GLI

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PIANA

COMPOSTI

DA

VITO CARAVELLI

Illustrati in questa nuova edizione da un Professore di Matematica, e di Filosofia per uso della sua Scuola privata.

EDIZIONE SECONDA.

NAPOLI 1815.

Presso Domenico Sangiacomo.

Con permissione.

A CHI LEGGE.

Il merito delle produzioni letterarie dal solo imparziale giudizio del Pubblico letterato può legittimamente esser deciso. Se le molte, e copiose edizioni degli Elementi di Geometria piana composti dal nostro insigne Geometra D. Vito Caravelli, che si sono rapidamente succedute, rendono una luminosa testimonianza della pubblica approvazione, che hanno essi incontrata; fuor di ogni contesa li dichiarano ancora di un merito superiore a quante altre simili produzioni si sono a giorni nostri vedute.

E' rincresciuto ad alcuni Giovani meno perspicaci, o meno attenti, che in detti elementi Caravelliani sia l' esposizione quasi sempre laconica, e le dimostrazioni sieno talora molto ristrette, e quasi compresse. Da ciò [illegible]o avvenirne, che non rare volte ne restano trattenute le loro Menti, e non ne conseguono una pronta, e chiara intelligenza: Nè quell' opera è per giusti riguardi commendabilissima. Ecco dunque che per animare la Gioventù a tal sorta di studj, in vece di oc-

cuparmi a produrne una nuova istituzione, mi determinai ad illustrare quelli stessi elementi del Caravelli in tutta la di loro estensione, ed a spianare in essi quanto poteva sembrare difficile, ed astruso. Il lungo esercizio in che sono da moltissimi anni nell' insegnarli alla Gioventù studiosa, mi fa sperare di poterle rendere con questa nuova edizione un utile servigio, e di appagare insieme un giusto suo desiderio. Tal è stato l' oggetto della mia intrapresa; e se il successo corrisponderà alla mia intenzione, ed all' aspettativa, sarò io stesso del mio travaglio pienamente contento. Addio.

INDICE

DE' LIBRI, E DE' CAPI.

LIBRO I.

Delle teoriche fondamentali della Geometria piana.

LIBRO II.

Della teorica del Cerchio.

LIBRO III.

Della dottrina della ragione, e proporzione geometrica.

LIBRO IV.

Delle teoriche più rilevanti della Geometria piana, che dalla dottrina della ragione, e proporzione geometrica derivano.

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA PIANA.

Definizioni, e nozioni preliminari.

§. 1. **D**efinizione I. La Geometria è una scienza, che tratta della quantità continua, dimostrandone le proprietà di essa.

§. 2. Avvertimento. Le specie della quantità continua sono i solidi, le superficie, e le linee.

§. 3. Def. II. Si dice *solido*, o *corpo* ogni estensione, od ogni spazio, che ha lunghezza, larghezza, e profondità.

§. 4. Def. III. Ciò che termina, o racchiude il solido, si dice *superficie*. Dunque la superficie è una estensione, che ha solamente lunghezza, e larghezza senza profondità.

§. 5. Def. IV. Il termine della superficie si chiama *linea*. La linea dunque è una estensione, che ha solamente la lunghezza, ed è priva di larghezza, e di profondità.

§. 6. Def. V. Il termine della linea dicesi *punto*. Il punto dunque non è estensione; esso è privo di lunghezza, di larghezza, e di profondità.

§. 7. Corollario I. Se due linee s' intersecano, la loro intersecazione non è che un punto. Imperocchè essendo ogni linea priva di larghezza, la comune intersecazione di due linee, che si fa per traverso, non può avere veruna dimensione.

§. 8. Coroll. II. Similmente se due superficie s' intersecano, la di loro comune intersecazione dev' essere una linea. Imperocchè essendo le superficie prive di profondità, la di loro intersecazione facendosi per traverso, non potrà avere altra dimensione, che la sola lunghezza.

§. 9. Coroll. III. Finalmente essendo i punti privi di ogni dimensione (§. 6.); sarà un errore il credere esser le linee composte da punti. Similmente essendo le linee prive di larghezza (§. 5.), e le superficie prive di profondità (§. 4.); sarà errore il credere, essere le superficie composte da linee, ed i solidi composti da superficie.

§. 10. Avv. Si noti, che per un mero concetto matematico, si considera generata la linea dallo scorrere di un punto, la superficie dallo scorrere lateralmente di una linea, ed il solido generato dal muoversi su, o giù di una superficie.

§. 11. Def. VI. Una linea si dice *retta*, se tutte le sue parti sono in una medesima direzione. Si dice poi *curva*, se ognuna delle sue parti è in una direzione diversa della sua vicina.

§. 12. Def. VII. Una superficie si dice *piana*, se tutte le sue parti sono in una medesima direzione. Si dice poi *curva*, se ognuna delle sue parti è in una direzione diversa della sua vicina.

§. 13. Def. VIII. Si chiama *angolo piano* la scambievole inclinazione di due linee, le quali giacendo in uno stesso piano, s' incontrano in un punto. Questo punto dell' incontro dicesi *vertice* dell' angolo, e le due linee si chiamano *lati* dell' angolo. L' inclinazione poi delle linee incontrantisi è quella, che propriamente si dice angolo.

§. 14. Def. IX. L' angolo piano dicesi *rettilineo*, se è formato da due linee rette; *curvilineo*, se è formato da due linee curve; e *mistilineo*, se è formato da una linea retta, e da una linea curva.

§. 15. Avv. I Geometri contrassegnano sulle superficie i punti, con fare su di esse piccioli segni coll' estremità della penna da scrivere, o di altro corpo aguzzo: e le linee con tratti di penna, o d' altro corpo aguzzo. Per esprimere poi un punto, una linea, od un angolo, mettono una lettera a lato del punto, due lettere agli estremi della linea, e ne mettono tre agli estremi di quelle, che formano l' angolo, e dicono: il punto A: la linea retta B C: la linea curva D E: l' angolo rettilineo FGH, o HGF: l' angolo curvilineo IKL: l' angolo mistilineo MNO, nominando sempre Fig. 1.

in mezzo la lettera, che sta al vertice; ovvero dicono l' angolo in G, in K, in N, nominando la sola lettera, che è al vertice, purchè non ne possa nascere equivoco.

§. 16. Def. X. Si dirà *base* di un angolo rettilineo la linea retta, che conguingerà gli estremi de' suoi lati.

§. 17. Avv. I. Con allungarsi, od accortarsi i lati di un angolo, certamente non si muta la di loro inclinazione. Sia l' angolo FGH; s' intendano il lato GF prolungato in Q, e 'l Fig. 1. lato GH prolungato in P. Egli è evidente, che l' inclinazione de' lati QG, PG è precisamente la stessa, che l' inclinazione de' lati FG, GH. Dunque *un angolo rimane sempre lo stesso; o che si allunghino, o che si scortino i suoi lati.*

§. 18. Avv. II. Al contrario poi, se restando i lati di un angolo costantemente della stessa lunghezza, si accresca, o si diminuisca la sua base, l' inclinazione di essi lati (cioè l' angolo) farassi rispettivamente maggiore, o mi- Fig. 2. nore. Nell' angolo ABC, restando i lati AB, BC della stessa lunghezza, non può la base AC farsi maggiore, o minore, se non a condizione, che girandosi il lato BC intorno al punto B, l' estremo C vada verso D allontanandosi dal punto A, od avvicinandosi verso esso; con che, mentre la base AC diventerà AD, maggiore, o minore di prima, si formerà l' angolo ABD maggiore, o minore del primo angolo ABC.

Similmente, se restando sempre costanti i due lati di un angolo, si vada questo accrescendo, oppur diminuendo, anche la sua base andrà successivamente crescendo, o diminuendo.

§. 19. Coroll. I. Ecco dunque un sicuro criterio per conoscere se due angoli rettilinei sieno, o no uguali tra di loro: *Se i lati* (*AB*, *BC*) *di un angolo* (*ABC*) *sieno rispettivamente uguali ai lati* (*NM*, *PM*) *di un altro angolo* (*NMP*); *secondochè la base del primo* (*AC*) *sia maggiore, eguale, o minore della base del secondo* (*NP*); *così sarà il primo angolo* (*ABC*) *maggiore, eguale, o minore del secondo angolo* (*NMP*). Fig. 2.

§. 20. Coroll. II. Vicendevolmente, *se essendo i lati di un angolo rispettivamente uguale ai lati di un altro angolo, uno di essi angoli sia maggiore, eguale, o minore dell' altro; sarà la base del primo rispettivamente maggiore, eguale, o minore della base del secondo angolo.*

§. 21. Def. XI. Una linea retta si dice *perpendicolare* ad un' altra, se l' una cade sull' altra senza inclinarsi più dall' una, che dall' altra banda. Si dice poi *obbliqua*, se s' inclina più dall' una, che dall' altra banda. Finalmente gli angoli, che da ambedue le parti si formano in tutti e due i casi, si chiamano angoli *conseguenti*, e ciascuno di essi si dice pure *conseguente* dell' altro.

Così AB dicesi perpendicolare a CD, perchè Fig. 3.

essa non inclina più ad una parte, che all' altra. Ma EB dicesi obbliqua a CD, giacchè ella inclina più verso una parte, che verso l' altra.

§. 22. Def. XII. Si dice *angolo retto* quello, ch' è formato da due linee rette, delle quali è una perpendicolare all' altra. Se poi una linea sia obbliqua all' altra, de' due angoli conseguenti, si dice *angolo ottuso* quello, ch' è maggiore del retto, ed *angolo acuto* quello, ch' è minore del retto.

Così se a CD sia perpendicolare la retta AB, sarà retto sì l' angolo ABC, che il suo conseguente ABD. Che se EB è obbliqua a CD, saranno l' angolo EBC ottuso, e l' angolo EBD acuto.

§. 23. Def. XIII. Due angoli si dicono *verticali* tra essi, se i lati di uno formano co' lati dell' altro linee continuate.

Fig. 4. *Così l' angolo AOC si dice verticale all' angolo BOD, e COD verticale ad AOB.*

§. 24. Def. XIV. Due linee rette, esistenti sullo stesso piano, si dicono *parallele*, se prolungate all' infinito sono sempre equidistanti, e conseguentemente non si uniscono giammai.

Fig. 5. *Di tal sorta sono le rette AB, CD.*

§. 25. Def. XVI. Si dice in generale *figura* ogni spazio racchiuso da tutte le parti da una, o più linee: da una, o più superficie. In ispezie poi si dicono *figura piana* ogni superficie piana terminata da una, o più linee;

e *figura solida* ogni solido terminato da una, o più superficie.

§. 26. Avv. I Geometri, per indicare una figura, nominano le lettere, che vi mettono intorno intorno nel suo termine, che da essi vien chiamato *perimetro.*

§. 27. Def. XVII. Una figura piana si dice *rettilinea*, se è terminata intorno intorno da linee rette: si dice *curvilinea*, se è terminata da linee curve; e finalmente dicesi *mistilinea*, se è terminata da linee rette, e da curve insieme.

Così ABCDE è *figura rettilinea: FEG, ed* Fig.
HIKL sono figure curvilinee, ed MNPOQ è 9.
figura mistilinea.

§. 28. Def. XVIII. Di una figura rettilinea si dice *lato* qualunque delle linee da cui è terminata: e si dice *base* qualunque lato considerato come parte inferiore del suo perimetro.

§. 29. Def. XIX. Una figura rettilinea si dice *trilatera* se vien terminata da tre lati; si dice *quadrilatera*, se vien terminata da quattro lati; e finalmente si dice *moltilatera* o *poligona* se è terminata da più di quattro lati.

§. 30. Coroll. Perchè nelle figure rettilinee tanti sono gli angoli, quanti sono i lati, perciò si dicono ancora *triangolo* la figura trilatera, *quadrangolo* la quadrilatera, e *moltangolo* la moltilatera.

§. 31. Def. XX. Il triangolo, avendosi considerazione ai lati, si dice *equilatero*, se tutti e tre i lati sono uguali; si dice *isoscele*,

se sono uguali due solamente; e finalmente si dice *scaleno*, se tutt' i lati sono disuguali. Avendosi poi considerazione agli angoli, il triangolo si dice *rettangolo*, se uno de' suoi angoli è retto; si dice *ottusangolo*, se uno de' suoi angoli è ottuso; e finalmente si dice *acutangolo* se tutti e tre gli angoli sono acuti.

Fig. *Così il triangolo ABC è equilatero, avendo*
7. *tutti e tre i lati AB, BC, CA uguali: il triangolo DEF è isoscele, avendo eguali i due lati DE, EF; il triangolo GHI è scaleno,*
Fig. *avendo disuguali tutt' i lati. Il triangolo KLM*
8. *è rettangolo, avendo l' angolo in L retto; il triangolo NOP è ottusangolo avendo l' angolo in O ottuso; e finalmente il triangolo QRS è acutangolo, avendo tutti tre gli angoli acuti.*

§. 32. Def. XXI. Nel triangolo rettangolo il lato opposto all' angolo retto si dice *ipotenusa*, e gli altri due lati si chiamano *cateti.*

Così nel triangolo KLM l' ipotenusa è KM; ed i cateti sono KL, LM.

§. 33. Def. XXII. Una figura quadrilatera si dice *parallelogrammo*; se i lati opposti sono rette parallele; si dice poi *trapezio*, se i lati opposti non sono rette parallele, o due di esse almeno non sono tali.

Fig. *Così ABCD è parallelogrammo, ed EFGH è*
9. *trapezio.*

§. 34. Def. XXIII. Un parallelogrammo si dice *quadrato*, se ha tutt' i lati uguali, e tutti gli angoli retti; si dice *rettangolo*, o *quadrilungo*, se ha tutti gli angoli retti, ma non ha tutt' i lati uguali; si dice *rombo*, se ha tutt' i lati uguali, ma non già gli angoli retti; e finalmente si dice *romboide*, se non ha nè gli angoli retti, nè tutt' i lati uguali.

Fig. 10. *Così ABCD è un quadrato, EFGH è un rettangolo: IKLM è un rombo; ed NOPQ è un romboide.*

§. 35. Def. XXIV. Una figura moltangola si dice *pentagono*, *esagono*, *ettagono*, *ottagono* ec. secondochè i suoi lati sono cinque, sei, sette, otto ec. ed ha conseguentemente cinque, sei, sette, otto ec. angoli.

§. 36. Def. XXV. Una figura rettilinea si dice *equilatera*, o *equiangola* secondochè ha eguali o tutt' i lati, o tutti gli angoli. Si dicono poi due figure rettilinee tra di esse *equilatere*, od *equiangole* secondochè sono o i lati, o gli angoli di una rispettivamente uguali ai lati, od agli angoli dell' altra.

§. 37. Def. XXVI. Per *cerchio*, o *circolo* s' intende una figura piana, ch' è terminata da una linea curva rientrante in se stessa, e che ha un punto entro di essa tale, che tutte le linee rette, che da sì fatto punto si possono tirare alla detta curva, sono uguali.

La linea curva, che termina il cerchio, si dice *periferia*, o *circonferenza* del cerchio. Il punto, da cui procedono quante si vogliono rette eguali alla periferia, si dice *centro* del cerchio. Finalmente le rette uguali procedenti dal centro alla periferia, si dicono *raggi* del cerchio.

Fig. 11. *Così lo spazio ABCDE è il cerchio: la linea curva ABDE è la periferia: il punto O è il centro; le rette OE, OF, OC ec. sono i raggi.*

§. 38. Avv. Concepiscono i Geometri per un mero concetto matematico generarsi il cerchio col muoversi una retta in una superficie piana intorno ad un suo estremo fisso, ed immobile, e raggirarsi fino a che ritorni al suo primiero sito.

§. 39. Def. XXVII. Si dice *arco* del cerchio qualunque porzione della periferia. La retta, che taglia l' arco, si dice *corda* dell' arco. Ogni corda, che passa pel centro, si chiama *diametro* del cerchio.

Così nel cerchio ABDE la porzione AB, o AEDB della periferia si dice arco; la retta AB si dice corda sì dell' arco AB, che dell' arco AEDB; la corda FC si dice diametro.

§. 40. Coroll. Essendo i raggi metà de' diametri, perciò si dicono i raggi anche *mezzi diametri*.

§. 41. Def. XXVIII. Si dice *porzione* del cerchio lo spazio compreso tra un arco, e la sua corda. La porzione tagliata da un diametro si dice *mezzo cerchio*. Finalmente lo spazio compreso da due raggi, e dall' arco, che gli stessi raggi racchiudono, si dice *settore* del cerchio.

Così lo spazio compreso tra l' arco AB, o AEDB, e la corda AB, è porzione del cerchio. Gli spazii FABC, FEDC sono mezzi cerchi;

Finalmente lo spazio EOD è settore del cerchio.

§. 42. Def. XXIX. Se la periferia di qualunque cerchio si divide in 360 parti eguali, ognuna di esse si chiama *grado*. Se un grado si divide in 60 parti uguali, ognuna di esse si chiama *minuto primo*, o *scrupolo primo*. Se un minuto primo si divide pure in 60 parti uguali, ognuna di esse si chiama *minuto secondo*, o *scrupolo secondo*; e così procedendo all' infinito.

POSTULATI.

§. 43. Post. I. Tirare da un punto ad un altro su di un piano una linea retta.

§. 44. Post. II. Data una linea retta terminata, prolungarla quanto si vuole.

§. 45. Post. III. Dato qualunque punto per centro, e data qualunque linea retta per intervallo, descrivere un cerchio.

§. 46. Avv. I. Si noti, che le operazioni richieste ne' due primi postulati, esigono la riga; l' operazione poi richiesta nel terzo postulato esige il compasso. E si noti altresì, che tutte le operazioni, che si fanno nella Geometria elementare per isciorre i problemi, si eseguiscono colla riga, e col compasso, perchè tutte si riducono a tirare, o prolungare linee rette, ed a descrivere cerchi. Onde que' problemi geometrici, che per isciorsi v' è bisogno dell' uso de' due detti strumenti, appartengono alla Geometria elementare; tutti gli altri poi, che per isciorsi v' è bisogno dell' uso di altri strumenti, appartengono alla Geometria sublime.

Fig. 12. §. 47. Avv. II. Si noti pure, che se AB e CD sono due linee rette disuguali, descrivendo col centro A, (estremo della retta maggiore AB), e coll' intervallo della retta minore CD l' arco circolare EFG, che intersechi la AB nel punto F, sarà tagliata dalla retta maggiore AB la porzione AF uguale alla retta minore CD.

ASSIOMI.

§. 48. Assioma I. Tutt' una grandezza è sempre maggiore di qualunque sua parte.

§. 49. Ass. II. Le grandezze, che combaciano insieme, sono tra esse uguali.

§. 50. Avv. Diconsi combaciare insieme due linee, o due superficie, se soprapposte l' una all' altra, l' una copre esattamente l' altra: due solidi diconsi combaciare, se messo l' uno dentro dell' altro, combaciano simultaneamente le superficie dell' uno colle superficie dell' altro.

§. 51. Ass. III. Tutti gli angoli retti sono uguali.

§. 52. Avv. Gli angoli acuti possono essere più, o meno acuti; così pure gli angoli ottusi possono essere più, o meno ottusi. Ma gli angoli retti non possono farsi più, o meno retti, poichè con allargarsi, o col restringersi, immediatamente diventano ottusi, od acuti. Ond' è, che gli angoli retti sono tutti tra loro eguali.

§. 53. Ass. IV. Di tutte le linee terminate ne' medesimi punti la linea retta è la più breve, ed addita essa il cammino più breve, che far si possa da un punto ad un altro.

§. 54. Coroll. In ogni triangolo ciascun lato è sempre la linea retta, che tramezza fra i due punti, che sono suoi estremi, e gli altri due lati non costituiscono linea retta. Dunque in ogni triangolo ciascun lato è sempre minore della somma degli altri due.

LIBRO I.

DELLE TEORICHE FONDAMENTALI DELLA GEOMETRIA PIANA

CAP. I.

Delle operazioni fondamentali della Geometria piana.

PROP. I. PROBL. I.

§. 55. *Date tre rette tali, che qualunque di esse sia minore della somma delle altre due, costruire un triangolo, che abbia i lati rispettivamente uguali alle tre rette date.*

Fig. 13. Dichiarazione. Sieno date le tre rette A, B, C, delle quali ognuna sia minore della somma delle altre due. Si cerca formare un triangolo, che abbia un lato uguale ad A, un altro uguale a B, e 'l terzo uguale a C.

Soluzione. 1. Si tiri una retta indefinita LN, e da essa si taglino LP=A; PQ=B, QM=C.

2. Col centro P, e col raggio PL si descriva il mezzo cerchio LRP. Similmente col centro Q, e col raggio QM si descriva l'

altro mezzo cerchio MRV, che sicuramente intersecherà la periferìa del primo in un punto R.

3. Si tirino dal punto R ai centri P, e Q le rette RP, RQ.

Dico essersi formato il triangolo PRQ, che ha i lati rispettivamente eguali alle tre rette date.

Dimostrazione. Essendo P centro del cerchio LRT, le rette PR, e PL sono raggi di esso, e perciò sono tra di loro eguali (§.37.). Ma per costruzione si è fatta PL=A. Dunque anche PR è eguale ad A. Similmente essendo Q centro del cerchio MRV, le rette QR, QM, come che raggi, sono eguali tra di loro. Ma QM per costruzione è uguale a C. Dunque anche QR=C. Finalmente PQ=B per costruzione. Dunque il triangolo PRQ ha il lato PR=A; il lato PQ=B, il lato QR=C. Ciocchè bisognava fare, e dimostrare.

§. 56. Avv. La descrizione de' semicerchi prescritta in questo problema ha per oggetto la determinazione del punto R, da cui debbonsi tirare ai punti P, e Q le rette RP, RQ. Dunque basterà per la soluzione del problema, che si facciano de' piccioli archetti che s' intersechino, per tirare poi dal punto della intersecazione le rette RP, RQ.

E si noti una volta per sempre, che tutti i problemi della Geometria piana si riducono a ritrovare uno, o due punti, pe' quali abbiansi poi a tirare determinate linee.

§. 57. Coroll. I. Se le tre rette A, B, C sono eguali, il triangolo PRQ sarà equilatero. In questo caso le tre rette A, B, C si riducono ad una sola, e la costruzione si potrà rendere più semplice. Sia AB la retta su cui debFig. 14. basi fare il triangolo equilatero. Col centro A e col raggio AB si descriva l' arco circolare bCp. Col centro B e collo stesso raggio BA si descriva l' altro arco circolare aCq, il quale intersecherà il primo nel punto C. Dal punto C si tirino ai punti A, e B le rette CA, CB. Sarà formato su di AB il triangolo equilatero ACB.

Fig. 13. §. 58. Corol. II. Se delle tre rette A, B, C due sieno tra di esse eguali, il triangolo PRQ sarà isoscele. In questo caso le tre rette riduconsi a due; una delle quali determina la lunghezza di ciascuno de' due lati uguali; l' altra determina la base del triangolo. E sarà mestieri, che la retta determinante la lunghezza di ciascuno de' due lati uguali sia maggiore della metà dell' altra retta, che deve servire di base.

PROP. II. PROBL. II.

§. 59. *Dato un angolo rettilineo, e dato un punto in una retta, formare nel dato punto un altro angolo uguale all' angolo dato.*

Fig. 15. Dichiarazione. Sia M l' angolo dato, e sia dato nella retta AB il punto A; debbasi nel punto A formare l' angolo uguale all' angolo M.

Soluzione. 1. Si prendano ne' lati del dato angolo due punti ad arbitrio N, ed L; e si congiunga LN.

2. Si prolunghi AB per quanto bisogna verso D, e verso F, e da essa si taglino AD=MN, AB=ML, BE=LN.

3. Col centro A, e col raggio AD si descriva il mezzo cerchio DCG. Similmente col centro B, e col raggio BE si descriva l' altro semicerchio ECH, che intersecherà la periferia del primo nel punto C.

4. Finalmente dal punto A al punto C si tiri la retta AC.

Dico essersi formato l' angolo BAC=LMN.

Dimostrazione. Si congiunga la retta BC, *e si vadano paragonando i lati, e la base dell' angolo BAC co' lati, e colla base dell' angolo LMN rispettivamente.*

Essendo A centro del cerchio DCG, le rette AC, AD, come raggi; sono eguali (§. 57). Ma per costruzione AD=MN. Dunque pure AC=MN. L' altro lato AB=ML per costruzione. Sicchè i due lati AC, AB sono rispettivamente uguali ai lati MN, ML. *Restano a considerarsi le basi.*

Essendo B centro del cerchio ECH; BC e BE come raggi, sono eguali tra di loro. Ma BE=LN per costruzione. Dunque anche BC=LN. Sicchè i due angoli BAC, LMN hanno i lati rispettivamente eguali, ed eguali anche le basi; e perciò l' angolo BAC è uguale all' angolo LMN (§. 19.) Sicchè nel dato punto

A si è fatto l' angolo uguale all' angolo dato c. b. f. e d.

PROP. III. PROBL. III.

§. 60. *Dato un angolo rettilineo dividerlo in due parti uguali.*

Fig. 16. Dichiarazione. Sia dato l' angolo rettilineo ABC; bisogna dividerlo in due parti uguali.

Soluzione. 1. Si prenda in uno de' suoi lati un punto ad arbitrio, e sia D; indi nell' altro lato si tagli BE=BD, e si congiunga DE.

2. Su DE si faccia il triangolo equilatero DFE (§. 57.).

3. Finalmente dal punto B al punto F si tiri BF.

Dico, che la retta BF taglia l' angolo ABC in due parti uguali ABF, CBF.

Dimostrazione. *Si considerino i lati, e le basi rispettivamente de' due angoli DBF, EBF.* I due lati BD, BF sono rispettivamente eguali ai due lati BE, BF. La base DF del primo angolo è uguale ad FE base dell' altro angolo. Dunque i due angoli DBF, EBF sono eguali (§. 19.). Per la qual cosa si è diviso l' angolo dato in due parti uguali, c. b. f. e d.

§. 61. Avv. Per la soluzione del probl. basta la sola determinazione del punto F. La formazione del triangolo equilatero DFE si è prescritta per comodo della dimostrazione.

§. 62. Coroll. Se diviso l'angolo ABC in due parti uguali, si dividano pure in due parti uguali ambe le metà (ABF, CBF); resterà diviso tutto l'angolo ABC in quattro parti uguali. Se poi ciascuna di queste quattro parti si divida collo stesso artifizio in due porzioni eguali, resterà diviso tutto l'angolo in otto porzioni eguali. E dell'istesso modo continuando, è chiaro, che si può dividere un angolo rettilineo mercè la riga, e 'l compasso in 2, 4, 8, 16, 32 ec. parti uguali.

Avv. Si noti, che i problemi delle divisioni degli angoli rettilinei in tante parti uguali, quante ne disegnano i numeri che tramezzano tra 2, 4, 8, 16, 32, 64 ec., appartengono alla Geom. sublime, e nella elementare sono impossibili; perchè esigono operazioni, che non si possono eseguire colla riga, e col compasso. L'angolo retto però è divisibile nella Geom. elementare e in tre, e in cinque parti uguali, come si vedrà a suo luogo; e due altri angoli, che si diranno pure a suo luogo, sono divisibili nella Geom. elementare, uno in tre parti uguali, e l'altro in cinque.

PROP. IV. PROBL. IV.

§. 63. *Data qualunque linea retta terminata, dividerla in due parti uguali.*

Dichiarazione. Sia data la retta AB; debbasi questa dividere in due parti uguali. Fig. 17.

Soluzione: 1. Si faccia su AB il triangolo equilatero ACB (§. 57.).

2. Si divida l'angolo ACB in due parti uguali colla retta CD (§. 60.).

Dico essere AB divisa nel punto D in due parti uguali AD, DB.

Dimostrazione. AD, DB sono basi degli angoli ACD, BCD. Ma questi angoli sono eguali per la costruzione; ed in oltre hanno il lato CA=CB, e 'l lato CD di comune. Dunque le di loro basi AD, DB sono eguali (§. 20.). Sicchè la retta AB si è divisa in due parti uguali c. b. f. e d.

§. 64. Avv. La costruzione di sopra riportata ha avuto per oggetto una più spedita dimostrazione. Del resto per la soluzione del problema basterà la sola determinazione de' punti C ed E mercè l'intersecazione degli archi descritti co' centri A, e B, e col medesimo intervallo (il quale dev'essere maggiore della metà di AB); poichè tirando per essi la retta CE, questa dividerà AB in due parti uguali.

CAP. II.

Della teorica delle linee perpendicolari, ed oblique ad altre.

PROP. V. PROBL. V.

§. 65. *Dato un punto in una linea retta, innalzare da esso un' altra retta, che sia perpendicolare alla retta data.*

Dichiarazione. Sia dato il punto C nella retta AB; bisogna da questo punto innalzare la perpendicolare. Fig. 18.

Soluzione. 1. Si prenda in CA un punto D ad arbitrio; e da CB si tagli CE=CD.

2. Si faccia su DE il triangolo equilatero DOE (§. 57.); e dal punto O al punto C si tiri la retta OC.

Dico essere OC la perpendicolare cercata.

Dimostrazione. I due angoli OCD, OCE, hanno i lati rispettivamente eguali; giacchè OC è lato comune, e CD=CE per costruzione. In oltre le loro basi OD, OE sono pure eguali, perchè lati del triangolo equilatero. Dunque detti angoli OCD, OCE sono eguali. (§. 19). Quindi la linea OC, non inclina più da una parte, che dall' altra; e conseguentemente ella è perpendicolare alla retta AB (§. 21.). Per la qual cosa dal punto dato C si è innalzata la perpendicolare alla retta data. c. b. f. e d.

PROP. VI. PROBL. VI.

§. 66. *Data una retta, e dato un punto fuori la sua direzione, calare dal dato punto la perpendicolare alla retta data.*

Fig. 18. Dichiarazione. Sia data la retta AB, e fuori di essa il punto O: debbasi da O calare la perpendicolare su di AB.

Soluzione. 1. Si prenda ad arbitrio un punto F, che per rispetto del punto O stia dall' altra banda della retta AB, e si congiunga OF.

2. Col centro O, e col raggio OF si descriva l' arco circolare DFE, che interseca AB ne' punti D, ed E.

3. Si divida DE in due parti uguali in C (§. 63.), e si congiunga OC.

Dico essere OC la perpendicolare cercata.

Dimostrazione. Si congiungano OD, OE; *e si considerino i lati, e le basi degli angoli OCD, OCE.* Questi hanno i lati rispettivamente eguali; giacchè OC è lato comune ad entrambi, e 'l lato CD=CE per costruzione. In oltre OD base dell' angolo OCD è uguale ad OE base dell' altro angolo OCE (57). Dunque questi angoli OCD, OCE sono tra loro eguali (§. 19.). Laonde OC non inclina più da una parte, che dall' altra, e conseguentemente ella è perpendicolare ad AB (§. 21.). Sicchè dal dato punto si è calata la perpendicolare alla retta data. c. b. f. e d.

PROP. VII. TEOR. I.

§. 67. *Se una retta cade su di un' altra, forma essa gli angoli conseguenti o retti, od insieme presi uguali a due retti.*

Dimostrazione. In due maniere può una retta cadere su di un' altra. I. o perpendicolarmente, come AB; II. od obbliquamente come EB. Fig. 3.

Caso I. Sia AB perpendicolare su di CD; è evidente, che l' angolo ABC è uguale all'altro ABD, ed entrambi sono retti (§. 21.).

Caso II. Sia EB obbliqua a CD. *S' intenda da B innalzata la perpendicolare BA.* La retta EB forma da una parte l' angolo acuto EBD minore del retto ABD di tanto, quanto è l' angolo ABE. La stessa retta EB forma dall' altra parte l' angolo ottuso EBC maggiore del retto ABC di tanto, quanto è lo stesso angolo ABE. Dunque coll' eccesso dell' angolo ottuso EBC sul retto, compensandosi la mancanza dell' angolo acuto EBD anche dal retto, sarà la somma de' due angoli EBC, EBD uguale alla somma di due retti. Per la qual cosa, *se una retta cade su di un' altra ec.* c. b. d.

§. 68. Coroll. Se intorno ad un punto si uniscono quante rette si vogliono OA, OB, OC, OD, OE, OF; saranno tutti gli angoli AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA insieme presi, uguali a quattro retti. Imperocchè prolungata AO in H, è evidente, che i due angoli conseguenti BOA, BOH sono eguali a Fig. 19.

due retti (teor. prec.). Ma il solo angolo BOH pareggia la somma degli angoli in esso contenuti BOC, COD, DOH. Dunque gli angoli BOA, BOC, COD, DOH fanno la somma di due retti. Similmente cadendo FO su di AH, sono gli angoli conseguenti FOA, FOH uguali a due retti. Ma il solo angolo FOH adegua la somma degli angoli FOE, EOH. Dunque gli angoli AOF, FOE, EOH sono pure eguali alla somma di due retti. E perciò la somma di tutti gli angoli intorno al punto O pareggia quattro retti.

PROP. VIII. TEOR. II.

§ 69. *Se due rette s' intersecano, gli angoli verticali sono fra essi eguali.*

Fig. 4. Dichiarazione. S' intersechino le due rette AD, CB. Dico, che gli angoli verticali AOB, COD sono eguali fra di loro; come altresì gli altri due AOC, BOD.

Dimostrazione. Cadendo la retta AO su di BC, la somma degli angoli conseguenti AOB, AOC è uguale a due retti (teor. prec.). Similmente cadendo CO sopra AD forma la somma degli angoli COA, COD anche uguale a due retti. Perciò la somma degli angoli AOB, AOC pareggia la somma degli angoli COA, COD. Onde da queste somme uguali tolto di comune l' angolo AOC, resterà l' angolo AOB = all' angolo COD. Similmente si dimostra, che l' angolo AOC è uguale al suo verticale BOD. Dunque *se due rette s' intersecano, gli angoli verticali sono tra essi eguali.* c. b. d.

PROP. IX. TEOR. III.

§. 70. *Se dall' estremo di una retta sieno tirate per direzioni opposte due altre rette in modo, che la somma degli angoli formati da ambe le parti sia uguale a due retti, formeranno tali rette una sola retta continuata.*

Dichiarazione. Dall' estremo B della retta EB sieno tirate per opposte direzioni le rette BC, BD in guisa, che gli angoli EBC, EBD pareggino due retti; dico, che le rette BC, BD formano una sola retta continuata. Fig 3.

Dimostrazione. S' intenda la retta CB prolungata a destra verso X. Questa dovrà necessariamente coprire la retta BD: e perciò le due rette CB, BD non possono formare, che una sola retta continuata.

Imperocchè gli angoli EBC, EBX per esser conseguenti deggiono pareggiare due retti (§. 67.). Ma per ipotesi anche gli angoli EBC, EBD pareggiano due retti. Dunque la somma degli angoli EBC, EBX adegua la somma degli angoli EBC, EBD. Laonde togliendo da ambe tali somme il comune angolo EBC, sarà l' angolo EBX=EBD. E perciò la BX deve coprire la BD. Conseguentemen-

te siccome CBX è una retta continuata, così del pari le due CB, e BD non sono che una sola retta continuata. Sicchè *se dall' estremo di una retta* ec. c. b. d.

PROP. X. TEOR. IV.

Fig. 4. §. 71. *Se da un punto preso in una retta sieno tirate per direzioni opposte due altre rette in modo, che gli angoli verticalmente opposti che quindi si formano, sieno tra essi uguali; formeranno tali rette una retta continuata.*

Dichiarazione. Dal punto O della retta AD sieno tirate per opposte direzioni due rette OC, OB in modo, che gli angoli AOC, DOB sieno uguali. Dico, che le rette OC, OB formano una retta continuata.

Dimostrazione. Essendo per ipotesi uguali gli angoli AOC, DOB, aggiunto ad essi di comune l' angolo AOB, sarà la somma degli angoli AOC, AOB uguale alla somma degli angoli DOB, BOA. Ma la somma degli angoli DOB, BOA pareggia due retti, perchè sono formati dalla retta BO, che cade sopra di AD (§. 67). Dunque anche la somma degli angoli AOC, AOB adegua due retti. Ma questi sono angoli fatti dalla retta AO colle rette OC, OB tirate per direzioni opposte. Giacchè dunque sono essi uguali a due retti, le rette OC, OB formano una retta continuata (§. prec.). Sicchè se *da un punto preso in una retta sieno tirate per direzioni opposte* ec. c. b. d.

C A P. III.

Della teorica delle linee rette parallele.

§. 71. Definizione. Sieno le rette AB, CD esistenti nel medesimo piano, e tagliate comunque da un' altra retta EH. Si formeranno otto angoli, quattro al di fuori di esse, che perciò si chiamano *esterni*; e quattro al di dentro, che si chiamano *interni*. Fig. 20

1. I due angoli AFG, FGC si dicono *interni posti dalla stessa parte*: e così pure si chiamano gli altri due BFG, FGD.

2. Si chiamano poi *alterni* i due angoli AFG, FGD; e similmente gli altri due BFG, FGC.

3. A ciascun *angolo esterno* vi corrisponde un *interno opposto*. Agli *esterni* EFA, EFB sono rispettivamente *interni opposti* FGC, FGD. Così pure agli *angoli esterni* CGH, DGH sono rispettivamente *interni opposti* i due AFG, BFG.

PROP. XI. TEOR. V.

§. 72. *Se due rette esistenti nel medesimo piano, e tagliate da un' altra retta, formano gli angoli interni posti dall' istessa parte uguali a due retti, tali rette sono parallele.*

Dichiarazione. Sieno le due rette AB, CD tagliate comunque dalla retta EH. Dico, che se gli angoli BFG, FGD presi insieme sono uguali a due retti, le rette AB, CD sono parallele.

Dimostrazione. Egli è impossibile, che le rette proposte, quantunque prolungate, vadansi ad unire in verun punto. Imperocchè se ciò accadesse in qualunque punto O, si potrebbe prolungare GC in I, finchè sia GI=FO; ed unendo poscia IF si avrebbe un triangolo IFO. Or se si dimostra, che questo triangolo è assolutamente impossibile, resterà dimostrato, essere impossibile, che le rette AB, CD vadansi giammai ad unire.

Essendo per ipotesi uguale a due retti la somma degli angoli BFG, FGD; ed essendo pure a due retti uguale la somma degli angoli conseguenti FGD, FGC (§. 67.); sarà la somma di BFG, FGD uguale alla somma di FGD, FGC. Onde tolto di comune l' angolo FGD, resta l' angolo BFG=FGC, ossia l' angolo OFG=FGI (§. 17). Ma sono inoltre i due lati FO, FG rispettivamente eguali ai lati GI, GF. Dunque (§. 19.) la base GO=alla base FI. Ma per costruzione GI=FO. Dunque la somma di GO, e GI, ossia tutta OI, è uguale alla somma di IF, FO. Cioè a dire, nel triangolo IFO vi si trova un lato eguale alla somma degli altri due. Ciò è impossibile (§. 54.). Dunque è impossibile a formarsi quel triangolo IFO; e conseguentemente è impossibile, che le rette AB, CD vadansi ad unire: esse perciò debbono essere parallele. Laonde *se due rette esistenti nel medesimo piano ec.* c. b. d.

§. 73. Coroll. Immaginiamo, che la retta AB si giri intorno al punto F; potrà essa acquistare infinite posizioni diverse rispetto alla retta CD. Ora fra tutte queste infinite posizioni non ve n'è che una sola, in cui essa sia parallela a CD. Ma si è dimostrato, che ella è parallela a CD, se la somma degli angoli interni BFG, FGD sia eguale a due retti. Dunque in ogni altra posizione, in cui la somma degli angoli interni sia o maggiore, o minore di due retti, la retta AB giammai non è parallela a CD.

PROP. XII. TEOR. VI.

§. 74. *Se due rette esistenti nel medesimo piano e tagliate da un' altra retta formano gli angoli alterni uguali tra essi: oppure l' angolo esterno uguale all' interno opposto; sono tali rette parallele tra di loro.*

I. Dichiarazione. Le rette AB, CD tagliate dalla terza EH formino gli angoli alterni AFG, FGD uguali tra loro: dico, esser tra esse parallele le rette AB, CD.

Dimostrazione. Agli angoli AFG, FGD uguali per ipotesi si aggiunga di comune l' angolo BFG; sarà la somma degli angoli AFG, BFG uguale alla somma degli angoli

BFG, FGD. Ma la prima somma è uguale a due retti; per esser conseguenti gli angoli AFG, BFG. Dunque anche la somma degli angoli BFG, FGD è uguale a due retti. Ma questi sono angoli interni delle rette AB, CD. Laonde in vigore del teor. preced. le rette AB, CD esser deggiono parallele.

II. Dichiarazione. Le rette AB, CD tagliate dalla terza EH formino l' angolo esterno EFB uguale al suo interno opposto FGD; dico pure esser le rette AB, CD parallele.

Dimostrazione. Agli angoli EFB, FGD uguali per ipot. si aggiunga di comune l' angolo BFG. Sarà la somma degli angoli EFB, BFG uguale alla somma degli angoli BFG, FGD. Ma la somma degli angoli EFB, BFG (per esser conseguenti) è uguale a due retti. Dunque anche la somma di BFG, FGD è uguale a due retti. Ma questi sono interni delle rette AB, CD tagliate da EH. Dunque le rette AB, CD sono per lo teor. preced. tra di loro parallele. Sicchè *se due rette esistenti nel medesimo piano ec.* c. b. d.

PROP. XIII. TEOR. VII.

§. 75. *Se due rette sono parallele: tagliate comunque da un' altra retta formano 1. la somma degli angoli interni posti dalla stessa parte uguale a due retti; 2. gli angoli alterni uguali tra essi; e 3. l' angolo esterno uguale al suo interno opposto.*

I. Dichiarazione. Siano AB, CD tra di loro parallele, e sian tagliate comunque dalla retta EH; dico 1. *che gli angoli BFG, FGD sono eguali a due retti.*

Dimostrazione. Se la somma degli angoli BFG, FGD non è uguale a due retti, sarà essa maggiore, o minore di due retti. Ma essendo la somma degli angoli BFG, FGD maggiore o minore di due retti, le rette AB, CD più non possono essere parallele. (§. 73.) Dunque, giacchè si son supposte parallele, la somma degli angoli BFG, FGD deve necessariamente esser uguale a due retti.

II. Nella medesima ipotesi dico, *che gli angoli alterni AFG, FGD sono tra loro eguali.*

Dimostrazione. Essendo le rette AB, CD parallele, gli angoli interni BFG, FGD pareggiano due retti (n. 1.). Ma i due angoli BFG, AFG, perchè conseguenti, pure pareggiano due retti. Sicchè la somma degli angoli BFG, FGD è uguale alla somma di BFG, AFG. Laonde tolto da tali somme il comune angolo BFG, restano gli angoli alterni FGD, AFG tra essi eguali.

III. Nella medesima ipotesi dico, *che l' angolo esterno EFB è uguale al suo interno opposto FGD.*

Dimostrazione. Si potrebbe ciò dimostrare similmente che si è praticato or ora per la seconda tesi. Oltre ciò: l' angolo EFB è uguale al suo verticale AFG (§. 69.). Ma questo angolo AFG è uguale al suo alterno FGD, come or ora si è dimostrato n. II. Dunque l' angolo EFB è uguale al suo interno opposto FGD. Sicchè *se due rette sono parallele, tagliate comunque da un' altra retta, formano ec.* c. b. d.

PROP. XIV. TEOR. VIII.

§. 76. *Se due rette sono parallele ad una terza sono anche parallele tra esse.*

Fig. 21. Dichiarazione. Sieno le due rette AB, CD entrambe parallele alla terza EF: dico, *che le stesse AB, CD sono tra esse parallele.*

Dimostrazione. Si tiri la retta GI con qualunque inclinazione, e che tagli tutte tre le rette AB, CD, EF. Per essere AB, ed EF parallele, l' angolo AGI pareggia il suo alterno GIF (§. 75.); e per essere CD parallela ad EF è pure l' angolo esterno GHD uguale allo stesso angolo HIF come suo interno opposto (§. 75.). Laonde gli angoli AGH, GHD, essendo uguali entrambi allo stesso angolo HIF, sono tra essi uguali. Ma essi sono alterni delle rette AB, CD. Dunque son tali rette parallele tra di loro (§. 74). *Per la qual cosa, se due rette sono parallele ad una terza ec.* c. b. d.

PROP. XV. TEOR. XI.

§. 77. *Se due rette sono eguali, e parallele, e vengono congiunte dalla stessa parte da altre due rette; tali congiungenti sono pure eguali, e parallele.*

Dichiarazione. Sieno le rette AD, BC eguali e parallele, e si congiungano dalla stessa parte dalle rette AB, DC; dico, che *queste congiungenti sono eguali, e parallele.* Fig. 9

Dimostrazione. Si unisca BD. Poichè AD, BC sono per ipot. parallele, l'angolo ADB pareggia il suo alterno CBD (§. 75.). Ma in oltre hanno questi angoli i lati DA, DB rispettivamente eguali ai lati BC, BD (per essere BD comune, e AD per ipot. eguale a BC). Dunque BA base dell' angolo ADB pareggia DC base dell' altro angolo CBD (§. 20). In oltre considerando gli angoli ABD, CDB, troviamo in essi i lati BA, BD rispettivamente eguali ai lati CD, DB (per essersi dimostrato or ora BA=DC, e per essere BD comune). Dippiù troviamo AD base dell' angolo ABD uguale a BC base dell' angolo BDC; perciò l' angolo ABD è uguale all' angolo CDB (§. 19.). Ma questi sono alterni delle rette AB, CD. Dunque (§. 75.) tali rette AB, DC sono parallele. Laonde *se due rette sono eguali, e parallele.* ec. c. b. d.

C

PROP. XVI. PROBL. VII.

§. 78. *Data una linea retta, e dato un punto fuori della sua direzione, tirare pel punto dato un' altra retta, che sia parallela alla retta data.*

Fig. 22 Dichiarazione. Sia data la retta AB, e sia dato fuori di essa il punto O; bisogna per lo punto O tirare la parallela ad AB.

Soluzione. 1. Si prenda in AB ad arbitrio un punto P, e si congiunga la retta PO.

2. Si faccia nel punto O l' angolo COP uguale all' angolo OPB (§. 59.); e si prolunghi CO verso D.

Dico esser CD parallela ad AB.

Dimostrazione. Per la costruzione l' angolo COP è uguale ad OPB. Or questi sono alterni delle rette CD, AB. Dunque CD è parallela ad AB (§. 75). Sicchè pel dato punto O si è tirata la retta CD parallela ad AB. c. b. f. e d.

C A P. IV.

Delle proprietà de' triangoli e per rispetto degli angoli, e per rispetto de' lati.

Fig. 23 §. 79. Definizione. Rappresenti ABC qualunque triangolo; e s' intenda qualunque suo lato p. e. AC prolungato verso D. Si dirà BCD *angolo esterno*, e CBA, CAB si diranno i suoi *angoli interni opposti.*

PROP. XVII. TEOR. X.

§. 80. *In ogni triangolo, se si prolunga un lato, 1. l' angolo esterno è uguale alla somma dei due interni opposti; 2. e tutti e tre gli angoli insieme presi sono uguali a due retti.*

Dichiarazione. Sia ABC qualunque triangolo, e si prolunghi AC verso D. Dico I. essere l' angolo BCD uguale alla somma dei due interni A, e B.

Dimostrazione. Per lo punto C si tiri CE parallela ad AB. Essendo le parallele CE, AB tagliate da AD, l' angolo esterno ECD è uguale al suo interno opposto A. Similmente essendo le stesse parallele EC, BA tagliate da BC, l' angolo BCE è uguale al suo alterno B (§. 75). Dunque la somma degli angoli DCE, ECB, ossia tutto l' angolo DCB, è uguale alla somma degli angoli A+B.

II. Dico, che la somma di tutti e tre gli angoli A+B+BCA è uguale a due retti.

Dimostrazione. Essendo la somma degli angoli A, e B uguale all' angolo BCD (per la prima parte); aggiunto ad essi di comune l' angolo BCA, sarà la somma degli angoli A+B+BCA uguale alla somma degli angoli BCD+BCA. Ma questa somma è uguale a due retti (§. 67). Dunque pure gli angoli A+B+BCA sono uguali a due retti. Laonde *in ogni triangolo* ec. c. b. d.

§. 81. Coroll. Quindi si ricavano le seguenti conseguenze.

I. Ogni angolo esterno di qualunque triangolo è sempre maggiore di ciascuno de' suoi interni opposti.

II. Due angoli qualunque di un triangolo insieme presi, sono sempre minori di due angoli retti; e perciò un triangolo non può avere nè più di un angolo retto, nè più di un angolo ottuso; e conseguentemente da un punto non si può calare su d' una retta, se non se una sola perpendicolare.

III. Se la somma di due angoli di un triangolo uguaglia la somma di due angoli di un altro triangolo; gli angoli rimanenti saranno fra essi uguali.

§. 82. Avvertimento. Dall' essersi conosciuto, che gli angoli di ogni triangolo rettilineo adeguano due retti; si potrà agevolmente determinare un canone generale, che ne faccia conoscere la somma di tutti gli angoli di qualunque figura rettilinea, purchè se ne sappia il numero de' suoi lati.

Fig. 6 Rappresenti ABCDE qualunque figura rettilinea. Si prenda dentro di essa un punto qualunque O, e si conducano agli angoli della figura le rette OA, OB, OC, OD, OE. Si formeranno tanti triangoli, quanti sono i lati della figura. Or comecchè la somma degli angoli di ogni triangolo è uguale a due retti, sarà la somma degli angoli di tutt' i mentovati triangoli uguale tante volte a due retti, quante volte il disegna il numero de' medesimi triangoli, cioè il numero de' lati della figura. Ossia sarà la somma di tutti gli angoli de' mentovati triangoli uguale a tanti retti, quanti ne disegna il doppio numero dei lati della figura. Ma la somma degli angoli di tutt'i mentovati triangoli comprende non solo la somma di tutti gli angoli della figura, ma anche quella degli angoli esistenti intorno al punto O, i quali ultimi pareggiano quattro retti (§. 68). Dunque la somma di tutti gli angoli della figura, e di altri quattro retti è uguale a tanti retti, quanti ne disegna il doppio numero de' lati di essa figura. Onde tolti di comune quattro retti, sarà *la somma di tutti gli angoli della figura uguale a tanti retti, quanti ne disegna il doppio numero dei lati di essa figura, però toltine quattro.*

PROP. XVIII. PROBL. XI.

§. 83. *Se in un triangolo due lati sono uguali, gli angoli opposti a tali lati sono anche uguali.*

Dichiarazione. Sia nel triangolo ABC il lato AB uguale al lato BC. Dico, *che l' angolo C sia uguale all' angolo A.* Fig. 24

Dimostrazione. I due lati CB, CA formanti l' angolo C sono rispettivamente eguali ai due lati AB, AC formanti l' angolo A (imperocchè per ipot. AB=BC, ed AC è lato comune). In oltre AB base dell' angolo C pareggia BC base dell' angolo A. Dunque (§. 19) l' angolo C è uguale all' angolo A. Per

la qual cosa, *se in un triangolo due lati sono eguali* ec c. b. d.

§. 84. Coroll. Supposto, che anche AC fosse uguale ad AB, sarebbe pure l' angolo B uguale all' angolo C. Laonde il triangolo equilatero è anche equiangolo.

PROP. XIX. TEOR. XII.

§. 85. *Se in un triangolo due angoli sono uguali, i lati opposti a tali angoli sono anche tra essi uguali.*

Dichiarazione. Abbia il triangolo ABC l' angolo A uguale all' angolo C; dico, *che il lato BC sia uguale al lato AB.*

Dimostrazione. Se si nega essere AB=BC, sarà AB maggiore, o minore di BC Sia, se è possibile, AB maggiore di BC. S' intenda tagliata BE=BC, ed indi congiunta EC.

Essendo nel triangolo ACE il lato AE prolungato in B, l' angolo BEC è maggiore dell' angolo A (§. 81), e conseguentemente maggiore dell' angolo ACB, che si è supposto uguale ad A. Ma l' angolo ACB è anche maggiore dell' angolo ECB. Dunque l' angolo BEC è molto più maggiore dell' angolo BCE, Sicchè nel triangolo EBC in cui si suppongono due lati eguali, cioè EB=BC, gli angoli ad essi opposti non sono eguali. Ma ciò è assurdo (§ 83). Dunque è assurdo il dire, che AB sia maggiore di BC. Similmente si dimostra, che il lato AB non sia minore di BC. Dunque AB=BC. Laonde *se in un triangolo due angoli* ec. c. b. d.

§. 86 Coroll. Se l' angolo B fosse uguale all' angolo A, sarebbe pure AC=BC. Adunque supposti eguali tutti e tre gli angoli A, C, B, sarebbero eguali tutti e tre i lati: cioè il triangolo equiangolo è anche equilatero.

PROP. XX. TEOR. XIII.

§. 87 *Se in un triangolo un lato è maggiore di un altro, l' angolo opposto al lato maggiore è anche maggiore dell' angolo opposto al lato minore.*

Dichiarazione. Sia nel triangolo ABC il lato AC maggiore di AB; dico, che l' angolo ABC è maggiore dell' angolo C. Fig. 25

Dimostrazione. Dal lato maggiore AC si tagli AD=AB, e si unisca BD. Essendo AB=AD, sarà anche ABD=ADB (§. 83). Onde siccome l' angolo ABC è maggiore di ABD, così similmente è maggiore di ADB. In oltre nel triangolo BDC il lato DC è prolungato in A, e perciò l' angolo BDA è maggiore di C (§. 81). Laonde l' angolo ABC, che si è dimostrato maggiore di ADB, sarà assai maggiore dell' angolo C. *Sicchè se in un triangolo un lato è maggiore* ec. c. b. d.

PROP. XXI. TEOR. XIV.

§. 88 *Se in un triangolo un angolo è maggiore di un altro, anche il lato opposto all' angolo maggiore è maggiore del lato opposto all' angolo minore.*

Dichiarazione. Sia nel triangolo ABC l' angolo ABC maggiore dell' angolo C; dico, che il lato AC sia maggiore del lato AB.

Dimostrazione. Il lato AC non può essere nè eguale, nè minore del lato AB; poichè se fosse eguale dovrebbe essere l' angolo ABC=ACB (§. 85); il che è contro la nostra ipotesi Se AC fosse minore di AB, l' angolo ABC bisognerebbe che fosse minore dell' angolo C (§. 87); il che pure è contro l' ipotesi. Sicchè non potendo essere il lato AC nè eguale, nè minore di AB, dev' essere maggiore. Laonde *se in un triangolo un angolo è maggiore di un altro* ec. c. b. d.

Fig. 26 §. 89. Coroll. Quindi siegue, che di tutte le infinite rette, che da un punto tirar si possono su di un' altra retta, la perpendicolare è la minima. Imperocchè (fig. 26) tirate dal punto C sulla retta EB la perpendicolare CD, e qualunque obbliqua CA; sarà sempre l' angolo CDA, come retto, maggiore di qualunque angolo CAD, che sempre vien acuto (§. 81 n. II.). Onde AC opposta all' angolo retto sarà sempre maggiore di CD opposta all' acuto CAD. Laonde di tutte le rette, che da un medesimo punto si possono tirare su di una retta, la perpendicolare è la minima.

C A P. V.

Della perfetta uguaglianza de' triangoli.

PROP. XXII. TEOR. XV.

§. 90 *Se due triangoli hanno due lati rispettivamente eguali, ed uguali pure gli angoli compresi da tali lati; avranno anche la base uguale alla base, i rimanenti angoli rispettivamente eguali, e lo spazio uguale allo spazio.*

Dichiarazione. Siano due triangoli ABC, DEF, i quali abbiano i lati AB=DE, e BC=EF; dippiù l' angolo ABC=DEF: dico che sarà pure AC=DF; l' angolo A=D; l' angolo C=F; e lo spazio ABC uguale allo spazio DEF. Fig. 27.

Dimostrazione. S' intenda il triangolo ABC soprapposto al triangolo DEF in modo, che il punto B cada sopra il punto E, ed il lato BA cada sopra il lato ED. Essendo l' angolo B=E per ipotesi, mentre BA cade sopra ED, deve necessariamente anche BC cadere sopra di EF. E poichè BA=ED, BC=EF, mentre il punto B cade sul punto E, anche il punto A deve cadere sul punto D, e 'l punto C sul punto F; e quindi AC su di DF. Sicchè il triangolo ABC si combacerà col triangolo DEF. Ma le grandezze che si combaciano sono eguali (§. 49). Sicchè sono la base AC=DF, l' angolo A=D, l' angolo C=F, e 'l triangolo ABC uguale al triangolo DEF. E perciò *se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali* ec c. b. d.

PROP. XXIII. TEOR. XVI.

§. 91. *Se due triangoli hanno i lati rispettivamente uguali, sono pure equiangoli, ed uguali.*

Dichiarazione. Abbiano i due triangoli ABC, DEF, il lato AB=DE, il lato BC=EF, e 'l lato AC=DF; dico dover essere pure l' angolo B=E, l' angolo A=D, l' angolo C=F, e tutto lo spazio BAC uguale allo spazio DEF.

Dimostrazione. *Si considerino gli angoli* ABC, DEF. Questi hanno per ipotesi i lati AB, BC rispettivamente uguali ai lati DE, EF, ed in oltre la base AC=DF. Dunque gli angoli ABC, DEF sono uguali (§. 19). E perciò i proposti triangoli sono della condizione del teor. prec., cioè hanno due lati uguali a due lati rispettivamente, ed uguali pure gli angoli da tali lati compresi. Laonde detti triangoli ABC, DEF sono equiangoli, ed uguali. Sicchè *se due triangoli hanno i lati rispettivamente eguali* ec c. b. d.

PROP. XXIV. TEOR. XVII.

§. 92. *Se due triangoli sono tra essi equiangoli, e de' lati opposti agli angoli eguali, ne abbiano uno eguale ad uno, sono tali triangoli tra essi equilateri, ed uguali.*

Dichiarazione. Abbiano i triangoli ABC, DEF gli angoli A=D, B=E, C=F, ed il lato AC opposto all' angolo B, uguale al lato DF opposto all' angolo E. Dico dover essere pure i lati AB=DE, e BC=EF, e lo spazio ABC=DEF.

Dimostrazione. S' intenda il triangolo ABC posto sul triangolo DEF in modo, che AC combaci con DF. Essendo l' angolo A=D, cadrà AB su DE; similmente essendo l' angolo C=F, cadrà CB su FE. Conseguentemente il punto B dovrà cadere sul punto E; altrimenti i due lati AB, CB non potrebbero entrambi cadere rispettivamente su i lati DE, FE. Sicchè il triangolo ABC si combacerà col triangolo DEF; e perciò (§. 49) il lato AB=DE, BC=EF, e lo spazio ABC=DEF. Dunque *se due triangoli sono tra essi equiangoli.* ec. c. b. d.

PROP. XXV. TEOR. XVIII.

§. 93. *Se due triangoli hanno due lati uguali a due lati rispettivamente, e degli angoli opposti ad essi uno sia eguale ad uno, e l' altro sia della medesima specie che l' altro, (cioè ambidue ottusi, od acuti); sono tali triangoli equiangoli, ed uguali.*

Dichiarazione. Abbiano i due triangoli ABC, DEF due lati AB, BC rispettivamente uguali ai due lati DE, EF; e degli angoli opposti ad essi, sia l' angolo A=D, e l' angolo C della stessa specie che l' angolo F. Dico, che questi triangoli debbono essere in tutto eguali.

Dimostrazione. I proposti triangoli debbono necessariamente avere uguali gli angoli B, ed E, compresi dai lati uguali. Essi perciò sono della condizione del teor. XV., e conseguentemente debbono tali triangoli essere in tutto eguali. In fatti, se l' angolo B non è uguale all' angolo E, sarà esso maggiore, o minore. Sia, s' è possibile, B maggiore di E; e s' intenda in B fatto l' angolo ABG=DEF.

Avendo i due triangoli ABG, DEF l' angolo A=D (per ipot.), l' angolo ABG=DEF (per costruzione); sarà il terzo angolo BGA=F (81. n. III.). In oltre, essendo per ipotesi AB=DE, saranno i detti triangoli ABG, DEF della condizione del teor. prec., e perciò BG=EF. Ma per ipot. EF=BC. Dunque BG=BC. Sicchè il triangolo GBC avendo eguali i due lati BG, BC saranno eguali pure i due angoli ad essi opposti BCG, BGC (§. 83.). Ma per ipot. gli angoli C, ed F sono della medesima specie. Dunque pure gli altri due angoli BGC, BGA, che rispettivamente pareggiano gli angoli C, ed F sono della medesima specie; cioè ambidue ottusi, od ambidue acuti. Ma ciò è impossibile, perchè sono angoli conseguenti (§. 67.). Dunque è impossibile, che l' angolo ABC sia maggiore dell' angolo DEF.

Similmente si dimostra, che l' angolo ABC non può essere minore di DEF. Sicchè gli angoli in B, ed E de' proposti triangoli sono uguali. Conseguentemente sono detti triangoli ABC, DEF in tutto eguali. Per la qual cosa, *se due triangoli hanno due lati uguali a due lati* ec. c. b. d.

C A P. VI.

Delle proprietà fondamentali de' parallelogrammi, e della semplice uguaglianza sì de' parallelogrammi, che de' triangoli.

§. 94. Definizione I. Si dice *diagonale*, o *diametro* d' un parallelogrammo la retta, che congiunge i vertici di due de' suoi angoli opposti.

Così del parallelogrammo ABCD la retta AC è diagonale. Fig. 8.

§. 95. Definizione II. Se nella diagonale (AC) di un qualunque parellelogrammo (ABCD) si prenda ad arbitrio un punto (O), e per tal punto si tirino due rette (EF, GH) rispettivamente parallele ai cor-

rispondenti lati del parallelogrammo; si dividerà esso in quattro parallelogrammi (AEOG, EBHO, OHCF, OFDG), de' quali, i due (AEOG, OHCF) che sono attraversati dalla diagonale del gran parallelogrammo, si diranno *i parallelogrammi, che stanno intorno la diagonale*, e gli altri due (EBHO, OFDG) si diranno *i supplimenti di quelli, che stanno intorno alla diagonale.*

PROP. XXVI. TEOR. XIX.

§. 96. *In ogni parallelogrammo sono eguali tra essi sì i lati opposti, che gli angoli opposti; e la diagonale il divide in due triangoli uguali.*

Fig. 9 I. Dichiarazione. Rappresenti ABCD qualunque parallelogrammo, dico I. che gli angoli opposti in B ed in D sono eguali, come altresì sono eguali tra essi gli altri due A, e C.

Dimostrazione. *Si tiri la diagonale* BD. Essendo le parallele AD, BC tagliate da DB, sono tra essi uguali i due alterni ADB, CBD. Similmente essendo le parallele DC, AB tagliate da DB, sono tra loro uguali gli alterni BDC, DBA. Onde la somma di ADB+BDC cioè tutto l' angolo ADC è uguale alla somma di CBD+DBA, cioè a tutto l' angolo ABC. Ed in oltre il terzo angolo A del triangolo BAD è uguale al terzo angolo C del triangolo BCD (§. 81. n. III.). Sicchè nel parallelogrammo ABCD sono tra loro uguali gli angoli opposti.

II. Dico, che la diagonale DB taglia il parallelogrammo in due triangoli eguali BAD, BCD.

Dimostrazione. I due triangoli BAD, BCD si sono or ora dimostrati equiangoli. Ma dippiù hanno di commune il lato BD opposto agli angoli eguali in A, ed in C. Dunque per lo §. 92 sono tali triangoli in tutto eguali tra di loro.

III. Quindi dev' essere AD=BC, ed AB=DC. Sicchè *in ogni parallelogrammo sono uguali tra essi sì i lati* ec. c. b. d.

§. 97. Coroll. I. Essendo i due angoli BAD ADC uguali alla somma di due retti (perchè angoli interni delle parallele AB, DC tagliate dalla stessa AD (§. 75); se uno di essi BAD è retto, dovrà esser retto anche l' altro ADC: e quindi per lo teor. prec. deggiono esser retti anche gli altri due in C, e B, che sono a loro opposti. Dunque se un angolo di un parallelogrammo è retto, tutti gli altri sono anche retti.

§. 98. Coroll. II. In oltre, essendo BC=AD, ed essendo AB=DC, perchè lati opposti del parallelogrammo (teor. prec.); se è AD=AB, il parallelogrammo è equilatero.

§. 99. Coroll. III. Conseguentemente se un angolo di un parallelogrammo sia retto, ed i lati, da cui esso angolo è formato, sieno uguali, il parallelogrammo sarà rettangolo, ed equiangolo, cioè sarà un quadrato.

PROP. XXVII. TEOR. XX.

§. 100. *I supplimenti de' parallelogrammi, che sono intorno la diagonale di un' altro parallelogrammo, sono tra essi uguali.*

Fig. 28 Dichiarazione. Sia DB un qualunque parallelogrammo, e tirata in esso la diagonale AC, per un punto qualunque O di questa sian condotte le rette GH, EF parallele rispettivamente ai lati AB, AD del parallelogrammo DB. Dico, che i parallelogrammi OB, OD sono tra essi uguali.

Dimostrazione. Venendo ogni parallelogrammo diviso da una sua diagonale in due triangoli uguali (§. 96); sarà il triangolo ABC=ADC; il triangolo AEO=AGO; ed il triangolo OHC=OFC. Sicchè dal triangolo ABC togliendo i due triangoli AEO, OHC; e dall' altro triangolo ADC togliendo gli altri due AGO, OFC; quel che resta dal primo sarà uguale a quel che resta dal secondo; cioè resterà il supplimento EOHB uguale al supplimento GOFD. Laonde *i supplimenti de' parallelogrammi, che sono intorno* ec. c. b. d.

PROP. XXVIII. TEOR. XXI.

§. 101. *I parallelogrammi, ed i triangoli, che hanno la medesima base, e che sono racchiusi tra le stesse rette parallele, sono uguali tra essi.*

Dichiarazione. Su la stessa base AB, e tra le medesime parallele AB, DF sieno formati i parallelogrammi AC, AF; ed i triangoli ADB, AEB: dico I. esser uguali tra essi i parallelogrammi AC, AF; ed uguali tra essi anche i triangoli ADB, AEB. Fig. 29

Dimostrazione. I. Essendo ad AB uguale sì DC, che EF (perchè lati opposti de' parallelogrammi AC, AF (§. 96); sarà DC=EF. Onde aggiungendo ad essi di comune CE, sarà DE=CF. E' in oltre AD=BC; AE=BF (§. 96). Dunque i triangoli ADE, BCF sono equilateri, e perciò sono uguali (§. 91). Quindi togliendo da essi il comune triangolo COE, i restanti trapezj ADCO, BOEF saranno eguali. Ed aggiungendo a questi di comune il triangolo AOB, le figure che si formeranno, cioè i parallelogrammi ADCB, AEFB saranno pure tra di loro uguali.

II. Il triangolo ADB è metà del parallelogrammo AC, come ancora il triangolo AEB è metà del parallelogrammo AF. Dunque essendosi dimostrati uguali i parallelogrammi AC, AF; anche i triangoli ADB, AEB, che sono loro metà, debbono essere uguali. Sic-

chè *i parallelogrammi, ed i triangoli, che hanno la medesima base* ec. c. b. d

§. 102. Coroll. Essendo il parallelogrammo AC il doppio del triangolo ADB (§. 96), ed essendo il triangolo ADB=AEB; sarà pure il parallelogrammo AC il doppio del triangolo AEB. Sicchè se un parallelogrammo, ed un triangolo hanno la stessa base, e sono racchiusi tra le medesime parallele, il parallelogrammo è il doppio del triangolo.

PROP. XXIX. TEOR. XXII.

§. 103. *I parallelogrammi, ed i triangoli, che hanno basi uguali, e che sono racchiusi tra le medesime parallele, sono uguali tra essi.*

Fig. 30 Dichiarazione. Abbiano i parallelogrammi AC, EG le basi AB, EF uguali, e sieno racchiusi tra le stesse parallele AF, DG. Dico; che il parallelogrammo AC sia uguale al parallelogrammo FH. E lo stesso dico ancora de' triangoli ADB, EGF.

Dimostrazione. *Si congiungano le rette DE, CF.* Essendo la stessa AB uguale sì a DC (§. 96), che ad EF (per ipot.); sarà DC=EF. Ma dippiù sono DC, ed EF parallele (per ipot.). Sicchè le congiungenti DE, CF sono pure parallele (§. 77); e perciò la figura DEFC è un parallelogrammo.

Ora il parallelogrammo AC è uguale al parallelogrammo DEFC, perchè entrambi han di comune la base DC, e sono chiusi dalle stesse parallele (§ 101); ed a questo stesso parallelogrammo è uguale anche l' altro FH, per aver la base comune EF, e per esser ambidue chiusi dalle stesse parallele. Sicchè il parallelogrammo AC è uguale al parallelogrammo FH.

I triangoli poi ADB, EGF sono rispettivamente le metà de' parallelogrammi AC, EG. Dunque essendo questi tra di loro uguali, uguali similmente debbono essere i triangoli ADB, EGF. Laonde *i parallelogrammi, ed i triangoli, che hanno basi uguali* ec. c. b. d.

PROP. XXX. TEOR. XXIII.

§. 104. *Se due triangoli uguali appoggiano sulla stessa base, e sono situati per rispetto della comune base dalla medesima parte; la retta, che unisce i vertici di tali triangoli, è parallela alla base.*

Dichiarazione. Sieno ACB, ADB due triangoli eguali, che appoggiano sulla stessa base AB, e che sono situati alla medesima parte; dico, che congiunti i vertici C, e D, sia la retta CD parallela ad AB. Fig. 31

Dimostrazione. S' intenda per lo punto C tirata la parallela ad AB. Essa dovrà incontrare il lato AD in qualche punto. Si supponga esser O questo punto, ed investighiamone il sito.

E' evidente, che il sito del punto O nel lato AD dev' esser tale, che congiunta OB, sia il triangolo AOB uguale al triangolo ACB

(§. 101). Ma questo triangolo ACB si è supposto uguale al triangolo ADB. Dunque tal dev' essere il sito del punto O nel lato AD, che si faccia il triangolo AOB uguale al triangolo ADB. Quindi il punto O deve essere identico al punto D; giacchè altrimenti si farebbe un triangolo ACB minore, o maggiore di ADB (§. 48). Sicchè la retta, che dal punto C si conduce parallela ad AB deve passare per lo punto D; e perciò CD, che unisce i vertici de' triangoli è parallela ad AB. Laonde *se due triangoli poggiano sulla stessa base, e sono situati* ec. c. b. d.

PROP. XXXI. TEOR. XXIV.

§. 105. *Se due triangoli eguali hanno basi eguali, e poste in una stessa retta; e sono dippiù per rispetto di tale retta situati dalla stessa parte; la retta che unisce i vertici di tali triangoli, è parallela a quella in cui sono le basi.*

Fig. 32 Dichiarazione. Sulla stessa retta AE sieno situati dalla stessa parte i due triangoli ACB, DFE tali, che sieno uguali, e che abbiano le basi AB, DE uguali. Dico, che la retta CF, la quale unisce i vertici di tali triangoli, sia parallela ad AE.

Dimostrazione. Si concepisca tirata per lo punto C la parallela ad AE. Essa dovrà incontrare il lato DF in qualunque punto O. Di un tal punto investighiamone il sito.

Il sito del punto O nel lato DF dev' esser tale che congiunta la retta OE, si faccia il triangolo DOE uguale al triangolo ACB (§. 103). Ma per ipot. il triangolo ACB è uguale al triangolo DFE. Dunque tal deve essere il sito del punto O, che il triangolo DOE sia eguale al triangolo DFE. Ma ciò non può essere, che nel solo caso, in cui il punto O sia identico al punto F; giacchè in qualunque altro caso si farebbe il triangolo DOE minore o maggiore del triangolo DFE. Sicchè la retta, che per lo punto C si conduce parallela ad AE, deve passare per lo punto F: e perciò CF, che unisce i vertici de' triangoli, è parallela ad AE. Laonde *se due triangoli eguali hanno le basi uguali, e poste in una stessa retta* ec. c. b. d.

C A P. VII.

Della teorica de' rettangoli, e de' quadrati.

§. 106. Definizione. Un quadrato si dice *formato su d' una data retta*, se essa è suo lato. Si dice poi un rettangolo *formato da due rette*, se tali rette formano uno de' suoi angoli.

§. 107. Avv. Il quadrato si dice formato su d' una retta, perchè una retta sola basta per la sua formazione. Il rettangolo poi si dice formato da due rette, perchè di due rette v' è bisogno per la formazione di esso,

una per dinotare la sua lunghezza, e l'altra per dinotare la sua larghezza.

PROP. XXXII. PROBL. VIII.

§. 108. *Data una retta terminata, formare su di essa il quadrato.*

Fig. 33 Dichiarazione. Sia data la retta AB. Si cerca di fare su di essa il quadrato.

Soluzione. 1. Dal punto A s' innalzi su di AB la perpendicolare AE (§. 65.); e da essa si tagli AD=AB.

2. Per i punti B, e D si tirino BC parallela ad AD, e DC parallela ad AB (§. 78), che si uniscono in C.

Dico essere ABCD il quadrato cercato.

Dimostrazione. Per costruzione la figura ABCD è un parallelogrammo. I due lati AD, AB sono eguali; l' angolo da questi lati compreso è retto. Dunque un tal parallelogrammo è quadrato (§. 99) Sicchè sulla retta data AB s' è formato il quadrato ABCD. c. b. f. e d.

§. 109. Coroll. Essendo in ogni quadrato uguali tutt' i lati, e retti tutti gli angoli; è facile l' intendere, che debbano combaciare e i quadrati fatti su rette uguali, ed i quadrati, che sono uguali tra essi. E perciò i quadrati formati su rette uguali son uguali tra essi; e quelli che sono tra essi uguali, sono fatti su rette uguali.

PROP. XXXIII. PROBL. IX.

§. 110. *Date due rette disuguali; costruire un rettangolo, che sia da tali rette formato.*

Dichiarazione. Sieno date le due rette AB, ed L. Si cerca formare un rettangolo, il quale abbia tali rette per lati.

Soluzione. 1. Dal punto A s' innalzi la perpendicolare AE (§. 65.); e da essa si tagli AD=L. Fig. 34

2. Per i punti D, e B si tirino DC parallela ad AB, e BC parallela ad AD (§. 78).

Dico essere ABCD il rettangolo cercato.

Dimostrazione. La figura ABCD per costruzione è un parallelogrammo, che ha l' angolo in A retto. Dunque è un rettangolo (§. 97). I lati da cui è formato sono AB, ed AD=L. Dunque si è costrutto il rettangolo formato dalle rette AB, ed L. c. b. f. e d.

§. 111. Coroll. Sicchè qualora diremo il rettangolo fatto da AB, ed L; oppure il rettangolo di AB per L; oppure il rettangolo di AB in L, intenderemo il rettangolo, BCDA la cui lunghezza è AB, e la larghezza è AD=L.

PROP. XXXIV. TEOR. XXV.

§. 112. *Se una retta è divisa in qualunque numero di parti, uguali o disuguali che sieno, ed un' altra è indivisa: il rettangolo fatto dall' intera divisa, e dalla indivisa è uguale alla*

somma di tutt' i rettangoli fatti da ciascuna parte della divisa, e dalla indivisa.

Fig. 35 Dichiarazione. Sia la retta AB divisa nelle parti AE, GB, e la retta L indivisa. Dico che il rettangolo fatto da tutta AB, ed L, sia uguale alla somma de' rettangoli fatti da AE ed L; da EG ed L; da GB ed L.

Dimostrazione. Si formi da AB, ed AD=L il rettangolo ABCD (§. 110.); e dai punti E, e G s' innalzino le perpendicolari EF, GH. Saranno AF, EH, GC rettangoli; onde sì EF, che GH sarà uguale ad AD, ossia L.

Il rettangolo AC è uguale alla somma de' rettangoli AF, EH, GC. Ma il rettangolo AF è formato da AE ed AD, ossia da AE ed L: il rettangolo EH è formato da EG ed EF, ossia da EG ed L: il rettangolo GC è formato da GB e GH, ossia da GB ed L. Dunque il rettangolo AC, formato da tutta la divisa AB e dalla indivisa L, è uguale alla somma de' rettangoli fatti da ciascuna parte di essa divisa AB per la stessa indivisa L. Laonde *se una retta è divisa in qualunque numero di parti uguali, o disuguali* ec. c. b. d.

Fig. 36 n. 1 §. 113. Coroll. I. Sia AB una retta comunque divisa nelle parti AE, EG, GB; e s'intenda sopra di essa fatto il quadrato.

Il quadrato fatto sopra AB è lo stesso, che il rettangolo di AB per AB. Or dunque considerandosi la retta AB una volta come divisa, ed un' altra volta come indivisa; sarà il rettangolo di tutta AB per AB (cioè il quadrato di AB) uguale alla somma de' rettangoli, che si fanno da AE ed AB : da EG ed AB : da GC ed AB. E perciò *se una retta sia comunque divisa, il quadrato fatto sulla retta intera è uguale alla somma de' rettangoli fatti dalla stessa retta, e da ciascuna delle sue parti.*

§. 114. Avvertimento. La figura (*n.* 2) rappresenti il quadrato AC fatto sull' intera divisa AB. Innalzate le perpendicolari EF, GH, è evidente, che un tal quadrato AC è uguale alla somma dei rettangoli AF, EH, GC. Or il rettangolo AF è fatto da AE ed AD=AB; il rettangolo EH è fatto da EG ed EF=AB; e GC finalmente è formato da GB, e GH=AB. Onde il quadrato AC, fatto su l' intera divisa AB, è uguale alla somma de' rettangoli, che si fanno da tutta la retta, e da ciascuna sua parte.

§. 115. Coroll. II. Sia AB una retta comunque divisa, e s' intenda fatto il rettangolo da tutta AB, e da una delle sue parti, per es. GB. Sarà per lo teor. prec. il rettangolo di tutta AB per BG uguale alla somma de' rettangoli, che si fanno uno da AE e GB; l' altro da EG e GB; e l' altro da GB e BG. Or questo rettangolo di GB, e BG è il quadrato di GB. Dunque il *rettangolo fatto da tutta una retta divisa, e da una sua parte è uguale al quadrato di questa parte, ed ai rettangoli fatti da questa stessa parte, e da ciascuna delle altre.* Fig. 35

§. 116. Avv. Si noti, che se una retta sia divisa in due parti, essendo il rettangolo fatto

da tutta la retta, e da una sua parte uguale al quadrato di questa parte, ed al rettangolo di una parte per l' altra (§. prec.); togliendo di comune il quadrato della parte, sarà il rettangolo di tutta una retta, e di una sua parte, toltone il quadrato di questa stessa parte, uguale al rettangolo di una parte per l' altra.

§. 117. Coroll. III. Sieno le due rette AB, ed L entrambe divise in parti, sarà il *rettangolo delle rette intere uguale alla somma de' rettangoli, che si fanno da ciascuna parte di una retta per ciascuna parte dell' altra.*

Imperocchè considerando AB come divisa, ed L come indivisa, l' intero rettangolo fatto da AB ed L è uguale alla somma de' rettangoli di ciascuna parte di AB per L (§. 112); cioè il

$$\text{rett. di AB per L} = \begin{cases} \text{rett. di AE per L} \\ \text{rett. di EG per L} \\ \text{rett. di GB per L.} \end{cases}$$

Or considerandosi anche L divisa in parti, il rettangolo di AE per L uguaglia la somma de' rettangoli di AE per ciascuna parte di L.

Quello di EG per L uguaglia la somma de' rettangoli di EG per ciascuna parte di L.

Quello di GB in L uguaglia la somma de' rettangoli di GB per ciascuna parte di L.

Dunque il rettangolo di AB per L uguaglia la somma de' rettangoli fatti da ciascuna parte di AB per ciascuna parte di L. E perciò *se due rette sieno entrambe divise in parti, il rettangolo delle rette intere* ec.

§. 118. Coroll. IV. Quindi ne siegue, che se le parti di AB, e di L sieno tutte tra esse eguali, i detti rettangoli saranno quadrati, e quadrati tutti eguali, aventi per lato una delle parti di AB, oppure di L. E saranno questi quadrati tanti di numero, quanti ne disegna il numero delle parti di AB moltiplicato per lo numero delle parti di L.

§. 119. Avvertimento. La figura 37 rappresenta la tesi enunciata nel cor. precedente. Imperocchè AB, ed AC sono due rette divise in parti di egual misura. Il rettangolo fatto dalle rette intere è AD. Egli è evidente, che innalzate le perpendicolari EN, FM, GP, tutto il rettangolo si risolve in tanti rettangoli AN, EM, FP, GD, quante sono le parti di AB. Tirate poi le parallele HL, IK, ciascuno de' detti rettangoli AN, EM, FP, GD si risolve in tanti quadrati (aventi per comun lato una parte di AB, oppure di AC), quante sono le parti di AC. Giacchè dunque il numero de' detti quadrati compresi nel rettangolo AN si contiene nel rettangolo AD tante volte, quanti sono i rettangoli AN, EM, FP, GD, cioè quante sono le parti di AB; sarà il numero di tutt' i detti quadrati contenuti nell' intero rettangolo AD, eguale al numero delle parti di AC moltiplicato per lo numero delle parti di AB. Laonde *se due qualsivogliano rette sono entrambe divise in parti eguali, il rettangolo fatto dalle rette intere è eguale a tanti quadrati aventi per comun lato una di dette parti, quanti son disegnati dal numero delle parti di una retta moltiplicato per lo numero delle parti dell' altra.*

§. 120. Coroll. V. Finalmente essendo il quadrato fatto su di una retta lo stesso, che il rettangolo fatto da detta retta per se medesima; è chiaro, *che se una retta è divisa in parti eguali, il quadrato fatto su tutta la retta è uguale alla somma di tanti quadrati aventi per lato una di esse parti, quanti ne disegna il numero delle parti di essa retta moltiplicato per se stesso.*

PROP. XXXV. TEOR. XXVI.

§. 121. *Il quadrato fatto sulla somma di due rette è maggiore della somma de' quadrati fatti sulle rette per lo doppio del rettangolo fatto dalle medesime rette.*

Fig. 38 Dichiarazione. Sieno due rette AB, BC. La loro somma è AC. Dico, che il quadrato fatto su AC è maggiore della somma de' quadrati che si fanno uno su AB, e l' altro su BC, per lo doppio del rettangolo, che si forma da AB, e BC.

Dimostrazione. Considerandosi AC come una retta divisa nel punto B; sarà (§. 113)

$$\text{il quadrato di } AC = \begin{cases} \text{rett. di } AC \text{ per } CB \\ \text{rett. di } AC \text{ per } AB. \end{cases}$$

Ma (§. 115)

$$\text{il rett. di } AC \text{ in } CB = \begin{cases} \text{quad. di } BC \\ \text{rett. di } AB \text{ per } BC. \end{cases}$$

Similmente

il rett. di AC in AB ═ (quad. di AB
(rett. di AB per BC

Dunque

il quad. di AC ═ (quad. di BC
(quad. di AB
(due rett. di AB per BC

E conseguentemente il quadrato di AC è maggiore de' quadrati di AB, e di BC per lo doppio rettangolo fatto da AB per BC. Sicchè *il quadrato fatto sulla somma di due rette è maggiore della somma* ec c. b. d.

§. 122. Avvertimento. Si facciano su di AC il quadrato AD; su di AB il quadrato AM; e su di BC il quadrato BH. Egli è evidente, che il quadrato AD supera la somma de' quadrati AM, e BH per lo spazio FEDHGMF. Resta ad esaminarsi quanto sia questo spazio.

Si prolunghi BM in I. Tutto lo spazio FEDHCMF si risolve in due rettangoli FI, IH. Ora il rettangolo FI è formato da FM, ed FE. Ma FM═AB, ed FE═BC. (Imperocchè essendo tutta AE═AC, e la parte AF═AB, sarà anche FE═BC). Dunque il rettangolo FI è fatto da AB, e BC.

In oltre l' altro rettangolo IH è formato da DH ed HG. Ma HG═BC; e DH═AB (perchè essendo DC═CA, e la parte CH═CB, dev' essere DH═AB). Dunque il rettangolo IH è fatto da AB, e BC. Sicchè lo spazio FEDHGMF contiene due rettangoli di AB per BC. E perciò il quadrato (AD) formato sulla somma di due rette (AB, BC) è maggiore de' quadrati (AM, BA) fatti sulle stesse rette per lo doppio del rettangolo fatto dalle medesime rette (AB, BC).

PROP. XXXVI. TEOR. XXVII.

§. 123. *Il quadrato fatto su la differenza di due rette è minore della somma de' quadrati fatti su le rette per lo doppio del rettangolo fatto dalle medesime rette.*

Fig. 39 Dichiarazione. Sieno le due rette disuguali AC, CB. La loro differenza è AB Dico, che il quadrato di AB sia minore della somma de' quadrati fatti uno su AC, e l' altro su CB per lo doppio rettangolo di AC per CB.

Dimostrazione. Considerandosi AC come somma delle due rette AB, e BC, sarà per lo teor. prec. il quadrato di AB una col quadrato di BC minore del quadrato di AC per due rettangoli di AB per BC. Onde il solo quadrato di AB è vieppiù minore del quadrato di AC; cioè e per due rettangoli di AB per BC, e per lo quadrato di BC. E perciò aggiungendo al quadrato di AC il quadrato di BC, sarà il quadrato di AB minore de' due quadrati, uno di AC, e l' altro di BC, per due rettangoli di AB per BC, e per due quadrati di BC. Ma due rettangoli di AB per BC, e due quadrati di BC (§. 115) equivalgono a due rettangoli di AC per CB. Dunque il quadrato di AB è minore de' quadrati di AC, e di CB per lo doppio rettangolo fatto da AC, e CB. Sicchè *il quadrato fatto su la differenza di due rette è minore della somma* ec. c. b. d.

§. 124. Avvertimento. Si facciano il quadrato AM su la retta AB (differenza delle due rette AC, e CB), il quadrato AD su di AC, e 'l quadrato BH su di BC. È chiaro, che il quadrato AM sia minore della somma dei quadrati AD, e BH di tanto, quant' e lo spazio FEDHGMF. Resta ed esaminarsi quanto sia questo spazio. *Si prolunghi FM in I.*

È chiaro, che l' anzidetto spazio si risolve nei due rettangoli FD, MH. Or il primo rettangolo FD è formato da FI ed FE. Ma FI=AC, ed FE=BC (perchè essendo AE=AC, ed AF=AB per costruzione, anche la restante porzione FE deve essere uguale a BC). Dunque il rettangolo FD è formato da AC, e BC.

Il secondo rettangolo MH è formato da HG, ed HI. Ma HG=CB, ed IH=AC (perchè essendo DI=FE=BC=CH, sarà DC=IH. Onde siccome DC=CA, così pure IH=AC). Dunque il rettangolo MH è formato da AC, e CB.

Sicchè lo spazio FEDHGMF equivale a due rettangoli di AC per CB. E perciò il quadrato (AM) fatto su (AB) la differenza di due rette (AC, CB) è minore de' quadrati fatti sulle rette per lo doppio rettangolo fatto dalle medesime rette.

§. 125 Coroll. I. Il quadrato fatto su la somma di due rette è maggiore de' quadrati fatti su le rette per lo doppio rettangolo fatto dalle stesse rette (§. 121). All' opposto poi, il quadrato fatto su la differenza di due rette è minore de' quadrati fatti su le rette per lo doppio rettangolo fatto dalle stesse rette (§. prec.). Dunque il quadrato fatto sulla somma di due rette è maggiore del quadrato fatto su la loro differenza per quattro rettangoli fatti dalle medesime rette.

§. 126 Coroll. II E per la stessa ragione enunciata nel coroll. prec., il quadrato fatto sulla somma di due rette una col quadrato fatto sulla loro differenza sono il doppio de' quadrati fatti sulle medesime rette.

PROP. XXXVII. TEOR. XXVIII.

§. 127. *Il rettangolo fatto dalla somma, e dalla differenza di due rette disuguali è eguale alla differenza de' quadrati fatti sulle medesime rette.*

Fig. 42 Dichiarazione. Sieno AB, BC due rette disuguali, la di loro differenza sarà AC. Si aggiunga a BC la BD=BA: sarà DC la somma delle medesime rette. Dico, che il rettangolo di DC in CA sia uguale al quadrato di AB toltone il quadrato di BC.

Dimostrazione. Si consideri la retta DC come divisa nel punto B; sarà (§. 111) il rettangolo di DC e CA uguale alla somma dei rettangoli fatti uno da DB ossia BA ed AC, e l' altro da BC e CA. Ma questo secondo rettangolo di BC e CA è uguale al rettangolo di tutta AB per BC toltone il quadrato di BC (§. 115). Dunque il rettangolo di DC per CA è uguale alla somma de' rettangoli di BA per AC, e di AB per BC toltone il quadrato di BC. Ma i due rettangoli di BA per AC, e di AB per BC formano il quadrato di AB (§. 113). Dunque il rettangolo di DC per CA è uguale al quadrato di AB toltone il quadrato di BC. Sicchè *il rettangolo fatto dalla somma, e dalla differenza* ec. c. b. d.

§. 128. Avvertim. Siano AB, e BC le due rette disuguali: AC sarà la di loro differenza. Aggiunta B =BA; sarà CD la somma delle medesime rette AB, BC. Si faccia il rettangolo CS con CD (somma), e con CE=CA (differenza delle rette). Si facciano i quadrati AP su di AB, e CQ su di CB. È chiaro, che la differenza di questi quadrati è rappresentata dallo spazio ANPQMCA. Devesi dimostrare, che il rettangolo CS sia eguale al detto spazio.

Si prolunghi CM in X. Detto spazio ANPQMC si risolve in due rettangoli AX, MP; de' quali il primo AX si dimostra eguale a BS, e l' altro MP eguale a CE. Con che si conchiude, che lo spazio ANPQMC sia eguale al rettangolo CS.

In fatti il rettangolo AX è formato da AC ed AN=AB; il rettangolo BS è formato da BE=CR=CA, e da BF=BA. Dunque il rettangolo AX è uguale al rettangolo BS.

Il rettangolo MP è fatto da MQ=CB, e da QP=AC (imperocche essendo BF=BA, tolte rispettivamente le porzioni eguali BQ, e BC, resta QP=AC). Il rettangolo CE è fatto pure da CB e CR=CA; e perciò il rettangolo MP è uguale al rettangolo CE. Dunque tutto lo spazio ANPQMC è uguale al rettangolo CS: Sicchè il *rettangolo fatto dalla somma e dalla differenza* ec. c. b. d.

§. 129. Coroll. Considerandosi AB, e BC come due rette disuguali, si è veduto, che CA sarebbe la di loro differenza, e DC la di loro somma; e che il rettangolo di DC per CA sarebbe uguale alla differenza de' quadrati di AB, e di BC. Ora si considerino DC, e CA come due rette disuguali; AB diventa loro

semi-somma (perchè AB=BD), e BC diventa loro semidifferenza (imperocchè tagliata aD=AC, sarebbe Ca differenza delle rette DC, e CA, e quindi CB loro semidifferenza). Sicchè essendo il rettangolo di DC per CA uguale alla differenza de' quadrati di AB, e di BC: sarà il *rettangolo di due rette disuguali eguale alla differenza de' quadrati fatti uno sulla loro semisomma, e l' altro sulla loro semidifferenza.*

C A P. VIII.

Della quantità de' quadrati formati su i lati de' triangoli.

PROP. XXXVIII. TEOR. XXIX.

§. 130. *In ogni triangolo rettangolo il quadrato fatto sull' ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati fatti su i cateti.*

Fig. 41 Dichiarazione. Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Dico, che il quadrato che si fa sull' ipotenusa AC sia eguale alla somma de' quadrati, che si fanno su i cateti AB, BC.

Dimostrazione. Si facciano su i lati AC, AB, BC i quadrati AD, AH, BG. Per B si tiri BL parallela a CD (§. 78), e si uniscano le rette BD, AG. E poichè l' angolo CBA per ipot. è retto, e similmente retto è l' altro angolo CBF per costruzione, la somma di CBA, e CBF è uguale a due retti. Onde AB, BF formano una retta continuata (§. 70). Quindi essendo BF parallela a CG, l'intera AF è altresì parallela a CG. Similmente si dimostra essere l'intera CH parallela ad AI.

Essendo eguali gli angoli DCA, BCG (perchè retti), aggiunto ad essi di comune l'angolo ACB, sarà l'angolo DCB uguale all'angolo ACG. Ma sono dippiù i lati DC, CB del primo angolo eguali rispettivamente ai lati AC, CG del secondo (perchè sono rispettivamente lati di un medesimo quadrato). Dunque i triangoli DCB; ACG sono della condizione della prop. 22; e perciò sono eguali. Ma il triangolo DCB è la metà del rettangolo CL (perchè entrambi poggiano sulla stessa base CD, e sono racchiusi dalle medesime parallele CD, BL (§. 102): e così pure il triangolo ACG è la metà del quadrato CF. Dunque giacchè si sono dimostrati eguali i triangoli ACG, DCB, eguali saranno i loro doppj, cioè il quadrato CF, e 'l rettangolo CL. Similmente si dimostra essere il rettangolo AL eguale al quadrato AH. Sicchè la somma de' rettangoli CL, e AL, ossia il quadrato CE, è uguale alla somma de' quadrati CF, AH. Che perciò *in ogni triangolo rettangolo il quadrato fatto sull' ipotenusa è eguale alla somma* ec. c. b. d.

§. 131. Coroll. Essendo il quadrato dell' ipotenusa eguale alla somma de' quadrati de' cateti, sarà esso maggiore del quadrato di un

solo cateto di tanto, quanto è il quadrato dell' altro cateto. Sicchè il quadrato fatto sopra uno de' due cateti rappresenta la differenza de' due quadrati fatti uno sull' ipotenusa, e l' altro su l' altro cateto.

§. 132. Avv. Si badi bene a non confondere le due espressioni, 1. *somma de' quadrati fatti su i cateti*: 2. *quadrato fatto sulla somma de' due cateti*. Imperocchè il quadrato fatto sulla somma di due rette, è maggiore della somma de' quadrati fatti sulle rette per lo doppio del rettangolo fatto dalle medesime rette (§. 121). Si è dimostrato nel teor. prec., che il quadrato dell' ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati fatti su i cateti: conseguentemente esso è minore del quadrato fatto su la somma de' due cateti per lo doppio del rettangolo fatto dagli stessi cateti.

PROP. XXXIX. TEOR. XXX.

§. 133. *In ogni triangolo ottusangolo il quadrato fatto sul lato opposto all' angolo ottuso è maggiore della somma de' quadrati fatti su gli altri due lati pel doppio del rettangolo fatto da uno di questi lati, e dalla porzione, che gli vien aggiunta dalla perpendicolare calata dal vertice dell' angolo opposto.*

Fig. 42 Dichiarazione. Sia ABC triangolo ottusangolo in B. Dal punto A si cali AD perpendicolare sopra di CB prolungata in D. Dico, che il quadrato fatto su di AC (lato opposto all' angolo ottuso) sia maggiore della somma de' quadrati fatti su BC, e BA, pel doppio del rettangolo fatto da BC, e BD.

Dimostrazione. Nel triangolo ADC rettangolo in D, il quadrato di AC è eguale alla somma de' quadrati di AD, e DC (prop. prec.). Ma considerandosi DC come somma delle due rette DB, BC, è

$$\text{il quadrato di DC} = \left(\begin{array}{l} \text{quad. di DB} \\ \text{quad. di BC (§. 121)} \\ \text{2 rett. di DB per BC} \end{array} \right.$$

Dunque

$$\text{il quad. di AC} = \left(\begin{array}{l} \text{quad. di AD} \\ \text{quad. di DB} \\ \text{quad. di BC} \\ \text{2 rett. di DB per BC.} \end{array} \right.$$

Ma essendo retto l' angolo ADB, i due quadrati di AD, e di DB eguagliano il quadrato di AB (teor. prec.).

Dunque

$$\text{il quad. di AC} = \left(\begin{array}{l} \text{quad. di AB} \\ \text{quad. di BC} \\ \text{2 rett. di DB per BC.} \end{array} \right.$$

Conseguentemente il quadrato di AC è maggiore della somma de' soli quadrati di AB, e di BC pel doppio del rettangolo fatto da DB, e BC. Sicchè *in ogni triangolo ottusangolo il*

quadrato fatto sul lato opposto all' angolo ottuso ec. c. b. d.

PROP. XL. TEOR. XXXI.

§. 134. *In ogni triangolo il quadrato fatto sul lato opposto ad un angolo acuto è minore della somma de' quadrati fatti su gli altri due lati, pel doppio del rettangolo fatto da uno di questi lati, e dalla porzione di esso adjacente allo stesso angolo acuto, la quale vien tagliata dalla perpendicolare calata dal vertice dell' angolo opposto.*

Fig. 43 Dichiarazione. Sia ABC un triangolo, che ha l' angolo acuto in C. Da B si cali su AC la perpendicolare BD. Dico, che il quadrato di AB (lato opposto all' angolo acuto C) è minore della somma de' quadrati fatti su di AC, e di BC per lo doppio del rettangolo fatto da AC, e CD (porzione dello stesso lato AC tagliata verso l' angolo acuto C dalla perpendicolare BD).

Dimostrazione. Nel triangolo rettangolo BDA il quadrato di AB è uguale alla somma de' quadrati di AD, e DB. Ma considerando AD come differenza delle due rette AC, e CD,

$$\text{il quad. di AD} = \left(\begin{array}{l} \text{quad. di DC} \\ \text{quad. di AC} \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \text{toltine 2 ret.} \\ \text{di CA per} \\ \text{CD (§. 123).} \end{array} \right.$$

Dunque

$$\text{il quad. di AB} = \left\{\begin{array}{l}\text{quad. di BD} \\ \text{quad. di DC} \\ \text{quad. di AC}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}\text{toltine 2} \\ \text{ret. di AC} \\ \text{per CD.}\end{array}\right.$$

Ma i due quadrati di BD, e di DC adeguano il quadrato di BC (§. 130).

Dunque

$$\text{il quad. di AB} = \left\{\begin{array}{l}\text{quad. di BC} \\ \text{quad. di AC}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}\text{toltine 2} \\ \text{ret. di AC} \\ \text{per CD.}\end{array}\right.$$

Conseguentemente il quadrato di AB è minore de' quadrati di BC, e di AC, pel doppio del rettangolo fatto da AC, e CD. Sicchè *in ogni triangolo il quadrato fatto sul lato opposto ad un angolo acuto* ec. c. b. d.

PROP. XLI. TEOR. XXXII.

§. 135. *L' angolo, che formano due lati di un triangolo, è ottuso, retto, od acuto, secondochè il quadrato fatto sul lato opposto a tale angolo sia maggiore, uguale, o minore della somma de' quadrati fatti su gli altri due lati.*

Dichiarazione: Rappresenti ABC qualsivoglia triangolo; dico I. che l' angolo ABC sarà ottuso, se il quadrato di AC (lato opposto a detto angolo) sia maggiore della somma Fig. 44

de' quadrati fatti su gli altri due lati AB, e BC. II. Che l' angolo ABC sarà retto, se il quadrato di AC sia eguale alla somma de' quadrati di AB, e BC. III. Finalmente, che l' angolo ABC sarà acuto, se il quadrato di AC sia minore della somma de' quadrati di AB, e BC.

Dimostrazione. Dal punto B si alzi su BC la perpendicolare BD = AB; e si congiunga DC. Sarà la somma de' quadrati di AB, e di BC uguale alla somma de' quadrati di BD, e di BC, ossia al quadrato di DC (§. 130).

Or dunque I. se il quadrato di AC è maggiore de' quadrati di AB, e di BC, sarà eziandio maggiore del quadrato di CD; e per conseguenza la retta AC sarà maggiore di CD. Laonde ne' due angoli ABC, DBC, essendo i lati AB, BC rispettivamente eguali ai lati BD, BC, e la base AC essendo maggiore della base CD, sarà l' angolo ABC maggiore dell' angolo DBC (§. 19). Ma l' angolo DBC è retto per costruzione. Dunque l' angolo ABC è ottuso. c. b. d. in primo luogo.

II. Se il quadrato di AC è uguale alla somma de' quadrati di AB, e di BC, sarà similmente eguale al quadrato di DC; e conseguentemente la retta AC uguale alla retta DC. Onde avendo i due angoli ABC, DBC i lati rispettivamente eguali, e le basi pure eguali, sarà l' angolo ABC uguale all' angolo DBC, cioè sarà retto. c. b. d. in secondo luogo.

III. Finalmente se il quadrato di AC è minore della somma de' quadrati di AB, e di BC, sarà eziandio minore del quadrato di DC, e per conseguenza sarà AC minore di DC. Onde l'angolo ABC avendo i lati rispettivamente uguali ai lati dell'angolo DBC, ma la base AC minore della base DC, sarà esso angolo ABC minore dell'angolo DBC, e per conseguenza acuto. c. b. d. in terzo luogo. Sicchè l'*angolo di un triangolo è ottuso, retto, od acuto ec.* c. b. d.

C A P. IX.

Si sciolgono alcuni problemi, che appartengono alla teorica de' quadrati, e de' rettangoli.

PROP. XLII. PROBL. X.

§. 136. *Dati più quadrati trovarne un altro, che sia uguale alla somma di essi.*

Dichiarazione. Sieno A, B, C i lati di tre Fig. 45
quadrati. Si cerca trovare il lato di un altro quadrato, che adegui i quadrati di A, B. e C.

Soluzione. 1. Si faccia l'angolo retto LMN, e si tagli in un lato di esso MD = A; e nell'altro lato si tagli ME=B. Si unisca DE.

2. Si tagli in un lato del detto angolo MG=DE, e nell'altro lato si tagli MF=C; e si unisca FG.

Dico, che FG sia il lato del quadrato, che adegua i quadrati di A, di B, e di C.

Dimostrazione. Per ragion dell'angolo retto

in M, il quadrato di DE è uguale ai quadrati di DM, ed ME, ossia di A, e di B (per costruzione). Similmente il quadrato di FG è uguale ai quadrati di FM, e di GM. Ma per costruzione FM=C; ed il quadrato di GM=DE si è dimostrato uguale ai quadrati di A, e di B. Dunque il quadrato di FG è uguale ai quadrati di A, B, e C. Sicchè *dati i lati di più quadrati si è trovato il lato di un altro quadrato, che sia a quelli uguale. c. b. f. e d.*

PROP. XLIII. PROBL. XI.

§. 137. *Dati due quadrati disuguali, trovarne un altro, che sia uguale alla differenza di essi.*

Fig. 46 Dichiarazione. Sieno A, e B i lati di due quadrati. Si cerca trovare il lato di un terzo quadrato, che uguagli la differenza de' quadrati di A, e di B.

Soluzione. 1. Si faccia l'angolo retto LMN, e da un suo lato si taglino prima MP=B lato minore, e poi PO=A lato maggiore de' dati quadrati.

2. Col centro P, e col raggio PO si descriva il cerchio OQ, che colla sua periferia interseca ML nel punto Q. Dico essere MQ il lato del quadrato cercato.

Dimostrazione. *Si congiunga QP.* Per ragion dell'angolo retto in M, il quadrato di MQ è uguale alla differenza de' quadrati fatti uno su di QP, e l'altro su di MP (§. 131). Ma

QP=PO=A per costruzione, ed MP=B. Dunque il quadrato di MQ è uguale alla differenza de' quadrati di A, e di B.

Per la qual cosa dati i lati di due quadrati disuguali, si è trovato il lato di un terzo quadrato, che uguaglia la differenza de' quadrati dati. c. b. f. e d.

PROP. XLIV. PROBL. XII.

§. 138. *Data qualunque retta prolungarla in modo, che il rettangolo fatto dall' intera retta prolungata, e dalla parte aggiunta, sia uguale al quadrato fatto su la stessa retta.*

Dichiarazione. Sia data la retta AB. Bisogna Fig. 47
prolungarla sino ad un punto D tale, che il rettangolo di AD per DB sia uguale al quadrato di AB.

Soluzione. 1. Si divida AB in due parti uguali in O (§. 63).

2. Dal punto B s' innalzi su AB la perpendicolare BC (§. 65), che si faccia uguale ad AB; e si congiunga OC.

3. Si prolunghi AB in D, finchè sia OD=OC.

Dico essere AD la retta cercata; cioè che il rettangolo di AD per DB sia uguale al quadrato di AB.

Dimostrazione. Si considerino DO, OB come due rette disuguali. La di loro differenza è BD; e perchè AO=OB, la di loro somma è AD. Dunque (§. 127) il rettangolo di AD per DB è uguale alla differenza de' quadrati

di OD, e di OB, cioè di OC, ed OB. Ma la differenza de' quadrati di OC, e di OB è uguale al quadrato di BC (§. 131). Dunque il rettangolo di AD per DB è uguale al quadrato di BC, ossia di AB. Sicchè si è prolungata la retta data in modo, che ec. c. b. f. e d.

PROP. XLV. PROBL. XIII.

§. 139. *Data una retta, dividerla in un punto in modo, che il rettangolo fatto dall' intera retta, e da una delle sue parti sia uguale al quadrato fatto sull' altra parte.*

Fig. 47 Dichiarazione. Sia data la retta AB. Bisogna dividerla in un punto Q tale, che il rettangolo fatto da AB, ed AQ sia uguale al quadrato di QB.

Soluzione. Si prolunghi AB in D in modo, che il rettangolo fatto da AD, e DB sia uguale al quadrato di AB (*probl. prec.*)

2. Da AB si tagli BQ=BD.

Dico essere il rettangolo di AB in AQ uguale al quadrato di QB.

Dimostrazione. Considerandosi la retta AD divisa in B, il rettangolo di AD in DB è uguale al rettangolo di AB in BD, aggiuntovi il quadrato di BD (§. 115). E poichè per costruzione BQ=BD, lo stesso

$$\text{rett. di AD per BD} = \begin{cases} \text{rett. AB per BQ} \\ \text{quad. BQ.} \end{cases}$$

Considerandosi poi AB come divisa nel punto Q,

il quad. di AB = (rett. AB per BQ
(rett. AB per AQ. (§. 113)

Sicchè essendo per costruzione il rettangolo dAD ini DB uguale al quadrato di AB; saranno il

reit. AB per BQ) = (rett. AB per BQ
e 'l quad. BQ) = (rett. AB per AQ.

Onde tolto di comune il rettangolo di AB per BQ, resterà il quadrato di BQ uguale al rettang. di AB per AQ. Per la qual cosa la retta data si è divisa in modo, che il rettangolo ec. c. b. f. e d.

Fine del primo Libro.

LIBRO II.

DELLA TEORICA DEL CERCHIO.

CAP. I.

Del sito, che ha il centro nel cerchio, e del modo di trovarlo.

PROP. I. TEOR. I.

§. 140. *S' Intersechino in un cerchio due qualsivogliano corde; dico* I. *che sè una di esse passa per lo centro, e taglia l' altra in parti uguali, la taglia pure ad angoli retti;* II. *Che se una di esse passa per lo centro, e taglia l' altra ad angoli retti, la taglia pure in parti uguali;* III. *Che se una di esse taglia l' altra in parti uguali, e ad angoli retti, dee passare per lo centro.*

Fig. 48 I. Dichiarazione. Sia AB diametro del cerchio ADBC; e tagli la corda CD in parti uguali; dico, che gli angoli AEC, AED sono retti.

Dimostrazione. Giacchè AB passa per lo centro, sia il punto O questo centro, e si congiungano i raggi OC, OD. Ne' due angoli

OEC, OED i lati OE, EC sono rispettivamente uguali ai lati OE, ED (imperocchè OE è comune, ed EC=ED per ipot.): dippiù la base OC è uguale alla base OD (perchè raggi). Dunque i due angoli OEC, OED sono uguali. Ma essi sono conseguenti; e perciò entrambi sono retti (§ 67). Sicchè il diametro AB, che taglia la corda CD in parti uguali, la taglia anche ad angoli retti.

II. Dichiarazione. Sia AB diametro, e divida la corda CD perpendicolarmente; dico, che CE sia uguale ad ED.

Dimostrazione. Fatta la stessa costruzione di poco prima, considero, che ne' due triangoli OEC, OED, gli angoli OEC, OED sono eguali per ipotesi: gli angoli in C, ed in D pure sono eguali, perchè angoli alla base del triangolo isoscele COD (§. 83); e perciò il terzo angolo COE è uguale al terzo angolo DOE (§. 81). Ma questi angoli hanno i lati OC, OE rispettivamente uguali ai lati OD, OE. Dunque la base CE è uguale alla base DE (§. 20). Sicchè il diametro AB, che taglia la corda CD perpendicolarmente, la taglia anche in parti uguali.

III. Dichiarazione. Se la corda AB taglia l'altra CD in parti uguali, e ad angoli retti; dico ch'essa deve passare per lo centro.

Dimostrazione. Imperocchè se AB non passa per lo centro, ben si potrebbe per lo punto E tirare un'altra retta diversa da EA, la quale passasse per lo centro. Sia EP una tal

retta. Or dunque (per lo n. I.) l'angolo PEC sarebbe retto; e quindi eguale ad AEC, che per ipotesi è retto: con che sarebbero la parte e 'l tutto tra loro eguali. Ma ciò è assurdo. Dunque non potendosi per lo punto E tirare veruna retta diversa da AE, che passi per lo centro, vi deve passare la AB. E perciò la corda AB, che taglia l'altra CD in parti uguali, e ad angoli retti, deve passare per lo centro. Sicchè *intersecandosi in un cerchio due qualsivogliano corde, I. se una di esse passa per lo centro* ec. c. b. d.

PROP. II. TEOR. II.

§. 141. *Se da un punto esistente dentro di un cerchio si possono tirare alla periferia più di due rette uguali, sì fatto punto è il centro.*

Fig. Dichiarazione. Il punto O esistente dentro
49 del cerchio ABCEG sia tale, che da esso si possano tirare tre rette uguali OA, OB, OC. Dico, che il punto O dev' essere il centro.

Dimostrazione. *Si uniscano le rette AB, BC, e si dividano in due parti uguali ne' punti D, ed F; indi per i punti D, ed O si tiri DE; e per F, ed O si tiri FG.*

Si considerino gli angoli ADO, BDO. I lati AD, DO sono uguali rispettivamente ai lati BD, DO; dippiù AO, base del primo angolo ADO, è per ipotesi eguale a BO base del secondo angolo BDO. Dunque detti angoli ADO, BDO son tra loro eguali; e perciò

DE è perpendicolare a BA (§. 67). Ma la taglia ancora in parti uguali per costruzione. Dunque DE (teor. prec.) deve passare per lo centro. Similmente si dimostra, che anche FG deve passare per lo centro. Ma il centro non è, che un punto solo. Dunque il centro dev' essere il punto O, come quello, ch' è comune ad ambe le rette DE, FG. Sicchè se *da un punto esistente in un cerchio si possono tirare alla periferia* ec. c. b. d.

PROP. III. PROBL. I.

§. 142. *Dato un cerchio trovare il suo centro* Fig. 48

Dichiarazione. Sia dato il cerchio ACED, bisogna trovare il suo centro.

Soluzione. 1. Si prendano nella periferia due punti ad arbitrio, per es. C e D; e si uniscano colla retta CD.

2. Si divida CD in due parti uguali in E (§. 63); e per E si tiri AB perpendicolare a CD (§. 65).

3. Si divida AB in due parti uguali in O. Dico essere O il centro.

Dimostrazione. Dividendo AB in due parti uguali, e ad angoli retti la corda CD, in essa deve stare il centro (§. 140). Ma il centro deve stare nella metà delle corde, che passano per esso (§. 37). Dunque il punto O, in cui AB è divisa in parti uguali, dev' essere il centro. Per la qual cosa dato il cerchio si è trovato il suo centro. c. b. f. e d.

PROP. IV. PROBL. II.

§. 143. *Dato un arco di cerchio, trovare il suo centro.*

Fig. 50 Dichiarazione. Sia ABC un arco circolare: bisogna trovare il centro del cerchio, cui detto arco appartiene.

Soluzione. 1. Si prendano nell' arco dato tre punti ad arbitrio A, B, C; e si congiungano le rette AB, BC.

2. Si dividano AB, e BC ciascuna in due parti uguali ne' punti D, ed E, dai quali si innalzino le perpendicolari DF, EG, che si prolunghino fino a che s' intersechino nel punto O.

Dico, essere il punto O il centro ricercato.

Dimostrazione. Imperocchè dividendo DF la corda AB in parti uguali, e ad angoli retti, in essa deve stare il centro (§. 140). Similmente il centro deve stare in qualche punto di EG, che pure divide la corda BC in parti uguali, e ad angoli retti. Ma il centro non è, che un punto solo. Dunque il centro è il punto O, ch' è comune ad ambe le rette DF, EG. Sicchè dato un arco di cerchio si è trovato ec. c. b. f. e. d.

§. 144. Coroll. Se col centro O, e coll' intervallo d' una delle rette, che da O si possono tirare ai punti A, B, C si descriverà il cerchio; si compirà quello della cui periferia l' arco ABC è porzione. E perciò è chiaro il modo di descrivere un cerchio, che passi colla sua periferia per tre punti dati A, B, C non esistenti in linea retta.

C A P. II.

Dell' ordine, che serbano nella grandezza le rette tirate alla periferia di qualunque cerchio.

§. 145. Definizione. La perpendicolare calata dal centro di un cerchio su di una corda, si dice *distanza* di essa dal centro.

PROP. V. PROBL. III.

§. 145. *Di tutte le infinite rette, che si possono tirare alla periferia di qualunque cerchio da qualsivoglia punto esistente nello stesso cerchio, e diverso dal centro 1. la massima è quella, che passa pel centro; 2. la minima è la restante porzione del diametro; 3. ognuna delle altre è maggiore di quelle, che sono più di essa distanti dalla massima; 4. e di sì fatte rette ognuna non può averne, se non se un' altra, che le sia uguale.*

I. Dichiarazione. Sia BDCE un cerchio, Fig. 51 ed A un punto qualunque dentro di esso, diverso dal centro. Per A, e per lo centro O sia tirata la retta AB. Dico, che *AB sia la massima di tutte le rette, che dal medesimo punto A si possono tirare alla periferia.*

Dimostrazione. S' intenda tirata qualunque altra retta AD, e congiunto il raggio OD. Nel triangolo AOD, la somma de' due lati

AO, OD è maggiore del terzo lato AD(§.54). Ma OD=OB, perchè raggi. Dunque la somma di AO, ed OB, ossia tutta AB, è maggiore di AD. Similmente si dimostra esser AB maggiore di qualunque altra retta, che da A si può tirare alla periferia. Dunque *AB è massima di tutte le rette* ec.

II. Dichiarazione. Nell' ipotesi testè indicata dico, *che AC, restante porzione del diametro BC, sia la minima di tutte le rette, che dal punto A si possono tirare alla periferia.*

Dimostrazione. Nel triangolo AOD, OD è minore della somma di OA, AD. Ma OD=OC, come raggi. Dunque OC è minore della somma di OA+AD. Tolto di comune OA, sarà AC minore di AD. Similmente si dimostra essere AC minore di qualunque altra retta, che dallo stesso punto si può tirare alla periferia. Dunque *AC restante porzione del diametro è la minima* ec.

III. Dichiarazione. Nella stessa ipotesi dico, che *qualunque retta diversa da AB, e da AC si tiri dal punto A alla periferia, sia maggiore di ogni altra, che più di essa si allontana dalla massima AB.*

Dimostrazione. S' intenda fatta la stessa costruzione di sopra, e si consideri, che AD è base dell' angolo AOD. Immaginando che la retta OD si giri intorno al punto O, siccome l' angolo AOD si anderà facendo maggiore o minore, così pure la sua base AD si farà maggiore o minore (§. 18). Ma l' angolo AOD si farà maggiore o minore secondochè il punto D si avvicinerà al punto B, o si allontanerà da esso. Dunque AD si farà maggiore, o minore secondochè più si avvicina, o si allontana da AB. E perciò ogni retta, che dal punto A si tira alla periferia, diversa da AB, è maggiore di ogni altra, che più di essa si allontana dalla massima AB.

IV. Dichiarazione. Nella stessa ipotesi dico, che *dal punto A non si possono tirare alla periferia più di due rette eguali.*

Dimostrazione. S'intenda fatto in O l'angolo AOE=AOD, e congiunta AE. Ne' due angoli uguali AOD, AOE essendo i lati AO, OD di uno rispettivamente uguali ai lati AO, OE dell'altro, sarà AD base del primo, uguale ad AE base dell'altro. Sicchè delle rette, che dal punto A si possono tirare alla periferia, diverse da AB, ed AC, ve ne sono sempre due uguali. Or se dal punto A si tira un'altra retta alla periferia, essa sarà più o meno di AD vicina ad AB; e perciò sarà maggiore, o minore di AD. Laonde ogni retta tirata da A alla periferia, e diversa da AB, ed AC, non può averne, se non se un'altra sola, che le sia uguale. Adunque *di tutte le infinite rette, che si possono tirare alla periferia di qualunque cerchio ec.* c. b. d.

PROP. VI. PROBL. IV.

§. 147. *Di tutte le infinite rette, che da un punto esistente fuori di un cerchio si possono tirare alla periferia di esso,* 1. *se giungono alla parte concava, la massima è quella, che passa per lo centro;* 2. *ed ognuna delle altre è maggiore di quelle, che sono più di essa distanti dalla massima.* 3. *Se giungono alla parte convessa; la minima è quella, che prolungata passa per lo centro;* 4. *ed ognuna delle altre è minore di quelle, che sono più di essa distanti dalla minima.* 5. *Finalmente di tutte le rette diverse dalla massima, e dalla minima, ognuna non può averne se non se una altra sola, che le sia uguale.*

Fig. 52 I. Dichiarazione. Sia A un punto qualunque esistente fuori del cerchio EDFG; e da esso sia tirata per lo centro O la retta AB. Dico, che *AB sia la massima di tutte le rette, che dal medesimo punto A si possono tirare alla parte concava della periferia.*

Dimostrazione. S'intenda tirata qualunque altra retta AD, e congiunto il raggio OD. Nel triangolo AOD, la somma de' lati AO, OD è maggiore del terzo AD. Ma OD=OB, perchè raggi. Dunque la somma di AO, ed OB, ossia tutta AB è maggiore di AD. E lo stesso sempre dimostrandosi relativamente a qualunque altra retta, è evidente, che AB sia la massima di tutte le rette, che dal punto A si possono tirare alle parte concava della periferia.

II. Dichiarazione. Sia AD qualunque retta che giunge alla parte concava, diversa da AB. Dico, *esser essa maggiore di ogni altra, che più si allontana dalla massima AB.*

Dimostrazione. Si unisca il raggio OD. È chiaro, ch' essendo AD base dell' angolo AOD, diverrà essa maggiore o minore secondochè, girandosi OD intorno il punto O, si faccia l' angolo AOD maggiore, o minore (§. 17). Ma facendosi l' angolo AOD maggiore, o minore col girarsi OD intorno il punto O, il punto D, e conseguentemente la retta AD, si avvicina o si allontana dalla retta AB. Dunque ogni retta AD, che si tira dal punto A alla periferia, diversa da AB, è maggiore di quelle, che sono più di essa distanti da AB.

III. Dichiarazione. Nella medesima ipotesi dico, *che AC, la quale giunge alla parte convessa, e che prolungata passa per lo centro, sia la minima di qualunque altra, che dallo stesso punto A si può tirare alla periferia del cerchio.*

Dimostrazione. S' intenda tirata qualunque altra retta AE, e congiunto il raggio OE. Nel triangolo AEO il lato AO è minore della somma degli altri due AE, EO. Or dunque togliendo rispettivamente dall' uno, e dall'altra le parti eguali OC, OE (che sono raggi), resterà AC anche minore di AE. E lo stesso

dimostrandosi relativamente ad ogni altra retta che dal punto A si può tirare alla periferia del cerchio, è chiaro, che AC sia la minima.

IV. Dichiarazione. Sia AE qualunque retta, che giunge alla parte convessa, diversa da AC. Dico, esser essa minore di ogni altra, che più si allontana dalla minima AC.

Dimostrazione. S' intenda fatta la stessa costruzione, e si concepisca, che il raggio OE girandosi intorno il punto O, si avvicini, o si allontani col suo estremo E dalla retta AO. È evidente, che in sì fatto movimento, anche la retta AE si avvicinerà, od allontanerà dalla retta AC. Ma poichè per un tal movimento l' angolo AOE si farà minore, o maggiore, così bisognerà, che la retta AE sua base si faccia pure minore, o maggiore (§. 18). Dunque ogni retta AE che si tira dal punto A alla parte convessa della periferia, e diversa da AC, è minore di qualunque altra, che più di essa si allontana dalla minima AC.

V. Dichiarazione. Ogni retta AD, che sia diversa dalla massima AB, e dalla minima AC, non può averne, che una sola, che le sia uguale.

Dimostrazione. S' intenda fatto l' angolo AOF=AOD, e congiunta AF. Essendo ne' due angoli uguali AOD, AOF, il lato AO comune, e 'l lato OD=OF; sarà la base AD=AF (§. 20). Or se dal punto A si tira un' altra retta alla periferia, essa sarà più, o meno di AD vicina ad AB; e perciò sarà maggiore, o minore di AD. Similmente si dimostra esservi un'altra retta AG=AE; ed ogni altra essere maggiore, o minore. Sicchè ogni retta tirata da A alla periferia, e diversa da AB, ed AC, non può averne, se non se una sola, che le sia uguale. Per la qual cosa *di tutte le infinite rette, che da un punto esistente fuori di un cerchio si possono tirare* ec. c. b. d.

PROP. VII. TEOR. V.

§. 148. *Di tutte le infinite corde, che si possono tirare in un cerchio, 1. la massima è il diametro; 2. ognuna delle altre è maggiore di quelle, che sono più di essa distanti dal centro; 3. quelle, che sono uguali tra esse, hanno eguali distanze dal centro; 4. e quelle, che hanno uguali distanze dal centro, sono tra esse uguali.*

Dichiarazione. Nel cerchio ABCD sia tirata qualunque corda AB, che non passa per lo centro. Dico, *che il diametro è maggiore di essa; e perciò la massima di tutte.* Fig. 53

Dimostrazione. Dal centro O s'intenda calata la perpendicolare OE su di AB; sarà AE la metà di AB (§. 140) S'intenda congiunto il raggio OA. Essendo l'angolo OEA retto, sarà conseguentemente AOE minor del retto (§. 81); e perciò AO come opposta ad angolo maggiore, sarà maggiore di AE opposta ad angolo minore (§. 88). Dunque il doppio di AO, cioè il diametro, è maggiore del doppio di AE, cioè di tutta AB. Lo stesso dimostrandosi sempre per riguardo di qualunque altra corda, è chiaro che *il diametro sia la massima di tutte le corde* ec.

II. Dichiarazione. Dico, che le corde, che più si avvicinano al centro, sono maggiori di quelle, che più se ne allontanano.

Dimostrazione. S'intenda fatta la stessa costruzione di sopra riportata. Il quadrato di AE (§. 181) pareggia la differenza de' quadrati fatti uno sul raggio AO, e l'altro su di OE (distanza dal centro). Ora secondochè OE sarà maggiore o minore, così la differenza de' quadrati di OA, e di OE, cioè il quadrato di AE, sarà minore, o maggiore. Conseguentemente la retta AE, e'l suo doppio AB sarà maggiore se più si avvicina al centro, e sarà minore se più se ne allontana.

III. Dichiarazione. Sieno nel cerchio ABCD tirate due corde uguali AB, DC. Dico, che esse sono equidistanti dal centro, cioè, che calate su di esse le perpendicolari OE, OF, sia OE=OF.

Dimostrazione. Si uniscano i raggi OA, OD. Essendo per ipot. AB=DC, anche le loro metà AE, DF (§. 140) saranno eguali. Ma eguali ancora sono OA, OD. Dunque i triangoli AEO, DFO rettangoli in E, ed in F, sono della condizione della prop. 25. lib. 1., e perciò sono eguali. Laonde OE=OF.

IV. DICHIARAZIONE. E supponendo, che le corde AB, DC sieno equidistanti dal centro, cioè che sia OE=OF; dico esser pure AB=DC.

DIMOSTRAZIONE. I triangoli OEA, OFD rettangoli in E, ed in F avendo OE=OF, OA=OD, debbono essere perfettamente uguali (§. 93). Perciò sarà AE=DF. Quindi AB, ch' è doppio di AE (§. 140), sarà uguale a DC, che è doppia di DF. Sicchè le corde, che sono egualmente distanti dal centro, sono tra di loro uguali.

Laonde *di tutte le infinite corde, che si possono tirare in un cerchio* ec. c. b. d.

C A P. III.

Delle tangenti de' cerchi, e del modo di tirarle.

§. 149. DEFINIZIONE. Una retta si dice *tangente* di un cerchio, se esistendo fuori del cerchio incontra la sua periferia in un punto solo, e prolungata cade interamente fuori dello stesso cerchio. Il punto in cui la tangente incontra la periferia, si dice *punto del contatto.*

PROP. VIII. TEOR. VI.

§. 150. *Ogni tangente d' un cerchio forma col raggio tirato al punto del contatto un angolo retto.*

DICHIARAZIONE. Sia FBD un cerchio, ed AE Fig. 54

tangente in qualunque punto D: congiunti il centro O, e 'l punto D, dico, che OD sia perpendicolare ad AE.

DIMOSTRAZIONE. S' intendano dal punto O tirate infinite rette agl' infiniti punti della retta AE: tra queste ve ne sarà una, che sarà perpendicolare ad AE (§. 81 n. 2); e tal perpendicolare dovrà essere la minima di tutte le altre rette (§ 89). Ma di tutte le rette, che dal punto O condur si possono agl' infiniti punti della retta AE, la minima è appunto la OD, poichè è la sola, che non esce fuori la periferia del cerchio. Dunque la retta OD, che unisce il centro, e 'l punto del contatto, è perpendicolare ad AE. Laonde *l' angolo fatto dalla tangente di un cerchio, e dal raggio* ec. c. b. d.

§. 151. AVV. Si noti, che dal punto del contatto non può tirarsi veruna retta, che passi tra la tangente del cerchio, e la periferia. In fatti sia AE tangente del cerchio nel punto D; e s' è possibile, si tiri DG, che passi tra la tangente, e la periferia. Si congiunga il raggio OD. Essendo retto l' angolo ODA, l' angolo ODG sarà acuto. Onde dal centro O s' intenda calata sopra di DG la perpendicolare OX, la quale deve cadere dalla parte dell' angolo acuto ODG (§. 88). Or dunque nel triangolo OXD essendo OD opposta all' angolo retto OXD, ed OX opposta all' angolo acuto ODX; sarà OD maggiore di OX (§. 88); ossia OL maggiore di OX: il che, o è assurdo, o suppone che il punto X, e conseguentemente la retta DX cade dentro del cerchio. Dunque è impossibile poter tirare dal punto del contatto D una retta, che passi tra la tangente, e la periferia.

§. 152. Coroll. Quindi l'angolo mistilineo fatto dalla tangente, e dalla periferia, chiamato dai Geometri *angolo del contatto*, non è divisibile da una linea retta.

PROP. IX. TEOR. VII.

§. 153. *Se una retta esistente fuori d'un cerchio incontra la periferia in un punto, ed è perpendicolare al raggio tirato allo stesso punto; sì fatta retta è tangente del cerchio nel medesimo punto.*

Dichiarazione. Incontri AD la periferia circolare FBD nel punto D, e sia perpendicolare al raggio OD condotto al medesimo punto. Dico che AD prolungata cade tutta fuori del cerchio, e conseguentemente è sua tangente.

Dimostrazione. Si prolunghi AD verso E; e dal centro O s'intendano tirate infinite rette agl'infiniti punti della retta AE. Essendo OD perpendicolare ad AE, sarà essa la minima di tutte le anzidette infinite rette (§. 88). Ma OD giunge alla periferia. Dunque tutte le altre anzidette rette usciranno fuori la periferia; cioè tutti gl'infiniti punti di AE, eccetto il solo punto D, sono fuori del

cerchio. E perciò AE è tangente del cerchio nel punto D. Per la qual cosa, *se una retta è tangente d'un cerchio* ec. c. b. d.

PROP. X. PROBL. III.

§. 154. *Dato un punto fuori di un cerchio, tirare dal punto dato una retta, che sia tangente del cerchio.*

Fig. 55 Dichiarazione. Sia BCE il cerchio dato, e sia A un punto fuori di esso. Bisogna dal punto A tirare una retta, che sia tangente del cerchio.

Soluzione. 1. Si trovi il centro O del dato cerchio (§. 142), e si congiunga OA, che interseca la periferia nel punto C.

2. Col centro O, e coll'intervallo OA si descriva l'arco circolare AD; e dal punto C s'innalzi CD perpendicolare ad AO, fin che s'incontri coll'arco AD nel punto D.

3. Dal punto D al punto O si tiri OD, che interseca la periferia nel punto B.

4. Finalmente dal punto A al punto B si tiri la retta AB.

Dico che AB sia la tangente cercata.

Dimostrazione. Si considerino i triangoli ABO, DCO. Questi hanno i lati AO, OB rispettivamente eguali ai lati DO, OC. L'angolo compreso in O è comune. Dunque i detti triangoli ABO, DCO sono perfettamente uguali; e perciò l'angolo ABO è uguale all'angolo DCO. Ma questo per costruz. è retto, Dunque è retto anche l'angolo ABO; e conseguentemente (§. 153) AB è tangente del cerchio nel punto B. Ed ecco che dal dato punto A si è tirata una retta, che è tangente del cerchio. c. b. f. e d.

§. 155. Avv. Se occorre di dover tirare la tangente per un punto della periferia, essa facilmente si ottiene tirando per l'estremo del raggio, che giunge in tale punto, la perpendicolare al medesimo raggio.

CAP. IV.

Degli angoli formati e ai centri, e alle periferie de' cerchi.

§. 156. Definizione. I. Si dice *angolo al centro* quello il cui vertice è nel centro del cerchio; si dice poi *angolo alla circonferenza* quello, il cui vertice è in un punto della circonferenza.

§. 157. Definizione. II. Si dice *angolo nella porzione* quello, il cui vertice è in un punto dell'arco della porzione, ed i cui lati passano per gli estremi della corda.

PROP. XI. TEOR. VIII.

§. 158. *Ne' cerchi uguali gli angoli uguali fatti ne' centri, appoggiano ad archi uguali; ed al contrario.*

Dichiarazione. I. Sieno AEB, CFD due cerchi uguali. Dico, che se gli angoli AOB, CFD fatti ne' loro centri sono uguali, anche gli archi AB, CD su quali essi appoggiano, sono uguali. Fig. 56.

Dimostrazione. S' intenda il cerchio AEB posto sul cerchio CFD in modo, che cada il centro O sul centro P, e 'l raggio OA sul raggio PC. Per l' eguaglianza degli angoli AOB, CPD deve cadere pure OB sopra PD, e per l' eguaglianza de' raggi caderanno il punto A sul punto C, e 'l punto B sul punto D. Laonde l' arco AB si combacia coll' arco CD, e conseguentemente (§. 49) entrambi sono tra essi uguali.

II. Dichiarazione. Sieno ne' cerchi eguali AEB, CFD uguali gli archi AB, CD. Dico, che gli angoli AOB, CPD fatti ne' centri e che appoggiano su di essi, sono pure uguali.

Dimostrazione. Se si nega esser l' angolo AOB=CPD, sarà AOB maggiore o minore di CPD. Sia s' è possibile, AOB maggiore di CPD, e s' intenda fatto in O l' angolo AOL=CPD. Sarà (per la prima parte) AL=CD. Ma per ipot. è pure AB=CD. Dunque AL=AB. Ma ciò è impossibile (§. 48). Dunque è impossibile, che l' angolo AOB sia maggiore di CPD. Similmente si dimostra non essere AOB minore di CPD. Sicchè l' angolo AOB è uguale a CPD. c. b. d.

§. 159. Coroll. Siccome l' uguaglianza degli angoli fatti ne' centri di due cerchi eguali dimostra l' eguaglianza degli archi, ai quali essi appoggiano; e vicendevolmente l' eguaglianza degli archi ne' cerchi eguali indica l' eguaglianza degli angoli fatti ne' centri: lo stesso parimenti deesi dire degli angoli, e degli archi, che si appartengono ad un medesimo cerchio.

§. 160. Avvertimento. Figuriamoci la periferia di un cerchio divisa in gradi, e minuti; e condotti dal centro ai punti delle divisioni altrettanti raggi. Si formeranno altrettanti angoletti al centro, ed angoletti tutti uguali, perchè appoggianti sopra archetti uguali. Sarà lecito indicare ciascuno di questi angoletti co' nomi di *angoli di un grado*, *angoli di un minuto* ec. secondochè l' arco su cui appoggiano sia di un grado, o di un minuto ec. S' intenda ora fatto al centro un angolo qualunque AOB. Questo conterrà in se tanti de' detti angoletti, quanti gradi, e minuti si contengono nel suo arco AB; e perciò ragionevolmente la quantità di quest' angolo potrà designarsi dal numero de' gradi, e minuti compresi nel suo arco; e dirsi per es. l' angolo AOB è di 30. gr., è di 30. gr. e 15 min. ec. secondochè il suo arco AB sia di 30. gr. oppure di 30. gr. e 15 min. ec. Così similmente, la quantità di ogni altro angolo sarà da designarsi dal numero de' gradi e minuti compresi nel suo arco.

§. 161. Coroll. II. Dunque nel paragonarsi gli angoli, si dovrà un angolo stimare dop-

pio, triplo ec. di un altro angolo, secondochè il numero de' gradi, e minuti contenuti nell' arco del primo angolo sia doppio, triplo ec. del numero de' gradi, e minuti compresi nell' arco del secondo angolo. E comecchè, trattandosi di archi descritti con lo stesso, o co' raggi eguali, ad un arco doppio, triplo ec. di un altro arco, corrisponde un numero di gradi e di minuti doppio, triplo ec. di quello, che corrisponde al secondo; perciò il paragone degli angoli si potrà esprimere col paragone degli archi descritti co' raggi eguali.

§. 162. Avvertimento II. Si noti, che qualora tra i lati di due, o più angoli sono descritti archi co' raggi disuguali, ad un arco doppio, triplo ec. di un altro, non corrisponde un numero di gradi, e minuti doppio, triplo ec. di quello, che corrisponde all' altro arco. E comecchè gli angoli sono sempre determinati dal numero de' gradi e minuti compresi ne' loro archi; perciò nell' anzidetta ipotesi, cioè che gli archi sian descritti co' raggi disuguali, sarà un grande errore, rappresentare il paragone degli angoli con quello degli archi; ma si dovrà unicamente rappresentare co' numeri de' gradi, e de' minuti, che rispettivamente sono compresi ne' medesimi archi.

Fig. 57. §. 163. Coroll. III. S' intersechino le due rette AB, CD ad angoli retti. Col centro O e con qualunque raggio OE si descriva il cerchio EFGH. Essendo eguali i quattro ango-

li AOC, COB, BOD, DOA, uguali saranno pure i quattro archi EF, FG, GH, HE. Onde ognuno di sì fatti archi è la quarta parte della periferia, e conseguentemente è di 90 gradi. Quindi ogni angolo retto e di 90 gradi; due angoli retti di 180, e quattro angoli retti di 360.

§. 164. Avvertimento III. Si noti finalmente, che nello stesso cerchio, come altresì ne' cerchi uguali, se si tirano due corde uguali, queste ascindono archi uguali; e reciprocamente, se gli archi tagliati da due corde sono uguali, uguali pure sono le corde. Imperocchè, se ne' cerchi uguali AEB, CFD Fig. 56. sia la corda AB=CD, congiunti i raggi AO, OB; e CP, PD, sarà l'angolo AOB=CPD (imperocchè hanno i lati eguali ai lati, e la base uguale alla base (§. 19); e quindi l'arco AB è uguale all'arco CD (§. 158). Reciprocamente se l'arco AB=CD, sarà l'angolo AOB=CPD (§. 158); e quindi la corda AB, base del primo angolo, uguaglia la corda CD base del secondo angolo (§. 20).

PROP. XII. TEOR. IX.

§. 165. *Se in un cerchio si fanno due angoli sul medesimo arco, uno che sia al centro, e l'altro alla circonferenza; sarà l'angolo al centro doppio dell'angolo alla circonferenza.*

Dichiarazione. Sull'arco AB del cerchio Fig. 58. ACB sian fatti l'angolo AOB al centro, e e 59 l'angolo ACB alla circonferenza. Dico, che l'angolo AOB sia doppio dell'angolo ACB.

Dimostrazione. Dal punto C, e per lo centro O si tiri CD. Caderà questa o tra i lati dell'angolo AOD, o fuori di essi.

Caso I. Considerandosi, che nel triangolo AOC il lato CO, è prolungato in D; l'angolo esterno AOD è eguale alla somma de' due interni ACO, OAC (§. 80). Ma per essere OA=OC, l'angolo OAC pareggia l'angolo ACO (§. 83). Dunque l'angolo AOD è doppio dell'angolo ACO. Similmente si dimostra esser l'angolo DOB doppio dell'angolo BCO. Laonde la somma degli angoli AOD, BOD, ossia l'intero angolo AOB, è il doppio della somma degli angoli ACO, BCO, ossia dell'intero angolo ACB.

Caso II. Giacchè nel triangolo BOC, il lato CO si trova prolungato in D, l'angolo DOB è il doppio dell'angolo BCD, come poco prima si è veduto. Si consideri in oltre il triangolo AOC, il di cui lato CO è prolungato in D. L'angolo AOD è il doppio dell'angolo ACD. Essendo dunque l'intero angolo BOD doppio dell'intero angolo BCD; ed essendo AOD parte del primo angolo il doppio di ACD parte del secondo angolo; sarà la restante porzione del primo, cioè BOA, il doppio di BCA, ch'è la restante porzione del secondo. Per la qual cosa *se in un cerchio si fanno due angoli sul medesimo arco* cc. c. b. d.

§. 166. Coroll. I. Corrispondendo in ogni cerchio agli angoli uguali fatti nel centro archi uguali, e ad archi uguali angoli uguali nel centro; corrisponderanno pure in ogni cerchio ad angoli uguali fatti nella periferia archi uguali; e ad archi uguali, angoli alla periferia uguali.

§. 167. Coroll. II. Essendo l' angolo AOB al centro di tanti gradi, quanti ne contiene l' arco AB (§. 160); sarà l' angolo ACB alla periferia di tanti gradi, quanti ne conterrà la metà dell' arco AB. Onde gli angoli alla periferia de' cerchi debbonsi valutare dal numero de' gradi, e minuti, che si contengono nelle metà degli archi, ai quali appoggiano.

§. 168. Coroll. III. E comechè tutti gli angoli fatti in una stessa porzione di cerchio appoggiano allo stesso arco, tutti sono dello stesso numero di gradi, e conseguentemente uguali tra di loro.

§. 169. Coroll. IV. L' angolo fatto nel mezzo cercio è retto; perchè appoggiando su la semiperiferia, ch' è di 180 gradi, esso sarà di 90 gradi, cioè retto (§. 163).

L' angolo fatto in una porzione di cerchio minore della metà, è ottuso; imperocchè un tal angolo appoggerà sopra una porzione della periferia maggiore della metà; e perciò sarà maggior del retto, ossia ottuso.

Similmente si comprende, che l' angolo fatto in una porzione di cerchio maggiore della metà, debba esser acuto.

Fig. 60 §. 170. Coroll. V. Sia ABCD un quadrilatero qualunque iscritto nel cerchio ABCD. Sarà la somma degli angoli opposti in A, e C di tanti gradi, quanti ne contiene la metà della somma degli archi BCD, DAB; cioè quanti ne contiene la metà della periferia BCDA. Ma la metà della periferia contiene 180 gr. Dunque la somma degli angoli in A, ed in C equivale alla somma di due retti (§. 163). Similmente s' intende esser uguale a due retti la somma degli angoli opposti in B, e D. Sicchè in ogni quadrilatero iscritto in un cerchio la somma di due angoli opposti è sempre uguale a due retti.

Fig. 61 §. 171. Coroll. VI. Sia AOB un angolo dentro del cerchio, non al centro, nè alla periferia; si potrà facilmente determinarne la sua misura; ed ecco come: si prolunghino AO, e BO sino alla periferia in D, e C; e si congiunga BD. Nel triangolo BOD l' angolo AOB è esterno; e perciò uguale alla somma degli angoli in D, ed in B. (§. 80). Ma l'angolo in D è misurato dalla metà di AB (§. 167): similmente l' angolo in B è misurato dalla metà di CD. Dunque l' angolo AOB è misurato da $\frac{1}{2}$ (AB+CD), cioè dalla metà della somma degli archi AB, CD.

Fig. 62 §. 172. Coroll. VII. Sia l' angolo ABC fuori del cerchio; facil cosa sarà pure il determinarne la sua misura. Si prolunghino, se occorre, i suoi lati BA, BC sino a che incontrino per la seconda volta la periferia, e si unisca AD. L'angolo B, aggiuntovi l'angolo A, adegua l' angolo esterno ADC (§. 80). Onde tolto di comune l' angolo A, sarà il solo angolo B uguale all'angolo ADC, toltone tanto, quant' è l' angolo A. Ma l' angolo ADC è misurato dalla metà di AC; e l' angolo A è misurato dalla metà di ED. Dunque l' angolo B è misurato da $\frac{1}{2}$ (AC—ED); ossia dalla metà della differenza degli archi AC, ED.

§. 173. Avvertimento. Si noti, che descrivendo un cerchio, che abbia per diametro l' ipotenusa di qualunque triangolo rettangolo ABC, passerà esso colla periferia pel punto B. Fig. 63
Imperocchè se così non fosse, questa incontrerebbe il lato AB in qualunque altro punto D; e congiunta la retta DC, l' angolo ADC, come fatto nel mezzo cerchio, sarebbe retto (§. 169). Quindi nel triangolo BCD vi sarebbero due angoli retti. Ma ciò è impossibile (§. 81). Dunque la detta periferia deve passare per lo punto B.

PROP. XIII. TEOR. X.

§. 174. *Se una retta è tangente d' un cerchio, e dal punto del contatto si tira qualunque corda; gli angoli fatti dalla tangente, e dalla corda uguagliano quelli, che si fanno nelle porzioni alterne del cerchio.*

Dichiarazione. Sia CB tangente del cerchio AGED; e dal punto del contatto A Fig. 64
sia tirata qualunque corda AD. Dico, che l'

angolo DAB uguaglia qualunque angolo AGD fatto nella porzione alterna AGED del detto cerchio; e che altresì l' angolo CAD pareggia ogni angolo AFD fatto nella porzione AFD.

Dimostrazione. *Dal punto del contatto A si tiri il diametro AE, e si congiunga DE.* Nel triangolo ADE, l' angolo in D è retto, perchè fatto nel mezzo cerchio (§. 169); e perciò la somma degli altri due DAE, AED pareggia un retto. Ma l' angolo EAB è retto (§. 150). Dunque EAB uguaglia la somma di DAE, ed AEB. Laonde tolto di comune l' angolo DAE, sarà l' angolo DAB uguale ad AED, e conseguentemente uguale a qualunque altro angolo AGD (§. 168).

In oltre nel quadrilatero AFDG l' angolo AFD è supplimento a due retti dell' angolo AGD (§. 170). Similmente l' angolo DAC è supplimento a due retti dell' angolo DAB, perchè suo conseguente (§. 67). Per la qual cosa essendosi dimostrati uguali gli angoli DGA, DAB, anche i loro supplimenti AFD, CAD debbono essere uguali. Sicchè *se una retta è tangente del cerchio.* ec. c. b. d.

PROP. XIV. TEOR. XI.

§. 175. *Se una retta esistente fuori di un cerchio ne incontra la periferia in un punto, e forma con una corda tirata da questo stesso punto l' angolo eguale a quello, che si forma* *nella porzione alterna del cerchio ; sarà detta retta tangente del cerchio.*

Dichiarazione. La retta AB incontri la periferia del cerchio ADG nel punto A ; e tirata la corda AD, sia l' angolo BAD uguale a quello, che si forma nella porzione AGED. Dico essere AB tangente del cerchio nel punto A.

Dimostrazione. *Per A si tiri il diametro AE, e si unisca DE.* Nel triangolo ADE essendo retto l' angolo ADE (perchè fatto nel mezzo cerchio (§. 169); sarà la somma degli altri due DAE , AED uguale ad un retto (§. 80). Ma per ipot. l' angolo DAB è uguale all' angolo AED. Dunque la somma de' due angoli DAE , DAB , cioè tutto l' angolo EAB , pure è eguale ad un retto. Onde AB è tangente del cerchio nel punto A (§.153). Sicchè *se una retta esistente fuori di un cerchio ne incontra la periferia ec.* c. b. d.

PROP. XV. PBOBL. IV.

§. 176. *Data una retta terminata , e dato un angolo rettilineo , costruire una porzione di cerchio , la quale abbia per sua corda la retta data , e gli angoli contenuti in essa uguali all' angolo dato.*

Dichiarazione. Sia data la retta AD , e sia dato l' angolo O. Bisogna costruire su la retta AD una porzione di cerchio , che contenga gli angoli uguali all' angolo O.

Soluzione. 1. Si faccia nel punto A della retta AD l' angolo DAB=O (§. 59).

2. Dai punti A , e D s' innalzino AE , DE rispettivamente perpendicolari ad AB , e DA (§. 65); e si prolunghino finchè si uniscono in un punto E.

3. Presa AE per diametro si descriva il cerchio AGD , il quale , essendo l' angolo EDA retto , passerà colla periferia pel punto D (§. 173). Dico , che AGED è la porzione cercata.

Dimostrazione. Essendo per costruzione AE diametro del cerchio AGD , e l' angolo EAB retto ; sarà AB tangente nel punto A (§. 153). Dunque gli angoli che si contengono nella porzione AGED , uguagliano l' angolo DAB (§. 174) , e conseguentemente l' angolo O. Sicchè si è costrutta su la retta AD la porzione di cerchio , che in se contiene gli angoli uguali all' angolo dato O. c. b. f. e d.

PROP. XVI. PROBL. V.

§. 177. *Dato un cerchio , e dato un angolo rettilineo , tagliare dal dato cerchio una porzione , che contenga gli angoli uguali all' angolo dato.*

Dichiarazione. Sia dato il cerchio AGD ; e dato l' angolo O. Si cerca tagliare dal dato cerchio una porzione , che in se contenga gli angoli uguali all' angolo O.

Soluzione. Si tiri AB tangente del cerchio in qualunque punto A; e poscia si faccia in A l' angolo BAD=O. Dico essere AGED la porzione di cerchio, che si domanda.

Dimostrazione. Essendo AB tangente del cerchio, saranno gli angoli contenuti nella porzione AGED uguali all' angolo DAB (§.174). Ma questo per costruzione è uguale al dato angolo O. Dunque gli angoli contenuti nella porzione AGED sono uguali all' angolo O. Per la qual cosa dal dato cerchio si è tagliata una porzione ec. c. b. f. e d.

PROP. XVII. PROBL. VI.

§. 178. *Dato qualunque arco di cerchio dividerlo in due porzioni uguali.*

Dichiarazione. Sia dato l' arco circolare Fig. 65
ACB. Si cerca dividerlo in due porzioni uguali.

Soluzione 1. Si uniscano gli estremi A, e B dell' arco colla retta AB.

2. Si divida AB in due parti uguali in D (§. 63); e dal punto D s' innalzi DC perpendicolare ad AB (§. 65). Dico, che l'arco ACB sia diviso in C in due parti uguali.

Dimostrazione. *Si congiungano le rette AC, CB.* Gli angoli ADC, EDC, essendo retti per costruzione, sono eguali. Hanno ancora il lato AD=DB, e 'l lato DC di comune. Dunque è la base AC=BC (§. 18); e perciò uguali sono pure gli archi AC, CB (§. 164). Sicchè si è diviso l' arco ACB in due porzioni uguali ec. c. b. f. e d.

§. 179. Avv. I. Si noti, che il problema della divisione dell' arco circolare, e quello della divisione dell' angolo rettilineo, non formano in realtà, se non se uno stesso problema; poichè sapendosi sciorre l' uno, si sa
Fig. 66 sciorre anche l' altro. In fatti preso per centro il vertice di un angolo AOB, e con qualsivoglia intervallo OA descritto l' arco AB; se si divide l' angolo AOB in qualunque numero di parti uguali colle rette OC, OD, OE, OF, resta diviso ancora l' arco AB nello stesso numero di parti uguali; ed al contrario se si divide l' arco AB in qualunque numero di parti uguali AC, CD, DE, EF, FB, nel medesimo numero di parti uguali resta diviso dalle rette OC, OD, OE, OF anche l' angolo AOB (§. 159).

Adunque se si sapesse dividere l' arco in parti uguali, si procederebbe alla divisione dell' angolo in parti uguali nella guisa seguente. Descritto un arco circolare tra i lati dell'angolo col fare centro il suo vertice, prima si dividerebbe l' arco, e poscia tirando pe' punti delle divisioni le rette al vertice dell' angolo, resterebbe questo similmente diviso. Al contrario sapendosi dividere l' angolo in parti uguali, si potrebbe facilmente dividere pure l' arco in parti uguali. Imperocchè del dato arco da dividersi, prima se ne determinerebbe il centro (§. 143); e congiunti i raggi agli estremi dell' arco, si dividerebbe poscia in parti uguali l' angolo da questi raggi compreso: e così le rette dividenti tal angolo dividerebbero similmente l'arco.

§. 180. Coroll. Dunque quelle divisioni in parti uguali, che si possono fare nella Geometria elementare per rispetto degli angoli rettilinei, si possono anche fare per rispetto degli archi circolari; e tutte le altre sono nella Geometria elementare assolutamente impossibili.

§. 181. Avv. II. Ancorchè la trisezione degli angoli, e conseguentemente degli archi circolari, sia generalmente impossibile nella Geometria elementare; nondimeno la trisezione dell'angolo retto, e perciò dell'arco, che il misura, è possibile. Ed ecco come. Sia ABC un angolo retto da trisecarsi 1. Si prenda in BC ad arbitrio il punto E. 2. Su BE si costruisca il triangolo equilatero BDE (§. 57). Fig. 67
3. Si divida finalmente l'angolo DBE in due parti uguali colla BG (§. 60). Sarà l'angolo retto ABC diviso in tre parti uguali ABD, DBG, GBC. Imperocchè l'angolo DBE è un terzo di due retti (giacchè tutti e tre gli angoli del triangolo equilatero sono uguali tra essi, e tutti insieme fanno due retti (§§. 84, e 80). Or tant'è un terzo di due retti, che due terzi di un retto. Perciò l'angolo BDE è due terzi di un retto; e conseguentemente ciascuno degli angoli ABD, DBG, GBE è un terzo di un retto.

§. 182. Avv. III. Si noti finalmente, che

nella Geometria elementare si possono dividere ancora l'angolo retto in 5 parti uguali, e due altri angoli speziali, uno in 3, e l'altro in 5 parti uguali. Però de' modi da eseguire sì fatte divisioni si dirà a suo luogo.

C A P. V.

Dell' uguaglianza de' rettangoli formati dalle rette, le quali incontrandosi dentro, o fuori del cerchio, tramezzano tra'l punto dell'incontro, e la periferia.

PROP. XVIII. TEOR. XII.

§. 183. *Se in un cerchio due corde s'intersecano, il rettangolo fatto dalle parti di una è uguale al rettangolo fatto dalle parti dell'altra.*

Dichiarazione. Due corde in un cerchio si possono intersecare in quattro distinti casi. I. Che entrambe passino per lo centro. II. Che una sola passi per lo centro, e tagli l'altra ad angoli retti. III. Che una passando per lo centro tagli l'altra ad angoli obbliqui. IV. Finalmente, che niuna delle due corde passi per lo centro. In tutti questi casi dico, che il rettangolo fatto dalle parti di una corda è sempre uguale a quello, che si forma dalle parti dell' altra.

Fig. 68 Dimostrazione. Caso I. Nel cerchio ACBD s'intersechino due diametri. È evidente, che il centro O sia il punto della loro comune intersecazione. Onde essendo OA, OD, OB, OC tutte eguali, il rettangolo di AO in OB è uguale al rettangolo di OD in OC.

Fig. 69 Caso II. Sia AB diametro del cerchio ADBC, ed intersechi la corda CD ad angoli retti nel punto P. *Si congiunga OD.* Considerandosi BO, ed OP come due rette disuguali, sarà AP la loro somma, e PB la loro differenza. E perciò sarà il rettangolo di AP in PB uguale alla differenza de' quadrati di BO, e di OP (§. 127), ossia di OD, e di OP. Ma la differenza de' quadrati di OD, e di OP è rappresentata dal quadrato di PD, (per esser l'angolo OPD retto (§. 131). Sicchè il rettangolo di AP in PB è uguale al quadrato di PD, e conseguentemente (per essere CP=PD §. 140) uguale al rettangolo di CP in PD.

Fig. 70 Caso III. Sia AB diametro del cerchio ADBC, ed intersechi la corda CD ad angoli obbliqui. *Dal centro O si cali OE perpendicolare a CD.* Sarà CE=ED. *Si congiunga OD.* Delle due rette disuguali BO, OP essendone AP la somma, e PB la differenza; sarà (§. 127) il rettangolo di AP in PB uguale alla differenza de' quadrati di BO, ossia OD, e di OP. Similmente essendo delle rette CE, EP la somma DP, e la differenza PC, sarà il rettangolo di CP in PD uguale alla differenza de' quadrati di CE ossia ED, e di PE. Ma la differenza de' quadrati di ED, e di EP è uguale alla differenza de' quadrati di OD, e di OP: il che nella seguente guisa si dimostra.

La differenza, che passa fra due grandezze, non si muta, ancorchè esse si accrescano di un' altra grandezza di comune. Se dunque i quadrati di ED, e di EP si accrescano di comune del quadrato di OE; nelle grandezze che quindi ne nasceranno, saravvi la stessa differenza, che passava tra i semplici quadrati di ED, e di EP. Ma i quadrati di ED, e di EP accresciuti di comune del quadrato di OE formano i quadrati di OD, e di OP, (per essere gli angoli in E retti (§. 130). Dunque la differenza de' quadrati di ED, e di EP è la stessa, che la differenza de' quadrati di OD, e di OP. Conseguentemente il rettangolo di AP in PB è uguale al rettangolo di CP in PD.

Fig. 71 Caso IV. S' intersechino finalmente nel cerchio ACBD le corde AB, CD, delle quali niuna sia diametro. *Per P si tiri il diametro EF.* Essendo al rettangolo di EP in PF uguale sì il rettangolo di AP per PB, che il rettangolo di CP in PD (*caso prec.*); sarà il rettangolo di AP in PB uguale al rettangolo di CP in PD.

Sicchè se in un cerchio due corde s' intersecano il rettangolo ec. c. b. d.

Fig. 69 §. 184. Coroll. Nel caso II. si è dimostrato, che il rettangolo fatto da AP e PB è uguale al quadrato di PD. Or ogni retta DP, che da qualunque punto della periferia si cala perpendicolare al diametro AB, si chiama *ordinata* ad esso diametro; e le due parti AP, PB, in cui il diametro resta diviso, si dicono *ascisse*. Dunque la periferia circolare è una curva d'indole tale, che i quadrati delle ordinate sono eguali ai rettangoli delle corrispondenti ascisse.

§. 185. Avvertimento. Si noti, che questa proprietà del cerchio ad esso talmente appartiene, che se PD è perpendicolare ad AB, e 'l suo quadrato uguaglia il rettangolo di AP in PB; il punto D è alla periferia del cerchio, che ha per diametro AB. *Si divida AB in due parti uguali nel punto O, e si congiunga OD.*

Essendo l'angolo OPD retto, il quadrato di PD uguaglia la differenza del quadrato di OD sul quadrato di OP (§. 131). Ed essendo delle due rette OB, OP la somma PA, e la differenza PB; il rettangolo di AP in PB pareggia la differenza del quadrato di OB sul quadrato di OP (§. 127). Giacchè dunque per ipot. il quadrato di PD uguaglia il rettangolo di AP in PB, la differenza del quadrato di OD sul quadrato di OP uguaglia la differenza del quadrato di OB sullo stesso quadrato di OP; e perciò sarà il quadrato di OD uguale al quadrato di OB; e conseguentemente la retta OD = OB = OA. Laonde il cerchio descritto col centro O, e col raggio OA (ossia il cerchio, che ha per diametro AB) passerà colla sua periferia per lo punto D.

PROP. XIX. TEOR. XIII.

§. 186. *Se da qualunque punto esistente fuori di un cerchio sono tirate due rette, una che sia tangente, e l'altra che sia segante del cerchio; il rettangolo fatto dall'intera segante, e dalla sua parte esistente fuori del cerchio è uguale al quadrato della tangente.*

Dichiarazione. Dal punto A esistente fuori
Fig. 72 del cerchio BFEC sian tirate la tangente AB, ed un'altra retta, che giunga alla parte concava della periferia: sia che questa passi per lo centro, come AC, sia che passi per fuori il centro, come AE; dico, che il rettangolo di tutta CA in AD, come anche quello di tutta EA in AF, sia uguale al quadrato di AB.

Dimostrazione. Caso I. Passi la segante AC per lo centro. *Unito il raggio OB al punto del contatto, l'angolo ABO sarà retto* (§. 150). Essendo delle rette AO, OD la somma AC, e la differenza AD, sarà il rettangolo di CA in AD uguale alla differenza de' quadrati di AO, e di OD (§. 127), ossia di AO, e di OB (§. 37) Ma la differenza de' quadrati di AO, e di OB è uguale al quadrato di AB (§. 131). Dunque il rettangolo di AC in AD è uguale al quadrato di AB.

Caso II. Sia AE qualunque altra segante, che non passa per lo centro. *Si cali da O su AE la perpendicolare OG, e si congiunga OF; sarà FG = GE* (§. 140). Essendo delle rette

AG, GF la somma AE, e la differenza AF, sarà il rettangolo di AE per AF uguale alla differenza de' quadrati di AG, e GF (§. 127). Ma questa differenza è la stessa, che quella della somma de' quadrati di AG, e GO sulla somma de' quadrati di FG, e GO (perchè coll' aggiungere a due grandezze un' altra grandezza di comune, non si muta la loro differenza); cioè quella del quadrato di AO sul quadrato di OF (§. 130); ossia quella del quadrato di AO sul quadrato di OB, la quale vien rappresentata dal quadrato di AB (§. 131) Dunque il rettangolo di AE per AF è uguale al quadrato di AB. Sicchè *se da qualunque punto esistente fuori di un cerchio* ec. c. b. d.

§. 187. Coroll. Quindi i rettangoli, che si possono formare da tutte le infinite seganti, che dal punto A si possono tirare al cerchio BCF, nelle loro rispettive porzioni ch' esistono fuori del medesimo cerchio, son tutti tra essi uguali.

PROP. XX. TEOR. XIV.

§. 188. *Se da un punto esistente fuori di un cerchio sian tirate due rette, una che giunga alla parte convessa della periferia, e l' altra alla parte concava; e sia il rettangolo fatto dalla segante, e dalla di lei porzione esistente fuori del cerchio, uguale al quadrato di quella, che*

giunge alla parte convessa: sarà questa seconda retta tangente del cerchio nel punto in cui l' incontra.

Fig. 73 Dichiarazione. Dal punto A esistente fuori del cerchio BDE sian tirate due rette, AB che giunga alla parte convessa, ed AD che sia segante. Dico, che se il rettangolo di DA in AE è uguale al quadrato di AB, questa AB dev' essere tangente del cerchio nel punto B.

Dimostrazione. *Dal punto A si tiri la tangente AC, e si uniscano i raggi OC, OB.* Essendo al rettangolo di DA in AE uguale sì il quadrato di AB (per ipot.), che il quadrato di AC (perchè tangente §. 186); sarà il quadrato di AB uguale al quadrato di AC, e perciò AB=AC. Ora ne' due angoli ACO, ABO i lati AC, e CO sono rispettivamente uguali ai lati AB, e BO, e la base AO di comune. Dunque l' angolo ACO=ABO. Ma ACO è retto (§. 150). Dunque ABO pure è retto; e quindi AB è tangente nel punto B (§. 153). Per la qual cosa, *se da un punto esistente fuori di un cerchio* ec. c. b. d.

§. 189. Coroll. Non potendosi dal punto A tirare alla parte convessa della periferia un' altra retta uguale alle due AB, AC (§. 147), cioè un' altra retta, il cui quadrato sia uguale al rettangolo fatto da DA, ed AE; è manifesto, che dal punto A non si può tirare un' altra retta diversa da AB, ed AC, che sia tangente del cerchio. Sicchè da un punto esistente fuori di un cerchio non si possono tirare se non se due tangenti; e queste sono tra esse uguali.

C A P. VI.

Delle iscrizioni sì delle figure regolari nei cerchi, che de' cerchi nelle figure regolari; e delle circoscrizioni tanto delle figure regolari intorno a' cerchi, quanto de' cerchi intorno alle figure regolari.

§. 190. DEFINIZIONE. I. Si dice *figura regolare* ogni rettilineo equilatero, ed equiangolo. Si dice poi *figura irregolare* ogni rettilineo, a cui mancano o una, o tutte e due le anzidette condizioni.

§. 191. DEFINIZIONE. II. Se una figura regolare è situata in un cerchio in modo, che i vertici de' suoi angoli sono tutti alla periferia; la figura si dice *iscritta* nel cerchio; e 'l cerchio si dice *circoscritto* alla figura.

Se poi una figura regolare è situata intorno ad un cerchio in modo, che tutti i suoi lati sono tangenti del cerchio; la figura si dice *circoscritta* intorno al cerchio; e 'l cerchio si dice *iscritto* nella figura.

§. 192. COROLL. I. Dividendo le figure regolari iscritte ne' cerchi le periferie in tante parti uguali, quante ne disegnano i lati di esse: è facile ad intendere, che per iscrivere in un cerchio una figura regolare di 3, 4, 5, 6 ec. lati, è necessario dividere la sua periferia in 3, 4, 5, 6 ec. parti uguali. E perciò

si potranno coll' ajuto della Geom. elementare iscrivere ne' cerchi quelle figure regolari, ch' esigeranno divisioni della periferia in parti uguali da potersi eseguire colla riga, e col compasso. Tutte le altre saranno iscrizioni impossibili nella Geom. elementare, e saran da rimettersi alla Geom. sublime.

§. 193. COROLL. II. In oltre se una figura iscritta in un cerchio è equilatera, è ancora equiangola, e conseguentemente regolare. Imperocchè ogni suo angolo appoggia sull' intera periferia diminuita di due degli archi uguali, che son tagliati dai suoi lati.

§. 194. DEFINIZIONE III. Si dice una retta *adattata* in un cerchio, se è situata nel cerchio in modo, che sia sua corda.

§. 195. COROLL. Essendo il diametro la massima di tutte le corde del cerchio (§. 148), ne siegue, che si potrà una retta data adattare in un dato cerchio, se essa non sarà maggiore del suo diametro.

L E M M A.

§. 196. *Dato un cerchio, e data una retta, che non sia maggiore del suo diametro, adattare la retta data nel cerchio.*

Fig. 74 DICHIARAZIONE. Sia dato il cerchio ABC, e sia data la retta L. Si cerca adattare nel cerchio dato la retta L.

SOLUZIONE. 1. Si tiri nel cerchio qualunque diametro AC. Se sarà AC=L, sarà AC la retta cercata; altrimenti

2. Si tagli AD=L (§. 147); e descritto col centro A, e coll' intervallo AD l' arco circolare DB, si congiunga AB.

Dico essere AB la retta cercata. La dimostrazione è chiara da se.

PROP. XXI. PROBL. VII.

§. 197. *Dato qualunque cerchio, iscrivere in esso il triangolo equilatero.*

Dichiarazione. Sia dato il cerchio ABC. Bisogna iscrivere in esso il triangolo equilatero. Fig. 75

Soluzione. 1. Si tiri nel dato cerchio qualunque diametro BD, e dal punto D si adattino le rette DA, DC uguali al raggio (§. prec.).

2. Si congiungano i tre punti A, B, C colle rette AB, BC, CA.

Dico essere ABC il triangolo cercato.

Dimostrazione. *Si congiungano i raggi OA, OC.* Essendo (per costruz.) il triangolo AOD equilatero, sarà l' angolo AOD un terzo di due retti; e perciò il suo conseguente AOB sarà due terzi di due retti (§. 67). Similmente ragionando, l' angolo COD è un terzo di due retti, e COB due terzi. Con che l' angolo AOC pure è due terzi di due retti. Son dunque uguali gli angoli AOB, BOC, COA, e perciò uguali gli archi AB, BC, CA (§. 159), e conseguentemente anche le corde AB, BC, CA (§. 164). Onde il triangolo ABC è equilatero. Per la qual cosa nel dato cerchio si è iscritto il triangolo equilatero. c. b. f. e d.

§. 198. Coroll. I. Essendo le corde AD, DC uguali, uguali saranno anche gli archi, AD, DC (§. 164). Onde essendo l' arco AC $\frac{1}{3}$ della periferia, sarà l' arco AD $\frac{1}{6}$ della medesima periferia, e conseguentemente la corda AD è lato dell' esagono regolare iscrittibile nel cerchio ABC. Sicchè il lato dell' esagono regolare iscrittibile in un cerchio è uguale al raggio dello stesso cerchio. Quindi s' iscrive l' esagono regolare in un cerchio, adattandosi in esso intorno intorno il raggio.

§. 199. Coroll. II. Se ciascuno degli archi, ne' quali la periferia del cerchio vien divisa dall' esagono regolare iscritto in esso, si divide in due parti uguali, e si congiungono le corde; si ha il dodecagono regolare iscritto nello stesso cerchio. Similmente procedendo innanzi, si avranno le figure regolari di 24, 48, 96 ec. lati iscritte nel medesimo cerchio. Sicchè dall' iscrizione nel cerchio del triangolo equilatero ne derivano le iscrizioni nel cerchio di tutte le figure regolari di 6, 12, 24, 48, 96 ec. lati.

§. 200. Coroll. III. Finalmente essendo il triangolo BAD rettangolo in A (§. 169); il quadrato di AB è uguale al quadrato di BD, toltone il quadrato di AD (§. 131). Ma per essere BD divisa in due parti uguali nel punto O, il quadrato di BD è uguale a quattro quadrati di OD (§. 120): dippiù AD è uguale ad OD. Dunque il quadrato di BA è uguale a quattro quadrati di OD, toltone un quadrato di esso OD; cioè è uguale a tre quadrati di OD. Sicchè il quadrato di BA, lato del triangolo equilatero iscritto nel cerchio, è triplo del quadrato del raggio del medesimo cerchio.

PROP. XXII. PROBL. VIII.

§. 201. *Dato qualunque cerchio, iscrivere in esso il quadrato.*

Dichiarazione. Sia dato il cerchio ABCD. Bisogna iscrivere in esso il quadrato. Fig. 76

Soluzione. 1. Si tiri nel dato cerchio qualunque diametro AC; indi si tiri l'altro BD perpendicolare al primo.

2. Si congiungano le rette AB, BC, CD, DA.

Dico essere ABCD il quadrato cercato.

Dimostrazione. Essendo per costruzione uguali gli angoli AOB, BOC, COD, DOA, ed essendo pure i loro lati rispettivamente uguali; uguali saranno anche le basi AB, CB, CD, DA. In oltre gli angoli in A, B, C, D sono retti, perchè fatti ne' mezzi cerchi (§. 169). Dunque ABCD è quadrato (§§. 72 e 54). Sicchè nel dato cerchio si è iscritto il quadrato. c. b. f. e d.

§. 202. Coroll. I. Se ciascuno de' quattro archi uguali, ne' quali viene divisa la periferia di un cerchio dal quadrato iscritto in es-

so, si dividerà in due parti uguali, e si congiungeranno le corde; s' avrà la figura regolare di 8 lati iscritta nello stesso cerchio. E se poi collo stesso metodo si procederà innanzi, s' avranno le figure regolari di 16, 32, 64, ec. lati iscritte nel medesimo cerchio. Sicchè dalla iscrizione del quadrato nel cerchio ne derivano le iscrizioni nel cerchio delle figure regolari di 8, 16, 32, 64 ec. lati.

§. 203. Coroll. II. Essendo il quadrato di AB uguale alla somma de' quadrati fatti su AO ed OB (§. 130), e conseguentemente uguale al doppio del quadrato di AO; sarà il quadrato ABCD iscritto in un cerchio il doppio del quadrato del raggio.

L E M M A

§. 204. *Costruire un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli alla base il doppio dell' angolo rimanente.*

Fig. 77 Soluzione. 1. Si prenda la retta AB di qualunque lunghezza, e si divida in C in modo, che il rettangolo di AB in BC sia uguale al quadrato di AC (§. 139).

2. Col centro A, e coll' intervallo AB si descriva il cerchio BDF; ed adattata in esso la retta BD=AC, si congiunga AD,

Dico essere BAD il triangolo cercato.

Dimostrazione. Essendo AB, ed AD raggi dello stesso cerchio, è AB=AD; è chiaro che il triangolo BAD sia isoscele, Ora devesi dimostrare, che ciascuno degli angoli alla base in B, ed in D sia il doppio del terzo angolo in A. *Si congiunga CD, e s' intenda descritto il cerchio, che colla sua periferia passa per i tre punti A, C, D.*

Essendo per costruzione il rettangolo di AB in BC uguale al quadrato di AC; ed esssendo anche per costruzione AC=BD, sarà pure il rettangolo di AB in BC uguale al quadrato di BD. E quindi in vigore della proposizione 20 di questo lib., la BD dev' esssere tangente del cerchio ACD nel punto D. Onde l' angolo BDC (fatto dalla tangente, e dalla corda) è uguale all' angolo DAC (fatto nell' alterna porzione del cerchio §. 174).

In oltre nel triangolo ACD essendo il lato AC prolungato in B, l' angolo esterno DCB adegua la somma degli angoli CAD, CDA, (§. 80). Ma ora si è dimostrato essere CAD=CDB. Dunque l' angolo DCB adegua la somma di CDB, CDA, ossia tutto l' angolo BDA. Ma BDA=DBA (§. 83). Dunque nel triangolo CDB sono eguali gli angoli DCB, DBC; e conseguentemente (§. 85) CD=BD, e perciò uguale a CA (per costruzione). Laonde il triangolo ACD è isoscele; e quindi l' angolo CDA=CAD (§. 83). Ciascuno adunque de' due angoli BDC, CDA è uguale all' angolo BAD; e perciò tutto l' angolo BDA è doppio dell' angolo BAD; conseguentemente anche l' angolo ABD è doppio di BAD. Laonde il triangolo BAD è isoscele, ed ha ciascu-

no degli angoli alla base il doppio del terzo angolo. Per la qual cosa si è costrutto un triangolo isoscele, che ha ciascuno degli angoli alla base il doppio del terzo angolo. c. b. f. e. d.

§. 205. Coroll. I. Essendo tutti e tre gli angoli del triangolo BAD uguali alla somma di due retti (§. 80); se questa si concepisce divisa in cinque parti uguali, di sì fatte parti una ne conterrà l' angolo BAD, due l' angolo in B, e l' altre due l' angolo in D. Sicchè l' angolo BAD è un $\frac{1}{5}$ di due retti, ossia è un $\frac{1}{10}$ di quattro retti. Onde l' arco BD è la decima parte della periferia circolare descritta col raggio AB; conseguentemente la corda BD adattata dieci volte consecutivamente in detta periferia, l' esaurisce esattamente; e quindi si forma il decagono regolare iscritto nel cerchio BDF. Sicchè il lato del decagono iscrittibile in un cerchio si determina col dividere il raggio dello stesso cerchio in modo, che il rettangolo del raggio intero, e di una sua parte, pareggi il quadrato dell' altra parte; imperocchè questa parte sarà il lato del detto decagono regolare.

§. 206. Coroll. II. Si prolunghi BA in H in modo, che il rettangolo di BH in HA sia uguale al quadrato di AB. Se poscia si tagli AC=AH, sarà il rettangolo di AB in BC uguale al quadrato di AC (§. 139). Onde siccome (per lo §. prec.) AC, così pure AH sarà il lato del decagono regolare iscrittibile nel cerchio del raggio AB. Sicchè se il raggio di un cerchio si prolunghi in modo, che il rettangolo fatto da tutto il raggio prolungato, e dalla parte aggiunta, sia uguale al quadrato dello stesso raggio; sarà la parte aggiunta il lato del decagono regolare iscrittibile nello stesso cerchio.

§. 207. Avvertimento. Sia ABCDEF un mezzo decagono regolare iscritto nel mezzo cerchio. Si congiunga AC; sarà essa il lato del pentagono regolare iscrittibile nel medesimo cerchio. Dalle cose anzidette si potrà determinare il valore di AC nella guisa seguente. Fig. 78
Dal centro O si cali OI perpendicolare su di AB, e si unisca BH: sarà BI=IA (§. 140).

L'angolo COI è misurato dalla somma dell'arco CB, e della metà di BA (§. 160), ossia dalla metà di tutto l'arco CF. Ma l'angolo CAF pure è misurato dalla metà dell'arco CF (§. 167). Dunque l'angolo COI=CAO. Onde se s'intende descritto il cerchio, che colla sua periferia passa pe' tre punti A, H, O; diverrà OH sua corda, e sarà CO sua tangente nel punto O (§. 175); e perciò il rettangolo fatto da AC (segante del detto cerchio), e da CH (parte della segante esistente fuori del cerchio) sarà uguale al quadrato di CO (§. 186).

In oltre ne' due triangoli BIH, AIH, essendo i lati BI, IH rispettivamente eguali ai lati AI, IH, ed uguali anche gli angoli compresi, perchè retti per costruzione; sarà (§. 60)

l'angolo HBI=HAI. Ma HAI ossia CAB=BCA (perchè entrambi poggiano sopra gli archi uguali BC, AB §. 100). Dunque HBI ossia HBA=BCA. Onde se s'intende descritto il cerchio, che colla periferia passa pe' tre punti C, B, H, mentre BH diverrà sua corda, sarà AB sua tangente nel punto B (§. 175); e perciò il rettangolo di CA (segante del detto cerchio) in AH (porzione della segante esistente fuori del cerchio) sarà uguale al quadrato di AB (§. 186). Per la qual cosa la somma de' rettangoli di AC per CH, e di CA per AH, cioè il quadrato di AC (§. 113), sarà uguale alla somma de' quadrati fatti uno su di OC, e l'altro su di AB. Dunque il lato del pentagono regolare iscrittibile in un cerchio è tale, che il suo quadrato uguaglia la somma de' quadrati del raggio, e del lato del decagono regolare iscrittibile nel medesimo cerchio (§. 65).

PROP. XXIII. PROBL. IX.

§. 208. *Dato un cerchio, iscrivere in esso il pentagono regolare.*

Fig. 79 Dichiarazione. Sia dato il cerchio ACBD. Bisogna iscrivere in esso il pentagono regolare.

Soluzione. 1. Si tiri qualunque diametro AB, e dal centro O s'innalzi la perpendicolare OC (§. 65).

2. Si divida il raggio OB in due parti u-

guali nel punto F; e congiunta FC, si descriva col centro F, e coll' intervallo FC l' arco circolare CE, che interseca AB nel punto E.

3. Finalmente si congiunga CE, e la si adatti nel cerchio intorno intorno.

Dico, che in tal modo s' avrà il pentagono cercato.

Dimostrazione. Essendo delle rette EF, FO la somma EB, e la differenza EO, sarà il rettangolo fatto da BE, ed EO uguale alla differenza de' quadrati di EF, e di FO, (§. 127) ossia di FC, e di FO. Ma essendo il triangolo COF rettangolo in O, la differenza de' quadrati di FC, e di FO pareggia il quadrato di OC (§. 131), ossia di OB (§. 37). Dunque il rettangolo di BE per EO pareggia il quadrato di OB. Onde essendo OB raggio del cerchio, EO sarà il lato del decagono regolare iscrittibile nello stesso cerchio (§. 206). Ma per l' angolo retto GOE, il quadrato di EC adegua i quadrati di CO (raggio), e di EO (lato del decagono regolare). Dunque EC è il lato del pentagono regolare iscrittibile nel cerchio (§. 207). Per la qual cosa adattando EC intorno intorno nel cerchio ACBD, si avrà il pentagono cercato. c. b. f. e d.

§. 209. Coroll. I. Essendo EO uguale al lato del decagono regolare iscrittibile nel cerchio ACBD; s' avrà il decagono regolare iscritto nel cerchio ACBD con andarvi adattando intorno la retta EO.

§. 210. Coroll. II. Se ciascuno de' dieci archi uguali, ne' quali verrà divisa la periferia d' un cerchio dal decagono regolare iscritto in esso, si dividerà in due parti uguali, e si congiungeranno le corde; s' avrà la figura regolare di 20 lati iscritta nello stesso cerchio. Se poi collo stesso metodo si procederà innanzi, s' avranno le figure regolari di 40, 80, 160 ec. lati iscritte nello stesso cerchio. Sicchè dall' iscrizione del pentagono regolare nel cerchio ne derivano le iscrizioni ne' cerchi delle figure regolari di 10, 20, 40, 80, 160 ec. lati.

§. 211. Avvertimento I. Dividendo il lato del ventagono regolare la periferia del cerchio in 20 parti uguali, dividerà la quarta parte della periferia in 5 parti uguali. Giacchè dunque l' angolo retto ha per suo arco la quarta parte della periferia (§. 63); dividendosi questa in cinque parti uguali mercè il lato del ventagono regolare, potrassi dividere pure l' angolo retto in 5 parti uguali (§. 179).

§. 212. Avvertimento II. Si noti, che le iscrizioni nel cerchio di tutte le altre figure regolari, dalle già insegnate in fuori, sono tutte impossibili nella Geometria elementare, esigendo operazioni ineseguibili colla riga, e col compasso. E' possibile solamente nella detta Geometria l' iscrizione del quindecagono regolare, e possibili conseguentemente sono le iscrizioni delle figure regolari di 30, 60, 120 ec. lati. Perciò soggiungiamo la seguente

PROP. XXIV. PROBL. X.

§. 213. *Dato qualunque cerchio, iscrivere in esso il quindecagono regolare.*

Dichiarazione. Sia dato il cerchio ABE; bisogna iscrivere in esso il quindecagono regolare. Fig. 80

Soluzione. 1. S' adatti nel cerchio ABCE la retta AB, che sia il lato del triangolo equilatero iscrittibile in esso; e per lo punto A si adatti pure la retta AC, che sia il lato del pentagono regolare anche iscrittibile in esso.

2. Si divida l' arco BC in due parti uguali in D (§. 178), e si congiunga BD.

3. Si vada la retta BD adattando intorno intorno nel cerchio.

Dico, che si avrà in tal mòdo il quindecagono cercato.

Dimostraz. Essendo l' arco AB $\frac{1}{3}$ della periferia ABE; delle 15 parti uguali, nelle quali il quindecagono regolare deve dividere la periferia, 5 se ne conterranno in esso arco AB. Similmente, essendo l' arco AC $\frac{1}{5}$ della periferia, delle anzidette 15 parti uguali, nelle quali il quindecagono regolare deve dividere la periferia, 3 se ne conterranno nell' arco AC. Onde l' arco BC ne conterrà 2; e perciò BD sarà la 15.ma parte della periferia. Conseguentemente la retta BD sarà il lato del

quindecagono. Sicchè coll' adattare nel cerchio ACE la retta BD intorno intorno, s' avrà il quindecagono regolare iscritto in esso. c. b. f. e d.

§. 214. Coroll. I. Sicchè nella Geometria elementare è divisibile in 3 parti uguali l' arco AC, ed in 5 parti uguali l' arco AB. Or l' arco AC essendo $\frac{1}{5}$ della periferia, è perciò di 72 gr., e l' arco AB essendo $\frac{1}{3}$ della periferia, è di gr. 120. Sicchè gli angoli di 72, e di 120 gr. sono nella Geometria elementare divisibili il primo in 3, e 'l secondo in 5 parti uguali (§. 179).

§. 215. Coroll. II. Se ciascuno de' 15 archi uguali, ne' quali verrà divisa la periferia di un cerchio dal quindecagono regolare iscritto in esso, si dividerà in due parti uguali, e si congiungeranno le corde; s' avrà la figura regolare di 30 lati iscritta nello stesso cerchio. Se poi collo stesso metodo si procederà innanzi, s' avranno le figure regolari di 60, 120, 240 ec. lati iscritte nel medesimo cerchio. Sicchè dalla iscrizione del quidecagono regolare nel cerchio ne derivano le iscrizioni nel medesimo cerchio delle figure regolari di 30, 60, 120, 240 ec. lati.

§. 216. Coroll. III. Sono dunque iscrittibili nel cerchio coll' ajuto della Geometria elementare solamente le seguenti figure regolari; cioè la figura regolare di 3 lati, e conseguentemente quelle di 6, 12, 24, 48, ec. lati: la figura regolare di 4 lati, e conseguentemente quelle di 8, 16, 32, 64 ec. lati: la figura regolare di 5 lati, e per conseguenza quelle di 10, 20, 40, 80 ec. lati: e la figura regolare di 15 lati, è conseguentemente quelle di 30, 60, 120, 240, ec. lati.

PROP. XXV. PROBL. XI.

§. 217. *Dato qualunque cerchio, circoscrivere intorno di esso qualsivoglia figura regolare.*

Dichiarazione. Sia dato il cerchio ACE, bisogna circoscrivere ad esso una qualunque figura regolare. Fig. 81

Soluzione. 1. S'iscriva prima nel cerchio la figura regolare dello stesso numero di lati di quella, che si vuole circoscrivere, se è possibile nella Geometria elementare. E sia per es. il pentagono ABCDE.

2. Per i vertici di tutti gli angoli in A, B, C, D, E si tirino le tangenti PL, LM, MN, NO, OP (§. 154), le quali si uniscono in L, M, N, O, P.

Dico essere LMNOP la figura cercata.

Dimostrazione. *Dal centro Q si tirino ai vertici degli angoli della figura iscritta le rette QA, QB, QC ec.; ed ai vertici degli angoli della figura circoscritta le rette QL, QM, QN, QO, QP.*

Essendo ne' triangoli LAQ, LBQ il lato LA=LB, come tangenti procedenti dallo stesso punto (§. 189), AQ=BQ, ed LQ di comune; sarà l'angolo ALQ=BLQ, e l'angolo

AQL=BQL (§. 91). Sicchè la retta QL divide in due parti uguali sì l'angolo ALB, che l'angolo AQB. Similmente si dimostra, che le rette QM, QN, QO, QP dividono in parti uguali sì gli angoli BMC, CND ec. che gli angoli BQC, CQD ec. Ciò posto,

Essendo l'arco AB=BC, è l'angolo AQB=BQC (§. 159). Onde le loro metà LQB, MQB sono pure uguali. Sono anche uguali gli angoli QBL, QBM, come retti (§. 150). Dunque uguali sono pure gli angoli QLB, QMB, (§. 81 num.° III.); e conseguentemente uguali i doppj di essi, PLM, LMN. Similmente si dimostra essere l'angolo LMN=MNO, MNO=NOP, NOP=OPL. Dunque la figura LMNOP è equiangola.

Finalmente essendo i triangoli QBL, QBM equiangoli, ed avendo di comune il lato QB, sarà LB=BM (§. 93). Dello stesso modo si dimostra essere MC=CN, ND=DO, OE=EP, PA=AL. Ma si è veduto essere LA=LB. Dunque LP, che è il doppio di LA, è uguale ad LM, che è il doppio di LB. Per la stessa ragione è LM=MN, MN=NO, NO=OP. Sicchè la figura LMNOP è anche equilatera. Per la qual cosa intorno al dato cerchio si è circoscritta la figura, che si desiderava. c. b. f. e d.

§. 218. Coroll. Sicchè per circoscrivere intorno al cerchio una figura regolare, è necessario prima iscriverla. Onde si possono nella Geometria elementare circoscrivere intorno a' cerchi solamente quelle figure regolari, le cui iscrizioni ne' cerchi sono possibili coll' ajuto della stessa Geometria.

PROP. XXVI. PROBL, XII.

§. 219, *Data qualunque figura regolare iscrivere dentro di essa il cerchio.*

Dichiarazione. Sia data la figura regolare LMNOP; bisogna iscrivere dentro di essa il cerchio.

Soluzione. 1. Si dividano in due parti uguali due angoli qualunque PLM, LMN della data figura colle rette LQ, MQ (§. 60), le quali prolungate si uniscono in Q.

2. Da Q si calino QA, QB, QC, QD, QE rispettivamente perpendicolari a PL, LM, MN, NO, OP (§. 66).

3. Col centro Q, e coll' intervallo QA, o QB ec. si descriva il cerchio ACD.

Dico, che ACD è il cerchio cercato.

Dimostrazione. Se si dimostra, che le perpendicolari QA, QB, QC ec. son tutte eguali, sarà evidente, che il cerchio descritto col centro Q, e coll' intervallo di una di queste perpendicolari, dovrà colla sua periferia toccare tutti i lati della data figura, ed essere perciò il cerchio cercato. A tal oggetto *si congiungano le rette QP, QO, QN.*

Ne' triangoli PLQ, MLQ, il lato LP=LM (per ipot.), il lato LQ è comune, l'angolo PLQ=MLQ (per costruz.); perciò l'angolo

LPQ=LMQ (§. 90). Dunque essendo per ipotesi tutto l'angolo in M eguale a tutto l'angolo in P; siccome (per costruz.) LMQ è metà di LMN, così pure LPQ sarà metà di LPO. Sicchè la retta QP taglia in parti uguali l'angolo P della figura. Similmente si dimostra, che QO, e QN dividono in due parti uguali gli altri angoli PON, ONM. Ciò posto,

I triangoli LAQ, LBQ sono equiangoli, perchè hanno l'angolo ALQ=BLQ, e l'angolo LAQ=LBQ (come retti per costruzione). Hanno in oltre il lato LQ di comune. Dunque sono in tutto eguali (§. 92); e perciò QA=QB. Collo stesso raziocinio si dimostra essere QB=QC, QC=QD, QD=QE. Per la qual cosa il cerchio descritto col centro Q, e coll' intervallo di una delle dette perpendicolari, deve toccare i lati della figura ne' punti A, B, C, D, E. Sicchè nella data figura regolare si è iscritto il cerchio. c. b. f. e d.

§. 220. Coroll. Divisi due angoli di una figura regolare in due parti uguali mercè due rette, se dal punto in cui queste rette s' incontrano, si tirino altrettante rette ai vertici degli altri angoli della medesima figura, divideranno esse quest' altri angoli pure in due parti uguali.

PROP. XXVII. PROBL. XIII.

§. 221. *Data qualunque figura regolare, circoscrivere intorno di essa il cerchio.*

Dichiarazione. Sia data la figura regolare ABCDE; bisogna intorno di essa circoscrivere il cerchio.

Soluzione. 1. Si dividano in due parti uguali due angoli qualunque ABC, BCD della data figura colle rette BQ, CQ, le quali prolungate s' uniscono in Q.

2. Col centro Q, e coll' intervallo QB, o QC si descriva il cerchio ACD.

Dico, che il cerchio ACD passa colla sua periferia per tutt' i vertici degli angoli della figura.

Dimostrazione. *Si uniscano le rette QD, QE, QA.* Dividendo QB, e QC in due parti uguali gli angoli in B, ed in C della figura, anche QD, QE, QA divideranno in due parti uguali gli angoli in D, E, ed A della medesima figura (§. *prec.*).

Essendo gli angoli interi della figura (per ipot.) tutti tra di loro eguali, eguali saranno ancora tra esse le loro metà. Sicchè essendo QAB=QBA; sarà QA=QB (§. 85). Similmente si dimostra essere QB=QC, QC=QD, QD=QE. Laonde il cerchio descritto col centro Q, e coll' intervallo QB, oppure QC, passa colla sua periferia per i vertici di tutti li angoli in A, B, C, D, E della figura. Per

la qual cosa intorno la data figura si è circoscritto il cerchio. c. B. f. e d.

§. 222. Coroll. Dunque per iscrivere, e circoscrivere il cerchio intorno a qualunque figura regolare, d' altro non v' è bisogno, se non se della divisione di due angoli della figura in due parti uguali. Onde colla riga, e col compasso si può iscrivere, e circoscrivere il cerchio intorno a qualunque figura regolare.

PROP. XXVIII. PROBL. XIV.

§. 223. *Dato il solo raggio di un cerchio, determinare i lati delle figure regolari di 3, 4, 5, 6, e 10 lati, iscrittibili coll' ajuto della Geometria elementare nello stesso cerchio.*

Fig. 82 Dichiarazione. Sia AB il raggio di un cerchio. Bisogna coll' ajuto della Geom. elementare determinare i lati delle figure regolari di 3, 4, 5, 6, e 10 lati, iscrittibili nel medesimo cerchio.

Soluzione. 1. Dal punto B s' innalzi la perpendicolare BC (§. 65) uguale ad AB (§. 47); e si congiunga AC.

Dico essere AB il lato dell' esagono, ed AC il lato del quadrato iscrittibili nel cerchio del raggio AB.

2. Dal punto C s' innalzi CD perpendicolare ad AC, ed uguale ad AB, e si congiunga AD.

Dico essere AD il lato del triangolo equilatero.

3. Si prolunghi AB in F in modo, che sia

il rettangolo di AF per FB uguale al quadrato di AB, e si congiunga FC.

Dico essere BF il lato del decagono, ed FC il lato del pentagono iscrittibili nel detto cerchio.

Dimostrazione. I. Essendo AB il raggio del cerchio, sarà AB il lato dell'esagono regolare iscrittibile in esso cerchio (§. 198). In oltre, essendo retto l'angolo ABC, il quadrato di AC è uguale alla somma de' quadrati di AB, e BC (§. 130). Ed essendo per costruz. BC=AB, il quadrato di AC è il doppio del quadrato del raggio AB. Dunque AC è il lato del quadrato iscrittibile nel cerchio del raggio AB (§. 203).

II. Il quadrato di AD è uguale alla somma de' quadrati di AC, e CD (§. 130). Ma ora si è veduto, che il quadrato di AC è doppio del quadrato del raggio: e per costruzione CD=AB raggio. Dunque il quadrato di AD è triplo del quadrato del raggio: e perciò AD è lato del triangolo equilatero (§. 200).

III. Essendo il rettangolo di AF in FB uguale al quadrato di AB; sarà BF lato del decagono regolare (§ 206). Ed essendo finalmente il quadrato di FC uguale alla somma de' quadrati di BF (lato del decagono), e di BC (raggio); sarà FC lato del pentagono regolare iscrittibile nel cerchio del raggio AB (§. 207). Sicchè dato il solo raggio d'un cerchio, si sono determinati i lati delle figure regolari ec. c. b. f. c. d.

§. 224. Avvertimento. Per quanto s'è fin qui dimostrato, è facile a calcolare i lati delle dette figure regolari relativamente al raggio di qualunque cerchio. Sia per esempio il raggio OC di 100 palmi. Sarà il quadrato iscritto nello stesso cerchio di 20000 palmi quadrati; onde il suo lato sarà di palmi 141. 4, radice di 20000.

Fig. 79

Sarà in oltre il quadrato del lato del triangolo equilatero di 30000 palmi quadrati; onde il lato sarà di pal. 173. 2, radice di 30000.

Di più essendo OF=50, ed OC=100, sarà il quadrato di FC=12500; onde la sua radice 111. 3 dà FC, ossia FE; e perciò EO ossia il lato del decagono è uguale a 61. 3.

Finalmente essendo OC=100, ed EO=61 3; sarà il quadrato di EC=13757. 69; onde la sua radice 117. 2 dà il lato del pentagono. Sicchè posto il raggio=100, sono

il lato del triangolo	=	173. 2
il lato del quadrato	=	141. 4
il lato del pentagono	=	117. 2
il lato dell'esagono	=	100
il lato del decagono	=	61. 3.

Fine del secondo Libro.

LIBRO III.

DELLA DOTTRINA DELLA RAGIONE, E PROPORZIONE GEOMETRICA.

Definizioni e nozioni preliminari.

Definizione I.

§. 225. Due grandezze si dicono *omogenee*, se sono eguali, o possono divenirle coll' accrescere l' una, o col diminuire l' altra; si dicono poi *eterogenee*, se non hanno uguaglianza, nè possono acquistarla, qualunque accrescimento si dia all' una, o diminuzione all' altra.

Così grandezze omogenee sono tutte le linee tra esse: tutte le superficie tra esse; tutt' i solidi tra essi: tutti i moti tra essi: tutte le velocità tra esse ec. Sono poi grandezze eterogenee una linea, ed un solido: una superficie, ed un moto ec.

§. 226. Definizione II. Se due grandezze omogenee sono disuguali, la minore dicesi *parte* della maggiore, e la maggiore dicesi *moltiplice* della minore. E se la minore misura esattamente la maggiore, la minore si dice *parte aliquota* della maggiore; e la maggiore *moltiplice aliquota* della minore. Se poi la minore non misura con esattezza la maggiore; si chiamano allora la minore *parte aliquanta* della maggiore: e la maggiore *moltiplice aliquanto* della minore.

Così del 15 il 3 è parte aliquota, perchè lo misura esattamente, e 'l 4 è parte aliquanta, perchè non lo misura con esattezza. Del 3 poi il 15 è moltiplice aliquoto, e 'l 16 è moltiplice aliquanto.

§. 227. Definizione III. Se una grandezza minore misura esattamente più grandezze maggiori, la minore si dice *parte aliquota comune* di tutte le maggiori. Se poi una grandezza maggiore viene esattamente misurata da più grandezze minori, la maggiore si dice *moltiplice aliquoto comune* di tutte le minori.

Così il 2 è parte aliquota comune di 4, 6, 8, 10 ec; e 'l 12 è moltiplice aliquoto comune di 2, 3, 4, 6.

§. 228. Definizione IV. Le grandezze, le quali hanno una comune aliquota finita, cioè un' aliquota, che le misura un numero finito di volte, si dicono *grandezze commensurabili* tra esse. Per l' opposto si chiamano *incommensurabili*, se non hanno affatto veruna comune aliquota finita.

§. 229. Avvertimento I. Le grandezze commensurabili si possono sempre con tutta precisione contrassegnare co' numeri. Imperocchè essendo tali grandezze divise in parti uguali dalla loro aliquota comune, è evidente che ciascuna di esse grandezze è un aggregato di parti tutte eguali alla detta aliquota. Onde considerandosi queste parti come altrettante unità simili, ciascuna grandezza sarà ben contrassegnata dal numero di tali unità, che contiene. Sieno per es A, B, C tre grandezze omogenee commensurabili, ed N l' aliquota comune di esse. Supponghiamo, che N misuri, ossia divida A 100 volte; sarà A=100N: che misuri B 53 volte; sarà B= 53 N: finalmente, che misuri C 27 volte, sarà C=27N. Dunque le tre grandezze A, B, C saranno con tutta precisione contrassegnate rispettivamente co' numeri 100N, 53N, 27N.

Reciprocamente le grandezze omogenee, che sono esattamente contrassegnate co' numeri della stessa denominazione, sono tra esse commensurabili. Imperocchè i numeri non dinotano altro, che aggregati di unità simili, cioè di parti uguali. Adunque una di queste parti sarà aliquota comune di tutte quelle grandezze, che sono contrassegnate co' numeri della medesima denominazione.

§. 230. Avvertimento II. Tra gl' infiniti esempj di grandezze incommensurabili uno è quello del raggio di qualunque cerchio, e del lato del triangolo equilatero iscrittibile in esso. In fatti se tali linee fossero commensurabili, una terza lineetta, che fosse la centesima, la millesima, od altra qualunque parte

finita di una (per es. del raggio), dovrebbe misurare esattamente anche l' altra (il lato del detto triangolo). Sieno, se è possibile, questi numeri M, ed N. E poichè il quadrato del lato del triangolo equilatero iscrittibile in un cerchio è triplo del quadrato del raggio (§. 2000); dovrebbe il quadrato di N esser triplo del quadrato di M. Ma tra gl' infiniti numeri possibili non ve ne sono affatto due di tal condizione, che il quadrato di uno sia triplo del quadrato dell' altro. Sicchè non vi sono numeri, co' quali si possono contrassegnare con esattezza le lunghezze del raggio del cerchio, e del lato del triangolo equilatero iscrittibile in esso: e perciò tali linee sono incommensurabili (§. *prec.*).

§. 231. Avvertimento III. Sebbene le grandezze incommensurabili non si possono giammai esattamente contrassegnare co' numeri, nulladimeno però si possono per *approssimazione*. Sieno A, e B due grandezze omogenee incommensurabili; e sia N un' aliquota finita di B, ma picciolissima in paragone di A. Se N misura B 1000 volte, sarà B=1000N. La stessa N misuri A 21301 volte con un residuo. Dovendo questo residuo essere minore di N, sarà esso disprezzabile senza grande errore, e si potrà supporre A=21301N. Onde A e B senza errore notabile si potranno contrassegnare rispettivamente co' numeri 21301N, e 1000N. E questo si deve intendere quando si dice, che le grandezze incommensurabili per sola approssimazione si possono contrassegnare co' numeri. Così nel §. 224 il raggio, e 'l lato del triangolo equilatero iscrittibile nel cerchio furono per approssimazione contrassegnati rispettivamente co' numeri 100, e 173. 2.

§. 232. Coroll. Quindi è felice ad intendersi, che quanto più piccola è l' aliquota N, che si prende per contrassegnare numericamente le grandezze incommensurabbili, tanto maggiore è l' approssimazione. E che se N fosse infinitamente piccola, essa senza verun errore sensibile si potrebbe prendere per aliquota comune di A, e B. Ma in questo caso misurando N infinito numero di volte ambe le grandezze A, e B, queste sarebbero assolutamente inesprimibili co' numeri; giacchè un numero infinito non può nè esprimersi, nè positivamente concepirsi.

§. 233. Avvertimento IV. Si noti pure, che di qualunque numero di grandezze omogenee vi dee sempre essere, od almeno possiamo sempre idearci un' aliquota comune. Contrassegnino A, B, C, D ec. più grandezze omogenee. Avendo sempre due grandezze omogenee, (nel caso che sieno commensurabili), o potendosi sempre di due grandezze omogenee almeno ideare un' aliquota comune (nel caso che sieno incommensurabili §. prec.); se contrassegnaremo con L l' aliquota comune di A, e B, con M l' aliquota comune di L e C, con N l' aliquota comune di M, e D ec.

saranno M aliquota comune di A, B, C; ed N aliquota comune di A, B, C, D; ec.

§. 234. Definizione V. Se due, o più grandezze minori misurano esattamente, ed ugual numero di volte altrettante grandezze maggiori; si dicono le minori *parti aliquote simili* delle maggiori, e le maggiori *moltiplici simili*, *od ugualmente moltiplici* delle minori.

Così, 2, 3, 4 *sono aliquote simili rispettivamente di* 8, 12, 16: *e* 8, 12, 16 *sono moltiplici simili rispettivamente di* 2, 3, 4.

§. 235. Coroll. Quindi due, o più grandezze, omogenee od eterogenee che sieno, possono avere infinite diverse aliquote simili; perchè possono avere infinite parti, come le metà di esse rispettivamente, le terze parti le quarte parti ec. all' infinito, che le misurino esattamente, ed ugual numero di volte.

§. 236. Definizione VI. Il rapporto di quantità, che passa tra due grandezze omogenee paragonate tra esse, si dice *ragione*. Le grandezze, che si paragonano, si chiamano *termini della ragione*; e con ispezialità quella che si paragona dicesi *antecedente*, e l' altra, a cui si fa il paragone, appellasi *conseguente*.

§. 237. Avvertimento. Si possono due grandezze omogenee paragonare tra esse circa la di loro quantità, osservando quante volte l' una contiene l' altra, od osservando di quanto l' una eccede l' altra. Quindi è derivata la distinzione della ragione in *ragione geometrica, ed in ragione aritmetica*.

§. 238. Definizione VII. La ragione si dice *geometrica*, se le grandezze si paragonano osservando quante volte l' antecedente contiene il conseguente: si dice poi *aritmetica*, se il paragone si fa osservando di quanto l' antecedente eccede il conseguente. Così nelle due grandezze 6 e 2, se considero che l' antecedente 6 contiene 3 volte il conseguente 2, si dirà che ne considero la ragione geometrica. Se poi considero che il 6 supera il 2 per quattro, si dirà che ne considero la ragione aritmetica.

§. 239. Avvertimento. Si noti, che se A, e B contrassegnano due grandezze omogenee, la ragione di A a B si noterà scrivendo; *ragione di A: B*; e si profferirà sempre dicendo: *ragione di A a B*. Si noti altresì, che tratteremo quì della sola ragione geometrica, avendo essa sola luogo nella Geometria elementare: onde col vocabolo *ragione* intenderemo appresso sempre la ragione geometrica.

§. 240. Definizione VIII. Si chiama *quantità*, *esponente*, o *denominatore* della ragione il numero, che dinota il rapporto di quantità, che passa fra due grandezze omogenee paragonate tra esse, ossia il numero, che dinota quante volte l' antecedente contiene il conseguente: il che si scorgerà dividendo l' antecedente per lo conseguente. Così di 6 : 2 la quantità della ragione è 3 : e quella di 2 : 6 è $\frac{1}{3}$.

§. 241. Coroll. Dunque allora si conoscerà,

e si determinerà la vera ragione di due grandezze, quando si conoscerà con esattezza il numero delle volte, che l' antecedente contiene il conseguente.

§. 242. Avvertimento I. Quando si tratta di conoscere quante volte una grandezza contiene un' altra, cioè quando si tratta di conoscere, e determinare la vera ragione di due grandezze; due casi possono occorrere: I.° che ambedue le grandezze sieno commensurabili, cioè che abbiano un' aliquota comune finita: II.° che sieno incommensurabili, cioè che non abbiano verun' aliquota comune finita.

Caso I. Le grandezze omogenee commensurabili, mercè la loro aliquota comune, si contrassegnino co' numeri (§. 229). È evidente, che la ragione delle proposte grandezze sia la stessa, che quella de' numeri, ch' esattamente le contrassegnano.

I numeri contrassegnanti due qualsivogliano grandezze omogenee A, e B relativamente ad una loro aliquota comune siano 11, *e* 7 (*generalmente P e Q*)*; sarà la ragione della grandezza maggiore alla minore quella di* 11 : 7, (*ossia di P: Q*)*; e la sua quantità sarà* $\frac{11}{7}$, $\left(\frac{P}{Q}\right)$; *La ragione poi della grandezza minore alla maggiore sarà quella di* 7 : 11, (*ossia di Q: P*)*; e la sua quantità sarà* $\frac{7}{11}$, $\left(\text{ossia } \frac{Q}{P}\right)$.

Che se delle grandezze di cui si tratta, una sia aliquota dell' altra, per maggiore speditezza la minore si assuma per unità, ed indi si determini il numero contrassegnante la maggiore relativamente alla minore.

Caso II. Allorchè le grandezze omogenee sono incommensurabili, non si potrà mai nè conoscere, nè determinare con precisione la loro vera ragione. Imperocchè non avendo esse verun' aliquota comune finita, non si potranno giammai esattamente rappresentare con numeri; e quindi non si potrà giammai conoscere con esattezza quante volte l' una in se contiene l' altra.

Ben vero però di due grandezze incommensurabili si può conoscere, e determinare una ragione, che sia prossima alla vera. L' arte di fare ciò consiste nel contrassegnare per approssimazione le dette grandezze secondo il metodo insegnato nel §. 231. Ridotte che si sono le grandezze incommensurabili a numeri che prossimamente le contrassegnano, la ragione di tali numeri sarà la ragione prossima alla vera di quelle tali grandezze. Così la ragione prossima alla vera del raggio del cerchio al lato del triangolo iscrittibile in esso è di 100 : 173. 2 (§. 224).

§. 243. Definizione IX. La ragione di due grandezze si dice *razionale*, se essa si può con esattezza determinare; si dice poi *irrazionale*, se si può determinare solamente a un di presso.

§. 244. Coroll. Quindi è, che la ragione delle grandezze commensurabili è razionale, e quella delle incommensurabili è irrazionale.

§. 245. Definizione X. Si dicono *ragioni u-*

guali quelle, che hanno quantità uguali. Si dicono poi ragioni *disuguali* quelle, che hanno quantità disuguali; e specialmente si dice *ragione maggiore* quella, la di cui quantità è maggiore.

§. 246. Coroll. Sicchè quando due ragioni sono uguali, gli antecedenti sono ambidue maggiori, uguali, o minori de' loro conseguenti rispettivamente.

§. 247. Definizione XI. Una ragione si dice *semplice*, se è il paragone di due sole grandezze: si dice poi *composta*, se la sua quantità è il prodotto delle quantità di più ragioni semplici.

Sieno le ragioni semplici di

2 : 1.	(loro quantità.)	2
6 : 2.		3
12 : 3.		4
	prodotto	24

Ogni ragione che tiene per quantità il 24 *come la ragione di* 24 : 1, *quella di* 48 : 2, *di* 72 : 3 *ec. dicesi composta dalle ragioni di* 2 : 1, *di* 6 : 2, *di* 12 : 3.

§. 248. Definizione XII. Se una ragione è composta da due, tre, quattro ec. ragioni eguali, si dice *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata* ec. di ciascuna delle ragioni componenti.

§. 249. Definizione XIII. Una ragione si dice esser *diretta* di un' altra, se il rapporto dell' antecedente di una al suo conseguente pareggia il rapporto dell' antecedente dell' altra al suo conseguente. *Reciproca* poi si chiama, se il rapporto dell' antecedente di una al suo conseguente uguaglia il rapporto del conseguente dell' altra al suo antecedente. Oltre di tali condizioni una ragione non si può chiamare nè diretta, nè reciproca di un' altra.

Sieno due ragioni, $A : B$, *e* $C : D$.

Se la ragione di $A : B$ *pareggia quella di* $C : D$, *le due ragioni di* $A : B$, *e di* $C : D$ *diconsi l' una* diretta *dell' altra. Così per es. sono dirette le ragioni di* 6 : 3, *e di* 8 : 4; *quelle di* 2 : 6, *e di* 3 : 9.

Che se la ragione di $A : B$ *pareggia quella di* $D : C$; *le due ragioni di* $A : B$, *e di* $C : D$ *diconsi una* reciproca *dell' altra. Così reciproche sono le ragioni di* 6 : 3, *e di* 4 : 8; *similmente quelle di* 1 : 4, *e di* 12 : 3.

§. 250. Coroll. Dunque se proposta una ragione, se ne invertono i suoi termini, mettendo l' antecedente per conseguente, e 'l conseguente per antecedente; la nuova ragione che si forma, e la ragione proposta sono l'una reciproca dell' altra.

Sia la ragione di $A : B$. *Se ne invertano i termini, facendosi la ragione di* $B : A$. *Saranno le due ragioni di* $A : B$, *e di* $B : A$, *l'una* reciproca *dell' altra. Così la ragione di* 1 : 4 *è reciproca di quella di* 4 : 1; *quella di* 6 : 3 *è reciproca di quella di* 3 : 6.

§. 251. Definizione XIV. L' uguaglianza di

due ragioni geometriche dicesi *proporzione geometrica.*

L' eguaglianza che passa tra le ragioni di 6 : 2, *e di* 12 : 4, *si dice proporzione geometrica. Questa eguaglianza detta proporzione si scorge da che la quantità della prima ragione è la stessa, che la quantità della seconda.*

§. 253. Avvertimento. Si noti, che tra le due ragioni uguali di ogni proporzione geometrica s' intramette il segno dell' uguaglianza (=). Onde si scrive la proporzione geometrica a questo modo, A : B = C : D; 5 : 1 = 10 ; 2, e si profferisce dicendo, A sta a B siccome C sta a D; 5 sta ad 1, come 10 sta a 2.

§. 254. Coroll. I. Essendo la proporzione formata da due ragioni uguali, saranno il primo, e 'l terzo termine ambidue o maggiori, o uguali, o minori rispettivamente degli altri due (§. 246).

§. 255. Coroll. II. Potendo essere due ragioni geometriche uguali tra esse, ancorchè le grandezze dell' una sieno eterogenee colle grandezze dell' altra; ne siegue, che nella proporzione geometrica le grandezze di una ragione possono essere omogenee colle grandezze dell' altra, e possono anche essere eterogenee.

Siccome una linea può esser doppia, tripla ec. di un' altra linea; così un solido può esser doppio, triplo ec. di un altro solido: e generalmente due linee paragonate tra di loro possono avere la stessa ragione che due solidi paragonati tra essi. Onde è chiaro, che si può *avere proporzione geometrica anche quando le due prime grandezze sieno eterogenee colle altre due.*

§. 256. Definizione XV. La proporzione geometrica si dice *discreta*, se è formata da quattro grandezze tra esse disuguali; si dice poi *continua*, se vien formata da tre grandezze omogenee, e quella di mezzo è conseguente nella prima ragione, ed antecedente nella seconda. Così A : B = C ; D si dice proporzione discreta ; così pure 2 : 6 = 4 ; 12. Si dicono poi continue le seguenti A : B = B : C ; 2:6 = 6 : 18.

§. 257. Definizione XVI. Le grandezze, che formano la proporzione, si dicono *grandezze proporzionali*; e quella di mezzo nella proporzione continua, si dice *la mezza proporzionale*. In oltre, i due antecedenti si dicono tra essi *grandezze omologhe*; e così pure si chiaman tra essi i due conseguenti.

ASSIOMI.

§. 258. Assioma I. Se due grandezze uguali si paragonano con una terza omogenea, le due grandezze hanno ragioni uguali alla terza; e la terza ha ragioni uguali alle due grandezze.

§. 259. Assioma II. Se due grandezze disuguali si paragonano con una terza omogenea, la ragione della grandezza maggiore alla terza è maggiore della ragione della minore alla stessa terza : ed all' opposto, la ragione della

terza alla maggiore è minore della ragione della stessa terza alla minore.

§. 260. Avvertimento. Per la facile intelligenza di questo assioma, si noti, che la ragione consiste nel rapporto di quantità di una grandezza ad un' altra (§ 236.). Ora il rapporto di quantità, che ha una grandezza ad un' altra, 1. è maggiore o minore secondochè, restando costante il conseguente, quella grandezza antecedente si fa maggiore o minore. Così del rapporto di 8 ; 4 è maggiore quello di 12 : 4 ; ed è minore quello di 6 : 4, ed assai minore quello di 2 : 4.

2. Similmente il rapporto, che ha una grandezza ad un'altra diviene maggiore, o minore, secondochè restando essa costante, il suo conseguente si fa minore, o maggiore. Così del rapporto di 12 ; 4 è minore quello di 12: 6 ; ed è maggiore quello di 12 : 2.

§. 261. Assioma III. Le grandezze, che hanno uguali ragioni ad una terza, sono uguali tra esse ; e le grandezze, alle quali una terza ha uguali ragioni, sono anche tra esse uguali.

§. 262. Assioma IV. Le grandezze che hanno disuguali ragioni ad una terza, sono disuguali tra esse, e la maggiore è quella, che ha ragione maggiore alla terza. Per l' opposto se una stessa grandezza paragonata ad altre due ha con esse disuguali ragioni ; di queste due grandezze la maggiore è quella, a cui quella prima ha ragione minore.

§. 263. Avvertimento. Per maggiore intelligenza di questo assioma si noti, che il rapporto di quantità (cioè la ragione), che passa fra due grandezze, non può variare, se non a condizione, che si varii una delle grandezze. Cioè 1. se restando costante il conseguente, si fa maggiore o minore il mentovato rapporto; l'antecedente devesi fare maggiore, o minore. 2. E per l'opposto, se restando costante l'antecedente, il rapporto anzidetto si fa maggiore o minore; il conseguente dev' essere minore o maggiore.

§. 264. Avvertimento II. Si noti, che risguardando la dottrina delle ragioni, e proporzioni tutte le specie di grandezze; le linee, e talora le sole lettere di cui faremo uso nell' esporre tale dottrina, faranno le veci di caratteri generali. Onde con esse intenderemo contrassegnare non le sole lunghezze, ma grandezze di ogni sorta.

CAP. I.

Del carattere generale da conoscere l'uguaglianza, e la disuguaglianza delle ragioni.

PROP. I. TEOR. I.

§. 265. *Due ragioni sono uguali, se le aliquote simili de' conseguenti son anche aliquote simili degli antecedenti.*

Dichiarazione. Sieno le ragioni di A : B, e di C : D; e sieno L, ed M aliquote simili rispettivamente de' conseguenti B, e D. Dico, Fig. 83

che se le medesime L, ed M son anche aliquote simili degli antecedenti A, e C; sarà la ragione di A : B uguale alla ragione di C : D.

Dimostrazione. Essendo L aliquota comune di A, e B, il numero delle volte che L misura A, si contrassegni in generale con P, e si dinoti con Q il numero delle volte, che la stessa L misura B. Sarà la ragione di A : B la stessa, che quella di P : Q (§. 242), e la sua quantità sarà $\frac{Q}{P}$.

Similmente essendo M aliquota comune di C, e D; ed in oltre, essendo per rispetto di esse C, e D aliquota simile all' aliquota L per rispetto di A, e B; il numero delle volte, che M misura C devesi pure dinotare con P, e con Q il numero delle volte, che la stessa M misura D. Onde la ragione di C : D sarà pure quella stessa di P : Q; e la sua quantità sarà eziandio $\frac{P}{Q}$ (§. 242).

Essendo dunque $\frac{P}{Q}$ la quantità sì della ragione di A : B, che della ragione di C : D; sarà la ragione di A : B = C : D (§. 245). Per la qual cosa, *se le aliquote simili de' conseguenti ec.* c. b. d.

Misuri L cinque volte B, ed otto volte A: sarà la ragione di A : B la stessa, che quella di 8 : 5. E comecchè L, ed M sono per ipot. aliquote simili sì di B, e D rispettivamente, che di A, e C: deve M misurare D pure cinque volte, ed otto volte C; onde la ragione di

C : D è la stessa , che quella di 8 : 5. Sicchè A : B = 8 : 5; e C : D = 8 : 5. Or chi non vede dover essere pure A : B = C : D?

§. 266. Avvertimento. Il teorema or ora dimostrato comprende anche il caso delle grandezze incommensurabili. Ma in questo caso, le aliquote L, ed M, dovendosi supporre infinitamente picciole, non sarà il teorema esemplificabile co' numeri, come l'è nel caso delle grandezze commensurabili (§. 232): ma non perciò esso sarà men vero.

PROP. II. TEOR. II.

§. 267. *Due ragioni sono tra esse disuguali, se le aliquote simili de' conseguenti non sono aliquote simili degli antecedenti; e sarà maggiore quella ragione, il di cui antecedente è misurato maggior numero di volte dalla sua aliquota.*

Dichiarazione. Sieno le ragioni di A : B, e di C : D; e sieno L ed M aliquote simili rispettivamente de' conseguenti B, e D. Dico, che se L misura A più volte di quel che M misura C; la ragione di A : B è maggiore della ragione di C : D.

Dimostrazione. Essendo L aliquota comune di A, e B, il numero delle volte, che essa L misura A si contrassegni in generale con P, e si dinoti con Q il numero delle volte, che la stessa L misura B. Sarà la ragione di A : B la stessa che quella di P : Q; e la sua quantità sarà $\frac{P}{Q}$ (§. 242).

Similmente essendo (per ipot.) M per rispetto di D aliquota simile all' aliquota L per rispetto di B; il numero delle volte, che M misura D dovrassi pure contrassegnare con Q. Però misurando M minor numero di volte C di quello, che L misura A, non si potrà dinotare con P quel numero di volte, ma bisognerà dinotarlo con un numero minore p. e. con P—X. Onde la ragione di C : D sarà quella stessa di P—X : Q; e la sua quantità sarà $\frac{P-X}{Q}$.

Essendo dunque $\frac{P}{Q}$ la quantità della ragione di A : B, ed essendo $\frac{P-X}{Q}$ la quantità della ragione di C : D; siccome evidentemente $\frac{P}{Q}$ è maggiore di $\frac{P-X}{Q}$, così la ragione di A : B è maggiore della ragione di C : D. Per la qual cosa *se le aliquote simili de' conseguenti non sono aliquote ec.* c. b. d.

Misuri L cinque volte B, e dieci volte A; sarà la ragione di A : B = 10 : 5. E perchè L ed M sono aliquote simili de' conseguenti B e D, deve M misurare D pure cinque volte. Però misurando L maggior numero di volte A, che M misura C, bisognerà che M misuri C meno di dieci volte, p. es. otto volte. Onde la ragione di C; D = 8 : 5. Sicchè A : B = 10 : 5; C : D = 8 : 5. Dal che ben si vede esser la ragione di A : B maggiore della ragione di C : D. (§. 259).

§. 268. Avvertimento. Il teorema ora dimostrato comprende anche il caso delle grandezze incommensurabili, sebbene non si possa esemplificarlo co' numeri (§. 232).

PROP. III. TEOR. III.

§. 269. *Se due ragioni sono uguali, tra le infinite diverse aliquote simili, che possono avere i conseguenti, ve ne debbono essere di quelle, che si possono prendere per aliquote degli antecedenti; e tali aliquote si debbono prendere ancora per aliquote simili de' medesimi antecedenti.*

Dichiarazione. Sia la ragione di A:B=C:D. Dico 1°, che tra le infinite diverse aliquote simili di B, e D, ve ne debbono essere di quelle, che si possono prendere per aliquote di A, e C; 2.° che tali aliquote debbono prendersi anche per aliquote simili di A, e C.

Dimostrazione. I. Potendo B, e D avere infinite aliquote simili (§ 235), possono anche avere delle aliquote simili infinitamente piccole. Ma nel caso di due grandezze incommensurabili, l' aliquota infinitamente piccola di una si può prendere anche per aliquota dell' altra grandezza (§. 232). Dunque B, e D possono avere aliquote simili, che si possono prendere per aliquote di A, e C.

II. Si concepisca, che L, ed M sieno le aliquote simili de' conseguenti B, e D, che si possono prendere per aliquote degli antecedenti A, e C. Se L ed M non sono aliquote simili di A e C, la ragione di A : B non è ugua-

le a quella di C : D (§. 267). Ma ciò ripugna all' ipotesi. Dunque L, ed M debbono essere aliquote simili anche degli antecedenti A, e C. Per la qual cosa, *se due ragioni sono uguali, tra le infinite aliquote simili, che possono avere* ec. c. b. d.

PROP. IV. TEOR. IV.

§. 270. *Se due ragioni sono disuguali, tra le infinite diverse aliquote simili, che possono avere i conseguenti, ve ne debbono essere di quelle, che si possono prendere per aliquote degli antecedenti: e sì fatte aliquote debbon essere tali, che l' una dee misurare più volte l' antecedente dalla ragione maggiore, di quel che l' altra misura l' antecedente della ragione minore.*

Dichiarazione. Sia la ragione di A : B maggiore della ragione di C : D. Dico 1.° che tra le infinite diverse aliquote simili di B, e D, ve ne debbono essere di quelle che si posson prendere per aliquote di A, e C: 2.° che tali aliquote non possono esser aliquote simili di A e di C; ma l' una deve misurare più volte A di quel che l' altra misura C.

Dimostrazione. I. La prima parte di questo teor. si dimostra niente altrimenti, che quella del teor. prec.

II. Si concepisca che L, ed M sieno le aliquote simili de' conseguenti B, e D, le quali si possono prendere per aliquote degli antecedenti A, e C. Se L misurasse A lo stesso, o minor numero di volte, che M misura C; la ragione di A : B sarebbe eguale, o minore della ragione di C : D. (§§. 265, 267). Ma ambedue tali cose ripugnano all' ipotesi. Dunque L dee misurare A più volte di quel, che M misura C. Sicchè *se due ragioni sono disuguali, tra le infinite diverse aliquote simili che possono* ec. c. b. d.

C A P. II.

Della dottrina della ragione composta:

PROP. V. TEOR. V.

§. 271. *Se più ragioni sono rispettivamente maggiori, eguali, o minori di altrettante ragioni, la ragione composta dalle prime è maggiore, eguale, o minore della ragione composta dalle seconde.* Fig. 84

Dichiarazione. Sieno le ragioni di A : B, di C : D, di E : F ec. rispettivamente maggiori, uguali, o minori delle ragioni di L : M, di N : O, di P : Q ec. Dico essere la ragione composta dalle prime, maggiore, uguale, o minore della ragione composta dalle seconde.

Dimostrazione. Essendo le ragioni di A : B, di C : D, di E : F rispettivamente maggiori, uguali, o minori delle ragioni di L : M, di N : O, di P : Q, i numeri, ch' esprimeranno le quantità delle prime ragioni, saranno maggiori, uguali, o minori rispettivamente de'

numeri, ch' esprimeranno le quantità delle seconde. Onde il prodotto delle quantità delle prime ragioni sarà maggiore, uguale, o minore del prodotto delle quantità delle seconde ragioni. E perciò la composta dalle ragioni di A : B, di C : D, di E : F sarà maggiore, uguale, o minore della composta dalle ragioni di L : M, di N : O, di P : Q (§. 245). Laonde *se più ragioni sono rispettivamente maggiori, eguali, o minori* ec. c. b. d.

PROP. VI. TEOR. VI.

§. 272. *Di tre grandezze omogenee la ragione della prima alla terza è composta dalle ragioni della prima alla seconda, e della seconda alla terza.*

Dichiarazione Sieno A, B, C tre grandezze omogenee qualunque. Dico, che la ragione di A : C sia composta dalle ragioni di A : B, e di B : C.

Dimostrazione. Sia X un' aliquota comune di A, B, C; ed i numeri delle volte, che X misura A, B, C sieno rispettivamente rappresentati da L, M, N. Sarà la ragione di A : B quella stessa di L : M, e la sua quantità sarà $\frac{L}{M}$ (§. 242). Similmente la ragione di B : C sarà quella stessa di M : N; e la sua quantità $\frac{M}{N}$. Onde il prodotto di $\frac{L}{M}\times\frac{M}{N}$ esprimerà la quantità di quella ragione, che si com·

pone dalle ragioni di A : B, e di B : C. Ma il prodotto di $\frac{L}{M} \times \frac{M}{N}$ è uguale ad $\frac{L}{N}$. Sicchè ogni ragione, che tiene per quantità $\frac{L}{N}$ sarà composta dalle ragioni di A : B, e di B : C. Ma essendo A contrassegnata dal numero L, e C dal numero N, la ragione di A : C pareggia quella di L : N, e quindi la sua quantità è $\frac{L}{N}$. Dunque la ragione di A : C è composta dalle ragioni di A : B, e di B : C. Sicchè *di tre grandezze omogenee la ragione della prima alla terza* ec. c. b. d.

Esempio. Sieno tre numeri 18, 6, 3; *la quantità della ragione di* 18 : 6 *è* $\frac{18}{6} = 3$; *la quantità della ragione* 6 : 3 *è* $\frac{6}{3} = 2$;

il prodotto di tali quantità è 6.

Ma la quantità della ragione di 18 : 3 (*prima a terza*) è $\frac{18}{3} = 6$. *Dunque la ragione di* 18 : 3 *è composta dalle ragioni di* 18 : 6, *e di* 6 : 3.

§. 273. Coroll. I. Sieno A, B, C, D, E ec. grandezze tutte omogenee. Essendo la ragione di A : E composta dalle ragioni di A : D, e di D : E; quella di A : D composta dalle ragioni A : C, e di C : D; quella di A : C composta dalle ragioni A : B, e di B : C; sarà la ragione di A : E composta dalle ragioni di A : B,

di B : C, di C : D, e di D : E. Sicchè se tra due grandezze omogenee se ne intramettono quante altre se ne vogliano; la ragione della prima all' ultima è sempre composta da tutte le ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza, della terza alla quarta, e così procedendo sino all' ultima.

§. 274. Coroll. II. Quindi se A, B, C, D, E ec. sia una serie di grandezze continuamente proporzionali; essendo la ragione della prima A alla terza C composta dalle due di A : B, e di B : C, ed essendo queste due tra di loro eguali (per ipot.); sarà la ragione di A : C duplicata di una di esse (§. 248). Similmente essendo la ragione della prima A alla quarta D composta dalle tre ragioni di A : B, di B : C, di C : D, ed essendo queste tra di loro uguali; sarà la ragione della prima A alla quarta D, triplicata di ciascuna di esse. Così pure essendo la ragione della prima A alla quinta E composta dalle quattro ragioni uguali di A : B, di B : C, di C : D, di D : E; sarà la ragione della prima alla quinta, quadruplicata di ciascuna di esse, e così procedendo all' infinito.

PROP. VII. TEOR. VII.

§. 275. *Se una ragione è maggiore, uguale o minore di un' altra ragione, la duplicata, la triplicata, la quadruplicata ec. della prima è maggiore, uguale, o minore della duplica-*

ta, della triplicata, della quadruplicata ec. della seconda.

I. Dichiarazione. Sia la ragione di A : B maggiore della ragione di L : M. Dico essere la ragione duplicata, triplicata ec. di A : B maggiore della duplicata, triplicata ec. di L: M.

Dimostrazione. La ragione duplicata, triplicata ec. di A: B è una ragione composta da due, da tre ec. ragioni, ciascuna eguale a quella di A: B. Similmente la ragione duplicata, triplicata ec. di L : M è una ragione composta da due, da tre ec. ragioni, ciascuna eguale a quella di L : M. Essendo dunque per ipotesi la ragione di A : B maggiore della ragione di L : M, saranno le componenti della duplicata, della triplicata ec. di A : B maggiori delle componenti della duplicata, triplicata ec. di L : M. E perciò la ragione duplicata, triplicata ec. di A : B sarà maggiore della ragione duplicata, triplicata di L : M (§. 271.).

II. e III. Dichiarazione. Sia la ragione di A: B uguale, o minore della ragione di L : M. Dico essere pure la duplicata, la triplicata ec. di A: B uguale, o minore della duplicata, della triplicata ec. di L: M.

La dimostrazione è simile a quella della prima parte. Sicchè *se una ragione è maggiore, uguale, o minore* ec. c. b. d.

PROP. VIII. TEOR. VIII.

§. 276. *Se la duplicata, triplicata, quadruplicata ec. di una ragione sia uguale alla duplicata, triplicata, quadruplicata ec. di un' altra ragione: anche le ragioni semplici sono uguali tra esse.*

Dichiarazione. Sia la duplicata, triplicata ec. della ragione di A : B uguale alla duplicata, triplicata ec. della ragione di L : M. Dico, che anche la ragione di A : B sia uguale alla ragione di L : M.

Dimostrazione. La ragione di A : B non può essere nè maggiore, nè minore della ragione di L : M. Dunque l'è uguale. In fatti se la ragione di A : B fosse maggiore, o minore di quella di L : M, anche la duplicata, la triplicata ec. di A : B sarebbe maggiore, o minore della duplicata, triplicata ec. di L : M (§. *prec.*). Ma ciò ripugna all' ipotesi. Dunque la ragione di A : B non può essere nè maggiore, nè minore della ragione di L : M; e conseguentemente le dev' essere uguale. Sicchè *se la duplicata, triplicata ec. di una ragione* ec. c. b. d.

§. 277. Coroll. Similmente ragionando si conosce, che se la duplicata, la triplicata ec. di una ragione sia maggiore, o minore della duplicata, triplicata ec. di un' altra ragione; sarà anche la prima ragione semplice maggiore, o minore della seconda.

C A P. III.

Delle principali trasformazioni, che si possono fare nelle due ragioni di qualsisia proporzione geometrica, senza togliere la proporzione.

§. 278. Definizione. Si dice che una ragione s' *inverte*, quando si paragona il suo conseguente coll' antecedente: che si *compone*, quando si paragona la somma dell' antecedente, e conseguente collo stesso conseguente: che si *divide*, quando si paragona l' eccesso dell' antecedente sul conseguente collo stesso conseguente: e finalmente, che si *converte*, quando si paragona l' antecedente coll' eccesso dell' antecedente sul conseguente.

Sia la ragione di A : B . . . . . 8 : 2.
invertendo,
s' avrà la ragione di B : A . . . 2 : 8,
componendo,
s' avrà la ragione di A+B : B . . 10 : 2
dividendo,
s' avrà la ragione A—B : B . . . 6 ; 2
convertendo,
s' avrà la ragione A : A—B . . . 8 : 6

PROP. IX. TEOR. IX.

§. 279. *Se quattro grandezze sono proporzionali, invertendo le due ragioni, le grandezze sono anche proporzionali.*

Fig. 83 Dichiarazione. Sia A : B=C : D. Dico, che invertendo sarà pure B : A=D : C.

Dimostrazione. Essendo A : B=C : D; s' intenda, che L ed M sieno le aliquote simili de' conseguenti B, e D, che si possono prendere per aliquote simili ancora degli antecedenti A, e C (§. 269). Ora prese A, e C per conseguenti, e per antecedenti B, e D, sono pure L ed M aliquote simili sì degli conseguenti A, e C, che degli antecedenti B, e D. Perciò B : A=D : C (§. 265). Sicchè se *quattro grandezze sono proporzionali, invertendo* ec. c. b. d.

PROP. X. TEOR. X.

§. 280. *Se quattro grandezze sono proporzionali, componendo le due ragioni, si hanno anche quattro grandezze proporzionali.*

Fig. 85 Dichiarazione. Sia AB : BC=DE : EF. Dico, che componendo sarà pure AC : CB=DF : FE.

Dimostrazione. Essendo AB : BC=DE : EF, s' intenda, che L ed M sieno le aliquote simili de' conseguenti BC, ed EF, le quali si possono prendere per aliquote simili anche degli antecedenti AB, DE (§. 269). Misurando L lo stesso numero di volte AB, che M misura DE; e misurando pure L lo stesso numero di volte BC, che M misura EF; misurerà L tutta AC lo stesso numero di volte, che M misura tutta DF. Onde L ed M, che si sono prese per aliquote simili di BC, e di EF, sono pure aliquote simili di AC, e di DF. E perciò AC : CB=DF : FE (§. 265). Per il che, *se quattro grandezze sono proporzionali, componendo* ec. c. b. d.

PROP. XI. TEOR. XI.

§. 281. *Se quattro grandezze sono proporzionali, dividendo le due ragioni, si hanno grandezze anche proporzionali.*

Dichiarazione. Sia AC : CB=DF : FE. Dico che, dividendo, sarà pure AB : BC=DE : EF.

Dimostrazione. Essendo AC : CB=DF : FE; s' intenda, che L ed M siano le aliquote simili de' conseguenti BC, EF, che si possono prendere per aliquote simili degli antecedenti AC, DF (§. 269). Misurando L lo stesso numero di volte BC, che M misura EF; e misurando pure L lo stesso numero di volte tutta AC, che M misura tutta DF; misurerà ancora L tante volte AB, quante volte M misura DE. Onde L ed M, che si sono prese per aliquote simili di BC, ed EF, sono anche aliquote simili di AB, e DE. E perciò AB : BC=DE : EF (§. 265). Laonde

se quattro grandezze sono proporzionali, dividendo le due ec. c. b. d.

PROP. XII. TEOR. XII.

§. 282. *Se quattro grandezze sono proporzionali, i due antecedenti paragonati rispettivamente alle somme di essi, e de' loro proprj conseguenti, costituiscono quattro grandezze anche proporzionali.*

Dichiarazione. Sia AB : BC=DE : EF. Dico essere anche AB : AC=DE : DF.

Dimostrazione. Essendo AB : BC=DE : EF; sarà invertendo, CB : BA=FE : ED (§. 279); e componendo, sarà CA : AB=FD : DE (§. 280). Onde di nuovo invertendo, sarà AB : AC=DE : DF. Per la qual cosa *se quattro grandezze sono proporzionali* ec. c. b. d.

PROP. XIII. TEOR. XIII.

§. 283. *Se quattro grandezze sono proporzionali, convertendo, si hanno anche quattro grandezze proporzionali.*

Dichiarazione. Sia AC : CB=DF : FE. Dico che, convertendo, sarà pure AC : AB=DF : DE.

Dimostrazione. Essendo AC : CB=DF : FE, dividendo, sarà AB : BC=DE : EF. E per lo teor. prec. sarà AB : AC=DE : DF. Onde invertendo, sarà AC : AB=DF : DE. Sicchè *se quattro grandezze sono proporzionali, convertendo* ec. c. b. d.

C A P. IV.

Delle proprietà della proporzione, che ha tutt' i termini omogenei.

§. 284. Definizione. Si dice che i termini d'una proporzione si *permutano*, quando si paragona l' antecedente coll' antecedente, e 'l conseguente col conseguente. Sia A : B = C : D; si permuta facendo A : C, e B : D.

PROP. XIV. TEOR. XIV.

§. 285. *Se quattro grandezze omogenee sono proporzionali, anche permutando restano proporzionali.*

Dichiarazione. Sieno proporzionali le quattro grandezze omogenee A, B, C, D; cosicchè sia A : B = C : D. Dico, che permutando è pure A : C = B : D. Fig. 83

Dimostrazione. La ragione di A : C è composta dalle ragioni di A : B, e di B : C; e la ragione di B : D è composta dalle ragioni di B : C, e di C : D (§. 272). Ma le componenti dell' una sono eguali alle componenti dell' altra; giacchè la ragione di A : B è per ipot. uguale alla ragione di C : D; e quella di B : C è comune. Sicchè le composte, cioè le ragioni di A : C, e di B : D sono anche uguali.

(§. 271). Per la qual cosa A : C = B : D. E perciò *se quattro grandezze omogenee sono proporzionali, anche permutando* ec. c. b. d.

§. 286. Coroll. I. Sieno A, e C due grandezze omogenee, ed L ed M sieno aliquote simili di esse; saranno A : C, L, M tutte grandezze omogenee, e sarà A : L = C : M. Onde permutando sarà A : C = L : M. Sicchè le grandezze omogenee hanno tra di loro la stessa ragione, che le parti aliquote simili di esse: cioè la stessa ragione, che hanno le loro metà tra esse, le terze parti, le quarte parti ec., le centesime parti ec.

§. 287. Coroll. II. Sieno in oltre A, B, C, D quattro grandezze omogenee proporzionali, ed A sia la massima; l'ultima D dev'essere la minima. Imperocchè essendo A : B = C : D, siccome A è maggiore di B, così C è maggiore di D (§. 246). Dippiù essendo A : B = C : D, sarà permutando, A : C = B : D. Onde siccome A è maggiore di C, così anche B è maggiore di D. Per il che D è minima di tutte.

§. 288. Avvertimento. Si noti, che le grandezze massima, e minima in ogni proporzione deggiono essere o entrambe estreme della proporzione, o entrambe medie. Imperocchè nella proporzione A : B = C : D, supposta A massima, D è la minima per lo coroll. prec. Ma argomentandosi invertendo, la proporzione antecedente si scambia nella seguente, B : A = D : C, in cui si vede, che la massima, e la minima sono medie della proporzione.

PROP. XV. TEOR. XV.

§. 289. *Se quattro grandezze omogenee disuguali sono proporzionali, la somma della massima e della minima è maggiore della somma delle altre due.*

DICHIARAZIONE. Sieno AB, CD, E ed F quattro grandezze omogenee proporzionali, ed AB sia la massima, e conseguentemente F la minima. Dico, che la somma di AB ed F, sia maggiore della somma di CD ed E. Fig. 86

DIMOSTRAZIONE. *Da AB si tagli AG=E, e da CD si tagli CH=F.* Essendo per ipot. AB: CD=E: F, sarà (per costruz.) AB: CD=AG: CH, e permutando, sarà AB: AG=CD: CH (§. 285). Sicchè convertendo, sarà pure AB: BG=CD: DH (§. 283). Ma per ipot. AB è la massima. Dunque dovendo essere DH la minima (§. 287), sarà BG maggiore di DH. E perciò aggiungendo sì a GB, che a DH di comune le due E, ed F, sarà la somma di BG, E, ed F maggiore della somma di DH, E, ed F. Ma la somma di BG, E, ed F è uguale alla somma di BA, ed F (per essere AG=E); e la somma di DH, E, ed F è uguale alla somma di DC, ed E (per essere CH=F). Dunque la somma di AB, ed F è maggiore della somma di CD, ed E. Laonde *se quattro grandezze omogenee disuguali sono proporzionali* ec. c. b. d.

PROP. XVI. TEOR. XVI.

§. 290. *Se quattro grandezze sono proporzionali; la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti, siccome uno de' due antecedenti al suo conseguente.*

Fig. 85 DICHIARAZIONE. Sia AB : DE=BC : EF. Dico, che è pure AC : DF=AB : DE=BC : EF.

DIMOSTRAZIONE. Essendo AB : DE=BC : EF; sarà permutando, AB: BC=DE: EF (§. 285); e componendo, AC : CB=DF : FE (§. 280); e di nuovo permutando, AC : DF=CB : FE; e perciò (per ipot.) anche siccome AB : DE. Laonde *se quattro grandezze sono proporzionali, la somma* ec. c. b. d.

PROP. XVII. TEOR. XVII.

§. 291. *Se quattro grandezze omogenee sono proporzionali, la differenza degli antecedenti sta alla differenza de' conseguenti, siccome un antecedente al suo conseguente.*

DICHIARAZIONE. Sia AC : DF=BC : EF. Dico, che è pure AB : DE=AC : DF=BC : EF.

DIMOSTRAZIONE. Essendo AC : DF=BC: EF; sarà permutando, AC : BC=DF : EF (§. 285); e convertendo AC : AB=DF : DE (§. 283). Onde invertendo, AB: AC=DE : DF (§. 279); e di nuovo permutando, AB : DE=AC: DF=BC : EF, Sicchè *se quattro grandezze omogenee sono proporzionali* ec. c. b. d.

§. 292. Coroll. Giacchè in ogni proporzione, che ha le grandezze tutte omogenee, sì la ragione della somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti, che la ragione della differenza degli antecedenti alla differenza de' conseguenti è uguale alla ragione, che ha ciascuno degli antecedenti al suo conseguente (§§. 290 e 291); sarà in ogni proporzione, che ha tutt' i termini omogenei, la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti, come la differenza degli antecedenti alla differenza de' conseguenti. Se $A : B = C : D$; sarà $A+C : B+D = A-C : B-D$.

C A P. V.

Della teorica delle grandezze, che hanno tra di loro ragioni ordinate, o perturbate; e di ciò, che da tale teorica deriva.

§. 293. Definizione I. Se due serie, ciascuna di grandezze tutte omogenee, sieno tali, che le grandezze di una abbiano consecutivamente tra esse, ragioni rispettivamente uguali a quelle, che collo stesso ordine hanno tra esse le grandezze dell' altra serie; le prime grandezze si diranno avere *ragioni ordinate* alle seconde.

Sieno due serie di grandezze, e ciascuna di grandezze omogenee tra esse.

A , B , C , D , E	1 , 3 , 24 , 8
L , M , N , O , P	2 , 6 , 48 , 16

e sia in oltre

$A : B = L : M$	$1 : 3 = 2 : 6$
$B : C = M : N$	$3 : 24 = 6 : 48$
$C : D = N : O$	$24 : 8 = 48 : 16$
$D : E = O : P$	

le prime grandezze A, B, C, D, E si diranno avere ragioni ordinate alle seconde L, M, N, O, P.

§. 294. Definizione II. Se due serie, ciascuna di grandezze tutte omogenee, sieno tali, che le grandezze di una abbiano consecutivamente tra esse, ragioni rispettivamente uguali a quelle, che con ordine contrario hanno tra esse le grandezze dell' altra serie, si diranno le prime avere *ragioni perturbate* alle seconde grandezze.

Sieno due serie, ciascuna di grandezze tutte omogenee tra di esse,

A , B , C , D , E		6 ,	24 ,	4 ,	8
1 2 3 4 5					
L, M, N, O, P		9 ,	18 ,	3 ,	12
5 4 3 1 2					

e sia dippiù

$A : B = O : P$	
$B : C = N : O$	$6 : 24 = 3 : 12$
$C : D = M : N$	$24 : 4 = 18 : 3$
$D : E = L : M$	$4 : 8 = 9 : 18$

si diranno le prime grandezze A, B, C, D, E ec. avere ragioni perturbate alle seconde L, M, N, O, P.

§. 205. Avvertimento. Si vede bene, che nel caso delle grandezze ordinate, nel profferire le ragioni uguali, le grandezze A ed L sono prime; B ed M sono seconde; C e D sono terze ec. All' opposto nel caso delle ragioni perturbate, A ed O sono prime; B e P seconde; C ed N sono terze; D ed M sono quarte ec. siccome si vede notato.

PROP. XVIII. TEOR. XVIII.

§. 296. *In due serie di grandezze aventi ragioni ordinate, o perturbate tra esse, le due grandezze estreme di una serie sono in ambidue i casi, proporzionali alle due estreme dell' altra serie.*

Dichiarazione. Sieno due serie ciascuna di grandezze tutte omogenee tra esse

A, B, C, D, E
L, M, N, O, P.

Dico, che se le prime hanno o ragioni ordinate, o ragioni perturbate alle seconde; le due estreme grandezze della prima serie sono proporzionali alle due estreme della seconda serie; cioè che A : E = L : P.

Dimostrazione. La ragione di A : E è composta dalle ragioni di A : B, di B : C, di C : D, di D : E (§. 273). Similmente la

ragione di L : P è composta dalle ragioni di L : M, di M : N, di N : O, di O : P. Ma in ambidue i casi le componenti della ragione di A : E sono rispettivamente uguali alle componenti della ragione di L : P (§§. 293 e 294). Dunque le ragioni di A : E, e di L : P sono uguali (§. 271). Sicchè *in due serie di grandezze aventi ragioni* ec. c. b. d.

§. 297. Coroll. Nel caso che le grandezze A, B, C, D, E sono in ordinata ragione alle grandezze L, M, N, O, P; la prima (A) sta alla terza (C), siccome la prima (L) sta alla terza (N). Similmente la prima (A) sta alla quarta (D), siccome la prima (L) sta alla quarta (O) ec. Nel caso poi, che le grandezze A, B, C, D, E sono in ragione perturbata alle grandezze L, M, N, O, P; la prima (A) sta alla terza (C), siccome la terza (N) alla seconda (P); la prima (A) sta alla quarta (D), siccome la quarta (M) alla seconda (P); la prima (A) sta alla quinta (E), siccome la quinta (L) alla seconda (P); ed in generale, la prima sta all' ultima, come l'ultima alla seconda.

PROP. XIX. DEOR. XIX.

§. 298. *Se qualunque numero di grandezze omogenee hanno ragioni ordinate ad altrettante grandezze pure omogenee tra esse; la somma di tutte le prime sta all' ultima di esse, siccome la somma di tutte le seconde all' ultima di esse.*

Dichiarazione. Sieno A, B, C, D, E in ragione ordinata alle grandezze L, M, N, O, P. Dico essere $A+B+C+D+E : E = L+M+N+O+P : P$.

Dimostrazione. Essendo per ipot. $A : B = L : M$, sarà componendo, $A+B ; B = L+M : M$. Ma per ipotesi $B : C = M : N$. Dunque le tre grandezze $A+B$, B, C sono ordinate all' altre tre $L+M$, M, N (§. 293); e perciò la prima $A+B$ sta alla terza C, siccome la prima $L+M$ sta alla terza N (§. 297); e componendo $A+B+C : C = L+M+N : N$. Ma per ipot. $C : D = N : O$. Dunque le grandezze $A+B+C$, C, D sono in ragione ordinata ad $L+M+N$, N, O; e perciò $A+B+C : D = L+M+N : O$. Onde, componendo un' altra volta, $A+B+C+D : D = L+M+N+O : O$. Dell' istesso modo sempre ragionando si avrà $A+B+C+D+E : E = L+M+N+O : O$. E perciò se *qualunque numero di grandezze omogenee hanno ragioni ordinate* ec. c. b. d.

§. 299. Coroll. I. E' facile ad intendersi, che se più grandezze sono in ragione ordinata ad altrettante grandezze, argomentandosi invertendo, le stesse grandezze, prese in ordine contrario a quello di prima, debbono anche avere ragioni ordinate tra esse (§. 279). Or essendo A, B, C, D in ordinata ragione ad L, M, N, P, per lo teorema prec. è $A+B+C+D : D = L+M+N+P : P$. Ma inver-

tendo le ragioni ordinate, si ha $D : C = P : N$. Dunque sarà (§. 296)

$$A+B+C+D : C = L+M+N+P : N$$

Ma è ben anche $C : B = N : M$. Dunque sarà pure $A+B+C+D : B = L+M+N+P : M$. E così sempre ragionando, è chiaro, che se più grandezze sono ordinate ad altrettante grandezze sarà la somma di tutte le prime a ciascuna di esse, come la somma di tutte le seconde a ciascuna di esse rispettivamente.

§. 300. Coroll. II. Sieno A, B, C, D, E ec. L, M, N, O, P ec. grandezze tutte omogenee, e sieno le ragioni di

$A : L$
$B : M$
$C : N$
$D : O$
$E : P$ tutte eguali

tra esse. Sarà, permutando tali ragioni,

$A : B = L : M$
$B : C = M : N$
$C : D = N : O$
$D : E = O : P$.

E perciò A, B, C, D, E avranno ragioni ordinate ad L, M, N, O, P. Quindi (*per lo teor. prec.*) sarà

$$A+B+C+D+E : E = L+M+N+O+P : P.$$

E permutando di nuovo,

$A+B+C+D+E : L+M+N+O+P = E : P = D : O$ ec. Sicchè se più ragioni sono tra esse uguali, e le grandezze sono tutte omogenee; la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti, come ciascuno degli antecedenti al suo conseguente.

PROP. XX. TEOR. XX.

§. 301. *Se di quattro grandezze due sono proporzionali ai due antecedenti di una proporzione, e l' altre due ai due conseguenti della medesima proporzione, quelle quattro grandezze sono in proporzione tra esse.*

Dichiarazione. Sia A : B=C : D, e delle quattro grandezze L, M, N, O, le due L, ed N siano proporzionali ad A, e C, cioè L : A=N : C; e l' altre due M, e O sieno proporzionali a B, e D, cioè M : B=O : D. Dico, che anche L : M=N : O.

Dimostrazione. Per ipotesi L : A=N : C
A : B=C : D
M ; B=O : D; e perciò invert. B, M=D : O. Dunque L, A, B, M sono in ragione ordinata ad N, C, D, O (§. 293). E perciò L : M=N ; O (§. 296). Per la qual cosa, *se di quattro grandezze due sono proporzionali ai due antecedenti* ec. c. b. d.

PROP. XXI. TEOR. XXI.

§. 302. *Se vi sono due proporzioni, ed i due conseguenti dell' una sono rispettivamente uguali ai due conseguenti dell' altra; sarà sì la somma, che la differenza de' due primi antecedenti di ambedue le proporzioni al conseguente*

comune di essi, come sì la somma, che la differenza degli altri due antecedenti al conseguente comune di essi.

Fig. 87 Dichiarazione. Sia AB : G=DE : H
e sia pure BC : G=EF : H.
Dico I. che AC : G=DF : H; e tagliate BL =BC, ed EM=EF, dico II. che AL : G=DM : H.

Dimostrazione. Essendo AB : G=DE : H; ed essendo BC : G=EF : H, ovvero, invertendo, G : BC=H : EF; sarà per ragione ordinata AB : BC=DE : EF (§. 296). Dunque

I.	II.
componendo (§. 280), AC : CB=DF : FE.	dividendo (§. 281): AL : LB=DM : ME.
Ma per ipotesi CB : G=FE : H.	Ma per ipotesi LB : G=ME : H.

Quindi per ragione ordinata,

AC : G=DF : H.	AL : G=DM : H.

Sicchè *se vi sono due proporzioni, ed i due conseguenti dell' una* ec. c. b. d.

Fine del terzo libro.

LIBRO IV.

DELLE TEORICHE PIU' RILEVANTI DELLA GEOMETRIA PIANA, CHE DALLA DOTTRINA DELLA RAGIONE, E DELLA PROPORZIONE DERIVANO.

C A P. I.

Delle ragioni uguali, che si possono avere con dividere uno, o due lati di qualunque triangolo.

L E M M A.

§. 303. S*e diviso un lato di qualunque triangolo in qualsivoglia numero di parti uguali, pe' punti delle divisioni si tirano altrettante rette tutte parallele ad uno degli altri due lati; tali rette divideranno il terzo lato in altrettante parti anche tra esse uguali.*

Fig. 88 Dichiarazione. Sia ABC un qualunque triangolo, ed un suo lato p. e. AB sia diviso nelle parti AD, DE, EF, FB tutte tra esse uguali. Se pe' punti delle divisioni sieno tirate le rette DG, EH, FI tutte parallele a BC; dico, che tali rette divideranno il lato AC in altrettante parti uguali AG, GH, HI, IC.

Dimostrazione. *Per i punti G, H, I si tirino le rette GK, HL, IM parallele ad AB.*

Le figure DK, EL, FM saranno altrettanti parallelogrammi (§. 33.); onde sarà GK=DE, HL=EF, IM=FB (§. 96).

Per le parallele DG, EH, FI, BC tagliate da AC, gli angoli AGD, GHK, HIL, ICM sono tutti tra essi eguali (§. 75). Similmente per le parallele AB, GK, HL, IM tagliate dalla stessa AC, sono eguali tra essi gli angoli GAD, HGK, IHL, CIM. Dunque i triangoli ADG, GKH, HLI, IMC sono tra essi equiangoli. Hanno in oltre uguali i lati AD, GK, HL, IM. Dunque sono perfettamente uguali (§. 92); e perciò AG=GH=HI=IC. Onde *se un lato di qualunque triangolo* ec. c. b. d.

PROP. I. TEOR. I.

§. 304. *In qualunque triangolo se sia tirata una retta parallela ad un suo lato, essa dividerà gli altri due lati in parti proporzionali. E se una retta divide due lati di un triangolo in parti proporzionali, essa è parallela al terzo lato.*

Fig. 89 I. Dichiarazione. Nel triangolo ABC sia tirata la retta DE parallela a BC. Dico, che AD : DB=AE : EC.

Dimostrazione. S' intendano le rette AD, DB divise in parti uguali ad una loro aliquota comune; e per i punti delle divisioni s' intendano tirate delle rette tutte parallele a BC, divideranno tali rette in altrettante parti uguali anche AE, EC (§. *prec.*). Sicchè una delle parti nella quali si sono concepute divise AD, DB; ed una delle parti nelle quali verrebbero divise AE, EC dalle dette parallele, sono aliquote simili sì di DB, ed EC, che di AD, ed AE. E perciò AD: DB=AE: EC (§. 265). Dunque se la retta DE è parallela a BC, taglia i due lati AB, AC in parti proporzionali.

II. Dichiarazione. Sia tirata nel triangolo ABC la retta DE in modo, che sia AD : DB= AE : EC. Dico, che DE sia parallela a BC.

Dimostrazione. Per lo punto D si concepisca tirata la parallela a BC. Essa dovrà incontrare il lato AC in qualche punto F; Or questo punto dovrà essere tale (per la prima parte di questo teor.), che stia AF : FC =AD : DB. Ma per ipot. AD : DB=AE : EC. Dunque AF : FC=AE : EC. E, componendo, sarà AC : CF=AC : CE. Onde CF=CE (§. 261). Dunque il punto F è identico al punto E; e la retta, che per lo punto D si può tirare parallela a BC, è appunto la DE, che taglia i lati del triangolo in parti proporzionali. Sicchè *in qualunque triangolo se sia tirata* ec. c. b. d.

PROP. II. TEOR. II.

§. 305. *Se in qualunque triangolo sieno tirate quante rette si vogliono*; 1 *se esse sono tutte*

parallele ad un lato, divideranno gli altri due lati in modo, che le parti di uno abbiano ragioni ordinate alle parti dell' altro lato; 2 *e se le dette rette tagliano due lati del triangolo in modo, che le parti di uno sieno ordinate alle parti dell' altro, esse rette saranno tutte parallele al terzo lato.*

Fig. 90 I. Dichiarazione. Nel triangolo ABC sieno tirate quante rette si vogliono DG, EH, FI tutte parallele a BC. Dico, che le parti AG, GH, HI, IC, nelle quali resta diviso il lato AC, hanno ragioni ordinate alle parti AD, DE, EF, FB, in cui resta diviso il lato AB.

Dimostrazione. *Per i punti G, ed H si tirino GM, HO parallele ad AB. E' chiaro, che saranno GK=DE, HN=EF, NO=FB* (§. 96).

Essendo nel triangolo AEH la DG parallela ad EH, perchè entrambe sono per ipot. parallele a BC (§. 76); sarà AG : GH=AD : DE (§. 304). Similmente nel triangolo GLI, essendo KH parallela ad LI, sarà GH : HI= GK : KL=DE : EF. Finalmente nel triangolo HOC, per essere NI parallela ad OC, sarà HI : IC=HN : NO=EF : FB. Sicchè AG : GH= AD : DE, GH : HI=DE : EF, HI : IC=EF : FB; e perciò le parti AG, GH, HI, IC sono in ragione ordinata alle parti AD, DE, EF, FB.

II. Dichiarazione. Abbiano le parti AG, GH, HI, IC ragioni ordinate alle parti AD, DE , EF , FB Dico , che le rette DG , EH , FI sono tutte parallele a BC.

Dimostrazione. Essendo le parti di AC in ragione ordinata alle parti di AB , sarà la somma di tutte le prime all' ultima , cioè AC: CI , siccome la somma di tutte le seconde all' ultima , cioè siccome AB : BF (§. 298); e dividendo , sarà AI : IC=AF : FB. Dunque FI è parallela a BC (§. 304). Similmente si dimostra essere EH parallela ad FI . e conseguentemente a BC ec. Sicchè DG , EH , FI sono tutte parallele a BC. Laonde *se in qualunque triangolo sieno tirate quante rette si vogliono , se esse sono tutte* ec. c. b. d.

PROP. III. TEOR. III.

§. 306. *In ogni triangolo tirata una retta per lo vertice di un angolo : 1. se questa divide l' angolo in parti uguali , ne divide la base in parti proporzionali a' lati ; 2. e se divide la base in parti proporzionali a' lati , divide l' angolo in parti uguali.*

I. Dichiarazione. Sia ABC un qualunque triangolo , e dal vertice B dell' angolo ABC sia tirata la retta BD. Dico 1. che se BD divide l' angolo ABC in due parti uguali , divide la base AC nella ragione de' lati AB , BC ; cioè che AD : DC=AB : BC. Fig. 91

Dimostrazione. *Per lo punto C si tiri CE parallela a DB , e si prolunghi finchè s' incontri con AB prolungata in E.*

Essendo per costruzione DB , e CE parallele , l' angolo esterno ABD è uguale al suo interno in E , e l' angolo DBC è uguale al suo alterno BCE (§. 75). Ma per ipot. l' angolo ABD=DBC. Dunque anche l' angolo BEC=BCE. E perciò nel triangolo EBC è il lato BC=BE (§. 85). Ciò posto

Nel triangolo ACE , essendo DB parallela a CE , sarà AD : DC=AB : BE (§. 304). Ma si è dimostrato essere BE=BC. Dunque è pure AD : DC=AB : BC.

II. Dichiarazione. Dal vertice dell' angolo ABC sia tirata la retta BD. Dico , che se BD taglia la base AC in modo , che sia AD : DC=AB : BC , l' angolo ABC è diviso in due parti uguali.

Dimostrazione. S' intenda fatta la stessa costruzione di poco prima. Nel triangolo ACE essendo DB parallela a CE , dev' essere AD , DC=AB : BE (§. 304). Ma per ipotesi AD: DC=AB : BC. Dunque AB : BE=AB : BC ; e perciò BE=BC (§. 261). Sicchè il triangolo EBC è isoscele , e conseguentemente l' angolo BEC=BCE (§. 83).

Ora per le parallele BD , CE tagliate da AE , dev' essere l' angolo ACD=BEC ; e per le stesse parallele tagliate da BC dev' essere pure l' angolo DBC=BCE (§. 75). Ma si sono dimostrati uguali gli angoli BEC , BCE. Dunque uguali sono anche gli angoli ABD , DBC. E perciò la retta BD taglia l' angolo

ABC in parti uguali. Sicchè *in ogni triangola tirata una retta per lo vertice* ec. c. b. d.

C A P. II.

De' caratteri da conoscere la simiglianza de' triangoli, e quella de' parallelogrammi.

§. 307. Definizione. Due figure rettilinee si dicono *simili*, se gli angoli di una sono rispettivamente uguali agli angoli dell'altra e sono di più i lati opposti agli angoli uguali, ovvero i lati che congiungono gli angoli uguali, proporzionali tra essi.

Così i rettilinei ABCD, LMNO sono simili, se gli angoli in A, B, C, D sono rispettivamente uguali agli angoli L, M, N, O, e sono di più i lati AB, BC, CD ec. proporzionali a' lati LM, MN, NO ec. cioè AB: BC=LM: MN; BC: CD=MN: NO; CD: DA=NO: OL. Fig. 92

§. 308. Coroll. I. Sicchè nelle figure simili sono omologhi que' lati, che congiungono gli angoli uguali. Così nelle proporzioni di poc' anzi i lati omologhi sono AB, LM; BC, MN; CD, NO ec. che congiungono gli angoli rispettivamente uguali.

§. 309. Coroll. II. Se due rettilinei sono simili ad un terzo, deggiono esser simili tra essi. Imperocchè essendo gli angoli di ciascuno de' due rettilinei, rispettivamente uguali agli angoli del terzo rettilineo, saranno detti rettilinei equiangoli tra essi. Inoltre essendo tra essi proporzionali i lati congiungenti gli angoli uguali in ciascuno de' due rettilinei, e nel terzo; proporzionali ancora saranno i lati di un rettilineo a quei dell' altro. I rettilinei adunque saran simili tra essi.

PROP. IV. TEOR. IV.

§. 310. *Se due triangoli sono tra essi equiangoli, sono anche simili.*

Fig. 93 Dichiarazione. Abbiano i triangoli ABC, DEF gli angoli in B, ed in E uguali, come pure gli angoli in A, ed in D, e conseguentemente anche quelli in C, ed in F. Dico, che tali triangoli sono simili; cioè che AB : BC=DE : EF; che AB : AC=DE : DF; e che AC : CB=DF : FE.

Dimostrazione. *Si taglino BL=ED, BM=EF, e si congiunga LM.* I due triangoli LBM, DEF saranno perfettamente uguali (§. 90); e quindi l'angolo BLM=EDF=BAC. Essendo dunque l'angolo esterno BLM uguale all'interno BAC, saranno LM, ed AC parallele (§. 74). Laonde AL : LB=CM : MB (§. 304); e, componendo, AB : BL=CB : BM; e permutando, AB: BC=BL:BM=DE : EF. Similmente si dimostra essere AB : AC=DE : DF; e AC : CB=DF : FE. Sicchè *se due triangoli sono equiangoli* ec. c. b. d.

PROP. V. TEOR. V.

§. 311. *Se due triangoli hanno tutt' i lati in proporzione, sono simili tra essi.*

Dichiarazione. Ne' due triangoli ABC, DEF sia AB : BC=DE : EF ; BC : CA=EF : FD ; CA : AB=FD : DE. Dico, che l' angolo B=E, l' angolo C=F ; e l' angolo A=D.

Dimostrazione. *Si taglino BL=ED, e BM=EF, e si congiunga LM.*

Il triangolo LBM è equiangolo al triangolo ABC. Imperocchè essendo per ipot. AB: BC=DE : EF=LB : BM (per costruz.): sarà, permutando, AB ; BL=CB; BM ; e dividendo AL : LB=CM : MB. Onde LM è parallela ad AC (§. 304), e conseguentemente l' angolo BLM=BAC (§. 75). Sicchè i due triangoli LBM, ABC avendo l' angolo BLM=BAC, e l' angolo in B di comune, sono equiangoli (§. 81).

Ma in oltre lo stesso triangolo LBM è equiangolo al triang. DEF. Imperciocchè per esser equiangoli i triangoli BLM, BAC, e per conseguenza simili (§. *prec.*), BL : LM=BA : AC=ED ; DF. Or essendo BL : LM=ED:DF, siccome per costruzione è BL=DE, così pure dev' essere LM=DF. Dunque il triangolo LBM è equilatero, ed in conseguenza equiangolo al triangolo DEF (§. 91).

Giacchè dunque lo stesso triangolo LBM è equiangolo sì al triangolo ABC, che al triangolo DEF ; saranno questi due triangoli ABC

DEF equiangoli tra essi ; e per conseguenza simili. Sicchè *se due triangoli hanno tutt' i lati* ec. c. b. d.

PROP. VI. TEOR. VI.

§. 312. *Se due triangoli hanno due lati proporzionali, ed uguali i due angoli compresi da questi medesimi lati ; sono tali triangoli equiangoli, e simili.*

Dichiarazione. Ne' due triangoli ABC, DEF sieno i lati AB : BC=DE : EF ; e sia l' angolo ABC=DEF. Dico, che sono eguali gli altri angoli, e tutti i lati in proporzione.

Dimostrazione. *Si taglino BL=ED, BM=EF, e si unisca LM* ; sarà il triangolo LBM equiangolo al triangolo DEF (§. 90).

Essendo per ipot. AB : BC=DE : EF=BL : BM ; sarà, permutando, AB : BL=CB : BM ; e dividendo AL : LB=CM : MB (§. 281). Sicchè LM è parallela ad AC (§. 304) ; e per conseguenza l' angolo BAC=BLM (§.75). Dunque il triangolo ABC è equiangolo, e simile al triangolo LBM ; e perciò equiangolo, e simile al triangolo DEF. Sicchè *se due triangoli hanno due lati proporzionali* ec. c. b. d.

PROP. VII. TEOR. VII.

§. 313. *Se due triangoli hanno due lati proporzionali, e degli angoli opposti ai lati omologhi due sieno uguali tra essi, e due* *altri della medesima specie; sono tali triangoli equiangoli, e simili.*

Dichiarazione. I due triangoli ABC, DEF abbiano i lati AB, BC proporzionali ai lati DE, EF; e degli angoli opposti ai lati omologhi sia l' angolo A=D; e l' angolo C della stessa specie, che l' angolo F. Dico, che tali triangoli sono equiangoli, e perciò simili.

Dimostrazione. I due triangoli ABC, DEF debbono per le condizioni del teorema avere anche l' angolo ABC=DEF; e quindi debbono essere equiangoli, e simili (§. 310).

In fatti se l' angolo ABC fosse maggiore o minore dell' angolo DEF, si potrebbe in B fare l' angolo ABG uguale a DEF. Onde essendo per ipotesi l' angolo in A uguale all' angolo in D, il terzo angolo BGA sarebbe uguale al terzo angolo EFD. Sicchè se l' angolo ABC fosse maggiore dell' angolo DEF, si potrebbe fare il triangolo ABG equiangolo, e simile al triangolo DEF (§. 310); e sarebbe AB : BG=DE : EF=AB : BC (per ipot.). Or dunque essendo AB : BG=AB : BC, sarebbe BG=BC (§. 261); e quindi il triangolo CBG sarebbe isoscele, e per conseguenza l' angolo BCG=BGC (§. 83).

Ma gli angoli in C ed in F si sono supposti della medesima specie. Dunque l' angolo BGC (=C), e l' angolo BGA (=F) sarebbero pure della medesima specie, cioè ambidue ottusi, od ambidue acuti. Ma ciò è assurdo

(§. 67). Dunque l' angolo ABC non può essere maggiore dell' angolo DEF.

Similmente si dimostra, che l' angolo ABC non può essere minore dell' angolo DEF; e perciò l' angolo ABC è uguale a DEF. Quindi i triangoli ABC, DEF sono equiangoli, ed in conseguenza simili tra essi (§. 310). Sicchè *se due triangoli hanno due lati proporzionali, e degli angoli* ec. c. b. d.

PROP. VIII. TEOR. VIII.

§. 314. *Se dall' angolo retto di un triangolo rettangolo si cala la perpendicolare all' ipotenusa, dividerà essa il triangolo in due triangoli minori, simili al triangolo grande, e simili tra di loro.*

Fig. 94 Dichiarazione. Sia ABC, un qualunque triangolo rettangolo in B; e sia dall' angolo retto calata la BD perpendicolare ad AC. Dico, che ciascuno de' triangoli BDA, BDC sia simile al triangolo ABC, ed entrambi simili tra essi.

Dimostrazione. Ne' due triangoli ABC, ABD l' angolo in A è comune; l' angolo ABC= BDA (perchè retti entrambi); dunque il terzo angolo BCA è uguale al terzo ABD. Onde i triangoli ABC, ABD sono equiangoli, e perciò simili (§. 310).

Similmente i triangoli ABC, BDC hanno l' angolo in C di comune, l' angolo CBA= CDB (perchè retti): dunque il terzo angolo

BAD=CBD. Sicchè i mentovati triangoli sono equiangoli, e simili (§. 310).

Finalmente i triangoli BDA, BDC essendo ambidue simili ad ABC, sono anche simili tra essi (§. 309). Sicchè *se dall' angolo retto di un triangolo rettangolo* ec. c. b. d.

§. 315. Coroll. Dai due triangoli simili ABC, ADB, si ricava la proporzione AC : AB=AB : AD (§. 308). Così pure dai due triangoli ABC, BDC si ha l'altra proporzione AC : CB=CB : CD. Finalmente gli altri due triangoli simili ADB, BDC somministrano la terza proporzione, AD : DB=DB : DC. Sicchè se dall' angolo retto di un triangolo rettangolo si cala la perpendicolare sull' ipotenusa, si hanno tre proporzioni continue. I. e II. *cias un cateto è medio proporzionale tra l' ipotenusa, e la parte dell' ipotenusa adjacente ad esso cateto.* III. *La perpendicolare è media proporzionale tra le due parti dell' ipotenusa.*

PROP. IX. TEOR. IX.

§. 316. *Se due parallelogrammi hanno un angolo uguale; ed i lati formanti detto angolo in proporzione, sono simili tra essi.*

Dichiarazione. I parallelogrammi AC, EG abbiano gli angoli in A, ed E uguali, ed in oltre i lati AD, AB proporzionali ai lati EH, EF. Dico, che tali parallelogrammi sono simili tra essi. Fig. 95

Dimostrazione. Avendo i parallelogrammi

AC, EG gli angoli in A, ed in E uguali, debbono anche avere uguali gli angoli in C, ed in G, che sono rispettivamente opposti ai primi (§. 96). In oltre essendo uguali gli angoli in A, ed in E; gli angoli in B, ed in F, che sono loro rispettivi supplimenti a due retti (§. 75), pure si debbono tra essi pareggiare; e conseguentemente anche i loro opposti, cioè gli angoli in D, ed in H. Dunque i parallelogrammi AC, ed EG sono equiangoli.

Dippiù essendo AD : AB=EH : EF, sarà invertendo, AB : AD, ossia AB : BC (§. 96), siccome EF : EH, ossia FE : FG.

Ed essendo AD : AB=EH : EF, sarà BC : CD=FG : GH. (96).

Finalmente essendosi dimostrato essere AB : BC=EF : FG, sarà CD : DA=GH : HE (§. 96). Sicchè i parallelogrammi AC, ed EG, che si sono dimostrati equiangoli, hanno anche proporzionali i lati esistenti intorno gli angoli uguali. E perciò *se due parallelogrammi* ec. c. b. d.

PROP. X. TEOR. X.

§. 317. *I parallelogrammi esistenti intorno la diagonale di un altro parallelogrammo sono simili a questo, e simili tra essi.*

Fig. 28 Dichiarazione. Sia il parallelogrammo DB, ed intorno la sua diagonale AC sieno i due parallelogrammi GE, FH. Dico, che ambidue questi parallelogrammi GE, FH sono simili al parallelogrammo DB; e perciò simili anche tra essi.

Dimostrazione. Essendo equiangoli i due triangoli AGO, ADC (75) e perciò simili tra essi (§. 310); sarà AG : GO = AD : DC. Sicchè i parallelogrammi GE, DB hanno uguali i due angoli in G, ed in D, ed i lati AG, GO proporzionali co' lati DA, DC; e perciò sono simili tra essi (§. 316). Similmente si dimostra essere il parallelogrammo FH simile allo stesso parallelogrammo DB. Or dunque i parallelogrammi GE, FH essendo ambidue simili al parallelogrammo DB, saranno pure simili tra essi (§. 309). Sicchè *i parallelogrammi esistenti intorno la diagonale* ec. c. b. d.

§. 318. **Avvertimento.** Tutti gli altri rettilinei non hanno caratteri speziali per poterne conoscere la di loro simiglianza; e perciò non si veggono quì soggiunti. Intanto soggiungiamo la seguente proposizione, perchè è conversa di quest' ultima.

PROP. XI. TEOR. XI.

§. 319. *Se due parallelogrammi sono simili, ed hanno un angolo di comune, uno di essi giace intorno la diagonale dell' altro.*

Dichiarazione. Sieno simili i parallelogrammi GE, DB, ed abbiano l' angolo GAE di comune. Dico che il parallelogrammo GE è Fig. 28

intorno la diagonale AC del parallelogrammo DB; ossia che AO giace su di AC.

Dimostrazione. Essendo simili i parallelogrammi GE, DB, saranno l' angolo AGO uguale all' angolo ADC, ed i lati AG, GO proporzionali ai lati AD, DC (§. 307). Onde i triangoli AGO, ADC sono equiangoli (§. 312); e quindi l' angolo GAO = DAC. Sicchè giacendo per ipot. AG sopra di AD, deve anche giacere AO sopra di AC; e conseguentemente il parallelogrammo GE è intorno la diagonale del parallelogrammo DB. Sicchè *se due parallelogrammi sono simili* ec. c. b. d.

C A P. III.

Del modo di dividere qualunque retta secondo qualsivoglia data ragione; e del modo di trovare una retta, che sia in proporzione con altre rette date.

§. 320. **Definizione.** Una retta si dice *segata secondo l' estrema, e media ragione*, se sia divisa in due parti disuguali in modo, che l' intera retta stia alla sua parte maggiore, come questa stessa parte all' altra parte minore.

Così se la retta AB sia divisa in Q in modo, che sia tutta AB : BQ = BQ : QA, si dirà essa divisa secondo l' estrema, e media ragione. Fig. 47

PROP. XII. PROBL. I.

§. 321. *Data qualunque retta tagliare da essa qualsivoglia sua parte.*

DICHIARAZIONE. Sia data la retta AB. Si cerca tagliare da essa la sua terza parte. Fig. 96

SOLUZIONE. 1. Si tiri per A l'indefinita AQ, che faccia con AB qualunque angolo BAQ.

2. In AQ si prenda ad arbitrio il punto D, e da AQ si taglino tante parti uguali AD, DE, EF ec. quante ne disegna il denominatore della parte, che si vuol tagliare.

3. Si congiunga BF, e per D si tiri DC parallela a BF (§. 78).

Dico essere AC la terza parte di AB.

DIMOSTRAZIONE. Nel triangolo BAF essendo DC parallela a BF, sarà AC : CB=AD : DF (§. 304); e perciò (§. 282) sarà pure AC : AB=AD : AF. Onde siccome per costruzione AD è terza parte di AF, così pure sarà AC terza parte di AB. Per la qual cosa, data la retta AB, si è tagliata da essa la sua parte cercata. ec. c. b. f. e d.

PBOP. XIII. PROBL. II.

§. 322. *Date due rette una divisa comunque, e l'altra indivisa, dividere questa seconda in parti proporzionali alle parti della retta divisa.*

DICHIARAZIONE. Sieno date le rette AB, AC; Fig. 90

e sia AC comunque divisa nelle parti AG, GH, HI, IC, e la retta AB sia indivisa. Bisogna dividere AB in parti proporzionali alle parti di AC.

SOLUZIONE. 1. Si dispongano le rette AB, AC in modo, che facciano in A un angolo qualunque BAC.

2. Si unisca BC; e per i punti G, H, I si tirino GD, HE, IF tutte parallele a BC, sino che taglino la retta AB.

Dico essere le parti AD, DE, EF, FB proporzionali alle parti AG, GH, HI, IC.

DIMOSTRAZIONE. Nel triangolo BAC, essendo parallele tra esse le rette GD, HE, IF, CB, sono le parti di AB in ordinata ragione alle parti di AC (§. 305). Sicchè la retta AB resta divisa in parti proporzionali alle parti di AC. Per il che *date due rette, una divisa* ec. c. b. f. e d.

PROP. XIV. PROBL. III.

§. 323. *Data qualunque retta terminata, dividerla in qualsivoglia numero di parti uguali.*

Fig. 88 DICHIARAZIONE. Sia data la retta AB. Si cerca dividerla in qualsivoglia numero di parti uguali; per es. in quattro parti uguali.

SOLUZIONE. 1. Da A si tiri l'indefinita AO, che faccia con AB qualunque angolo BAO.

2. Si prenda in AO il punto G ad arbi-

trio ; e da AO si taglino tante parti uguali AG , GH , HI ; IC ec. quante ne disegna il numero proposto.

3. Si congiunga BC ; e per G , H , I si tirino GD , HE , IF parallele a BC.

Dico essere AB divisa in quattro parti uguali.

Dimostrazione. Nel triangolo BAC le parti in cui è diviso il lato AB sono proporzionali alle parti , in cui è diviso il lato AC (§. 305). Ma queste sono per costruzione uguali. Dunque sono uguali anche quelle. Sicchè *data una retta qualunque terminata* ec. c. b. f. e. d.

PROP. XV. PROBL. IV.

§. 324. *Data una retta , dividerla secondo l' estrema , e media ragione.*

Dichiarazione. Sia data la retta AB. Bisogna dividerla in modo , che stia l' intera retta AB ad una sua parte per es. BC , siccome questa stessa parte BC sta all' altra rimanente CA. Fig. 97

Soluzione. Si divida AB in modo , che il rettangolo fatto da BA in AC sia uguale al quadrato di BC (§. 139).

Dico , che AB è divisa in C secondo l' estrema , e media ragione; cioè che AB : BC = BC : CA.

Dimostrazione. *Si descriva il cerchio BDC, che abbia per diametro , o per corda BC ; e tirata da A la tangente AD , si congiungano*

DB , DC. Sarà il rettangolo di BA in AC uguale al quadrato di AD (§. 186). Ma per costruz. lo stesso rettangolo di BA in AC è uguale al quadrato di BC. Dunque AD = BC. Ciò posto

Avendo i due triangoli ADB , ACD l' angolo in A di comune , l' angolo in B = ADC (fatto dalla tangente , e dalla corda §. 174), e conseguentemente il terzo angolo ADB = ACD (§. 81 n. III.) ; saranno essi triangoli simili tra di loro (§. 310). Sicchè BA : AD = AD : AC. Ma si è dimostrato essere AD = BC. Dunque AB : BC = BC : CA. Per la qual cosa si è divisa la retta AB nel punto C secondo l' estrema , e media ragione. c. b. f. e. d.

§. 325. Coroll. Quindi lo stesso è dividere una retta secondo l' estrema , e media ragione , che dividerla in un punto tale , che il rettangolo fatto dall' intera retta , e da una delle sue parti , sia uguale al quadrato dell' altra parte.

PROP. XVI. PROBL. V.

§. 326. *Date tre rette , trovare la quarta proporzionale.*

Fig. 98 Dichiarazione. Sieno date le tre rette A , B , C ; si cerca trovare una quarta retta tale, che siccome A : B , così C stia ad essa quarta , che si cerca.

Soluzione. 1. Si faccia qualunque angolo

NLQ, e si taglino LM=A, MN=B, LO=C.

2. Si congiunga MO; e per N si tiri NP parallela ad MO (§. 78).

Dico essere OP la quarta proporzionale cercata.

Dimostrazione. Per le parallele MO, NP sta LM : MN=LO : OP (§. 304). Ma per costruzione LM=A, MN=B, LO=C. Dunque A : B=C : OP; e perciò OP è quarta proporzionale in ordine ad A, B, C. Sicchè date tre rette si è trovata la quarta proporzionale. c. b. f. e d.

§. 327. Coroll. Se C=B, le MN, LO saranno uguali tra esse, e ciascuna uguale a B. Intanto le tre rette A, B, C si riducono a due, A, e B; ed OP diventa terza proporzionale in ordine ad A, e B; cioè sarà A : B=B : OP. E' chiaro adunque come date due rette abbiasi a trovare la terza proporzionale.

PROP. XVII. PROBL. VI.

§. 328. *Date due rette, trovare la mezza proporzionale.*

Dichiarazione. Sieno date le due rette A, e B. Bisogna trovarne un' altra, tale, che siccome A sta ad essa, così essa stessa stia a B. Fig. 99

Soluzione. 1. Si tiri l' indefinita LN; e da essa si taglino LM=A; MN=B.

2. Su LN si descriva il mezzo cerchio LON; e da M s' innalzi su LN la perpendicolare MO, che interseca la periferia nel punto O.

Dico essere MO la mezza proporzionale cercata; cioè che A : MO=MO : B.

Dimostrazione. *Si congiungano le rette LO, ON.* Essendo l' angolo LON retto, perchè fatto nel semicerchio (§. 169), ed essendo OM perpendicolare su di LN; sarà LM : MO =MO : MN (§. 315 n. III.); e quindi (per costruzione) A : MO=MO : B. Sicchè MO è mezza proporzionale tra A, e B. Per la qual cosa date due rette si è trovata la mezza proporzionale. c. b. f. e d.

§. 329. Avvertimento. Si noti, che collo stesso metodo si possono trovare ancora tra due rette date 3, 7, 15, 31. ec. mezze proporzionali. Il trovarne poi tante, quante ne contrassegnano i numeri, che tramezzano tra 1, 3, 7, 15, 31. ec. appartiene alla Geom. sublime, e non alla elementare.

CAP. IV.

Delle ragioni de' triangoli, e de' parallelogrammi.

§. 330. Definizione. Si dice *altezza* di un triangolo, o d' un parallelogrammo la perpendicolare, che dal vertice di un angolo si cala sul lato opposto allo stesso angolo. E *base* si chiama questo medesimo lato, su cui è calata detta perpendicolare.

§. 331. Coroll. Quindi i triangoli, ed i parallelogrammi racchiusi tra le medesime parallele sono d' uguali altezze.

PROP. XVIII. TEOR. XII.

§. 332. *I triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno uguali altezze, sono tra essi nella ragione delle basi.*

Dichiarazione. Sieno i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi AM, DN di uguali altezze BG, EL, ma di basi disuguali AC, DF. Dico, che sì la ragione del triangolo ABC al triangolo DEF, che quella del parallelogrammo AM al parallelogrammo DN pareggia la ragione della base AC alla base DF, cioè che ABC : DEF=AC : DF; e così pure AM : DN=AC : DF. Fig. 100

Dimostrazione. *Si dispongano i triangoli, ed i parallelogrammi proposti in modo, che le loro basi sieno in una medesima retta AF.* E' chiaro, che essendo uguali le altezze BG, EL, la retta BE, che unisce i vertici de' proposti triangoli dev' essere parallela ad AF. Dippiù *s' intendano le basi AC, DF divise mercè una loro aliquota comune nelle parti uguali AG, GH, HI, IC, DK, KL, LF, e congiunte le rette BG, BH, BI, EK, EL.* Saranno tra essi uguali tutt' i piccioli triangoli ABG, GBH, HBI, IBC, DEK, KEL, LEF (§ 103). Ciò posto.

Il triangolo ABG, e la sua base AG sono aliquote simili sì del triangolo ABC, e della

sua base AC, che del triangolo DEF, e della sua base DF. E perciò la ragione del triangolo ABC al triangolo DEF è uguale a quella della base AC alla base DF (§. 265).

In oltre i parallelogrammi AM, DN sono doppj de' triangoli ABC, DEF (§. 96); e perciò sono tra essi nella medesima ragione di tali triangoli (§. 286). Ma la ragione de' triangoli ABC, DEF è quella stessa delle basi AC, DF. Dunque anche il parallelogrammo AM : DN=AC : DF. Sicchè *i triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno uguali altezze* ec. c. b. d.

PROP. XIX. TEOR. XIII.

§. 333. *I triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno uguali basi, ma disuguali altezze, sono tra essi nella ragione delle altezze.*

Fig. 101 Dichiarazione. Abbiano i triangoli ADB, EHF, ed i parallelogrammi AC, EG uguali basi AB, EF, ma disuguali altezze DI, HL. Dico essere sì il triangolo ADB al triangolo EHF, che il parallelogrammo AC al parallelogrammo EG, siccome l' altezza ID all' altezza HL.

Dimostrazione. *Si prolunghi IB verso M finchè sia IM=AB, e si congiunga DM. Similmente si faccia LN=EF, e si unisca HN.* Sarà il triangolo IDM=ADB, come pure il triangolo LHN=EHF (§. 103); e perciò la ragione del triangolo ADB : EHF è quella stessa del triangolo IDM : LHN.

Essendo per costruzione rettangoli i triangoli DIM, HLN, si possono considerare DI, ed HL per basi, ed IM, LN per altezze. Giacchè dunque le altezze IM, LN sono uguali (imperocchè IM=AB=EF=LN), il triangolo DIM : HLN=DI : HL (§. *prec.*). E perciò anche il triangolo ADB : EHF= DI : HL.

In oltre essendo i parallelogrammi AC, EG doppj de' triangoli ADB, EHF, sarà il parallelogrammo AC : EG, siccome il triangolo ADB : EHF §. 286), ossia, come ora si è dimostrato, siccome DI : HL. Sicchè *i triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno uguali basi* ec. c. b. d.

PROP. XX. TEOR. XIV.

§. 334. *I triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno disuguali basi, e disuguali altezze sono tra essi in ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze.*

Dichiarazione. Abbiano i triangoli ACB, EGF, come anche i parallelogrammi AD, EH disuguali basi AB, EF, e disuguali altezze CP, GO. Dico, che ACB : EGF in ragione composta di AB : EF, e di CP : GO; e così pure il parallelogrammo AD : EH. Fig 10.

Dimostrazione. Si tagli da PC la PL=GO, e si uniscano AL, BL. Avremo tre grandez-

ze omogenee, cioè i tre triangoli ACB, ALB, EGF. Onde la ragione del triangolo ACB : EGF sarà composta dalle ragioni del triangolo ACB : ALB, e del triangolo ALB : EGF (§. 272). Ciò posto.

Il triangolo ACB : ALB=CP : LP (§. 333)= CP : GO.

Il triangolo ALB : EGF=AB : EF (§. 332).

Dunque il triangolo ACB : EGF in ragione composta di CP : GO, e di AB : EF.

In oltre i parallelogrammi AD, EH, essendo doppj de' triangoli ACB, EGF, deggiono essere nella medesima ragione di questi (§. 286); cioè, siccome or ora si è dimostrato, nella composta dalle ragioni di AB : EF, e di CP : GO Sicchè *i triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno* ec. c. b. d.

PROP. XXI. TEOR. XV.

§. 335. *I triangoli, ed i parallelogrammi, i quali hanno un angolo uguale ad un angolo, sono tra essi anche in ragione composta da quelle de' lati formanti gli angoli uguali.*

Dichiarazione. Abbiano i triangoli ACB, EGF, come pure i parallelogrammi AD, EH l'angolo CAB=GEF. Dico, che il triangolo ACB sta al triangolo EGF in ragione composta da quella di AB : EF, e da quella di AC : EG; e così pure il parallelogr. AD al parallelogr. EH.

Dimostrazione. *S' intendano calate le altezze CP, GO.* I due triangoli rettangoli CPA, GOE avendo per ipot. uguali gli angoli in A, ed in E, sono per conseguenza equiangoli (§. 81 n. III.), e perciò simili (§. 310). Onde CA : CP=GE : GO; e permutando, CA; GE=CP : GO. Ciò posto.

Per lo teor. prec. il triangolo ACB : EGF=AB : EF, e siccome CP : GO. Ma ora si è dimostrato, ch' essendo l' angolo A=E, la ragione di CA : GE è la stessa che la ragione di CP : GO. Dunque sarà pure il triangolo ACB : EGF siccome AB : EF, ed AC : EG; cioè in ragione composta da quelle de' lati, che formano gli angoli uguali.

I parallelogrammi AD, EH dovendo essere nella stessa ragione de' triangoli ACB, EGF (§. 286), sono pure nella composta dalle ragioni di AB : EF, e di AC : EG. Sicchè *i triangoli, ed i parallelogrammi, che hanno un angolo* ec. c. b. d.

C A P. V.

Dell' uguaglianza de' triangoli, e de' parallelogrammi, che hanno le basi in ragione reciproca delle altezze.

PROP. XXII. TEOR. XVI.

§. 336. *Se due triangoli, o due parallelogrammi sono uguali, la ragione delle basi è reciproca di quella delle altezze; e se la ragione delle basi è reciproca di quella delle altezze, sì i triangoli, che i parallelogrammi sono uguali.*

I. Dichiarazione. Sieno uguali i triangoli ACB, EGF, oppure i parallelogrammi AD, EH. Dico, che la ragione delle basi AB, EF è reciproca di quella delle altezze CP, GO; cioè AB : EF=GO : CP.

Dimostrazione. *Dall' altezza maggiore CP si tagli PL=GO, e si congiungano AL, BL.* Essendo uguali per ipot. i due triangoli ACB, EGF, sarà la ragione del triangolo ALB : EGF uguale alla ragione dello stesso triangolo ALB : ACB (§. 258). Ma la ragione del triangolo ALB : EGF è quella di AB : EF (§. 332); e la ragione di ALB : ACB è quella di PL : PC, ossia di OG : PC (§. 333). Dunque queste due ragioni di AB : EF, e di GO : CP sono tra esse uguali, ossia AB : EF=GO : CP.

In oltre se i parallelogrammi AD, EH sono uguali, debbono essere uguali pure i triangoli ACB, EGF (§. 96). Ma dall'uguaglianza de' triangoli ACB, EGF ne deriva, come ora si è dimostrato, che AB : EF=GO : CP. Dunque anche quando i parallelogrammi AD, EH sono uguali, deve essere AB : EF=GO : CP. Sicchè *se due triangoli, o due parallelogrammi* ec. c. b. d. in primo luogo.

II. Dichiarazione. Abbiano i triangoli ACB, EGF, o pure i parallelogr. AD, EH le basi AB, EF in reciproca ragione delle altezze CP, GO; cioè che sia siccome AB : EF, così GO : CP. Dico, essere il triang. ACB=EGF, ed il parallelogrammo AD=EH.

Dimostrazione. *S'intenda fatta la stessa costruzione di poco prima, e si esaminino le ragioni del triangolo ALB a' due triangoli EGF, ACB.* Il triangolo ALB : EGF=AB : EF (§. 332). Lo stesso triangolo ALB : ACB=PL : PC (§. 333) =GO : CP. Ma per ipot. AB : EF=GO : CP. Dunque il triangolo ALB : EGF, siccome lo stesso triangolo ALB : ACB. Conseguentemente ACB=EGF (§. 261).

In oltre i parallelogr. AD, EH sono doppj de' triangoli ACB, EGF (§. 96). Se dunque nell'ipotesi che AB : EF=GO : CP, sono uguali i triangoli ACB, EGF, uguali pure esser deggiono i loro doppj (§. 286), cioè i parallelogr. AD, EH. Sicchè *se due triangoli, o due parallelogrammi hanno le basi*

in ragione reciproca delle altezze, sono tali triangoli ec. c. b. d.

§. 337. Coroll. Se i due triangoli ACB, EGF, o i due parallelogr. AD, EH abbiano l'angolo A=E, in questo caso calate le altezze CP, GO, si formeranno i triangoli CPA, GOE equiangoli, e simili. Onde sarà GO : GE=CP : CA, e permutando sarà GO : CP=GE : CA. Se dunque nell'ipotesi che sieno uguali i triangoli ACB, EGF, o pure i parallelogrammi AD, EH dev'essere AB : EF=GO : CP; a questa ipotesi aggiunta l'altra, che l'angolo A sia uguale all'angolo E, sarà pure AB : EF=GE : CA; cioè i lati formanti gli angoli uguali sono tra essi reciprocamente proporzionali.

E se, essendo l'angolo A=E, sia dippiù AB : EF=EG : AC; sarà anche AB : EF=OG : PC; e quindi i triangoli ACB, EGF, ed i parallelogr. AD, EH per lo teor. prec. saranno uguali. Sicchè *se due triangoli, o due parallelogrammi, aventi un angolo uguale ad un angolo, sono tra essi uguali; i lati formanti gli angoli uguali sono tra essi reciprocamente proporzionali: e se i lati formanti gli angoli uguali sono tra essi reciprocamente proporzionali, saranno tra essi uguali sì i triangoli, che i parallelogrammi.*

PROP. XXII. TEOR. XVII.

§. 338. *Se quattro rette sono proporzionali, il rettangolo fatto dalle due estreme è uguale al rettangolo fatto dalle due di mezzo: e se quattro rette sono tali, che il rettangolo delle due estreme è uguale al rettangolo delle due di mezzo, sono tali rette tra esse proporzionali.*

I. Dichiarazione. Sieno proporzionali le quattro rette A, B, C, D; cioè A : B=C : D. Fig. 103
Dico che il rettangolo che si fa da A, e D, sia uguale al rettangolo che si fa da B e C.

Dimostrazione. *Si faccia il rettangolo LN, che abbia il lato LM=A, e'l lato LO=D. Si faccia pure l' altro rettangolo PR, che abbia PQ=B, e PS=C.* Essendo per ipot. A : B=C : D, sarà LM : PQ=PS : LO. Sicchè i due rettangoli LN, PR hanno le basi reciproche all' altezze; e conseguentemente (§. 336) sono tra essi uguali.

II. Dichiarazione. Sieno A, B, C, D quattro rette tali, che il rettangolo LN, fatto da A, e D, sia uguale al rettangolo PR fatto da B, e C. Dico dover essere A : B=C : D.

Dichiarazione. Essendo per ipot. LN=PR, sarà (§. 336) LM : PQ=PS : LO. Ma per costruz. LM=A, PQ=B, PS=C, ed LO=D. Dunque A : B=C : D. Sicchè *se quattro rette sono proporzionali, il rettangolo* ec. c. b. d.

§. 339. Coroll. Se sarà B=C, le quattro rette A, B, C, D si ridurranno a tre A, B, D, e'l rettangolo PR diverrà quadrato di B. E perciò se tre rette A, B, D sono continuamente proporzionali, il rettangolo fatto dalle due estreme A, e D è uguale al quadrato di quella di mezzo B; e se A, B, D sono tre rette tali, che 'l rettangolo fatto dalle due estreme A, e D è uguale al quadrato di quella di mezzo B, tali rette A, B, D sono continuamente proporzionali.

C A P. VI.

Della ragione, e proporzionalità de' rettilinei simili, e de' principali probl. appartenenti alla teorica de' medesimi.

L E M M A.

§. 340. *Se da' vertici di due angoli uguali di due poligoni simili si tirano delle rette a' vertici degli angoli opposti; sì fatte rette dividono i poligoni in triangoli uguali di numero, e rispettivamente simili.*

Dichiarazione. Sieno i poligoni ABCDEF, Fig. 104
LMNOPQ simili tra essi, e da' vertici degli angoli uguali in A, ed L sieno tirate a' vertici degli angoli opposti le rette AC, AD, AE, LN, LO, LP. Dico 1. che detti poligoni sono divisi dalle mentovate rette in ugual numero di triangoli; 2. che ciascuno de' triangoli, in cui è diviso il primo poligono, è simile a ciascuno de' triangoli rispettivamente, in cui resta diviso il secondo poligono.

Dimostrazione. I. Essendo simili i poligoni, sono essi di egual numero di angoli. Onde quante rette sono tirate in uno, altrettante ne sono tirate nell' altro; e conseguentemente quanti triangoli si formano in uno, altrettanti se ne formano nell' altro.

II. Per la simiglianza de' poligoni l' angolo in B=M, e AB : BC=LM : MN (§. 307).

Dunque i due triangoli ABC, LMN sono simili (§. 312).

Essendo simili i triangoli ABC, LMN, sono gli angoli BCA, MNL tra essi uguali; onde toltili rispettivamente dagli angoli BCD, MNO (che per ipot. pure son uguali), i rimanenti angoli ACD, LNO saranno eziandio uguali. Dippiù essendo simili i triangoli ABC, LMN, sarà AC : CB=LN : NM. Ma per la simiglianza de' poligoni CB : CD=NM : NO. Dunque per ragione ordinata (§. 206) AC: CD=LN : NO. Sicchè i due triangoli ACD, LNO hanno i lati AC, CD proporzionali ai lati LN, NO, ed hanno uguali gli angoli compresi dai medesimi lati. Laonde (§. 312) il triangolo ACD è simile ad LNO. Dell' istesso modo si dimostra essere il triangolo ADE simile ad LOP, ed AEF simile ad LPQ. Per la qual cosa *se dai vertici di due angoli uguali di due poligoni simili si tirano* ec. c. b. d.

PROP. XXIV. TEOR. XVIII.

§. 341. *I triangoli simili hanno tra essi una ragione, ch' è duplicata di quella de' lati omologhi.*

Fig. 93 Dichiarazione. Sieno simili i due triangoli ABC, DEF; e gli angoli uguali sieno A e D, C ed F, B ed E. Dico, che il triangolo ABC sta al triangolo DEF in duplicata ragione di AB : DE, o di AC : DF, o di CB : FE, che sono le ragioni de' lati omologhi.

Dimostrazione. Essendo l' angolo A=D, i due triangoli ABC, DEF sono tra essi in ragione composta da quella di AB : DE, e da quella di AC : DF (§. 335). Ma essendo per la simiglianza de' triangoli, AB : AC=DE: DF, sarà permutando, la ragione di AB: DE uguale alla ragione di AC : DF. Sicchè il triangolo ABC sta al triangolo DEF in ragione composta da due ragioni uguali, quelle cioè di AB : DE, e di AC : DF. E perciò il triangolo ABC sta al triangolo DEF nella duplicata di una di esse (§. 248), cioè nella duplicata di AB : DE, oppure di AC : DF. Per la qual cosa *i triangoli simili hanno* ec. c. b. d.

PROP. XXV. TEOR. XIX.

§. 342 *I poligoni simili hanno tra essi una ragione, che pure è duplicata di quella de' lati omologhi.*

Dichiarazione. Sieno simili i poligoni ABCDEF, LMNOPQ : e gli angoli rispettivamente ugua- Fig.
li sieno A ed L, B ed M, C ed N ec. Dico, 104
che il primo poligono sta al secondo in ragione duplicata di AB : LM (lati omologhi) oppure di BC : MN, oppure di CD : NO ec.

Dimostrazione. *Dai vertici degli angoli uguali A ed L si tirino ai vertici degli angoli opposti le rette AC, AD, AE, LN, LO, LP.* Saranno simili tra essi i triangoli ABC, LMN;

come pure ACD ed LNO ; ADE ed LOP ; AEF ed LPQ (§. 340).

Per la simiglianza de' poligoni essendo tra esse uguali le ragioni di BC : MN, di CD : NO, di DE : OP, di EF : PQ; uguali tra esse saranno anche le loro duplicate. Onde, perchè il triangolo

ABC : LMN in dupl. rag. di BC : MN
ACD : LNO in dupl. rag. di CD : NO
ADE : LOP in dupl. rag. di DE : OP
AEF : LPQ in dupl. rag. di EF : PQ, saranno le ragioni de' detti triangoli tutte tra esse uguali. Quindi (§. 300) sarà la somma di tutt' i loro antecedenti (cioè l' intero poligono ABCDEF) alla somma di tutt' i loro conseguenti (cioè a tutto il poligono LMNOPQ), come uno degli antecedenti al suo conseguente : cioè in ragione duplicata di BC: MN; o pure di CD : NO ec. Sicchè *i poligoni simili hanno tra essi una ragione* ec. c. b. d.

§. 343. Corollario I. Si prolunghi LM in R, finchè sia LR terza proporzionale in ordine ad AB, ed LM. Sarà la ragione di AB : LR duplicata della ragione di AB : LM (§. 274); e conseguentemente uguale alla ragione del poligono ABCDEF al poligono LMNOPQ. È chiaro adunque, come per semplici linee si possa rappresentare la ragione di due poligoni simili.

§. 344. Corollario II. In oltre essendo tutt' i quadrati simili tra essi, saranno pure i quadrati in ragione duplicata de' loro lati.

Onde la duplicata della ragione di due linee è la stessa, che la ragione de' quadrati fatti sulle medesime linee. E perciò appresso si farà uso spesse volte della ragione de' quadrati di due linee in vece della duplicata delle medesime linee.

PROP. XXVI. TEOR. XX.

§. 345. *Se quattro rette sono proporzionali, i rettilinei simili, che hanno per lati omologhi le due prime rette, sono proporzionali co' qualsivogliono altri rettilinei simili, che hanno per lati omologhi le altre due rette. E se quattro rette sono tali, che i rettilinei simili aventi per lati omologhi le due prime rette sono proporzionali co' rettilinei simili aventi per lati omologhi le altre due; sono tali rette tra esse proporzionali.*

I. Dichiarazione. Sia A : B=C : D. Dico che due qualsivogliano figure simili aventi per lati omologhi A, e B hanno tra esse la medesima ragione, che due altre figure pure simili, le quali abbiano per lati omologhi C, e D. Fig. 103

Dimostrazione. Essendo per ipot. uguali le due ragioni di A : B, e di C : D, anche le duplicate di esse saranno uguali (§. 275). Ma la ragione de' rettilinei simili aventi per lati omologhi A, e B è appunto la duplicata di A : B (§. 342); siccome pure la ragione de' rettilinei simili aventi per lati omologhi

C, e D è la duplicata di C : D. Dunque la ragione de' due primi rettilinei simili è uguale alla ragione degli altri due. E perciò se A : B=C : D, i rettilinei simili, che hanno per lati omologhi A, e B, sono proporzionali co' rettilinei simili, che hanno per lati omologhi C, e D.

II. Dichiarazione. Sieno A, B, C, D quattro rette tali, che due qualsivogliano rettilinei simili aventi per lati omologhi A, e B sieno proporzionali co' due qualsivogliano altri rettilinei simili aventi C, e D per lati omologhi. Dico, che A : B=C : D.

Dimostrazione. Essendo per ipot. la ragione de' rettilinei simili aventi per lati omologhi A, e B, uguale alla ragione de' rettilinei simili, che hanno per lati omologhi C, e D; sarà la duplicata di A : B uguale alla duplicata di C : D (§. 342). Onde uguali saranno pure le ragioni semplici di A : B, e di C : D (§. 276); e perciò sarà A : B= C : D. Per la qual cosa, *se quattro rette sono tali, che* ec. c. b. d.

PROP. XXVII. PROBL. VII.

§. 346. *Dato un rettilineo, e data una retta, costruire su di essa un altro rettilineo simile al dato.*

Dichiarazione. Sia dato il rettilineo ABCDEF, e sia data la retta LM. Si cerca costruire su di LM il rettilineo simile al dato. Fig. 104

Soluzione 1. Si divida il rettilineo dato in quanti triangoli si può dividere colle rette AC, AD, AE.

2. Ne' punti L ed M della retta LM si facciano gli angoli MLN, LMN rispettivamente uguali a BAC, ABC; *risulterà l' angolo LMN=ABC* (§. 81 n. III.).

3. Si facciano ne' punti L ed N della retta LN gli angoli NLO, LNO rispettivamente uguali agli angoli CAD, ACD. *Sarà l' angolo LON=ADC* (§. 81 n. III.).

4. Ne' punti L ed O della retta LO si facciano gli angoli OLP, LOP rispettivamente uguali a DAE, ADE. *Sarà l' angolo LPO=AED.*

5. Finalmente ne' punti L, e P di LP si facciano gli angoli PLQ, LPQ rispettivamente uguali ad EAF, AEF. *Sarà l' angolo LQP=AFE.*

Dico essere LMNOPQ il rettilineo cercato.

Dimostrazione. Per costruzione la somma degli angoli compresi nell' angolo MLQ è uguale alla somma degli angoli compresi nell' angolo BAF; e perciò MLQ=BAF. E per la

medesima ragione gli angoli in N, O, P sono uguali rispettivamente agli angoli in C, D, E. Sono pure uguali gli angoli in M, ed in B, come altresì gli angoli in Q, ed in F. Dunque il rettilineo LMNOPQ è equiangolo al rettilineo ABCDEF.

In oltre i triangoli LMN, NLO, OLP, PLQ sono rispettivamente equiangoli co' triangoli ABC, CAD, DAE, EAF; e perciò sono simili ad essi. Dunque per la simiglianza de' due primi triangoli sarà LM : MN=AB : BC.

Dippiù per la medesima simiglianza de' due primi triangoli MN : NL=BC : CA. Ma per la simiglianza de' due secondi triangoli NL : NO=CA : CD. Dunque MN, NL, NO sono in ordinata ragione con BC, CA, CD; e perciò (§. 296) MN : NO=BC : CD. Similmente si dimostra essere NO : OP=CD : DE; OP : PQ=DE : EF; PQ : QL=EF : FA.

Finalmente essendo LM, MN, NO ec. LQ in ordinata ragione con AB, BC, CD ec. FA; sarà LM : LQ=AB : AF; ed invertendo LQ : LM=AF : AB: Sicchè non solamente il rettilineo costrutto su di LM è equiangolo al rettilineo dato; ma in oltre i lati che congiungono gli angoli uguali nell' uno, e nell' altro sono tra essi proporzionali. Per la qual cosa si è costrutto sulla data retta il rettilineo simile al rettilineo dato. c. b. f. e d.

PROP. XXVIII. PROBL. VIII.

§. 347. *Costruire un rettilineo simile ad un rettilineo dato, e tale, che tra essi vi sia una data ragione.*

Dichiarazione. Sia dato il rettilineo ABCDEF, e sia data la ragione di AB : LR. Si cerca fare un rettilineo, che sia simile al dato, e tale, che il dato rettilineo sia ad esso nella ragione di AB : LR.

Soluzione. 1. Si trovi tra AB, ed LR la mezza proporzionale LM (§. 328).

2. Su LM si costruisca il rettilineo LMNOPQ simile al dato ABCDEF (§. prec.).

Dico essere LMNOPQ il rettilineo cercato.

Dimostrazione. I rettilinei ABCDEF, LMNOPQ essendo simili per costruzione, sono tra essi in ragione duplicata di AB : LM (§. 342). Ma essendo AB, LM, LR continuamente proporzionali, la ragione duplicata di AB : LM è appunto quella di AB : LR (§. 274). Dunque i due rettilinei ABCDEF, LMNOPQ sono tra essi nella ragione di AB : LR. Sicchè si è costrutto un rettilineo simile ad un rettilineo dato, e tale, che tra essi vi sia una data ragione. c. b. f. e d.

CAP. VII.

Delle ragioni degli angoli fatti e a' centri, e alle circonferenze de' cerchi; e di quelle de' settori circolari.

PROP. XXIX. TEOR. XXI.

§. 348. *Ne' cerchi uguali gli angoli fatti ne' centri, e gli angoli fatti nelle periferie sono nella ragione degli archi su' quali appoggiano; ed i settori sono pure nella ragione degli archi da' quali sono terminati.*

Fig. 105 1. Dichiarazione. Sieno uguali i cerchi AEB, CFD. S' intendano fatti a' loro centri gli angoli AOB, CPD; ed alle loro periferie gli angoli AEB, CFD. Dico essere sì l' angolo AOB : CPD, che l' angolo AEB : CFD nella ragione dell' arco AB : CD.

Dimostrazione. *Gli archi AB, CD s' intendano divisi mercè una loro aliquota comune nelle parti uguali AG, GH, HI, IB, CK, KL, LD; e s' intendano congiunti i raggi OG, OH, OI, PK, PL.* Tutti gli angoli AOG, GOH, HOI, IOB, CPK, KPL, LPD sono tra essi uguali (§. 159): e perciò l' angolo AOG, e 'l suo arco AG sono rispettivamente aliquote simili sì dell' angolo AOB, e del suo arco AB, che dell' angolo CPD, e del suo arco CD. Per la qual cosa (§. 265) l' angolo AOB sta all' angolo CPD, come l' arco AB all' arco CD.

In oltre gli angoli AEB, CFD sono metà degli angoli AOB, CPD fatti ai centri (§. 165); e perciò sono nella stessa ragione che questi (§. 265). Conseguentemente essi pure sono nella ragione di AB: CD.

II. Dichiarazione. Sieno uguali i cerchi AEB, CFD; e sieno AOB, CPD due settori di essi. Dico, che il settore AOB sta al settore CPD, siccome l' arco AB all' arco CD.

Dimostrazione. S' intenda fatta la stessa costruzione di poco prima. E s' intenda il settore AOG rivoltato sul settore GOH. Combaceranno l' angolo AOG con GOH, e l' arco AG con GH, e conseguentemente il settore AOG col settore GOH. Son dunque questi settori tra essi uguali. Similmente si dimostra, che ognuno de' settori HOI, IOB, CPK, KPL, LPD pure uguaglia il settore AOG. Sicchè il settore AOG, e l' arco AG sono rispettivamente aliquote simili sì del settore AOB, e dell' arco AB, che del settore CPD, e dell' arco CD. Per la qual cosa il settore AOB sta al settore CPD, siccome AB : CD (§. 265). Laonde *ne' cerchi uguali gli angoli fatti ne' centri* ec. c. b. d.

§. 349. Coroll. Quindi si ricavano le seguenti conseguenze.

I. Che gli angoli fatti o al centro di uno stesso cerchio, o alla periferìa, sono nella ragione degli archi su cui appoggiano.

II. Che ogni angolo fatto al centro di un cerchio sta a quattro retti, come l' arco su cui esso appoggia, all' intera periferìa; o come il numero de' gradi dell' arco, a 360°.
Fig. 6 imperocchè l' angolo FOG : GOE siccome l' arco FG : GE; e l' angolo GOE : EOF siccome l' arco GE : EF. Dunque sarà (§. 299) la somma di tutti gli angoli fatti intorno al centro O, cioè quattro retti (§. 63) a qualunque di essi (per esempio ad FOG), siccome la somma di tutti gli archi, cioè l' intera periferìa è all' arco (FG), su cui appoggia l' angolo. Ed invertendo, sarà *ogni angolo fatto al centro di un cerchio ec.*

III. E con corto raziocinio simile al precedente si rende chiaro, che ogni settore di un cerchio sta all' intero cerchio, come l' arco dal quale vien terminato il settore all' intera periferìa; o come il numero de' gradi del detto arco a 360°.

PROP. XXX. TEOR. XXII.

§. 350. *Se in due qualsivogliano cerchi sien formati angoli uguali ai centri, o alle periferìe; 1. gli archi su' quali detti angoli appoggiano sono proporzionali all' intere periferie; 2. ed i settori terminati da tali archi sono proporzionali agl' interi cerchi.*

Fig. 106 Dichiarazione. Sieno AEB, CFD due qualsivogliano cerchi; e sieno uguali gli angoli AOB, CPD fatti ne' loro centri, oppure gli angoli AEB, CFD fatti nelle periferie. Dico I. che sta l' arco AB : CD, siccome l' intera periferìa AEB: CFD. II°. che il settore AOB: CPD, siccome tutto il cerchio AEB : CFD.

Dimostrazione I. Essendo per ipot. l' angolo AOB=CPD; sarà AOB a quattro retti, siccome CPD a quattro retti (§. 258). Ma AOB sta a quattro retti, siccome l' arco AB all' intera periferìa AEB (§. prec. n. II.); e così pure l' angolo CPD sta a quattro retti, siccome l' arco CD all' intera periferìa CFD. Dunque l' arco AB sta all' intera periferìa AEB, siccome l' arco CD all' intera periferìa CFD. E permutando sta l' arco AB : CD, siccome la perif. AEB : CFD.

II. Essendo per ipot. l' angolo AOB=CPD; sarà per la prima parte di questo teor. già dimostrata, l' arco AB all' intera periferìa AEB, siccome l' arco CD all' intera periferìa CFD. Ma come è l' arco AB all' intera perif. AED, così è il settore AOB all' intero cerchio AEB (§. prec. n. III.): similmente come sta l' arco CD all' intera perif. CFD, così sta il settore CPD all' intero cerchio CFD. Dunque sarà il settore AOB all' intero cerchio AEB, siccome il settore CPD all' intero cerchio CFD. Onde permutando, sarà il settore AOB al settore CPD, come il cerchio AEB al cerchio CFD. Sicchè *se in due qualsivogliano cerchi sien formati* ec. c. b. d.

PROP. XXXI. TEOR. XXIII.

§. 351. *Se in due qualsivogliano cerchi sian tagliati due archi proporzionali all' intere periferìe, o due settori proporzionali agl' interi cerchi; sono tra essi uguali sì gli angoli al centro, che gli angoli alla periferìa, che appoggiano a' detti archi, o agli archi de' detti settori.*

I. **Dichiarazione.** Sieno AEB, CFD due qualsivogliano cerchi, e sia l' arco AB : CD, siccome l' intera periferìa AEB : CFD. Dico essere l' angolo AOB=CPD, come pure l' angolo AEB=CFD.

Dimostrazione. Essendo per ipot. l' arco AB: CD, siccome l' intera perif. AEB : CFD; sarà permutando, l' arco AB alla perif. AEB, come l' arco CD alla perif. CFD. Ma siccome sta l' arco AB alla perif. AEB, così sta l' angolo AOB a quattro retti (§. 349 n. II.). Similmente siccome sta l' arco CD alla perif. CFD, così sta l' angolo CPD a quattro retti. Dunque l' angolo AOB sta a quattro retti, siccome l' angolo CPD pure a quattro retti. E perciò l' angolo AOB=CPD (§. 261); e conseguentemente ancora l' angolo AEB=CFD (§. 165).

II. **Dichiarazione.** Sia il settore AOB al settore CPD siccome l' intero cerchio AEB al cerchio intero CFD. Dico essere l' angolo AOB= CPD, come pure l' angolo AEB=CFD.

Dimostrazione. Essendo il settore AOB:CPD, siccome il cerchio AEB : CFD ; sarà permutando, il settore AOB al cerchio AEB, siccome il settore CPD al cerchio CFD. E perciò (§. 351 n. III.) sarà l' arco AB alla perif. AEB, siccome l' arco CD alla perif. CFD. Quindi sarà, per la prima parte di questo teor. già dimostrata, l' angolo AOB=CPD, e conseguentemente ancora l'angolo AEB=CFD. Sicchè *se in due qualsivogliano cerchi sien tagliati due archi proporzionali all' intere periferie, o' due settori proporzionali* ec. c. b. d.

C A P. VIII.

Delle ragioni che hanno le periferie circolari, i cerchi, i settori, e le porzioni di essi; e della quadratura di tali spazj.

§. 352. Definizione. *Simili* si dicono due archi circolari, se sono proporzionali alle intere periferie. Parimente *simili* si dicono due settori, e *simili* si dicono due porzioni circolari, se vengono terminati da archi simili.

§. 353. Corollario I. Sicchè la simiglianza sì de' settori, che delle porzioni circolari in due qualsivogliano cerchi è inseparabile dalla simiglianza degli archi. E perciò dalla simiglianza di due settori, o di due porzioni circolari di due qualsivogliano cerchi, non altrimenti che dalla simiglianza degli archi,

rettamente si dedurrà 1. l' uguaglianza degli angoli, che su gli archi di detti settori, o delle dette porzioni si fanno sì a' centri, che alle periferie de' detti cerchi (§. 351): 2. l' uguaglianza degli angoli contenuti in esse porzioni simili; giacchè questi sono supplimenti a due retti degli angoli, che appoggiando agli archi simili delle dette porzioni giacciono nelle periferie (§. 170).

II. Vicendevolmente l' uguaglianza degli angoli fatti nelle porzioni di due cerchi è inseparabile dall' uguaglianza degli angoli fatti a' centri, e che appoggiano su gli archi delle stesse porzioni. E perciò dall' uguaglianza degli angoli fatti nelle porzioni di due cerchi rettamente si dedurrà, non altrimenti che dall' uguaglianza degli angoli fatti ne' centri (§. 350) 1. la simiglianza degli archi delle porzioni; 2. la simiglianza de' settori terminati dagli archi delle porzioni.

§. 354. Corollario II. In oltre essendo i settori di due cerchi proporzionali agl' interi cerchi, se gli archi di essi sono proporzionali alle intere periferie, ed al contrario; è manifesto, che i settori simili sono proporzionali agl' interi cerchi; e che i settori proporzionali agl' interi cerchi sono simili tra essi.

LEMMA

§. 355. *Ogni archetto circolare infinitamente picciolo per rispetto dell' intera periferia si può senza errore sensibile prendere come congruente colla sua tangente.*

Dichiarazione. Nel cerchio APGE s' intenda essere AB un archetto infinitamente picciolo per rispetto dell' intera periferia APGE; e s' intenda per lo punto A tirata la tangente AC sino che incontri il diametro GB prolungato in C. Dico, che l' arco AB si può stimare confondersi colla tangente AC. Fig. 107.

Dimostrazione. Essendo l' archetto AB infinitamente picciolo, è chiaro che anche la sua tangente AC dev' essere infinitamente picciola per rispetto del diametro GB. Ora dovendo essere il rettangolo di GC in CB uguale al quadrato di CA (§. 186); sarà GC : CA = CA : CB (§. 338). Onde siccome AC è infinitamente picciola per rispetto di GC, così pure BC dev' essere infinitamente picciola per rispetto di CA. Si potrà dunque tenere BC in conto di un nulla. Ma BC rappresenta il massimo allontanamento della tangente AC dall' archetto AB. Si potrà dunque senza errore sensibile stimare, che la tangente AC si confonda coll' archetto AB, ed esser l' una come congruente coll' altro. Sicchè *ogni archetto circolare* ec. c. b. d.

§. 356. Avvertimento. Facendo uso del teor.

dimostrato nel §. 183. *oss.* II., e del teor. §. 338, si può con un raziocinio simile al precedente dimostrare, che l' archetto HGK infinitamente picciolo per rispetto della periferia si confonde colla sua corda HK.

§. 357. Corollario. Dunque senza errore sensibile si possono stimare le periferie de' cerchi confondersi co' perimetri de' poligoni regolari infinitilateri, che si possono concepire iscritti, o circoscritti ad essi; ed i cerchi medesimi confondersi co' detti poligoni.

PROP. XXXII. TEOR. XXIV.

§. 358. *Le periferie de' cerchi sono tra esse nella ragione de' raggi; ed i cerchi sono tra essi nella ragione de' quadrati de' medesimi raggi.*

Dichiarazione. Sieno APGI, DVMN due qualsivogliano cerchi. Dico I. essere la periferia APGI, alla periferia DVMN, siccome OA : OD : II. e tutto lo spazio circolare APGI a tutto lo spazio circolare DVMN, siccome il quadrato di OA al quadrato di OD.

Dimostrazione. *S' intendano i due cerchi APGI, DVMN posti uno sull' altro in modo, che O sia il centro comune di essi; e nel centro O s' intenda fatto l' angolo AOB, che sia infinitamente picciolo per rispetto di un retto. Finalmente s' intendano tirate per A, e D le tangenti AC, DF.* Si potranno senza errore sensibile prendere gli archetti AB, DL come congruenti colle tangenti AC, DF (§. 355).

Essendo l'angolo AOB=DOL, sarà la ragione delle periferie APGI, DVMN uguale a quella degli archetti AB, DL (§. 350); e perciò uguale a quella delle rette AC, DF. Ma per la simiglianza de' triangoli AOC, DOF, sta CA : FD=AO : DO (§. 310). Dunque la ragione delle periferie APGI, DVMN è uguale a quella de' raggi AO, DO.

II. In oltre essendo l'angolo AOB lo stesso, che l'angolo DOL, sarà (§. 352) l'intero cerchio APGI all'intero cerchio DVMN, siccome il settore AOB al settore DOL, ossia come il triangolo AOC al triangolo DOF. Ma questi triangoli per esser equiangoli, e perciò simili, sono tra essi nella ragione duplicata di OA : OD (§. 341); ossia nella ragione de' quadrati di OA, e di OD (§. 344). Dunque l'intero cerchio APGI sta all'intero cerchio DVMN, come il quadrato di OA al quadrato di OD. Sicchè *le periferie de' cerchi sono tra esse nella ragione* ec. c. b. d.

§. 359. Corollario. Sieno simili i settori IOE, NOM, e conseguentemente simili le porzioni circolari IE, NM; saranno sì fatti settori nella ragione de' cerchi interi (§. 354); e perciò nella ragione de' quadrati de' raggi IO, NO (§. *prec.*). Ma i triangoli IOE, NOM, essendo isosceli, ed avendo l'angolo in O di comune, sono simili (§. 312); onde la loro ragione pure è quella de' quadra-

ti di IO, NO (§. 341). Sicchè la ragione del settore IOE al settore NOM è uguale alla ragione del triangolo IOE al triangolo NOM. Quindi sarà (§. 291) la differenza degli antecedenti, cioè la porzione circolare IE, alla differenza de' conseguenti, cioè alla porzione circolare NM, siccome uno degli antecedenti al suo conseguente, ossia come il quadrato di IO al quadrato di NO.

PROP. XXXIII. TEOR. XXV.

§. 360. *Ogni cerchio è uguale ad un triangolo, che ha per base una retta eguale alla periferia, e per altezza il raggio.*

Dichiarazione. Rappresenti APGI qualunque cerchio; ed immaginiamo un triangolo, che abbia per base una retta uguale alla periferia APGI, e per altezza il raggio AO. Dico, che l'intero spazio del cerchio APGI è uguale allo spazio del detto triangolo.

Dimostrazione. *S' intenda essere AB una parte infinitamente picciola della periferia. S' intendano congiunti i raggi OA, OB, e per A tirata la tangente AC, che si unisca col raggio OB prolungato in C.* L intero cerchio APGI sta al settore AOB, come l'intera sua periferia all'arco AB (§. 49 n. III.), ossia come una retta uguale alla periferia APGI alla retta tangente AC. Ma alla ragione di queste due rette è uguale la ragione di due triangoli, che si fanno sopra di esse col raggio OA per comune altezza (§. 332). Dunque l' intero cerchio APGI sta al settore AOB, come un triangolo, che ha per base una retta uguale alla periferia, e per altezza AO, al triangolo AOC che ha per base la tangente AC, e per altezza la stessa AO. Ma in questa proporzione i due conseguenti sono uguali. Dunque il sono anche i due antecedenti; e perciò l' intero cerchio APGI è uguale al triangolo, che ha per base una retta uguale alla sua periferia, e per altezza il raggio. Sicchè *ogni cerchio è uguale ad un triangolo, che ha per base* ec. c. b. d.

PROP. XXIV. TEOR. XXVI.

§. 361. *Ogni settore circolare è uguale ad un triangolo, che ha per base una retta uguale all' arco dal quale è terminato, e per altezza il raggio.*

Dichiarazione. Sia IOE qualsisia settore circolare: ed immaginiamo un triangolo, che abbia per base una retta uguale all' arco EI, e per altezza il raggio IO. Dico, che lo spazio del settore è uguale allo spazio del detto triangolo.

Dimostrazione. Il settore IOE sta all' intero cerchio APGI, come l' arco EI all' intera periferia IAPG: ossia come una retta uguale all' arco IE ad un' altra retta uguale alla periferia IAPG. Ma alla ragione di queste rette è pure uguale la ragione di due triangoli, che si fanno sopra di esse col raggio OI per comune altezza (§. 332). Dunque il settore IOE sta al cerchio IAPG, come un triangolo che ha per base una retta uguale all' arco IE, e per altezza il raggio OI, al triangolo che ha per base una retta uguale alla periferia, e per altezza lo stesso raggio OI. Ma in questa proporzione i due conseguenti sono uguali. Dunque il sono anche gli antecedenti: e perciò il settore IOE è uguale ad un triangolo, che ha per base una retta uguale all' arco IE, e per altezza il raggio. Sicchè *ogni settore circolare è uguale* ec. c. b. d.

§. 362. Avvertimento I. Dall' essersi dimostrato, che lo spazio del cerchio è uguale a quello di un triangolo, il quale abbia per base una retta uguale alla periferia circolare, e per altezza il raggio; è facile ad intendersi, che la *quadratura* del cerchio, cioè la determinazione del quadrato, che sia uguale allo spazio del cerchio, dipende dalla determinazione di una retta, che sia uguale alla periferia di quel cerchio, che si vuol quadrare. Imperocchè determinata questa tal retta, la mezza proporzionale, che si troverebbe tra essa, e la metà del raggio, sarebbe il lato del quadrato uguale all' intero spazio circolare. Ma all' indarno si è travagliato sì dagli antichi, che da' moderni Geometri sul problema della *rettificazione* della periferia circolare; poichè non si è trovata strada alcuna, nè nella Geometria elementare, nè nella Geometria sublime, per poter determinare una retta uguale alla periferìa circolare, o a qualsisia parte di essa. Quindi si sono i Geometri ingegnati di poterla determinare ad un di presso, con ricercare una ragione assai prossima alla vera, che passa tra la periferìa di qualunque cerchio, e'l suo diametro; ed in sì fatta ricerca sono proceduti sì innanzi, che l' errore nella detta determinazione può rendersi insensibile a segno da non offendere punto l' esattezza geometrica.

§. 363. Avvertimento II. Il principio d' onde sono partiti comunemente i Geometri per giungere alla determinazione dell' anzidetta ragione è il seguente. I perimetri de' poligoni regolari iscritti, e circoscritti al cerchio tanto più si avvicinano alla periferìa dello stesso cerchio, quanto maggiore è il numero de' lati di essi. Hanno dunque conceputo, che due poligoni regolari simili di moltissimi lati sieno uno iscritto, e l' altro circoscritto a qualunque cerchio. Di poi han cercato di calcolare i perimetri dell' uno, e dell' altro poligono relativamente al raggio posto uguale ad 1. E poichè il perimetro del poligono iscritto, per quanto grande sia il numero de' suoi lati, è sempre un poco minore della periferìa, mentre per l' opposto il perimetro del simile poligono circoscritto n' è sempre un poco maggiore; perciò han consi-

derato que' perimetri come limiti, tra' quali è racchiusa la periferìa circolare, e limiti tanto più avvicinantisi alla periferìa, quanto maggiore è il numero de' lati de' detti poligoni. Onde la metà della somma de' numeri esprimenti i medesimi perimetri potrà senza errore sensibile disegnare la periferìa del cerchio relativamente al raggio posto uguale ad 1. Quindi la ragione, che senza errore sensibile si potrà prendere per quella della periferìa del cerchio al diametro, sarà la ragione dell' anzidetta metà della somma de' numeri esprimenti i perimetri de' detti poligoni a 2.

§. 364. Avvertimento III. Il calcolo del perimetro di un poligono regolare di moltissimi lati dipende dalla soluzione del seguente

PROBLEMA.

Dato il raggio OP del cerchio PGA, e dato relativamente ad esso il lato Pp di un poligono regolare iscrittibile nel medesimo cerchio; si cerca determinare numericamente il valore del lato del poligono regolare pure iscrittibile nello stesso cerchio, che abbia il numero de' suoi lati doppio di quello del poligono dato.

Soluzione.

S' intenda diviso l' arco Pp in due parti uguali nel punto R, e congiunta PR; sarà PR il lato del poligono regolare, che ha il numero de' lati doppio del numero de' lati del poligono, cui appartiene Pp. Sicchè *dato il valore di Pp, si cerca determinare il valore di PR*. Si congiunga OR; sarà Pp divisa in S in due parti uguali, e ad angoli retti (§. 90).

1. Essendo il triangolo OSP rettangolo in S, sarà il quadrato di OS uguale alla differenza de' quadrati di OP, e di PS (§. 131). Onde se da essa si estrae la radice quadrata, questa tal radice esprimerà il valore di OS.

2. Da OR (raggio) si sottragga OS già determinata; si farà nota SR. E poichè nel triangolo rettangolo PSR, il quadrato di PR è uguale alla somma de' quadrati di PS, e di SR, con estrarre da tal somma la radice quadrata, si otterrà il valore di PR, che si cercava.

Applicazione.

Dunque posto di qualsisia cerchio il raggio OP=1, e supposto essere Pp il lato dell' esagono regolare iscrittibile in esso cerchio, sarà pure Pp=1 (§. 198); onde col metodo già esposto si potrà calcolare PR lato del dodecagono regolare iscrittibile nello stesso cerchio. Conosciutosi il valore di PR si determinerà col medesimo metodo il lato del poligono regolare di 24 lati; quindi il lato del poligono di 48 lati; in seguito quello del

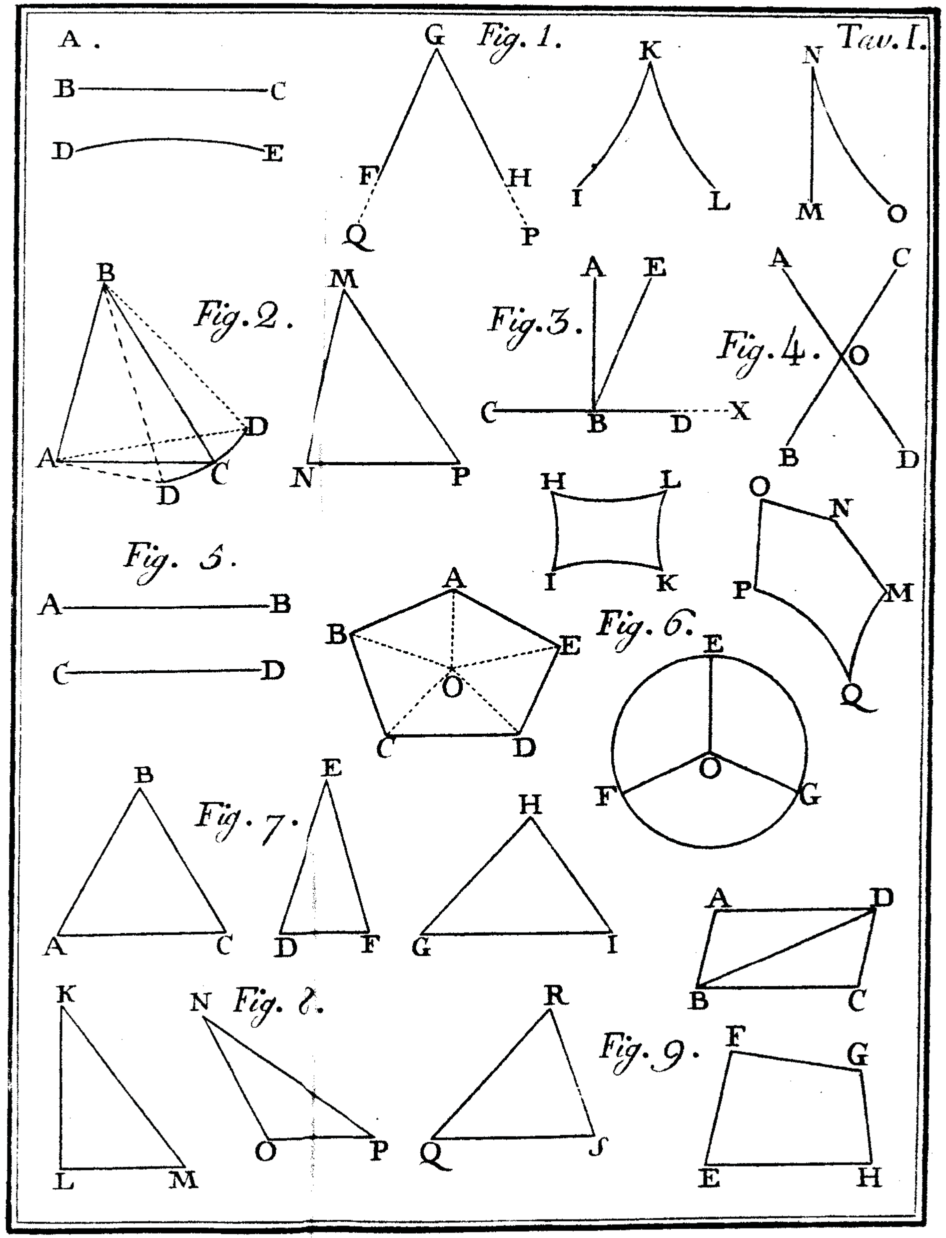
poligono di 96 lati; e da questo il lato del poligono di 192 lati. E poichè posto il raggio=1, il lato del poligono regolare di 192 lati è 0. 032723; la sua distanza dal centro è 0. 999866, e quindi il suo massimo distaccamento dall' arco è uguale a 0. 000134; sarà il valore del detto lato pochissimo differente dalla lunghezza dell' arco, che sottende. Per la qual cosa il perimetro del detto poligono, che vien espresso da 0. 032723 moltiplicato per 192, ossia da 6. 282816, mancherà di poco dalla periferia del cerchio.

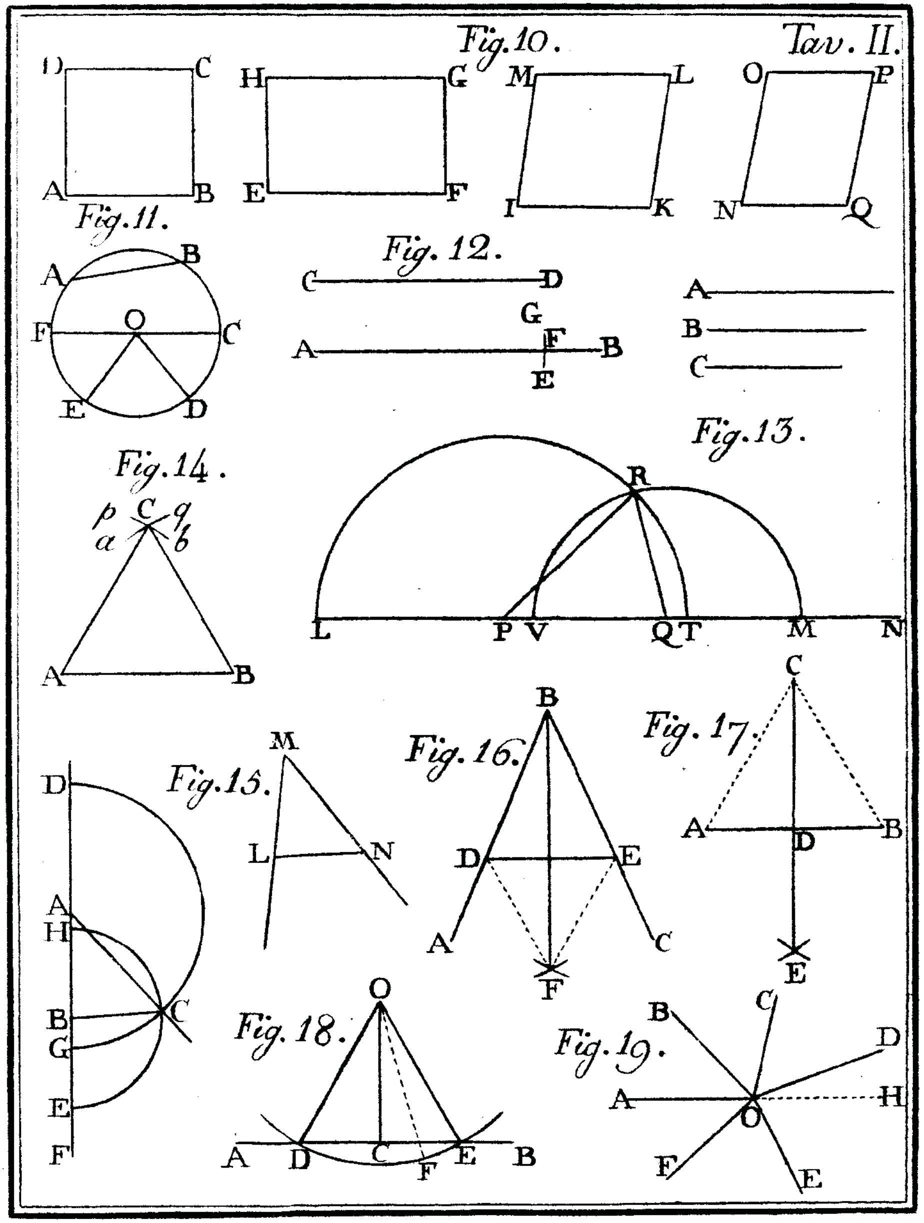
§. 365. Avvertimento IV. Determinato il valore del lato di un poligono regolare iscrittibile nel cerchio, facil cosa sarà determinare il lato del simile poligono circoscrittibile. S' intenda per lo punto R tirata la tangente QT sino ad incontrarsi co' raggi OP, Op prolungati in Q, e T. E' chiaro, che QT sarà il lato del poligono regolare circoscrittibile al cerchio, e simile a quel poligono iscrittibile, che ha per lato Pp. Ora per la simiglianza de' triangoli POS, QOR è OS : OR= OP : OQ; e per la simiglianza degli altri due POp, QOT sta OP : OQ=Pp : QT. Dunque OS : OR=Pp : QT. Sicchè QT è quarta proporzionale in ordine ad OS, OR, Pp. Ma trattandosi di determinare il lato del poligono regolare circoscrittibile al cerchio di 192 lati, sarà OS=0 999866, Pp=0. 032723, OR=1. Onde QT lato del poligono di 192 lati è uguale a 0. 0327227; e perciò l' intero perimetro del detto poligono sarà 6. 283584.

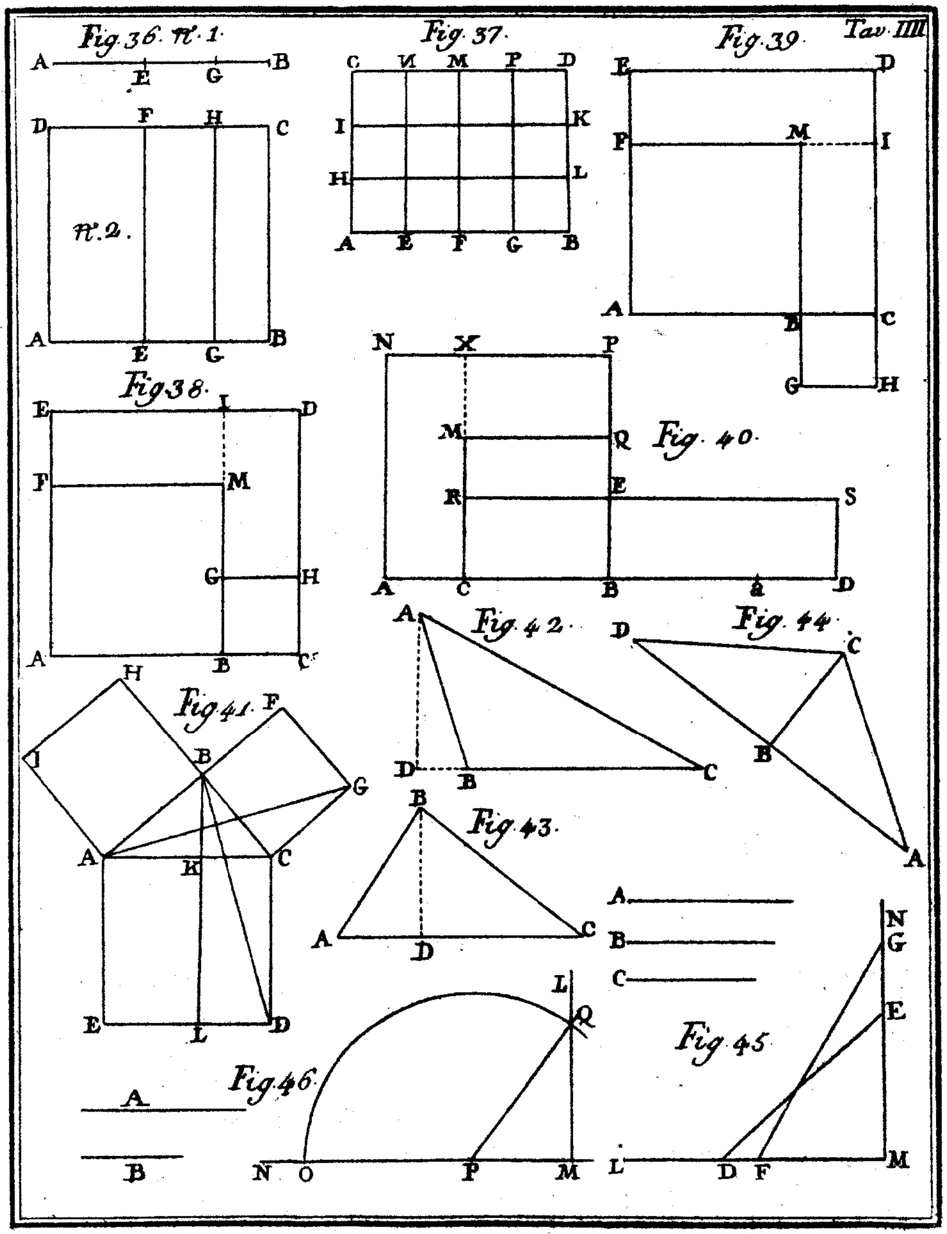
Sicchè la metà della somma de' perimetri di ambidue i poligoni uno iscrittibile, e l'altro circoscrittibile sarà 6. 2832. Per la qual cosa la ragione, che senza sensibile errore si potrà prendere per quella della periferìa al diametro, sarà la ragione di 6. 2832 : 2, ossia di 3. 1416 : 1, oppure di 3. 141 : 1.

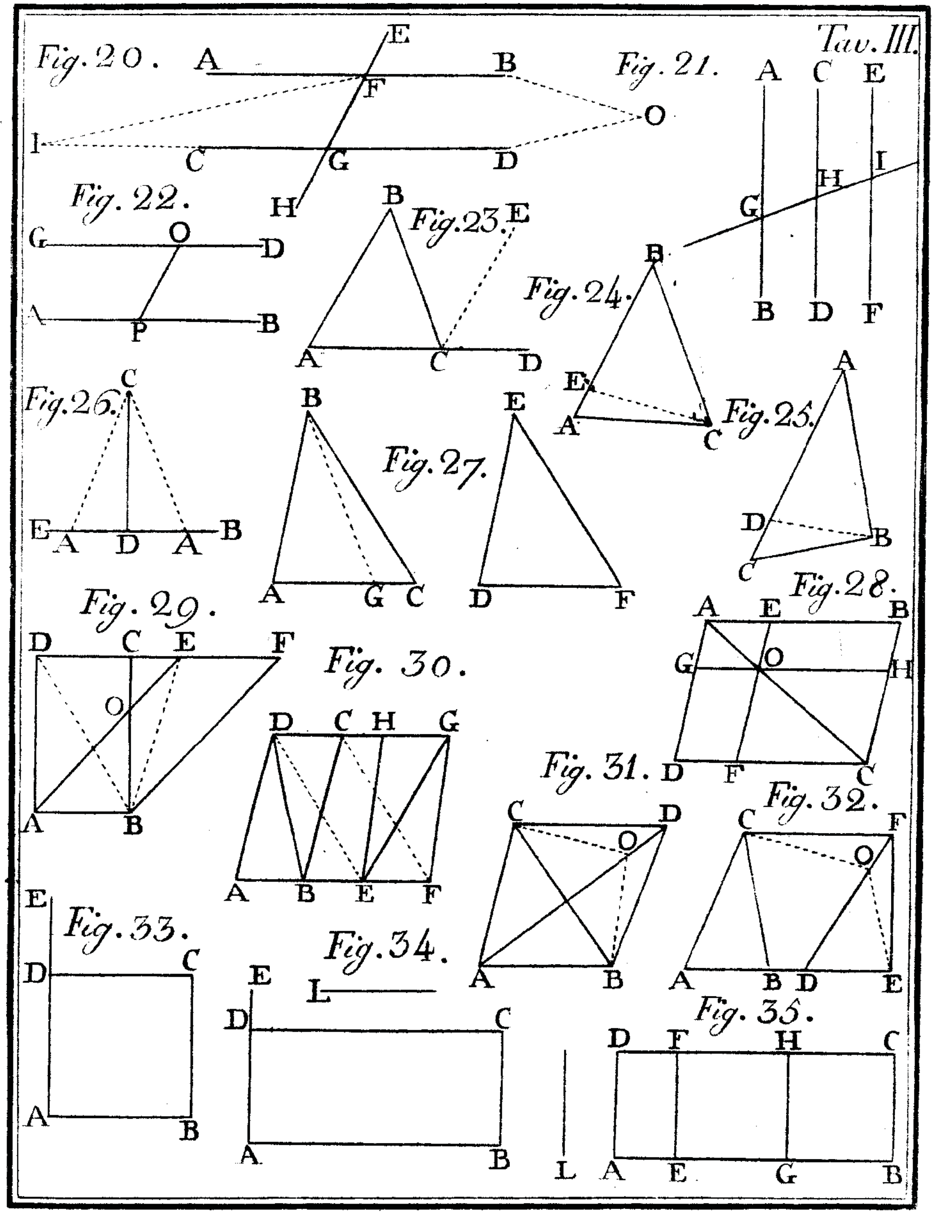
§. 366. Avvertimento V. Si noti, che l'insigne Archimede prima di tutti trovò essere della ragione della periferìa al diametro quella di 22 : 7 alquanto maggiore della vera, e quella di 223 : 71 alquanto minore. Mezio trovò la ragione della periferìa al diametro essere a un di presso uguale alla ragione di 355 : 113, e questa ragione è più prossima alla vera di quella di 22 : 7. Ludolfo a Ceulen ne ha data una ragione assai prossima alla vera, ma composta da moltissimi caratteri. Del resto la ragione quì sopra indicata, quella cioè di 3. 141 : 1 è bastantemente prossima alla vera ragione della periferìa al diametro, ed assai comoda nella pratica.

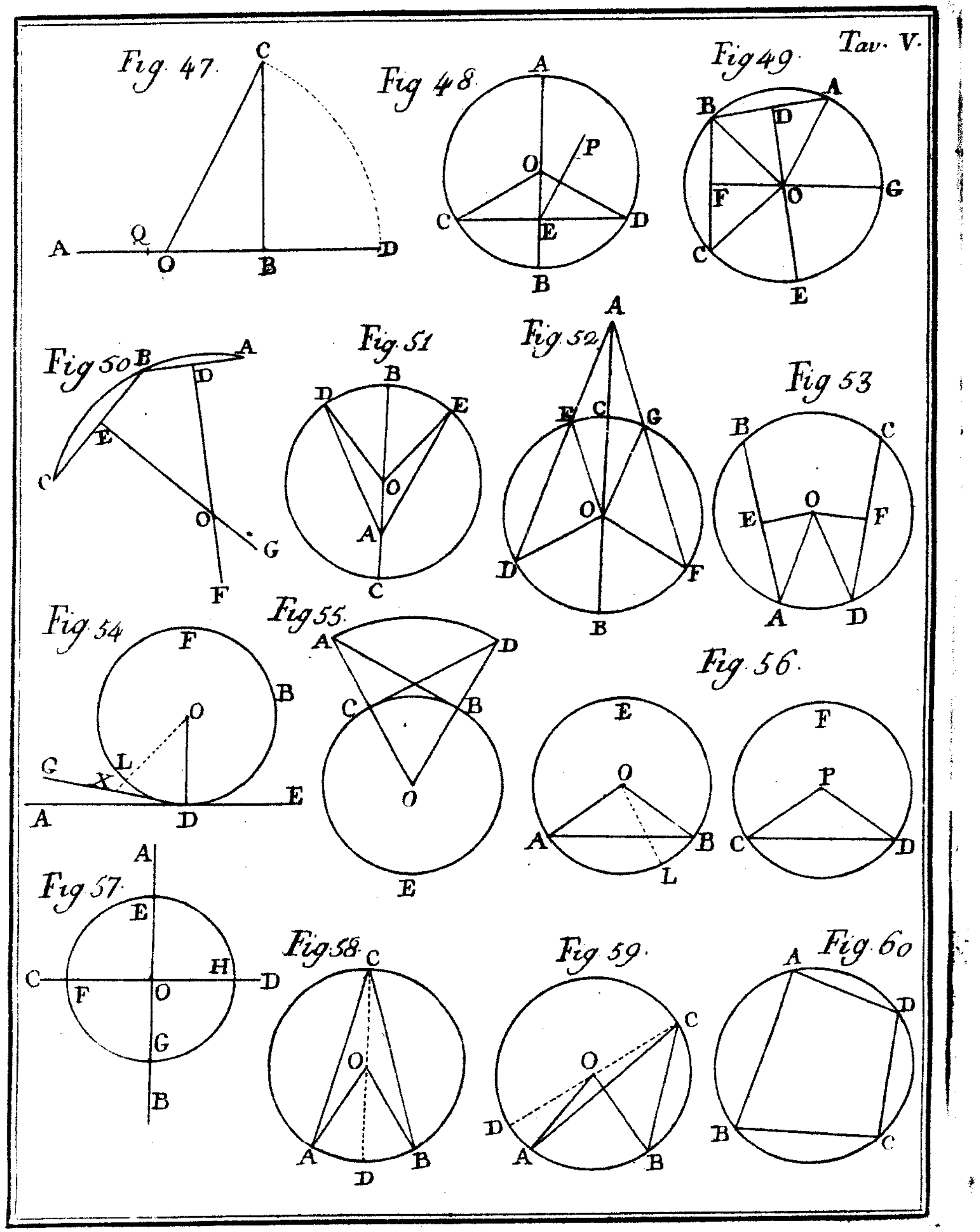
FINE.

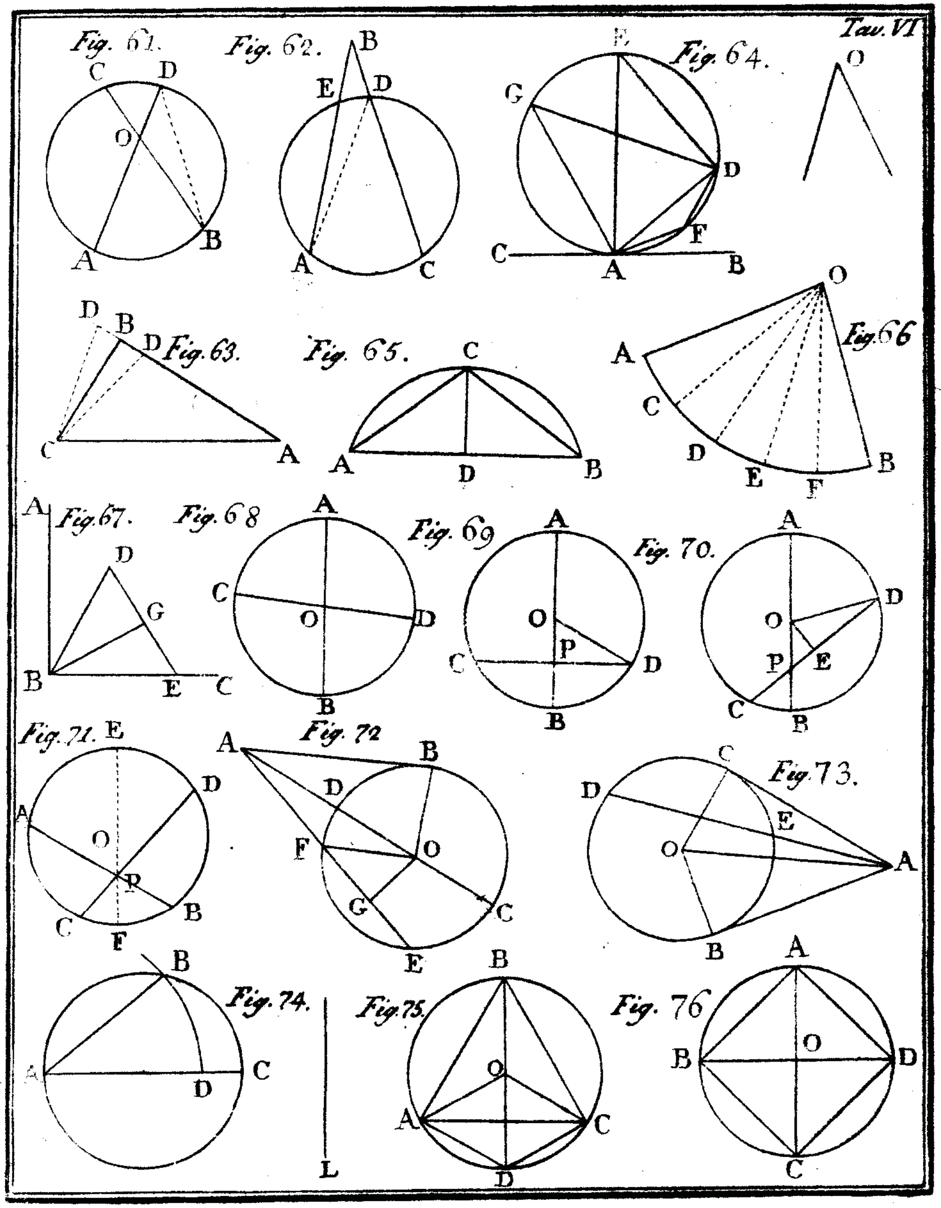


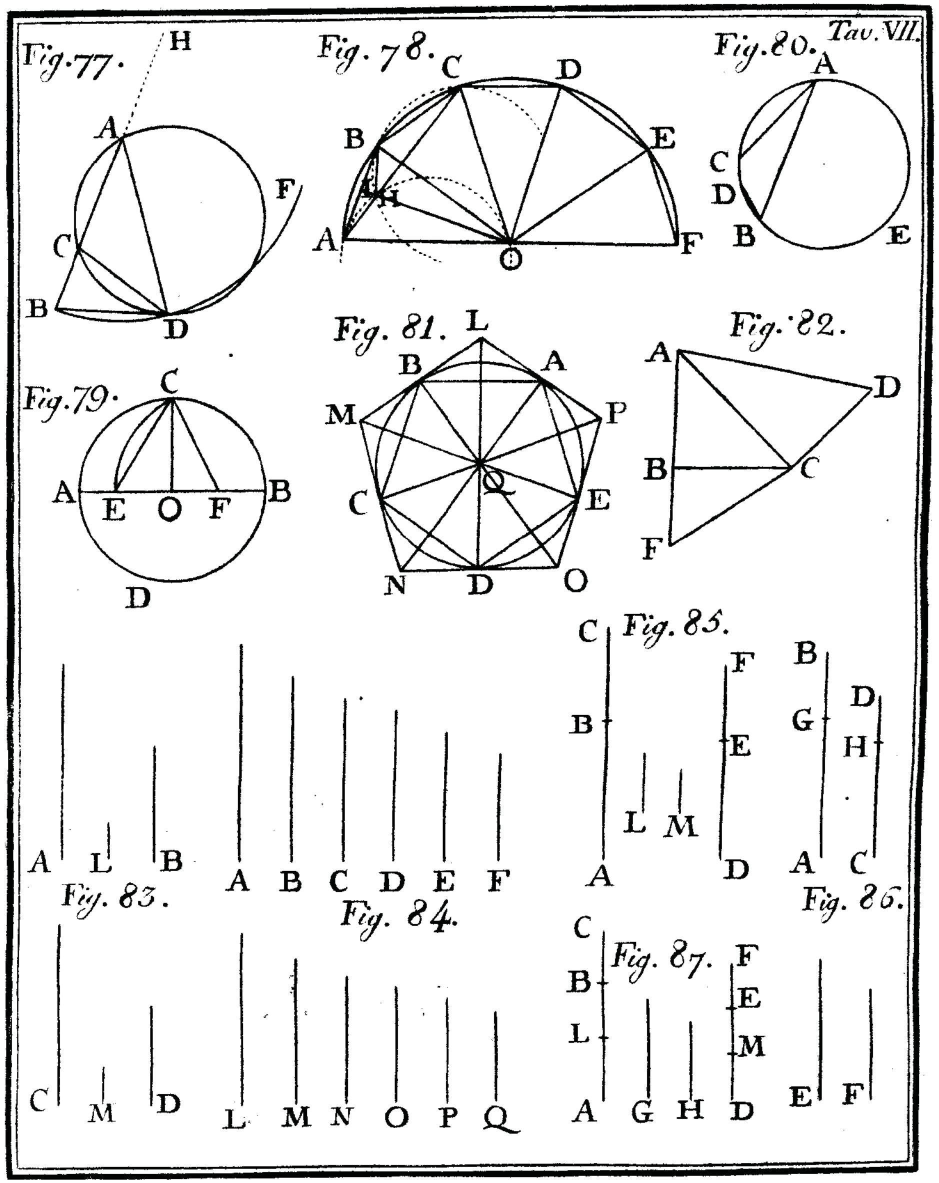

Tav. II.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.

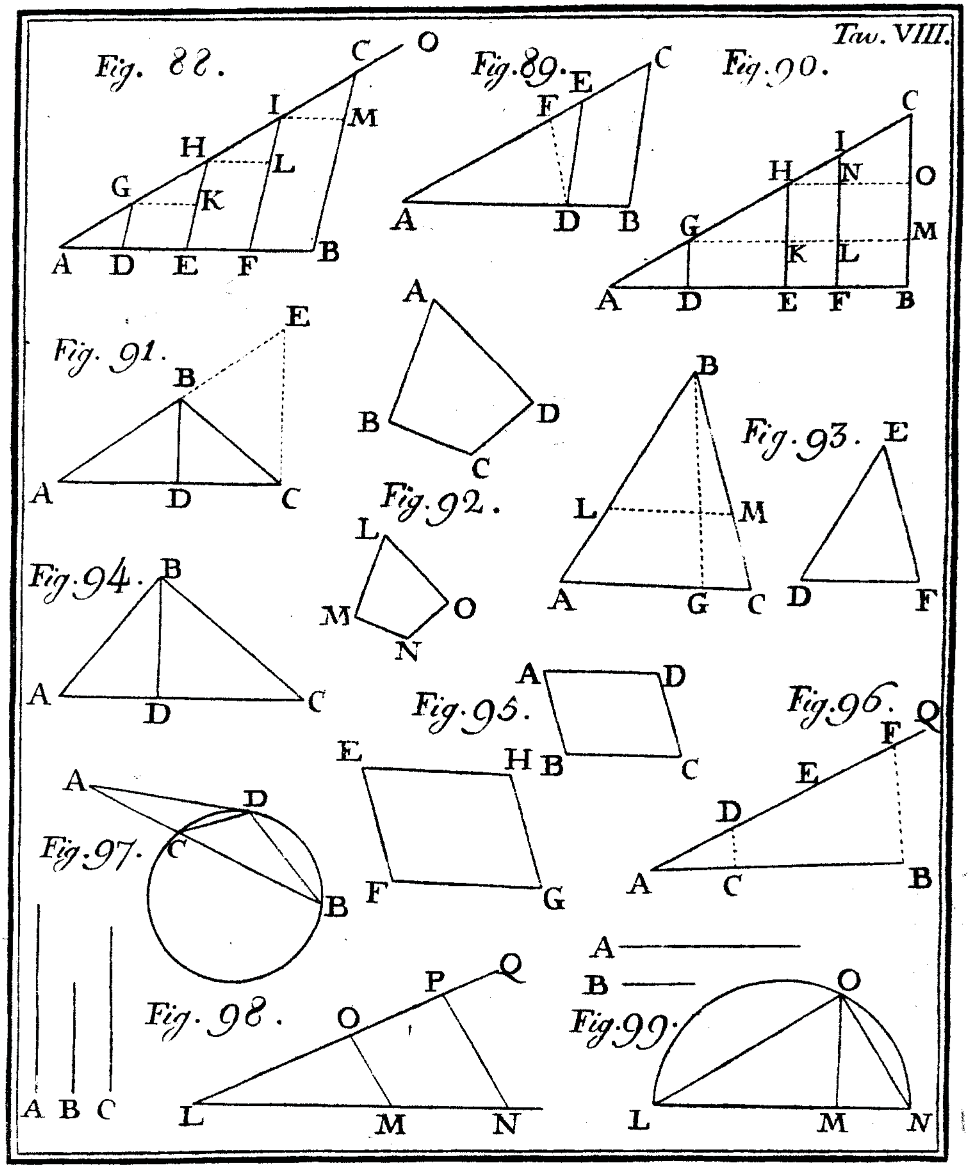

Tav. IIII
Fig. 36. n. 1
n. 2.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.

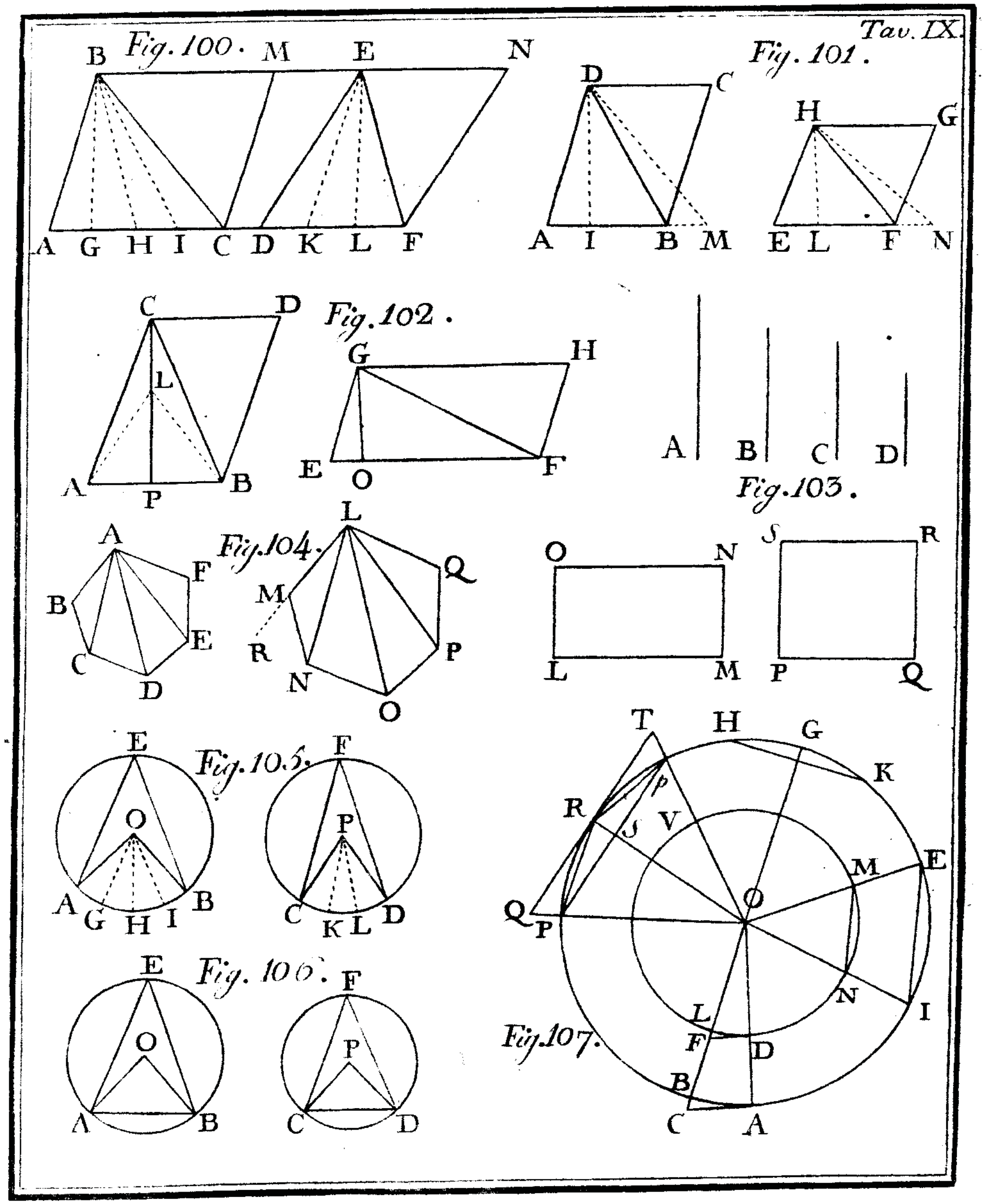

Tav. III.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.


Tav. V.
Fig. 47
Fig. 48
Fig. 49
Fig. 50
Fig. 51
Fig. 52
Fig. 53
Fig. 54
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60


Tav. VI
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66
Fig. 67.
Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.


Tav. VII.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.


Tav. VIII.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.


Tav. IX.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.