit 3, capiantur radices harum semissium; & erit $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ radix quadrata propositi bonomii $8 + \sqrt{60}$.

Oporteat similiter quadratam radicem extrahere ex binomio $11 + \sqrt{72}$, quod etiam tribus illis conditionibus gaudet. Capiatur differentia quadratorum ex terminis ejus: & quoniam quadratum termini rationalis est 121, quadratum verò termini radicalis est 72; erit 49 differentia quæsita. Sumatur postea quadrata radix hujus differentiæ, scilicet 7, quæ primò addatur termino rationali, ut fiat summa 18; deinde ex eodem subducatur, ut habeatur residuum 4. Denique sumantur semisses, tam summæ, quàm residui, & radices harum semissium $3 + \sqrt{2}$ dabunt radicem quæsitam.

Sed notetur hoc loco velim, radices illarum semissium non semper conjungendas esse signò $+$, ut propositi binomii quadrata radix habeatur; sed interdum signo $+$, interdum verò signo $-$: id, quod ex ipso binomio proposito cognosci potest. Nam siquidem termini ejus signo $+$ conjunguntur, conjungendæ sunt etiam signo $+$ radices illarum semissium; quod si verò termini binomii propositi signo $-$ conjuncti reperiantur, & ipsæ illæ semissium radices signo $-$ debent inter se mutuò conjungi. Qua ratione quadrata radix binomii $8 - \sqrt{60}$ erit $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; & similiter quadrata radix binomii $11 - \sqrt{72}$ erit $3 - \sqrt{2}$.

Perinde autem res est, sive scribatur $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, sive $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ pro radice quadrata binomii $8 - \sqrt{60}$; quum notum sit, eandem semper quantitatem produci, sive multiplicetur $a - b$ per se ipsam, sive vicissim $b - a$. Sed non perinde est, sive binomium propositum sit $8 - \sqrt{60}$, sive vicissim $\sqrt{60} - 8$; quandoquidem in primo casu radix est realis, in secundo autem imaginaria, hoc est, quæ tantum fin-

fingi, ac imaginari poteſt: quod quia non ſatis hoc loco intelligitur, fuſiùs à nobis oſtendetur, quum de quantitatibus imaginariis ſermo recurret.

Cęterùm allatæ regulæ ratio non eſt ita obſcura, ut hìc intelligi non poſſit. Si enim referat generaliter $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ radicem alicujus binomii, erit binomium iſtud $a + b + 2\sqrt{ab}$. Et quemadmodum clarè liquet, quod ſi ex quadrato termini rationalis $a^2 + 2ab + b^2$ ſubducatur quadratum termini radicalis $4ab$, reſiduum, ſive differentia $a^2 - 2ab + b^2$ ſit etiam quadratum; ita quoque liquidò conſtat, quod ſi radix hujus differentiæ $a - b$ addatur termino rationali $a+b$, eademque ex eodem termino ſubducatur, ſumma quidem ſit $2a$, reſiduum verò $2b$; quodque adeo ſi capiantur ſemiſſes hujus ſummæ, & hujus reſidui, radices iſtarum ſemiſſium ſint termini aſſumptæ radicis.

Nec ſilentio hìc præteribimus, quod ſi in radicibus extrahendis parùm curemus, ſi eæ radicales contineant quadraticas, aut alterius cujuslibet ſpeciei, poſſit eâdem regulâ etiam ex binomio, cujus uterque terminus ſit radicalis, extrahi quandoque quadrata radix. Ut ſi ve-

velim radicem quadratam extrahere ex binomio $\sqrt{32} + \sqrt{24}$, ſumo differentiam quadratorum ex terminis ejus, nempe 8; cujus quadratam radicem $\sqrt{8}$ primò addo termino $\sqrt{32}$, ut ſumma fiat $6\sqrt{2}$; deinde ex eodem termino ſubtraho, ut reſiduum oriatur $2\sqrt{2}$: quumque ſemiſſes harum quantitatum ſint $3\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}$, ſumo iſtarum ſemiſſium radices quadratas, & erit $\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2}$ radix quæſita.

Sed facilè erit intelligere, quod, ut mediante illâ regulâ extrahi poſſit quadrata radix ex binomio aliquo, cujus uterque terminus ſit radicalis, neceſſe ſit binomium illud hujuſmodi eſſe, ut differentia quadratorum ex terminis ejus haud quidem ſit quadratum, ſed ut ejus quadrata radix rationem habeat commenſurabilem, ac rationalem cũ aliquo ex terminis propoſiti binomii: quò ſcilicet, & addi, & ſubtrahi poſſit ex termino illo. Ita ex bonomio $\sqrt{32} + \sqrt{24}$ extracta eſt quadrata radix; quia radix prædictæ differentiæ $\sqrt{8}$ rationem habet commenſurabilem cum termino $\sqrt{32}$; quum ſi ambæ radicales ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur, una fiat $2\sqrt{2}$, altera $4\sqrt{2}$.

II.

Extractio radicis cubicæ ex Binomiis.

Similiter circa radicem cubicam, ex binomio aliquo extrahendam, duo casus fingi possunt. Primò, quod radix illa sit binomium aliud, cujus uterque terminus est radicalis. Et secundò, quod eadem illa radix sit hujusmodi binomium, ut unus ejus terminus sit radicalis, alter verò commensurabilis, ac rationalis.

Itaque, quantum ad primum casum, ponamus $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ esse radicem cubicam binomii propositi. Quocirca si fiat cubus ex $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, erit binomium propositum $\sqrt{8} + 3\sqrt{12} + 3\sqrt{18} + \sqrt{27}$, hoc est, reductis singulis hujus quantitatis partibus ad simpliciores suas expressiones, $2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$, sive etiam $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$: in quo, ut vides, uterque terminus est radicalis.

Quantum verò ad secundum, ponamus propositi binomii radicem cubicam esse $2 + \sqrt{3}$. Itaque si fiat quoque cubus ex $2 + \sqrt{3}$, erit binomium propositum $8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3}$, hoc est $26 + 15\sqrt{3}$:

quod, ut vides, unum terminum continet radicalem, alterum commensurabilem, ac rationalem.

Ex quibus liquet, radicem cubicam, quæ sit ejus naturæ, qualem optamus, extrahi posse non modò ex binomio, cujus unus terminus est radicalis, alter commensurabilis, ac rationalis; verùm etiam ex binomio, cujus uterque terminus est radicalis: quandoquidem cubus alicujus binomii, qui semper est aliud binomium, sub utraq; forma potest haberi.

Sed liquet etiam, radicem cubicam alicujus binomii, quotiescumque potest haberi, & quidem talis, qualis à nobis desideratur, esse ejusdem formæ cum binomio proposito: nimirum ejus utrumque terminum radicalem esse, quotiescumque uterque terminus binomii propositi est radicalis; & verò unum ejus terminum esse radicalem, alterum rationalem, quum in binomio proposito similiter unus terminus est radicalis, alter rationalis.

Jam cujuscumque sit formæ binomium propositum; ut ex eo extrahi possit radix cubica talis naturæ, qualem optamus, nempe, ut non aliis radicalibus, quàm quadraticis, constet, hujusmodi debet esse, ut differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejus, non quidem ſit quadratum, cujuſmodi ſit oportet, quum extrahenda eſt radix quadrata, ſed cubus perfectus.

Referat namque primò $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ radicem alicujus binomii cubicam: Itaque binomium iſtud erit $\overline{a + 3b}\sqrt{a} + \overline{3a+b}\sqrt{b}$. Et quoniam quadratum primi termini eſt $a^3 + 6a^2b + 9ab^2$, quadratum verò ſecundi eſt $9a^2b + 6ab^2 + b^3$; erit differentia iſtorum quadratorum $a^3 + 6a^2b + 9ab^2 - 9a^2b - 6ab^2 - b^3$, hoc eſt $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$: quam liquet eſſe cubum perfectum, quum radix ejus cubica ſit $a - b$.

Referat ſecundò $a + \sqrt{b}$ radicem cubicam alicujus dati binomii. Itaque ipſum binomium erit $a^3 + 3ab + \overline{3a^2 + b}\sqrt{b}$. Et quoniam quadratum termini rationalis eſt $a^6 + 6a^4b + 9a^2b^2$, quadratum verò termini radicalis eſt $9a^4b + 6a^2b^2 + b^3$; erit differentia iſtorum quadratorum $a^6 + 6a^4b + 9a^2b^2 - 9a^4b - 6a^2b^2 - b^3$, hoc eſt $a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3$: quam ſimiliter liquet cubum eſſe perfectum, quum radix ejus cubica ſit $a^2 - b$.

Sed cujuſque ſit formæ binomium propoſitum, perſpicuum eſt quoque, quod quum

quum ex eo radix cubica, qualem optamus, extrahi poteſt, non modò differentia quadratorum ex terminis ejus ſit cubus perfectus; verùm etiam radix cubica hujus differentiæ ſit differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis quæſitæ radicis. Nam quum radix cubica binomii erat $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, radix cubica prædictæ differentiæ inventa eſt $a - b$; quotieſcumque verò erat $a + \sqrt{b}$, hæc prodiit $a^2 - b$.

Atque hinc pro extrahenda radice cubica ex binomio, cujus unus terminus ſit rationalis, alter radicalis, hæc regula deducitur: capiatur radix cubica proximè major binomii propoſiti, ſed quæ non ampliùs, quàm ſemiſſe unitatis differat à vera radice, quæ præter propter cognoſci poteſt; tum ex differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejuſdem binomii, eliciatur radix cubica, eaque per radicem illam proximè majorem dividatur.

Jam ſi terminus rationalis major fuerit termino radicali, quotiens, qui exinde oritur, addatur cum eadem illa radice proximè majori: & ſiquidem ſummæ hujus capiatur ſemiſſis ſine fractione, à cujus quadrato ſubducatur radix cubica præ-

prædictæ quadratorum differentiæ; erit semissis illa pars rationalis, radix verò quadrata residui, inde orti, pars radicalis quæsitæ radicis.

Quod si autem terminus rationalis minor fuerit termino radicali, quotiens, qui ex illa divisione producitur, subducatur ex radice illa proximè majori: & siquidem residui hujus capiatur adhuc semissis sine fractione, cujus quadrato addatur radix cubica prædictæ quadratorum differentiæ; erit rursus semissis illa pars rationalis, radix verò quadrata summæ, inde ortæ, pars radicalis quæsitæ radicis.

In utroque porro casu duæ istæ partes afficiendæ sunt iisdem omnino signis, quibus afficiuntur termini propositi binomii: adeo nempe, ut quo signo afficitur in proposito binomio terminus rationalis, eodem quoque afficienda sit pars rationalis in quæsita radice; & similiter quo signo afficitur in binomio terminus radicalis, eodem etiam affici debeat pars radicalis in radice.

Extrahenda sit igitur radix cubica ex binomio $100 + 51\sqrt{3}$. Quoniam terminus radicalis $51\sqrt{3}$ valet circiter 88, erit totius binomii valor ferè 188: quare radix

dix ejus cubica proximè major, quæ à vera non ampliùs, quàm semisse unitatis differat, erit 6. Capiatur itaque differentia quadratorum ex terminis propositi binomii, quumque ea sit 2197, erit 13 radix ejus cubica, quæ siquidem dividatur per 6, fiet quotiens $\frac{13}{6}$. Et quoniam terminus rationalis 100 major est termino radicali $51\sqrt{3}$, addatur quotiens ille cum radice cubica proximè majori 6, eritque 4 summæ semissis sine fractione. Denique ex quadrato hujus semissis 16 subducatur radix cubica differentiæ quadratorum ex terminis binomii 13, ut residuum habeatur 3; & erit $4 + \sqrt{3}$ radix cubica quæsita.

Extrahenda sit etiam radix cubica ex binomio $25 + 22\sqrt{2}$. Quoniam terminus radicalis $22\sqrt{2}$ valet circiter 31, erit totius binomii valor ferè 56: proindeque radix ejus cubica proximè major, quæ à vera non ampliùs, quàm semisse unitatis differat, erit 4. Et quoniam differentia quadratorum ex terminis propositi binomii est 343, erit 7 radix ejus cubica, quæ siquidem dividatur per 4, fiet quotiens

tiens $\frac{7}{4}$. Unde porrò, quia terminus rationalis 25 minor eſt termino radicali $22\sqrt{2}$, ſubducatur quotiens ille ex radice cubica proximè majori 4, eritque 1 reſidui ſemiſſis ſine fractione. Denique quadrato hujus ſemiſſis, quod eſt etiam 1, addatur radix cubica differentiæ quadratorum ex terminis binomii 7, ut habeatur ſumma 8; & erit $1 + \sqrt{8}$ radix cubica quæſita.

Sed nolim credatis, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, eſse ſemper radicem cubicam propoſiti binomii. Eſt quippe ejus cubica radix, quotieſcumque hæc ex illo extrahi poteſt. Sed ſiquidem propoſitum binomium hujuſcemodi ſit, ut radicem cubicam non admittat; tunc quantitas, quæ per traditam regulam invenitur, ſi bis per ſe ipſam multiplicetur, propoſitum binomium non reſtituet. Id autem non aliter cognoſci poteſt, quàm ſi rei periculum fiat. Neque enim in extrahenda radice cubica ex aliquo binomio certum criterium haberi poteſt: cujus ope illico cognoſci queat, num radix illa extrahi poſſit, nec ne. Nam etſi, quum differentia

tia quadratorum ex terminis propoſiti binomii nequaquam eſt cubus perfectus, extrahi illa non poſſit; non hinc tamen viciſſim extrahi ſemper poterit, quum differentia illa cubus prodit perfectus.

Extrahi autem non poteſt radix cubica, quotieſcumque differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii non eſt cubus perfectus; ſiquidem quæſita radix non alias radicales, quàm quadraticas, debeat continere. Sed ſi de qualitate radicalium nequaquam ſolliciti nos eſse velimus, extrahi quandoque poterit radix cubica etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus nequaquam ſit cubus perfectus. Nam ſi termini iſtius binomii multiplicentur per differentiam illam, novum producetur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus cubus erit perfectus: quocirca ſi ex novo iſto binomio radix cubica extrahi poſſit, eadem diviſa per radicem cubicam prioris differentiæ, dabit radicem cubicam prioris binomii.

Ut ſi velim, exempli gratia, extrahere radicem cubicam ex binomio $22 + \sqrt{486}$, quod hujuſmodi eſt, ut differentia quadratorum ex terminis ejus, utpote 2, nequaquaquam ſit cubus perfectus; multiplico utrumque terminum per differentiam iſtam 2, & orietur novum binomium $44 + 2\sqrt{486}$, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus eſt cubus perfectus, quum ſit numerus 8. Jam, quia alterius hujus binomii $44 + 2\sqrt{486}$ radix cubica eſt $2 + \sqrt{6}$, divido radicem iſtam $2 + \sqrt{6}$ per radicem cubicam prioris differentiæ, hoc eſt per $\sqrt[3]{2}$: quumque hujus diviſionis quotiens ſit $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$, erit quotiens iſte radix cubica prioris binomii $22 + \sqrt{486}$.

Atque hac ratione extrahi etiam quandoque poterit radix cubica ex binomio, cujus termini fractiones involvunt: ſcilicet ſi per multiplicationem tollantur fractiones illæ, & deinde novi binomii radix cubica dividatur per radicem cubicam quantitatis ejus, quæ vices geſſit multiplicatoris. Ut ſi, exempli cauſa, extrahenda ſit radix cubica ex binomio $\frac{11}{3} + \sqrt{\frac{54}{4}}$, multiplico utrumque terminum per 6, & orietur novum binomium $22 + \sqrt{486}$. Unde quia novi hujus binomii radix cubica eſt $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$, divido eam per $\sqrt[3]{6}$, & erit

√3

172 ALGEBRÆ

quaquam ſit cubus perfectus; multiplico utrumque terminum per differentiam iſtam 2, & orietur novum binomium $44 + 2\sqrt{486}$, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus eſt cubus perfectus, quum ſit numerus 8. Jam, quia alterius hujus binomii $44 + 2\sqrt{486}$ radix cubica eſt $2 + \sqrt{6}$, divido radicem iſtam $2 + \sqrt{6}$ per radicem cubicam prioris differentiæ, hoc eſt per $\sqrt[3]{2}$: quumque hujus diviſionis quotiens ſit $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$, erit quotiens iſte radix cubica prioris binomii $22 + \sqrt{486}$.

Atque hac ratione extrahi etiam quandoque poterit radix cubica ex binomio, cujus termini fractiones involvunt: ſcilicet ſi per multiplicationem tollantur fractiones illæ, & deinde novi binomii radix cubica dividatur per radicem cubicam quantitatis ejus, quæ vices geſſit multiplicatoris. Ut ſi, exempli cauſa, extrahenda ſit radix cubica ex binomio $\frac{11}{3} + \sqrt{\frac{54}{4}}$, multiplico utrumque terminum per 6, & orietur novum binomium $22 + \sqrt{486}$. Unde quia novi hujus binomii radix cubica eſt $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$, divido eam per $\sqrt[3]{6}$, & erit

√3

potest inveniri. Si enim termini propositi binomii ita simpliciùs exprimi possint, ut summa coefficientium sit quadrupla summæ quantitatum, sub signis existentium; differentia verò eorundem coefficientium sit dupla differentiæ, quæ inter easdem quantitates existit: radix cubica extrahi poterit, eaque habebitur, si ex terminis illis prædicti coefficientes deleantur.

Oporteat, exempli gratia, radicem cubicam extrahere ex binomio $\sqrt{242} + \sqrt{243}$. Jam termini hujus binomii simpliciùs exprimi possunt hac ratione $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$. Itaque quia summa coefficientium $11 + 9$ est quadrupla summæ quantitatum, sub signis existentium, $2 + 3$; & differentia eorundem coefficientium $11 - 9$ est dupla differentiæ earundem quantitatum $3 - 2$: concludendum est, radicem cubicam ex proposito binomio extrahi posse, eamque esse $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Oporteat similiter radicem cubicam elicere ex $\sqrt{578} + \sqrt{605}$. Quoniam termini hujus binomii simpliciùs exprimi possunt in hunc modum $17\sqrt{2} + 11\sqrt{5}$; & expressis iis hac ratione, fit tam summa coefficientium $17 + 11$ quadrupla

summæ quantitatum, sub signis existentium, $2 + 5$; quàm differentia eorumdem coefficientium $17 - 11$ dupla differentiæ earundem quantitatum $5 - 2$: concludendum est quoque, propositum binomium radicem cubicam habere, eamque esse $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Nec difficile est, hujus regulæ rationem intelligere. Nam cubus binomii $\sqrt{a} + \sqrt{c}$ est hoc aliud binomium $\overline{a + 3c}\sqrt{a} + \overline{c + 3a}\sqrt{c}$: & profectò in hoc binomio, cujus radix cubica habetur, si ex terminis ejus deleantur coefficientes, clarè liquet, summam coefficientium $4a + 4c$ quadruplam esse summæ quantitatum, sub signis existentium $a + c$; differentiam verò eorundem coefficientium $2a - 2c$ esse duplam differentiæ earundem quantitatum $a - c$.

III.

Extractio aliarum radicum ex Binomiis.

Quantum ad radices superioris ordinis, ex binomiis extrahendas, sufficiet, si tantùm rationem exponamus, qua extrahi illæ possunt, quæ ad potestates

tes numeri imparis referuntur, veluti ſunt radices quintæ, ſeptimæ, nonæ, &c. Nam quantum ad eas, quæ referuntur ad poteſtates numeri paris, cujuſmodi ſunt radices quartæ, ſextæ, octavæ, &c.; poterunt haberi per extractionem, vel ſolius radicis quadratæ, vel quadratæ ſimul, & cubicæ, ſæpiùs repetitam.

Ut ſi, exempli cauſa, extrahenda ſit radix quadrato-quadrata ex binomio $17 + 12\sqrt{2}$; elicio primùm ex illo radicem quadratam $3 + 2\sqrt{2}$; deinde alterius hujus binomii ſumo adhuc quadratam radicem $1 + \sqrt{2}$; & erit $1 + \sqrt{2}$ radix quadrato-quadrata quæſita. Similiter, ſi extrahenda ſit radix ſexta, ſive cubo-cubica ex binomio $99 + 70\sqrt{2}$ extraho primùm ex illo radicem quadratam $7 + 5\sqrt{2}$; tum novi hujus binomii ſumo radicem cubicam $1 + \sqrt{2}$; & erit $1 + \sqrt{2}$ radix cubo-cubica propoſiti binomii.

Et quamquam hoc eodem artificio extrahi quoque poſſint quamplures radices, quæ ad poteſtates numeri imparis referuntur; veluti, ex.gratia, radix, quæ refertur ad poteſtatem nonam, quippe quæ haberi poteſt per duplicem radicis cubicæ extractionem. Nihilo tamen minus eas excipere non exiſtimamus; tum quia re-

regula à nobis afferenda, non eſt diſſimilis ab illa, quā paulò ante attulimus, pro radicis cubicæ extractione; tum etiā quia inter radices numeri paris, & radices numeri imparis non leve diſcrimen intercedit.

Si enim eam nobis legem imponemus, ut radices extrahendæ non alias radicales, quàm quadraticas, debeant continere; radices numeri paris non ex aliis binomiis extrahi poterunt, quàm ex iis, quæ unum habent terminum rationalem, alterum incommenſurabilem, ac radicalem: quo caſu radices ipſæ poterunt ſub utraque forma prodire; & nempe, ut unus earum terminus ſit rationalis, alter radicalis; & viciſſim, ut utrumque terminum contineant radicalem: quandoquidem ex utriuſque formæ binomio ſemper aliud producitur binomium, cujus unus terminus eſt rationalis, alter incommenſurabilis, & radicalis.

Sed eadem lege impoſita, etſi radices numeri imparis regulariter ex iis tantùm binomiis extrahi poſſint, quæ ſimiliter unum habent terminum rationalem, alterum incommenſurabilem, & radicalem; attamen radices ipſæ nonniſi ſub una forma poſſunt haberi, nempe tales, ut unus earum terminus ſit rationalis, alter ra-

radicalis: quandoquidem ex binomio, quod utrumque terminum habeat radicalem, quotiescumque potestas numeri imparis quæritur, regulariter non binomium, sed trinomium producitur.

Et quamquam eæ numeri imparis radices, quæ haberi possunt eodem artificio, quo eruere licet radices numeri paris, extrahi quoque possint ex binomiis, quorum uterque terminus sit radicalis; adhuc tamen radices ipsæ sub una tantùm forma possunt haberi, nempe tales, ut earum uterque terminus sit etiam radicalis: adeo, ut radices numeri imparis sunt semper ejusdem formæ cum ipsis binomiis propositis, quotiescumque eæ extrahi possunt.

Horum omnium demonstrationes hìc sigillatim afferre, nequaquam nobis est animus. Tantùm fontes indicabimus, unde eæ sunt repetendæ. Nempe primò, quod quantitatis, signo quadratæ radicis affectæ, potestas omnis numeri imparis sit quantitas alia similiter radicalis; omnis verò potestas numeri paris sit quantitas alia commensurabilis, ac rationalis. Et secundò, quod si quantitas quæcumque, duabus ex partibus constans, ad potestatem aliquam attollatur; partes
illæ

illæ in terminis intermediis quæsitæ potestatis ad omnes alias potestates inferiores elevatæ reperiantur.

Jam, quum regulariter radices numeri imparis ex iis tantùm binomiis extrahi possint, quæ unum habent terminum rationalem, alterum radicalem; ipsæque radices ejusdem prodeant formæ cum binomiis propositis, referat $a + \sqrt{b}$ radicem extrahendam. Et siquidem ex ea potestas, de qua agitur, fiat; cognoscemus, non modò potestatem istam esse binomium aliud, cujus unus similiter terminus est rationalis, alter radicalis; verùm etiam differentiam quadratorum ex terminis ejus potestatem esse perfectam ejusdem ordinis cum illa, de qua agitur.

Ut si, exempli causa, $a + \sqrt{b}$ sit radix quinta alicujus binomii; multiplicando $a+\sqrt{b}$ quater in se ipsā, fiet binomiū illud $a^5 + 5a^4\sqrt{b} + 10a^3b + 10a^2b\sqrt{b} + 5ab^2 + b^2\sqrt{b}$, in quo $a^5 + 10a^3b + 5ab^2$ est terminus rationalis, & $5a^4\sqrt{b} + 10a^2b\sqrt{b} + b^2\sqrt{b}$, hoc est $\overline{5a^4 + 10a^2b + b^2}\sqrt{b}$ est terminus radicalis. Et quoniam quadratum ex termino rationali est $a^{10} + 20a^8b + 110a^6b^2 + 100a^4b^3 + 25a^2b^4$, quadratum verò termini radicalis est

 $25a^8b$

$25a^8b + 100a^6b^2 + 110a^4b^3 + 20a^2b^4 + b^5$; erit differentia istorum quadratorum $a^{10} + 20a^8b + 110a^6b^2 + 100a^4b^3 + 25a^2b^4 - 25a^8b - 100a^6b^2 - 110a^4b^3 - 20a^2b^4 - b^5$, hoc est $a^{10} - 5a^8b + 10a^6b^2 - 10a^4b^3 + 5a^2b^4 - b^5$: quam liquet esse quadrato-cubum perfectum, quum radix ejus quadrato-cubica sit $a^2 - b$.

Sed cognoscemus quoque, quod quum ex aliquo binomio radix numeri imparis, quæ talis sit, qualem optamus, extrahi potest, non modò differentia quadratorum ex terminis ejus sit potestas perfecta ejusdem ordinis cum illa, de qua agitur; verùm etiam radix hujus differentiæ, ab eadem potestate denominata, sit differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis extrahendæ radicis. Sic in exemplo adducto radix quadrato-cubica prædictæ quadratorum differentiæ est $a^2 - b$: quam liquet differentiam esse quadratorum ex terminis assumptæ radicis $a + \sqrt{b}$.

Unde modò pro extrahendis radicibus numeri imparis ex binomiis, quorum unus terminus sit rationalis, alter radicalis, regula nobis non dissimilis oritur ab ea, quam pro extractione radicis cubicæ superiùs attulimus: nimirum ex binomio proposito capiatur radix, de qua agitur, proximè major, sed quæ non ampliùs, quàm semisse unitatis, differat à vera radice, quæ præter propter cognosci potest; tum ex differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejusdem binomii, eliciatur similiter radix, de qua agitur, eaque per radicem illam proximè majorem dividatur.

Porrò, si terminus rationalis major fuerit termino radicali, quotiens, qui exinde oritur, addatur cum eadem illa radice proximè majori: & siquidem summæ hujus capiatur semissis sine fractione, à cujus quadrato subducatur radix, de qua agitur, prædictæ quadratorum differentiæ; erit semissis illa pars rationalis, radix verò quadrata residui, inde orti, pars radicalis quæsitæ radicis: iisdem signis afficiendæ, quibus propositi binomii termini afficiuntur.

Quod si verò terminus rationalis minor fuerit termino radicali, quotiens, qui ex illa divisione provenit, subducatur ex radice illa proximè majori: & siquidem residui hujus capiatur adhuc semissis sine fractione, cujus quadrato addatur radix, de qua agitur, prædictæ quadratorum differentiæ ; erit rurſus ſemiſſis illa pars rationalis, radix verò quadrata ſummæ, inde ortæ, pars radicalis quæſitæ radicis: iiſdem quoq; ſignis afficiendæ, quibus propoſiti binomii termini ſũt affecti.

Extrahenda ſit igitur radix quinta, ſive quadrato-cubica ex binomio $41 + 29\sqrt{2}$. Quoniam terminus radicalis $29\sqrt{2}$ valet circiter 41 erit totius binomii valor ferè 82, cujus radix quinta proximè major, quæ à vera non amplius, quàm unitatis ſemiſſe differat, erit 3. Capiatur differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii, quæ quum ſit unitas, erit ejus radix quinta ſimiliter unitas; adeoque diviſa radice iſta per 3, fiet quotiens $\frac{1}{3}$. Et quoniam terminus rationalis 41 minor eſt termino radicali $29\sqrt{2}$, ſubtrahatur quotiens ille ex radice proximè majori 3, eritque 1 reſidui ſemiſſis ſine fractione. Denique quadrato hujus ſemiſſis 1 addatur radix quinta differentiæ quadratorum ex terminis binomii, quæ ſimiliter eſt 1; & erit $1 + \sqrt{2}$ radix quinta quæſita.

Extrahenda ſit etiam radix ſeptima ex binomio $568 + 328\sqrt{3}$. Quoniam termi-

nus radicalis $328\sqrt{3}$ valet circiter 568, erit totius binomii valor ferè 1136, cujus radix ſeptima proximè major, quæ à vera non amplius differat, quàm ſemiſſe unitatis, erit 3. Et quoniam differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii eſt 128, erit 2 radix ejus ſeptima, quæ ſiquidé dividatur per 3, fiet quotiens $\frac{2}{3}$. Unde porrò, quia terminus rationalis 568 minor eſt termino radicali $328\sqrt{3}$, ſubducatur quotiens ille ex radice proximè majori 3, eritque 1 reſidui ſemiſſis ſine fractione. Denique quadrato hujus ſemiſſis, quod eſt etiam 1, addatur radix ſeptima differentiæ quadratorum ex terminis binomii 2; & erit $1 + \sqrt{3}$ radix ſeptima quæſita.

Cæterùm hìc etiam notare oportet, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, tunc demum eſſe radicem quæſitam, quum hæc ex propoſito binomio extrahi poteſt; pariterque non alia ratione cognoſci poſſe, nun propoſitum binomium radicem admittat, quàm ſi rei periculum fiat. Nam etſi, quum differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propoſiti binomii, nequaquam eſt poteſtas per-

perfecta ejusdem ordinis cum illa, de qua agitur; indicio nobis esse potest, propositum binomium radicem non admittere: non hinc tamen argumento nobis esse debet, quod radicem admittat, quum vicissim differentia illa prodit illius ordinis potestas perfecta.

Sed quod dicimus, radicem ex binomio extrahi non posse, quum differentia quadratorum ex terminis ejus non est potestas perfecta ejusdem ordinis cum illa, de qua agitur; hoc ita etiam oportet intelligatur, si radix extrahenda non alias radicales, quàm quadraticas, debeat continere. Nam si qualitatis radicalium nulla ratio haberi velit, extrahi quandoque poterit optata radix etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus nequaquam sit illius ordinis potestas perfecta. Etenim si termini propositi binomii multiplicentur per illius differentiæ potestatem aliquam, hoc est per quadratum, si quæratur radix quinta; per cubum, si radix septima; per quadrato-quadratum, si radix nona; atque ita deinceps, novum producetur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus potestas erit perfecta illius ordinis, de quo agitur: proindeque si ex novo isto binomio radix extrahatur, eadem divisa per radicem cognominem illius quantitatis, quæ vices gessit multiplicatoris, prioris binomii radicem exhibebit.

Atque hoc artificio extrahi etiam quandoque poterit quæsita radix, tum ex binomio, cujus termini fractiones involvant, tum itidem ex binomio, cujus uterque terminus sit radicalis: scilicet si multiplicationis ope in primo casu tollantur fractiones, in secundo verò unus ex terminis propositi binomii fiat rationalis. Nam in utroque casu, si novi binomii radix illius ordinis, de quo agitur, dividatur per radicem cognominem illius quantitatis, quæ gessit vices multiplicatoris; erit quotiens hujus divisionis radix propositi binomii: quæ omnia exemplis illustrare, supervacaneum existimamus; quum non dissimilia sint ab iis, quæ in extractione radicis cubicæ ex binomiis paulò superiùs adnotavimus, & exemplis explicuimus.

Illud hìc potiùs ostendendum existimamus, qua ratione regula superiùs tradita deducatur ex eo, quod ad extrahendam radicem ex proposito binomio necesse sit, ut in binomio adsint duæ istæ conditiones. Primò, ut differentia quadradratorum ex terminis ejus, ſit poteſtas perfecta ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur. Et ſecundò, ut radix hujus differentiæ, ab eadem poteſtate denominata, ſit differentia quadratorum ex terminis extrahendæ radicis.

Hunc in finem referat, ut antea, $a + \sqrt{b}$ radicem extrahendam. Itaque poſito, quod terminus rationalis a major ſit termino radicali $\sqrt{b}$; erit radix prædictæ quadratorum differentiæ $a^2 - b$. Jam verò diviſo $a^2 - b$ per $a + \sqrt{b}$ producitur $a - \sqrt{b}$, quod additum cum $a + \sqrt{b}$, dat ſummam, cujus ſemiſſis eſt pars rationalis a; atque ab hujus quadrato a^2 ſubducto $a^2 - b$, habetur reſiduum, cujus radix quadrata eſt pars radicalis $\sqrt{b}$. Itaque ſi loco ipſius $a + \sqrt{b}$ ſumatur radix binomii proximè major, adhuc eodem artificio quæſitæ radicis partes inveniuntur.

Quod ſi verò terminus rationalis a minor ſit termino radicali $\sqrt{b}$; erit radix ejuſdem qnadratorum differentiæ $b - a^2$. Jam verò diviſo $b - a^2$ per $a + \sqrt{b}$ producitur $\sqrt{b} - a$, quod ſubtractum ex $a + \sqrt{b}$, dat reſiduum, cujus ſemiſſis eſt pars rationalis a; atque hujus quadrato a^2 addito cum $b - a^2$, habetur ſumma, cujus quadrata radix eſt pars radicalis $\sqrt{b}$. Itaque ſi loco ipſius $a + \sqrt{b}$ capiatur radix binomii proximè major, eadem operandi ratione, adhuc quæſitæ radicis partes habebuntur.

IV.

Geneſis, & calculus radicalium, quæ dicuntur univerſales.

Est & alia ſpecies quantitatum radicalium, quæ dicuntur univerſales. Oriuntur autem hujuſmodi quantitates radicales, quum ex aliquo binomio, per regulas ſuperiùs traditas, quæſita radix extrahi non poteſt. Nam ſicuti ad deſignandam radicem, quæ ex aliqua quantitate rationali elici nequit, præfigitur quantitati ſignum radicale; ita quoque quum ex aliquo binomio radix quæcumque extrahi non poteſt, deſignatur illa ope ejuſdem ſigni radicalis. Et quoniam ſignum iſtud radicale ad utrumque binomii terminum ſe extendit; hinc factum, ut quantitas illa, radicalis univerſalis ab Algebriſtis diceretur.

Itaque, quia ex quantitate rationali 20 extrahi non poteſt quadrata radix; deſi-

designatur illa per $\sqrt{20}$: qua ratione ipsa quantitas rationalis 20 evadit incommensurabilis, ac radicalis. Et ad eundem modum, quia ex binomio $2 + \sqrt{6}$ quadrata radix elici nequit, designari ea poterit, adhibito quoque signo radicali, quod utrumque binomii terminum comprehendat, in hunc modum $\sqrt{2 + \sqrt{6}}$: quo facto quantitas ista $\sqrt{2 + \sqrt{6}}$ dicetur radicalis universalis. Pariterque, sicuti quum quæritur radix cubica quantitatis rationalis 10, oritur quantitas radicalis $\sqrt[3]{10}$; ita quoque quum quæritur radix cubica binomii $1 + \sqrt{2}$, habetur radicalis universalis $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$.

Hujusmodi quantitates radicales, rarò accidit, ut ad calculum poni debeant. Interim ne quum id contingit, Tyrones nostri animo concidant, sciant velim, calculum ipsarum iisdem omnino regulis peragi posse, quibus aliarum radicalium calculus perficitur. Itaque primò ad designandum duplum, triplum, aut quadruplũ radicalis universalis $\sqrt{2 + \sqrt{6}}$, scribendum est $2\sqrt{2 + \sqrt{6}}$, $3\sqrt{2 + \sqrt{6}}$, $4\sqrt{2 + \sqrt{6}}$. Sed quantitates illæ, extra signum existentes, quæ hìc etiam dicuntur coef-

coefficientes, reponentur intra signum radicale, si evectæ ad potestatem, ab exponente signi radicalis designatam, multiplicentur per omnes illas, quæ sub signo reperiuntur: qua ratione $2\sqrt{2 + \sqrt{6}}$, idem erit, ac $\sqrt{8 + 4\sqrt{6}}$, sive $\sqrt{8 + \sqrt{96}}$.

Secundò radicales istæ universales ad simpliciores suos terminos reducuntur, collocando extra signum quicquid rationale simul, & commune est in quantitatibus, sub signo existentibus; sed ad id faciliùs cognoscendum, præstat priùs ad simpliciores suas expressiones revocare quantitates radicales, quæ sub signo universali reperiuntur. Ut si velim ad simpliciores suos terminos reducere radicalem universalem $\sqrt{8 + \sqrt{96}}$, quia hæc idem est, ac $\sqrt{8 + 4\sqrt{6}}$; & in numeris 8, & 4, quod est rationale simul, & commune, est ipse numerus 4: proinde diviso utroque eorum numerorum per 4, & collocata extra signum radice ejusdem numeri 4, erit $2\sqrt{2 + \sqrt{6}}$ quantitas proposita, ad simpliciores suos terminos reducta.

Jam reducendo radicales universales ad simpliciores suas expressiones, facile erit eas in unum addere, vel à se mutuò sub-

ſubducere. Nam ſiquidem contigerit, radicales illas univerſales eaſdem ſub ſignis radicalibus quantitates habere; fiet earum additio, vel ſubtractio, addendo, vel ſubtrahendo earundem coefficientes. Quod ſi verò ſub ſignis radicalibus nequaquam habeant eaſdem quantitates, deſignari poterit additio, vel ſubtractio, adhibito ſigno +, vel —. Hac ratione ſumma, vel reſiduum, quod oritur ex additione, vel mutua ſubtractione radicalium univerſalium $\sqrt{50+\sqrt{3750}}$, & $\sqrt{8+\sqrt{96}}$ erit $7\sqrt{2+\sqrt{6}}$, vel $3\sqrt{2+\sqrt{6}}$; quia ſi utique ad ſimpliciores ſuos terminos eæ reducantur, fient $5\sqrt{2+\sqrt{6}}$, & $2\sqrt{2+\sqrt{6}}$. Sed ſumma, vel reſiduum, quod oritur ex additione, vel ſubtractione mutua radicalium univerſalium $\sqrt{8+\sqrt{96}}$, & $\sqrt{4+\sqrt{32}}$, non aliter deſignari poteſt, quàm adhibito ſigno +, vel —; quia ſi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocentur, una fit $2\sqrt{2+\sqrt{6}}$, altera $2\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Multiplicatio porrò, & diviſio hujuſmodi quantitatum radicalium fieri poſſunt, etiamſi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones illæ non reducantur. Nam ſiquidem

dem multiplicentur, aut dividantur per ſe mutuò quantitates, ſub ſignis exiſtentes, & producto, vel quotienti idem radicale ſignum præfigatur; quæ inde oritur radicalis univerſalis, dabit productū, vel quotientem quæſitum. Ut ſi oporteat multiplicare $\sqrt{3+\sqrt{3}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; multiplico primùm $3+\sqrt{3}$ per $2+\sqrt{2}$; tum producto $6+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$, præfigo idem ſignū radicale; & erit $\sqrt{6+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ productum, quod quæritur. Similiter ſi oporteat dividere $\sqrt{4+\sqrt{6}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; divido primùm $4+\sqrt{6}$ per $2+\sqrt{2}$, vel quod idem eſt $8+2\sqrt{6}-4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ per 2; tum quotienti $4+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ præfigo idem ſignum radicale; & erit $\sqrt{4+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ quotiens, qui quæritur.

Interim tam in additione, & ſubtractione, quàm in multiplicatione, & diviſione hujuſmodi quantitatum radicalium, illud requiritur, ut quantitates, in quibus operationes illæ inſtitui debent, ſint ejuſdem denominationis, hoc eſt idem habeant ſignum radicale. Unde ſi quantitates offerantur diverſæ denominationis, neceſſe eſt, ut illæ priùs ad eandem

dem denominationem reducantur. Hæc autẽ reductio fit eodem omnino artificio, ac reductio radicalium ſimplicium: nimirum, elevando quantitatem, ſub cujuſque ſigno exiſtentem, ad poteſtatem à ſigno alterius denominatam; & proprium cujuſque ſigni indicem multiplicando per indicem alterius: vel etiam, ſi index unius ſigni exactè contineatur in indice alterius ſigni, multiplicando indicem illum per numerum, qui oſtendit, quoties in hoc altero continetur; & elevando quantitatem, ſub eodem illo ſigno exiſtentem, ad poteſtatem, ab eodem numero denominatam.

Quantum ad formationem poteſtatum in hujuſmodi quantitatibus radicalibus, fieri illa quoque poteſt, abſque ulla earum quantitatum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductione. Nam ſi ad datam poteſtatem attollantur quantitates, ſub ſigno exiſtentes, iiſq; idem radicale ſignũ præfigatur, habebitur propoſitæ radicalis univerſalis poteſtas quæſita. Ita ſi oporteat, ad quadratum attollere radicalem univerſalem $\sqrt{a + \sqrt{c}}$; fiat primò quadratum ex $a + \sqrt{c}$; tum huic præfigatur idem ſignũ radicale; & erit $\sqrt{a + c + 2\sqrt{ac}}$ quadratum quæſitum.

Similiter ſi oporteat, ad cubum evehere eandem radicalem univerſalem $\sqrt{a + \sqrt{c}}$; fiat primò cubus ex $a + \sqrt{c}$; deinde huic idem ſignũ radicale præfigatur; & erit $\sqrt{a^3 + 3a^2\sqrt{c} + 3ac + c\sqrt{c}}$ cubus quæſitus.

Denique, quantum ad radicum extractionem ex iiſdem quantitatibus radicalibus, ad eam peragendam neque etiam ulla requiritur reductio earum quantitatum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Nam ſiquidem ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtẽtibus, quæſita radix extrahatur, eiq; idem radicale ſignũ præfigatur, habebitur propoſitæ radicalis univerſalis radix quæſita. Ita ſi oporteat, quadratam radicem extrahere ex radicali univerſali $\sqrt{^{3}\,3 + 2\sqrt{2}}$; eliciatur primò quadrata radix ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, $3 + 2\sqrt{2}$; tum huic præfigatur idem ſignum radicale; & erit $\sqrt{^{3}\,1 + \sqrt{2}}$ radix quadrata quæſita. Similiter ſi oporteat, radicem cubicam elicere ex radicali univerſali $\sqrt{7 + 5\sqrt{2}}$; eliciatur primò radix cubica ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, $7 + 5\sqrt{2}$; deinde huic idem radicale ſignũ præfigatur; & erit $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ radix optata.

N Quod

Quod si ex quantitatibus, sub signo existentibus, optata radix elici nequeat; tunc satis erit, multiplicare exponentem signi radicalis per exponentem quæsitæ radicis. Hoc pacto, si quæratur quadrata radix radicalis universalis $\sqrt[3]{2+\sqrt{6}}$, ea præcedenti methodo haberi non potest; quia ex quantitate, sub signo existente, $2+\sqrt{6}$ nequaquam licet quadratam radicem elicere: quocirca multiplicato exponēte signi radicalis 3 per exponentem quæsitæ radicis 2, fiet $\sqrt[6]{2+\sqrt{6}}$ radix quæsita. Et similiter si ex radicali universali $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, quæratur radix cubica; quia ea per regulam superiùs traditam nequit haberi, quum elici non possit cubica radix ex quantitate, sub signo existente, $1+\sqrt{2}$: proinde multiplicato exponente signi radicalis 2 per exponentem quæsitæ radicis 3 fiet $\sqrt[6]{1+\sqrt{2}}$ radix optata.

Cæterùm illud hìc reticere nolim, quod beneficio radicalium universalium extrahi possit quadrata radix ex quocumque binomio, eâdem illâ regulâ, quam superiùs attulimus. Oporteat enim quadratam radicem elicere ex binomio $8+\sqrt{32}$. Quoniam differentia quadratorum ex ter-

terminis ejus est 32, erit $4\sqrt{2}$ quadrata radix hujus differētiæ. Unde si ea addatur primò termino rationali 8, deinde verò ex eodem subducatur; erit $4+2\sqrt{2}$ summæ semissis, & $4-2\sqrt{2}$ semissis residui: proindeque quadrata radix propositi binomii erit $\sqrt{4+2\sqrt{2}}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

Sed fateamur etiam hoc loco oportet, quod exhibendo quæsitam radicem in hunc modum, multò difficiliùs, qui sit valor ejus, intelligatur, quàm si utique dicamus, eam extrahi non posse, & consequenter eandem exhibeamus per unicam radicē universalem hac ratione $\sqrt{8+\sqrt{32}}$. Extrahendo namque radices ex binomiis, non aliud efficimus, quàm radicales universales ad simpliciores suas expressiones reducere. Quocirca, quotiescumque ope illarum extractionum radicales illæ terminis magis compositis oriuntur expressæ, frustra quidem instituuntur; quum hac ratione potiùs contrarium ejus obtineatur, quod nobis erat in votis.

Interim, si quemadmodum radix binomii $8+\sqrt{32}$ exhiberi potest per radices, quæ eliciuntur ex his aliis duobus binomiis $4+2\sqrt{2}$, & $4-2\sqrt{2}$; ita & unaquæque istarum radicum exhibeatur

 per

per radices, quæ ex aliis duobus binomiis elici debeant, res fiet haud aspernanda; quum hac ratione radicalis universalis $\sqrt{8+\sqrt{32}}$ ad simpliciores suos terminos reducatur. Radix namque binomii $4+2\sqrt{2}$ exhiberi potest per $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$, & radix binomii $4-2\sqrt{2}$ per $\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Itaque radix binomii $8+\sqrt{32}$ erit $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}$, hoc est $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

CAP. X.

De quantitatibus imaginariis.

Radices ex quantitatibus extrahi non possunt, non modò quia quantitates illæ non sunt potestates perfectæ ejus ordinis, de quo agitur; verùm etiam, quia tali signo afficiuntur, ut qua ratione produci queant, intelligi non possit. Sic radix quadrata quantitatis *ab* haberi non potest, quia scilicet quantitas ipsa *ab* non est quadratum perfectum. Sed radix quadrata quantitatis $-a^2$ neque etiam potest haberi, quia quantitas ista, veluti signo $-$ affecta, intelligi non potest, qua ra-

ratione producatur; quum ex regulis multiplicationis superiùs traditis, tam quantitas positiva a, quàm quantitas negativa $-a$, si semel in se multiplicentur, producant quantitatem positivam a^2.

Hunc in finem facienda est distinctio inter potestates numeri paris, & potestates numeri imparis. Istæ etenim possunt esse tam positivæ, quàm negativæ; quia sicuti oriuntur positivæ, quum radices, ad quas referuntur, sunt itidem positivæ; ita quoque prodeunt negativæ, quum vicissim radices assumuntur negativæ. Sed illæ nonnisi positivæ esse possunt; quia tam quantitatum positivarum, quàm quantitatum negativarum potestates numeri paris positivæ semper oriuntur. Hac ratione cubus quantitatis positivæ a est quantitas itidem positiva a^3; & cubus quantitatis negativæ $-a$ est quantitas similiter negativa $-a^3$. Sed quadratum tam quantitatis positivæ a, quàm quantitatis negativæ $-a$ est semper quantitas positiva a^2; quia, sive multiplicetur a per a, sive $-a$ per $-a$ producetur semper a^2.

Unde discimus primò, radices ex potestatibus numeri imparis extrahi posse, quocumque signo sint affectæ, hoc est, si-

ve

ve sint positivæ, sive negativæ; sed non itē radices ex potestatibus numeri paris, quippe quæ tunc demum extrahi possunt, quum potestates ipsæ sunt positivæ. Et secundò quemadmodum clarè liquet, radices, quæ referuntur ad potestates numeri imparis, esse semper ejusdem naturæ cum ipsis potestatibus, nimirum esse positivas, vel negativas, prout potestates ipsæ sunt positivæ, vel negativæ; ita quoque non obscurè deducitur, potestates positivas numeri paris duas radices habere, unam nempe positivam, & alteram negativam; quum tam illius, quàm istius potestas numeri paris sit semper quantitas positiva.

Itaque impossibilitas, quæ in extrahendis radicibus occurrit, oriri potest, non solùm ex eo, quod quantitas proposita non sit potestas perfecta ejus ordinis, de quo agitur; verùm etiam, quia quantitas est negativa, & quæsita radix refertur ad potestatem numeri paris. Utroque casu designant Algebristæ radicem extrahendam, præfigendo quantitati signum radicale, cuius index radicem illam ostendat. Sed quemadmodum impossibilitas, quæ oritur ex primo capite, occasionem præbuit, ut distinguerentur quan-

quantitates in commensurabiles sive rationales, & incommensurabiles sive radicales; ita ex impossibilitate, quæ oritur ex secundo capite, nata est alia quantitatum distinctio: nimirum, quod quædam sint reales, sive verè, ac realiter existentes; quædam imaginariæ, hoc est, quæ tantùm fingi possunt, & imaginari.

Dicuntur ergo quantitates imaginariæ, radices numeri paris, quæ extrahi debent ex quantitatibus negativis; eæque tale nomen apud Algebristas sortitæ sunt, quia scilicet sunt quantitates, quæ verè, ac realiter non existunt, sed tantùm finguntur, ac imaginantur. Jam si vulgus consulas Algebristarum, non aliam apud ipsos de impossibilitate harum radicum rationem invenies, quàm quia intelligi non potest, quo signo affici debeant, ut producant potestates, ad quas referuntur. Sed quoniam hæc ratio convincit nos potiùs, quàm illuminat; aliam nos hìc afferre conabimur, quæ harum radicum impossibilitatē ad oculū nobis ostēdat. Quumq; ratio ista ex natura quantitatum positivarum, & negativarū, velut ex proprio suo fonte, sit deducenda; hāc priùs oportet paulò clariùs ostēdamus. Na-

I.

Natura quantitatum positivarum, & negativarum paulò clariùs ostenditur.

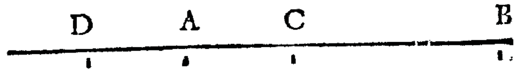
Diximus secundo capite, quantitates positivas esse illas, quas signum + præcedit; quantitates verò negativas, quæ signo — afficiuntur. Sed eodem in loco explicuimus etiam, qua ratione intelligendum sit illud, quod vulgò dicunt Algebristæ, quantitates positivas esse nihilo majores, quantitates negativas nihilo minores: nimirum, quod quum zero, sive nihilum quantitatibus additum, earum valorem nec augeat, nec minuat; dicendum sit nihilo majus, quod potis est alicujus quantitatis valorem augere; & vicissim nihilo minus, quod quantitatis alicujus valorem minuere potest: adeo, ut quantitates dicendæ sint positivæ, vel negativæ, non quidem propter se, sed in ordine ad eas, de quibus valorem suum affirmant, vel negant.

Jam hæc facilè quidem intelliguntur, quotiescumque quantitates, quæ dicuntur negativæ quātitatibus aliis positivis, iisque majoribus, adhærent; sed non ita facilè concipi possunt, quum eædem quantitates negativæ, vel solæ ponuntur, vel quantitatibus aliis adhærent, quæ etsi sint positivæ, iis tamen sunt minores. Nemo etenim non intelligit quid significet expressio ista 7 — 5; quandoquidem per eam valor numeri 5 negatur de valore numeri 7; atque adeo tantùm indicatur valor numeri 2. Sed quid sibi velit hæc altera expressio — 2, vel etiam 5 — 7, non ità liquidò constat; quum in prima negatio valoris numeri 2 ad nullam quantitatem referatur; in secunda quantitas, quæ negatur, 7 major sit illa, de qua negatur, 5.

Itaque illud hìc oportet ostendamus, qua ratione fieri possit, ut quantitates negativæ, vel solæ reperiantur, vel aliis adhæreant, positivis quidem, sed majoribus ipsis. Id explicant primò Algebristæ mediantibus debitis, & creditis. Quemadmodum etenim credita sunt bona affirmativa, quia peculium augent; ita debita considerari possunt veluti bona negativa, quia peculium minuunt. Unde sicuti, quum quis centum habet crediti, quadraginta verò debiti, dicimus peculium ejus esse 100 — 40; ita vicissim quum

quum habet quadraginta crediti; centum verò debiti, dici poteſt, quod peculium ejus ſit 40 — 100. Et ſimiliter ſicuti quum habet centum crediti, nihil verò debiti, dicimus peculium ejus eſſe 100; ita viciſſim, quum habet centum debiti, nihil verò crediti, dici poteſt, quod peculium ejus valeat — 100.

Hoc idem explicant quoque motu locali, in quo progreſſus dici poteſt motus poſitivus, quia auget iter confectum, & minuit conficiendum; regreſſus motus negativus, quia viciſſim minuit iter confectum, augetque conficiendum. Si enim



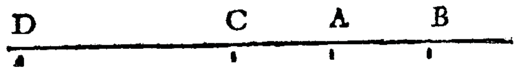
aliquem promoveri ſupponamus ab A versùs B pedibus quinque, atque tum retrocedere à B ad C pedibus tribus, dicemus promotiorem reperiri in C, quàm in A pedibus 5 — 3; ſed ſi retrocedat à B ad D pedibus ſeptem, tunc dici poteſt, promotiorem eſſe in D, quam in A pedibus 5 — 7. Et ſimiliter, ſi aliquis iter confecturus ab A verſus B, proceſſerit ab A ad C pedibus duobus, dicemus reſpectu itineris conficiendi promotiorem eſſe in

in C, quàm in A pedibus 2; ſed ſi viciſſim retroceſſerit ab A ad D pedibus duobus, tunc dici poterit, quod promotior ſit ille in D, quàm in A pedibus — 2.

Utroque hoc exemplo illud clarè liquet, quantitates, quæ dicuntur negativæ, non minùs reales eſſe, quàm quæ vocantur poſitivæ; ſed omne diſcrimen inter eas in eo poſitum eſſe, quod quantitates negativæ interpretandæ ſint ſenſu contrario ei, quo poſitivas quantitates interpretamur. Nam ſicuti quum dicimus, peculium alicujus eſſe 60, intelligimus illud tantundem in bonis habere, ut ſexaginta perſolvere poſſit; ita quoque quum dicimus alicujus peculium valere — 60, intelligimus viciſſim ab eo abeſſe ſexaginta, quo dici poſſit in neutro ſtatu conſiſtere. Et ſimiliter ſicuti quum dicimus, aliquem dati itineris pedum decem confeciſſe pedes 4, ſenſus eſt, eum in tali loco verſari, ut illius itineris nonniſi ſex pedes conficere debeat; ita quoque quum dicimus dati itineris pedum decem confectos eſſe ab aliquo pedes — 4, illud ita oportet intelligatur, ut conficere debeat pedes quatuordecim, quò ad præfixam perveniat metam.

Hac igitur ratione in Geometria, ubi quan-

quantitates per longitudines linearum deſignantur, ſi linea verſus plagam aliquam ducta, habeatur tamquam poſitiva, erit negativa, quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Ut ſi ab eodem puncto A ducatur verſus dextram recta li-



nea AB, & verſus ſiniſtram recta linea AC; poſito, quod prior AB ſit poſitiva, altera AC pro negativa habenda erit. Atque hac ratione, lineas negativas minuere valorem poſitivarum, perſpicuum quidem eſt. Nam quemadmodum lineæ poſitivæ DA addendo lineam ſimiliter poſitivam AB, conficitur DB, major quidem, quàm DA; ita ſi eidem lineæ poſitivæ DA addatur linea negativa AC, conficietur DC minor quidem, quàm DA. Quin etiam ſicuti clarè liquet, lineam poſitivam DA per appoſitionem negativæ AC omnino in nihilum redigi, ſi fuerit AC æqualis ipſi DA; ita liquidò patet, eandem lineam poſitivam DA per appoſitionem ejuſdem lineæ negativæ AC negativam evadere, ſi fuerit AC major quidem, quàm DA.

Eadem ratione in Arithmetica, ubi quan-

quantitates per numeros exprimuntur, quemadmodũ numeri, qui à zero progrediuntur, dicuntur poſitivi: ita dicẽdi ſunt negativi, qui viciſſim à zero regrediuntur. Unde, quia iſte numerorum à zero regreſſus omnino opponitur progreſſui, manifeſtum eſt etiam, numeros negativos, additos numeris poſitivis, eorum valorem minuere debere: proindeque expreſſio iſta $7 - 5$ non ampliùs valere debet, quàm 2. Atque hac ratione perſpicuum eſt quoque, numeros poſitivos per negativorum additionem poſſe omnino in nihilum redigi, ſi ſcilicet numeri negativi æquales fuerint poſitivis; quin etiam in negativos abire, ſi viciſſim negativi majores fuerint poſitivis.

Sed qua demum ratione numeri negativi poſſint eſſe perinde reales, ac poſitivi, ſcio equidem non ita facilè concipi poſſe. Numerorum quippe ea videtur eſſe natura, ut omnes à zero progrediantur: proindeque tamquam omnino fictitii habendi ſunt numeri illi, qui viciſſim à zero regrediuntur. Et ſanè Veteres de Algebra ſcriptores, qui eam tantùm in numeris excolebant, in hac erant opinione, ut numeri negativi, utpote nihilo minores, eſſent falſi, ac planè fictitii; & proin-

proinde, ut indicio esset, problema propositum solutu impossibile esse, quum in ejus solutione hujusmodi occurrent numeri: qua in re numerorum naturam, ac indolem videntur non rectè intellexisse.

Numeri quippe dupliciter considerari possunt, vel scilicet in abstracto, quatenus in ideis nostræ mentis existunt; vel in concreto, quatenus rebus physicis, ac realibus designandis applicantur. Priori modo, non solùm nulli sunt numeri negativi, sed neque etiam ulli numeri fracti; quia sicuti in ideis nostræ mentis omnes numeri à zero progrediuntur, sic & quilibet numerus est major unitate, utpote quæ velut principium omnis numeri concipitur. At si secundo modo considerentur, quemadmodum, præter numeros integros, distinguuntur etiam numeri fracti, quippe qui sunt una, vel plures partes illarum, in quas dividitur totum, quod unitas repræsentat; ita quoque, præter numeros positivos, distinguendi sunt etiam numeri negativi, ut scilicet per eos designetur hypothesis contraria ei, quam designant numeri positivi.

Jam dici nequit, Veteres Algebristas id-

idcirco numeros negativos pro falsis, ac planè fictitiis habuisse, quia numeros consideraverint in abstracto, & non in concreto; quandoquidem eadem ratione à contemplatione numerorum fractos etiam rejicere debuissent. Quocirca quum veriti non fuerint, numeros in integros, & fractos dispescere; fatendum est, eos considerasse numeros in concreto, & non in abstracto; nec proinde culpâ vacare, quod negativorum numerorum realitatem non agnoverint. Sunt itaque numeri negativi perinde reales, ac positivi; & omne discrimen inter eos in eo consistit, quod per numeros negativos designetur rerum realium status, sive hypothesis una; per numeros negativos earumdem rerum status, sive hypothesis contraria.

Ex hac autem quantitatum positivarum, & negativarum idea regulæ additionis, & subtractionis, nempe quod additio fieri debeat iisdem signis, subtractio signis omnino mutatis prono alveo profluunt. Nam quemadmodum additione positivi positivum quidem augetur, negativum verò minuitur; ita vicissim additione negativi, augetur quidem negativum, sed minuitur positivum.

Et

Et similiter sicuti subtractione positivi, positivum minuitur, negativum augetur; ita subtractione negativi, positivum augetur, negativum verò minuitur. Sed exinde non obscurè colligi quoque possint regulæ multiplicationis, & divisionis: nempe, quod productum, vel quotiens tunc demum affici debeant signo —, quùm quantitates ad multiplicandum, vel dividendum propositæ contrariis signis afficiuntur.

Vera etenim multiplicationis idea hæc est, ut quantitas multiplicanda toties collocari debeat in statu, à multiplicatore designato, quot partes continet ipse multiplicator: adeo, ut quantitas illa, quæ vices gerit multiplicatoris, non solùm ostendat, quoties multiplicanda quantitas sumi debeat, verùm etiam in quo statu sit collocanda. Et similiter vera notio divisionis est, ut quantitatis dividendæ ea pars collocari debeat in statu, designato à divisore, quam divisor ipse denominat: adeò, ut quantitas illa, quæ locum tenet divisoris, non solùm indicet, quæ pars ex quantitate dividenda sumi debeat, verùm etiam in quo statu pars illa sit reponenda. Quocirca quia in utraque operatione status iste intelligi debet in or-

ordine ad eum, in quo jam reperitur; si utique quantitas sit negativa, eademque reponi debeat in statu negativo, reponenda erit in statu, qui sit negativus negativi, hoc est in statu positivo: & proinde id, quod oritur ex multiplicatione, vel divisione duarum quantitatum negativarum, erit positivum, & non negativum.

II.

Quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, impossibilitas ostenditur.

NAtura quantitatum positivarum, & negativarum paulò clariùs explicata, haud difficile modò erit, ostendere impossibilitatem earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ. Hunc in finem præmittendum est primò, radicum extractiones perfici posse, inveniendo inter duas datas quantitates unam, aut plures medias proportionales: nempe unam, quum extrahenda est radix quadrata; duas, quum extrahenda est radix cubica; tres, quum quæritur radix quadrato-quadrata; atque ita deinceps. Quod ne Tyrones nostros offendat, illud hìc ostendere non gravabimur.

Et primò quidem in extractione radicis quadratæ notum est, talem inveniendam esse quantitatem, ut quadratum ejus quantitatem propositam producat. Itaque, si ab sit data quantitas, extrahetur ex illa quadrata radix, si hujusmodi inveniatur quantitas, ut ex multiplicatione ejus in se ipsam oriatur quantitas data ab. Jam verò, si x sit media proportionalis inter a, & b, quadratum termini medii x æquale erit ei, quod ex extremorum a, & b multiplicatione producitur. Quare extrahetur ex ab quadrata radix, si inveniatur media proportionalis inter quantitates a, & b, ex quarum mutua multiplicatione producitur data quantitas ab.

Secundò in extractione radicis cubicæ perspicuum est, talem inveniendam esse quantitatem, ut cubus ejus quantitatem propositam producat. Quocirca, si a^2b sit data quantitas, extrahetur ex illa radix cubica, si talis inveniatur quantitas, ut multiplicando eam bis in se ipsam, oriatur data quantitas a^2b. Jam verò, si x sit prima ex duabus mediis proportionalibus inter a, & b, & y secunda; erit a^2 ad x^2, ut a ad y, sive ut x ad b; & propterea x^3, hoc est cubus ipsius x æqualis ei, quod producitur, multiplicando a^2 per b. Itaque extrahetur ex a^2b cubica radix, si capiatur prima ex duabus mediis proportionalibus inter a, & b.

Tertiò in extractione radicis quadrato-quadratæ talem oportet quantitatem invenire, ut ejus quadrato-quadratum quantitatem propositam restituat. Itaque, si a^3b sit data quantitas, extrahetur ex illa radix quadrato-quadrata, si hujusmodi inveniatur quantitas, ut multiplicando eam ter in se ipsam, oriatur data quantitas a^3b. Jam verò, si ex tribus mediis proportionalibus inter a, & b, x sit prima, y secunda, & z tertia; a^3 erit ad x^3, ut a ad z, sive ut x ad b; & propterea x^4, hoc est quadrato-quadratum ipsius x, æquale erit ei, quod gignitur, multiplicando a^3 per b. Quare extrahetur ex a^3b radix quadrato-quadrata, si capiatur prima ex tribus mediis proportionalibus inter a, & b.

Non dissimiliter ostendetur, inveniendas esse quatuor medias proportionales in extractione radicis quintæ, quinque in extractione radicis sextæ, sex in extractione radicis septimæ, atque ita deinceps. Pendent autem hæc omnia generaliter ex hoc theoremate; quod si fuerint quotcumque quantitates continuè proportionales, ea secundæ potestas, quam designat numerus omnium una dempta, æqualis sit ei, quod producitur, multiplicando potestatem primæ proximè minorem per ultimam. Ut si fuerint, exempli causa, decem quantitates continuè proportionales, nona potestas secundæ æqualis sit ei, quod oritur, multiplicando octavam potestatem primæ per ultimam.

Jam, quum problemata de radicibus extrahendis non differant ab iis, in quibus unam, aut plures medias proportionales inter duas datas quantitates oportet invenire; non alia meliori ratione ostendi poterit impossibilitas earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, quàm ostendendo inter quantitatem positivam, & negativam posse quidem duas, quatuor, aut sex medias proportionales inveniri; sed non item unam, tres, aut quinque. Oriuntur etenim quantitates imaginariæ, quum radices sunt extrahendæ ex quantitatibus negativis, quæ considerātur tamquam potestates numeri paris. Itaque, quia in extrahendis radicibus, quæ ad has potestates referuntur, inveniendæ sunt una, tres, aut quinque mediæ proportionales; ostendetur, radices illas

illas extrahi non posse, quum quantitates sunt negativæ, si utique ostendi possit inter quantitatem positivam, & negativam unam, tres, aut quinque medias proportionales nequaquam posse reperiri.

Ad hoc autem ostendendum necesse est, certum statuere criterium, quo mediante nullo negotio cognosci possit, num quatuor quantitates sint proportionales, necne. Neque enim ea, quæ passim afferuntur, possunt huic rei ostendendæ usui nobis esse; quippe quæ supponunt omnia, quantitates, quæ inter se mutuò comparantur, esse unius ejusdemque generis, sive status, hoc est, vel omnes positivas, vel omnes negativas. Oportet igitur, ut aliud statuamus criterium, quod certissimum, & evidentissimum, etiam ad quantitates diversi status se extendat: quod quum hactenus non modo à nemine, quem sciam, sit tentatū, sed neq; etiam ab ullo somniatum; hinc factum, ut doctrina ista semper difficultatibus, iisque gravissimis, fuerit involuta.

Et quidem quia vera notio proportionis hæc est, ut tunc quidem dicendæ sint proportionales quatuor magnitudines, sive quantitates, quotiescumque antecedentes respectu suorum consequentium eadem lege progrediuntur ; non aliud tamquam criterium certum proportionis statui poterit, quàm ut dicamus, proportionales esse quatuor quantitates, quotiescumque quicquid efficitur ab uno antecedentium, ut consequentem suum adæquet, id omne fieri debeat ab alio antecedente, ut adæquet quoque suum consequentem. Atque hoc quidem criterium adeo certissimum, & evidentissimum mihi videtur, ut crediderim obscurari potius, quàm illustrari, si fusiori oratione veritatem ejus ostendere vellem ; quippe quod ex ipsa proportionis idea sponte sua consequitur.

Hujus itaque criterii ope discimus primò, quatuor quantitates 2, 6, — 4, — 12 proportionales esse ; quia sicuti antecedens 2 sumi debet ter in statu suo, quò consequentem, ad quem refertur, adæquet ; ita antecedens alter — 4 sumendus est etiam ter in statu suo, quo possit suum similiter consequentem adæquare. Discimus secundò proportionales esse etiam, tam quantitates 2, — 6, 4, — 12, quàm quantitates — 2, 6, — 4, 12 ; quia in utraque analogia sicuti antecedens unus sumi debet ter in statu contrario, ut consequentem suum adæquet; ita antecedens alter sumendus est ter in statu contrario, quo suum etiam consequentem adæquet. Atque ita quoque discimus tertiò proportionales esse, tam quantitates 2, — 6, — 4, 12, quàm quantitates — 2, 6, 4, — 12; quandoquidem in utraq; proportione ambo antecedentes sumi debent ter in statu contrario, quo suos possint consequentes adæquare.

Discimus, inquam, uno verbo illius criterii ope, quod si quatuor quantitates proportionales fuerint, qua quantitates, proportio earum non perturbetur, si duæ sumantur unius status, & aliæ quævis duæ status oppositi. Sed ejusdem criterii ope discimus quoque, proportionem quatuor quantitatum alterari, si tres quidem sumantur unius status, & quarta status contrarii. Neque enim subsistit hæc analogia, ut 2 ad 6, ita 4 ad — 12, multòque minùs hæc alia, ut — 2 ad — 6, ita — 4 ad 12 ; quandoquidem in utraque antecedens unus sumi debet ter in statu suo, quo suum consequentem adæquet ; quum tamen antecedens alter sumendus est ter in statu contrario, quo suum similiter consequentem possit adæquare.

Subſiſtit itaque proportio inter quantitates diverſi ſtatus, ſi ſervantes legem proportionis, qua quantitates, duæ fuerint unius ſtatus, & aliæ duæ ſtatus contrarii. Unde modò ſponte ſua conſequitur, inter quantitatem poſitivam, & negativam poſſe quidem duas, quatuor, aut ſex medias proportionales inveniri, ſed non item unam, tres, aut quinque; atque adeo radices extrahi quidem poſſe ex poteſtatibus negativis numeri imparis, ſed non item ex poteſtatibus negativis numeri paris. Nam, quotieſcumque inter quantitatem poſitivam, & negativam duæ mediæ proportionales proponuntur inveniendæ, poterit illarum una eſſe negativa, altera poſitiva; ac propterea inter quantitates diverſi ſtatus proportio conſiſtere. Sed, quum una tantùm media proportionalis proponitur invenienda, quia ea eſſe debet, vel poſitiva, vel negativa; jam ex quatuor terminis tres erunt unius ſtatus, & quartus ſtatus contrarii; nec proinde inter eos ulla poterit eſſe proportio.

Ut ſi velim, exempli cauſa, inter quantitatem poſitivam 2, & quantitatem negativam — 16 duas medias proportionales invenire, earum una erit — 4, al-

altera 8. Nam ſicuti prima, ut conficiat ſecundã, ſumi debet bis in ſtatu contrario; ita ſecunda, ut conficiat tertiam, & tertia, ut conficiat quartam, ſumendæ ſunt etiam bis in ſtatu oppoſito ei, in quo jam reperiuntur. Sed, ſi inter quantitatem poſitivam 2, & quantitatem negativam — 8 quæratur una tantùm media proportionalis, ea exhiberi non poterit. Nam vel aſſumitur poſitiva 4; & prima quidem ſumi debet bis in ſtatu ſuo, ut conficiat ſecundam; ſecunda verò bis in ſtatu oppoſito, ut conficiat tertiam. Vel aſſumitur negativa — 4; & viciſſim prima ſumenda erit bis in ſtatu contrario, quo ſecundam adæquet; ſecunda verò bis in ſtatu ſuo, quo poſſit tertiam adæquare.

Eadem omnino ratione oſtendetur quoque, inter quantitatem poſitivam, & negativam poſſe quidem quatuor, ſex, aut octo medias proportionales inveniri, ſed non item tres, quinque, aut ſeptem. Atque hac ratione jam ex proprio ſuo fonte impoſſibilitas earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, deducta mihi videtur. Interim nolim hìc reticere, impoſſibilitatem iſtam in eo tantùm conſiſtere, quod quantitates illæ, nec poſſint eſſe

esse positivæ, nec negativæ; sed non hinc eas omnino fictitias dixerim. Nam asseverare non vereor, tertium quendam statum fingi posse, qui sit medius inter positivum, & negativum, & in quo quantitates illæ sint reponendæ. Quin imò in Geometria spes pulcherrima me fovet, quod sicuti quantitates positivæ, & negativæ explicantur per lineas, ad plagas oppositas tendentes; sic & quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, explicari possint per lineas, quæ ad plagas intermedias tendant.

Cæterùm, quum quantitates negativæ sint perinde reales, ac positivæ; illud exinde colligi poterit, quantitatem negativam — 4 esse minorem quantitate positiva 2 ratione status; sed maiorem ratione quantitatis. Unde modò facilè intelligi potest, qua ratione dici possit 2 esse ad — 4, ut — 5 ad 10, & tamen vera esse Euclidea Propositio, quod si quatuor quantitates proportionales fuerint, secunda quartâ sit major, minor, vel æqualis, perinde ac prima tertiâ est major, minor, vel æqualis. Consideravit etenim Euclides in illa propositione excessum, defectum, vel æqualitatem, quæ oritur ex propria cujusque termini quan-

quantitate: & profectò verum est dicere, quod sicuti ratione quantitatis primus terminus 2 est minor tertio — 4, ita secundus — 5 minor sit quarto 10.

III.

Calculus quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, exponitur.

ETsi quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, saltem in statu positivo, & negativo, verè, ac realiter non existant, sed tantùm fingi possint, ac imaginari; quia tamen in resolutione problematum sæpe sæpiùs nobis occurrunt, contingere quandoque potest, ut eæ etiam ad calculum poni debeant. Quocirca, ne aliquid prætermittamus, quod ad quantitatum calculum pertinere videatur, illud nunc ostendemus, qua ratione quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, calculus perfici possit. Sed hac in re non multum morabimur. Nam, quum hujuscemodi quantitates exprimantur ad instar radicalium, perficietur calculus ipsarum iisdem fermè regulis, quibus radicalium quantitatum calculus perficitur.

Itaque primò quantitates imaginariæ re-

reducuntur ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, collocando extra ſignum id omne, quod in iis eſt ſimul rationale, ac poſitivum: qua ratione quantitas imaginaria $\sqrt{-12}$ reducetur ad $2\sqrt{-3}$; & quantitas imaginaria $\sqrt{-4}$, reducta ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, fiet $2\sqrt{-1}$. Sed viciſſim quantitates, extra ſignum exiſtentes, ſub ſigno collocabuntur, elevando illas ad poteſtatem à ſigno denominatam, eaſdemque multiplicando per quantitates, quæ ſub ſigno reperiuntur: Qua ratione $3\sqrt{-2}$ erit idem, ac $\sqrt{-18}$; & $2\sqrt{-5}$ idem erit, ac $\sqrt{-20}$.

Secundò, quantitates imaginariæ adduntur in unum, conjungendo ſimul coefficientes ipſarum, quotieſcumque reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, eandem habent ſub radicali ſigno quantitatem. Sic ſumma ex quantitatibus imaginariis $2\sqrt{-2}$, & $3\sqrt{-2}$ erit $5\sqrt{-2}$; & ſimiliter ſumma ex quantitatibus imaginariis $3\sqrt{-1}$, & $4\sqrt{-1}$, erit $7\sqrt{-1}$. Sed ſi ad ſimpliciores ſuos terminos reductæ, diverſas habeant ſub radicali ſigno quantitates; tunc fiet additio, conjungendo eas ſigno $+$. Qua ratione ſumma ex quantitatibus imaginariis $2\sqrt{-3}$, & $3\sqrt{-2}$, erit $2\sqrt{-3} + 3\sqrt{-2}$.

Ter-

Tertiò, quantitates imaginariæ ſubtrahuntur à ſe mutuò, ſubducendo coefficientem unius à coefficiente alterius, quotieſcumque reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, eandem habent quantitatem ſub ſigno radicali. Sic reſiduum, quod oritur, ſubtrahendo $2\sqrt{-2}$ ex $5\sqrt{-2}$, erit $3\sqrt{-2}$; & ſimiliter reſiduum, quod naſcitur, ſubducendo $3\sqrt{-1}$ ex $7\sqrt{-1}$, erit $4\sqrt{-1}$. Sed ſi ad ſimpliciores ſuos terminos reductæ, habeant ſub radicali ſigno diverſas quantitates; tunc non aliter quantitatum ſubtractio fieri poterit, quàm conjungendo eas ſigno $-$. Qua ratione id, quod relinquitur, quum ſubtrahitur $2\sqrt{-3}$ ex $3\sqrt{-2}$, erit $3\sqrt{-2} - 2\sqrt{-3}$.

Quartò, ſi additio, vel ſubtractio fieri debeat inter quantitatem unam realem, & quantitatem alteram imaginariam; tunc non alia ratione inſtituenda, quàm adhibito ſigno $+$, vel $-$. Sic ad addendum 3 cum $\sqrt{-3}$, ſcribendum eſt $3 + \sqrt{-3}$; pariterque ad addendum $\sqrt{6}$ cum $\sqrt{-3}$, ſcribi debet $\sqrt{6} + \sqrt{-3}$. Atque ita quoq; ad ſubtrahendum $\sqrt{-3}$ ex 5, ſcribendum eſt $5 - \sqrt{-3}$; & $\sqrt{6} - \sqrt{-3}$, ad ſubtrahendum $\sqrt{-3}$

ex

ex $\surd 6$, Neque refert, quotiescumque quantitas realis est radicalis, quod illa eandem habeat quantitatem sub signo radicali, ac quantitas imaginaria. Nam adhuc ad addendum $\surd -3$ cum $\surd 3$, scribendum est $\surd 3 + \surd -3$; & ad subtrahendum $\surd -3$ ex $\surd 3$, scribi debet $\surd 3 - \surd -3$.

Quintò, quantitates imaginariæ multiplicari possunt per se mutuò absque eo, quod ad simpliciores suos terminos revocentur; quum sufficiat, ad invicem multiplicare quantitates ipsas, sub signis existentes, & producto idem radicale signum præfigere. Qua ratione productum, quod oritur, multiplicando $\surd -2$ per $\surd -3$, erit $\surd 6$; & similiter id, quod gignitur, multiplicando $\surd -5$ per $\surd -6$, erit $\surd 30$. Ex quo patet, productum ex duabus quibusvis quantitatibus imaginariis esse quantitatem aliam realem, & non quidem imaginariam. Sed si multiplicari debeat $\surd 3$ per $\surd -6$, productum erit $\surd -18$; & similiter, quia 2 est idē, ac $\surd 4$, multiplicando 2 per $\surd -3$, producetur $\surd -12$.

Sextò, quantitates imaginariæ dividi quoque possunt per se mutuò, absque eo, quod ad simpliciores suas expressiones reducantur;

quum similiter satis sit, ad invicem dividere quantitates ipsas, sub signis existentes, & quotienti idem radicale signum præfigere. Qua ratione quotiens, qui oritur, dividendo $\surd -12$ per $\surd -2$, erit $\surd 6$; pariterque id, quod producitur, dividendo $\surd -18$ per $\surd -6$, erit $\surd 3$. Ex quo patet, quotientem, qui oritur ex divisione duarum quantitatum imaginariarum, esse quantitatem aliam realem, & non quidem imaginariam. Sed si dividere oporteat $\surd 12$ per $\surd -6$, vel etiam $\surd -12$ per $\surd 6$ quotiens erit $\surd -2$; & similiter quia 2 idem est, ac $\surd 4$, dividendo $\surd -12$ per 2, quotiens fiet $\surd -3$.

Septimò, ad elevandas quantitates imaginarias ad datam quamcumque potestatem neque etiam necesse est, ad simpliciores suos terminos eas revocare; quum sufficiat, ad potestatem illam attollere quantitates ipsas, sub signo existentes, iisque idem radicale signum præfigere. Qua ratione quadratum ex $\surd -3$, erit $\surd 9$, hoc est 3, vel etiam -3; & cubus ex $\surd -3$ erit $\surd -27$. Pariterque quadratum ex $\surd -2$ erit $\surd 4$, hoc est 2, vel etiam -2; & cubus ex $\surd -2$ erit $\surd -8$. Unde patet, quantitatum imagiginariarum poteſtates quidem numeri paris eſſe quantitates veras, ac reales; poteſtates verò numeri imparis eſſe quantitates ſimiliter imaginarias.

Denique, ad extrahendas radices ex quantitatibus imaginariis, neque etiam ullâ opus eſt earum ad ſimpliciores ſuos terminos reductione; quum ſatis ſit, illas extrahere ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus, iiſque idem radicale ſignum præfigere; vel etiam, ſi quantitates, ſub ſigno exiſtentes, radices illas non admittant, multiplicare indicem ſigni radicalis per indicem quæſitæ radicis. Qua ratione radix cubica quantitatis imaginariæ $\sqrt{-8}$ erit $\sqrt{-2}$; ſed radix cubica quantitatis imaginariæ $\sqrt{-6}$ erit $\sqrt[6]{-6}$. Atque ita quoq; quadrata radix ex quantitate imaginaria $\sqrt{-9}$ erit $\sqrt[4]{-9}$; quum radix illa ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, velut negativâ, extrahi non poſsit.

Sed qua ratione $\sqrt[4]{-9}$ poſsit eſſe quadrata radix quantitatis imaginariæ $\sqrt{-9}$, non ita facile intelliget, qui paulò ante didicerit, quantitatum imaginariarum poteſtates numeri paris eſſe quantitates veras, ac reales. Sic enim quadratum ex $\sqrt[4]{-9}$ erit ſimul realis, & imaginaria; realis inquam, quia ex regula, ſuperiùs tradita, eſſe debet $\sqrt[4]{81}$; imaginaria verò, quia multiplicando $\sqrt[4]{-9}$, per ſe ipſam, neceſſe eſt, ut producatur $\sqrt{-9}$, cujus quadratam radicem quantitas illa repræſentat. Sed antinomiam iſtam nullo negotio componemus, ſi recordemur eorum, quæ ſuperiùs dicta ſunt: nimirum poteſtates poſitivas numeri paris duas radices habere, unam nempe poſitivam, & alteram negativam. Sic enim quadrata radix numeri 81 erit tam 9, quàm -9; atque adeo $\sqrt[4]{81}$, erit non modò $\sqrt{9}$, verùm etiam $\sqrt{-9}$.

Jam in harum quantitatum calculo expediendo illud requiritur, ut eæ ſint ejuſdem denominationis, ſive idem habeant ſignum radicale. Quocirca ſi quantitates offerantur denominationis diverſæ, neceſſe eſt priùs ad eandem denominationem illas reducere. Reducuntur autem quantitates imaginariæ ad eandem denominationem eodem planè artificio, quo fit hujuſmodi reductio in quantitatibus radicalibus, quæ ſunt veræ, ac reales. Qua ratione quantitates imaginariæ $\sqrt[4]{-2}$, & $\sqrt{-3}$, reductæ ad eandem denominationem erunt $\sqrt[4]{-2}$, & $\sqrt[4]{9}$;

pariterque ſi quantitas imaginaria $\sqrt{-3}$ reducenda ſit ad eandem denominationem cum quantitate reali $\sqrt[3]{7}$, erit una $\sqrt[6]{-27}$, altera $\sqrt[6]{49}$.

Quod ſi quantitates imaginariæ quantitatibus aliis adhæreant, ſive realibus, ſive etiam imaginariis; earum calculus fiet quoque eadem omnino ratione, ac calculus radicalium compoſitarum. Ita ſumma ex $5 + \sqrt{-18}$, & $3 - \sqrt{-50}$ erit $8 - \sqrt{-8}$; & reſiduum, quod oritur, ſubtrahendo $4 - \sqrt{-54}$ ex $10 + \sqrt{-24}$, erit $6 + \sqrt{-150}$. Pariterque id, quod producitur, multiplicando $2 + \sqrt{-2}$ per $2 - \sqrt{-3}$, erit $4 - 2\sqrt{-3} + 2\sqrt{-2} - \sqrt{6}$; & id, quod gignitur, dividendo $\sqrt{6} + \sqrt{-9} - \sqrt{-10} - \sqrt{-15}$ per $\sqrt{2} + \sqrt{-3}$, erit $\sqrt{3} - \sqrt{-5}$. Atque ita quoque quadratum ex $\sqrt{5} + \sqrt{-3}$, erit $2 + \sqrt{-60}$; & quadrata radix binomii $1 + \sqrt{-24}$ erit $\sqrt{3} + \sqrt{-2}$.

Interim in calculo harum quantitatum illud ſedulò notandum exiſtimo, quod tametſi, multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-3}$, producatur quantitas realis $\sqrt{9}$, quæ poteſt eſſe vel 3, vel etiam -3; hìc tamen quantitas illa ſumenda ſit ſemper negativa, & non poſitiva: adeo, ut productum

ctum ex $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-3}$ debeat eſſe -3, & non quidem 3. Id autem ipſa quantitatum imaginariarum geneſis ſuadet. Nam hujuſmodi quantitates oriuntur, extrahendo radicem, exempli gratia, quadratam ex quantitatibus negativis. Quocirca neceſſe eſt, ut quadrata ipſarum quantitates producant negativas, & non poſitivas.

Hac igitur ratione quadratum ex $\sqrt{5} + \sqrt{-3}$ erit $2 + \sqrt{-60}$, & non $8 + \sqrt{-60}$, quia ſcilicet quadratum partis imaginariæ $\sqrt{-3}$ eſt quantitas negativa -3, & non jam quantitas poſitiva 3. Atque hoc non ſolùm locum habet, quum quantitates, quæ ad invicem multiplicantur, inter ſe ſunt æquales, hoc eſt, quum alicujus quantitatis imaginariæ quadratum quæritur; verùm etiam quum quantitates, ad multiplicandum propoſitæ, fuerint inæquales. Ita multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-12}$ producitur quantitas realis $\sqrt{36}$, quæ etſi poſſit eſſe tam 6, quàm -6, nihilominus, veluti orta ex duabus quantitatibus imaginariis, per ſe mutuò multiplicatis, negativa tantùm ſumi debet.

Atque hinc modò, ſi multiplicari debeat $\sqrt{-3}$ per $-\sqrt{-3}$, productum erit

erit quantitas positiva 3. Nam quantitates, ad multiplicandum propositæ, contrariis signis afficiuntur: proindeque productum, quod inde oritur, juxta regulas signorum, sumi debet negativum, & non positivum. Itaque, quia id, quod producitur ex multiplicatione illarum quantitatum, est quantitas negativa -3, & negativum negativi est positivum; erit productum propositæ multiplicationis quantitas positiva 3. Atque ita quoque erit 6 id, quod producitur, multiplicando, vel $\sqrt{-3}$ per $-\sqrt{-12}$, vel etiam $-\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-12}$.

Et quoniam divisio destruit id, quod componit multiplicatio, perspicuum est quoque, quod sicuti multiplicando $\sqrt{-3}$ per $-\sqrt{-3}$, producitur quantitas realis positiva 3; ita dividendo 3 per $\sqrt{-3}$, produci debeat $-\sqrt{-3}$. Atque ita quoque, quemadmodum productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{-12}$ per $-\sqrt{-3}$ est quantitas realis positiva 6; ita quotiens, qui gignitur, dividendo 6 per $\sqrt{-12}$ debeat esse $-\sqrt{-3}$.

Alia

IV.

Alia quædam de quantitatibus imaginariis afferuntur.

Ex calculo mox tradito quantitatum imaginariarum, perspicuum est, quantitates imaginarias non aliter quantitatibus realibus opponi, quàm negativæ positivis. Nam primò, quemadmodum multiplicando, aut dividendo quantitatem positivam per quantitatem negativam, producitur quantitas alia similiter negativa; ita multiplicando, aut dividendo quantitatem realem per quantitatem imaginariam producitur quantitas alia similiter imaginaria. Et secundò sicuti productum, vel quotiens, qui oritur ex duabus quantitatibus negativis, per se mutuò multiplicatis, vel divisis, est quantitas positiva; ita id, quod producitur ex multiplicatione, aut divisione duarum quantitatum imaginariarum est quantitas, non quidem imaginaria, sed realis.

Verum quidem est, id non adhuc vel saltem omnibus omnino Algebristis innotuisse, productum, vel quotientem ex mul-

multiplicatione, vel divisione duarum quantitatum imaginariarum esse quantitatem aliam veram, ac realem; quum non desint, qui in suis Algebræ Elementis doceant, quantitates duas imaginarias, per se mutuò multiplicatas, vel divisas, quantitatem aliam imaginariam producere. Sed eos in maximo errore versari, ostendi potest, tum quia ex ipsa genesi quantitatum imaginariarum notum est, productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-3}$, esse quantitatem realem -3; tum etiam, quia in confesso est apud omnes, idem esse, ex producto, vel quotiente duorum quadratorum quadratam radicem elicere, quam ipsas eorum quadratorum radices per se mutuò multiplicare, vel dividere.

Jam, quum quantitates imaginariæ perinde realibus opponantur, ac quantitates negativæ positivis; eò magis ad credendum adducor, quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, non esse absolutè impossibiles, sed tantùm, quia in statu negativarum, vel positivarum concipi non possunt. Oppositio namque, quæ est inter quantitates positivas, & negativas, nihil obstat, quominùs negativæ sint perinde reales, ac positivæ. Itaque eadem ra-

ratione, tametsi quantitates, quæ vocantur imaginariæ, opponantur iis, quæ vulgò dicuntur reales; non hinc tamen colligi potest, quantitates, imaginarias dictas, absolutè impossibiles esse; sed tantùm inferre licet, quod sicuti quantitates negativæ sunt impossibiles in statu positivarum, ita quantitates imaginariæ impossibilitatem involvant in utroque eorum statuum, in quibus reales quantitates considerantur.

Atque hinc eò magis etiam in mea illa opinione me confirmo, quod in Geometria sicuti quantitates positivæ designantur per lineas, tendentes ad plagam unam, & negativæ per lineas, tendentes ad plagam oppositam; ita quantitates imaginariæ designari debeant per lineas, quæ ad plagas intermedias diriguntur. Nam linea, quæ plagas istas ostendit, secat ad rectos angulos lineam, priores duas plagas ostendentem: ex quo fit, ut unæ aliis oppponantur ex diametro. Quocirca lineæ, tēdentes ad plagas illas intermedias, designare debent quantitates contrarias iis, quas designant lineæ, tendentes ad plagas alias: proindeque, quia istæ lineæ designant quantitates, quæ vulgò dicuntur reales, eæ non alias poterunt designa-

 re,

re, quàm ipsas illas, quæ vulgò vocantur imaginariæ.

Huc accedit & altera ratio, quæ forsan demonstrationis vices geret apud eos, qui probè norint, quàm benè Algebra cũ Geometria consentiat: nimirum, quod sicuti quantitatum, quæ dicuntur vulgò reales, aliæ sunt positivæ, aliæ negativæ; ita quantitates, quæ vocantur imaginariæ, non modò esse possint positivæ, verùm etiam negativæ. Sic radix quadrata quantitatis negativæ $-a$ designari potest tam per $\sqrt{-a}$, quàm per $-\sqrt{-a}$, quia scilicet, juxta regulas signorum, utriusque quadratum est $-a$. Itaque, quia plagæ illæ intermediæ opponuntur etiam inter se: profectò per lineas, tendentes ad unam illarum, designari poterunt quantitates imaginariæ positivæ; per eas verò, quæ tendunt ad plagam alteram, quantitates imaginariæ negativæ poterunt denotari.

Quæ quidem si ita vera sint, quemadmodum maximam verisimilitudinis speciei præseferre videntur, illud ex iis mihi videtur colligi posse, inter quantitates, qua quantitates, nullam contrarietatem reperiri; quum omnes sint nihilo majores, omnes æquè reales, ac veræ, sed

sed omnem oppositionem oriri ex eo, quod unæ concipi debeant in statu uno, & aliæ in statu contrario: indeque ortas eas quantitatum distinctiones, quod aliæ sint positivæ, sive nihilo majores, aliæ negativæ, sive nihilo minores; quodque etiam quædam sint reales, sivæ verè, ac realiter existentes, quædam imaginariæ, hoc est, quæ tantùm fingi possunt, ac imaginari.

Hunc autem diversum statum nihil obstare, quominùs positivæ cum negativis, reales cum imaginariis comparentur, non est, quod in dubium possit revocari. Nam etsi quantitates, quæ comparantur inter se, Euclide ipso docente, debeant esse unius, ejusdemque generis; attamen tales sunt censendæ non quidem ratione status, in quo considerantur, sed ratione ejus, per quod quantitatis nomen merentur: adeò, ut, nec linea cum superficie, nec superficies cum corpore possit comparari, quia scilicet diversa ratione quantitates appellantur. Unde quum quantitates negativæ non sint diversi generis à positivis propter solam negationem, falluntur ii, qui falli eos arbitrantur, quod dicant 1 esse ad -1, ut -1 ad 1.

Interim etsi solus status diversus non effi-

efficiat, ut quantitates dici debeant diversi generis; non hinc tamen negamus, diversum illum statum etiam attendendum esse, quò quatuor quantitates dici debeant proportionales. Vera etenim proportionis idea, ut superiùs vidimus, hæc est, ut tunc quidem dicendæ sint proportionales quatuor quantitates, quotiescumque quicquid efficitur à prima, ut secundam adæquæt, illud idem fieri debet à tertia, ut possit quartam adæquare. Unde quatuor quãtitates non solùm tales esse debent, ut prima perinde contineat secundam, ac tertia continet quartam; verùm etiam, ut status primæ ad statum secundæ perinde se habeat, ac status tertiæ ad statum quartæ.

Sed jam me tædet, de hac re multa scripsisse. Itaque, ut huic capiti finem imponam, illud superest ostendendum, quòd in extractione radicis quadratæ ex binomiis superiùs dictum fuit: nimirum quod etsi perinde sit, sive scribatur $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, sive $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ pro radice quadrata binomii $8 - \sqrt{60}$; attamen non perinde sit, sive binomium propositum sit $8 - \sqrt{60}$, sive $\sqrt{60} - 8$; quum in primo casu radix sit realis, in secundo autem imaginaria: quod equidem non me-

liùs arbitror ostendi posse, quàm si eâdem illâ regulâ, superiùs traditâ, ex binomio $\sqrt{60} - 8$ quadratam radicem extrahamus.

Nimirum, quia quadratum termini radicalis est 60, quadratũ verò termini rationalis est 64; erit 4 eorum quadratorũ differentia, & 2 illius differentiæ quadrata radix. Quocirca, si radix ista 2 primò quidem addatur termino rationali -8, deinde verò ex eodẽ subducatur, erit -3 semissis summæ, & -5 semissis differentiæ: proindeque quadrata radix propositi binomii erit $\sqrt{-5} - \sqrt{-3}$, quam liquet imaginariam esse, quum ejus uterque terminus sit quantitas imaginaria, hoc est radix quantitatis negativæ.

Nec ulli dubium esse potest, quin quantitas ista $\sqrt{-5} - \sqrt{3}$ sit quadrata radix binomii $\sqrt{60} - 8$. Nam etsi multiplicatatâ eâ per se ipsam, juxta regulas signorum, producatur quantitas $-\sqrt{60} - 8$; attamen, quia quantitas realis $\sqrt{60}$, veluti orta ex duabus quantitatibus imaginariis, per se mutuò mutiplicatis, interpretanda est tamquam negativa; erit vicissim positiva ipsa quantitas $-\sqrt{60}$, nec proinde differet à $\sqrt{60}$, consideratâ tam-

tamquam positivâ: proindeque quadratum ex $\sqrt{-5} - \sqrt{-3}$ erit $\sqrt{60} - 8$, nimirum ipsum binomium propositum.

CAP. XI.

De quantitatibus indefinitè magnis, & parvis; ubi etiam de seriebus infinitis.

Quantitatis nomine id omne venit, quod plus, & minus suscipiens augeri, ac minui potest. Unde sicuti, quod minui ampliùs nequit, illud non quantum, sed nihil dici debet; ita vicissim quod nequit ampliùs augeri, neque etiam quantum, sed infinitum dici meretur.

Interim nihil obstat, quominùs quantitates ipsas inter se mutuò collatas distinguamus in indefinitè magnas, & indefinitè parvas. Si enim quantitas aliqua subinde augeri, aut minui intelligatur, ut ex illo incremento, aut decremento nullam patiatur sensibilem mutationem, sed adhuc velut in eodem statu manens rigore tantùm non geometrico possit considerari; tum hujusmodi incrementum, aut decrementum respectu illius quantitatis dici poterit quantitas indefinitè parva; & vicissim quantitas illa respectu ejus incrementi, vel decrementi quantitas indefinitè magna poterit appellari.

Atque hac ratione non modò quantitates in indefinitè magnas, & indefinitè parvas poterunt distingui; sed & ipsæ illæ quantitates, quæ in ordine ad quasdam dicuntur indefinitè parvæ, respectu aliarum, tamquam indefinitè magnæ, poterunt considerari. Nam si rursus quantitas aliqua, quæ in ordine alterius dicitur indefinitè parva, ita augeri, aut minui concipiatur, ut per illud incrementum, aut decrementum à statu suo sensibiliter non mutetur; jam quantitas illa respectu alterius hujus incrementi, aut decrementi, velut indefinitè magna, poterit haberi. Quumque eadem sit ratio, non solùm de novo isto incremento, vel decremento, sed de omnibus aliis, quæ ratione non dissimili considerantur; liquet contemplationem istam quantitatum indefinitè parvarum in infinitum posse promoveri.

Hinc non abs re erit, eas velut in certa genera distinctas considerare. Itaque si sumamus quantitatem aliquam finitam, ex cujus continuo incremento, vel decremenmento oriantur quantitates indefinitæ parvæ; dicemus respectu ejus infinitesimam primi generis, minimum illud incrementum, vel decrementum, quo intelligitur ipsa augeri vel minui; dicemus infinitesimam generis secundi, incrementum, vel decrementum illud minimum, quo intelligitur augeri, vel minui infinitesima generis primi; atque ita deinceps: proindeque eadem illa infinitesima, quæ respectu quantitatis finitæ est generis tertii, si consideretur in ordine ad infinitesimam primi generis, fiet generis secundi.

Jam ex tradita ista quantitatum infinitesimarum idea illud primò colligi potest, quod sicuti quantitates finitæ per aliarum quantitatum finitarum additionem, vel subtractionem augentur quidem, vel minuuntur, sed non item per additionem, vel subtractionem infinitesimarum; sic & ipsæ quantitates infinitesimæ tunc quidem additione, vel subtractione aliarum infinitesimarum augeantur, vel minuantur, quotiescumque sunt ejusdem generis, sed non item quum infinitesimæ, quæ iis adduntur, vel subtrahuntur, fuerint generis inferioris. Qua ratione duplum, aut triplum alicujus

cujus infinitesimæ non est ferè idem cum ipsa infinitesima; sed infinitesima alicujus generis, aucta, vel diminuta infinitesima generis inferioris, nihil obstat, quominùs pro ipsa infinitesima capiatur.

Colligi potest secundò infinitesimam alicujus generis, si aliquoties sumatur, adhuc in eodem genere manere, quod si verò sumatur infinities, in genus proximè superiùs abire: atque ita quoque, quamcumque alicujus infinitesimæ partem esse infinitesimam ejusdem generis, sed infinitesimam alicujus infinitesimæ esse infinitesimam generis proximè inferioris. Qua ratione multiplicando, vel dividendo infinitesimam aliquam per quamlibet quantitatem finitam, producetur infinitesima ejusdem generis; quia omnis quantitas finita nonnisi aliquoties continet unitatem. Sed si quælibet infinitesima multiplicetur, vel dividatur per infinitesimam generis primi, orietur infinitesima generis, vel proximè minoris, vel proximè majoris; quia infinitesima generis primi infinities continetur in unitate.

Et denique colligi potest, infinitesimam cujuscumque generis, sumptam infinifinities tantum in genus proximè superius verti, sed sumptam infinities infinities, in genus duplici gradu superius abire; atque ita continuò: & eadem ratione infinitesimam tantùm alicujus infinitesimæ esse infinitesimam generis proximè inferioris; sed infinitesimam infinitesimæ esse infinitesimam generis duplici gradu inferioris; atque ita deinceps. Qua ratione si data quævis infinitesima multiplicetur, vel dividatur per aliã quãvis infinitesimã, producetur infinitesima generis ab illa inferioris, vel superioris tot gradibus, quot ista distat à quantitate finita. Ut si, exempli gratia, infinitesima generis tertii multiplicetur per infinitesimam generis secundi, producetur infinitesima generis quinti; & si infinitesima generis sexti dividatur per infinitesimam generis quarti, quotiens orietur, infinitesima generis secundi.

Atque hinc liquet ulteriùs, infinitesimæ, quæ oriuntur ex multiplicatione, vel divisione aliarum infinitesimarum, non meliùs cognosci posse, ad quod genus sint revocandæ, quam adhibitis ipsis infinitesimarũ exponentibus; quandoquidem summa exponentium multiplicandi, & multiplicatoris dabit exponentem

tem producti; & exponens divisoris, subtractus ab exponente dividendi, relinquet exponentem quotientis. Ita infinitesima primi generis, multiplicata per infinitesimam secundi generis, producet infinitesimam generis tertii, quia $1 + 2$ est 3; & infinitesima secundi generis multiplicata per infinitesimam generis tertii, dabit infinitesimam generis quinti, quia $2 + 3$ est 5. Atque ita quoque id, quod producitur, dividendo infinitesimam generis quarti per infinitesimam generis tertii, erit infinitesima primi generis, quia $4 - 3$ est 1; & id, quod gignitur, dividendo infinitesimam noni generis per infinitesimam generis quarti, erit infinitesima quinti generis, quia $9 - 4$ est 5.

Et quoniam exponens quantitatis finitæ in ordine ad exponentes infinitesimarum est zero, sive nihilũ; perspicuum est, quod si infinitesima alicujus generis dividatur per infinitesimam generis ejusdem, quotiens debeat esse quantitas finita; quia facta exponentium subductione, nihil remanet. Sed si porrò dividatur infinitesima generis secundi per infinitesimam generis tertii, tunc orietur in quotiente infinitesima, cujus exponens erit -1; quia sci-

 li-

licet $2 - 3$ est idem, ac $- 1$. Et similiter si infinitesima generis tertii dividatur per infinitesimam generis quinti, quotiens prodibit infinitesima, cujus exponens erit $- 2$; quia $3 - 5$ est idem, ac $- 2$. Unde discimus, præter infinitesimas, quarum exponentes sunt positivi, dari infinitesimas alias, quarum exponentes sunt negativi.

Sed quæ sit natura illarum infinitesimarum, quarum exponentes sunt negativi, non ita difficile erit inquirere: nimirum, quum negativum opponatur semper positivo, profectò sicuti infinitesimæ, exponentes positivos habentes, designant quantitates indefinitè parvas; ita infinitesimæ, quæ habent exponentes negativos, designare debent quantitates indefinitè magnas. Nec mirum. Nam sicuti, descendendo à quantitate finita, varia infinitesimarum genera distingui possunt; ita viciſſim ascendendo, varia genera infinitorum poterunt considerari. Qua ratione quantitas, quæ sit ad quantitatem finitam, ut est quantitas finita ad infinitesimam primi generis, dicenda est quantitas infinita generis primi. Et similiter quantitas, quæ ita se habeat ad quantitatem finitam, ut est quantitas finita ad infinitesimam secundi generis, quantitas infinita generis secundi poterit appellari.

Itaque dividendo infinitesimam generis secundi per infinitesimam generis tertii, producetur quantitas infinita generis primi; & dividendo infinitesimam tertii generis per infinitesimam generis quinti, quotiens erit quantitas infinita generis secundi. Sed & ipsæ quantitates infinitæ poterũt eadem ratione, tam inter se, quàm cum ipsis infinitesimis multiplicari, ac dividi: si scilicet recordemur, exponentes ipsarum esse negativos, ad differentiam infinitesimarum, quarum exponentes sunt positivi. Sic quantitas infinita generis primi, multiplicata per infinitesimam generis secundi, dabit infinitesimam generis primi; divisa verò per eandem infinitesimam, producet quantitetem infinitam generis tertii. Pariterque infinitesima primi generis, multiplicata per quantitatem infinitam generis tertii, producet quantitatem infinitam generis secundi; divisa verò per eandem quantitatem infinitam, dabit infinitesimam generis quarti.

Atque hinc sequens theorema sua sponte profluit, quod si quantitas infinita cujus-

cujuſcumque generis multiplicetur per infiniteſimam generis non diſſimilis, ipſumque adeo abſolutum infinitum per nihil abſolutum, productum ſit ſemper quantitas finita. Id autem mirum videri non debet; nam eadem quantitas finita deſignari poteſt per ſeriem infinitam, hoc eſt per infinitos numero terminos, nec ideo in infinitum abire. Quod profectò ut liquidò conſtet, non gravabimur de ſeriebus infinitis nonnulla hic breviter differere: eoque magis, quod hujuſmodi ſeries ſint, quaſi ſacra anchora, ad quam in maximè arduis, & deſperatæ ſolutionis problematibus, ubi omnes aliæ humani ingenii vires naufragium paſſæ ſunt, velut ultimi remedii loco, ſaniores Mathematici confugiunt.

I.

Geneſis ſerierum infinitarum oſtenditur.

SEries infinitæ originem habent, vel à diviſione, vel à radicum extractione. Nam primo quemadmodum in diviſione numerorum, quotieſcumque diviſor non eſt pars aliquota dividendi, procedi poteſt per fractiones decimales in infinitum; ita quoque quotieſcumque in divi-

diviſione quantitatum, quæ alphabeticis litteris ſunt deſignatæ, diviſor, qui pluribus partibus conſtet, non eſt inſtar partis aliquotæ in dividendo, diviſio in infinitum per fractiones ſimplices poterit continuari.

Ita ſi dividere oporteat, quantitatem ſimplicem m per quantitatem compoſitam $a - b$, diviſio fieri nequit, quia ſcilicet diviſor $a - b$ non eſt inſtar partis aliquotæ in quantitate dividenda: proindeque deſignandus eſt quotiens, quemadmodum ſuo loco docuimus, per fractionem compoſitam $\frac{m}{a-b}$. Sed adhibitis fractionibus ſimplicibus, inſtitui poterit diviſio in hunc modum.

Dividatur primò quantitas m per primam partem diviſoris a: & quoniam multiplicato quotiente $\frac{m}{a}$ per diviſorem ipsũ $a - b$, producitur quantitas $\frac{am - bm}{a}$, quæ ſubtracta ex quantitate dividenda m, relinquit $\frac{bm}{a}$; dividatur ſecundò reſiduum iſtud

istud per a: & quia multiplicato quotiẽte $\frac{bm}{a^2}$ per divisorem $a-b$, producitur quantitas $\frac{abm-b^2m}{a^2}$, quæ subducta ex residuo illo, relinquit $\frac{b^2m}{a^2}$; dividatur tertiò novum istud residuum per a: quumque ex hac divisione novum oriatur residuum, nec unquam divisio fieri possit exactè; operatio coutinuabitur in infinitum: qua ratione pro quotiente propositæ divisionis invenietur series infinita $\frac{m}{a}+\frac{bm}{a^2}+\frac{b^2m}{a^3}+\frac{b^3m}{a^4}$ &c.

Atque hoc artificio non modò liquet, quantitatem finitam per infinitos numero terminos posse designari; verùm etiam ostendi potest admirandum illud theorema, quod infinitum absolutum, multiplicatum per zero, sive nihilum, producat quantitatem finitam; vel, quod eodem recidit, quod quotiens, qui oritur, dividendo quantitatem finitam per zero, sive nihilum, sit quantitas infinita. Si enim supponamus, quod b sit æqua-

æqualis a, jam in exemplo adducto divisor $a-b$ fiet zero, sive nihil: quumque in hoc casu series infinita, quæ quotientem exhibet divisionis, mutetur in hanc aliam $\frac{m}{a}+\frac{m}{a}+\frac{m}{a}+\frac{m}{a}+\frac{m}{a}$ &c.; erit idem ille quotiens fractio ista $\frac{m}{a}$ infinities sumpta: proindeque quia huiusmodi fractio est quantitas finita, & finitum sumptum infinities producit infinitum; erit idem ille quotiens quantitas infinita.

Neqne verò eadem ratio viget, quum b est minor, quàm a; adeoque $a-b$ major, quàm nihil. Nam etsi quotiens, qui oritur, dividendo m per $a-b$, exprimatur per seriem infinitorum numero terminorum; attamen omnes illi termini simul collecti componunt quantitatem finitam, & non infinitam. Constituunt namque termini illi progressionem geometricam, cujus exponens est $\frac{b}{a}$: unde quum b sit minor, quàm a, erit exponens ille unitate minor: proindeque termini progressionis continuò descrescent; at-

atque ita, veluti decreſcentes, ſi ſimul colligantur, non infinitam, ſed finitam quantitatem conſtituent. Atque hinc factum, ut eædem illæ ſeries infinitæ dicerentur etiam à nonnullis ſeries convergentes, quia tametſi ex infinitis numero terminis conſtent; attamen termini illi citò convergunt, & minores ſemper, ac minores evadunt.

Similiter ſi dividenda ſit quantitas ſimplex m per quantitatem compoſitam $a + b$, quotiens in terminis finitis erit $\frac{m}{a+b}$. Sed adhibitis fractionibus ſimplicibus, diviſio procedit in infinitum, & hoc caſu pro quotiente propoſitæ diviſionis invenietur hujuſmodi ſeries infinita $\frac{m}{a} - \frac{bm}{a^2} + \frac{b^2m}{a^3} - \frac{b^3m}{a^4}$ &c. Unde paradoxum fluit nõ inelegans: nimirũ, quod ſeries iſta infinita $\frac{m}{a} - \frac{m}{a} + \frac{m}{a} - \frac{m}{a}$ &c., cujus termini contrarietate ſignorum ſeſe mutuò deſtruere videntur, adæquet quantitatem finitam $\frac{m}{2a}$. Nam ſi ſup-

ponamus, quod b ſit æqualis a; fiet in exemplo adducto diviſor $2a$, & ſeries infinita, quæ quotientem exhibet diviſionis, iſto caſu mutabitur in hanc aliam $\frac{m}{a} - \frac{m}{a} + \frac{m}{a} - \frac{m}{a}$ &c. Nec effugitur paradoxum, dicendo, quod ultimus terminus ſeriei, exhauſta infinitate, afficiatur ſigno $+$; nam hac ratione ſeries ipſa æqualis erit $\frac{m}{a}$, & non $\frac{m}{2a}$.

Jam hujus paradoxi non meliùs ratio intelligi poteſt, quàm ſi dividamus quantitatem m per aliam $2a$, ſive $a + a$. Itaque quia diviſa quantitate m per a, multiplicatoque quotiente $\frac{m}{a}$ per diviſorem $a + a$, producitur quantitas $m + m$, quæ ſubtracta ex quantitate dividenda, relinquit $-m$; divido ſecundò $-m$ per a: quumque rurſus multiplicato quotiente $-\frac{m}{a}$ per diviſorem $a + a$, quantitas oriatur $-m - m$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit m; perſpicuum eſt per con-

continuam divisionem residuum non minui, sed perpetuò adæquare ipsam quantitatem dividendam m: ex quo fit, ut exhausta infinitate ultimus seriei terminus non modò concipiendus sit affectus signo $+$, verùm etiam esse debeat $\frac{m}{2a}$; quia scilicet id, quod ultimò relinquitur dividendum per $a + a$, sive $2a$ est ipsa quantitas m.

Liquet igitur, qua ratione oriantur series infinitæ ex divisione quantitatum. Sed non dissimiliter suam genesim habent ex radicum extractione. Nam sicuti quum radix extrahi debet ex numero aliquo, qui non sit potestas perfecta ejus ordinis, de quo agitur, procedi potest per fractiones decimales in infinitum, sicque radix exhiberi, quæ proprius semper, ac proprius in infinitum ad veram impossibilem accedat; ita quoque quotiescumque ex quantitate aliqua composita litterali quæsita radix extrahi nequit, adhibitis fractionibus simplicibus exprimi illa poterit per seriem infinitorum numero terminorum rationalium, quibus ita continuò ad quæsitam radicem accederetur, ut error tandem data quavis quantitate minor foret, totaque series exactum quæsitæ radicis valorem exhiberet.

Hujus rei duplex specimen exhibebimus, unum in extractione radicis quadratæ, alterum in extractione radicis cubicæ. Proponatur itaque primò extrahenda quadrata radix ex $a^2 + b^2$. Hæc per methodum superiùs traditam nequit haberi. Nam quadratum quantitatis, duabus ex partibus constantis, componitur ex quadratis partium, duploque ejus, quod oritur ex mutua earum partium multiplicatione: & quamquam in quantitate proposita adsint quadrata partium a, & b; deficit tamen duplum ejus, quod ex multiplicatione mutua earundem partum producitur. Quocirca radix illa, velut incommensurabilis, & irrationalis, in terminis finitis tantùm exprimi potest, adhibito signo radicali, in hunc modum $\sqrt{a^2 + b^2}$. Sed nihilominus eandem illam radicem exprimere licet per seriem, quæ ex infinitis numero terminis rationalibus constet, si scilicet operatio, per quam quadrata radix extrahitur, in infinitum continuetur.

Itaque, quia totum artificium in extratractione radicis quadratæ, in eo consistit ut per duplum radicis acquisitæ dividatur semper proximus terminus quantitatis propositæ, à qua subducatur tam id, quod oritur, multiplicando duplum illud per inventum quotientem, quàm quadratum ipsius quotientis; extraho primùm radicem quadratam ex priori termino a^2: & quoniam diviso termino altero b^2 per duplum istius radicis $2a$, quotiens oritur $\frac{b^2}{2a}$, qui ductus in $2a$ producit b^2, multiplicatus verò in se ipsum producit $\frac{b^4}{4a^2}$, subtraho utrumque istorum productorum ex altero illo termino b^2, & remanebit $-\frac{b^4}{4a^2}$. Quumque radix hactenus acquisita sit $a + \frac{b^2}{2a}$, divido residuum illud per duplum istius radicis, vel saltem per duplum partis prioris a, ut tertia pars oriatur $-\frac{b^4}{8a^3}$, & si quidem paratis iisdem productis, fiat eo-

run-

rundem subtractio, habebitur pro residuo $\frac{b^6}{8a^4} - \frac{b^8}{64a^6}$. Unde similiter si residui hujus dividatur prior terminus $\frac{b^6}{8a^4}$ per duplum radicis hactenus acquisitæ $a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3}$, vel quod eodem recidit per priorem partem a duplicatam, eademque producta subducantur, habebitur in radice pars quarta $\frac{b^6}{16a^5}$, & relinquetur $-\frac{5b^8}{64a^6} + \frac{b^{10}}{84a^8} - \frac{b^{12}}{256a^{10}}$. Atque ita procedendo in infinitum, invenietur pro quadrata radice quantitatis propositæ $a^2 + b^2$ series infinita

$$a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} \text{ \&c.}$$

quæ quidem mutabitur in hanc aliam

$$a + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a + \frac{1}{16}a - \frac{5}{128}a \text{ \&c.},$$

si b ipsi a ponatur æqualis.

Simi-

Similiter ſi extrahenda proponatur radix quadrata ex quantitate $a^2 - b^2$, hæc per regulam, ſuperiùs traditam, neque etiam poterit haberi: tum quia deficit id, quod bis oritur ex mutua multiplicatione partium a, & b; tum etiam quia non ambo quadrata partium ſigno + afficiuntur. Sed adhibita vulgari radicem quadratam extrahendi ratione, nec non operatione in infinitum continuata, invenietur pro radice extrahenda ſeries infinita

$$a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7}$$

&c., quæ vertetur in hanc aliam

$$a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a - \frac{1}{16}a - \frac{5}{128}a \ \text{\&c.},$$

ſi ponatur b equalis a. Unde quia poſita æqualitate inter a, & b, quantitas $a^2 - b^2$ fit zero æqualis, atque adeo ejus quadrata radix evaneſcit; diſcimus hinc omnes illos terminos, qui in poſtrema ſerie primum excipiunt, ſimul collectos, ipſum primum terminum adæquare: ut ſcilicet hac ratione ſeries ipſa, mutua eorum terminorum deſtructione, poſſit in nihilum abire.

Sed earundem ſerierum uſum oſtendamus modò in cubicæ radicis extractione. Hunc in finem proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate $a^3 + b^3$.

Planè hujuſmodi radix, methodo ſuperiùs expoſita, nequit haberi, quum in quãtitate propoſita adſint quidem cubi partiũ a, & b; ſed deficiat tam triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ per ſecundam, quàm triplum ejus, quod gignitur, multiplicando quadratum ſecundæ per primam. Quocirca quæſita radix non alia ratione in terminis finitis exprimi poterit, quàm præfigendo quantitati propoſitæ ſignum radicale in hunc modum $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$. Sed nihilominùs eodem illo artificio, quo radices cubicæ extrahuntur, poterit quæſita radix per ſeriem infinitorum numero terminorum rationalium exhiberi.

Nimirum, quia totum artificium in extractione radicis cubicæ, in eo conſiſtit, ut per triplum quadrati radicis acquiſitæ dividatur proximus terminus quantitatis propoſitæ, à qua ſubducatur primò triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum dictæ radicis per inventum quotientem; deinde triplum illius, quod producitur, multiplicando radicem ipſam per quadratum quotientis; ac denique cu-

cubus, qui fit ex ipso quotiente: extraho primùm radicem cubicam ex priori termino a^3; & quoniam diviso termino altero b^3 per $3a^2$, hoc est, per triplum quadrati inventæ radicis, producitur quotiens $\frac{b^3}{3a^2}$; subtraho ex altero illo termino non modò triplum producti, quod oritur, multiplicando quadratum acquisitæ radicis a^2 per inventum quotientem; verùm etiam triplum producti, quod gignitur, multiplicando ipsam illam radicem per quadratum inventi quotientis, quemadmodum & cubum, qui fit ex ipso quotiente: qua facta subductione, remanebit $-\frac{b^6}{3a^3}-\frac{b^9}{27a^6}$.

Hinc quum radix acquisita sit $a+\frac{b^3}{3a^2}$, divido secundò primum terminum illius residui per primum terminum quadrati radicis acquisitæ triplicati, hoc est $-\frac{b^6}{3a^3}$ per $3a^2$, ut in radice tertia pars oriatur $-\frac{b^6}{9a^5}$; & paratis iisdem productis, eo-

run-

rundemque facta subtractione, remanebit $\frac{5b^9}{27a^6}-\frac{b^{15}}{81a^{12}}-\frac{b^{18}}{729a^{15}}$. Unde similiter, si residui hujus primus terminus dividatur per primum terminum quadrati radicis acquisitæ triplicati, & facta eorundem productorum subtractione, procedatur eadem methodo in infinitum; invenietur pro radice cubica quantitatis propositæ a^3+b^3 series infinita $a+\frac{b^3}{3a^2}-\frac{b^6}{9a^5}+\frac{5b^9}{81a^8}$ &c., quæ quidem mutabitur in hanc aliam seriem $a+\frac{1}{3}a-\frac{1}{9}a+\frac{5}{81}a$ &c., si b ipsi a ponatur æqualis.

Eadem ratione si extrahenda proponatur radix cubica ex quantitate a^3-b^3, ea per regulam superiùs traditam neque etiam poterit inveniri; quum in illa non adsint partes omnes, ex quibus componitur cubus alicujus binomiæ radicis. Nihilominus adhibita vulgari radicem cubicam extrahendi ratione, nec non operatione in infinitum continuata, invenietur pro radice extrahenda series infinita $a - \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} - \frac{5b^9}{81a^8}$ &c., quæ quidem vertetur in hanc aliam $a - \frac{1}{3}a - \frac{1}{9}a - \frac{5}{81}a$ &c., si ponatur b æqualis a. Unde quia posita aqualitate inter a, & b, quantitas $a^3 - b^3$ fit æqualis zero, sive nihilo, atque adeo ejus radix cubica evanescit; discimus hinc, omnes illos terminos, qui in postrema serie primum excipiunt, simul collectos, ipsum priorem terminum adæquare; ut scilicet hac ratione series ipsa, mutua eorum terminorum destructione, possit in nihilum abire.

II.

De seriebus infinitis, quarum termini constituunt progressionem geometricam.

Quantitatem finitam in seriem infinitorum numero terminorum convertere, problema est, quod nullam difficultatem involvit. Ut enim vidimus, ortum habent series infinitæ, vel à divisione quantitatum, vel à radicum extractione.

extractione. Unde quia quælibet quantitas considerari potest, non modò tamquam quotiens ortus ex imperfecta divisione duarum aliarum, verùm etiam tamquam radix alterius quantitatis, quæ non sit potestas perfecta ordinis assumpti; perspicuum est, quamcumque quantitatem finitam posse utraque ratione per seriem infinitorum numero terminorum designari.

Jam conversum hujus problematis, nimirum seriei infinitorum numero terminorum summam finitam invenire, non modò paulò difficiliùs deprehenditur, sed hujusmodi etiam, ut non semper solutionem admittat. Et quoniam, si quem usum in resolutione problematum habent series infinitæ, is maximè cernitur, quotiescumque illarum serierum finita summa invenitur; proinde ostensa genesi serierum infinitarum, non abs re erit de earundem summa finita nonnihil hìc etiam subjungere. Quumque in hac re methodus generalis nequeat exhiberi; necesse est, ut variis exemplis, ac regulis specialibus rem ostendamus.

Primò itaque occurrunt series illæ, quarum termini infiniti progressionem geometricam constituunt. Nam quotiestiescumque termini decrescunt, ita, ut unusquisque sit data quævis pars sui antecedentis, facile erit eorum omnium summam invenire. Est autem hujus rei hoc quidem theorema generale: nempe quod si expositæ quantitatis b sumatur pars, denominata ab a, hujusque iterum pars denominata ab a, atque ita continuò; quod inquam summa omnium sit ejusdem expositæ quantitatis pars denominata ab $a-1$: adeò, ut series infinita $\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b}{a^3}+\frac{b}{a^4}$ &c. eundem valorem habeat, ac fractio ista $\frac{b}{a-1}$.

Ad hoc theorema ostendendum satis erit, methodo mox tradita in seriem infinitam convertere fractionem $\frac{b}{a-1}$. Itaque, quia diviso b per a, multiplicatoque quotiente $\frac{b}{a}$ per divisorem $a-1$, producitur quantitas ista $b-\frac{b}{a}$, quæ siquidem subtrahatur ex quantitate dividenda, relinquet pro residuo quantitatem

$\frac{b}{a}$, divido secundò residuū istud per a: & quia multiplicato similiter quotiente $\frac{b}{a^2}$ per divisorem $a-1$, subtractoque producto $\frac{b}{a}-\frac{b}{a^2}$ ex illo residuo, remanet $\frac{b}{a^2}$, divido tertiò novum istud residuum per a; atque ita procedendo in infinitum, prodibit pro quotiente series infinita $\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b}{a^3}+\frac{b}{a^4}$ &c. Ex quo patet, seriem istam infinitam tantundem valere, ac $\frac{b}{a-1}$.

Hujus igitur theorematis ope facilè erit, summam finitam invenire progressionum geometricarum, quæ subinde decrescunt in infinitum, ut quisque terminus sit data pars sui antecedentis. Ex eo namque sequitur primò, quod si expositæ quantitatis b sumatur dimidium, atque hujus iterum dimidium, & sic continuò in infinitum: ita, ut progressio geomemetrica decreſcens conſtituatur, in qua quiſque terminus ſemiſſem ſui antecedentis adæquet; quod inquam ſumma omnium terminorum infinitorum ſit æqualis expoſitæ quantitati. Nam hoc caſu in generali illo theoremate a fit 2: & quemadmodum ſeries infinita ſuperiùs inventa

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4} \text{ \&c. mutatur in hanc}$$

$$\text{aliam } \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{8}b + \frac{1}{16}b \text{ \&c.; Ita}$$

& fractio $\frac{b}{a-1}$, quam adæquat ſeries illa, evadit ipſa quantitas b, quum ejus denominator æqualis fiat unitati.

Sequitur ſecundò, quod ſi expoſitæ quantitatis b ſumatur triens, atque hujus iterum triens, & ſic deinceps in infinitum: ita, ut progreſſio geometrica decreſcens conſtituatur, in qua quiſque terminus ſui antecedentis trientem adæquet; quod inquam ſumma omnium infinitorum terminorum ſit æqualis dimidio expoſitæ quantitatis. Nam ſemper ac in progreſſione geometrica decreſcente terminus ſubſequens trientem ſui antece-

cedentis adæquat, erit in generali illo theoremate a æqualis 3; & profectò ſicuti in hac hypotheſi ſeries illa infinita

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4} \text{ \&c. vertitur in hanc}$$

$$\text{aliam } \frac{1}{3}b + \frac{1}{9}b + \frac{1}{27}b + \frac{1}{81}b \text{ \&c.; ſic}$$

& fractio $\frac{b}{a-1}$, cui ſeries illa eſt æqualis, mutatur in hanc aliam fractionem $\frac{1}{2}b$.

Sequitur tertiò, quod ſi expoſitæ quantitatis b ſumatur quadrans, hujuſque iterum quadrans, atque ita continuò in infinitum: adeo, ut progreſſio geometrica decreſcens conſtituatur, in qua quiſque terminus adæquet quadrantem ſui antecedentis; quod inquam ſumma omnium infinitorum terminorum ſit æqualis trienti expoſitæ quantitatis. Nam in progreſſione geometrica decreſcente terminus ſubſequens adæquat quadrantem ſui antecedentis. Itaque in generali illo theoremate a fiet 4: proindeque quemadmodum in iſta hypotheſi ſeries illa infinita $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c. mutatur in hanc aliam $\frac{1}{4}b + \frac{1}{16}b + \frac{1}{64}b + \frac{1}{256}b$ &c. sic habebitur loco illius fractionis $\frac{b}{a-1}$ hæc alia $\frac{1}{3}b$.

Atque ita quoque ex generali illo theoremate colligere licet summam infinitorum terminorum progressionis geometricæ decrescentis adæquare quartam, aut quintam partem expositæ quātitatis, si quisque terminus progresionis adæquet quintam, aut sextam partem sui antecedentis. Sed idem valet vi generalis theorematis, si quisque terminus fuerit pars aliquāta sui antecedentis. Ita si progressio talis fuerit, ut terminus sequens adæquet duas tertias partes termini antecedentis; erit summa infinitorum terminorum æqualis duplo expositæ quantitatis. Nam quum in hac hypothesi quantitas a fiat $\frac{3}{2}$, erit $a - 1$ æqualis $\frac{1}{2}$; atque adeo fractio $\frac{b}{a-1}$ erit $2b$.

Sed

Sed supponamus in generali illa fractione $\frac{b}{a-1}$, unde originem suam habuit infinita illa series $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c., a unitatem repræsentare. Itaque habebitur in hoc casu $a - 1$ æqualis zero, sive nihilo; atque adeo fractio illa, veluti quotiens, qui oritur, dividendo quantitatem finitam b per zero, sive nihilum, erit quantitas infinita. Unde discimus summam infinitorum terminorum in hac hypothesi non esse finitam, sed infinitam. Quod quidem perspicuum est. Nam quotiescumque a ponitur æqualis unitati, infinita illa series mutatur in hanc aliam $b + b + b + b$ &c.: proindeque valor ejus, erit quantitas b infinities sumpta. Unde, quia omnis quantitas finita, quotiescumque sumitur infinities, evadit infinita; erit valor illius seriei, hoc est summa omnium infinitorum terminorum non finita, sed infinita.

Supponamus porrò in eadem illa generali fractione a numerum aliquem unitate minorem, puta semissem unitatis, designare. Et quoniam in hac hypo-

the-

thesi $a-1$ est $-\frac{1}{2}$, erit fractio illa $\frac{b}{a-1}$ æqualis quantitati negativæ $-2b$, proindeque summa infinitorum terminorum in hac hypothesi prodit quidem finita, sed negativa. Unde insigne oritur paradoxum. Nam posito, quod a designet semissem unitatis, infinita illa series $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c. vertetur in hanc aliam $2b + 4b + 8b + 16b$ &c.: proindeque, quia hujus progressionis termini, veluti crescentes in infinitum, constituunt simul collecti quantitatem infinitam positivam, valebit quantitas finita negativa tantundem, ac quantitas infinita positiva.

Vicissim autem eodem artificio colligere licet, quantitatem finitam positivam tantundem valere, ac quantitas infinita negativa. Nam si in fractione $\frac{b}{a-1}$ numeratorem b statuamus negativum, ita ut loco illius fractionis habeatur hæc

alia

alia $\frac{-b}{a-1}$, series inde emergens erit $-\frac{b}{a} - \frac{b}{a^2} - \frac{b}{a^3} - \frac{b}{a^4}$ &c., hoc est similiter negativa. Jam verò posito, quod a designet semissem unitatis, fractio illa negativa fit $2b$, & negativa illa series mutatur in hanc aliam $-2b - 4b - 8b - 16b$ &c. Itaque valor infinitorum terminorum seriei hujus negativæ erit quantitas finita positiva $2b$: & proinde, quia termini ejusdem seriei, veluti crescentes in infinitum, constituunt simul collecti quātitatem infinitam negativam, valebit quantitas finita positiva tantundem, ac quantitas infinita negativa.

Quum primùm in hæc mysteria inciderim, non aliunde ea oriri posse cæperam suspicari, quam ab oppositione, quæ inter quantitatem positivam, & negativam reperitur. Itaque, quia ex iis, hoc sequitur, quod quantitas positiva tantundem valeat, ac negativa infinities sumpta; & similiter quod quantitas negativa perinde sit, ac positiva infinities accepta: illud exinde videbatur mihi colligi posse quantitatem positivam, & nega-

ga-

gativam subinde quidem opponi inter se mutuò, ut una respectu alterius veluti quantitas indefinitè parva esset habenda; quum nonnisi quantitas indefinitè parva infinities sumpta producat quantitatem finitam. Nec verebar, hæc asserendo, in eorum opinionem incidere, qui quantitates negativas minores nihilo esse arbitrantur; quia eadem ratione tales quoque essent habendæ quantitates positivæ.

Quocirca non aliter se rem habere mecum ipse reputabam, quàm in hunc, qui sequitur, modum: nimirum quod tametsi quantitates negativæ sint perinde reales, ac positivæ; attamen, quum inter se mutuò conferuntur, propter contrarietatem statuum, in quibus reperiuntur, non minùs negativæ respectu positivarum, quàm positivæ in ordine ad negativas, velut indefinitæ parvæ, essent reputandæ. Cui equidem sententiæ eò firmiùs adhærebam, quia exinde clarè etiam colligitur, inter quantitates positivas, & negativas non aliter proportionem consistere posse, quam si duæ fuerint positivæ, & aliæ duæ negativæ; quum si tres priores sumantur unius status, & quarta status contrarii, prima quidem ad secundam rationem habebit finitam; tertia verò

rò

rò ad quartam ritionem, vel indefinitè magnam, vel indefinitè parvam obtinebit.

Sed re pressiùs cōsiderata, falsitatem hujus systematis illicò novi. Nam quantitates positivæ per additionem negativarum decrementum patiuntur. Itaque necesse est, ut eæ sint quantitates ejusdem ordinis inter se; quia si quantitates negativæ essent indefinitæ parvæ respectu positivarum, istæ per illarum additionem minui sanè non deberent. Quocirca eorum misteriorum rationem ex aliis principiis deducendam esse conjeci: & quia clarè videbam fractionem illam generalem $\frac{b}{a-1}$ fieri $-2b$, quotiescumque in ea ponitur a æqualis $\frac{1}{2}$; id tantùm sedulò inquirendum existimavi, an revera sit infinita summa infinitorum terminorum hujus seriei $2b + 4b + 8b + 16b$ &c., in quam mutatur series illa generalis $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c., quotiescumque ponitur a semissem unitatis repræsentare.

Et

Et quidem si seriei istius infinitæ $2b + 4b + 8b + 16b$ &c. ea sit constitutio, ut sicuti prior terminus est duplum expositæ quantitatis b, ita & quilibet alius duplum sui antecedentis adæquet; nulli dubium esse potest, quin infinita sit summa infinitorum ejus terminorum. Sed hujusmodi esse constitutionem illius seriei in casu nostro, hoc quidem est falsum. Quum enim series illa oriatur ex fractione generali $\frac{b}{a-1}$, in qua ponitur a semissem unitatis repræsentare, hoc est ex fractione $\frac{2b}{1-2}$, quæ tantundem valet, ac quantitas negativa $-2b$; natura illius seriei hæc est, ut ad quemcumque terminum elevetur, semper ab eodem per totidem terminos negativos descendere debeat, usque donec perveniat ad $-2b$, ubi neque etiam sistit, sed descendit adhuc per terminos negativos

$$-b - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}b - \frac{1}{8}b - \frac{1}{16}b \text{ \&c.}$$

Qua ratione omnes ejus termini simul collecti constituunt quantitatem finitam ne-

negativam $-2b$.

Itaque ratio illius paradoxi exinde est repetenda, quod series infinita, quæ oritur ex fractione $\frac{2b}{1-2}$ non sit simpliciter $2b + 4b + 8b + 16b$ &c. sed $2b + 4b + 8b + 16b$ &c. $-16b - 8b - 4b - 2b - b - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}b - \frac{1}{8}b - \frac{1}{16}b$ &c.: adeo ut deletis terminis, qui contrarietate signorũ se mutuò destruunt, maneant tãtũ $-b - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}b - \frac{1}{8}b - \frac{1}{16}b$ &c., qui simul collecti constituunt quantitatem finitam negativam $-2b$. Atque hanc esse veram illius paradoxi rationem, exinde colligi potest, quia si loco fractionis $\frac{2b}{1-2}$ scribatur $\frac{-2b}{2-1}$, series ex hac nova fractione emergens prodit sub alia forma, nimirum talis, ad quam deletis terminis contrariis prior illa reducitur.

Eadem autem ratione series infinita,

quæ

quæ oritur ex fractione $\frac{-2b}{1-2}$, non eſt ſimpliciter $-2b-4b-8b-16b$ &c., ſed $-2b-4b-8b-16b$ &c. $+16b+8b+4b+2b+b$ $+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b+\frac{1}{8}b+\frac{1}{16}b$ &c. Unde nil mirum, quod ſumma infinitorum terminorum illius ſeriei ſit quantitas finita poſitiva $2b$, quia ſcilicet deletis terminis, qui contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruunt, remanent tantùm $b+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b+\frac{1}{8}b+\frac{1}{16}b$ &c., qui ſimul collecti componunt quantitatem finitam poſitivam $2b$. Quod exinde etiam colligi poteſt, quia ſi loco fractionis $\frac{-2b}{1-2}$ ſcribatur $\frac{2b}{2-1}$, ſeries ex hac nova fractione emergens prodit ſub alia forma, nimirum talis, ad quam deletis terminis contrariis prior illa reducitur.

Jam ex his omnibus liquet ſummam infinitorum terminorum ſeriei, quæ ori-

tur

tur ex fractione generali $\frac{b}{a-1}$, eſſe quidem quantitatem finitam poſitivam, quotieſcumque a numerum unitate majorem deſignat; eſſe quantitatem infinitam, quum a unitatem adæquat; & eſſe demum quantitatem finitam negativam, quum a numerum unitate minorem repræſentat. Unde colligi poteſt, deceptum eſſe clariſſimum Walliſium, qui in hoc poſtremo caſu ſummam infinitorum terminorum eſſe quantitatem pluſquam infinitam exiſtimavit. Nam etſi quantitates iſtæ pluſquam infinitæ nullam contradictionem involvant; quum ſicuti infiniteſimarum, ita & infinitorum diverſa genera diſtingui debeant: nihilominus in fractione $\frac{b}{a-1}$, quum a numerum unitate minorē repræſentat, tantum abeſt, ut ſumma infinitorum terminorum ſeriei inde emergentis ſit pluſquam infinita, ut neque etiam infinita dici poſſit, quum prodeat quantitas finita negativa.

Interim notare licet hoc loco, errorem clariſſimi Walliſii exinde ortum eſſe, quod crediderit cum Vulgo Algebriſtarum

rum quãtitates negativas saltem respectu positivarum esse nihilo minores. Quod profectò si verum esset, rem protulisset, parem ingenio suo. Nam, quum noverit, summam infinitorum terminorum fieri infinitam, ubi a ponitur æqualis unitati, hoc est, ubi denominator fractionis evanescit; profectò necesse erat, ut eadem summa esset plusquam infinita, si a poneretur unitate minor, & quantitates negativæ nihilo minores essent. Quocirca quum contrarium constet, & denominatore existente negativo, summa infinitorum terminorum prodeat quantitas finita negativa; concludendum est, quantitates negativas esse nihilo majores perinde, ac sunt quantitates positivæ; & zero, sive nihilum esse ultimum terminum, ad quem quantitates decrescendo possint perveniri.

Cæterùm, quum pro inveniendis summis finitis progressionum geometricarum decrescentium, fundamentale sit istud theorema, quod si fuerit progressio geometrica decrescens $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c. summa omnium infinitorum terminorum

rum sit æqualis $\frac{b}{a-1}$; non abs re erit, aliam ejusdem theorematis demonstrationem in Tyronum gratiam hoc loco proferre: nimirum si vocetur f summa omnium terminorum, quia ultimus terminus progressionis decrescit in infinitum, atque adeo omnino evanescit, erit f summa omnium antecedentium, & $f - \frac{b}{a}$ summa omnium consequentium: proindeque, quia summa omnium antecedentium est ad summam omnium consequentium, ut unus antecedentium ad unum consequentium, erit f ad $f - \frac{b}{a}$, ut $\frac{b}{a}$ ad $\frac{b}{a^2}$, sive etiam, ut a ad 1. Unde, quum convertendo sit, ut f ad $\frac{b}{a}$, ita a ad $a-1$, erit summa omnium terminorum f æqualis $\frac{b}{a-1}$.

III.

De seriebus, quarum termini progressionem arithmeticam constituunt.

Sequuntur series, quarum termini progressionem arithmeticam constituunt. Istæ autem in infinitũ continuatæ numquam poterunt summam finitam exhibere. Nam ipsarum termini, vel augẽtur continuò, & veluti crescentes in infinitum constituunt simul collecti quantitatem infinitam; vel continuò minuuntur, & quia non per numeros fractos, sed per numeros negativos diminutionem patiuntur, neque etiam in unum additi component quantitatem finitam, sed veluti continuò crescentes in statu negativo, constituent simul quantitatem infinitam negativam.

Interim, etsi summa infinitorum terminorum istarũ serierum, velut infinita, nequeat inveniri; attamen quam summam constituant quamplures termini, simul collecti, facile erit definire. Hunc in finem referat a primum terminum progressionis arithmeticæ, sitque b differentia, qua termini progrediuntur. Itaque si pro-

si progressio fuerit crescens, erit $a + b$ secundus terminus, $a + 2b$ terminus tertius, $a + 3b$ terminus quartus, atque ita deinceps. Unde, quum termini progressionis arithmeticæ crescentis sint a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ &c., liquet terminos illos oriri, addendo terminos progressionis a, a, a, a, &c. cum terminis alterius hujus progressionis $0b$, $1b$, $2b$, $3b$ &c.

Quocirca, ut addantur in unum quotcumque termini progressionis arithmeticæ crescentis a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ &c., satis erit in unum colligere terminos totidem tam progressionis a, a, a, a &c., quàm progressionis $0b$, $1b$, $2b$, $3b$ &c. Et quidem quantum ad primam, quia coefficientes suorum terminorum sunt unitates 1, 1, 1, 1 &c., si in ea colligendi sint in unum termini totidem, quot designat numerus m, erit ma omnium summa. Sed quantum ad secundam, quia coefficientes suorum terminorum sunt numeri naturales 0, 1, 2, 3, &c., si in ea proponantur colligendi in unum termini totidem, quot repræsentat numerus m, erit omnium summa $\frac{mm - m}{2} b$.

Quod ut liquido constet, præmittenda est

eſt prius pulcherrima numerorum naturalium proprietas : nimirum, quod ſi numeri naturales incipiant à zero, ſumma quotcumque terminorum ſit ad ſummam terminorum totidem ultimo æqualium, ut 1 ad 2. Ita ſumma quatuor terminorum 0, 1, 2, 3 eſt 6, & ſumma terminorum totidem æqualium ultimo 3 eſt 12. Similiter ſumma terminorum quinque 0, 1, 2, 3, 4 eſt 10, & ſumma ex totidem terminis, quorum quiſque ſit æqualis ultimo 4, eſt 20.

Hac numerorum naturalium proprietate ſuppoſita, facile erit oſtendere in progreſſione $0b$, $1b$, $2b$, $3b$ &c., ſummam terminorum totidem, quot deſignat numerus m, eſſe $\frac{mm-m}{2}b$. Nam quum m ſit numerus terminorum in unam ſummam colligendorum, erit $m-1b$ ultimus terminus. Quare ſi terminus iſte multiplicetur per m, hoc eſt capiatur toties, quot ſunt unitates in m; erit ſumma invenienda ad $\overline{mm-m}\,b$, ut 1 ad 2: proindeque ſi ipſius $\overline{mm-m}\,b$ ſemiſſis capiatur, erit $\frac{mm-m}{2}b$ ſumma quæſita.

Atque hinc liquet modò, progreſſionis arithmeticæ creſcentis a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ &c. ſummam terminorum totidem, quot deſignat numerus m, eſſe $ma+\frac{mm-m}{2}b$. Unde cognito priori termino progreſſionis, & cognita item differentia, qua termini progrediuntur; facile erit, terminos quotcumque ejuſdem progreſſionis in unam ſummam colligere. Capiatur etenim prior terminus toties, quot ſunt termini in unum addendi; tum ei addatur differentia progreſſionis toties, quot deſignat ſemiſſis producti ex eodem numero terminorum in ſe ipſum unitate multatum, & habebitur ſumma quæſita.

Oporteat, exempli gratia, in unam ſummam colligere terminos decem progreſſionis arithmeticæ creſcentis, cujus terminus prior ſit 2, differentia autem 3. Capiatur decuplum prioris termini 2, ſcilicet 20. Et quoniam id, quod producitur, multiplicando numerum terminorum 10 per eundem numerum unitate multatum 9, eſt 90; erit 45 ſemiſſis hujus producti, atque adeo differentia 3, toties ſumpta, erit 135. Quare ſumma quæſita erit 20 + 135, hoc eſt 155.

Quod ſi progreſſio arithmetica fuerit decreſcens, poſito rurſus, quod a ſit prior terminus progreſſionis, & b differentia, qua termini progrediuntur; erit $a - b$ ſecundus terminus; $a - 2b$ terminus tertius, $a - 3b$ terminus quartus, atque ita deinceps. Unde quum termini progreſſionis arithmeticæ decreſcentis a, $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$ &c. oriantur ſubtrahendo terminos progreſſionis $0b$, $1b$, $2b$, $3b$, $4b$ &c. ex terminis alterius hujus progreſſionis a, a, a, a &c., invenietur eodem ratiocinio, ſummam terminorum totidem illius progreſſionis arithmeticæ, quot deſignat numerus m, eſſe quantitatem iſtam $ma - \frac{mm + m}{2} b$.

Ex quo rurſus cognito priori termino progreſſionis arithmeticæ decreſcentis, & cognita item differentia, qua termini progrediuntur, facile erit terminos quotcumque ejuſdem progreſſionis in unam ſummam colligere. Capiatur ſiquidem prior terminus toties, quot ſunt termini in unum addendi; tum ex eo ſubducatur differentia progreſſionis toties, quot deſignat ſemiſſis producti ex eodem numero terminorum in ſe ipſum unitate mul-

multatum; & habebitur ſumma quæſita.

Proponantur, exempli gratia, in unam ſummam colligendi termini decem progreſſionis arithmeticæ decreſcentis, cujus terminus prior ſit 6, differentia autem terminorum 3. Capiatur decuplum prioris termini 6, ſcilicet 60. Et quoniam id, quod producitur multiplicando numerum terminorum 10 per eundem numerum unitate multatum 9, eſt 90; erit 45 ſemiſſis hujus producti, atque adeo differentia 3, toties ſumpta, erit 135. Quare ſumma quæſita erit $60 - 135$, hoc eſt -75.

Hinc autem facilè quoque erit oſtendere id, quod initio hujus articuli dictum eſt: nempe ſeries, quarum termini progreſſionem arithmeticam, ſive creſcentem, ſive decreſcentem conſtituunt, in infinitum continuatas, numquam poſſe ſummam finitam exhibere. Nam in progreſſione arithmetica creſcente a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ &c. ſumma totidem terminorum, quot deſignat numerus m, eſt $ma + \frac{mm - m}{2} b$; pariterque in progreſſione arithmetica decreſcente a, $a - b$, $a - 2b$

$a - 2b$, $a - 3b$ &c. summa aliorum totidem terminorum est $ma - \frac{mm + m}{2} b$.

Unde, quia utraque quantitas fit infinita, quotiescumque multitudo terminorum, in unam summam colligendorum, quam designat numerus m, ponitur infinita; consequens est, ut termini cujuscumque progressionis arithmeticæ in infinitum continuatæ, simul collecti, infinitam quantitatem constituant.

Sed perspicuum est quoque, eandem summam infinitorum numero terminorum esse quantitatem infinitam positivam, quotiescumque termini progressionis perpetuò crescunt; esse verò quantitatem infinitam negativam, quum iidem termini continuò decrescunt. Nam, quum multitudo terminorum, in unam summam colligendorum, infinita ponitur; termini illi, in quibus reperitur prima potestas ipsius m, erunt indefinitè parvi respectu ejus, in quo ejusdem m quadratum, sive secunda potestas reperitur: proindeque quia absque ullo errore negligi possunt, erit summa omnium infinitorum terminorum $\frac{mmb}{2}$, quotiescumque termini perpetuò crescunt, & verò erit $-\frac{mmb}{2}$, quum iidem termini decrescunt indesinenter.

Atque ita aliud agentes, in hoc incidimus theorema, universalitate sua à nemine adhuc adnotatum, nempe quod summa omnium infinitorum terminorũ cujuscumque progressionis arithmeticæ, sive crescentis, sive decrescentis, sit ad summam terminorum totidem maximo æqualium in ratione subdupla, hoc est, ut 1 ad 2. Est enim summa omnium infinitorum terminorum progressionis arithmeticæ crescentis a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, $a + 4b$ &c. semissis istius quantitatis mmb, ubi m multitudinem infinitam designat. Sed maximus terminus illius progressionis est $a + mb$, sive etiam mb; quum a respectu ipsius mb, velut quantitas indefinitè parva, evanescat. Itaque eadem summa erit semissis infinitorum terminorum maximo æqualium. Quod etiam verum esse in progressione arithmetica decrescente, nemo non videt.

Non me latet, elegans istud theorema, cujus insignis est usus in geometricis, innotuisse iis, qui infinitorum tra-

tractarunt Arithmeticam, in uno casu speciali, nempe quum termini progressionis arithmeticæ sunt numeri naturales; sed universalitatem ejus, quantum sciam, nemo hactenus adnotavit. In numeris autem naturalibus, veritatem dicti theorematis, facile erit ostendere. Nam inter alias numerorum naturalium proprietates, ut superiùs vidimus, hæc etiam recensetur, quod quum ii incipiunt à zero, sive nihilo, summa quotcumque terminorum sit ad summam terminorum totidem maximo æqualium, ut 1 ad 2. Itaque quum iidem numeri incipiunt ab unitate, maximus terminus sumi debet toties, quota est multitudo terminorum unitate aucta, ut terminorum omnium summæ duplum habeatur. Sed quum multitudo terminorum est infinita, ea per unitatem unam non augetur. Itaque in isto casu satis erit, maximum terminum toties sumere, quota est ipsa terminorum multitudo: & propterea summa omnium terminorum progressionis arithmeticæ, ab unitate per numeros naturales in infinitum continuatæ, subdupla erit summæ terminorum totidem, quorum quisque maximum adæquet.

Sed non abs re erit hoc loco paucis innuere

rationem illius proprietatis, quæ in numeris naturalibus cernitur, nempe quod quum ii incipiunt à zero, sive nihilo, summa quotcumque terminorum sit ad summam terminorum totidem maximo æqualium in ratione subdupla, hoc est, ut 1 ad 2. Pendet itaque proprietas ista ex hoc theoremate, nulli non cognito, quod summa quotcumque terminorum cujuscumque progressionis arithmeticæ habeatur, si summa extremorum multiplicetur per multitudinem terminorum dimidiatam. Hinc enim sequitur, eandem summam terminorum subduplam esse summæ extremorum acceptæ toties, quota est ipsa terminorum multitudo: proindeque quia numeri naturales constituunt progressionem arithmeticam, & quum ii incipiunt à zero, summa extremorum est ipse maximus terminus; liquet summam quotcumque numerorum naturalium, à zero incipientium subduplam esse summæ terminorum totidem æqualium maximo.

Perspicuum est autem, proprietatem istam numeris naturalibus non alia ratione competere, quàm quia constituunt progressionem arithmeticam, cujus prior terminus est zero, sive nihilum.

Un-

Unde si qui sint alii numeri, qui similiter à zero incipientes, progressionem constituant arithmeticam, eos eandem proprietatem habere, non est, quod in dubiū possit revocari: proindeque theorema enunciari potest generaliter in hunc modum, quod summa quotcumque terminorum progressionis arithmeticæ cujuscumque, à zero inchoatæ, subdupla sit summæ terminorum totidem maximo æqualium. Sic summa istorum terminorum 0, 2, 4, 6, 8 est 20, & summa terminorm totidem æqualium maximo 8 est 40. Similiter summa istorum terminorum 0, 3, 6, 9, 12 est 30, & summa ex totidem terminis, quorum quisque adæquet maximum 12, est 60.

IV.

De seriebus infinitis, quarum termini sunt numeri figurati numerorum naturalium.

Nunc considerandæ nobis erunt series illæ infinitæ, quarum termini sunt numeri, qui vulgò dicuntur figurati: Qua in re exibenda est priùs istorum numerorum brevis quædam idea. Et quoniam eorum consideratio profecta est ex con-

contemplatione numerorum multangulorum, ab ipsis Veteribus facta; proinde qui sint numeri multanguli, sive polygoni, ante omnia explicandum nobis erit.

Numeri multanguli, sive polygoni dicuntur, qui oriuntur ex continua collectione aliorū, æquali intervallo ab unitate progredientium; & pro diversitate hujus intervalli, variæ distinguuntur numerorum multangulorum species; nam dicuntur trianguli, si intervallum sit unitas; dicuntur quadrati, si intervallum sit binarius; dicuntur pentagoni, si idem intervallum sit ternarius; atque ita deinceps.

Hac ratione, si numeri ab unitate æquali intervallo progredientes sint ipsi numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c., quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est unitas, habebuntur ex eorum continua collectione omnes numeri trianguli. Qua ratione 1 erit primus triangulus; 1 + 2, sive 3 erit triangulus secundus; 1 + 2 + 3, sive 6 triangulus tertius; atque ita in infinitum.

Quod si numeri ab unitate æquali intervallo progredientes sint numeri impares naturales 1, 3, 5, 7, 9 &c., quia intertervallum, quo numeri progrediuntur, eſt numerus binarius, orientur ex continua illorum collectione omnes numeri quadrati. Qua ratione 1 erit primus quatus; 1 + 3, ſive 4 erit quadratus ſecundus; 1 + 3 + 5, ſive 9 quadratus tertius; atque ita continuò.

Sed ſi porrò ſeries numerorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, ſit 1, 4, 7, 10, 13 &c., quia intervallum, quo numeri progrediuntur eſt numerus ternarius, orientur ex eorum collectione continua omnes numeri pentagoni. Qua ratione 1 erit primus pentagonus; 1 + 4, ſive 5 erit pentagonus ſecundus; 1 + 4 + 7, ſive 12 pentagonus tertius; & ſic in infinitum.

Hos numeros polygonos, ſive multangulos, prout ex Veterum monumentis colligere licet, conſideravit primùm Hypſicles, qui geneſim ipſorum hac definitione complexus eſt: ſi fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes; ſumma omnium erit triangulus, ſi intervallum ſit unitas; quadratus, ſi binarius; pentagonus, ſi ternarius; atque ita deinceps.

Et quoniam numerus angulorum in hac Hypſiclis definitione per numerum binario majorem intervallo, quo numeri ab unitate progrediuntur, deſignatur; proinde Diophantus eandem illam definitionem ſic generaliter concepit: ſi fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, omnium ſumma multangulus erit, totque angulos continebit, quot numerus, binario ſuperans intervallum, habet unitates.

Hujuſmodi porrò numeri dicti ſunt multanguli, ſive polygoni, quia ipſorũ unitates per æqua intervalla in polygoni æquilateri formam diſponi poſſunt: nimirum numeri trianguli in formam trianguli æquilateri; numeri quadrati in formam quadrati, aut etiam rhombi, atque ita de aliis. Unde definiri quoque poſſunt numeri multanguli, ſive polygoni, quorum unitates æqualibus intervallis multangulum, ſive polygonum æquilaterum exhibent.

Jam quemadmodum Veteres conſiderarunt numeros, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, eoſque multangulos, ſive polygonos numeros appellarunt, quia unitates ipſorum, per æqua intervalla diſpoſitæ, multangulum, ſive polygonum æquilaterum repræſentãt. Sic

Recentiores, ulteriùs progressi, considerarunt numeros alios, qui generantur ex continua ipsorum multangulorum, indeque ortorum numerorum additione, vel collectione, & tam hos, quàm illos figuratos appellarunt, quia scilicet unitatibus ipsorum, per æqua intervalla dispositis, diversimode possunt configurari.

Quocirca numeri figurati dicuntur, non modò ii, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium; verùm etiam qui ex continua inde ortorum numerorũ additione generantur. Ex quo patet, numeros istos figuratos non modò in varia genera distingui posse, pro diversitate intervalli, quo numeri genitores, hoc est ab initio assumpti ab unitate progrediuntur; sed & ipsos cujusque generis numeros in varios ordines dividi posse, pro diversa ratione, qua ex iisdem illis numeris genitoribus, sive ab initio assumptis generari intelliguntur.

Sed hic non alios nos numeros figuratos considerabimus, quàm qui sunt generis primi, quique oriuntur à numeris, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur. Atque eos in certos ordines ita dividemus, ut quemadmodum dicun-

cuntur numeri genitores ipsi illi numeri, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur, ita dici debeant numeri figurati primi ordinis, qui oriuntur ex additione continua numerorum genitorum; numeri figurati secundi ordinis, qui oriuntur ex collectione continua eorum, qui sunt ordinis primi; numeri figurati tertii ordinis, qui gignuntur ex continua collectione eorum, qui sunt ordinis secundi; atque ita deinceps.

Considerandæ sunt igitur nobis hoc loco series, quarum termini, aut etiam coefficientes terminorum sunt numeri isti figurati generis primi. Et quoniam hujusmodi numeri oriuntur ex collectione continua numerorum naturalium, eorũque inde ortorum numerorum; profectò sicuti omnes numeri naturales, in unum collecti, constituunt quantitatem infinitam; ita multò magis quantitas infinita orietur, quum numeri omnes figurati, cujuscumque sint ordinis, in unam summam sunt colligendi. Sed nihilominus sicuti in unum colligere licet terminos quotcumque numerorum naturalium, ob proprietatem illam, quod si iis zero præfigatur, summa terminorum aliquot sit ad summam terminorum totidẽ maxi-

maximo æqualium in ratione subdupla; ita ptopter proprietates quasdam non dissimiles, quæ in numeris illis figuratis occurrunt, poterit quotcumque illorum numerorum finita semper summa inveniri.

Nimirum, quemadmodum in numeris naturalibus, qui sunt genitores numerorum figuratorum, quos hìc consideramus, præfixo unitati, sive primo termino unico zero, summa terminorum aliquot erit ad summam terminorum totidem maximo æqualium in ratione subdupla, hoc est, ut unitas ad binarium. Ita in numeris figuratis, qui ex collectione numerorum naturalium oriuntur, si primo termino tot zero præfigantur, quot designat exponens ordinis numerorum figuratorum, auctus unitate una, hoc est, duo in numeris figuratis ordinis primi, tria in numeris figuratis ordinis secundi, atque ita deinceps; summa terminorum aliquot erit ad summam ex totidem terminis, quorum quisque maximum adæquet, ut unitas ad eundem exponentem, auctum duabus unitatibus, hoc est, ut 1 ad 3 in numeris figuratis ordinis primi, ut 1 ad 4 in numeris figuratis ordinis secundi, atque ita continuò.

Hac ratione numeri figurati ordinis primi, qui scilicet oriuntur ex collectione continua numerorum naturalium, sunt 1, 3, 6, 10, 15, 21 &c., & si iis duplex zero præfigatur, ac in unum addantur quinque termini, erit eorum summa 10, & summa terminorum totidem, æqualium maximo 6, erit 30. Similiter numeri figurati ordinis secundi, qui scilicet oriuntur ex additione continua numerorum figuratorum primi ordinis, sunt 1, 4, 10, 20, 35, 56 &c., & si iis triplex zero præfigatur, addanturque termini septem, erit eorum summa 35, & summa terminorum totidem æqualium maximo 20, erit 140. Atque ita quoque quia numeri figurati ordinis tertii sunt 1, 5, 15, 35, 70, 126 &c., perspicuum est, quod si iis quatuor zero præfigantur, colliganturque in unum termini novem, summa eorum fit 126, & summa ex terminis totidem, quorum quisque adæquet maximum 70, fit 630.

Hac numerorum figuratorum proprietate supposita, facile erit eorundem quotcumque terminos in unam summam colligere. Incipiemus autem ab ipsis numeris naturalibus, qui sunt genitores numerorum figuratorum, quos hìc consideramus.

Itaq; si numerorum naturalium colligendi sint in unam summam tot tetmini, quot designat numerus m, erit ultimus, sive maximus terminus ipse numerus m, vel etiam $\frac{m}{1}$. Sed præfixo numeris istis unico zero, summa quotcumque terminorum fit subdupla summæ terminorum totidem maximo æqualium. Quare si maximus ille terminus capiatur toties, quot unitates continet $m + 1$, & producti inde orti capiatur semissis, erit sūma quæsita $\frac{m.m+1}{1.2}$, hoc est $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$; nam puncta quantitatibus interjecta multiplicationem earum quantitatum hoc loco designant.

Proponantur secundò in unam summam colligendi termini totidem numerororum figuratorum primi ordinis, quot designat idem numerus m. Et quoniam numeri figurati primi ordinis, de quibus hìc loquimur, oriuntur ex additione continua numerorum naturalium, erit ultimus, sive maximus terminus $\frac{m.m+1}{1.2}$: Jam verò si numeris figuratis pri-

primi ordinis duplex zero præfigatur; summa terminorum aliquot fit subtripla terminorum totidem maximo æqualium. Itaque si maximus ille terminus toties capiatur, quot unitates continet $m + 2$, & producti inde orti sumatur triens, erit $\frac{m.m+1.m+2}{1.2.3}$, summa, quam oportet invenire.

Proponantur tertiò in unum addendi tot termini numerorum figuratorum ordinis secundi, quot designantur ab eodē numero m. Quia ergo numeri figurati secundi ordinis oriuntur ex continua collectione eorum, qui sunt ordinis primi, erit ultimus, sive maximus terminus $\frac{m.m+1.m+2}{1.2.3}$. Sed numerorum figuratorum secundi ordinis ea est proprietas, ut si iis triplex zero præfigatur, summa quotcumque terminorum fit subquadrupla summæ ex totidem terminis, quorum quisque maximum adæquet. Igitur si maximus ille terminus toties accipiatur, quot unitates continet $m + 3$, & producti inde orti quadrans capiatur, erit sum-

$$\frac{m \cdot m+1 \cdot m+2 \cdot m+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$ summa quæsita.

Non dissimili ratione colligi poterunt in unam summam termini quotcumque numerorum figuratorum superiorum ordinum. Sed notetur hoc loco velim, summas istas designari per duplicem progressionem arithmeticam, utramque ascendentem per unitatis incrementum, unam à multitudine assumpta terminorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminis constantem, quot designat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus. Unde ad easdem illas summas inveniendas poterit generaliter hæc regula adhiberi.

Nimirum fiant duæ progressiones arithmeticæ, ambæ ascendentes per unitatis incrementum, una quidem à multitudine terminorum in unam summam colligendorum, altera ab unitate, & utraque tot terminorum, quot designat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus. Multiplicentur deinde inter se mutuò tam termini prioris progressionis, quàm termini alterius; & diviso producto ex primis per productum ex secundis, erit quotiens terminorum summa quæsita.

Ita si in unam summam sint colligendi decem termini numerorum figuratorum ordinis primi, progressionum constituendarum una erit 10, 11, 12, altera 1, 2, 3. Et quia id, quod oritur, multiplicando simul terminos illius, est 1320; id verò, quod producitur ex multiplicatione terminorum alterius hujus progressionis, est 6; divido 1320 per 6, & erit 220 summa quæsita.

Jam quemadmodum summa numerorũ omnium naturalium est ad summam terminorum totidem maximo æqualium in ratione subdupla, hoc est, ut unitas ad binarium; ita summa numerorum omnium figuratorum cujusque ordinis est ad summam ex totidem terminis, quorum quisque maximum adæquet, ut unitas ad exponentem ordinis eorum numerorum, duabus unitatibus auctum. Nam numerorum figuratorum, ut superiùs vidimus, ea est proprietas, ut summa terminorum aliquot sit ad maximum terminum toties sumptum, quot designat multitudo terminorum, aucta non modò unitatibus exponentis, verùm etiam una adhuc, ut est unitas ad ipsum exponentẽ, duabus unitatibus auctum. Sed quum mul-

multitudo terminorum ponitur infinita ; ea per unitates exponentis, & alteram illam adhuc superaddendam non augetur. Itaque, quia in hoc casu satis erit maximum terminum toties sumere, quota est ipsa terminorum multitudo ; consequens est, ut summa numerorum omnium figuratorum cujusque ordinis sit ad summam terminorum totidem maximo æqualium, ut est unitas ad exponentem ordinis numerorum, duabus unitatibus auctum.

Ut autem numerorum figuratorum proprietatem illam ostendamus, demonstrandum est priùs hoc theorema : nempe, quod si fuerit series quædam numerorum a, b, c, d &c., quorum ea sit proprietas, ut summa terminorum quotcumque sit ad terminum ultimum toties sumptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitatibus m, perpetuò ut unitas ad numerum n ; & e, f, g, h &c. sit alia series numerorum, qui ex illarum continua collectione oriantur : quod inquam in hac alia serie summa quotcumque terminorum sit ad terminum ultimum toties acceptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitatibus $m+1$, ut est unitas ad numerum $n+1$.

Neque verò difficile erit, theorema istud osten-

dere. Nam ex hypothesi a est ad $\overline{m+1}\,a$, ut 1 ad n ; & similiter in hac eadem ratione est quoque, non modò $a+b$ ad $\overline{m+2}\,b$, verùm etiam $a+b+c$ ad $\overline{m+3}\,c$, & $a+b+c+d$ ad $\overline{m+4}\,d$. Itaque, conjungendo simul, tam omnes antecedentes, quam omnes consequentes, erit $4a+3b+2c+d$ ad $\overline{m+1}\,a+\overline{m+2}\,b+\overline{m+3}\,c+\overline{m+4}\,d$, ut 1 ad n; atque adeo componendo erit, ut $4a+3b+2c+d$ ad $\overline{m+5}\;\overline{a+b+c+d}$, ita 1 ad $n+1$. Jam verò, quum numeri e, f, g, h oriantur ex collectione continua numerorum a, b, c, d ; $4a+3b+2c+d$ est idem, ac $e+f+g+h$, & $a+b+c+d$ perinde valet, ac h. Quare erit, ut $e+f+g+h$ ad $\overline{m+5}\,h$, ita 1 ad $n+1$; hoc est, ut summa quatuor terminorum e, f, g, h ad ultimum terminum h acceptum toties, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitatibus $m+1$, ita unitas ad numerum $n+1$.

Hoc ostenso theoremate, proprietas illa numerorum figuratorum sua sponte sequitur. Nam numeri figurati primi ordinis oriuntur ex additione continua nanumerorum naturalium. Sed horum numerorum, ut superiùs ostensum fuit, ea est proprietas, ut summa terminorum aliquot sit ad terminum ultimum toties acceptum, quota est ipsa multitudo, aucta unitate una, ut 1 ad 2. Itaque in numeris figuratis primi ordinis summa terminorum quotcumque erit ad terminum ultimum toties sumptum, quota est ipsa terminorum multitudo, duabus unitatibus aucta, ut est 1 ad 3. Unde porrò, quia numeri figurati secundi ordinis oriuntur ex continua collectione eorum, qui sunt ordinis primi, erit in iis summa terminorum aliquot ad terminum ultimum toties sumptum, quota est ipsa terminorum multitudo tribus unitatibus aucta, ut 1 ad 4. Atque ita gradatim numerorum figuratorum aliorum ordinum proprietates deducentur.

Sed nolo hic silentio præterire, proprietatem illam numerorum naturalium, quam superiùs ob naturam progressionis arithmeticæ demonstratam dedimus, colligi quoque posse ex theoremate mox à nobis ostenso. Oriuntur siquidem numeri naturales ex continua collectione unitatum. Jam verò in serie unitatum summa terminorum aliquot est ad terminum ultimum toties sumptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitate nulla, in ratione æqualitatis, hoc est ut 1 ad 1. Itaque in serie numerorum naturalium summa quotcumque terminorum est ad terminum ultimum toties acceptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitate una, in ratione subdupla, hoc est, ut 1 ad 2.

V.

De seriebus infinitis, quarum termini sunt potestates numerorum naturalium.

PRoximum est, ut eas contemplemur series infinitas, quarum termini sunt potestates, hoc est quadrata, cubi, quadrato-quadrata numerorum naturalium. Et quamquam hujusmodi series tales etiam esse constet, ut in infinitum continuatæ, numquam possint summam finitam exhibere; quum & ipsi numeri naturales, si omnes colligantur in unum, infinitam constituant quantitatem. Utilis tamen est earum serierum contemplatio: quia tametsi summa omnium infinitorum terminorum, velut infinita, haberi

beri non possit; nihilominus, quæ summa oriatur ex quamplurium terminorũ additione, facile erit definire.

Ad has summas definiendas magnopere conferunt summæ jam determinatæ numerorum figuratorum, qui ex numeris naturalibus oriuntur. Nam etsi, qui infinitorum tractarunt Arithmeticam, primò summas quadratorum, cuborum, aliarumque potestatum numerorum naturalium investigaverint, deinde verò ad definiendas summas numerorum figuratorum pertransierint. Naturæ tamen rei longè meliùs convenire videtur, si primò quidem numerorum figuratorum summæ determinentur, postea verò ad potestatum summas investigandas descendatur; quandoquidem ex cognitis summis figuratorum summæ potestatum nullo negotio deducuntur.

Itaque quum à nobis summæ numerorum figuratorum jam sint determinatæ, videamus, qua ratione mediantibus iis summæ potestatum possint definiri. Et quidem, quia primæ potestates numerorum naturalium ab ipsis numeris naturalibus non differunt; quum prima potestas cujusque quantitatis sit ipsa quantitas semel posita: fit hinc, ut ad inveniendam

dam summam primarum potestatum numerorum naturalium, satis sit ipsos naturales numeros in unam summam colligere: proindeque si quilibet numerus naturalis indefinitè designetur per m, erit

$\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$ summa omnium m; quia scilicet hæc eadem quantitas inventa est superiùs pro summa numerorum totidem naturalium, quot designat numerus m.

Proponatur secundò invenienda summa quadratorum, sive secundarum potestatum numerorum naturalium. Et jam si m referat indefinitè quemcumque numerum naturalem, designabit etiam indefinitè $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$ quemcumque numerum figuratum ordinis primi. Sed summa indefinita omnium numerorũ figuratorũ primi ordinis est $\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m$. Itaque hæc eadem quantitas erit summa omnium $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$; & consequenter eadem quantitas duplicata erit summa om-

omnium $mm + m$. Jam verò summa omnium m est $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$. Quare si ex quantitate illa duplicata, hæc alia subducatur, erit residuũ $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$ summa omnium quadratorum mm.

Proponatur tertiò invenienda summa ex cubis, sive tertiis potestatibus numerorum naturalium. Quoniam m refert indefinitè quemcumque numerum naturalem, designabit etiam indefinitè $\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m$ quemcũque numerum figuratum ordinis secũdi. Sed summa indefinita numerorum figuratorũ secundi ordinis est $\frac{1}{24}m^4 + \frac{1}{4}m^3 + \frac{11}{24}m^2 + \frac{1}{4}m$. Itaque hæc eadem quantitas erit, summa omnium $\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m$; & consequenter eadem quantitas sextuplicata erit summa omnium $m^3 + 3m^2 + 2m$. Jam verò, quia summa omnium m in-

inventa est $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$, erit summa omnium $2m$ æqualis $m^2 + m$; & similiter, quia summa omnium m^2 inventa est $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$, erit summa omnium $3m^2$ æqualis $m^3 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$. Itaque si ex quantitate illa sextuplicata hæ aliæ duæ subducantur, erit residuum $\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2$ sũma omniũ m^3.

Non dissimili methodo ad altiores gradatim potestates pergere licet, earundemque summas ex definitis summis numerorum figuratorum ordinis superioris determinare. Sed ut uno, aut altero exemplo illustremus id, quod generaliter, ac indefinitè definivimus, proponatur invenienda summa quadratorum ex primis sex numeris naturalibus. Quoniam quadratorum summa indefinita est $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$, satis erit in hac formula generali valorem ipsius m substituetuere. Itaque, quia m est 6, erit sextans ipsius m æqualis 1; & similiter, quia m^2 est 36, erit semissis ipsius m^2 æqualis 18; atque ita quoque, quia m^3 est 216, erit triens ipsius m^3 æqualis 72. Quare summa quæsita erit $72 + 18 + 1$, hoc est 91.

Oporteat quoque invenire summam cuborum, qui fiunt ex iisdem primis sex numeris naturalibus. Quoniam summa indefinita cuborum designatur per $\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2$, ubi m ponitur quemcumque numerum naturalem repræsentare, sufficiet in hac formula generali valorem ipsius m subrogare. Quocirca, quia m est 6, erit mm 36, atque adeo quadrans ipsius mm erit 9. Et quoniam m^3 est 216, erit semissis ipsius m^3 æqualis 108. Ac denique quia m^4 est 1296, erit quadrans ipsius m^4 æqualis 324. Qua ratione subrogatis omnibus hisce valoribus in formula illa generali, erit $324 + 108 + 9$, hoc ex 441 summa quæsita.

Jam quemadmodum summa indefinita numerorum naturalium $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$.

est

est tantùm $\frac{1}{2}m^2$, quum numerus m ponitur infinitus: unde sequitur, summam numerorum omnium naturalium esse ad summam totidem maximo æqualium in ratione subdupla, hoc est, ut 1 ad 2. Ita quoque summa indefinita quadratorum, quæ fiunt ex numeris naturalibus $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$, erit tantùm $\frac{1}{3}m^3$, ubi ponitur m multitudinem infinitam repræsentare: ex quo colligere licebit hoc theorema, quod summa quadratorum omnium, quæ fiunt ex numeris naturalibus, sit ad summam totidem maximo æqualium in ratione subtripla, hoc est, ut 1 ad 3.

Similiter autem, quia summa indefinita cuborum, qui fiunt ex numeris naturalibus, est $\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2$; hæc erit tantùm $\frac{1}{4}m^4$, quum numerus m ponitur infinitus: unde etiam hujusmodi profluit theorema, quod summa cuborum omnium, qui fiunt ex numeris naturali-

bus,

bus, sit ad summam totidem maximo æqualium in ratione subquadrupla, hoc est, ut 1 ad 4. Atque ita quoque, si potestatum altiorum summæ indefinitæ tradita methodo determinentur; invenietur, summam ex quadrato-quadratis numerorum omnium naturalium esse ad summam totidem æqualium maximo, ut 1 ad 5; & summam ex quadrato-cubis, ut 1 ad 6; & summam ex cubo-cubis, ut 1 ad 7; atque ita deinceps.

Atque hinc plura alia theoremata colligere licet, proportionem inter numeros figuratos, & potestates numerorum naturalium exhibentia, quæ nescio an adhuc ab Auctore aliquo sint adnotata: nempe primò, quum summa ex omnibus numeris figuratis primi ordinis sit ad summam totidem maximo æqualium, ut 1 ad 3, atque in hac eadem ratione sit etiam summa quadratorum omnium ad summam totidem æqualium maximo; erit summa ex omnibus numeris figuratis primi ordinis ad maximum, ut summa ex omnibus quadratis ad quadratum similiter maximum.

Secundò, quum summa ex omnibus numeris figuratis secundi ordinis sit ad summam totidem maximo æqualium, ut 1 ad

1 ad 4, atque in hac eadem ratione sit etiam summa omnium cuborum ad summam totidem æqualium maximo; erit summa ex omnibus numeris figuratis secundi ordinis ad maximum, ut summa omnium cuborum ad cubum similiter maximum.

Tertiò, quia summa ex omnibus numeris figuratis tertii ordinis est ad summam totidem maximo æqualium, ut 1 ad 5, atque in hac eadem ratione est etiam summa ex omnibus quadrato-quadratis ad summam totidem æqualium maximo; erit summa ex omnibus numeris figuratis tertii ordinis ad maximum, ut summa ex omnibus quadrato-quadratis ad quadrato-quadratum similiter maximum.

Nec dissimiliter determinari poterunt proportiones inter numeros figuratos superioris ordinis, & potestates altiores. Sed proportiones istas licebit etiam paulò specialiùs definire. Nam ultimus ex numeris figuratis primi ordinis, veluti aggregatum omnium numerorum naturalium, est $\frac{1}{2}mm$, hoc est semissis maximi quadrati. Itaque summa omnium

 nu-

numerorũ figuratorum primi ordinis erit etiam ſemiſſis ſummæ omnium quadratorum.

Eadem ratione ultimus ex numeris figuratis ſecundi ordinis, veluti aggregatum ex iis, qui ſunt ordinis primi, eſt $\frac{1}{6}m^3$, hoc eſt ſextans maximi cubi. Quare ſumma omnium numerorum figuratorum ſecundi ordinis erit etiam ſextans ſummæ omnium cuborum. Atque hac ratione in infinitum progredi licebit.

Quæ omnia ex ipſis ſummis indefinitis eorum numerorum immediatè colligi poterunt. Nam ſumma indefinita omnium numerorũ figuratorum primi ordinis eſt $\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m$; & ſumma indefinita omnium quadratorum inventa eſt $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$. Unde quia, quum nnmerus m ponitur infinitus, illa fit $\frac{1}{6}m^3$, hæc $\frac{1}{3}m^3$, liquet ſummas illas

eſſe inter ſe, ut 1 ad 2.

Similiter ſumma indefinita omnium numerorum figuratorum ſecundi ordinis eſt $\frac{1}{24}m^4 + \frac{1}{4}m^3 + \frac{11}{24}m^2 + \frac{1}{4}m$, & ſumma indefinita omnium cuborum eſt $\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2$. Quocirca quia poſito infinito numero m, prior ſumma evadit $\frac{1}{24}m^4$, poſterior verò mutatur in hanc aliam $\frac{1}{4}m^4$; palam eſt, ſummas illas eſſe inter ſe, ut 1 ad 6.

Sed nolo hìc reticere pulcherrimam proprietatem, quæ deprehenditur in ſummis indefinitis tam poteſtatum, quàm numerorum figuratorum: nempe quod ſi propriis ſuis ſignis addantur in unum fractiones illæ, quæ in ſummis illis ſunt terminorum coefficientes, ſumma, quæ inde oritur, ſit ubique unitas. Atque hanc proprietatem cernere quoque licet in ſumma indefinita ipſorum numerorum naturalium, qui tam inter poteſtates, quàm inter numeros figuratos reponi possunt. Nam quum ea sit $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$, perspicuum est coefficientes terminorum simul additos unitatem adæquare.

VI.

Serierum infinitarum exempla alia afferuntur.

Vidimus superiùs series infinitas, quarum termini sunt, vel numeri naturales, vel numeri figurati numerorum naturalium, in infinitum continuatas, numquam posse finitas summas exhibere. Interim si termini earum serierum dividantur ordine per terminos alterius seriei, cujus termini crescendo geometricè progrediantur, vel quod eodem recidit, multiplicenrur per terminos novæ seriei, cujus termini progediantur geometricè decrescendo; id quod orietur ex infinitorum illorum terminorum collectione, erit semper quantitas finita

Dividantur itaque primò termini, constituentes seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 &c. per terminos progressionis geometricæ crescentis a, a^2, a^3, a^4 &c. ita, ut nova series oriatur $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{4}{a^4}$ &c. Et jam, si quisque teminus novæ hujus seriei resolvatur in tot alios, quot numerator ejus continet unitates; constitui poterunt infinitæ aliæ series, quæ singulæ progrediuntur geometricè decrescendo, una ab $\frac{1}{a}$, altera ab $\frac{1}{a^2}$, tertia ab $\frac{1}{a^3}$, atque ita deinceps. Unde quia summæ istarum serierum, per ea, quæ ostensa sunt articulo secundo, inveniuntur $\frac{1}{a-1}$, $\frac{1}{a^2-a}$, $\frac{1}{a^3-a^2}$ &c.; & series istarum summarum est ad seriem $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$ &c., ut a ad $a-1$; erit summa omnium infinitorum terminorũ novæ illius seriei quantitas a, divisa per quadratum ipsius $a-1$.

Dividantur secũdò termini constituentes seriem numerorum figuratorum primi ordinis 1, 3, 6, 10 &c. per terminos ejus-

ejusdem progressionis geometricæ crescentis a, a^2, a^3, a^4 &c. ita, ut nova series habeatur $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{6}{a^3} + \frac{10}{a^4}$ &c. Et rursus, si quisque terminus novæ hujus seriei resolvatur in plures alios, quorum numeratores sint numeri naturales, ex quibus componitur numerator illius; constitui poterunt infinitæ aliæ series, quæ singulæ progrediantur geometricè decrescendo, una ab $\frac{1}{a}$, secunda à $\frac{2}{a^2}$, tertia à $\frac{3}{a^3}$, atque ita deinceps. Quocirca quia summæ istarum serierum, per ostensa in articulo secundo, inveniuntur $\frac{1}{a-1}$, $\frac{2}{a^2-a}$, $\frac{3}{a^3-a^2}$ &c., & series istarum summarum est ad seriem $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3}$ &c., ut a ad $a-1$; erit summa omnium infinitorum terminorum novæ illius seriei quantitas a^2 divisa per cubum ipsius $a-1$.

Dividantur tertiò termini constituen-

tes

tes seriem numerorum figuratorum secundi ordinis 1, 4, 10, 20 &c. per terminos ejusdem adhuc progressionis geometricæ crescentis a, a^2, a^3, a^4 &c. ita, ut nova series constituatur $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{10}{a^3} + \frac{20}{a^4}$ &c. Et similiter, si quisque terminus novæ hujus seriei resolvatur in plures alios, quorum numeratores sint numeri figurati primi ordinis, ex quibus componitur numerator illius; constitui poterunt infinitæ aliæ series, quæ singulæ progrediantur geometricè decrescendo, una ab $\frac{1}{a}$, altera à $\frac{3}{a^2}$, tertia à $\frac{6}{a^3}$, atque ita deinceps. Unde quia summæ istarum serierũ per ea, quæ ostensa sunt in articulo secundo, inveniuntur $\frac{1}{a-1}$, $\frac{3}{a^2-a}$, $\frac{6}{a^3-a^2}$ &c., & series istarum summarum est ad hanc aliam seriem $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{6}{a^3}$ &c., ut a ad $a-1$; erit summa omnium infininitorum termino-

norum novæ illius ſeriei quantitas a^3 diviſa per quadrato-quadratum ipſius $a - 1$.

Eodem artificio invenire licet, ſummam finitam infinitorum terminorum cujuslibet alterius ſeriei, quæ oriatur, dividendo numeros figuratos ordinis ſuperioris per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4 &c. Nimirum reſolvendo unumquemque terminorum illius ſeriei in plures alios, quorũ numeratores ſint numeri figurati ordinis præcedentis, ex quibus termini illius numerator componitur; & conſtituendo infinitas alias ſeries, quarum termini numeratores habeant conſtantes, & conſequenter geometricè progrediantur. Nam quum ſummæ harum ſerierum inveniantur per ea, quæ oſtenſa ſunt in articulo ſecundo, & ſeries harum ſummarum ſit ad ſeriem ortam ex numeris figuratis ordinis præcedentis, perpetuò ut a ad $a - 1$; ex cognita ſumma iſtius ſeriei, facile erit, illius quoque ſummam invenire.

Sed ex iis, quæ hactenus oſtenſa ſunt, haud difficile erit, regulam credere, quæ ad omnes caſus ſe extendat. Nam ſi termini progreſſionis geometricæ decreſcentis $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4}$ &c., cujus ſumma eſt uni-

unitas diviſa per $a - 1$, afficiantur numeris naturalibus 1, 2, 3, 4 &c., ſumma erit quantitas a diviſa per quadratum ipſius $a - 1$; ſi verò afficiantur numeris figuratis primi ordinis 1, 3, 6, 10 &c., ſumma erit quantitas a^2 diviſa per cubum ipſius $a - 1$; ſi porrò afficiantur numeris figuratis ſecundi ordinis 1, 4, 10, 20 &c., eadem ſumma erit quantitas a^3 diviſa per quadrato-quadratum ejuſdem $a - 1$; atque ita deinceps. Itaque ſi ipſi numeri naturales inter figuratorum ordines collocentur, ita ut exponens ordinis ipſorum ſit zero, ſive nihilum, regula generalis hæc erit. Elevetur quantitas a ad poteſtatem, quam deſignat exponens ordinis numerorũ, auctus unitate una; deinde dividatur eadem per eam poteſtatem ipſius $a - 1$, quam deſignat idem exponens duabus unitatibus auctus, & quotiens dabit ſummam, quam oportet invenire.

Hac ratione ſi termini progreſſionis geometricæ decreſcentis $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4}$ &c. afficiantnr numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, &c., ponaturque a æqualis binario; ſe-

series erit $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}$ &c., & summa infinitorum terminorum hujus seriei, erit similiter 2. Quod si verò termini illi afficiantur numeris figuratis primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15 &c., maneatque adhuc a æqualis binario; series erit $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{6}{8}+\frac{10}{16}$ &c., eritque 4 summa infinitorum terminorum hujus seriei. Atque ita quoque erit 8 summa seriei $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{10}{8}+\frac{20}{16}$ &c., quæ oritur, si termini progressionis geometricæ decrescentis afficiantur numeris figuratis secundi ordinis 1, 4, 10, 20 &c. Et 16 summa seriei $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{15}{8}+\frac{35}{16}$ &c., quæ habebitur, afficiendo terminos ejusdem progressionis numeris figuratis tertii ordinis 1, 5, 15, 35 &c.

Præterea circa numeros istos figuratos illud etiam hoc loco notatu dignum existimo, quod etsi summa ipsorum, cujuscumque sint ordinis, sit infinita, attamen

si in-

si invertantur, & fiant denominatores fractionum, quarum unaquæque unitatem habeat pro suo numeratore, iidem simul collecti summam exhibeant finitam. Est autem hujus rei hoc quidem theorema generale, quod in numeris figuratis inversis summa omnium terminorum, qui primum excipiunt, eam unitatis partem adæquet, quam designat exponens ordinis numerorum, nempe unitatem ipsam in numeris figuratis primi ordinis, semissem unitatis in numeris figuratis secundi ordinis, unitatis trientem in numeris figuratis ordinis tertii, atque ita deinceps.

Invertantur itaque primò numeri figurati primi ordinis 1,3,6,10,15 &c., ita ut fiat series $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ &c. Oportet ostendere summam omnium terminorum hujus seriei, excepto primo, unitatem adæquare. Fiat series harmonica ex numeris naturalibus inversis $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. Et jam, si ab ea eademmet multata primo termino subtrahatur, residuum erit ipse terminus

pri-

primus, qui unitatem adæquat. Sed si subtractio fiat ea lege, ut termini unius ordine subducantur ex terminis alterius, prodit hæc alia series $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ &c., cujus duplum est series, quæ oritur ex inversione numerorum figuratorum ordinis primi, quum sit $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ &c. Itaque summa hujus seriei æqualis erit duplo unitatis; & propterea, dempto primo termino, qui supererunt unitatem ipsam adæquabunt.

Invertantur secundò numeri figurati secundi ordinis 1, 4, 10, 20 &c., ita ut series fiat $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ &c. Ostendendum est modò, terminos omnes hujus seriei, excepto primo, semissem unitatis adæquare. Fiat series ex inversione numerorum figuratorum ordinis primi $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ &c. Et siquidem ab illa eademmet multata primo termino subtrahatur, residuum erit ipse terminus

pri-

primus, qui unitatem adæquat. Jam verò si subtractio ea lege instituatur, ut termini unius ordine subducantur ex terminis alterius, nascitur hæc alia series $\frac{2}{3}+\frac{3}{18}+\frac{4}{60}+\frac{5}{150}$ &c., cujus termini ad terminos seriei $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ &c. rationem habent constantem, nimirum eandem, quam habet 2 ad 3. Itaque, quia valor illius seriei est unitas, erit valor alterius hujus seriei ad unitatem, ut 3 ad 2: proindeque, dempto primo termino, qui remanebunt, semissem unitatis adæquabunt.

Invertantur tertiò numeri figurati tertii ordinis 1, 5, 15, 35 &c., ita ut series constituatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$ &c. Dico, omnes terminos hujus seriei, excepto primo, trientem unitatis adæquare. Fiat series ex inversione numerorum figuratorum secūdi ordinis $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ &c. Et siquidem ab ea eademmet multata primo termino subducatur, id quod re-

 ma-

manebit, erit ipse terminus primus, qui unitatem adæquat. Sed si subtractio ea lege fiat, ut termini unius ordine subducantur ex terminis alterius, producitur hæc alia series $\frac{3}{4} + \frac{6}{40} + \frac{10}{200} + \frac{15}{700}$ &c., atque hujus termini ad terminos seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}$ &c. rationem habent constantem, nimirum eandem illam, quam habet 3 ad 4. Itaque, quia valor illius seriei est unitas, erit valor alterius hujus seriei ad unitatem, ut 3 ad 4: & proinde, dempto primo termino, qui superunt, trientem unitatis adæquabunt.

Non dissimiliter veritatem propositi theorematis ostendemus, invertendo numeros figuratos ordinum superiorũ. Sed si ipsi numeri naturales inter ordines numerorum figuratorum collocentur, ratione superiùs tradita: ita nempe, ut exponens ordinis talium numerorum sit zero, sive nihilum, poterit idem theorema iis etiam numeris applicari. Invertantur enim numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c., & constituatur ex eorum inversione series harmonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c.

Dico, omnes terminos hujus seriei, qui primum excipiunt, simul collectos eam unitatis partem adæquare, quam designat zero, sive nihilum, hoc est exponens ordinis numerorum naturalium: proindeque summam omnium illorum terminorum esse quantitatem infinitam; quum dividendo finitum per zero, sive nihilum, infinitum oriatur.

Id autem, veluti prorsus memorabile, multipliciter ostendemus. Et primò quidem in hunc modum. Fiat series ex inversione numerorum figuratorum primi ordinis $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ &c. Et quoniã omnes termini, qui primum excipiunt, adæquant unnitatem, erit tota series æqualis binario: proindeque dimidium ejusdem seriei unitatẽ rursus adæquabit. Capiatur autem dimidium illius seriei; & jam nova series orietur $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ &c., quæ considerari poterit, veluti generatrix feriei harmonicæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. Nam quemadmodum tota illa feries dat primum terminum iftius; ita ex eadẽ, multata primo termino, orietur iftius terminus fecundus; & ex eadem, multata duobus terminis, orietur iftius terminus tertius; atque ita deinceps.

Ex quo patet, quod fi feriei illius $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ &c. quifque terminus capiatur toties, quotus eft locus, quem ipfe occupat in ferie; ipfa feries harmonica debeat oriri. Id autem quum fit, oritur feries $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}$ &c., quæ, reductis terminis omnibus ad fimpliciores fuas expreffiones, mutatur in hanc aliam $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c., fcilicet in ipfam feriem harmonicam, primo termino multatam. Itaque feries harmonica talis eft, ut à fe ipfa, multata primo termino, non differat: proindeque primus terminus, nempe unitas, evanefcit refpe-

ctu totius feriei: quod non aliter fieri poffe perfpicuum eft, nifi fumma infinitorum terminorum feriei harmonicæ fit infinita.

Hoc idem oftendemus etiam hac alia ratione. Conftituantur feries infinitæ geometricæ, quæ incipientes à numeris imparibus inverfis, progrediantur in ratione dupla, quemadmodum factum hic vides.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\ \&c.$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}\ \&c.$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{80}+\frac{1}{160}\ \&c.$$
$$\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\frac{1}{112}+\frac{1}{224}\ \&c.$$

Et jam quia in iftis feriebus reperiuntur omnes numeri naturales inverfi, eædem fimul fumptæ adæquabunt progreffionem harmonicam. Jam verò fummæ omnium illarum ferierum, per oftenfa in articulo fecundo, conftituunt hanc aliam fe-seriem $\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7}$ &c. Itaque hæc series æqualis erit seriei harmonicæ; adeoque semissis ipsius $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ &c., quæ oritur ex inversione numerorum imparium, erit semissis ejusdem seriei harmonicæ; ac proinde æqualis seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ &c., ortæ ex numeris paribus inversis. Id autem non aliter fieri potest, nisi summa utriusque seriei statuatur infinita; quum quisque terminus illius unumquemq; istius terminum excedat. Est igitur infinita, tam series, quæ oritur ex inversione numerorum imparium, quam series, quæ producitur ex numeris paribus inversis; multoque magis series harmonica, quæ illarum utramque comprehendit.

Sed aliam adhuc ejusdem rei demonstrationem afferamus: nimirum id omne est infinitum, ex quo, abscissa unitate, rursus alia, atque alia in infinitum abscindi potest. Itaque à principio seriei harmonicæ abscindantur termini aliquot, quorum

rum summa adæquet, vel etiam superet unitatem; & ex serie reliqua rursus abscindantur termini aliquot, quorum summa unitatem vel adæquet, vel excedat. Ergo si hæc terminorum abscissio in infinitum potest continuari, jam tota series harmonica erit infinita. Quod si verò facta sæpiùs ea terminorum abscissione, negas ulteriùs eam fieri posse, quia forte termini reliqui unitatem non excedant; repræsentet indefinitè a numerum illum, qui dividit unitatem in primo reliquorum terminorum.

Jam primi illius termini capiatur pars denominata ab $\frac{a+1}{a}$, hujusque iterum pars consimilis, atque ita deinceps. Constituetur ergo in hunc modum progressio geometrica decrescens, cujus quisque terminus minor erit unoquoque reliquorum seriei harmonicæ. Quare summa illius progressionis minor erit summa terminorum omnium, qui remanserunt in progressione harmonica. Est autem summa infinitorum terminorum ejus progressionis, per ostensa in articulo secundo, æqualis unitati. Itaque erit unitate major summa reliquorum terminorũ progressionis

nis harmonicæ: proindeq; adhuc ex iis abſcindi poterũt termini aliquot, qui unitatem vel adæquent, vel proximè excedant. Et quoniam eadem eſt ſemper demonſtratio de reliquis terminis; conſequens eſt, ut ſeries harmonica talis ſit, ut ex ipſa abſciſſa unitate una, rurſus alia, atque alia in infinitum abſcindi poſſit; ac proinde, ut ſumma omnium infinitorum ejus terminorum ſit quantitas infinita.

Denique, ut aliud ſerierum infinitarum exemplum hìc proferamus, aſſumatur ſeries harmonica $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c., ex cujus terminis ſubtrahantur ordine termini ejuſdem ſeriei, duobus primis multatæ. Relinquetur itaque hæc alia ſeries $\frac{2}{3}+\frac{2}{8}+\frac{2}{15}+\frac{2}{24}+\frac{2}{35}$ &c.; cujus omnes termini ſimul collecti adæquabunt priores duos progreſſionis harmonicæ. Unde ſemiſſis illius ſeriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}$ &c., quæ oritur ex inverſione quadratorum, unitate minutorum

rum, invenietur $\frac{3}{4}$. Interim ſi ex hac alia ſerie terminos loco pari poſitos excerpas, erit ſumma ſeriei reliquæ $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}$ &c. æqualis $\frac{1}{4}$; quum ſit ſemiſſis illius ſeriei, quæ oritur, ſi ex terminis ſeriei genitæ ex inverſione numerorum imparium ſubtrahantur ordine termini ejuſdem ſeriei, primo tantùm multatæ. Sed ſi porrò ex poſtrema illa ſerie excerpas adhuc terminos loco pari poſitos, tunc relinquetur hæc alia ſeries $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ &c., cujus ſumma finita, nullo numero exprimibilis, erit vera magnitudo circuli, poſito, quod diametri quadratum ſemiſſem unnitatis adæquet.

Cæterum hujuſmodi artificium inveniendi ſummas finitas ſerierum infinitarum, per ſubductionem unius ſeriei à ſe ipſa, nonniſi cum cautela debet adhiberi. Nam, exempli gratia, ſi à ſerie harmonica $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. ſubtrahahatur eademmet, multata primo termino, orietur series $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ &c. æqualis unitati, scilicet priori termino progressionis harmonicæ. Sed si à serie $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$ &c. subtrahatur eadem series, multata similiter primo termino, relinquetur adhuc $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ &c., nec tamen dici potest, summam istius seriei æqualem esse illius primo termino, quum prior terminus illius non sit unitas, sed binarium.

Hujus rei ratio, ut clariùs intelligatur, notetur velim, quod quum ab aliqua serie eademmet, priori termino multata, subtrahitur, summa seriei reliquæ non sit quidem primus terminus, sed primus ultimo minutus. Nam quum ex primo subtrahatur secundus, ex secundo tertius, atque ita deinceps; ultimus, exhausta infinitate, non modò à penultimo, verùm etiam à se ipso subducendus erit, ut ex unoquoque termino unius seriei possit quisque alterius subtrahi: proindeque quum

quum subtractione ista termini omnes intermedii evanescant, supererit tantùm primus terminus ultimo minutus.

Jam quum ultimus seriei terminus evanescit in infinitum, ut contingit in serie harmonica, nihil obstat, quominùs dicamus id, quod relinquitur, quotiescumque ab aliqua serie eademmet priori termino multata subtrahitur, priorem terminum adæquare; quandoquidem prior terminus per ultimi subtractionem non minuitur. Sed quum ultimus seriei terminus non evanescit, tunc ad inveniendam summam seriei reliquæ, necesse est, ut ipse à primo subducatur. Quocirca quia in serie $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$ &c. ultimus terminus unitatem adæquat, quum sit quotiens, qui oritur dividendo infinitum per infinitum; summa seriei reliquæ erit prior terminus unitate multatus, nimirum illud idem, quod per seriem harmonicam invenitur.

CAP.

CAP. XII.

Poteſtatum formula generalis.

IN explicanda ſerierum infinitarum doctrina, ſummoperè à Recentioribus exculta, longè quidem morati ſumus, quàm noſtrum erat animus, & ſuſcepti operis ratio exigere videbatur. Interim, ut hujus doctrinæ uſum aliquem hìc oſtendamus, pateatque non omnino inutilia eſſe, quæ prætermitti potuiſſe, facile quiſque ſibi perſuadet; afferemus hoc capite formulam quandam generalem, qua mediante vel ſolius ſubſtitutionis ope poſſit quæcumque quantitas, duabus partibus conſtans, ad datam quamcumque poteſtatem elevari.

Ex iis namque, quæ ſuperiùs de formatione poteſtatum dicta ſunt, perſpicuum eſt non unâ eademque regulâ quantitatem, duabus conſtantem partibus, poſſe ad poteſtatem omnem attolli. Alia ſiquidem obſervanda eſt regula, quum elevari debet ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem; alia quum cubum, ſive tertiam poteſtatem; & alia, quum ad poteſtatem aliam ſuperiorem evehi debet. Itaq; quum pro

pro ſingulis diverſis poteſtatibus totidem diverſæ regulæ requirantur; erit equidem compendii numquam ſatis deprædicandi, ſi quæ poſſit formula generalis excogitari, quæ ad omnem quamcumque poteſtatem ſe extendat.

Sed priùſquam formulam iſtam generalem afferamus, indicandum eſt breviter, qua ratione in quantitatibus ſimplicibus poteſtates generaliter, ac indefinitè poſſint deſignari. Id itaque fit, ponendo, velut exponentes poteſtatum, litteras alias alphabeti. Quum enim litteræ iſtæ nullum valorem habeant, poterunt eæ quemcumque numerum repræſentare; atque ita velut exponentes quarumcumque poteſtatum conſiderari.

Hac ratione poteſtas indefinita quantitatis ſimplicis a, quæ ſcilicet omnem quamcumque poteſtatem ipſius a poſſit repræſentare, erit a^m; & ſimiliter poteſtas indefinita quantitatis ſimplicis c erit c^m. Unde ſi ponatur deinde m æqualis binario; a^m idem erit, ac a^2; & c^m idem, ac c^2. Quod ſi verò ponatur m æqualis ternario; a^m idem valebit, ac a^3; & c^m idem ac c^3.

Et quoniam littera m omnem quemcumque numerum, ſive poſitivum, ſive ne-

negativum; sive integrum, sive fractum potest exhibere, perspicuum est a^m esse potestatem adeò generalem, ac indefinitam ipsius a, ut possit non modò omnes potestates perfectas positivas, verùm etiam omnes alias, superiùs à nobis consideratas, repræsẽtare. Qua ratione quemadmodum si ponatur m æqualis binario, erit a^m idem ac quadratum ipsius a; ita si ponatur m semissem unitatis exhibere, designabit a^m radicem quadratam ipsius a.

Liquet igitur, quo pacto in quantitatibus simplicibus potestates generaliter, ac indefinitè possint designari. Videamus itaque modò, qua ratione hoc idem fieri possit in quantitatibus compositis, hoc est in iis, quæ duabus partibus constant. Et quoniam potestates quantitatum compositarum plures terminos involvũt, quorum singuli suos habent coefficientes; duo nobis erunt ostendenda, nempe primum, qua ratione designari debeant generaliter ac indefinitè termini cujuscumque potestatis ex radice aliqua composita; alterum, quo pacto designandi sint itidem generaliter, ac indefinitè coefficientes eorum terminorum.

Ter-

I.

Terminorum cujuscumque potestatis generalis expressio.

TOta difficultas, quæ in formatione potestatum occurrit, consistit potissimùm in eo, ut inveniantur coefficientes, quibus afficiendi sunt termini potestatum. Nam quantum ad ipsos terminos, habentur ii nullo negotio, si constitutis duabus progressionibus geometricis, quarum exponentes sint ipsæ partes quantitatis, ad potestatem elevandæ, & quarum una à quæsita sui exponentis potestate descendat usque ad unitatem, altera vicissim ab unitate ascendat usq; ad potestatem quæsitam sui exponentis; multiplicentur termini unius progressionis per terminos alterius.

Ut si velim, exempli gratia, invenire terminos cubi ex quantitate composita $a + b$, constituo duas progressiones geometricas; quarum una, habens pro suo exponente partem a, descendat à cubo ipsius a usque ad unitatem; altera, habens pro exponente partem b, ascendat vicissim ab unitate usque ad cubum ipsius b.

Nam

Nam quum istarum progressionum una sit a^3, a^2, a, 1; altera 1, b, b^2, b^3: multiplicatis ordine terminis unius progressionis per terminos alterius, fient termini cubi quæsiti a^3, a^2b, ab^2, b^3.

Similiter si inveniendi sint termini quadrato-cubi, sive quintæ potestatis ex quantitate composita $a + b$, formentur duæ progressiones geometricæ; quarum una habeat pro suo exponente partem a, & à quadrato-cubo ipsius a descendat usque ad unitatem; altera habeat pro suo exponente partem b, & vicissim ab unitate ascendat usque ad quadrato-cubum ipsius b. Quum enim istarum progressionum una sit a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1; altera, 1, b, b^2, b^3, b^4, b^5: multiplicatis terminis unius progressionis ordine per terminos alterius, fient termini quadrato-cubi quæsiti a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5.

Eadem ratione si oporteat invenire terminos septimæ potestatis ex quantitate compsita $a + b$, constituendæ sunt duæ progressiones geometricæ; quarum una, habens pro suo exponente partem a, descendat à septima potestate ipsius a usque ad unitatem; altera, habens pro suo exponente partem b, ascendat vicissim ab unitate usque ad septimam potestatem ipsius b. Etenim, quum ipsarum progressionum una sit a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1; altera 1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7: multiplicatis ordine terminis unius progressionis per terminos alterius, fient termini quæsitæ potestatis a^7, a^6b, , a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7.

Jam ex hac methodo determinandi terminos cujuscumque potestatis ex radice, duabus partibus constante, colligere licet primo, in unaquaque potestate terminorum numerum designari ab exponente ipsius potestatis, unitate aucto. Nam habentur termini cujusque potestatis, constituendo duas progressiones geometricas, quarum una à quæsita potestate unius partis descendat per omnes potestates inferiores usque ad unitatem; altera vicissim ab unitate ascendat per easdem potestates inferiores alterius partis usque ad potestatem quæsitam, & multiplicando terminos unius progressionis ordine per terminos alterius. Itaque, quia numerus terminorum in utraque progressione designatur ab exponente potestatis, unitate aucto; designabit idem exponens, unitate auctus, numerum terminorum quæsitæ potestatis.

Colligere licet secundò, in terminis extremis cujusque potestatis ex radice, duabus partibus constante, contineri tantùm potestates ipsarum partium ejusdem ordinis cum illa, de qua agitur; in terminis autem intermediis contineri potestates omnes inferiores earundem partium, per se mutuò inverso ordine multiplicatas. Nam progressionum geometricarum, quæ constitui debent, una à quæsita unius partis potestate descendit usque ad unitatem; altera vicissim ab unitate ascendit usque ad potestatem quæsitam alterius partis. Quocirca in terminis extremis reperientur solæ potestates partium ejusdem ordinis cum illa, de qua agitur; in terminis autem intermediis reperientur earundem partium potestates omnes inferiores, inverso ordine per se mutuò multiplicatæ.

Colligere licet tertiò, terminos cujuscumq; potestatis ex radice aliqua, duabus partibus constante, progressionem geometricam constituere. Notum est enim, quod si termini unius progressionis geometricæ multiplicentur per terminos alterius progressionis geometricæ, producta progressionem aliam similiter geometricam constituant. Itaque, quia ad inveniendos terminos cujuscumque potestatis ex radice, cujus duæ sunt partes, multiplicandi sunt termini unius progressionis geometricæ per terminos alterius; consequens est, ut termini illius potestatis progressionem aliam pariter geometricam componant.

Sed ex eadem methodo colligere quoque licet, qua ratione termini cujuscumque potestatis ex radice, cujus duæ sunt partes, possint generaliter, ac indefinitè designari. Oporteat itaque invenire terminos potestatis ex quantitate composita $a + b$, cujus exponens generaliter, ac indefinitè sit numerus m. Constituantur duæ progressiones geometricæ, quarum una ab ea potestate partis a, quam designat numerus m, descendat per potestates omnes inferiores usque ad unitatem; altera vicissim ab unitate ascendat per potestates omnes inferiores alterius partis b usq; ad eã ipsius potestatem, quam ostendit idem numerus m. Itaque harum progressionum una erit a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-4} &c., altera 1, b, b^2, b^3, b^4, &c. Unde multiplicatis ordine terminis unius progressionis per terminos alterius, fient termini quæsiti a^m, $a^{m-1} b$, $a^{m-2} b^2$, $a^{m-3} b^3$, $a^{m-4} b^4$ &c.

Et quamquam termini isti videantur

esse

esse numero infiniti, attamen quum exponens generalis m determinatur, fit eorum multitudo finita; quandoquidem pervenitur tandem ad aliquem terminũ, in quo exponens potestatis, ad quam ascendit pars prior radicis a, est zero, sive nihilum, post quem non ulterius progrediendũ, quia potestas illa tantundẽ valet, ac unitas. Ita si ponamus, exponentem generalem m binarium repræsentare, prior terrminus erit a^2, secundus ab, tertius autem b^2; nam a^{m-2}, quum idem sit, ac a^0, non differt ab unitate: proindeque termini quæsiti erunt a^2, ab, b^2. Similiter si ponatur m æqualis ternario, prior terminus erit a^3, secundus a^2b, tertius ab^2, quartus autem b^3; quandoquidem a^{m-3}, veluti a^0, idem erit, ac unitas: & propterea quæsiti termini erunt a^3, a^2b, ab^2, b^3.

Cæterùm, quod quantitas elevata ad potestatem, cujus exponens sit zero, sive nihilum, tantundem valeat, ac unitas; id equidem colligitur ex iis, quæ diximus capite sexto, quum generalem potestatum ideam exhibuimus. Demonstravimus etenim, quod si ipsa unitas inter potestates reponatur, utpote quæ cum ipsis potestatibus adhuc progressionem geometricam constituit, exponens ejus debeat esse zero, sive nihilum. Ex quo sequitur vicissim, ut cujuscumque quantitatis potestas illa, quæ habet zero, sive nihilum pro suo exponente, ab unitate differre non debeat; ac proinde, ut tantundem valeat, ac ipsa unitas.

II.

Coefficientium eorundem terminorum generalis expressio.

Vidimus, quo pacto termini cujuscumque potestatis ex radice aliqua cujus duæ sunt partes, possint generaliter, ac indefinitè designari; videamus modò, qua ratione coefficientes eorundem terminorum eadem generalitate exprimi possint. Hunc in finem exhibendi sunt priùs in tabula aliqua ordine coefficientes isti, prout ad terminos cujuscumque potestatis referuntur, ut scilicet cognosci possit, num aliqua iis insit proprietas generalis, qua mediante generaliter etiam exprimi queant.

Itaque in columnis lateralibus sequentis tabulæ collocentur ordine coefficientes terminorum cujusque potestatis: nimirum in prima coefficientes terminorum potestatis primæ 1, 1; in secunda coefficientes terminorum potestatis secundæ 1, 2, 1; in tertia coefficientes terminorum potestatis tertiæ 1, 3, 3, 1; atque ita deinceps. Et quoniam in prima columnarum verticalium erit coefficiens primi termini cujusque potestatis, in secunda coefficiens termini secundi, in tertia coefficiens termini tertii, atque ita in infinitum; liquet tabulæ hujus talem esse constitutionem, ut numeri, in una, eademque columna laterali existentes, designent ordine coefficientes terminorum illius potestatis, quam ostendit locus ejusdem columnæ; numeri verò, existentes in una, eademque columna verticali, designent ordine coefficientes, qui in potestatibus omnibus ad eum terminum referuntur, quem ejusdem columnæ locus repræsentat. Unde eò res redit, ut inquiramus, an termini cujusque columnæ verticalis possint generaliter, ac indefinitè designari.

Jam

TABULA

Coefficientium, qui referuntur ad terminos cujuscumque potestatis.

1	1	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0
1	6	15	20	25	6	1	0
1	7	21	35	35	21	7	1

Jam in tabula ista termini prioris columnæ verticalis constituunt seriem unitatum, termini secundæ constituunt seriem numerorum naturalium, termini verò aliarum columnarum tales sunt, ut quilibet ex iis in unaquaque columna æquetur summæ omnium superiorum præcedentis columnæ verticalis. Unde

 quemad

quemadmodum ope hujus proprietatis tabula ipſa nullo negotio poteſt in infinitum continuari; ita exinde colligi poteſt, quod ad inveniendum optatum quemcumque terminum in quacumque aliarum columnarum verticalium, ſatis ſit in unum addere omnes terminos ſuperiores, qui ſunt in præcedenti columna verticali.

Sed exinde colligi quoque poteſt, numeros, qui ſunt in aliis columnis verticalibus ejuſdem tabulæ, eſſe numeros figuratos, quos ſuperiori capite conſideravimus. In iis namque columnis numerus quiſque oritur ex collectione numerorum ſuperiorum præcedentis columnæ verticalis. Itaque, quia in ſecunda columna eſt ſeries numerorum naturalium, qui ex continua unitatum collectione oriuntur; erit in tertia ſeries numerorum figuratorum primi ordinis, in quarta ſeries numerorum figuratorum ſecundi ordinis, in quinta ſeries numerorum figuratorum ordinis tertii, atque ita deinceps.

Præterea, ſi loca vacua cujuſque columnæ verticalis cyphris repleantur, hanc aliam in tabula illa licebit cernere proprietatem, quod prima, & ſecunda columnarum verticalium nullam habeant cyphram ab initio, ſed unam tertia, duas quarta, tres quinta, atque ita deinceps. Quæ ſanè proprietas exinde dependet, quod numerus terminorum cujuſque poteſtatis ab exponente unitate aucto deſignetur. Quocirca, ſi in iis columnis ſumantur termini æquè multi, quorum multitudinem deſignet littera m; multitudo terminorum ſignificativorum erit m tam in prima, quàm in ſecunda columna, ſed $m - 1$ in tertia, $m - 2$ in quarta, $m - 3$ in quinta, atque ita in infinitum.

Atque hinc modò facilè erit, terminum quemcumque cujuſque columnæ verticalis generaliter, ac indefinitè deſignare. Nam quantum ad primam columnam, quia in ea habetur ſeries unitatum, quæ nullam habent cyphram ab initio, deſignabit ipſa unitas terminum quemcumque illius columnæ. Quantum verò ad ſecundam, quia in ea exiſtit ſeries numerorum naturalium, qui ſimiliter nullam cyphram ab initio habent, ſi proponatur inveniendus terminus, qui occupet locum deſignatum à littera m, deſignabit eadem littera m terminum, quem oportet invenire.

Quantum autem ad alias columnas, ne-

neq; etiam difficile erit in iis, terminum quemcumque generaliter, ac indefinitè designare. Nam, quum in columnis illis habeantur ordine series numerorum figuratorum, satis erit in unum colligere tot eorum numerorum, ex quorum collectione ii generari intelliguntur, quotus est locus, quem in columna occupat terminus inveniendus, exclusis cyphris initialibus.

Hac ratione, quia in tertia columna existunt numeri figurati primi ordinis, qui unam cyphram ab initio habent, si in ea oporteat invenire terminum, qui occupet locum, designatum à littera m, satis erit in unum addere tot numeros naturales, quot designat $m - 1$, hoc est locus, quem occupat terminus inveniendus, exclusa cyphra initiali.

Similiter, quia in quarta columna habentur numeri figurati secundi ordinis, quibus duæ præfixæ sunt cyphræ, si in ea proponatur inveniendus terminus, cujus locum designet littera m, satis erit in unum colligere tot numeros figuratos primi ordinis, quot designat $m - 2$, hoc est locus, quem occupat inveniendus terminus, exclusis duabus cyphris initialibus.

Ea-

Eadem ratione, quia in quinta columna reperiuntur numeri figurati ordinis tertii, qui tres cyphras ab initio habent, si in ea terminum oporteat invenire, cujus locum referat littera m, addendi erunt in unam summam tot numeri figurati secundi ordinis, quot designat $m - 3$, hoc est locus, quem occupat inveniendus terminus, exclusis tribus cyphris initialibus.

Atque hac ratione ostendetur etiam, colligendos esse in unum tot numeros figuratos ordinis tertii, quot designat $m - 4$, ut inveniatur in sexta columna terminus, qui locum occupet, designatum à littera m; & esse in unum addendos tot numeros figuratos ordinis quarti, quot designat $m - 5$ ad inveniendum in quinta columna terminum, cujus locum ostendat eadem littera m; sicque in infinitum progredi licebit.

Jam regula generalis ad inveniendam summam quotcumque numerorum figuratorum hæc superiùs prodiit: fiant duæ progressiones arithmeticæ, ambæ ascendentes per unitatis incrementum, una quidem à multitudine numerorum, in unam summam colligendorum, altera ab unitate, & utraque tot terminorum, quot designat exponens ordinis numero-

rum

rum, duabus unitatibus auctus; multiplicentur deinde inter se mutuò, tam termini prioris progressionis, quàm termini alterius, & diviso producto ex primis per productum ex secundis, erit quotiens numerorum summa quæsita.

Et quoniam numerorum naturalium ea est proprietas, ut si multitudo eorum, quos oportet in unam summam colligere, multiplicetur per se ipsam, unitate auctam, producti semissis sit summa quæsita; perspicuum est, regulam illam locum sibi etiam vindicare in numeris naturalibus: scilicet si ipsi numeri naturales ea ratione inter numeros figuratos referantur, ut exponens ordinis ipsorum sit zero, sive nihilum.

Itaque, quia ad inveniendum terminum, qui in tertia columna verticali locum occupet, designatum à littera m, colligendi sunt in unum tot numeri naturales, quot designat $m-1$; progressionum constituendarum una erit $m-1$, m; altera $1, 2$: proindeque terminus quæsitus erit $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$, ponendo rursus, quòd puncta, quantitatibus interjecta, multiplicationem earum quantitatum designent.

Si-

Similiter, quia ad inveniendum terminum, qui in quarta columna verticali occupet locum designatum ab eadem littera m, colligere oportet in unum tot numeros figuratos primi ordinis, quot ostendit $m-2$; ex progressionibus constituendis una erit $m-2$, $m-1$, m; altera $1, 2, 3$: & propterea terminus, quem oportet invenire, erit $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Eadem ratione, quia ad inveniendum in quinta columna verticali terminum, cujus locum ostendat littera m, addendi sunt in unam summã tot numeri figurati secundi ordinis, quot designat $m-3$; progressionum constituendarum una erit $m-3$, $m-2$, $m-1$, m; altera $1, 2, 3, 4$: proindeque terminus quæsitus erit $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Non dissimiliter ostendetur, terminum, qui in unaquaque columna verticali locum occupet designatum à littera m, esse $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ in sexta columna verticali; esse verò in

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}$$

in ſeptima ; atque ita deinceps . Unde modò facile erit, coefficientes terminorum cujuſque poteſtatis generaliter, ac indefinitè deſignare .

Quum enim in prima columnarum verticalium ſit coefficiens primi termini cujuſque poteſtatis, in ſecunda coefficiens termini ſecundi , in tertia coefficiens termini tertii, atque ita deinceps; illæ eædem quantitates, quæ numeros earum columnarum generaliter, ac indefinitè deſignāt, deſignabunt etiam in unaquaque poteſtate generaliter , ac indefinitè coefficientes ſuorum terminorum . Qua ratione unitas erit coefficiēs generalis termini primi; m, vel etiam $\frac{m}{1}$ coefficiens generalis termini ſecundi ; $\frac{m.m-1}{1.2}$ coefficiens generalis termini tertii ; $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$ coefficiens generalis termini quarti ; atque ita in infinitum.

Quemadmodum autem multitudo terminorum cujuſque poteſtatis evadit finita,

ubi exponens generalis m determinatur ; ita quoque determinato eodem exponente, multitudo eorum coefficientium tanta prodit , quotus eſt numerus terminorum illius poteſtatis , ad quam exponens ille refertur . Ita ſi ponamus exponentem generalem m binarium repræſentare, non plures , quàm tres coefficientes habebuntur, quorum primus erit unitas , ſecundus binarius , & tertius iterum unitas . Pariterque ſi m ternarium repræſentet , quatuor tantùm coefficientes invenientur , quorum primus erit unitas, ſecundus ternarius, tertius ternarius item, & quartus itidem unitas.

Hujus rei ratio exinde eſt repetenda , quod omnis quantitas , quæ per zero , ſive nihilum multiplicatur , evaneſcat , & fiat etiam æqualis zero , ſive nihilo . Hac enim ratione , quum exponens generalis m ponitur æqualis binario , omnes illi coefficientes , in quibus reperitur $m-2$ evaneſcere debent ; quia ſcilicet in eorum conſtitutione zero , ſive nihilum per viam multiplicationis ingreditur . Et ſimiliter quum ponitur m æqualis ternario , evaneſcere debent coefficientes illi omnes , in quibus occurrit $m-3$; quia nempe quantitates , coefficientes illos deſignanſignantes, per zero, ſive nihilum multiplicatæ reperiuntur. Unde facilè oſtendi poteſt, quod determinato exponente generali m, multitudo coefficientium tanta prodeat, quotus eſt numerus terminorum illius poteſtatis, ad quam exponens ille refertur.

III.

Generalis poteſtatum formula exhibetur.

Expreſſis generaliter, ac indefinitè tum terminis cujuſcumque poteſtatis ex radice aliqua, cujus duæ ſunt partes, cùm coefficientibus, qui ad terminos illos referuntur; haud difficile modò erit, ipſam poteſtatū formulā generalem exhibere. Afficiantur etenim ordine ſinguli termini propriis ſuis coefficientibus; & ſiquidem illi iis ſignis inter ſe mutuò conjungantur, quæ multiplicationis exigunt regulæ, jam quæſita formula orietur.

Sint igitur a, & b partes radicis, ad eam poteſtatem elevandæ, cujus exponens generaliter, ac indefinitè ſit m. Erit itaque ex ſuperiùs oſtenſis a^m primus terminus poteſtatis, $a^{m-1}b$ terminus ſecundus, $a^{m-2}b^2$ terminus tertius, $a^{m-3}b^3$ terminus quartus, atque ita deinceps.

Et

Et quoniam coefficiens primi termini eſt unitas, & $\frac{m}{1}$ coefficiēs ſecūdi termini, $\frac{m.m-1}{1\ .\ 2}$ coefficiens termini tertii; $\frac{m\ .\ m-1\ .\ m-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}$ coefficiens termini quarti, atque ita in infinitum; erit conſtruendæ formulæ generalis a^m pars prima $\frac{m}{1}a^{m-1}b$ pars ſecunda, $\frac{m.m-1}{1\ .\ 2}a^{m-2}b^2$ pars tertia, $\frac{m\ .\ m-1\ .\ m-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^{m-3}b^3$ pars quarta, atque ita deinceps.

Quæ verò ſint ſigna, quibus juxta regulas multiplicationis partes illæ ſunt ſimul conjungendæ, facile quidem erit definire, ſi recordemur, poteſtates pares quantitatum eſſe ſemper poſitivas, ſive radices ipſæ ſint poſitivæ, ſive negativæ; poteſtates verò impares eſſe ejuſdem generis cum ipſis radicibus, nimirum poſitivas, quum radices ſunt poſitivæ, & negativas, quum viciſſim radices ſunt negativæ. Hinc enim ſequitur, quod ſi radix fuerit $a + b$, partes omnes ſint ſimul conjungendæ ſigno $+$; quod ſi verò fuerit $a - b$, mutanda ſint ſigna iis tantùm partibus, in quibus quantitatis negativæ $-b$ poteſtates impares occurrunt, cujusmodi ſunt illæ, quæ locis paribus poſitæ reperiuntur.

Itaque ſi radicis $a + b$ quæratur ea poteſtas, quam deſignat generaliter, ac indefinitè exponens m, erit illa

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3$$

&c. Et quoniam exponens generalis m poteſt omnem quemcumque numerum repræſentare; perſpicuum eſt, poteſtatem illam omnes etiam poteſtates continere, atque adeo formulam eſſe generalem omnium poteſtatum, ad quas radix $a + b$ poteſt attolli. Determinabitur autem generalis illa poteſtas, ſi utique exponens ipſe generalis m determinetur. Qua ratione ſi quæratur quadratum, ſive ſecunda poteſtas radicis $a + b$, quia exponens generalis m fit 2, mutabitur poteſtas illa generalis in hanc

aliam $a^2 + 2ab + b^2$. Et ſimiliter ſi quæratur cubus, ſive tertia poteſtas ejuſdem radicis $a + b$, quia generalis exponens m fit 3, eadem illa generalis poteſtas vertetur in hanc aliam $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Quod ſi radicis $a - b$ quæratur ea poteſtas, quam deſignat generaliter, ac indefinitè exponens m, erit illa

$$a^m - \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3$$

&c. Atque hìc quoque, quia exponens generalis m poteſt omnem quemcumque numerum exhibere, palam eſt, poteſtatem iſtam omnem quamcumque poteſtatem repræſentare, atque adeo formulam eſſe generalem omnium poteſtatum, ad quas radix $a - b$ poteſt elevari. Sed determinatur hæc eadem generalis poteſtas, determinando quoque generalem illum exponentem m. Qua ratione ſi quæratur quadratum, ſive ſecunda poteſtas radicis $a - b$, quia exponens generalis m fit 2, evadet generalis illa poteſtas $a^2 - 2ab + b^2$. Paritèrque ſi quæratur cubus, ſive tertia poteſtas ejusdem radicis $a - b$, quia generalis exponens m fit 3, eadem illa potestas generalis evadet $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Jam ope harum formularum non modò ad quamcumque potestatem attolli potest radix, quæ duabus partibus constet, verùm etiam quæcumque plures, quàm duas, partes comprehendat; scilicet si omnes partes priores, velut una, considerentur. Oporteat, exempli gratia, ad quadratum attollere radicem tribus partibus constantem $c + d + b$. Considerentur partes duæ priores $c + d$ velut una, ita ut radix duabus tantùm partibus constare censeatur. Et quoniam prima formula generalis, quum quadratum quæritur, mutatur in hanc aliam $a^2 + 2ab + b^2$; satis erit in ista ponere $c + d$ ubi reperitur a; & quadratum ex $c + d$, ubi ipsius a quadratum occurrit. Unde factis hisce substitutionibus, erit $c^2 + 2cd + d^2 + 2cb + 2db + b^2$ quadratum ex radice tribus partibus constante $c + d + b$.

Oporteat similiter, ad cubum elevare radicem $c - d - b$, quæ tribus partibus constat. Considerentur adhuc partes duæ priores $c - d$ velut una, ita ut radix non plures, quàm duas partes censeatur habere. Et quoniam secũda formula generalis, quum

quũ cubus quæritur, vertitur in hanc aliã $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; satis erit in ista ponere $c - d$, ubi reperitur a; quadratum ex $c - d$, ubi reperitur quadratum ipsius a; ac denique cubum ex $c - d$, ubi ejusdem a cubus occurrit. Quocirca factis omnibus hisce substitutionibus, erit $c^3 - 3c^2d + 3cd^2 - d^3 - 3c^2b + 6cdb - 3d^2b + 3cb^2 - 3db^2 - b^3$ cubus ex radice $c - d - b$, quæ tribus partibus constat.

Sed quemadmodum potestates ex radicibus, cujus duæ sunt partes, fieri non possunt, nisi priùs sciatur, qua ratione fiant potestates ex radicibus simplicibus; sic perscicuum est, potestates ex radicibus compositis, quæ plures, quàm duas, partes continent, fieri nequaquam posse, nisi priùs qua ratione fiant ex radicibus, quæ continent partes una pauciores, probè intelligatur. Sic, ut formetur quadratum ex radice tribus partibus cõstante $c + d + b$, necesse est priùs, ut sciatur, qua ratione formetur quadratum ex radice $c + d$, cujus duæ sunt partes. Et similiter, ut formetur cubus ex radice $c - d - b$, quæ tribus quoque partibus constat, scire priùs oportet, qua ratione fiat, tam quadratum, quàm cubus ex radice $c - d$, quæ duas tantùm continet partes.

IV.

Uſus conſtructæ formulæ in conficiendis ſeriebus infinitis oſtenditur.

ETſi nomen poteſtatis eas vulgò deſignet quantitates, quæ oriuntur ex reiterata alicujus per ſe ipſam multiplicatione, quæque exponentes habent numeros integros poſitivos: idem tamen nomen ad alias quantitates deſignandas poſſe applicari, quæ oriantur, vel à diviſione, vel ab extractione radicum, jam ſuperiùs innuimus; quum iſtæ etiam quantitates ſuos habeant exponentes, vel integros quidem, ſed negativos, vel fractos tum poſitivos, cùm negativos. Atque hac ratione duplicem poteſtatum diviſionem attulimus; unam nempe in poteſtates negativas, & poſitivas; alteram in poteſtates perfectas, & imperfectas.

Jam tametſi formula ſuperiùs exhibita, pro iis tantùm poteſtatibus conſtructa videatur, quæ dici merentur perfectæ poſitivæ, quia ipſorum exponentes ſunt numeri integri poſitivi; nihil tamen vetat, quominùs eadem formula aliis etiam poteſtatibus applicetur. Nam quemadmodum

dum expreſſo iſta a^m omnes quaſcumque poteſtates ipſius a, ſive perfectas, ſive imperfectas, ſive poſitivas, ſive negativas poteſt repræſentare: quia ſcilicet exponens generalis m omnem quemcumque numerum, ſive integrum, ſive fractum, ſive poſitivum, ſive negativum potis eſt exhibere; ita quoque propter eundem exponentem generalem m formula illa generalis omnes quaſcumque poteſtates ex radice, cujus duæ ſunt partes, poterit exhibere.

Id ut pleniùs conſtet, oſtendamus primùm, qua ratione formulæ illius beneficio elevetur radix aliqua, cujus duæ ſunt partes ad poteſtatem, quæ exponentem habeat numerum integrum negativum. Itaque oporteat, radicem $a + b$ attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit -1. Et quoniam formula generalis poteſtatum ex radice $a + b$ eſt

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3$$

&c., ſatis erit in hac formula loco exponentis generalis m ſubſtituere exponentem illum ſpecialem -1.

-1. Quod quidem si fiat, mutabitur formula illa generalis in hanc aliam $a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^{2} - a^{-4}b^{3}$ &c. Unde potestas ex $a+b$, cujus exponens sit -1, erit $a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^{2} - a^{-4}b^{3}$ &c.

Ad hoc autem ostendendum, considerare priùs oportet, quod quantitas $a+b$ elevata ad potestatem, cujus exponens sit -1, juxta ea, quæ superiùs ostensa sunt, tantundem valeat, ac $\frac{1}{a+b}$: Ex quo fit, ut idem sit quantitatem $a+b$ ad eam potestatem attollere, quàm unitatem per quantitatem illam dividere. Quocirca, quum ex hac divisione oriatur series infinita $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^{2}} + \frac{b^{2}}{a^{3}} - \frac{b^{3}}{a^{4}}$ &c., id tantùm erit ostendendum, quod series illa interminata $a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^{2} - a^{-4}b^{3}$ &c. ab hac alia non differat. Quod quidem perspicuum est: quandoquidem a^{-2} idem

idem valet, ac $\frac{1}{a}$; $a^{-2}b$ idem, ac $\frac{b}{a^{2}}$; $a^{-3}b^{2}$ idem, ac $\frac{b^{2}}{a^{3}}$; atque ita deinceps.

Oporteat similiter, quantitatem $a+b$ attollere ad potestatem, cujus exponens sit -2. Substituatur in formula illa generali loco exponentis indeterminati m exponens iste determinatus -2. Et quoniam hac facta substitutione, generalis illa formula vertitur in hanc aliam $a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^{2} - 4a^{-5}b^{3}$ &c., erit series ista interminata potestas quæsita ipsius $a+b$. Neque id dubitationem admittit: nam quantitas $a+b$ elevata ad potestatem, cujus exponens sit -2, tantundem valet, ac unitas divisa per quadratum ipsius $a+b$: Et profectò ex hac divisione non alia oritur series, quàm $\frac{1}{a^{2}} - \frac{2b}{a^{3}} + \frac{3b^{2}}{a^{4}} - \frac{4b^{3}}{a^{5}}$ &c., quæ ab illa non differt.

Atque hinc modò liquet, mediante formula illa generali nullo negotio confici posse series infinitas, quæ à divisione oriuntur. Nam si oporteat, exempli gratia,

tia, in ſeriem infinitam convertere fractionem $\frac{b}{a+c}$; quia fractio iſta oritur, multiplicando b per $\frac{1}{a+c}$, atq; $\frac{1}{a+c}$ tantundem valet, ac quãtitas $a+c$, elevata ad poteſtatẽ, cujus exponẽs ſit -1; ſatis erit quantitatem $a+c$, quæ eſt denominator propoſitæ fractionis ad poteſtatem iſtam attollere, omneſque terminos ipſius per numeratorem b multiplicare. Quacirca quia ea poteſtas quantitatis $a+c$, quam deſignat exponens -1, eſt $a^{-1} - a^{-2}c + a^{-3}c^2 - a^{-4}c^3 + a^{-5}c^4$ &c., hoc eſt $\frac{1}{a} - \frac{c}{a^2} + \frac{c^2}{a^3} - \frac{c^3}{a^4} + \frac{c^4}{a^5}$ &c., erit $\frac{b}{a} - \frac{bc}{ac} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^4}{a^5}$ &c. ſeries infinita, in quã fractio propoſita convertitur.

Oſtendamus nunc, qua ratione ejuſdem formulæ beneficio elevetur quantitas aliqua, cujus duæ ſunt partes, ad poteſtatem, quæ exponentem habeat numerum fractum, ſive poſitivum, ſive negativum.

Hunc

Hunc in finem oporteat, quantitatem a^2+b^2 attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit ſemiſſis unitatis. Et quoniam quantitas propoſita non eſt $a+b$, ſed a^2+b^2, duplicentur primò in formula illa generali omnes exponentes, ita ut radix ejus ſit a^2+b^2. Quia ergo duplicatis omnibus exponentibus, generalis illa formula mutatur in hanc aliam

$$a^{2m} + \frac{m}{1}a^{2m-2}b^2 + \frac{m.m-1}{1.2}a^{2m-4}b^4 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{2m-6}b^6 \text{ \&c.},$$

ſubſtituatur in iſta loco exponentis generalis m ſemiſſis unitatis: quumque hac facta ſubſtitutione prodeat hæc alia

$$a^1 + \frac{1}{2}a^{-1}b^2 - \frac{1}{8}a^{-3}b^4 + \frac{1}{16}a^{-5}b^6$$

&c., erit ſeries iſta interminata poteſtas ex a^2+b^2, cujus exponens ſit ſemiſſis unitatis.

Neque id difficile erit oſtendere, ſi conſideremus quantitatem a^2+b^2 elevatam ad poteſtatem, cujus exponens ſit ſemiſſis unitatis, per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, non differre à radice quadrata ipſius

a^2

$a^2 + b^2$. Hinc enim fit, ut idem omninò sit, quantitatem $a^2 + b^2$ ad potestatem illā attollere, quàm ex $a^2 + b^2$ quadratam radicem extrahere. Quocirca quia extrahendo radicem istam, oritur series infinita

$$a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{1b^6}{16a^5}$$

&c., id tantùm erit ostendēdum, quod series illa interminata

$$a^1 + \frac{1}{2} a^{-1} b^2 - \frac{1}{8} a^{-3} b^4 + \frac{1}{16} a^{-5} b^6$$

&c. ab hac alia non differat. Quod quidem perspicuum erit, si terminorum potestates negativæ in eorundem denominatoribus, velut positivæ, reponantur.

Similiter si oporteat quantitatem $a^3 + b^3$ ad potestatem attollere, cujus exponens sit triens unitatis, triplico primum in formula illa generali exponentes omnes, ita ut radix ejus sit $a^3 + b^3$. Et quoniā triplicatis omnibus exponētibus, generalis illa formula vertitur in hāc aliam

$$a^{3m} + \frac{m}{1} a^{3m-3} b^3 + \frac{m.m-1}{1.2} a^{3m-6} b^6 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{3m-9} b^9$$

&c., sub-

sti-

stituatur in ista loco exponentis generalis m triens unitatis; quumque facta ista substitutione oriatur hæc alia

$$a^1 + \frac{1}{3} a^{-2} b^3 - \frac{1}{9} a^{-5} b^6 + \frac{5}{81} a^{-8} b^9$$

&c., erit series ista interminata potestas quæsita ex $a^3 + b^3$. Quod rursus dubitationem non admittit. Nam per superiùs ostensa idem est quantitatem $a^3 + b^3$ ad potestatem attollere, cujus exponens sit triens unitatis, ac ex illa radicem cubicam extrahere: & profectò extrahendo radicem cubicam ex $a^3 + b^3$ oritur series infinita

$$a + \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} + \frac{5b^9}{81a^8}$$

&c., quæ ab illa non differt.

Unde liquet beneficio ejusdem formulæ generalis series illas infinitas, quæ ab extractione radicum suam trahunt originem, nullo quoque negotio fieri posse; quum idem sit ex quantitate aliqua radicem cujuscumque ordinis extrahere, ac eandem illam quantitatem ad potestatem aliquam imperfectam positivam attollere. Cæterùm nolim miremini, quod in proferēdis exemplis circa elevationem quantitatum ad potestates imperfectas positi-

vas,

vas, assumpta fuerit quantitas $a^2 + b^2$, quum exponens potestatis erat semissis unitatis; & $a^3 + b^3$, quum idem exponens unitatis trientem adæquabat. Id enim unicè factum, ne potestatum termini quantitates radicales involverent, & ut pateret veritas rei, conferendo potestates earum quantitatum cum seriebus infinitis, quæ extrahendo radices ex iisdem quantitatibus superiùs inventæ sunt. Nam de reliquo poterat etiam ad potestates illas attolli ipsa quantitas $a + b$, ad quam potestatum formula generalis propriè refertur.

Sed addamus unum, aut alterum exemplum circa elevationem quantitatū ad potestates imperfectas negativas. Oporteat itaque quantitatem $a^2 + b^2$ attollere ad potestatem, cujus exponens sit $-\frac{1}{2}$. Duplicentur rursus exponentes omnes formulæ generalis, & in ea loco exponentis generalis m substituatur exponēs quæsitæ potestatis. Quia ergo formula illa hac facta substitutione mutatur in hanc aliam

$$a^{-1} - \frac{1}{2} a^{-3} b^2 + \frac{3}{8} a^{-5} b^4 - \frac{15}{48} a^{-7} b^6.$$

&c.

&c., erit series ista interminata potestas, ad quam oportet elevare quantitatem $a^2 + b^2$. Atque hujus veritas patebit, si extracta ex $a^2 + b^2$ quadrata radice, per seriem inde emergētem unitas dividatur. Nam per ea, quæ superiùs ostensa sunt, quantitas $a^2 + b^2$ elevata ad potestatem, cujus exponens sit $-\frac{1}{2}$ non differt à quotiente, qui oritur dividendo unitatem per radicem quadratam ipsius $a^2 + b^2$.

Oporteat etiam, quantitatem $a^3 + b^3$ attollere ad potestatem, quæ exponentem habeat $-\frac{1}{3}$. Quoniam quantitas data non est $a + b$, sed $a^3 + b^3$, triplicentur exponentes omnes formulæ generalis; tum in ea loco exponentis generalis m substituatur exponens quæsitæ potestatis; & quia hac facta substitutione formula illa generalis vertitur in hanc aliam

$$a^{-1} - \frac{1}{3} a^{-4} b^3 + \frac{2}{9} a^{-7} b^6 - \frac{14}{81} a^{-10} b^9$$

&c., erit series ista interminata potestas, ad quam elevanda est quantitas $a^3 + b^3$. Quod rur-

rursus patebit, si extracta ex $a^3 + b^3$ radice cubica, per seriem inde emergentem unitas dividatur; quandoquidem ex superiùs ostensis, quantitas $a^3 + b^3$ elevata ad potestatem, cujus exponens sit $-\frac{1}{3}$ tantundem valet, ac quotiens, qui oritur, dividendo unitatem per radicem cubicam ipsius $a^3 + b^3$.

FINIS LIBRI PRIMI.

APPENDIX

De numeris figuratis generum omnium, & de eorundem summis indefinitis.

Quum de seriebus infinitis differuimus, exhibuimus quidem generalem numerorum figuratorum ideam, sed deinde eorum tantummodo summas determinavimus, qui ex continuâ numerorum naturalium, aliorumque inde ortorum collectione prodeuntes, numeri figurati primi generis à nobis fuerint insigniti. Id autem non aliunde factum, quàm quia pro constituendâ potestatum formulâ generali, quorsum mens nostra tendebat, dumtaxat numerorum figuratorum primi generis summæ requirebantur: quem in finem supervacaneum existimavimus,

 alio-

aliorum numerorum figuratorum summas definire, utpote quæ à nostro scopo omnino erant alienæ. Sed quod ibi prætermissum à nobis fuit, visum est Appendicis instar hoc loco subnectere, ut scilicet Tyrones nostros nihil lateat eorum, quæ ad plenam horum numerorum cognitionem, alioqui jucundissimam, pertinere videntur.

Itaque diximus citato loco, numeros figuratos vocari non modò eos, qui oriuntur ex collectione continuâ aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, verùm etiam, qui ex inde ortorum numerorum continuâ additione generantur. Sed ibidem explicuimus quoque, qua ratione numeri isti figurati in varia genera distingui possint, nimirum pro diversitate intervalli, quo numeri genitores, hoc est ab initio assumpti progrediuntur: adeo ut dici debeant generis primi, quorum genitores intervallo unitatis progrediuntur; dici debeant generis secundi, qui genitores habent intervallo binarii progredientes; atque ita deinceps. Quin etiam innuimus eodem loco, cujuscumque generis numeros figuratos in varios ordines distingui posse, pro diversâ ratione, qua ex suis genitoribus oriri intelliguntur; vocando nempe in unoquoque genere numeros figuratos ordinis primi, qui oriuntur ex collectione continuâ numerorum genitorum; numeros figuratos ordinis secundi, qui ex additione continuâ numerorum figuratorum primi ordinis generantur; atque ita continuò.

Jam, qua ratione in primo genere definiantur summæ numerorum figuratorum cujuscumque ordinis, satis superque ibidem ostensum fuit: nimirum faciendo duas progressiones arithmeticas, ambas ascendentes per unitatis incrementum, unam quidem à multitudine terminorum in unam summam colligendorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminorum, quot designat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus; nam multiplicando deinde per se mutuò tam terminos prioris progressionis, quàm terminos alterius, & dividendo productum ex primis per productum ex secundis, dabit quotiens ex hac divisione ortus summam quæsitam. Atque hunc canonem locum etiam habere diximus pro determinandâ summâ numerorum genitorum, ex quibus numeri figurati primi generis derivantur, si scilicet inter ordines numerorum figuratorum subinde reponantur, ut exponens ordinis ipsorum sit zero, sive nihilum.

Ostendendum nobis modò est, qua ratione determinari possint in aliis generibus summæ numerorum figuratorum cujusque ordinis: id quod factu facile erit ex cognitis summis numerorum figuratorum generis primi. Etsi enim numeri figurati aliorum generum suos quoque habeant genitores, attamen quemadmodū genitores isti certo quodam modo derivantur ex genitoribus numerorum figuratorum primi generis, ita & ipsi numeri figurati aliorum generum possunt ratione non dissimili erui ex numeris figuratis generis primi: quod equidem quum sit, methodus nobis suboritur valde facilis, ac expedita pro determinandis summis ipsorum. Id itaque ostendemus primò in numeris illis, quos vocamus genitores numerorum figuratorum, quiq; à Veteribus numeri polygoni, sive multanguli dicebantur; tum deinde in ipsis numeris figuratis, singulos cujusque generis ordines constituentibus, ejusdem methodi periculum faciemus.

I.

De genitoribus numerorum figuratorum cujuscumque generis in unam summam colligendis.

Genitores numerorum figuratorum vocamus numeros illos, qui æquali intervallo ab unitate progrediuntur, & ex quorum collectione continuâ ipsi numeri figurati intelliguntur oriri. Quemadmodum autem genitores figuratorum primi generis sunt numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., hoc est numeri ab unitate per unitatis intervallum progredientes; ita genitores figuratorum secundi generis sunt numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c., qui progrediuntur ab unitate per intervallum binarii; genitores figuratorum tertii generis sunt numeri 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c., qui progrediuntur ab unitate per intervallum ternarii; atque ita deinceps.

Hujusmodi numeri genitores hanc habent proprietatem: nimirum, quod si genitoribus primi generis præfigatur zero, seu cyphra, iique ordine adjungantur genitoribus cujuscumq; generis; numeri, qui inde oriuntur, ſint genitores generis ſequentis. Hac ratione ſi numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., qui ſunt genitores primi generis cyphram habentes in principio, addantur ordine ipſis numeris genitoribus primi generis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., orientur numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c., qui ſunt genitores generis ſecundi. Pariterque ſi numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. addantur ordine genitoribus ſecundi generis 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c., habebuntur numeri 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c., qui ſunt genitores generis tertii. Atque ita quoque ſi iidem numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ordine adjungantur genitoribus tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c., producentur numeri 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c., qui ſunt genitores generis quarti.

Hac mediante proprietate, facile erit, ex genitoribus primi generis, cujuſcumq; alterius generis genitores derivare. Si enim genitoribus primi generis cyphra, ſeu zero præfigatur, iique toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum genitorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis primi generis genitoribus, habebuntur genitores generis quæſiti. Ita, ſi quærantur genitores generis quarti, capiatur ter unuſquiſque numerorum 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., qui ſunt genitores primi generis, cyphram habentes ab initio, ita ut evadant 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, &c.; deinde addantur ordine genitoribus primi generis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., eruntque numeri prodeuntes 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c. genitores generis quarti. Similiter, ſi deſiderentur genitores generis ſeptimi, ſumatur ſexies quilibet eorundem numerorum 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., ut fiant 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, &c., tum addantur ordine genitoribus primi generis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., & qui inde oriuntur numeri 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, &c. erunt genitores generis ſeptimi.

Unde modò cognitâ ſummâ genitorum primi generis, facile etiam erit cujuſcumque alterius generis genitorum ſummam invenire. Quum enim genitores cujuſcumque alterius generis habeantur, ſi genitoribus generis primi cyphra, ſeu zero præfigatur, iique toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæſitorum genitorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis primi generis genitoribus; perſpicuum eſt, ad inveniendam in quovis alio genere ſummam genito-

rum

rum totidem, quot designat numerus m, non aliud fieri debere, quàm in unum addere tot genitores primi generis, quot designat numerus $m - 1$, & summam istam toties acceptam, quot unitates continet exponens generis addendorum genitorum, unâ demptâ, conjungere cum summâ, quæ oritur ex additione tot aliorum genitorum primi generis, quot designat ipse numerus m.

Jam per ea, quæ superiùs ostensa sunt, summa ex tot genitoribus primi generis quot designat numerus m, est semissis ejus, quod oritur multiplicando m per $m + 1$; atque ita quoque summa ex tot genitoribus ejusdem primi generis, quot designantur per $m - 1$, est semissis ejus, quod producitur, multiplicando $m - 1$ per m. Quocirca quia primum productum est $m^2 + m$, productum verò secundum est $m^2 - m$; invenietur in unoquoque alio genere summa tot genitorum, quot denotat numerus m, si ad $\frac{m^2 + m}{2}$ addatur toties $\frac{m^2 - m}{2}$, quot unitates habet exponens generis addendorum genitorum, unâ demptâ; hoc est semel, si genitores ad-

addendi fuerint generis secundi; bis, si generis tertii; ter, si generis quarti; atque ita deinceps.

Itaque, quia si ad $\frac{m^2 + m}{2}$ semel addatur $\frac{m^2 - m}{2}$, summa tota est $\frac{2m^2 + 0m}{2}$; fiet hinc, ut $\frac{2m^2 + 0m}{2}$ sit summa ex tot genitoribus generis secundi, quot designat numerus m. Pariterque, quia id, quod oritur, addendo $\frac{m^2 - m}{2}$ bis ad $\frac{m^2 + m}{2}$ est $\frac{3m^2 - m}{2}$; erit $\frac{3m^2 - m}{2}$ summa ex tot genitoribus generis tertii, quot designat idẽ numerus m. Atque ita quoq; erit $\frac{4m^2 - 2m}{2}$ summa ex tot genitoribus generis quarti, quot designantur per eundem numerum m; quandoquidem id, quod gignitur, addendo $\frac{m^2 - m}{2}$ ter ad $\frac{m^2 + m}{2}$ est $\frac{4m^2 - 2m}{2}$. Nec dissimili ratiotione cujuscumq; altioris generis genitorum summæ indefinitæ poterunt definiri; quæ tamen eo ordine, quo ad sua genera referuntur, ita se habent, si utique in omni genere fuerit m numerus genitorum in unam summam addendorum.

I. $\dfrac{1m^2 + 1m}{2}$ VI. $\dfrac{6m^2 - 4m}{2}$

II. $\dfrac{2m^2 + 0m}{2}$ VII. $\dfrac{7m^2 - 5m}{2}$

III. $\dfrac{3m^2 - 1m}{2}$ VIII. $\dfrac{8m^2 - 6m}{2}$

IV. $\dfrac{4m^2 - 2m}{2}$ IX. $\dfrac{9m^2 - 7m}{2}$

V. $\dfrac{5m^2 - 3m}{2}$ X. $\dfrac{10m^2 - 8m}{2}$.

Unde patet, summas istas indefinitas numerorum genitorum cujuscumque generis miro quidem ordine progredi in infinitum; neq; adeo necessarium esse, exposito artificio singulas invenire. Est enim unaquæque semissis quantitatis, quæ duobus terminis constat; atque horum terminorum primi constituuntur, multiplicando numeros, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur, per quadratum numeri m, qui designat, quot genitores in unum sunt addendi; secundi verò, multiplicando numeros, qui ab unitate per unitatis intervallum regrediuntur, per ipsum numerum m: ex quo fit, ut ad inveniendam in unoquoque genere summam tot genitorum, quot designat numerus m, possit hæc regula generalis adhiberi.

Capiatur quadratum numeri m toties, quot unitates continet exponens generis datorum genitorum; tum ipse numerus m toties etiam accipiatur, quot unitates continet id, quod superest, subtrahendo eundem exponentem ex binario; denique addantur in unum, qui inde oriuntur numeri, & summæ semissis id, quod quæritur, exhibebit. Ut si velim, exempli gratia, addere in unum priores sex numeros genitores quinti generis, quia quadratum numeri 6 quinquies sumptum est 180, & ipse numerus 6 toties acceptus, quot sunt unitates in $2 - 5$, hoc est in -3, est -18; erit summa utriusque numeri $180 - 18$, hoc est 162; adeo-

adeoque hujus semissis 81 erit summa priorum sex genitorum quinti generis.

II.

De numeris figuratis, qui primum ordinem cujusque generis constituunt, in unum addendis.

Numeri figurati, qui primum ordinem in unoquoque genere constituunt sunt illi, qui oriuntur ex continuâ collectione eorum, quos genitores illius generis appellamus. Ita, quia genitores primi generis sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c., figurati, qui in eodem primo genere primum ordinem constituunt, erunt numeri 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c., qui ex illorum additione continuâ producuntur. Et similiter, quia genitores secundi generis sunt 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c., figurati, qui in eodem secundo genere primum ordinem constituunt, erunt numeri 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c., qui ex collectione continuâ eorum oriuntur.

Hujusmodi numeri, qui primum ordinem figuratorum in omni genere constituunt, hanc habent proprietatem, nimirum, quod si iis, qui sunt primi generis, præfigatur zero, sive cyphra, iidemque ordine adjungantur numeris, qui constituunt primum ordinem figuratorum in quovis alio genere, qui inde oriuntur numeri sint figurati primi ordinis generis subsequentis. Hac ratione si numeri 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c., qui sunt figurati primi ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, addantur ordine ipsis numeris 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c., qui sunt figurati primi ordinis in genere secundo. Pariterque si iidem numeri 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. addantur ordine numeris 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum secundi generis, habebuntur numeri, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, &c, qui sunt figurati primi ordinis in genere tertio.

Hujus proprietatis beneficio facile erit ex numeris, qui constituunt primum ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui sint figurati primi ordinis in quovis alio genere. Si enim iis, qui sunt primi generis, cyphra, seu zero ro præfigatur, iidemque toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, unâ demptâ, addantur ordine ipsis numeris, qui primum ordinem figuratorum in primo genere constituunt, habebuntur figurati primi ordinis generis quæsiti. Ita si quærantur figurati primi ordinis generis quarti, capiatur ter unusquisque numerorum 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c., qui sunt figurati primi ordinis in genere primo, cyphram habentes sub initium, ita ut evadant 0, 3, 9, 18, 30, 45, 63, &c., deinde addantur ordine numeris 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum primi generis; eruntque numeri prodeuntes 1, 6, 15, 28, 45, 60, 91, &c. figurati primi ordinis in genere quarto. Similiter si desiderentur figurati primi ordinis generis sexti, sumatur quinquies quilibet eorundem numerorum 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c., ut fiant 0, 5, 15, 30, 50, 75, 105, &c., tum addantur ordine numeris 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c., qui sunt figurati primi ordinis in genere primo; & qui inde oriuntur numeri 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, &c. erunt figurati primi ordinis generis sexti.

At-

Atque hinc modò cognitâ summâ numerorum, qui sunt figurati primi ordinis in genere primo, facile etiam erit, cujuscumque alterius generis figuratorum primi ordinis summam invenire. Quum enim figurati primi ordinis in omni alio genere habeantur, si iis, qui sunt generis primi, præfigatur cyphra, seu zero, iidemque toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæsitorum figuratorum, unâ demptâ, addantur ordine ipsis figuratis primi ordinis in genere primo; perspicuum est, ad inveniendam in quovis alio genere summam totidem figuratorum primi ordinis, quot designat numerus m, non aliud fieri debere, quàm in unum addere tot figuratos primi ordinis in genere primo, quot designat numerus $m - 1$, & summam istam toties acceptam, quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ, conjungere cum summâ, quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum, qui in genere primo primum ordinem constituunt, quot designat ipse numerus m.

Jam per ea, quæ superiùs ostensa sunt, summa ex tot figuratis primi ordidinis in genere primo, quot designat numerus m, habetur multiplicando per se mutuò tres istos numeros m, $m+1$, $m+2$, & dividendo productum m^3+3m^2+2m per 6; atque ita quoque summa ex tot figuratis primi ordinis in eodem primo genere, quot designat $m-1$, habetur multiplicando per se mutuò tres istos numeros $m-1$, m, $m+1$, & productum m^3-m dividendo similiter per 6. Quocirca, quia quotiens, qui oritur ex primâ divisione, est $\frac{m^3+3m^2+2m}{6}$, & quotiens, qui oritur ex secundâ, est $\frac{m^3-m}{6}$; invenietur in unoquoque alio genere summa tot figuratorum primi ordinis, quot denotat numerus m, si ad $\frac{m^3+3m^2+2m}{6}$ addatur toties $\frac{m^3-m}{6}$, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ; hoc est semel, si figurati addendi sint generis secundi; bis, si generis tertii; ter, si generis quarti; atque ita deinceps.

Ita-

Itaque, quia si ad $\frac{m^3+3m^2+2m}{6}$ semel addatur $\frac{m^3-m}{6}$, summa tota est $\frac{2m^3+3m^2+m}{6}$; erit quantitas ista summa ex tot figuratis primi ordinis in genere secundo, quot designat numerus m. Pariterque, quia id, quod oritur, addendo $\frac{m^3-m}{6}$ bis ad $\frac{m^3+3m^2+2m}{6}$ est $\frac{3m^3+3m^2+0m}{6}$, erit hæc alia quantitas summa ex tot figuratis primi ordinis in genere tertio, quot designat idem adhuc numerus m. Atque ita quoque erit $\frac{4m^3+3m^2-m}{6}$ summa ex tot figuratis primi ordinis in genere quarto, quot designantur per eundem numerum m; quandoquidem id, quod producitur, addendo $\frac{m^3-m}{6}$ ter ad $\frac{m^3+3m^2+2m}{6}$ est quantitas illa. Eodemque artificio progre-

 gre-

gredi licebit in infinitum, summasque indefinitas determinare numerorum, qui in altioribus generibus primum figuratorum ordinem constituunt. Sed hæ interim summæ eo ordine, quo ad sua genera referuntur, ita se habent, si utique in omni genere fuerit m numerus figuratorum primi ordinis in unam summam addendorum.

I. $\dfrac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$

II. $\dfrac{2m^3 + 3m^2 + 1m}{6}$

III. $\dfrac{3m^3 + 3m^2 + 0m}{6}$

IV. $\dfrac{4m^3 + 3m^2 - 1m}{6}$

V. $\dfrac{5m^3 + 3m^2 - 2m}{6}$

VI. $\dfrac{6m^3 + 3m^2 - 3m}{6}$

VII. $\dfrac{7m^3 + 3m^2 - 4m}{6}$

VIII. $\dfrac{8m^3 + 3m^2 - 5m}{6}$

IX. $\dfrac{9m^3 + 3m^2 - 6m}{6}$

X. $\dfrac{10m^3 + 3m^2 - 7m}{6}$

Ex quo patet, summas istas indefinitas numerorum, qui in omni genere primum figuratorum ordinem constituunt, miro quidem ordine progredi in infinitum: quo utique considerato, haud quidem necesse est, exposito artificio singulas invenire. Est enim unaquæque sexta pars quantitatis, quæ tribus terminis constat; atque horum terminorum primi constituuntur, multiplicando numeros naturales per cubum numeri m, qui designat, quot figurati in unum sunt addendi; secundi, multiplicando numerum ternarium per quadratum ejusdem numeri m; & tertii, multiplicando numeros, qui à binario per unitatis intervallum regrediuntur per ipsum numerum m: ex quo fit, ut ad inveniendam in unoquoque genere summam tot figuratorum primi ordinis, quot designat nu-

numerus m, possit hæc regula generalis adhiberi.

Capiatur cubus numeri m toties, quot unitates continet exponens generis datorum figuratorum; tum ipse numerus m toties etiam accipiatur, quot unitates continet id, quod relinquitur, subtrahendo eundem exponentem ex ternario; denique qui inde oriuntur numeri addantur cum triplo quadrati ejusdem numeri m; & sexta pars summæ id, quod quæritur, exhibebit. Ut si velim, exempli gratiâ, addere in unum priores sex numeros figuratos primi ordinis in genere quinto, quia cubus numeri 6 quinquies sumptus est 1080, & ipse numerus 6 toties acceptus, quot sunt unitates in $3 - 5$, hoc est in -2 est -12, additis duobus hisce numeris cum triplo quadrati, quod fit ex eodem numero 6, hoc est cum 108, erit summa omnium $1080 - 12 + 108$, hoc est 1176: proindeque hujus sexta pars 196 erit summa numerorum, qui sunt sex priores figurati primi ordinis in genere quinto.

III.

De summis numerorum, qui secundum figuratorum ordinem in omni genere constituunt.

Numeri, qui secundum figuratorum ordinem in unoquoque genere constituunt, sunt illi, qui oriuntur ex continuâ collectione eorum, quos figuratos primi ordinis in eodem genere vocamus. Ita, quia in primo genere figurati prmi ordinis sunt 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c.; figurati, qui in eodem primo genere secundum ordinem constituunt, erunt numeri 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c., qui ex illorum additione continuâ producuntur. Et similiter, quia in secundo genere figurati primi ordinis sunt 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c.; figurati, qui in eodem secundo genere ordinem secundum constituunt, erunt numeri 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, &c., qui ex collectione continuâ eorum oriuntur.

Numeri isti, qui secundum ordinem figuratorum in omni genere constituunt, hanc habet proprietatem: nimirum, quod si iis, qui sunt primi generis, præfigatur zero, sive cyphra, iidemque ordine adjungantur numeris, qui constituunt secundum ordinem figuratorum in quovis alio genere, qui inde oriuntur numeri, sint figurati secundi ordinis generis subsequentis. Hac ratione, si numeri 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c., qui sunt figurati secundi ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, addantur ordine ipsis numeris 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c, qui constituunt secundum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, &c., qui sunt figurati secundi ordinis in genere secundo. Pariterque, si iidem numeri 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c. addantur ordine numeris 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, &c., qui constituunt secundum ordinem figuratorum secundi generis, habebuntur numeri 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, &c., qui sunt figurati secundi ordinis in genere tertio.

Ope hujus proprietatis haud difficile erit ex numeris, qui constituunt secundum ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui sint figurati secundi ordinis in quovis alio genere. Si enim iis, qui sunt primi generis, cyphra, seu zero præfigatur, iidemque toties acce-

cepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, unâ demptâ, addantur ordine ipsis numeris, qui secundum ordinem figuratorum in primo genere constituunt, habebuntur figurati secundi ordinis generis quæsiti. Ita, si quærantur figurati secundi ordinis generis quarti, capiatur ter unusquisque numerorum 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c., qui sunt figurati secundi ordinis in genere primo, cyphram habentes sub initium, ita ut evadant 0, 3, 12, 30, 60, 105, 168, &c., tum addantur ordine numeris 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c., qui constituunt secundum ordinem figuratorum primi generis, eruntque numeri prodeuntes 1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, &c. figurati secundi ordinis in genere quarto. Similiter si desiderentur figurati secundi ordinis generis sexti, sumatur quinquies quilibet eorundem numerorum 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c., ut fiant 0, 5, 20, 50, 100, 175, 280, &c., deinde addantur ordine numeris 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c., qui sunt figurati secundi ordinis in genere primo; & qui inde oriuntur numeri 1, 9, 30, 70, 135, 231, 364, &c. erunt figurati secundi ordinis generis sexti.

Unde modò cognitâ summâ numerorum, qui sunt figurati secundi ordinis in genere primo, facile etiã erit, cujuscumq; alterius generis figuratorum secundi ordinis summam invenire. Quum enim figurati secũdi ordinis in omni alio genere habeantur, si iis, qui sunt generis primi, præfigatur cyphra, seu zero, iidemq; toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæsitorum figuratorũ, unâ demptâ, addantur ordine ipsis figuratis secundi ordinis in genere primo; perspicuum est, ad inveniendam in quovis alio genere summam totidem figuratorum secundi ordinis, quot designat numerus m, non aliud fieri debere, quàm in unum addere tot figuratos secundi ordinis in genere primo, quot designat numerus $m - 1$, & summam istam toties sumptam, quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ, conjungere cum summâ, quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum, qui in genere primo secundum ordinem constituunt, quot designat ipse numerus m.

Jam ex iis, quæ superiùs ostensa sunt, summa ex tot figuratis secundi ordinis in genere primo, quot designat numerus m, ha-

m, habetur multiplicando per se mutuò quatuor istos numeros m, $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, & dividendo productum $m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m$ per 24; atque ita quoque summa ex tot figuratis secundi ordinis in eodem primo genere, quot designat numerus $m - 1$, habetur multiplicando per se mutuò quatuor istos numeros $m - 1$, m, $m + 1$, $m + 2$, & productum $m^4 + 2m^3 - m^2 - 2m$ dividendo similiter per 24. Quocirca, quia quotiens, qui oritur ex primâ divisione, est $\frac{m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m}{24}$, & quotiens, qui oritur ex secundâ, est $\frac{m^4 + 2m^3 - m^2 - 2m}{24}$; invenietur in unoquoque alio genere summa tot figuratorum secundi ordinis, quot denotat numerus m, si ad primum illum quotientem addatur toties quotiens iste secundus, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ; hoc est semel, si figurati addendi sint generis secundi; bis, si generis tertii; ter, si generis quarti; atque ita deinceps.

Itaque, quia si priori quotienti addatur semel quotiens secundus, summa tota est

$2m^4$

$\frac{2m^4 + 8m^3 + 10m^2 + 4m}{24}$; erit quantitas iſta ſumma ex tot figuratis ſecundi ordinis in genere ſecundo, quot deſignat numerus m. Pariterque, quia id, quod oritur, addendo priori quotienti bis eundem illum quotientem ſecundum, eſt $\frac{3m^4 + 10m^3 + 9m^2 + 2m^2}{24}$; erit hæc alia quantitas ſumma ex tot figuratis ſecundi ordinis in genere tertio, quot deſignat idem numerus m. Atque ita quoque erit $\frac{4m^4 + 12m^3 + 8m^2 + 0m^2}{24}$ ſumma ex tot figuratis ſecundi ordinis in genere quarto, quot deſignantur per eundem numerum m; quandoquidem id, quod producitur, addendo priori quotienti ter quotientem ſecundum, eſt quantitas illa. Nec diſſimili ratione licebit progredi in infinitum, ſummaſque indefinitas determinare numerorum, qui in altioribus generibus ſecundum figuratorum ordinem conſtituunt. Sed horum interim figuratorum ſummæ eo ordine, quo ad ſua genera referuntur, ita ſe habent, ponen-

nendo ſemper, quod in omni genere m ſit numerus figuratorum ſecundi ordinis in unam ſummam addendorum.

$$\text{I.}\quad \frac{m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m}{24}$$

$$\text{II.}\quad \frac{2m^4 + 8m^3 + 10m^2 + 4m}{24}$$

$$\text{III.}\quad \frac{3m^4 + 10m^3 + 9m^2 + 2m}{24}$$

$$\text{IV.}\quad \frac{4m^4 + 12m^3 + 8m^2 + 0m}{24}$$

$$\text{V}\quad \frac{5m^4 + 14m^3 + 7m^2 - 2m}{24}$$

$$\text{VI.}\quad \frac{6m^4 + 16m^3 + 6m^2 - 4m}{24}$$

$$\text{VII.}\quad \frac{7m^4 + 18m^3 + 5m^2 - 6m}{24}$$

$$\text{VIII.}\quad \frac{8m^4 + 20m^3 + 4m^2 - 8m}{24}$$

$$\text{IX.}\quad \frac{9m^4 + 22m^3 + 3m^2 - 10m}{24}$$

$$\text{X.}\quad \frac{10m^4 + 24m^3 + 2m^2 - 12m}{24}$$

Unde patet, ſummas iſtas indefinitas numerorum, qui in ſingulis generibus ſecundum figuratorum ordinem conſtituunt, progredi in infinitum miro quidem, ad quem attendentes haud equidem neceſſum habemus, expoſito artificio ſingulas invenire. Eſt enim unaquæque vigeſima quarta pars quantitatis, quæ quatuor terminis conſtat; atque horum terminorum primi conſtituuntur, multiplicando numeros naturales per quadrato-quadratum numeri m, qui deſignat, quot figurati in unum ſunt addendi; ſecundi, multiplicando numeros, qui à 6 binarii intervallo progrediuntur, per cubum ejuſdem numeri m; tertii, multiplicando numeros, qui à 11 intervallo unitatis regrediuntur, per quadratum ejuſdem adhuc numeri m; & quarti, ſive poſtremi, multiplicando numeros, qui à 6 binarii intervallo regrediuntur, per ipſum numerum m. Ex quo fit, ut ad inveniendas in unoquoque genere ſummam tot fi-

guratorum ſecundi ordinis, quot deſignat numerus m, poſſit hæc regula generalis adhiberi.

Capiatur primò quadrato-quadratum numeri m toties, quot unitates habet exponens generis datorum figuratorum; ſecundò cubus ejuſdem numeri m toties, quot ſunt unitates in eo, quod oritur, addendo ad numerum 4 duplum ejuſdem exponentis; tertiò quadratum ejuſdem adhuc numeri m toties, quot unitates continet, id, quod ſupereſt, ſubtrahendo eundem exponentem ex numero 12; & denique ipſe numerus m toties etiam accipiatur, quot ſunt unitates in eo, quod remanet, ſubducendo eundem illum exponentem duplicatum ex numero 8. Porrò addantur in unum omnes numeri, exinde prodeuntes; & ſiquidem ſummæ hujus capiatur pars vigeſimaquarta, id quod quæritur, hæc exhibebit.

IV.

De ſummis numerorum, qui alios figuratorum ordines in unoquoque genere conſtituunt.

Quemadmodum in unoquoque genere numeros, qui oriuntur ex collelectione continuâ figuratorum primi ordinis, vocamus figuratos ordinis secundi; ita quoque numeros, qui producuntur ex additione continuâ figuratorum secundi ordinis, vocamus figuratos ordinis tertii; pariterque dicimus figuratos ordinis quarti, quos exhibent figurati tertii ordinis continuò collecti; figuratos ordinis quinti, quos procreant figurati quarti ordinis continuò etiam additi; atque ita deinceps. Sic, quia in primo genere figurati secundi ordinis sunt 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c.; erunt in eodem genere figurati ordinis tertii 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c.; figurati ordinis quarti 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, &c.; figurati ordinis quinti 1, 7, 28, 84, 210, 462, 924, &c.; atque ita in infinitum.

Jam in numeris istis, qui in unoquoque genere alios figuratorum ordines constituunt, eandem cernere licet proprietatem, quam habent ii, qui constituunt priores duos ordines: nimirum quod si iis, qui datum aliquem figuratorum ordinem constituunt in primo genere, præfigatur zero, sive cyphra, iidemque ordine adjungantur numeris, qui eundem figuratorum ordinem cõstituunt in

in quovis alio genere, qui inde oriuntur numeri sint figurati ejusdem ordinis generis subsequentis. Hac ratione, si numeri 0, 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c., qui sunt figurati tertii ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, addantur ordine ipsis numeris 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c., qui constituunt tertium ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, &c., qui sunt figurati tertii ordinis in genere secundo. Et si iidem numeri 0, 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c. addantur ordine numeris, 1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, &c., qui constituunt tertium ordinem figuratorum secundi generis, habebuntur numeri 1, 7, 25, 65, 140, 266, 462, &c., qui sunt figurati tertii ordinis in genere tertio.

Eadem ratione, si numeri 0, 1, 6, 21, 56, 126, 252, &c., qui sunt figurati quarti ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, addantur ordine ipsis numeris 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, &c., qui constituunt quartum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri, 1, 7, 27, 77, 182, 378, 714, &c., qui sunt figurati quarti ordinis in genere secundo. Et si iidem numeri si 0, 1, 6, 21, 56, 126, 252, &c. addantur ordine numeris 1, 7, 27, 77, 182, 378, 714, &c., qui constituunt quartum ordinem figuratorum secundi generis, habebuntur numeri 1, 8, 33, 98, 238, 504, 966, &c, qui sunt figurati quarti ordinis in genere tertio.

Atque hac mediante proprietate facile erit ex numeris, qui constituunt datum aliquem ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui sint figurati ejusdem ordinis in quovis alio genere. Si enim iis, qui sunt primi generis cyphra, seu zero præfigatur, iidemque toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, unâ demptâ, addantur ordine ipsis numeris, qui datum illum ordinem figuratorum constituunt in genere primo, habebuntur figurati ejusdem ordinis generis quæsiti. Ita, si quærantur figurati tertii ordinis generis tertii; capiatur bis unusquisque numerorum 0, 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c., qui sunt figurati tertii ordinis in genere primo, cyphram habentes sub initium, ita ut evadant, 0, 2, 10, 30, 70, 140, 252, &c., deinde addantur ordine numeris 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c., qui constituunt tertium or-

dinem figuratorum primi generis; eruntque numeri prodeuntes 1, 7, 25, 65, 140, 266, 462, &c. figurati tertii ordinis in genere tertio.

Similiter, si quærantur figurati quarti ordinis ejusdem generis tertii, capiatur bis unusquisque numerorum 0, 1, 6, 21, 56, 126, 252, &c, qui sunt figurati quarti ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, ita ut evadant 0, 2, 12, 42, 112, 252, 504, &c., deinde addantur ordine numeris 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, qui constituunt quartum ordinem figuratorum primi generis; eruntque numeri prodeuntes 1, 8, 33, 98, 238, 504, 966, &c. figurati quarti ordinis in genere tertio. Atque ita quoque, si desiderentur figurati quarti ordinis in genere quarto, sumatur ter quilibet eorundem numerorum 0, 1, 6, 21, 56, 126, 252, &c., ut fiant 0, 3, 18, 63, 168, 378, 756, &c., tum addantur ordine numeris 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, &c. qui sunt figurati quarti ordinis in genere primo; & qui inde oriuntur numeri 1, 9, 39, 119, 294, 630, 1218, &c. erunt figurati quarti ordinis generis quarti.

Atque hinc modò cognitâ summâ numerorum, qui conſtituunt datum aliquem ordinem figuratorum in genere primo, facile etiam erit in quovis alio genere figuratorum ejuſdem ordinis ſummam invenire. Quum enim figurati, conſtituentes datum aliquem ordinem in omni alio genere, habeantur, ſi iis, qui ſunt ejuſdem ordinis in genere primo, addatur cyphra, ſive zero, iidemque toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæſitorum figuratorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis figuratis, qui ſunt ejus ordinis in genere primo; perſpicuum eſt, ad inveniendam in quovis alio genere ſummam totidem figuratorum dati cujuſdam ordinis, quot deſignat numerus m, non aliud fieri debere, quàm in unum addere tot figuratos ejuſdem ordinis in genere primo, quot deſignat numerus $m - 1$, & ſummam iſtam toties acceptam, quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ, conjungere cum ſummâ, quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum, qui in genere primo eundem ordinem conſtituunt, quot deſignat ipſe numerus m.

Itaque, ſi de inveniendis ſummis figuratorum tertii ordinis quæſtio ſit, per ea,

quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſumma ex tot figuratis tertii ordinis in genere primo, quot deſignat numerus m, habetur multiplicando per ſe mutuò quinque iſtos numeros $m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4$, & dividendo productum per 120; atque ita quoque ſumma ex tot figuratis tertii ordinis in eodem primo genere, quot deſignat $m - 1$, habetur multiplicando per ſe mutuò quinque iſtos numeros $m - 1, m + 1, m, m + 2, m + 3$, & productum dividendo ſimiliter per 120. Quocirca invenietur in unoquoque alio genere ſumma tot figuratorum tertii ordinis, quot denotat numerus m, ſi ad priorem quotientem addatur toties quotiens ſecundus, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ; hoc eſt ſemel, ſi figurati addendi ſint generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

Similiter, ſi agatur de inveniendis ſummis figuratorum quarti ordinis, per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſumma ex tot figuratis quarti ordinis in genere primo, quot deſignat numerus m, habetur multiplicando per ſe mutuò ſex iſtos numeros $m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4, m + 5$,

& dividendo productum per 720; atq; ita quoque summa ex tot figuratis quarti ordinis in eodem primo genere, quot designat $m - 1$, habetur multiplicando per se mutuò sex istos numeros $m - 1$, m, $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, $m + 4$, & productum dividendo similiter per 720. Itaque invenietur in unoquoque alio genere summa tot figuratorum quarti ordinis, quot denotat numerus m, si ad quotientem ortum ex primâ divisione addatur toties quotiens ortus ex divisione secundâ, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ.

Atque hic quoque, si omnes istæ summæ eo ordine disponantur, quo ad sua genera referuntur, patebit, eas miro quidem ordine progredi in infinitum, neque adeo necesse esse, exposito artificio singulas invenire. Unde etiam poterit regula generalis excogitari pro inveniendâ in unoquoque genere summâ tot figuratorum dati alicujus ordinis, quot designat numerus m. Cæterùm, quia cognitâ summâ numerorum figurarotum, qui constituunt datum aliquem ordinem in genere primo, licuit nobis invenire summam figuratorum, qui constituunt eundem ordinem in quovis alio genere, ob

ob hanc proprietatem, quod si iis, qui sunt primi generis, præfigatur zero, sive cyphra, iidemq; ordine adjungantur numeris, qui constituunt eundem figuratorum ordinem in omni alio genere, ii, qui inde oriuntur, sint figurati ejusdem ordinis generis subsequentis; proinde non abs re erit, proprietateem istam breviter hoc loco ostensam exhibre.

V.

Proprietas numerorum figuratorum superiùs usurpata demonstratur.

AD demonstrandam proprietatē, quæ deprehenditur in numeris figuratis, qui in singulis generibus unum eundemque ordinem constituunt, præmittendum est priùs hoc theorema, quod si fuerint quotcumque series numerorum, eam proprietatem habentes, ut præfixâ cyphrâ iis, qui primam seriem cōstituunt, iisdemque additis ordine cum numeris cujuscumque seriei, oriantur numeri seriei subsequentis, & ex collectione continuâ numerorum, series illas constituentium, conficiantur totidem aliæ numerorum series, quod inquam aliæ istæ series, eandem habeant proprietatem, ac primæ: adeo, ut si iis, qui sunt primæ seriei, addatur cyphra, sive zero, iidemque ordine addantur cum numeris cujusque seriei, qui inde oriantur sint numeri seriei subsequentis.

Sint igitur a, b, c, d, &c.; a, e, f, g, &c., a, h, i, k, &c.; a, l, m, n, &c. series aliquot numerorum, quæ eam habeant proprietatem, ut si iis, qui primam seriem constituunt, addatur cyphra, sive zero, iidemque ordine adjungantur numeris cujuscumque seriei, oriantur numeri seriei subsequentis. Dico, quod si ex collectione continuâ numerorum, series illas constituentium, efficiantur totidem aliæ series a, o, p, q, &c.; a, r, s, t, &c.; a, u, x, y, &c.; a, z, &, w, &c.; series istæ eandem proprietatem habeant, ac primæ: ita nempe, ut si iis, qui constituunt primā seriem cyphra, sive zero præfigatur, iidemque ordine addantur terminis alicujus seriei, oriantur exinde numeri, qui constituunt seriem subsequentem.

Quoniam enim primæ series eam habent proprietatem, ut præfixâ cyphrâ iis, qui primam seriem constituunt, iisdemque additis ordine cum numeris alicujus se-

riei, oriantur numeri seriei subsequentis; proinde existentibus terminis seriei primæ a, b, c, d, &c., fient termini seriei secundæ $a, a+b, b+c, c+d$, &c., termini seriei tertiæ $a, 2a+b, 2b+c, 2c+d$, &c., termini seriei quartæ $a, 3a+b, 3b+c, 3c+d$, &c., atque ita deinceps.

Et quoniam secundæ series oriuntur ex collectione continuâ numerorum, series primas constituentium; proinde prima ex secundis istis seriebus erit $a, a+b, a+b+c, a+b+c+d$, &c.; secunda $a, 2a+b, 2a+2b+c, 2a+2b+2c+d$; &c.; tertia $a, 3a+b, 3a+3b+c, 3a+3b+3c+d$, &c.; quarta $a, 4a+b, 4a+4b+c, 4a+4b+4c+d$, &c.; atque ita deinceps.

Jam designatis hac ratione secundis istis seriebus, liquet primos terminos ipsarum à se mutuò non differre, quum omnes per a designentur; sed non item terminos alios, quum secundi differant à se mutuò per a, tertii per $a+b$, quarti per $a+b+c$, & sic in infinitum: adeo nempe, ut oriatur semper terminus subsequens, si alicui ex secundis addatur a, alicui ex tertiis addatur $a+b$, alicui ex quartis addatur $a+b+c$, atque ita deinceps.

 Un-

Unde modò facile est theorema propositum ostendere. Nam, quum nulla sit differentia inter primos terminos istarum serierum, inter alios verò ea intercedat, ut quisque deficiat à subsequente per a in secundis, per $a + b$ in tertiis, per $a + b + c$ in quartis, atque ita deinceps, perspicuum est, quod si termini isti o, a, $a + b$, $a + b + c$, &c. addantur ordine terminis cujusque ex iis seriebus oriantur termini seriei subsequentis.

Jam verò o, a, $a + b$, $a + b + c$, &c. sunt termini, constituentes primam earum serierum, & habentes cyphram in principio. Itaque in secundis iis seriebus ea etiam proprietas locum habet, quod si iis, qui constituunt primam illarum, cyphra, sive zero præfigatur, iidemque ordine addantur terminis cujusque ex iisdem seriebus, qui inde oriantur, sint termini seriei subsequentis.

Ostenso hoc theoremate, haud difficile modò erit rationem reddere illius proprietatis, quæ deprehenditur in numeris, qui in singulis generibus eundem figuratorum ordinem constituunt: nempe quod si iis, qui datum aliquem ordinem constituunt in primo genere, addatur cyphra, seu zero, iidemque ordine adjungantur iis, qui eundem ordinem constituunt in quovis genere; qui inde oriantur, sint numeri constituentes eundem adhuc figuratorum ordinem in genere subsequenti.

Nam primò numeri, qui in singulis generibus primum figuratorum ordinem constituunt, oriuntur ex continuâ collectione genitorum, qui ad sua quæque genera referuntur. Jam verò numeri isti genitores hanc habent proprietatem, ut si iis, qui sunt primi generis, cyphra, seu zero præfigatur, iidemque ordine addantur genitoribus cujusque generis, oriantur genitores generis subsequentis. Itaque per ostensum theorema hæc eadem proprietas obtinebit etiam in numeris, qui in singulis generibus primum figuratorum ordinem constituunt.

Et quoniam numeri, qui in singulis generibus constituunt secundum ordinem figuratorum, oriuntur ex continuâ collectione eorum, qui in iisdem generibus constituunt ordinem primum; quemadmodum proprietas illa obtinet in istis, ita etiam locum habebit in iis. Unde porrò, quia numeri, qui constituunt in unoquoque genere tertium figuratorum ordinem, oriuntur ex collectione continuâ

nuâ eorum, qui in eodem genere constituunt ordinem secundum, obtinebit quoque eadem proprietas in figuratis tertii ordinis; atque ita gradatim in omnibus aliis figuratis, qui sunt unius ejusdemque ordinis, locum habere comperietur.

Cæterùm proprietatem illam competere omnibus numeris, quos figuratorum genitores appellamus, liquebit, si consideremus genitores primi generis, utpote progredientes ab unitate per unitatis intervallum, oriri ex continuâ collectione unitatum 1, 1, 1, 1, 1, &c., genitores secundi generis, veluti progredientes ab unitate per intervallum binarii, oriri ex additione continuâ binariorum, quibus unitas sit præfixa, 1, 2, 2, 2, 2, &c., genitores tertii generis, tamquam incedentes ab unitate per intervallum ternarii, oriri ex collectione continuâ ternariorum, quibus similiter unitas sit præfixa, 1, 3, 3, 3, 3, &c.; atque ita deinceps.

Quum enim series horum numerorum 1,1,1,1,1,&c., 1,2,2,2,2,&c., 1,3,3,3,3, &c. 1, 4, 4, 4, 4 &c., ex quibus genitores generum omnium continuâ collectione oriuntur, hujusmodi sint, ut inter primos

mos ipsarum terminos nulla sit differentia, inter alios verò ea intercedat, ut ubique quisque antecedens deficiat à subsequente per unitatem; perspicuum est, in iis seriebus proprietatem illam locum habere: unde per ostensum theorema eadem proprietas obtinebit etiam in seriebus, quæ genitores generum omnium continent, quum per continuam collectionem istæ ex iis oriantur.

VI.

Qua ratione in omni genere series tum genitorum, cùm figuratorum cujusque ordinis reddi possint summabiles, ostenditur.

Quemadmodum series tam genitorum primi generis, quàm figuratorum ex iis prodeuntium, in infinitum continuatæ, numquam possunt finitas summas exhibere; ita quoque nec genitores aliorum generum, nec figurati, qui ex iis oriuntur, possunt unquam simul, in infinitum continuati, quantitatem finitam constituere. Sed nihilominus quemadmodum ostensum est superiùs, priores series evadere summabiles, si utique

tique termini ipsarum dividantur ordine per terminos alterius seriei, qui geometricè crescendo progrediuntur; ita quoque series, tam genitorum aliorum generum, quàm figuratorum, qui ex iis subnascuntur, reddi possunt summabiles, si similiter termini ipsarum dividantur ordine per terminos progressionis geometricæ crescentis.

Id autem dependet ex ipsâ illâ istorum numerorum proprietate, quam modò demonstratam exhibuimus. Quod ut liquidò constet, ostendemus id primum in numeris genitoribus. Itaque dividantur primò genitores secundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. per terminos progressionis geometricæ crescentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova series oriatur $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{5}{a^3} + \frac{7}{a^4} + \frac{9}{a^5}$ &c. Et quoniam genitores secundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. oriuntur, addendo genitores generis primi 0, 1, 2, 3, 4, &c. cyphram habentes in principio, ordine ipsis primi generis genitoribus 1, 2, 3, 4, 5, &c., componetur nova illa series per additionem terminorum aliarum istarum serierum

$\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{4}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{4}{a^4} + \frac{5}{a^5}$, &c. Sed harum utraque series est summabilis, quum prima sit æqualis $\frac{1}{\overline{a-1}^2}$ altera æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2}$.

Itaque summabilis erit etiam nova illa series $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{5}{a^3} + \frac{7}{a^4} + \frac{9}{a^5}$ &c., ejusque summa finita erit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{1}{\overline{a-1}^2}$.

Dividātur secundò genitores tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c. per terminos ejusdem progressionis geometricæ crescentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova series habeatur $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{7}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{13}{a^5}$ &c. Et quoniam genitores tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c. oriuntur, ad-

addendo genitores generis primi $0, 1, 2, 3, 4$, &c. cyphram habentes in principio ordine genitoribus secundi generis $1, 3, 5, 7, 9$, &c.; componetur nova illa series per additionem terminorum aliarum istarum serierum $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{4}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{5}{a^3} + \frac{7}{a^4} + \frac{9}{a^5}$ &c. Jam verò utraque istarum serierum est summabilis, quum prima sit æqualis $\frac{1}{\overline{a-1}^2}$, altera æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{1}{\overline{a-1}^2}$. Quare summabilis erit etiam nova illa series $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{7}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{13}{a^5}$ &c., ejusque summa finita erit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{2}{\overline{a-1}^2}$.

Dividantur tertiò genitores quarti generis $1, 5, 9, 13, 17$, &c. per terminos ejusdem adhuc progressionis geometricæ crescentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova series constituatur $\frac{1}{a} + \frac{5}{a^2} + \frac{9}{a^3} + \frac{13}{a^4} + \frac{17}{a^5}$ &c. Et similiter, quia genitores quarti generis $1, 5, 9, 13, 17$, &c. oriuntur addendo genitores generis primi $0, 1, 2, 3, 4$, &c. cyphram habentes in principio ordine genitoribus tertii generis $1, 4, 7, 10, 13$, &c.; componetur nova illa series per additionem terminorum aliarum istarum serierum $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{4}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{7}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{13}{a^5}$, &c. Sed harum serierum utraque est summabilis, quum prima sit æqualis $\frac{1}{\overline{a-1}^2}$, altera æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{2}{\overline{a-1}^2}$. Itaque summabilis erit etiam nova illa series $\frac{1}{a} + \frac{5}{a^2} + \frac{9}{a^3} + \frac{13}{a^4} + \frac{17}{a^5}$ &c.,

&c., ejuſque ſumma finita erit æqualis

$$\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{3}{\overline{a-1}^2}.$$

Eodem artificio invenire licet ſummam finitam infinitorum terminorum cujuslibet alterius ſeriei, quæ oriatur dividendo genitores altiorum generum per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., nimirum componendo ſeriem illam ex duabus aliis ſeriebus, quarum una ſit conſtituta ex genitoribus primi generis cyphrã habentibus in principio, altera ex genitoribus illius generis, quod præcedit genus, de cujus genitoribus agitur. Sed attentâ ratione, qua harum ſerierum ſummæ progrediuntur, poterit regula confici generalis, quæ ad omnes caſus ſe extendat: nimirum addendo ſemper ad $\frac{a}{\overline{a-1}^2}$ toties $\frac{1}{\overline{a-1}^2}$, quot unitates habet exponens generis datorum genitorum, unâ demptâ, hoc eſt nullies, ſi genitores fuerint primi generis; ſemel, ſi generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

Oſten-

Oſtendamus id modò in numeris, qui in aliis generibus primum figuratorum ordinem conſtituunt. Quem in finem dividantur primò figurati, qui conſtituunt primum ordinem in genere ſecundo, 1, 4, 9, 16, 25, &c. per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5 &c., ita ut nova habeatur ſeries $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{9}{a^3} + \frac{16}{a^4} + \frac{25}{a^5}$ &c. Et quoniam figurati primi ordinis in genere ſecundo oriuntur, addendo eos, qui ſunt primi ordinis in genere primo, 0, 1, 3, 6, 10, &c., cyphram habentes in principio, ordine ipſis numeris 1, 3, 6, 10, 15, &c., qui primum figuratorum ordinem in primo genere conſtituunt; componetur nova illa ſeries ex additione terminorũ aliarum iſtarum ſerierũ $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{6}{a^4} + \frac{10}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{6}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{15}{a^5}$ &c. Sed harum ſerierũ utraq; eſt ſummabilis, quum prima ſit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^3}$;

Da ſe-

secunda verò æqualis $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3}$. Itaque prodibit etiam summabilis nova illa series $\frac{1}{a}+\frac{4}{a^2}+\frac{9}{a^3}+\frac{16}{a^4}+\frac{25}{a^5}$ &c., ejusque summa finita erit $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3}+\frac{a}{\overline{a-1}^3}$.

Dividantur deinde numeri 1, 5, 12, 22, 35, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum in genere tertio, per terminos ejusdem progressionis geometricæ a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova constituatur series $\frac{1}{a}+\frac{5}{a^2}+\frac{12}{a^3}+\frac{22}{a^4}+\frac{35}{a^5}$ &c. Et quoniam figurati primi ordinis in genere tertio 1, 5, 12, 22, 35, &c. oriuntur addendo eos, qui sunt primi ordinis in genere primo, 0, 1, 3, 6, 10, &c., cyphram habentes in principio, ordine numeris 1, 4, 9, 16, 25, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum in genere secundo; componetur nova illa series ex additione terminorum

no-

norum aliarum istarũ serierum $\frac{0}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\frac{6}{a^4}+\frac{10}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a}+\frac{4}{a^2}+\frac{9}{a^3}+\frac{16}{a^4}+\frac{25}{a^5}$ &c. Jam verò istarũ utraq; series est summabilis, quum prima sit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^3}$, altera verò æqualis $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3}+\frac{a}{\overline{a-1}^3}$. Quare summabilis erit etiam nova illa series $\frac{1}{a}+\frac{5}{a^2}+\frac{12}{a^3}+\frac{22}{a^4}+\frac{35}{a^5}$ &c., ejusque summa finita erit $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3}+\frac{2a}{\overline{a-1}^3}$.

Dividantur porrò numeri 1, 6, 15, 28, 45 &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum in genere quarto, per terminos ejusdem adhuc progressionis geometricæ a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova habeatur series $\frac{1}{a}+\frac{6}{a^2}+\frac{15}{a^3}+$

$\frac{28}{a^4} + \frac{35}{a^5}$ &c. Et similiter, quia figurati primi ordinis in genere quarto oriuntur, addendo eos, qui sunt primi ordinis in genere primo, 0, 1, 3, 6, 10 &c., & cyphram habent in principio, ordine figuratis primi ordinis in genere tertio 1, 5, 12, 22, 35, &c.; componetur nova illa series ex additione terminorum aliarum istarum serierum $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{6}{a^4} + \frac{10}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{5}{a^2} + \frac{12}{a^3} + \frac{22}{a^4} + \frac{35}{a^5}$ &c. Sed harum serierum utraque est summabilis, quum prima sit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^3}$, altera æqualis $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3} + \frac{2a}{\overline{a-1}^3}$. Quare summabilis erit etiam nova illa series $\frac{1}{a} + \frac{6}{a^2} + \frac{15}{a^3} + \frac{28}{a^4} + \frac{45}{a^5}$ &c., ejusque summa finita erit æqualis $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3} + \frac{3a}{\overline{a-1}^3}$.

Eâ-

Eâdem methodo progredi licebit in infinitum, summasque finitas determinare infinitorum terminorum cujuslibet alterius seriei, quæ oriatur dividendo figuratos, constituentes primum ordinem in altioribus generibus, per terminos progressionis geometricæ crescentis a, a^2, a^3, a^4, a^5 &c.: nimirum componendo seriem illam ex duabus aliis seriebus, quarum una sit constituta ex figuratis primi ordinis in genere primo, cyphram habentibus in principio, altera ex figuratis constituentibus primum ordinem in illo genere, quod præcedit genus, de quo agitur. Sed considerata similiter ratione, qua harum serierum summæ progrediuntur, poterit hic quoque regula confici generalis, quæ ad omnes casus se extendat, nimirum addendo semper ad $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3}$ toties $\frac{a}{\overline{a-1}^3}$, quot unitates habet exponens generis datorum figuratorum, unâ demptâ; hoc est nullies, si fuerint primi generis; semel, si generis secundi; bis, si generis tertii; atque ita deinceps.

Non dissimiliter res ostendetur in numeris, qui in singulis generibus datum quemcumque alium figuratorum ordinem constituunt, & pro unoquoque ordine poterit semper regula generalis confici, quæ ad omnes casus se extendat. Ita si agatur de numeris, qui in unoquoque genere constituunt secundum figuratorum ordinem, satis erit ad $\frac{a^3}{\overline{a-1}^4}$ addere toties $\frac{a^2}{\overline{a-1}^4}$, quot unitates habet exponens generis figuratorum, unâ demptâ. Quod si verò quæstio sit de numeris constituentibus in unoquoque genere tertium figuratorum ordinem, non aliud fieri debet, quàm ad $\frac{a^4}{\overline{a-1}^5}$ addere toties $\frac{a^3}{\overline{a-1}^5}$, quot sunt unitates in exponente generis figuratorum, demptâ priùs unâ. Atque ita quoque in numeris, constituentibus in singulis generibus quartum ordinem figuratorum, satis erit ad $\frac{a^5}{\overline{a-1}^6}$ addere toties $\frac{a^4}{\overline{a-1}^6}$, quoties il-

illud designat exponens generis figuratorum, unitate unâ minutus; & sic deinceps in infinitum.

Quin etiam in hac re confici poterit regula adeo generalis, quæ in singulis generibus se extendat ad omnem quemcumque figuratorum ordinem. Nam vocando m exponentem, qui refertur ad datum ordinem figuratorum, satis erit ad $\frac{a^{m+1}}{\overline{a-1}^{m+2}}$ toties addere $\frac{a^m}{\overline{a-1}^{m+2}}$, quot unitates habet exponens generis figuratorum, unâ demptâ. Atque hæc regula valet etiam in ipsis genitoribus, ex quibus ordines figuratorum per continuam additionem oriuntur, scilicet si ii genitores ita inter figuratorum ordines reponantur, ut exponens ordinis ipsorum sit zero, sive nihil.

VII.

De seriebus infinitis, quæ oriuntur ex inversione omnium cujuscumque generis, & ordinis figuratorum.

IN numeris illis, qui figuratorum ordines in primo genere constituunt, hanc

hanc aliam proprietatem superiùs demonstratam exhibuimus, nimirum, quod etsi summa ipsorum, cujusque sint ordinis, sit infinita, attamen si invertantur, & fiant denominatores fractionum, quarum unaquæque unitatem habeat pro suo numeratore, iidem simul collecti summam exhibeant finitam; remque tradidimus hoc theoremate generali, quod in numeris figuratis primi generis, si ii, qui datum aliquem ordinem constituunt, invertantur, summa omnium terminorum, qui primum excipiunt, eam unitatis partem adæquet, quam designat exponens ordinis numerorum: quod equidem theorema locum etiam habere demonstravimus in numeris naturalibus, qui sunt genitores eorum figuratorum, nimirum collocando eos taliter inter ordines figuratorum, ut exponens ordinis ipsorum sit zero, sive nihilum.

Itaque figurati primi generis, cujuscumque ii sunt ordinis, reddi possunt summabiles, non modò si dividantur ordine per terminos alicujus progressionis geometricæ crescentis, verùm etiam si invertantur, & denominatores fiant fractionum, quarum quælibet habeat pro suo numeratore unitatem. Jam postquam no-

novimus figuratos aliorum generum reddi pariter summabiles, quotiescumque dividuntur ordine per terminos, qui constituunt progressionem geometricam crescentem; cæpimus etiam suspicari, eosdem aliorum generum figuratos posse item summabiles reddi, si invertantur, & denominatores fiant fractionum, pro numeratore unitatem habentium: eoque magis, quod termini serierum, quæ constituuntur per inversionem figuratorum aliorum generum, collati sigillatim cum terminis serierum, quæ efformantur per inversionem figuratorum primi generis, iisdem manifesto sint majores.

Verum rei periculo instituto, variisque methodis tentatis, numquam id assequi potuimus. Neque enim licuit nobis earum serierum finitas summas invenire, per subductionem alicuius seriei, uno, alterove termino mutilatæ, à se ipsâ integrâ; multoque minus resolvendo eas in alias series infinitas, quæ essent summabiles. In subsidium etiam accersivimus proprietatem illam mox ostensam, per quam figurati aliorum generum ex figuratis generis primi derivantur; sed nihil juvit: nam in hoc casu figurati aliorum generum sunt denominatores fractioctionum; nec proinde ex figuratis primi generis derivari poſſunt eâ ratione, quemadmodum derivantur, quum ſunt fractionum numeratores. Quocirca poſt varia ſcrutinia in eam nos adduximus ſententiam, ut tametſi ſummæ ſerierum, quæ conſtituuntur per inverſionem figuratorum aliorum generum, ſint finitæ; eæ tamen humanâ induſtriâ nequaquam poſſint determinari.

Id novit etiam Vir ſummus Jacobus Bernoullius, ſed in uno tantùm caſu ſpeciali, nimirum in ſerie infinitâ $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$, &c., quæ conſtituitur per inverſionem quadratorum numerorum naturalium, qui ſunt figurati primi ordinis in genere ſecundo; nam in ſuo de ſeriebus infinitis tractatu ingenuè fatetur, perveſtigationem finitæ ſummæ illius ſeriei difficiliorem eſſe, quàm quis expectaverit, quin etiam omnino induſtriam ſuam eluſiſſe. Interim etſi Vir Clariſſimus determinare nequiverit finitam ſummam ſeriei, quæ oritur ex inverſione quadratorum numerorum naturalium, exhibuit tamen rationem, quam ſum-

ſumma ex terminis omnibus locorum imparium habet ad ſummam ex terminis omnibus in locis paribus exiſtentibus, oſtendendo eam eſſe, ut 3 ad 1. Unde diſcimus priores terminos ſimul conſtituere tres quartas partes totius ſeriei, poſteriores verò tantùm partem unam.

Sed non abs re erit, hìc paucis innuere artificium, quo mediante laudatus Auctor novit rationem, quam in ſerie illa ſpeciali ſumma terminorum omnium in locis imparibus habet ad ſummam terminorum omnium in locis paribus. Itaque notare priùs oportet, quod ſicuti conſtitutis infinitis ſeriebus geometricis, quæ incipientes à numeris imparibus inverſis progrediantur in ratione ſubduplâ, eæ comprehendunt numeros omnes naturales inverſos; ita quoque ſi conſtituantur infinitæ ſeries geometricæ, quæ incipientes à quadratis numerorum imparium inverſis incedant in ratione ſubquadruplâ, eæ contineant quadratos omnes inverſos numerorum naturalium: ex quo fit, ut ipſa ſeries quadratorum omnium inverſorum $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49}$ &c. in omnes illas ſeries geomemetricas resolvi queat.

Jam, quum termini illarum serierum geometricarum progrediantur in ratione subquadruplâ, unaquæque ex iis summabilis erit, & cujusque summa finita erit æqualis priori suo termino unà cum tertia parte ejusdem. Itaque, quum priores termini omnium illarum serierum sint quadrati inversi numerorum imparium, erunt summæ omnium simul æquales huic seriei $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+$ &c. unà cum tertia parte ipsius. Sed summæ omnium illarum serierum dant summam seriei, de qua agitur, $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ &c. Igitur tota ista series æqualis erit seriei $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+$ &c. unà cum ejus tertia parte; & propterea, quum differentia utriusque seriei $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+$ &c. adæquet ter-

tiam

tiam partem istius $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+$ &c., erit summa terminorum in locis imparibus ad summam terminorum in locis paribus, ut 3 ad 1.

Nolim autem credatis eandem rationem, quam habet summa terminorum omnium in locis imparibus ad summam terminorum omnium in locis paribus, determinari quoque posse in seriebus, quæ constituuntur per inversionem aliorum numerorum figuratorum; nam licuit Viro Clarissimo eam determinare in serie istâ speciali $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ &c. non jam quia numeri 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, &c., ex quorum inversione series illa oritur, sunt figurati primi ordinis in genere secundo, sed quia sunt quadrati numerorum naturalium. Quippe sciatis hoc loco velim, id generale esse in omnibus potestatibus numerorum naturalium, ut liquidem ex earum inversione totidem series infinitæ constituantur, ratio, quam in iis habet summa terminorum omnium in locis im-

imparibus ad summam terminorum omnium in locis paribus, semper possit determinari; quum sit, ut potestas non dissimilis binarii unitate multata ad ipsam unitatem; hoc est in quadratis, ut 3 ad 1; in cubis, ut 7 ad 1; in quadrato-quadratis, ut 15 ad 1; atque ita deinceps.

Demonstratur id verò in aliis potestatibus, eadem omnino ratione, qua ostensum est in quadratis: nimirum resolvendo seriem, de qua agitur, in infinitas alias, quarum termini à potestatibus numerorum imparium inversis in eâ ratione decrescant, quam designat potestas non dissimilis binarii; hoc est in ratione octuplâ, si agatur de cubis; in ratione sexdecuplâ, si agatur de quadrato-quadratis; atque ita deinceps. Quum enim omnes istæ series sint summabiles, & cujusque summa finita adæquet priorem suum terminum unà cum eâ ejusdem parte, quam denominat prædicta potestas binarii, unitate unâ multata; fiet tota series, de qua agitur, æqualis seriei, quæ oritur ex potestatibus inversis numerorum imparium, unà cum eâ ejusdem seriei parte, quam potestas binarii unitate multatâ designat; proptereaque subducendo seriem istam ex illâ, fiet sum-

summa terminorum omnium in locis imparibus ad summam terminorum omnium in locis paribus, ut est potestas binarii unitate multata ad ipsam unitatem.

Eadem autem determinatio locum etiam sibi vindicat in ipsis numeris naturalibus inversis, qui sunt primæ ipsorum potestates, eritque summa numerorum imparium ad summam numerorum parium, ut prima potestas binarii unitate multatâ ad unitatem, hoc est in ratione æqualitatis, quemadmodum jam supra demonstravimus, quum de serie harmonicâ quæstio erat. Sed obtinet quoque eadem determinatio in potestatibus numerorum naturalium imperfectis, quæ numeros fractos pro suis exponentibus habent; qua ratione in istâ serie $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}}$ &c. summa terminorum in locis imparibus est ad summam terminorum in locis paribus, ut $\sqrt{2} - 1$ ad 1; pariterque in hac aliâ serie $\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} +$

—

$\frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ &c. summa ex terminis locorum imparium est ad summam ex terminis locorum parium, ut $\sqrt[3]{2} - 1$ ad 1.

Horum omnium demonstrationes contrahi eleganter possunt, si ex unoquoque termino seriei, de qua agitur, ea pars capiatur, quam binarii potestas non dissimilis ostēdit. Sic enim nova oritur series, quæ eos tantùm prioris terminos continet, qui in locis paribus existunt. Unde, quum prior series sit ad hanc aliam, ut potestas binarii, similis iis, ex quarum inversione oritur series, de qua agitur, ad unitatem; erit dividendo, ut summa terminorum in locis imparibus ad summam terminorum in locis paribus, ita eadem potestas binarii unitate multatâ ad unitatem.

Hac ratione, si fiat series ex ipsis numeris naturalibus inversis, qui sunt primæ ipsorum potestates $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ &c., capiendo ex unoquoque ejus termino eam partem,

tem, quam designat prima potestes binarii, hoc est ipse binarius, orietur hæc altera $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$ &c., quæ eos tantùm prioris terminos continet, qui in locis paribus existunt. Unde, quia prior series $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ &c. est ad hanc aliam $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$ &c., ut 2 ad 1, erit dividendo, ut $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$ &c. ad $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$ &c., hoc est, ut summa terminorum in locis imparibus ad summam terminorum in locis paribus, ita 1 ad 1.

Similiter, si fiat series ex quadratis inversis numerorum naturalium $\frac{1}{1} + \frac{1}{4}$

$+ \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64}$ &c., capiendo ex unoquoque ejus termino eam partem, quam designat quadratum binarii, orietur hæc altera $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100}$ &c., quæ eos tantùm prioris terminos continet, qui in locis paribus existunt. Itaque, quum prior series $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64}$ &c. sit ad hanc aliam $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100}$ &c., ut 4 ad 1; erit dividendo, ut $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81}$ &c. ad $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100}$ &c., hoc est, ut summa terminorum in locis imparibus ad summam ter-

mi-

minorum in locis paribus, ita 3 ad 1.

Atque ita quoque, si fiat series ex radicibus quadratis numerorum naturalium inversis $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}}$ &c., sumendo ex unoquoque termino ejus eam partem, quam designat quadrata radix binarii, orietur hæc alia series $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{12}}$ &c., quæ continet eos tantùm terminos prioris, qui in locis paribus existunt. Quocirca, quum prior series $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}}$ &c. sit ad hanc aliam $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{12}}$ &c., ut $\sqrt{2}$ ad 1; erit dividendo, ut $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}}$ &c. ad $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} +$

$\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{12}}$ &c., hoc est, ut summa terminorum in locis imparibus ad summam terminorum in locis paribus, ita $\sqrt{2} - 1$ ad 1.

Et generaliter, si fiat series ex iis potestatibus inversis numerorum naturalium, quæ habent pro suo exponente numerum m, $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{8^m}$ &c., capiendo ex unoquoque termino ejus eam partem, quam designat 2^m, hoc est potestas non dissimilis binarii, orietur hæc alia series $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+\frac{1}{12^m}$ &c., quæ eos tantùm prioris terminos continet, qui in locis paribus existunt. Unde, quia prior series $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{8^m}$ &c. est ad hanc aliam $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+$

$\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+\frac{1}{12^m}$ &c., ut 2^m ad 1, erit dividendo, ut $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}+\frac{1}{11^m}$ &c. ad $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+\frac{1}{12^m}$ &c., hoc est, ut summa terminorum in locis imparibus ad summam terminorum in locis paribus, ita 2^m ad 1.

VIII.

Paradoxum, quod ex doctrinâ præcedenti articulo traditâ, sequitur, enodatur.

IN seriebus infinitis multa occurrunt paradoxa, quæ ob infiniti naturam non ita facile ab intellectu nostro finito videntur posse comprehendi. Insigne, & notatu dignum hìc nobis subnascitur ex determinatâ ratione, quam in seriebus infinitis, ortis ex potestatibus inversis numerorum naturalium, habet summa terminorum omnium in locis imparibus ad summam terminorum omnium in locis paribus. Ostensum est enim determinationem illam obtinere etiam, si numerorum naturalium potestates imperfectæ invertantur, atque ita in serie istâ $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{10}}$ &c. summam ex terminis locorum imparium esse ad summam ex terminis locorum parium, ut $\sqrt{2} - 1$ ad 1. Hoc autem illud est, quod paradoxum sapere videtur. Ratio enim, quam habet $\sqrt{2} - 1$ ad 1, est minoris ad majus, & tamen termini locorum imparium collati sigillatim cum terminis locorum parium, iisdem manifestò sunt majores.

Hujusmodi paradoxum novit primus omnium Jacobus Bernoullius, qui etsi ejus rationem, ut ipse ait, satis perspectam habuisset, illam tamen minimè dignatus est erudito orbi impertiri. Idem autem paradoxum deprehenditur generaliter in omnibus iis potestatibus numerorum naturalium, quæ inversæ dant seriem, cujus summa est infinita, quales equidem sunt illæ omnes, quæ exponentes habent, non majores unitate. Atque ita non modò illud cernere licet in iis potestatibus, quarum exponentes sunt

unitate minores, verùm etiam in ipsis numeris naturalibus, qui sunt primæ ipsorum potestates, unitatem habentes pro exponente, & ex quorum inversione series constituitur, cujus summa est infinita. Nam in serie harmonicâ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$ &c. summa terminorum omnium in locis imparibus ad summam terminorum omnium in locis paribus rationem habet æqualitatis, & tamen ii cum istis sigillatim collati manifestò majores deprehenduntur.

Quum primum in idem paradoxum ego etiam inciderim, ejus solutio summoperè me torsit, & ingenuè fateor plures impendisse dies, nec interea temporis aliquid mihi in mentem venisse, quod rei satisfaceret. Sed ejus rationem statim novi, postquam intellexi demonstrationes eorum omniũ eleganter contrahi posse, si ex unoquoque termino seriei, de qua agitur, ea pars capiatur, quam binarii potestas non dissimilis ostendit. Quum enim series, quæ hac ratione oritur, contineat eos tantùm terminos prioris, qui in locis paribus exiſtunt; conjicere mihi licuit, quod etſi termini locorum parium inter terminos locorum imparium contineantur, non hinc tamen putandum ſit numerum illorum, iſtorum numerorum adæquare, quum illi ſigillatim correſpondeant omnibus ſeriei, de qua agitur, terminis, quæ ſimul comprehendit tam terminos locorum parium, quàm terminos locorum imparium.

Hoc autem cognito, facile deinde mihi fuit rationem reddere, quo pacto fieri poſſet, ut ſeries $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}}$ &c. ad ſeriem $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{14}}$ &c. rationem habeat minoris ad majus, hoc eſt eandem, quam habet $\sqrt{2} - 1$ ad 1, quum tamen termini illius ſigillatim comparati cum terminis iſtius, iiſdem manifeſtò majores deprehendantur. Nam ſemper ac in ſe-

cun-

cundâ ſerie $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{12}}$ &c. termini correſpondeant, non quidem terminis primæ ſeriei $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}}$ &c., ſed terminis ſeriei principalis, quæ utramque ſimul comprehendit, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}}$ &c., fit hinc, ut in collatione earum ſerierum termini non ſinguli ſingulis, ſed eâ quidem ratione inter ſe mutuò ſint comparandi, ut poſtquam inſtituta ſit comparatio inter primum terminum unus, & primum alterius, debeat ſemper unus prioris ſeriei cum duobus alterius conferri. Qua ratione liquidò patebit, quod tametſi termini prioris ſeriei ſigillatim comparati cum terminis ſecundæ, iiſdem ſint majores, attamen tota ſumma illorum æſtimanda ſit minor ſummâ iſtorum, quia nempe ablatis ex utrâque ſerie

prio-

prioribus terminis, reliqui ita sibi mutuò correspondent, ut unus seriei prioris, duos secundæ semper absorbeat.

Quotiescumque enim ablatis ex utrâque serie terminis prioribus, reliqui ita inter se mutuò conferuntur, ut quisque primæ seriei duobus secundæ correspondeat; patet, singulos primæ seriei terminos, excepto primo, minores esse terminis, quibus correspondent in secundâ. Quod ut generaliter ostendamus, perspicuum est, quod si in primâ serie quilibet terminus repræsentetur per $\frac{1}{\sqrt{a}}$, duo, quibus ille in secundâ correspondet, sint $\frac{1}{\sqrt{2a}-2}$, & $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. Jam verò $\frac{1}{\sqrt{a}}$ minor est duobus istis simul sumptis, quum reductis ad eandem denominationem, ille fiat $\frac{\sqrt{4a}-4}{\sqrt{4a^2-4a}}$, isti verò evadant $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{4a^2-4a}}$ $\frac{\sqrt{2a}-2}{\sqrt{4a^2-4a}}$, & ratio, quam habet il-

le

le ad summam istorum, est ut $\sqrt{4a}-4$ ad $\sqrt{2a}+\sqrt{2a}-2$, hoc est minoris ad majus. Itaque singuli primæ seriei termini, excepto primo, minores sunt terminis, quibus correspondent in secundâ; atque adeò summa ex terminis primæ æstimanda est minor summa ex terminis secundæ.

Eâdem ratione solvetur paradoxum, de quo agitur, in omni alio casu. Nam ex terminis seriei principalis constitutis duabus seriebus; quarum altera contineat terminos locorum imparium, altera terminos locorum parium; patebit semper singulos primæ seriei terminos, excepto primo, minores esse terminis, quibus in secundâ correspondent. Sic in numeris naturalibus inversis, ubi idem paradoxum etiam deprehenditur, si quisque terminus locorum imparium repræsentetur per $\frac{1}{a}$, duo, quibus ille correspondet inter terminos locorum parium, erunt $\frac{1}{2a-2}$, & $\frac{1}{2a}$. Unde, quia reductis ad eandem denominationem, ille fit

4a

$\frac{4a-4}{4a^2-4a}$, isti verò $\frac{2a}{4a^2-4a}$, & $\frac{2a-2}{2a^2-4a}$, erit ille ad duos istos simul sumptos, ut $4a-4$ ad $4a-2$, hoc est in ratione minoris ad majus: & propterea in serie harmonicâ quisque ex terminis locorum imparium, excepto primo, minor erit iis, quibus correspondet, inter terminos locorum parium.

Sed in serie harmonicâ illud notare oportet, quod siquidem termini locorum imparium, excepto primo, subducantur ordine ex iis, quibus correspondent inter termiuos locorum parium, nova oriatur series, cujus summa est finita: quod sanè in aliis seriebus, ubi idem paradoxum deprehenditur, locum non habet; quum in istis summa ejus seriei, quæ hac ratione oritur, sit semper infinita. Est quippe hujusmodi nova series in serie harmonicâ $\frac{2}{4.6}+\frac{2}{8.10}+\frac{2}{12.14}+\frac{2}{16.18}+\frac{2}{20.22}$ &c., designantibus punctis interjectis mutuam numerorũ, inter quos interjiciuntur, multiplicationem, sive

etiam

etiam $\frac{1}{2.6}+\frac{1}{4.10}+\frac{1}{6.14}+\frac{1}{8.18}+\frac{1}{10.22}$ &c., cujus summam finitam esse, nemo non videt, quum sit semissis istius $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{10.11}$ &c., longè minoris hac aliâ $\frac{1}{2.2}+\frac{1}{4.4}+\frac{1}{6.6}+\frac{1}{8.8}+\frac{1}{10.10}$ &c., hoc est $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\frac{1}{100}$ &c.

Indeque ratio est repetenda, cur in serie harmonicâ, etsi quisque terminorum in locis imparibus, excepto primo, minor sit iis, quibus correspondet inter terminos locorum parium, attamen summa tota terminorum in locis imparibus non minor, sed æqualis sit summæ terminorum in locis paribus, quia scilicet ab ea deficit per quantitatem finitam, quum tamen utraque summa sit infinita.

Jam quotiescumque potestates numerorum naturalium hujusmodi sunt, ut ex earum inversione series oriantur, quarûm summæ sint infinitæ (id, quod contingit, quum exponentes potestatum

non

non sunt majores unitate, semper patebit, quod quisque terminus ex iis, qui sunt in locis imparibus, excepto primo, minor sit duobus iis, quibus correspondet inter terminos locorum parium. Sed contrarium obtinere comperietur, quum potestates numerorum naturalium exponentes habent unitate majores, atque adeo inversæ series constituunt, quarum summæ sunt finitæ. Hac ratione si potestates numerorum naturalium fuerint quadrata, ponendo, quod quisque terminus locorum imparium sit $\frac{1}{a^2}$, erunt termini, quibus ille correspondet inter eos, qui sunt in locis paribus, $\frac{1}{\overline{2a-2}^{\,2}}$, & $\frac{1}{4a^2}$: proindeque ratio illius ad hos alios duos erit, ut $16a^2 - 32a + 16$ ad $8a^2 - 8a + 4$, hoc est majoris ad minus.

Atque hinc modò facile etiam intelligimus veritatem alterius hujus paradoxi, quod summa terminorum in locis paribus ad summam terminorum omnium rationem habeat duplam in serie numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5,

6,

6, 7, 8, 9, 10 &c.; quadruplam in serie quadratorum 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, &c.; octuplam in serie cuborum 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, &c., atque ita deinceps: nimirum, quia termini locorum parium constituuntur, sumendo duplum cujusque termini in serie numerorum naturalium, quadruplum in serie quadratorum, octuplum in serie cuborum, atque ita de aliis; adeoque tantùm abest, ut summa totius seriei excedat summam terminorum in locis paribus per summam ex terminis locorum imparium, ut potiùs illa istius pars aliquota, denominata à potestate binarii, simili iis, de quibus agitur, censenda sit.

Neque verò quicquam movere Nos debet, quod termini locorum parium inter terminos locorum imparium existant, adeoque veluti partes totius seriei nequeant simul sumpti quantitatem constituere multiplicem illius. Nam si ita res esset, series quadratorum, cuborum, aliarumque altiorum potestatum ex numeris naturalibus, minores esse deberent ipsâ serie numerorum naturalium; quia scilicet inter numeros naturales reperiuntur ipsorum tum quadrata, tum cubi, bi, tum altiores poteſtates. Atque ita quoque ſeries ex radicibus quadratis, radicibus cubicis, aliiſque radicibus ſuperioribus numerorum naturalium majores eſſe deberent ſerie, quam conſtituunt ipſi numeri naturales, quia ſcilicet iſti reperiuntur inter eorundemmet tum radices quadratas, tum radices cubicas, tum radices altioris ordinis.

Cæterùm, ut huic tandem Appendici finem imponamus, notabimus hoc loco methodum illam inveniendi ſummas finitas ſerierum per ſubductionem alicujus ſeriei, uno termino mutilatæ, à ſe ipſâ integrâ, eò redire, ut inter terminos ſeriei differentiæ capiantur. Unde ultrò conſequitur id, quod in calce capitis XI adnotavimus, nempe, quod ſumma ſeriei reliquæ ſit primus terminus ultimo minutus. Nam ſi fuerint quotcumque magnitudines a, b, c, d, e, f, g; manifeſtò liquet omnium differentias ſimul $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-e$, $e-f$, $f-g$ eſſe æquales $a-g$, hoc eſt primæ ultimâ minutæ. Quod quidem notandum hoc loco duximus, quia rationem hujus rei traditam citato loco, experientiâ edocti ſumus, non omnibus peræquè ſatisfacere.

FINIS.