LEZIONI

DI INTRODUZIONE

AL CALCOLO SUBLIME

D

GASPARE MAINARDI

PROF. SUPP. NELL' I. R. UNIVERSITA' DI PAVIA
UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA
DELLE SCIENZE, RIPETITORE PER L' IMP. R.
COLLEGIO GHISLIERI ECC.

PARTE SECONDA

PAVIA

DALLA TIPOGRAPIA BIZZONI

1839.

AL REVERENDISSIMO ED AMPLISSIMO MONSIGNORE

Prancesco Cassiano Maleschea

PREVOSTO INPULATO DEL CAPITOLO COLLEGIATO IN ALTEURZLAU E PRELATO REL REGNO DI BOEMIA, DOTTORE IN FILOSOPIA, I. R. CONSIGLIERE ATTIVO DE GOVERNO DELLA BASSA AUSTRIA, ED ASSESSORE PRESSO LA COMMISSIONE AULICA DEGLI STUDJ, DIRETTORE DEGLI STUDJ FILOSOFICI E PRESIDE DELLA FACOLTA' FILOSOFICA MELL' UNIVERSITA' DI VIERNA, MEMBRO DELLE SOCIETA' BOEMA DELLE SCIENZE, ECONOMICA E PATRIOTICA DI BUEMIA, AGRARIA DI VIERNA, DI MORAVIA, SLESIA, PRUSSIA, DRESDA EC. EC.

Monsignore Reverendissimo!

Sommo è l'onore che Ella mi ha concesso, aceogliendo benignamente la dedica di quest' operetta, cui posi mano animato dagli eccitamenti della Signoria Vostra Preclarissima.

Nel comporre questo libro ho procurato di conseguire un duplice intento, di servire cioè il meglio che mi fu possibile a chi conoscendo la scienza si ponesse a percorrerlo, onde richiamare le proprie idee sull'argomento; ma più ancora di offrire un riassunto conciso di Lezioni ad uno scolaro, il quale fosse istruito dietro questa scorta.

La Geometria analitica si occupa precipuamente di due questioni: la prima consiste nel rappresentare per mezzo dell' Algebra una estensione allor-

quando se ne conorce una genesi geometrica: la seconda ha per oggetto di desumere dall'analisi delle equazioni, che rappresentano una cotencione, la forma della medesima, la posizione che occupa nello spazio, e le sue propricta assolute e relative. L'attitudine a risolvere il primo problema si acquista coll esercizio variato ad arte, e soccorso da alcune formole, le quali sono gli elementi di tutto il calcolo: perciò ottengo queste formole, ne indico la generalità, o le limitazioni, e ne dichiaro l'uso con varii esempii, i quali o forniscono cognizioni utili, o rendono avvertiti di alcune singolarità e complicazioni dipendenti dalla natura dell'analesi. Progredendo alla seconda parte, mediante una facile trasformazione della equazion generale delle curve algebraiche, offro le formole che determinano il centro, i poliametri, i rami infiniti, gli assintoti, le condizioni dell' esistenza di questi luoghi geometrici, e le norme generali per istudiare e delineare l'andamento di quelle curve. Applico dippoi quelle regole alle linee del second' ordine, di cui tanto si valgono la Natura e l' Arte.

Coll' ordine, la generalità degli argomenti, l'uniformità del metodo, e con alcune novità vorrei
aver resa questa mia operetta utile alla gioventà
studiosa, non ingrata ai provetti, nè affatto immeritevole delle grazie, colle quali Ella, Monsignore
Amplissimo, Reverendissimo, anima e protegge.

L' Umilies, Devotie Servitore

GEOMETRIA ANALITICA

A DUE COORDINATE.

Lo studio delle matematiche conduce sul bel principio ad esaminare le proprietà di estensioni diversamente configurate. La Geometria indaga le affezioni della circonferenza, delle curve coniche e delle superficie di que' corpi che il sommo Archimede chiamò rotondi: la Fisica istudia le linee che rappresentano il cammino descritto dai pianeti e dai corpi che si projettano nello spazio; la forma delle onde sonore, e le curve che presenta la luce per l'azione dei mezzi che si oppongono alla sua libera propagazione. Le parti che costituiscono una fabbrica, una macchina, presentano all'architetto linee ed estensioni di cui deve istudiarne le proprietà, sia per sottoporre al calcolo effetti dinamici, sia per costruirle o rappresentarle sopra un foglio di disegno.

Molte estensioni furono diligentemente istudiate fino dall'antichità più remota, ed ai geometri grecì si devono la cognizione di utili proprietà e di metodi eleganti per rinvenirle; ma col progresso delle Matematiche, complicandosi sempre più

gli oggetti delle speculazioni di questa scienza; quei metodi divennero insufficienti: se ne immaginarono perciò de' nuovi, l' insieme dei quali forma un ramo importantissimo delle discipline matematiche noto sotto il nome di Geometria analitica. La Geometria analitica, di cui Cartesio pose i fondamenti, consiste nella applicazione dell'Algebra alla rappresentazione ed allo studio di qualsivoglia estensione, la quale si possa fingere generata con legge geometrica. Tale è, a cagion d'esempio, la circonferenza che si può supporre descritta dall' estremo mobile di una retta terminata, la quale roti, in un piano, intorno all'altro estremo fisso: tali la spirale e la concoide immaginate da Conone e Nicomede: le superficie sferica, conica, cilindrica, quella del toro, e tante altre che vengono impiegate nelle varie applicazioni delle matematiche ai bisogni sociali.

Allora che è nota la genesi di una o più estensioni, ed il luogo che esse occupano, il geometra giunge a rappresentarne la esistenza per mezzo di equazioni, col soccorso delle quali discopre ancora tutte le proprietà metriche delle medesime, siano assolute o relative. Tale è l'oggetto importantissimo della geometria analitica, che ora prendiamo a trattare. E siccome le estensioni sono talvolta tracciate in un piano, talvolta disposte diversamente nello spazio; così quella scienza vien divisa in due parti, la geometria analitica in piano, ed in rilievo.

Noi tratteremo la prima parte con estensione, affinchè ne riesca agevole il risolvere il dupplice problema cioè "Rappresentare per mezzo dell'al"gebra qualunque estensione, della quale si conosca
" una genesi geometrica; e quando una o più
" estensioni sono date per mezzo di equazioni
" che le rappresentano, indagare la forma, e le
" varie proprietà assolute e relative delle mede" sime."

Fra i molti metodi che si possono impiegare a fondamento della geometria analitica il più adottato si è quello di Cartesio, noto sotto il nome di metodo delle coordinate, al quale noi ci atterremo; non ommettendo di indicarne altri, che in alcuni casi vengono vantaggiosamente impiegati.

PARTE PRIMA

RAPPRESENTAZIONE DEI LUOGHI GEOMETRICI.

Supponiamo, che in un esteso piano si trovino qua e là dei punti e delle linee, di cui si voglia rappresentare la esistenza. Si traccino in quel piano due rette Ox, Oy, concorrenti in O, le quali talvolta si segnano ad arbitrio, ma più spesso si eleggono dietro certi dati di convenienza. Portiamo primamente la nostra attenzione sui punti che possono esistere in quel piano quali, a cagion d'esempio, in una carta geografica sono quelli destinati ad indicare le località dei varii paesi.

ARTICOLO I.

Dei punti.

Nell'angolo xOy (fig. 1.*) si trovi un punto M. Per esso si conducano, la retta MP parallela ad Oy, la quale incontri Ox in P, a la MQ parallela ad Ox ad incontrare Oy in Q. È manife-

sto, che conoscendo le lunghezze delle rette OP-MQ, OQ-MP il punto M è determinato dall' incontro delle rette QM e PM. Siccome d'ora in avanti occorrerà molte volte di nominare le rette analoghe alle MQ=OP, MP=OQ corrispondenti ad un dato punto M, conveniamo di denominare ascissa, e di indicare col simbolo x, la lunghezza della retta condotta da qualsivoglia punto, parallela ad Ox, e terminata a quel punto ed alla retta Oy. Chiameremo poi ordinata, e rappresenteremo col simbolo y, la lunghezza della retta condotta per lo stesso punto, parallela ad Or, e terminata a quel punto ed alla retta Ox: cosicchè per M saranno, l'ascissa x=OP=MQ, l'ordinata $\gamma = OQ = MP$. Le rette x, γ , con nome comune, si chiameranno coordinate. La retta Ox si dirà asse delle ascisse, o delle x; la O_{γ} si dirà asse delle ordinate, o delle y. Il punto O, partendo dal quale si prendono le coordinate x=OP, 7=OQ di un punto, si dirà origine delle coordinate. Gli assi coordinati possono essere obbliqui fra loro, ovvero ortogonali cioè perpendicolari. Allorchè le coordinate di un punto hanno valori dati, sono per esempio x=3, y=5 unità di una misura stabilita, presa nell'asse Ox la parte OP=3, e nell'asse $O\gamma$ la OQ=5, condotta PMparallela ad Oy, QM parallela ad Ox il punto M, in cui convengono queste parallele, è quello cui corrispondono le coordinate x=3, y=5. Dunque un punto è dato tutte le volte, che si conoscono i valori dell' ordinata e dell' ascissa, per cui le

equazioni x=a, y=b, se riguardane un punto, si potranno a ragione chiamare le equazioni di esso.

Se un punto fosse rappresentato dalle equazioni x=a, y=o sarebbe collocato nell'asse Ox, ad una distanza x=a dall'origine. Se le equazioni saranno x=o, y=b il punto sarà nell'asse Oy. Ed essendo x=o, y=o il punto coinciderà coll'origine delle coordinate.

Nel seguito, qualunque volta ne abbisognerà di determinare nel piano xOy un punto dietro certe condizioni, cui deve soddisfare, espresse con x, y le coordinate di esso, indagheremo quali relazioni debbano aver luogo fra queste incognite x, y e quantità date, in conseguenza delle condizioni suddette. Quelle relazioni condurranno a due equazioni

F(x, y) = 0, f(x, y) = 0contenenti le incognite x, y, la risoluzione delle quali determinerà i valori delle coordinate, epperò la posizione del punto. È noto, che alcuno, od anche entrambi i valori corrispondenti delle incognite x, r forniti dalla risoluzione di quelle equazioni, possono essere negativi: non parlando degli immaginarii i quali annunciano un assurdo nella questione. Per interpretare il significato dei segni, da cui possono essere affetti i valori delle coordinate x, γ fingiamo, che queste siansi supposte corrispondere al punto M del piano xOy (fig. 2.2). Presa nell'asse Ox, Oa=1, dal centro O si descriva la circonferenza abcde..., colla quale misureremo gli angoli, partendo dal punto a nella direzione abc... Supponiamo

Ang.xOy = Arc.abc=a, Ang.°POM = Arc.ab = 9, la lunghezza della retta OM=r, per cui la riso-luzione trigonometrica del triangolo MOP fornira

$$x = \frac{r}{sen \alpha} sen(\alpha - \varphi), \quad y = \frac{r}{sen \alpha} sen \varphi.$$

Se nelle equazioni

$$F(x,y) = 0, \ f(x,y) = 0$$

sostituiremo quei valori trigonometrici delle coordinate x, y, si avranno due nuove equazioni

$$\psi(r,\varphi) = 0$$
, $\Delta(r,\varphi) = 0$

fra le incognite r, φ , la risoluzione delle quali ne fornirà i valori. Se il punto M dovrà trovarsi nell'angolo xOy, come abbiamo supposto, il valore di φ sarà >0 e $< \alpha$: se M si dovrà trovare nell'angolo yOx' formato dall'asse Oy col prolungamento di Ox, sarà $\varphi>x$ e $\varphi<180^\circ$: dovendo essere nell'angolo x'Oy', sarà $\varphi>180^\circ$ e $\varphi<180^\circ+\alpha$; quando finalmente debba essere posto nell'angolo y'Ox, sarà $\varphi>180^\circ+\alpha$ e $\varphi<360^\circ$. Dunque nel primo caso i valori trigonometrici di x, y sono positivi entrambi. Nel secondo avremo y>0, ed

$$x = \frac{r}{sen \alpha} sen(\alpha - \varphi) = -\frac{r}{sen \alpha} sen(\varphi - \alpha) < 0.$$

Per cui, se il punto è rappresentato da N, epperò l' $ang(\varphi - \alpha) = Arc.acd - Arc.ac = Arc.dc$, saranno

$$x = -\frac{ON}{sen NPO} sen ONP = -OP',$$

$$\gamma = \frac{ON}{senNP'O} sen(dca) = \frac{ON}{senNQ'O} senNOP' = NP.$$

Nel terzo caso in cui $\varphi > 180^{\circ}$ e $\varphi < 180^{\circ} + \alpha$, supposto M il punto, per cui

$$\varphi = Arc.acef$$
, $\varphi - \alpha = Arc.cdef$,
 r

$$x = \frac{r}{sen\alpha} sen(odef) = \frac{OM}{senMPO} senMOy' = OP$$
,

$$y = \frac{r}{sen\alpha} sen(acef) = -\frac{OM'}{senM'PO} sen.ef = -M'P = -OQ'.$$

Finalmente, nel quarto caso in cui $\varphi > 180^{\circ} + \alpha$ e $\varphi < 360^{\circ}$, supposto N' il punto, per cui $\varphi = acegh$, sarà

$$x = \frac{ON'}{senOPN'} sen cegh = \frac{ON'}{senOPN'} sengh = OP$$
,

$$y = \frac{ON'}{senOPN'} sen(acegh) = -\frac{ON'}{senOPN'} senPON' = -N'P = -OQ'.$$

Da tutto ciò rileva, che se le equazioni di un punto saranno x = a, y = b, ed a, b quantità date positive, il medesimo sarà nell' angolo xOy, e si determinerà prendendo nell' asse Ox la x=OP=a, nell' asse Oy la y=OQ=b, conducendo QM, PM parallele rispettivamente agli assi medesimi, ed M sarà il punto che corrisponde a quelle equazioni. Quando siano x=-a, y=b prenderemo OQ=b nell' asse Oy, OP=a nel

prolungamento dell' asse Ox; e l' incontro delle due rette QN, PN parallele agli assi coordinati determinerà il punto N rappresentato da x=-a, y=b. Se le equazioni del punto saranno x=-a, y=-b, prenderemo negli assi prolungati OP=a, OQ'=b, ed il medesimo sarà M', in cui convengono PM', QM' parallele agli assi. Essendo per ultimo x=a, y=-b, si prenderà OP=a nell'asse Ox, OQ'=b nel prolungamento di Oy, e le due parallele agli assi PN', Q'N' determineranno il punto N', cui corrispondono quelle equazioni (1).

(1) Ho desunta dalla trigonometria la regola dei segni, sembrandomi che il metodo da eleggersi preferibilmente in questa scienza, onde stabilire le regole analoghe, sia quello di Carnot, fondato sul principio de la Correlation des figures. Colgo l'occasione, che mi si offre, per indicare una dimestrazione semplice di alcuni teoremi fondamentali della trigonometria, da me seguita insegnando le matematiche elementari.

Siano dati (fig. 3) gli archi AB=x, BD=y per mezzo di Aa=sen x, Ca=cos x, Db=sen y, Cb=cos y, e si debba trovare Ae=sen(x+y). Essendo eguali le aree dei triangoli AaD, Aab, se aggiungiamo all' una e all' altra l'area del quadrilatero CAaD, ne segue

Area. CAD = Area. CAb + Area. CaD,

Ossia

sen $(x+y) = Aa \cdot Cb + Db \cdot Ca = senx cosy + seny cos x$. Supponendo ora che gli angoli x, y assumano altre posizioni e grandezze ne caveremo i valori di sen(x-y), cos(x-y), e le regole dei segni. Se per esempio A viene in A' per cui $x > 90^\circ$ e $< 180^\circ$, essendo $Ar \cdot A'a'D = Area \cdot A'a'b$, sottratta da entrambe l'area del quadrilatero C'A'a'D avremo Area.CA'D = Area.CA'b - Area.Ca'D,

epperò

$$sen(x+y) = senx \cdot cosy + seny \cdot (-cosx)$$
.

Ad esercizio, proponiamoci la ideterminazione di alcuni punti dietro proprietà, di cui devono essere dotati.

Dato un triangolo rettilineo ABC (fig. 4.5) si domanda quel punto, in cui la retta BE perpendicolare ad AC, concorre con AD perpendicolare a BC? Se nel piano del triangolo venissero tracciati ad arbitrio gli assi coordinati, i tre vertici A, B, C, che determinano il triangolo, sarebbero dati per le loro equazioni: quindi nei nostri calcoli entrerebbero le sei quantità, che rappresentano i valori di quelle coordinate, non che l'angolo degli assi medesimi. Giova perciò assumere gli assi, per modo che il numero di quelle quantità riesca quant' è possibile minore; cosicchè sarà utile il prendere l'origine O nel mezzo di un lato AC, l'asse Ox lungo la retta OC, e l'asse O_{γ} sulla retta OB; da che, supposte OA = OC = a, OB = b, le equazioni di B saranno x = 0, y = b, per C avremo $\gamma = 0$, x = a, e per $A \gamma = 0$, x = -a. Sia M il punto richiesto e le sue coordinate x=OP, y=MP l'angolo $xOy=\alpha$, e sia CF perpendicolare ad OB. Siccome

 $PE = OE - OP = bcos\alpha - x = ycos\alpha$, e dal triangolo AMP avendosi

$$\frac{MP}{AP} = \frac{\gamma}{a+x} = \frac{senMAP}{senAMP} = \frac{senCBE}{senBCF} = \frac{CE}{BF} = \frac{OC - OE}{BO - OF} = \frac{a - bcos\alpha}{b - acos\alpha},$$

ne vengono

$$y\cos\alpha + x = b\cos\alpha,$$

$$\frac{y}{a+x} = \frac{a-b\cos\alpha}{b-a\cos\alpha},$$

da cui si traggono per il punto M le equazioni

$$x = \frac{(b^2 - a^2)\cos\alpha}{b \sec^2\alpha}, \quad y = \frac{a^2 - b^2\cos^2\alpha}{b \sec^2\alpha}$$
 (a)

Si debba trovare il punto M', in cui BE è incontrata da CG perpendicolare ad AB? Se l'asse Ox si prenderè sulla retta OA, supposte x', y' le coordinate di M' rispetto agli assi Oy, Ox', è manifesto che i valori di x', y' si determineranno dietro considerazioni analoghe a quelle che hanno condotto a trovare x, y; epperò quei valori si desumeranno dalle formole (a) cambiando l'angolo α degi assi Ox, Oy, in $180^{\circ} - \alpha = Ang. yOx'$, quindi avremo

$$x' = \frac{(b^{2} - a^{2} \cos(180^{\circ} - \alpha))}{b \cdot ser^{2}(180^{\circ} - \alpha)} = \frac{(b^{2} - a^{2}) \cos \alpha}{b \cdot ser^{2}\alpha},$$

$$y' = \frac{a^{2} - b^{2} \cos^{2}(180^{\circ} - \alpha)}{i \cdot ser^{2}(180^{\circ} - \alpha)} = \frac{a^{2} - b^{2} \cos^{2}\alpha}{b \cdot ser^{2}\alpha}.$$

Il valore negativo dell'ascissa x' ne indica, che il punto M' s troverà nell'angolo formato dall'asse Oy col prdungamento di Ox', cioè nell'angolo yOx, siccome è manifesto. L'ordinata y'=y ne insegna che i punti M, M' coincidono, epperò "Le perpendicolari condotte dai vertici di un "triangolo sui lati opposti concorrono in uno "stesso punto."

Supportant che si cerchi il punto N (fig. 5.)

34

in cui ON perpendicolare ad AC incontra la retta NH perpendicolare a BC, e che la divide in due parti eguali. Le coordinate del punto N siano

$$y = NQ = \frac{ON}{sen\alpha}$$
, $x = -OQ = -ON \cdot cot. \alpha$.

Per determinare ON si osservi, che

 $CH = \frac{1}{2}BC = OC.\cos ACB + ON.sen ACB$, epperò

$$ON = \frac{BC - 2.OC.\cos ACB}{2.sen ACB} = \frac{\overline{BO} - 2.BC.OC.\cos ACB}{2.BC.sen ACB}$$

essendo poi

$$O\overline{B}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{BC}^2 - 2.0CBC.cos ABC$$
, avremo

$$ON = \frac{\overline{OB}^* - \overline{OC}^*}{2BE} = \frac{b - a^*}{2bsen\alpha},$$

e le equazioni del punto N saramo

$$y = \frac{b^2 - a^2}{2b \operatorname{sen}^2 \alpha}, \quad x = -\frac{(b^2 - a) \cos \alpha}{2b \operatorname{sen}^2 \alpha} \text{ (b).}$$

Volendosi il punto L, in cui la perpendicolare ONL è incontrata da LK perpendicolare al lato AB, e che lo divide in due parti guali, presi per assi coordinati la OBy e la OAS, supposte x', y' le coordinate di L, i loro valor si caveranno dalle formole (b) cambiando l'anglo α in

$$180^{\circ} - \alpha = Ang. yOx'$$
,

cosicchè avremo

$$x'=\frac{(b^2-a^2)\cos\alpha}{2b\sin^2\alpha}, \quad y'=\frac{b^2-a^2}{2b\sin^2\alpha}$$
:

Queste formole indicano, che il punto L deve trovarsi nell'angolo yOx', e poichè y'=y, ne segue che "le rette condotte dalla metà di ciascun "lato di un triangolo, perpendicolari al lato me- "desimo, concorrono in uno stesso punto."

Cerchiamo il luogo R (fig. 6.°) in cui si incontrano le rette OB ed AH condotte dai vertici A, B alle metà dei lati opposti? Le coordinate sono x=0, y=OR, e siccome, condotta HS parallela ad OB, si ha

$$\frac{HS}{OB} = \frac{HC}{BC}$$
, onde $HS = \frac{1}{a}$, ed

$$\frac{RO}{HS} = \frac{AO}{AS} = \frac{a}{a + \frac{1}{a}a} = \frac{1}{3}, \text{ ne segue } y = \frac{1}{3}b.$$

Dunque le equazioni del punto R sono x = e, $y = \frac{1}{3}b$. Volendosi il punto I, in cui OB è incontrata da CK, che unisce il vertice C alla metà del lato AB, colla osservazione di cui ci siamo valuti di sopra, troveremo x' = 0, $y' = \frac{1}{3}b$, epperò » le rette, che congiungono i vertici di un » triangolo colle metà dei lati opposti, concorromo in uno stesso punto. »

Allorchè più punti di un piano sono dati per mezzo delle equazioni, possiamo determinare le loro distanze scambievoli, le inclinazioni delle rette che li congiungono, non che le aree delle figure rettilinee di cui quei punti sono vertici.

Siano dati (fig. 7.°) il punto N per le equazioni x=a, y=b, ed il punto M per le equazioni x=a', y=b': supponiamo l'ang. xOy=a. Per

17.

determinare la lunghezza della retta MN, conduco le ordinate MRP, NQ di quei punti, e la NR parallela ad Ox. Essendo

 $\overline{MN}^{2} = \overline{MR}^{2} + \overline{NR}^{2} - 2.MR.NR.cosMRN;$ MR = MP - PR = b' - b, NR = PQ = OP - OQ = a' - a,

Ang.MRN= 180° — α , epperò $\cos(MRN)$ =— $\cos\alpha$; avremo

 $\overline{MN}^* = (a'-a)^* + (b'-b)^* + 2(a'-a)(b'-b)\cos\alpha(1)$. Se il punto M si trasferisce altrove, per esempio in M', essendo ancora x=a', y=b' le equazioni di esso, il valore di \overline{NM}' è dato dalla stessa formola: diffatti

 $\overline{NM'}^2 = \overline{M'R'}^2 + \overline{NR'}^2 - 2 \cdot \overline{M'R'} \cdot \overline{NR'} \cdot \cos(M'R'N),$ Ang.M'R'N=\alpha, M'R'=\b'-b, NR'=\alpha-a',
quindi

 $\overline{NM'}^2 = (a-a')^2 + (b'-b)^2 - 2(a-a')(b'-b)\cos\alpha =$ $= (a'-a)^2 + (b'-b)^2 + 2(a'-a)(b'-b)\cos\alpha$, come sopra. Variando comunque le posizioni dei punti M, N nell'angolo xOy troveremo il valore di \overline{MN}^2 dato dalla medesima formola. Se M si portasse in H nell'angolo yOx', per cui le equazioni di esso siano y = b', x = -a' il valore di \overline{NH}^2 si caverà dalla formola (1) cambiando unicamente il segno all'ascissa a'. Infatti

$$\overline{NH^2} = \overline{HK^2} + \overline{NK^2} - 2 \cdot \overline{HK} \cdot \overline{NK} \cdot \cos \alpha$$
,
 $HK = b' - b$, $NK = QL = a + a'$,

 $\overline{NH^2} = (a+a')^2 + (b'-b)^2 - 2(a+a')(b'-b)\cos\alpha =$ $= (-a'-a)^2 + (b'-b)^2 + 2(-a'-a)(b'-b)\cos\alpha$.

Onde resta pienamente comprovata la generalità di quella formola (1) che esprime il quadrato della lunghezza di una retta in funzione delle coordinate de' suoi estremi.

epperò

Si voglia ora conoscere l'inclinazione della retta NM agli assi coordinati? Presa nell' asse Ox Oa = 1, dal centro O si descriva la circonferenza acbd, e si conduca il diametro cOd parallelo alla retta NM. Questa retta forma coll'asse Ox due angoli, l'uno misurato dall'arco ac, l'altro dall'arco di supplemento acbd: il primo si considererà come formato dall' asse Ox e dalla retta NM, diretta da N verso M, e si indicherà con NM. x: il secondo sarà l'angolo formato collo stesso asse Ox dalla retta MN, considerata come che si dirigga da M verso N, e si rappresenterà colla scrittura MN. x. Per ciò che riguarda l'asse Oby, le inclinazioni ad esso si misureranno nella medesima circonferenza partendo da b nella direzione bcad, e saranno

 $Ar.bc = Ang.NM \cdot \gamma$, $Ar.bcad = Ang.MN \cdot \gamma$.
Ciò premesso, siccome

$$\frac{MR}{MN} = \frac{sen MNR}{sen MRN} = \frac{sen (NM \cdot x)}{sen \alpha}, \quad MR = b' - b :$$

$$MN = \sqrt{\{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + 2(a'-a)(b'-b)\cos\alpha\}}$$
ne viene

\

(2) $sen(NM.x) = \frac{(b'-b)sen \alpha}{\sqrt{\{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + 2(a'-a)(b'-b)cosa\}}}$

Avremo pei $sen MN \cdot x = -sen NM \cdot x =$

 $=\frac{(b-b')sen\alpha}{\sqrt{\{(a-a')^2+(b-b')^2+a(a-a')(b-b')\cos\alpha\}}},$

i quali seni possiamo tenerli espressi dalla stessa formola, purchè al denominatore irrazionale del secondo grado si attribuisca il segno positivo o negativo. Avremo poi

 $cos^{2}(NM \cdot x) = 1 - sen^{2}(NM \cdot x) =$ $= \frac{(b'-b)^{2} + (a'-a)^{2} + 2(a'-a)(b'-b)cos\alpha - (b'-b)^{2}sen^{2}\alpha}{(a'-a)^{2} + (b'-b)^{2} + 2(a'-a)(b'-b)cos\alpha} =$ $= \frac{\{(a'-a) + (b'-b)cos\alpha\}^{2}}{(a'-a)^{2} + (b'-b)^{2} + 2(a'-a)(b'-b)cos\alpha},$

 $cos(NM.x) = \pm \frac{a'-a+(b'-b)cos\alpha}{\sqrt{\{(a'-a)^2+(b'-b)^2+2(a'-a)(b'-b)cos\alpha\}}}$

Per decidere quale dei due segni convenga al secondo membro, si noti che essendo a'>a, b'>b, cos a>o, $NM \cdot x<90^\circ$, attribuito al denominatore il solo segno positivo, sarà

 $cos(NM \cdot x) = + \frac{a' - a + (b' - b)\cos \alpha}{\sqrt{\{(a' - a)^2 + \dots\}}}$ (3) $cos MN \cdot x = -\cos NM \cdot x.$

Se il punto M si trasferisce in M', essendo x=a', y=b' le equazioni di esso, le formole (2)

(3) converranno ancora a questo caso. Infatti $sen(NM'.x) = sen(M'NR) = sen(M'NR') = \frac{M'R'.sen\alpha}{NM'} = \frac{(b'-b)sen\alpha}{\sqrt{\{(a'-a)^2 + \dots\}}}$

e se M' T è perpendicolare ad NR' $cos(NM'.x) = cos(TNM') = \frac{NT}{NM'} = \frac{RN' - TR}{NM'} = \frac{(a-a') - (b'-b)cos\alpha}{NM'} = \frac{a' - a + (b'-b)cos\alpha}{\sqrt{(a'-a)^2 + a^2}}$

Esaminando le espressioni di senNM.x, senMN.x, senMN.x, senNM'.x, cosNM.x,.... raccogliamo, che le formole (2) (3) forniscono le inclinazioni agli assi di una retta qualunque, purchè x=a, y=b indichino le coordinate del primo punto nominato colla retta MN, NM..., ed x=a', y=b' quelle del punto secondo.

Nel piano xOy siano dati tre punti, cioè N le cui equazioni sono x=a, y=b; M dato da x=a', y=b'; ed M' per cui x=a'', y=b''. Per determinare l'angolo compreso dalle rette NM, NM'; il quale indicheremo col simbolo NM.NM'; si osservi che Ang.NM'.NM = NM.x-NM.x

$$sen(NM.x) = \frac{(b'-b)sen\alpha}{NM},$$

$$cos(NM.x) = \frac{a'-a+(b'-b)cos\alpha}{NM},$$

$$sen(NM.x) = \frac{(b''-b)sen\alpha}{NM},$$

$$cos(NM'.x) = \frac{a''-a+(b''-b)cos\alpha}{NM},$$

 $NM = \sqrt{\{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + 2(a'-a)(b'-b)\cos\alpha\}}$, $NM' = \sqrt{\{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + 2(a''-a)(b''-b)\cos\alpha\}}$ Svolgendo quindi il secondo membro della equazione sen(NM'.NM) = sen(NM'.x - NM.x) colla nota formola trigonometrica, poi sostituendo i valori di sen(NM'.x), sen(NM.x), ec. avremo

$$sen(NM.NM') = \frac{(a'-a)(b''-b)-(b'-b)(a''-a)}{\sqrt{\{(a'-a)^2....\}}\sqrt{\{(a''-a)^2....\}}} sen\alpha^{\bullet}(4).$$

Siccome poi la funzione 1/,.NM.NM'.sen(NM.NM') la misura dell'area NMM', ne segue

Area.
$$NMM'='/_{*}\{(a'-a)(b''-b)-(b'-b)(a''-a)\}$$
 $sen \alpha (5)$.

Allo stesso risultato si giunge anche colle seguenti considerazioni

Area.NMM'=

= TrapMPPM'—TrapMPQN—TrapNQP'M'
Se PS è perpendicolare ad NQ,

$$TrapMPQN=\frac{1}{a}(MP+NQ)PS=\frac{1}{a}(b+b').PQ.sen\alpha=\frac{1}{a}(b+b')(a'-a)sen\alpha$$
,

ed analogamente troveremo

epperò

TriangNMM'=

=
$$\frac{1}{3} \{ (b' + b'')(a' - a'') - (b + b')(a' - a) - (b + b'')(a - a'') \} sen\alpha = \frac{1}{3} \{ a(b' - b'') - a''(b - b'') + a''(b - b') \} sen\alpha$$
 (5)

Se i tre punti M, N, M' fossero in linea retta, Triang NMM' = 0 epperò

$$a(b'-b'')-a'(b-b'')+a''(b-b')=0$$
 (6)

Essendo le formole (4) (5) desunte dalla ispezione di una figura, bisogna esaminare quali modificazioni subiscono, allorchè la figura medesima viene variata. Si voglia a cagion d'esempio conoscere l'angolo MN.MM'? Siccome

$$AngMN.MM' = MN.x - MM'.x$$

e dietro quanto abbiamo dimostrato superiormente $sen(MN.x) = \frac{(b-b')sen\alpha}{MN}$, $sen(MM'.x) = \frac{(b''-b')sen\alpha}{MM'}$,

$$cos(MN.x) = \frac{a-a'+(b-b')cos\alpha}{MN}.$$

$$cos(MM'.x) = \frac{a''-a'+(b''-b')cos\alpha}{MM'},$$

osservando la regola prescritta riguardo all'ordine delle coordinate; mediante la formola

$$sen(MN.MN') = sen(MN.x-MM'.x)$$

avremo $sen(MN.MM') =$

$$=\frac{(b-b')\{a''-a'+(b''-b'')\cos\alpha\}-(b''-b')\{a-a'+(b-b'')\cos\alpha\}}{MN.MM'}sen\alpha=$$

$$=\frac{(a''-a')(b-b')-(b''-b')(a-a')}{MN.MM'}sen\alpha,$$

che deriva dalla formola (4) col cambiare le coordinate a, b del primo vertice in a', b' coordinate del vertice attuale; a', b' in a'', b''; ed a'', b'' in a e b. Se vorremo trovare sen(MM'.M'N), nella formola (4) cambieremo a, b in a'', b''; a', b' in a, b; a'', b'' in a', b'. Come facilmente si verifica. La regola generale si può enunciare coi termini seguenti. Scritte le lettere che indicano i punti considerati nella figura, nel modo seguente N,M,M'; N,M,M' due volte; se il primo punto N si cambia nel secondo, dovremo cambiare il secondo M nel terzo M', questo nel seguente N che è il quarto. Se N poi si cambia in M', saltando dal

primo al terzo; M si cambia in N, passando dal secondo al quarto, ed M si cambiera con M passando dal terzo punto al quinto.

Se N venisse in N, ritenute per esso le equazioni x=a, y=b, quale sarebbe la espressione del sen(N'M.N'M')? Avremo

$$sen(NM.NM') = sen(N'M.x-N'M'.x) =$$

$$=\frac{(b'-b)\{a''-a+(b''-b)\cos\alpha\}-(b''-b)\{a'-a+(b'-b)\cos\alpha\}}{N'M.N'M'}sen\alpha=$$

$$=\frac{(a''-a)(b'-b)-(b''-b)(a'-a)}{N'M.N'M'}sena,$$

quindi Area. del triangolo N'MM'=

=
$$\frac{1}{a} \{ (a''-a)(b'-b) - (b''-b)(a'-a) \} sen\alpha =$$

= $\frac{1}{a} \{ a'(b-b'') - a(b'-b'') + a''(b'-b) \} sen\alpha =$
= $\frac{1}{a} \{ a(b'-b'') - a'(b-b') + a''(b-b') \} sen\alpha$.

L'espressione del senN'M. N'M' si desume da quella di senMN.MM' cambiando a in a', b, in b' come se l'angolo richiesto fosse NMM', le equazioni di M x=a, y=b; quelle di N x=a', y=b'.

Indichiamo alcune applicazioni delle formole rinvenute. La figura OPRQ (fig. 8.3) sia un parallelogrammo avente i lati OQ=a', QR=OP=b'. Nel piano di esso si trovi un punto A dato da x=a, y=b. Siccome le equazioni di Q sono y=o, x=a'; quelle di Py=b', x=o; quelle di Ry=b', x=a', mediante la formola (5), avremo

Area
$$OAR = -\frac{1}{a}(ab^2 - a^2b)sen\alpha$$
,
Area $OPA = -\frac{1}{a}(-ab^2)sen\alpha$,
Area $AOQ = -\frac{1}{a}(-a^2b)sen\alpha$,

epperò

Area. OAR = Area. OQA - Area. OPA, che è il 'celebre teorema di Varignon. Se il punto A cadesse al di fuori dell' angolo xOy, cosicchè fossero, per esso, x = -a, y = b, avremo in tal caso $Area. AOR = \frac{1}{2}(ab' + a'b)sen\alpha$,

Area. AOP = 1/2 ab' sena, Area. AOQ = 1/2 ba' sena; epperò Area. AOR = Area. AOP + Area. AOQ. (1).

Consideriamo nel triangolo ABC (fig. 4, 5, 6) i punti che abbiamo determinati superiormente; e sostituite nella formola (5) in luogo di a, b le coordinate del punto M, in cui si incontrano le perpendicolari; per a', b' le coordinate del centro N del circolo circoscritto, e per a", b" quelle del centro R di gravità, il coeficiente di //sena sarà

$$\frac{(b^2-a^2)\cos\alpha}{b \, sen^2\alpha} \left\{ \frac{b^2-a^2}{2b \, sen^2\alpha} - \frac{1}{3}b \right\} + \frac{(b^2-a^2)\cos\alpha}{2b \, sen^2\alpha} \left\{ \frac{a^2-b^2\cos^2\alpha}{b \, sen^2\alpha} - \frac{1}{3}b \right\} =$$

$$= \frac{(b^2-a^2)\cos\alpha}{2 \cdot 3 \cdot b^2 \cdot sen^4\alpha} \left\{ 3b^2 - 3a^2 - 2b^2 \, sen^2\alpha + \frac{1}{3}b^2 \right\} = \frac{(b^2-a^2)\cos\alpha}{2a^2 \cdot sen^4\alpha} \left\{ 3b^2 - 3a^2 - 2b^2 \, sen^2\alpha + \frac{1}{3}b^2 \right\} =$$

 $+3a^2-3b^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha$ =0

epperò quei tre punti sono posti in linea retta. Siccome poi l'ascissa del terzo punto è nulla, e quelle dei punti primo e secondo, fatta astrazione

⁽¹⁾ Di questo teorema non saprei immaginare dimostrazione più semplice della seguente, che indico, non avendola veduta in alcun libro. Condotta la retta AR e le perpendicolari Oo, Qq, Pp ad essa osservo, che la perpendicolare Oo = Pp+Qq. Dunque le aree dei triangoli AOR, APR, AQR, che hanno la base AR comune, saranno proporzionali alle altezze Oo, Pp, Qq, epperò Triang. AOR=Trian, APR+Trian. AQR.

al segno, hanno fra loro il rapporto geometrico $\frac{(b^2-a^2)\cos\alpha}{h \sin^2\alpha}: \frac{(b^2-a^2)\cos\alpha}{2h \sin^2\alpha} = 2:1,$

ne segue, che »la distanza del centro di gravità »dal punto in cui si incontrano le perpendicolari »è doppia di quella che v'ha tra lo stesso centro »di gravità ed il centro del circolo circoscritto al »triangolo.

Dato il poligono rettilineo ABCDE... (fig. 9.*) trovarne l'area espressa per le coordinate dei vertici? Supponiamo che siano; per $A = a_1$, $\gamma = b_1$; per $B = a_2$, $\gamma = b_3$; per $D = a_4$, $\gamma = b_4$; ecc. Tenendo ben fissa in mente la regola stabilita per l'uso delle formole (2) (3), scriviamo le equazioni seguenti

$$|a_{3}-b_{4}| = (b_{3}-b_{4})\{a_{3}-a_{4}+(b_{4}-b_{4})\cos\alpha\}\frac{sen\alpha}{2} - (b_{4}-b_{4})\{(a_{3}-a_{4})+(b_{3}-b_{4})\cos\alpha\}\frac{sen\alpha}{2} = \{(b_{3}-b_{4})(a_{4}-a_{4})-(b_{4}-b_{4})(a_{3}-a_{4})\}\frac{sen\alpha}{2} = \frac{(b_{3}-b_{4})(a_{4}-a_{4})-(b_{4}-b_{4})(a_{3}-a_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{4}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{4})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{4})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{4}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{5}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_{4}-b_{5})}{2} = \frac{(b_{4}-b_{5})-a_{5}(b_{4}-b_{5})+a_{5}(b_$$

e supposte $x=a_{n-1}$, $y=b_{n-1}$; $x=a_n$, $y=b_n$ le coordinate dei vertici penultimo ed ultimo, l'area dell' ultimo triangolo sarà

$$\frac{1}{2} \{a_1(b_{n-1}-b_n)-a_{n-1}(b_1-b_n)-a_n(b_1-b_{n-1})\}$$

cosicchè sommate tutte queste espressioni, l'area del poligono verrà data dalla funzione

 $a_1(b_2 \cdot b_n) + a_2(b_3 \cdot b_1) + a_3(b_4 \cdot b_2) + a_4(b_5 \cdot b_3) \cdot \dots + a_n(b_1 \cdot b_{n-1})$ ove l'ascissa di ogni punto è moltiplicata per la differenza delle ordinate dei punti seguente ed antecedente, i quali si incontrano percorrendo il perimetro, così che dal punto $x = a_1$, $y = b_1$ si passi al secondo $x = a_2$, $y = b_3$; da questo al terzo $x = a_3$, $y = b_3 \cdot \dots$

Stimo opportuno accennare qui una applicazione delle formole ottenute alla poligonometria. Nello stesso piano si trovino due triangoli rettilinei NMM', ABC (fig. 7.2). Tracciati ad arbitrio due assi ortogonali nel piano di essi; indico colle lettere a, b, c i vertici N, M, M di un triangolo, con m, n, p i vertici A, B, C dall'altro; chiamo x_a , y_a le coordinate del vertice a; x_b , y_b quella del vertice b, ecc.; r_a , r_b ecc. le distanze dall'origine dei punti a, b...; ar_b , ar_m ecc. le distanze dei punti a e b, a ed b ecc. Essendo

2. Area abc
$$= x_a(\gamma_c - \gamma_b) - x_b(\gamma_c - \gamma_a) + x_c(\gamma_b - \gamma_a) =$$

$$= (x_a\gamma_c - x_c\gamma_a) + (x_c - \gamma_b x_b \gamma_c) + (x_b\gamma_a - x_a\gamma_b)$$
2. Area $mnp = (x_m\gamma_p - x_p\gamma_m) + (x_p\gamma_n - \gamma_n x_p) + (x_n\gamma_m - x_m\gamma_n)$

$$(x_a\gamma_c - x_c\gamma_a)(x_m\gamma_p - x_p\gamma_m) =$$

 $=(x_a x_m + y_a y_m)(x_c x_p + y_c y_p) - (x_a x_p + y_a y_p)(x_c x_m + y_p y_m)$ e simili; come facilmente si verifica colla moltiplicazione; e di più

$$x_a x_m + y_a y_m = \frac{1}{2} (r_a^2 + r_m^2 - a r_m^2),$$

$$x_a x_n + y_a y_m = \frac{1}{2} (r_a^2 + r_m^2 - r_m^2),$$

e simili; e ciò in forza della formola (1); ne segue $(\alpha) 4(x_{\alpha}y_{\alpha}-x_{\alpha}y_{\alpha})(x_{\alpha}y_{\alpha}-x_{\alpha}y_{\alpha})$

 $= (r_a^2 + r_m^2 - r_a^2)(r_c^2 + r_p^2 - r_p^2) - (r_a^2 + r_p^2 - r_p^2)(r_c^2 + r_m^2 - r_m^2)$ Se ora moltiplichiamo fra loro le due formole esprimenti 2. Area mnp, 2. Ar.abc il risultato si trova essere la somma di nove prodotti analoghi ad $(x_{\alpha}\gamma_{c}-x_{c}\gamma_{u})(x_{m}\gamma_{p}-x_{p}\gamma_{m})$, ad ognuno dei quali surrogato il valore espresso dal secondo membro della equazione (a), fatte tutte le riduzioni, spariscono i termini contenenti le distanze dei vertici dei triangoli dall'origine arbitraria; siccome è facile prevedere; e resta (8)

16. Area abc . Area mnp=

$$= ({}^{r^2}_a \cdot {}^2_r - {}^2_r \cdot {}^2_r \cdot {}^2_r) + ({}^2_a \cdot {}^2_r \cdot {}^2_n - {}^2_n \cdot {}^2_r) + ({}^2_a \cdot {}^2_r \cdot {}^2_m - {}^2_n \cdot {}^2_n)$$

più due altri sestinomi, che si desumono da questo, cambiandovi da prima a in c, c in b; poi a in b, c in a: come si raccoglie dal valore dell' Area.mnp, scritto di sopra.

Se fingiamo che il punto a coincida con m; b con n; c con p, essendo r = r = r = 0,

r = r = lato.ac, r = r = lato.bc, r = r = lato.ab, dalla formola (8) caveremo (9)

$$16.\overline{Area.abc}^2 = \overline{ab}^2 (\overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 - \overline{ab}^2) +$$

$$+ \overline{ac}^2 (\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 - \overline{ac}^2) + \overline{bc}^2 (\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - \overline{bc}^2)$$

quantità essenzialmente positiva, per cui lo è pure il secondo membro della equazione (8).

Siccome l'area di un poligono piano rettilineo eguaglia la somma di più triangoli, in cui può venire in più modi decomposto, il quadrato di quell'area sarà la somma dei quadrati delle aree dei triangoli componenti, e dei prodotti di esse prese due a due: e poiché col mezzo delle formole (8) (9) possiamo esprimere questo quantita in funzioni razionali dei lati e delle diagonali del poligono, conseguiremo ancora il quadrato dell'area poligona espresso per una funzione razionale delle rette medesime.

Non mi diffundo su questo argomento, che ho trattato con qualche estensione in altra opera (1), nella quale oltre la formola (8), si trova una espressione dell'area di qualunque poligono, le applicazioni analoghe alla poliedrometria, ed altre questioni di geometria e di meccanica.

ARTICOLO H.

Della linea retta.

Essendo data una linea retta nel piano degli assi coordinati, si voglia esprimerne la esistenza per mezzo dell'algebra? La retta sia ABM (fig. 10) Se questa è data, saranno noti alcuni elementi sufficienti ad individuarla, quali sarebbero i due punti A, B in cui incontra gli assi coordinati xOA,

⁽¹⁾ Trasformazioni di alcune funzioni algebraiche, e loro uso nella geometria e nella meccanica. Memoria. Pavia dalla Tipografia Bizzoni. 1832.

OBr; o due altri qualunque di essa: ovvero uno di quei punti e la sua inclinazione ad alcuno degli assi, e simili. Siano dati i punti A, B, e si suppongano la lunghezza OA=a, OB=b. Se le coordinate x, y apparterranno ad un punto M di quella retta, fra esse sussisterà una relazione dipendentemente dal modo di esistere di quel punto. Per determinare tale relazione si osservi, che essendo $\gamma = MP$, x = OP, nei due triangoli simili AOB, APM i lati AO, AP omologi, e gli altri OB, MP pure omologi, avranno fra loro ragioni geometriche eguali, sarà cioè $\frac{MP}{QR} = \frac{AP}{AQ}$, ossia $\frac{y}{b} = \frac{x+a}{a}$, e quindi $y = \frac{b}{a}x+b$. Dunque se x, yesprimono le coordinate di un punto qualunque della retta ABM, fra esse ha luogo quella equazione: la medesima è poi esclusiva a quei punti, mentre se fra le coordinate OP = x, NP = y di un punto N sussistesse quella relazione, fosse cioè $NP = \frac{b}{a}OP + b$, epperò $\frac{NP}{b} = \frac{OP + a}{a}$, vale a dire $\frac{NP}{OB} = \frac{AP}{AO}$, sarà PN = PM, ed N cadrà in M, cioè nella retta ABM. La equazione $y = \frac{b}{a}x + b$ (1) indica una proprietà caratteristica ed esclusiva alle coordinate x, y dei punti situati nella retta ABM, dunque rappresenta quella linea, e chiamasi la equazione della medesima.

Fingiamo dati OA=a, e la inclinazione della retta ABM all' asse Ox. Indicheremo d'ora in avanti la retta con r, con x l'asse Ox, e con rx l'angolo da esse compreso. Per misurare quest'angolo, presa nell'asse Ox la retta Oa=1, poi descritta intorno al centro O la circonferenza acb, condurremo Oc parallella ad ABM. Sarà Ang.rx=Arc.ac, e l'angolo ry sarà misurato dall'arco bc nella direzione bca. Essendo dato rx, siccome rx+ry=x, angolo degli assi coordinati, se ne deduce il valore dell'angolo ry. La risoluzione trigonometrica del triangolo MPA fornisce poi la proporzione $\frac{MP}{PA}=\frac{y}{x+a}=\frac{sen(rx)}{sen(ry)}$, epperò fra le coordinate x, y di qualunque punto di quella retta avrà luogo la relazione $y=\frac{sen(rx)}{sen(ry)}(x+a)$. (2)

Se fossero dati rx ed OB = b, condotta BN parallella all' asse Ox, per cui MN = y - b, BN = OP = x avremo $\frac{MN}{BN} = \frac{y - b}{x} = \frac{sen(rx)}{sen(ry)}$ ossia $y = \frac{sen(rx)}{sen(ry)}x + b$ (3); la quale coincide coll' antecedente, per essere $b = a\frac{sen(rx)}{sen(ry)}$.

Quando fossero dati, un punto A (fig. 11) per le equazioni x=a, y=b; ed un altro B dalle equazioni x=a', y=b', onde rappresentare algebraicamente la linea retta che passa per quei punti, preso in quella un punto M, condotte le ordinate Aa, MCP, BDb e la ACD parallella ad

Ox, siccome $\frac{MC}{AC} = \frac{BD}{AD}$, MC = MP - PC = y - b, AC = aP - x - a, BD = b' - b, AD = a' - a, ne segue $\frac{y - b}{x - a} = \frac{b' - b}{a' - a}$, epperò $y = \frac{b' - b}{a' - a}(x - a) + b$, ovvero $y = \frac{b' - b}{a' - a}x + \frac{ba' - ab'}{a' - a}$. (4)

Considerando un altro punto N di quella retta, collo stesso discorso, giungeremo alla medesima equazione.

Se un punto rappresentato da x=a'', y=b'', fosse collocato nella retta AB, sostituiti nella equazione (4) i valori x=a'', y=b'', dovrebbe essere soddisfatta, cioè $b''=\frac{b'-b}{a'-a}a''+\frac{ba'-ab'}{a'-a}$; ossia a(b'-b'')-a'(b-b'')+a''(b-b')=0, epperò se tre punti sono in linea retta fra le loro coordinate ha luogo questa relazione, già altrimenti ottenuta superiormente (Artic. I. form. (6)).

Da quanto sopra rileva, che la equazione di una linea retta ha la forma seguente y = Ax + B; ove x, y sono le coordinate di un suo punto qualunque; A, B quantità date, che si dicono i parametri della equazione; la omogeneità della quale esigge, che B rappresenti una retta, A un numero astratto. Siccome, posto in quella equazione x = 0, se ne deduce y = B, il punto determinato da x = 0, y = B si troverà in quella retta. Così fatto y = 0 nella equazione y = Ax + B ne viene Ax + B = 0, cioè $x = -\frac{B}{A}$, onde anche il punto dato da

 $x = -\frac{B}{A}$, y = 0 giace in quella retta. Dunque la retta incontra l'asse yOy' nel punto cui corrisponde l'ordinata y = B e l'asse xOy' nel punto determinato dall'ascissa $x = -\frac{B}{A}$, e questi punti determinano compiutamente la retta medesima. Se sono A > 0, B > 0 presa nell'asse Oy (fig. 12.') la parte OB = B, e nel prolungamento di Ox, $OA = \frac{B}{A}$, la retta indefinita CABD è quella rappresentata dall'equazione y = Ax + B, e condotta cOc' parallela ad AB, avremo

$$A = \frac{B}{OA} = \frac{OB}{OA} = \frac{senac}{senbc} = \frac{senabec'}{senbadc'} = \frac{senrx}{senry}$$
.
Se $A > 0$, $B < 0$, sarà $-\frac{B}{A} > 0$, epperò prese nell' asse Ox la retta $OA' = -\frac{B}{A}$, e nell' Oy' la

OB'=-B, sarà CB'A'D' la retta rappresentata da $\gamma = Ax + B$ ed avremo

$$A = -\frac{B}{OA'} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{sen(ac)}{sen(bc)} = \frac{sen(rx)}{sen(ry)}.$$

Se A < 0, B < 0 la retta sarà AB', per cui condottavi la parallela dOd' avremo

$$A = \frac{B}{OA} = -\frac{OB'}{OA} - \frac{sen(ed)}{sen(db)} - \frac{sen(acd)}{sen(-db)} =$$

$$= \frac{sen(abed')}{sen(bad')} = \frac{sen(rx)}{sen(ry)},$$

mentre la retta può considerarsi come che abbia

la direzione Od ovvero Od indifferentemente : nel primo caso sen(ry) = senbd < o, nel secondo senrx = senabed < o, Finalmente se A < o, B > o, siccome $-\frac{B}{A} > o$ la retta sarà BA', ed avremo

$$A = -\frac{B}{OA} = -\frac{OB}{OA} = \frac{sen(acd)}{sen(-db)} = \frac{sen(rx)}{sen(ry)}$$

come sopra. Dunque nella equazione y = Ax + B della linea retta il parametro B è l'ordinata di quel punto in cui essa incontra l'asse delle ordi-

nate ed $A = \frac{sen rx}{sen ry}$. Se poi gli assi coordinati

sono ortogonali, rx, ry sono angoli di complemento, sen(ry) = cos(rx) epperò A = tang(rx). In tal caso possiamo disegnare la retta rappresentata dalla equazione y = Ax + B, come segue. Alla circonferenza acb (fig. 13.) condurremo la tangente dad': se A>0 prenderemo ad=A, e quando sia A<0 si prenderà ad'=-A; poi tracciate le rette Od, Od', e determinato il punto B col fare OB=B se B>0, ovvero il punto B' se B<0, prendendo OB'=-B, tireremo per esso la parallela ad Od ovvero ad Od, secondo che A>0 oppure A<0, e si determinerà per tal maniera la retta rappresentata dalla equazione y=Ax+B.

Quando A > 0 (fig. 12.2) abbiamo $rx+ry=ac+bc=\alpha$, oppure $rx+ry=abec'-bec'=\alpha$, ed allorchè A < 0, $rx+ry=acbd-db=\alpha$, ovvero $rx+ry=abed'-bed'=bad'-ad'=\alpha$, come nel primo caso. Quindi combinando assieme le equa-

zioni $sen(rx) = A \cdot sen(ry)$, $sen(ry) = sen(\alpha - rx)$, ne viene $sen(rx) = A \cdot sen\alpha \cdot cosrx - cos\alpha \cdot senrx \cdot$

$$tang(rx) = \frac{A.sen\alpha}{1 + A.cos\alpha}: (5)$$

$$sen(rx) = \frac{tang(rx)}{\sqrt{\{1+tang^{2}(rx)\}}} = \frac{Asen\alpha}{\sqrt{\{A^{2}sen^{2}\alpha+(1+Acos\alpha)^{2}\}}} = \frac{A \cdot sen \alpha}{\sqrt{(1+2Acos\alpha+A^{2})}}$$

$$sen(ry) = \frac{sen\alpha}{\sqrt{(1+2A\cos\alpha + A^2)}}.$$

Se A>0, per cui la retta (r) sia parallela a cOc', prendendo il segno positivo che si suppone precedere il denominatore irrazionale, le due funzioni sen(rx), sen(ry) si riferiscono alla retta Oc, ma assumendo il segno negativo sen(rx) = sen(abec'), sen(ry) = sen(bdc'), epperò quelle funzioni trigonometriche riguardano la retta Oc'. Se A<0, ed (r) parallela a dOd', prendendo il denominatore col segno positivo,

sen(rx) = sen(ad') < 0, sen(ry) = sen(bcd') > 0, onde quelle formole si riferiscono alla retta Od'; e riguarderanno la Od quando si prenda l'irrazionale negativo.

L'equazione della linea retta in alcuni casi particolari assume modificazioni notabili. Se passa per l'origine, siccome le coordinate di questo punto, cioè x=0, y=0, devono rendere soddisfatta la equazione y=Ax+B, ne segue dover essere B=0. Il che pure si scorge osservando, che B è l'ordi-

34 nata di quel punto, in cui la retta incontra l'asse $\gamma Q \gamma'$, epperò B=0 allorchè quel punto coincide coll'origine. Se la retta è parallela all'asse Ox, sen(rx) = 0, A = 0, e la sua equazione si riduce ad $\gamma = B$. Diffatti le ordinate di tutti i punti di essa sono eguali, perchè rette parallele comprese fra altre due parallele. Se la linea retta deve essere parallela all'asse Oy, siccome sen(ry)=o sarà $\frac{1}{A}$ = 0, e la equazione y=Ax+B, divisa per A, fornisce $x + \frac{B}{A} = \frac{1}{A} \gamma = 0$, essendo la γ suscettibile di valori finiti. Siccome poi la frazione indica generalmente l'ascissa del punto in cui la retta incontra l'asse xOx', supposto $-\frac{B}{A} = C$, la equazione della retta parallela all'asse Or assume la forma x=C, essendo C una quantità data positiva o negativa secondo che la retta incontra l'asse Ox, ovvero il suo prolungamento.

Importa di notare attentamente, che avendosi due equazioni x=a, y=b, ognuna di esse presa isolatamente rappresenta una linea retta parallela ad un asse coordinato; ma considerate insieme si riferiscono al punto unico comune alle stesse parallele.

Allorchè in un piano esistono delle rette e dei punti riferite a due assi rettilinei per mezzo delle loro equazioni, possiamo in ogni caso determinare i luoghi, in cui quelle rette si incontrano; gli angoli che esse comprendono, e le aree delle figure che ne vengono racchiuse: potremo scoprire di quanto ogni punto sia distante da ciascuna retta, e conseguire insomma le misure di tutte le grandezze angolari, lineari, e superficiali che per quei punti e quelle rette vengono ad essere determinate.

Siano date due linee rette: ad una di esse, che chiamo (r), corrisponda la equazione $\gamma = Ax + B$; l'altra, che indico con (r'), sia data dall'equazione $\gamma = Ax + B'$. Per determinare il punto ad esse comune osserviamo, che le sue coordinate sostituite ai simboli x, γ nell'una e nell'altra di quelle equazioni devono renderle soddisfatte: dunque i loro valori saranno quelli, che fornisce la risoluzione dell' equazioni $\gamma = Ax + B$, $\gamma = A'x + B'$.

cioè
$$x = \frac{B' - B}{A - A'}, \quad y = \frac{AB' - A'B}{A - A'}$$
 (6).

Si voglia determinare la inclinazione scambievole di queste linee rette? Dei due angoli supplementari che esse comprendono, considero quello
formato dalle due parallele (fig. 14.º) che incontrano la semicirconferenza abe. Indico quell'angolo colla scrittura simbolica rr'. Siccome sen(rx), sen(r'x) sono entrambi positivi: se A>0, A'>0, saranno positivi anche sen(ry) e sen(r'y):
in tal caso, quando sia sen(rx)>sen(r'x), per cui
le rette si diriggano come le Oc, Od avremo

$$rx > r'x$$
, $rx - r'x = rr'$,

e
$$tang(rr') = tang(rx - r'x) = \frac{tang(rx) - tang(r'x)}{1 + tang(rx) tang(r'x)} =$$

$$= \frac{Asen\alpha(1 + A'cos\alpha) - A'sen\alpha(1 + Acos\alpha)}{(1 + Acos\alpha)(1 + A'cos\alpha) + AA'sen^2\alpha} =$$

$$= \frac{(A - A')sen\alpha}{1 + AA' + (A + A')cos\alpha}$$

Se poi r'x > rx, r'x - rx = rr', e si avrà il valoredi tang(rr') cambiando il segno all' antecedente.

Supponiamo A > 0 ed A' < 0: le rette parallele siano Oc, Od, sarà sen(ry) = senbc > 0, sen(r'y) = sen(bd') < 0 Ang.r'x > Ang.rx, e siccome r'x - rx = rr', giungeremo alla formola ottenuta nel primo caso, e col
medesimo processo di calcolo. Quando sia A' > 0ed A < 0, sarà sen(r'y) > 0, sen(ry) < 0, quindi rx > r'x, rx - r'x = rr', e conseguiremo la formola
del caso secondo. Finalmente se A < 0, A' < 0 per
cui le parallele siano dirette come Oc', Od, sen(ry), sen(r'y) sono entrambi negativi; se -sen(ry) < -sen(r'y),
sarà r'x > rx, e si avrà di nuovo la formola del
primo caso; e saremo condotti a quella del secondo allorchè -sen(ry) > -sen(r'y). Dunque

$$tang(rr') = \pm \frac{(A-A')sen \alpha}{1 + AA' + (A+A')cos\alpha} (7).$$

Se le rette (r) (r') fossero parallele, avremmo Ang(rr')=0, sarà nullo il secondo membro della equazione (7), per cui, quando A, A' sono quantità finite, dovrà essere A=A'. Se poi $A=\frac{1}{0}$, e non lo è A', trascurando nella formola (7) le quantità finite per rispetto ad $A=\frac{1}{0}$, avremo

$$tang(rr') = \pm \frac{A.sen\alpha}{A(A' + cos\alpha)} = \pm \frac{sen\alpha}{A' + cos\alpha};$$

che non può ridursi a zero quando non sia A'=1/0, epperò A'=A. Dunque la equazione A=A' (8) indica che le rette (r) (r') sono parallele fra loro. A conferma si noti, che essendo in questo caso Ang(rx)=Ang(r'x); Ang(ry)=Ang(r'y); ne segue

$$\frac{sen(rx)}{sen(ry)} = \frac{sen(r'x)}{sen(r'y)}, \text{ cioè } A = A'.$$

Questa equazione rende poi infiniti i valori (6) delle coordinate del punto comune a quelle linee rette, le quali perciò non possono incontrarsi.

Quando le rette (r) (r') saranno perpendicolari, ossia $tang(rr') = tang.90^{\circ} = \frac{1}{6}$, se A, A' sono quantità finite, dalla equazione (7) si deduce

$$1 + AA' + (A + A') \cos \alpha = 0 \quad (9).$$

Se per esempio $A=\frac{1}{n}$, epperò la retta (r) parallela all'asse Oy, la formola (7) si riduce alla se-

guente
$$tang(rr') = \pm \frac{sen \alpha}{A' + cos \alpha}$$
, e perchè

sia $tang(rr') = \frac{1}{0}$ dovrà essere (10) $A' + cos\alpha = 0$. Nella ipotesi di $A = \frac{1}{0}$ anche la equazione (9) ricade nella (10), mentre, trascurati nel primo membro i termini finiti rispetto a quelli che contengono $A = \frac{1}{0}$, quella equazione ci dà $A(A' + cos\alpha) = 0$, la quale non può verificarsi a meno che sia

$$A + \cos \alpha = 0$$
.

Se gli assi coordinati sono ortogonali cosz=0, e la condizione (9) si riduce ad (11) 1+AA=0. A conferma si osservi, che nel caso presente

A=tang(rx), A'=tang(r'x); uno degli angoli, rx per esempio, sarà acuto, l'altro $r'x=rx+90^\circ$ sarà ottuso; dunque $tang(r'x)=-\frac{1}{tang(rx)}$, cioè $A=-\frac{1}{tang(rx)}$ ossia 1+AA'=0.

Proponiamoci di trovare l'area del triangolo compreso fra le rette (r), (r') e l'asse Ox? Assumeremo per base il lato che si trova nell'asse xOx', per cui l'altezza sarà la perpendicolare condotta a quell'asse dal punto comune alle rette (r), (r'), la qual perpendicolare, per le formole (6), è espressa da $\pm \frac{AB'-A'B}{A-A'}$ sen α ; assumendo quel segno che rende positiva questa quantità. Per calcolare la lunghezza della base, cioè di quella parte dell'asse xOx' la quale è compresa fra le rette (r), (r') notiamo che le ascisse dei punti comuni a queste rette e al detto asse sono, per la retta (r) $x'=-\frac{B}{A'}$, per (r') $x''=-\frac{B'}{A'}$: se queste due quantità sono entrambe positive, e per esempio x'>x'', la base del triangolo sarà rappresentata da

$$x'-x''=\frac{B'}{A'}-\frac{B}{A}=\frac{B'A-BA'}{AA'}$$

se x' < x'' la base avrà per valore $-\frac{B'A - BA'}{AA'}$:
se x', x'' sono negative e -x' > -x'', per cui x' < x'', la base sarà -x' - (-x'') = x'' - x' cioè data dalla formola del secondo caso; quando poi

-x' < -x'', cioè x' > x'' vale la formola del caso primo. Finalmente se una di quelle ascisse, per esempio x' è positiva, ed x'' < 0, per cui x' > x'', la base avrà per misura x' + (-x'') = x' - x'', cioè la formola del primo caso; e varrà quella del secondo se x'' > 0 ed x' < 0 per cui x'' > x'. Da tutto ciò ne segue che l'area del triangolo ha per misura il prodotto

$$\pm 1/2 \frac{AB'-A'B}{A-A'} sen\alpha \times \pm \frac{AB'-A'B}{AA'} =$$

$$= \pm \frac{(AB'-A'B)^2 \cdot sen\alpha}{2(A-A') \cdot AA'} (12),$$

assumendo quel segno che rende positiva la funzione. Questa norma desunta dal significato geometrico del risultato, colima con quella a cui conducono le osservazioni fatte superiormente; cioè che si dovrà prendere il segno superiore se x'>x'' ossia $\frac{B}{A} < \frac{B'}{A'}$, e viceversa. Infatti se $\frac{AB'-A'B}{A-A'}>0$, siccome

siccome
$$\frac{B'}{A'} - \frac{B}{A} = \frac{AB' - A'B}{AA'} = \frac{AB' - AB'}{A - A'} \times \frac{A - A'}{AA'},$$
dovremo assumere nella formola (12) il segno +;
$$0 -, \text{ secondo che } \frac{B}{A'} - \frac{B}{A} \stackrel{?}{e} >, 0 < 0; \text{ ossia secondo che } \frac{A - A'}{AA'}, \text{ ovvero } (A - A')AA', \stackrel{?}{e} \text{ positivo onegativo: che } \stackrel{?}{e} \text{ la seconda regola indicata.}$$
Fingendo
$$\frac{AB' - A'B}{A - A'} < \text{ o giungeremo collo stesso discorso alle medesime conseguenze.}$$

49

Essendo date tre finee rette, la (r), la (r') ed una terza (r'') rappresentata dalla equazione r = A''x + B', si vuole l'espressione dell'area triangolare racchiusa fra le rette medesime? Le tre funzioni

$$\pm \frac{(AB'-A'B)^* sen \alpha}{2AA'(A-A')}, \pm \frac{(AB''-A''B)^* sen \alpha}{2AA''(A-A'')}, \\ \pm \frac{(A'B''-A''B')^* sen \alpha}{2A'A''(A'-A'')},$$

prese ciascuna col segno che la rende positiva, indicano le aree dei triangoli terminati dalle rette r,r',x'Ox; r,r'',x'Ox; r',r''x'Ox; e l'area cercata non è altro che la somma algebraica di quelle, aggregate come richiede la posizione relativa delle rette (r') (r'').

Siano (fig. 15.*) la (r) rappresentata da ADB, (r) da AEC, (r') da DEF, per cui

$$Tr.AED = Tr.BAC + Tr.CEF - Tr.BDF.$$
Le ordinate dei vertici A , E , D sono supposte positive; siccome $-\frac{B}{A} < -\frac{B}{A'}$ sarà

$$Tr.ABC = -\frac{(AB - AB)^{2}.sen\alpha}{AA(A - A')}$$
; essendo $-\frac{B}{A} < -\frac{B''}{A'}$

ne segue
$$Tr.BDF = \frac{(AB''-A''B) \cdot sen\alpha}{AA''(A-A'')}$$
;

E perchè
$$-\frac{B''}{A''} > -\frac{B}{A'}$$
 cioè $\frac{B'}{A'} > \frac{B''}{A''}$

$$Tr.CEF = -\frac{(A'B''-A''B')^2.sen\alpha}{A'A''(A'-A'')}$$
, dunque

$$Tr.AED = \frac{serica}{2} \left\{ \frac{(A''B-AB')^{*}}{AA'(A'-A)} + \frac{(A''B-A''B')^{*}}{AA''(A'-A')} + \frac{(AB''-A''B)^{*}}{AA''(A-A')} \right\} (13).$$
Se la retta (r⁴) fossa D'E'E' avrocad

Se la retta (r") fosse D'E'F', avremo Tr.AD'E' = Tr.BAC + Tr.CE'F' - Tr.BD'F',

e siccome le formole antecedenti rappresentano
anche attualmente le aree indicate dalle stesse lettere, giungeremo nuovamente alla formola (13).

La retta (r") sia ED''F'', per cui Tr.AD''E - Tr.BAC + Tr.BD''F'' - Tr.CED'''

Tr.AD''E = Tr.BAC + Tr.BD''F' - Tr.CEF''.

Il Tr.BAC è dato dalla prima formola: siccome $\frac{B''}{A''} < \frac{B}{A}$ nambiereme il segno alla espressio-

ne analitica assegnata superiormente al Tr.BDF; ciò che equivale a sostituire +Tr.BDF in scambio

di
$$-Tr.BD'F''$$
. Finalmente, siccome $\frac{B''}{A''} < \frac{B'}{A''}$,

essendo negativa la prima frazione e positiva la seconda, l'area Tr.CEF' si desumera da quella del Tr.CEF cambiando il segno, oxvero sostituendo al valore di Tr.CEF'' quello di -Tr.CEF. Da ciò emerge che l'area del Tr.AD''E vien data dalla stessa formola (13).

Consideriamo per ultimo il caso în cui la retta (r^n) è figurata dalla $D^nF^{*n}E^n$, cosicchè $Tr.AD^nE^n = Tr.ABC + Tr.CE^nF^{**} - Tr.BD^{**}F^{***}$. L' area del Tr.ABC è data dalla prima formola. Siccome $-\frac{B}{A} < -\frac{B^n}{A^n}$, cioè $OB > OF^{***}$ vale per

l'area del Tr.BB'.F''' la espressione primitiva del Tr.BDF è poichè $-\frac{B''}{A''} < \frac{B'}{A'}$ essendo negativo il primo termine di questa ineguaglianza e positivo il secondo, parrebbe che dovressimo cambiare il segno al valore di Tr.CEF per avere quello del Tr.CE''F''', il che non è, mentre nel caso presente $\frac{A'B''-A''B}{A''-A''}$ seria del punto E'' è negativa. Dunque anche in quest' ultimo caso l'area del triangolo è data della formola (13).

Ho insistito su queste considerazioni, onde abituare lo studioso all'esame delle formole. Veniamo ora ad altri problemi, che riguardano linee e punti.

Supponiamo dati, una retta (p) dalla equazione y = Ax + B, un punto le equazioni del quale siano x = a, y = b; e cerchiamo

1.° La equazione della retta parallella ad (r) che passa per il punto dato? La equazione cercata sia $\gamma = Ax + B$: dovranno essere A' = A, b = Aa + B: dunque A' = A, B' = b - Aa, per cui l'equazione richiesta sarà $\gamma - b = A(x - a)$ (14).

2.º Affinche la retta y=Ax+B' sia perpendicolare ad (r), e passi per il punto dato, dovranno essere $1+AA'+(A+A')\cos\alpha=0$, b=A'a+B'; dunque $A'=-\frac{1+A\cos\alpha}{A+\cos\alpha}B'=b-Aa$; eppero $1+A\cos\alpha$

(15) $y-b=-\frac{1+A\cos\alpha}{A+\cos\alpha}(x-a)$ rappresenterà la perpendicolare richiesta.

3.º Le coordinate del punto comune alla retta (r) ed alla perpendicolare condotta per il punto dato, si cavano dalle formole (6) ponendovi i valori di A', B' trovati nel problema antecedente, cioè

$$A-A'=\frac{1+2A\cos\alpha+A^2}{A+\cos\alpha},$$

$$\frac{B'-B}{A-A'} = \frac{B'+aA'-Aa-B}{A-A'} = \frac{b-Aa-B}{A-A'}, \text{ eppe-}$$

rò le coordinate che si cercano sono le x, y fornite dalle equazioni (16)

$$x-a=\frac{B+Aa-b}{A-A'}=\frac{A+\cos\alpha}{1+2A\cos\alpha+A'}(B+Aa-b)$$

$$y = b = \frac{1 + A\cos\alpha}{A + \cos\alpha}(x - a) = \frac{1 + A\cos\alpha}{1 + 2A\cos\alpha + A^2}(B + Aa - b)$$

4.° Cerchiamo la distanza del punto x=a, y=b dalla retta (r); ossia la lunghezza di quella parte della perpendicolare determinata nel Problema 2.°, la quale ha un termine nel punto dato, l'altro in quello trovato nell'antecedente problema 3.° Essendo x, y le coordinate di questo punto il quadrato della retta cercata è dato dalla formola $(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\alpha$ (Artic. I. formola (1)), in cui ad x-a, y-b vengano sostituiti i valori ottenuti nel problema 3.°; cioè sarà dato dalla formola seguente

$$\frac{(A+\cos\alpha)^2-2(A+\cos\alpha)(1+A\cos\alpha)\cos\alpha+(1+A\cos\alpha)^2}{(1+2A\cos\alpha+A^2)^2}(Aa+B-b)^2=$$

$$=\frac{(Aa+B-b)^2\sin^2\alpha}{1+2A\cos\alpha+A^2}$$

cosicche la lunghezza della perpendicolare richiesta è rappresentata da $\pm \frac{(Aa+B-b)sen\alpha}{\sqrt{(1+2Acos\alpha+A^2)}}$ (17).

Allora che dopo un lungo giro di calcoli si ottiene una formola, giova assicurarci dell'esattezza dei risultamenti con qualche verificazione. Valga ad esempio il caso presente. ABDCD (fig. 16) rappresenti la retta (r), M il punto dato, MP=b, OP=a, MC la perpendicolare. Il binomio Aa+b è l'ordinata della retta (r) corrispondente 'all'ascissa x=a=OP, dunque Aa+B=DMP; quindi Aa+B=b=DP-MP=DM, di più

 $\frac{sen\alpha}{\sqrt{(1+2A\cos\alpha+A^2)}} = sen(ry) \text{ (form. 5), e la formola (17) equivale a}$

 $\pm DMsen(ry) = \pm DMsen(CDM) = \pm CM$.

Da ciò emerge che nel caso considerato si deve prendere nella formola (17) il segno superiore.

Se il punto dato è M, per cui OP = a, MP = b, Aa + B - b = -M'D, vediamo che nella formola (17) varrà il segno inferiore. Il che vuol essere notato con attenzione.

5.° Fingiamo fissato nella retta (r) (fig. 16) un punto C, cui corrisponda l'ascissa x=a, epperò l'ordinata y=b=Aa+B; e supponiamo che si debba trovare nella medesima retta un punto D dietro una condizione determinata. Indichiamo con x, y le coordinate del punto richiesto, per cui sarà y=Ax+B: la distanza incognita CD si rappresenti con l, e sarà

 $l = (x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos x$. Siccome y = Ax + B, b = Aa + B, ed y - b = A(x-a) ne vienne $l^2 = (x-a)^2(1 + 2A\cos x + A^2)$, ed $x - a = \frac{l}{\sqrt{1 + 2A\cos x + A^2}}$, $y - b = \frac{Al}{\sqrt{1 + 2A\cos x + A^2}}$.

La lunghezza l determina la posizione del punto D, per cui esaminando la proprietà alla quale deve soddisfare quel punto, ed indicatene analiticamente le
condizioni, giungeremo a conseguire una equazione
contenente l'incognita l, la quale rappresento con F(l)=0. Sciolta questa equazione ne desumeremo
il valore di l, epperò la risoluzione del problema.
Ora se trovassimo l=-c, quantità negativa, ne

verrebbe $x-a=-\frac{c}{\sqrt{(1+2A\cos\alpha+A^2)}}$, epperò x < a,

cioè il punto D dovrebbe trovarsi nella retta CD'A, anzichè nel prolungamento CD; come si era supposto: epperò il risultato l = -c indica doversi prendere nella retta CBA, la parte CD' = c, in direzione opposta alla CD. Anche questa conseguenza vuol essere notata, e ne vedremo l'importanza in appresso.

Per addestrarci nell'uso delle formole trovate, impiegare l'attenzione dovuta nel modificarle, ed interpretare debitamente i risultamenti, intratteniamoci su qualche applicazione.

Sia dato (fig. 17) un triangolo rettilineo AOB, e si voglia determinare nel suo piano un punto, dal quale condotte ai lati del triangolo medesimo le perpendicolari MP, MQ, MR, la loro somma abbia una grandezza data, che indico con d? Pren46 diamo per assi coordinati le rette OBx, OAy: supponiamo OB=a, OA=b, Ang.xoy=a, siano x, y le coordinate del punto M, per cui

MP=ysena, MQ=xsena. La retta AB sia rappresentata dall' equazione y=Ax+B: siccome deve essere soddisfatta dalle coordinate x=0, y=b del punto A, avremo B=b; e poiche deve sussistere ancora, allorchè si fanno x=a, $\gamma=0$, coordinate del punto B, avremo Aa+B=0, cioè B=b.

 $A = \frac{\sigma}{a}$. La equazione della retta AB, che indicheremo con (p), sarà dunque $y = -\frac{b}{a}x + b$, e la lunghezza della perpendicolare MR condottavi dal

punto M, verrà data dalla formola

$$\frac{(Ax+B-\gamma)sen\alpha}{\sqrt{1+2A\cos\alpha+A^2}} =$$

 $\frac{(Ax+B-\gamma)sen\alpha}{\sqrt{1+2Acos\alpha+A^2}} =$ $=-(b-\gamma-\frac{b}{a}x)sen(p\gamma)=-(b-\gamma)sen(p\gamma)-xsen(p\chi)$

mentre
$$sen(py) = \frac{sen\alpha}{\sqrt{(1+2A\cos\alpha+A^2)}} < 0$$
, e

 $-\frac{b}{a} = \frac{sen(px)}{sen(pr)}$. Fra le coordinate del punto cer-

cato deve adunque aver luogo la relazione

 $\gamma sen \alpha + x sen \alpha - (b - \gamma) sen(p \gamma) - x sen(p x) = d$ per cui quel punto si trova nella retta rappresen-

tata dalla equazione

(6) $\gamma(sen\alpha + sen(p\gamma)) + x(sen\alpha - sen(px)) = d + bsen(p\gamma)$ Indicata questa retta con (r) avremo

$$\frac{sen(rx)}{sen(ry)} = \frac{sen(px) - sen\alpha}{sen(py) + sen\alpha} = \frac{OA - AB}{AB - OB},$$

per cui se nel lato OA prenderemo AG=AB, e nel lato OB si prenderà BN=AB, essendo

$$\frac{sen(rx)}{sen(ry)} = \frac{OG}{ON}, \text{ la retta (r) sarà parallella a } GN,$$

qualunque sia la grandezza data d.

Se i due lati AO, AB del triangolo fossero eguali, epperò $sen\alpha$ —sen(px)=0, quella equazione (6) si ridurrebbe alla seguente

$$y(sen\alpha + sen(p\gamma)) = d + bsen(p\gamma)$$
, cioè $y = \frac{d + bsen(p\gamma)}{sen\alpha + sen(p\gamma)}$

la quale rappresenta una retta parallella alla base OB del triangolo isoscele. Se fingiamo dipiù che il triangolo sia equilatero, siccome sen(py) ==sen(-OAB)=-sen α , ossia sen α +sen $(p\gamma)$ =0, la equazione (6) si riduce a $0.\gamma + 0.x = d - bsen\alpha$. Questo risultamento singolare ne insegna, che quando sia d-bsena=o la equazione (6) è soddisfatta qualunque siano i valori attribuiti ad x, y; cioè da qualunque punto M vengano condotte le perpendicolari MP, MQ, MR la loro somma sarà eguale a d=bsena, altezza del triangolo equilatero. Se poi non è d-bsena=o quella equazione è assurda, ed il problema impossibile. Per altro basta poca attenzione a persuaderci, che prendendo il punto M sempre più lontano dai vertici O, A, B, crescono senza limite le lunghezze delle perpendicolari calate da esso ai lati del triangolo, e che per conseguenza la loro somma può essere di gran lunga superiore al prodotto bsena. Per togliere questa contraddizione apparente si noti, che le

49

lunghezze delle perpendicolari MP, MQ, MR sono rappresentate dalle funzioni ysenz, xsenz, (y-b)sen(py)—xsen(px), fintantochè il punto M trovasi dentro il triangolo OAB; ma sortendo da esso è d'uopo mutare il segno a quelle tra le funzioni nominate, le quali si riferiscono a perpendicolari che cambiano direzione rispetto al lato, cui vengono condotte (Artic. II. Probl. 4.°). Posta adunque la funzione

$$\frac{(\gamma - b)sen(p\gamma) - xsen(px)}{sen\alpha} = P, \frac{d}{sen\alpha} = e, \text{ sarà}$$

- (1) y+x+P=e il luogo dei punti collocati entro il triangolo OAB.
- (2) y+x-P=e quello dei punti posti nello spazio EABN.
- (3) y-x-P=e per i punti dell' angolo FAE.
- (4) $\gamma x + P = e$ per lo spazio FAOx'
- (5) -y-x+P=e per lo spazio x'OK
- (6) $-\gamma + x + P = e$ per lo spazio KOBL
- (7) -y+x-P=e per lo spazio LBN.

Se nella equazione (1) poniamo successivamente x=0, y=0, P=0 si determinano i punti in cui quella retta incontra i lati OA; OB, BA: e siccome per x=0 diventano identiche le equazioni (1), (4); per y=0 lo sono (1), (6); e per P=0 lo sono le (1), (2), perciò se la retta (1) viene rappresentata dalla GDN, la (2) passerà per D, la (4) per G, la (6) per N. I punti in cui la retta (2) incontra gli assi Ox, Oy si hanno ponendo in quella equazione (2) y=0 ed x=0: allorchè y=0

la (2) coincide colla (7), e per x=0 conviene colla (3), dunque indicata la retta (2) con EDC, la (3) passerà per E, la (7) per C. La retta (4) indicata con FGH, incontra in F la (3) sulla retta AB, in G la (1), in H sull'asse Ox la (5). La retta (6), che indico con KLN, conviene nell'asse $\gamma O \gamma'$ colla (5), nell'asse O x colla (1), nella retta AB colla (7): epperò la (3) è rappresentata da EF, la (5) da HK, la (7) da CL. Dunque, nel caso indicato dalla figura, il luogo geometrico dei punti cercati è rappresentato dal perimetro dell'esagono DGHKLCD e nessun punto della retta (3), ossia EF, soddisfa alle condizioni del problema. Lascio che il lettore a proprio esercizio verifichi ognuna delle equazioni (2) (3)..., considerando il punto M in questo o in quello degli spazi cui si riferisce ciascuna equazione, e ponendo mente ai segni che ivi competono alle coordinate.

Passiamo ora a discutere un secondo problema. Siano date nello stesso piano due rette BODx, OFEy ed un punto A (fig. 16). Da questo punto si conducano le rette AED, AFC; poi le diagonali FMD, EMC del quadrilatero CDEF, le quali col loro incontro determinano un punto M. Se condurremo da A un'altra retta AED, le diagonali CM'E', FM'D' determineremo un secondo punto, e nella stessa maniera se ne otterranno infiniti. Essendo x, y le coordinate di uno qualunque di quei punti, fra esse avrà luogo una relazione dipendente dal loro modo di esistere, la qual relazione ora ci proporremo di ottenere. Sia-

50 no $\gamma = AB = b$, x = -OB = -a le equazioni del punto A; $\gamma = MP$, x = OP, le coordinate del punto M, OF=u. Per la simiglianza de'triangoli FOD, MPD si ha $\frac{u}{y} = \frac{OD}{OD - x}$, onde $OD = \frac{ux}{u - y}$. I triangoli simili ABD, EOD ci danno $\frac{EO}{b} = \frac{OD}{a + OD}$; cosicchè, col mezzo del valore trovato di OD, si ha $OE = \frac{bux}{a(u-y)+ux}$. Dai triangoli ABC, FOC, pure simili, si ha $\frac{b}{u} = \frac{a + OC}{OC}$, per cui $OC = \frac{au}{b - u}$, ed essendo simili anche i triangoli EOC, MPC avremo $\frac{EO}{r} = \frac{OC}{OC - x}$, cosicchè $EO = \frac{auy}{au - x(b - u)}$ Eguagliati ormai i due valori di EO, ne segue la equazione $bx\{au-x(b-u)\}=ay\{a(u-y)+ux\}$, $bx\{u(a+x)-bx\}=ay\{u(a+x)-ay\}$. ovvero Raccolti i termini moltiplicati per u, avremo $u(a+x)(ay-bx)=a^2y^2-b^2x^2$; cui può darsi la forma $(a\gamma - bx)\{u(a+x)-(a\gamma + bx)\}=0$ (a). I valori di x, y, i quali rendono soddisfatta questa equazione, dovranno annullare alcuno dei fattori del suo primo membro, cioè o renderanno (b) ay - bx = 0, oppure (c) u(a+x) - (ay + bx) = 0: epperò il luogo geometrico dei punti cercati è rappresentato da due linee rette, di cui (b), (c) sono le equazioni. Considerando la equazione (c) si scorge che essa è soddisfatta da x=0, y=u, coordinate del

punto F; ed anche da $\gamma = b$, x = -a coordinate del punto A, quella equazione (c) rappresenta adunque la retta AFC, nella quale cade il punto M, unicamente quando AED si confonde con AFC. Perciò il luogo dei punti MM'.... è dato dall'altra equazione ay-bx=0, ossia $y=\frac{b}{a}x$: questa rappresenta una retta, la quale passa per O, origine delle coordinate, ed essendo soddisfatta da x=a, y=b, se condurremo AGH parallella ad Ox, e doppia di AG, quella retta passerà per H, epperò sarà rappresentata da OMH. Nella equazione $y = \frac{c}{a}x$ non entra la retta OF = u, per conseguenza essa rappresenta il luogo, in cui si incontrano le diagonali di tutti i quadrilateri, di cui due lati si dirigono secondo le rette Ox, $O\gamma$, e gli altri due concorrono in A. Se in luogo del punto A ne prenderemo un altro qualunque nella retta OA indefinita, supposto che al nuovo punto corrispondano le coordinate x=a', $\gamma=b'$ l'equazione della retta, in cui si incontrano le diagonali dei quadrilateri aventi due lati diretti secondo Ox, Oy, gli altri due concorrenti in A', la equazione di quella retta sarà $y = \frac{b'}{a}x$; e poichè $\frac{b'}{a} = \frac{b}{a}$ essa coincide coll'antecedente: perciò qualunque punto si assuma nella retta OA indefinita, d'onde condurre le rette AFC, AED...., la retta OMH.... sarà il luogo in cui concorrono le diagonali di ogni quadrilatero analogo a CDEF.

52

Il problema antecedente, oltre al manifestarci proprietà curiose, alcuna delle quali non era forse avvertita, ci ha fatto conoscere, che talvolta le equazioni, qual' è la (a), conseguite dalla spontanea intavolazione di un problema, sono complicate da fattori estranei alla questione, dai quali si devono attentamente liberare.

ARTICOLO III.

Della circonferenza.

Supponiamo che nel piano degli assi coordinati esista una periferia circolare, della quale si voglia rappresentare l'esistenza per mezzo dell'algebra. Siccome quella linea si suppone data, si conosceranno alcuni elementi che bastino ad indicarne la grandezza e la posizione. Tali sarebbero, la località del centro e la lunghezza del raggio; ovvero tre punti di quella linea; o tre rette che la toccano, e simili.

Se fosse dato il centro per mezzo delle sue equazioni x=a, $\gamma=b$, ed il raggio che rappresento con r; quando i simboli x, γ si riferiscano ad un punto qualunque di quella linea, avranno fra esse una relazione speciale dipendente dal modo di esistere di quel punto. Per iscoprire tale relazione si rammenti, che il quadrato della retta, la quale unisce detto punto al centro, è data dalla funzione $(x-a)^2+(\gamma-b)^2+2(x-a)(\gamma-b)\cos\alpha$; ma essendo il punto x, γ nella circonferenza, quella retta è eguale al raggio, quindi ne viene

 $(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\alpha=r^2$ (1). Questa equazione, la quale esprime una proprietà caratteristica ed esclusiva alle coordinate x, y dei punti della circonferenza, che si considera, si chiama la equazione della medesima.

Supponiamo, che siano dati tre punti della periferia circolare, ad uno dei quali corrispondano le equazioni x=a, y=b; al secondo x=a', y=b'; al terzo $x=a^{\nu}$, $\gamma=b^{\nu}$: per rappresentare analiticamente quella linea possiamo far uso del seguente processo di calcolo. Immagino in essa un punto qualunque, e considero le rette che lo congiungono al primo ed al secondo dei punti dati: indico al solito con x, y le coordinate di quel punto arbitrario: ci è noto che il seno dell'angolo compreso da queste rette, eguaglia il seno dell'angolo formato dalle rette, le quali uniscono il primo ed il secondo punto col terzo: per cui formate le espressioni di queste funzioni trigonometriche (Artic. I. form. (4)), ed eguagliate fra loro, siamo condotti alla equazione

 $\frac{(a-x)(b'-y)-(b-y)(a'-x)}{\sqrt{\{(a-x)^2+(b-y)^2+2(a-x)(b-y)\cos\alpha\}}\sqrt{\{(a'-x)^2+(b'-y)^2+2(a'-x)(b'-y)\cos\alpha\}}} - (a-a'')(b'-b'')-(b-b'')(a'-a'')}{(a-a'')(a'-a'')}$

\[
\sqrt{\((a-a'')^2+(b-b'')^2+2(a-a'')(b-b'')cosa\)\}.\{(a'-a'')^2+(b'-b'')^2+2(a'-a'')(b'-b'')cosa\}.\}
\]
la quale si semplifica togliendo gli irrazionali e le
frazioni. Per non entrare in calcoli prolissi, indicherò la riduzione allorchè α=90°. Scriviamo quella equazione sotto la forma seguente

$$\frac{pr-qs}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{r^2+s^2}} = \frac{AC-BD}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{C^2+F^2}}, \text{ ove } p=a-x,$$

54

r=b-y, ecc. secondo l'ordine con cui sono scritti, A=a-a'', C=b'-b'',....: da quella equazione si deduce $(A^{2}C^{2}+A^{2}D^{2}+B^{2}C^{2}+B^{2}D^{2})(p^{2}r^{2}-2pqrs+q^{2}s^{2})=\\=(p^{2}r^{2}+p^{2}s^{2}+q^{2}r^{2}+q^{2}s^{2})(A^{2}C^{2}-2ABCD-B^{2}D^{2})$ e quindi $(p^{2}r^{2}+q^{2}s^{2})(AD+BC)^{2}=\\=(p^{2}s^{2}+q^{2}r^{2})(AC-BD)^{2}+2pqrs\{(AD+BC)^{2}+(AC-BD)^{2}\}$ ossia $(pr-qs)^{2}(AD+BC)^{2}=(ps+qr)^{2}(AC-BD)^{2}$, epperò (pr-qs)(AD+BC)=(ps+qr)(AC-BD), equazione priva di irrazionali, contenente soltanto due dimensioni delle coordinate x, y, come la (1), e che facilmente si riduce alla medesima forma.

Potressimo ancora conseguire direttamente la posizione del centro e la grandezza del raggio di quella circonferenza, indicando con x=p, y=q le coordinate di quel punto, con r la lunghezza di quella retta, e cavando le incognite dalle equazioni $(p-a)^2+(q-b)^3+2(p-a)(q-b)\cos\alpha=$

$$= (p-a')^2 + (q-b')^2 + 2(p-a')(q-b')\cos\alpha =$$

$$= (p-a'')^2 + (q-b'')^2 + 2(p-a'')(q-b'')\cos\alpha = r^2$$

le quali indicano, che le rette congiungenti ognuno dei punti dati al centro, devono essere eguali al raggio della circonferenza.

Se fossero date tre rette, cui quella linea debba essere tangente; rappresentate una retta (r)dalla equazione y = Ax + B, la seconda (r') con y = A'x + B', la terza (r'') dalla equazione y = A''x + B''; supposte x = p, y = q le equazioni del centro, R il raggio, questa retta R dovrà eguagliare le lunghezze delle perpendicolari condotte dal centro a ciascuna delle rette date, epperò mediante la (Form. 17 Probl. 4 Artic. II.) conseguire-

mo le seguenti equazioni (a) $\frac{Ap+B-q}{\sqrt{(1+2A\cos\alpha+A^2)}} = \frac{A^n+B^n-q}{\sqrt{(1+2A'\cos\alpha+A^2)}} = \frac{R}{\sin\alpha}$:

dalle quali cavate le incognite p, q, R, ne sostituiremo poi i valori nella equazione

 $(x-p)^2+(y-q)^2+2(x-p)(y-q)\cos\alpha=R^2$, che rappresenta quella linea.

Supponendo che la circonferenza sia data per altri elementi, se ne troverà la equazione indicando col mezzo dell'algebra qualche relazione degli elementi medesimi, la quale sia caratteristica ed esclusiva alla periferia circolare. Noi non insistiamo su tale argomento, che può servire di utile esercizio allo studioso.

Piuttosto portiamo l'attenzione nostra sulle equazioni (a) per sgombrarne una dissicoltà, e raccoglierne qualche conseguenza. Abbiamo notato (Art. II. Prob. 4.) che ognuna delle espressioni (a) può essere asserta da doppio segno, il quale si riserisce all'essere il centro del circolo alla destra anzichè alla sinistra della retta, cui si è condotta la perpendicolare. Avendo riguardo a questi doppi segni si hanno vari sistemi di equazioni, quindi vari centri ed altrettanti raggi. Per determinarli dovressimo scrivere i sistemi di equazioni analoghi all' (a), i quali corrispondono a tutti i cambiamenti di segni possibili, e risolvere ognuno di essi.

Ma possiamo facilitare l'operazione nella seguente maniera. Prendiamo per assi le rette (r')(r''), e le equazioni (a) si ridurranno alle più semplici

 $\frac{(Ap+B-q)sen\alpha}{\sqrt{(1+2Acos\alpha+A^2)}} = p sen\alpha = q sen\alpha = r.$ Come si è veduto nell'Artic. II. Fig. 17. Poniamo

veduto hen Artic. II. Fig. 17. Pomamo $\sqrt{1+2A\cos\alpha+A}$ =lsen α , e sostituiamo un m al coeficiente sen α di q, un n al coeficiente sen α di p. Sciolte allora le equazioni $\frac{Ap+B-q}{l}$ = =qm=pn=r, se porremo nei risultati in luogo delle lettere l, m, n la quantità $\pm sen\alpha$, prendendo ora il segno più, ora il meno in tutti i modi, caveremo immediatamente i valori di p, q, r che corrispondono a tutti i sistemi di equazioni, senza rinnovarne la risoluzione. Questa osservazione semplicissima riesce di sommo vantaggio in molti incontri, epperò vuole essere rimarcata. Da quelle equazioni si hanno $p=\frac{r}{n}$, $q=\frac{r}{m}$, $r\left(\frac{A}{n}-\frac{1}{m}\right)+B=\frac{mnB}{mnl+n-Am}$. Indichiamo ora con

mnl+n-Am r_1, r_2, r_3 i risultati che si ottengono cambiando nel valore di r il segno ad l, ad m, quindi ad n,

e saranno (c)
$$r = \frac{mnB}{-mnl+n-Am}$$

$$r_2 = \frac{-mnB}{-mnl+n+Am}$$
, $r_3 = \frac{-mnB}{-mnl-n-Am}$. Altri cambiamenti di segni riconducono ai medesimi risultati. Ora è facile comprendere, che r è il rag-

gio del circolo inscritto al triangolo compreso dalle rette (r) (r') (r''); che r, corrisponde al circolo, il quale tocca la retta (r) ed i prolungamenti dei lati del triangolo posti nelle rette (r') (r''); e che r, r3 si riferiscono ai circoli tangenti l'uno o l'altro lato posti nelle rette (r'), (r''), ed i prolungamenti degli altri due: i valori di p, q corrispondenti ad r, r,... determineranno poi i centri di quelle circonferenze. Notiamo per ultimo, che essendo m=n, le equazioni (c) equivalgono alle se-

guenti
$$1-A+ml=\frac{mB}{r}$$
, $-1+A+ml=-\frac{mB}{r}$,

$$1+A-ml=-\frac{mB}{r_3}$$
, $-1-A-ml=-\frac{mB}{r_3}$, la somma

delle quali conduce alla relazione nota

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$
 assai elegante : e potremo per

esse equazioni risolvere altri curiosi problemi, sui quali non è opportuno il soffermarci.

Fingiamo che nel piano coordinato esistano, la circonferenza rappresentata dalla equazione

 $(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos x=r^2$, ed una retta (r) la cui equazione sia y=Ax+B; e che si debbano trovare i punti, in cui quelle linee si incontrano? All'uopo, osserviamo che le coordinate di questi punti devono contemporaneamente rendere soddisfatte quelle due equazioni, epperò saranno i valori delle incognite x, y che fornisce la combinazione delle equazioni medesime. Ad age-

volare il calcolo giova porre la equazione della retta sotto la forma seguente

r-b=A(x-a)+(Aa+B-b), cioè r-b=A(x-a)+Cponendo C=Aa+B-b. Se ora nella equazione della circonferenza si sostituisce $\gamma - b = A(x-a) + C$, ne deriva

 $(x-a)^2(1+2A\cos\alpha+A^2)+2(x-a)(A+\cos\alpha)C=r^2-C^2$ e colla risoluzione avremo x-a=

$$= \frac{-C(A+\cos\alpha)\pm\sqrt{\{r^{\alpha}(1+2A\cos\alpha+A^{2})-C^{\alpha}\sin^{2}\alpha\}}}{1+2A\cos\alpha+A^{2}}$$

che dà due valori di x, ascisse dei punti comuni alla retta ed alla circonferenza: sostituendo poi quei valori nella equazione $\gamma - b = A(x-a) + C$, ne caveremo le ordinate corrispondenti alle ascisse medesime. Se $r^2(1+2A\cos\alpha+A^2) < C^2 \sin^2\alpha$, i valori di x-a sono immaginari, e la retta non taglia la circonferenza: se poi $r^2(1+2A\cos\alpha+A')=C^2\sin^2\alpha$, si ha un solo valore di x, cioè la retta incontra la circonferenza in un punto, e però è tangente questa linea: diffatti, essendo in tal caso

$$r = \pm \frac{C.sen\alpha}{\sqrt{(1+2A\cos\alpha+A^2)}} = \pm \frac{(Aa+B-b)sen\alpha}{\sqrt{(1+2A\cos\alpha+A^2)}},$$

questa equazione ne indica, che la perpendicolare condotta dal punto x=a, y=b; centro della circonferenza; alla retta, la cui equazione è $\gamma = Ax + B$, quella perpendicolare dico eguaglia il raggio della circonferenza medesima (Art. II. form. 17).

Nel piano degli assi coordinati esista una seconda circonferenza rappresentata dalla equazione

 $(x-a')^2+(y-b')^2+2(x-a')(y-b')\cos\alpha=R^2$, e si vogliano trovare i punti, in cui quelle linee vengono a segarsi? Siccome le coordinate x, γ dei punti richiesti devono rendere contemporaneamente soddisfatte quelle due equazioni, i valori di esse si avranno risolvendole entrambe rispetto alle incognite x, y in esse contenute. Sottraendo l'una dall'altra equazione ne deriva la seguente

(d) $x\{(a-a')+(b-b')\cos\alpha\}+y\{(b-b')+(a-a')\cos\alpha\}=$ $=\frac{R^2-r^2}{2}+(ab-a'b')\cos\alpha$, la quale merita atten-

zione. Due circonferenze, generalmente parlando, si segano in due punti; dunque la risoluzione delle due equazioni, che si considerano, darà due coppie di valori corrispondenti di x, y, ognuna delle quali coppie rappresenterà uno dei punti comuni alle due circonferenze: se l'una o l'altra coppia di valori verrà sostituita nella equazione (d) essa dovrà esserne soddisfatta, e perciò quella equazione, essendo lineare per rispetto alle coordinate x, γ ; cioè riducibile alla forma $\gamma = Ax + B$ (Artic. II.), rappresenta la linea retta, che unisce i due punti comuni alle due circonferenze. Valga a conferma la seguente osservazione. La retta, la quale congiunge i centri delle circonferenze che si considerano (Artic. II. form. 4) è rappresentata dal-

l'equazione $y = \frac{b'-b}{a'-a}x + \frac{ba'-ab'}{a'-a}$, e siccome la

(d) paragonata colla equazione generale y=Ax+B

fornisce $A = \frac{(a-a')+(b-b')\cos\alpha}{(b-b')+(a-a')\cos\alpha} = \frac{\frac{b'-b}{a'-a}\cos\alpha+1}{\frac{b'-b}{a'-a}+\cos\alpha}$

ossia $1+\frac{b'-b}{a'-a}A+\left(A+\frac{b'-b}{a'-a}\right)\cos\alpha=0$: dun-

que (Artic. II. form. 9) la retta (d) è perpendicolare a quella, che unisce i centri delle circonferenze date; come d'altronde è noto.

Se tratto dalla equazione (d) il valore, per es., dell'incognita y, lo si sostituirà in alcuna delle equazioni che rappresentano le circonferenze, la risultante conterrà l'incognita x al secondo grado della quale fornirà due valori: quindi sostituendo l'uno poi l'altro valore nella equazione (d), conseguiremo le due ordinate corrispondenti a quelle ascisse. Lo sviluppo di questo calcolo, e la considerazione dei varj casi, in cui le radici della equazione in x sono immaginarie, o si riducono a due fra loro eguali, può servire di esercizio allo studioso.

All'oggetto di esercitarci intorno all'argomento, prendiamo a trattare vari problemi.

Dati due punti O ed A (fig. 19) si cerca il luogo geometrico di tutti quei punti M, da cui condotte

le rette MO, MA il loro rapporto geometrico $\frac{MA}{MO}$

eguaglia una quantità data, che indico con m? Per semplicità di calcolo prendiamo per assi ortogonali le rette OAx, Oy, e si supponga OA=c:
essendo M uno dei punti cercati, e per esso

y=MP, x=OP, avremo (Artic. I. Form. 1) $\overline{OM} = x^2 + y^2$, $\overline{AM} = (c-x)^2 + y^2$; da che $\alpha = 90.^\circ$; e siccome deve essere AM = m.OM, ne viene $(c-x)^2 + y^2 = m^2(x^2 + y^2)$. Da questa equazione passiamo successivamente alle seguenti

 $x^{2}(m^{2}-1)+y^{2}(m^{2}-1)+2cx=c^{2}$,

quindi $x^2+2\frac{c}{m^2-1}x+y^2=\frac{c^2}{m^2-1}$, ed anche

$$\left(x+\frac{c}{m^2-1}\right)^3+y^2=\frac{c^2}{m^2-1}+\frac{c^2}{(m^2-1)^2}=\left(\frac{cm}{m^2-1}\right)^2$$

Paragonata questa equazione colla (1) del presente articolo, avvertendo essere $cos\alpha$ =0, ne deriva che la medesima rappresenta una circonferenza, il centro della quale è determinato dalle equazioni

$$y=0, x=-\frac{c}{m^2-1}$$
, ed il raggio $r=\pm \frac{mc}{m^2-1}$, as-

sumendo quel segno che rende il secondo membro positivo. Questo bel teorema è dovuto ad Apollonio di Perga, rinomato per le sue ricerche sulle sezioni coniche. Se m< , fingasi m=seno:

le coordinate del centro saranno $x = \frac{c}{\cos^2 \varphi}$, y = 0

ed il raggio $r = \frac{c.sen\varphi}{cos^2\varphi}$. Per determinare queste ret-

te, si formi l'angolo $BOA = \varphi$, si conducano AB perpendicolare ad AO, e BC perpendicolare ad

OB: cosicchè avremo $OB = \frac{c}{cos\varphi}$, $OC = \frac{OB}{cos\varphi}$,

 $BC = OBtang\varphi = \frac{c.sen\varphi}{cos^2\varphi}$, epperò C sarà il centro,

62

CB il raggio della circonferenza, che rappresenta il luogo geometrico cercato. Se m>1, sarà $\frac{1}{m}<1$, per cui supposto $\frac{1}{m}=sen\varphi$, la costruzione fatta intorno al punto A si dovrà eseguire intorno ad O, invertendosi l'uno nell'altro punto.

Date due circonferenze AD, OE (fig. 20) si cerca il luogo geometrico di quei punti M, da cui condotte le rette tangenti ME, MD, sia $\frac{MD}{ME} = m$; quantità data. Gli assi ortogonali siano OAx, O_{Υ} : supponiamo OA=c, OE=r, AD=R. Siccome $E\overline{M} = O\overline{M}^2 - r^2$, $D\overline{M} = A\overline{M}^2 - R^2$, $O\overline{M} = x^2 + \gamma^2$, $\overline{AM} = (c-x)^2 + \gamma^2$; perchè sia MD = m.ME, dovra essere $(c-x)^2+\gamma^2-R^2=m^2(x^2+\gamma^2-r^2)$: la quale equazione è l'espressione analitica della proprietà, di cui devono essere dotati tutti i punti, che si cercano, ossia le coordinate x, y dei medesimi. Quella equazione può scriversi come segue (e) $x^{2}(1-m^{2})+y^{2}(1-m^{2})-2cx=R^{2}-c^{2}-m^{2}r^{2}$, ovvero $x^3 - 2 \frac{c}{1 - m^2} x - \gamma^2 = \frac{R^2 - c^2 - m^2 r^2}{m^2}$, od an- $\operatorname{che}\left(x - \frac{c}{1 - m^2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2 - c^2 - m^2 r^2}{1 - m^2} + \frac{c^2}{(1 - m^2)^2} =$ $=\frac{(R^2-m^2r^2)(1-m^2)+m^2c^2}{(1-m^2)^2}$. Paragonata questa equazione colla (1) di questo articolo, comprendiamo che rappresenta una circonferenza, della

quale le equazioni del centro sono $x = \frac{c}{1 - m^2}$, γ =0; ed il raggio è $\pm \frac{\sqrt{(R^2-m^2r^2)(1-m^2)+m^2c^3}}{2m^2}$ Se m < 1, fatto $m = sen\varphi$, il centro, posto nell'asse OAx, si determina come nel problema antecedente, essendo $x = \frac{c}{\cos^2 x}$. Il valore del raggio è poi $\frac{1}{\cos^2\varphi} \sqrt{\{(R^2-r^2sen^2\varphi)\cos^2\varphi + c^2sen^2\varphi\}}$, funzione che diventa immaginaria quando $r^2 > \frac{R^2}{sen^2 \omega} + \frac{c^2}{cos^2 \omega}$ Per costruire la espressione del raggio, cioè la funzione $\sqrt{\frac{R^2-r^2sen^2\varphi}{\cos^2\varphi}+\left(\frac{csen\varphi}{\cos^2\varphi}\right)^2}=\sqrt{\frac{R^2-r^2sen^2\varphi}{\cos^2\varphi}+\overline{BC}^2}$ si conduca (fig. 20) BL parallela all'asse Ox, si prenda nella retta BC la parte BN=r, per cui BL=r.senφ, e determinato il punto R sulla BRA cosicche sia LR=R, si tiri RQ parallela all'asse Ox, la quale incontri in Q la retta OB: siccome $\overline{BR}^2 = R^2 - r^2 sen^2 \varphi = \overline{BQ}^2 \cdot cos^2 \varphi$, il raggio verrà rappresentato dalla $\sqrt{(\overline{BQ}^2 + \overline{BC}^2)} = CQ$. Se le tangenti ME, MD devono essere eguali, per cui m=1, la equazione (e) fornisce $x = \frac{c^2 + r^2 - R^2}{c^2}$, la quale rappresenta una linea retta perpendicolare all' asse Ox. Per costruire il valore di x, dal punto F (fig. 20) in cui l'asse

64

Oy incontra la circonferenza OEF, si conduca FG tangente il cerchio ADG; siccome

$$\overline{AF}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OF}^2 = c^2 + r^2$$
, ed

 $\overline{FG} = \overline{AF} - \overline{AG} = c^2 + r^2 - R^2$, tracciata OH eguale e parallela ad FG, presa nel prolungamento di OA, AK=AO, condotta HK, poi HP, cosicchè sia l'Ang.OHP = Ang OKH, perchè i triangoli OHP, OKH sono simili avremo

$$OP: OH = OH: OK$$
; epperd

$$OP = \frac{OH^2}{OK} = \frac{c^2 + r^2 - R^2}{2c} = x$$
. Il valore del raggio;

nel caso presente, si riduce poi a $\pm \frac{c}{o}$, per cui

l'analisi ci rappresenta la linea retta, come una periferia circolare, il cui raggio ha valore infinito. Il luogo geometrico considerato in questo caso particolare fu studiato dai geometri, e la linea retta rappresentata dalla equazione $x = \frac{c^2 + r^2 - R^2}{c^2}$,

è nota sotto il nome di asse radicale.

Se fingiamo r=0, il circolo OEF si riduce al centro O, la tangente ME diventa la retta MO, ed il luogo dei punti M, da cui condotte la retta OM, e la MD tangente il cerchio AGB, si ha il rapporto di queste rette $\frac{MD}{MO}$, è la periferia circolare data dalla equazione

$$\left(x - \frac{c}{1 - m^2}\right)^2 + y = \frac{R^2(1 - m^2) + m^2c^2}{(1 - m^2)^2}$$
: il centro di

essa è il punto C (fig. 20) ed il raggio sarà CQ, quando si faccia BR=R.

Se finalmente supponiamo r=0, R=0, il problema attuale ricade in quello di Apollonio; e, ciò che è rimarcabile, le tre circonferenze, che risolvono questi diversi problemi, sono concentriche fra loro.

Sia dato un segmento di cerchio ANB (fig. 21). Suppongasi inscritto in esso un triangolo rettilineo ABN, poi condotta da ciascun vertice la perpendicolare al lato opposto. Queste rette AMR, BMQ, NMP convengono nello stesso punto M(Artic. I.). Si domanda quale sia il luogo geometrico dei punti M corrispondenti ad ogni triangolo costituito in quel segmento di cerchio? Divisa la retta AB per metà in O, si prendano gli assi coordinati OBx, OCy ortogonali. Sia C il centro del circolo: poniamo OC=b, OA=OB=a, Ang.ANB=N, e siano $MP=\gamma$, OP=x le coordinate del punto M. Siccome

tang.
$$ABR$$
=tang. AMP = $\frac{a+x}{y}$, tang. BAQ = $\frac{a-x}{y}$
e tang($ABR+BAQ$)= $-tangN$ = $\frac{a+x}{y}+\frac{a-x}{y}$ = $\frac{a^2-x^2}{y^2}$ =

$$= \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}, \text{ ne viene } x^2 + y^2 + 2ay.cotingN = a^2,$$
ossia $x^2 + (y + acotN)^2 = a^2(1 + cot^2N) = \left(\frac{a}{senN}\right)^2.$
Confrontata questa equazione colla (1) vediamo

Confrontata questa equazione colla (1) vediamo,

che essa rappresenta una circonferenza, al cui centro corrispondono x=0, y=-acotN, ed il raggio è espresso da $\frac{a}{senN}$; cioè, il centro è nel prolungamento dell' asse Oy, ad una distanza dall'origine OC=a.cotN=OB.cot.OCB=OC, ed il raggio è $\frac{a}{senN}=\frac{OB}{senOCB}=CB$: epperò il luogo geometrico dei punti M è una circonferenza eguale ad $\triangle NB$ descritta intorno al centro C.

Prendiamo a trattare un'ultima questione, onde cavarne qualche avvertenza importante. Il punto M· sia il centro del circolo inscritto nel triangolo ANB. Per determinare il luogo geometrico di quei centri notiamo, che in tal caso saranno

 $\frac{y}{a+x} = tang^{1/2}BAN, \quad \frac{y}{a-x} = tang^{1/2}ABN,$ $tang^{1/2}(BAN+ABN) = \cot^{1/2}N, \quad \text{quindi } \cot^{1/2}N =$ $\frac{2ay}{a^2-x^2-y^2}. \quad \text{Da questa equazione si desume}$ $x^2+(y+a.tang^{1/2}N)^2 = \left(\frac{a}{\cos^{1/2}N}\right)^2, \quad \text{Ia quale rappresenta una periferia circolare, il cui centro è nel prolungamento dell' asse <math>Oy$ ad una distanza dall' origine che è $a.tang^{1/2}N = OB.tangOBD = OD$, il raggio è $\frac{a}{\cos^{1/2}N} = \frac{OB}{\cos OBD} = DB$: dunque il luogo dei punti M è la circonferenza, di cui D è il centro, DB il raggio.

Io già ho rimarcate queste ed altre proprietà

curiose in una memoria pubblicata l'anno 1826 nel Giornale di Fisica ecc., di Pavia.

Riprendiamo l'ultima questione seguendo un'analisi più conforme al metodo delle coordinate. Siano x=p, x=q le equazioni del punto N, il raggio CN=r, per cui sarà $p^2+(q-b)^2=r^2$. La retta AN, che passa per i punti A ed N, verrà rappresentata da $\gamma=\frac{q}{p+a}(x+a)$ (Artic. II. Form.

4), e la BN lo sarà da $y = \frac{q}{p-a}(x-a)$, che si cava dalla antecedente cambiando a in -a. La lunghezza della perpendicolare MR condotta dal punto delle coordinate OP = x, MP = y alla retta BN, sarà così espressa,

$$MR = \frac{\frac{q(x-a)}{p-a} - y}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{q}{p-a}\right)^2\right]}} = \frac{q(x-a) - y(p-a)}{\sqrt{(q^2 + (p-a)^2)}}$$
 (Artic.)

II. Form. 17), la perpendicolare MQ alla retta AN sarà $MQ = \frac{q(x+a) - \gamma(p+a)}{\sqrt{(q^2 + (p+a)^2)}}$. La equazione $MR = \gamma$ fornisce la seguente

$$q\{y^2-(x-a)^2\}+2py(x-a)-2ay(x-a)=0$$
;
e la equazione $MQ=y$ equivale all'altra

$$q\{y^2-(x+a)^2\}+2py(x+a)+2ay(x+a)=0.$$
 Cavate da queste equazioni le coordinate p, q ne

vengono
$$q = \frac{2y(x^2-a^2)}{x^2+y^2-a^2}$$
, $p = \frac{x(x^2-a^2-y^2)}{x^2+y^2-a^2}$, e so-

stituite poi nella equazione $p^2+(q-b)^2=r^2$ si ha (f) $x^2(x^2+\gamma^2-a^2)^2+\{2\gamma(x^2-a^2)-b(x^2+\gamma^2-a^2)\}^2=r^2(x^2+\gamma^2-a^2)^2$ equazione di gran lunga più composta di quella ottenuta antecedentemente. Per iscoprire la differenza di tali risultamenti, si ponga $x^2-a^2=t^2$, e

siccome $a^2+b^2=r^3$, a quella equazione potremo dare la forma seguente

 $4a^2t^2\gamma^2 + 4b\gamma(t^2 + \gamma^2)t^2 = 4\gamma^2t^4 + t^2(t^2 - \gamma^2)^2$, ossia $(t^2+\gamma^2)^2-4b\gamma(t^2+\gamma^2)-4a^2\gamma^2=0$. Se quest'ultima equazione si risolve rispetto a $t^2+\gamma^2$, si hanno

$$t^2+y^2=2y(b\pm\sqrt{a^2+b^2})=2ay\frac{\cos N\pm 1}{\sin N}$$
, epperò la

equazione (f) si decompone nelle seguenti

$$x^{2} + y^{2} + 2ay \cdot tang^{1}/N - a^{2} = 0$$
,
 $x^{2} + y^{2} - 2ay \cdot cot^{1}/N - a^{2} = 0$,

delle quali la prima rappresenta la periferia circolare ottenuta col primo metodo di risoluzione, l'altra indica una seconda circonferenza, che ha il centro in D', estremo del diametro DCD', il raggio eguale alla corda D'A, ed è il luogo geometrico dei centri de'circoli inscritti ai triangoli costituiti nel segmento ADB.

L'attuale problema ci ha offerto un secondo esempio di una equazione complessa, i fattori della quale eguagliati a zero separatamente, rappresentano due linee: una di esse indica la vera risoluzione del problema proposto, l'altra si riferisce ad una questione affine: e quando, elevandole alla seconda potenza, si fa sparire il segno che precede l'irrazionale $\sqrt{a^2+b^2}$, si toglie da esse quanto costituisce il carattere analitico, che distingue la prima dalla seconda equazione, esse si compenetrano fra loro e danno origine ad una terza equazione, la quale rappresenta nello stesso tempo e questa e quella, da cui ha avuto origine.

ARTICOLO IV.

Intorno varie specie di linee, ed alcune applicazioni.

Una retta EMC (fig. 18.2) di data lunghezza si muova così che il punto E scorra lungo l'asse O_{γ} , ed il punto C lungo O_{α} . Un punto determinato M di quella retta descriverà una linea, della quale si cerca la equazione? Siano EM=a, CM=b; $MP = \gamma$, OP = x le coordinate del punto M_i α l' angolo degli assi coordinati. Avremo

$$EM^{2} = a^{2} = (EO - \gamma)^{2} + x^{2} + 2(EO - \gamma)x\cos\alpha,$$

$$\frac{EO}{MP} = \frac{a+b}{b} \text{ ossia } EO = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\gamma, \text{ e quindi}$$

$$a^{2} = \frac{a^{2}}{b^{2}}\gamma^{2} + x^{2} + 2\frac{a}{b}\gamma x\cos\alpha;$$

che è la equazione cercata: la quale non esprime nè una retta, nè il sistema di due rette, nè molto meno una circonferenza.

Si cerca il luogo geometrico dei vertici dei triangoli, che hanno una base data OA=c (fig. 10) e l'angolo AOM doppio di OMA? Siano OAx, Oy gli assi ortogonali, M uno dei punti cercati, per il quale $MP = \gamma$, OP = x. Siccome $tangOMP = \frac{x}{\gamma}$, $tangAMP = \frac{c - x}{\gamma}$, epperò $tangOMA = \frac{\frac{x}{\gamma} + \frac{c - x}{\gamma}}{\frac{x(c - x)}{\gamma^2}} = \frac{c\gamma}{\gamma^2 + x^2 - cx}$

e dippiù $tangMOP = \frac{y}{x}$; affinchè sia angAOM = 2ang.OMA, ossia tangAOM = tang2OMA, attesa la nota formola $tang2\phi = \frac{2tang\phi}{1-tang^2\phi}$ avremo la equazione $(x^2+y^2-cx)^2-2cx(x^2+y^2-cx)=c^2y^2$, cui possiamo dare la forma più semplice

$$(x^2 + y^2 - 2cx)^2 = c^2(x^2 + y^2).$$

Equazione del quarto grado rispetto alle incognite x, y; da cui in appresso caveremo qualche utile conseguenza.

Si vuole il luogo dei punti M, per i quali $MO.MA = m^2$, simbolo di quantità data? Avremo

$$(x^2 + \gamma^2)(\gamma^2 + (x-c)^2) = m^4.$$

Sia data la retta indefinita xOx' (fig. 22.) ed il punto A: supponiamo condotta per questo punto una retta qualunque AB ad incontrare l'asse xOx' in B, la quale si prolunghi oltre il punto B di una parte BM di lunghezza data. Variando la retta AB, si avranno infiniti punti M, i quali determinano una linea, di cui si cerca la equazione? Gli assi siano Ox, e la perpendicolare ad essa OAy. Supponiamo OA=a, BM=b; MP=y, OP=x.

Essendo
$$BM^2 = b^2 = \gamma^2 + BP^2$$
, $\frac{MP}{BP} = \frac{OA}{OB}$, cioè $\frac{\gamma}{BP} = \frac{a}{x - BP}$; ne segue $BP = \frac{x\gamma}{a + \gamma}$, e $b^2 = \gamma^2 + \frac{x^2\gamma^2}{(a + \gamma)^2}$; dunque la equazione $(b^2 - \gamma^2) (a + \gamma)^2 = x^2\gamma^2$

rappresenta il luogo geometrico cercato, noto agli Architetti sotto il nome di Concoide di Nicomede.

La retta OcM (fig. 23.) partita dalla posizione Ox, ruoti intorno al punto M di moto uniforme, cioè immaginata la circonferenza acb, descritta con raggio Oa=1, il punto c percorra archi eguali in tempi eguali. Contemporaneamente un punto M scorra lungo la retta stessa OM, allontanandosi da O, pure di moto uniforme. Quel punto mobile M descrive intorno al centro O una linea, che è la spirale di Conone, Per rappresentarla per mezzo dell' algebra, assumo per assi coordinati ortogonali le rette Oax ed Oy. Suppongo, che OM abbia descritto intorno al punto O un numero n di rivoluzioni più l'angolo MOP, per cui il punto c avrà percorse n circonferenze intere più l'arco ac, cioè lo spazio angolare $2n\pi + ac$: nello stesso tempo il punto M siasi recato da O in M. Siano $\gamma = MP$, x = OP le coordinate di quel punto; per cui $OM = \sqrt{x^2 + \gamma^2}$: essendo $2n\pi + ac$, $\sqrt{x^2 + \gamma^2}$ due spazii percorsi nello stesso tempo con moti uniformi, essi avranno un rapporto geometrico eguale a quello delle loro velocità costanti; per cui

indicato con m l'esponente di questa ragione, ne verrà $2n\pi + ac = m \cdot \sqrt{x^2 + y}$. Se la retta cd è perpendicolare ad Oa, per cui ac = ang.sen.cd, essendo $\frac{cd}{Oc} = \frac{MP}{OM}$, ossia $cd = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, avremo $ac = ang.sen = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, e la equazione cercata sarà $2n\pi + ang.sen = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$; la quale contiene una trascendente trigonometrica delle coordinate.

Supponiamo (fig. 24.) che un cerchio MCE si muova rotando intorno al suo centro C da Everso M, appoggiandosi ad una linea retta AOB, e non strisciando lungo di questa. Un punto M fissato ad arbitrio nella sua circonferenza descriverà una linea, che è la famosa Cicloide di Giovanni Bernoulli. Per rappresentare analiticamente questa curva supponiamo, che il punto M si trovasse in A, sulla retta $OA\gamma$, e che dopo un intero giro della circonferenza ECM, giunga in B sulla medesima retta: Dal mezzo O di AB si conduca ad essa la perpendicolare Ox. Sia il raggio CM = CE = r, le coordinate $MP = \gamma$, OP = x, l'angolo $ECM = \omega$. Per la natura del movimento della periferia circolare ECM, dovrà essere l'arco EM eguale alla retta AE, ossia $AE=r.\omega$, la retta $AO=\frac{1}{4}AOB=$ $r.\pi$; essendo π il rapporto della circonferenza al proprio diametro; e siccome MD=r.senw, OP= $x=DE=EC-CD=r-r\cos\omega$, $\gamma=MP=DP+$ $MD = EO + r.sen\omega$, $EO = AO - AE = r\pi - r\omega$, quindi ne vengono le equazioni

 $x = r(1 - \cos \omega), \quad y = r(\pi - \omega) + r \sin \omega;$ le quali sono molto utili nello studio delle proprietà della cicloide. Dalla equazione $x = r(1 - \cos \omega)$

si desume $cos\omega = \frac{r-x}{r}$, $sen\omega = \frac{1}{r}\sqrt{2rx-x^2}$, quindi

$$\omega = ang.cos \frac{r-x}{r}$$
, epperò

$$\gamma = r\pi - r \cdot ang \cdot cos \frac{r - x}{r} + \sqrt{2rx - x^2}$$
,

che è la equazione cercata.

Il cerchio MCB (fig. 25.) si muova toccando la circonferenza ABF; senza strisciare lungo la medesima; e rotando intorno al proprio centro C, da B verso M: un punto M preso ad arbitrio nella circonferenza mobile, descriverà una linea di cui si cerca la equazione? All' origine del moto, supponiamo che M si trovasse in A. Supposto Bil punto dell'attuale contatto tra le circonferenze MB ed ABF, per la legge del movimento supposto sarà l'arco. AB=arc. BM. Essendo O il centro del circolo ABF, si prendano per assi coordinati ortogonali le rette $O_A x$, O_Y : poniamo $O_A = R$, $CM \equiv r$, ang. $AOC \equiv \omega$; e per il punto M siano $\gamma = MP$, x = OP. Avremo $arc.AB = R\omega = arc.MB =$ r.ang.BCM, per cui ang.BCM = $\frac{R\omega}{a}$. Se MD, PGE sono perpendicolari ad OEDC, MG a PE, avremo $CD = r\cos\frac{R\omega}{r}$, $MD = r\sin\frac{R\omega}{r}$, $OE = x\cos\omega$, $DE = MG = y\sin\omega$, $PE = x\sin\omega$, $PG = y\cos\omega$, e quindi ne vengono le due equazioni $OD = OE + DE = x\cos\omega + y\sin\omega = OC - CD = R + r - r\cos\frac{R\omega}{r}$ $MD = PE - PG = x\sin\omega - y.\cos\omega = r.\sin\frac{R\omega}{r}$.

Da queste si cavano

(a)
$$x = (R+r)\cos\omega - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\omega\right)$$

 $\gamma = (R+r)\sin\omega - r\sin\left(\frac{R+r}{r}\omega\right)$,

le quali danno le coordinate di ogni punto della curva cercata per mezzo dell'angolo ω . Ma per ottenere una equazione fra le sole coordinate x, y; siccome da quelle formole (a) si desumono

(b)
$$\cos \frac{\hat{R}}{r} = \frac{(R+r)^2 + r^2 - x^2 - y^2}{2r(R+r)},$$

 $x \cos \omega + y \cos \omega = \frac{x^2 + y^2 + (R+r)^2 - r^2}{2(R+r)},$

dovremo da esse eliminare l'angolo ω , e saremo per tal modo contotti ad una equazione trascendente, ed alquanto complicata. Se però il rapporto $\frac{R}{r}$ è un numero intero, che chiamo m, sostituendo nella equazione nota

 $cosm\omega = (2cos\omega)^m - m(2cos\omega)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2cos\omega)^{m-4} ...$ il valore di $cosm\omega$ fornito dalla prima equazione (b)

e quello di $\cos \omega$, che facilmente si cava dalla seconda, saremo condotti ad una equazione finale algebraica rispetto alle coordinate x, y, la quale rappresenterà la linea, di cui qui ci siamo occupati.

La geometria analitica ha un pregio sommo, di cui superiormente abbiamo indicati diversi esempii; ma che ci è d'uopo mettere in più chiara luce. Il geometra può per essa figurarsi in un piano quali e quante estensioni abbisognano, di qualunque grandezza, situate in qualsivoglia maniera, e senza il soccorso di alcuna figura, rappresentarle colle loro equazioni, e per esse intraprendere la risoluzione dei problemi che riguardano le estensioni medesime, ed altre che da loro dipendono. Eccone alcuni facili esempi.

Essendo dati due triangoli in uno stesso piano, si debba trovare una retta, la quale divida l'area dell'uno e dell'altro secondo ragioni geometriche date? Due lati del primo triangolo siano rappresentati dalle equazioni y=Ax+B, y=A'x+B': la retta segante incognita lo sia da y=A''x+B''. Si formi l'area del triangolo compreso da queste rette (Artic. 2. form. (13)) e si eguagli quella funzione al prodotto dell'area del primo triangolo dato, per il coesiciente della ragione stabilita; e si avrà una equazione fra le incognite A'', B''. Una seconda equazione si conseguirà considerando analogamente il secondo triangolo, e per tal modo il problema sarà determinato.

Si voglia trovare una circonferenza, la quale tocchi due rette date, e passi per un dato punto? Siano x=a, y=b le equazioni del punto; y=Ax+B, y=A'x+B' quellè delle rette date; $(x-\alpha)^2+(y-6)^2=r^2$ rappresenti la circonferenza, che si cerca, riferita ad assi ortogonali. Affinchè le perpendicolari condotte dal centro $x=\alpha$, y=6 ad ognuna delle rette date siano eguali al raggio r, dovranno essere (Ar-

tic. 2. form. 17)
$$\frac{A\alpha+B-6}{\sqrt{(1+A^2)}} = \frac{A'\alpha+B'-6}{\sqrt{(1+A'^2)}} = r$$
: e

perchè la circonferenza passi per il punto dato sarà $(a-\alpha)^2 + (b-\epsilon)^2 = r^2$, ed avremo così tre equazioni fra le incognite α , ϵ ed ϵ .

Per determinare un cerchio, il quale sia tangente tre cerchi dati; indico con $x=a_1$, $y=b_1$ le equazioni del centro, con r_1 il raggio di un cerchio dato; con $x=a_1$, $y=b_2$ il centro, con r_2 il raggio del secondo cerchio; con $x=a_3$, $y=b_3$ ed r_3 il centro ed il raggio del terzo. Siano x, y le coordinate del centro della periferia cercata, z il suo raggio, e supposti gli assi ortogonali, dovranno essere $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(z+r_1)^2$,

 $(x-a_s)^2+(y-b_s)^2=(z+r_s)^2$, $(x-a_3)^3+(y-b_2)^3=(z+r_3)^3$ le quali equazioni determinano i valori delle incognite x, y, z.

Date due linee rette si cerchi quella retta la quale divide in due parti eguali l'angolo compreso dalle date? Siano y = Ax + B, y = A'x + B' le equazioni di queste rette, y = ax + b rappresenti la retta cercata. Le coordinate del punto comune alle due prime (Artic. 2. form. 6) dovendo soddisfare la terza equazione avremo

$$AB' - A'B = a(B' - B) + b(A - A')$$

e perchè gli angoli compresi dalla retta cercata con ognuna delle date siano eguali (Artic. 2. form. 7) dovrà essere

$$\frac{a-A}{1+aA+(a+A)sen\alpha} = \frac{a-A'}{1+aA'+(a+A')sen\alpha}$$

per cui avendosi due equazioni fra le incognite a, b, determineremo la retta, che si cerca.

Si debba condurre per un dato punto una retta, la quale seghi una circonferenza data, così che le parti di quella retta esterna ed interna alla circonferenza abbiano fra loro un dato rapporto geometrico? Sia $x^2 + y^2 = r^2$ l' equazione della circonferenza; y = 0, x = a quelle del punto; y = A(x-a) l' equazione della retta, che si cerca. Le ascisse dei punti comuni a queste linee sono le radici della equazione

 $x^2+A^2(x-a)^2=x^3(1+A^2)-2xA^2a+A^2a^2=r^2$, per cui indicate le medesime con x', x'' avremo $2aA^2$, $A^2a^2-r^2$

$$x' + x'' = \frac{2aA^2}{1+A^2}$$
, $x'x'' = \frac{A^2a^2 - r^2}{1+A^2}$: e siccome

per le condizioni del problema la frazione $\frac{x'-x''}{a-x'}$

deve avere un dato valore, che rappresento con m, avremo x'(1+m)-x''=am,

$$x' = a \frac{(m+2)A^2 + m}{(m+2)(1+A^2)}, \quad x'' = a \frac{(m+2)A^2 - m}{(m+2)(1+A^2)},$$
per cui
$$x'x'' = \frac{A^2a^2 - r^2}{1+A^2} = a^2 \frac{(m+2)^2A^4 - m^2}{(m+2)^2(1+A^2)^2}$$

e finalmente
$$A^2 = \frac{r^2(m+2)^2 - a^2m^2}{(m+2)^2(a^2-r^2)}$$
.

Giova grandemente agli studiosi l'esercizio intorno simili problemi, procurando di cavarne i valori delle incognite, costruirli, considerare tutte le varie risoluzioni che generalmente si incontrano, esaminando quali si riferiscano al problema proposto, quali a questioni puramente affini, in che consista l'affinità; e studiare i rapporti di queste varie risoluzioni, i quali sono il più delle volte degni di molta attenzione.

ARTICOLO V.

Trasformazione delle coordinate, e classificazione delle linee.

La equazione fra coordinate rettilinee, che rappresenta la natura e la posizione di una curva, può essere algebraica di tale o tal altro ordine, trascendente di questa o di quella specie. I molti esempi addotti superiormente ne conducono a tale conseguenza. Ma queste proprietà delle equazioni dipendono dalla natura delle linee da esse rappresentate; ovvero dalla posizione degli assi coordinati, o dall'una e dall'altra causa insieme? Onde togliere questo dubbio, supponiamo che la equazione $F(x, \gamma) = 0$ fra le coordinate x ed r, rappresenti una linea riferita agli assi coordinati Ox, Oy (fig. 26). Preso nel piano xOy qualunque punto O', e di là condotte due rette qualsivogliane O'x', O'y'; proponiamoci di desumere dalla equazione $F(x, \gamma)=0$, quella che rappresenta

la stessa linea riportata agli assi coordinati O'x', O'y'. Siccome queste rette si suppongono date, indichiamo con y = O'A = b, x = OA = a le equazioni della nuova origine O', e rappresentiamo con x'.x, x'y, y'x, y'y gli angoli compresi fra Ox, Ox'; Oy, O'x'; Ox, O'y'; Oy, O'y'; ed Angxy = a. Sia M un punto della linea data, le coordinate primitive di esso MP = y, OP = x; e le coordinate relative ai nuovi assi siano MP' = y', O'P' = x'. Si conducano O'H, P'Q perpendicolari ad MQPH; P'R perpendicolare ad O'RH, e sarà O'H = AP.cos(AP.O'H) = (x-a)sen = O'R + PQ = O'P.sen(x'y) + M'P.sen(y'y')

epperò (1)
$$x=a+\frac{x'sen(x'y)+y'sen(y'y)}{sena}$$

e con analoga costruzione troveremo

$$y = b + \frac{x' sen(x'x) + y' sen(y'x)}{sen\alpha}$$

Posti questi valori di x ed y nella equazione F(x,y)=0 la risultante fra le coordinate x', y' rappresenterà la medesima linea riferita al nuovo sistema di assi coordinati. Dunque, siccome x ed y sono funzioni lineari di x', y', se la equazione F(x, y)=0 è algebraica rispetto a quelle coordinate, lo sarà ancora in riguardo a queste e dell'ordine medesimo: se poi quella equazione involge qualche funzione trascendente di x, y, la stessa trascendente formata con x', y' si troverà ancora nella equazione trasformata. Dunque la natura della funzione F(x, y)=0 dipende da quella della linea che essa rappresenta, e potremo a buon diritto classificare

le linee, dietro le loro equazioni, chiamando linee algebraiche quelle, le di cui equazioni, fra coordinate rettilinee, sono algebraiche per rispetto alle medesime, e denominando linee trascendenti le altre, le equazioni delle quali involgono una o più funzioni trascendenti delle coordinate. Le linee algebraiche si distingueranno in ordini, chiamandosi del primo ordine quelle, la cui equazione è lineare per rispetto alle coordinate rettilinee; del second' ordine le altre, le equazioni delle quali contengono due dimensioni delle coordinate; del terz'ordine alloraquando si trovano tre dimensioni, e così successivamente.

Il riportare un punto, una linea da uno od altro sistema di assi coordinati, si chiama trasformare le coordinate: e ciò si ottiene mediante le formole (1) trovate superiormente.

Se si trasporta unicamente l'origine, senza cambiare la direzione degli assi, essendo gli angoli xx'=yy'=0, $xy'=yx'=\alpha$, le formole (1) si riducono alle seguenti (2) x=a+x', y=b+y'.

Se i due assi primitivi Ox, Oy sono ortogonali, siccome $sen\alpha=1$, sen(x'y)=cos(x'x), sen(y'y)=cos(y'x), ecc., le equazioni di trasformazione saranno

(3)
$$x = a + x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x),$$
$$r = b + x'\cos(x'r) + y'\cos(y'r).$$

In certe ricerche speciali riescono utilissime altre coordinate: così nell'astronomia suole farsi uso grandissimo delle coordinate polari; cioè si immagina una retta Ox (fig. 23), in essa un pun-

 $x = \frac{r}{sen\alpha} sen(\alpha - \omega)$, $y = \frac{r}{sen\alpha} sen\omega$, fra le coordinate rettilinee e polari; cosicchè ogniqualvolta si avrà la equazione di una linea fra le coordinate x, y, colla sostituzione di quei valori, se ne dedurrà immediatamente quella fra le coordinate polari ω ed r. Se poi l'ang. $\alpha = 90^\circ$, le equazioni di trasformazione saranno $\gamma = rsen\omega$, $x = rcos\omega$.

Nel seguito dell'opera ci si offrirà occasione per indicare altri generi di coordinate, ed il partito, che da quelle possiamo ritrarre in circostanze particolari. eromagnist in the last

A STATE OF THE STA

PARTE SECONDA

ANALISI DELLE CURVE ALGEBRAICHE.

Allorache una questione ci ha condotti a conseguire la equazione di una o più linee, che la risolvono, bisogna descriverle, e scoprire le proprietà, che si riferiscono alla questione medesima. Se la linea è retta basta determinarne due punti; se è una periferia circolare si trovano il centro ed il raggio, nel modo che già abbiamo indicato. Intorno poi alle proprietà di tali estensioni ne instruisce la matematica elementare. Ma se la linea è di natura più complicata è d'uopo ricorrere ad altri mezzi, che sono propri alla geometria analitica. Bisogna dapprima semplificare la equazione quanto è possibile con una scelta opportuna di assi coordinati; e con grande vantaggio collocheremo l'origine in certi punti, che si chiamano centri della curva, alloraquando esistono; e sarà utile il prendere per assi certe rette che si dicono diametri, triametri, quadriametri ecc. Importerà pure grandemente il conoscere, se la linea abbia rami, che si estendono all'infinito, o se tutta si raccolga in uno spazio limitato, e giungeremo, per tale

maniera a dissegnare la linea, e scoprire tutte le particolarità, che presenta ovunque nel suo andamento.

Prenderemo adunque a discorrere intorno ai centri delle linee, ai loro diametri, triametri...; ai rami infiniti; alle tangenti, ecc.; quindi dichiareremo con varj esempj, come in ogni caso si pervenga a delineare una curva in tutta la sua estensione.

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari.

Si rappresenti col simbolo E(x, y) un polinomio algebraico razionale intero per rispetto a due quantità x ed y. Se queste quantità indicano le coordinate rettilinee di un punto appartenente ad una linea algebraica, la equazione di questa, ordinata rispetto alle coordinate; cioè liberata dagli irrazionali e dalle frazioni, che involgono le coordinate medesime; assumerà la forma E(x, y)=0.

Si indichino con

(a) a_0 , a_1 ; b_0 , b_1 , b_2 ; c_0 , c_1 , c_2 , c_3 ; delle quantità costanti; si suppongano

(6)
$$a_0x + a_1 = P_1$$
; $b_0x^2 + b_1x + b_2 = P_3$; $c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = P_3$,...

sia m il grado rispetto ad x, y del polinomio E(x, y), ed ordinando questo polinomio in riguardo alla y, il risultato avrà la forma che segue

ove P_1 , coeficiente di y^{m-1} , non potrà contenere potenze di x superiori alla prima, P_1 non conterrà potenze maggiori della seconda, ecc.; P_m potrà essere al più del grado m per rispetto all'ascissa x. La somma dei termini di tutti i polinom; P_1 , P_2 , P_3 , ... P_m insieme, eguaglierà la somma della progressione aritmetica $2+3+4+\cdots+(m-1)$, epperò il numero dei termini della equazione E(x, y)=o sarà al più espresso da

 $1+2+3+4...+(m+1)=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$. Siccome

poi il coeficiente del primo termine y^m è l'unità, così il numero dei coeficienti (α), cioè dei così detti parametri della equazione, sarà

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$
 $-1 = \frac{m(m+3)}{2}$.

Da ciò si rileva, che se nel piano di due assi coordinati vi fossero più punti in numero eguale ad $\frac{m(m+3)}{2}$, potremo condurre per essi una sola linea algebraica dell' ordine (m). Poichè, indicata con E(x,y)=0 la equazione della linea, se ad x,y sostituiremo i valori, che corrispondono ad uno dei punti dati, quella equazione dovrà essere verificata: sostituendo ad x, y i valori che corrispondono ad un secondo punto, ad un terzo,...; si avranno $\frac{m(m+3)}{2}$ equazioni fra altrettante inco-

gnite lineari a_0 , a_i ; b_0 , b_1 , b_2; mediante le quali equazioni potremo determinare i valori di queste quantità, per cui verrà ad essere compiutamente data la funzione E(x, y), e quindi la linea che passa per ognuno dei punti dati.

La equazione $E(x, \gamma)$ può presentarsi sotto un' altra forma: notiamo, che si trovano in essa più termini, ognuno dei quali ha la dimensione m per rispetto alle coordinate x, γ ; il loro aggregato forma il polinomio seguente $\gamma^m + a_0 x \gamma^{m-1} + \cdots$ $+b_1x^2\gamma^{m-2}+c_0x^3\gamma^{m-3}+\dots$ il di cui ultimo termine conterrà x^m , ed il numero dei termini è evidentemente eguale ad m+1. Nella stessa equazione vi sono più termini della dimensione m-1, l'aggregato dei quali si è $a_1 \gamma^{m-1} + b_1 x \gamma^{m-2} + c_1 x^2 \gamma^{m-3} + \dots$ ove l'ultimo conterrà x^{m-1} , ed il loro numero è eguale ad m. Vi sono poi nella stessa equazione m-1 termini della dimensione m-2, altri m-2della dimensione m-3, ecc. ed un unico termine che non contiene x, y; cioè della dimensione zero. Rappresentato col simbolo F_m il primo polinomio omogeneo rispetto alle coordinate x, y, e del grado m; con F_{m-1} il polinomio omogeneo del grado m-1; con F_{m-2} quello del grado m-2,..., con $F_{\rm o}$ quello del grado zero, la equazione della linea algebraica assumerà la forma seguente

(d) $E(x, y) = F_m + F_{m-1} + F_{m-2} + F_{m-3} + \dots + F_n + \dots$ $\dots + F_2 + F_1 + F_0 = 0$

Sia $H=A_0\gamma^n+A_1\gamma^{n-1}x+A_2\gamma^{n-2}x^2+A_3\gamma^{n-3}x^3+...$+ $A_{n-1}x\gamma^{n-1}+A_nx^n$ un polinomio omogeneo rispetto alle quantità x, y, e dell' ordine n. Se di questo polinomio prenderemo la derivata rispetto ad γ , il risultato sarà

 $nA_0\gamma^{n-1}+(n-1)A_1\gamma^{n-2}x+(n-2)A_2\gamma^{n-3}x^2+...+A_{n-1}x^{n-1}$ che è un polinomio omogeneo rispetto ad x, γ , e del grado n-1. La derivata di H presa rispetto ad x sarà $A_1 \gamma^{n-1} + 2A_1 \gamma^{n-2} x + 3A_3 \gamma^{n-3} x^2 + \dots$+ $(n-1)A_{n-1}\gamma x^{n-2} + nA_n x^{n-1}$, cioè ancora un polinomio omogeneo del grado n-1. Se l'uno o l'altro di questi risultati si derivasse nuovamente rispetto ad x, ovvero ad y, si avranno ancora dei polinomi omogenei del grado n-2: e ripetuta tale operazione successivamente un numero di volte che indico con r < n, il risultato sarà un polinomio omogeneo del grado n-r. Siccome ne abbisognerà più volte in appresso di considerare e rappresentare tali derivate, conveniamo di indicare d'ora in avanti colla scrittura $H_{r,s}$ la derivata del polinomio H presa r volte rispetto alla variabile x, s volte rispetto ad γ , e divisa per il prodotto 1.2.3. $r \times 1.2...s$. Il simbolo $H_{r,0}$ indicherà la derivata di H presa r volte rispetto ad x, zero volte rispetto ad γ , e divisa per 1.2.3...r; e con $H_{0,s}$ si indicherà la derivata di H presa s volte rispetto ad γ , zero volte rispetto ad x, e divisa per 1.2.3...s.

La equazione (3) ne indica, che se dal polinomio E(x, y) si caverà la funzione E_r , s, questa sarà del grado m-r-s, da che tale è il grado, a cui si riduce il polinomio F_m della dimensione maggiore.

Fingiamo, che nel polinomio $E(x, \gamma)$ si debba-

no sostituire x=a+t, y=b+u, sviluppare tutte le potenze ed i prodotti di quei binomi, quindi ordinare il risultato per rispetto alle potenze di t e di u. Tali operazioni si potranno eseguire coll'ordine seguente. Poniamo dapprima x=a+t nel polinomio E(x,y), lasciando intatta la y. Il risultato E(a+t,y) considerato rispetto al binomio a+t è una funzione algebraica razionale intera di esso, e supposto E(a+t,y)=F(a+t), siccome

 $F(a+t) = F(a) + tF_1(a) + t^2F_2(a) + \dots + t^nF_n(a) + \dots + t^nF_m(a)$ ove $F_n(a)$ indica la derivata di F(a) = E(a, y) presa n volte rispetto ad a, e divisa per 1,2.3...n; cioè $F_n(a) = E_{n,o}(a, y)$, avremo perciò

$$E(a+t, \gamma) = E(a, \gamma) + tE_{1, o}(a, \gamma) + t^*E_{2, o}(a, \gamma) + \cdots + t^mE_{n, o}(a, \gamma) + \cdots + t^mE_{m, o}(a, \gamma),$$

il secondo membro della quale equazione non è altro che il primo, in cui sono svihippate tutte le potenze del binomio a+t, e si sono ordinati i termini secondo le potenze ascendenti della t medesima. Dunque se in quella equazione porremo $\gamma=b+u$ ne verrà (ε)

 $E(a+t, b+u) = E(a, b+u) + tE_{1, 0}(a, b+u) + t^2E_{2, 0}(a, b+u) + + t^nE_{n, 0}(a, b+u) + + t^mE_{m, 0}(a, b+u)$

Notiamo ora, che E(a, b+u); E_0 , (a, b+u)...... $E_{n, o}(a, b+u)$ sono funzioni algebraiche razionali intere rispetto al binomio b+u, e siccome qualunque simile funzione

 $f(b+u)=f(b)+uf_1(b)+u^2f_2(b)+....+u^rf_r(b)+....$ avremo quindi

 $E(a, b+u) = E(a, b) + uE_{0, 1}(a, b) + u^{2}E_{0, 2}(a, b) + u^{3}E_{0, 3}(a, b) + ...$+ $u^{m}E_{0,m}(a, b)$

quel polinomio (φ) è la m esima, da che i termini di E(x, y) che contengono x^m , y^m ne danno altri contenenti t^m ed u^m . I polinomj $E_{1,0}$; $E_{0,1}$ considerati rispetto alle quantità a, b sono del grado m-1; i polinomj $E_{2,0}$; $E_{1,1}$; $E_{0,2}$ sono del grado m-2; ecc.; i coeficienti di quel termine che contiene n dimensioni rispetto ad u e t sono di m-n dimensioni relativamente ad a, b: e l'ultimo termine ha tutti i coeficienti delle varie potenze di u, t della dimensione m-m=0, cioè quei coeficienti non contengono traccia di a e di b: il termine penultimo è lineare rispetto ad a, b: il terz' ultimo contiene due dimensioni, ecc.

Qualunque volta ne abbisognasse di riferire la curva E(x, y)—o ad un nuovo sistema di assi coordinati, conseguiremo l'intento col mezzo delle formole ottenute nel 5.° Articolo della prima parte, epperò basterà mettere nella equazione (φ)

$$t = \frac{x' sen(x'y) + y' sen(x'y)}{sen \alpha}, \ u = \frac{x' sen(x'x) + y' sen(y'x)}{sen \alpha}$$

Supponiamo, che per un punto dato dalle equazioni x=a, y=b sia condotta nel piano della curva E(x, y)=0 una linea retta, l'equazione della quale sia y-b=h(x-a), e proponiamoci di trovare in quanti e quali punti quelle linee vengono ad incontrarsi. Siccome le coordinate dei punti comuni devono rendere E(x,y)=0 ed y=b+h(x-a); posto questo valore di y nella prima equazione ne viene, che le ascisse x dei detti punti devono rendere E(x,b+h(x-a))=0. Dunque, ordinata e sciol-

ta tale equazione rispetto all'incognita x, fornirà i valori delle ascisse dei punti cercati; le ordinate dei quali si avranno sostituendo quei valori della x nella equazione y=b+h(x-a). Ma la stessa ricerca si può instituire con altro metodo. Immagino nella retta y=b+h(x-a) un punto comune ad essa ed alla curva E(x, y)=0: sia l la lunghezza della parte compresa fra il punto x=a, y=b e quell'incontro; le coordinate del quale (Parte I. Artic. II. N. 5) saranno date dalle equazioni

Artic. II. N. 5) saranno date dalle equazioni
$$x=a+\frac{l}{\sqrt{1+2h\cos\alpha+h^2}}$$
, $\gamma=b+\frac{hl}{\sqrt{1+2h\cos\alpha+h^2}}$:

Se ora porremo nella equazione $E(x, \gamma)$ =0 questi valori di x e di γ , la risultante conterrà l'incognita l, epperò fornirà i valori di tutte le parti della retta $\gamma-b=h(x-a)$ comprese fra il punto x=a, $\gamma=b$ e la curva. Ad agevolare la sostituzione, poniamo $\frac{l}{\sqrt{1+2h\cos x+h^2}}=t$, per cui x=a+t,

ed y=b+ht, ed il risultato, che si avrà dalla equazione (φ), ossia E(a+t,b+u)=0, ponendovi u=ht, sarà

$$E+t\{E_{1,0}+hE_{0,1}\}+t^2\{E_{2,0}+hE_{1,1}+h^2E_{0,2}\}+....$$

(1)
$$+t^{m-1}\{E_{m-1}, 0+hE_{m-2}, 1+h^2E_{m-3}, 2+\dots+h^{m-1}E_{0,m-1}\}$$

 $+t^m\}E_{m,0}+hE_{m-1}, 1+h^2E_{m-2}, 2+\dots+h^mE_{0,m}\}$ so Questa equazione fornisce generalmente m valori di t , quindi altrettante coppie di coordinate $x=a+t$, $y=b+ht$; onde ne segue, che una retta può incontrare una linea algebraica dell'ordine m in altret-

tanti punti: e se il loro numero è minore di m, attese le radici immaginarie, lo sarà di un numero pari di unità.

Essendo m pari, potrà il parametro h avere grandezza tale, che la equazione (1) non ammette radici reali, epperò la retta y-b=h(x-a) in tal caso non incontrerebbe la curva; ma se m è dispari qualunque retta tracciata nel piano coordinato incontra la linea in un punto almeno.

Il prodotto delle radici della equazione (1) è rappresentato dalla formola

$$\frac{(-1)^m E(a,b)}{E_{m,o} + h E_{m-1,1} + h^2 E_{m,2,2} + \dots + h^m E_{o,m}}$$

epperò il prodotto delle rette l, le quali indico con $l_1, l_2, l_3 \ldots l_m$ sarà

$$l_1 l_2 l_3 \dots l_m = \frac{(-1)^m E(a,b) \cdot (1 + 2h\cos\alpha + h^2)^{\frac{m}{2}}}{E_{m,0} + hE_{m-1}, 1 + \dots + h^m E_{0,m}}$$

Se per lo stesso punto x=a, y=b condurremo un' altra retta y-b=k(x-a), e rappresenteremo con $L_1, L_2, L_3...L_m$ le parti di essa intercette fra quel punto x=a, y=b e la curva, sarà il prodotto

$$L_{1}L_{2}L_{3}...L_{m} = \frac{(-1)^{m}.E(a,b)(1+2k\cos\alpha+k^{2})^{\frac{m}{2}}}{E_{m,0}+kE_{m-1,1}+....+k^{m}E_{0,m}}$$

e per conseguenza

$$\frac{l_{1}.l_{2}.l_{3}...l_{m}}{L_{1}.L_{2}.L_{3}...L_{m}} = \frac{\{E_{m.o} + hE_{m-1,1} + ... + h^{m}E_{o,m}\}(1 + 2k\cos\alpha + k^{2})^{\frac{m}{2}}}{\{E_{m,o} + kE_{m-1,1} + ... + k^{m}E_{o,m}\}(1 + 2k\cos\alpha + k)^{\frac{m}{2}}}$$

Ma il secondo membro di questa equazione non contiene traccia delle coordinate x=a, y=b;

dunque »Se nel piano di una curva algebraica si »conducono da qualunque punto due linee rette se»condo direzioni stabilite ad arbitrio, il prodotto »delle parti di una retta comprese fra il detto punto »e la curva, sta al prodotto delle parti analoghe cor»rispondenti alla seconda retta, in una ragione »geometrica costante; la quale cioè non varia do»vunque si assuma il punto nominato.

Non entro a discutere le eccezioni del teorema, le quali in questo luogo sarebbero intempestive.

Se in un medesimo piano esistono due linee algebraiche, l'una delle quali sia rappresentata da una equazione E(x, y)=0 'dell' ordine m, l'altra da una equazione e(x, y)=0 del grado n, volendosi conoscere in quali punti quelle linee si segano, siccome le coordinate dei punti comuni sono tutte ed unicamente quelle, le quali rendono soddisfatte nello stesso tempo le due equazioni E(x, y)=0, e(x, y)=0, dovremo perciò risolverle entrambe rispetto alle incognite x, y, ed ogni coppia di valori corrispondenti determinerà uno dei punti cercati: ma il numero di quelle coppie è generalmente rappresentato dal prodotto m.n; perciò altrettanti potranno essere i punti, in cui quelle linee si incontrano.

Dunque, sebbene allorachè sono dati più punti, il numero dei quali sia $\frac{m(m+3)}{2}$, la linea algebraica dell' ordine m, che li congiunge, sia generalmente determinata; pure quei punti potranno talvolta essere così disposti, che possano condursi per essi più linee d'ordine eguale, ed anche maggiore di

m, mentre due linee, i gradi delle quali sono indicati dai numeri m, n possono avere un numero mn di punti comuni, e se $n > \frac{m+3}{2}$ si ha ancora $mn > \frac{m(m+3)}{2}$.

ARTICOLO II.

Del Centro.

Siccome il coeficiente di t^{m-1} nella equazione (1) ordinata rispetto a t, rappresenta la somma delle radici della equazione medesima, ne segue che se tale coeficiente sarà nullo lo sarà ancora la somma di quelle radici, e per conseguenza avremo $l_1 + l_2 + l_3 \dots + l_m = 0$. Dunque alcune di queste quantità saranno positive ed altre negative, cioè le parti della retta y-b=h(x-a) comprese fra il punto x=a, y=b e la curva hanno direzioni opposte rispetto a questo punto (Art. 2. Par. I. N. 5.), e la somma di quelle dirette da una banda eguaglia la somma delle altre. Essendo in tal caso $E_{m-1,0}+hE_{m-2,1}+\dots+h^{m-1}E_{0,m-1}=0$ sarà gene-

$$\frac{E_{m-1,0}+hE_{m-2,1}+\ldots\ldots+h^{m-1}E_{0,m-1}}{E_{m,0}+hE_{m-1,1}+\ldots\ldots+h^{m}E_{0,m}}=\text{o sarà generalmente }(\psi)\ E_{m-1,0}+E_{m-2,1}+\ldots\ldots+h^{m-1}E_{0,m-1}=\text{o}.$$
 Se questa equazione (ψ) sussiste indipendentemente dalla h , saranno

(2) $E_{m-1,0} = 0$, $E_{m-2,1} = 0$, $E_{m-3,2} = 0$, $E_{0,m-1} = 0$, tutte le rette che passano per il punto x = a, y = b avranno la stessa proprietà, e quel punto si chiama centro della curva.

Dunque "Il centro di una curva è un punto, » per il quale condotta una retta qualunque, la " somma delle parti di essa comprese fra quel » centro e la curva, e che si diriggono da una " parte per rispetto al punto medesimo, eguaglia » la somma delle parti analoghe, che hanno dire-» zione opposta.

I valori delle coordinate x=a, y=b che determinano il centro vengono forniti dalle equazioni (2), ma essendo il loro numero maggiore di quello delle incognite a, b ne derivano varie relazioni fra i parametri della curva, le quali dovranno verificarsi per se stesse qualunque volta esista centro.

Esempio primo. Supponiamo

(A) $E(x,y) = Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F$, cosicchè la equazione $E(x,\gamma)$ =o rappresenti una linea del secondo ordine. Avremo

 $E(a,b) = Ab^2 + 2Bab + Ca + 2Db + 2Ea + F$, $E_{1,0} = 2Bb + 2Ca + 2E$, $E_{0,1} = 2Ab + 2Ba + 2D$, e se esiste centro le coordinate x=a, y=b del medesimo dovranno soddisfare alle equazioni (2) le quali nel caso presente sono

 $E_{1,0} = 0$, $E_{0,1} = 0$, ossiano Bb + Ca + E = 0, Ab + Ba + D = 0.

Eliminando da queste equazioni la b poi la a ne vengono le due seguenti

 $(B^*-AC)a+(BD-AE)=0$, $(B^*-AC)b+(BE-DC)=0$ le quali generalmente danno i valori delle incognite a, b; ma se $B^* - AC = 0$ quelle equazioni, o sono erronee, ovvero identiche se BD-AE=0, BE-DC=0. Per comprendere a che si riduca la

curva, quando sussistono queste tre equazioni, notiamo primamente, che due qualsivogliano di esse traggono necessariamente la terza: da che eliminata A dalle B'-AC=0, BD-AE=0 ne viene $\frac{B^2}{C} = \frac{BD}{E}$, ossia BE-DC=0. Sussistendo queste equazioni la E(x,y)=0 moltiplicata per C si riduce ad $AC\gamma^2 + 2BCx\gamma + C^2x^2 + 2DC\gamma + 2ECx + CF =$ $=B^2\gamma^2+2BCx\gamma+C^2x^2+2BE\gamma+2CEx+CF=$ $= (By + Cx)^2 + 2E(By + Cx) + FC = 0$: dalla quale, sciolta rispetto al binomio By + Cx, ne vengono $By + Cx = -E \pm \sqrt{E^2 - CF}$, epperò

$$\frac{1}{C} B\gamma + Cx + E + \sqrt{E^2 - CF} \left\{ B\gamma + Cx + E - \sqrt{E^2 - CF} \right\} = 0$$
che è una equazione complessa equivalente alle due
$$B\gamma + Cx + E + \sqrt{E^2 - CF} = 0,$$

$$B\gamma + Cx + E - \sqrt{E^2 - CF} = 0$$

 $E(x,\gamma) =$

epperò non rappresenta già una linea del second'ordine, ma il sistema di due linee rette. Dunque, allorchè la equazione (A) si riferisce ad una vera linea del secondo ordine, se B'-AC=0, quella linea è priva di centro. Ma non verificandosi questa equazione, esisterà centro, le coordinate del quale saranno

(B)
$$x = a = \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$
, $y = b = \frac{DC - BE}{B^2 - AC}$.

Esempio secondo. La equazione E(x, r)--- o rappresenti una linea del terzo ordine; sia cioè

$$E(x, y) = Ay^3 + 3By^2x + 3Cyx^2 + Dx^3 + Ey^3 + Ly^2 +$$

ove A, B, C.... L sono i parametri della equazione. Siccome

$$E(a, b) = Ab^{3} + 3Bb^{2}a + 3Cba^{2} + Da^{3} + Eb^{2} + 2Fab + Ga^{2} + Hb + Ka + L$$

$$E_{1,0}=3Bb^2+6.Cba+3Da^2+2Fb+2Ga+K;$$

$$E_{0,1}=3Ab^2+6Bab+3Ca^2+2Eb+2Fa+H$$

$$E_{2,0}=3(Cb+Da)+G$$
; $E_{1,1}=6(Bb+Ca)+2F$

$$E_{0,2} = 3(Ab + Ba) + E$$

le equazioni del centro sono le tre seguenti

(a)
$$Cb+Da+\frac{1}{3}G=0$$
, $Bb+Ca+\frac{1}{3}F=0$, $Ab+Ba+\frac{1}{3}E=0$

Supponendo, che nessuno dei coeficienti A, B, C, D sia nullo, dalle ultime due equazioni si cavano

$$(B^2 - AC)b + \frac{1}{3}(FB - EC) = 0$$
,
 $(B^2 - AC)a + \frac{1}{3}(BE - AF) = 0$

da cui tratti i valori di a, b e posti nella prima ne deriva la seguente condizione

$$(B^2-AC)G+(EC-BF)C+(AF-BE)D=0$$

Se fosse $B^2 - AC = 0$ i valori di a, b sarebbero infiniti, epperò non esisterebbe centro: ma se colla equazione B²—'AC=o sussistesse ancora l'altra FB—EC—o, da cui eliminando C, ne deriva AF-BE-0, in tal caso le due equazioni, dalle quali abbiamo desunti i valori di a, b diventano identiche, epperò dovremo combinare la prima delle equazioni (a) colla seconda, d'onde si cavano

$$(AD-BC)b+\frac{1}{3}(DE-BC)=0$$

 $(AD-BC)a+\frac{1}{3}(AG-EC)=0$.

Oueste equazioni insegnano, che nel caso presente la linea sarà dotata di centro, purchè non sia AD-BC=0. Se poi in un con questa equazione, si ha ancora AG - EC = 0, epperò

$$C = \frac{AD}{B} = \frac{AG}{E}$$
, vale a dire $DE = BG = 0$.

parebbe, che ogni punto del piano xy fosse un centro della curva: ma in queste ipotesi le tre equazioni (a) sono identiche, epperò se le coordinate x=a, $\gamma=b$ avranno fra loro la relazione $Ab+Ba+\frac{1}{3}E=0$, cioè se il punto rappresentato da x=a, y=b è nella linea retta data dalla equazione $Ay + Bx + \sqrt{E} = 0$, quel punto sarà un centro della curva. Dunque le linee del terzo ordine rappresentate dalla equazione E(x,y)=0, fra i cui parametri regnano le relazioni $B^2 - AC = 0$, AF-BE=0, AD-BC=0, AG-EC=0, hanno infiniti centri, i quali sono tutti i punti della retta

 $\gamma = -\frac{B}{A}x - \frac{E}{3A}$, e la equazione E(x, y) = 0 coll'e-

liminare C, D, G, F si riduce ad

$$(Ay+Bx)^3+E(Ay+Bx)^2+AH(Ay+Bx)+A(AK-BH)x+A^2L=0$$

Se i valori di l, che corrispondono al centro di una linea algebraica fossero due a due eguali e di segno opposto, quel punto sarebbe analogo

🔩 ് രേക്ക് വാധിക്കുന്ന് നേരുന്നു.

The second second

 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right) \right) \right) \right)}{1} \right) \right) \right)} \right) \right)}$

ARTICOLO III.

Dei diametri, triametri ecc.

Se è nullo il coeficiente nel secondo termine della equazione (1) ordinata, vale a dire

$$\frac{E_{m-1,0} + hE_{m-2,1} + h^{2}E_{m-3,2} + \dots + h^{m-1}E_{0,m-1}}{E_{m,0} + hE_{m-1,1} + \dots h^{m}E_{0,m}} = 0$$

il punto x=a, y=b è talmente situato nella linea retta y-b=h(x-a), che la somma delle rette $l_1+l_2+l_3+\ldots +l_m=0$.

Quella equazione in generale trae con se la seguente (3) $E_{m-1,o} + hE_{m-2,1} + h^2E_{m-3,2} + \dots + h^{m-1}E_{o,m-1} = o$, e siccome $E_{m-1,o}$, $E_{m-2,1}$, ... sono funzioni lineari delle coordinate a, b; la equazione (3) ordinata rispetto a queste coordinate assumerà la forma

$$L_1 + L_2 + \ldots + L_m = 0,$$

anche per questa seconda retta, dovrà verificarsi la equazione (3), ossia la (a), cambiandovi a in a', b in b'; cioè le coordinate x=a', y=b' dovranno rendere (b) b'P+a'Q+R=0. Dunque il punto x=a, y=b della retta y-b=h(x-a) per il quale $1+1+\dots+1_m=0$; il punto x=a', y=b' della retta parallela y+b'=h(x-a') per cui

c simili, si trovano nella linea retta rappresentata dalla equazione $\gamma P + xQ + R = 0$

Di qui ne segue, che "Se nel piano di una "linea algebraica si tracciano quante rette si vo"gliano tutte parallele fra loro, e con qualunque
"direzione; esiste un' altra retta, la quale divide
"ognuna di quelle, così che la somma delle parti
"di ciascuna parallela comprese fra la curva e
"quella retta, e che si diriggono da una parte
"della retta medesima, eguaglia la somma delle
"parti che hanno direzione opposta.

Allorachè m=2, epperò anche i valori di l sono due soltanto la retta (3) si chiama diametro corrispondente alle corde parallele alla retta $\gamma = hx$. Se m=3, e per conseguenza sono tre soli anche i valori di l, la retta (3) si chiamerà triametro; se m=4 la retta (3) rappresenta un quadriametro, ec. ec.

Se la curva è dotata di centro le coordinate di questo punto rendono soddisfatte tutte le equazioni (2) dell'Articolo antecedente. Dunque le stesse coordinate sostituite nella equazione (3) in luogo di a, b la rendono pure soddisfatta, qualunque sia il valore di h, per cui "Se una linea algebraica " è dotata di centro, per esso passano tutti i dia" metri, triametri ecc. della medesima.

Esempio primo. Consideriamo una linea algebraica del secondo ordine, sia cioè

 $E(x,y) = Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F$ La equazione (3) sarà la seguente $E_{1,0} + hE_{0,1} = 0$ la quale rappresenta il diametro corrispondente alle corde parallele alla retta y = hx. Sostituiti i valori di $E_{1,0}$, $E_{0,1}$, ottenuti nell' esempio primo dell' Articolo antecedente si ha

 $E_{1,0}+hE_{0,1}=2(Bb+Ca+E)+2h(Ab+Ba+D)=0$, ossia cambiate a in x, b in y, sarà

(C) $\gamma(B+Ah) + x(C+Bh) + E+Dh = 0$ l'equazione del diametro corrispondente alle cor-

I equazione del diametro corrispondente alle corde parallele alla retta $\gamma = hx$.

Se la linea è dotata di centro qualunque diametro passa per questo punto; ma se ne è priva, per cui $B^2 - AC = 0$, la equazione del diametro essendo

$$y = -\frac{C + Bh}{B + Ah}x - \frac{E + Dh}{B + Ah}$$
, e

$$\frac{C+Bh}{B+Ah} = \frac{AC+ABh}{A(B+Ah)} = \frac{B\cdot + ABh}{A(B+Ah)} = \frac{B(B+Ah)}{A(B+Ah)} = \frac{B}{A}$$

il coeficiente della x nella equazione del diametro è indipendente dalla h, cioè la direzione di esso non varia passando da uno ad altro sistema di corde, epperò » I diametri delle linee del secon» do ordine prive di centro sono tutti paralleli » fra lero.

Nella periferia circolare ogni diametro è per-

pendicolare alle corde, che vengono da esso divise in due parti eguali; ma nelle linee del second'ordine le corde ed i diametri corrispondenti sono fra loro diversamente inclinati. Diffatti chiamata (r) la retta $\gamma = hx$, (r) il diametro

$$\gamma = -\frac{C + Bh}{B + Ah}x - \frac{E + Dh}{B + Ah}$$

ed a l'angolo degli assi coordinati (formola (7) Artic. a. Parte I.), avremo

(D)
$$tang(rr') = \frac{\left(h + \frac{C + Bh}{B + Ah}\right) sen\alpha}{1 - h\frac{C + Bh}{B + Ah} + \left(h - \frac{C + Bh}{B + Ah}\right) cos\alpha} = \frac{(Ah^2 + 2Bh + C) sen\alpha}{h^2(Acos\alpha - E) + h(A - C) + B - Ccos\alpha}$$

il valore della quale funzione varia col parametro h, come abbiamo asserito.

Affinchè un diametro sia perpendicolare alle corde che ad esso corrispondono, dovrà essere tang(rr') = 1/2, ossia

 $h^{2}(A\cos\alpha - B) + h(A - C) + B - C\cos\alpha = 0$ epperd (E)

$$h = \frac{-(A-C) \pm \sqrt{\{(A-C)^2 - 4(A\cos\alpha - B)(B-C\cos\alpha)\}}}{2(A\cos\alpha - B)}$$

e siccome $(C-A)^2 - 4(A\cos\alpha - B)(B-C\cos\alpha) =$ $= (C-A)^2 + 4B^2 - 4B(A+C)\cos\alpha + 4AC.\cos^2\alpha =$ $= \{(A+C)\cos\alpha - 2B\}^2 + (A-C)^2 - \{(A+C)^2 - 4AC\}\cos^2\alpha =$ $= \{(A+C)\cos\alpha - 2B\}^2 + (A-C)^2\sin^2\alpha$ la quantità, che nel valore di h è sottoposta al vincolo radicale è positiva, epperò quei due valori sono reali. Indicati questi valori con h_1 , h_2 siccome $h_1 + h_2 = \frac{C - A}{A\cos\alpha - B}, \quad h_1 h_2 = \frac{B - C\cos\alpha}{A\cos\alpha - B}, \text{ se ne ded}$ $\text{duce } 1 + h_1 h_2 = \frac{(A - C)\cos\alpha}{A\cos\alpha - B} = -(h_1 + h_2)\cos\alpha, \text{ cioè}$ $1 + h_1 h_2 + (h_1 + h_2)\cos\alpha = 0;$

per cui i due parametri h, h, corrispondono a due lince rette perpendicolari fra loro (Par. I. Artic. 2. form. 9). Se la linea del second' ordine è dotata di centro, essendo $B^2 = AC$, la condizione per la quale il diametro $y = \frac{B}{A}x - \frac{E+Dh}{B+Ah}$ sia perpendicolare alle corde parallele alla retta y = hx è indicata dalla equazione

$$1-h\frac{R}{A}+\left(h-\frac{B}{A}\right)\cos\alpha=0$$
 (form. 9 citata)

epperò dovrà essere $h = \frac{A - B\cos\alpha}{B - A\cos\alpha}$: da tutto ciò

ne viene che "Per ogni linea del secondo ordine "dotata di centro esistono due diametri, ognuno "dei quali è normale alle corde che ad esso cor- "rispondono; e questi diametri, cui ordinaria- "mente si dà il nome di assi, sono perpendico- "lari fra loro. Ma le linee prive di centro am- "mettono un asse solo.

Immaginiamo il sistema di corde parallele alla retta (r) y = hx ed il diametro, che ad esse corrisponde, la cui equazione si è

$$(r') \ y = -\frac{C + Bh}{B + Ah} x - \frac{E + Dh}{B + Ah}.$$

Per un altro sistema di corde parallele alla retta (s) $\gamma = h'x$, la equazione del diametro sarebbe

(s')
$$y = -\frac{C + Bh'}{B + Ah'} x - \frac{E + Dh'}{B + Ah'}$$
.

Se queste seconde corde fossero parallele al diametro (r') avressimo $h = \frac{C + Bh}{B + Ah}$, e per il diametro corrispondente sarebbe

$$-\frac{C+Bh}{B+Ah} = -\frac{C-B\frac{C+Bh}{B+Ah}}{B-A\frac{C+Bh}{B+Ah}} = -\frac{h(AC-B^{2})}{B^{2}-AC} = h,$$

purchè non sia B²—AC=0, perciò la retta (s') è parallela alla (r) e siamo quindi condotti a questa conseguenza. S'immagini un sistema di corde parallele applicate in una linea del secondo ordine ed il diametro, che ad esse corrisponde: da quanto sopra rileva, che le corde parallele a questo diametro sono divise per metà da una retta parallela alle corde del primo sistema; epperò » Ad ogni » diametro di una linea del second' ordine, dotata » di centro, un altro ne corrisponde, che dicesi » il conjugato, tale che le corde parallele ad ognuno no di essi sono divise in due parti eguali dal » l'altro diametro.

» Nelle linee del second'ordine prive di centro non esistono diametri conjugati, essendo queste rette tutte parallele fra loro.

Mediante la equazione (1) del primo Articolo possiamo determinare la lunghezza di qualunque

semidiametro corrispondente ad una linea del second ordine dotata di centro. Infatti essendo x=a, y=b le equazioni del centro, y-b=h(x-a) quella di un diametro, la equazione (1) nel caso attuale sarà $E+t\{E_{1,0}+hE_{0,1}\}+t^{2}\{E_{2,0}+hE_{1,1}+h^{2}E_{0,2}\}=0$, e siccome in conseguenza dei valori di a, b trovati nell' (Artic. 2. Esempio 1.) $E_{1,0}=0$, $E_{0,1}=0$ resta $E+t^{2}\{E_{2,0}+hE_{1,1}+h^{2}E_{0,2}\}=0$, ma $E_{2,0}=C$, $E_{1,1}=B$, $E_{0,2}=A$, ed E(a,b)=b(Ab+Ba+D)+a(Ca+Bb+E)+(Db+Ea+F)= $=\frac{b}{2}E_{0,1}+\frac{a}{2}E_{1,0}+(Db+Ea+F)=Db+Ea+F=$ $=\frac{DC-BE}{B^{2}-AC}+E\frac{AE-DB}{B^{2}-AC}+F=$ $=\frac{AE^{2}+CD^{2}+FB^{2}-2DBE-AFC}{B^{2}-AC}$;

perciò sarà

$$(Ah^2+2Bh+C)t^2+\frac{AE^2+CD^2-2DBE+F(B^2-AC)}{B^2-AC}=0$$

e supposto, per brevità,

$$\frac{AE + CD - 2DBE + F(B - AC)}{B - AC} = P \text{ avremo}$$

(F)
$$l^2 = \frac{1 + 2h\cos\alpha + h^2}{C + 2Bh + Ah^2} P$$
:

essendo l la lunghezza della retta y-b=h(x-a) intercetta fra il centro e la curva.

Abbiamo osservato, che le equazioni di due diametri conjugati sono generalmente Tof

$$\gamma = -\frac{C + Bh}{B + Ah} x - \frac{E + Dh}{B + Ah}, \gamma = hx + l'altro pa-$$

rametro; quindi indicate con l_1 , l_2 le lunghezze delle parti di queste rette comprese fra il centro e la curva avremo

$$l_{a}^{2} = \frac{1+2h\cos \alpha + h^{2}}{C+2Bh+Ah^{2}}P,$$

$$l_{a}^{2} = \frac{1-2\frac{C+Bh}{B+Ah}\cos \alpha + \left(\frac{C+Bh}{B+Ah}\right)^{2}}{C-2B\frac{C+Bh}{B+Ah} + A\left(\frac{C+Bh}{B+Ah}\right)^{2}}P =$$

$$=\frac{(C+Bh)^2-2(C+Bh)(B+Ah)\cos z+(B+Ah)^2}{A(C+Bh)^2-2B(C+Bh)(B+Ah)+C(B+Ah)^2}P$$

Il numeratore di questa frazione può scriversi nel modo seguente

$$(B^{2}-2BC\cos\alpha+C^{2})+2h(AB+BC-B^{2}\cos\alpha-AC\cos\alpha)+A^{2}+A^{2}(A^{2}+B^{2}-2AB\cos\alpha)=\{C(A+C-2B\cos\alpha)-(AC-B^{2})\}+A^{2}\{B(A+C-2B\cos\alpha)-(AC-B^{2})\cos\alpha\}+A^{2}\{A(A+C-2B\cos\alpha)-(AC-B^{2})\}$$

 $= (A + C - 2B\cos\alpha)(C + 2Bh + \Lambda h^2) - (\Lambda C - B^2)(1 + 2h\cos\alpha + h^2)$

Il denominatore è poi eguale ad

$$(AC-B^2)(C+2Bh+Ah^2)$$
, eppero
(G) l^2 = $(A+C-2B\cos\alpha)(C+2Bh+Ah^2)-(AC-B^2)(1+2h\cos\alpha+h^2)$
 $(AC-B^2)(C+2Bh+Ah^2)$

quindi (H)
$$l_1 + l_2 = \frac{A + C - 2B\cos\alpha}{AC - B^2} P$$
.

Siccome $1+2h\cos a+h^2=(1-h)^2+2h(1+\cos a)=$ $=(1+h)^2-2h(1-\cos\alpha)$ è sempre positivo, sia h>0, oppure h<o: Il parametro A può supporsi positivo, essendo indifferente considerare quale equazione della linea $E(x, \gamma)$ =0, oppure $-E(x, \gamma)$ =0: Dippiù se $AC-B^2>0$, il trinomio $C+2Bh+Ah^2$ è pure sempre positivo, da che le radici di $Ah^2 + 2Bh + C = 0$ sono immaginarie; dunque affinchè la equazione $E(x, \gamma) = 0$ rappresenti una linea del second' ordine dovrà essere P>o, altrimenti la formola (F) essendo sempre immaginaria, la linea non è incontrata da alcuna retta condotta nel suo piano. Essendo $Ah^2+2Bh+C>0$, posto $h = -\cos \alpha$, sarà ancora $A\cos^2 \alpha - 2B\cos \alpha + C > 0$, perciò $A-2B\cos\alpha+C>0$, e la formola (H) sempre reale.

Supponiamo B+Ah=p, C+Bh=q, ed i valori di l_1 , l_2 assumono la forma seguente

$$l_1^2 = \frac{1 + 2h\cos\alpha + h^2}{ph + q}P$$
; $l_2^2 = \frac{p^2 - 2pq\cos\alpha + q^2}{(AC - B^2)(ph + q)}P$.

I numeratori di queste funzioni sono necessariamente positivi, da che $p^2-2pq\cos\alpha+q^2>0$, valendo il discorso, col quale abbiamo provato che $1+2h\cos\alpha+h^2>0$. Se $AC-B^2<0$ le quantità l_1^2, l_2^2 hanno segni opposti, cioè una di esse è reale, l'altra immaginaria; e supposto $l_2^2=-L_2^2$, sarà

$$L_{a}^{2} = \frac{p^{2}-2pq\cos\alpha+q^{2}}{(B^{2}-AC)(ph+q)}P$$
 reale, ed $l_{a}^{2} = L_{a}^{2}$ pure

reale. In questo caso un solo diametro incontra la curva, e si chiama diametro reale, l'altro poi si deno-

ro8

mina diametro immaginario: 2L, è la vera lunghezza del primo, 2L, si considera quale lunghezza fittizia del secondo.

Da tutto ciò concludiamo che "In ogni linea "del second'ordine, i di cui diametri sono tutti "reali, la somma dei quadrati dei diametri conju"gati ha una grandezza costante: e se uno dei "diametri conjugati è immaginario, la differenza "dei loro quadrati avrà pure un valore costante.

Indicato con (l_1, l_2) l'angolo formato dai due diametri conjugati l_1 , l_2 si ha

$$tang(l_{1}.l_{2}) = \frac{(ph+q)sen\alpha}{p-qh+(ph-q)cos\alpha} = \frac{(ph+q)sen\alpha}{p(1+hcos\alpha)-q(h+cos\alpha)},$$

$$epperò$$

$$sen(l_{1}l_{2}) = \frac{tang(rr')}{\sqrt{(1+tang^{2}(rr'))}} =$$

$$\frac{(ph+q)sena}{V \begin{cases} p^2(1+hcosa)^2+p^2h^2sen^2a+q^2(h+cosa)^2+q^2sen^2a \\ -2pq(1+hcosa)(h+cosa)+2pqhsen^2a \end{cases}}$$

$$=\frac{(ph+q)sen\alpha}{\sqrt{(1+2hcos\alpha+h^2)}.\sqrt{(p^2-2pqcos\alpha+q^2)}}$$

e siccome
$$\frac{(ph+q)^{2} \cdot l_{1}^{2} \cdot l_{2}^{2}}{(1+2h\cos\alpha+h^{2})(p^{2}-2pq\cos\alpha+q^{2})} = \frac{1^{2}l_{1}^{2} \cdot sen^{2}(l_{1}^{2})}{(l_{1}^{2}+2a\cos\alpha+h^{2})(l_{2}^{2}+2a\cos\alpha+h^{2})}$$

$$=\frac{P^2}{AC-B^2}=\frac{l_1^2l_2^2sen^2(l_1l_2)}{sen^2\alpha}$$

ne viene (K)
$$l_i l_a$$
 sen $(l_i l_a) = \frac{P.sena}{\sqrt{(AC - B^2)}}$.

Se poi
$$AC-B < 0$$
, sarà $L_{*}L_{*}sen(L_{*}L_{*}) = -\frac{P.sen \alpha}{\sqrt{(B^{*}-AC)}}$

dunque »L'area del parallellogrammo, due lati del »quale sono semidiametri conjugati di una linea del »second' ordine dotata di centro, siano essi en»trambi reali ovvero uno solo, ha una grandezza »costante, qualunque sia la direzione dei diametri »medesimi.

Mediante le formole (H) (K) possiamo determinare le lunghezze dei semiassi, da che questi sono manifestamente diametri conjugati fra loro, ed indicate le lunghezze con λ_1 , λ_2 , essendo $sen(\lambda_1\lambda_2) = 1$, se $AC - B^2 > 0$, avremo

(M)
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{A + C - 2B\cos\alpha}{AC - B^2} P_i \lambda_1 \lambda_2 = \frac{Psen\alpha}{\sqrt{(AC - B^2)}}$$

da cui si cavano immediatamente i valori dei semiassi \(\lambda_i, \lambda_i\)

Se due linee del second'ordine hanno gli assi geometricamente proporzionali, e per l'una e per d'altra sono reali entrambi, ovvero uno solo, quelle linee si dicono simili fra loro. Conoscendo le equazioni, che le rappresentano rispetto ai medesimi assi coordinati, la similitudine si riconosce dall'essere per l'una e per l'altra equazione la funzione AC-B dello stesso segno, e

$$\frac{\lambda_1^* + \lambda_2^*}{\lambda_1 \lambda_2 \operatorname{sena}} = \frac{A + C - 2B \cos \alpha}{\sqrt{(AC - B^2)}}$$

del medesimo valore. Se poi gli assi omologi sono parallelli le linee simili sono inoltre similmente situate : quando ciò sia la quantità $\frac{C+Bh}{B+Ah}$ (Equazione (C)), allorchè venga sostituito ad h l'uno o

l'altro valore dato dalla equazione (E), devrà avere la medesima grandezza per ciascuna di quelle linee.

Essendo $\lambda_1 + \lambda_2 = l_1 + l_2$, $\lambda_1 \lambda_2 = l_1 l_2$, $\cos \varphi$; ove supposto $\cos \varphi = \operatorname{scn} l_1 l_2$, ne segue

$$\lambda_{i} + \lambda_{i} = \sqrt{(l_{i}^{2} + 2l_{i}l_{i}\cos\varphi + l_{i}^{2})};$$

$$\lambda_{i} - \lambda_{i} = \sqrt{(l_{i}^{2} - 2l_{i}l_{i}\cos\varphi + l_{i}^{2})};$$

Fingiamo l.>l. (fig. 2) OM=OM=l., ON=ON=l., $AngNOM=q<90^\circ$, avremo adunque $\lambda.+\lambda.=NM$; $\lambda.-\lambda.=NM$: e siccome due lati di qualunque triangolo presi insieme superano il terzo, sarà NM+NM'>MM' cioè $\lambda.>l.$; ed NN+NM'>NM' ossia $2l.+\lambda.-\lambda.>\lambda.+\lambda.$, da cui $l.>\lambda.$: dunque "Un asse di una linea del second'ordine, a diametri tutti reali, è più grande d'ogni diametro; "l' altro ne è minore.

Ho amato in questo esempio calcolare le formole generali (F, G....M), per addestrare lo studioso nel maneggio delle equazioni, e per indicare quelle relazioni, le quali non ho osservate in altre opere.

Esempio secondo. Considerando una linea del terzo ordine, mediante le formole dell' esempio 2. Artic. 2., troveremo che alle corde parallelle alla retta $\gamma = hx$ corrisponde il triametro E_2 , $0 + hE_1$, $1 + h^2E_0$, 2 = 0, ossia $(Cb+Da+1/3G)+2h(Bb+Ca+1/3F)+h^2(Ab+Ba+1/3E)=0$ da cui, cambiando a in x, b in γ , ed ordinando rispetto a queste coordinate, si desume la equazione $\gamma(C+2Bh+Ah^2)+x(D+2Ch+Bh^2)+1/3(G+2Fh+Eh^2)=0$

Riprendendo l'argomento di questo articolo osserviamo, che se la retta $\gamma-b=h(x-a)$ avesse tale direzione, ed il punto x=a, $\gamma=b$ fosse situato in essa così, che sparissero dalla equazione (1) tutti i termini contenenti potenze dispari di t, fossero cioè

 $E_{1,0}+hE_{0,0}=0$, $E_{3,0}+hE_{2,1}+h^2E_{1,2}+h^3E_{0,3}=0$, $E_{5,0}+hE_{4,1}+h^2E_{3,2}+h^3E_{2,3}+h^4E_{1,4}+h^5E_{0,5}=0$ ec. le parti $l_1, l_2, l_3...$ della retta y-b=h(x-a) comprese fra il punto x=a, y=b e la curva sarebbero due a due eguali ed opposte di segno.

Se la linea E(x, y) = 0 è del terzo ordine quelle condizioni si riducono alle due prime soltanto: la seconda non contiene, che alcuni parametri della curva e l'incognita h, della quale fornisce almeno un vero valore: la prima poi è generalmente una equazione del second'ordine fra le coordinate x=a, γ=b; perciò ne insegna, che in qualunque linea del terzo ordine si può applicare almeno uno, oppure tre sistemi di corde parallelle, tali che ognufia di esse incontra la curva in due punti soltanto, ed è divisa in due parti eguali da una linea del second' ordine, la equazione della quale non è altro che $E_{i,o} + hE_{o,i} = o$, ove si cambiino a in x, b in y, e si sostituisca alla h un valor reale tratto dalla $E_{3,0}+hE_{2,1}+h$ $E_{1,2}+h^3E_{0,3}=0$. Vedremo in seguito (Artic. V. Esemp. 2.) da che dipenda la particolarità di quelle corde, cioè d'incontrare la linea del terzo ordine in due punti soltanto.

ARTICOLLONIV. CONTROL

olika (รายค. รายสาราคาธรรมที่ (รายที่ and ที่นี้

-constant a Delle rette tangenti le curve.

Da un punto della curva E(x,y) = 0, le cui coordinate siano x=a, y=b si supponga condotta una retta qualunque rappresentata da y-b=h(x-a). Se nella equazione (1) dell'Art I. sopprimeremo il primo termine E(a,b)=0, quindi il fattore t, si avrà la seguente

 $\{E_{1,0}+hE_{0,1}\}+t\{E_{2,0}+hE_{i,1}+h^{2}E_{0,2}\}+$ $+t^{2}\{E_{3,0}+hE_{2,1}+h^{2}E_{1,2}+h^{3}E_{0,3}+\}\dots$ (a)....+ t^{m-1} { $E_{m,0}$ + $hE_{m-1,1}$ + $h^2E_{m-2,2}$ +...+ $h^mE_{0,m}$ {=0 le radici della quale forniscono i valori di quelle parti l_1, l_2, l_3 ... della retta y-b=h(x-a), che sono intercette fra il punto x=a, y=b e la curva. Considerata la più piccola di quelle parti, la quale sia la l., e supposto che essa sottenda un areo della curva E(x, y) = 0, è manifesto che potremo per lo stesso punto x=a, y=b condurre altre rette così che le parti di ciascuna intercette fra questo punto e l'arco suddetto vadano continuamente decrescendo: e siccome determinata la h talmente che sia $E_{i,o} + hE_{o,i} = o$ la equazione (a) è soddisfatta da t=0, ne segue che il valore della corda I., sottesa all' arco nominato, decresce quanto più il valore di h, che ne stabilisce la direzione, si accosta a quello fornito dalla equazione $E_{1,0}+hE_{0,0}$, raggiunto il quale quella corda si

annulla. La retta, che viene determinata da quel valore di h si chiama tangente la curva in quel punto; il quale poi si denomina punto di contatto.

Talvolta le coordinate x=a, y=b, insieme alla equazione E(a, b)=o, soddisfanno ancora alle $E_{1,0}=0$, $E_{0,1}=0$: in tal caso la h, che determina la direzione della tangente in quel punto sarà data dalla equazione $E_{2,0}+hE_{1,1}+h\cdot E_{0,2}=o$, epperò la curva ivi ammetterà o due rette tangenti o nessuna. Se mai oltre le equazioni E=o, $E_{1,0}=o$, $E_{0,1}=o$ fossero ancora $E_{2,0}=o$, $E_{1,1}=o$, $E_{0,2}=o$, in forza dei valori x=a, y=b, in tal caso determineremo la direzione della retta tangente la curva in quel punto mediante i valori di h, che fornisce la equazione $E_{3,0}+hE_{2,1}+hE_{1,2}+h^3E_{0,3}=o$, epperò le tangenti in quel punto saranno, tre ovvero una sola. E così successivamente.

Vedremo poi in appresso a quali punti di una curva corrispondano le proprietà analitiche indicate da quelle equazioni $E_{1,0}=0$, $E_{0,1}=0$ ecc.

Se nella equazione (a) supponiamo, che la quantità h abbia un valore arbitrario qualunque, potremo talvolta attribuire alle coordinate x=a, y=b tale grandezza da rendere E(a,b)=o $E_{1,o}(a,b)+hE_{0,1}(a,b)=o$ insieme, e la retta rappresentata dalla equazione y-b=h(x-a), in cui a, b abbiano il valore suddetto, sarà quella tangente la curva, la cui direzione arbitraria è determinata da quel parametro h. Si immagini ora la linea avente per equazione $E_{1,o}(x,y)+hE_{0,1}(x,y)=o$, la quale si desume dalla $E_{1,o}(a;b)+hE_{0,1}(a,b)=o$

cambiando l'a in x, il b in y: se i valori x=a,
y=b rendono soddisfatte nello stesso tempo l'una e l'altra equazione

 $E(x, \gamma) = 0$, $E_{1, 0}(x, \gamma) + hE_{0, 1}(x, \gamma) = 0$ quel punto x = a, y = b è comune alle due linee rappresentate dalle equazioni medesime, per cui ne segue che "Se la curva data dalla equazione " $E(x, \gamma) = 0$ può essere toccata da linee parallelle "alla retta y = hx, i punti di contatto saranno "quelli, in cui la curva data sega l'altra avente "per equazione (5) $E_{1, 0}(x, \gamma) + hE_{0, 1}(x, \gamma) = 0$ Questa linea algebraica è dell'ordine m = 1: Supposto per brevità $E_{1, 0} + hE_{0, 1} = e(x, \gamma)$, si hanno evidentemente (Artica I. Parte II.)

$$e_{m-2,0} = (m-1)E_{m-1,0} + hE_{m-2,1};$$

$$e_{m-3,1} = (m-2)E_{m-2,1} + 2hE_{m-3,2};$$

$$e_{m-4,2} = (m-3)E_{m-3,2} + 3hE_{m-4,3};$$

$$e_{m-5,3} = (m-4)E_{m-1,3} + 4hE_{m-5,4};$$

$$e_{0,m-2} = E_{1,m-2} + (m-1)hE_{0,m-1};$$

per cui se la linea E(x, y)=0 sarà dotata di centro le coordinate di esso (Artic. II. form. 2.]) renderanno $e_{m-2,0}$ =0; $e_{m-3,1}$ =0; $e_{m-4,2}$ =0;..... $e_{0,m-2}$ =0 qualunque sia la h, epperò le linee (5) corrispondenti a tutti i valori possibili di h saranno concentriche alla medesima linea E(x,y)=0. Se alla curva (5) s' immagina applicato un sistema di corde parallelle ad una retta qualunque y=kx, la equazione del poliametro corrispondente, che si cava dalla form. 3. Art. III. è la seguente

 $e_{m-2,0}+ke_{m-3,1}+k^{*}e_{m-4,2}+....+k^{m-2}e_{0,m-2}=$ $=(m-1)E_{m-1,0}+(h+(m-2)k)E_{m-2,1}+$ $+(2hk+(m-3)k^{2})E_{m-3,2}+(3hk^{2}+(m-4)k^{3})E_{m-4,2}+...$ $.....+(m-1)hk^{m-2}E_{0,m-1}=0,$

e siccome fatto h=k, questa, divisa per m-1, coincide colla equazione (3) dell' articolo III., ne segue che le corde parallelle alle tangenti $\gamma-b=h(x-a)$, hanno nella curva $E(x,\gamma)=0$ e nella (5) il poliametro medesimo. Goncludiamo che "Se ad una linea algebraica dell' ordine m "si conducono tutte le tangenti parallelle ad una " retta arbitraria, i punti di contatto spettano "ad una linea dell' ordine m-1. Se la prima "linea è dotata di centro, la seconda è con"centrica ad essa; e le corde parallelle alle tan"genti hanno nell' una e nell' altra curva il me"desimo poliametro: Proprieta, le quali forse non
erano state osservate.

Se da un punto dato dalle equazioni $x=\alpha$, y=6 venisse condotta una tangente alla curva E(x, y)=0, fra le coordinate di quel punto, le x=a, y=b del contatto ed il parametro h dovrebbero sussistere le due equazioni

 $6-b=h(\alpha-a)$, $E_{1,o}(a,b)+hE_{0,1}(a,b)=0$ dalle quali climinata la h si deduce

 $(\alpha - a)E_{1, o}(a, b) + (6-b)E_{0, 1}(a, b) = 0$. Dunque le coordinate di tutti i punti, nei quali la curva che si considera può essere toccata da linee rette condotte dal punto $x=\alpha, \gamma=6$ devono rendere soddisfatta la equazione

(6)
$$(\alpha - x)E_{1,0}(x, \gamma) + (6-\gamma)E_{0,1}(x, \gamma) = 0$$
,

epperò i punti di contatto sono quelli, in cui la linea rappresentata da questa equazione sega la linea data.

Siccome il polinomio E(x, y) è la somma di tanti termini della forma $Ax^r y^s$, in cui r, somo interi positivi, ed r+s non >m, supposto

 $E(x, y) = \sum (Ax^ry^s)$, avremo E_1 , $0 = \sum (rAx^{r-1}y^s)$; E_0 , $1 = \sum (sAx^ry^{s-1})$, xE_1 , $0 + yE_0$, $1 = \sum ((r+s)Ax^ry^s)$; per cui la funzione xE_1 , $0 + yE_0$, 1 si desume dalla E(x, y) moltiplicando ogni termine per la propria dimensione; e siccome (Artic. I. equazione (0))

 $E(xy) = F_m + F_{m-1} + F_{m-2} + \dots + F_n + \dots + F_n + F_n$

ne segue $xE_{1,0}+yE_{0,1}=$

 $= mF_m + (m-1)F_{m-1} + (m-2)F_{m-2} + \dots + nF_n + \dots + F_i =$ = $m(F_m + F_{m-1} + \dots + F_n + \dots + F_o)$

 $-(F_{m-1}+2F_{m-2}+3F_{m-3}+\ldots+mF_{\circ})$

La equazione (6) si è cavata dalla

 $(a-a)E_{1,o}(a,b)+(6-b)E_{0,1}(a,b)=0$

in cui x=a, y=b rendono E(a, b)=0, e ciò col cambiarvi a in x, b in y; dunque

 $E(a, b) = F_m(a, b) + F_{m-1}(a, b) + \dots + F_i + F_o = 0,$

e quindi sarà il polinomio

 $xE_{1,0}+yE_{0,1}=-(F_{m-1}+2F_{m-2}+\ldots+mF_{0}),$

e la equazione (6) dell' ordine m-1.

Se il punto $x=\alpha$, y=6 appartiene ad una retta, di cui sia $6=m\alpha+n$ la equazione, sostituito nella

(6) il valore di 6 ne deriva la seguente

(7) $\alpha \{E_{1,0}+mE_{0,1}\}+\{nE_{0,1}-xE_{1,0}-yE_{0,1}\}=0$

Se si determinano quelle coppie di valori di x e di y, le quali rendono

 $E_{1,0}+mE_{0,1}=0$, $nE_{0,1}-xE_{1,0}-yE_{0,1}=0$, cioè le coordinate dei punti comuni a queste due linee algebraiche dell' ordine m-1, ognuna di esse coppie rende soddisfatta la (7) qualunque sia la α : e siccome il numero di quei punti è generalmente eguale ad $(m-1)^2$, ne segue che "Se da qualsivoglia punto di una retrata si conducono tutte le tangenti ad una linea "dell' ordine m, i punti di contatto appartengono "ad altra linea dell' ordine m-1; e tutte queste "linee, le quali variano di posizione al variar del "punto da cui partono le tangenti, hanno un numero $(m-1)^2$ di punti comuni. Altro teorema che forse non fu rimarcato.

Esempio. Consideriamo la linea del second' ordine rappresentata dalla solita equazione (A). Siccome le coordinate x=a, y=b del contatto de vono rendere $E_{1,0}(a,b)+hE_{0,1}(a,b)=0$, e la equazione $E_{1,0}(x,y)+hE_{0,1}(x,y)=0$ (Artic. III. esempio I.) rappresenta il diametro che corrisponde alle corde parallelle alla tangente, perciò quel diametro passerà per il detto punto di contatto. La equazione della retta che tocca la linea nel punto x=a, y=b si è $(y-b)E_{0,1}(a,b)+(x-a)E_{1,0}(a,b)=0$, la quale, per essere

 $E(a,b) = \frac{1}{2}(aE_{10} + bE_{0,1}) + Db + Ea + F = 0,$ $E_{0,1} = 2(Ab + Ba + D), E_{1,0} = 2(Bb + Ca + E)$

si riduce ad

(N) (Ab+Ba+D)y+(Bb+Ca+E)x+Db+Ea+F=0

Applicando a queste linee i teoremi generali superiormente dimostrati concludiamo, che "Se ad
"una linea del second' ordine, dotata di centro,
"si conducono le tangenti parallelle fra loro, la
"retta che congiunge i punti di contatto passa per
"il centro della linea, "Se poi da qualunque pun"to di una retta si tirano le tangenti alla linea
"del second'ordine, la corda che unisce i punti di
"contatto, e tutte le altre che si determinano con"ducendo le tangenti da altri punti di quella prima
"retta, concorrono in uno stesso punto.

I geometri hanno tratto grande partito da quest'ultima proprietà delle linee del second' ordine in molte ricerche importanti intorno le curve algebraiche.

ARTICOLO V.

Dei rami infiniti, e degli assintoti rettilinei.

Se la linea rappresentata dalla equazione $E(x,\gamma)$ =0 avesse rami, i quali si distendessero indefinitamente, la lunghezza della retta, che unisce un punto di coordinate x=a, y=b con un altro preso in quella linea potrebbe avere una grandezza superiore a qualunque assegnata, cioè la retta y-b=h(x-h) potrà avere tale direzione, che la più grande delle parti l_1, l_2, \ldots intercette fra il detto punto x=a, y=b e la curva abbia un valore infinito. In tal caso la equazione (1) dell'Articolo I. divisa per t^m , cioè la aeguente

$$\frac{1}{t^m}E + \frac{1}{t^{m-1}} \{E_{i,0} + hE_{0,1}\} + \dots$$

$$(\delta) + \frac{1}{t} \{E_{m-1,0} + hE_{m-2,1} + \dots + h^{m-1}E_{0,m-1}\} + \\ + \{E_{m,0} + hE_{m-1,1} + h^2E_{m-2,2} + \dots + h^mE_{0,m}\} = 0$$

ammetterà una radice $t=\infty$ ossia $\frac{1}{t}=0$, e sarà

per conseguenza

(8) $E_{m,o} + hE_{m-1,1} + h^2E_{m-2,2} + \dots + h^mE_{o,m} = 0$. Siccome le quantità $E_{m,o}$; $E_{m-1,1}$, ... non contengono le coordinate a, b, quella equazione (8) fornisce i valori di h, epperò le direzioni delle rette, che possono incontrare la curva a distanza infinita. Se m è un numero dispari si avrà almeno un valore reale di h; ma se m è pari, le radici di quella equazione potranno essere immaginarie, nel qual caso la curva sarà tutta raccolta entro uno spazio limitato.

Quando nella equazione (d) si sostituisca ad h una radice dell' equazione (8), soppresso l' ultimo termine a destra, poi tolto il fattore $\frac{1}{t}$, la equazione che rimane avrà per radici i valori di t, che corrispondono alle varie parti l_1 , l_3 , l_4 della retta y-b=h(x-a) comprese fra il punto x=a, y=b e la linea E(x,y)=0. Se per un altro punto x=a', y=b' condurremo la retta y-b'=h(x-a'), le parti di essa comprese fra il punto x=a', y=b' e la curva si avrauno mediante le radici t fornite dalla equazione (d), in cui a si cambi in a', b in b'; ma siccome il termine ultimo, il quale non contiene le coordinate a, b è

nullo in forza del valore attribuito ad h, così anche la nuova equazione avrà per radice $\frac{1}{t} = 0$, epperò la retta y-b=h(x-a') incontrerà la curva a distanza infinita. Siano ora l, l, i due più grandi valori finiti di l per l'una e per l'altra retta y-b=h(x-a), y-b'=h(x-a'), fatta astrazione al loro segno. Prendendo altri ed altri punti nel piano delle coordinate x, y, d'onde condurre rette parallele alla solita y-b=h(x-a) fra le parti maggiori l, l, l, l, l, corrispondenti ad ogni retta, altre avranno valori più piccoli altre più grandi. Considerando la equazione

$$\frac{1}{t^{m-1}}E + \frac{1}{t^{m-2}}\{E_{1,0} + hE_{0,1}\} + \dots$$

$$(\varepsilon) + \frac{1}{t}\{E_{m-2,0} + hE_{m-3,2} + \dots h^{m-2}E_{0,m-2}\} + \dots + \{E_{m-1,0} + hE_{m-2,1} + \dots + h^{m-1}E_{0,m-1}\} = 0$$
vediamo che se le coordinate $x=a, y=b$ renderanno
$$(9) E_{m-1,0} + hE_{m-2,1} + h^2E_{m-3,2} + \dots + h^{m-1}E_{0,m-1} = 0$$
quella equazione (ε) avrà una nuova radice $\frac{1}{t} = 0$, cioè $t = \infty$, e la più grande delle parti l, l, \ldots corrispondenti a quella retta $y-b=h(x-a)$, per la quale le equazioni (8) e (9) sono soddisfatte, la più grande, dico, fra quelle parti sarà $l = \frac{1}{2}$; cioè quella retta, non solo incontrerà la curva a distanza infinita, ma siccome le due parti maggiori l_1, l_2 comprese fra il punto $x=a, y=b$ e la

curva sono fra loro eguali, perchè di grandezza infinita; la corda $l_1 - l_2$ è nulla; quella retta tocca la curva a distanza infinita, e si chiama assintoto della medesima.

Siccome la equazione (9) è lineare per rispetto alle coordinate a, b, cambiata la prima in x, la seconda in y, la risultante rappresenterà essa stessa l'assintoto della curva.

Giova osservare, che la equazione (9) coincide colla (3) dell'Articolo III.; epperò il poliametro diventa un assintoto, allorchè si sostituisce ad huna radice della equazione (8).

Esempio primo. Per la solita linea del second' ordine la equazione (8) è la seguente

(P) $Ah^2 + 2Bh + C = 0$ da cui si traggono

 $h = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$

Se $B^2 - AC < 0$, i valori di h sono immaginarii, la curva si distende tutta entro uno spazio limitato; ed è quella che si chiama ellissi, come verrà in seguito dichiarato. Se $B^2 - AC > 0$, oppure $B^2 - AC = 0$ la curva ha rami infiniti: nel primo caso essa è dotata di centro (Esempio primo dell'Artic. II.) e si chiama iperbole: nel caso secondo ne è priva e si chiama parabola. Allorachè i valori di h sono reali, la equazione della retta assintotica si avrà sostituendo quei valori nella equazione (9), la quale nel caso presente non è altro che $E_{1,0} + hE_{0,1} = 0$ vale a dire

(Q)
$$(By + Cx + E) + h(Ay + Bx + D) = 0$$
.

Per l'iperbole i valori di h sono due, però la curva ha due assintoti rettilinei. Per la parabola poi, essendo $h = -\frac{B}{A}$, avremo

$$E_{1,0} + hE_{0,1} = (By + Cx + E) - \frac{B}{A}(Ay + Bx + D) =$$

$$= x \frac{AC - B^{2}}{A} + \frac{AE - BD}{A} = \frac{AE - BD}{A},$$

da che $B^2 - AC = 0$, dunque non può essere $E_{1,0} + E_{0,1} = 0$; cioè la parabola non ammette assintoto alcuno.

Esempio secondo. Per le linee del terzo ordine i valori di h, che corrispondono ai rami infiniti, sono le radici della equazione

$$E_{3,0} + hE_{2,1} + h^{2}E_{1,2} + h^{3}E_{0,3} = 0$$
;

il perchè le corde parallele alla retta y = hx incontrano la curva in due punti soli; e ad esse generalmente non corrisponde un triametro, ma bensì una linea diametrale del secondo ordine, come si è detto sul fine dell'articolo terzo.

Se
$$E(x,y) = 4y^3 - 6xy^2 + 2x^3 + 2ay^2 + 4ax^2 - b^3 = 0$$
,
la equazione (8) sarà $4h^3 - 6h^2 + 2 = 0$ cioè

$$(2h)^3 - 3(2h)^2 + 4 = 0$$

una radice della quale è 2h=-1, ossia $h=-\frac{1}{2}$. Il fattor lineare $h+\frac{1}{2}$ ci dà la equazione di quoto

$$(2h)^2-4(2h)+4=(2h-2)^2=0$$
,

da cui si ha la radice doppia h=1. La equazione (9), che rappresenta le rette assintotiche, nel caso attuale, è la seguente

$$2y.h(h-1)+x(1-h^2)+\frac{a}{3}(h+2)=0$$

la quale diventa assurda se vi poniamo h=1; ma fatto $h=-\frac{1}{2}$, fornisce $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$, che rappresenta un vero asintoto rettilineo. Se $E(x,y)=x^3y-2x^2y^2+xy^3-a^4=0$, la equazione (8) sarà

 $h - 2h^2 + h^3 + 0 \cdot h^4 = 0$

Una radice di essa è visibilmente $\frac{1}{h} = 0$, tolta la quale resta $h^3 - 2h^2 + h = 0$, che ha per radice semplice h = 0, e per radice doppia h = 1. Dunque quella linea ha varii rami, che si distendono all' infinito. Le rette assintotiche sono rappresentate da $h(h^2-4h+3)x+(1-4h+3h^2)y=0$ dalla quale fatto h=1/0, si cava x=0; posto h=0 ne viene y=0; e nell'ipotesi di h=1 si riduce ad y=x; epperò le tre linee rette x=0; y=0; y=x sono assintoti rettilinei della curva.

La equazione (9), come già si è detto, è lineare per rispetto ad x ed y, epperò della forma yP+xQ+R=0, in cui P, Q, R non contengono x ed y: il valore di P sarà adunque la derivata
del polinomio (9) presa rispetto ad y, ossia
(10) $P=E_{m-1,1}+2hE_{m-2,2}+3h\cdot E_{m-3,3}+...+mh^mE_{0,m}$;
Il coeficiente Q è la derivata dello stesso polinomio (9) presa rispetto ad x, per cui

$$(11) Q = mE_{m,0} + (m-1)hE_{m-1,1} + (m-2)h^2E_{m-2,2} + h^{m-1}E_{i,m-1}$$

Siccome poi la R rappresenta ciò, cui si riduce il polinomio (9) allorche si fanno x=0, y=0, avremo (12) R=

 $E_{m-1,0}(0,0)+hE_{m-2,1}(0,0)+h^2E_{m-3,2}(0,0)...+h^{m-1}E_{0,m-1}(0,0)$ Affinche la linea sia dotata di assintoto è necessario primamente, che sia $-\frac{Q}{P}=h$, cioè che la equazione Q+Ph=0 abbia radici comuni colla (8); ma

 $Q + Ph = m[E_{m,0} + hE_{m-1,1} + h^2E_{m-2,2} + + h^mE_{0,m}]$ dunque quella equazione Q + Ph = 0 è identica colla (8) medesima. La equazione Py + Qx + R = 0 non ostante sarebbe assurda, allorachè una radice della equazione (8) essendo semplice, ovvero multipla secondo lo stesso numero dell'una e dell'altra equazione P = 0, Q = 0, non lo fosse anche di R = 0, e multipla almeno quanto lo è di quelle due equazioni. Ma se un valore di h renderà per esempio P = R = 0 l'assintoto sarà rappresentato da x = 0, che è lo stesso asse delle ordinate y.

Essendo P—o l'assintoto sarà la retta $x = -\frac{R}{Q}$ parallela al detto asse. Se poi sarà R=o, l'equazione dell'assintoto essendo $P_Y + Q_X = 0$, esso passerà per l'origine delle coordinate.

Notiamo per ultimo, che il numero delle radici reali della equazione (8) qualche volta è minore del numero dei rami, che si estendono all'infinito, da che accade spesso, che molti rami incontrano all'infinito la stessa linea retta, talvolta da una medesima banda, talvolta da bande opposte.

en alter Aleb excircation is six empirically ones a figure of A.B.T. I. C.O.L.O. alvel, eds. wishes

Barrichber Etrols bragge illus ortanse to be been observed to be punti multiplicate all the orange

Abbiamo detto nell'Articolo IV., che essendo x=a, y=b le coordinate di un punto della linea E(x,y)=o, per cui E(a,b)=o, accade qualche volta, che si verificano ancora le due equazioni (13) $E_{1,o}(a,b)=o$.

Talvolta oltre alle (13) hanno pur luogo le tre seguenti (14) $E_{2,0}(a,b)$ =0, $E_{1,1}(a,b)$ =0, $E_{0,2}(a,b)$ =0, ed insieme ad esse equazioni possono verificarsi

le $E_{3,0} = 0$, $E_{2,1} = 0$, $E_{1,2} = 0$, $E_{0,3} = 0$

in virtù dei medesimi valori x=a, y=b delle coordinate del punto suddetto. Siccome le radici della equazione (a) del 4° articolo determinano le lunghezze delle rette l_1 , l_2 , l_3 , ... comprese fra il punto x=a, y=b e la curva, e variando il parametro h, epperò la direzione della retta y-b=h(x-a) segante la linea medesima, variano le grandezze di quelle parti l_1 , l_2 ...; da che la curva estendendosi nel suo piano e ripiegandosi, trovasi avere secondo varie direzioni dei punti che sono più o meno lontani gli uni dagli altri; così se in qualche luogo alcuni rami della linea si segano fra loro, ivi altrettanti valori delle parti l_1 , l_2 ... si ridurranno

a zero, qualunque sia la direzione della retta segante, che passa per lo stesso punto. Dunque più
valori di saranno nulli, epperò alcuni coeficienti
consecutivi della suddetta equazione (a), partendo
dal primo a sinistra verso destra, saranno eguali a zero,
qualunque sia il valore di h. Le coordinate di quel
punto soddisferanno perciò alle equazioni (13)
soltanto; o alle (13) (14) insieme; o a molte consecutive fra le equazioni (15).

In questo caso il punto della curva si chiama punto multiplo. Se per esso passano due rami, onde sono verificate le sole equazioni (13) il punto si dice doppio. Se per lo stesso punto x=a, y=b passano tre rami, per cui sono soddisfatte le equazioni (13) (14), il punto si chiama triplo, e così di seguito.

Alloraquando un punto di una curva è multiplo a ciascun ramo, che ivi passa, corrisponderà una retta tangente; cioè le tangenti in quel punto saranno tante quanti i rami che ivi si incontrano, ed altrettanti per ciò i valori di h che determinano quelle tangenti. Ecco il perchè in questo caso la equazione (4) dell'articolo 4.° trovandosi soddisfatta identicamente, ci è d'uopo ricorrere alla equazione $E_{2,0} + hE_{1,1} + h^2E_{0,2} = 0$

la quale, se il punto è soltanto doppio, dà due valori di h, epperò due rette tangenti. Ma se il punto è triplo in conseguenza delle equazioni (14) quella equazione in h del secondo grado è soddisfatta identicamente, e le direzioni delle tre tangenti la curva in quel punto vengono determinate dalla equazione $E_{3,0}+hE_{2,1}+h^{2}E_{1,2}+h^{3}E_{0,3}=0$ E così di seguito.

ARTICOLO VIL

Delle curve simili.

Consideriamo la solita linea E(x,y) = 0; una retta (r) y-b=h(x-a) condotta ad arbitrio per il punto x=a, y=b, e le parti l, l, l, l, ... di essa retta comprese fra quel punto e la curva. Supponiamo, che nel piano x y esista una seconda linea, l'equazione della quale, rispetto ai medesimi assi coordinati, sia c(x,y)=0. Se in quel piano potremo determinare una retta O(x) (fig. 26) ed in questa un punto O, tale che condotta per esso punto una retta, la quale formi con O(x) un angolo eguale all'angolo O(x), le parti O(x) un angolo essa retta comprese fra il punto O(x) e la curva O(x) e rendono i rapporti

$$\frac{L_1}{l_1}$$
, $\frac{L_2}{l_3}$, $\frac{L_3}{l_3}$

tutti dello stesso valore, qualunque sia la grandezza dell' angolo rx, le due linee E(x,y) = 0, e(x,y) = 0 si diranno simili fra loro. Le rette Ox, O'x'; ed i punti x=a, y=b ed O' si chiameranno rette, e punti omologhi rispetto a quelle linee. Per desumere dalle equazioni E(x,y) = 0, e(x,y) = 0 i caratteri analitici della simiglianza delle curve da esse rappresentate; determinare una retta Ox'

omologa ad Ox, ed in essa il punto O' omologo al punto x=a, y=b; supponiamo condotto l'asse Oy', cosicchè sia l' $ang.x'y'=ang.xy=\alpha$, e supposte x=a', y=b' le coordinate del punto O' riportiamo la curva e(x,y)=0 a questi nuovi assi. Ciò conseguiremo mediante le formole

(a)
$$x=a'+\frac{x'sen(x'y)+y'sen(y'y)}{sen \alpha}$$
,

$$y=b'+\frac{x'sen(x'x)+y'sen(y'x)}{sen \alpha}$$

(Articolo 5. Part. I.), qualora siano

$$Ang. y'y + Ang. y'x = Ang. x'y + Ang. x'x = \alpha,$$

 $Ang. yy' + Ang. xx' + \alpha = \alpha,$

ossia Ang.yy' + Ang.xx' = 0

epperd Ang. y'y < 0, se Ang. x'x > 0.

Una retta, la quale formi coll'asse Ox' un angolo eguale ad rx e passi per O', rispetto ai due assi Ox', Oy' sarà rappresentata dalla equazione y' = hx'; e per ottenere le parti di essa retta comprese fra il punto O' e la curva, indicate queste

incognite col simbolo γ , fatto $\frac{\lambda}{\sqrt{(1+2h\cos\alpha+h^2)}} = \tau$; poste $\alpha' = \tau$, $\gamma' = h\tau$ nelle formole (α), per cui si hanno

$$x = a' + \frac{sen(x'y) + h sen(y'y)}{sen\alpha} \tau,$$

$$y = b' + \frac{sen(x'x) + h sen(y'x)}{sen\alpha} \tau,$$

dovremo sostituire questi valori nella equazione

c(x,y) = 0. Se per brevità si pongono $(6) \frac{\operatorname{sen}(x'y) + h \operatorname{sen}(y'y)}{\operatorname{sen} \alpha} = m,$ $\frac{\operatorname{sen}(x'x) + h \operatorname{sen}(y'x)}{\operatorname{sen} \alpha} = n,$

fatta quella sostituzione, avremo la equazione seguente

(y) $e+(me_{1,0}+ne_{0,1})\tau+(m^2e_{2,0}+mne_{1,1}+n^2e_{0,2})\tau^2+$ $+(m^3e_{3,0}+m^2ne_{2,1}+mn^2e_{1,2}+n^3e_{0,3})\tau^3+ec.=0$, (Parte 2. Art. 1. eq. (1)) ove ho scritta la lettera e in luogo di ciò che si ottiene ponendo in e(x,y), x=a', y=b'. Se ad ogni valore di λ fornito da questa equazione deve corrisponderne uno di l per la equazione (1) Artic. I.) talchè il rapporto $\frac{\lambda}{l}$ abbia un dato valore, supposto $\frac{\lambda}{l}=p$, per cui $\frac{\tau}{t}=p$, le due equazioni $\frac{\tau}{l}=p$, le due equazioni $\frac{\tau}{l}=p$, le due equazioni

$$1 + \frac{E_{1,0} + hE_{0,1}}{E}t + \frac{E_{2,0} + hE_{1,1} + h^{2}E_{0,2}}{E}t^{2} + \text{ec.} = 0,$$

$$1 + \frac{me_{1,0} + ne_{0,1}}{2}p.t + \frac{m^{2}e_{2,0} + mne_{1,1} + n^{2}e_{0,2}}{e}p^{2}.t^{2}...=0$$

dovranno essere identiche, qualunque sia il valore di h. Saranno quindi

$$\frac{E_{1,0}+hE_{0,1}}{E} = \frac{me_{1,0}+nc_{0,1}}{e} p,$$

$$\frac{E_{2,0}+hE_{1,1}+h^{2}E_{0,2}}{E} = \frac{m^{2}e_{2,0}+mne_{1,1}+n^{2}e_{0,2}}{e} p^{2}, \text{ ec. ec.}$$

e rimesse le espressioni (6) di m, n; eguagliati in ciascuna equazione i coeficienti delle potenze omologhe di h, ne vengono

(16)
$$\frac{E_{1,0}}{E} = \frac{p}{e \cdot sen \alpha} \left\{ e_{1,0} sen(x'y) + e_{0,1} sen'(x'x) \right\},$$

$$\frac{E_{0,1}}{E} = \frac{p}{e \cdot sen \alpha} \left\{ e_{1,0} sen(y'y) + e_{0,1} sen(y'x) \right\}$$

$$\frac{E_{2,0}}{E} = \frac{p^{2}}{e \cdot sen^{2} \alpha} \left\{ e_{2,0} sen^{2}(x'y) + e_{1,0} sen(y'y) \cdot sen(x'x) + e_{0,2} sen^{2}(x'x) \right\}$$

$$\frac{E_{1,1}}{E} = \frac{p^{2}}{e \cdot sen^{2} \alpha} \left\{ 2e_{2,0} sen(x'y) \cdot sen(y'y) + e_{1,1} sen(y'y) \cdot sen(y'y) + e_{1,1} sen(y'x) \cdot sen(y'x) \right\}$$

$$\frac{E^{0,2}}{E} = \left\{ e_{2,0} sen^{2}(y'y) + e_{1,1} sen(y'y) sen(y'x) + e_{0,2} sen^{2}(y'x) \right\}$$

$$ecc. \qquad ecc. \qquad ecc.$$

Se da queste equazioni elimineremo le quantità a, b, a', b', p, Ang. x' x si otterranno le relazioni fra i parametri delle equazioni E = 0, c = 0, le quali stabiliscono la simiglianza delle curve; il valore dell' Ang.x'x determinerà la retta O'x' omologa all' asse Ox; e le equazioni x = a, y = b; x = a', y = b' rappresenteranno due punti omologi rispetto alle curve medesime.

Esempio. Se le linee E = 0, e = 0 fossero del second' ordine, supposto che il punto x = a, y = b sia il centro della prima, per cui $E_{1,0} = 0$, $E_{0,1} = 0$, in forza delle equazioni (16) dovranno essere

 $e_{1,0}=0$, $e_{0,1}=0$ cioè il punto x=a', y=b' omologo al punto x=a, y=b sarà il centro della curva e(x,y)=0. Fatto $xx'=\omega$, per cui $yy'=-\omega$, $x'y=\alpha-\omega$, $y'x=\alpha+\omega$. Supposti

$$\frac{p^2 E}{esen \ \alpha} = \frac{1}{\Delta}, \text{ ed}$$

 $e=A'y^2+2B'xy+Cx^2+D'y+2Ex+F'$ dalle tre ultime equazioni (16) si desumono

$$\Delta\sqrt{AC-B^2} = \{sen^2\omega + sen(\alpha - \omega)sen(\alpha + \omega)\}\sqrt{A'C-B'^2}$$
$$\Delta(A + C - 2B\cos\alpha) =$$

= $\{sen^2\omega + sen(\alpha - \omega)sen(\alpha + \omega)\}\ (A' + C' - 2B'cos\alpha)$ le quali divise l'una per l'altra riconducono alla condizione di simiglianza, già altrimenti ottenuta (Parte 2. artic. III. esempio 1)

ARTICOLO VIII.

Analisi delle linee del second ordine.

Data la equazione

 $E(x,y) = Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$, nella quale i parametri A, B, \ldots abbiano valori determinati, ci proporremo ora di esaminare l'andamento di quella linea, e varie proprietà importanti della medesima.

Îmmagino applicate alla curva delle corde parallelle all'asse delle y: Se nella equazione y=hx si

finge $\frac{1}{h}$ =0, la equazione $E_{1,0}+hE_{0,1}$ =0 del diame-

tro corrispondente a quelle corde diventa $E_{0,1}$ =0, vale a dire Ay + Bx + D = 0. Prendiamo ora per nuovi assi coordinati, cui riferire la curva, l'asse primitivo delle γ , ed il diametro $\gamma = -\frac{B}{4}x - \frac{D}{4}$, che chiamerò asse x'. Avremo adunque (Parte I. Artic. V.) $sen(\gamma \gamma') = 0$, $sen(x\gamma') = sen(x\gamma) = sen\alpha$: l'origine delle nuove coordinate sarà il punto, in cui la retta $y = \frac{B}{4}x - \frac{D}{4}$ incontra l'asse y'. ossia γ : epperò saranno a=0, $b=-\frac{D}{4}$: e mediante le form. 5. Artic. II. Part. I. avremo sen(x'x) =

$$= \frac{-\frac{B}{A}sen\alpha}{\sqrt{\left(1 - \frac{2B}{A}cos\alpha + \frac{B^2}{A^2}\right)}} = \frac{Bsen\alpha}{\sqrt{(A^2 - 2ABcos\alpha + A^2)}},$$

$$sen(x'y) = \frac{Asen\alpha}{\sqrt{(A^2 - 2ABcos\alpha + B^2)}}$$

cosicchè posto, per brevità, $\sqrt{(A^2-2AB\cos\alpha+B^2)}=R$, si avranno per la trasformazione delle coordinate le equazioni $x = \frac{Ax'}{R}$, $y = -\frac{D}{A} + y' - \frac{B}{D}$, per le quali la $E(x, \gamma) = 0$ si riduce ad

(a)
$$Ay'^{2} + \frac{A(AC - B^{2})}{R^{2}}x'^{2} + \frac{2(AE - BD)}{R} + \frac{AF - D^{2}}{A} = 0$$

Se la curva è priva di centro, $B^2 - AC = 0$, e la equazione

(b)
$$y'^2 + \frac{2(AE - BD)}{AR}x' + \frac{AF - D^2}{A^2} = 0$$

si semplifica ulteriormente trasportando l'origine delle coordinate nel punto dell'asse x', a cui corrispondono $x' = \frac{R(AF - D^2)}{2A(AF - RD)}$, y' = 0; cioè riferendo

la curva a due nuovi assi parallelli ai primi coll'origine nel punto suddetto, per il che la r' resta la medesima, e chiamata x'' la nuova ascissa avremo $x'=x''-\frac{R(AF-D^2)}{2A(BD-AE)}$, e la equazione della curva sarà ridotta ad

(c)
$$y'^2 = \frac{2(BD - AE)}{AR}x''$$
:

Se la linea del second'ordine è dotata di centro, questo punto è nell'asse x'. Per determinarne la posizione (Artic. II. Parte II.) eguaglieremo a zero le derivate di (b) prese rispetto alle coordinate x', y', e dalle equazioni che ne vengono, cioè y'=0, $\frac{A(AC-B^2)}{B}x'+(AE-BD)=0$ ne desumeremo (Artic. II. form. 2.) i valori delle coordinate. Si riferisca ormai la curva a due assi paralleli ad x', y' condotti per il centro, al quale intento basterà porre $x'=x''-\frac{(AE-BD)R}{A(AC-B^2)}$ nella equazione (6) e la risultante sarà (d) $\gamma'^2 + \frac{AC - B^2}{B^2} x''^2 = \frac{(AE - BD)^2 - (AC - B^2)(AF - D^2)}{A^2(AC - B^2)}$

$$(d) \gamma'^{2} + \frac{AC - B^{2}}{R^{2}} x''^{2} = \frac{(AE - BD)^{2} - (AC - B^{2})(AF - D^{2})}{A^{2}(AC - B^{2})}$$

Ripresa la equazione (c) notiamo, che essendo il primo membro essenzialmente positivo, se il coeficiente di x'' è positivo tutte le ascisse, a cui corrispondono ordinate reali, saranno pure positive: ma i valori di x'' dovranno essere negativi, quando lo sia il suo coeficiente. Supponiamo

$$\frac{2(BD-AE)}{AR} = P > 0$$
; omessi gli apici scriviamo

la equazione (c) come segue (e) $y^2 = Px$ ed indichiamo con Ox, Oy (fig. 27) gli assi coordinati, cui la curva è riferita. Si prenda nel prolungamento dell' asse Ox la parte OA=P, e siccome l'ordinata y corrispondente ad un punto qualunque deve essere media geometrica fra l'ascissa ed il parametro P, presa ad arbitrio x=Op, descritta sul diametro Ap la semicirconferenza $A\alpha$, condotta $O\alpha 6\gamma$... perpendicolare ad Ap; sarà $O\alpha^2 = OA \cdot Op = P \cdot Op$; all'ascissa x = Op corrisponderà l'ordinata $\gamma = O\alpha$, e condotte $ap = a'p = O\alpha$, parallelle all'asse Oy, i punti a, a' apparterranno alla curva che si considera. Avremo poi le ordinate bq, cr.... corrispondenti alle ascisse Oq, $Or \ldots$ descrivendo i semicerchj $A \in q$, $A \gamma r \ldots$; e quindi ponendo bq=b'q=06, $cr=c'r=0\gamma$, ecc.

Per delineare la curva rappresentata dalla equazione (d) distingueremo i due casi, in cui $B^2-AC < 0$, e $B^2-AC > 0$; epperò l'ellissi dall'iperbole: Se $B^2-AC < 0$, siccome il primo membro è positivo lo dovrà essere anche il secondo, altrimenti quella equazione è assurda. Poniamo per

brevità $\frac{AC-B^2}{R^2} = M$, il secondo membro della equazione (d) indichiamolo con N, per cui, ommessi gli apici, quella equazione assumerà la forma $y^2 + Mx^2 = N$. Siano (fig. 28) Ox, Oy gli assi coordinati, cui la curva è riferita: Fatto y=0 si hanno $x=\pm \sqrt{\frac{N}{M}}$, per cui prese nell'asse Oxe nel suo prolungamento le parti $OA = OA' = \sqrt{\frac{N}{M}}$ saranno A ed A' due punti della curva : così posto x=0, da quella equazione caveremo $\gamma=\pm\sqrt{N}$, per cui prese nell'asse Oy, e nel suo prolungamento le parti $OB = OB' = \sqrt{N}$, saranno B, B'due altri punti della curva. Per brevità poniamo $OA = \sqrt{\frac{N}{M}} = a$, $OB = \sqrt{N} = b$, onde $N = b^2$, $M = \frac{b^2}{a^2}$ e la equazione $\gamma^2+Mx^2=N$ si ridurrà ad $y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 = b^2$, ossia (f) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Per descriverla, cavato $y=\pm \frac{b}{\sqrt{a^2-x^2}}$, osserviamo che la y è reale fintanto che x < a: dippiù supposta x ==Op < a, descritto sul diametro AA' il semicerchio $AC\alpha$ 6 γA , condotta l'ordinata $p\alpha$ perpendicolare a quel diametro, sarà $p\alpha^2 = O\alpha^2 - Op^2 = a^2 - Op^2$: ma, essendo $y=ap=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-Op^2}=\frac{b}{a}.p\alpha$ ne segue $ap: \alpha p = b: a = OB: OC$; i triangoli $ap\alpha$, BOCsaranno simili, e la retta az parallella a BC. Dun-

que troveremo le ordinate qb, rc corrispondenti alle ascisse Oq, Or... conducendo nel circolo A'CA le ordinate $q6, r\gamma...$, poi le rette 6b, $\gamma c \dots$ parallelle BC, ed i punti $b, c \dots$ apparterranno alla curva. Siccome poi ad ogni ascissa Op, Oq... corrispondono due ordinate ap = a'p, bq=b'q, cr=c'r... eguali e di segno opposto, i punti a', b', c'... si troveranno anch'essi in quella linea: E poichè i valori di y forniti dalla equazione $y=\pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, corrispondenti ai valori di x di eguale grandezza ed opposti nel segno sono eguali, ne viene che all'ascissa Op' = Op, ma negativa, corrisponderanno le ordinate p'a" positiva, e p'a" negativa, entrambe eguali all'ordinata ap. Così all'ascissa Oq'=Oq corrisponderanno le due ordinate q'b''=q'b'''=qb ecc. ecc. E per tal maniera viene descritta l'ellissi rappresentata dalla equazione proposta.

Consideriamo finalmente il caso, in cui $B^2-AC>0$. Il secondo membro della equazione (d) potrà essere indifferentemente positivo o negativo. Supponiamo che sia negativo, rappresentiamolo con -N, e poniamo $\frac{B^2-AC}{R^2}=M$, per cui quella equazione si riduce ad $y^2-Mx^2=-N$; ommettendo gli apici alle coordinate. Fatto in quella equazione y=0 si ottiene $x=\pm \sqrt[N]{\frac{N}{M}}$, cioè la curva incontra l'asse Ox (fig. 29) ed il prolun-

gamento in due punti A, A' tali che OA=OA= $V_{\overline{M}}^{N}$: Se poi si fa x = 0 l'equazione assurda γ²=-N dimostra che la curva non è incontrata dall'asse Oy. Poniamo $OA = \sqrt{\frac{N}{M}} = a$, $OB = b = \sqrt{N}$, cosicchè saranno $N=b^2$, $M=\frac{b^2}{a^2}$, e la equazione della linea assumerà la forma seguente $y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = -b^2$, ovvero $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: Per descriverla, caviamo $\gamma = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, d'onde si raccoglie dover essere x>a, e poichè la x può crescere oltre il valore a senza limite alcuno, la curva si estenderà all'infinito a destra ed a sinistra dell'asse yOy'. Considero qualunque ascissa Op>a; l'ordinata pa ad essa corrispondente, sarà data dalla equazione $pa = \frac{b}{a} \sqrt{Op^2 - OA^2}$: se ora sul diametro AA' descriveremo il semicerchio ACA', condotta ad esso la tangente pa avremo $p\alpha^2 + O\alpha^2 = Op^2$, ossia $p\alpha = \sqrt{Op^2 - OA^2}$, e sarà quindi l'ordinata $pa = \frac{OB}{OA}p\alpha$, cioè $pa:p\alpha = OB:OA$, vale a dire l'ordinata pa dell'iperbole corrispondente a qualunque ascissa Op avrà alla retta pa, tangente il circolo ACA, una ragione geometrica eguale a quella delle rette OB ed OA. L'ordinata qb si avrà conducendo la tangente q6, poi prendendo qb:q6=OB;OA: e nello stesso modo determineremo le ordinate rc, sd... corrispondenti alle ascisse Or, Os... Ad ogni ascissa Op, Oq... corrisponderanno anche le ordinate opposte pa'=pa qb'=qb, rc'=rc...; e per le ascisse negative Op'=Op, Oq'=Oq...., avremo le ordinate p'a''=p'a'''=pa; q'b''=q'b'''=qb... due a due eguali ed opposte; onde per tal maniera verrà descritta l'iperbole, la quale consta di due rami bAb', b''A'b''' fra loro separati, e che si estendono entrambi all' infinito. Se il secondo membro della equazione (d) fosse

positivo; moltiplicandola per $\frac{R^2}{AC-B^2}$ si ridurrà alla forma $x^2-My^2=-N$, e si tratterà come la precedente.

Conoscendo l'andamento di ciascuna linea del second' ordine, occupiamoci alcun poco intorno ad alcune proprietà delle medesime, le quali facilmente derivano dalle equazioni (e)(f)(g), le più semplici fra coordinate rettilinee.

La linea MOV (fig. 30) rappresenti una parabola, Ox un diametro, Oy la tangente parabella alle corde corrispondenti allo stesso diametro Ox (Artic. IV. Esemp.). La equazione di quella linea generalmente ha la forma

 $E(x, \gamma) = A\gamma^2 + 2Bx\gamma + Cx^2 + 2D\gamma + 2Ex + F = 0$, in cui $B^2 - AC = 0$, ma essendo Ox, Oy gli assi coordinati ad ogni ascissa α devono corrispondere due valori di γ eguali e di segno opposto, epperò nella equazione

$$y^2 + 2y \frac{Bx + D}{A} + \frac{Cx^2 + 2Ex + F}{A} = 0$$

deve essere Bx+D=0, qualunque sia il valore di x, saranno cioè B=0, D=0. Dunque dalla equazione $B^2-AC=0$ ne segue AC=0, e siccome non può essere A=0, altrimenti sparirebbe la y dalla funzione E(x,y); sarà C=0. Finalmente, siccome O è un punto della curva, le coordinate x=0, y=0 di esso devono rendere soddisfatta la sua equazione, per cui sarà F=0, e

la equazione stessa si riduce ad $y^2 + \frac{2E}{A}x = 0$. Il pa-

rametro $\frac{2E}{A}$, che deve essere negativo, indichia-

molo con -P, e la linea MOV verrà rappresentata dalla relazione $E(x, y) = y^2 - Px = 0$.

Ciò premesso osserviamo, che essendo $E_{1,0} = -P$; $E_{0,1} = 2\gamma$, la equazione $E_{1,0} + hE_{0,1} = 0$ del diametro corrispondente alle corde parallelle alla ret-

ta $\gamma = hx$ sarà $2h\gamma - P = 0$, ossia $\gamma = \frac{P}{2h}$, per cui

presa nell'asse Oy la parte $OT = \frac{P}{2h}$, la retta

TMx' parallella all'asse Ox, sarà il diametro che corrisponde a quelle corde. La retta $TM\gamma'$ parallella alle corde medesime, sarà tangente la curva in M (Art. IV. Esem. 1.), cioè, analogamente ad una retta, la quale tocchi una circonferenza, la retta TM incontra la curva in M e prolungata non la sega, mentre se la tagliasse nuovamente in H la

140 corda MH non sarebbe divisa dal diametro Mx' in due parti eguali. Essendo MP l'ordinata del punto M, la equazione della retta MT sarà y-MP=h(x-OP), da cui ponendo y=0 si desume $x = -OT = -\left(\frac{MP}{h} - OP\right)$; e siccome MP = P.OP, $MP = \frac{P}{ch}$, ne viene OT = OP, cioè la parte del diametro Ox compresa fra la tangente MT, e l'ordinata MP del punto M di contatto è divisa in O dalla curva in due parti eguali. Volendo riferire la curva agli assi My', Mx', siccome le coordinate della nuova origine M sono $a=OP=\frac{MP^2}{P}=\frac{P}{4h^2}$, $b=MP=\frac{P}{2h}$; e sen(x'x)=0, $sen(x'y) = sen\alpha$; $\frac{sen(y'x)}{sen(y'x)} = h$, $sen(\gamma'x) = \frac{h sen\alpha}{\sqrt{(1+2hcos\alpha+h^2)}}, sen(\gamma'y) = \frac{sen\alpha}{\sqrt{(1+2hcos\alpha+h^2)}}$ (Part. I. Artic. II. form. 5.), le formole per la trasformazione delle coordinate saranno (Part. I. Artic. V.) $x = \frac{P}{hh^2} + x' + \frac{y'}{R}$, $y = \frac{P}{2h} + \frac{hy'}{R}$, ove $R = \sqrt{1 + 2h\cos\alpha + h^2}$; e la equazione $\gamma = Px$ si riduce ad $y'^2 = \frac{P(1+2h\cos\alpha+h^2)}{h^2} x' = P\frac{\sin^2(xy)}{\sin^2(xy)} x'$. Dunque indicato con P' il parametro corrispondente al nuovo sistema di assi coordinati, l'equazione della curva sarà y' = P'x', ove

 $P': P = sen^{2}(x\gamma): sen^{2}(x'\gamma')$. Se gli assi coordinati saranno l'asse della curva, che rappresento con AVF e la tangente nel punto V, che chiamasi il vertice della curva, il parametro corrispondente, che indico con II, si avrà ponendo sen(x'y')=1 nel valore $P = P \frac{\dot{sen}^2(xy)}{sen^2(x'y')}$ e sarà $\Pi = P.sen^2(xy)$: Le coordinate del vertice poi si desumono dalle formole $a=OP=\frac{P}{hh^2}$, $b=MP=\frac{P}{2h}$ ponendo $h=-\frac{1}{\cos\alpha}$ (Art. II. form. (10)), e sono $a = \frac{P\cos\alpha^2}{\Lambda}$, $b = \frac{P}{2}\cos\alpha$. Nell'asse CVF si prendano le parti VF= =VC=1/4II, si conducano CD, MQ perpendicolari all' asse medesimo, e si prolunghi la retta Mx' in D. Essendo $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{FQ}^2 = \Pi \cdot VQ + (VQ - 1/4\Pi)^2 =$ $=(VQ+\frac{1}{4}\Pi)^2$, ossia $FM=VQ+\frac{1}{4}\Pi=VQ+VC=CQ$ siccome VU=VQ, VU+VF=VQ+VC sarà FU=CQ=FM=MD, epperò qualunque punto della parabola è distante da F, quanto dalla retta CD: Essendo poi isoscele il triangolo UFM, l'angolo FMU=Ang.MUF=Ang.y'Mx', ne segue che da qualsivoglia punto M della parabola condotte il diametro Mx', e la retta MF, che va al punto F, queste rette formano angoli eguali colla retta TMH tangente la curva nello stesso punto M: Di qui si deduce, che se la retta DMx', considerata come rigida, si facesse scorrere dalla direzione CQ verso Mx', sempre perpendicolare a

CD, e che un filo di lunghezza arbitraria DMx', fosse cogli estremi fissato in F ed x', e teso in parte lungo la retta Mx', in parte da M verso F, supposta M la punta di una matita, questa descriverà la curva che si considera. [In consequenza di tale proprietà la retta CD si chiama direttrice della parabola.

Avendo notato, che gli angoli y'Mx', FMT sono eguali comprendiamo, che quando delle onde sonore o luminose parallele ai diametri Mx', Ox... incontrassero la curva, riflettendosi verrebbero a concorrere nel punto F, il quale perciò è chiamato fuoco della parabola.

Si supponga FM=r, $Ang.MFQ=\omega$, e siccome $FQ=rcos\omega$ la equazione $FM=\frac{1}{4}\Pi+VQ=\frac{1}{2}\Pi+FQ$ fornirà $r=\frac{1}{4}\Pi+rcos\omega$, ossia $r=\frac{\Pi}{2(1-cos\omega)}$: che è

una equazione polare della curva.

Consideriamo l' ellissi ABA'B' (fig. 31.) riferite a due diametri conjugati Ox, Oy. Fra le coordinate x, y di qualunque punto dovrà aver luogo una relazione della forma

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

e siccome ad ogni ascissa x devono corrispondere due ordinate eguali e di segno opposto il coeficiente $\mathbf{2}(Bx+D)$ della y lineare dovrà essere nullo; epperò B=D—o. Così dovendo ad ogni ordinata corrispondere due ascisse eguali e di segno contrario, ne viene che debba essere E—o. In conseguenza la equazione della curva sarà

 $-A\gamma^2 + Cx^2 + F = 0.$

Per l'ellissi poi deve essere $B^2 - AC = -AC < 0$, dunque A, C avranno segni eguali fra loro, ed opposti ad F. Siccome fatto $\gamma = 0$ si ha $x = \pm \sqrt{\frac{F}{C}}$, che

chiamo a; e supposto γ =0 ne viene $\gamma=\pm \sqrt{-\frac{F}{A}}$, che indico con b; supposti

OA = OA' = a, OB = OB' = b, avremo

$$\frac{E}{F} = -\frac{1}{a^2}, \quad \frac{A}{F} = -\frac{1}{b^2},$$

e la equazione $Ay^2+Cx^2+F=0$

si ridurrà ad $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Da questa equazione

si cavano $E_{i,0} = \frac{2x}{a^2}$, $E_{0,i} = \frac{2y}{b^2}$ per cui il dia-

metro corrispondente alle corde parallele alla retta r=hx verrà dato dalla equazione

$$E_{1,0} + hE_{0,1} = 2\left(\frac{x}{a^2} + \frac{hy}{b^2}\right) = 0$$

$$cioè \qquad y = -\frac{b}{a^2h} x.$$

Questo diametro sia OM; ed MT parallela alle corde corrispondenti ad esso, cioè alla retta $\gamma = hx$, sarà tangente la curva in M. Supposte le coordinate del contatto MP = 6, $OP = \alpha$ la equazione di MT desunta dalla formola (4) Artic. IV., oppure dalla (N) dell' esempio, sarà $\frac{6y}{b^2} + \frac{\alpha x}{a^2} = 1$. Se vi poniamo $\gamma = 0$, ne segue $x = OT = \frac{a^2}{a} = \frac{OA^n}{OP}$,

cosicchè descritta dal centro O con raggio OA la circonferenza AN, condotta l'ordinata PN perpendicolare ad OA, quindi la retta TN, siccome $OA^2 = ON^2 = OP \cdot OT$, sarà TN tangente al cerchio in N; e quindi, dovendosi condurre la retta tangente l'ellissi in un punto qualunque M della medesima, basterà tracciarne l'ordinata MP, la PN ordinata del circolo AN normale ad OA, poi la NT tangente il cerchio in N, e la retta MT sarà la toccante cercata. Questa retta incontra la curva in M, e prolungata non la sega; come si è già detto della parabola.

Abbiamo dimostrato, che la somma de' quadrati di due diametri conjugati qualunque, ha sempre lo stesso valore; e che è pure costante l'area del parallelogrammo descritto sulle medesime rette; e siccome condotte per B, B' le CBD, FBE parallele ad AA'; e per A, A' le rette DAE, CA'F parallele a BB', queste parallele sono tangenti l'ellissi, e determinano un parallelogrammo circoscritto alla curva, l'area del quale è quadrupla dell'area OBDA, ne segue che tutti i parallelogrammi circoscritti, i lati dei quali sono paralleli ai diametri conjugati hanno la medesima estensione.

Siano GOG', HOH' i diametri conjugati ortogonali, cioè gli assi della curva, i quali si determinano colla equazione (E) Artic. III. esempio 1.° Siano $OG = \alpha$, OH = 6, $\alpha > 6$, ed indicate con x, y le coordinate OQ, MQ di qualsivoglia punto M della curva riferita a quei diametri ortogonali, per le ragioni addotte, la equazione di essa sarà

 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{6a^2} = 1$. Prendiamo nell' asse GOG' le parti $OF = OF' = \sqrt{\alpha^2 - 6^2}$, e conduciamo le rette FM, F'M: siccome $FM^2 = MQ^2 + FQ^2 = MQ^2 + (OQ - OF)^2 =$ $= MQ^2 + OQ^2 - 2.0Q.OF + OF^2$, $F'M^2 = MQ^2 + OQ^2 + 2.0Q.0F + OF'^2;$ $MQ^2 = 6^2 - \frac{6^2}{r^2} OQ^2$, ne vengono $FM^2 = 6^2 - \frac{6^2}{a^2} \cdot OQ^2 + OQ^2 - 2 \cdot OQ \cdot OF + \alpha^2 - 6^2 =$ $=\frac{\alpha^2-6^2}{\alpha^2}.OQ^2-2.OQ.OF+\alpha^3=$ $=\alpha^2-2.0Q.OF+\frac{OF^2}{\alpha^2}.OQ^2=\left(\alpha-\frac{OF}{\alpha}.OQ\right)^2$ ossia $FM = \alpha - \frac{OF}{\alpha}.OQ$, ed $FM = \alpha + \frac{OF}{\alpha}.OQ$; $FM + F'M = 2\alpha = GG'.$ epperò cioè i due punti F, F godono della singolare proprietà, che la somma delle rette guidate da essi a qualunque punto della curva è eguale all' asse maggiore GG'; cosicchè fissato un filo della lunghezza GG' cogli estremi uno in F l'altro in F, la punta di una matita, la quale si muova tendendo il filo medesimo, disegnerà l'ellissi che si considera.

Supponiamo, che la tangente TMU venga prolungata ad incontrare l'asse OGU: siccome

ossia

$$OU = \frac{\alpha^2}{OQ}, \text{ avremo}$$

$$FU = \frac{\alpha^3}{OQ} - OF = \frac{\alpha^2 - OQ \cdot OF}{OQ},$$

$$\text{e poichè } FM = \frac{\alpha^2 - OQ \cdot OF}{\alpha}, \text{ ne viene } \frac{FM}{FU} = \frac{OQ}{\alpha}.$$

$$Abbiamo \text{ pure } F'U = \frac{\alpha^2 + OQ \cdot OF}{OQ}.$$

$$F'M = \frac{\alpha^2 + OQ \cdot OF}{\alpha},$$

$$\text{dunque } \frac{FM}{FU} = \frac{OQ}{\alpha} = \frac{FM}{FU}; \text{ quindi}$$

ossia senFMU = senFMU; FMU, FMU sono angoli di supplemento, epperò FMU, FMT sono eguali fra loro. Di qui ne viene, che partendo da F delle onde luminose o sonore, e riflettendosi queste all' incontro della curva, verranno a concorrere in F': per la quale proprietà i due punti F, F' furono chiamati fuochi della ellissi. Si facciano FM = r, $Ang. MFG = \omega$, per cui $OQ = OF + rcos \omega$, e la equazione

 $\frac{\operatorname{sen} F \, \mathbf{UM}}{\operatorname{sen} F \, \mathbf{M} \, \mathbf{II}} = \frac{\operatorname{sen} F \, \mathbf{UM}}{\operatorname{sen} \, F \, \mathbf{M} \, \mathbf{II}},$

$$FM = \alpha - \frac{OF}{\alpha} OQ \text{ si ridurrà ad}$$

$$r = \alpha - \frac{OF^2}{\alpha} + \frac{OF}{\alpha} \cdot r \cos \omega,$$

$$r = \frac{6^2}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 6^2 \cdot \cos \omega}}$$

che si chiama equazione polare della ellissi.

Passiamo per ultimo a considerare l'iperbole. Siano (fig. 32) Ox, Oy le direzioni di due diametri conjugati, cui si riferisce la curva. La equazione di essa avrà generalmente la forma

147

 $\Delta \gamma^2 + 2Bx\gamma + Cx^2 + 2D\gamma + 2Ex + F = 0$ e siccome ad ogni valore dell'ascissa x devono corrispondere due ordinate y eguali ed opposte nel segno, ed ogni valore di y deve dare due valori eguali di x e di segno contrario saranno B=D=E=0: come già si è detto parlando dell'ellissi. Siccome poi $B^2-AC=-AC>0$, $A \in C$ avranno segni opposti, e la equazione della curva avrà la forma $Ay^2 + Cx^2 + F = 0$. Supponiamo il segno di C contrario a quello di F. Posto in quella equazione y=0 si hanno le ascisse reali $x=\pm \sqrt{-\frac{F}{C}}$ per cui la curva sega l'asse x'Ox in due punti A, A' tali che $OA = OA = \sqrt{-\frac{F}{C}}$: ma non incontra poi l'asse y'Oy, da che fatto x=0 quella equazione ci dà $y=\pm\sqrt{-\frac{F}{I}}$ immaginario. Supponiamo $\sqrt{-\frac{F}{C}} = a$, $\sqrt{\frac{F}{A}} = b$, ossia $\frac{C}{F} = -\frac{1}{m}$, $\frac{A}{F} = \frac{1}{m}$, e la curva verrà rappresentata dalla equazione

 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

la quale trattata siccome quella affatto analoga dell'ellissi condurrà a simili conseguenze. Proyeremo, che la equazione della curva riferita ai due diametri ortogonali, o assi, ha la forma seguente

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6^2}=1,$$

che l'asse delle γ non incontra quella linea, e che nell'asse delle α esistono due fuochi, determinati dalle ascisse $\alpha = \pm \sqrt{\alpha^2 + 6^2}$, le cui distanze da qualunque punto della curva differiscono l'una dall'altra di una quantità, che eguaglia la lunghezza α dell'asse reale; e quelle rette formano colla tangente la curva in quel punto angoli eguali fra loro.

L'iperbole, come già abbiamo notato (Artic. V. esempio 1.º) è dotata di due assintoti rettilinei, i quali si determinano mediante le due equazioni

 $E_{2,0} + hE_{1,1} + h^{2}E_{0,2} = 0$, $E_{1,0} + hE_{0,1} = 0$, la prima delle quali ci dà i valori di h, la seconda stabilisce la posizione dell'assintoto. Siccome

$$E(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$
; $E_{1,0} = \frac{2x}{a^2}$; $E_{0,1} = -\frac{2y}{b^2}$;

$$E_{2,0} = \frac{1}{a^2}$$
; $E_{1,1} = 0$; $E_{0,2} = -\frac{1}{b^2}$,

quelle equazioni si riducono alle seguenti

$$\frac{1}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 0$$
, $\frac{x}{a^2} - \frac{hy}{b^2} = 0$,

vale a dire

$$h=\pm\frac{b}{a}, \quad \gamma=\pm\frac{b}{a}x$$
:

epperò gli assintoti passano per il centro della curva. Siccome poi all' ascissa x=OA=a corrispondono le ordinate $y=\pm b$ ne segue, che condotte AC=AC=b parallele all' asse yOy' gli assintoti saranno le rette OCx', OCy' estese indifinitamente da ambe le parti. Se OB, OE rappresentassero le direzioni di due altri diametri conjugati dell'iperbole che si considera, siccome OB incontra la curva in B, OE non la incontrerebbe, e la equazione di questa linea riportata agli assi coordinati OB, OE avrebbe la forma

$$\frac{x^2}{OB^2} - \frac{y^2}{H^2} = 1,$$

ove $OB^2 - H^2 = a^2 - b^2$ (Artic. III. esemp. 1.°). Volendo col mezzo delle rette OB, H determinare gli assintoti Ox', Oy' dovremo condurre per B la DBD' parallela ad OE, ossia tangente la curva in B, prendere DB = D'B = H, e le rette OD, OD' rappresenterebbero gli assintoti. Dunque essendo OB un semidiametro reale dell' iperbole, il conjugato immaginario sarà la retta DBD' tangente la curva in B, compresa fra gli assintoti, la quale è divisa nel contatto in due parti eguali.

Proponiamoci ormai di riferire la curva ai due assintoti Ox', Oy' quali assi coordinati. Ricorrendo alle formole dell'Art. V. Parte I. notiamo, che le coordinate della nuova origine sono nulle: che

$$sen(y'x) = \frac{b sen \alpha}{\sqrt{(a^2 - 2abcos\alpha + b^2)}}$$

poiche $\hat{y} = \frac{b}{a} x$ è l'equazione della retta Oy;

che sen
$$(\gamma'\gamma) = \frac{asen\alpha}{\sqrt{(a^2-2abcos\alpha+b^2)}}$$
,

sen $(x'x) = -\frac{bsen\alpha}{\sqrt{(a^2-2abcos\alpha+b^2)}}$,

sen $(x'\gamma) = \frac{asen\alpha}{\sqrt{(a^2-2abcos\alpha+b^2)}}$,

essendo $\gamma = -\frac{b}{a}x$ la equazione dell'asse Ox'; quindi ne vengono le equazioni di trasformazione $x = \frac{a(x+y)}{\sqrt{(a^2-2ab\cos\alpha+b^2)}}, \ y = \frac{b(y-x)}{\sqrt{(a^2-2ab\cos\alpha+b^2)}}$ da cui cavati $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, e posti nella equazione $\frac{x}{2} - \frac{y}{h} = 1$, si ottiene $x'y' = \frac{a^3 - 2ab\cos\alpha + b^2}{a^2 - 2ab\cos\alpha}.$

Se dunque da qualsivoglia punto M della curva si conducono le coordinate $MP=\gamma'$, OP=MQ=x', parallele agli assintoti, sara

MP.
$$OQ = \frac{a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2}{2}$$
 ossia
OP. OQ . $sen \alpha = \frac{a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2}{2}$ $sen \alpha$;

epperò »l' area del parallelogrammo compreso fra »le coordinate di qualsivoglia punto dell' iperbole "riferita ai propri assintoti, ha una estensione co-»stante.

Siccome, condotta da qualunque punto M del-

l'iperbole l'ordinata MR ad un diametro OAx. ed estesa fino all'incontro dell'assintoto OCS, si ha $MR^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot OR^2 - b^2$, $\frac{SR}{OR} = \frac{CA}{OA} = \frac{b}{a}$; ne se- $SR^{2} = \frac{b^{2}}{a^{2}} \cdot OR^{2}, SR^{2} - MR^{2} = b^{2}$ guono

 $(SR+MR)(SR-MR)=b^* \text{ ed } MS=\frac{b^*}{SR+MR}.$

Ma quanto più l'ordinata MR è discosta dall'asse Oy tanto più è grande la somma SR+MR, quindi tanto più piccola è la retta SM, epperò la curva si avvicina sempre più all'assintoto senza raggiungerlo giammai.

Fra le tante proprietà delle linee del second' ordine dotate di centro ve n'ha una molto singolare, di cui ne addurrò una dimostrazione semplicissima. Riferite quelle linee ai loro assi possono rappresentarsi entrambe dalla equazione r = Cx + FSiano x', y' le coordinate di un punto; x'', y''quelle di un altro presi in quella linea. Le rette che ivi toccano la curva saranno date dalle equazioni $\gamma \gamma' = Cxx' + F$, $\gamma \gamma'' = Cxx'' + F$ (Artic. IV. esempio. form. (N)), e supposte perpendiculari fra loro avremo $I + \frac{C^2 x'x''}{y'y''} = 0$ (Parte I. Art. II. form. (9)). Poniamo per brevità y'=ax', per cui

 $y^{y}=-rac{c_{ullet}}{a}x^{y}$ and the contractions

Se dalle equazioni y'2=Cx'2+F, yy'=Cxx'+F, y'=ax' 152 eliminismo x', 7' si ottiene

eliminismo x', y' si ottiene $(a^3 - C)F = (ay - Cx)^3$, ove cambiata a in $-\frac{C^3}{a}$ avremo

$$\left(\left(\frac{C^2}{a}\right)^2 - C\right)F = \left(-y\frac{C^2}{a} - Cx\right)^2$$
ossia $(ax + Cy)^2 = \left(C^2 - \frac{a^2}{C}\right)F$,

che risulta eliminando x'', y'' fra le tre equazioni $y''^2 = Cx^{\mu^2} + F$, y'' = Cxx'' + F, $y'' = -\frac{C^2}{a}x''$.

Se ora si finge, che le ordinate x, y, le quali entrano nelle due equazioni

$$(ay - Cx)^2 = (a^2 - C)F$$
, $(ax + Cy)^2 = \left(C^2 - \frac{a^2}{C}\right)F$,

appartengano al punto comune alle due tangenti ortogonali, quelle equazioni dovranno sussistere contemporaneamente; perciò fatta la loro somma, e soppresso il fattore $a^2 + C^2$, ne deriva

$$x^2 + \gamma^2 = F \frac{|C_1|}{C}.$$

dalla quale apprendiamo che »Se due rette tanmegenti una linea del second'ordine dotata di cenn tro sono perpendicolari fra loro, il vertice deln l'angolo retto si trova su di una periferia circomelare concentrica a quella linea, ed il cui raggio
n quadrato, nella ellissi eguaglia la somma dei quan drati dei suoi assi, e nell'iperbole la differenza
n dei quadrati degli assi medesimi.

Sul finire dell' Art. V. della Parte I. ho asse-

rito, che una opportuna scelta di coordinate conduce talvolta a risolvere questioni, anche intralciate, con eleganza e speditezza. Recherò ad esempio una risoluzione del problema importante, in cui si deve tracciare la linea del second' ordine che passa per cinque punti dati, la quale risoluzione conseguisco mediante un genere rimarcabile di coordinate (1). I punti dati siano (fig. 33.) A, B, C, M' ed M"; CAx, CBy gli assi coordinati; AC=a, BC=b, per cui la equazione della linea avrà la forma

$$y(b-y) + Ax(a-x) + Bxy = 0;$$

$$\frac{b-y}{x} + A\frac{a-x}{y} + B = 0;$$

come facilmente si dimostra. Supposto M il punto determinato dalle coordinate x, y denominiamo Ang. ACB=m, Ang. CBM=ω, Ang. CAM=θ, e siccome

$$\frac{b-y}{x} = \frac{sen(m+\omega)}{sen \omega} = (cot. m + cot. \omega) sen m,$$

$$\frac{a-x}{y} = \frac{sen(m+\theta)}{sen \theta} = (cot. m + cot. \theta) sen m.$$

la equazione della curva si trasforma nella seguente $\cot \omega + A \cdot \cot \theta = C$,

ove ho supposto $C = -\frac{B}{senm} - (1+A)cot.m$. Facciamo $cot.\theta = \alpha$, $cot.\omega = 6$; indichiamo con α' , 6; α'' , 6'' i valori di α , 6 corrispondenti ai punti M'

(1) Memorie di Matematica. Pavia 1831. Tipografia Bizzoni. Memoria settima. 154 ed M', ed eliminate A, C dalle equazioni $6+A\alpha=C$, $6'+A\alpha'=C$, $6'+A\alpha''=C$,

la linea del second'ordine, che passa per i cinque punti dati, verrà rappresentata dalla equazione

(h)
$$6(\alpha'-\alpha'')-6'(\alpha-\alpha'')+6''(\alpha-\alpha')=0$$

analoga alla. (4) Parte I. Artic. II., la quale indica una linea retta obbligata a passare per due punti. Questa osservazione ci conduce più oltre. Prolungata AM' in m', formiamo l'angolo $ACm' = CBM' = \omega'$, ed indichiamo con x', y' le coordinate ortogonali del punto m' riferito all'asse CAx coll'origine in C. Si formi ancora l'angolo $ACm'' = CBM'' = \omega''$, e siano x'', y'' le coordinate ortogonali del punto m'', rispetto ai medesimi assi. Chiamato m quel punto, che ha rispetto ad M la stessa proprietà che ha m' in riguardo ad M', siano x, y le coordinati di m. È facile il vedere

che 6=
$$\cot\omega'=\frac{x'}{y'}$$
, $\alpha'=\cot\theta'=\frac{a-x'}{y}$, $\theta'=\frac{x''}{y''}$,

$$\alpha'' = \frac{a - x''}{y''}$$
, e per conseguenza $6 = \frac{x}{y}$, $\alpha = \frac{a - x}{y}$,

mediante le quali relazioni la equazione (h) si trasforma nella seguente

$$(k) x(y'-y'')-x'(y-y'')+x''(y-y')=0$$

e questa ne insegna che i punti m', m'', $m \dots$ sono situati in una linea retta. Potremo perciò determinare quanti punti si vogliono della linea in questione, da che condotta qualunque retta ANn, la quale incontri m'm'' in n, tracciata Cn, e for-

mato l'angolo CBN=Ang.ACn, il punto N comune alle rette AN, BN apparterrà a quella linea. Nella memoria citata si trova esposto un altro metodo, le applicazioni ai principali problemi relativi all'argomento, ed alcuni teoremi curiosi.

Non insisto ulteriormente sulle linee del second'ordine, giacche lo studio delle loro proprietà fa parte delle matematiche pure elementari, e stimo esercizio da lasciarsi agli studiosi la ricerca delle dimostrazioni analitiche di tante relazioni singolari a dovizia raccolte specialmente nel Trattato dei Conici di Apollonio Pergeo.

ARTICOLO IX.

Intorno ad alcune proprietà delle lines del terzo ordine.

Poche cose ci è dato di dire intorno alle linee del terzo ordine. La loro classificazione in ordini e specie, che Newton ed Eulero hanno desunta dalle proprietà dei rami infiniti non sembra presentare utilità notabile, onde mi limiterò ad esporre quanto mi venne fatto di osservare intorno a queste linee in altra occasione (*).

Essendo

(a)
$$E(x, y) = Ay^3 + 3By^3x + 3Cyx^2 + Dx^3 + Ey^3 + 2Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = 0$$

^(*) Sui triametri delle linee di terzo ordine — Annotazioni — Annali delle Scienze del Regno Lombardo - Veneto. T. VII. 1837.

la equazione, che rappresenta una linea del terzo ordine riferita a due assi rettilinei; supponiamo che non siano nulli nello stesso tempo i due coeficienti A e D. Se non è A = 0, immaginato un sistema di corde parallelle all'asse delle γ , la equazione del triametro corrispondente, che si cava

dall' esemp. 2. Artic. III. ponendovi $\frac{1}{h} = 0$ sarà $A\gamma + Bx + \frac{1}{3}E = 0$. Se la curva vien riportata a questo triametro e all'asse attuale delle ordinate y, mediante formole analoghe a quelle ottenute sul principio dell'articolo antecedente, la equazione E(x, y) = 0 si ridurrà alla forma

- (b) $ay^3 + 3cyx^2 + dx^3 + 2fxy + gx^2 + hy + kx + l = 0$, ove a = A: La equazione generale dei triametri (Esemp. 2. Artic. III.) sarà
- (c) $y(c+ah^2)+x(d+2ch)+\frac{1}{3}(g+2fh)=0$; quelle del centro sono
- (d) ay=0, $cx+\frac{1}{3}f=0$, $cy+dx+\frac{1}{3}g=0$, e siccome non è a=A=o, avremo
- (e) $\gamma = 0$, $x = -\frac{g}{3d}$, e la condizione df cg = 0.

Se fossero d=c=0, siccome la equazione (c) si (f) $ah^{2}.\gamma + \frac{1}{3}(g+2fh) = 0$ riduce ad

'i triametri della curva sono tutti parallelli all'asse attuale delle ascisse x: e se dippiù f=g=o non esiste che un triametro solo.

Fingiamo, che alla linea (b) venga applicato un sistema di corde parallelle al triametro (c): nella

equazione (c) cambiata la h in $-\frac{d+2ch}{c+ah^2}$ la risultante rappresenterà un secondo triametro, il quale corrisponde a quelle corde: In forza di tale sostituzione il parametro $-\frac{d+2ch}{c+2h^2}$, che determi-

na la direzione di quella retta, diventa

 $\frac{d-c\frac{d+2ch}{c+ah^2}}{c+a\left(\frac{d+2ch}{c+ah^2}\right)^2} = \frac{(c+ah^2)\{d(c+ah^2)-2c(d+2ch)\}}{c(c+ah^2)^2+a(d+nch)^2}$

la quale quantità supposta eguale ad h ne caveremo la condizione, perchè il triametro del secondo sistema di rette sia parallello alle corde del primo, epperò i due triametri siano conjugati fra loro. La equazione

(g) $a^2ch^5+a^2dh^4+2ac^2h^3+4adc.h^2+(ad^2-3c^3)h-c^2d=0$, che risulta, ammette almeno una radice reale; da che eccettuato il caso unico, in cui essendo c=d=o i triametri sono tutti parallelli, se c=o quella equazione fornisce $ah^3+d\equiv 0$; se $d\equiv 0$ si riduce ad $a^2h^4+2ach^2-3c^2=0$, che ammette due radici reali: Perciò riferita la curva ai due triametri conjugati, la equazione (b) assumerà la forma

(h) $a\gamma^3 + dx^3 + 2fx\gamma + h\gamma + kx + l = 0:$ ove le lettere a; d...., simboli dei coeficienti, avranno valori diversi dagli antecedenti. Essendo per la curva (h) le equazioni del centro dx = 0, f=0, ay=0, questo punto coincide coll'origine 158

attuale delle coordinate: Ma se non è for per cui non esiste centro, i triametri della linea, espressi dalla equazione generale

(k)
$$ah^2y + dx + \frac{1}{3}fh = 0$$

sono tangenti all'iperbole (l) $xy = \frac{f^2}{9 \cdot ad}$,

la quale ha per assintoti i due triametri conjugati della linea medesima, e le coordinate del punto di contatto fra l'iperbole ed il triametro sono

(m)
$$x = -\frac{hf}{3d}, y = -\frac{f}{3ah}$$
:

come facilmente si verifica mediante la equazione (N) Esempio. Artic. IV.

La equazione, per la quale si determinano i rami infiniti, essendo nel caso presente

 $E_{3,0} + hE_{2,1} + h^2E_{1,2} + h^3E_{0,3} = d + ah^3 = 0$ raccogliamo, che un solo valore di h è reale, e questo sostituito nella equazione (k) la risultante rappresenterà l'assintoto della curva.

Se la linea (b) ha tutti i triametri parallelli all'asse delle x cui è riferita; quella equazione avrà la forma (n) $ay^3+3fxy+gx_2+hy+kx+l=0$: e siccome E_1 , o=2(fy+gx)+k, E_3 , o=0, E_2 , 1=0, E_1 , 2=0, E_0 , 3=a la equazione E_3 , $o+hE_2$, o=1, o=

lelle all'asse attuale delle ascisse x, da che ognuna di esse corde incontra la curva in due punti soli, il terzo trovandosi a distanza infinita.

Ripresa la equazione (a), supponiamo che siano nello stesso tempo A = 0, D = 0, per cui si riduce a

- (q) $3By^2x+3Cyx^2+Ey^2+2Fxy+Gx^2+Hy+Kx+L=0$ La equazione generale dei triametri sarà
- (r) $y(C+2Bh)+x(2Ch+Bh^2)+\frac{1}{3}(G+2Fh+Eh^2)=0$ e le equazioni del centro sono
- (s) $Cy+\frac{1}{3}G=0$, $Bx+\frac{1}{3}E=0$, $By+Cx+\frac{1}{3}F=0$ la sussistenza delle quali esige, che sia

$$(t) B_{1}G + C_{2}E - BCF = 0.$$

Se B=0 dovrà pur essere E=0; e se C=0 deve essere G=0.

Siccome $E_{3,0}$ =0, $E_{2,1}$ =3C, $E_{1,2}$ =3B, $E_{0,3}$ =0 la equazione, che determina la direzione dei rami infiniti essendo $o+Ch+Bh^2+oh^3=0$ ammette le

radici (u) h=0, $h=\frac{1}{0}$, $h=-\frac{C}{B}$; le quali sostituite nella equazione (r) determinano tre assintoti della curva, cioè le rette

$$\gamma = -\frac{G}{3C}$$
, $x = -\frac{E}{3B}$, $2B\gamma + Cx - \frac{EC^2 - 2BCF + GB^2}{2BC} = 0$.

Se non esiste centro i triametri (r) sono tutti tangenti all' ellissi della equazione

(v)
$$B^2\gamma^2 + BCx\gamma + C^2x^2 + \frac{1}{3}(2BF - EC)\gamma + \frac{1}{3}(2FC - BG)x + \frac{1}{3}(F^2 - EG) = 0$$

16e

Volendo verificare questa proprietà dovremo paragonare la equazione generale delle tangenti alla curva (v) (Artic. IV. Esemp. Equaz. (N)) colla equazione (r), ed otterremo ancora le coordinate del punto di contatto in funzione del parametro h; il che si lascia per esercizio di calcolo allo studioso.

Ma la dimostrazione diretta di questo teorema dipende da una bella teoria dell' analisi trascente, di cui non possiamo che abbozzare il fondamento. Rappresentiamo la equazione (r) simbolicamente con $f(x, \gamma, h) = 0$, e considerandola come che esprima una retta tangente ad una curva: Cambiata h in $h+\omega$, sarà $f(x, \gamma, h+\omega) = 0$ l'equazione di una seconda tangente: Quelle rette si incontrano in un punto, le coordinate del quale rendono soddisfatte contemporaneamente quelle due equazioni, cosicchè attribuiti ad x, y quei valori, dovranno essere $f(x, \gamma, h) = 0$, ed $f(x, \gamma, h+\omega) = 0$: Ma la funzione $f(x, \gamma, h+\omega)$ algebraica del secondo grado rispetto ad h, sviluppata fornisce

 $f(x, \gamma, h+\omega) = f+\omega f_1+\omega^2 f_2$, ove ho scritto f in luogo di $f(x, \gamma, h)$: Avremo quindi le due equazioni f=0, $f+\omega f_1+\omega f_2=0$, ossia f=0 ed $f_1+\omega f_2=0$. Supponendo attribuiti ad ω dei valori piccolissimi, e che decrescano continuamente, le due tangenti $f(x, \gamma, h)=0$, $f(x, \gamma, h+\omega)=0$ si avvicinano sempre più l'una all'altra, il punto delle coordinate x, γ ad esse comune si accosta indefinitamente alla curva; cosicchè quando $\omega=0$ le tangenti coincidono, il punto x, γ appartiene

alla curva istessa, e quelle coordinate x, y renderanno nello stesso tempo f=0, f=0. Duaque se la equazione (r), ossia f=0, rappresenta la retta toccante una curva nel punto delle coordinate x, y; queste dovranno rendere contemporaneamente soddisfatta quella equazione e la sua derivata prima presa rispetto ad h; cioè le due seguenti

$$Cy+\frac{1}{3}G+2h(By+Cx+\frac{1}{3}F)+h\cdot(Bx+\frac{1}{3}E)=0$$
,
 $By+Cx+\frac{1}{3}F+h(Bx+\frac{1}{3}E)=0$.

Eliminandovi la quantità h si ottiene la risultante (v) la quale rappresenta la curva, cui sono tangenti le rette (r), la quale suole chiamarsi curva inviluppata dalle tangenti medesime.

Se nella equazione (q) alcuna delle quantità B, C è nulla, supposta C = 0, se non è G = 0, epperò non esiste centro, tutti i triametri, l'equazione dei quali è la seguente

$$(x) \qquad y + \frac{h}{2}x + \frac{G + 2Fh + Eh^2}{6Bh} = 0,$$

sono tangenti alla parabola

$$(\gamma)$$
 $(3B\gamma + F)^2 = G(3Bx + E)$:

il che si dimostra nella maniera superiormente indicata.

La equazione, che fornisce la direzione dei rami infiniti essendo $o+Bh^2+o.h^3=o$ ci dà unicamente h=o, h=1/o. Alla prima radice non corrisponde assintoto, quando non sia G=o, da che la equazione (x) diventa assurda. La seconda poi riduce la (x) medesima a 3Bx+E=o, la quale, siocome non è B=o, rappresenta un vero assintoto.

Notiamo per ultimo, che volendo disegnare la eurva gioverà assumere almeno uno degli assi coordinati parallello alle rette che la incontrano a distanza infinita, poichè la equazione trasformata conterrà soltanto due dimensioni dell'ordinata parallella a quell'asse; si potrà quindi risolvere rispetto ad essa, e delineare la curva, come dichiareremo nell'articolo seguente.

ARTICOLO IX.

Analisi di varie curve algebraiche.

Esempio primo. Si voglia conoscere l'andamento della curva rappresentata dalla equazione numerica

(a) $E(x, y) = y^4 - 2x^2y^2 - x^4 - 2axy^2 - 5ax^3 = 0$ riferita ad assi ortogonali. Siccome la equazione è di grado pari rispetto ad y ne viene, che ad ogni ordinata positiva ne corrisponde una negativa di eguale grandezza, per cui l'asse delle x è pure un asse della curva corrispondente alle corde parallelle alle ordinate y.

Le condizioni per l'esistenza del centro sono (Artic. II. form. 2)

(b) $E_{3,0} = -4x - 5a = 0$; $E_{2,1} = -4y = 0$; $E_{1,2} = -4x + 2a = 0$; $E_{0,3} = 4y = 0$ incoerenti fra loro, onde quella linea ne è priva. Per conoscere se la curva è limitata, ovvero si estenda all'infinito, formiamo la equazione corrispondente alla (8) dell'Artic. V., cioè

(c) $E_{4,0} + hE_{5,1} + h^5E_{2,2} + h^5E_{1,3} + h^4E_{0,4} =$ = -1 + 0 \cdot h - 2h^2 + 0 \cdot h^3 + h^4 = 0

la quale ammettendo le due radici reali $h=\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})}$, indica l'esistenza di rami infiniti,
La equazione (9) dell'Articolo V. applicata al caso
presente, cioè

$$(d) E_{3,0} + hE_{2,1} + h^{2}E_{1,2} + h^{3}E_{0,3} =$$

$$= -4x - 5a - 4hy + h^{2}(-4x + 2a) + 4h^{3}y = 0$$
ossia (e) $y = \frac{h^{2} + 1}{h(h^{2} - 1)} x - \frac{a(2h^{2} - 5)}{4h(h^{2} - 1)}$

non essendo incompatibile colle supposizioni di $h=\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})}$, insegna che la curva è dotata di due assintoti rettilinei, i quali incontrano l'asse x

nel punto, per cui $x = \frac{a(2h^2-5)}{4(h^2+1)} = \frac{a(7\sqrt{2}-10)}{8} < 0.$

Le equazioni $E(x, \gamma) = 0$,

$$E_{1,0} = -4xy^2 - 4x^3 + 2ay^2 - 15 \cdot ax^2 = 0,$$

$$E_{0,1} = 4y^3 - 4x^2y + 4axy = 0$$

$$E_{2,0} = -2\gamma^2 - 6x^2 - 15ax = 0$$
;

$$E_{1,1} = -8xy + 4ay = 0$$

$$E_{0,2} = 6\gamma^2 - 2x^2 + 2ax = 0$$

sussistono contemporaneamente per x=0, y=0; dunque l'origine delle coordinate è un punto (Art. VI. Equaz. 13., 14.) per il quale passano tre rami della curva.

La equazione

$$(f) \quad E_{1,0} + hE_{0,1} = (-4xy^2 - 4x^3 + 2ay^2 - 15ax^2) + 4h(y^3 - x^2y + axy) = 0$$

fornisce il valore del parametro h corrispondente alla retta, la quale tocca la curva nel punto delle coordinate x ed y. Siccome l'origine è un punto triplo, le equazioni

sono soddisfatte identicamente da x=0, y=0, e le rette tangenti in quel punto si determineranno mediante la equazione $E_{3,0}+hE_{2,1}+h^2E_{1,2}+h^3E_{0,3}=0$, in cui si pongano x=0, y=0, cioè colla seguente $-5a-4h.0+2ah^2+h^3.0=0$. Questa equazione è soddisfatta da $\frac{1}{h}=0$ e da $h=\pm\sqrt{5}/2$; epperò tre linee rette toccano la curva nell'origine, cioè lo stesso asse y, ed altre due che formano coll'asse delle ascisse x angoli eguali e di segni opposti. Volendo conoscere se la curva ammette altre tangenti parallelle all'asse y, posto $\frac{1}{h}=0$ nella equazione (f) avremo $y^3-x^2y+axy=y(y^2-x^2+ax)=0$: questa è soddisfatta da y=0, cui corrisponde

 $E(x, y) = -x^4 - 5ax^3 = -x^3(x + 5a) = 0$, ossia x = 0, ed x = -5a. Dunque comprendiamo che nei punti dell' asse x, dati dalle coordinate x = 0, x = -5a la curva è toccata da rette perpendicolari all' asse x medesimo. Se poniamo poi $y^2 - x^2 + ax = 0$ la equazione E(x, y) = 0 fornisce $x^2(x^2 + 3/ax + 1/a^2) = 0$, cioè x = 0, oppure $x = \frac{-3 \pm 1}{4}a$, vale a dire x = -1/a ed x = -a, i quali valori determinano altri punti della cur-

va, a cui corrispondono tangenti parallelle all'asse γ .

Notate tali singolarità della curva, che si considera, veniamo a delinearne il suo andamento. Perciò ordinata la sua equazione rispetto ad y avremo

$$y^4 - 2y^2(x^2 - ax) - x^3(x + 5a) = 0$$
,

ossia $y^2 = x(x-a) \pm x\sqrt{2x^2 + 3ax + a^2}$.

Fintanto che x>0, il termine irrazionale è reale per se, e siccome deve essere $\gamma^2>0$, se fingiamo

$$x-a-\sqrt{(ax^2+3ax+a^2)}>0$$

ne viene x + 5a < 0 che è assurdo: dunque deve

essere
$$y^2 = x\{x - a + \sqrt{2x^2 + 3ax + a^2}\}.$$

Supponendo x=0 avremo y=0

$$x' = a$$
 $y'^{2} = a^{2}\sqrt{6}$
 $x'' = 2a$ $y''^{2} = 2a^{2}(1+\sqrt{15})$
 $x''' = 3a$ $y'''^{2} = 3a^{2}(2+\sqrt{28})$
 $x'''' = 4a$ $y''''^{2} = 4a^{2}(3+\sqrt{115})$

ecc.

Si prenda (fig. 34.) nel prolungamento dell' asse. Oy la retta On=a, e sull' asse medesimo le parti Or=6a, Or'=15a, Or''=28a.... Si prendano nell' asse Ox le rette $Os=ss'=s's''=\dots=a$ e descritti i semicircoli nqr, nq'r', nq'r'' saranno

$$Oq = a\sqrt{6}$$
, $Oq' = a\sqrt{15}$, $Oq'' = a\sqrt{28}$,..., quindi

$$\gamma' = \sqrt{Oq.Os}; \ \gamma'' = \sqrt{q's.ss''}; \ \gamma''' = \sqrt{q''s'.s's''}, \dots$$

le quali ordinate corrispondono alle ascisse Os, Os', Os'',.... ed essendo medie proporzionali geo-

Considerando la parte della curva, che si estende secondo le ascisse negative, dovremo impiegare la equazione $y^2 = x(a+x\pm\sqrt{2x^2-3ax+a^2})$, nella quale deve essere $2x^2-3ax+a^2>0$. Siccome si ha $x^2-\frac{3}{2}ax+\frac{a^2}{2}=0$ allorchè $x=\frac{1}{2}a$ ed x=a; ed il primo membro di questa equazione è positivo quando x=0, ne segue che da x=0 fino ad x=1/a i valori del trinomio $2x^2-3ax+a^2$ sono positivi: si fanno negativi da x=1/a fino ad x=a: poi ritornano positivi per tutti i valori di x>a crescenti indefinitamente. Affinchè sia $y^2>0$, se prendiamo il segno negativo che precede la parte irrazionale dovrà essere $a+x>\sqrt{2x^2-3ax+a^2}$ epperò x<5a, per cui da x=0 fino ad x=1/a avremo

$$y^2 = x(x+a\pm\sqrt{2x^2-3ax+a^2})$$

sempre reale: ad $x = \frac{1}{a}$ corrisponde $\gamma^2 = \frac{3}{a}$;

da $x = \frac{a}{2}$ fino ad x=a, y è immaginario, epperò

non esiste curva; x=a fornisce $y^2 = 2a^2$ da x = a fino ad x non > 5a, avremo

$$y^2 = x(x + a \pm \sqrt{2x^2 - 3ax + a^2})$$

ad x=5a corrispondono $y^2=5a^2(6\pm 6)$ cioè $y^2=6$ 0 $x^2=6$ 1 $x^2=6$ 2

da x>5a all'infinito si ha

$$y^2 = x(x + a + \sqrt{2x^2 - 3ax + a^2}).$$

Determineremo poi i valori delle ordinate con un

167

metodo affatto analogo a quello impiegato per le ascisse positive.

La figura 35 dimostra le varie affezioni della curva di cui abbiamo parlato. Dalla parte delle x positive i due rami eguali OM, OM' accompagnano l'asse Ox all'infinito. Nell'origine O concorrono tre rami della curva KOK', NOM', N'OM. Il primo KOK' è toccato dall'asse yOy', gli altri due dalle rette L'OH, LOH' tali che

$$tang LOx = -tang L'Ox = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Considerando le ascisse negative, fatta astrazione al segno: da x=0 fino ad x=0 $A=\frac{1}{2}a$ ad ogni valore di x corrispondono quattro ordinate due a due eguali e di segno opposto. Ove x=0 A si hanno due sole ordinate di segni diversi, le quali sono tangenti alla curva. Da x=0 $A=\frac{1}{2}a$ fino ad x=0 B=a non si ha curva. Da x=0 B=a fino ad x=0 C=5a ad ogni valore di x corrispondono quattro ordinate eguali due a due; ma da x=5a all'infinito si hanno due sole ordinate eguali e di segno opposto, corrispondenti a ciascuna ascissa; epperò i rami PQ, P'Q' si estendono all'infinito. La retta PBP' parallela all' asse Oy tocca la curva nei punti P, P'; ed anche in C la tangente è parallela all' asse medesimo.

Siccome poi la curva ha quattro rami che si estendono all'infinito, ed abbiamo ottenuti due soli valori di $h=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$, ad ognuno dei quali corrisponde un assintoto della curva, ne segue che

le due rette rappresentate dalle equazioni (e) sono assintoti, l'una del ramo OM e del PQ contemporaneamente, avvicinandosi a destra dell'asse Ox al ramo OM; ed a sinistra, al disotto dell'asse Ox', accostandosi indefinitamente a PQ: l'altra retta fornita dalla equazione (e) è poi l'assintoto comune ai due rami PQ ed OM'.

Esempio secondo. La curva a costruire sia data della equazione

(a) $E(x,y) = y^4 - 2x^2y^2 + x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0$ desuntà dalla (a) col cambiare il segno al terzo termine: il che basta per alterarne affatto il suo andamento. Essendo

 $E_{4,1}=1$; $E_{3,1}=0$; $E_{2,2}=-2$; $E_{1,3}=0$; $E_{0,4}=1$ la equazione, che indica la esistenza dei rami infiniti è $h^4-2h^2+1=0$, da cui si hanno le radici reali $h=\pm 1$. Gli assintoti sarebbero dati da

 $4x(1-h^2)+4h(h^2-1)y+a(2h^2-5)=0$, incompatibile colle equazioni $h=\pm 1$: epperò la curva ha rami infiniti, ma privi di rette assintotiche. Sciolta la (α) rispetto ad y^2 ne viene $y^2=x(x-a\pm\sqrt{(3ax+a^2)})$. Essendo x>0, qualunque ne sia il valore, avremo $y^2=x(x-a+\sqrt{(3ax+a^2)})$. Da x>5a all' infinito avremo ancora $y^2=x(x-a-\sqrt{(3ax+a^2)})$. Per x<0 essendo $y^2=x(x+a\pm\sqrt{(a^2-3ax)})$ ne segue dover essere $x<\sqrt{(a}$. La (fig. 36) indica l' andamento della curva, ove i due rami OM, CPQ sono incontrati all' infinito da rette inclinate all' asse Ox di 45.°, e così dicasi degli altri due OM, CPQ' perfettamente eguali a quelli.

Esempio terzo. Prendiamo ad esaminare la curva rappresentata dalla equazione

ottenuta nell' Artic. IV. della prima Parte.

Siccome le equazioni $E_{3,0} = 4x - 3c = 0$;

 $E_{2,1}=4\gamma=0$; $E_{1,2}=4x-4c=0$; $E_{0,3}=4\gamma=0$ sono incompatibili , la curva è priva di centro (Artic. II.). L' equazione $E_{4,0}+hE_{3,1}+h^2E_{2,2}+h^3E_{1,3}+h^4E_{0,4}=$

 $= 1 + 0.h + 2h^2 + 0.h^3 + h^4 = (1 + h^2)^2 = 0$

non ha radici reali, onde la linea si distende tutta in uno spazio limitato.

Le equazioni $E(x, \gamma) = 0$; $E_{1,0} = 0$; $E_{0,1} = 0$ sono soddisfatte da x = 0, y = 0 il che indica essere l'origine delle coordinate un punto duplice. L'equazione $E_{1,0}+hE_{0,1}$ =0 generale delle rette tangenti la curva si riduce ad $E_{o,i}=0$, ossia $y(2y^2+2x^2-4cx-c^2)=0$, se facciamo h=1/0. Quella equazione è soddisfatta da y=0, nel qual -caso si ha $E(x, y) = x^2 \{(x-2c)^2 - c^2\} = 0$; cioè x=0, $x=2c\pm c$; epperò la curva incontra l'asse delle ascisse nei punti determinati da x=0, x=0, z=3c, ed ivi le tangenti sono parallelle all'asse delle ordinate. La stessa equazione E0,1 == for1 nisce ancora x2 + y2/= 2cx+ 1/2c2, nel qual caso dalla E(x, y) = 0 si cava x = -1/8c, e però la retta $x = -\frac{c}{8}$ parallella all' asse y è pure tan-langalo O W. . . . amen a D W.C. of the property

170

Sciolta la equazione (a) si ha assal o appli

 $y^2 = \frac{1}{2} \{c^2 - 2x(x - 2c) \pm c\sqrt{(c^2 + 8cx)}\}$ dalla quale si raccoglie che da x = c fino ad x = csaranno $y^2 = \frac{1}{2} \{c^2 + 2x(2c - x) \pm c\sqrt{(c^2 + 8cx)}\}$ da x = c fino ad x = 3c

 $y^{2} = \frac{1}{2}\{c^{2} + 2x(2c - x) + c\sqrt{(c^{2} + 8cx)}\}$ e per le ascisse negative da x = 0 fino ad $x = \frac{1}{8}c$, $y^{2} = \frac{1}{2}\{c^{2} + 2x(2c + x) \pm c\sqrt{(c^{2} - 8cx)}\}$ oltre il qual limite non esiste curva.

La t = 0 for 3π dimostra l'andamento della linea che

La (fig. 37) dimostra l'andamento della linea che si considera.

Questo caso ci offre un esempio della utilità delle coordinate polari, da che supposto M un punto della curva, Ang.MOx—w, per cui x=rcosw, y=rsenw, la equazione (x) ci dà (r²-2crcosw)²=c²r², cioè r-c=2ccosw, r+c=2ccosw. Si prenda nellà asse Ox la retta OD=2c, e descritto intorno si diametro OD il circolo OA AD...., siccome OA=2ccosw, avremo r-c=OA, r+c=OA, e quindi presi nella retta OAM, dall' una e dall' altra parte del punto A, le due rette AM=AN=c, suranno M, N due punti della curva; e nella stesmaniera giungeremo a descriverla tutta speditamente.

pro grande importanza. Richiemata la quale è della propriera trattata nell'Artic. IV. Part. I., la quale ci trattata nell'Artic. IV. Part. I., la quale ci trangoli ONC, OMC non possono entrambi essere dotati della proprietà richiesta dal problema, cioè che l'angolo CON alla base sia doppio dell'angolo ONC, ed anchedi OMC. Dunque, sebbene

i rami ONC, OME appartengano ad 'una stessa linea continua, cioè rappresentata dalla medesima equazione, il solo ramo OME soddisfa alla condizione del problema. Diffatti essendo AC = AM l'angolo OAC esterno al triangolo ACM è doppio di AMC, e siccome OC = AC, quindi l'angolo COM è doppio di OMC. Considerando il triangolo ONC, poichè AN = AC, 2.Ang.ANC + Ang.OAC = 360° - <math>2.Ang.ONC + Ang.NOC = 180°, ne segue 180° + Ang.NOC = 2.Ang.ONC.

Dunque allorachè una linea composta di varie parti è il luogo geometrico della risoluzione di un problema, anzi che impiegarla all' uopo, dovremo accertarci bene quali parti di essa si riferiscano direttamente allo stesso problema, quali altre riguardino problemi soltanto affini a quello, di cui attualmente ci occupiamo.

Negli esempi addotti la equazione della linea potè risolversi per rispetto ad una delle coordinate; ma quando ciò non è possibile dovremo seguire altri processi di calcolo, quale è quello che passo ad accennare.

Desunta dal polinomio E(x,y) la derivata prima $E_{1,0}$, si divida -E(x,y) per $-E_{1,0}(x,y)$ per rispetto ad γ , e continuata la divisione fin ch'è possibile, ne venga il residuo $R_1(x,y)$. Si divida $-E_{1,0}$ per $-R_1$, sempre rispetto ad γ , finchè si può, e si abbia il residuo $-R_2(x,y)$. Si rinnovi la divisione di $-R_1$ per $-R_2$, poi di $-R_2$ per l'ultimo residuo ottenuto, e si continui l'operazione finchè siasi conseguito un residuo privo della γ . Sia M

il coeficiente della maggior potenza di y nel polinomio E(x,y) ed N il termine che non contiene y. Siano P, Q i termini analoghi del polinomio $E_{i,o}(x,y)$. Chiamo A_i , A_i ... i coeficienti delle maggiori potenze di γ nei residui R_i , R_i ...; e B_i , B_i ... i termini dei polinomii medesimi, i quali non contengono i y. Si scrivano le due serie

(1) N, Q, B_1 , B_2 , B_3 ...

(2) $M, P, A_1, A_2, A_3...$

Se nelle funzioni E, $E_{i,o}$, R_i , R_s ,.... poniamo 7=0 i segni dei risultati dipendono da quelli delle quantità (i), e se vi facciamo $\gamma = \infty$ i segui delle stesse funzioni dipendono dalle quantità (2). Ciò posto, volendosi determinare le ordinate della curva corrispondenti alle ascisse x positive; indicata con a una quantità piccola quanto si vuole; porremo successivamente nelle serie (1), (2) x=0, α , 2α , 3α ,: Fatto per esempio $x=n\alpha$ nella (1) e nella (2), in conseguenza dell'elegante teorema del sig. Sturm, tante saranno le ordinate reali della curva corrispondenti a quell'ascissa x=na, quante variazioni di segno si troveranno nella serie (1) più che nella serie (2). Queste ordinate poi si desumeranno dalla equazione E(x,y)=o ponendovi $\alpha = n\alpha$, e risolvendo rispetto ad γ la $E(n\alpha, \gamma) = 0$ mediante il citato teorema del sig. Sturm, epperò impiegando i ressidui R. R., ... già antecedentemente calcolati.

gative si caveranno, collo stesso metodo, dalle equazione E(-x,x)=0, in cui si è anticipatamente cambiato il segno all'ascissa.

Se due valori della x rendessero dello stesso segno N ed M; Q e P; B,, ed A,; e tutte le altre coppie di termini corrispondenti delle serie (1) (2), a tutte le ascisse comprese fra quei valori non corrisponderebbero ordinate; cioè fra le ordinate corrispondenti a quelle ascisse non esisterebbe alcuna parte della curva.

Supposte a, b, c, d, quantità positiva, accade qualche volta che per esempio da x=a fino ad x=a+b non esiste curva; se ne trova una parte fra a+b, ed a+b+c; poi nessuna fra a+b+c ed a+b+c+d. In tal caso la parte, di cui sopra, se è una curva rientrante in se medesima, siccome l'ellissi, suole dai geometri chiamarsi ovale conjugata.

Talvolta l'ovale si riduce ad jun solo punto, che esiste nel piano della curva, distinto dagli altri rami della medesima, e che pure fa parte di essa.

Queste e simili discussioni, non essendo ormai che facili applicazioni delle cose esposte, non abbisognano di ulteriore dichiarazione. Lo sviluppo di queste dottrine porgerà allo studioso un vasto campo di utili esercizii; e nelle opere di Eulero e di Cramer troverà minutamente indicata l'analisi di varie curve, e degli accidenti che esse presentano nel loro andamento. Ma abbiamo già di troppo oltrepassati i limiti, che il tempo prescrive, alla istruzione di queste importanti dottrine.

FINE

WARDING SERVED STATE OF THE

```
p. 25 l. 22 x_c - y_b x_b y_c x_c y_b - x_b y_c
 " 42 " 7 A"—A"
                          A'-A"
                          , B'=b-Aa
 " ivi " 25 B'=b-Aa
 » 47 » 21 problema im- problema parrebbe im-
             possibili
                           possibile
» 49 » 26 determineremo determineranno
 n \ 54 \ n \ 5 \ -B^2D^2
                          + B \cdot D
 » 80 » 14 uno od altro uno ad altro
 » 85 » 11 b.
 » 93 » 15 la curva hanno la curva avranno
 "107 " 13 si aggiunga
       Se AC-B^2 > 0 qualunque retta condotta
       per il centro incontra la curva
 "110 " 5 ove supposto ove ho supposto
 "III " 5 (I)
                          (1) Artic. I.
 " ivi " 7 hE_{0.0}
                          hE_{0,1}
 n112 n 27 hE_{0,0}
                          hE_{0,1}
 "113 " 16, tre
                          tre ,
 "121 " 12 si aggiunga
       "Dunque se la linea è dotata di centre
       "gli assintoti passano per quel punto.
 "121 " 26 la equazione le equazioni delle
              delle
 "122 " 7 + E_{0,1}
                          +hE_{0,1}
 "131 " 5 senα
                          sen² a
 » ivi » 13 si aggiunga
        Se E= o è una parabola, lo sarà anche
```

e = o e tutte le parabole sono curve simili

simili
p. 132 l. 18
$$\frac{2(AE-DB)}{R}$$
 $\frac{2(AE-DB)}{R}$ x'

" 133 " 14 (b) (a)

" 137 " 9 $x > a$ $x^2 > a^2$

" 157 " 5 quella retta quel secondo triametro

" 158 " 20 $3fxy + gx$, $2fxy + gx^2$

essent for a foxon of the form of the



