LEZIONI

DI INTRODUZIONE

AL CALCOLO SUBLIME

DI

GASPARE MAINARDI

PROF. SUPP. NELL' I. R. UNIVERSITA' DI PAVIA,
UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA
DELLE SCIENZE, RIPETITORE PER L' IMP. R.
COLLEGIO GHISLIERI ECC.

PARTE PRIMA

PAVIA
DALLA TIPOGRAFIA BIZZONI
1836.

Si ritengono contraffatte le copie non firmate come la presente.

G. Mainardi

PREFAZIONE.

—

Di quanto ogni giorno avanzi la Scienza Matematica lo annunciano le opere dei grandi che illustrano il nostro secolo. La Fisica, lo studio cioè delle cause e degli effetti naturali, è il grandioso problema cui sono dirette le speculazioni dei geometri, e in tutte le colte nazioni dell' Europa è diffuso il sentimento della vera sapienza.

La dottrina del Calorico, i fenomeni della Capillarità, la scienza della Luce, dell' Elettro-magnetico, ed altri grandiosi argomenti della filosofia naturale arricchiscono il vasto dominio delle matematiche discipline e la meccanica svestita di tutto ciò che v' ha d' ipotetico, emula la sorprendente esattezza delle astronomiche speculazioni.

Ma perchè l' intelletto nostro possa nel breve periodo della vita arricchirsi di così va-

sto sapere e penetrarvi addentro con tale profondità che possibile ne riesca l' applicarlo ai bisogni ed ai comodi della umanità, e dove fia d' uopo ampliarne i confini, fa di mestieri che all' alto fine tendano gli erudimenti della prima iniziale istruzione.

Egli è perciò che le nostre leggi saggiamente impongono agli istitutori d' ogni genere di umano sapere, che per la loro opera i libri tutti destinati alla pubblica istruzione vengano ampliati, ove lo importa il progresso dello spirito, e mendati di quei difetti ne' quali cade inevitabilmente qualunque più sollecito scrittore.

Gli argomenti capitali della Introduzione al Calcolo Sublime hanno da qualche tempo ricevuto notabile incremento. La risoluzione approssimata delle equazioni ha conseguito il suo perfezionamento. Nuovi ritrovamenti importano che la dottrina delle serie venga con somma diligenza istudiata. La scienza dei numeri si assoggetta ai principii ed ai metodi generali dell' Analisi. Le equazioni trascendenti si offrono spontanee in tutti i più grandiosi problemi della Matematica applicata. Finalmente la Geometria analitica, la descrittiva, la scienza delle ombre e la teoria delle proje-

zioni sono stromenti, l' uso continuo dei quali importa la più nitida cognizione. Ecco le cause che m' imposero di scrivere l' opera che io offro alla gioventù studiosa, eccitato dai saggi consiglii dell' illustre Direttore P.° dei nostri Studii il ch. Professore Configliachi, da qualche valente Professore, dai buoni amici che frequentarono con amore le mie lezioni ed anche da discepoli diligenti.

Avendo io messo a profitto tutte le Opere e gli Atti accademici antichi e moderni, che ebbi agio di consultare, questo libro offre una ricca messe di verità importantissime scoperte da geometri di varie nazioni, da me disposte con quell' ordine e corredate di quelle dimostrazioni che mi vennero imposte o dalla brevità, dalla generalità, o dal pensiero degli studii che dovrà in seguito percorrere il giovine lettore. Ho poi ricordati i nomi di que' Grandi, le classiche opere loro, e le memorie che potranno venire consultate per una più ampia istruzione.

L' ordine dell' opera è necessario, onde non esige dichiarazioni. Se taluno ne intraprendesse lo studio scortato unicamente dalle cognizioni elementari potrebbe incontrarvi difficoltà, essendo del Professore l' entrare nelle

più minute istruzioni, l' addurre e variare gli esempi, ed apportarvi quegli schiarimenti che ponno richiedere l' indole diversa e la diversa capacità dello studioso.

Possa quest' Opera essere di qualche pubblica utilità, mentre è piccolo contrassegno del mio zelo per l' ammaestramento della gioventù nostra, e della profonda mia gratitudine alle continue Munificenze dell' Augusto nostro Monarca!

PARTE PRIMA.

NOZIONI PRELIMINARI.

In una questione determinata una quantità si chiama *variabile* allorquando è o si suppone suscettibile di un valore qualunque, e dicesi *costante* quando il suo valore è ovvero si suppone determinato.

Una quantità il valore della quale dipende da una o più altre si chiama *funzione* di queste. Se le quantità sono indicate coi simboli x, y, z ec. la funzione si rappresenta colla scrittura

$$f(x, y, z \ldots), \text{ ovvero } f_{x,y,z \ldots}$$

dove alla lettera f viene talvolta sostituita un'altra qualunque.

Le funzioni, avuto riguardo alla loro natura, si distinguono in varie classi.

Una funzione si dice *continua* per rispetto ad una variabile, allorquando attribuiti a questa dei valori particolari, i valori corrispondenti della funzione differiscono fra loro tanto meno quanto è minore la differenza delle quantità sostituite alla variabile medesima.

Vi hanno delle funzioni le quali sono continue soltanto entro certi limiti, altre che lo sono assolutamente, ed altre ancora che non essendolo giammai si chiamano *discontinue*.

Se le operazioni analitiche da cui trovasi affetta una quantità, che entra a costituire una funzione, sono unicamente la somma, la sottrazione, la moltiplica, la divisione e l'elevazione a potenza intera o fratta, positiva o negativa, la funzione dicesi *algebraica* per rispetto alla quantità nominata: se fra le dette operazioni altre poi se ne trovano oltre le nominate, la funzione si chiama *trascendente*.

Se in una funzione algebraica una quantità non esiste nel denominatore di alcuna frazione, nè affetta da esponente negativo, la funzione medesima si dirà *intera* per rispetto alla quantità nominata: altrimenti si chiamerà *frazionaria*.

Se una funzione è algebraica rispetto ad una quantità e questa inoltre non è soggetta a vincoli radicali o ad esponenti frazionarii, la funzione stessa si dirà *razionale*: in caso diverso si chiama *irrazionale*.

In una funzione algebraica, intera, razionale per rispetto ad una o più quantità, chiamasi *di-*

mensione di qualunque termine l' esponente o la somma degli esponenti che le quantità nominate hanno nel termine medesimo. Se le dimensioni di tutti i termini sono uguali la funzione si dirà *omogenea*, se sono disuguali la maggiore di esse costituirà il *grado* della funzione per rispetto alle quantità considerate.

Una funzione la quale esprime una sola operazione analitica da effettuarsi su di una quantità, per rispetto a questa, si dirà funzione semplice: cosicchè

$$a x,\ a + x,\ \frac{a}{x},\ x^m,\ a^x,\ \log x, \ldots\ldots$$

saranno tutte funzioni semplici della x.

Ma se una funzione rappresenta il complesso di più operazioni da effettuarsi su di una quantità e sui risultamenti di mano in mano ottenuti, la funzione, per rispetto a quella quantità, si dice *composta*.

Si chiama *equazione* l' eguaglianza di due quantità rappresentata coi simboli dell' algebra; e tali quantità diconsi *membri* della equazione.

Abbisognando al geometra di riconoscere il valore di una o più quantità, indaga le relazioni metriche che sono fra quelle ed altre conosciute, e generalmente conseguisce equazioni che involgono le quantità sconosciute. I membri di tali equazioni essendo funzioni delle incognite, per rispetto ad esse, saranno algebraiche o trascendenti, e quindi ne deriva la medesima distinzione in riguardo alle equazioni.

L' arte di scoprire il valore di una o più incognite *implicite* nelle equazioni chiamasi la *risoluzione* delle medesime, ed è questo uno dei principali problemi dell' analisi matematica.

Se i valori di una o più incognite desunti da equazioni si sostituiscono alle incognite stesse, quindi si effettuano tutte le operazioni simbolicamente indicate, le equazioni si verificano; cioè i loro membri risultano identici fra loro, ed i valori sostituiti alle incognite si chiamano *radici* delle equazioni.

Tali radici possono essere positive e negative, intere e frazionarie, razionali ed irrazionali.

Se un' equazione esprime relazioni possibili, lo saranno anche le proprie radici e si chiameranno *reali*; ma se l' equazione è erronea, erronee saranno pure le radici e si diranno *immaginarie*.

Quando il numero delle radici che soddisfanno ad una o più equazioni è limitato le equazioni medesime si chiamano *determinate*, altrimenti si diranno *indeterminate*.

La dottrina delle equazioni algebraiche e trascendenti, determinate ed indeterminate, il calcolo numerico delle funzioni, e l' applicazione dell' algebra allo studio delle proprietà di quelle estensioni che possono fingersi generate con legge geometrica, sono i principali oggetti intorno a cui volge la Introduzione al Calcolo Sublime, i quali tutti sviluppa ne' suoi primordi, quindi compie e perfeziona il calcolo medesimo.

SEZIONE PRIMA.

DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE.

Avendosi una equazione algebraica *determinata*, la quale cioè contenga una sola incognita, se coi metodi che verranno dichiarati in appresso si renderanno i suoi membri razionali ed interi per rispetto all' incognita, poi trasportati tutti i termini in un membro, ridotti quant' è possibile quelli che sono simili, si scriveranno gli uni di seguito agli altri secondo l' ordine decrescente delli esponenti dell' incognita e si dividerà la equazione per il coefficiente del primo termine, la equazione ridotta a questa forma si chiamerà *ordinata*.

Si rappresentino con x l' incognita; con A_1, $A_2 \ldots A_r \ldots . A_m$ quantità conosciute positive o negative, e con m un numero intero. La forma generale di una equazione algebraica ordinata sarà

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots\ldots + A_r x^{m-r} \ldots\ldots + A_m = 0$$

il cui primo membro indicheremo col simbolo $E(x)$. Le quantità A_1, $A_2 \ldots . A_m$ si chiameranno coefficienti della equazione, ed $A_r\, x^{m-r}$ il suo termine generale.

Noi verremo ora dichiarando alcune proprietà delle equazioni sulle quali si fonda la loro risoluzione, supponendo sempre che le medesime siano *algebraiche* ed *ordinate*.

CAPO I.

Proprietà generali delle equazioni algebraiche.

1. Nel polinomio $E(x)$ si sostituisca alla x una quantità qualunque a_1 quindi si sottragga il risultamento $E(a_1)$ dal polinomio $E(x)$: siccome la differenza $E(x)-E(a_1)$ è la somma algebraica di tanti termini della forma

$$A_r\,(x^{m-r} - a_1^{m-r}),$$

ognuno dei quali è divisibile per $x - a_1$; anche la funzione $E(x)-E(a_1)$ sarà divisibile per lo stesso binomio $x - a_1$.

Potrà per altro quella funzione $E(x)-E(a_1)$ essere divisibile per qualche potenza intera di quel binomio; per cui indicato con n_1 l' esponente di tale potenza e con $Q_1(x)$ il quoto della divisione, ne verrà

$$\text{(I)}\quad E(x) - E(a_1) = (x - a_1)^{n_1}\, Q_1(x).$$

2. Essendo $E(x)-E(a_1)$ un polinomio del grado m per rispetto ad x, tale dovrà pure essere quello di

$$(x - a_1)^{n_1}\, Q_1(x)$$

per cui $Q_1(x)$ sarà del grado $m-n_1$.

3. Se la equazione $E(x)=0$ ammettesse la radice a_1 avressimo $E(a_1) = 0$, quindi dalla (I) ne verrebbe

$$E(x) = (x - a_1)^{n_1}\, Q_1(x).$$

cioè

» Il primo membro di una equazione algebrai-

» ca ordinata è divisibile per una potenza intera
» del binomio che si ottiene sottraendo una radice
» dal simbolo che rappresenta l' incognita.

4. Tale potenza potrebbe essere la prima soltanto, ed in tal caso il detto divisore o fattore si chiamerà *lineare*. Se quella potenza è maggiore, ritenuto che n_1 esprima l' esponente più grande, il fattore $(x - a_1)^{n_1}$ si dirà del grado n_1.

5. Fingiamo che la equazione $E(x)=0$ ammetta tutte le seguenti radici a_1, a_2..... a_r. Il polinomio $E(x)$ sarà divisibile per una potenza intera di $x-a_2$ la più grande delle quali indicherò con $(x-a_2)^{n_2}$, e siccome $E(x) = (x-a_1)^{n_1} . Q_1(x)$ il secondo membro di questa equazione sarà divisibile per $(x-a_2)^{n_2}$: ma $(x-a_1)^{n_1}$ ed $(x-a_2)^{n_2}$ sono quantità prime fra loro per rispetto ad x, essendolo $x-a_1$ ed $x-a_2$, per conseguenza sarà $Q_1(x)$ divisibile per $(x-a_2)^{n_2}$.

Si rappresenti con $Q_2(x)$ il quoto, per cui sia

$$Q_1(x) = (x-a_2)^{n_2} Q_2(x)$$

e ne verrà

$$E(x) = (x-a_1)^{n_1} (x-a_2)^{n_2} . Q_2(x)$$

Siccome poi $m-n_1$ è il grado di $Q_1(x)$, quello di $Q_2(x)$ sarà $m - n_1 - n_2$.

Fingiamo che $(x-a_3)^{n_3}$ sia la maggior potenza di $x-a_3$ la quale divide $E(x)$. Quella potenza, per le ragioni addotte, dovrà dividere $Q_1(x)$, e perciò $Q_2(x)$, onde chiamato $Q_3(x)$ il quoto ne verranno

$$Q_2(x) = (x-a_3)^{n_3} Q_3(x)$$

$$E(x) = (x-a_1)^{n_1} (x-a_2)^{n_2} (x-a_3)^{n_3} Q_3(x)$$

ed il grado di $Q_3(x)$ sarà

$$m - n_1 - n_2 - n_3.$$

Collo stesso discorso proveremo essere

(II) $E(x) = (x-a_1)^{n_1} (x-a_2)^{n_2} \ldots\ldots (x-a_r)^{n_r} Q_r(x)$

ove $Q_r(x)$ sarà del grado $m-n_1-n_2-n_3 \ldots\ldots - n_r$ dunque

» Se una equazione algebraica ordinata am-
» mette molte radici, il primo membro di essa
» sarà divisibile per il prodotto di potenze intere
» di alcuni e di tutti i binomii che si ottengono
» sottraendo ciascuna radice dal simbolo che rap-
» presenta l' incognita.

6. Se le potenze n_1, n_2... dei divisori $(x-a_1)^{n_1}$, $(x-a_2)^{n_2}$... del polinomio $E(x)$ sono eguali all'unità, e quindi i divisori medesimi sono lineari, quelle radici a_1, a_2..... si diranno *semplici*, altrimenti si chiameranno *multiple*, e gli esponenti n_1, n_2..... indicheranno il grado della loro *multiplicità*.

7. Supposto che la equazione $E(x)=0$ ammetta la radice a_1 multipla secondo il numero n_1, la radice a_2 multipla secondo n_2 ecc. e la radice a_r multipla secondo il numero n_r, per cui abbia luogo la equazione (II), affinchè un' altra quantità a_{r+1} sia radice della medesima equazione $E(x)=0$ dovrà il polinomio $Q_r(x)$ essere divisibile per qualche potenza di $x-a_{r+1}$; ma se la quantità $Q_r(x)$ non contiene traccia della x, cosicchè fosse il proprio grado

$$m - n_1 - n_2 \ldots\ldots - n_r = 0$$

quella divisione non essendo possibile a_{r+1} non

sarà radice della equazione; cioè la $E(x) = 0$ non ammetterà radici oltre le $a_1, a_2 \ldots\ldots a_r$. Dunque

» Il numero delle radici di una equazione non » può superare il grado della medesima.

8. Quando il numero delle $a_1, a_2 \ldots\ldots a_r$ eguaglia il grado della equazione, cosicchè sia

$$n_1 + n_2 \ldots + n_r = m$$

dovrà essere il quoziente $Q_r = 1$; perchè moltiplicando i primi termini $x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots\ldots x^{n_r}$ delle potenze

$$(x - a_1)^{n_1}, (x - a_2)^{n_2}, \ldots (x - a_r)^{n_r}$$

per Q_r il risultato

$$x^{n_1+n_2\ldots+n_r}\, Q_r = x^m \,.\, Q_r$$

è quel termine del prodotto

$$(x - a_1)^n (x - a_2)^{n_2} \ldots (x - a_r)^{n_r}\, Q_r$$

il quale contiene la maggior potenza della x: e siccome tale prodotto non è altro che il polinomio $E(x)$ di cui il primo termine è solamente x^m, ne viene di conseguenza $Q_r = 1$ come ho asserito. Dunque

» Se le radici di una equazione sono tante » quant' è il grado della medesima il primo mem» bro di essa sarà il prodotto di potenze intere » di tutti i binomii che si ottengono sottraendo » ciascuna radice dal simbolo che rappresenta » l' incognita.

9. Ogni qual volta il numero delle radici di una equazione sia eguale al proprio grado, esaminando il risultamento che si ottiene coll' effettuare la moltiplica dei fattori lineari della mede-

sima, potremo scoprire quali relazioni sussistano fra i coefficienti e le radici.

In fatti supponendo, per maggior chiarezza di discorso, che tutte le radici siano disuguali ed indicate con

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ldots a_{r-1},\ a_r,\ a_{r+1},\ \ldots\ldots a_m$$

il polinomio $E(x)$ non sarà atro che il prodotto

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_r)\ldots\ldots(x-a_m)$$

debitamente eseguito. Ogni termine di esso conterrà l' uno o l' altro termine del fattore $x - a_1$; l' uno o l' altro termine di $x - a_2$, di $x - a_3$ ec., di $x - a_m$, per cui qualsivoglia termine del prodotto sarà formato da m fattori, dei quali alcuni saranno le x, altri le $a_1, a_2 \ldots\ldots a_m$ che compongono i binomii $x - a_1$, $x - a_2 \ldots\ldots x - a_m$. Se i fattori a_1, a_2 ec. sono in numero r, gli altri eguali ad x saranno in numero $m - r$ ed il termine del prodotto avrà la forma

$$\pm\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_r\, x^{m-r}.$$

Ora, presi in qualunque maniera $m - r$ di quei fattori $x - a_1$, $x - a_2 \ldots\ldots$, moltiplicate le x che sono in essi ed il prodotto x^{m-r} moltiplicato poi per le $\ldots - a_{r-1}$, $- a_r$ che sono nei fattori rimanenti, si conseguisce un termine del prodotto $E(x)$; perciò questo prodotto conterrà la somma delle quantità che si ottengono moltiplicando x^{m-r} per tutti i prodotti che si possono conseguire impiegando r quali si vogliano dei fattori $- a_1$, $- a_2 \ldots\ldots - a_m$. Dunque il coefficiente di x^{m-r} nel polinomio $E(x)$ è la somma dei prodotti delle quantità $- a_1$, $- a_2 \ldots\ldots$, $- a_m$ prese ad r ad r. Sicco-

me poi surrogando le radici $a_1, a_2 \ldots a_m$ alle $-a_1$, $-a_2 \ldots$ ognuno dei prodotti nominati cambia o conserva il segno proprio secondo che r è dispari o pari; perciò il coefficiente di x^{m-r} nel polinomio $E(x)$ sarà la somma dei prodotti delle radici $a_1, a_2 \ldots a_m$ prese ad r ad r col segno cambiato o proprio secondo che r sarà dispari o pari. Cosicchè

» Se una equazione algebraica ammette tante » radici quant' è il proprio grado, il coefficiente » nel secondo termine sarà la somma delle radici » prese col segno contrario, quello nel terzo egua- » glierà la somma dei prodotti delle radici a due » a due col proprio segno ecc.; il coefficiente di » un termine $r+1$esimo sarà eguale alla somma » dei prodotti delle radici prese ad r ad r col se- » gno cambiato o proprio secondo che r è dispa- » ri o pari.

10. » L' ultimo termine eguaglia il prodotto di » tutte le radici col segno proprio ovvero oppo- » sto, secondo che sia pari o dispari il numero » di quelle; cioè il grado della equazione.

11. Ma qualunque eguaglianza ammette poi veramente delle radici; oppure talvolta non ne esistono, e il loro numero può variare dall' una all' altra equazione? Ecco un problema della più grande importanza, cui ora volgeremo il nostro studio; per il che ci è d' uopo premettere alcuni teoremi di uso generale nell' analisi algebraica.

12. Noteremo dapprima che

» In qualunque funzione di una variabile, al- » gebraica ed ordinata si può sostituire a quella » un valore il quale renda positivo il risultamento.

La funzione sia $E(x)$ nella quale possono esservi termini di diverso segno e i loro coefficienti saranno generalmente disuguali. Sia A_r il maggiore coefficiente dei termini negativi e si consideri il polinomio

$$x^m - A_r(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + x + 1) = x^m - A_r \frac{x^m - 1}{x - 1}$$

Questa quantità sarà positiva qualunque volta si abbia $x^m > A_r \frac{x^m - 1}{x - 1}$; cioè, supposto $x > 1$, dovrà essere

$$x^m(x - 1) > A_r (x^m - 1).$$

E siccome $x^m > x^m - 1$, basterà che sia $x - 1$ non $< A_r$ affinchè quella condizione venga soddisfatta. Perciò qualsivoglia numero non $< 1 + A_r$ venga sostituito alla x nel polinomio

$$x^m - A_r (x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + 1)$$

il risultamento sarà positivo; e tale sarà il valore corrispondente di $E(x)$, e perchè in questo polinomio possono esistere altri termini positivi oltre il primo e perchè fra i termini negativi alcuni saranno affetti da coefficienti minori di A_r.

13. » Se in un polinomio algebraico razionale » intero per rispetto ad una variabile, si sostitui- » scono a questa numeri compresi fra due dati, » il valore della funzione non potrà eccedere un » certo limite.

Sia P_x la somma dei termini positivi, N_x quella dei negativi; h, e k due quantità, che per speditezza, supporremo numeriche. Il polinomio dato

sarà $P_x - N_x$, e supposto $h > k$ saranno P_h, N_h i valori più grandi che offrono P_x, N_x col sostituirvi numeri presi da h e k; e P_k, N_k i loro più piccoli valori. Considero le quantità $P_h - N_k$; $P_k - N_h$, ed indico con $P_a - N_a$ il maggior risultamento fornito dal polinomio $P_x - N_x$. Se è $P_a - N_a > 0$, siccome $P_h > P_a$; $N_a > N_k$ avremo

$$P_h - N_k > P_a - N_a;$$

se poi $P_a - N_a$ è < 0, essendo $N_h > N_a$; $P_k < P_a$ sarà

$$N_h - P_k > N_a - P_a.$$

Dunque il valore di $P_x - N_x$ non può superare quella fra le quantità $P_h - N_k$, $P_k - N_h$, che è la più grande fatta astrazione dal segno.

14. Si abbia un polinomio algebraico razionale intero rispetto ad una variabile x, il quale rappresento con

$$F(x) = A_0\, x^m + A_1\, x^{m-1} \ldots + A_{m-n} x^n \ldots + A_m$$

Si sostituisca ovunque alla x il binomio $x + \omega$, quindi sviluppate tutte le potenze di tale binomio, si ordini il risultato per rispetto ad ω. Ciò eseguito, cercheremo come si componga il coefficiente di una potenza qualunque ω^r della funzione $F(x + \omega)$.

Nel polinomio $F(x)$ prendo il termine $A_{m-n} x^n$, che dicesi generale, perchè cambiandovi la n in m fornisce il termine primo, posto $n = m - 1$ si ottiene il secondo, ecc. Nella funzione $F(x+\omega)$ a quel termine $A_{m-n} x^n$ corrisponderà il seguente

$A_{m-n}(x+\omega)^n$, il di cui sviluppo, quando non sia $n < r$, conterrà

$$(\alpha) \qquad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r} A_{m-n} \cdot x^{n-r} \omega^r$$

che è moltiplicato per ω^r. Dunque siccome da $A_{m-n} x^n$ si desumono tutti i termini di $F(x)$ ponendo successivamente

$$(\beta) \qquad n = m,\ m-1,\ m-2 \ldots.$$

così dall' espressione (α) fornita da $A_{m-n} x^n$ si caveranno tutti i termini del polinomio $F(x+\omega)$ moltiplicati per ω^r sostituendo alla n gli stessi numeri (β), e la somma di questi termini sarà per conseguenza

$$(\gamma) \qquad \frac{\omega^r}{1.2\ldots.r}\Big[m(m-1)\ldots.(m-r+1) A_0 x^{m-r}$$
$$+ (m-1)(m-2)\ldots(m-r) A_1 x^{m-r-1}$$
$$+ (m-2)(m-3)\ldots.(m-r-1) A_2 x^{m-r-2} \ldots.$$
$$+ (r+1)r\ldots..3.2.A_{m-r-1} + r(r-1)\ldots..2.1 A_{m-r} \Big]$$

ove l'ultimo termine deriva da $A_{m-r} x^r$ perchè nei seguenti della funzione $F(x)$ si ha $n < r$.

15. Siccome ricercando il coefficiente della potenza ω^r nulla si è detto intorno la grandezza del numero r, così cambiando nel polinomio (γ) la r in $r+1$ se ne caverà quel termine della funzione $F(x+\omega)$ il quale è moltiplicato per ω^{r+1} cioè

$$(\delta)\ \frac{\omega^{r+1}}{1.2...r(r+1)}\Big[m(m-1).....(m-r+1)(m-r)A_0x^{m-r-1}$$
$$+(m-1)(m-2).....(m-r)(m-r-1)A_1x^{m-r-2}$$
$$+(m-2)(m-3).....(m-r-2)A_2x^{m-r-3}+.....$$
$$+(r+1)r(r-1).....3.2.1A_{m-r-1}\Big].$$

16. Paragonando nelle due espressioni (γ), (δ) le quantità comprese fra le parentesi quadrate, si scorge con facilità potersi la seconda derivare dalla prima, cioè il primo termine di quella si desumerà dal primo di questa, il secondo dal secondo, il terzo dal terzo ecc. moltiplicando quel termine generatore per l' esponente della potenza cui trovasi elevata la x, quindi diminuendo tale esponente dell'unità, e con questa legge da

$m(m-1)....(m-r+1)A_0x^{m-r}$ si desume

$m(m-1)....(m-r+1)(m-r)A_0x^{m-r-1}$

da $(m-1)(m-2)....(m-r)A_1x^{m-r-1}$ si cava

$m(m-1)....(m-r)(m-r-1)A_1x^{m-r-2}$

ecc. ecc.

Tale operazione, con cui il secondo dei polinomj nominati si deriva dal primo, suol chiamarsi *derivazione* ed è questa operazione semplicissima il fondamento di tutta l'analisi trascendente. Dunque il coefficiente di $\frac{\omega^{r+1}}{1.2...r+1}$ si desume da quello di $\frac{\omega^r}{1.2...r}$ eseguendo la derivazione. Per ottenere

il coefficiente di $\frac{\omega^{r+2}}{1....r+2}$ bisognerà derivare quello di $\frac{\omega^{r+1}}{1....r+1}$, ossia ripetere su questo la derivazione già eseguita sul coefficiente $\frac{\omega^r}{1.2...r}$ e questo secondo risultato si chiamerà *derivata seconda* del primo. Per conseguire il coefficiente di $\frac{\omega^{r+3}}{1.2...r+3}$ bisognerà derivare quello di $\frac{\omega^{r+2}}{1.2...r+2}$, ossia ripetere tre volte sul coefficiente di $\frac{\omega^r}{1.2...r}$ la operazione di derivazione, onde si chiama *derivata terza*, e così successivamente.

Concludiamo da tutto ciò che nello sviluppo della funzione $F(x+\omega)$ i coefficienti dei termini moltiplicati per $\frac{\omega^{r+1}}{1...r+1}$, $\frac{\omega^{r+2}}{1.2...r+2}$, $\frac{\omega^{r+3}}{1.2...r+3}$.... saranno rispettivamente le derivate prima, seconda, terza.... del coefficiente di $\frac{\omega^r}{1.2....r}$.

17. Questa dipendenza dei coefficienti delle potenze di ω nello sviluppo della funzione $F(x+\omega)$ ha luogo qualunque siasi quello cui si paragonano, mentre il numero r esponente di ω^r non ha per noi finora assunta alcuna denominazione; quindi è che il coefficiente di un medesimo termine si potrà in diversi modi derivare da termini

antecedenti: per esempio il coefficiente di $\frac{\omega^{r+s}}{1.2...r+s}$ si caverà da quello di $\frac{\omega^r}{1....r}$ eseguendo s volte la derivazione, ma potrà pure cavarsi da quello di $\frac{\omega^s}{1.2...s}$ ripetendo la derivazione un numero r di volte.

18. Indicheremo d'ora in avanti con $F_r(x)$ il il coefficiente di ω^r nella funzione $F(x+\omega)$; e siccome la maggiore potenza di ω in quello sviluppo è ω^m il cui coefficiente è A_0 ed il termine che non contiene ω è la stessa $F(x)$, come facilmente si comprende, ovvero si desume dall' espressione generale (γ) ponendovi $r=m$, ed $r=0$, quindi ne verrà l' equazione rimarcabile

$$F(x+\omega)=F(x)+\omega F_1(x)+\omega^2 F_2(x)...+\omega^r F_r(x)...+\omega^m A_0.$$

Se la successiva derivazione dei termini, riportata superiormente al coefficiente $\frac{\omega^r}{1...r}$, verrà riferita al primo $F(x)$, per il quale $r=0$, comprenderemo che $F_1(x)$ sarà la derivata prima di $F(x)$, $F_2(x)$ la derivata seconda di $F(x)$ divisa per 1.2; $F_3(x)$ la derivata terza divisa per 1.2.3; $F_r(x)$ sarà la derivata dell'ordine r divisa per il prodotto 1.2.3...r.

19. Ricordando quanto si è avvertito al §. 17. rimarcheremo una conseguenza che ne sarà utile in appresso. Il coefficiente F_{r+s} della potenza ω^{r+s} si desume da $F(x)$ derivando $r+s$ volte poi dividen-

do il risultato per 1.2....$(r+s)$: ma può ancora desumersi da 1.2.3....$rF_r(x)$ derivando questa quantità un numero s di volte e dividendo il risultato per 1.2....$r+s$; perciò, convenuto di indicare con $P^{(t)}(x)$ la derivata dell' ordine t di un polinomio $P(x)$, ne verrà

$$F_{r+s}(x)=\frac{F^{(r+s)}(x)}{1.2...(r+s)}=\frac{(1.2...rF_r(x))^{(s)}}{1.....r+s}$$

ossia $(F_r(x))^{(s)}=\frac{F^{(r+s)}(x)}{1.2....r}$; siccome poi

$$(F_r(x))^{(s)}=1.2.3...s(F_r(x))_s,$$ ne verrà

$$(F_r(x))_s=\frac{1.2.3....(r+s)}{1.2...r\times 1.2.3....s}F_{r+s}(x).$$

20. Considerando il valore del simbolo $F_r(x)$, di cui nel §. 14. abbiamo esebita la espressione, importa osservare che il termine di quella funzione in cui non esiste la x non è altro che A_{m-r} coefficiente di x^r nel polinomio $F(x)$, onde ne segue che i termini indipendenti dalla x nelle funzioni

$$F(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x)\ .....\ F_m(x)$$

saranno rispettivamente

$$A_m,\ A_{m-1},\ A_{m-2},\ A_{m-3},\ .....\ A_0.$$

21. Supponiamo che la solita equazione $E(x)=0$ ammetta m radici $a_1, a_2....a_m$, cosicchè si abbia

$$E(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)....(x-a_m).$$

Alla x si sostituisca $x+\omega$ in ambo i membri della equazione, ed ordinati i risultamenti per ri-

spetto ad ω, è evidente che i coefficienti di qualunque potenza ω^r saranno eguali fra loro.

Con quella sostituzione la $E(x)$ si trasforma in

$$E(x+\omega)=E(x)+\omega E_1(x)\ldots\ldots+\omega^r E_r(x)+\ldots$$

dove $E_r(x)=\frac{E^{(r)}(x)}{1.2.3\ldots r}$. Il secondo membro di quella equazione diventa

$$[\omega-(a_1-x)][\omega-(a_2-x)][\omega-(a_3-x)]\ldots[\omega-(a_m-x)],$$

ed in forza di quanto si è detto al §. 9. comprendiamo che, eseguita la moltiplicazione, il coefficiente di ω^r sarà la somma dei prodotti ad $m-r$ ad $m-r$ dei fattori

$$-(a_1-x),\ -(a_2-x),\ -(a_3-x)\ldots\ldots-(a_m-x)$$

ovvero dei seguenti

$$x-a_1,\ x-a_2\ldots\ldots x-a_m.$$

Siccome poi ognuno di tali prodotti non è altro che il quoziente di $E(x)$ diviso per un numero r dei medesimi fattori, ne segue che

» La funzione $E_r(x)=\frac{E^{(r)}(x)}{1\ldots\ldots r}$ eguaglia la somma dei quozienti che si ottengono dividendo il polinomio $E(x)$ per tutti i prodotti dei fattori lineari presi ad r ad r.

22. Ritornando ora all'argomento cui tendono i nostri studi, a riconoscere cioè se una equazione possa ammettere radici, e se il numero di esse varii dall'una all'altra equazione, verremo ora dimostrando che:

» Se il primo membro di una equazione algebraica ordinata fornisce un risultamento negativo, allorchè all'incognita si sostituisce una quantità determinata, quella equazione ammette almeno una radice.

Indico con h un numero che rende negativo il polinomio $E(x)$, con k un altro che lo rende positivo (§. 12.) ed asserisco trovarsi fra h e k un numero atto ad annullare $E(x)$. Se ciò non è chiamo P il più piccolo valore numerico che assume $E(x)$ sostituendo alla x qualunque numero compreso fra i limiti h e k. Considero il polinomio

$$E(x+\omega)=E(x)+\omega E_1(x)+\omega^2 E_2(x)\ldots+\omega^r E_r\ldots+\omega^m$$

ed osservando che sostituiti alla x nelle funzioni $E_1(x)$, $E_2(x)\ldots$ tutti i numeri da h a k il valore di ciascuna non può eccedere un certo limite (§. 13.) chiamo M il più grande di questi valori, fatta astrazione dal segno. Egli è manifesto che quando sia $\omega<1$ qualunque dei numeri da h a k venga sostituito nel polinomio $\omega E_1(x)+\omega^2 E_2(x)\ldots+\omega^m$ il risultato, fatta astrazione dal segno, sarà minore di

$$(\omega+\omega^2+\ldots\ldots+\omega^m)M$$

e molto più (§. 12)

$$\omega E_1(x)+\ldots\ldots+\omega^m<m\omega M.$$

Si considerino i numeri h, $h+\alpha$, $h+2\alpha,\ldots k(\varepsilon)$, essendo α una quantità piccolissima. Siccome $E(h)$, $E(k)$ hanno segni opposti, sostituiti i numeri nel polinomio $E(x)$, due di essi consecutivi fra

loro, che chiamo p e $p+\alpha$, daranno risultamenti di segni opposti, qualunque sia α. Si finga $\alpha < \frac{P}{mM}$, e siccome

$$(\zeta) \quad E(p+\alpha) = E(p) + \alpha E_1(p) + \alpha^2 E_2(p) \ldots + \alpha^m$$
$$\alpha E_1(p) + \alpha^2 E_2(p) \ldots\ldots + \alpha^m < m\alpha M$$

ed $m\alpha M < P$, ne viene che $E(p+\alpha)$ eguaglia $E(p)$ aggiuntavi una quantità minore di P: quindi essendo $E(p)$ non $< P$, il secondo membro della equazione (ζ), epperò la quantità $E(p+\alpha)$, avrà lo stesso segno di $E(p)$, il che involge contraddizione. Dunque è assurda l'ipotesi che fra h e k non esista numero atto ad annullare $E(x)$; come volevasi dimostrare.

23. Da questo teorema derivano molte conseguenze, le quali verremo dichiarando nei paragrafi seguenti.

23. » Qualunque equazione di grado dispari » ammette almeno una radice

Ciò è manifesto se l'ultimo termine è negativo, mentre posto $x = 0$ nel polinomio $E(x)$ il risultato è appunto il detto termine e però negativo. Supposto poi che l'ultimo termine sia positivo, nel polinomio

$$E(x) = x^m + \text{ecc.} \ldots + A_m$$

si ponga $x = -y$, onde ne verrà

$$E(x) = E(-y) = -y^m \ldots + A_m$$
$$= -(y^m + \text{ecc.} \ldots\ldots - A_m)$$

ma esiste almeno un valore di y che annulla il

polinomio $y^m \ldots - A_m$ il cui ultimo termine è negativo, dunque lo stesso valore sostituito alla x con segno opposto annullerà $E(x)$; cioè la equazione $E(x) = 0$ avrà almeno una radice reale.

24. » Se il grado di una equazione è pari e » l'ultimo termine negativo, la medesima ammet- » terà almeno due radici opposte di segno.

Sia l'equazione di grado pari coll'ultimo termine negativo

$$E(x) = x^m \ldots\ldots - A_m$$

chiamo k un numero che rende $E(k) > 0$: siccome $E(0) = -A_m < 0$ perciò fra 0 e k (§. 22) esisterà una radice positiva della equazione $E(x) = 0$. Essendo poi

$$E(-y) = y^m \ldots\ldots - A_m$$

vi sarà pure un valor positivo di y che rende

$$y^m \ldots\ldots - A_m = 0,$$

perciò lo stesso valore preso negativamente renderà $E(x) = 0$; dunque ecc.

25. » Se una equazione ammette un numero » di radici minore del proprio grado, diviso il » primo membro di essa per il prodotto delle » maggiori potenze de' fattori lineari corrispon- » denti a tutte quelle radici, il quoto sarà un po- » linomio di grado pari coll'ultimo termine po- » sitivo.

Sia (§. 5) $E(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \ldots (x-a_r)^{n_r} Q_r(x)$ e la equazione $E(x) = 0$ non ammetta che un numero n_1 di radici eguali ad a_1, n_2 radici eguali

ad $a_2, \ldots, n_r$ radici eguali ad a_r. Il polinomio $Q_r(x)$ non potrà giammai annullarsi per qualunque valore venga attribuito alla x, onde pei §§ 23, 24. dovrà essere di grado pari coll' ultimo termine positivo.

26. » Qualunque equazione potrà avere un nu-
» mero pari o dispari di radici positive secondo
» che l'ultimo suo termine sarà positivo o negativo.

Siano $a_1, a_2, \ldots\ldots a_r$ le radici positive di una equazione; $-b_1, -b_2 \ldots\ldots -b_s$ le negative; e supposto che il numero delle une e delle altre insieme sia minore di m si finga (§. 5)

$$E(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_r)(x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_s)Q_{r+s}$$

non curando se fra quelle radici ve n' abbiano o no delle eguali. Sia U l' ultimo termine del polinomio Q_{r+s}, quello di $E(x)$ verrà espresso dal prodotto

$$(\eta) \qquad -a_1\times-a_2\times-a_3\times\ldots\times-a_r\times b_1b_2\ldots b_sU$$

siccome U è necessariamente positivo (§. 25), e lo è pure il prodotto $b_1\, b_2\, b_3 \ldots\ldots b_s$, il segno di quella quantità (η) dipenderà dal numero dei fattori negativi $-a_1, -a_2, \ldots\ldots -a_r$. Di qui ne segue che se il prodotto (η), ossia l' ultimo termine della equazione $E(x)=0$, è positivo la medesima potrà avere un numero pari di radici positive, ma se il detto termine è negativo le radici positive saranno in numero dispari

27. Dunque se la equazione $E(x)=0$ sarà di grado pari, siccome lo è pure il quoziente Q_{r+s} (§. 25), sarà pari anche il numero delle

proprie radici. Perciò essendo l' ultimo suo termine positivo, le radici positive non che le negative saranno in numero pari; ma se il detto termine è negativo que' numeri saranno dispari entrambi. Se poi la equazione è di grado dispari, sarà pur dispari il numero delle proprie radici, e quindi se l' ultimo suo termine è positivo il numero delle radici positive sarà pari, dispari quello delle negative; e viceversa sarà dispari il primo numero e pari il secondo, quando l' ultimo termine di quella equazione sia negativo.

28. » Se fra due numeri è compresa una sola
» radice di una equazione i medesimi numeri
» sostituiti all' incognita danno risultamenti di
» segni opposti.

I due numeri siano h, k; la radice si rappresenti con a_1, per cui sarà

$$E(x) = (x - a_1)Q_1(x) \quad (\S\S.\ 3,\ 4).$$

Le due quantità $Q_1(h)$, $Q_1(k)$ avranno segni eguali, altrimenti fra h e k esisterebbe un numero atto ad annullare $Q_1(x)$ e però ancora $E(x)$; cioè fra h, k esisterebbe una seconda radice della equazione $E(x)=0$. Le quantità $h-a_1$, $k-a_1$, hanno segni contrarj, essendo a_1, per ipotesi, compresa fra h e k; dunque le due quantità

$$(h-a_1)Q_1(h) = E(h),\ (k-a_1)Q_1(k) = E(k)$$

hanno segni opposti, come appunto ho dichiarato.

29. » Se due numeri sostituiti all'incognita nel
» primo membro di una equazione forniscono ri-
» sultamenti di segni opposti esisterà fra essi un
» numero dispari di radici, e se i detti risul-

» tamenti hanno il medesimo segno o non esiste-
» rà radice fra i numeri sostituiti, o se ne troverà
» un numero pari.

Supponiamo che fra due numeri h_1, h_r esistano radici della equazione $E(x)=0$. La prima di esse si trovi fra h_1, ed h_2, la seconda fra h_2 ed h_3, la terza fra h_3 ed h_4 ecc. l' ultima fra h_{r-1} ed h_r. Considerando la serie di quantità

$$E(h_1),\ E(h_2),\ E(h_3),\ E(h_4) \ldots . E(h_r)$$

due quali si vogliano delle medesime prossime consecutive avranno segni opposti (§. 28), quindi i segni delle $E(h_1)$, $E(h_3)$, $E(h_5)$.... posta in sede dispari saranno eguali fra loro ed opposti ai segni delle rimanenti. Dunque se il segno di $E(h_r)$ è eguale a quello di $E(h_1)$ queste quantità entrambe in sedi dispari; sarà dispari il numero delle

$$(\theta) \qquad h_1,\ h_2 \ldots . h_r$$

e pari quello delle radici comprese fra h_1 ed h_r. Se poi i segni di $E(h_1)$ $E(h_r)$ sono opposti $E(h_r)$ si trova in sede pari, è pari il numero delle quantità (θ), e quindi dispari quello delle radici che si trovano fra h_1 ed h_r.

30. Qui pure prepareremo altre notizie per le quali estendere le nostre cognizioni intorno la qualità ed il numero delle radici di qualsivoglia equazione algebraica.

» Se una funzione algebraica, intera per ri-
» spetto ad una variabile si annulla colla medesi-

» ma, possono determinarsi tali valori che sosti-
» tuiti alla variabile in quella funzione il risulta-
» mento sia minore di qualunque quantità assegnata.
La funzione sia

$$(\iota) \qquad \pm Ax^a \pm Bx^b \ldots . \pm Hx^h \ldots . \pm Rx^r$$

ove gli esponenti a, b, ... sono positivi e crescenti, $a>0$, ed i segni affatto arbitrarj. Si chiami m il numero dei termini di quel polinomio, H il coefficiente più grande, e P una quantità data qualunque. Se alla x venisse attribuito un valore più piccolo dell' unità avressimo, fatta astrazione dal segno,

$$\pm Ax^a \pm Bx^b \ldots \pm Rx^r < mHx^a.$$

per cui se $mHx^a < P$, cioè se attribuiremo un valore alla

$$x < \left(\frac{P}{mH}\right)^{\frac{1}{a}}$$

il polinomio (ι) fornirà un risultamento minore di P, come abbiamo enunciato.

31. Ne segue che avendosi un polinomio algebraico intero della forma

$$\pm P \pm Ax^a \pm Bx^b \ldots \pm Hx^h \ldots \pm Rx^r \quad (\varkappa)$$

potremo attribuire alla x valori piccoli così che tutti i risultati corrispondenti abbiano il segno del primo suo termine. In fatti sostituito alla x qualunque valore più piccolo di $\left(\frac{P}{mH}\right)^{\frac{1}{a}}$ il polinomio (ι) dà un risultato minore di P e però aggiuntovi $\pm P$ l' aggregato, ossia il polinomio $(\varkappa)$

avrà lo stesso segno di questa quantità, che è appunto il suo primo termine.

32. Dato qualunque binomio immaginario, cioè della forma

$$a \pm b\sqrt{-1},$$

» nel quale a, b sono quantità reali, può sempre » determinarsi un'altra quantità reale r, ed un an» golo φ tali che sia

$$a \pm b\sqrt{-1} = r(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

ovvero $\quad a = r\cos\varphi\,,\ b = r\,\mathrm{sen}\,\varphi.$

Diffatto divisa la seconda equazione per la prima comprendiamo dover essere $\tan g\varphi = \frac{b}{a}$, il che è sempre possibile: quadrando poi sommando le equazioni medesime ne segue

$$r^2 = a^2 + b^2 \text{ ossia } r = \sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

33. » Essendo m, n due numeri interi, φ » qualsivoglia angolo, ha sempre luogo la equa» zione singolare

$$(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{m}{n}\varphi$$

Siano x, y due angoli quali si vogliano, ed eseguendo la moltiplica, senza difficoltà, verificheremo la equazione

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,y)$$
$$= \cos(x+y) \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(x+y)$$

la quale ne apprende, che il prodotto dei binomii immaginarii scritti nel primo membro si effettua sostituendo in alcuno la somma degli angoli all'an-

golo in esso contenuto. Dunque otterremo il prodotto del binomio $\cos x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x$ per se medesimo cambiando in esso l'angolo x in $x+x=2x$; se il prodotto $\cos 2x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,2x$ vorrà moltiplicarsi nuovamente per lo stesso binomio $\cos x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x$ ne otterremo la terza potenza cambiando in quello l'angolo $2x$ in $2x+x=3x$; dalla terza potenza otterremo la quarta moltiplicando $\cos 3x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,3x$ per $\cos x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x$ o, ciò che vale lo stesso, cambiando l'angolo $3x$ in $3x+x=4x$; onde è manifesto essere

$$(\lambda)\quad (\cos x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^n = \cos nx \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,nx$$

qualunque sia la grandezza dell'angolo x. Supposto perciò $nx=\varphi$, per cui da quella equazione caveremo

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

quindi

$$(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{n}$$

ed anche

$$(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{\frac{m}{n}} = \left(\cos\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{n}\right)^m$$

Ma in forza della equazione (λ)

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{n}\right)^m = \cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{m}{n}\varphi$$

ne segue per ultimo

$$(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{m}{n}\varphi.$$

34. A suo tempo esporremo le avvertenze necessarie ad aversi, allorchè da una data equazione altra se ne deriva per mezzo della estrazione di radice.

35. » Se in una funzione algebraica razionale » intera di una variabile a questa viene sostituito » un binomio $a+b\sqrt{-1}$ il risultamento potrà ri- » dursi alla forma

$$R\,(\cos\psi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\psi),$$

» ove R, ψ siano quantità reali.

Qualunque funzione algebraica razionale intera di una variabile x è l' aggregato di più termini della forma $A_{m-n}x^n$ essendone A_{m-n} il coefficiente. Perciò se vi sostituiremo

$$x=a+b\sqrt{-1}=r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\quad(\S\ 32)$$

quella funzione diverrà la somma di più termini della forma

$$A_{m-n}r^n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n=A_{m-n}r^n(\cos n\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,n\varphi)$$

Raccolte quindi le quantità reali qual' è

$$A_{m-n}\,r^n\cos n\,\varphi$$

ed indicata la loro somma con A, poi raccolti i termini immaginarii

$$A_{m-n}\,r^n\,\mathrm{sen}\,n\varphi\times\sqrt{-1}$$

e rappresentata la somma con $B\sqrt{-1}$ il risultato sarà $A+B\sqrt{-1}$

per cui (§ 32) supponendovi

$$\mathrm{tang.}\,\psi=\frac{B}{A},\quad R=\sqrt{(A^2+B^2)}$$

si ridurrà alla forma indicata.

36. Se nel medesimo polinomio algebraico razionale intero venisse sostituito

$$x=a-b\sqrt{-1}=r(\cos\varphi-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

il discorso fatto superiormente ne convince che il risultato dovrà essere

$$A-B\sqrt{-1}=R(\cos\psi-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\psi)$$

37. » Una equazione algebraica che non am- » mette radici reali può venir soddisfatta sosti- » tuendo all' incognita un binomio immaginario.

Nel polinomio $E(x)$ posto $x+\alpha t$ in luogo della x si ottiene

$$E(x+\alpha t)=E(x)+\alpha tE_1(x)+\alpha^2t^2E_2(x)\ldots+\alpha^nt^nE_n(x)\ldots+\alpha^mt^m$$

quindi supposti

$$x=r\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi),\ t=\cos\psi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\psi$$

essendo α, r, φ, ψ quantità reali, avremo

$$t^n=\cos n\psi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,n\,\psi\quad(\S\ 33)$$

$E(x)$ si ridurrà alla forma

$$R_0(\cos\varphi_0+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)\ (\S\ 35)$$

$E_1(x)$ . . . . . alla forma

$$R_1\,(\cos\varphi_1+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_1)$$

. . . . . .

$E_n(x)$ si ridurrà alla forma

$$R_n\,(\cos\varphi_n+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_n)$$

sarà

$$t^n E_n(x) = R_n \{\cos(n\psi + \varphi_n) + \sqrt{-1}\, sen(n\psi + \varphi_n)\}$$

ed

$$(\nu) E_{x+\alpha t} = [R_0 \cos\varphi_0 + \alpha R_1 \cos(\psi+\varphi_1) + \alpha^2 R_2 \cos(2\psi+\varphi_2) \ldots \ldots\ldots + \alpha^n R_n \cos(n\psi+\varphi_n) \ldots\ldots]$$
$$+ [R_0 sen\varphi_0 + \alpha R_1 sen(\psi+\varphi_1) + \alpha^2 R_2 sen(2\psi+\varphi_2) + \ldots\ldots + \alpha^n R_n sen(n\psi+\varphi_n) \ldots\ldots]\sqrt{-1}$$

polinomio che abbiamo ottenuto sostituendo alla x

$$x + \alpha t = (r\cos\varphi + \alpha\cos\psi) + (r\, sen\,\varphi + \alpha\, sen\,\psi)\sqrt{-1}$$

cioè un binomio immaginario della forma

$$a + b\sqrt{-1}$$

dove $a = r\cos\varphi + \alpha\cos\psi$, $b = r\, sen\,\varphi + \alpha\, sen\,\psi$. Se il polinomio ($\nu$) non si annullasse per qualsivoglia valore di a, b; cioè non potessero essere giammai

$$(\xi)\quad R_0 \cos\varphi_0 + \alpha R_1 \cos(\psi+\varphi_1) + \alpha^2 R_2 \cos(2\psi+\varphi_2) \ldots\ldots + \alpha^n R_n \cos(n\psi+\varphi_n) \ldots\ldots = 0$$

$$R_0\, sen\,\varphi_0 + \alpha R_1\, sen(\psi+\varphi_1) + \alpha^2 R_2\, sen(2\psi+\varphi_2) \ldots\ldots + \alpha^n R_n\, sen(n\psi+\varphi_n) \ldots\ldots = 0$$

la somma

$$R_0^2 + 2\alpha R_0 [R_1 \cos(\psi+\varphi_1-\varphi_0) + \alpha R_2 \cos(2\psi+\varphi_2-\varphi_0) \ldots + \alpha^{n-1} R_n \cos(n\psi+\varphi_n-\varphi_0) \ldots\ldots]$$
$$(o)\qquad + \alpha^2 [R_1 \cos(\psi+\varphi_1) + \alpha R_2 \cos(2\psi+\varphi_2) \ldots\ldots + \alpha^{n-1} R_n \cos(n\psi+\varphi_n) \ldots]^2$$
$$+ \alpha^2 [R_1\, sen(\psi+\varphi_1) + \alpha R_2\, sen(2\psi+\varphi_2) \ldots\ldots + \alpha^{n-1} R_n\, sen(n\psi+\varphi_n) \ldots]^2$$

dei quadrati di quelle quantità (ξ) sarebbe sempre positiva. Il suo valore varierà variando a e b, ma non potrà impicciolire oltre un certo limite. Si indichi adunque con M il minimo valore che può assumere quella quantità, al quale si riduca ponendovi

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\, sen\,\varphi\,,$$

ciò che possiamo fingere essendo φ ed r finora affatto indeterminate. Siccome a, b assumono questi valori $r\cos\varphi$, $r\, sen\,\varphi$, corrispondenti al minimo della funzione (o) ponendovi $\alpha = 0$, perciò dovrà essere $R_0^2 = M$.

Siano a', b' due valori di a, b che differendo il meno possibile da $a = r\cos\varphi$, $b = r\cos\varphi$ rendano nuovamente il polinomio (o) eguale ad M. Tutti i numeri α compresi fra lo zero e quello dato da

$$(\pi)\quad r\cos\varphi + \alpha\cos\psi = a'\,, \quad r\, sen\,\varphi + \alpha\, sen\,\psi = b'$$

renderanno la quantità (o) maggiore di M, e quindi

$$(\rho)\quad 2\alpha R_0 [R_1 \cos(\psi+\varphi_1-\varphi_0) \ldots + \alpha^{n-1} R_n \cos(n\psi+\varphi_n-\varphi_0) \ldots] + \alpha^2 [R_1 \cos(\psi+\varphi_1) + \ldots\ldots]^2 + \alpha^2 [R_1\, sen(\psi+\varphi_1) + \ldots\ldots]^2 > 0$$

il coefficiente di $2\alpha R_0$ non può essere nullo quando non siano

$$R_1 = 0\,, \quad R_2 = 0 \ldots\ldots R_n = 0 \ldots\ldots$$

mentre ogni termine contiene l' angolo ψ indeterminato, e quando tali equazioni tutte avessero luogo ne verrebbe

$$E(x + \alpha t) = E(x)$$

cioè il valore di $E(x)$ sarebbe sempre lo stesso qualunque quantità $x + \alpha t$ venisse sostituita alla x, il che è assurdo. Potranno però in quella espressione mancare molti termini consecutivi ed essere per esempio

$$R_1 = R_2 \ldots\ldots = R_{n-1} = 0$$

per il che la ineguaglianza (ρ) si ridurrà alla seguente

$$(\sigma) \quad 2\alpha R_0 [\alpha^{n-1} R_n \cos(n\psi + \varphi_n - \varphi_0) + \ldots]$$
$$+ \alpha^2 [\alpha^{n-1} R_n \cos(n\psi + \varphi_n) \ldots]^2 + \alpha^2 [\alpha^{n-1} R_n \operatorname{sen}(n\psi + \varphi_n) \ldots]^2 > 0$$

Se all' angolo ψ venisse attribuito un valore qualunque, restando nel polinomio (σ) indeterminata la α, potremo fingere questa quantità così piccola che il segno del medesimo polinomio sia quello del termine

$$(\tau) \qquad 2\alpha R_0 \alpha^{n-1} R_n \cos(n\psi + \varphi_n - \varphi_0)$$

che contiene la minor potenza di α (§ 31), e siccome le equazioni (π) importando

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{b' - r \operatorname{sen} \varphi}{a' - r \cos \varphi},$$

ψ può variare dall' angolo più piccolo che soddisfa questa equazione al medesimo angolo aumentato di un multiplo intero qualunque della semicirconferenza, perciò il termine (τ) potrà ridursi a quantità negativa, ed essere conseguentemente negativa anche la funzione (σ). Dunque è assurdo il supporre che quella quantità debba essere sempre positiva, non sarà il minimo $M > 0$, quindi

Per altre dimostr. veggasi Gauss. Comment. Acad. Gottingae ann. 1816. — Lagrange e Ruffini opere cit. a pag. 72.

le equazioni (ξ) potranno sussistere, cioè qualunque equazione algebraica che non ammette radici reali può venir soddisfatta sostituendo all' incognita un binomio immaginario.

38. Se ponendo $x = a + b\sqrt{-1}$ la equazione $E(x) = 0$ fosse soddisfatta, siccome quella sostituzione riduce il polinomio $E(x)$ alla forma

$$A + B\sqrt{-1} \quad (\S\ 35)$$

saranno in conseguenza $A = 0$, $B = 0$.
Se ora nello stesso polinomio $E(x)$ si ponga

$$x = a - b\sqrt{-1}$$

il risultato sarà (§ 36)

$$A - B\sqrt{-1} = 0$$

identicamente. Dunque

» Tanto $a + b\sqrt{-1}$ come $a - b\sqrt{-1}$ renderanno soddisfatta la equazione $E(x) = 0$, e perciò si chiamano *radici immaginarie conjugate* della medesima.

39. Riprendiamo la solita equazione $E(x) = 0$ e supposto che la medesima ammetta unicamente
un numero n_1 di radici eguali ad a_1
un numero n_2 di radici eguali ad a_2
. . . . . .
n_r radici eguali ad a_r
avremo (§ 5)

$$(\upsilon) \quad E(x) = (x - a_1)^{n_1} (x - a_2)^{n_2} \ldots (x - a_r)^{n_r} Q_r(x).$$

La equazione $Q_r(x) = 0$ non avendo radici reali ne ammetterà una coppia della forma

$$c_1 \pm d_1 \sqrt{-1}$$

e siccome quanto si è detto nei §§ 3, 5 non im-

porta che siano reali le quantità ivi indicate con a_1, a_2 ...., perciò ne segue che $Q_r(x)$ sarà divisibile per il prodotto

$$(x-c_1-d_1\sqrt{-1})(x-c_1+d_1\sqrt{-1})=(x^2-2c_1x+c_1^2+d_1^2)$$

ovvero per qualche potenza del medesimo.

Si indichi con p_1 l' esponente di tale potenza con Q_{r+p_1} il quoziente, e supposto

$$c_1^2+d_1^2=e_1^2,$$

sarà

$$(\varphi) \qquad Q_r(x)=(x^2-2c_1x+e_1^2)^{p_1}\,Q_{r+p_1}(x).$$

Il grado del polinomio $Q_r(x)$ è espresso da

$$(\chi) \qquad m-n_1-n_2,\ldots-n_r \quad (\S\ 5)$$

e quello di Q_{r+p_1} lo sarà dello stesso numero diminuito di $2p_1$.

La equazione $Q_{r+p_1}(x)=0$ non ammetterà radici reali altrimenti queste annullerebbero $Q_r(x)$, ed anche $E(x)$: dunque, con discorso analogo all' antecedente, proveremo

$$(\psi) \qquad Q_{r+p_1}(x)=(x^2-2c_2x+e_2^2)^{p_2}\,Q_{r+p_2}(x)$$

essendo $c_2\pm d_2\sqrt{-1}$ radici di $Q_{r+p_1}(x)=0$, ed $a_2^2+b_2^2=e_2^2$. Il grado di $Q_{r+p_2}(x)$ sarà poi il numero (χ) diminuito di $2p_1+2p_2$. Analogamente si dimostreranno

$$(\omega) \quad Q_{r+p_2}(x)=(x^2-2c_3x+e_3^2)^{p_3}\,Q_{r+p_3}(x)$$

ecc. . . . . ecc.

Sostituendo ormai nella equazione (υ) il valore di $Q_r(x)$ dato dalla (φ), quindi eliminati successivamente Q_{r+p_1}, Q_{r+p_2} ..... colle equazioni (ψ) (ω)..... vedremo derivarne

$$E(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots\ldots(x-a_r)^{n_r}(x^2-2c_1x+e_1^2)^{p_1}$$
$$\times(x^2-2c_2x+e_2^2)^{p_2}\ldots\ldots(x^2-4c_sx+e_s^2)^{p_s}$$

in cui l' ultimo dei quozienti Q_r, Q_{r+p_1} .... dovrà essere l' unità, come abbiamo superiormente dimostrato (§ 8).

Siccome poi le radici immaginarie conjugate

$$c_1\pm d_1\sqrt{-1}\ ,\quad c_2\pm d_2\sqrt{-1}\ \text{ecc.}$$

rendono $E(x)=0$, quindi ne segue l' importante teorema, che

» Qualunque equazione algebraica ammette tante » radici quant' è il proprio grado: alcune di que» ste possono essere reali, le altre sono immagi» narie due a due conjugate.

40. Le proposizioni dei paragrafi (3, 4, 8, 9, 21) essendo unicamente fondate sulla definizione caratteristica di ciò che si deve intendere per radice non esigono che le medesime radici siano reali anzichè immaginarie, onde a queste e a quelle egualmente si riferiscono.

41. Ora ne sarà facile il dimostrare che

» Due radici reali di una equazione, fra le quali » altra non ne esiste, comprendono un numero » dispari di radici della equazione derivata prima.

Siano a_1, a_2, a_3 ..... a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, ... a_s (σ) le radici positive di una equazione algebraica $E(x)=0$, le quali supporremo scritte secondo l'ordine di loro grandezza decrescente, e siano

$$-b_1,\ -b_2,\ -b_3\ldots\ -b_t$$

le radici negative, per cui sarà

$$E(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)..(x-a_s)(x+b_1)..(x+b_t)Q(x)$$

ove $Q(x)$ rappresenta il prodotto dei fattori che corrispondono alle radici immaginarie. Siccome la derivata prima $E^{(1)}(x) = E_1(x)$ eguaglia la somma dei quozienti che si ottengono dividendo il polinomio $E(x)$ per ciascuno de' suoi fattori lineari reali ed immaginarii (§ 21), perciò sostituita in $E^{(1)}(x)$ una radice qualunque alla x, per esempio a_{r-1}, svaniranno tutti quelli fra i quozienti nominati in cui esiste il fattore $x-a_{r-1}$ e si avrà perciò

$$E^{(1)}(a_{r-1})=(a_{r-1}-a_1)(a_{r-1}-a_2)..(a_{r-1}-a_{r-2})(a_{r-1}-a_r)..$$
$$.....(a_{r-1}-a_s) \times (a_{r-1}+b_1)....(a_{r-1}+b_t)\, Q(a_{r-1})$$

e postovi $x = a_r$ ne verrà

$$E^{(1)}(a_r) = (a_r-a_1)(a_r-a_2).....(a_r-a_{r-1})(a_r-a_{r+1}).....$$
$$.....(a_r-a_s) \times (a_r+b_1)(a_r+b_2)...(a_r+b_t)\, Q(a_r)$$

Ora si noti che nella serie (ς) qualunque radice è minore delle antecedenti e maggiore delle conseguenti, perciò essendo $Q(a_{r-1})$, $Q(a_r)$ quantità necessariamente positive (§ 25), $E^{(1)}(a_{r-1})$ conterrà i soli fattori negativi

$$a_{r-1}-a_1\,,\quad a_{r-1}-a_2\,.....\,a_{r-1}-a_{r-2}$$

ed $E^{(1)}(a_r)$ i fattori negativi

$$a_r-a_1\,,\ a_r-a_2\,.....\,a_r-a_{r-1}$$

Dunque essendo il numero di questi maggiore dell' unità del numero di quelli, le due quantità

$$E^{(1)}(a_{r-1})\,,\quad E^{(1)}(a_r)$$

avranno segni opposti, e fra a_{r-1} ed a_r (§ 29) esisterà un numero dispari di radici della equazione $E^{(1)}(x)=0$.

42. Con discorso analogo si dimostra estendersi il teorema alle radici negative, non che alla positiva e negativa che immediatamente si succedono.

43. Abbiamo ormai acquistate cognizioni sufficienti per abbracciare alcuni teoremi importantissimi, i quali offrono completa risoluzione del problema enunciato nel (§ 11); al quale intento conveniamo che in una serie di numeri positivi e negativi, scritti gli uni di seguito agli altri, si dirà esservi *permanenza* fra due termini consecutivi allorquando essi avranno il medesimo segno; e diremo esservi una *variazione* quando i segni di que' termini saranno opposti.

44. Dal polinomio $E(x)$ si desumano tutte le quantità

$$E_m(x)=1\,,\ldots,E_{r+i}(x)\,,\ E_{r+i-1}(x)\ldots$$
$$E_{r+1}(x)\,,\ E_r(x)\,,\ E_{r-1}(x)\ldots..$$
$$E_2\,,\ E_1\,,\ E(x) \qquad (\eta)$$

In ciascuna si sostituisca alla x qualunque numero a e si scrivano i risultamenti col medesimo ordine, quindi si ponga per x un altro numero b maggiore del primo. Si enumerino le variazioni di segno che offre la serie corrispondente alla prima sostituzione, poi quelle che offre la seconda. Se fra i numeri a, b non esistessero radici di alcuna equazione

$$E(x)=0\,,\ E_1(x)=0\,,\ldots.\,E_r(x)=0\ldots..$$

le quantità

$$E(a)\,,\ E(b)\,;\ E_1(a)\,,\ E_1(b);\ldots.\,E_r(a)\,,\ E_r(b)\,;\ldots$$

avrebbero due a due i medesimi segni e le serie nominate offrirebbero ovunque le stesse variazioni e permanenze. Perciò accadendo mutazione dovremo ripeterla dall'esistenza di qualche radice. Indichiamo con c un numero preso fra i limiti a, b il quale renda contemporaneamente

(a) $E_{r+i-1}(c) = 0$, $E_{r+i-2}(c) = 0$ ... fino ad $E_r(c)=0$

e nella serie (η) si fingano sostituiti di seguito

$$c - \omega, \; c, \; c + \omega.$$

Il paragrafo (18) ne apprende essere

$$E_{r+i-s}(c\pm\omega)=E_{r+i-s}(c)\pm\omega\,[E_{r+i-s}(c)]_1+\omega^2[E_{r+i-s}(c)]_2 \pm\omega^3[E_{r+i-s}(c)]_3 \ldots\ldots + (\pm\omega)^s\,[E_{r+i-s}(c)]_s + \ldots\ldots$$

e siccome le quantità

$$[E_{r+i-s}(c)]_1, \; [E_{r+i-s}(c)]_2, \ldots\ldots [E_{r+i-s}(c)]_{s-1}$$

differiscono rispettivamente dalle

$$E_{r+i-s+1}(c), \; E_{r+i-s+2}(c), \ldots\ldots E_{r+i-1}(c)$$

per un coefficiente numerico (§ 19) supposto s non $> i+1$ quelle quantità sono tutte eguali a zero e ne verrà di conseguenza

(b) $$E_{r+i-s}(c\pm\omega) = (\pm\omega)^s\,[E_{r+i-s}(c)]_s + (\pm\omega)^{s+1}\,[E_{r+i-s}(c)]_{s+1} + \ldots$$

Ora per una proposizione antecedente (§ 31) noi possiamo fingere ω così piccolo che il segno del polinomio (b) dipenda da quello del primo termine, qualunque valore si dia ad s da $s = i$ ad $s = 1$, cosicchè siccome $[E_{r+i-s}(c)]_s$ differisce da $E_{r+i}(c)$ per un solo coefficiente numerico (§ 19)

il segno della funzione $E_{r+i-s}(c \pm \omega)$ sarà eguale a quello di $(\pm 1)^s E_{r+i}(c)$. Dunque $E_{r+i-s}(c+\omega)$ avrà il segno medesimo di $E_{r+i}(c)$, ed $E_{r+i-s}(c-\omega)$ avrà segno eguale od opposto a quello di $E_{r+i}(c)$ secondo che s sarà pari o dispari.

Ciò premesso poniamoci sott' occhio le due serie

(c) $E_{r+i}(c-\omega)$, $E_{r+i-1}(c-\omega)$, $E_{r+i-2}(c-\omega)$, $E_{r+i-3}(c-\omega)$ ... $E_{r+1}(c-\omega)$, $E_r(c-\omega)$, $E_{r-1}(c-\omega)$,

(d) $E_{r+i}(c+\omega)$, $E_{r+i-1}(c+\omega)$, $E_{r+i-2}(c+\omega)$, $E_{r+i-3}(c+\omega)$ ... $E_{r+1}(c+\omega)$, $E_r(c+\omega)$, $E_{r-1}(c+\omega)$,

e si noti che quando la quantità piccolissima ω, oltre le condizioni superiormente indicate, abbia pur quella che fra $c \pm \omega$ non esista radice delle equazioni

$$E_{r+i}(x)=0, \quad E_{r-1}(x)=0,$$

le quantità

$E_{r+i}(c+\omega)$, $E_{r+i}(c-\omega)$, e le $E_{r-1}(c+\omega)$, $E_{r-1}(c-\omega)$ avranno due a due i medesimi segni; ma totalmente arbitrarii. Ora quanto si è detto in riguardo alla funzione E_{r+i-s} ne apprende che la serie (d) dal termine $E_{r+i}(c+\omega)$ fino al $E_r(c+\omega)$ offrirà tutte permanenze, potendovi essere una variazione da quest' ultimo al seguente $E_{r-1}(c+\omega)$. Nella superiore da $E_{r+i}(c-\omega)$ fino ad $E_r(c-\omega)$ si avranno tante variazioni il numero delle quali è indicato con i. Dunque passando dalla serie (c) alla (d) verremo perdendo i variazioni. Se poi $E_{r+i}(c)$,

$E_{r-1}(c)$, e quindi anche $E_{r+i}(c\pm\omega)$, $E_{r-1}(c\pm\omega)$ hanno i medesimi segni (§ 28) siccome posta $s=i$, $E_{r+i-s}=E_r$, così, essendo i pari $E_r(c-\omega)$ avrà segno eguale ad $E_{r+i}(c-\omega)$ e però ad $E_{r-1}(c-\omega)$, onde fra $E_r(c-\omega)$, $E_{r-1}(c-\omega)$ vi sarà permanenza, come fra $E_r(c+\omega)$ ed $E_{r-1}(c+\omega)$; ma se i è dispari $E_r(c-\omega)$ sarà opposto nel segno ad $E_{r+i}(c-\omega)$, ed $E_{r-i}(c-\omega)$; fra i due ultimi termini della serie (c) si troverà una variazione cui corrisponderà nella serie (d) una permanenza, e quindi passando dall' una all' altra si perderanno $i+1$ variazioni. Qualora poi i segni dei termini estremi $E_{r+i}(c)$, $E_{r-1}(c)$ fossero opposti, fra $E_r(c+\omega)$, $E_{r-1}(c+\omega)$ avressimo una variazione; ed essendo i numero pari $E_r(c-\omega)$ avrà lo stesso segno di $E_{r+i}(c-\omega)$, ed opposto ad $E_{r-1}(c-\omega)$; e se i è dispari i segni di $E_r(c-\omega)$, $E_{r-1}(c-\omega)$ saranno eguali. Dunque nel primo caso passando dalla serie (c) alla (d) si perderanno i variazioni e nel secondo $i-1$ soltanto.

Dal fin qui detto si raccoglie che se un numero c annulla più funzioni consecutive nella serie (η), quali sono le (a), sostituiti nella medesima $c-\omega$ poi $c+\omega$, essendo ω una quantità piccola quanto si è detto, colla seconda sostituzione verranno a sparire più variazioni di segno le quali saranno in numero i quando i sia pari, ed essendo i dispari il numero delle variazioni perdute sarà $i\pm1$ secondo che i termini collaterali a quelli che si annullano, vale a dire

$$E_{r+i} \text{ ed } E_{r-1}$$

avranno segni eguali ovvero opposti.

Se l' ultima delle funzioni E_r che si annulla ponendovi $x=c$ fosse la $E(x)$ medesima, non avendo luogo le distinzioni superiormente indicate, le variazioni che si perdono passando dalla serie (c) alla (d) saranno tante appunto quante le equazioni consecutive soddisfatte dalla medesima radice, e il loro numero potrà essere dispari e pari.

Se dunque nella serie (η) si metteranno tutti i numeri partendo da un dato k ed ascendendo ad un maggiore h, ogni qual volta sostituiremo due numeri $c-\omega$, $c+\omega$ fra i quali esiste una radice c atta a soddisfare più equazioni consecutive

$$E_{r+i-1}(x)=0,\ E_{r+i-2}(x)=0\ \ldots\ldots\ E_r(x)=0$$

si perderanno i ovvero $i\pm1$ variazioni secondo che i è pari o dispari. Se la radice corrisponde ad una sola equazione, per esempio $E_{r+i-1}(x)=0$ e le due quantità $E_{r+i}(c)$, $E_{r+i-2}(c)$ hanno segni opposti non vi sarà perdita alcuna; ma se quel numero c renderà $E(x)=0$ le variazioni saranno in numero i, vale a dire una sola almeno. Dunque se il numero delle variazioni perdute è dispari esisterà fra que' limiti h, k almeno una radice della equazione primitiva $E(x)=0$.

45. Da questo teorema rimarcabile vedremo derivarne molte singolari conseguenze.

Nella serie (η) si fingano posti

$$x=\infty,\ \text{poi}\ x=0$$

la prima sostituzione rende il primo termine di ciascuna espressione

$$E_m(x), E_{m-1}(x), \ldots\ldots E(x)$$

maggiore della somma dei rimanenti, per cui detta serie consterà di termini tutti positivi. Sostituendo poi $x=0$, per quanto si è notato (§ 20) si avrà la serie

$$1, A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_m$$

cioè quella dei coefficienti del polinomio $E(x)$. Ora i due limiti $x=0$, $x=\infty$ comprendono tutte le radici positive della equazione $E(x)=0$ e le variazioni che si possono perdere sono tante quante ne esistono nel polinomio $E(x)=0$, quindi

» Il numero delle radici positive di una equa-
» zione non potrà superare quello delle proprie
» variazioni di segno.

46. Se la equazione $E(x)=0$ ammette qualche radice negativa $-b$ sostituito $x=-b$ si avrà identicamente

$$b^m - A_1 b^{m-1} + A_2 b^{m-2} - A_3 b^{m-3} \ldots\ldots = 0$$

cioè le radici negative della equazione $E(x)=0$ saranno radici positive della seguente

$$(e) \qquad x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} \ldots\ldots = 0$$

e le radici negative della equazione $E(x)=0$ non saranno in numero maggiore delle variazioni di segno di questa. Paragonati ora due termini consecutivi $A_{m-r}x^r + A_{m-r+1}x^{r-1}$ di $E(x)$ ai corrispondenti $A_{m-r}(-x)^r + A_{m-r+1}(-x)^{r-1}$ del polinomio (e), vediamo quelli in cui l' esponente della x è pari conservare il medesimo segno e

cambiarsi negli altri due, per cui se nella prima coppia di termini esiste una permanenza si troverà fra i secondi una variazione e viceversa. Dunque tante variazioni esisteranno nel polinomio (e) quante permanenze in $E(x)$; per cui ne segue che

» Il numero delle radici negative di una equa-
» zione non può eccedere quello delle proprie
» permanenze di segno.

47. » Se le radici di una equazione sono tutte
» reali, tante saranno le positive quante le varia-
» zioni di segno, le negative quante le permanenze.

Il numero delle radici eguaglia il grado della equazione e quindi i numeri delle permanenze e delle variazioni insieme, non potranno adunque le radici positive essere in numero minore delle variazioni a meno che quello delle negative superi il numero delle permanenze, e viceversa: il che si oppone a quanto abbiamo dimostrato nel paragrafo antecedente.

48. Alcune volte nelle equazioni mancano qua e là più termini consecutivi, il che merita speciale attenzione. Siccome fra $+\infty$ e $-\infty$ sono comprese tutte le radici reali, sostituendo $x=-\infty$ poi $x=+\infty$ nella serie (η) spariranno tante variazioni di segno almeno quante sono quelle radici: ma ponendo $x=-\infty$ il valore del primo termine di ciascuna funzione $E_m(x)$, $E_{m-1}(x)$, $E_{m-2}(x)$ . . . . . prevale alla somma dei rimanenti ed i loro segni sono alternativamente positivo il primo, negativo il secondo, il terzo positivo ecc.

dunque quella serie offre tante variazioni quanti termini contiene meno uno, vale a dire m variazioni. Posto poi $x=\infty$ si hanno tante permanenze, tutte quelle variazioni vengono a sparire, e le radici reali di quella equazione potranno essere in numero m, siccome ci è noto. Ogni radice della equazione $E(x)=0$ produrrà certamente una perdita; ma alcune di queste potranno pur derivare dalle radici di più equazioni consecutive analoghe alle (a). Se nel polinomio $E(x)=0$ fossero nulli alcuni coefficienti per esempio

$$A_{m-r-i+1},\ A_{m-r-i+2},\ \ldots\ \text{fino ad}\ A_{m-r}$$

essendo questi i termini che non contengono la x nelle funzioni

$$E_{r+i-1}(x),\ E_{r+i-2}\ldots\ldots E_r(x),\ (\S.\ 20)$$

le medesime si annulleranno ponendovi $x=0$, cioè le equazioni (a) avrebbero lo zero per radice comune, quindi per essa radice verranno a sparire dalla serie (η) i variazioni di segno, quando i sia pari, ovvero $i\pm 1$ secondo che le due quantità

$$E_{r+i}(0)=A_{m-r-i},\ E_{r-1}(0)=A_{m-r+1}$$

avranno segni eguali od opposti. Dunque non vi resteranno che $m-i$ ovvero $m-(i\pm 1)$ variazioni le quali potranno sparire per le radici della equazione $E(x)=0$, cioè

» Se in una equazione mancano più termini
» consecutivi in numero pari ne dedurremo esser-
» vi per la medesima altrettante radici immagina-
» rie. Se poi il numero dei termini mancanti è
» dispari, ne conchiuderemo esistere un numero di

» radici immaginarie eguale a quello dei detti ter-
» mini accresciuto dell'unità se i due termini col-
« laterali ai medesimi hanno segni eguali, e di-
» minuito dell' unità nel caso contrario.

49. Se manca un termine solo ed i due collaterali hanno segni opposti non potremo dedurne alcuna conseguenza.

50. Per quanto sia pregevole il teorema del (§. 44) dovuto al celebre Fourier (1) ed importanti le conseguenze che ne abbiamo derivate, le quali insegnò ai geometri il sommo Des Cartes, pure non ha per esso completa risoluzione il problema cardinale (§. 11.) cui sono dirette le indagini nostre. A darne pieno compimento giunge opportuna una proposizione memorabile del sig. Sturm (2), che qui ci faremo a dimostrare, fingendo che le equazioni

$$E(x)=0,\ E_1(x)=E^{(1)}(x)=0$$

non abbiano radici comuni, il che non importa essenzialmente; nè limita la generalità del teorema.

51. Si cambino i segni ai due polinomj $E(x)$, $E_1(x)$, quindi dividasi $-E(x)$ per $-E_1(x)$ rispetto ad x, e si continui la divisione fino che è possibile. Siccome tale operazione potrebbe introdurre nel quoto delle frazioni le quali rendano penoso il calcolo, così prima d' intraprendere la divisione si potranno moltiplicare $-E(x)$ e $-E_1(x)$ per

(1) Analyse des equations déterminées. Paris 1831.
(2) Mem. presen. à la Accad. de Paris T. VI.

numeri opportuni, che indicherò con a_1, b_1. Si chiami q_1 il quoto ed $E_2(x)$ il residuo, così che sia

$$(f) \qquad -a_1 E(x) = -b_1 E_1(x) \cdot q_1 + E_2(x).$$

Si divida nuovamente $-E_1(x)$ per $-E_2(x)$, ovvero i prodotti di queste quantità per numeri atti ad evitare la comparsa delle frazioni, i quali indicherò con a_2 e b_2; e supposti q_2 il quoto, $E_3(x)$ il residuo, sarà

$$(g) \qquad -a_2 E_1(x) = -b_2 E_2(x) q_2 + E_3(x)$$

Si divida nuovamente $-a_3 E_2(x)$ per $-b_3 E_3(x)$ essendo a_3, b_3 coefficienti numerici opportuni e sia

$$(h) \qquad -a_3 E_2(x) = -b_3 E_3(x) q_3 + E_4(x)$$

e continuando la operazione, finchè l' ultimo residuo non contenga la x, fingiamo aversi le equazioni

$$(k) \qquad -a_4 E_3(x) = -b_4 E_4(x) q_4 + E_5(x)$$

. . . . . .

$$(l) \qquad -a_r E_{r-1}(x) = -b_r E_r(x) \cdot q_r + E_{r+1}$$

$$(m) \qquad -a_{r+1} E_r(x) = -b_{r+1} E_{r+1}(x) \cdot q_{r+1} + E_{r+2}$$

. . . . . , ...

Considerando i residui

$$(n) \quad \ldots E_{r+2}(x), E_{r+1}(x), E_r(x), E_{r-1}(x) \ldots E_2(x), E_1(x), E(x)$$

notiamo che due di essi consecutivi quali si vogliano non potranno venire annullati dal medesimo numero; mentre se fossero nello stesso tempo $E_{r+2} = 0$, $E_{r+1} = 0$, dalla equazione (m) ne verrebbe $E_r = 0$, quindi essendo $E_{r+1} = 0$ ed $E_r = 0$ contemporaneamente avremo ancora $E_{r-1}(x) = 0$; $E_{r-1} = 0$ ed $E_r = 0$ darebbero $E_{r-2} = 0$, e quindi ascendendo,

ne verrebbe che la radice comune alle equazioni $E_{r+2}(x) = 0$, $E_{r+1}(x) = 0$ lo sarebbe ancora alle due $E_1(x) = 0$ ed $E(x) = 0$

il che si oppone a quanto abbiamo supposto.

Vi ha di più: se un numero annulla uno qualunque dei residui (n), sostituito nell' antecedente e nel conseguente i risultamenti avranno segni opposti. Diffatti se un numero $x = c$ rendesse per es. $E_r(c) = 0$ la equazione (l) fornirebbe

$$-a_r E_{r-1}(c) = E_{r+1}(c)$$

e siccome a_r è un numero, le due quantità

$$E_{r-1}(c), \; E_{r+1}(c)$$

saranno affette da segni opposti.

Ciò premesso si finga che nella serie (n) venga sostituito qualunque numero a, poscia un altro b maggiore. Si enumerino le variazioni di segno che offre la prima serie di risultamenti, quindi quelle della seconda: se fra a e b non esistesse numero atto ad annullare qualche residuo o le funzioni $E_1(x)$, $E(x)$, le due serie nominate non presenterebbero cambiamento nei segni. Se alcun residuo per esempio $E_r(x)$ ammette una radice $x = c$ in quell' intervallo per essa pure non accaderà cambiamento; mentre indicata con ω una piccolissima quantità tale che fra $c + \omega$ e $c - \omega$ non esista radice per le equazioni $E_{r-1}(x) = 0$, $E_{r+1}(x) = 0$ i termini $E_{r+1}(c - \omega)$, $E_r(c - \omega)$, $E_{r-1}(c - \omega)$, ed i seguenti $E_{r+1}(c + \omega)$, $E_r(c + \omega)$, $E_{r-1}(c + \omega)$ non daranno origine ad alcuna perdita di varia-

zioni mentre $E_{r+1}(c)$ ed $E_{r-1}(c)$ e quindi $E_{r+1}(c \pm \omega)$ ed $E_{r-1}(c \pm \omega)$ hanno segni fra loro opposti (pag. 42 § 44). Ma se fra a e b trovasi qualche radice della equazione $E(x) = 0$ questa produrrà effettivamente una perdita, come si è dimostrato (§. 44.). Dunque le sostituzioni indicate produrranno tante perdite nelle variazioni quante radici della equazione $E(x) = 0$ esistono fra i numeri sostituiti.

52. Se nella serie (n) si porranno successivamente $x = -\infty$, $x = 0$, $x = \infty$ siccome fra $-\infty$ e 0 giacciono tutte le radici negative, e tutte le positive fra 0 e ∞, passando dalla serie de' risultamenti ottenuti mediante la prima sostituzione alla serie seconda il numero delle variazioni perdute eguaglierà quello delle radici negative e le variazioni che si perdono passando dalla serie ottenuta ponendo $x = 0$ all' altra derivata sostituendo $x = \infty$ indicheranno quante radici positive esistono nella medesima equazione.

53. Siccome sostituendo nei residui (n) $x = \pm\infty$ tutti i termini spariscono a fronte dei primi, così da questi unicamente dovremo ripetere il segno di ciascuno.

54. Abbiamo dunque in nostro potere i mezzi per riconoscere se una data equazione algebraica qualunque abbia radici reali, quante siano le positive, le negative, e quante le radici immaginarie conjugate.

CAPO II.

Trasformazione delle equazioni algebraiche.

Una equazione è risoluta allorquando mediante opportuni cambiamenti di forma è ridotta a contenere in un membro l' incognita lineare senza coefficiente e nell' altro funzioni determinate di quantità le quali sono o si suppongono conosciute. Nell' arte di eseguire simili trasformazioni consiste adunque uno dei mezzi principali per risolvere le equazioni, onde ci è d' uopo trattarne in questo luogo colla debita estensione.

55. Il problema si può enunciare nei termini seguenti:

» Data una equazione ed una funzione al-
» gebraica di quante si vogliano quantità
» simboliche, formare la equazione le radici
» della quale sono tutti i valori della funzione
» nominata che si ottengono sostituendo a quei
» simboli, in tutte le maniere possibili, altrettante
» radici della equazione proposta.

Fingeremo sul principio che la funzione sia intera e razionale, parleremo del grado della equazione trasformata, quindi dei coefficienti della medesima.

56. Indichiamo al solito la equazione data con $E(x) = 0$, con $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r, \ldots a_m$, le proprie radici e con $f(a_1, a_2, \ldots a_r)$ una funzione alge-

braica razionale intera delle $a_1, a_2, \ldots\ldots a_r$. Portiamo l'attenzione nostra sui posti in cui si trova a_1, che chiameremo luogo occupato dalla a_1; su quelli tutti ov' è a_2, che diremo luogo occupato dalla a_2, ecc. Se dove trovasi a_1 si ponesse a_2 e viceversa; o in altro modo qualunque si cambiassero quelle quantità $a_1, a_2, \ldots\ldots a_r$ fra di loro, oppure con altre radici che attualmente non esistono in quella funzione, altre ed altre ne deriverebbero, e tutte si comporrebbero le funzioni mediante le radici della equazione. La diversa forma della funzione $f(a_1, a_2, \ldots\ldots a_r)$, il diverso numero delle radici che entrano attualmente in essa, ed il grado della equazione primitiva sono gli elementi per i quali varia il numero delle funzioni ottenute. Diffatto se le radici

$$a_1 \,,\; a_2 \,,\; \ldots\ldots\; a_r$$

si trovassero unicamente sotto le forme invariabili

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_r \,,\quad a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots + a_r$$

e simili, cambiando fra loro quelle radici non cambierebbe la funzione.

Verremo ora esaminando alcuni casi principali per il cui mezzo potremo determinare in ogni altro il grado della equazione trasformata.

57. La funzione $f(a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_m)$ contenga tutte le radici talmente che qualunque cambiamento si faccia fra esse cambi pure il risultato. Tali cambiamenti si diranno *permutazioni*, e ne determineremo il numero osservando che se una radice a_1, per esempio, si collocasse in certo posto

ne resterebbero $m-1$ da permutare in $m-1$ luoghi. Collocata in quel posto un'altra radice a_2 ne avremo pure $m-1$ ancora da disporre in altrettanti posti. Messa nel posto nominato la radice a_3 poi la a_4 ec. finalmente la a_m, e nel mentre che una qualunque occupa quel posto permutate le $m-1$ che restano nei posti $m-1$ vacui in tutte le maniere possibili, si conseguiranno le permutazioni cercate. Dunque il numero delle permutazioni di m cose in m luoghi eguaglia quello delle permutazioni di $m-1$ cose in $m-1$ luoghi preso m volte, cioè moltiplicato per m. Una cosa ed un posto danno una permutazione sola. Per due cose in due luoghi dovremo moltiplicare per due il numero delle permutazioni di una cosa in un luogo e sarà $2 \,.\, 1$. Per tre cose moltiplicheremo il numero antecedente per 3 e sarà $3 \,.\, 2 \,.\, 1$. E così avremo di seguito il numero delle permutazioni di quattro cose in quattro luoghi espresso da $4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1$, quindi quello di cinque cose da $5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1$ ec., quello di m cose in m luoghi sarà dato da

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\; m$$

58. La funzione f contenga soltanto r delle m radici e la sua forma sia tuttora affatto variabile. Per riconoscere il numero delle funzioni cui danno origine tutti i cambiamenti possibili, che pure si chiamano *permutazioni*, notiamo quale differenza esista fra il caso attuale e l'antecedente. Collocate nella funzione f in qualsivoglia modo r radici ne restano $m-r$ non impiegate. Se in

quella funzione f vi fossero $m - r$ luoghi vacui, come nel caso del paragrafo antecedente, permutate quelle $m-r$ cose nei luoghi vacui in tutti i modi possibili avressimo

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\, (m-r)$$

permutazioni e quindi altrettante funzioni f. Collocate in quella funzione le medesime r radici in altra maniera, ovvero sostituite altre ad alcune di quelle, si avrà pure una delle funzioni cercate; ma se la funzione offrisse m posti, come nel § 58, gli $m-r$ luoghi vacui potrebbero occuparsi in tutti i modi possibili colle $m-r$ radici non impiegate e si avrebbero altre $1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\,.\,.\,(m-r)$ funzioni. Questo discorso vale per ciascuna delle quantità f che attualmente si cercano, onde ne segue che indicato con X il loro numero sarà

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\, m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,(m-r)\, X$$

cioè il numero delle permutazioni attualmente cercato sarà espresso da

$$\frac{1.2.3.....m}{1.2....(m-r)} = \frac{1.2.....(m-r)(m-r+1)(m-r+2)\ldots\ldots m}{1.2.3.....(m-r)}$$

$$= m\,(m-1)\ldots\ldots(m-r+2)(m-r+1)$$

59. Supponiamo, per ultimo, che la funzione $f(a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_r)$ contenga soltanto r radici della equazione proposta e dipiù sia invariabile per rispetto ad esse. Tale sarebbe il caso in cui la f contenesse unicamente il prodotto $a_1\, a_2 \ldots\ldots a_r$ o la somma $a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_r$. I valori della f varieranno quando ad una o più ra-

dici che entrano attualmente a comporla altre vengano sostituite di quelle non impiegate; e tali cambiamenti sogliono chiamarsi *combinazioni*. Le combinazioni dalle permutazioni considerate nel paragrafo antecedente differiscono in ciò che ad una di quelle corrispondono $1 \,.\, 2 \ldots\ldots r$ di queste; giacchè prese r radici in qualunque modo, se la funzione è invariabile, queste danno un solo valore della medesima: ma se è totalmente variabile per rispetto ad esse, tutte le permutazioni di quelle r radici negli r posti che offre la funzione istessa daranno $1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\,.\,.\, r$ permutazioni. Dunque chiamato Y il numero delle combinazioni cercate, quello delle permutazioni sarà

$$1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\,.\,.\, r \,.\, Y = m(m-1)\ldots\ldots(m-r+1)$$

quindi

$$Y = \frac{m(m-1)\,(m-2)\,.\,.\,.\,.\,(m-r+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots r}$$

60. Rimarcheremo di passaggio che essendo r ed m due numeri interi qualunque ed $m > r$ sarà

$$\frac{m\,(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r}$$

un numero intero.

61. Abbiamo dichiarato che dai tre casi contemplati dipende la determinazione del grado della equazione trasformata comunque le radici di essa si compongano con quelle della proposta. Eccone qualche esempio.

La funzione f contenga un numero di radici $r_1 + s_1 < m$: per rispetto ad alcune r_1 sia variabile ed invariabile per rispetto alle altre s_1. Nei posti s_1 devono mettersi tutte le combinazioni delle m radici aggruppate ad s_1 ad s_1, ed il numero di tali combinazioni (§ 60) sarà

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-s_1+1)}{1.2\ldots\ldots s_1}$$

Nel mentre che s_1 di quelle radici occupano i posti per rispetto ai quali la f è invariabile ne restano altre $m-s_1$, e queste potranno permutarsi nei luoghi r_1 in tutti i modi possibili, che sono

$$(m-s_1)(m-s_1-1)\ldots\ldots(m-s_1-r_1+1) \quad (a)$$

e siccome a ciascuna di quelle combinazioni corrispondono tante permutazioni quante sono indicate da questo prodotto (a), quindi il numero delle funzioni richieste sarà

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-s_1+1)}{1.2.3\ldots\ldots s_1} \times (m-s_1)\ldots\ldots(m-s_1-r_1+1)$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-s_1-r_1+1)}{1.2.3\ldots\ldots s_1}$$

Supponiamo, per secondo esempio, che la funzione f offra un numero di posti espresso da

$$s_1 + s_2 + r_1 < m,$$

che sia invariabile rispetto ai primi s_1, ai secondi s_2, e variabile riguardo ai rimanenti r_1. In tal caso se una delle combinazioni ad s_1 ad s_1 occupa

gli s_1 posti invariabili, le $m-s_1$ radici non impiegate si combineranno ad s_2 ad s_2, ciò che fornisce

$$\frac{(m-s_1)(m-s_1-1)\ldots\ldots(m-s_1-s_2+1)}{1.2.3\ldots\ldots s_2}$$

combinazioni, una qualunque delle quali si potrà mettere negli s_2 posti. Collocatone un gruppo ne resteranno $m-s_1-s_2$ non impiegate le quali si potranno permutare negli r_1 posti rimasti vacui in tutti i modi possibili, che sono

$$(m-s_1-s_2)(m-s_1-s_2-1)\ldots\ldots(m-s_1-s_2-r_1+1)$$

Dunque il numero totale delle funzioni f sarà

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-s_1+1)}{1.2.3\ldots\ldots s_1} \times \frac{(m-s_1)(m-s_1-1)\ldots(m-s_1-s_2+1)}{1.2.3\ldots\ldots s_2}$$

$$\times (m-s_1-s_2)(m-s_1-s_2-1)\ldots\ldots(m-s_1-s_2-r_1+1)$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-s_1-s_2-r_1+1)}{1.2.3\ldots\ldots s_1 \times 1.2.3\ldots\ldots s_2}$$

62. Conosciuto il grado della equazione trasformata è d' uopo determinarne i coefficienti. Si indichino con

$$(b) \qquad f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots f_r \ldots\ldots$$

i differenti valori della funzione f, e sia

$$y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} \ldots\ldots + B_s y^{n-s} \ldots\ldots + B_n = 0$$

la equazione trasformata. Il coefficiente B_s (§ 9) sarà la somma dei prodotti delle funzioni (b) prese ad s ad s col segno proprio o cambiato secondo che s è pari o dispari; B_s è adunque una funzione algebraica razionale intera delle radici

$$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_m,$$

cioè l' aggregato di termini della forma

$$(c) \qquad H\, a_1^{r_1}\, a_2^{r_2}\, a_3^{r_3} \ldots\ldots a_n^{r_n}\,.$$

ove r_1, r_2 ..... sono interi ed H un numero qualunque. Di più B_s è invariabile per rispetto alle medesime radici, cioè cambiando ovunque a_1, per esempio, con a_2 e viceversa, o cambiandone molte con altrettante la B_s rimane inalterata: poichè quei cambiamenti faranno che la f_1 per esempio diventi f_t, la f_t diventi f_1 e simili, un termine della B_s si cambierà con un altro, questo con un terzo, ma il risultato finale di tali permutazioni non cambierà, mentre la B_s contiene tutti i prodotti ad s ad s delle medesime funzioni. Da tutto ciò ne segue che sarà B_s l' aggregato di più termini della forma (c), e se quello esiste, considerando la funzione

$$(d) \qquad H\,.\, x^{r_1}\, y^{r_2}\, z^{r_3} \ldots\ldots t^{r_n}$$

e nei posti occupati dalle x, y ..... sostituite le

$$a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ldots a_m$$

in tutti i modi possibili, la loro somma sarà un termine componente B_s.

Noi indicheremo con

$$S\,(r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots r_n)$$

quel polinomio derivato dal prodotto

$$x^{r_1}\, y^{r_2}\, z^{r_3} \ldots\ldots t^{r_n}$$

nella maniera indicata, e si chiamerà funzione sommatoria composta dell' ordine n.

Una singolare proprietà di quelle funzioni consiste nel potersi formare mediante la somma

di funzioni sommatorie composte d' ordine inferiore. Eccone la prova.

63. Fingiamo moltiplicarsi la funzione semplice

$$S(r_{n+1}) = a_1^{r_{n+1}} + a_2^{r_{n+1}} \ldots\ldots a_m^{r_{n+1}}$$

per la composta

$$S\,(r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots r_n)$$

e tenendo fermo in mente che questa sommatoria è l' aggregato di prodotti analoghi al

$$a_1^{r_1}\, a_2^{r_2}\, a_3^{r_3} \ldots\ldots a_s^{r_s} \ldots\ldots a_n^{r_n}$$

comprendiamo che la moltiplicazione darà origine a quantità delle forme seguenti. Se il termine moltiplicatore della $S(r_{n+1})$ è un a che esiste nel termine della $S(r_1, r_2, \ldots\ldots)$ attualmente moltiplicato, il prodotto sarà questo stesso termine in cui l' uno o l' altro degli esponenti

$$r_1\,,\ r_2\,,\ r_3\,, \ldots\ldots r_n$$

si accresca di r_{n+1}. Se poi il termine moltiplicatore è un a che non esiste nel termine moltiplicato, il prodotto si avrà aggiungendo agli n fattori già esistenti una nuova a coll' esponente r_{n+1}. Nel primo caso un termine qualunque della funzione $S\,(r_1,\ r_2, \ldots\ldots r_n)$ qual è

$$a_1^{r_1}\, a_2^{r_2}\, a_3^{r_3} \ldots\ldots a_n^{r_n}$$

darà origine a tutti i seguenti

$$a_1^{r_1+r_{n+1}}\, a_2^{r_2}\, a_3^{r_3} \ldots\ldots a_n^{r_n}$$
$$a_1^{r_1}\, a_2^{r_2+r_{n+1}}\, a_3^{r_3} \ldots\ldots a_n^{r_n}$$
$$a_1^{r_1}\, a_2^{r_2}\, a_3^{r_3+r_{n+1}} \ldots\ldots a_n^{r_n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1^{r_1}\, a_2^{r_2}\, a_3^{r_3} \ldots\ldots a_n^{r_n+r_{n+1}}$$

nel secondo caso il prodotto sarà della forma

$$a_1^{r_1}\ a_2^{r_2}\ a_3^{r_3} \ldots\ldots a_n^{r_n} \,.\, a_{n+1}^{r_{n+1}}$$

I primi termini appartengono rispettivamente alle sommatorie

$$S(r_1 + r_{n+1},\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots r_n)$$
$$S(r_1,\ r_2 + r_{n+1},\ r_3 \ldots\ldots r_n)$$
$$(e) \qquad S(r_1,\ r_2,\ r_3 + r_{n+1} \ldots\ldots r_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S(r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots r_n + r_{n+1})$$

le quali tutte sono composte dell' ordine n; l' ultimo è un termine della sommatoria

$$(f) \qquad S(r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots r_n,\ r_{n+1})$$

dell' ordine $n+1$:

Nel prodotto $S(r_{n+1}) \,.\, S(r_1,\ r_2 \ldots\ldots r_n)$ non vi hanno quantità d' altra forma oltre le nominate, e siccome ogni termine quale è

$$a_1^{r_1},\ a_2^{r_2},\ a_3^{r_3} \ldots\ldots a_n^{r_n}$$

si trova in $S(r_1,\ r_2 \ldots r_n)$ una volta sola, così una sola volta entrerà ciascuno dei termini del prodotto derivati da lui: le due sommatorie moltiplicate essendo funzioni invariabili delle radici, il prodotto lo sarà ancora, e però sarà l'aggregato delle funzioni (e) (f) cioè

$$S(r_{n+1})\,S(r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots r_n) =$$
$$= S(r_1 + r_{n+1},\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots r_n) + S(r_1,\ r_2 + r_{n+1}, \ldots r_n)$$
$$+ S(r_1, r_2, r_3 + r_{n+1} \ldots r_n) + \ldots\ldots + S(r_1, r_2, r_3 \ldots r_n + r_{n+1})$$
$$+ S(r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots\ldots r_n,\ r_{n+1})$$

d' onde si cava la sommatoria composta dell' ordine $n+1$

$$(g) \quad S(r_1, r_2, r_3 \ldots r_n, r_{n+1}) = S(r_{n+1})\,S(r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots r_n)$$
$$- S(r_1 + r_{n+1},\ r_2 \ldots r_n) - S(r_1,\ r_2 + r_{n+1} \ldots r_n), \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots - S(r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots r_n + r_{n+1})$$

espresse per sommatorie d' ordine inferiore.

64. Avremo quindi

$$S(r_1,\ r_2) = S(r_2)\,S(r_1) - S(r_1 + r_2)$$
$$S(r_1, r_2, r_3) = S(r_3)\,S(r_1, r_2) - S(r_1 + r_3, r_2) - S(r_1, r_2 + r_3)$$
$$S(r_1, r_2, r_3, r_4) = S(r_4)\,S(r_1, r_2, r_3) - S(r_1 + r_4, r_2, r_3)$$
$$- S(r_1, r_2 + r_4, r_3) - S(r_1, r_2, r_3 + r_4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la prima offre qualunque sommatoria d' ordine doppio espressa per sommatorie semplici. Cavate da essa

$$S(r_1 + r_3,\ r_2) = S(r_1 + r_3)\,S(r_2) - S(r_1 + r_2 + r_3)$$
$$S(r_1,\ r_2 + r_3) = S(r_1)\,S(r_2 + r_3) - S(r_1 + r_2 + r_3)$$

e sostituite nella seconda avremo una sommatoria tripla espressa per somme semplici; e nello stesso modo potrà formarsi da queste somme qualunque sommatoria composta (1).

---

(1) Per più ampia istruzione si possono consultare l' opera di Waringh, Meditationes Algebraicae: i Classici Elementi di Algebra di Pietro Paoli Supplem. Opuscolo 2. La prima delle Memoires de Math. et de physique del Sig. Conte Libri di Firenze. Le nostre Ricerche sulla dottrina delle equazioni. Articolo Primo. Una Memoria del Sig. Cauchy. Journal Politec. Tom. X.

65. È rimarcabile la modificazione che subisce la formola del §. 63. allorquando, diventando eguali alcuni fra gli indici r_1, $r_2 \ldots r_n$, si vogliono escludere dalle sommatorie composte le repliche di quei termini i quali pure diventano identici fra loro. Noi prenderemo in considerazione un solo caso che attualmente ci interessa, rimandando il lettore alla nostra opera citata. Nella funzione

$$S(r_1, r_2 \ldots\ldots r_s \ldots\ldots r_n).$$

Si suppongano $r_1 = r_2 \ldots\ldots = r_s$ ed esclusa dalla $S(r_1 \ldots)$ la replica di qualunque termine, conveniamo di rappresentare la funzione risultante con

$$\Sigma_s\,(r_1, r_{s+1}, r_{s+2}, \ldots r_n)$$

ove l' indice s al piede della Σ si riferisce al numero delle r_1 supposte eguali

Si consideri qualunque termine

$$a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} \ldots a_s^{r_s} \ldots a_n^{r_n}$$

della funzione sommatoria: se le quantità $a_1, a_2 \ldots a_s$ si permutassero fra loro in tutti i modi possibili nei luoghi che occupano attualmente, essendo quei luoghi determinati, come nel (§. 56.) dagli esponenti $r_1, r_2 \ldots r_s$ che ad essi corrispondono, ne deriverebbero $1.2.3 \ldots s$ permutazioni ed altrettanti termini della funzione sommatoria composta. Assunto in questa funzione altro termine non compreso fra i nominati ne deriveremo, come sopra, altri $1.2.3 \ldots s$ termini, e così considerandoli tutti: se gli esponenti r_1, r_2 fino ad r_s diventassero eguali le prime $1.2 \ldots s$ permutazioni

forniranno termini tutti identici fra loro, altri identici ne daranno le seconde permutazioni, altri ed altri le seguenti; cosicchè avremo

$$S(r_1, r_2 \ldots) = 1.2.3, \ldots s.\Sigma_s, \text{ ossia}$$

$$\Sigma_s\,(r_1 \ldots) = \frac{S(r_1, r_2 \ldots)}{1.2 \ldots s}$$

66. Se gli esponenti r_1, $r_2 \ldots r_n$ diventassero tutti eguali sarebbero

$$S(r_1 + r_{n+1}, r_2 \ldots r_n) = S(r_1, r_2 + r_{n+1} \ldots r_n) = \ldots$$
$$= S(r_1, r_2 \ldots r_n + r_{n+1})$$

e però dalla formola del §. 63. ne verrà

$$S(r_1, r_2 \ldots r_n, r_{n+1}) = S(r_{n+1}) S(r_1, r_2 \ldots r_n)$$
$$- n S(r_1 + r_{n+1}, r_2, r_3 \ldots r_n)$$

se fossero di più $r_1 = r_2 = r_3 \ldots = r_n = 1$, posto $r_{n+1} = \epsilon$, è chiaro che avremo

$S(r_1, r_2 \ldots r_n) = 1.2.3 \ldots n(-1)^n A_n$, essendo A_n il il coefficiente di x^{m-n} nella equazione $E(x) = 0$, (§. 9) saranno $S(r_1, r_2 \ldots r_n, r_{n+1}) = 1.2 \ldots n\,\Sigma_n(1, \epsilon)$

$S(r_1 + r_{n+1}, r_2, r_3 \ldots r_n) = 1.2 \ldots (n-1)\Sigma_{n-1}(1, \epsilon + 1)$

e perciò $\Sigma_n(1, \epsilon) = (-1)^n A_n S(\epsilon) - \Sigma_{n-1}(1, \epsilon + 1)$.

Questa equazione ha luogo qualunque valore intero si attribuisca ai simboli ϵ ed n, onde cambiando nelle risultanti successive n in $n-1$, ϵ in $\epsilon + 1$ ne verranno

$$\Sigma_{n-1}(1, \epsilon + 1) = (-1)^{n-1} A_{n-1} S(\epsilon + 1) - \Sigma_{n-2}(1, \epsilon + 2)$$
$$\Sigma_{n-2}(1, \epsilon + 2) = (-1)^{n-2} A_{n-2} S(\epsilon + 2) - \Sigma_{n-3}(1, \epsilon + 3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma_1(1, \epsilon + n - 1) = (-1) A_1 S(\epsilon + n - 1) - \Sigma_0(1, \epsilon + n).$$

cambiando i segni alle equazioni seconda, quarta, sesta .... poi sommando si avrà

$$\Sigma_n(1, \beta) = (-1)^n A_n S(\beta) - (-1)^{n-1} A_{n-1} S(\beta+1)$$
$$+ (-1)^{n-2} A_{n-2} S(\beta+2) - (-1)^{n-3} A_{n-3} S(\beta+3)$$
$$\ldots\ldots\ldots \pm (-1) A_1 S(\beta+n-1) \mp \Sigma_0(1, \beta+n)$$

ove $\Sigma_0(1, \beta+n) = S(\beta+n)$. Supponiamovi finalmente $\beta = 1$, allora $\Sigma_n(1, \beta)$, che è l'aggregato di tutti i termini della forma $a_1 a_2 \ldots a_n a^{\beta}_{n+1}$, si ridurrà visibilmente ad $(n+1)(-1)^{n+1} A_{n+1}$ e perciò sostituendo avremo

$$(n+1)(-1)^{n-1} A_{n+1} = (-1)^n A_n S(1) - (-1)^{n-1} A_{n-1} S(2)$$
$$+ (-1)^{n+2} A_{n-2} S(3) \ldots \pm A_1 S(n) \pm S(n+1)$$

ossia $S(n+1) + A_1 S(n) + A_2 S(n-1) \ldots + A_n S(1) +$
$$+ (n+1) A_{n+1} = 0$$

la qual formola regge quand' anche sia $n+1 > m$ purchè vengano soppressi i termini A_{n+1}, A_n ..... che saranno evidentemente eguali a zero.

Ho desunta dalla formola del (§. 63.) questa celebre equazione di Alberto Girard per dichiarare l'uso di quella, ma stimo utile esercizio il conseguirla direttamente. Si supponga che

$(-1)^r A_r = a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_r + \ldots$ si moltiplichi per

$S(n-r) = a_1^{n-r} + a_2^{n-r} + \ldots\ldots\ldots$

Il prodotto offrirà termini di due specie: cioè se il termine moltiplicatore è un a che già esiste nel termine moltiplicando il prodotto sarà della forma

$$a_1^{n-r+1} a_2 a_3 \ldots\ldots a_r \ldots\ldots\ldots$$

l'aggregato dei quali è la funzione $\Sigma_{r-1}(1, n-r+1)$. Se poi la a per cui si moltiplica non esiste nel termine moltiplicato i prodotti saranno della forma

$$a_1 a_2 \ldots\ldots a_r a_{r+1}^{n-r}$$

la di cui somma sarà $\Sigma_r(1, n-r)$: per cui

$$(-1)^r A_r S(n-r) = \Sigma_{r-1}(1, n-r+1) + \Sigma_r(1, n-r)$$

Considerando il prodotto

$$(-1)^{n-1} A_{n-1} S(1) = (a_1 + a_2 + a_3 \ldots)(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} + \ldots)$$

vedremo derivarne la funzione $\Sigma_{n-2}(1, 2)$ allorchè l'a della $S(1)$ per cui si moltiplica già si trova nel termine di A^{n-1} che viene moltiplicato, l'altra parte del prodotto sarà $n(-1)^n A_n$; perchè il termine $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n$ avrà origine da $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ moltiplicando per a_n, dà $a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-2} a_n$ moltiplicando per a_{n-1} ecc. Dunque

$$(-1)^{n-1} A_{n-1} S(1) = \Sigma_{n-2}(1, 2) + n(-1)^n A_n$$

Ponendo nella prima formola $r = 1, 2, 3 \ldots$ e sommando i risultati avremo l'equazione (h) cercata.

Da quella equazione ne vengono

$S(1) + A_1 = 0$

$S(2) + A_1 S(1) + 2A_2 = 0$

. . . . . .

per cui si formeranno i valori delle sommatorie semplici $S(1)$, $S(2)$ ..... $S(n)$ mediante i coefficienti della equazione $E(x) = 0$, quindi le sommatorie composte e finalmente i coefficienti della trasformata (1).

(1) Nelle opere citate di Waring e di Libri si trova la espressione generale di una sommatoria semplice espressa per i coefficienti della equazione.

67. I coefficienti $B_1, B_2 \ldots B_s, \ldots$ si possono adunque conseguire anche mediante le somme delle potenze intere

$$f_1^r + f_2^r + f_3^r + \ldots\ldots$$

qualunque volta sia facile il conseguire le espressioni di queste somme per mezzo dei coefficienti A_1, A_2 ..... Dichiareremo il metodo con un celebre esempio. Le radici della trasformata debbano essere

$$(a_1-a_2)^2, (a_1-a_3)^2, (a_2-a_3)^2 \ldots\ldots$$

cioè i quadrati delle differenze fra le radici della proposta prese due a due: suppongo

$$\Sigma(r)=(a_1-a_2)^{2r}+(a_1-a_3)^{2r}+(a_2-a_3)^{2r}+\ldots\ldots$$

$$=a_1^{2r}-2ra_1^{2r-1}a_2+\frac{2r(2r-1)}{1.2}a_1^{2r-2}a_2^2-\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{2r(2r-1)\ldots\ldots(r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r}a_1^r a_2^r$$

$$+\frac{2r(2r-1)}{2}a_1^2a_2^{2r-2}-2ra_1a_2^{2r-1}+a_2^{2r}$$

ecc. ecc. ecc.

ovvero, scritti i termini estremi sotto i primi, sarà

$$\Sigma(r)=a_1^{2r}-2ra_1^{2r-1}a_2+\frac{2r(2r-1)}{1.2}a_1^{2r-2}a_2^2\ldots\ldots$$

$$a_2^{2r}-2ra_1a_2^{2r-1}+\frac{2r(2r-1)}{1.2}a_1^2a_2^{2r-2}\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots r}a_1^r a_2^r$$

ecc. ecc. ecc.

Fingiamo scritti tutti i termini della funzione $\Sigma(r)$ i quali derivano dalle potenze

$$(a_1-a_3)^{2r}, (a_2-a_3)^{2r}\ldots\ldots$$

e se ne faccia la somma: la prima colonna verticale contiene i termini $a_1^{2r}, a_2^{2r}, \ldots$, e siccome a_1 trovasi combinata a tutte le radici $a_2, a_3 \ldots a_m$, come pure $a_2, a_3 \ldots$ con ognuna delle altre, così l'aggregato dei termini di quella colonna sarà $(m-1)S(2r)$: nella seconda, raccoltovi il fattore comune $-2r$, si trova questo moltiplicato per $S(1, 2r-1)$: raccolto nella terza colonna $\frac{2r(2r-1)}{2}$ l'altro fattore sarà $S(2, 2r-2)$, ecc. finalmente la somma dei termini medii è $\frac{1}{2}S(r,r)$, perchè $S(r,r)$ rappresenta ciò cui si riduce $S(r_1, r_2)$ quando $r_1=r_2=r$ non esclusa la replica dei termini eguali: avremo in conseguenza

$$\Sigma(r)=(m-1)S(2r)-2rS(2r-1,1)+\frac{2r(2r-1)}{2}S(2r-2,2)$$

$$-\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{1.2.3}S(2r-3,3)\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots r}\frac{1}{2}S(r,r)$$

ed eliminate le sommatorie doppie mediante le formole del §. 63 se ne deduce

$$\Sigma(r)=(m-1)S(2r)-2r[S(1)S(2r-1)-S(2r)]$$

$$+\frac{2r(2r-1)}{2}[S(2r-2)S(2)-S(2r)]\ldots$$

$$\ldots\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots r}\frac{1}{2}[S(r)S(r)-S(2r)]$$

$$=mS(2r)-2rS(1)S(2r-1)+\frac{2r(2r-1)}{2}S(2)S(2r-2)\ldots.$$

$$\pm\frac{2r(2r-1)\ldots.(r+1)}{1.2\ldots..r}\tfrac{1}{2}[S(r)]^2-S(2r)\Big\{1-2r+\frac{2r(2r-1)}{1.2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots.r}\Big\}\text{ ossia}$$

$$\Sigma(r)=mS(2r)-2rS(1)S(2r-1)+\ldots\ldots\ldots\ldots:$$

$$\ldots\ldots\ldots\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots.r}\tfrac{1}{2}[S(r)]^2$$

perchè $2\Big\{1-2r+\frac{2r(2r-1)}{2}\ldots\ldots\mp\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots.r}\Big\}$

$$=(1-1)^{2r}=0$$

col mezzo poi delle formole

$\Sigma(1)+B_1=0$, $\Sigma(2)+B_1\Sigma(1)+2B_2=0$ . . . . . .

che fornisce il §. 66. conseguiremo i coefficienti B_1, B_2 . . . . della equazione trasformata.

68. Trattandosi di trasformazioni particolari giova talvolta deviare dal metodo generale, impiegando artificii che dipendono dalla destrezza dell' analista.

Si voglia, a cagione d' esempio, da una equazione data desumerne un' altra le cui radici siano quelle della proposta moltiplicata ciascuna per una quantità arbitraria: l' equazione sia $E(x)=0$, le radici a_1, a_2 . . . . a_m; la quantità assunta ad arbitrio si rappresenti con h: le radici della trasformata saranno

$$(f)\quad a_1h,\ a_2h,\ a_3h\ldots.a_mh:$$

il grado della stessa (§. 57.) sarà $n=m$; e $(-1)^sB_s$ eguaglierà la somma dei prodotti delle quantità (f)

prese ad s ad s. Immaginata ora questa somma di prodotti comprendiamo che ognuno di essi si troverà moltiplicato per h^s, e che raccolto questo fattore comune, l' altro sarà la somma dei prodotti delle quantità a_1, a_2 . . . . . a_m prese ad s ad s, per cui avremo $(-1)^sB_s=h^s.(-1)^sA_s$, ossia $B_s=h^sA_s$: dunque si conseguirà la trasformata moltiplicando i termini consecutivi del polinomio $E(x)$ per i corrispondenti della serie geometrica

$$1,\ h,\ h^2,\ h^3\ldots.h^s\ldots..h^m$$

coll' avvertenza che, quando in $E(x)$ manchi un termine, nella moltiplica indicata dovrà considerarsi come esistente.

Quella trasformazione è utile per desumere da un' equazione affetta da coefficienti frazionarii un' altra in cui siano tutti intieri; mentre prendendo per h il più piccolo numero intero divisibile per ciascun denominatore di quelle frazioni, moltiplicandosi ogni termine per una potenza di h verremo appunto a togliere le frazioni.

69. È pur facile desumere da una equazione un' altra le radici della quale siano quelle della proposta aggiuntavi una quantità qualunque h. Sostituito in fatti $y+h$ alla x nel polinomio $E(x)$ si avrà

$$E(y+h)=E(h)+yE_1(h)+\ldots.+y^rE_r(h)+\ldots.+y^m$$

(§ 17.), e siccome posti di seguito nella funzione $E(y+h)$

$$y+h=a_1,\ a_2\ldots\ldots a_m$$

ogni risultato si annulla, perciò i valori di y che

rendono $y^m + \ldots\ldots + y^r E_r(h) \ldots\ldots + y E_1(h) + E(h) = 0$
cioè le radici di questa equazione, saranno

$$a_1 - h\,,\ a_2 - h \ldots\ldots\ldots a_m - h$$

Cambiando poi il segno ad h ne verrà essere

$$a_1 + h\,,\ a_2 + h \ldots\ldots\ a_m + h$$

le radici della equazione

$$y^m \ldots\ldots + y^r E_r(-h) \ldots\ldots + y E_1(-h) + E(-h) = 0$$

Qui giova notare che nella equazione

$$y^m + y^{m-1} E_{m-1}(h) + y^{m-2} E_{m-2}(h) \ldots\ldots + E_m(h) = 0$$

potremo togliere il secondo termine attribuendo ad h un valore che renda $E_{m-1}(h) = 0$
ossia $\qquad mh + A_1 = 0$

cioè $h = -\dfrac{A_1}{m}$; ma per togliere il terzo termine bisognerà risolvere la equazione di secondo grado $E_{m-2}(h) = 0$; per il quarto l'equazione ascenderà al grado terzo ecc.

70. Fin qui abbiamo supposto che le radici della equazione trasformata fossero funzioni razionali ed intere per rispetto a quelle della proposta; quando ciò non sia raggiungeremo l' intento colle stesse formole superiormente conseguite.

Se la funzione $f(a_1, a_2 \ldots\ldots)$ fosse frazionaria per rispetto ad alcune radici implicite in essa lo sarebbe ancora qualunque coefficiente B_s della equazione trasformata (§ 9), ma ridotte le frazioni allo stesso denominatore, i termini della somma B_s saranno entrambi funzioni intere delle radici, e però calcolabili coi metodi superiormente dichiarati.

Se la funzione $f(a_1, a_2, \ldots\ldots)$ fosse irrazionale i coefficienti $B_1, B_2 \ldots\ldots$ non potrebbero esprimersi mediante la equazione proposta. A schiarimento consideriamo un caso particolare. L' equazione data sia

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$$

le sue radici si rappresentino con a_1, a_2, a_3 e quelle della trasformata debbano essere

$$a_1 + \alpha\sqrt{a_1}\,,\quad a_2 + \alpha\sqrt{a_2}\,,\quad a_3 + \alpha\sqrt{a_3}$$

dove α indichi una quantità data: sia finalmente

$$y^3 + B_1 y^2 + B_2 y + B_3 = 0$$

la equazione richiesta; per cui sarà

$$-B_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \alpha(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3})$$

che non si può esprimere razionalmente.

Per raggiungere l' equazione trasformata si ponga

$$a_1 + \alpha\sqrt{a_1} = y$$

d' onde si trae

$$(g) \qquad y^2 - 2a_1 y + (a_1^2 + \alpha^2 a_1) = 0$$

supposto $y = a_2 + \alpha\sqrt{a_2}$ si avrá

$$(h) \qquad y^2 - 2a_2 y + (a_2^2 + \alpha^2 a_2) = 0$$

e fatto $y = a_3 + \alpha\sqrt{a_3}$ avremo

$$(k) \qquad y^2 - 2a_3 y + (a_3^2 + \alpha^2 a_3) = 0$$

Moltiplicando ora fra loro le equazioni (g) (h) (k) il prodotto, essendo una funzione algebraica razionale intera delle radici ed invariabile per rispetto ad esse, si potrà comporre mediante i coefficienti della proposta: ma le radici della equa-

zione che risulta saranno

$$a_1+\alpha\sqrt{a_1}\,,\quad a_2+\alpha\sqrt{a_2}\,,\quad a_3+\alpha\sqrt{a_3}$$

insieme alle

$$a_1-\alpha\sqrt{a_1}\,,\quad a_2-\alpha\sqrt{a_2}\,,\quad a_3-\alpha\sqrt{a_3}$$

Così, in generale, supposta

$$f(a_1\,,a_2\,,\ldots\ldots)-y=0$$

si toglieranno da questa equazione i termini irrazionali per rispetto alle radici, coi metodi che verranno esposti in appresso; altrettanto si farà di tutte le $f_1-y=0\,,\ f_2-y=0\,,\ f_3-y=0\ \ldots\ldots$ il prodotto delle equazioni che ne risultano si potrà esprimere per mezzo dei coefficienti della equazione proposta, ed avrà per radici tutte le quantità

$$f_1\,,f_2\,,f_3\ldots\ldots$$

insieme ad altre, delle quali a tempo acquisteremo cognizione.

CAPO III.

Risoluzione delle equazioni algebraiche.

71. Lungamente si affaticarono i geometri per conseguire la risoluzione generale delle equazioni algebraiche. Nelle opere dell'Euclide, dell'Apollonio e di Archimede si trovano elegantemente trattati varii problemi geometrici che contengono la risoluzione generale delle equazioni di secondo grado, qual'è per esempio presso l'Euclide la divisione di una retta in media ed estrema ragione; ma il celebre problema della duplicazione del cubo; una questione enunciata dall'Archimede e di cui nelle sue opere non si trova soluzione (*Traduzione di M. Peyrard pag.* 462) dimostrano che gli antichi non erano andati più oltre. Nell'opera di Cardano che porta il titolo di *Ars Magna* si trovano le celebri formole di Scipione Ferri e Tartalea, i quali giunsero i primi a risolvere le equazioni del terzo e quarto grado. Gli atti dell'Accademia di Berlino (1770 e 71) contengono un lavoro memorabile di Lagrange (1) diretto ad esaminare a qual fine tendessero le indagini di Eulero e Bezout intorno la generale risoluzione delle equazioni algebraiche, e con quali mezzi potevasi sperare che fosse raggiunto lo scopo. Ma il cel. Ruffini nella profonda Teoria delle equazioni, in alcu-

(1) Veggasi anche l'opera dello stesso celebre Geometra »Traité de la resolut. des équations numèriques ».

memorie registrate negli atti della Società Italiana delle Scienze, e finalmente nell' opera *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche*, *Modena* 1813 dimostrò impossibile la risoluzione del problema. Anche il celebre sig. Abel si occupò dell' ardua questione in una memoria inserita nel primo volume del rinominato Giornale del ch. sig. Crelle (1). Ma siccome lo scopo di quelle ricerche si è di persuadere ai geometri essere inutile il tentare più oltre la risoluzione del problema, non devono trovar luogo in quest' opera, e la gioventù maggiormente addestrata nella scienza dai successivi insegnamenti potrà con sommo profitto istudiare le opere originali che all' uopo abbiamo citate.

Molte equazioni, in conseguenza di proprietà speciali di alcune radici, si possono risolvere in parte ed anche compiutamente; anzi è facile comporre a talento equazioni risolvibili ascrivendo una forma particolare alle radici o trasformando alcune che si sanno sottoporre all' analesi; ma non v' ha pregio nell' opera. Siccome però alcune equazioni meritano speciale considerazione, di esse terremo discorso, consigliando al lettore lo studio delle opere sotto indicate (2).

(1) Journal für die Mathematik von A. L. Crelle Band I. seite 65.

(2) Lettera di Huddens a Schooten aggiunta alla Geometria di Descartes. Eulero. Nova Acta accad. Petrop. ann. 1788. — Lambert. Accad. Berol. 1763. — Bezout. Accad. Paris. 1762. — Waring. Medit. algeb. cap. 3. — Newton. Aritm. univers.

Equazioni binomie.

72. » Qualunque equazione binomia ammette » completa risoluzione.

Questo teorema memorabile pubblicato la prima volta nell' opera classica *Disquisitiones arithmeticae* del celebre Professore sig. Gauss è una delle principali scoperte del nostro secolo, e che ci è d' uopo conoscere.

La forma generale delle equazioni binomie ordinate è la seguente

$$x^{m+n} + A x^n = 0$$

ossia $$x^n(x^m + A) = 0$$

la quale ammette un numero n di radici eguali a zero, atteso il fattore x^n, e le altre devono annullare l' altro fattore cioè rendere

$$(a) \qquad x^m + A = 0$$

Si faccia $$x = y \sqrt[m]{\pm A},$$

indicando col radicale $m$esimo il risultato dell'ordinaria estrazione di radice, ed anteponendo ad A il segno che rende positivo il risultato. Ne verrà di conseguenza

$$x^m = \pm A y^m$$

e la equazione (a) si trasformerà nell' altra

$$y^m \pm 1 = 0.$$

Trovate le radici di questa, e sostituite nella formola $$x = y \sqrt[m]{\pm A}$$

ne caveremo le corrispondenti della proposta. Se nella equazione in y il secondo termine è positivo

ed m dispari posto $y = -z$ si ridurrà alla forma

(b) $$z^m - 1 = 0$$

e quando sia $m = 2^r (2h + 1)$

ove h ed r sono numeri interi, si ridurrà alla (b) supponendo

$$y = z \sqrt[2^r]{-1}.$$ Dunque

» ogni equazione binomia può ridursi alla forma

(c) $$y^m - 1 = 0.$$

73. Siccome qualunque numero più grande o più piccolo dell' unità elevato a qualsivoglia potenza intera dà un risultamento corrispondentemente maggiore o minore dell' unità, così questa sarà l' unica radice reale della equazione (c), e quella radice, se m è dispari, dovrà essere positiva, ma potrà essere positiva e negativa allorquando m sia pari.

74. L' incognita della equazione (c) rappresenta una quantità la quale elevata alla potenza m esima dà per risultamento l' unità, e siccome ammette m valori, perciò altrettante saranno tali radici dell'unità. Se poi i valori di y desunti dall' equazione (c) verranno sostituiti nell' altra

$$x = y \sqrt[m]{A}$$

ne avremo altrettanti di x, cioè altrettante radici della equazione $x^m - A = 0$, onde ne segue esistere m quantità le quali elevate alla potenza dell' ordine m forniscono un medesimo risultamento A. Se m è pari ed A positivo due radici saranno reali, una posit .\ 'altra negativa, e le

rimanenti tutte immaginarie; se m è dispari vi ha una sola radice reale che porta lo stesso segno della potenza.

75. Si rappresenti con a una radice immaginaria della equazione $x^m - 1 = 0$ per cui sia $a^m = 1$ ed elevato un membro e l' altro a qualunque potenza intera r ne verrà $a^{mr} = 1$, ossia $(a^r)^m - 1 = 0$

ed anche $\left(\frac{1}{a^r}\right)^m - 1 = 0$ cioè

» Una potenza intera di qualunque radice im-
» maginaria è pure radice della equazione.

76. Se nessuna potenza di a minore dell' m esima, eguaglia l' unità, tutte le quantità

$$a, a^2, a^3 \ldots\ldots a^{m-1}, a^m = 1$$

saranno disuguali fra loro.

Infatti assunti due termini qualisivogliano di quella progressione, i quali rappresento con a^h, a^{h+k}, se fosse $a^h = a^{h+k}$

ossia $a^h (a^k - 1) = 0$ ne verrebbe $a^k = 1$ cioè una potenza $k < m$ della a sarebbe eguale all'unità, il che è contrario a quanto abbiamo supposto. Dunque

» Se una radice immaginaria di una equazione
» binomia non soddisfa ad altra equazione bino-
» mia di grado minore, quella radice si chiama
» *primitiva*, e le potenze intere della medesima
» offrono tutte le radici di quella equazione.

77. Ritenute le supposizioni dell' antecedente § 76 siano a^r, a^s due radici immaginarie conjugate, così che potremo supporre

$$a^r = \alpha + \beta\sqrt{-1}\,, \quad a^s = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Moltiplicate tali equazioni si ha

$$a^{r+s} = \alpha^2 + \beta^2$$

dunque a^{r+s} sarà la radice reale positiva della equazione (c) cioè $a^{r+s} = 1 = a^m$; cosicchè

» Le radici immaginarie conjugate di una » equazione binomia sono quelle potenze di una » medesima radice primitiva gli esponenti delle » quali presi insieme eguagliano il grado della » equazione.

78. Due numeri interi m, n abbiano un massimo divisore comune ω. Si rappresenti con a una radice immaginaria comune alle equazioni

$$x^m - 1 = 0\,, \qquad x^n - 1 = 0$$

per cui saranno $a^m = a^n = 1$, ed indicati con u, t due interi i quali rendano

$$um - tn = \omega$$

siccome $a^{mu} = 1$, $a^{nt} = 1$ avremo

$$a^{nt}\left(a^{mu-nt} - 1\right) = a^{nt}\left(a^{\omega} - 1\right) = 0$$

ossia

$$a^{\omega} - 1 = 0$$

Se i numeri m, n sono primi fra loro $\omega = 1$, e quest' ultima equazione è assurda. Dunque

» Due equazioni binomie i gradi delle quali sono » numeri primi non hanno radici immaginarie comuni, » ed essendo numeri composti tali radici comuni » soddisferanno una terza equazione binomia l'or- » dine della quale è il divisor comune massimo » dei gradi delle equazioni nominate.

79. Nella equazione (c) sia $m = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots\ldots t^{\tau}$ ove a, b, c ..... t rappresentino numeri primi asso-

lutamente. I divisori di m lo saranno pure di

$$a^{\alpha-1} \,.\, b^{\beta-1} \,.\, c^{\gamma-1} \ldots\ldots t^{\tau-1} = m'$$

le radici non primitive di $x^m - 1 = 0$ renderanno $x^{m'} - 1 = 0$, e siccome $m > m'$ ne segue che

» Qualunque equazione binomia ammette ra- » dici primitive.

80. Supponiamo il grado m di un' equazione binomia eguale al prodotto di due numeri h, k primi fra loro. Se a_1, a_2 fossero radici immaginarie dell' equazione $y^h - 1 = 0$; b_1, b_2 radici immaginarie di $y^k - 1 = 0$, essendo $a_1^h = 1$, $b_2^k = 1$ ed $a_2^{hk} = a_1^m = 1$, $b_1^{hk} = b_1^m = 1$ avremo $(a_1 b_1)^m = 1$ $(a_2 b_2)^m = 1$, cioè i prodotti $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ saranno radici della equazione $x^m - 1 = 0$.

Quei prodotti sono disuguali, mentre supposto $a_1 b_1 = a_2 b_2$ per cui

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} \text{ ed } \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^k = \frac{b_2^k}{b_1^k} = 1\,,$$

il quoto $\frac{a_1}{a_2}$ sarebbe radice della equazione $y^k - 1 = 0$; ma è pure $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^h = 1$, dunque $\frac{a_1}{a_2}$ soddisferà le equazioni $y^h - 1 = 0$, $y^k - 1 = 0$, il che è assurdo, mentre i gradi h e k sono numeri primi fra loro.

Se poi a_1 e b_1 fossero radici primitive delle equazioni $y^h - 1 = 0$, $y^k - 1 = 0$ il prodotto $a_1 b_1$ sarebbe una radice primitiva di $x^m - 1 = 0$. Infatti siccome $(a_1 b_1)^m = 1$, se fosse ancora $(a_1 b_1)^n = 1$, ove $n < m$, supposto ω il massi-

mo divisore comune ad m ed n sarà (§ 78) $(a_1 b_1)^{\omega} = 1$. Essendo $m = hk$ ed h, k numeri primi dovrà ω contenere qualche fattore di h e di k. Fingasi $h = h_1 H$, $k = k_1 K$, $\omega = h_1 k_1$, onde saranno

$$(a_1 b_1)^{h_1 k_1} = 1 , \quad a_1^{h_1 H} = 1 , \quad b_1^{k_1 K} = 1 ,$$

e dalla prima elevata alla potenza H avremo

$$a_1^{h_1 k_1 H} . b_1^{h_1 k_1 H} = 1 , \text{ ossia } b_1^{hk_1} = 1 ;$$

ma è pure $b_1^{k_1 K} = 1$ ed h, k sono numeri primi, dunque $b_1^{k_1} = 1$, il che è assurdo se b_1 è radice primitiva della equazione $y^k - 1 = 0$. Di qui ne segue che

» Se i gradi di due equazioni binomie sono » numeri primi, moltiplicate fra loro una radice » primitiva dell' una e dell' altra, il prodotto sarà » una radice primitiva di quella equazione bino» mia il grado della quale è il prodotto dei gradi » delle prime equazioni.

81. I principii esposti conducono alla risoluzione completa delle equazioni binomie; ma per non tornare due volte sul medesimo argomento ne tratteremo in appresso. Per ora ne basta notare la facilità con cui si svolgono le equazioni

$$x^2 - 1 = 0 , \quad x^3 - 1 = 0$$

la prima delle quali cioè $x^2 = 1$ ci dà $x = \pm 1$. La seconda è soddisfatta da $x = 1$, si riduce ad

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

e posto $x^2 + x + 1 = 0$ ne vengono

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} .$$

82. » Qualunque equazione la quale contenga » ne' suoi termini potenze frazionarie di una o più » quantità può trasformarsi in altra affatto libera » dagli irrazionali.

La equazione sia a cagion d' esempio

$$(d) \qquad A\sqrt[m]{B} + C\sqrt[n]{D} + E\sqrt[p]{F} + G = 0$$

dalla quale si vogliano togliere gli irrazionali visibili. Sappiamo che indicate con a, b, c ..... radici primitive delle equazioni $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$, $x^p - 1 = 0$ .....; con m', n', p' ..... numeri interi minori rispettivamente di m, n, p ..... le quantità $a^{m'}\sqrt[m]{B}$, $b^{n'}\sqrt[n]{D}$, $c^{p'}\sqrt[p]{F}$, sono radici delle equazioni

$$(e) \quad x^m - B = 0 , \quad x^n - D = 0 , \quad x^p - F = 0 \text{ .... (§ 74).}$$

Se nel primo membro della equazione (d) in luogo delle quantità $\sqrt[m]{B}$, $\sqrt[n]{D}$..... si pongano ad una ad una in tutte le maniere possibili le radici delle equazioni (e), quelle cioè della prima ove si trova $\sqrt[m]{B}$, quelle della seconda ov' è $\sqrt[n]{D}$..... quindi si moltiplichino fra loro tutti i polinomii ottenuti, siccome il prodotto è manifestamente una funzione invariabile per rispetto alle radici di ciascuna delle equazioni nominate si potrà esprimere per mezzo dei loro coefficienti B, D, F..... cosicchè eguagliato a zero il prodotto avremo una equazione nella quale non vi sarà traccia degli irrazionali apparenti nella (d) proposta.

Ma la equazione che risulta oltre le radici della (d) invilupperà tutte quelle atte ad annullare ognuno dei polinomii derivati dal suo primo membro. Di qui ne viene che assoggettata all'analisi matematica una questione concreta, se la equazione cui si perviene involge quantità irrazionali, ogniqualvolta questi vengano tolti la equazione che ne risulta può fornire radici estranee; ma talvolta altre ne abbraccia, che si connettono alla questione concreta, le quali furono inosservate. La questione di Euclide citata (§ 71) ne offre un esempio.

Equazioni derivative.

83. Vi hanno delle equazioni nelle quali in luogo dell' incognita esiste una potenza intera della medesima. Indicati con n, p due numeri interi la forma generale di tali equazioni si è

$$x^{np}+A_1x^{n(p-1)}+\ldots\ldots+A_rx^{n(p-r)}\ldots\ldots A_{p-1}x^n+A_p=0$$

Se si finge $x^n=y$ quella equazione si riduce alla

$$(f)\quad y^p+A_1y^{p-1}+\ldots\ldots+A_ry^{p-r}\ldots\ldots+A_{p-1}y^p+A_p=0$$

da cui cavata una radice per esempio $y=\beta$ ne verrà la equazione binomia $x^n-\beta=0$ la quale fornisce n valori di x corrispondenti ad $y=\beta$, ed ogni altra radice della trasformata (f) ne fornirà n della data equazione.

Equazioni del secondo grado.

84. Sebbene il trattare di queste equazioni sia oggetto della matematica elementare, pure giudichiamo conveniente il dedurne la regola dalla dottrina delle trasformazioni.

Una equazione del secondo grado completa ha la forma seguente

$$x^2+A_1x+A_2=0.$$

Le sue radici si indichino con a_1, a_2, e fra le diverse funzioni che ponno assumersi per trasformarla prendiamo la più semplice, cioè $f=ma_1+na_2$ per cui l'altra radice sarà ma_2+na_1. La equazione trasformata sarà pure del secondo grado completa, cioè della forma

$$(g)\qquad y^2+B_1y+B_2=0$$

per cui avremo

$$B_1=(ma_1+na_2)+(ma_2+na_1)=(m+n)(a_1+a_2)$$

$$B_2=(ma_1+na_2)(ma_2+na_1)$$

Ora siccome sapiamo risolvere le equazioni binomie avremo raggiunto l' intento se la equazione (g) sarà ridotta a quella forma, cioè sarà

$$\beta_1=(m+n)(a_1+a_2)=0$$

qualunque siano a_1 ed a_2. Dovrà essere perciò $m+n=0$, il che si conseguisce supponendo $m=1$, $n=-1$, e sarà

$$B_2=2a_1a_2-(a_1^2+a_2^2)=2A_2-S^{(2)}=4A_2-A_1^2$$

mentre

$$S^{(2)}+A_1S^{(1)}+2A_2=0,\quad S^{(1)}+A_1=0,\quad S^{(2)}=A_1^2-2A_2$$

La equazione trasformata $y^2 = A_1^2 - 4A_2$ fornisce $y = \pm\sqrt{(A_1^2 - 4A_2)}$, e siccome i valori di y sono $a_1 - a_2$, $a_2 - a_1$, posto

$$a_1 - a_2 = \sqrt{(A_1^2 - 4A_2)}$$

essendo $a_1 + a_2 = -A_1$, ne caveremo

$$a_1 = \frac{-A_1 + \sqrt{(A_1^2 - 4A_2)}}{2}, \quad a_2 = \frac{-A_1 - \sqrt{(A_1^2 - 4A_2)}}{2}.$$

Equazioni del terzo grado.

85. Tali equazioni ordinate si riducono alla forma $x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$

Siano a_1, a_2, a_3 le radici di questa equazione ed $ma_1 + na_2 + pa_3$ una radice della trasformata. Siccome le quantità a_1, a_2, a_3 occupano tre posti nei quali possono permutarsi ad arbitrio il numero di quelle funzioni verrà espresso dal prodotto $1.2.3 = 6$ (§ 57); tale sarà il grado della equazione trasformata, la quale perciò non sapremo risolvere. Essendoci noto come si trattino le equazioni complete del secondo grado e le binomie del terzo, quella trasformata potrà sottoporsi a calcolo allorchè, essendo derivativa, (§ 83) si ridurrà a dipendere da due equazioni di quella forma: in tal caso supposta

$$y^6 + B_1 y^5 + B_2 y^4 + B_3 y^3 + B_4 y^2 + B_5 y + B_6 = 0$$

la trasformata, dovranno essere $B_1 = B_2 = B_4 = B_5 = 0$ affinchè si riduca alla $y^6 + B_3 y^3 + B_6 = 0$, e supposto $y^3 = z$ ne viene $z^2 + B_3 z + B_6 = 0$: equazioni entrambe che sappiamo calcolare. Diffatti cavate le

radici dalla seconda le quali siano $z = P^3$, $z = Q^3$ ed indicata con α una radice cuba immaginaria dell' unità ne verranno sei valori di y, cioè P, αP, $\alpha^2 P$, Q, αQ, $\alpha^2 Q$, e quindi se ne desumeranno le radici della proposta equazione. Ma esaminiamo la possibilità di conseguire quella trasformata. Immagino tutte le radici analoghe alla $ma_1 + na_2 + pa_3$, e si osservi che un' altra per es. $ma_3 + na_1 + pa_2$ potrà eguagliare la prima moltiplicata per α o per α^2 quando tutte le radici a_1, a_2, a_3 abbiano cambiato il posto; mentre se fosse per es.

$$ma_1 + na_3 + pa_2 = \alpha(ma_1 + na_2 + pa_3) \text{ ossia}$$

$$(h) \quad a_1 m(1 - \alpha) + a_2(p - n\alpha) + a_3(n - p\alpha) = 0$$

siccome il metodo di risoluzione che si cerca deve essere applicabile ad ogni equazione, la relazione (h) dovrà verificarsi indipendentemente dalle radici e però essere $\alpha = 1$, il che è assurdo. Fingasi adunque

$$ma_3 + na_1 + pa_2 = \alpha(ma_1 + na_2 + pa_3)$$

ossia $n = m\alpha$, $p = n\alpha$, $m = p\alpha$; e ne verranno di conseguenza $n = m\alpha$, $p = m\alpha^2$,

$$ma_1 + na_2 + pa_3 = m(a_1 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_3) = (1)$$
$$ma_3 + na_1 + pa_2 = \alpha(1)$$
$$ma_2 + na_3 + pa_1 = \alpha^2(1)$$
$$ma_1 + na_3 + pa_2 = m(a_1 + \alpha a_3 + \alpha^2 a_2) = (2)$$
$$ma_2 + na_1 + pa_3 = \alpha(2)$$
$$ma_3 + na_2 + pa_1 = \alpha^2(2)$$

Si faccia $m = 1$ e saranno

$$-B_3 = P^3 + Q^3 = (1)^3 + (2)^3$$

$$B_6 = (P\,Q)^3 = [(1)(2)]^3$$

$$-B_3 = 2S^{(3)} - 3S^{(1,2)} - 12A_3$$

$$B_6 = \{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + (\alpha + \alpha^2)(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)\}^3$$

essendo $\alpha^2 + \alpha = -1$, $B_6 = (S^{(2)} - A_2)^3$

Per facilitare i calcoli fingasi la equazione del terzo grado privata del secondo termine (§ 69) cioè ridotta alla forma

$$x^3 + A_2\,x + A_3 = 0$$

e saranno $B_3 = 27A_3$, $B_6 = -27A_2^3$

$$P^3 = \frac{27}{2}\left[-A_3 + \sqrt{\left(A_3^2 + \frac{4A_2^3}{27}\right)}\right]$$

$$Q^3 = \frac{27}{2}\left[-A_3 - \sqrt{\left(A_3^2 + \frac{4A_2^3}{27}\right)}\right]$$

$$a_1 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_3 = Q$$

$$a_1 + \alpha^2 a + \alpha a_3 = P$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

e finalmente

$$(k)\quad a_1 = \tfrac{1}{3}(P+Q);\ a_2 = \tfrac{1}{3}(\alpha P + \alpha^2 Q);\ a_3 = \tfrac{1}{3}(\alpha^2 P + \alpha Q)$$

che sono appunto le tre radici cercate.

86. Le formole (k) offrono molte singolarità, le quali destarono fra i geometri dottissime discussioni. È facile il convincersi che le radici di una equazione del terzo grado possono essere tutte razionali, una razionale e due irrazionali del secondo grado, tutte e tre irrazionali del terzo ordine, od anche trascendenti. Il primo caso è manifesto. Del secondo restiamo convinti notando potersi formare una equazione del terzo grado mol-

tiplicando per un fattore lineare razionale qualunque equazione del secondo. Il terzo è manifesto se col mezzo indicato al § 82 rendiamo razionale la equazione $x - F - A\sqrt[3]{B} = 0$. Finalmente la nota formola trigonometrica

$$sen^3\varphi - \frac{3}{4}r^2\,sen\,\varphi + \frac{r^3}{4}\,sen\,3\,\varphi = 0$$

che corrisponde ad un arco φ preso nella circonferenza di raggio r, suppostovi $sen\,\varphi = x$, $-\frac{3r^2}{4} = A_2$, $\frac{r^3}{4}\,sen\,3\varphi = A_3$, si riduce ad una equazione del terzo grado le cui radici sono i seni dei tre angoli minori rappresentati dalla equazione $sen\,3\,\varphi = \frac{4A_3}{r^3}$, e però quelle radici saranno generalmente trascendenti. Quelle formole (k) debitamente ridotte offrono le radici sotto l'aspetto suo proprio e non a ragione furono credute irreducibili a quello. Nei primi due casi enumerati si toglie sempre l'irrazionale del terzo ordine, nel terzo sparisce l'irrazionale del secondo ordine, e nell'ultimo caso la quantità $A_3 \pm \sqrt{\left(A_3^2 + \frac{4A_2^3}{27}\right)}$ si riduce alla forma $R(cos\psi + \sqrt{-1}\,sen\,\psi)$ (§ 32) e si calcola mediante le trasformazioni indicate al § 33. Siccome queste osservazioni possono trovar luogo nella prima istruzione elementare delle matematiche le ho soltanto indicate, affine di ricordarle.

Equazioni del quarto grado.

87. Qualunque equazione di questo ordine, privata del secondo termine ed ordinata, assume la forma seguente

$$x^4 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0$$

Siano a_1, a_2, a_3, a_4 le radici ed $(l)\ f = ma_1 + na_2 + pa_3 + qa_4$ una radice della trasformata, per mezzo della quale vorrebbesi conseguire la risoluzione. Permutando le quantità a_1, a_2..... in quella funzione si avranno $1.2.3.4 = 24$ radici della trasformata, ma per abbassarne il grado fingiamo $m = n$, $p = q$ per cui il quadrinomio (l) si ridurrà ad $m(a_1 + a_2) + p(a_3 + a_4)$ invariabile tanto rispetto ad a_1, a_2 come riguardo alle radici a_3, a_4, per cui si avranno $\frac{4.3}{2} = 6$ funzioni di quella forma (§. 61.). Ma v' ha di più. Siccome $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ quelle radici saranno due a due eguali e di segno contrario, mentre p. e.

$$m(a_3 + a_4) + p(a_1 + a_2) = -\{m(a_1 + a_2) + p(a_3 + a_4)\}$$

perciò indicato con y il simbolo che rappresenta qualunque radice della trasformata il quadrato y^2 ammetterà soltanto i tre valori

$$[m(a_1 + a_2) + p(a_3 + a_4)],\ [m(a_1 + a_3) + p(a_2 + a_4)]^2$$
$$[m(a_1 + a_4) + p(a_2 + a_3)]^2$$

e dipenderanno da una equazione del terzo grado. Le m, n rimaste arbitrarie si facciano eguali all' unità, e posto $y^2 = z$ sia

$$(m) \qquad z^3 + B_1z^2 + B_2z + B_3 = 0$$

la equazione avente per radici

$$(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)^2 = 4(a_1 + a_2)^2;$$
$$(a_1 + a_3 - a_2 - a_4)^2 = 4(a_1 + a_3)^2$$
$$(a_1 + a_4 - a_2 - a_3)^2 = 4(a_1 + a_4)^2$$

cosicchè avremo

$$-B_1 = 4\{3a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_1(a_2 + a_3 + a)\} = 4S^{(1)}$$
$$B_2 = 16\{(a_1^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)^2 + \dots\}$$
$$= 16\{(a_1a_4 - a_2a_3)^2 + \dots\} = 16(S^{(2,2)} - 6A_4) =$$
$$= 16(A_2^2 - 4A_4)$$
$$-B_3 = 64\{(a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_1 + a_4)\}^2 =$$
$$= 64\{a_1^2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + A_3\}^2 = 64A_3^2$$

Sciolta ormai la (m) (§. 85.), chiamate z_1, z_2, z_3 le proprie radici si avranno

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = \pm\sqrt{z_1};\ a_1 + a_3 - a_2 - a_4 = \pm\sqrt{z_2},$$
$$a_1 + a_4 - a_2 - a_3 = \pm\sqrt{z_3},\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

le quali forniscono a_1, a_2, a_3, a_4 assumendo i doppi segni che precedono $\sqrt{z_1}$, ecc. in maniera che la equazione

$$\pm\sqrt{z_1} \times \pm\sqrt{z_2} \times \pm\sqrt{z_3} = 8A_3$$

riesca identicamente soddisfatta.

Equazioni che ammettono divisori razionali.

88. » Se il primo membro di una equazione al-
» gebraica ordinata è divisibile per un polinomio
» pure ordinato per rispetto all' incognita, ed i
» coefficienti di quella equazione sono interi lo
» saranno ancora quelli del divisore.

L' equazione sia $E(x)=0$, $P(x)$ il divisore di $E(x)$ e $Q(x)$ il quoziente, cosicchè si abbia $E(x)=P.Q$. Ammesso che in P possano esistere coefficienti frazionari si consideri un divisore primo a di qualche denominatore, e quei termini nei quali esiste quel divisore si riducano per rispetto ad esso alla medesima denominazione, che indicherò con a^r. Fingasi $P=R+\frac{S}{a^r}$ e fatto altrettanto per Q onde sia $Q=T+\frac{U}{a^s}$ ne verrà

$$E(x)=TR+\left(\frac{ST}{a^r}+\frac{RU}{a^s}\right)+\frac{SU}{a^{r+s}}$$

e siccome il polinomio SU, atteso il divisore a^{r+s}, non ammette riduzione con altri termini del supposto valore di $E(x)$, e in questo polinomio non vi sono termini frazionarii, dovrà essere $SU=0$. Sia $U=0$ per cui $E(x)=TR+\frac{ST}{a^r}$ e dal discorso fatto dianzi ne dedurremo $ST=0$ cioè $S=0$ non potendo essere insieme $U=0$, $T=0$: dunque i coeficienti del polinomio $P(x)$ saranno necessariamente interi.

89. Supponiamo che una equazione $E(x)=0$ ammetta qualche divisore lineare, quindi qualche radice razionale. Se colla trasformazione indicata al (§. 68.) si toglieranno le frazioni da $E(x)=0$ la radice della equazione risultante, che corrisponde a quella, sarà intera. Siccome poi l'ultimo suo termine è il prodotto di tutte le radici (§. 10) perciò quelle fra esse che sono razionali, saranno divisori del detto ultimo termine. Bisogna adunque trovare tali divisori semplici e composti coi metodi dell' aritmetica, e cercare quali fra questi soddisfacciano l' equazione.

90. Due regole giungono opportune per escludere molti fra questi divisori inutili, e per facilitare la sostituzione di quelli che potrebbero essere radici. Indicato con h qualunque numero intero si consideri la equazione

$$(n) \quad y^m+y^{m-1}E_{m-1}(\pm h)\ldots\ldots+E(\pm h)=0:$$

Se una quantità a_1 che divide l' ultimo termine A_m del polinomio $E(x)$ fosse radice di $E(x)=0$ sarebbe $a_1\mp h$ radice della equazione (n) e quindi $a_1\mp h$ divisore di $E(\pm h)$: dunque se il divisore a_1 del numero A_m accresciuto dell' intero h non divide $E(-h)$, o diminuito di h non divide $E(h)$ non sarà a_1 radice della equazione.

91. Per le radici razionali negative bisogna invertere la regola, mentre se $-b$ è radice negativa sarà $b+h$ divisore di $E(h)$ e $b-h$ divisore di $E(-h)$.

92. Per accertarci se un certo numero intero a sia radice della equazione $E(x)=0$ è duopo

farne la sostituzione. Essendo

$E(a)=a^m+A_1a^{m-1}+\ldots\ldots+A_{m-1}a+A_m$ ed A_m divisibile per a, si finga $A_m=aB_m$, e dovrà essere

$$a^{m-1}+A_1a^{m-2}\ldots+A_{m-3}a^2+A_{m-2}a+A_{m-1}+B_m=0$$

per cui aggiunto A_{m-1} a B_m l' aggregato dovrà essere divisibile per a: sia $A_{m-1}+B_m=aB_{m-1}$ e siccome

$$a^{m-2}+A_1a^{m-3}\ldots+A_{m-3}a+A_{m-2}+B_{m-1}=0$$

dovrà essere $A_{m-2}+B_{m-1}$ divisibile a; eseguita la divisione, se è possibile, chiamato B_{m-2} il quoto, ne verrà

$$a^{m-3}+A_1a^{m-4}\ldots+A_{m-3}+B_{m-2}=0$$

per cui aggiunto A_{m-3} al quoto B_{m-2} trovato antecedentemente, la somma $A_{m-3}+B_{m-2}$ dovrà pure dividersi per a. Proseguita tale operazione, se riconosceremo impossibile alcuna di quelle divisioni a non sarà radice.

93. Fingiamo che la equazione $E(x)=0$ a coefficienti interi abbia qualche divisore razionale $P(x)$ del grado n. Sarà $P(x)$ il prodotto di n fattori lineari di $E(x)$, e l' ultimo suo termine sarà il prodotto di n radici di quella equazione. Se adunque desumeremo da $E(x)=0$ la trasformata avente per radici i prodotti delle proprie radici ad n ad n, fra questi si troverà l'ultimo termine del polinomio $P(x)$ il quale, perchè numero intero, sarà una radice razionale della trasformata suddetta. Dunque trovate tutte le radici razionali, col metodo indicato nell' antecedente (§. 89.), fra queste potrà esservi il termine ultimo di $P(x)$ e vedremo

fra poco in qual maniera la cognizione del prodotto di n radici della equazione $E(x)=0$ fornisca qualunque funzione algebraica invariabile delle medesime, quali sono i coefficienti tutti del polinomio $P(x)$.

Ogni qual volta poi sia noto un divisore $P(x)$ di una equazione $Ex=0$, supposto $E(x)=P.Q$ la risoluzione di quella si ridurrà a considerare le due $P(x)=0$, $Q(x)=0$ le quali entrambe sono di grado minore.

Equazioni a radici multiple.

94. Una equazione $E(x)=0$ sia dotata di molte radici eguali ad a_1 il di cui numero sia n. Dal (§. 69) ci è noto, che la trasformata avente per radici quelle della proposta $E(x)=0$ diminuite di a_1 è la seguente

$$(p)\quad E(a_1)+yE_1(a_1)+y^2E_1(a_1)+y^3E_3(a_1)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+y^{n-1}E_{n-1}(a_1)+y^nE_n(a_n)\ldots+y^m=0.$$

Essendo a_1, $a_2\ldots$ le radici di $E(x)=0$ quelle di (p) saranno $a_1-a_1=0$, $a_2-a_1,\ldots$ e quando sia la radice a_1 multipla secondo il numero n la (p) avrà un numero n di radici eguali a zero. Il fattore che corrisponde ad ognuna di queste radici è la y medesima, dunque il polinomio (p) dovrà essere divisibile per y^n, il che importa le seguenti equazioni

$$(q)\quad E(a_1)=0,\ E_1(a_1)=0,\ E_2(a_1)=0\ldots E_{n-1}(a_1)=0$$

Siccome poi le quantità $E_r(x)$, $E^{(r)}(x)$ non diffe-

riscono che per un coefficiente numerico (§. 19) ne verrà che » Una radice multipla di una equa» zione è radice di tutte le derivate dalla prima » fino a quella l' ordine della quale è espresso » dal grado di multiplicità diminuito di uno.

95. Reciprocamente se una quantità a_1 rende soddisfatte le equazioni (q) la trasformata (p) ammette n fattori eguali ad y, cioè n radici eguali a zero, e però a_1 sarà radice di $E(x)=0$ multipla secondo il numero n.

96. Considerando una qualunque fra le equazioni (q), per esempio $E_r(a_1)=0$ e le seguenti

$$E_{r+1}(a_1)=0\ ,\ E_{r+2}(a_1)=0\ ,\ \ldots\ldots\ E_{n-1}(a_1)=0$$

ovvero le $E^{(r)}(a_1)=0$, $E^{(r+1)}(a_1)=0$, ... $E^{(n-1)}(a_1)=0$ ne segue, che se a_1 è radice di $E(x)=0$ multipla secondo il numero n, essendo $r<n-1$, quella radice annullerà $E^{(r)}(x)=0$ e tutte le derivate prima, seconda ..... di $E^{(r)}(x)$ fino a quella dell' ordine $n-r-1$, ossia a_1 sarà radice di $E^{(r)}(x)=0$ multipla secondo il numero $n-r$: per cui a_1 sarà radice di $E^{(1)}(x)=0$ multipla secondo il n.° $n-1$, della $E^{(2)}(x)=0$ multipla secondo $n-2$, di $E^{(3)}(x)=0$ multipla dell' ordine $n-3$, ecc.

97. Da tutto ciò si raccoglie che le radici di una equazione $E(x)=0$ multiple secondo un numero n si trovano cercando quelle comuni alle equazioni

$$E(x)=0\ ,\ E^{(1)}(x)=0\ ,\ E^{(2)}(x)=0\ ,\ \ldots\ldots\ E^{(n-1)}(x)=0.$$

Ora ecco in qual maniera ciò si possa conseguire. Si trovi il massimo divisor comune ai polino-

mii $E(x)$, $E^{(1)}(x)$; il quale sarà il prodotto dei fattori multipli di $E(x)$ diminuiti ciascuno dell' unità nel grado: mentre qualunque radice di $E(x)=0$ multipla secondo il numero n lo è di $E^{(1)}(x)=0$ multipla secondo $n-1$, e quelle equazioni non hanno altra radice comune. Chiamato $D_1(x)$ quel massimo divisor comune è manifesto che il quoto $\frac{E(x)}{D_1(x)}$ sarà il prodotto di tutti i fattori di $E(x)$ presi ciascuno linearmente; cosicchè la equazione $\frac{E(x)}{D_1(x)}=0$ avrà colla $E(x)=0$ tutte le radici comuni, ma nessuna di esse sarà multipla. Le radici doppie di $E(x)=0$ soddisfanno alle equazioni $E(x)=0$, $E^{(1)}(x)=0$, $E^{(2)}(x)=0$, per cui il massimo divisor comune di $E(x)$, $E^{(1)}(x)$, $E^{(2)}(x)$ sarà il prodotto dei fattori multipli di $E(x)$ diminuito ciascuno di due unità nel grado, e detto $D_2(x)$ tale divisore il quoto $\frac{D_1(x)}{D_2(x)}$ sarà il prodotto di tutti i fattori multipli di $E(x)$ ciascuno dei quali sarà lineare.

Equazioni a radici reciproche.

98. Se due radici di una equazione sono l'una inversa dell' altra si chiamano radici reciproche. Si incontrano spesse volte equazioni dotate di simili radici, per il che meritano particolare considerazione.

Fingiamo che la equazione $E(x) = o$ insieme ad una radice a un' altra ne ammetta della forma $\frac{1}{a}$, ovvero $\frac{h}{a}$ per generalità maggiore. Essendo

$$E(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots + A_{m-r} x^r \ldots + A_m$$

ne verrà

$$E\left(\frac{h}{x}\right) = \frac{h^m}{x^m} + A_1 \frac{h^{m-1}}{x^{m-1}} \ldots + A_{m-r} \frac{h^r}{x^r} \ldots + A_m =$$

$$\frac{A_m}{x^m}\left(\frac{h^m}{A_m} + \frac{A_1 h^{m-1}}{A_m} x + \frac{A_2 h^{m-2}}{A_m} x^2 \ldots + \frac{A_{m-r} h^r}{A_m} x^{m-r} \ldots + \frac{A_{m-1} h}{A_m} x^{m-1} + x^m\right)$$

per cui se fossero nello stesso tempo $E(a_1) = o$ ed $E\left(\frac{h}{a_1}\right) = o$ le due equazioni $E(x) = o$, $E\left(\frac{h}{x}\right) = o$ avrebbero di comune la radice a_1, cioè se la equazione $E(x) = o$ ammette radici della forma a_1, $\frac{h}{a_1}$ per esse dovranno venir soddisfatte contemporaneamente le seguenti

$$(r) \quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = o$$

$$x^m + \frac{A_{m-1} h}{A_m} x^{m-1} + \frac{A_{m-2} h^2}{A_m} x^{m-2} + \ldots + \frac{h^m}{A_m} = o$$

Cercheremo perciò il massimo divisor comune dei loro primi membri e questo eguagliato a zero offrirà tutte quelle radici.

99. Se a ciascuna radice a_1 della equazione $E(x) = o$ corrispondesse la reciproca $\frac{h}{a_1}$ quelle e-

quazioni (r) sarebbero identiche e però

$$(s) \quad A_1 = \frac{h A_{m-1}}{A_m}, \quad A_2 = \frac{h^2 A_{m-2}}{A_m}, \quad A_m = \frac{h^m}{A_m}$$

Se $E(x) = o$ è di grado pari, esisterà in essa il termine medio $A_{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}}$ cui nell'altra equazione (r) corrisponde $\frac{A_{\frac{m}{2}}}{A_m} h^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}}$, l'identità dei quali importa che sia

$$A_{\frac{m}{2}} = \frac{A_{\frac{m}{2}}}{A_m} h^{\frac{m}{2}}$$

Se $A_{\frac{m}{2}} = o$ la equazione è soddisfatta, altrimenti si avrà $A_m = h^{\frac{m}{2}}$. Dunque dall' ultima equazione (s) cioè $A^2_m = h^m$ dovremo escludere la radice $A_m = -h^{\frac{m}{2}}$, e dovendo i coefficienti della equazione $E(x) = o$ essere razionali tale sarà $h^{\frac{m}{2}}$, cioè o m pari, ovvero h un quadrato.

Combinando ora l' ultima equazione (s) alle antecedenti ne derivano

$$A_m = \pm h^{\frac{m}{2}}, \ldots A_3 = \pm \frac{A_{m-3}}{h^{\frac{m}{2}-3}}, \quad A_2 = \pm \frac{A_{m-2}}{h^{\frac{m}{2}-2}},$$

$$A_1 = \pm \frac{A_{m-1}}{h^{\frac{m}{2}-1}}$$

cui bisogna aggiungere, che valendo ovunque il segno inferiore, se m è pari dovrà essere $A_{\frac{m}{2}} = o$. Dunque la equazione $E(x) = o$ avrà la forma

$$(t)\quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} \ldots\ldots$$
$$\pm\left(\ldots + \frac{A_3}{h^3}x^3 + \frac{A_2}{h^2}x^2 + \frac{A_1}{h}x + 1\right)h^{\frac{m}{2}} = 0$$

e quando $h = 1$, sarà

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots\ldots \pm A_2 x^2 \pm A_1 x \pm 1 = 0$$

cioè »Se ad ogni radice di una equazione corri-
» sponde una radice reciproca i termini estremi
» ed egualmente distanti dagli estremi della me-
» desima saranno eguali, oppure eguali in gran-
» dezza ed opposti nei segni. Se poi la equazione
» è di grado pari ed i segni dei termini corrispon-
» denti sono contrarj dovrà mancare il termine
» medio.

100. Ma vediamo come la equazione (t) possa essere di grado dispari? Si ponga $h = k^2$ e raccoltivi i termini affetti da coefficienti eguali ne verrà

$$(x^m \pm k^m) + A_1 x(x^{m-2} \pm k^{m-2}) + A_2 x^2(x^{m-4} \pm k^{m-4}) \ldots$$
$$\ldots\ldots + A_{\frac{m-1}{2}}\, x^{\frac{m-1}{2}}\,(x \pm k) = 0$$

la quale è divisibile per $x \pm k$, cioè ammette la radice $\mp k$ di cui la quantità inversa $\mp \frac{h}{k} = \mp k$ è identica colla prima. Soppressa quella radice, la equazione di quoto sarà di grado pari a radici due a due della forma a ed $\frac{h}{a} = \frac{k^2}{a}$.

101. Quando m fosse pari ed i termini corrispondenti affetti da segni opposti, dovendo man-

care il termine medio, la equazione (t) potrà scriversi come segue

$$(x^m - k^m) + A_1 x(x^{m-2} - k^{m-2}) \ldots + A_{\frac{m}{2}-1}\, x^{\frac{m}{2}-1}(x^2 - k^2) = 0$$

è divisibile per $x^2 - k^2$, cioè ammette le due radici $\pm k$ ed effettuata la divisione per $x^2 - k^2$, il quoto sarà di grado pari a radici due a due della forma a ed $\frac{h}{a}$; cosicchè se i termini corrispondenti del quoto saranno di segni opposti, potrà rinnovarsi la divisione per $x^2 - k^2$ fino a che l'ultimo quoziente abbia i termini estremi ed equidistanti dagli estremi dotati del medesimo segno.

102. »Dunque la equazione (t) in ogni caso si
»riduce a grado pari coi termini corrispondenti del
»medesimo segno, cioè alla forma

$$x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots\ldots + A_n x^n \ldots$$
$$(u)\quad + A_2 h^{n-2} x^2 + A_1 h^{n-1} x + h^n = 0$$

e questa vedremo trasformarsi in altra del grado n. Diffatti divisa quella equazione per x^n e scritta nel modo seguente

$$\left(x^n + \frac{h^n}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{h^{n-1}}{x^{n-1}}\right) + \ldots\ldots + A_n = 0$$

si finga $x + \frac{h}{x} = y$ ossia $x = \frac{y \pm \sqrt{(y^2 - 4h)}}{2}$, ed $\frac{h}{x} = y - x = \frac{y \mp \sqrt{(y^2 - 4h)}}{2}$, onde indicato con r un numero intero sarà

$$x^r + \frac{h^r}{x^r} = \frac{1}{2^r}\left\{(y + \sqrt{(y^2 - 4h)})^r + (y - \sqrt{(y^2 - 4h)})^r\right\}$$

Sviluppando le potenze nel secondo membro i termini in cui l' irrazionale $\sqrt{(y^2-4h)}$ trovasi elevato a potenze dispari si distruggeranno, essendo nei due sviluppi affetti da segni opposti; i termini che contengono potenze pari di quell'irrazionale sono liberati dal vincolo radicale, il binomio $x^r+\frac{h^r}{x^r}$ si riduce ad una funzione razionale intera del grado r, per cui la equazione (u) mediante la supposta $x+\frac{h}{x}=y$ si riduce al grado n (§ 184).

Equazioni soddisfatte dai prodotti di una quantità per tutte le radici della unità di un ordine determinato qualunque.

103. Sia α una radice primitiva della equazione $x^n-1=0$ e fingasi che $E(x)=0$ ammetta fra le sue radici i prodotti

$$a\alpha,\quad a\alpha^2,\ a\alpha^3\ \ldots\ldots,\ a\alpha^n=a$$

essendo a una quantità qualunque. Siccome deve essere $m>n$ si supponga $m=hn+k$ ove $k<n$. Nella equazione $E(x)=0$ si raccolgano i termini che contengono la x cogli esponenti $0, n, 2n, 3n$... e si chiami P_0 la loro somma: raccolti i termini che contengono le potenze $1, n+1, 2n+1$ .... e separato il fattore x comune, si rappresenti il loro aggregato con xP_1. Si raccolgano i termini affetti dalle potenze $2, n+2, 2n+2$ .... la cui somma indicheremo con x^2P. La somma dei termini nei

quali le potenze della x sono $3, n+3, 2n+3$ .... sia P_3x^3 ecc., cosicchè sarà

$$E(x)=P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3\ldots+P_r\,x^r\ldots+P_k\,x^k=0$$

Sostituendo in questa equazione le supposte radici $a, a\alpha, a\alpha^2\ldots\ a\alpha^{n-1}$, siccome P_0, P_1, P_2 ..... contengono soltanto x^n, x^{2n}, x^{3n}, ... non cambiano valore per queste sostituzioni (§ 75) cosicchè indicati quei valori con Q_0, Q_1, Q_2 ...., ne verranno le equazioni identiche

$$Q_0+\alpha\,.\,a\,Q_1+\alpha^2\,a^2\,Q_2+\ldots\ldots=0$$
$$Q_0+\alpha^2\,.\,a\,Q_1+\alpha^4\,a^2\,Q_2+\ldots\ldots=0$$
$$Q_0+\alpha^3\,.\,a\,Q_1+\alpha^6\,a^2\,Q_2+\ldots\ldots=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la somma delle quali (§ 9 e 75) fornisce $Q_0=0$. Moltiplicando la prima per α^{n-1}, la seconda per α^{n-2}, la terza per α^{n-3}..... quindi sommando di nuovo si avrà $Q_1=0$. Moltiplicando la prima per α^{n-2}, la seconda per α^{n-4}, la terza per α^{n-6} ....., troveremo $Q_2=0$.... e così si avranno

$$Q_3=0,\ Q_4=0,\ldots\ Q_k=0$$

Dunque le radici $a, a\alpha, a\alpha^2\ldots\ldots a\alpha^{n-1}$ saranno comuni a tutte le equazioni

$$P_0=0,\ P_1=0,\ P_2=0\ldots\ldots P_k=0.$$

Equazioni, alcune radici delle quali hanno fra loro una relazione espressa per altra equazione algebraica.

104. Fingasi che alcune radici $a_1, a_2 \ldots a_r$ della equazione $E(x) = 0$ abbiano fra loro una particolare relazione rappresentata per

$$f_1(a_1, a_2, a_3 \ldots a_r) = H$$

in cui f_1 sia funzione algebraica razionale intera per rispetto alle radici ed H una quantità data. Noi potremo conseguire i valori di quelle radici, o almeno raccoglierle in una equazione che tutte le comprenda.

105. Si calcoli la trasformata le cui radici sono tutte le funzioni analoghe ad $f_1(a_1, a_2 \ldots\ldots a_r)$ formabili colle radici di $E(x) = 0$; le quali funzioni siano $f_1, f_2, f_3 \ldots$ e la trasformata

$$(x) \qquad y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} \ldots\ldots + B_n = 0$$

La $f_1(a_1, a_2 \ldots a_r)$ sarà generalmente variabile per rispetto ad alcune radici, invariabile rispetto ad altre: considerando da prima quelle le quali entrano in detta funzione talmente che qualunque permutazione ne cambi il significato e supposta a_1 una di queste radici si formi il prodotto $a_1 f_1$. Restando a_1 nel posto che occupa attualmente nella funzione $f_1(a_1, a_2 \ldots)$ e permutate le altre radici negli altri posti in tutti i modi possibili, si desumano le $f_2, f_3 \ldots f_h$: quindi si formi la quantità $a_1(f_1 + f_2 \ldots + f_h)$, dalla quale, cambiato a_1 in

a_2 e viceversa, poi a_1 in $a_3 \ldots$ finalmente in a_1 a_m ne vengano

$$a_2(f_{h+1} + f_{h+2} \ldots + f_{2h}) \ldots a_m(f_{(m-1)h+1} \ldots + f_{mh}).$$

La somma di tutte queste quantità, algebraica invariabile rispetto alle radici $a_1, a_2 \ldots a_m$, si determini per mezzo dei coefficienti della equazione $E(x) = 0$ (§. 62.) e sia

$$(2) = a_1(f_1 + f_2 \ldots + f_h) + a_2(f_{h+1} + \ldots + f_{2h}) + \ldots = H_1$$

Si cambino in questa funzione f_1 in f_1^2, f_2 in $f_2^2 \ldots$ poi f_1 in f_1^3 in $f_1^4 \ldots f_1^t$, ed indicati con H_2, $H_3 \ldots H_t$ i valori corrispondenti della medesima ne venga la serie di equazioni

$$(3) = a_1(f_1^2 + \ldots + f_h^2) + a_2(f^2_{h+1} + \ldots + f^2_{2h}) + \ldots = H_2$$

$$(4) = a_1(f_1^3 + \ldots + f_h^3) + a_2(f^3_{h+1} + \ldots + f^3_{2h}) + \ldots = H_3$$

. . . . . .

$$(t) = a_1(f_1^t + \ldots + f_h^t) + a_2(f^t_{h+1} + \ldots + f^t_{2h}) + \ldots = H_t$$

Se la funzione $f(a_1, a_2 \ldots a_r)$ è invariabile rispetto ad alcune radici, il cui numero sia s, le permutazioni $1.2.3 \ldots s$ di quelle nei posti da esse occupati attualmente non cambierà il valore della medesima, cosicchè la equazione trasformata (x) avrà $1.2 \ldots s$ radici eguali ad $f_1 = H$. Sia $1.2 \ldots s = p$, si formi il fattore $(y - H)^p$ e per esso divisa la medesima equazione (x) ne venga il quoto

$$(y) \quad y^t + C_1 y^{t-1} + C_2 y^{t-2} \ldots + C_{t-1} y + C_t = 0$$

Alle equazioni (2) (3)... si unisca

$$(1) = a_1 h + a_2 h \ldots + a_m h = -hA_1 \quad (\S.\ 9.)$$

quindi si formi il polinomio

$$(z)\quad (1)\,C_t + (2)C_{t-1} + (3)C_{t-2} + \ldots\ldots + (t) =$$
$$= -hA_1C_t + C_{t-1}H_1 + C_{t-2}H_2 + \ldots + H_t\,;$$

Considerata qualunque funzione f_i che entra in esso, raccolti tutti i termini del primo membro che la contengono, si ottiene

$$C_t + C_{t-1}f_i + C_{t-2}f_i^2 + \ldots + C_1 f_i^{t-1} + f_i^t$$

Se questa f_i è una delle $f_1 = f_2 = \ldots\ldots = H$ il polinomio si riduce a quantità di noto valore

$$C_t + C_{t-1}H + C_{t-2}H^2 + \ldots\ldots + H^t = K$$

perchè H non è radice della equazione (y): ma non essendo $f_i = H$ ne verrà

$$C_t + C_{t-1}f_i + C_{t-2}f_i^2 \ldots\ldots + f_i^t = 0$$

e quella equazione (z) fornisce

$$pKa_1 = -hA_1C_t + C_{t-1}H_1 + C_{t-2}H_2 \ldots + H_t$$

quindi l' incognita a_1. In una maniera analoga si conseguiranno tutte quelle radici le quali esistono nella funzione $f_1(a_1, a_2 \ldots\ldots a_r) = H$ talmentechè le loro permutazioni alterano la funzione medesima.

106. Quelle radici le quali si trovano nella funzione $f_1(a_1, a_2 \ldots a_r)$ unicamente fra loro combinate (§. 59) non si possono ottenere altrimenti che per mezzo di una equazione la quale tutte le comprenda nel medesimo tempo. Siano $a_1, a_2 \ldots a_s$ quelle radici; se ne formi qualunque funzione algebraica invariabile, che rappresento con $\Delta_1(a_1, a_2 \ldots a_s)$. Supposte $f_1 = f_2 \ldots = f_p = H$ le quantità che derivano da f_1 permutando fra loro le radici invariabili, si faccia il prodotto

$$(f_1 + f_2 \ldots + f_p)\,\Delta_1(a_1, a_2 \ldots a_s)$$

poi tutte le quantità formate nello stesso modo colle radici $a_1, a_2 \ldots a_m$; la somma delle medesime, perchè invariabilmente composta con quelle radici, si potrà esprimere per mezzo dei coefficienti della equazione proposta. Sia

$$(2)' = (f_1 + f_2 \ldots + f_p)\,\Delta_1 + (f_{p+1} \ldots + f_{2p})\,\Delta_2 + \ldots = H'_1$$

e surrogando ad $f_1, f_2 \ldots$ i loro quadrati, i cubi.... fino alle potenze dell' ordine t, suppongo

$$(3)' = (f_1^2 + \ldots + f_p^2)\,\Delta_1 + (f^2_{p+1} + \ldots + f^2_{2p})\,\Delta_2 + \ldots + = H'_2$$
$$(4)' = (f_1^3 + \ldots + f_p^3)\,\Delta_1 + (f^3_{p+1} + \ldots + f^3_{2p})\,\Delta_2 + \ldots = H'_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(t)'\quad (f_1^t + \ldots + f_p^t)\,\Delta_1 + (f^t_{p+1} + \ldots + f^t_{2p})\,\Delta_2 + \ldots = H'_t$$

aggiungo a questa la equazione

$$(1)\qquad = \qquad p\Delta_1 + p\Delta_2 + \ldots\ldots = H'_0$$

quindi operando su queste equazioni $(1)'\,(2)' \ldots (t)'$ come nel paragrafo antecedente sulle (1), (2)..., per le ragioni ivi addotte si avrà

$$pK.\Delta_1 = H_0C_t + H'_1C_{t-1} + H'_2C_{t-2} \ldots + H'_t$$

la quale fornisce il valore di Δ_1. Ma questa quantità Δ_1 può essere la somma delle radici $a_1, a_2 \ldots a_s$, ovvero le somme de' loro prodotti due a due, tre a tre..... dunque col mezzo indicato raggiungeremo i valori di tutte queste quantità e quindi i coefficienti della equazione le cui radici sono appunto $a_1, a_2, \ldots a_s$.

107. Superiormente (§. 93.) abbiamo asserito che conoscendo il prodotto di più radici di una equazione $E(x) = 0$ si possono determinare la somma delle medesime, quelle dei prodotti due a due,

tre a tre..... Sebbene ciò facilmente si deduca delle cose osservate, pure lo verremo dichiarando per meglio addestrarci in questo genere di speculazioni.

Dato $a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_r = H$ si voglia trovare per esempio $a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_r$? Rappresento con (x) (§. 105.) la equazione che ha per radici i prodotti ad r ad r di tutte le $a_1, a_2, \ldots\ldots a_m$, quindi formo $(a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_r) a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_r$, e tutte le quantità analoghe mediante le radici nominate. La somma invariabile di quelle funzioni sia

$$(2) = (a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_r) a_1 a_2 \ldots\ldots a_r + \ldots\ldots = H_1$$

Si sostituiscano ai prodotti $a_1 a_2 \ldots a_r$, ecc. i loro quadrati, i cubi,.... fino alle potenze $n-1$, e siano

$$(3) = (a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_r)(a_1 a_2 \ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots = H_2$$

$$(4) = (a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_r)(a_1 a_2 \ldots\ldots)^3 + \ldots\ldots = H_3$$

. . . . . .

$$(n) = (a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_r)(a_1 a_2 \ldots\ldots)^{n-1} + \ldots = H_{n-1}$$

cui aggiungo

$$(1)\ (a_1 + a_2 \ldots\ldots + a^r) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= H_0 = -\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r} A_1 \ (\S.59)$$

ottenuta ponendo in (2) l'unità in luogo dei prodotti $a_1 a_2 \ldots\ldots a_r$, ecc. Divisa la equazione (x) per il proprio fattore lineare $y - a_1 a_2 \ldots\ldots a_r = y - H$ ed indicatone il quoziente con

Intorno al calcolo di queste funzioni (1)(2)..... (n) può vedersi l'Articolo V. delle nostre Ricerche sulle equazioni.

$$(\alpha)\quad y^{n-1} + C_1 y^{n-2} + C_2 y^{n-3} \ldots\ldots + C_{n-3} y^2 + C_{n-2} y + C_{n-1} = 0$$

si formi la equazione

$$(1)\quad C_{n-1} + (2) C_{n-2} + (3) C_{n-3} \ldots\ldots + (n) =$$

$$(6)\quad = H_0 C_{n-1} + H_1 C_{n-2} + H_2 C_{n-3} \ldots\ldots + H_{n-1}$$

Sia f_i il prodotto di r radici $a_1, a_2 \ldots\ldots a_m$, e raccolti nella equazione (6) i termini moltiplicati per f_i si avrà

$$f_i^{n-1} + C_1 f_i^{n-2} + C_2 f_i^{n-3} + \ldots\ldots + C_{n-1} = 0$$

purchè non sia $f_i = H$. Gli altri termini in cui esiste $a_1 a_2 \ldots\ldots a_r = H$, raccolti, forniscono il polinomio

$$H_{n-1} + C_1 H_{n-2} + \ldots\ldots + C_{n-1} = K$$

e quella equazione (6) ci dà

$$(a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_r) K = H_0 C_{n-1} + H_1 C_{n-2} \ldots\ldots + H_{n-1}$$

cioè il valore della somma $a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_r$.

108. Non entro a discutere i casi in cui la equazione $f(a_1, a_2, \ldots\ldots a_r) = H$ sia irrazionale, consigliando al lettore lo studio delle memorie sotto indicate (1).

Servirà di utile esercizio la soluzione del seguente problema geometrico considerato dal Lagrange. »Condurre per il vertice di un quadrato » una retta, di cui la parte compresa fra i » prolungamenti dei lati opposti a quell' angolo » abbia una data lunghezza«. Assunto per inco-

(1) Lagrange (Acad. Berol. 11770. e 71.) = Ruffini Teoria delle equazioni, ed una Memoria Della soluzione delle equazioni algeb. determinate particolari di grado superiore al quarto.

gnito, per esempio, uno di quei lati esteso fino all' incontro della retta applicata, si ottiene una equazione del quarto grado, e siccome supposta adattata la retta, quindi fatta una inversione fra i due lati prolungati si ottiene una nuova posizione della medesima, si scorge il significato e la relazione di due radici, la quale offre un esempio geometrico del problema in questione.

Altro problema si legga nell' aritmetica universale di Newton commentata dal Castilioni (1) e sarà pure utile esercizio il desumere dalle dottrine esposte in questo articolo le regole per la ricerca delle radici dotate di proprietà particolari, di cui abbiamo parlato antecedentemente.

Equazioni di Abel e di Libri (2).

Ho riservato a questo luogo l' esposizione dei memorabili ritrovamenti del celebre Profess. Gauss intorno la risoluzione delle equazioni binomie, stimando utile agli studiosi il conoscere di quanto avanzasse la dottrina per opera di due grandi ingegni, Abel di Norveggia, che nell' età di sedici anni gareggiò coi primi geometri, e l' illustre Sig. Conte Libri di Firenze.

109. La equazione $E(x)=0$ che non ammette

(1) Tomo primo, pag. 150.

(2) Se le dottrine esposte di questo articolo giungono difficili ai giovani studiosi, basta indicar loro la risoluzione delle equazioni binomie, come trovasi esposta nel §. 117.

divisori razionali venga soddisfatta da una radice a e da una funzione $\varphi_1(a)$ algebraica razionale intera di a. Saranno perciò

$$E(a)=0\ ,\ E(\varphi_1(a))=0$$

cioè le equazioni $E(x)=0$, $E(\varphi_1(x))=0$ avranno la radice $x=a$ comune. Ma siccome $E(x)=0$, $E(\varphi_1(x))=0$ non ammettono, per ipotesi, divisore comune, ogni radice della prima equazione soddisferà la seconda e quindi sarà $E(\varphi_1(\varphi_1(a_1)))=0$ cioè rinnovata sopra $\varphi_1(a)$ la operazione colla quale questa quantità si è derivata da a, si avrà un risultato $\varphi_1(\varphi_1(a))$, che indicherò con $\varphi_2(a)$, il quale rende $E(\varphi_2(a))=0$, cioè $\varphi_2(a)$ sarà radice di $E(x)=0$. Col discorso fatto di sopra proveremo essere $E(\varphi_2(\varphi_1(a)))=0$, cosicchè ripetuta sopra $\varphi_1(a)$ la operazione φ_1 due volte, il risultato che chiamerò $\varphi_3(a)$ renderà $E(\varphi_3(a))=0$, epperò $\varphi_3(a)$ sarà radice di $E(x)=0$. Dunque tutte le quantità (7) a_1, $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$, $\varphi_3(a)$, $\varphi_4(a)$..... saranno radici della equazione $E(x)=0$.

110. Ma perchè il grado della equazione è limitato alcune di quelle funzioni (7) saranno eguali fra loro. Fingiamo $\varphi_{r+n}(a)=\varphi_r(a)$; ossia $\varphi_n(\varphi_r(a))-\varphi_r(a)=0$; la equazione algebrica $\varphi_n(x)-x=0$ sarà soddisfatta da $x=\varphi_r(a)$, la quale radice avrà di comune con $E(x)=0$; dunque per quanto si è detto (§. 109.) tutte le radici a, φ_1..... renderanno $x-\varphi_n(x)=0$, sarà $\varphi_n(a)=a$ e ponendovi $x=\varphi_1$, φ_2... ne verranno $\varphi_n(a)=a$, $\varphi_{n+1}=\varphi_1$, $\varphi_{n+2}=\varphi_2$..... in generale $\varphi_{rn+s}=\varphi_s$ essendo r, s interi $s<n$.. Dunque

(1) $\varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \varphi_3(a) \ldots \varphi_n(a) = a$

saranno tante radici, che supporremo tutte disuguali fra loro.

111. Se $n=m$ la equazione $E(x)=0$ non avrà altre radici, ma essendo $n<m$ indicata con a_2 una radice differente dalle (1) dimostreremo che

(2) $\varphi_1(a_2),\ \varphi_2(a_2) \ldots\ldots \varphi_n(a_2)=a_2$

renderanno $E(x)=0$. Se $m>2n$ esisterà una terza serie di radici

(3) $\varphi_1(a_3),\ \varphi_2(a_3) \ldots\ldots \varphi_n(a_3) = a_3$

. . . . . .

Indicati con r, $r+s$ due interi entrambi minori di n vedremo facilmente non poter essere, per esempio,

$\varphi_{r+s}(a_2) = \varphi_r(a_2)$ ossia $\varphi_s(\varphi_r(a_2)) - \varphi_r(a_2) = 0$

altrimenti sussistendo la equazione $\varphi_s(x) - x = 0$ per $x=a_1$ darebbe $\varphi_s(a_1) = a_1$; il che è contrario a quanto abbiamo supposto.

Nè potrà essere, per esempio, $\varphi_r(a_2)=\varphi_s(a_1)$ altrimenti ne verrebbe $\varphi_{n-r}\varphi_r(a_2) = \varphi_n(a_2) = a_2 = \varphi_{n-r+s}(a_1)$, cioè la radice a_2 sarebbe compresa nel primo periodo (1).

Dunque sarà m un multiplo di n e supposto $m=np$, troveremo le radici di $E(x)=0$ dividersi in tanti gruppi (1), (2), (3) . . . . (p) essendo

(p) $\varphi_1(a_p),\ \varphi_2(a_p) \ldots \varphi_n(a_p) = a_p$

112. Se tutte le radici di $E(x)=0$ sono fornite dal solo periodo (1) $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \ldots\ldots \varphi_m = a$ quella equazione si risolve algebricamente. Infatti chiamata α una radice primitiva della equazione $\gamma^m - 1 = 0$ e formata la quantità

(γ) $(a+\alpha\varphi_1+\alpha^2\varphi_2+\alpha^3\varphi_3 \ldots + \alpha^{m-r}\varphi_{m-r} \ldots + \alpha^{m-1}\varphi_{m-1})^m$

se porremo in essa una radice qualunque $\varphi_r(a_1)$ al posto di a_1, per cui si dovrà cambiare φ_1 in φ_{r+1}, φ_2 in φ_{r+2}, φ_{m-r} in $\varphi_{m-r}(\varphi_r)=\varphi_m=a$, φ_{m-r+1} in φ_1 ecc, dalla (γ) deriverà la seguente

$$(\varphi_r+\alpha\varphi_{r+1}+\alpha^2\varphi_{r+2} \ldots \alpha^{m-r-1}\varphi_{m-1}+\alpha^{m-r}a_1+ \alpha^{m-r+1}\varphi_1 \ldots + \alpha^{m-1}\varphi_{r-1})^m =$$

$$=\{\alpha^{m-r}(a_1+\alpha\varphi_1+\ldots+\alpha^{r-1}\varphi_{r-1}+\alpha^r\varphi_r \ldots + \alpha^{m-1}\varphi_{m-1})\}^m$$

la quale, per essere $\alpha^{m(m-r)}=1$, trovasi identica colla prima. Dunque la funzione (γ) invariabile rispetto alle radici (1) si potrà esprimere mediante i coefficienti della equazione $E(x)=0$. Si rappresenti il suo valore con P_1, sia cioè

$$a+\alpha\varphi_1+\alpha^2\varphi_2 \ldots + \alpha^r\varphi_r \ldots + \alpha^{m-1}\varphi_{m-1} = \sqrt[m]{P_1}$$

cambiata α in α^2, in $\alpha^3 \ldots \alpha^m = 1$, e supposte

$$a + \alpha^2\varphi_1 + \alpha^4\varphi_2 \ldots + \alpha^{2r}\varphi_r \ldots = \sqrt[m]{P_2}$$

$$a + \alpha^3\varphi_1 + \alpha^6\varphi_2 \ldots + \alpha^{3r}\varphi_r \ldots = \sqrt[m]{P_3}$$

. . . . . .

$$a + \varphi_1 + \varphi_2 \ldots + \varphi_r \ldots = -A_1 \quad (\S.\ 9)$$

siccome (§§., 9. 76) $1+\alpha^r+\alpha^{2r} \ldots + \alpha^{(m-r)r} = 0$ sommate quelle equazioni, caveremo

$$a = \frac{1}{m}\left\{-A_1+\sqrt[m]{P_1}+\sqrt[m]{P_2} \ldots + \sqrt[m]{P_i} + \ldots + \sqrt[m]{P_{m-1}}\right\}$$

e quindi tutte le altre radici.

113. E' da notare che qualunque radicale $\sqrt[m]{P_i}$ si esprime razionalmente per mezzo di $\sqrt[m]{P_1}$, giacchè nel prodotto

$$(a+\alpha\varphi_1+\alpha^2\varphi_2+\ldots)^{m-i} \cdot (a_1+\alpha^i\varphi_1+\alpha^{2i}\varphi_2 \ldots)$$

cambiato a in $\varphi_r(a)$ si cava, come nel §. 112. $\{\alpha^{m-r}(a_1+\alpha\varphi_1+\alpha^2\varphi_2\ldots)\}^{m-i}\{\alpha^{i(m-r)}(a_1+\alpha^i\varphi_1+\alpha^{2i}\varphi_2\ldots)\}$ identicamente eguale al primo da che $\alpha^{(m-r)(m-i)}\,.\,\alpha^{(m-r)i}=\alpha^{m(m-r)}=1$: quel prodotto potrà esprimersi razionalmente per mezzo dei coefficienti della equazione proposta ed indicato il valore con Q_i avremo

$$(\sqrt[m]{P_1})^{m-i}\,.\,\sqrt[m]{P_i}=Q_i,\ \text{quindi}\ \sqrt[m]{P_i}=\frac{Q_i\sqrt[m]{P_1{}^i}}{P_1}$$

e finalmente

$$(\delta)\quad a_1=\frac{1}{m}\Big\{-A_1+\sqrt[m]{P_1}+\frac{Q_2\sqrt[m]{P_1{}^2}}{P_1}+\ldots+\frac{Q_i\sqrt[m]{P_1{}^i}}{P_1}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{Q_{m-1}\sqrt[m]{P_1{}^{m-1}}}{P_1}\Big\}$$

114. Nel caso ora completato cade la equazione binomia $x^{m+1}-1=0$ allorchè $m+1$ è numero primo (§. 78). Sia α una radice primitiva di questa equazione e sarà dimostrato a suo luogo potersi trovare un numero intero h tale che le potenze h, h^2, $h^3\ldots h^{m+1}$ forniscano tutti i residui $1, 2, 3\ldots m+1$, dopo aver sottrato da ciascuna il più gran multiplo di $m+1$ in essa contenuto. Le radici della equazione $x^{m+1}-1=0$ potranno quindi esprimersi per α^h, α^{h^2}, $\alpha^{h^3}\ldots$ nella qual serie la operazione φ è la elevazione a potenza dell' ordine h. Dunque applicandovi la formola (δ) del paragrafo antecedente, si risolverà la equazione $x^{m+1}-1=0$ per mezzo di $x^m-1=0$ di grado minore.

115. Fingiamo (§. 111.) che le radici di una equazione $E(x)=0$ vengano rappresentate dai periodi (1), (2).... (p): sia $F_1(a_1, \varphi_1, \varphi_2\ldots\varphi_{n-1})$ qualunque funzione algebraica invariabile delle radici comprese nel periodo (1), ed F_2, F_3.... F_p le quantità che si desumono da quella cambiando a_1 in a_2, in a_3..... in a_p. Egli è manifesto che le F_1, F_2.... saranno radici di una equazione trasformata, la quale potremo ottenere per mezzo della $E(x)=0$, e rappresento con

$$(\varepsilon)\qquad y^p+B_1y^{p-1}+B_2y^{p-2}\ldots+B_p=0$$

Fingasi risoluta questa equazione e desunto da essa, per esempio, il valore di F_1: per mezzo di questa radice (§. 106.) noi potremo conseguire qualunque funzione simmetrica delle quantità a_1, φ_1, $\varphi_2\ldots$ e però anche la equazione di cui queste sono le radici. Così mediante i valori F_2, F_3.... otterremo altrettante equazioni, le radici delle quali saranno rispettivamente quelle componenti i periodi (2), (3).... (p); e sarà risoluta la $E(x)=0$ per mezzo della (ε) di grado p e di altre equazioni ciascuna del grado n.

116. Essendo le radici di una equazione $E(x)=0$ tutte rappresentate dalla serie (1) (§. 112.) ed il grado $m=pn$ potranno quelle radici dividersi nei gruppi

$$\begin{array}{l} a_1,\ \varphi_n(a_1),\ \varphi_{2n}(a_1).\ \ldots\ \varphi_{(p-1)n} \\ \varphi_1,\ \varphi_{n+1},\ \varphi_{2n+1},\ \ldots\ \varphi_{(p-1)n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1},\ \varphi_{2n-1},\ \varphi_{3n-1},\ \ldots\ \varphi_{np-1} \end{array}$$

e la equazione $E(x)=0$ dipenderà da una equazione (ε) del grado p e da p equazioni del grado n, come si è dimostrato nel paragrafo antecedente. In fatti considerato uno qualunque di quei periodi $\varphi_s, \varphi_{n+s}, \varphi_{2n+s} \ldots\ldots \varphi_{(p-r)n+s}, \ldots\ldots \varphi_{(p-1)n+s}$ cambiando, per esempio, φ_s in φ_{rn+s} si riprodurrà lo stesso periodo cioè

$$\varphi_{rn+s}, \varphi_{(r+1)n+s}, \varphi_{(r+2)n+s}, \ldots\ldots \varphi_{pn+s}=\varphi_s, \ldots\ldots \varphi_{(r-1)n+s}$$

Supposto inoltre $n=p_1 n_1$ ogni equazione del grado n potrà pure ridursi a dipendere da una equazione del grado p_1 e da altre p_1 equazioni ciascuna del grado n_1: e quando n_1 non sia numero primo si potrà ripetere la stessa decomposizione.

117. »Essendo $E(x)=\dfrac{x^{m+1}-1}{x-1}$ ed $m=2^r$ la » risoluzione della equazione $E(x)=0$ dipenderà » dalla estrazione di r radici quadrate: Teorema celebre dovuto al Sig. Gauss.

Si voglia risolvere $x^5-1=0$. Siccome (§. 114) sottratto da ciascuna potenza $1, 2, 2^2=4, 2^3=8$, il maggior multiplo di 5 in essa contenuto, i residui sono $1, 2, 4, 3$ così indicata con a una radice primitiva di quella equazione le potenze a, a^2, a^{2^2}, a^{2^3} ne offriranno tutte le radici. Dividiamole perciò nei gruppi

$$a, a^{2^2}$$
$$a^2, a^{2^3}$$

e supposta per es. (§. 115) $F_1(a_1, \varphi_1 \ldots) = a + a^4$, sarà $F_2 = a^2 + a^{2^3} = a^2 + a^3$

avremo $p=2$, $-B_1=F_1+F_2=a+a^2+a^3+a^4=-1$

$B_2=F_1F_2=(a+a^4)(a^2+a^3)=a+a^2+a^3+a^4=-1$, poichè $a^5=1$, e la equazione (ε) sarà

$$y^2+y-1=0.$$

Siccome poi $a\, a^{2^2}=1$, $a^2 . a^{2^3}=1$, ne verranno le due equazioni

$$u^2-F_1u+1=0, \quad z^2-F_2z+1=0$$

per le quali conseguiremo le radici cercate.

Fingasi per secondo esempio $E(x)=\dfrac{x^{17}-1}{x-1}$

Formato col numero 3 la serie geometrica

$$1, 3, 3^2, 3^3, \ldots\ldots 3^{15}$$

sottratto da ciascun termine il multiplo maggiore di 17 in esso contenuto, ne deriva la serie di residui

1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6

i quali si riproducono collo stesso ordine da quella serie prolungata più oltre. Dunque chiamata a una radice primitiva della equazione a risolvere tutte quelle radici saranno espresse da

$$a, a^3, a^{3^2}, a^{3^3} \ldots\ldots$$

La operazione φ indica nel caso attuale la elevazione alla terza potenza, e siccome $m=np=2^3.2$ cioè $p=2$, $n=2^3$, quelle radici si dividono in due gruppi:

(ζ) $\quad a, a^{3^2}, a^{3^4}, a^{3^6} \ldots\ldots$

(η) $\quad a^3, a^{3^3}, a^{3^5}, \ldots\ldots\ldots$

cioè $\quad a, a^9, a^{13}, a^{15} \ldots\ldots$

$\quad a^3, a^{10}, a^5, a^{11} \ldots\ldots$

Supposto (§. 115.) $F_1 = a + a^9 + a^{13} \ldots\ldots,$

$F_2 = a^3 + a^{10} + a^5 \ldots$ si hanno $F_1 + F_2 = -1$ $F_1 F_2 = -4$ e la equazione (ε) sarà $y^2 + y - 4 = 0$. Ma nel caso attuale essendo $n = 2^3 = 2 \cdot 2^2$ ogni gruppo (ζ) (η) può dividersi nel modo seguente

(θ) $\quad a, a^{3^4}, a^{3^8}, a^{3^{12}} : a^{3^2}, a^{3^6}, a^{3^{10}}, a^{3^{14}}$

(ι) $\quad a^3, a^{3^5}, a^{3^9}, a^{3^{13}} : a^{3^3}, a^{3^7}, a^{3^{11}}, a^{3^{15}}$

ove l' operazione φ è la elevazione alla potenza 3^4 Potremo quindi formare equazioni aventi per radici, per esempio,

$$F_1' = a + a^{3^4} + a^{3^8} + a^{3^{12}} = a + a^{13} + a^{16} + a^4$$

$$F_2' = a^{3^2} + a^{3^6} + \ldots\ldots = a^9 + a^{15} + a^8 + a^2$$

$$F_3' = a^3 + a^{3^5} + a^{3^9} + a^{3^{12}} = a^3 + a^5 + a^{14} + a^{12}$$

poichè $F_1' + F_2' = F_1$, $F_1' F_2' = -1$ e ne resterà ad intraprendere la ricerca delle radici aggregate in F_1', F_2'.... A tale oggetto rinnoviamo sui gruppi (θ) la divisione seguente

$$a, a^{3^8} : a^{3^4}, a^{3^{12}} : a^{3^2} : a^{3^{10}}; \text{ ecc.}$$

in cui la operazione φ è la elevazione alla potenza 3^8, e supposte

$$a + a^{3^8} = a + a^{16} = F_1'' ; \; a^3 + a^{3^{12}} = a^{13} + a^4 = F_2''$$

caveremo $F_1'' + F_2'' = F_1'$; $F_1' F_2'' = F_3'$. Dunque dalla equazione in y caveremo F_1, F_2: per essi si conseguiranno F_1', F_2'.... quindi F_1'', F_2'', e per essere $a + a^{16} = F_1''$, $a.a^{16} = 1$ troveremo la radice a mediante la estrazione di quattro radici quadrate (*).

(*) Per istruzione maggiore si consultino le opere: Journal von A. L. Crelle 4 und 10 Band. = Disquisitiones arithmeticae Gauss = Théorie des nombres par Legendre V. Partie = Appendice Sect. 2. = L' opera di Lagrange più volte citata.

Risoluzione approssimata delle equazioni numeriche.

118. Avendosi a risolvere una equazione algebraica; determinate le radici che in forza di proprietà particolari possono conseguirsi direttamente (§. 88, 94, 68....) e formate le equazioni speciali ad altre radici (§. 106) quando ciò si possa conseguire coi dati della questione che si considera, si rappresentino tali equazioni con $e_1(x) = 0$, $e_2(x) = 0, \ldots$ Sia $f(x)$ il prodotto dei fattori lineari corrispondenti alle radici di noto valore, e diviso il polinomio $E(x)$ per $f(x) \cdot e_1(x) \cdot e_2(x) \ldots$ la equazione di quoto $Q(x) = 0$ avrà per radici tutte quelle che non sono inchiuse nelle

(λ) $\quad e_1(x) = 0$, $e_2(x) = 0, \ldots f(x) = 0$.

La risoluzione della proposta $E(x) = 0$ dipenderà dalle (λ) e da $Q(x) = 0$, ognuna delle quali ascende a grado minore della equazione primitiva.

Le radici di quelle equazioni essendo incommensurabili i valori finiti delle medesime, quando si potessero conseguire, sarebbero inviluppati da radicali, o da funzioni trascendenti, dalle quali dovrebbero svolgersi mediante i calcoli di approssimazione. Quindi è che i geometri rivolsero il loro studio a desumere direttamente dalle equazioni i valori approssimati delle proprie radici, il che noi verremo esponendo nei paragrafi seguenti.

119. La equazione numerica a risolvere per approssimazione sia $E(x) = 0$; e per riconoscere

da prima se la medesima ammetta radici reali, si formino (§. 51) i residui

$$(\mu) \ldots\ldots E_3(x)\,,\ E_2(x)\,,\ E_1(x),\ E(x)$$

e considerato il primo termine di ciascuno, quello cioè che contiene la potenza maggiore della x, si supponga attribuito ad x un valore negativo, si scrivano di seguito in una medesima linea i segni di quei primi termini: in una seconda linea si scrivano i segni dei termini di quei residui (μ) i quali non contengono la x, finalmente in una terza riga si pongano i segni dei coefficienti del primo termine di ciascun residuo. Il numero delle variazioni di segno che offre la seconda serie più della prima indicherà quante radici negative ammette la equazione proposta, e tante saranno le positive quante variazioni di segno si trovano nella terza serie più che nella seconda (§. 52).

120. Accertati che $E(x)=0$ ammette radici positive si trovi un numero h tale che attribuito ad x qualunque valore non $<h$ il polinomio $E(x)$ fornisca un risultamento positivo (§. 12), per cui nessuna radice della equazione $E(x)=0$ potrà superare il numero h. Giova che h si avvicini quant'è possibile alla radice più grande, ma non vi hanno norme sicure. Qualche volta possiamo prendere fra i numeri interi 1, 2; 3,.... il primo che rende tutte positive le derivate $E(h)$, $E^{(1)}(h)$, $E^{(2)}(h)$, $E^{(3)}(h)$..... mentre la equazione

$$E(h) + yE_1(h) + y^2E_2(h) + \ldots\ldots\ldots = 0 \quad (\S.\ 69)$$

non ammettendo radici positive (§. 45) nessuna

radice della equazione $E(x)=0$ potrà superare quel numero h. Altra volta si conseguirà l'intento considerando il polinomio formato dai termini positivi di $E(x)$ che si succedono incominciando dal primo in avanti, insieme a tutti i termini negativi che tengono dietro a quelli; quindi il polinomio dei termini positivi che vengono dipoi e dei negativi seguenti, e così successivamente. Si cercheranno i numeri analoghi ad h per ciascuno dei polinomj suddetti, ed il più grande fra essi avrà la proprietà che supposta x non minore di esso, $E(x)$ sarà necessariamente positivo (1).

Preso un numero h_1 fra 0 ed h si sostituisca nei residui (μ), e quando dalla serie che corrisponde ad $x=0$ passando a quella ottenuta ponendo $x=h_1$ si abbia qualche perdita di variazioni si prenderà un terzo numero h_2 fra 0 ed h_1 si sostituirà in que' residui $x=h_2$ e si ripeterà tale operazione, finchè si ottengano due numeri p, q i quali sostituiti nella serie (μ) offrano una sola perdita di variazioni, per cui (§. 51) fra que' numeri vi sarà una sola radice della equazione $E(x)=0$.. Preso un numero r fra p, q, e sostituito nella serie (μ) conosceremo se la radice che giace fra quei limiti p, q trovasi compresa fra p, r ovvero fra r, q osservando se la prima copia di numeri, ovvero se la seconda produce la perdita

(1) Chi desidera altre notizie vegga M. Bret. Annales de Gorgonne. T. 6. = Cauchy, Cours d'Analyse = Lagrange. Opera citata.

di variazione. Se è compresa fra r, q prenderemo fra questi un altro numero e rinovata più volte la stessa operazione si otterranno dei numeri sempre meno differenti l'uno dall'altro, fra i quali sarà compresa quella radice: e quanto più prossimi saranno quei limiti fra loro tanto meno ognuno di essi differirà dal vero valore della radice.

122. I numeri intermedj fra o ed h, fra h ed h_1, fra p e q ecc. i quali servono al calcolo approssimato di una radice potranno con vantaggio eleggersi con certa legge; cioè supporsi frazioni della unità di misura o decimali, ovvero di tutt' altra denominazione.

123. Alloraquando fra due numeri esiste una sola radice della equazione $E(x) = 0$ gioverà non poche volte surrogare il metodo del (§. 44) a quello del Sig. Sturm (§. 51) che abbiamo seguito nei paragrafi antecedenti. Eccone le ragioni e l'andamento del calcolo.

Considero un polinomio algebraico

$$F(p)=B_0p^n+B_1p^{n-1}+B_2p^{n-2}+B_3p^{n-3}+B_4p^{n-4}+\ldots\ldots$$

raccolto p^{n-1} comune ai primi due termini si ottiene $F(p)=(B_0p+B_1)p^{n-1}+B_2p^{n-2}+\ldots\ldots$ raccolto p^{n-2} nei primi tre termini si ha

$$F(p) = ((B_0p + B_1)p + B_2)p^{n-2} + B_3p^{n-3}\ldots\ldots$$

Se si raccoglie p^{n-3}, e ne' risultati successivi p^{n-4}, $p^{n-5}\ldots\ldots$ si ottiene

$$F(p)=(((\ldots(((B_0p+B_1)p+B_2)p+B_3)p+B_4)p+B_5\ldots\ldots$$

Si scrivano in una linea i coeficienti

(1) $B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4\ldots$

(2) $B_0,\ B_0p+B_1,\ (B_0p+B_1)p+B_2\ldots$

(3) $B_0,\ 2B_0p+B_1,\ 3B_0p^2+2B_1p+B_2$

si ponga B_0 al disotto di B_1, quindi moltiplicato B_0 per p e sommato il prodotto col coeficiente B_1 soprascritto a B_0 si scriva la somma B_0p+B_1 sotto al terzo coeficiente B_2. Si moltiplichi B_0p+B_1 di nuovo per p e si sommi il prodotto col termine superiore B_2. Si scriva il risultato $(B_0p+B_1)p+B_2$ sotto al termine seguente B_3, si moltiplichi per p la quantità sottoposta a B_3 e sommato il prodotto con B_3 si scriva il risultato sotto B_4; si continui quella operazione finchè tutti uno ad uno siano impiegati i coeficenti B_1, B_2, $\ldots\ldots B_m$ ed il risultato finale sarà appunto il polinomio $F(p)$.

124. Considero la derivata prima di $F(p)$ presa per rispetto a p cioè

$$F^{(1)}(p)=nB_0p^{n-1}+(n-1)B_1p^{n-2}+(n-2)B_2p^{n-3}+$$
$$+(n-3)B_3p^{n-4}+\ldots\ldots$$

e la quantità B_0p^{n-1} che trovasi moltiplicata per n si scriva lasciando B_0p^{n-1} nel primo termine, aggiungendo B_0p^{n-1} al secondo, un altro B_0p^{n-1} al termine terzo, uno al quarto, ecc. Così la quantità B_1p^{n-2} che si trova ripetuta $n-1$ volte si scriva lasciando nel secondo termine soltanto B_1p^{n-2} ed aggiungendo B_1p^{n-2} ad ognuno dei termini seguenti. Quindi altrettanto si faccia con

$(n-2)B_2p^{n-3}$, $(n-3)B_3p^{n-4}\ldots\ldots\ldots$, e si avrà

$$F^{(1)}(p)=B_0p^{n-1}+(B_0p+B_1)p^{n-2}+(B_0p^2+B_1p+B_2)p^{n-3}+\ldots$$

onde è manifesto che dalle quantità (2) desumeremo $F^{(1)}(p)$, come dalle (1) se è cavata $F(p)$. Considerando le quantità (3), (4)....$(n+1)$.... ottenute nello stesso modo vedremo derivare da esse $F_2(p)$, $F_3(p)$.... Qualunque coeficiente B_{m-r} occupa il posto $m-r+1$ fra le quantità (1), compare in (2) nel termine $m-r+2$... in $(n+1)$ nel posto $m-r+n+1$ poi in tutti i termini seguenti in (1), (2)..... moltiplicato per 1, p, p^2.... cosicchè l'ultima delle quantità $(n+1)$ contiene $B_{m-r}p^{r-n}$. Il coeficiente di B_{m-r} nella (2) è ovunque l'unità, nell'ultimo termine della (3) è la somma dei coeficienti di B_{m-r} in (2), nell'ultimo della (4) è la somma dei coeficienti nella (3)..... Siccome poi

$$(1+p)^r=1+p+(1+p)p+(1+p)^2p+\ldots+(1+p)^{r-1}p$$

per cui il coeficiente di qualunque potenza p^n nello sviluppo $(1+p)^r$ è la somma dei coeficienti di p^{n-1} negli sviluppi $(1+p)^{r-1}$, $(1+p)^{r-2}$, ... ; così la identità delle operazioni dimostra che l'ultimo termine della serie $(n+1)$ conterrà

$$\frac{r(r-1)+\ldots(r-n+1)}{1.2\ldots n}B_{m-r}p^{r-n},$$ che è appunto il termine generale della funzione $F_n(p)$ (§. 14).

125. Dal paragrafo 18 si raccoglie

$$E(p+\alpha)=E(p)+\alpha E_1(p)+\ldots+\alpha^{r+n}E_{r+n}(p)\ldots+\alpha^m$$

$$E_r(p+\alpha)=E_r(p)+\alpha(E_r)_1+\ldots+\alpha^n(E_r)_n+\ldots\ldots$$

(1) Veggasi = Corso di mat. per la Scuola di Modena T. 5. — Fourier op. cit.

per cui derivato $E(p+\alpha)$ r volte rispetto ad α e diviso il risultato per $1.2\ldots r$ si ottiene

$$\frac{1}{1.2\ldots r}\{r(r-1)\ldots 2.1E_r(p)+\ldots\ldots$$

$$\ldots+(r+n)(r+n-1)\ldots(n+1)\alpha^nE_{r+n}\ldots\ldots\}$$

$$=E_r(p)\ldots+\frac{(r+n)(r+n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots r}\alpha^nE_{r+n}\ldots\ldots$$

ma (§.19) $\frac{1.2\ldots(r+n)}{1.2\ldots r\times 1.2\ldots n}E_{r+n}=\frac{(n+1)\ldots(r+n)}{1.2\ldots r}E_{r+n}=(E_r)_n$

dunque $E_r(p+\alpha)$ eguaglia la derivata di $E(p+\alpha)$ r volte rispetto ad α, divisa per $1.2\ldots r$. Siccome poi $E_r(x)=\frac{E^{(r)}(x)}{1.2\ldots r}$ perciò il valore di $E^{(r)}(x)$ corrispondente ad $x=p+\alpha$ sarà la derivata dell'ordine r di $E(p+\alpha)$ presa rispetto ad α.

126. Se passando dalla prima alla seconda serie

$$\ldots\ldots E_3(p);\ E_2(p),\ E_1,\ E(p)$$

$$\ldots\ldots E_3(q),\ E_2(q),\ E_1,\ E(q)$$

si ha una sola perdita di variazioni, per cui fra p e q esiste una sola radice di $E(x)=0$, preso un numero $p+\alpha$ fra p e q dovremo cercare se quella radice trovasi tra p e $p+\alpha$ o fra $p+\alpha$ e q, ponendo $x=p+\alpha$ nella serie

$$\ldots\ldots E_3(x),\ E_2(x),\ E_1(x),\ E(x)$$

Siccome (§. 18)

$$E(p+\alpha)=E(p)+\alpha E^{(1)}(p)+\frac{\alpha^2}{2}E^{(2)}(p)+\frac{\alpha^3}{2.3}E^{(3)}(p)+\ldots+\alpha^m$$

ed $E^{(1)}(p+\alpha)$, $E^{(2)}(p+\alpha)$.... rappresentando la derivata prima, seconda ecc. di $E(p+\alpha)$ prese rispetto ad α, perciò si determineranno quelle quantità scrivendo di seguito i coefficienti

$$\ldots\ldots \frac{1}{2.3}E^{(3)}(p),\ \frac{1}{2}E^{(2)}(p),\ E^{(1)}(p),\ E(p)$$

ed operando su di essi come abbiamo superiormente indicato (§. 123 124).

127. Ne resta per ultimo a dichiarare un singolare processo di calcolo, noto sotto il nome di approssimazione lineare Neutoniana che noi desumeremo da alcuni lemmi del più grande interesse.

128. Il polinomio $F(x)$ algebraico razionale intero rispetto ad x si annulli ponendo $x=0$, ed i valori che si ottengono dalla derivata prima $F^{(1)}(x)$ sostituendo alla x qualunque numero preso partendo dallo zero fino ad un tale che indico con h, siano per esempio tutti positivi: dico che li stessi valori della x renderanno positiva anche la funzione $F(x)$.

Sia $F(x)=B_0x^n+B_1x^{n-1}\ldots\ldots+B_{n-1}x$,

per cui $F^{(1)}(x)=nB_0x^{n-1}+(n-1)B_1x^{n-2}\ldots+B_{n-1}$

Siccome per ipotesi $F^{(1)}(0)=B_{n-1}>0$ potremo sostituire alla x nella funzione

$$F(x)=x(B_{n-1}+xB_{n-2}+\ldots+B_0x^{n-1})$$

un valore positivo α talmente prossimo allo zero che la quantità fra le parentesi abbia lo stesso segno del primo suo termine (§. 31) e però

avremo $F(\alpha)>0$. Se qualche numero β compreso fra 0 ed h rendesse $F(\beta)<0$ esisterebbe fra α e β almeno una radice della equazione $F(x)=0$ (§. 29) e siccome $x=0$ è pure radice di quella equazione, 0 ed α comprenderebbero una radice della derivata $F^{(1)}(x)=0$ (§. 41) cosicchè essendo $F^{(1)}(0)>0$ vi sarebbe fra i limiti 0 ed h qualche numero atto a rendere $F^{(1)}(x)<0$, il che si oppone a quanto abbiamo supposto: dunque i valori di $F(x)$ ottenuti sostituendo ad x qualunque numero preso da 0 ad h saranno tutti positivi.

129. La funzione $E^{(2)}(p+\omega)$ assume valori diversi allorchè varia la grandezza di ω. Fingiamo che sostituendo a quella quantità un numero preso partendo da 0 ad h sia sempre $E^{(2)}(p+\omega)>0$: il più piccolo valore che ne deriva si chiami m ed il più grande sia M; così che, comunque varii ω fra quei limiti 0 ed h, saranno sempre $E^{(2)}(p+\omega)-m>0$, $M-E^{(2)}(p+\omega)>0$. Siccome $E^{(2)}(p+\omega)$ non è altro che la derivata prima di $E^{(1)}(p+\omega)$ presa rispetto ad ω (§. 125), perciò saranno $(a)E^{(2)}(p+\omega)-m$ la derivata di

$$(a')E^{(1)}(p+\omega)-E^{(1)}p-m\omega;$$

$(b)\ M-E^{(2)}(p+\omega)$ quella di

$$(b')\ M\omega-E^{(1)}p-E^{(1)}(p+\omega)$$

prese entrambe per rispetto ad ω; la quantità (a') si annulla con ω, e la sua derivata (a) è sempre positiva per tutti i valori di ω presi da $\omega=0$ ad $\omega=h$ dunque (§. 128.) per tutti i medesimi valori sarà (a') $E^{(1)}(p+\omega)-E^{(1)}p-m\omega>0$, ed anche (b') $M\omega+E^{(1)}p-E^{(1)}(p+\omega)>0$. Se ora si noti che

$E(p+\omega)-Ep-\omega E^{(1)}p-\frac{\omega^2}{2}m$ ha per derivata rispetto ad ω la espressione (a'), che quest'ultima quantità si annulla ponendo $\omega=0$ e che la derivata (a') è sempre positiva per tutti i valori di ω compresi fra i limiti indicati ne conchiuderemo dover essere $E(p+\omega)-Ep-\omega E^{(1)}p-\frac{\omega^2}{2}m>0$ ed anche

$$\frac{\omega^2}{2}M+\omega E^{(1)}p+Ep-E(p+\omega)>0, \text{ vale a dire}$$

$$E(p+\omega)>Ep+\omega E^{(1)}p+\frac{\omega^2}{2}m,$$

$$E(p+\omega)<Ep+\omega E^{(1)}p+\frac{\omega^2}{2}M$$

e per conseguenza esisterà un numero N maggiore di m e minore di M atto a rendere

$$E(p+\omega)=Ep+\omega E^{(1)}p+\frac{\omega^2}{2}N.$$

Siccome poi la funzione $E^{(2)}(p+\omega)-N$ dà risultamenti di segni opposti quando ad ω si attribuiscono i valori che rendono $E^{(2)}(p+\omega)$ massima o minima; perciò potremo dare ad ω un valore δ compreso fra 0 ed h il quale renda $E^{(2)}(p+\delta)=N$ e quindi sarà

$$(c)\quad E(p+\omega)=Ep+\omega E^{(1)}(p)+\frac{\omega^2}{2}E^{(2)}(p+\delta).$$

130. Supposto che la funzione $E^{(1)}(p+\omega)$ conservi sempre il medesimo segno per tutti i valori di ω presi da $\omega=0$ ad $\omega=h$, dimostreremo con analogo discorso $E(p+\omega)=E(p)+\omega E^{(1)}(p+\lambda)$,

$$E^{(1)}(p+\omega)=E^{(1)}(p)+\omega E^{(2)}(p+\mu)$$

essendo λ, μ numeri compresi fra 0 ed h, i quali generalmente non sapremo determinare.

131. Fra p, q esista una radice a della equazione $E(x)=0$; ma nessuna delle derivate $E^{(1)}(x)=0$, $E^{(2)}(x)=0$; il che potremo conoscere mediante i teoremi dei (§§. 44, 51). Considerando le quantità $E(p)$, $E(q)$; $E^{(1)}(p)$, $E^{(1)}(q)$, siccome i segni di quelle sono opposti ed eguali i segni di queste alcuna delle coppie $E(p)$, $E^{(1)}(p)$; $E(q)$, $E^{(1)}(q)$ offrirà i medesimi segni. Siano di egual segno $E(p)$ ed $E^{(1)}(p)$; sia $p<q$, e la radice $a=p+\omega$: finchè si attribuiranno ad ω dei valori presi partendo da $\omega=0$ ad $\omega=q-p$ la quantità $E^{(1)}(p+\omega)$ conserverà sempre lo stesso segno; e quindi ne verrà

$$(\S.\ 129)\ (d)\quad E(p+\omega)=E_p+\omega E_p^{(1)}+\frac{\omega^2}{2}E^{(2)}(p+\delta)=0.$$

Una radice ω di questa equazione è positiva, i segni dei suoi termini non saranno tutti eguali (§. 45), per cui essendo Ep ed $E^{(2)}(p+\delta)$ dello stesso segno (§. 29) quello di $E^{(1)}p$ sarà opposto. La equazione (d) scritta sotto la forma

$$\left(\omega+\frac{E(p)}{E^{(1)}(p)}\right)+\frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{E^{(2)}(p+\delta)}{E^{(1)}(p)}=0$$

ne apprende che siccome l'ultimo termine è negativo dovrà essere positivo il primo, cioè $\omega>-\frac{E(p)}{E^{(1)}(p)}$ ed $a>p-\frac{E(p)}{E^{(1)}(p)}$: la quantità aggiunta a p è positiva, e però $p-\frac{E(p)}{E^{(1)}(p)}$ sarà più prossimo alla radice a di quello che lo fosse la quantità p medesima. Dunque i termini della serie

(e) $p;\ p-\frac{E(p)}{E^{(1)}(p)}=p_1;\ p_1-\frac{E(p_1)}{E^{(1)}(p_1)}=p_2;$

$p_2-\frac{E(p_2)}{E^{(1)}(p_2)}\ldots\ldots$ si avvicineranno senza limite alla radice a rimanendo sempre ad essa minori.

132. Ritenuto essere $E(p)$, $E^{(2)}(p)$ dotati del medesimo segno si finga $a=q-\theta$. La quantità $E^{(1)}(q-\theta)$ non cambia segno per tutti i valori di θ da o a $q-p$ sarà (§. 130).

$$E(q-\theta)=Eq-\theta E^{(1)}(q-\lambda)=0$$

ed $a=q-\frac{E(q)}{E^{(1)}(q-\lambda)}$. Avremo pure $E^{(1)}(p+\omega)=E^{(1)}p+\omega E^{(2)}(p+\mu)$ (§. 130), e siccome $E^{(1)}(p)$, $E^{(2)}(p+\mu)$ hanno segni opposti (§. 131) nè verrà $E^{(1)}(p+\omega)<E^{(1)}(p)$ fatta astrazione al segno, sarà $E^{(1)}(p)>E^{(1)}(q-\lambda)$ ed $a>q-\frac{E(q)}{E^{(1)}(p)}$. Dunque la radice a trovasi compresa fra i numeri

$$p-\frac{E(p)}{E^{(1)}(p)},\ q-\frac{E(q)}{E^{(1)}(p)}$$

ognuno dei quali si approssima ad a più delle quantità p e q primitive.

133. Siano p_n, p_{n+1} due termini consecutivi della serie (e) ω_n, ω_{n+1} gli errori che si commettono assumendo qual valore della radice a l' uno o l' altro di quei termini; siano cioè

$$a-p_n=\omega_n,\ a-p_{n+1}=\omega_{n+1}$$

siccome $p_{n+1}=p_n-\frac{E(p_n)}{E^{(1)}(p_n)}$ ne verrà

$\omega_{n+1}=\omega_n+\frac{E(p_n)}{E^{(1)}(p_n)}$ per cui supposta

$$E(p_n)+\omega_n E^{(1)}(p_n)+\frac{\omega_n^2}{2}E^{(2)}(p_n+\delta)=0.$$

la equazione analoga alla (d) che corrisponde ad $a=p_n+\omega_n$, ne verrà

$$\omega_{n+1}=-\omega_n^2\cdot\frac{E^{(2)}(p_n+\delta)}{2.E^{(1)}(p_n)}.$$

Sia H il valore più grande di $E^{(2)}(p+\omega)$ da $\omega=0$ ad $\omega=q-p$, ed essendo $E^{(1)}(p_n)<E^{(1)}(p)$, fatta astrazione al segno, ne verrà per ultimo

$\omega_{n+1}<-\frac{H}{2E^{(1)}(p)}\omega_n^2$ cioè gli errori ω_n, ω_{n+1} vanno decrescendo in ragione duplicata.

134. Cambiando x in $-x$ nel polinomio $E(x)$ la equazione $E(-x)=0$ che ne risulta ha per radici positive le negative di $E(x)=0$ (§. 46), per cui mediante la equazione $E(-x)=0$ si troveranno le radici negative di $E(x)=0$ col metodo superiormente dichiarato. Talvolta importa pure assaissimo il conoscere le radici immaginarie, ma siccome la loro forma $a\pm b\sqrt{-1}$ (§. 39) inchiude due incognite, abbisognano due equazioni, e quindi si offre a discutere altra quistione, la quale tratteremo nel capitolo seguente.

Si veggano le opere sopra indicate di Lagrange, Fourier, Legendre, Sig. Cauchy, Eulero = Le nostre Ricerche Artic. 4. pag. 72 = Una Memoria di Ruffini premiata dalla Società Italiana nell' anno 1806.

CAPO QUARTO

Risoluzione di più equazioni algebraiche fra altrettante incognite.

Due metodi essenzialmente differenti conducono alla risoluzione del problema: l'uno che fonda sulla dottrina del massimo comun divisore suole in parte insegnarsi nella matematica pura elementare, è di uso assai spedito in alcuni casi particolari, ma generalmente esige molte cautele per escludere radici estranee che vengono introdotte per natura del metodo; si trova esposto in molte opere e venne anche recentemente con diligenza istudiato (1): l'altro talvolta più prolisso del primo, conduce con metodo uniforme ed elegante a quanto si desidera, per cui merita la preferenza. E perchè nulla per noi si ommetta di ciò che può agevolarne l'uso e renderne chiara la intelligenza incomincieremo a considerare un sistema di equazioni lineari.

135. Si debbano desumere le incognite $x, y, z...t$ dalle equazioni determinate.

$$a_0x + b_0y + c_0z \ldots\ldots\ldots + s_0t = u_0$$
$$(a)\quad a_1x + b_1y + c_1z \ldots\ldots\ldots + s_1t = u_1$$

(1) Veggansi i trattati di algebra elementare dei Signori Bourdon, Lacroix, Garnier. La Théorie du plus grand comm. divis. par M. Lefébure de Fourcy. Paris 1821. Théorie génér. de l'éliminat. par M. Voizot. Paris 1835.

. . . . . .

$$a_rx + b_ry + c_rz \ldots\ldots\ldots + s_rt = u_r$$

A tale oggetto si scrivano di seguito le lettere $a, b, c, \ldots, q, r, s$, da ognuna si sottraggano tutte le seguenti a destra, quindi si faccia il prodotto dei binomj

(b) $(a-b)(a-c)\ldots\ldots(a-s)\times(b-c)(b-d)\ldots\ldots(b-s)\times\ldots\ldots$ $\ldots\ldots\times(q-r)(q-s)\times(r-s)$ il quale sarà l'aggregato di tanti termini della forma (c) $\pm a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots s^\sigma$. In questo prodotto si cambj ovunque l'esponente di ciascuna lettera in un indice al piede della medesima, cosicchè da (c) si desuma

(d) $\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta \ldots\ldots s_\sigma$, e in tutti quei termini (c) nei quali manca alcuna lettera n, supposto esistere n^0, si introduca il fattore n_0. Considerando la funzione desunta dal prodotto (b) nella maniera indicata comprendiamo che prese ad arbitrio due lettere e, per esempio, ed n, e supposte che quelle di esse le quali portano il medesimo indice al piede diventino eguali cioè (e) $e_1 = n_1$, $e_2 = n_2 \ldots\ldots\ldots e_r = n_r$ quella funzione si ridurrà allo zero. Infatti supposto $e = n$ il prodotto (b) si annulla, cioè se quel prodotto eseguito contiene un termine

$\pm a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\xi f^\varphi \ldots\ldots n^\eta \ldots\ldots s^\sigma$ dovrà pure contenere l'altro $\mp a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\eta f^\varphi \ldots n^\xi \ldots s^\sigma$: sostituendo indici agli esponenti da quei termini deriveranno i seguenti $\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta e_\xi \ldots n_\eta \ldots s_\sigma$, $\mp a_\alpha b_\beta c_\gamma e_\eta \ldots n_\xi \ldots s_\sigma$ i quali supponendo $e_\xi = n_\xi$, $e_\eta = n_\eta$ diventano identici, quindi la funzione desunta dal prodotto (b) in forza delle supposizioni (e) si annulla.

136. Immagino quella funzione, e volendo desumere, per esempio, la x dalle equazioni (a) raccolgo in essa funzione i termini moltiplicati per le a diversamente indicate, e rappresentata la funzione risultante col polinomio

$$(f)\quad a_0A_0+a_1A_1+a_2A_2\ldots\ldots\ldots\ldots+A_ra_r$$

moltiplico quelle equazioni (a), incominciando dalla prima in avanti per $A_0, A_1, \ldots . A_r$, quindi sommo le equazioni prodotte. Le incognite $y, z, \ldots t$ spariranno dalla somma, da che i loro coeficienti

$$b_0A_0 + b_1A_1 + \ldots\ldots + b_r A_r$$
$$c_0A_0 + c_1A_1 + \ldots\ldots + c_r A_r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

rappresentano ciò cui si riduce la funzione (f) se si suppongono $a_0=b_0$, $a_1=b_1, \ldots . a_r = b_r$ ovvero

$$a_0=c_0,\ a_1=c_1, \ldots . a_r = c_r \text{ ecc.}$$

e quella somma sarà

$$(g)\quad (a_0A_0+a_1A_1\ldots.+a_rA_r)x=u_0A_0+u_1A_1+\ldots\ldots u_rA_r$$

la quale contiene la sola incognita x cercata, ed analogamente si otterranno i valori di tutte le altre incognite.

137. Se il numero delle equazioni (a) superasse quello delle incognite x, y, z.... quelle equazioni potrebbero essere erronee, giacchè assunte ad arbitrio tante fra esse quante sono le quantità a determinarsi, desunti i loro valori col metodo dell' antecedente (§. 136) per essi dovrebbero venir soddisfatte le equazioni ommesse; il che potrebbe non essere.

Così supposte nelle equazioni (a)

$$u_0 = u_1 = u_2 \ldots\ldots = u_r = 0 \text{ e } t = 1$$

indicato con φ il polinomio (f) le equazioni analoghe a (g), le quali forniscono i valori delle incognite x, y...., nel caso attuale assumono le forme seguenti $x\varphi=0$, $y\varphi=0$, $z\varphi=0$ ecc., le quali saranno fallaci quando non sia $\varphi=0$, cioè

$$(h)\quad a_0A_0 + a_1A_1 + a_2A_2\ldots\ldots + a_rA_r = 0$$

per la quale viene espressa la possibilità delle equazioni

$$a_0x + b_0y\ldots\ldots + s_0 = 0$$
$$a_1x + b_1y\ldots\ldots + s_1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_rx + b_ry\ldots\ldots + s_r = 0 \text{ (1)}$$

138. Ora si rappresentino con

$$(k)\quad A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots\ A_r\ \ldots\ldots\ A_m$$
$$(l)\quad B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots\ldots\ B_r\ \ldots\ldots\ B_n$$

funzioni algebraiche razionali intere per rispetto ad una quantità che indico con y. I gradi delle quantità (k) siano rispettivamente p, $p+1$, $p+2$... $p+r$....$p+m$, quelli delle (l) q, $q+1$, $q+2$....$q+n$ Siano date due equazioni

$$(m)\quad A_0x^m+A_1x^{m-1}\ldots+A_rx^{m-r}\ldots+A_m=E(x)=0$$
$$(n)\quad B_0x^n+B_1x^{n-1}\ldots\ldots\ldots+B_n = F(x) = 0$$

(1) Cramer. Analyse des lignes courbes — Laplace Acad. Roy. des Sciences An. 1772. Part. 2. — Cauchy. Cours d'Analyse — Binet. Journ. Polit. T. IX. Nostre Trasformazioni di alcune funzioni algeb. Pavia 1832.

contenenti le incognite x, y, e supponiamo che si debbano » Trovare quelle coppie di valori, le »quali sostituite nello stesso tempo in luogo delle »incognite rendono soddisfatte l' una e l' altra »equazione. I valori delle incognite in ciascuna coppia si chiameranno, per brevità, *valori corrispondenti.*

Se ne fosse possibile il desumere da quelle equazioni (m) (n) una terza nella quale si trovasse la sola incognita y, *eliminandone* la x, potremmo, coi metodi esposti nel Capo antecedente, determinare tutti i valori di questa incognita, quindi postone uno qualunque in entrambe le equazioni (m) (n) trovare il valore corrispondente della x comune a quelle due equazioni. Vediamo adunque in qual maniera si possa effettuare la *eliminazione.* Indico con $a_1(y)$, $a_2(y)$, $a_3(y)$....$a_n(y)$ le radici della equazione (n), supposta risoluta per rispetto ad x, e sostituite una ad una nel primo membro della equazione (m) considero il prodotto

$$(p) \quad E(a_1) \,.\, E(a_2) \,.\, E(a_3) \,.\,.\,.\,.\,.\, E(a_n)$$

Essendo questa una funzione algebraica razionale intera ed invariabile rispetto alle radici a_1, a_2....a_n si potrà esprimere per mezzo dei coefficienti della equazione (n) (§. 62). Quel prodotto (p) eguagliato a zero ha appunto per radici tutti i valori di y atti a soddisfare le equazioni (m) (n), sarà il risultato della *eliminazione* della incognita x, cioè la *equazione risultante* cercata. A persuadercene considero due valori corrispondenti di x, y che sup-

pongo $x=\alpha$, $y=\beta$: posto $y=\beta$ nella equazione (n) e sciolta rispetto ad x si ottengono le radici

$$a_1(\beta)\,,\ a_2(\beta)\,,\ .\,.\,.\,.\,.\,.\ a_n(\beta)$$

alcuna delle quali dovrà essere eguale ad α: sia $\alpha=a_r(\beta)$, e due valori corrispondenti saranno $y=\beta$ $x=\alpha=a_r(\beta)$. Questi valori rendono $E(a_r)=0$ dunque annullano il prodotto (p), cioè β è radice della equazione $(p)=0$. Reciprocamente ogni valore di y desunto da questa equazione annullerà qualche fattore, cosicchè supposto che $y=\beta$ renda $E(a_r)=0$, $x=a_r(y)$, ed $y=\beta$ soddisferanno anche la (n), epperò l' equazione $(p)=0$ è la vera risultante cercata.

139. Il formare la equazione (p) è generalmente cosa malagevole, onde convien ricorrere ad altro metodo. Noteremo però dapprima a qual grado ascenda quella equazione, potendo tale notizia essere scorta nel giudicare la esattezza del risultamento di altre operazioni. Qualunque termine della equazione (p) è un prodotto di potenze intere positive de' coefficienti (k), (l): il grado di questo termine per rispetto ad y dipende da quello di ciascun coefficiente, cosicchè supponendo che ognuno si riduca alla sola potenza maggiore di y in esso contenuta non cambierà il grado della equazione risultante. Possiamo adunque surrogare alle equazioni (m) (n) le due seguenti

$$(m') \quad \alpha_0 y^p x^m + \alpha_1 y^{p+1} . x^{m-1} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$
$$.\,.\,.\ + \alpha_r y^{p+r} x^{m-r} .\,.\,.\,.\,. + \alpha_m y^{p+m} = 0$$

$$(n') \quad \beta_0 y^q x^n + \beta_1 y^{q+1} . x^{n-1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\ + \beta_n y^{q+n} = 0$$

ove α, β non contengono la y; sarà

$$(p)=y^{np}(\alpha_0 a_1^m+\alpha_1 y a_1^{m-1}\ldots)(\alpha_0 a_2^m+\ldots\alpha_1 y a_2^{m-1}+\ldots)\text{ecc.}$$
$$=y^{np}\{\alpha_0^n(a_1 a_2 a_3\ldots a_n)^m+\ldots\ldots\}$$

un termine qualunque di questo prodotto avrà la forma seguente

$$(q)\ \alpha_{r_1}\alpha_{r_2}\ldots\alpha_{r_n}\times a_1^{m-r_1}.a_2^{m-r_2}.a_3^{m-r_3}\ldots a_n^{m-r_n}y^{r_1+r_2\ldots+r_n}$$

la cui dimensione rispetto alle radici a_1, a_2..... è $mn-r_1-r_2\ldots\ldots-r_n$. Sostituite nella (p) alle sommatorie composte (§. 64) i loro valori espressi pei coefficienti della (n') ordinata, ed indicato con

$$(r)\ \left(\frac{\beta_1 y^{q+1}}{\beta_0 y^q}\right)^{h_1}\left(\frac{\beta_2 y^{q+2}}{\beta_0 y^q}\right)^{h_2}\ldots\ldots\left(\frac{\beta_n y^{q+n}}{\beta_0 y^q}\right)^{h_n}$$

un termine della funzione sommatoria che deriva da (q), comprenderemo dover essere

$$(s)\ h_1+2h_2+3h_3\ldots\ldots+nh_n=mn-r_1-r_2\ldots\ldots-r_n.$$

Diffatti rappresentando (§. 9) $\frac{\beta_1 y^{q+1}}{\beta_0 y^q}, \frac{\beta_2 y^{q+2}}{\beta_0 y^q}\ldots\ldots$ la somma delle radici della equazione (n'), dei loro prodotti due a due, tre a tre, ... sarà $h_1+2h_2+3h_3$ .... la dimensione di (r) rispetto alle radici a_1, a_2.... la quale deve eguagliare quella della sommatoria composta che deriva dai termini analoghi a (q). La somma (r) deve poi moltiplicarsi per $y^{r_1+r_2\ldots+r_n}$, cosicchè la dimensione per rispetto ad y del suo numeratore sarà

$$(q+1)h_1+(q+2)h_2\ldots\ldots+(q+n)h_n+r_1+r_2\ldots\ldots+r_n=$$
$$=q(h_1+h_2\ldots\ldots+h_n)+(h_1+2h_2\ldots\ldots+nh_n+r_1+r_2\ldots\ldots+r_n)$$
$$=q(h_1+h_2\ldots\ldots+h_n)+mn$$: e quella del denominatore sarà $q(h_1+h_2\ldots\ldots+h_n)$. Siccome poi tutti i termini della risultante si trovano affetti dal denominatore $\beta_0 y^q$, per toglierne le frazioni rispetto ad y bisognerà moltiplicare per la potenza più grande del denominatore medesimo: la maggior dimensione delle radici a_1, a_2.... nella equazione (p) si è

$$(a_1 a_2 a_3\ldots\ldots a_n)^m$$

i termini che da essa provengono offriranno il denominatore $\beta_0 y^q$ elevato alla potenza più grande, e siccome $(a_1 a_2\ldots\ldots a_n)^m$ fatta astrazione al segno eguaglia $\left(\frac{\beta_n y^{q+n}}{\beta_0 y^q}\right)^m$, il grado di detta potenza sarà mq. Moltiplicata la risultante per $(\beta_0 y^q)^m$ la dimensione rispetto ad y del termine (q) diverrà $q(h_1+h_2\ldots\ldots+h_n)+mn+mq$ meno quella del denominatore dello stesso termine $q(h_1+\ldots\ldots+h_n)$, ossia $mn+mq$. Essendovi poi nella equazione (p) il fattore y^{np}, la dimensione per rispetto ad y della risultante, cioè il proprio grado sarà $mn+mq+np=(m+p)(n+q)-pq$ (1).

140. Passiamo ormai ad esporre il metodo di eliminazione dovuto a Bezout. Se le equazioni (m), (n) sono di grado diverso supposto $m>n$ cavo dalla seconda $x^n=-\frac{B_1}{B_0}x^{n-1}-\frac{B_2}{B_0}x^{n-2}\ldots$ quindi

(1) Il cel. Sig. Poisson ha dato una dimostrazione assai semplice (Journ. Polytec. Cahier XI.) per il caso di $p=q=0$. Veggansi pure Bezout Théorie génér. des équat. algeb. Paris 1779. Lacroix: Traité du calcul different. et integr. Tom. 3.

$(t)\ x^{n+1} = -\frac{B_1}{B_0}x^n - \frac{B_2}{B_0}x^{n-1} \ldots$: moltiplico di poi i membri di questa equazione per x, pongo nel secondo membro il valore di x^{n+1} fornito dalla equazione medesima ed ottengo x^{n+2} dato per x^n e potenze minori della x: moltiplico di nuovo il risultato per x ed eliminata x^{n+1} mediante la (t) ottengo x^{n+2} dato per x^n e potenze minori. Collo stesso metodo si formeranno i valori di tutte le potenze $x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots x^m$ espressi per x^n, $x^{n-1} \ldots$ cosicchè sostituiti i valori medesimi nella equazione (m) quelle equazioni saranno ridotte entrambe allo stesso grado.

141. Supponiamo adunque che le equazioni a trattare sieno

$$(\mathrm{I})\ A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} \ldots + A_hx^{n-h} \ldots + A_rx^{n-r} + A_{r+1}x^{n-r-1} \ldots + A_n = 0$$

$$(\mathrm{II})\ B_0x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} \ldots + B^hx^{n-h} + B_rx^{n-r} + B_{r+1}x^{n-r-1} \ldots + B_n = 0.$$

Si prenda nella equazione (II) la somma di più termini consecutivi partendo dal primo fino, per esempio, al termine B_rx^{n-r}, e soppressa la potenza x^{n-r} comune, ne verrà il polinomio

$$(u)\ B_0x^r + B_1x^{r-1} + B_2x^{r-2} \ldots + B_r$$

per il quale moltiplicheremo la equazione (I): Desunto analogamente da questa equazione il polinomio

$$(v)\ A_0x^r + A_1x^{r-1} \ldots + A_r$$

si moltiplicherà per esso la equazione (II), quindi

sottratti l' uno dall' altro i prodotti ne caveremo

$$A_0x^r + A_1x^{r-1} \ldots + A_r)(\mathrm{II}) - (B_0x^r + B_1x^{r-1} \ldots + B_r)(\mathrm{I}) = 0$$

Questa equazione ascende al grado $n-1$ rispetto all' incognita x; come si comprende scrivendola nel modo seguente:

$$(A_0x^r + \ldots + A_r)\{(B_0x^r + \ldots + B_r)x^{n-r} + B_{r+1}x^{n-r-1} + \ldots + B_n\}$$
$$-(B_0x^r + \ldots + B_r)\{(A_0x^r + \ldots + A_r)x^{n-r} + A_{r+1}x^{n-r-1} + \ldots + A_n\}$$
$$(x) = (A_0B_{r+1} - B_0A_{r+1})x^{n-1} + \ldots = 0$$

Dunque se i due polinomj moltiplicatori (x) (v) si supporranno da prima i soli primi termini B_0, ed A_0: dipoi i binomj $B_0x + B_1$; $A_0x + A_1$ ecc. cioè in (t) (v) si fingano successivamente

$$r = 0, 1, 2 \ldots \text{ fino ad } n-1$$

ne deriveranno n equazioni analoghe ad (x), ciascuna del grado $n-1$, cosicchè considerate le diverse potenze della x, cioè $x, x^2, x^3 \ldots x^{n-1}$ come altrettante incognite lineari di diverso nome, ed effettuata la eliminazione delle medesime coi metodi appresi nel §. 137 si avrà la risultante cercata. Infatti colle equazioni (I) (II) sussistono tutte le (x) derivate da esse: queste non ponno verificarsi quando non regga la risultante nominata, onde dalle (I) (II) ne segue necessariamente quella equazione risultante. Viceversa sussistendo la risultante hanno luogo tutte le equazioni (x), le quali importano essenzialmente le (I) (II); altrimenti considerate le

$$(A_0x^r \ldots + A_r)(\mathrm{II}) - (B_0x^r \ldots + B_r)(\mathrm{I}) = 0$$

$$(A_0x^{r+1} \ldots + A_rx + A_{r+1})(\mathrm{II}) - (B_0x^{r+1} \ldots + B_rx + B_{r+1})(\mathrm{I}) = 0$$

sottratto dalla seconda il prodotto della prima per x ne verrebbe

$$A_{r+1}(\mathrm{II}) - B_{r+1}(\mathrm{I}) = 0 \text{ ed anche}$$

$$A_h(\mathrm{II}) - B_h(\mathrm{I}) = 0 ,$$

quindi $A_{r+1}B_h - A_hB_{r+1} = 0$, e tutte le altre equazioni simili fra i coefficienti delle due equazioni proposte: il che è assurdo.

142. Applicati alla risultante i noti metodi di risoluzione, conseguiremo tutti i valori dell' incognita y. Ma come se ne otterranno poi i valori della x che a quelli corrispondono? Essendo quei valori di y dati generalmente per approssimazione ne sarà forza usare del metodo seguente. Riprese le equazioni analoghe alla (x), ommessa una ad arbitrio, ed eliminate dalle altre le potenze $x^2, x^3 \ldots x^{n-1}$ (§. 136), si avrà una equazione della forma $x.\varphi(y) + \psi(y) = 0$, essendo φ, ψ funzioni algebraiche razionali della variabile y. In questa sostituiremo ad uno ad uno i valori trovati di y e se ne avranno i corrispondenti della x.

143. Accaderà talvolta che un valore di $y = \beta$ renda $\varphi(\beta) = 0$, $\psi(\beta) = 0$ cosicchè il corrispondente della x si presenterà sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Di ciò è causa l' esservi molti valori della x, i quali insieme ad $y = \beta$ soddisfanno le equazioni (m) (n). Se quei valori sono due soltanto si otterranno ricavando dalle equazioni (x) una

del secondo grado in x; ma se sono tre, quattro.... sarà d' uopo procurarci equazioni in x le quali siano rispettivamente del terzo, del quarto grado ecc. mentre quelle di gradi minori si troveranno identicamente soddisfatte.

144. Se le due equazioni proposte avessero qualche fattore comune contenente la sola x, la sola y, ovvero le x, y insieme bisognerà determinarlo con molta attenzione poichè nel primo e secondo caso i valori dell' incognita che annullano quel fattore lasciano l' altra incognita affatto indeterminata: nel terzo caso quel fattore comune rende la questione indeterminabile, perchè quel fattore eguagliato a zero fornirà infinite coppie di valori per x ed y le quali soddisfanno alle equazioni proposte.

145. Allorchè fossero date molte equazioni fra altrettante incognite combinandole due a due col metodo antecedente potremo eliminarne una e conseguire fra quelle che restano un egual numero di equazioni. Rinovando la stessa operazione ne elimineremo una seconda, poi una terza ecc., e si giungerà per ultimo ad una risultante con

---

Si veggano: Accad. di Berlino. Eulero, anno 1764. Lagrange. ann. 1769. — Bezout Accad. delle Scienze di Parigi anno 1764. — Mem. del prof. Jacobi Giorn. del Sig. Crelle vol. 15. e Vegg. le opere cit. pag. 132. Le nostre Ricerche sulle Equazioni, artic. 2. e 3. — Abel, Annales de Gergonne T. 17.

una incognita sola. Le equazioni analoghe alle (x) fra due incognite, per le quali si sarà raggiunta la risultante, forniranno la espressione lineare dell'ultima incognita eliminata in funzione di quella rimasta nella risultante. Il penultimo sistema di equazioni analoghe alle (x) che involgerà tre incognite ci condurrà a conseguire il valore della penultima eliminata espresso per le altre; e così ascendendo alle equazioni antecedenti si otterrà la espressione lineare di ciascuna. Sostituendo poi una radice della risultante nella espressione della penultima incognita, quindi i due valori ottenuti nella formola che dà la terz' ultima e così ascendendo si troverà quel gruppo di *valori corrispondenti* di tutte le incognite i quali soddisfanno contemporaneamente alle proposte equazioni.

146. I diversi processi di calcolo che abbiamo indicati possono però introdurre radici estranee alle equazioni date complicandone inutilmente i calcoli, onde gioverà talvolta pervenire alla risultante combinando altrimenti le equazioni date, e sopprimere le radici non comuni alle risultanti diversamente ottenute (1).

147. A compimento di questo capitolo facciamo applicazione delle regole esposte alla ricerca

(1) Il cel. Ruffini nella Teoria delle equazioni dichiara che il metodo delle eliminazioni successive conduce con certezza alla vera equazione risultante, ma buone ragioni inducono a dubitarne.

delle radici immaginarie di una equazione. Accertati (§. 52) che $E(x)=0$ ammetta radici della forma $a\pm b\sqrt{-1}$ (§. 38) nella equazione

$$E(y+a)=E(a)+yE_1(a)+y^2E_2(a)+\ldots+y^rE_r(a)+\ldots+y^m$$

si ponga $y=b\sqrt{-1}$ ed avvertendo che

$$(b\sqrt{-1})^{2n}=(-1)^nb^{2n} \qquad (b\sqrt{-1})^{2n+1}=(-1)^nb^{2n+1}\sqrt{-1}$$

si avrà

$$(y)\quad E(a+b\sqrt{-1})=\{E(a)-b^2E_2(a)+b^4E_4(a)-\ldots\}$$
$$+\{E_1(a)-b^2E_3(a)+b^4E_5(a)-\ldots\}b\sqrt{-1}$$

Se $a+b\sqrt{-1}$ fosse radice dell'equazione $E(x)=0$ la quantità (y) sarebbe nulla identicamente; cioè avressimo

$$E(a)-b^2E_2(a)+b^4E_4(a)-b^6E_6(a)+\ldots=0$$
$$E_1(a)-b^2E_3(a)+b^4E_5(a)-b^6E_7(a)+\ldots=0$$

equazioni fra le due incogoite a, b, delle quali ne desumeremo i valori coi metodi antecedentemente sviluppati.

148. Le dottrine esposte offrono mezzo di risolvere il problema della trasformazione (§. 62) eliminando dalle equazioni $f(a_1, a_2 \ldots a_r)=y$, $E(a_1)=0$, $E(a_2)=0, \ldots E(a_r)=0$ le radici $a_1, a_2 \ldots a_r$.

Si propongono ad esercizio i seguenti esempi.

Equazione	*Radici*
$x^4-x^3-13x^2+16x-48=0$	$4, -4, \frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$
$x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{11}{2}x+3=0$	$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -3$
$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+$ $+216x-108=0$	3 tripla, 2 doppia
$x^3-3x^2+4=0$	1, 2 doppia
$x^3-2x-5=0$	2,0945515
$x^3-7x+7=0$	1,6920 1,3569 —3,04892
$x^3-21x+37=0$	2,573678 2,71688 —5,2908589
$x^4+6x^2+8\sqrt{3}.x-3=0$ . . .	$-\sqrt{3}, \frac{1\mp2(\sqrt{2}-\sqrt{4})}{\sqrt{3}}$
$yx^3-3x+1=0$ $(y-1)x^2+x-2=0$	Risultante $y^5-10y^4+37y^3-64y^2+$ $52y-16=0$ Radici corrispondenti $(x=1, y=2)$ $(x=-1, y=4)$
$(y-1)x^2+2x-5y+3=0$ $yx^2+9x-10y=0$.	Risultante $25y^5-70y^4-126y^3+$ $414y^2-243y=0$ Radici corrispondenti $(y=1, x=1)(x=2, y=3)$ $(x=-5\pm\sqrt{10},$ $y=\frac{-3\pm3\sqrt{10}}{5}$

SEZIONE SECONDA.

APPLICAZIONI.

Le dottrine spiegate si applicano alla risoluzione di molti problemi, alcuni dei quali anderemo svolgendo nei capitoli seguenti.

CAPO I.

Spezzamento delle frazioni.

149. La matematica elementare insegna ad esprimere con una sola frazione l'aggregato di più frazioni date, ed interessa talvolta la risoluzione del problema reciproco cioè »Data una frazione »algebraica rispetto ad una quantità, trovare altre »frazioni algebraiche, i cui denominatori siano del »minor grado possibile rispetto a quella quantità, »ed il loro aggregato eguagli la frazione data.

150. Sia $\frac{F(x)}{E(x)}$ la frazione proposta. Se il grado del numeratore $F(x)$ non è minore del grado di $E(x)$ effettuata la divisione e protratta finchè possibile, chiamato $Q(x)$ il quoziente, $R(x)$ il residuo, si avrà

$$\frac{F(x)}{E(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{E(x)}$$

e lo spezzamento si eseguirà sulla frazione pro-

pria $\frac{R(x)}{E(x)}$. Siccome la somma delle frazioni componenti deve eguagliare identicamente la frazione data, così sarà $E(x)$ il prodotto dei loro denominatori; cioè quei denominatori saranno i fattori del polinomio $E(x)$. Dunque posta $E(x)=0$, e risoluta la equazione, se α è una radice, $x-\alpha$ fattore di $E(x)$ potrà essere il denominatore di una frazione componente. Perchè tale frazione sia semplice quant'è possibile si finga

$$(a)\quad \frac{R(x)}{E(x)} = \frac{H}{x-\alpha} + S(x)$$

essendo H un numero incognito, $S(x)$ la somma di altre frazioni. Dalla equazione (a) si desume

$$(b)\quad \frac{R(x)}{E(x)}(x-\alpha) = H + (x-\alpha)\,S(x)$$

i membri della quale devono essere scritture algebraiche differenti della medesima quantità; cosicchè questa equazione (b) dovrà aver luogo qualunque valore venga attribuito ad x. Se α è radice semplice di $E(x)=0$, il quoto $\frac{E(x)}{x-\alpha}$ non è divisibile per $x-\alpha$ (§. 6.), e quando la somma $S(x)$ non contenga in alcun termine il denominatore $x-\alpha$, posto in quella equazione (b) $x=\alpha$, nel secondo membro resterà la sola incognita H; nel primo il numeratore $R(x)$ diverrà $R(\alpha)$, ed il denominatore $\frac{E(x)}{x-\alpha}$ si ridurrà a $\frac{0}{0}$, il cui valore

(§. 21.) non è altro che $E^{(1)}(\alpha)$. Avremo per conseguenza $H=\frac{R(\alpha)}{E^{(1)}(\alpha)}$. Dunque se la risoluzione di $E(x)=0$ fornisce molte radici semplici $a_1, a_2, \ldots a_s \ldots a_n$ supposta

$$(c)\quad \frac{R(x)}{E(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} \ldots + \frac{A_s}{x-a_s} + \ldots \frac{A_n}{x-a_n} + S(x)$$

conosceremo le frazioni componenti che corrispondono a quelle radici essendo

$$A_1 = \frac{R(a_1)}{E^{(1)}(a_1)}, \ldots A_s = \frac{R(a_s)}{E^{(1)}(a_s)} \ldots$$

151. Ripresa la equazione (a) supponiamovi α una radice multipla. Se il polinomio $S(x)$ non contenesse frazioni i denominatori delle quali fossero potenze di $x-\alpha$ maggiori della prima la equazione (b) sarebbe erronea, mentre fatto $x=\alpha$ il primo membro avrebbe un valore infinito restando finito il secondo: dunque tra le frazioni componenti la data alcuna dovrà aver per denominatore qualche potenza $(x-\alpha)^t$: affinchè le frazioni siano semplici quanto è possibile fingiamo

$$\frac{R(x)}{E(x)} = \frac{H}{(x-\alpha)^t} + S(x), \text{ quindi}$$

$$\frac{R(x)}{E(x)}(x-\alpha)^t = H + (x-\alpha)^t S(x)$$

Se in $S(x)$ non esistono frazioni aventi nel denominatore potenze di $x-\alpha$ eguali o maggiori della t esima, posta in questa equazione $x=\alpha$ resterà nel secondo membro la quantità H finita; e perchè sia pure finito il valore del primo dovrà essere $(x-\alpha)^t$

la potenza maggiore che divide il polinomio $E(x)$. Sarà $R(\alpha)$ il valore di $R(x)$ ed $\frac{E(x)}{(x-\alpha)^t}$, che si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, sarà (§ 21)

$$E_t(\alpha) = \frac{E^{(t)}(\alpha)}{1.2....t} \text{ e però } H = \frac{R(\alpha)}{E_t(\alpha)}.$$

Dunque se la equazione $E(x)=0$ ammette una radice b_1 multipla secondo il numero n_1, indicata con $T(x)$ la somma delle frazioni ottenute, le quali corrispondono alle radici semplici, si avrà

$$(d) \qquad \frac{R(x)}{E(x)} = T(x) + \frac{B_0}{(x-b_1)^{n_1}} + S_1(x)$$

ove $B_0 = \frac{R(b_1)}{E_{n_1}(b_1)}$, ed $S_1(x)$ rappresenta la somma delle frazioni che restano a determinare.

152. Sia $E(x)=(x-b_1)^{n_1}Q_1(x)$, dalla equazione (d) si desuma

$$(e) \quad \frac{R(x)}{E(x)} - \frac{B_0}{(x-b_1)^{n_1}} = \frac{R(x)-B_0Q_1(x)}{E(x)} = T(x)+S_1(x)$$

Siccome il polinomio $R(x)-B_0Q_1(x)$ algebraico razionale intero rispetto ad x si annulla ponendo $x=b_1$, perchè

$$R(b_1) - B_0 Q_1(b_1) = R(b_1) - E_{n_1}(b_1) \,.\, B_0 = 0$$

$x-b_1$ sarà un fattore di $R(x) - B_0 Q_1(x)$, per cui supposto $R(x)-B_0 Q_1(x) = (x-b_1) Q_2(x)$, la equazione (e) si ridurrà alla seguente

$$(f) \quad \frac{Q_2(x)}{(x-b_1)^{n_1-1} \,.\, Q_1(x)} = T(x) + S_1(x).$$

Potrebbe essere $R-B_0Q_1 = (x-b_1)^h Q_h(x)$ essendo $h>1$, nel qual caso $Q_2(b_1)=0$, e la (f) sarebbe

$$\frac{Q_h(x)}{(x-b_1)^{n_1-h} Q_1(x)} = T(x) + S_1(x)$$

Ma continuando a considerare la equazione (f) notiamo che fra i termini componenti $S_1(x)$ dovrà esistere una frazione avente il denominatore $(x-b_1)^{n_1-1}$ (§ 150.) e supposta

$$S_1(x) = \frac{B_1}{(x-b_1)^{n_1-1}} + S_2(x)$$

sarà $B_1 = \frac{Q_2(b_1)}{Q_1(b_1)}$, e la equazione (f) diverrà

$$(g) \quad \frac{Q_2(x)}{(x-b_1)^{n_1-1} Q_1(x)} = T(x) + \frac{B_1}{(x-b_1)^{n_1-1}} + S_2(x)$$

ossia

$$\frac{Q_2(x)-B_1 Q_1(x)}{(x-b_1)^{n_1-1} Q_1(x)} = T(x)+S_2(x)$$

Ma $Q_2(x) - B_1 Q_1(x)$ postovi $x=b_1$ diventa

$$Q_2(b_1) - B_1 Q_1(b_1) = 0$$

per cui è divisibile per $x-b_1$; dunque supposto

$$Q_2(x) - B_1 Q_1(x) = (x-b_1) Q_3(x)$$

dalla equazione (g) deriveremo

$$\frac{Q_3(x)}{(x-b_1)^{n_1-2} Q_1(x)} = T(x) + S_2(x)$$

Questa di nuovo ne apprende che fra i termini

La ricerca della forma generale dei quozienti Q_1, Q_2.... può servire allo studioso di utile esercizio.

di $S_1(x)$ uno si troverà della forma $\frac{B_1}{(x-b_1)^{n_1-1}}$ e sarà il numeratore $B_1 = \frac{Q_3(b_1)}{Q_1(b_1)}$

Continuando lo stesso discorso comprendiamo dover essere

$$\frac{R(x)}{E(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

$$+ \frac{B_0}{(x-b_1)^{n_1}} + \frac{B_1}{(x-b_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-b_1} + S_{n-1}(x)$$

ove $S_{n-1}(x)$ rappresenta la somma delle frazioni corrispondenti alle altre radici multiple della equazione $E(x)=0$, le quali entreranno a comporre la frazione proposta come quelle che corrispondono alla radice b_1.

153. Indicata con $\Sigma \frac{A_r}{x-a_r}$ la somma di tutte le frazioni provenienti dalle radici semplici, e con

$$\Sigma \left\{ \frac{B_0}{(x-b_1)^{n_1}} + \frac{B_1}{(x-b_1)^{n_1-1}} \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-b_1} \right\}$$

la somma di quelle dovute alle radici multiple della equazione $E(x)=0$, si avrà identicamente

$$(h) \quad \frac{R(x)}{E(x)} = \Sigma \frac{A_r}{x-a_r} + \Sigma \left(\frac{B_0}{(x-b_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-b_1} \right)$$

Infatti trasportati tutti i termini nel secondo membro e ridotte le frazioni al denominatore $E(x)$, si rappresenti il risultato con $\frac{G(x)-R(x)}{E(x)}$. Il po-

linomio $G(x)-R(x)$, il cui grado è minore di m, si annulla allorchè si sostituisce ad x una radice qualunque della equazione $E(x)=0$, dunque sarà identicamente $G(x) - R(x)=0$, altrimenti questa equazione algebraica ammetterebbe un numero di radici maggiori del proprio grado (§ 7). Dunque è vera la equazione (h).

154. Se alcune radici della equazione $E(x)=0$ fossero della forma $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ lo spezzamento (h) offrirebbe frazioni aventi il denominatore immaginario; la quale apparenza in alcuni incontri potrebbe essere molesta. Basta però rinunciare in parte alla semplicità delle frazioni componenti per ridurle agevolmente a forma reale.

Sia $b_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ (§ 151.) e $c_1 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$. Alla frazione componente $\frac{B_{n_1-t}}{(x-b_1)^t}$ ne corrisponderà un' altra $\frac{C_{n_1-t}}{(x-c_1)^t}$ ove B_{n_1-t}, C_{n_1-t} saranno i valori di un medesimo polinomio algebraico $\Delta(x)$ corrispondenti ad $x=\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$: riducendo perciò in una sola quelle frazioni ne verrà

$$\frac{B_{n_1-t}}{(x-b_1)^t} + \frac{C_{n_1-t}}{(x-c_1)^t} =$$

$$\frac{\Delta(\alpha+\beta\sqrt{-1})(x-c_1)^t + \Delta(\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-b_1)^t}{(x^2-(b_1+c_1)x+b_1c_1)^t}$$

ove $b_1+c_1=2\alpha$; $b_1c_1=\alpha^2+\beta^2$, cioè reali entrambi. Sviluppando poi il numeratore, come si è fatto (§ 147.) della quantità $E(a+b\sqrt{-1})$, vedremo

che tutti i termini di $\Delta(\alpha+\beta\sqrt{-1}) \cdot (x-c_1)^t$, i quali contengono $\beta\sqrt{-1}$ elevato a potenza dispari trovandosi pure nel polinomio $\Delta(\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-b_1)^t$ affetti da segno opposto, verranno distrutti; mentre quelli nei quali $\beta\sqrt{-1}$ è elevato a potenza pari si riducono spontaneamente a quantità reale (veggasi § 147) (1).

Nelle opere di Eulero e Lagrange più volte citate può vedersi come si ottengano direttamente le frazioni componenti i cui denominatori sono potenze intere dei divisori reali del secondo grado.

CAPO II.

Estrazione di radice dai polinomi irrazionali.

155. Dato un binomio $a+b$ del quale almeno un termine sia irrazionale del secondo grado, importa talvolta conoscere se il medesimo, o il prodotto di esso per un razionale k, è una potenza di certo ordine n, e quale ne sia la radice. A tale oggetto si osservi che quella radice sarà un binomio $x+y$ in cui x o y od entrambe sono irrazionali del secondo grado, cosicchè supposto

(1) Veggasi a maggiore istruzione: Eulero Introduct. in analysin infinitorum T. I. — S.r Cauchy Cours d'analyse — Mem. del S.r Crelle. Giornale citato — Acta Petrop. 1780. — S.r March. Rangoni. Società Italiana T. XXI anno 1836.

$(\alpha)\ \sqrt[n]{\{k(a+b)\}}=x+y$ ne verrà

$$(\varepsilon)\quad k(a+b)=x^n+n\,x^{n-1}\,y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\ldots\ldots$$

La identità di questa equazione richiede che essendo per esempio a razionale anche il secondo membro consti di due parti omologhe: se n è dispari la equazione (ε) scritta nel modo seguente

$$k(a+b)=x\left[x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-3}y^2\ldots\ldots\right]+$$

$$y\left[n\,x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}x^{n-3}y^2+\ldots\ldots\right]$$

ne indica che la x o la y, per esempio la prima, dovrà essere razionale, essendo razionali le quantità fra le parentesi quadrate; ma se n è pari potranno le x, y essere irrazionali entrambe.

Se poi ambo le quantità a, b sono irrazionali la equazione (ε), scritta come segue,

$$k(a+b)=\left[x^n+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2\ldots\right]+$$

$$x\,y\left[nx^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}x^{n-4}y^2\ldots\right]$$

si scorge essere erronea quando n è pari, da che il primo termine del secondo membro è razionale dunque » un binomio i cui termini sono entrambi » irrazionali del secondo ordine non può essere » una potenza d'ordine pari.

Moivre. Transaz. Filos. ann. 1707 e 1737 — Eulero. Coment. Accad. Petrop. an. 1741 43. — Newton. Arit. Univ. colle note del Castilioni — Ruffini. Corso di Modena T. III. cap. 6.

Affinchè la equazione (δ) sia identica dalle cose esposte raccogliamo dover essere in qualunque caso

$$(\gamma)\quad ak = x^n + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}y^2 \ldots\ldots;$$

$$bk = nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} x^{n-3}y^3 \ldots\ldots$$

quindi $k(a-b) = x^n - nx^{n-1}y + \ldots\ldots = (x-y)^n$, ossia $\sqrt[n]{\{k(a-b)\}} = x-y$. Moltiplicata poi questa equazione per la (α) ne segue $\sqrt[n]{\{k^2(a^2-b^2)\}} = x^2-y^2$, cioè, siccome x^2-y^2 è razionale, il monomio $k^2(a^2-b^2)$ sarà una potenza $n$esima esatta che chiamo c^n, epperò $x^2-y^2=c$ (δ). Dunque la quantità k sinora indeterminata dovrà rendere $k^2(a^2-b^2)=c^n$.

Si ponga ormai nella prima equazione (γ) $x^2=y^2-c$ e ne verrà

$$(\epsilon)\quad x^n + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}(x^2-c) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} x^{n-4}(x^2-c)^2 + \ldots\ldots = ak,$$

dalla quale desumeremo la x incognita.

Se a è razionale ed n dispari lo sarà ancora la x di cui troveremo il valore coi metodi del §. 89: se n è pari potrà la x essere un monomio irrazionale del secondo grado, ma posto in quella equazione $x^2=z$ la risultante in z ammetterà una radice razionale qualunque volta la questione sia possibile.

Se poi a, b sono irrazionali entrambi, per cui

n sia dispari, la x lo sarà ancora: quadrato un membro e l'altro della equazione (ϵ) ovvero (γ), la risultante conterrà ovunque potenze pari della x, cosicchè posto $x^2=z$ l'equazione in z dovrà essere dotata di una radice razionale.

156. Il caso contemplato §. 154. è quello che occorre più frequentemente, ma la dottrina delle equazioni offre i mezzi per risolvere la questione in ogni incontro, o almeno riconoscerne la impossibilità. Si domandi a cagion d'esempio se esista e qual sia la $\sqrt[m]{k(a+\sqrt{b}+\sqrt{c})}$ essendo a, b, c, k numeri razionali e k indeterminato. Si finga

$$(\zeta)\quad \sqrt[m]{\{k(a+\sqrt{b}+\sqrt{c})\}} = x+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

colla quale dovrà pure verificarsi la

$$\sqrt[m]{k(a+\sqrt{b}-\sqrt{c})} = x+\sqrt{y}-\sqrt{z};$$

ed anche il loro prodotto

$$\sqrt[m]{k^2\{(a+\sqrt{b})^2-c\}} = (x+\sqrt{y})^2-z;$$

e la $\sqrt[m]{k^2\{(a-\sqrt{b})^2-c\}} = (x-\sqrt{y})^2-z$, ed il prodotto di queste

$$\sqrt[m]{k^4\{(a^2-b)^2-2c(a^2+b)+c^2\}} = (x^2-y)^2-2z(x^2+y)+z^2$$

Di qui apprendiamo che l'indeterminata k dovrà ridurre razionale il primo membro, ed indicatone il valore con c, ne verrà

$$(\eta)\quad (x^2-y)^2-2z(x^2+y)+z^2 = c$$

Essendo poi $k(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}) = (x+\sqrt{y}+\sqrt{z})^n$ effettuata la potenza nel secondo membro, e ricavatene le altre tre equazioni che si ottengono cam-

biando i segni agli irrazionali, ne elimineremo $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ (§. 145), poi dalle due risultanti e dalla (η) eliminate per esempio le y, z, si avrà a risolvere una equazione colla incognita x. Se questa equazione non ammette radice razionale oppure monomia irrazionale del secondo grado la equazione (ζ) sarà assurda.

Non dissimilmente dovremo procedere quando la quantità irrazionale data si componga di quali e quanti si vogliano monomj irrazionali, del che tratteremo altrove.

CAPO III.

Multisezione degli angoli.

È celebre nella geometria il problema della iscrizione de' poligoni regolari nel circolo e della multisezione degli angoli, trattato già con mano maestra da Euclide nel libro IV. de' suoi elementi, e tanto oltre promosso dal profondo geometra di Gottinga. All' elegante argomento dedicheremo il presente capitolo collegandolo alle dottrine esposte.

157. Le radici immaginarie della equazione binomia $(a) x^m \pm 1 = 0$ (§§. 32, 38, 73) si rappresentino con $r(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ per il che dovrà essere (§. 33) $r^m(\cos m\varphi \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}\,m\varphi) = \mp 1$, cioè $r^m \cos m\varphi = \mp 1$, $r^m\,\mathrm{sen}\,m\varphi = 0$. Quadrando poi sommando queste equazioni ne seguono $r^{2m} = 1$ cioè $r = 1$ (§§. 32, 73) $\cos m\varphi = \mp 1$, $\mathrm{sen}\,m\varphi = 0$ ossia

$m\varphi = h\pi$, essendo h un intero dispari o pari secondo che nella equazione (a) si considera il segno superiore o l' inferiore.

Esaminando specialmente la equazione $x^m - 1 = 0$, posto $m\varphi = 2h\pi$, tutte le radici della medesima saranno date dal binomio

$$(b)\quad \cos\frac{2h\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2h\pi}{m}$$

quando si faccia $h = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ fino ad $\frac{m}{2}$, ovvero ad $\frac{m-1}{2}$ secondo che m è pari o dispari, da che fingendo per esempio nel primo caso $h = \frac{m}{2} \pm i$, ove $i < \frac{m}{2}$, avremo

$$\cos\frac{2\pi}{m}\left(\frac{m}{2} \pm i\right) \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{m}\left(\frac{m}{2} \pm i\right) =$$
$$-\cos\frac{2\pi i}{m} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi i}{m}.$$

158. Siccome il prodotto de' fattori lineari corrispondenti alle radici conjugate (b) non è altro che

$$(c)\quad x^2 - 2x\cos\frac{2h\pi}{m} + 1$$ ne segue (§. 39)

$$(d)\quad x^m - 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{m} + 1\right)\ldots$$

cui aggiungeremo in ultimo il fattore $x - 1$ oppure $x^2 - 1$ quando m sia dispari o pari. Quindi ne deriva un celebre teorema dovuto a Cotes; cioè se con raggio eguale all' unità si descrive il circolo,

poi in nn raggio, prolungato se abbisogna, si prende dal centro una lunghezza x, e partendo dall'estremo di questo raggio si divide la circonferenza in m parti eguali; siccome i fattori trinomii del prodotto (d) rappresentano i quadrati delle rette che uniscono tutti i punti in cui è divisa la circonferenza con quell'estremo della retta x che non è il centro; il prodotto di quei quadrati eguaglierà la differenza fra le potenze dell'ordine m, della x e del raggio uno (1).

159. Il quoto $\frac{x^m-1}{x-1}=x^{m-1}+x^{m-2}\ldots+1$, si riduce ad m quando $x=1$ nel qual caso sono

$$x^2-2x\cos\frac{2\pi}{m}+1=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{m}\right)=2^2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{m}$$

$$x^2-2x\cos\frac{4\pi}{m}+1=2\left(1-\cos\frac{4\pi}{m}\right)=2^2\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{m}$$

. . . . . .

la equazione (d), supposto m dispari, si trasforma nella seguente

$$m=2^{m-1}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{m}.\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{m}.\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{m}\ldots\ldots\operatorname{sen}^2\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}$$

ovvero

$$(e)\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}.\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}.\operatorname{sen}\frac{3\pi}{m}\ldots\ldots\operatorname{sen}\frac{m-1}{2}.\frac{\pi}{m}=\left(\frac{m}{2^{m-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se m è pari divisa la equazione (d) per x^2-1 e posto nel quoto $x=1$ conseguiremo la stessa formola (e) in cui all'ultimo fattore del primo membro venga sostituito $\operatorname{sen}\frac{m-2}{2}.\frac{\pi}{m}$.

(1) Questo teorema venne generalizzato da Moivre, Miscellanea Analytica.

La equazione $x^m+1=0$ conduce poi a conseguenze analoghe che proponiamo per esercizio allo studioso (2).

160. La formola (h) (§. 66) applicata alla equazione $x^m-1=0$ ne insegna essere $S(n)=m$ quando n è eguale o multiplo di m, altrimenti $S(n)=0$, da che posto $n=m.h$ siccome

$A_1=A_2=\ldots\ldots=A_{m-1}=0$, avremo

$S(mh)+A_m S(m(h-1))=0$, cioè $S(mh)=S(m(h-1))$ epperò $S(mh)=S(m)$; ma la stessa formola (h) ci dà

$S(m)+mA_m=0$ quindi $S(mh)=m$

Essendo poi $S(mh+k)+A_m S(m(h-1)+k)=0$, $S(k)=0$ eesendo $k<m$, ne segue $S(mh+k)=0$.

Se ora si osservi che

$$S(n)=\Sigma\left(\cos\frac{2h\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2h\pi}{m}\right)^n=2\Sigma\cos\left(\frac{2nh\pi}{m}\right.$$

Ove Σ indica la somma delle quantità che si ottengono sostituendo i valori di h (§. 157) nella funzione posta fra le parentesi.

Dunque $2\Sigma\cos\frac{2hn\pi}{m}=0$ oppure $=m$,

secondo che $\frac{n}{m}$ è numero fratto od intero

(2) Lezioni d'Introduzione al Calc. Sub. del Ch. Sig Prof. Lotteri. T. I. pag. 408.

Poniamo $n = r - s$ poi $n = r + s$, e siccome

$$\cos\frac{2h\pi}{m}(r-s)+\cos\frac{2h\pi}{m}(r+s)=2\cos\frac{2h\pi}{m}r.\cos\frac{2h\pi}{m}s$$

$$\cos\frac{2h\pi}{m}(r-s)-\cos\frac{2h\pi}{m}(r+s)=2\operatorname{sen}\frac{2h\pi}{m}r.\operatorname{sen}\frac{2h\pi}{m}s$$

estese le somme Σ ad $h=0, 1, 2 \ldots\ldots m-1$ ne desumeremo

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma\cos\frac{2h\pi}{m}r\,.\,\cos\frac{2h\pi}{m}s\\ \Sigma\operatorname{sen}\frac{2h\pi}{m}r\,.\,\operatorname{sen}\frac{2h\pi}{m}s\end{array}\right\}=0,=\frac{m}{2},$$

secondo che $\frac{r-s}{m}$, $\frac{r+s}{m}$ saranno numeri fratti entrambi; ovvero uno solo; cosicchè fatto $s=r$ se $\frac{2r}{m}$ non è intero, saranno

$$\Sigma\cos^2\frac{2h\pi}{m}r=\Sigma\operatorname{sen}^2\frac{2h\pi}{m}r=\frac{m}{2}.$$

161. Ogni qualvolta la equazione $x^m-1=0$ potrà risolversi algebraicamente, supposto $\cos\frac{2\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}=a\pm b\sqrt{-1}$ ne verrà $\cos\frac{2\pi}{m}=a$ e quindi sapremo inscrivere nel cerchio il poligono regolare di m lati. La equazione $x^3-1=0$ per esempio, ci dà (§. 81)

$\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ per cui

$\cos\frac{2\pi}{3}=-{}^1/_2$: quindi si desume la regola nota per iscrivere nel cerchio il triangolo equilatero. La

equazione data essendo $x^5-1=0$, divisa per $x-1$ si riduce ad $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ a radici reciproche (§. 98). Supposto $x+\frac{1}{x}=y$ ne segue $y^2+y-1=0$, quindi $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ che dovremo sostituire nella formola $x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{y^2}{4}-1\right)}$: siccome $\frac{y^2}{4}-1=\frac{y+3}{4}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}<0$ sarà $\frac{y}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ la parte reale della radice x, e perciò $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Onde ottenere la costruzione geometrica di questa espressione, immaginato il cerchio di raggio eguale all' unità, condotto un diametro e per un estremo la tangente pure eguale all' unità, l' ipotenusa del triangolo di cui queste due rette sono cateti avrà per lunghezza $\sqrt{5}$. Prolungato quel diametro nella parte esteriore dell'angolo retto, finchè eguagli $\sqrt{5}$ e presa dal centro verso il prolungamento la quarta parte di $\sqrt{5}-1$, avremo in essa il valore di $\cos\frac{2\pi}{5}$, e quindi una regola semplicissima per inscrivere nel cerchio il pentagono regolare (1). Quanto abbiamo dimostrato nel §. 117. ne apprende poi che

(1) Invitiamo lo studioso a conseguire la dimostrazione geometrica di questa regola più semplice della Euclidiana (Lib. 4. Prob. II. Prop. II.).

»ogni poligono regolare di 2^r+1 lati può venire »inscritto nel cerchio *geometricamente;* cioè me»diante la *riga* ed il *compasso.*

162. Dalla equazione $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ si desume il valore della freccia $\frac{5-\sqrt{5}}{4}$; quindi il lato del pentagono, medio geometrico fra 2 e $\frac{5-\sqrt{5}}{4}$, sarà $\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$. Il lato del decagono è la corda sottesa all' angolo $\frac{1}{2}\frac{2\pi}{5}$ della quale conseguiremo il valore colla nota formola $\text{sen}\frac{1}{2}x=\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)}$, si avranno cioè $\text{sen}\frac{1}{2}\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)}$, $\cos\frac{1}{2}\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{(6+2\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (§. 154), finalmente il lato del decagono sarà espresso da $\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$. Di qui ne segue che »la somma dei »quadrati dei lati dell' esagono e del decagono »regolari, cioè $1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, eguaglia il »quadrato del lato del pentagono« teorema elegante di Sereno (1).

(1) Euclide. Geometr. Lib. 13. Teor. 10. Prop. 10.

163. Il problema della trisezione dell' angolo, e in generale quello della divisione di un angolo in quante si vogliano parti eguali dipende dalla risoluzione di una equazione algebraica. Diffatti (Sezione 3. Capo 2. form. XXXII) troveremo che indicato con m un numero intero qualunque, supposti $2\cos\varphi=x$, $2\cos m\varphi=A$, ha luogo la equazione $x^m-mx^{m-2}+\frac{m(m-3)}{2}x^{m-4}-\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}x^{m-6}\ldots\ldots-A=0$ la quale fornisce x, ossia φ, quando sia dato $m\varphi$.

164. Termino il presente capitolo collo spezzamento della frazione $\frac{x^n}{x^m+1}$; ove m, n sono interi ed $m>n$: questione che interessa nell' analisi trascendente. Supposte h_1, h_2 due radici immaginarie conjugate della equazione $x^m+1=0$, sarà $\frac{x^n}{x^m+1}=\frac{1}{m}\Sigma\left\{\frac{h_1^n}{h_1^{m-1}}\frac{1}{x-h_1}+\frac{h_2^n}{h_2^{m-1}}\frac{1}{x-h_2}\right\}$ (§. 149) indicando colla lettera Σ la somma di tutte le quantità scritte fra le parentesi e corrispondenti ad ogni copia di radici conjugate della equazione $x^m+1=0$. Le radici h_1, h_2 sono rappresentate dalla formola $\cos\frac{(2h+1)\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{(2h+1)\pi}{m}$ (§. 157.) ed essendo $h_1h_2=1$, ed $h_1^m=h_2^m=1$ (§. 77) avremo

$$\frac{x^n}{x^m+1}=\frac{1}{m}\Sigma\frac{h_1^{n+1}(x-h_2)+h_2^{n+1}(x-h_1)}{x^2-x(h_1+h_2)+1}$$

$$=\frac{1}{m}\Sigma\frac{x(h_1^{n+1}+h_2^{n+1})-(h_1^n+h_2^n)}{x^2-x(h_1+h_2)+1}$$

$$=\frac{2}{m}\Sigma\frac{x\cos(2h+1)\frac{(n+1)\pi}{m}-\cos(2h+1)\frac{n\pi}{m}}{x^2-2x\cos\frac{(2h+1)\pi}{m}+1} \quad (\S.\ 33)$$

alle quali, essendo m dispari, si aggiungerà la frazione $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{x+1}$ (1).

CAPO IV.

Della interpolazione.

Allorchè il geometra intento allo studio delle cose naturali riconosce che una causa determinata ha uno speciale influsso nel produrre un fenomeno, e non ha mezzo alcuno per iscoprire la dipendenza dell' effetto dalla causa, collo sperimento o colla osservazione determina le misure corrispondenti dell' uno e dell' altra, quindi si finge una legge, suppone cioè che l' effetto possa esprimersi per tale funzione della causa medesima ed attribuiti in questa funzione alla causa variabile i valori osservati ne confronta i risultamen-

(1) Vegg. per eserc. l' opera citata di Moivre.

ti analitici ed esperimentali. Così Keplero e Neuton scoprirono le leggi della gravitazione che modera i movimenti delle masse celesti e Galileo quelle dei gravi presso la superficie della terra. Così Neuton, Lambert e Biot istudiavano il propagarsi del calorico libero e condotto. Laplace indagava le leggi delle astronomiche rifrazioni, Petit e Dulong le dilatazioni dei fluidi elastici, e per questo mezzo principalmente l' umano intelletto svela le leggi ammirabili che regolano l' armonia dell' universo.

165. Quindi ebbe origine il problema della interpolazione il quale consiste in ciò »Trovare una »funzione di una variabile la quale fornisca risul»tamenti di grandezza data, allorquando si attri»buiscono alla variabile medesima valori determi»nati in quantità ed in numero.

Siano (a) $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_m$ i valori della variabile

(b) $b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_m$ i corrispondenti della funzione, e siccome la natura di essa può eleggersi ad arbitrio fingeremo che debba essere algebraica intera e del minor grado possibile. Indicata la variabile con x, e con

$A_0+A_1x+A_2x^2\ldots\ldots+A_{m-1}x^{m-1}$ la funzione; il problema sarà sciolto per mezzo delle equazioni

$A_0+A_1a_1\ldots\ldots\ldots\ldots+A_{n-1}a_1^{m-1}=b_1$,

$A_0+A_1a_2+\ldots\ldots\ldots+A_{m-1}a_2^{m-1}=b_2\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_0+A_1a_m\ldots\ldots+A_{m-1}a_m^{m-1}=b_m$ fra le incognite lineari $A_0, A_1, \ldots\ldots A_{m-1}$ (§. 136). Ma per evi-

tarne il calcolo notiamo che supposta $E(x)=o$ la equazione ordinata le cui radici sono unicamente tutte le quantità (a), siccome $\frac{E(x)}{x-a_1}$ si riduce ad $E^{(1)}(a_1)$ ponendo $x=a_1$ e si annulla per tutti gli altri valori (a) della x (§. 21), cioè

$\frac{E(x)}{(x-a_1)E^{(1)}(a)}=1$, oppure $=o$ secondo che si pone $x=a_1$, oppure eguale ad un' altra di quelle quantità (a), e così è di

$\frac{E(x)}{(x-a_2)E^{(1)}(a_2)}\ldots\ldots\frac{E(x)}{(x-a_m)E^{(1)}(a_m)}$, rispetto alle $a_2\ldots a_m$ ne segue che la funzione algebraica razionale

$$(c)\quad \frac{E(x)}{(x-a_1)E^{(1)}(a_1)}b_1+\frac{E(x)}{(x-a_2)E^{(1)}(a_2)}b_2+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{E(x)}{(x-a_m)E^{(1)}(a_m)}b_m$$

darà per risultamenti le quantità (b) allorquando alla x si sostituiranno le (a) che vi corrispondono, come appunto si cercava.

166. Lagrange (1) ha insegnato come si ottenga una funzione della forma

$$A_1\operatorname{sen}2\pi x+\ldots+A_r\operatorname{sen}2r\pi x\ldots+A_{m-1}\operatorname{sen}2(m-1)\pi x$$

la quale si riduca ad una quantità b_r qualunque, allorchè vi si sostituisca $x=\frac{r}{m}$. A tale intento si

(1) Anciens Mémoires de Turin. T. 3.

fingano

$$A_1\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}+\ldots+A_s\operatorname{sen}\frac{2s\pi}{m}+\ldots+A_r\operatorname{sen}\frac{2r\pi}{m}\ldots=b_1$$
$$A_1\operatorname{sen}\frac{4\pi}{m}+\ldots+A_s\operatorname{sen}\frac{4s\pi}{m}\ldots\ldots+A_r\operatorname{sen}\frac{4r\pi}{m}\ldots\ldots=b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1\operatorname{sen}\frac{2r\pi}{m}\ldots\ldots+A_s\operatorname{sen}\frac{2rs\pi}{m}\ldots\ldots+A_r\operatorname{sen}\frac{2r^2\pi}{m}\ldots\ldots=b_r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1\operatorname{sen}\frac{2(m-1)\pi}{m}\ldots\ldots+A_s\operatorname{sen}\frac{2(m-1)s\pi}{m}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+A_r\operatorname{sen}\frac{2(m-1)r\pi}{m}\ldots\ldots=b_{m-1}$$

Moltiplicate queste equazioni, partendo dalla prima in avanti, per $\operatorname{sen}\frac{2r\pi}{m}$, $\operatorname{sen}\frac{4r\pi}{m}$, $\operatorname{sen}\frac{6r\pi}{m}$,..... quindi sommati i prodotti, in forza delle equazioni ottenute nell' antecedente (§. 160) avremo

$$A_r=\frac{2}{m}\left\{b_1\operatorname{sen}\frac{2r\pi}{m}+b_2\operatorname{sen}\frac{4r\pi}{m}+\ldots\ldots+b_m\operatorname{sen}\frac{2(m-1)r\pi}{m}\right\}$$

SEZIONE TERZA.

DOTTRINA DELLE SERIE.

Alloraquando in una formola algebrica si sostituiscono numeri alle quantità indicate con simboli, all' intento di conseguire un valore particolare della formola medesima, è d' uopo effettuare le operazioni ivi indicate; cioè estrarre radici, determinare angoli corrispondenti a date funzioni trigonometriche e viceversa, trovare logaritmi di numeri, e simili. E siccome rare volte accade che il numero da cui vuolsi estrarre la radice di certo ordine sia una potenza dell' ordine medesimo, che quello di cui si cerca il logaritmo sia una potenza della base, è d' uopo calcolare il valore approssimato di quelle parti onde conoscere quello della formola in discorso. Cambiando la grandezza dei numeri sostituiti, all' oggetto di avere altro valore della formola, bisogna riprendere da capo tutte quelle operazioni. L' algebra la quale si propone di esprimere con simboli il risultato di tutte le operazioni aritmetiche che ci è d' uopo ripetere ogni qual volta si trattano questioni l' una dall'altra unicamente differenti per la grandezza delle quantità date, l' algebra dico consentanea al suo scopo cerca pure di eseguire sulle formole simboliche quelle operazioni le quali verrebbero effettuate coll' aritmetica per raggiungere un valore

approssimato della formola ridotta a numeri: cosicchè essendo data una funzione qualunque $f(x, y, \ldots)$ di più variabili $x, y, \ldots$; assunta altra funzione $F(x, y, \ldots)$ delle variabili medesime, il calcolo della quale sia agevole per se, o per tavole antecedentemente costruite, l' algebra si propone di conseguire una *serie* di quelle funzioni, che rappresento con

$$(a) \quad F_1(x, y, \ldots),\ F_2(x, y, \ldots), \ldots\ldots F_n(x, y, \ldots), \ldots$$

tali che prendendone molte consecutive, incominciando dalla prima in avanti, la loro somma offra un valore approssimato della funzione primitiva $f(x, y, \ldots)$, e l' approssimazione sia maggiore quant'è più grande il numero delle quantità sommate.

Le funzioni (a) formano ciò che dicesi *serie*: la somma

$$(b) \quad F_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots + F_n \ldots.$$

chiamasi *sviluppo in serie* della $f(x, y, \ldots\ldots)$, la quale suol denominarsi *funzione generatrice* della serie. Le quantità (a) sono i *termini della serie*, ed F_n è il *termine generale*.

Data la funzione $f(x, y, \ldots.)$, la forma della $F(x, y, \ldots.)$ e la legge con cui si succedono le (a) sono affatto arbitrarie: nei casi concreti possiamo essere indotti a delle ipotesi dalla natura della questione a risolvere; il che non assicura però, che la somma di più termini (a) presi partendo dal primo offra un valore tanto più prossimo alla funzione generatrice quant' è maggiore il numero dei termini sommati, cosicchè vi hanno dei sviluppi

i quali non servono assolutamente, altri non valgono che entro certi limiti delle quantità variabili, ed altri che sono sempre applicabili. Nel primo caso la serie si chiama *divergente*, e negli casi si dice *convergente*. Quando una serie converga verso la funzione generatrice questa si chiama *somma* od anche *limite* della serie.

Sebbene l' uso delle serie, che ho dichiarato, non sia l' unico, è però quello cui dobbiamo l' origine di questo argomento importantissimo dalla analesi algebrica (*).

Noi esporremo i metodi per i quali si possono svolgere in serie le principali funzioni algebriche e trascendenti; tratteremo della loro convergenza e divergenza, e faremo conoscere proprietà importanti di alcune serie speciali.

CAPO PRIMO

Serie di termini algebrici.

In questo capitolo fingeremo che una funzione data di una sola variabile si debba svolgere in una serie di monomii algebraici razionali interi rispetto alla variabile medesima.

167. Se la funzione fosse il binomio irrazionale $(1+x)^{\frac{m}{n}}$, siccome ci è noto con quali regole da un polinomio $(1+x)^m$ se ne estragga la radice di qua-

(*) Archimede, De circuli mensura.

lunque ordine n, l' applicazione di queste regole condurrà direttamente allo sviluppo cercato. In fatti estratta la radice n esima dal primo termine della potenza

$$(a)\quad (a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}x^2 + \ldots + x^m$$

si ottiene $a^{\frac{m}{n}}$ primo termine della radice: sottratta da (a) la quantità $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$, formato il monomio $n\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}$ e diviso per esso il primo termine del residuo si ottiene $\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}x$, secondo termine della radice. Sottratta da (a) la potenza

$$\left(a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}x\right)^n$$

per cui resta

$$\frac{m\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}a^{m-2}x^2 + \ldots\ldots$$

diviso il primo termine di questo residuo per il primo della quantità $n\left(a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}x\right)^{n-1}$

cioè per $n\,a^{m-\frac{m}{n}}$ ne verrà

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}a^{\frac{m}{n}-2}x^2$$

terzo termine della radice, e proseguendo la ope-

razione si comporrà tutta la serie cercata. Ma il metodo diretto non è sempre praticabile o almeno riesce generalmente malagevole, per cui è d' uopo ricorrere ed altro principio, che ora verremo dichiarando.

168. » Affinchè la somma di una serie di ter» mini algebraici razionali interi rispetto ad una » variabile si riduca allo zero quando alla varia» bile medesima venga sostituito qualunque numero » preso fra due limiti dati, è necessario che sia » nullo per se ciascun termine di quella serie.

Abbiasi la serie

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots\ldots + A_n x^n \ldots\ldots + A_{m-2} x^{m-2} + A_{m-1} x^{m-1} + A_m x^m = E(x)$$

la quale si riduca a zero sostituendo alla x qualunque valore preso partendo da un certo h ad un altro k. Se $h+\omega<k$, saranno $E(h)=0$

$$(a)\quad E_1(h)+\omega E_2(h)\ldots\ldots+\omega^{m-3}E_{m-2}(h)+\omega^{m-2}E_{m-1}(h) + \omega^{m-1}E_m(h) = 0$$

(§ 18.) qualunque valore si attribuisca ad ω da $\omega = 0$ ad $\omega = k - h$. Dico che sarà $E_1(h) = 0$. Infatti se ciò non è, siccome nessuna quantità (b) $E_1(h)$, $E_2(h)$ .... può essere infinita, chiamato P un numero non minore della più grande fra quelle quantità (b) fatta astrazione al segno, e Q il valore di $E_1(h)$ potremo fingere ω piccolo cosicchè sia

$$P(\omega+\omega^2+\ldots\ldots+\omega^m) < Q$$

Fourier. Théor. de la Chaleur pag. 212. S.r Piola. Memor. della Soc. Ital. T. XX. pag. 577.

Lo stesso valore ω sostituito nella equazione (a) renderà il primo termine maggiore della somma dei conseguenti (§ 31.) e però non potrà verificarsi quella equazione. Dunque sarà $E_1(h) = 0$, e collo stesso discorso proveremo

$$E(h) = 0,\ E_1(h) = 0,\ E_2(h) = 0 \ldots\ E_{m-2}(h)=0,$$
$$E_{m-1}(h) = 0,\ E_m(h) = 0.$$

Essendo poi (§ 14.)

$$E_m = A_m;\ E_{m-1} = m A_m h + A_{m-1};$$

$$E_{m-2} = \frac{m(m-1)}{2} A_m h^2 + (m-1) A_{m-1} h + A_{m-2}$$

. . . . . .

ne seguono, qualunque sia la grandezza dell'indice m,

$$A_m=0,\ A_{m-1}=0,\ A_{m-2}=0 \ldots A_2=0,\ A_1=0,\ A_0=0$$

come abbiamo asserito.

169. » Se le somme di due serie di termini » algebraici razionali interi rispetto ad una » variabile sono eguali allorchè si danno alla va» riabile valori presi fra limiti dati, i coefficienti » delle potenze eguali della variabile medesima » nell' una e nell' altra serie saranno eguali fra » loro. Infatti supposto

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots = B_0+B_1x+B_2x^2 \ldots \text{ ossia}$$
$$A_0-B_0+(A_1-B_1)x+(A_2-B_2)x^2\ldots\ldots = 0$$

per tutti i valori della x compresi fra i limiti dati (§ 168.), saranno

$$A_0 - B_0 = 0,\ A_1 - B_1 = 0,\ A_2 - B_2 = 0 \ldots\ldots$$

come abbiamo asserito.

170. » Trovare una serie ordinata secondo po-

» tenze positive, intere, crescenti della variabile » x la quale rappresenti la frazione $\frac{1}{a+bx}$.

Si finga

$$\frac{1}{a+bx}=A_0+A_1x+A_2x^2....+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n...$$

da cui, moltiplicando per $a+bx$, ne segue

$$1=A_0a+x(A_1a+bA_0)+....+x^n(A_n a+A_{n-1}b)+...$$

e quindi (§ 169.)

$$A_0 a=1,\ A_1 a+b A_0=0,\ ...\ A_na+A_{n-1}b=0$$

cioè $A_n=-\frac{b}{a}A_{n-1}$, $A_{n-1}=-\frac{b}{a}A_{n-2}$, ...

.... $A_2=-\frac{b}{a}A_1$, $A_1=-\frac{b}{a}A_0$.

Le quali equazioni moltiplicate fra loro forniscono

$A_n=(-1)^n\frac{b^n}{a^n}A_0=(-1)^n\frac{b^n}{a^{n+1}}$ e finalmente

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{a+bx}=\Sigma(-1)^n\frac{b^nx^n}{a^{n+1}}$$

Indicando colla lettera Σ la somma di tutti i monomii che si derivano da $(-1)^n\frac{b^nx^n}{a^{n+1}}$ ponendo di seguito $n=0, 1, 2, 3....$

171. » Trovare la serie che rappresenta la » funzione $(1+x)^m$, essendo m una quantità qua- » lunque.

Si finga

$$(c)\quad (1+x)^m=A_0+A_1x+A_2x^2...+A_{n-1}x^{n-1}+A_n x^n...$$

da cui, cambiata x in y, si desume

$(1+y)^m=A_0+A_1y+A_2y^2.....$ e quindi

$$(d)\quad (1+x)^m(1+y)^m=(1+x)^m\{A_0+A_1y+....\}$$
$$=\{1+x+y(1+x)\}^m$$

Nella serie (c) sostituito $x+y(1+x)$ alla x ne segue

$$(e)\qquad \{1+x+y(1+x)\}^m=$$
$$A_0+A_1(x+y(1+x))+A_2(x+y(1+x))^2+.....$$

Sviluppate le potenze intere del binomio $x+y(1+x)$ ed eguagliate le due quantità (d), (e) si ottiene

$$A_0(1+x)^m+A_1y(1+x)^m+....=(A_0+A_1x+A_2x^2....)$$
$$+y(1+x)\{A_1+2A_2x+....+nA_n x^{n-1}+....\}....$$

e siccome questa equazione deve verificarsi almeno per tutti i valori di y compresi fra limiti dati, ne seguono (§ 169.)

$A_0(1+x)^m=A_0+A_1x+A_2x^2...=(1+x)^m$ ossia $A_0=1$

ed $A_1(1+x)^m=(1+x)\{A_1+2A_2x.....+nA_n x^{n-1}...\}$

cioè $A_1(A_0+A_1x....+A_{n-1}x^{n-1}+...)=$

$A_1+x(A_1+2A_2).....+\{nA_n+(n-1)A_{n-1}\}x^{n-1}+.....$

e quindi

$$A_1A_{n-1}=nA_n+(n-1)A_{n-1}$$

vale a dire $A_n=\frac{A_{n-1}(A_1-n+1)}{n}$

Questa relazione tra i coefficienti consecutivi A_n, A_{n-1}, sussiste qualunque siasi n per cui avremo pure

$$A_{n-1}=\frac{A_{n-2}(A_1-n+2)}{n-1},\quad A_{n-2}=\frac{A_{n-3}(A_1-n+3)}{n-2}$$

$$.....\ A_2=\frac{A_1(A_1-1)}{2}$$

il prodotto delle quali fornisce

$$A_n = \frac{A_1(A_1-1)(A_1-2)\ldots\ldots(A_1-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}$$

Indicato ora con r un intero qualunque, siccome A_1 è una funzione di m, supposto $A_1 = F(m)$ avremo

$$(f)\ (1+x)^m = 1 + xF(m)\ \ldots,\ (1+x)^{mr} = 1 + xF(mr)\ldots,$$

$$= ((1+x)^r)^m = \left(1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \ldots\ldots\right)^m;$$

cosicchè nella equazione (c) sostituito il polinomio $r\,x + \frac{r(r-1)}{2}x^2 \ldots$ alla x si avrà

$$1 + x\,F(mr) + \ldots\ldots = 1 + x\,r\,F(m) + \ldots$$

cioè $F(mr) = r\,F(m)$. Nella funzione $F(mr)$ entra la m soltanto ed ovunque si trova la r, e siccome $F(mr) = r\,F(m)$ così sarà $F(m) = m\,.\,C$ (1), essendo C un coeficiente numerico, epperò $A_1 = mC$. Ma se m è intero $C = 1$, dunque $A_1 = m$, e finalmente

$$\text{(II)}\ (1+x)^m = \Sigma\,\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n}\,x^n$$

172. Supposto m negativo, cambiato cioè m in $-m$ ne verrà

$$\text{(III)}\ \frac{1}{(1+x)^m} = \Sigma\,\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1\,.\,2\ldots\ldots n}(-1)^n x^n;$$

e cambiato m nella frazione $\frac{m}{r}$ avremo

(1) Legendre. Elém. de Geometr. Edit. X. pag. 286.

$$\text{(IV)}\ (1+x)^{\frac{m}{r}} = \Sigma\,\frac{m(r-m)(2r-m)\ldots((n-1)r-m)}{r\,.\,2r\,.\,3r\ldots\ldots nr}(-1)^{n-1}x^n$$

173. Si debba svolgere in serie la funzione

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_r\,x^r)^m =$$

$$= a_0^m\left(1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \ldots + \frac{a_r}{a_0}x^r\right)^m$$

Nella formola (II) del § 171. sostituito alla x il polinomio $\left(\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0}x \ldots + \frac{a_r}{a_0}x^{r-1}\right)x$ comprendiamo che x^n verrà rappresentata dalla funzione

$$\Sigma\,\frac{n\ldots(n-n_1+1)}{1.2\ldots\ldots n_1}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{n-n_1}.\,x^n\left(\frac{a_2}{a_0} + \ldots\ldots + \frac{a_r}{a_0}x^{r-2}\right)^{n_1}x^{n_1}$$

indicando con Σ la somma di tutte quelle funzioni corrispondenti ad $n_1 = 0,\ 1,\ 2,\ldots n$

Sarà pure $\left(\frac{a_2}{a_0} + \ldots\ldots + \frac{a_r}{a_0}x^{r-2}\right)^{n_1} =$

$$\Sigma\,\frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-n_2+1)}{1.2\ldots\ldots n_2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{n_1-n_2}\left(\frac{a_3}{a_0}\ldots + \frac{a_r}{a_0}x^{r-3}\right)^{n_2}.\,x^{n_2}$$

essendo i valori di $n_2 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots n_1$ sarà

$$\left(\frac{a_3}{a_0} + \ldots\ldots + \frac{a_r}{a_0}x^{r-3}\right)^{n_2} =$$

$$\Sigma\,\frac{n_2(n_2-1)\ldots(n_2-n_3+1)}{1.2\ldots\ldots n_3}\left(\frac{a_3}{a_0}\right)^{n_2-n_3}\left(\frac{a_4}{a_0}\ldots + \frac{a_r}{a_0}x^{r-4}\right)^{n_3}.\,x^{n_3}$$

ponendo successivamente $n_3 = 0,\ 1,\ 2,\ldots\ldots n_2$ Continuata tale operazione comprendiamo essere

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots\ldots + a_r x^r)^m =$$

$$= \Sigma \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-n_1+1)}{1.2\ldots\ldots n_1} \times$$

$$\frac{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-n_2+1)}{1.2\ldots n_2} \ldots \frac{n_{r-1}(n_{r-1}-1)\ldots(n_{r-1}-n_r+1)}{1.2\ldots\ldots n_r} a_0^m$$

$$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{n-n_1}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{n_1-n_2}\ldots\ldots\left(\frac{a_r}{a_0}\right)^{n_{r-1}-n_r} . x^{n+n_1+n_2\ldots\ldots+n_r}$$

174. » Si debba svolgere in serie la frazione » algebraica

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \ldots\ldots + b_n x^n}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots\ldots + a_m x^m}$$

Se il grado del denominatore non supera quello del numeratore, la frazione essendo mista, si ridurrà mediante la divisione ad una parte intera rispetto ad x ed una frazione propria, alla quale si applicherà lo sviluppo. Noi fingeremo perciò $m > n$. La serie cercata sia

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_r x^r + A_{r+1} x^{r+1} \ldots A_{r+m} x^{r+m} \ldots$$

e moltiplicando per il denominatore si avrà

$$b_0 + b_1 x \ldots\ldots b_r x^r =$$

$$A_0 a_0 + x(A_1 a_0 + A_0 a_1) + x^2(A_2 a_0 + A_1 a_1 + A_0 a_2) + \ldots\ldots$$

$$\ldots + x^{r+m}(A_{r+m} a_0 + A_{r+m-1} a_1 + A_{r+m-2} a_2 \ldots\ldots + A_r a_m) \ldots$$

da cui (§ 170) ne seguono

$$A_0 a_0 = b_0,\ A_1 a_0 + A_0 a_1 = b_1,\ a_0 A_{r+m} + a_1 A_{r+m-1} \ldots + a_m A_r = 0$$

. . . . . .

per le quali equazioni troveremo i coefficienti della serie cercata. I primi A_0, A_1, A_2 ..... A_n di-

pendono dal denominatore e gli altri ne sono indipendenti, cioè il coefficiente di un termine qualunque A_{r+m} si forma *ricorrendo* ad un numero m di coefficienti antecedentemente determinati, ed eguaglia la somma dei coefficienti A_{m+r-1}, A_{m+r-2}, ... A_r moltiplicati per

$$(g) \quad -\frac{a_1}{a_0},\ -\frac{a_2}{a_0},\ \ldots\ -\frac{a_m}{a_0}$$

La serie dei coefficienti A_0, A_1, A_2.... si chiama *ricorrente* dell' ordine m esimo, ed i coefficienti (g) ne costituiscono la così detta *scala di relazione*.

175. » Si voglia la serie che, nel sistema iper- » bolico, rappresenta $\log(1+x)$.

Si finga

$$(k) \quad \log(1+x) = A_1 x + A_2 x^2 \ldots\ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n \ldots$$

supponendo che abbia luogo anche per $x = 0$. Cambiato in (k) x in y, sottraendo si avrà

$$\log(1+x) - \log(1+y) = \log\left(1 + \frac{x-y}{1+y}\right) =$$

$$(l) \quad = A_1(x-y) + \ldots\ldots + A_n(x^n - y^n) + \ldots$$

Posta nella (k) $\frac{x-y}{1+y}$ in luogo della x si ottiene

$$(m) \quad \log\left(1 + \frac{x-y}{1+y}\right) = A_1\left(\frac{x-y}{1+y}\right) + \ldots\ldots + A_n\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^n \ldots$$

cosicchè eguagliate le serie (l) (m), divisa la equazione per $x-y$, e posto nel quoziente $x=y$ ne segue

$$A_1 + 2A_2 x \ldots + nA_n x^{n-1} + (n+1)A_{n+1} x^n \ldots\ldots = \frac{A_1}{1+x}$$

moltiplicando per $1+x$ si deduce

$$A_1+x(A_1+2A_2)+\ldots\ldots+x^n\{nA_n+(n+1)A_{n+1}\}\ldots=A_1$$

epperò (§ 170.)

$$nA_n+(n+1)A_{n+1}=0, \text{ ossia } A_{n+1}=-\frac{n}{n+1}A_n$$

Da questa si desumono

$$A_n=-\frac{n-1}{n}A_{n-1},\ A_{n-1}=-\frac{n-2}{n-1}A_{n-2},\ldots$$

$$A_2=-\frac{1}{2}A_1,$$

il prodotto delle quali essendo $A_n=(-1)^{n-1}\frac{A_1}{n}$

ne segue $\log(1+x)=A_1\,\Sigma\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

Il coefficiente A_1 suol chiamarsi *modulo* del sistema logaritmico, il quale è l'unità nel sistema iperbolico che si considera; per cui avremo

$$\text{(V)}\quad \log(1+x)=\Sigma\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

Indicata con e la base iperbolica, con a quella di qualunque altro sistema, con $\mathrm{Log}(1+x)$ il logaritmo corrispondente al numero $1+x$, siccome $Log(1+x)=Log\,e\,.\,Log(1+x)$, avremo

$$\text{(VI)}\quad Log(1+x)=Log\,e\,.\,\Sigma\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

176. » Si voglia la serie che rappresenta la » funzione esponenziale a^x?

Sia (n) $a^x=1+A_1x+A_2x^2\ldots\ldots+A_{n-1}x^{n-1}+A_n\,x^n\ldots$

affinchè abbia luogo per $x=0$. Sarà

$$ay=1+A_1y+A_2y^2\ldots\ldots \text{ quindi}$$

$$a^x-ay=ay(a^{x-y}-1)=A_1(x-y)\ldots+A_n(x^n-y^n)\ldots$$

Si ponga nella (n) $x-y$ in luogo della x e sostituita in quest' ultima equazione la serie esprimente a^{x-y} ne verrà

$$ay\{A_1(x-y)+A_2(x-y)^2\ldots\ldots+A_n(x-y)^n\ldots\ldots\}=$$

$$=A_1(x-y)+A_2(x^2-y^2)\ldots\ldots+A_n(x^n-y^n)\ldots\ldots$$

Si divida per $x-y$, e posto $y=x$ si avrà

$$A_1(1+A_1x\ldots\ldots+A_{n-1}x^{n-1}\ldots\ldots)=$$

$$=A_1+2A_2x\ldots\ldots+nA_nx^{n-1}\ldots$$

quindi $nA_n=A_1A_{n-1}$, ossia

$$A_n=\frac{A_1}{n}A_{n-1},\ A_{n-1}=\frac{A_1}{n-1}A_{n-2},\ldots\ldots A_3=\frac{A_1}{3}A_2$$

da cui moltiplicando si ha

$$A_n=\frac{A_1^n}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

e finalmente $a^x=\Sigma\frac{A_1^n\,x^n}{1.2.3\ldots\ldots n}$.

Si faccia $a=1+b$ per cui

$$a^x=(1+b)^x=1+x.b+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}b^3\ldots\ldots$$

$$(\S.\ 170)=1+x\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}\ldots\ldots\right)+\ldots\ldots=1+A_1x+\ldots$$

quindi

$$A_1=b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}\ldots\ldots=\Sigma\frac{(-1)^{n-1}b^n}{n}=\log(1+b)=\log a$$

e per ultimo (VII) $a^x = \Sigma \frac{x^n (\log a)^n}{1.2....n}$,

(VIII) $e^x = \Sigma \frac{x^n}{1....n}$ essendo $\log e = 1$.

177. »Si debba trovare la serie che rappresenta »la funzione trigonometrica $\cos x$?

Siccome questa funzione non cambia cambiando il segno all' angolo, e si riduce all' unità se $x = 0$, dovrà essere

$$(o)\ \cos x = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 ... + A_{2n} x^{2n} + A_{2n+2} x^{2n+2} .....$$

cioè le potenze dell' angolo x saranno tutte pari. Indicato con y un altro angolo, siccome

$$(p)\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \,.\, \cos y$$

cambiato in (o) la x in y, poi in $x - y$, quindi in $x + y$, sostituite nella equazione (p) le serie che esprimono le funzioni $\cos y$, $\cos(x-y)$, $\cos(x+y)$, si avrà

$$2 + A_2 \{(x+y)^2 + (x-y)^2 + \} \ .....$$
$$+ A_{2n} \{(x+y)^{2n} + (x-y)^{2n}\} \ .....$$
$$= 2\cos x + 2A_2 y^2 \,.\, \cos x + \ .....$$

Sviluppando nel primo membro le potenze indicate ed ordinando il risultato per rispetto ad y ne segue

$$2\{1 + A_2 x^2 ... + A_{2n} x^{2n} ....\} + 2y^2 \{A_2 + \frac{4.3}{2} A_4 x^2 ..... +$$
$$+ \frac{2n(2n-1)}{2} A_{2n} x^{2n-2} ....\} + ... = 2\cos x + 2y^2 . A_2 \cos x + ...$$

ed eguagliati i coefficienti di y^2 si ha

$$A_2 + \frac{4.3}{2} A_4 x^2 + ... + \frac{2n(2n-1)}{2} A_{2n} x^{2n-2} ..... =$$
$$= A_2 (1 + A_2 x^2 .. . + A_{2n-2} x^{2n-2} .....) \text{ quindi}$$
$$\frac{2n(2n-1)}{2} A_{2n} = A_2 \,.\, A_{2n-2}$$

per conseguenza

$$\frac{(2n-2)(2n-3)}{2} A_{2n-2} = A_2 A_{2n-4},$$
$$\frac{(2n-4)(2n-5)}{2} A_{2n-4} = A_2 A_{2n-6} .... \frac{4.3}{2} A_4 = A_2 \,.\, A_2$$

il prodotto delle quali equazioni fornisce

$$A_{2n} = \frac{(2A_2)^n}{2.3.4.....2n}.$$

Siccome poi $\cos x < 1$ sarà A_2 una quantità negativa, cosicchè supposto $2A_2 = -m^2$, ne viene

$$A_{2n} = \frac{(-1)^n . m^{2n}}{1.2....2n} \text{ e } (q)\ \cos x = \Sigma \frac{(-1)^n \,.\, m^{2n} \,.\, x^{2n}}{1.2....2n}$$

comprendendo nella sommatoria Σ anche il primo termine che corrisponde ad $n = 0$.

178. Supponendo $\operatorname{sen} x = A_1 x + A_3 x^3 + ...$ siccome $\operatorname{sen} x = 0$ quando $x = 0$, e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$: mediante la formola $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$ troveremo $\operatorname{sen} x = A_1 \,.\, \Sigma \frac{(-1)^n . m^{2n} . x^{2n+1}}{1.2.....2n+1}$.

Dalla equazione $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, si deduce poi $A_1 = m$, per cui

$$(r)\quad \operatorname{sen} x = \Sigma \frac{(-1)^n . m^{2n+1} . x^{2n+1}}{1.2.3.....2n+1}.$$

Poniamo, come suol farsi comunemente, $m = 1$ (veggasi §. 195) e ne verranno

$$\text{(IX)}\quad \operatorname{sen} x = \Sigma \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1.2...(2n+1)},\quad \cos x = \Sigma \frac{(-1)^n x^{2n}}{1.2....2n}.$$

Volendosi la espressione dell' arco in serie ordinata secondo le potenze del seno troveremo

$$x = \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + ...$$

supponendovi però $m = 1$: il che si lascia per esercizio allo studioso.

179. Considerando la equazione (IX) cioè

$$(s)\quad \operatorname{sen} x = x\left\{1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2...5}.....\right\}$$

supposto i un numero intero qualunque, ed $x = \pm i\pi$, avremo $\operatorname{sen} x = 0$, per cui il binomio $x^2 - i^2\pi^2$ sarà un fattore quadrato della quantità (s) fra le parentesi; e siccome dalla equazione identica

$$(x-a_1)(x-a_2) \ldots\ldots (x-a_m) = x^m + A_1 x^{m-1} \ldots\ldots$$
$$\ldots + A_{m-1}x + A_m$$

si desume (§. 9)

$$\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)....\left(1-\frac{x}{a_m}\right) = 1 + \frac{A_{m-1}}{A_m}x + \frac{A_{m-2}}{A_m}x^2 .....$$

dalla (s) ne verrà (1)

$$\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + ...\right) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\times....$$

(1) Queste estensioni verranno dichiarate.

e quindi (§. 10)

$$\text{(X)}\quad \Sigma\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{2.3},\ \Sigma\frac{1}{i^2t^2} = \frac{\pi^4}{2.3.4.5},\ \Sigma\frac{1}{i^2t^2u^2} = \frac{\pi^6}{2....7}.....$$

ove i, t, u..... rappresentano tutti i numeri interi.

Con analogo discorso proveremo

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots \text{ quindi}$$

$$\text{(XI)}\quad \Sigma\frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{\pi^2}{2.4}.....$$

181. » Si voglia la serie che rappresenta » ang.tang. x ?

Siccome questa funzione si annulla, e cambia il segno colla variabile x, dovrà essere

$$(t)\quad \text{ang.tang}\,x = A_1 x + A_3 x^3 ..... + A_{2n+1}x^{2n+1} .....$$

e siccome (u) $\text{ang.tang}\dfrac{x-y}{1+xy} = \text{ang.tang}\,x - \text{ang.tang}\,y$

cambiata in (t) la x in y poi in $\dfrac{x-y}{1+xy}$, sostituite in (u) alle funzioni trigonometriche le serie equivalenti, divisa la equazione che risulta per $x-y$, quindi fatto $y=x$ si ottiene

$$\frac{A_1}{1+x^2} = A_1 + 3A_3x^2 .....$$
$$\ldots + (2n-1)A_{2n-1}x^{2n-1} + (2n+1)A_{2n+1}x^{2n} .....$$

da cui moltiplicando per $1+x^2$ si ha (§. 170) $(2n+1)A_{2n+1} + (2n-1)A_{2n-1} = 0$, e quindi

$$A_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}A_1.$$

Rappresentata con y la serie (t), ne segue $x=\tang y$, cioè $(1+x^2)\operatorname{sen}^2 y=x^2$, ove sostituito a $\operatorname{sen} y$ il valore dato dalla serie (IX), quindi rimesso il valore di y si ottiene

$$x^2=(1+x^2)\{A_1^2x^2+\ldots\ldots\}\text{, cioè } A_1=1\text{, ed}$$

$$\text{(XII) } \operatorname{ang.tang} x=\Sigma\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

181. »Si debbano svolgere in serie le radici di »una equazione algebraica (1).

Fingiamo a cagion d' esempio che la equazione data sia

$$a-bx+cx^2=0$$

le cui radici indico con a_1, a_2, per cui sarà

$$x^2-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=(x-a_1)(x-a_2)$$

Divido ambo i membri per $\frac{bx}{c}$ per cui si ottiene

$$1-\frac{a}{bx}-\frac{cx}{b}=\frac{c}{bx}(x-a_1)(a_2-x)=\frac{a}{ba_1}\left(1-\frac{a_1}{x}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)$$

essendo $\frac{a}{c}=a_1a_2$. Presi i logaritmi si ha

$$\log\left\{1-\left(\frac{a}{bx}+\frac{cx}{b}\right)\right\}=\log\frac{a}{ba_1}+\log\left(1-\frac{a_1}{x}\right)+\log\left(1-\frac{x}{a_2}\right)$$

(1) Lagrange. Istoria dell'Accad. R. di Berlino 1768 ed il Traité de la resol. des equat. numer. = Laplace. Histoire de l'Acad. R. des Sciences. 1778. = Sig. Cav. Paoli. Algebra Opus. 2. = Sig. Cauchy. Opuscoli Matematici. Milano 1834.

e posto $\frac{a}{x}+cx=\chi$, mediante la formola (ν) (§ 175) ne desumiamo

$$(\nu)\ \left\{\frac{\chi}{b}+\frac{1}{2}\frac{\chi^2}{b^2}+\ldots\right\}=\log\frac{a}{ba_1}+\left\{\frac{a_1}{x}+\frac{a_1^2}{2x^2}\ldots\ldots\right\}+$$
$$+\left\{\frac{x}{a_2}+\frac{x^2}{2a_2^2}\ldots\ldots\right\}$$

nella quale equazione *identica, come quella da cui si è desunta*, i coefficienti di $\frac{1}{x}$ saranno eguali fra loro. Considerando ora una potenza intera qualunque $\chi^m=\left(\frac{a}{x}+cx\right)^m$ facilmente comprendiamo esistere in essa un termine unico in cui si trova $\frac{1}{x}$ e questo si è

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots\ldots r}\left(\frac{a}{x}\right)^{m-r}(cx)^r$$

ove $m-r=r+1$, cioè $m=2r+1$, numero dispari, e quel termine si ridurrà a

$$\frac{(2r+1)2r(2r-1)\ldots(r+2)}{1.2.3\ldots\ldots r}\cdot\frac{a^{r+1}c^r}{x}.$$

Eguagliati adunque i coefficienti di $\frac{1}{x}$ nella equazione (ν) avremo

$$a_1=\frac{a}{b}+\Sigma\frac{a^{r+1}c^r}{(2r+1)b^{2r+1}}\cdot\frac{(2r+1)2r(2r-1)\ldots(r+2)}{1.2.3\ldots r}$$

e finalmente

$$\text{(XIII) } a_1=\frac{a}{b}+\Sigma\frac{2r(2r-1)\ldots(r+2)}{1.2\ldots r}\frac{a^{r+1}c^r}{b^{2r+1}}.$$

182. Tutte le serie fin qui ottenute si ordinarono secondo potenze ascendenti della variabile: indicheremo ora come lo stesso metodo fornisca serie ordinate secondo potenze discendenti. La funzione a svolgere sia $\{x+\sqrt{(x^2-k^2)}\}^m$ e la serie

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_nx^{m-n}\ldots\ldots$$

Fra i varj metodi che possiamo seguire adotterò il seguente che istruisce intorno alcuni artificj. Poniamo $\sqrt{(x^2-k^2)}=x-y$, per cui $x=\frac{k^2+y^2}{2y}$, $\sqrt{(x^2-k^2)}=\frac{k^2-y^2}{2y}$ e la equazione

$$\{x+\sqrt{(x^2-k^2)}\}^m=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots$$

si trasformerà nella seguente

$$\frac{k^{2m}}{y^m}=\frac{A_0}{2^m}\frac{(k^2+y^2)^m}{y^m}+\frac{A_1}{2^{m-1}}\frac{(k^2+y^2)^{m-1}}{y^{m-1}}+\ldots\ldots \text{ovvero}$$

$$k^{2m}=\frac{A_0}{2^m}(k^2+y^2)^m+\frac{A_1}{2^{m-1}}(k^2+y^2)^{m-1}.y+$$

$$\frac{A_2}{2^{m-2}}(k^2+y^2)^{m-2}y^2+\frac{A_3}{2^{m-3}}(k^2+y^2)^{m-3}y^3\ldots\ldots$$

la quale dovrà aver luogo almeno per tutti i valori di y compresi fra limiti dati. Siccome la y lineare esiste unicamente nel secondo termine del secondo membro ne segue (§. 169) $A_1=0$, e per la stessa ragione dovranno essere $A_3=A_5=A_7=\ldots\ldots=0$. Sviluppando poi le potenze del binomio k^2+y^2 (§. 171) avremo

$$\frac{A_0}{2^m}=1,\ \frac{A_2}{2^{m-2}}+mk^2\frac{A_0}{2^m}=0,$$

$$\frac{A_4}{2^{m-4}}+(m-2)k^2\frac{A_2}{2^{m-2}}+\frac{m(m-1)}{2}k^4\frac{A_0}{2^m}=0$$

$$\frac{A_6}{2^{m-6}}+(m-4)k^2\frac{A_4}{2^{m-4}}+\frac{(m-2)(m-3)}{2}k^4\frac{A^2}{2^{m-2}}+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}k^6.\frac{A_0}{2^m}=0$$

. . . . . ,

nelle quali è manifesta la legge di successione. Quindi derivano $\frac{A_0}{2^m}=1$, $\frac{A_2}{2^{m-2}}=-mk^2$

$$\frac{A_4}{2^{m-4}}=\frac{m(m-3)}{2}k^4,\ \frac{A_6}{2^{m-6}}=-\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}k^6\ldots\ldots$$

epperò

(XIV) $\{x+\sqrt{(x^2-k^2}\}^m=(2x)^m-mk^2(2x)^{m-2}+$

$$\frac{m(m-3)}{2}k^4(2x)^{m-4}-\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}k^6(2x)^{m-6}+\ldots\ldots$$

Siccome questa equazione ha luogo qualunque sia la m, cambiatovi il segno, ne verrà

$$\{x+\sqrt{(x-k^2)}\}^{-m}=(2x)^{-m}+mk^2(2x)^{-m-2}+$$

$$\frac{m(m+3)}{2}k^4(2x)^{-m-4}+\frac{m(m+4)(m+5)}{2.3}k^6(2x)^{-m-6}\ldots\ldots$$

e siccome $\{x-\sqrt{(x^2-k^2)}\}^m=k^{2m}.(x+\sqrt{(x^2-k^2)}-^m$ avremo ancora

$$\text{(XV)}\quad \{x-\sqrt{(x^2-k^2)}\}^m = k^{2m}\Big\{(2x)^{-m} + mk^2(2x)^{-m-2}$$

$$+\frac{m(m+3)}{2}k^4(2x)^{-m-4}+\ldots\ldots\Big\}$$

che ci presenta una serie ordinata secondo le potenze inverse della variabile x.

183. Raccoglieremo in questo paragrafo alcune conseguenze molto interessanti nell'analisi trascendente. Nella equazione (VIII) si ponga $x\sqrt{-1}$ poi $-x\sqrt{-1}$ in luogo della x, e *ritenuta la sussistenza della equazione* ne verranno

$$e^{x\sqrt{-1}}=\Sigma\frac{x^n(\sqrt{-1})^n}{1.2\ldots n}\,,\quad e^{-x\sqrt{-1}}=\Sigma\frac{(-1)^n.x^n(\sqrt{-1})^n}{1.2.3\ldots n}$$

d' onde si traggono

$$e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}=\Sigma\frac{x^n}{1.2\ldots n}[1+(-1)^n](\sqrt{-1})^n$$

$$e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}=\Sigma\frac{x^n}{1.2\ldots n}[1-(-1)^n](\sqrt{-1})^n$$

Nella prima equazione tutti i termini nei quali n è dispari spariscono essendo $1+(-1)^n=0$, per cui rimane

$$\text{(XVI)}\quad \frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=\Sigma\frac{(-1)^n.x^{2n}}{1.2\ldots 2n}=\cos x\ (\S.\ 178).$$

Nella seconda equazione spariscono tutti i termini nei quali n è pari, e se ne deduce

$$\text{(XVII)}\quad \frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\Sigma\frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{1.2.3..(2n+1)}=\operatorname{sen}x\ (\S.\ 178)$$

Da queste equazioni ne derivano poi

$$\text{(XVIII)}\quad e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen}x\,,$$

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\operatorname{sen}x.$$

quindi

$$e^{2x\sqrt{-1}}=\frac{1+\sqrt{-1}\tang x}{1-\sqrt{-1}\tang x}$$

e passando ai logaritmi iperbolici avremo ancora

$$\pm x\sqrt{-1}=\log(\cos x\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}x)$$

$$\text{(XIX)}\quad x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\sqrt{-1}\tang x}{1-\sqrt{-1}\tang x}$$

Se nella prima di queste formole poniamo $x=2h\pi$ essendo h qualunque numero intero, siccome

$$\cos(2h\pi)=1\,,\ \operatorname{sen}(2h\pi)=0 \text{ ne segue}$$

$$\text{(XX)}\quad \log(1)=\pm 2h\pi\sqrt{-1}$$

Postovi $x=(2h+1)\pi$ se ne deduce

$$\text{(XXI)}\quad \log(-1)=\pm(2h+1)\pi\sqrt{-1}$$

Facciamo $x=(2h+1)\frac{\pi}{2}$ e ne desumeremo

$$\text{(XXII)}\quad \log(\pm\sqrt{-1})=\pm(2h+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

Essendo P un numero ed y tale quantità che renda $e^y=P$ avremo per la formola (XX)

$$y=\log P\pm 2h\pi\sqrt{-1}$$

cosicchè ogni numero avrà infiniti logaritmi oltre l' unico reale che viene fornito dalle tavole.

Supponendo $x=2h\pi$, $=(2h+1)\pi$, $=(2h+1)\frac{\pi}{2}$ le formole (XVIII) ci danno le seguenti

$$\text{(XXIII)}\quad e^{\pm 2h\pi\sqrt{-1}}=1\,,\quad e^{\pm(2h+1)\pi\sqrt{-1}}=-1$$

$$e^{\pm(2h+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}=\pm\sqrt{-1}$$

per cui, indicata con $\frac{m}{n}$ una frazione, avremo

$$\text{(XXIV)}\quad (-1)^{\frac{m}{n}}=e^{\pm\frac{m}{n}(2h+1)\pi\sqrt{-1}}$$

$$=\cos(2h+1)\frac{m\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(2h+1)\frac{m\pi}{n}$$

$$(\pm\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}=\cos(2h+1)\frac{m\pi}{2n}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(2h+1)\frac{m\pi}{2n}$$

Essendo (§. 32) $\log(a\pm b\sqrt{-1})=$ $=\log r+\log(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ ove $r=\sqrt{(a^2+b^2)}$, $\varphi=\mathrm{Ang.tang}\frac{b}{a}$, ne segue

$$\text{(XXV)}\quad \log(a\pm b\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2)$$

$$\pm\left\{2h+\mathrm{Ang.tang}\frac{b}{a}\right\}\sqrt{-1}.$$

Così dalla formola (XVI) desumiamo

$$\text{(XXVI)}\quad \cos(a+b\sqrt{-1})=\frac{e^b+e^{-b}}{2}\cos a-\sqrt{-1}\,\frac{e^b-e^{-b}}{2}\,\mathrm{sen}\,a$$

ed analogamente si avrà $\mathrm{sen}(a+b\sqrt{-1})$.

184. Ma quale idea dobbiamo formarci di queste formole, le quali considerate in se stesse non

hanno significato percettibile? Elleno spontanee si offrono nell' analisi, come si presentano gli esponenti negativi e frazionarii, lo zero diviso per zero ecc. la cui origine comune è un errore. Una equazione del secondo grado insussistente, sottoposta al calcolo ordinario, quasi che la incognita fosse una quantità, ne conduce le forme immaginarie. Le radici di una equazione del terzo ordine si presentano sotto la medesima forma allorquando, essendo trascendenti (*) noi le supponiamo algebraiche (§ 85.). Così se per determinare una funzione incognita $f(x)$ fingiamo la medesima espressa per una serie di termini esponenziali a_1^x, a_2^x . . . . ., quando ciò non sia, i valori di a_1, a_2 . . . . saranno immaginarii, e per tali ed altre ragioni spontaneamente le quantità si presentano nell' algebra vestite di quelle apparenze immaginarie ad avvertirci di qualche errore. In tali casi d' uopo sarebbe riprendere da capo la questione volgendoci ad altra ipotesi, finchè si pervenga ad un risultato significante; ma osservando che quei simboli impliciti nelle equazioni si assoggettano al calcolo quasi fossero quantità, istudiate le varie trasformazioni che quindi subiscono, si riconosce che quei risultati immaginarii per erroneità della forma supposta si riducono all' aspetto loro proprio mediante le formole superiormente indicate (§ 183.): ogni termine immaginario assume la forma $A+B\sqrt{-1}$ (§ 35.), a ciascuno corrispon-

(*) Lagrange. Théorie de fonct. analy. An. V. pag. 76.

de un termine conjugato $A - B\sqrt{-1}$ (§ 36.) e per tal modo sparisce ogni simbolo immaginario. Il rendere ragione di queste proposizioni a priori e in generale, giudichiamo cosa da non tentare in questo luogo, nei casi concreti però (1) il fatto ne chiarisce la verità cosicchè non resti a dubitare.

I matematici usano talvolta ad arte degli immaginarii; ma sarà necessaria somma circospezione e lodevole la parsimonia.

CAPO II.

Serie di termini trascendenti.

185. Sarà dimostrato (§ 187.) essere

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \ldots\ldots = \frac{\pi}{4}$$

finchè il valore dell'angolo x è compreso fra i limiti $\pm\frac{\pi}{2}$, onde ne segue che una funzione espressa dalla serie $A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots\ldots$ lo sarà pure dalla seguente

$$\left(A_0 + \frac{\pi}{4}\right) + (A_1 - 1)\cos x + A_2\cos 2x + \left(A_3 + \frac{1}{3}\right)\cos 3x \ldots$$

nelle quali la stessa funzione circolare è dotata di coeficienti essenzialmente diversi. Dunque s'ingan-

(1) Un bel esempio si vegga nelle opere sul Calorico del cel. S.r Poisson. Journal Polyt. T. 12. pag. 30 e 321. -- Theorie math. de la Chaleur. Chap. IX.

nerebbe chi nella ricerca dei coeficienti $A_0, A_1, \ldots$, volesse impiegare il principio del § 169. (1), egli è d'uopo ricorrere ad altri metodi dei quali noi indicheremo i principali, incominciando con un teorema memorabile.

186. »Espressa una funzione per mezzo di una » serie ordinata secondo potenze dispari della va- » riabile si può derivare altra serie che proceda » secondo seni di archi multipli della variabile » medesima.

La serie $A_1 x - \frac{A_3}{2\,.\,3}x^3 + \frac{A_5}{2.3.4.5}x^5 - \ldots$ rappresentando una funzione $f(x)$ vogliamo derivarne altra serie della forma

$$B_1 \operatorname{sen} x + B_2 \operatorname{sen} 2x + B_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots\ldots$$

cosicchè, almeno fra certi limiti della x, sia

$$(x) \qquad B_1 \operatorname{sen} x + B_2 \operatorname{sen} 2x \ldots\ldots = \\ = A_1 x - \frac{A_3}{2\,.\,3}x^3 \ldots\ldots \pm x^m$$

A tale oggetto si ponga $x + \omega$ in luogo della x, si sostituiscano nel primo membro i valori di $\operatorname{sen}(x+\omega)$, $\operatorname{sen} 2(x+\omega)\ldots$ espressi per $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}\omega$, $\cos x\ldots$; in vece delle funzioni $\operatorname{sen}\omega$, $\cos\omega$, $\operatorname{sen}2\omega\ldots$ si mettano i loro sviluppi dati dalle formole (IX. § 178.); poi si svolgano le potenze del binomio $x + \omega$ che sono nel secondo membro, ed ordinati i risultamenti rispetto ad ω si avrà la equazione

(1) Sig. Cauchy. Biblioteca Italiana. Tom. 60, Novembre p. 216. — S.r Libri. Memorie cit.

$$\left(1-\frac{\omega^2}{2}+\ldots\right)B_1\operatorname{sen}x+\left(\omega-\frac{\omega^3}{2.3}+\ldots\right)B_1\cos x+$$
$$\left(1-2^2\frac{\omega^2}{2}+\ldots\right)B_2\operatorname{sen}2x+\left(2\omega-2^3\frac{\omega^3}{2.3}+\ldots\right)B_2\cos 2x+$$
$$\left(1-3^2\frac{\omega^2}{2}+\ldots\right)B_3\operatorname{sen}3x+\left(3\omega-3^3\frac{\omega^3}{2.3}+\ldots\right)B_3\cos 3x+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$
$$(A_1x+\ldots)+\omega\left(A_1-A_3\frac{x^2}{2}+\ldots\right)+\omega^2(\ldots\ldots)+\omega^3(A_3+\ldots)$$

nella quale eguagliati i coeficienti di ω, ω^3, ω^5,... (§ 169) e posti in ciascuno $x=0$, perchè $x=0$ soddisfa la equazione (x), ne verranno

$$B_1+2B_2+3B_3+\ldots+mB_m=A_1$$
$$(y)\quad B_1+2^3B_2+3^3B_3+\ldots+m^3B_m=A_3$$
$$B_1+2^5B_2+3^5B_3+\ldots+m^5B_m=A_5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nelle quali l' indice m, posto per fissare le idee, deve considerarsi come affatto indeterminato. Per desumerne le incognite B_1, B_2,..., per esempio B_r, rappresento con

$$(z)\quad P^{(r)}_m+xP^{(r)}_{m-1}+x^2P^{(r)}_{m-2}\ldots=0$$

la equazione che ha per radici tutti i numeri quadrati 1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2.....$(r-1)^2$, $(r+1)^2$, ... omessa r, le cui potenze moltiplicano B_r nelle equazioni (y), moltiplico quelle equazioni ordinatamente per $P^{(r)}_m$, $P^{(r)}_{m-1}$..... incominciando dalla prima, e sommati i prodotti ne deriva

$$(a)\quad rB_r\left(P^{(r)}_m+r^2P^{(r)}_{m-1}+r^4P^{(r)}_{m-2}+\ldots\right)=$$
$$A_1P^{(r)}_m+A_3P^{(r)}_{m-1}+A_5P^{(r)}_{m-2}+\ldots$$

annullandosi i coefficienti di tutte le B_1, B_2,....., per cui sarà dato B_r quando conosceremo le quantità $P^{(r)}$. Incominciando dalle $P^{(1)}_m$, $P^{(1)}_{m-1}$,.... atteso il significato di

$$\frac{(-1)^{m-r}P^{(1)}_{m-r}}{(-1)^mP^{(1)}_m}=\frac{(-1)^rP^{(1)}_{m-r}}{P^{(1)}_m},\ \text{e di}\ \frac{(-1)^{r-1}P^{(1)}_{m-r+1}}{P^{(1)}_m}$$

(§ 9.) comprendiamo che

$$\frac{(-1)^rP^{(1)}_{m-r}+(-1)^{r-1}P^{(1)}_{m-r+1}}{P^{(1)}_m}$$

eguaglia la somma dei prodotti ad r ad r dei quadrati inversi 1, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$,... cosicchè (§ 179. form.X) quella frazione sarà eguale a $\frac{\pi^{2r}}{1.2.3\ldots\ldots 2r+1}$

ossia

$$\frac{P^{(1)}_{m-r}}{P^{(1)}_m}-\frac{P^{(1)}_{m-r+1}}{P^{(1)}_m}=\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{1.2\ldots.(2r+1)}$$

dalla quale, ponendo $r=1, 2, 3, 4$..... ne derivano

$$\frac{P^{(1)}_{m-1}}{P^{(1)}_m}=1-\frac{\pi^2}{2.3},\quad \frac{P^{(1)}_{m-2}}{P^{(1)}_m}=1-\frac{\pi^2}{2.3}+\frac{\pi^4}{2.3.4.5},\ldots\ldots$$
$$\frac{P^{(1)}_{m-r}}{P^{(1)}_m}=1-\frac{\pi^2}{2.3}+\ldots+\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{1.2.3\ldots(2r+1)}$$

Essendo poi

$$1+\frac{P^{(1)}_{m-1}}{P^{(1)}_m}x+\frac{P^{(1)}_{m-2}}{P^{(1)}_m}x^2\ldots=\left(1-\frac{x}{2^2}\right)\left(1-\frac{x}{3^2}\right)\ldots\ldots$$

avremo

$$1+\frac{P^{(1)}_{m-1}}{P^{(1)}_m}+\frac{P^{(1)}_{m-2}}{P^{(1)}_m}\ldots\ldots=\frac{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\ldots\ldots}{2^2.3^2.4^2\ldots}$$
$$=\frac{1.3\times2.4\times3.5\times4.6\times\ldots}{2^2.3^2\ldots}=\frac{2.3^2.4^2.5^2\ldots}{2^2.3^2\ldots}=\frac{1}{2}$$

e finalmente

$$(b)\ \tfrac{1}{2}B_1 = A_1 - A_3\left(\frac{\pi^2}{2.3} - 1\right) + A_5\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{\pi^2}{2.3} + 1\right)\ldots$$

Dalla equazione

$$P^{(r)}{}_m + P^{(r)}{}_{m-1}\ x + P^{(r)}{}_{m-2}\ x^2 + \ldots = \frac{x-1}{x-r^2}\left(P^{(1)}{}_m + P^{(1)}{}_{m-1}x + P^{(1)}{}_{m-2}\ x^2 \ldots\right)$$

moltiplicata per $x-r^2$, ed eguagliati i coefficienti delle potenze omologhe della x, ne vengono

$$r^2 P^{(r)}{}_m = P^{(1)}{}_m,\ P^{(1)}{}_{m-n} - P^{(1)}{}_{m-n-1} = P^{(r)}{}_{m-n} - r^2 P^{(r)}{}_{m-n-1}$$

ossia

$$\frac{P^{(r)}{}_{m-n-1}}{P^{(r)}{}_m} = \frac{1}{r^2}\frac{P^{(r)}{}_{m-n}}{P^{(r)}{}_m} + \left(\frac{P^{(1)}{}_{m-n-1}}{P^{(1)}{}_m} - \frac{P^{(1)}{}_{m-n}}{P^{(1)}{}_m}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{P^{(r)}{}_{m-n}}{P^{(r)}{}_m} + \frac{(-1)^{n+1}\ \pi^{2n+2}}{1\,.\,2\ldots(2n+3)}$$

e ponendo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ si avranno

$$\frac{P^{(r)}{}_{m-1}}{P^{(r)}{}_m} = \frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{2.3},$$

$$\frac{P^{(r)}{}_{m-2}}{P^{(r)}{}_m} = \frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\pi^2}{2\,.\,3} + \frac{\pi^4}{2.3.4.5},\ \ldots$$

essendo poi

$$1 + \frac{P^{(r)}{}_{m-1}}{P^{(r)}{}_m}r^2 + \frac{P^{(r)}{}_{m-2}}{P^{(r)}{}_m}r^4 \ldots =$$

$$= \frac{(1-r^2)(2^2-r^2)\ldots((r-1)^2-r^2)((r+1)^2-r^2)((r+2)^2-r^2)}{1.2^2.3^2\ldots(r-1)^2(r+1)^2\ldots}$$

$$= (-1)^{r-1}\frac{(r-1)(r+1)\ldots\times 1.(2r-1)\times 1.(2r+1)\times 2.(2r+2)\ldots}{1\,.\,2^2\,.\,3^2\ldots(r-1)^2(r+1)^2}$$

$$= (-1)^{r-1}\frac{1.2\ldots(r-1)\times(r+1)\ldots(2r-1)\times(2r+1)\ldots\times 1.2\ldots}{1.2^2.3^2\ldots(r-1)^2(r+1)^2\ldots}$$

$$= (-1)^{r-1}\frac{(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots)^2\times r^2}{r\,.\,(2r)\ (1\ 2.3\ldots)^2} = \frac{(-1)^{r-1}}{2}$$

si avrà finalmente

$$(b)\ \frac{r}{2}B_r(-1)^{r-1} = A_1 - A_3\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{r^2}\right) +$$

$$+ A_5\left(\frac{\pi^4}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\pi^2}{2\,.\,3} + \frac{1}{r^4}\right)\ldots$$

equazione che risolve il problema (1).

Se fingiamo per esempio $A_1 = 1$, $A_3 = A_5 \ldots = 0$ sarà $\frac{r}{2}B_r(-1)^r = 1$ e $\frac{1}{2}x = \Sigma\frac{(-1)^r\,.\,\operatorname{sen} rx}{r}$.

Col metodo precedente » Si può trasformare » qualunque serie di potenze pari di una variabile, » in altra serie di coseni d' archi multipli della » variabile medesima. Ma qualunque funzione può svilupparsi sotto l' una e l' altra forma, ed il cel. Fourier ha dimostrato che la stessa funzione $\cos x$ si esprime per mezzo di seni multipli di x; e viceversa. La equazione $f(x) = \Sigma B_r \operatorname{sen} rx$ non può generalmente venir impiegata oltre i limiti o e $\frac{1}{2}\pi$ della variabile x.

187. Altro metodo generale per conseguire serie a termini trigonometrici consiste nel trasformare quelle ottenute nel Capo I., sostituendo alla variabile il binomio immaginario $r(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)$; quindi ridotti la serie e la funzione generatrice alla forma $A + B\sqrt{-1}$ (§. 35, 183) eguagliarne

(1) Theorie de la Chaleur. Fourier pag. 210. M. Poisson. pag. 129.

fra loro separatamente le parti reali e le immaginarie di ciascun membro della equazione. Eccone alcuni esempi. Dalla equazione

$$(c)\quad \frac{x^m-1}{x-1} = 1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{m-1}$$

posto $x=r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\varphi)$ si desume

$$\frac{(r^m\cos m\varphi-1)+\sqrt{-1}.r^m\mathrm{sen}\,m\varphi}{(r\cos\varphi-1)+\sqrt{-1}.r\mathrm{sen}\varphi}=\Sigma r^n\cos n\varphi+\sqrt{-1}.\Sigma r^n\mathrm{sen}\,n\varphi$$

ove le somme Σ si riferiscono ad $n=1,2,3\ldots m-1$. Moltiplicati i termini del primo membro per $(r\cos\varphi-1)-\sqrt{-1}\,.\,r\,\mathrm{sen}\,\varphi$ si riduce ad

$$\frac{1-r\cos\varphi-r^m\cos m\varphi+r^{m+1}\cos(m-1)\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}+$$

$$+\sqrt{-1}\,\frac{r\mathrm{sen}\varphi-r^m\mathrm{sen}\,m\varphi+r^{m+1}.\mathrm{sen}(m-1)\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$$

onde si hanno

$$\frac{r\mathrm{sen}\varphi-r^m\mathrm{sen}\,m\varphi+r^{m+1}\mathrm{sen}\,(m-1)\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\Sigma\, r^n\mathrm{sen}\,n\varphi$$

$$(\mathrm{XXVII})\quad \frac{1-r\cos\varphi-r^m\cos m\varphi+r^{m+1}\cos(m-1)\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\Sigma\, r^n\cos n\varphi$$

Essendo $x<1$ la equazione (c) si verifica quand' anche sia $m=\frac{1}{0}$, supposto nelle (XXVII) $r<1$ ed $m=\frac{1}{0}$, siccome $r^m=0$, ne vengono

$$(\mathrm{XXVIII})\quad \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\Sigma\, r^n\cos n\varphi\,,$$

$$\frac{r\mathrm{sen}\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\Sigma\, r^n\,\mathrm{sen}\,n\varphi$$

Ponendo $x=r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\varphi)$ nella formola IV (§ 176) si trae (§ 183. form. XXV)

$$\log(1+r\cos\varphi+\sqrt{-1}.r\mathrm{sen}\varphi)=\tfrac{1}{2}\log(1+2r\cos\varphi+r^2)+$$

$$+\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{ang\,tang}\,\frac{r\mathrm{sen}\varphi}{1+r\cos\varphi}=$$

$$=\Sigma\frac{(-1)^n r^n}{n}\cos n\varphi+\sqrt{-1}\,\varphi\,\frac{(-1)^n.r^n.\mathrm{sen}\,n\varphi}{n},\ \text{quindi}$$

$$(\mathrm{XXIX})\quad \tfrac{1}{2}\log(1+2r\cos\varphi+r^2)=\Sigma\frac{(-1)^n r^n}{n}\cos n\varphi\,,$$

$$\mathrm{ang\,tang}\frac{r\,\mathrm{sen}\varphi}{1+r\cos\varphi}=\Sigma\frac{(-1)^n r^n}{n}\,\mathrm{sen}\,n\varphi$$

Ponendo $r=1$, $r=-1$ nelle (XXVIII) (XXIX) si hanno

$$\frac{1}{2}=\Sigma\cos n\varphi,\ \frac{1}{2}\cot\mathrm{ang}\,\frac{1}{2}\varphi=\Sigma\,\mathrm{sen}\,n\varphi,\ \frac{1}{2}=\Sigma(-1)^n\cos n\varphi$$

$$-\frac{1}{2}\tan\mathrm{g}\frac{1}{2}\varphi=\Sigma(-1)^n\mathrm{sen}\,n\varphi\,,\ \Sigma\cos(2n+1)\varphi=0$$

$$(\mathrm{XXX})\quad \mathrm{ang\,tang}\frac{-\mathrm{sen}\varphi}{1-\cos\varphi}=\frac{1}{2}(\pi-\varphi)=\Sigma\frac{\mathrm{sen}\,n\varphi}{n}\,,$$

$$\log 2\cos\frac{1}{2}\varphi=\Sigma\frac{(-1)^n\cos n\varphi}{n}$$

$$\mathrm{ang\,tang}\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{1+\cos\varphi}=\frac{1}{2}\varphi=\Sigma\frac{(-1)^n-\mathrm{sen}\,n\varphi}{n}$$

Nella formola (X § 182) poniamo $x=\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\varphi$ e siccome per la (XIX § 183)

$$\mathrm{Ang\,tang}\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1-\mathrm{sen}\,\varphi+\sqrt{-1}\cos\varphi}{1+\mathrm{sen}\,\varphi-\sqrt{-1}\cos\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\log\sqrt{\frac{1-\mathrm{sen}\varphi}{1+\mathrm{sen}\varphi}}+\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Ang\,tang}\,\frac{1}{0}\right\}$$

$$=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\log\tan\mathrm{g}\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\varphi\right)+\frac{\pi}{4}\ (\S\ 180\ \text{for. XXII})$$

quindi

$$\text{(XXXI)}\quad \Sigma\frac{(-1)^n\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}=\frac{\pi}{4},$$

$$\Sigma\frac{(-1)^n\,\mathrm{sen}(2n+1)\varphi}{2n+1}=\frac{1}{2}\log.\cot\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\varphi\right)$$

Ponendo nelle formole (XIV)(XV) $k=1$, $x=\cos\varphi$, siccome

$$(x+\sqrt{(x^2-1)})^m+(x-\sqrt{(x^2-1)})^m=$$
$$=(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\varphi)^m+(\cos\varphi-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\varphi)^m,$$ ne verrà

(XXXII)

$$2\cos m\varphi=(2\cos\varphi)^m-m(2\cos\varphi)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{2}(2\cos\varphi)^{m-4}\ldots$$

e dalla (XVI)

$$(2\cos\varphi)^m=(e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}})^m=$$
$$=(e^{m\varphi\sqrt{-1}}+e^{-m\varphi\sqrt{-1}})+m(e^{(m-1)\varphi\sqrt{-1}}+e^{-(m-1)\varphi\sqrt{-1}})+$$
$$+\frac{m(m-1)}{2}(e^{(m-2)\varphi\sqrt{-1}}+e^{-(m-2)\varphi\sqrt{-1}})\ldots\text{ ossia}$$

$$\text{(XXXIII)}\quad (2\cos\varphi)^m=\cos m\varphi+m\cos(m-1)\varphi+$$
$$+\frac{m(m-1)}{2}\cos(m-2)\varphi+\ldots.$$

Analogamente potremo conseguire altre ed altre formole che troveremo in copia raccolte in differenti opere di classici autori.

188. Si conoscono nell' analisi delle serie i termini delle quali sono funzioni trascendenti di natura diversa dalle circolari. Per esempio, se nella formola (VII § 176) consideriamo a qual variabile ed x come costante, cambiando l' una nell' altra ne verrà

$$\text{(XXXIV)}\quad x^a=\Sigma\frac{a^n(\log x)^n}{1.2.3\ldots n}$$

serie ordinata secondo le potenze del logaritmo iperbolico della variabile. Altre serie importanti e curiose si troveranno poi nelle opere che all' uopo abbiamo indicate (1).

CAPO III.

Su l' uso delle serie.

189. Affinchè una serie possa impiegarsi con sicurezza deve essere convergente e nota in tutta la estensione. Se nella serie

$$\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}\ldots\ldots$$

derivata dalla funzione $\frac{1}{a+x}$ poniamo $a=1$, $x=2$ ne viene la serie numerica $1-2+4-8+16\ldots.$ la quale troncata dopo due, tre, quattro termini consecutivi fornisce i numeri $-1, 3, -5, 11, \ldots$ i quali sempre più si allontanano da $\frac{1}{3}$ valore della funzione generatrice. Le due serie

$$x-x^2+x^3-x^4\ldots.=\frac{x}{1+x}$$

$$x-x^3+x^4-x^6\ldots\ldots=1-(1-x)(1+x^3+x^6\ldots\ldots)=$$
$$=1-\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{x(1+x)}{1+x+x^2},$$

(1) Si veggano: l' Introduz. ed il Calc. diff. di Eulero. Le opere cit. di Lagrange. I trattati sulle serie di Moivre, Ricati, Bernoulli. La Trigon. del Cagnoli. Gauss. Accad. Gotting. 1811-13. Annales de Gergonne T. 10, 13.

supposto $x=1$, forniscono rispettivamente

$$1-1+1-1\ldots=\tfrac{1}{2}\,,\quad 1-1+1-1\ldots=\tfrac{2}{3}$$

Tali e più gravi assurdi si incontrano nell'uso delle serie divergenti, ed altri ancora impiegando serie non conosciute in tutta la loro estensione. Se ci proponessimo, a cagion d' esempio, di svolgere la funzione

$$(a)\qquad \{x+\sqrt{(x^2-k^2)}\}^m+\{x-\sqrt{(x^2-k^2)}\}^m$$

in una serie, la quale proceda secondo potenze intere decrescenti di x col metodo comune (§ 170) troveremo la serie (XIV. § 182.), e volendo esprimere $\cos m\varphi$ per mezzo di potenze intere decrescenti di $\cos\varphi$ saremo condotti alla serie (XXXII. § 187). Ma le equazioni ottenute sarebbero erronee da che posto $m=1$ avressimo

$$2x=2x-\frac{k^2}{2x}-\frac{k^4}{(2x)^3}\ldots,\ 2\cos\varphi=2\cos\varphi-\frac{1}{2\cos\varphi}-\frac{1}{(2\cos\varphi)^3}\ldots$$

ed i metodi che ivi abbiamo seguiti apprendono, non potersi usare della serie (XIV) qual valore della funzione *(a)* se a quella non si aggiunge la (XV); per cui vengono distrutti i termini nei quali gli esponenti della x sono negativi, ed altrettanto si dica della equazione (XXXII). Tali difficoltà si presentavano ad Eulero (1) istudiando le sezioni angolari ed a Lagrange (2) svolgendo in serie le radici delle equazioni nel modo indicato (§ 181). Finalmente non si potrà impiegare una serie

(1) *Nova Acta.* Acad. Petroburg. T. IX.

(2) Leçons sur le Calcul des Fonct. pag. 125. — Traite sur la resolut. des equat. numer.

quando alla variabile si attribuisca un valore per il quale non si verifichi alcuna delle proprietà ammesse per conseguire la serie medesima.

Ci è d'uopo adunque trattare in questo luogo della convergenza e divergenza delle serie, per quanto lo consentono i limiti della scienza che abbiamo presa a trattare, e primamente noteremo che

190. »Il decremento continuo dei termini non »assicura la convergenza della serie.

Infatti la seguente $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\ldots$ perchè $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}\times n=\frac{1}{2}$, fornisce una somma tanto maggiore quant' è più grande il numero dei termini sommati.

191. »Se il quoto di un termine qualunque »diviso per quello che lo precede è minore del»l' unità la serie è convergente.

Sia *(b)* $A_0+A_1x+A_2x^2\ldots+A_nx^n+A_{n+1}x^{n+1}\ldots\ldots$ una serie a termini algebraici positivi, $\varphi(x)$ la funzione generatrice, $S_n(x)$ la somma dei primi $n+1$ termini. Si chiami α il più gran valore che assume la frazione $\frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_n\,x^n}=\frac{A_{n+1}}{A_n}x$ allorchè si attribuisce ad n qualunque valore intero positivo, e si finga $\alpha<1$. Siccome

$$\frac{A_1}{A_0}x<\alpha,\ \frac{A_2}{A_1}x<\alpha,\ldots\ \frac{A_{n+1}}{A_n}x<\alpha,\ \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}x<\alpha,\ldots$$

moltiplicando fra loro i primi membri di queste ineguaglianze ed i secondi, ne verranno

$$(c)\quad \frac{A_1}{A_0}x<\alpha,\ \frac{A_2}{A_0}x^2<\alpha^2,\ \ldots\ldots,\ \frac{A_{n+1}}{A_0}x^{n+1}<\alpha^{n+1}$$

$$\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}x<\alpha,\ \frac{A_{n+3}}{A_{n+1}}x^2<\alpha^2,\ \ldots\ldots$$

quindi $\varphi(x)-S_n(x)=A_{n+1}x^{n+1}\left\{1+\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}x+\ldots\right\}<$

$$<A_{n+1}x^{n+1}(1+\alpha+\alpha^2\ \ldots\ldots)$$

ossia $\varphi(x)-S_n(x)<A_{n+1}x^{n+1}\frac{1}{1-\alpha}$, e poichè $A_{n+1}x^{n+1}<A_0\alpha^{n+1}$ avremo per ultimo

$$(d)\quad \varphi(x)-S_n(x)<\frac{A_0\alpha}{1-\alpha}\alpha^n$$

Ma α^n diminuisce indefinitamante al crescere di n, dunque la somma $S_n(x)$ si avvicinerà pure indefinitamente alla funzione generatrice.

Consideriamo ora una serie

$$(b')\quad A_0-A_1x+A_2x^2\ \ldots\ldots+(-1)^nA_nx^n+$$
$$+(-1)^{n+1}A_{n+1}x^{n+1}\ \ldots\ldots$$

avente i segni alternativi, ed ammesso, come sopra, che ogni termine superi il prossimo seguente, fingasi n pari e si avranno

$$\varphi(x)-S_n(x)=-(A_{n+1}x^{n+1}-A_{n+2}x^{n+2})-$$
$$-(A_{n+3}x^{n+3}-A_{n+4}x^{n+4})-\ \ldots\ldots$$
$$\varphi(x)-S_{n+1}(x)=(A_{n+2}x^{n+2}-A_{n+3}x^{n+3})+$$
$$+(A_{n+4}x^{n+4}-A_{n+5}x^{n+5})+\ \ldots\ldots$$

ove i binomii fra le parentesi scritti nei secondi membri sono quantità positive. Saranno in conseguenza

$$\varphi(x)-S_n(x)<0\ ,\quad \varphi(x)-S_{n+1}(x)>0$$

ma $S_{n+1}(x)=S_n(x)-A_{n+1}x^{n+1}$ ed $A_{n+1}x^{n+1}<A_0\alpha^{n+1}$ quindi avremo

$$(d')\quad S_n(x)-\varphi(x)>0\ ,\quad S_n(x)-\varphi(x)<A_0\alpha^{n+1}$$
$$\varphi(x)-S_{n+1}(x)>0\ ,\quad \varphi(x)-S_{n+1}(x)<A_0\alpha^{n+1}$$

cioè la somma $S_n(x)$ si avvicina indefinitamente al valore di $\varphi(x)$, e supera ovvero è superata dalla $\varphi(x)$ medesima secondo che n è pari o dispari.

192. Collo stesso discorso proveremo che la serie è divergente quando $\alpha>1$, ma nulla potremo asserire essendo $\alpha=1$.

193. Se i primi termini di una serie non hanno la proprietà indicata nel §. 191, la quale ha luogo poi indefinitamente dopo alcuni termini, dimostreremo che, sottratti dalla funzione generatrice $\varphi(x)$ i termini, nominati là differenza sarà il *limite* della serie convergente residua.

194. Applicando i canoni esposti alle serie ottenute nel capo primo siamo condotti a conchiudere che

La serie (I. §. 171) è convergente se

$$\frac{b^n\,x^n}{a^{n+1}}:\frac{b^{n-1}x^{n-1}}{a^n}=\frac{bx}{a}<1$$

Per la serie (II) essendo

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots(n+1)}x^{n+1}:\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ \ldots\ldots\ n}x^n=$$
$$=\frac{m-n}{n+1}x=x\left(\frac{m+1}{n+1}-1\right),$$

se $x<1$ sarà convergente.

Altrettanto si dica della serie (VI. §. 175) per la quale $\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} x.$ i.

Per la (VII. §. 176)

$$\frac{x^{n+1}(\log a)^{n+1}}{1.2....(n+1)} : \frac{x^n(\log a)^n}{1.2....n} = \frac{x\log a}{n+1}$$

siccome qualunque grandezza abbia il prodotto $x\log a$, la n acquisterà tale valore da rendere $\frac{x\log a}{n+1} < 1$, perciò dopo alcuni dei primi termini (§. 193) la serie sarà convergente. Così è delle serie (IX) essendo

$$\frac{x^{2n+3}}{1.2.3....(2n+3)} : \frac{x^{2n+1}}{1.2.3....(2n+1)} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

195. Ma in queste ultime serie abbiamo supposto il parametro indeterminato $m=1$, onde ci è d'uopo esaminare quale principio giustifichi l'ipotesi, e quale limitazione ne venga alle serie medesime. Riprendiamo la equazione

$$(e) \quad \text{sen}x = \Sigma \frac{(-1)^n m^{2n+1}.x^{2n+1}}{1.2.3....(n+1)}$$

e poco discostandoci dai metodi di Lagrange (1) si noti che quella serie convergerà dal secondo termine in avanti, quando sia

$$\frac{m^5x^5}{1.2.3.4.5} : \frac{m^3x^3}{2.3} = \frac{m^2x^2}{4.5} < 1 \text{ nel qual caso avremo}$$

$$\text{sen}x < mx, \quad \text{sen}x > mx - \frac{m^3x^3}{2.3}$$

Siccome poi $x > \text{sen}x$, $\text{tang}x > x$ (2) ne verranno

$$1 > m - \frac{m^3x^2}{2.3}, m^2 > \frac{1}{1+x^2} \text{ cioè } m < 1 + \frac{m^3x^2}{2.3}, m^2 > 1 - m^2x^2$$

per quanto sia piccolo l'arco x, per il che dovrà $m=1$. Questa conseguenza suppone $\frac{x^2}{4.5} < 1$ cioè $x < 2\sqrt{5}$ del raggio, mentre la semicirconferenza $\pi = 3,1415932$: di più il principio di Archimede non si verifica allorchè $x > \frac{\pi}{4}$ e quindi ne deriva una condizione essenziale alla sussistenza di quelle serie (IX). Siccome però $\text{sen}(\frac{1}{2}\pi + x) = \text{sen}(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$ comprendiamo che cambiato nella equazione (e) la x in $\frac{1}{2}\pi - x$ spariscono le potenze dispari della variabile, la serie del *seno* si converte nell'altra del *coseno*, e quindi si verifica anche quando sia x maggiore del quadrante. Non potremo però far uso della serie che esprime l'arco in funzione del seno quando sia $x > \frac{\pi}{4}$ da che crescendo più oltre la x vediamo decrescere il secondo membro, mentre ne aumenta il primo.

(1) Lezioni citate.

(2) Archimede opera citata: Pag. 5. Princip. 2.

Aggiunte e Correzioni.

pag. 4 lin. 19. equazioni è equazioni algebraiche è
» 5 » 2. cioè contenga cioè (§ 7) contenga
» 24 § 27. Trovo utile presentare agli studiosi questo riassunto

Se m è pari, n.° posit. + n.° negat. = pari

Se l'ultimo termine è $\left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ n.° posit. $\begin{matrix}\text{pari}\\\text{disp.}\end{matrix}$ n.° negat. $\begin{matrix}\text{pari}\\\text{disp.}\end{matrix}$

Se m è dispari, n.° posit. + n.° negat. = disp.

Se l'ultimo termine è $\left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ n.° posit. $\begin{matrix}\text{pari}\\\text{disp.}\end{matrix}$ n.° negat. $\begin{matrix}\text{disp.}\\\text{pari}\end{matrix}$

pag. 32. lin 13. Se la seconda coppia a', b' non esiste regge nonostante la dimostrazione, perchè l' ipotesi non è una condizione. La grandezza poi di a', b' rispetto ad a, b si riferisce ad α, che si finge la più piccola.

pag. *id.* lin. 24. La piccolezza illimitata di α giustifica (§ 31) questa conseguenza.

pag. 33. lin. 20. Alla ψ può attribuirsi qualunque valore, sebbene abbiamo indicati soltanto i più opportuni. (La presente dimostrazione è presso che quella del cel. S.r Cauchy — Cours d'Analy.)

pag. 36 § 41. Onde rendere questa proposizione indipendente dal § 37. si noti che $E(a_r+\alpha)=\alpha E^{(1)}(a_r)+$ ecc., $E(a_{r+1}+\beta)=\beta E^{(1)}(a_{r+1})+\ldots$ se α, β sono piccole, come nel § 31, ed $a_r+\alpha$, $a_{r+1}+\beta$ comprendono la sola radice a_{r+1}, $E(a_r+\alpha)$, $E(a_{r+1}+\beta)$, come ancora $E^{(1)}(a_r)$, $E^{(1)}(a_{r+1})$ avranno segni opposti ecc.

Se fossero $E(a_r)=E_1(a_r)=E_2(a_r)=\ldots=E_{n-1}(a_r)=0$ dalla equazione $E(a_r+\omega)=\omega^n E_n(a_r)+\ldots$ caveremo

$$\frac{1}{\omega^n}E(a_r+\omega)=E_n(a_r)+\omega E_{n+1}(a_r)\ldots$$

quindi $\dfrac{E(x)}{(x-a_r)^n}=E_n(a_r)+(x-a_r)E_{n+1}(a_r)\ldots$,

la quale insegna che $E_n(a_r)$ è il valore di $\dfrac{E(x)}{(x-a_r)^n}$ corrispondente ad $x=a_r$.

pag. 38 § 44. Molte ragioni consigliarono ad esporre in questo luogo il teorema, che è bene differire istruendo la gioventù, giacchè la prop. § 51, da noi esposta come una operazione analitica, ne è indipendente. Giova poi a chiarire la pag. 31 il riassunto che segue

Se i pari hanno segni $\left.\begin{matrix}E_{r+i}\\E_r(c-\omega)\end{matrix}\right\}=$ Se hanno segni $\begin{matrix}E_r\\E_{r-1}\end{matrix}$ $\begin{matrix}=\\\text{opp.}\end{matrix}$ n.° delle var. perd. $=i$

Se i disp. hanno seg. opp. $\left.\begin{matrix}E_{r+i}\\E_r(c-\omega)\end{matrix}\right\}$ Se hanno segni $\begin{matrix}E_r\\E_{r-1}\end{matrix}$ $\begin{matrix}=\\\text{opp.}\end{matrix}$ n.° delle var. perd. $=\begin{matrix}i+1\\i-1\end{matrix}$

pag. 43 lin. 14. Dal § 48 si scorge che mancando dei termini, quindi alcune variazioni, enumerate le esistenti reggerà rispetto ad esse la proposizione attuale.

pag. 57. Le funzioni dette *invariabili* da noi, secondo alcuni autori; si chiamano anche *simmetriche*.

pag. 78. lin. 1. divisori di m divisori primi di m.

Il S.r Cauchy Exercices T. 4. pospone questa proposiz. alla seguente § 80. Come segue. Una radice non primitiva di $x^{a^\alpha}-1=0$ soddisferà una equazione della forma $x^n-1=0$, quindi (§ 78) una terza $x^{a^i}-1=0$, ove $i<\alpha$, ed anche $x^{a^{\alpha-1}}-1=0$. Dunque $x^{a^\alpha}-1=0$ ammette radici primitive: così dicasi delle $x^{b^\beta}-1=0,\ldots$, e finalmente di $x^m-1=0$ (§ 80).

pag. 81 § 82. Giova far notare come per questa operazione si uniscano radici reali ed immaginarie in una medesima equazione (pag. 4 lin. 14. pag. 36 § 39.).

pag. 89 § 88. Si sgombra ogni difficoltà da questa dimostrazione di Legendre (Théor. des nombr. T. II. pag. 169) indicando con $\dfrac{S}{a^r}$, $\dfrac{U}{a^s}$ i termini che contengono la maggior potenza del numero primo a.

pag. 194 § 97. Questa teorica dimostra come il metodo del § 51 si applichi a qualunque equazione.

Rendo grazie al dotto S.r D.e Francesco Cattaneo, e all'egregio S.r D.e Pietro Orlandi per utili officii prestatimi scrivendo quest' opera.