ELEMENTI
DI MECCANICA RAZIONALE
CON APPENDICE
SUI PRINCIPII FONDAMENTALI DELLE MATEMATICHE

DI

DOMENICO CHELINI

DELLE SCUOLE PIE

PROFESSORE NELL' UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

BOLOGNA

Giuseppe Legnani Editore.

1860

TIPOGRAFIA S. TOMMASO D' AQUINO.

ALLA MEMORIA

DI

LUIGI POINSOT

CHE COLLE TEORICHE INTUITIVE

DELLE COPPIE E DELLA ROTAZION DE' CORPI

APRÌ NELLA SCIENZA DELL' EQUILIBRIO E DEL MOTO

QUASI UN GRAN CENTRO

DI NUOVA LUCE DI ARMONIA E DI BELLEZZA

QUESTI ELEMENTI DI MECCANICA RAZIONALE

INSPIRATI DA TANTO MAESTRO

L'AUTORE RICONOSCENTE (*)

O. D. C.

(*) Quando nel 1839 feci tenere al Sig. Poinsot un mio saggio di geometria analitica, fondato sui principii medesimi di cui fo uso in questa meccanica e che espongo nell'Appendice, egli si degnò incoraggiarmi colla lettera seguente, meritevole di esser conosciuta in grazia de' concetti filosofici che vi si trovano espressi.

— *Je viens de parcourir votre ouvrage, et je puis vous dire avec satisfaction que je n' y ai rien trouvé qui ne m' ait paru clair, exact, et fait dans un trés bon esprit. Cette méthode des projections est en effet une des meilleures pour démontrer et découvrir. Elle a le vrai caractère qui appartient à toute bonne doctrine; je veux dire qu'elle est appropriée à la nature même de l'esprit humain. Car au fond tout notre art est de ramener ce qui est complexe, ou varié, à ce qui est simple et uniforme: toutes nos sciences ne consistent que dans une telle réduction. Or qu' y a-t-il de plus naturel en géomètrie, quand on considère tant de lignes et de surfaces diversement inclinées, que de les ramener à d'autres qui tombent en quelque sorte dans le même sens, et que l'on compose entr' elles par la plus claire de toutes les lois, qui est la simple* Addition?

C' est ce qu' on fait partout en Mécanique, et même dans l' Analyse. Car l'étude des fonctions analytiques n' a elle même d'autre objet que la réduction de les fonctions si diverses à celles que nous connaissons le mieux, telles que les puissances entierès *de la variable, et que nous regardons comme simples, parce que, après un nombre* fini *de differentiations successives, elles se ramènent à la plus simple de toutes, qui est la variable uniforme que l' on considère. C' est l' esprit de tout le calcul differentiel, sous quelque point de vue que vous l' envisagiez.*

Il me semble donc, Monsieur, que vous êtes dans la bonne voie, et que vos élémens de mathématiques ne peuvent manquer d' être utiles.

Agréez, Monsieur, l'assurance de la considération la plus distinguée de votre trés humble et dévoué serviteur

Paris 16 avril 1839.

L. Poinsot.

Questi elementi essendo indirizzati all'istruzione di giovani occupati contemporaneamente in altri studii, io mi sono ingegnato di esporli e coordinarli sotto la forma che ho sperimentato esser la più efficace a cattivare la loro attenzione, schivando al possibile la novità de' vocaboli; e se mi sono permesso qualche nuova definizione, ciò è stato nell' unico intento di esprimer la verità più fedelmente e compiutamente, ed in un linguaggio più conforme a quello che suona nella bocca di tutti. Così dalla definizione che io do della *forza d' inerzia* (pag. 119), viene a farsi manifesto che il vero anello di unione tra la statica e la dinamica si è il principio volgare: » *Non avvi azione che non sia contrabbilanciata dalla corrispondente reazione* » (pag. 181).

Da ultimo mi credo in obbligo di avvertire che, se questa edizione è riuscita abbastanza corretta, debbo renderne grazie al ch. Dott. Antonio Saporetti, professore di Calcolo sublime, il quale si è degnato gentilmente e con amore di aiutarmi nella revisione delle prove di stampa.

D. Chelini.

Bologna, Marzo 1860.

TAVOLA DELLE MATERIE

LIBRO PRIMO

STATICA.

LIBRO SECONDO

DINAMICA.

Preliminari. Definizioni: Moti di traslazione, successivi e simultanei. Legge per la composizione de' moti simultanei. *Pag.* 113.

SEZIONE I. Del moto di un punto.

CAPO I. *Del moto rettilineo.*

CAPO II. *Del moto curvilineo nello spazio.*

CAPO III. *Del moto sopra una data superficie, e sopra una data curva.*

SEZIONE II. Del moto de' sistemi.

CAPO I. *Principio di unione tra la Statica e la Dinamica.*

CAPO II. *Del moto di rotazione intorno ad un asse.*

CAPO II. *Principio delle forze vive, e sue applicazioni.*

CAPO III. *Calcolo dell' effetto delle Macchine.*

LIBRO TERZO

Principii fondamentali della Meccanica de' fluidi.

PARTE PRIMA. Idrostatica.

SEZIONE I.

Dell' equilibrio de' fluidi, qualunque sia la natura delle forze che sollecitano le loro particelle.

PARTE SECONDA. Idrodinamica.

SEZIONE I.

Del moto de' fluidi in genere.

SEZIONE II.

Del moto lineare de' fluidi.

Applicazioni. Dell' efflusso dalla luce de' vasi.

ERRORI			CORREZIONI
Pag. 4.	*linea* 11.	cangiando	invertendo
» 29.	» *ultima*	$m\Sigma GB^2$	$m\Sigma GA^2$
» 64.	» 2.	*manca il riscontro* (*a*)	
» 79.	» 5.	è uguale	è uguale ed opposta
» 83.	» 2.	*salendo* (79)	(*App.* 40)
» 86.	» 8.	*manca il riscontro* (1).	
» 152.	» 5.	*salendo, manca il riscontro* (3).	
» 163.	» 15.	$\frac{dx}{dt} = c.$	$\frac{dx}{dt} = 0$
	» 22	è l' altro	e l'altro
» 168.		*ove trovasi* $\sqrt{(1-z^2)}$, *si legga* $\sqrt{(1-z)}$	
» 172.	» 5.	*dopo* punto *si aggiunga* (α, β) od A, se la prima passa pel punto $\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n}\right)$.	
» 175.	» *ult.*	*manca il riscontro* (*b*)	
» 183.	» 10.	*salendo* (168)	(68)

ELEMENTI DI MECCANICA

NOZIONI PRELIMINARI

Moto, quiete, forze commensurabili ed incommensurabili, loro valori in intensità e in direzione resi visibili da linee rette; equilibrio delle forze sopra un corpo; sistemi di punti materiali; meccanica.

1. *Moto* è passaggio da luogo a luogo; *quiete* è permanenza nello stesso luogo.

2. *Forza* o *potenza* è la causa che produce moto o tende a produrlo. Ogni forza agisce con una certa *intensità*, e secondo una certa linea retta o *direzione*.

a) Una forza si dice *dupla*, *tripla*, *quadrupla*.... *multipla* di un' altra se è uguale a questa ripetuta *due*, *tre*, *quattro*.... *molte volte*: in corrispondenza, questa seconda forza si dice *suddupla*, *suttripla*, *suqquadrupla*... *summultipla* della prima. Così il peso di cinque libbre è cinque volte il peso di una libbra, e questo è un suqquintuplo di quello. Due forze sono *commensurabili tra loro* se possa esistere una terza forza *summultipla* di ciascuna di esse: altrimenti si dicono *incommensurabili tra loro*.

3. I *valori* di più forze della stessa specie, per esempio di più pesi, sono dati dai numeri che si ottengono determinando il rapporto di esse forze alla forza che si prende per *unità di misura*, e però siffatti valori sono dati ancora dalle lunghezze di altrettante rette che, divise per l'unità lineare, diano luogo agli stessi numeri.

4. Donde segue che *una linea retta*, se si supponga generata da un punto che la trascorra dalla sua origine al termine, *può rappresentare completamente* una forza; essendochè noi possiamo vedere nella *origine*, *lunghezza* e *direzion* della retta, il *punto di applicazione*, il *valore* e la *direzion* della forza.

Secondo questa convenzione, quando si dirà che più forze P, Q, R, S, sono *rappresentate* dalle rette OP, OQ, OR, OS (*fig.* 1.) si deve intendere che O è *il punto di applicazione* delle forze date, e che agiscono rispettivamente nelle *direzioni* onde da O si va ai punti P, Q, R, S, e colle *intensità* rappresentate dalle lunghezze OP, OQ, OR, OS.

5. Più forze si dicono in *equilibrio* sopra un corpo se non alterano lo stato del corpo sia di *quiete*, sia di *moto*.

6. *Corpo* è un aggregato di più particelle materiali. Per *materia* s' intende una sostanza dotata d' impenetrabilità e d' inerzia. *Impenetrabilità* è quella proprietà per cui due particelle materiali non possono occupare insieme lo stesso luogo. *Inerzia* è quella proprietà per cui una particella di materia, abbandonata a sè stessa, non può alterare lo stato in cui si trova, sia di quiete, sia di moto.

7. Per *punto materiale* s' intende un punto in cui si concepisce raccolta e concentrata una certa quantità di materia. I punti materiali si suppongono spesso collegati in *sistema* sia per mezzo di rette *inflessibili* ed *inestendibili*, sia per mezzo di fili anch' essi inestendibili ma perfettamente flessibili; ed il sistema così costituito ora è o si riguarda come *rigido*, cioè di forma invariabile, ed ora è di *forma variabile;* e si dice *sistema libero* quando non è ritenuto da punti fissi.

8. La **Meccanica** è la scienza che ha per oggetto le leggi che presiedono all' azion delle forze ne' fenomeni dell' equilibrio e del moto, ed è **Statica** nell' equilibrio, e **Dinamica** nel moto.

Per facilitare lo studio di questa scienza si comincia dal fare più astrazioni a fine di raccogliere e concentrar l' attenzione unicamente sulle forze e i loro punti di applicazione. In appresso, discendendo dalle altezze speculative, si ha riguardo alle cose quali sono in natura, e si cerca di mettere in aperto le leggi reali secondo cui si producono i fenomeni dell' equilibrio e del moto.

LIBRO PRIMO

STATICA

Definizioni. Risultante e componenti. - Distinzione tra la causa del moto di traslazione e la causa del moto di rotazione: coppia. - Trasporto del punto di applicazione di una forza. Divisione della statica.

9. La **Statica** è la scienza che ha per oggetto le leggi che presiedono alla composizione, decomposizione ed equilibrio delle forze, sia quando sono applicate ad un punto, sia quando sono applicate ad un sistema di punti.

10. Allorchè più forze, per esempio quattro A, B, C, D, sono in equilibrio sopra un sistema rigido e libero, è manifesto che le azioni di tre di queste forze saranno equivalenti ad un'azione unica, eguale ed opposta all' azione della quarta forza.

Una forza, la cui azione sopra un sistema rigido e libero equivalga alle azioni di più altre, si dice la *risultante* di queste, che ne sono chiamate le *componenti*. Così delle quattro forze in equilibrio A, B, C, D, le tre B, C, D hanno per risultante $-A$, cioè una forza eguale ed opposta alla quarta.

11. In generale: se una forza, applicata ad un sistema rigido e libero, *equivale a più altre*, rivolta in verso contrario dovrà essere in equilibrio con queste.

12. Come si distinguono due specie di moto, il *moto di traslazione* ed il *moto di rotazione*, così è naturale che vengano distinte l' una dall' altra e studiate a parte le *cause* che li producono. Nella dinamica si dimostra che la causa del moto di traslazione può ridursi ad una semplice forza applicata al centro di gravità del mobile, e che la causa del moto di rotazione può ridursi ad una forza complessa chiamata *coppia*.

La *coppia* $(P, -P)$ consiste nell'azione simultanea di due forze parallele, eguali e contrarie AP, BP (*fig.* 2).

13. *Proposizione I.* Le due forze di una coppia $(P, -P)$ non possono equivalere ad una semplice forza R, nè farsi equilibrio tra loro.

Dimostrazione. I. Pel punto di mezzo C della retta AB (*fig.* 2.) alle cui estremità sono applicate le due forze P, $-P$, s' intenda condotta la linea DE parallela alle direzioni delle due forze e prolungata all' infinito. Questa retta sarà *simmetrica* rispetto alle direzioni di esse forze, e per ragione di siffatta simmetria la loro risultante R, ove esista, dovrà cadere sopra questa retta. Imperocchè se un ragionamento rigoroso potesse dimostrare che la risultante R cade fuori e da un certo lato della retta DE, lo stesso ragionamento (cangiando nelle sue premesse l' ordine delle due componenti P, $-P$) dimostrerebbe necessariamente che la risultante dee cadere in un' altra posizione simmetrica della precedente, ed essere $= -R$ cioè parallela ed uguale ad R e diretta in senso contrario. Cangiando la direzione di quest' ultima risultante ($-R$), si dovrebbe aver l' equilibrio tra le due forze R, R parallele, uguali e dirette nel medesimo senso: assurdo. Ma, supposto che la risultante R cada sulla retta DE, non avvi ragione per cui essa debba agire piuttosto nel verso dell' una che dell'altra delle due componenti P, $-P$. Così è certo che le due forze di una coppia non possono equivalere ad una semplice forza.

II. Inoltre non possono farsi equilibrio tra loro. Imperocchè se riguardiamo la retta AB come una verga rigida e girevole intorno al punto di mezzo C, è chiaro che questa retta sospinta dalle due forze AP, BP a girare per lo stesso verso non potrà certamente rimanersi immobile, come pur dovrebbe se le forze della coppia erano già in equilibrio tra loro.

14. *Prop.* II. Il pnnto di applicazione di una forza P può trasportarsi da un punto A ad un altro B della direzion della forza, purchè il nuovo punto sia invariabilmente connesso col primo: l' effetto della forza sarà lo stesso ne' due casi.

Dim. Applichiamo al nuovo punto B due forze in equilibrio P', $-P'$ eguali tra loro ed alla forza P ed agenti secondo la retta AB (*fig.* 3.). È manifesto che l' effetto delle tre forze P, P', $-P'$ sarà equivalente a quello della sola forza P applicata in A. Ma la forza $-P'$ applicata in B fa pure equilibrio alla forza P applicata in A, non potendo dalle azioni uguali ed opposte di queste due forze nascere il moto di AB piuttosto da un lato che dall' altro.

L' effetto adunque delle tre forze P, P', $-P'$ si manifesta equivalente sia alla forza P applicata in A, sia alla forza P' applicata in B, secondochè si consideri l' equilibrio tra le due forze P', $-P'$, ovvero tra le due P, $-P'$.

a) *Corollario.* Due forze parallele ed uguali P, P' applicate ad un sistema rigido e libero non possono essere equivalenti, salvochè le loro direzioni non si confondano colla retta che unisce i loro punti di applicazione A, B. Infatti se le due forze sono equivalenti, l'una P' rivolta in verso contrario dovrà essere in equilibrio coll' altra P;

ora si è veduto che due forze parallele, uguali e contrarie, quali P, $-P'$, non possono equilibrarsi salvochè le loro direzioni non si confondano sulla retta AB.

N. B. Quando si cangerà il punto di applicazion di una forza, si deve sempre sottintendere che il nuovo punto di applicazione è *invariabilmente connesso* col primo.

15. Le leggi per la composizione, decomposizione ed equilibrio delle forze possono riferirsi a quattro capi, secondochè le forze sono *concorrenti* in un punto, o sono *parallele*, o consistono in *coppie*, o finalmente se agiscono sopra un sistema qualsivoglia di *forma invariabile.* In due altri capi si applicheranno queste leggi alla ricerca dell' equilibrio di alcuni sistemi di *forma variabile*, ed alla ricerca de' *centri di gravità.*

CAPO I.

Leggi per le forze applicate ad un punto.

§ 1. *Legge rappresentata dal parallelogrammo, ed in genere dalla linea poligona. — Applicazione alla composizione, decomposizione ed equilibrio delle forze.*

16. Più forze applicate ad un punto, se non si equilibrano, equivalgono sempre ad una forza unica, vale a dire, *hanno sempre una risultante.*

Infatti il moto che il punto prenderà o tenderà a prendere per l' azion simultanea delle forze date, avendo necessariamente una direzion determinata, si potrà riguardare come prodotto da una forza unica che agisce secondo siffatta direzione.

17. La risultante OR di due forze OP, OQ applicate ad un punto O (*fig.* 4), è compresa nel piano di queste due forze, ed in particolare nel loro angolo: e di più, se le due forze sono eguali, essa è diretta secondo la linea che divide in mezzo il detto angolo.

Dim. Siccome il piano delle due forze componenti divide tutto lo spazio in due regioni *simmetriche*, così è chiaro non esservi ragione per cui la risultante debba cadere fuori di esso piano piuttosto in una di queste regioni che nell' altra.

In secondo luogo, il punto di applicazione O, sospinto dall' azion simultanea delle due forze OP, OQ, è costretto a deviare dalla direzione di ciascuna di esse per accostarsi a quella dell' altra, e per conseguente a muoversi per entro al loro angolo, qualunque sia la intensità delle due forze.

Chè se le due componenti sono eguali, saranno *simmetriche* intorno alla linea che divide per metà il loro angolo. Questa linea segnerà dunque la direzione della risultante OR.

Proposizione fondamentale.

18. Due forze P, Q applicate ad un punto O e rappresentate dai lati OP, OQ di un parallelogrammo, equivalgono ad una forza R rappresentata dalla diagonale OR del parallelogrammo (*fig.* 5).

Dimostrazione.

La dimostrazione comprende due parti, dovendosi provare che la diagonale OR rappresenta la risultante R: 1.° nella *direzione*, 2.° e nella *intensità*.

Ma innanzi tutto è bene avvertire che, se nell' atto del ragionamento riguarderemo il parallelogrammo $OPQR$ come un *sistema rigido*, ciò non può alterare in nulla la verità della conclusione, ossia della nostra proposizione, siccome affatto indipendente da tale supposto.

Prima parte. Le forze P, Q possono essere *commensurabili* tra loro od *incommensurabili*.

Siano dapprima entrambe *commensurabili* da una terza forza f, talchè si abbia

$$P = mf, \quad Q = nf,$$

essendo m ed n due numeri interi. Immaginiamo divisi i due lati OP, OQ l' uno in m parti uguali OA, AA' etc., e l'altro in n parti uguali OB, BB' etc.: queste diverse parti si potranno riguardare come *rappresentanti* le m e le n forze f di cui sono composte le due forze date P, Q, e *l' origine* di ciascuna parte, come il punto di applicazione della forza f corrispondente (14). Dai punti di divisione di ciascuno de' due lati OP, OQ si concepiscano tirate altrettante linee parallele all' altro lato, quali sono per esempio le Bb, $B'b'$: queste linee divideranno il parallelogrammo $POQR$ in *rombi* tutti eguali tra loro, quali i due $AOBc$, $Acc'A'$.

Ciò posto, osserviamo che nel primo rombo $AOBc$ le due forze OA, OB, essendo eguali, si compongono in una risultante che dividerà per mezzo il loro angolo AOB secondo la direzione Oc, e che però si possono suppor trasportate parallelamente a sè stesse nel punto c (14), e quivi rappresentate dalle rette Bc, Ac coi punti di applicazione in B ed in A; vale a dire, *alle due forze uguali rappresentate dai lati OA, OB del rombo $AOBc$ si possono surrogare due altre forze rappresentate dai lati opposti Bc, Ac.*

Nel modo stesso si prova che, nel secondo rombo $Acc'A'$, alle due forze uguali rappresentate dai lati AA', Ac si possono surrogare due altre forze rappresentate dai lati opposti cc', $A'c'$. Continuando la stessa operazione nel passare dall' uno all' altro degli m rombi uguali onde si compone il parallelogrammo $POBb$, tutte le forze mf applicate sulla retta OP si troveranno successivamente trasportate sulla retta Bb, e si potrà conchiudere evidentemente che: *Alle due forze rappresentate dai lati OP, OB del parallelogrammo $POBb$ si possono surrogare due altre forze rappresentate dai lati opposti Bb, Pb.*

E se ora applichiamo la medesima conclusione al secondo $bBB'b'$, e poi al terzo, al quarto etc. degli n parallelogrammi uguali di cui si compone il parallelogrammo totale $POQR$, si farà manifesto che: *Alle due forze rappresentate dai lati OP, OQ si possono surrogare nel punto R due altre forze rappresentate dai lati opposti QR, PR.* È adunque provato che la risultante delle due forze P,Q, potendosi supporre applicata tanto al punto O quanto al punto R, è necessariamente diretta secondo la diagonale OR che unisce i due punti di applicazione (14, a).

Supponiamo adesso che le due forze OP, OQ siano *incommensurabili.* La direzione della risultante R, se in questo caso non si confonde colla diagonale OR, nell' uscire fuori del parallelogrammo $POQR$ segherà necessariamente uno de' due lati QR, PR, per esempio QR in qualche punto R'. Ciò supposto, da R' tiriamo parallelamente a QO una linea che incontri OP in P' (*fig.* 6.), e prendiamo per unità di forze una forza f che sia un summultiplo di OQ ma minore di $P'P$. La forza f, non essendo summultipla di OP (2, a), sarà contenuta in OP un certo numero di volte con un residuo pP minore di f, e però di $P'P$. Le forze rappresentate da Op e da OQ saranno commensurabili tra loro, e si comporranno in una forza r diretta secondo la diagonale Or del parallelogrammo costruito sulle rette Op, OQ, prese per lati, diagonale compresa evidentemente nell' angolo POR'. Così l' azione delle due forze Op ed OQ equivalendo a quella della forza unica r, l' azione delle tre forze Op, pP, OQ, ossia delle due OP, OQ equivarrà all' azione delle due forze Or e pP (supponendo l' ultima trasportata in O). Ma la risultante di Or e di pP, dovendo cadere dentro l' angolo pOr (17), non può dunque caderne al di fuori in OR' come si è supposto. È adunque assurda l' ipotesi che la direzione della risultante delle due forze OP, OQ cada fuori della diagonale OR.

Seconda parte. Dico in secondo luogo che la diagonale OR rappresenta la risultante R non solo nella *direzione*, ma eziandio nella *intensità*.

Applichiamo nel punto O due forze $-P$, $-Q$ eguali ed opposte alle componenti OP, OQ. Le tre forze.

$$-P\,,\ -Q\,,\ R$$

si faranno equilibrio intorno al punto O (10), e però una qualunque di esse, per esempio $-P$, applicata in verso contrario alla sua direzione, ossia rappresentata da OP, sarà la risultante delle altre due forze $-Q$ e R. Quindi se prolunghiamo QO in $OQ' = QO$ (*fig.* 7.), e si unisca Q' con P, nel parallelogrammo $ROQ'P$ la forza OP rappresenterà la risultante delle forze $-Q$ ed R. Ma la forza R *diretta* secondo OR, e che sin qui era *incognita* nella intensità, ove si componga colla forza OQ', non può dar luogo alla risultante OP salvochè non sia precisamente eguale a OR; poichè, se fosse più grande o più piccola di OR, composta con OQ' darebbe una risultante non diretta secondo OP, e però diversa da OP.

Ecco adunque provato per ogni parte che due forze P, Q rappresentate dai lati OP, OQ di un parallelogrammo si compongono in una forza unica R rappresentata dalla diagonale OR dello stesso parallelogrammo.

Corollarii.

19. Se l' una OP delle due forze OP, OQ cresce, rimanendo l' altra *costante*, la direzione della risultante OR si accosta alla direzione della forza crescente.

20. Fra due forze P, Q e la loro risultante R avvi questa relazione, che *ciascuna delle tre forze è proporzionale al seno dell'angolo compreso tra le altre due*, vale a dire :

$$\frac{P}{sen.(RQ)} = \frac{Q}{sen.(PR)} = \frac{R}{sen.(PQ)}\,;$$

essendochè nel triangolo OPR (*fig.* 7.) i lati OP, PR, OR, che rappresentano in grandezza e in direzione le tre forze P, Q, R, sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

21. Onde *tre forze P, Q, R, in equilibrio intorno ad un punto,* debbono trovarsi in un medesimo piano, e ciascuna esser proporzionale al seno dell' angolo compreso tra le altre due.

22. E due qualunque di esse, per esempio P, Q (*fig.* 8), stanno tra loro in ragion inversa delle perpendicolari CA, CB condotte sulle loro direzioni da un punto C preso ad arbitrio sulla direzion della terza R. Infatti i due triangoli rettangoli CAO, CBO danno

$$\frac{AC}{OC} = sen.\,(PR),\ \frac{CB}{OC} = sen.\,(RQ).$$

Per queste relazioni, la proporzione $\frac{P}{sen.\,(RQ)} = \frac{Q}{sen.\,(PR)}$ si muta in $\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}$, ed è palese che cesserebbe di esistere se il punto C fosse preso fuori della direzione della forza R.

Inoltre cotesta proporzione dovendo continuare a sussistere qualunque sia la lontananza del punto O, sussisterà eziandio nel *caso limite*, cioè nel caso che le forze siano *parallele* (*fig.* 9).

23. *Problema.* Date più forze, per esempio quattro, rappresentate dalle rette OA, Ob, Oc, Od (*fig.* 10), trovare la loro risultante.

Soluzione. Sulle prime due forze OA, Ob prese per lati si formi il parallelogrammo $OABb$: la diagonale OB rappresenterà la risultante di queste due forze. Su questa diagonale OB e sulla terza forza Oc si formi il nuovo parallelogrammo $OBCc$: la nuova diagonale OC sarà la risultante delle prime tre forze OA, Ob, Oc. Proseguendo così, l' ultima diagonale OD sarà la risultante di tutte le forze date.

In cotesti parallelogrammi successivi, i lati AB, BC, CD paralleli alle forze date formano evidentemente un poligono, il quale è chiuso dall' ultima diagonale. Dunque:

« Per trovare la risultante di più forze date si formi una linea poligona i lati della quale (a cominciare dal punto cui sono applicate le forze) siano successivamente paralleli ed uguali a ciascuna delle forze, e diretti nel medesimo senso: la *risultante* sarà la retta che va dal punto *iniziale* al punto *finale* di siffatta linea poligona. » Quindi:

24. Allorchè la linea poligona che rappresenta le forze in grandezza e direzione rimane chiusa dal lato che rappresenta l' ultima forza, la risultante sarà nulla, e le forze saranno in *equilibrio* intorno al punto di applicazione.

25. La risultante di tre forze OA, Ob, Oc (*fig.* 11) non situate nel medesimo piano, è rappresentata dalla diagonale OC del parallelepipedo costruito sulle medesime prese per lati.

26. Se le forze OA, Ob, Oc, Od applicate ad un punto O agiscono tutte secondo una medesima linea retta, la linea $OABCD$ destinata a rappresentarle l' una dopo l' altra (e che in generale è una linea poligona) si ridurrà in una linea retta, e si avrà per conseguenza

$$OD = OA + AB + BC + CD,$$

vale a dire: *La risultante di più forze applicate ad un punto secondo una medesima linea retta è uguale alla loro somma.* La qual proposizione è il compendio di quest' altra:

« La risultante di più forze applicate ad un punto secondo una medesima retta, è uguale alla somma di quelle che agiscono in un senso, meno la somma di quelle che agiscono in senso contrario, ed è diretta nel senso delle forze che formano la maggior somma. »

27. Data una forza rappresentata da una retta OD (*fig.* 10), se si costruisce una linea poligona qualsivoglia $OABCD$ che vada dalla origine al termine della retta OD, i lati di questa linea poligona rappresenteranno in grandezza e in direzione *uno degl' infiniti sistemi di forze* de' quali la forza OD è la *risultante.*

La decomposizione di una forza in più altre è adunque un problema di sua natura indeterminato, e per determinarlo conviene assoggettar le componenti a certe condizioni, come per esempio: 1.° Decomporre una forza in n forze delle quali $(n - 1)$ siano date in grandezza e in direzione, 2.° Decomporre una forza in tre parallele a tre assi Ox, Oy, Oz.

§ 2.° *Formole di relazione tra la risultante e le componenti. — Decomposizione di una forza in tre parallele ai tre assi. — Proprietà della risultante rispetto alle componenti. Applicazioni.*

N. B. La dimostrazione delle formole che seguono si trova nell' **Appendice** a questa **Meccanica**.

28. Data la forza F, se si voglia decomporre in tre P, Q, R parallele a tre assi Ox, Oy, Oz, basta proiettarla sopra ciascuno di

essi parallelamente al piano determinato dagli altri due. Si avrà

$$P = lF, \qquad l = \frac{sen.(yz, F)}{sen.(yz, x)},$$

$$Q = mF, \qquad m = \frac{sen.(zx, F)}{sen.(zx, y)},$$

$$R = nF, \qquad n = \frac{sen.(xy, F)}{sen.(xy, z)}.$$

Le tre quantità l, m, n sono ciò che diventano le componenti P, Q, R quando $F = 1$, vale a dire sono (sopra i tre assi Ox, Oy, Oz) le componenti di una retta $= 1$ ed avente la direzione secondo cui è indirizzata nello spazio la forza F; onde

$$1 = l^2 + m^2 + n^2 + 2\left[mn \cos.(yz) + nl \cos.(zx) + lm \cos.(xy)\right].$$

a) Una forza F diretta nello spazio come la risultante $= 1$ delle tre componenti l, m, n, si dirà che ha la *direzione* (l, m, n), e le tre quantità l, m, n si diranno gli *elementi* di tal direzione.
b) Se la forza F è situata nel piano xy, sarà

$$P = lF, \qquad l = \frac{sen.(Fy)}{sen.(xy)},$$

$$Q = mF, \qquad m = \frac{sen.(xF)}{sen.(xy)}.$$

c) Allorchè gli assi Ox, Oy, Oz sono coordinati tra loro ad angolo retto, gli *elementi della direzione di F diventano i coseni degli angoli che la forza F fa co' tre assi*, cioè

$$l = \cos.(xF), \quad m = \cos.(yF), \quad n = \cos.(zF);$$

onde se la forza F è nel piano xy, si ha

$$l = \cos.(xF), \qquad m = sen.(xF).$$

29. Se le forze f, f', f'' etc. applicate ad un punto O e la loro risultante F si rappresentano per altrettante rette, la retta risultante gode la proprietà espressa dalla seguente:

Prop. I. « La proiezione della risultante sopra un asse x, mutabile ad arbitrio, è sempre uguale alla somma delle **proiezioni** *omologhe* delle componenti » cioè delle proiezioni fatte parallelamente ad un medesimo *piano dirigente D:* ciò che indichiamo colla formola

$$ {}^{D}F_x = {}^{D}(f + f' + f'' + \text{etc.})_x , $$

la quale, allorchè il piano D è perpendicolare all' asse x, si scrive più semplicemente

$$ F_x = (f + f' + f'' + \text{etc.})_x , $$

e si traduce: « La risultante, *stimata secondo una direzione qualsivoglia*, è uguale alla somma delle componenti stimate secondo la medesima direzione. »

Applicazioni.

a) Le componenti P, Q, R della forza F parallele agli assi Ox, Oy, Oz saranno:

$$ P = {}^{yz}(f + f' + f'' + \text{etc.})_x , $$
$$ Q = {}^{zx}(f + f' + f'' + \text{etc.})_y , $$
$$ R = {}^{xy}(f + f' + f'' + \text{etc.})_z . $$

b) E se P', Q', R' sono le componenti di F parallele a tre nuovi assi x', y', z', tra i due sistemi di componenti si avranno le relazioni:

$$ P = lP' + l'Q' + l''R' , $$
$$ Q = mP' + m'Q' + m''R' , $$
$$ R = nP' + n'Q' + n''R' , $$

dove (l, m, n), (l', m', n'), (l'', m'', n'') sono le direzioni degli assi $x'\ y'\ z'$ rispetto agli assi $x\ y\ z$.

Supponiamo che i due sistemi di assi siano rettangolari: sarà

$$ l = \cos.(xx'), \quad l' = \cos.(xy'), \quad l'' = \cos.(xz'), $$
$$ m = \cos.(yx'), \quad m' = \cos.(yy'), \quad m'' = \cos.(yz'), $$
$$ n = \cos.(zx'); \quad n' = \cos.(zy'); \quad n'' = \cos.(zz'); $$

e per conseguenza

$$\begin{aligned} P' &= lP + mQ + nR, \\ Q' &= l'P + m'Q + n'R, \\ R' &= l''P + m''Q + n''R. \end{aligned}$$

c) Le forze siano tutte in un piano, ed in questo piano siano coordinati due sistemi di assi rettangolari xy, $x'y'$. Essendo retti i due angoli (xy), $(x'y')$, sarà

$$\begin{aligned} ang.(xx') + ang.(x'y) &= \tfrac{1}{2}\pi, \\ ang.(x'x) + ang.(xy') &= \tfrac{1}{2}\pi, \end{aligned}$$

e per conseguente

$$\begin{aligned} l &= cos.(xx'), & l' &= -sen.(xx') = -m, \\ m &= sen.(xx'), & m' &= cos.(xx') = l; \end{aligned}$$

onde

$$\left\{\begin{aligned} P &= lP' - mQ', \\ Q &= mP' + lQ'; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} P' &= lP + mQ, \\ Q' &= -mP + lQ. \end{aligned}\right.$$

d) Se la forza F e le sue componenti P, Q, R si stimano secondo una direzione qualunque s, sarà

$$F\,cos.(sF) = P\,cos.(xs) + Q\,cos.(ys) + cos.(zs).$$

E quando le forze sono in un piano xy, avremo

$$\begin{aligned} F\,cos.(sF) &= P\,cos.(xs) + Q\,sen.(xs), \\ F\,sen.(sF) &= P\,sen.(xs) - Q\,cos.(xs). \end{aligned}$$

30. Dalla proposizione I. si deducono le due seguenti di uso frequentissimo:

a) *Prop.* II. « La forza risultante, moltiplicata per la proiezione che riceve da una retta sulla propria direzione, è uguale alla somma delle forze componenti moltiplicate rispettivamente per la proiezione che ricevono sulle loro direzioni dalla stessa retta. »

Così se la retta q si proietta sulle direzioni delle forze F, P, Q, R si ha

$$F\,q\,cos.(qF) = Pq_x + Qq_y + Rq_z.$$

b) *Prop.* III. « Il quadrato della risultante è uguale alla somma de' quadrati delle componenti, più due volte la somma de' prodotti che possono farsi moltiplicandole due a due, l' una per l' altra e pel coseno dell' angolo compreso. »

Così

$$F^2 = \left.\begin{matrix} P^2 \\ Q^2 \\ R^2 \end{matrix}\right. + 2 \left|\begin{matrix} QR\,cos.(yz) \\ RP\,cos.(zx) \\ PQ\,cos.(xy) \end{matrix}\right. ;$$

ed in generale, se F si considera come la risultante delle forze f, f', f'' etc.,

$$F^2 = \Sigma f^2 + 2\,\Sigma f f'\,cos.(ff') :$$

dove il segno Σ indica la somma di tutti i termini simili a quello che ha sotto di sè.

Nel caso dell' equilibrio dovrà risultare $F = 0$, e per conseguenza

$$P = 0\,, \quad Q = 0\,, \quad R = 0\,,$$

vale a dire: « Date più forze in equilibrio intorno ad un punto, se ciascuna si decompone in tre parallele a tre assi, la somma delle componenti secondo ciascun asse dovrà essere uguale a zero; e viceversa. »

CAPO II.

Leggi per le forze parallele.

§ 1. *Legge per la composizione e decomposizione delle forze parallele. — Centro de' punti di applicazione, e sue proprietà nel caso di tre e di quattro punti. — Condizion di equilibrio. — Principio statico che nasce dal dividere in due il sistema de' punti di applicazione: esempio per tre e per quattro punti.*

31. *Problema I.* Due forze P, Q parallele ed agenti per lo stesso verso essendo applicate a due punti A, B di un sistema rigido, determinarne la risultante R, ed il suo punto C di applicazione sulla retta AB.

Soluzione. Le due forze parallele P, Q siano rappresentate (*fig.* 12) dalle rette AP, BQ. Ai punti A,B s' intendano applicate, nella direzione della retta AB, due fòrze F, F' di qualunque grandezza AF, BF', eguali tra loro ed opposte. Essendo in equilibrio tra loro queste due forze F, F', la risultante delle quattro forze (F, F', P, Q) sarà la stessa che la risultante delle due forze date (P, Q).

Ora alle due paia di forze $(AF; AP)$, (BF', BQ), sostituiamo le loro risultanti AX, BY, ed a queste (supposte applicate in quel punto S dove debbono necessariamente concorrere le loro direzioni) torniamo a sostituire le loro componenti (F, P) (F', Q). Ciò fatto, nel punto S le due forze F, F' eguali ed opposte si distruggono, e le altre due P, Q essendo dirette per lo stesso verso secondo la linea SC parallela alle due AP, BQ, si comporranno in una forza unica

$$R = P + Q.$$

Dunque *due forze parallele* P, Q *si compongono in una forza unica* R, *parallela alle medesime ed eguale alla loro somma.*

In secondo luogo essendo simili tra loro sì i due triangoli APX, ACS, e sì i due BQY, BCS, dalla proporzionalità de' lati omologhi si trae

$$\frac{AP}{PX}=\frac{SC}{AC}\,,\quad \frac{BQ}{QY}=\frac{SC}{CB}\,,$$

le quali proporzioni divise l' una per l' altra (avvertendo che sono eguali tra loro le due rette PX, QY siccome eguali alle due forze AF, BF') producono

$$\frac{P}{Q}=\frac{CB}{AC}\,,$$

e per conseguenza $\dfrac{P}{CB}=\dfrac{Q}{AC}=\dfrac{R}{AB}\,.$

I due risultati

$$R=P+Q\,,\ \frac{P}{CB}=\frac{Q}{AC}$$

possono tradursi nella seguente:

Proposizione. Due forze P, Q, parallele ed agenti per lo stesso verso essendo applicate ai punti A,B di un sistema rigido si compongono in una forza unica R, ad esse parallela, eguale alla loro somma, e dividente la retta AB di applicazione in parti AC, CB reciprocamente proporzionali alle componenti P,Q.

32. *Probl. II.* Due forze $P,-Q$ parallele ed agenti in verso contrario essendo applicate ai punti A, B di un sistema rigido, determinarne la risultante R ed il suo punto C di applicazione sulla retta AB.

Soluz. La maggiore P delle due forze P, Q (*fig.* 13) si riguardi come composta di due altre forze parallele Q', R, agenti per lo stesso verso, la prima delle quali sia applicata in B, eguale ed opposta alla forza $-Q$, cioè sia $Q'=Q$. Il valore dell'altra forza R ed il suo punto C di applicazione si avranno (in virtù della *prop. prec.*) dall' equazioni

$$R=P-Q\,,\ \frac{R}{AB}=\frac{-Q}{AC}\,,\ \text{donde}\ AC=\frac{-Q}{P-Q}AB.$$

Ora se alla forza P si sostituiscono le sue componenti R, Q', è manifesto che le due forze $(P,-Q)$ equivarranno alla forza unica R, distruggendosi in B le due forze uguali ed opposte $-Q$, Q'. Il problema è adunque risoluto dall' equazioni

$$R = P - Q, \quad \frac{R}{AB} = \frac{P}{CB} = \frac{-Q}{AC},$$

tradotte nella seguente :

Proposizione. Due forze P, $-Q$ parallele ed agenti in verso contrario essendo applicate ai punti A, B di un sistema rigido, si compongono in una forza unica R eguale alla loro differenza, agente nel senso della forza che prevale, ed il suo punto C di applicazione cade fuori dell' intervallo AB delle due forze dal lato della maggiore, dividendo la retta AB in parti reciprocamente proporzionali alle componenti.

Scolio. Si osservi che l' equazioni

$$R = P - Q, \quad \frac{P}{CB} = \frac{-Q}{AC} = \frac{R}{AB}$$

sono contenute (a causa del principio della dualità) nelle

$$R = P + Q, \quad \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Imperocchè quando l' una delle due forze P, Q, per esempio Q, agisce in senso contrario dell' altra, ossia è *negativa*, anche la parte proporzionale AC è negativa, ossia è diretta in senso contrario di AB. Ove adunque si abbia riguardo al principio della dualità, la legge della composizione di due forze parallele può esprimersi in generale così :

33. *Due forze parallele P, Q applicate ad un sistema rigido si compongono in una forza unica R situata nel loro piano, ad esse parallela ed uguale alla loro somma, e ciascuna delle tre forze* (componenti e risultante) *è proporzionale alla distanza che corre fra le direzioni delle altre due.*

Coroll. Le tre forze parallele P, Q, R, e le tre distanze AC, CB, AB de' loro punti di applicazione sopra una medesima retta, formando sei quantità vincolate dalle tre equazioni

$$\begin{cases} R = P + Q, \\ AB = AC + CB, \end{cases} \quad \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC},$$

allorchè siano date tre di tali quantità, purchè non siano tutte della stessa specie, si potrà determinare ciascuna delle tre rimanenti.

34. Dalle formole (*fig.* 13)

$$R = P - Q, \quad AC = - \frac{Q}{P - Q} AB,$$

destinate a farci trovare la risultante R di due forze parallele di senso contrario P, $-Q$, apparisce che se la forza Q, dapprima minore di P, si mette a crescere per divenire $= P$, la risultante R tende a divenire $= 0$, mentre il suo punto C di applicazione, allontanandosi da A, tende a perdersi nell'infinito; cosicchè a $Q = P$ corrisponde una risultante nulla, infinitamente lontana. Il che, non avendo alcun significato, ci avverte che la *Coppia* vuol essere studiata a parte, come *una forza complessa di un genere speciale* (12).

35. Per trovare la risultante di più forze parallele, basta comporre la risultante delle prime due forze (che è uguale alla loro somma) colla terza forza, poi la risultante delle prime tre forze (che è uguale alla loro somma) colla quarta forza, e così di seguito. Alla fine si avrà la risultante ultima che sarà eguale alla somma di tutte le forze date.

Coroll. Un sistema di forze parallele la cui somma sia eguale a zero, se non è in equilibrio, equivarrà ad una coppia.

36. *Definizione.* Più forze parallele essendo applicate ai punti A, B, C, D, E etc. di un sistema rigido, se si fanno girare intorno ai loro punti di applicazione conservandole sempre parallele ed uguali a sè stesse, la loro risultante girerà intorno ad un punto fisso G: questo punto si chiama il *centro* de' punti di applicazione delle forze parallele, e si suppone (per fissar le idee) che sia *il punto di applicazione della forza risultante.*

Un grave può considerarsi come un aggregato di punti materiali sollecitati dalle forze parallele della gravità: il centro di questi punti materiali è chiamato *centro di gravità* del corpo.

37. *Probl.* Determinare il centro de' punti di applicazione di più forze parallele.

Soluz. Il centro de' punti di applicazione A, B delle prime due forze P, Q è il punto C (*fig.* 12 e 13) che divide la retta AB in parti reciprocamente proporzionali alle componenti P, Q. Imperocchè se le forze P, Q girano intorno ai punti A, B conservandosi parallele ed eguali a sè stesse, la loro risultante dovrà sempre passare pel punto C che unico soddisfa alla proporzione $\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}$.

Proseguendo così a trovare il centro de' punti di applicazione di due forze, una delle quali sia la risultante delle forze già considerate, e l'altra una delle forze che rimangono, è palese che alla fine si arriverà al centro G de' punti di applicazione di tutte le forze parallele.

38. *Teor.* I punti di applicazione di tre forze parallele a, b, c siano i vertici A, B, C di un triangolo (*fig.* 14), e sia D il centro o punto di applicazione della forza d risultante delle a, b, c. Io dico che ciascuna delle quattro forze a, b, c, d sarà proporzionale al triangolo determinato dai punti di applicazione delle tre forze rimanenti, cioè

$$(1) \qquad \frac{d}{(D)} = \frac{a}{(A)} = \frac{b}{(B)} = \frac{c}{(C)},$$

dove ciascheduna delle lettere chiuse tra parentesi rappresenta il triangolo determinato dalle rimanenti, per esempio $(A) = triang.\, BCD$.

Dim. Sulla linea del lato BC sia E il punto di applicazione della forza e risultante delle due forze b, c. La risultante d delle tre forze a, b, c applicata in D, sarà la stessa che la risultante delle due forze a, e, applicate ne' punti A, E. Ciascuna di queste tre forze parallele d, a, e, essendo proporzionale alla distanza de' punti di applicazione delle altre due, avremo (33)

$$\frac{d}{AE} = \frac{a}{DE}.$$

Ora i due triangoli $(D) = ABC$, $(A) = DBC$ avendo in comune la base BC, stanno tra loro come le altezze $AE\ sen.\, E$, $DE\ sen.\, E$ (essendo $sen.\, E =$ *seno dell' angolo* che la retta EA fa colla base BC), e però $:: AE : DE$. Dunque $\frac{d}{(D)} = \frac{a}{(A)}$. Nel modo stesso si dimostra che il primo de' rapporti (1) è uguale a ciascuno degli ultimi due.

Scolio. La regola per la quale si determina il centro de' punti di applicazione delle forze parallele mette in aperto che il centro D dee cadere dentro il triangolo ABC o fuori, secondochè le forze date a, b, c sono tutte o no dello stesso segno. Si osservi inoltre che, se riguardansi come quantità positive la risultante d ed il triangolo ABC, si debbono riguardare come quantità negative que' triangoli parziali che stanno in proporzione colle componenti negative, e che questi triangoli non hanno alcuna parte in comune col triangolo ABC. Imperocchè il segno de' rapporti (1) dee essere il medesimo per tutti, e siccome in ogni caso si ha

$$d = a + b + c,$$

così dee aversi

$$(D) = (A) + (B) + (C).$$

39. *Teor.* I punti di applicazione di quattro forze parallele a, b, c, d siano i vertici A, B, C, D di una piramide triangolare, ed E sia il centro o punto di applicazione della forza e risultante delle a, b, c, d. Io dico che ciascuna delle cinque forze a, b, c, d, e sarà proporzionale alla piramide determinata dai punti di applicazione delle quattro rimanenti, cioè

$$(1) \qquad \frac{e}{(E)} = \frac{a}{(A)} = \frac{b}{(B)} = \frac{c}{(C)} = \frac{d}{(D)},$$

dove ciascheduna delle lettere chiuse tra parentesi rappresenta la piramide determinata dalle quattro lettere rimanenti, per esempio $(A) = piram.\ BCDE$ (*fig.* 15).

Dim. Sul piano del triangolo BCD sia F il punto di applicazione della forza f risultante delle tre b, c, d. La risultante e delle quattro forze a, b, c, d applicata in E sarà la stessa che la risultante delle due forze a, f applicate in A ed in F. Ciascuna di queste tre forze parallele e, a, f essendo proporzionale alla distanza de' punti di applicazione delle altre due, avremo

$$\frac{e}{AF} = \frac{a}{EF}.$$

Ora le due piramidi $(E) = ABCD$, $(A) = EBCD$ avendo in comune la base BCD stanno tra loro come le altezze $AF sen. F$, $EF sen. F$ (essendo $sen. F =$ *seno dell' angolo* che la retta FA fa colla base BCD), e però $:: AF : EF$. Dunque $\frac{e}{(E)} = \frac{a}{(A)}$. Nel modo stesso si dimostra che il primo de' rapporti (1) è uguale a ciascuno degli ultimi tre.

Scolio. Anche qui giova osservare: 1.° Che il centro E dee cadere dentro la piramide $ABCD$ o fuori, secondochè le quattro forze date a, b, c, d sono tutte o no dello stesso segno; 2.° E che inoltre se si riguardano come quantità positive la forza risultante e e la piramide totale $ABCD$, si debbono riguardare come quantità negative le piramidi parziali che stanno in proporzione colle forze negative; 3.° E che queste piramidi negative non hanno alcuna parte in comune colla piramide totale $ABCD$.

40. *Coroll.* I. Le proposizioni or dimostrate (38 e 39) offrono la soluzione de' due seguenti problemi: 1.° Decomporre una forza d applicata a un punto D del piano di un triangolo ABC in tre forze parallele a, b, c, applicate ai vertici A, B, C; 2.° Decomporre una

forza e applicata a un punto E dello spazio in quattro forze parallele a, b, c, d, applicate ai vertici A, B, C, D di una piramide triangolare, in modo che E sia il centro de' punti A, B, C, D.

41. *Coroll. II.* Sono problemi indeterminati: 1.° Il Decomporre una forza d in tre parallele a, b, c allorchè i quattro punti di applicazione D, A, B, C sono dati in linea retta; 2.° Il Decomporre una forza e in quattro forze parallele a, b, c, d, allorchè i cinque punti di applicazione E, A, B, C, D sono dati sopra un medesimo piano.

42. Chi voglia por mente che, nell'equilibrio di un sistema rigido e libero, ciascuna forza in azione deve essere uguale ed opposta alla risultante di tutte le altre, vedrà subito farsegli manifeste le condizioni sotto cui si equilibrano tra loro le forze parallele.

In generale, per l'equilibrio di più forze parallele è necessario e sufficiente: 1.° che la loro somma sia eguale a zero; 2.° che la retta, che unisce il centro delle forze positive col centro delle forze negative, sia parallela alla direzione delle stesse forze. Ove manchi la seconda condizione sussistendo la prima, il sistema delle forze parallele equivarrà ad una coppia.

In particolare, per l'equilibrio di tre forze parallele è necessario e sufficiente (33): 1.° Che le tre forze siano in un medesimo piano; 2.° Che la forza intermedia sia diretta in senso contrario alle altre due; 3.° Che ciascuna delle tre forze sia proporzionale alla distanza che corre tra le direzioni delle altre due.

43. È da notare che se un sistema di forze parallele s'immagina decomposto in due altri sistemi, e ciò in tutti i modi possibili, la retta che unisce i centri de' due sistemi *parziali* dovrà sempre passare pel centro G del sistema *totale*, ed ivi rimaner divisa in parti reciprocamente proporzionali alle forze risultanti de' due sistemi parziali.

Questa semplice osservazione può riguardarsi come un *principio statico* sovente utilissimo, sia per trovare uno de' tre centri quando si conoscono gli altri due, sia per conoscere il punto comune d'incontro di più rette.

Siano G, M, N i centri del sistema totale e dei due sistemi parziali; e g, m, n siano le corrispondenti forze risultanti, applicate a que' punti. Sarà (33)

$$\begin{cases} g = m + n, \\ MN = MG + GN; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{g}{MN} = \dfrac{m}{GN} = \dfrac{n}{MG}; \end{cases}$$

donde

$$MG = \frac{n}{m+n} MN, \; GN = \frac{m}{m+n} MN.$$

Queste formole si applicano evidentemente anche ad un sistema composto di due altri sistemi l' uno di m e l' altro di n forze parallele, tutte eguali tra loro e all' unità (denotando qui per m ed n due numeri interi). Mostriamo con due esempi l' utilità di esse formole.

1.° I punti di applicazione delle forze parallele ed eguali siano tre A, B, C. La loro separazione in due sistemi parziali non potrà farsi che ne' modi seguenti:

$$A, (B, C); \quad B, (C, A); \quad C, (A, B):$$

vale a dire, combinando ciascuno de' tre punti cogli altri due. Pertanto, fatto $m = 1$, $n = 2$, sarà

$$MG = \frac{2}{3} MN:$$

dove se per M si prende uno qualunque de' tre punti A, B, C, il centro N degli altri due sarà nel mezzo della retta che gli unisce.

Da ciò s' inferisce che in ogni triangolo le rette, che dai vertici A, B, C vanno ai punti di mezzo de' lati opposti, s' incontrano tutte in un medesimo punto, ciascuna a $\frac{2}{3}$ del suo cammino. Questo punto d' incontro è (come sarà provato a suo luogo) il *centro di gravità del triangolo ABC.*

2.° I punti di applicazione delle forze parallele ed uguali siano i quattro vertici A, B, C, D di una piramide triangolare. La loro separazione in due sistemi parziali qui può farsi, sia combinando uno de' quattro vertici co' tre rimanenti, sia combinandone due co' due che restano.

Nel primo caso, fatto $m = 1$ ed $n = 3$, sarà

$$MG = \frac{3}{4} MN$$

dove se per M si prende uno qualunque de' quattro vertici A, B, C, D, il punto N sarà il centro di gravità del triangolo determinato dagli altri.

Nel secondo caso, fatto $m = 2$, $n = 2$, sarà

$$MG = \frac{1}{2} MN,$$

dove se M è il punto di mezzo di uno delle tre paia di spigoli

$$(AB, CD), \ (AC, BD), \ (AD, BC),$$

N sarà il punto di mezzo dello spigolo opposto.

Dunque nella piramide triangolare le rette, che dai vertici A, B, C, D vanno al centro di gravità delle opposte facce, s' incontrano tutte nel medesimo punto, ciascuna ai $\frac{3}{4}$ del suo cammino; ed in questo punto medesimo s' incontrano pure e si dividono per metà le rette, che uniscono i punti di mezzo delle tre paia di spigoli opposti. Questo punto comune d' incontro è (sarà provato a suo luogo) il *centro di gravità della piramide ABCD.*

§ 2. *Formole per le forze parallele, esprimenti che il momento della risultante è uguale alla somma de' momenti omologhi delle componenti. Formole riguardanti l' equilibrio. — Altra proprietà del centro de' punti di applicazione: conseguenze.*

44. Per *distanza* tra un punto M ed un piano P (*fig.* 16), *stimata parallelamente ad un dato asse* d, s' intende la retta Mm che va dal punto M al piano P parallelamente all' asse dato d, asse che si tralascia di nominare quando è perpendicolare al dato piano.

Per *momento* di una forza *preso rispetto ad un piano*, s' intende il prodotto della forza per la distanza del suo *punto di applicazione* dal piano, distanza che suole stimarsi parallelamente ad un dato asse.

I momenti delle forze si dicono *omologhi*, se sono *presi rispetto ad un medesimo piano*, le distanze de' punti di applicazione dal piano essendo *stimate parallelamente ad uno stesso asse.*

45. *Teor.* In ogni sistema di forze parallele, il momento della risultante è uguale alla somma de' momenti omologhi delle componenti.

Dim. I punti di applicazione delle forze parallele f, f', f'' etc. riportati a tre assi coordinati Ox, Oy, Oz siano rispettivamente

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha', \beta', \gamma'), \quad (\alpha'', \beta'', \gamma''), \text{ etc.}$$

Siano x, y, z le coordinate del centro delle stesse forze, centro a cui si suppone applicata la loro risultante F. I prodotti

$$Fx, \; f\alpha, \; f'\alpha', \; f''\alpha'' \text{ etc.}$$

saranno i momenti omologhi delle forze presi rispetto al piano yz, le distanze x, α, α', α'' etc. essendo stimate parallelamente all' asse Ox. Si tratta di mettere in chiaro la verità dell' equazione:

$$Fx = f\alpha + f'\alpha' + f''\alpha'' + \text{etc.} = \Sigma f\alpha.$$

Denotiamo per A, B i punti di applicazione (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ delle due forze f, f', per C il loro centro (x_1, y_1, z_1) e per F_1 la loro risultante. Sarà (33)

$$F_1 = f + f', \qquad \frac{f}{CB} = \frac{f'}{AC}.$$

Or le linee CB, AC, essendo parti di una medesima retta, sono proporzionali alle loro proiezioni omologhe sull' asse Ox (*Appendice* 4 e 19), vale a dire si ha

$$\frac{CB}{\alpha' - x_1} = \frac{AC}{x_1 - \alpha}, \text{ dunque } \frac{f}{\alpha' - x_1} = \frac{f'}{x_1 - \alpha}.$$

e moltiplicando in croce e trasponendo,

$$(f + f')x_1 = f\alpha + f'\alpha',$$

ossia

$$F_1 x_1 = f\alpha + f'\alpha'.$$

È adunque provato, che il momento della risultante di due forze parallele è uguale alla somma de' momenti omologhi delle componenti. Proseguendo così a comporre i momenti di due forze, la prima delle quali sia la risultante delle forze già considerate nel sistema, e la seconda una delle forze che restano, si conchiuderà infine che il momento della risultante del sistema è uguale alla somma de' momenti omologhi di tutte le forze.

Applicazioni.

46. I. Date le forze parallele f, f', f'' etc. di un sistema, e i loro punti di applicazione (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ etc., per determinare le coordinate x, y, z del centro del sistema si avranno le formole

$$\left\{\begin{array}{l} Fx = f\alpha + f'\alpha' + f''\alpha'' + \text{etc.} = \Sigma f\alpha\,, \\ Fy = f\beta + f'\beta' + f''\beta'' + \text{etc.} = \Sigma f\beta\,, \\ Fz = f\gamma + f'\gamma' + f''\gamma'' + \text{etc.} = \Sigma f\gamma\,, \end{array}\right.$$

essendo

$$F = f + f' + f'' + \text{etc.} = \Sigma f.$$

Poichè il nostro sistema è vincolato da quattro equazioni, si comprende che potranno determinarsi ad arbitrio quattro, e non più, delle quantità che vi entrano; e che, per conseguente, è un problema indeterminato il decomporre una forza in più di quattro forze parallele, applicate a punti dati nello spazio (41).

Coroll. Se i momenti omologhi di un sistema di forze parallele siano presi rispetto ad un piano che passa pel centro del sistema, la loro somma sarà eguale a zero: e viceversa. Così se pongasi in questo centro l'origine O delle coordinate x, y, z, sarà

$$\Sigma f\alpha = 0\,, \quad \Sigma f\beta = 0\,, \quad \Sigma f\gamma = 0\,.$$

47. II. Date le forze parallele f, f', f'' etc., e i loro punti di applicazione (α, β), (α', β'), (α'', β'') etc. tutti in un medesimo piano (che si può supporre esser quello degli assi Ox, Oy), le coordinate x, y del centro del sistema si avranno dalle formole

$$Fx = \Sigma f\alpha\,, \quad Fy = \Sigma f\beta\,, \quad F = \Sigma f.$$

Il presente sistema essendo vincolato da tre equazioni, si comprende che potranno determinarsi ad arbitrio tre, e non più, delle quantità che vi entrano; e che per conseguente è un problema indeterminato il decomporre una forza in più di tre forze parallele, allorchè i punti di applicazione sono dati in un medesimo piano.

N. B. Quando i punti di applicazione sono tutti in un piano, i momenti delle forze si prendono rispetto a linee rette situate nel piano, quali sono gli assi Ox, Oy; e per *momento di una forza preso rispetto ad un asse* s'intende il prodotto della forza per la distanza del suo punto di applicazione dall'asse, stimata parallelamente ad un altro asse.

48. *Coroll.* Quando i punti di applicazione di un sistema di forze parallele sono tutti in un piano, il momento della risultante preso rispetto ad una retta del piano è uguale alla somma de' momenti omologhi delle componenti; e quindi, se la retta passa pel centro del sistema, la somma di questi momenti sarà $= 0$.

49. III. Date le forze parallele f, f', f'' etc., e i loro punti di applicazione sopra una medesima retta Ox per mezzo delle ascisse α, α', α'' etc., l'ascissa x del centro del sistema si avrà dalle formole

$$Fx = \Sigma f\alpha\,, \quad F = \Sigma f.$$

Il presente sistema essendo vincolato da due equazioni, si comprende che potranno determinarsi ad arbitrio due, e non più, delle quantità che vi entrano; e che, per conseguente, è un problema indeterminato il decomporre una forza in più di due parallele, allorchè tutti i punti di applicazione sono dati in linea retta.

a) Coroll. Allorchè i punti di applicazione di un sistema di forze parallele sono tutti in linea retta, il momento della risultante preso rispetto ad un punto arbitrario di tale retta è uguale alla somma de' momenti omologhi delle componenti; e però questa somma sarà $= 0$ se quel punto arbitrario sia fissato nel centro del sistema.

50. IV. Dato un sistema di forze parallele, se si decompone ad arbitrio in due altri sistemi di cui i centri siano i punti (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2), ed F_1, F_2 le forze risultanti, i tre sistemi *totale* e *parziali* saranno connessi tra loro dalle note equazioni

$$F = F_1 + F_2 = \Sigma f$$

$$\left\{\begin{aligned} Fx &= F_1x_1 + F_2x_2 = \Sigma f\alpha\,, \\ Fy &= F_1y_1 + F_2y_2 = \Sigma f\beta\,, \\ Fz &= F_1z_1 + F_2z_2 = \Sigma f\gamma\,. \end{aligned}\right.$$

Supponiamo adesso che la risultante F del sistema totale sia $= 0$, e che però sia $F_1 = - F_2$: le formole che precedono si ridurranno alle tre:

$$F_1(x_1 - x_2) = \Sigma f\alpha\,, \quad F_1(y_1 - y_2) = \Sigma f\beta\,, \quad F_1(z_1 - z_2) = \Sigma f\gamma\,.$$

Ciò posto, si denoti per D la retta che va dall' uno all' altro centro de' due sistemi parziali, e per (l, m, n) la sua direzione, talchè si abbia (*App.* 19)

$$x_1 - x_2 = lD, \quad y_1 - y_2 = mD, \quad z_1 - z_2 = nD.$$

Per queste relazioni, le ultime formole si cangiano nelle

$$F_1 D = \frac{\Sigma f\alpha}{l} = \frac{\Sigma f\beta}{m} = \frac{\Sigma f\gamma}{n},$$

per le quali si può determinare ciascun elemento della direzione (l, m, n). Dunque:

« Se un sistema di forze parallele, la cui somma F sia $= 0$, si decomponga ad arbitrio in due sistemi parziali, e ciò in tutti i modi possibili, la retta D che va dall' uno all' altro centro de' due sistemi parziali risulterà sempre della stessa direzione (l, m, n), e questa direzione costante è quella della linea composta delle tre $\Sigma f\alpha$, $\Sigma f\beta$, $\Sigma f\gamma$ parallele agli assi Ox, Oy, Oz (*App.* 4), linea $= F_1 D$. »

Coroll. Allorchè la direzione (l, m, n) della retta D, alle estremità della quale sono applicate le due forze eguali ed opposte $F_1, -F_1$, si confonde con quella di queste forze, è palese che il sistema sarà in equilibrio. Dunque:

« Un sistema di forze parallele la cui somma sia $= 0$, *sarà in equilibrio* od *equivarrà ad una coppia*, secondochè le forze siano parallele o no alla direzione (l, m, n) determinata dalla doppia proporzione: »

$$\frac{\Sigma f\alpha}{l} = \frac{\Sigma f\beta}{m} = \frac{\Sigma f\gamma}{n}.$$

51. V. Dato un sistema di punti A, B, C, D etc. animati dalle forze parallele f, f', f'', f''' etc., ed il centro G del sistema, animato dalla risultante F, se da un punto O preso ad arbitrio nello spazio si tirino le rette OG, OA, OB, OC etc., e sulle loro direzioni si prendano le lunghezze (*fig.* 17):

$$Og = F.OG, \quad \text{ed} \quad \begin{cases} Oa = f.OA \\ Ob = f'.OB \\ Oc = f''.OC \\ \text{etc.} = \text{etc.}, \end{cases}$$

la linea Og, diretta al centro G del sistema, sarà la risultante di tutte le altre linee Oa, Ob, Oc etc. dirette ai punti di applicazione delle forze componenti.

Dim. Secondo la definizion geometrica della **retta risultante** (*App.* 10), trattasi di provare che la proiezione della retta Og sopra un asse qualunque Ox è uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle altre rette Oa, Ob, Oc, etc. Or ciò è reso subitamente manifesto dal principio de' momenti delle forze parallele (45), ossia dall' equazione

$$Fx = f\alpha + f'\alpha' + f''\alpha'' + \text{etc.}$$

dove, se le ascisse x, α, α', α'' etc. rappresentano sull'asse Ox le proiezioni omologhe delle rette OG, OA, OB, OC etc., (*App.* 18), i prodotti Fx, $f\alpha$, $f'\alpha'$, $f''\alpha''$ etc. rappresenteranno sullo stesso asse Ox le proiezioni omologhe delle rette $F.OG$, $f.OA$, $f'.OB$, $f''.OC$ etc. (*App.* 9), ossia delle Og, Oa, Ob, Oc etc. È adunque provato che la prima di queste rette è la risultante delle altre.

Dal teorema or dimostrato si deduce:

1.° Che il centro G di un sistema di forze parallele si può anche trovare, componendo dapprima le rette Oa, Ob, Oc etc. nella risultante Og, ed appresso prendendo sulla direzione di Og il segmento

$$OG = \frac{Og}{F}.$$

2.° Che, se dal centro G di un sistema di forze parallele si tirano a tutti i punti di applicazione A, B, C etc. le rette

$$Ga = f.GA\,,\ Gb = f'.GB\,,\ Gc = f''.GC\,,\ \text{etc.},$$

la risultante di queste rette ($\overline{Gg} = F.\overline{GG}$) sarà $= 0$, coincidendo in questo caso il punto O col punto G.

Sia, per esempio, un sistema di punti A, B, C etc. aggravati da pesi tutti eguali tra loro: le rette AG, BG, CG etc. che da siffatti punti vanno al centro G di gravità del sistema, avranno una risultante nulla. E tali sono le rette che dai vertici di un triangolo o di una piramide triangolare vanno al centro di gravità del triangolo o della piramide (43).

3.° Che, per la nota formola onde la retta risultante si esprime in funzione delle componenti (*App.* 12), si ha

$$\overline{Og}^2 = \Sigma\,\overline{Oa}^2 + 2\Sigma\,\overline{Oa}.\overline{Ob}\,\cos.(aOb)$$

ossia

$$(a) \qquad F^2.\overline{OG}^2 = \Sigma f^2.\overline{OA}^2 + 2\Sigma ff'.\overline{OA}.\overline{OB}\cos.(AOB)\,.$$

Ma i triangoli *AOB*, *AOC*, *AOD* etc., *BOC*, *BOD* etc., *COD* etc. danno

$$2\overline{OA}.\overline{OB}\cos.(AOB) = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2\,,$$

$$2\overline{OA}.\overline{OC}\cos.(AOC) = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{AC}^2\,,$$

$$2OA.OD\cos.(AOD) = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{AD}^2\,,$$

etc. etc.

Ora se, nell'equazione (a), ai primi membri di queste relazioni si sostituiscano *(ad occhio)* i secondi, cercando nel medesimo tempo il coefficiente totale di $\overline{OA}^2$, si scoprirà che questo coefficiente è

$$f(f + f' + f'' + \text{etc.}) = F.f\,,$$

e si conchiuderà che il coefficiente totale di $\overline{OB}^2$ è $= F.f'$, di $\overline{OC}^2$ è $= F.f''$, etc.; e che, per conseguente, l'equazione (a) equivale alla

$$(b) \qquad F^2.\overline{OG}^2 = F\Sigma f.\overline{OA}^2 - \Sigma ff'.\overline{AB}^2\,:$$

formola dovuta a Lagrange.

Coroll. Se il sistema consista in m punti A, B, C, D etc. aggravati da pesi uguali tra loro, la formola (b) diviene

$$(c) \qquad m^2.\overline{OG}^2 = m\Sigma\overline{OA}^2 - \Sigma\overline{AB}^2\,;$$

e questa, se il punto arbitrario O si fa coincidere col centro di gravità G del sistema, si muta nella

$$(d) \qquad m\Sigma\overline{GB}^2 = \Sigma\overline{AB}^2\,.$$

Supponiamo, per esempio, che il punto G sia il centro di gravità di un triangolo ABC: sarà

$$3(\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

Se nella (c) il punto O si faccia coincidere col vertice A nascerà

$$9\overline{GA}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) - \overline{BC}^2.$$

Inoltre, poichè una delle tre rette $\overline{GA}$, $\overline{GB}$, $\overline{GC}$ si può riguardare come uguale ed opposta alla risultante delle altre due, avremo pure

$$\overline{GA}^2 = \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 2\overline{GB}.\overline{GC}\cos.(BGC),$$

donde

$$2\overline{GB}.\overline{GC}\cos.(BGC) = \overline{GA}^2 - \overline{GB}^2 - \overline{GC}^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 5\overline{BC}^2}{9}.$$

Applicazioni analoghe potrebbero farsi nella piramide triangolare rispetto alle distanze tra i quattro vertici A, B, C, D ed il centro di gravità G della piramide.

CAPO III.

Leggi onde le coppie si trasformano, si compongono ed equilibrano.

§ 1.° *Definizioni. Coppia: suo braccio di leva, momento ed asse.*

52. Una **Coppia** $(P, -P)$ *consiste* (come già si è definito 12) *nell' azione simultanea di due forze parallele, eguali e contrarie* (AP, BP) (*fig.* 2), azione che si dee riguardare come una *forza complessa di un genere speciale*, siccome quella che non può esser distrutta o tenuta in equilibrio da una semplice forza.

Si chiama **braccio di leva** *di una coppia* $(P, -P)$ la distanza perpendicolare (*fig.* 2) tra le direzioni delle due forze della coppia AP, BP. Il **momento di una coppia** è il prodotto del valor comune di queste forze pel braccio di leva, $P.AB$, momento che serve di *misura* (come appresso si farà chiaro) *alla intensità dell' azion della coppia.*

Asse della coppia. Dal punto di mezzo C del braccio di leva AB (*fig.* 18) si conducano sull' una e sull' altra faccia del piano della coppia (AP, BP) le perpendicolari CM, CM', *numericamente uguali*, ciascuna, al momento della coppia $(CM = P.AB)$; e queste perpendicolari si riguardino come due *Osservatori antipodi* coi piedi in C e colle facce rivolte dalla medesima parte, talchè alla destra dell' uno corrisponda la sinistra dell' altro. Immaginiamo adesso che il braccio di leva AB, supposto mobile intorno al suo punto di mezzo C, prenda un moto di rotazione sotto l'azion della coppia $(P, -P)$. È manifesto che questa rotazione si farà necessariamente dalla destra alla sinistra dell' una delle due perpendicolari CM, CM', e dalla sinistra alla destra dell' altra. Noi chiameremo *asse della coppia* quella delle due perpendicolari CM, CM', *intorno a cui il braccio di leva AB va rotando dalla destra alla sinistra.*

L' asse di una coppia $(P, -P)$ è adunque *una retta che sorge a perpendicolo sul piano della coppia, eguale numericamente al suo momento, e che, considerata come una persona coi piedi sul mezzo del braccio di leva, vedrebbe rotare intorno a sè* **dalla destra alla sinistra** *questo braccio di leva, mosso dall' azion della coppia.*

L' asse della coppia rappresenta quindi tutti gli elementi essenziali che sono a considerarsi in una coppia: colla **perpendicolarità** ne rappresenta il *piano*; colla **lunghezza**, il *momento*; e colla **direzione**, il *senso della rotazione* del braccio di leva.

N. B. Nella trasformazione ed equivalenza delle coppie si suppone sempre, benchè non si avverta, che ogni braccio di leva sia invariabilmente connesso col sistema rigido a cui sono applicate le forze.

---

§ 2.° *Leggi per la trasformazione di una coppia in altre equivalenti.*

Due coppie si dicono **equivalenti**, se possono surrogarsi l'una all' altra senz' alterare lo stato del sistema a cui sono applicate.

53. *Prop.* Due coppie (AP, BP), $(A'P', B'P')$ saranno equivalenti, se le forze dell' una rivolte in verso contrario fanno equilibrio a quelle dell' altra.

Infatti se le forze della seconda coppia si rivolgono in verso contrario, nascerà la terza coppia $(P'A', P'B')$ evidentemente in equilibrio colla seconda, ed acconcia per ipotesi a far equilibrio colla prima. Essendo adunque in nostro arbitrio di considerare piuttosto l'uno che l' altro di tali equilibrii, è palese che la prima coppia equivale alla seconda.

54. **Teor.** *Una coppia essendo applicata ad un sistema rigido, è lecito, senza punto alterarne l'effetto,*

1.° *Trasportarla parallelamente a sè stessa dove si voglia, o nel suo piano, od in ogni altro piano parallelo;*

2.° *E girarla, come si vorrà, in questo piano;*

3.° *E quivi trasformarla in un' altra coppia* $(Q, -Q)$ *dello stesso senso e di egual momento.*

Dim. La dimostrazione di ciascuna di queste tre proposizioni riducesi a mettere in evidenza che la coppia considerata nel secondo stato, ove sia applicata in senso contrario, fa equilibrio colla coppia considerata nel primo stato.

1.° La coppia $(P, -P)$ si trasporti parallelamente a sè stessa dalla posizione (AP, BP) in un'altra posizione qualsivoglia $(A'P', B'P')$ (*fig.* 19). I due bracci di leva AB, $A'B'$, essendo paralleli ed eguali, determinano un parallelogrammo le cui diagonali AB', $A'B$ si tagliano a vicenda nel loro punto di mezzo C.

Ciò posto, io dico che la coppia $(A'P', B'P')$, applicata in senso contrario sicchè diventi $(P'A', P'B')$, fa equilibrio colla coppia (AP, BP). Infatti, ove le forze uguali di queste due coppie si distribuiscano ne' due gruppi

$$(AP, P'B'), \quad (BP, P'A'),$$

si vede che le forze del primo gruppo, essendo parallele, eguali e dello stesso senso, si compongono in una risultante $= P + P'$, che passa pel punto di mezzo C di AB'; e si vede, per la stessa ragione, che le forze del secondo gruppo si compongono in una risultante uguale e direttamente opposta alla risultante precedente. E così è reso manifesto l'equilibrio tra le due coppie (AP, BP), $(P'A', P'B')$, e rimane dimostrata la prima proposizione.

2.° La coppia (AP, BP) si giri e si volti come si vorrà nel suo piano, e divenuta $(A'P', B'P')$ si trasporti parallelamente a sè stessa così che i bracci di leva AB, $A'B'$ abbiano in comune il loro punto di mezzo C (*fig.* 20). Siano D ed E i punti dove rispettivamente s' incontrano le direzioni delle due forze AP ed $A'P'$, e quelle delle altre due forze BP, $B'P'$. Considerando i triangoli rettangoli CAD e $CA'D$, CBE e $CB'E$, ne' quali

$$AC = CB = A'C = CB',$$

apparirà che i punti D ed E si trovano entrambi sulla retta bisettrice degli angoli opposti al vertice ACA', BCB', retta che è pur bisettrice degli angoli ADA', BEB'.

Ciò posto, io dico che la coppia $(A'P', B'P')$, applicata in senso contrario sicchè diventi $(P'A', P'B')$, fa equilibrio colla coppia (AP, BP). Infatti, ove le forze uguali di queste due coppie si distribuiscano ne' due gruppi

$$(AP, P'A'), \quad (BP, P'B'),$$

si vede che le due forze del primo gruppo, supposte applicate nel punto D ove concorrono le loro direzioni, si compongono in una risultante diretta secondo CD, bisettrice dell' angolo delle due forze;

e si vede ancora, che le due forze del secondo gruppo si compongono in un' altra risultante, uguale e direttamente opposta alla risultante precedente. E così è reso manifesto l'equilibrio delle due coppie (AP, BP), ($P'A'$, $P'B'$), e rimane dimostrata la seconda proposizione.

3.° Le due coppie ($P, -P$), ($Q, -Q$) dello stesso senso e di egual momento, essendo sopra un piano, si dispongano così che il braccio di leva BC della seconda sia nel prolungamento del braccio di leva AB della prima (*fig.* 21). La supposta eguaglianza de' momenti $P.AB$, $Q.BC$ delle due coppie (AP, BP) (BQ, CQ) somministra la proporzione

$$(1) \qquad \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AB} = \frac{P+Q}{AC}.$$

Ciò posto, io dico che la coppia (BQ, CQ), applicata in senso contrario sicchè diventi (QB, QC), fa equilibrio colla coppia (AP, BP). Infatti, ove le forze di queste due coppie si distribuiscano ne' due gruppi

$$(AP, QC), \quad (QB, BP),$$

si vede che le forze del primo gruppo, essendo parallele e dirette per lo stesso verso, si compongono in una risultante $= P + Q$, che passerà per B, punto che solo ha la proprietà di soddisfare alla proporzione (1); e si vede ancora, che le forze del secondo gruppo si compongono in un' altra risultante, uguale e direttamente opposta alla precedente. Così è reso manifesto l' equilibrio tra le due coppie (AP, BP), (QB, QC), e così rimane dimostrata la terza ed ultima proposizione del teorema.

Coroll. I. La coppia, in ogni sua trasformazione, mantiene l'asse parallelo ed uguale a sè stesso, e diretto nel medesimo senso. Quindi può dirsi che, a quella guisa che il *punto di applicazione* di una forza si può trasportare da un punto ad un altro qualunque della direzion della forza, così l'*asse di una coppia* può venir trasportato parallelamente a sè stesso in qual luogo si voglia dello spazio, per ivi rappresentare la coppia rispetto al suo *piano*, al *momento* ed al *senso della rotazione*. In generale: Affinchè due coppie siano equivalenti, è necessario e sufficiente che abbiano paralleli ed eguali gli assi, e diretti nel medesimo senso.

Coroll. II. Sia V il valore del momento di una coppia (AP, BP), cioè sia

$$P.\overline{AB} = V.$$

Per mezzo di questa relazione, dato il momento V, ed una delle due quantità P, $\overline{AB}$, si potrà subito determinar l'altra, essendo

$$P = \frac{V}{AB}, \quad AB = \frac{V}{P}.$$

Dunque: È sempre possibile di sostituire ad una coppia di noto momento V, un'altra coppia equivalente di cui sia dato il braccio di leva AB, o di cui sia dato il valor comune P delle due forze contrarie.

---

§ 3.° *Legge per la quale le coppie, situate nel medesimo piano od in piani paralleli, si compongono in una sola.*

55. **Teor.** *Le coppie, situate nel medesimo piano od in piani paralleli, si compongono in una coppia unica, il cui momento è uguale alla somma de' momenti delle coppie componenti.*

Dim. Siano date in piani paralleli, ovvero (ciò che torna lo stesso) in un medesimo piano, più coppie co' momenti rispettivi

$$P.\overline{AB}, \quad P'.\overline{A'B'}, \quad P''.\overline{A''B''}, \text{ etc.}$$

Io dico, che la loro azione simultanea equivale a quella di una coppia unica, di cui il momento M è dato dall'equazione:

$$M = P.\overline{AB} + P'.\overline{A'B'} + P''.\overline{A''B''} + \text{etc.}$$

nella quale conviene avvertire che, se si riguardano come *positivi* i momenti delle coppie il cui asse è diretto in un senso, si debbono riguardare come *negativi* i momenti di quelle il cui asse è diretto in senso contrario.

Le coppie date si trasformino in altrettante coppie equivalenti collo stesso braccio di leva $\overline{CD}$, e siano per esempio (*fig.* 22)

$$(CQ, DQ), \ (CQ', DQ'), \ (CQ'', DQ'') \text{ etc.}$$

denotando per Q, Q', Q'' etc. le forze corrispondenti, talchè si abbia

$$Q.\overline{CD} = P.\overline{AB}, \quad Q'.\overline{CD} = P'.\overline{A'B'}, \text{ etc.}$$

È chiaro che queste nuove coppie formeranno, come apparisce dalla figura, una coppia unica di cui una delle forze è

$$Q + Q' + Q'' + \text{etc.}$$

ed il momento M è $= (Q + Q' + Q'' + \text{etc.}).\overline{CD}$. Or questo momento equivale alla somma de' momenti

$$Q.CD + Q'.CD + Q''.CD + \text{etc.},$$

somma che, per costruzione, è uguale alla somma de'momenti delle coppie date. Il teorema è adunque dimostrato.

Scolio. Ove si rifletta che gli assi delle coppie ne rappresentano i momenti in grandezza ed in segno (53), si comprenderà che il teorema precedente si può anche esprimer così:

« Le coppie con assi paralleli si compongono in una coppia unica, il cui asse è uguale alla somma degli assi delle coppie componenti ». La qual proposizione è il compendio di quest'altra:

« Le coppie con assi paralleli si compongono in una coppia risultante, il cui asse è uguale alla somma degli assi diretti in un senso, meno la somma degli assi diretti in senso contrario, e si dirige nel senso degli assi che formano la somma più grande. »

§ 4°. *Legge per la quale le coppie, situate in piani comunque inclinati tra loro, si compongono in una sola. Somiglianza tra le leggi delle coppie e le leggi delle semplici forze.*

56. **Teor.** *Due coppie, aventi per assi i lati di un parallelogrammo, si compongono in una* **coppia risultante,** *che ha per asse la diagonale del parallelogrammo.*

Dim. Le coppie date $(P, -P)$, $(P', -P')$ siano situate nei piani zOa, zOb che si segano secondo la retta Oz (*fig.* 23). In questi piani le due coppie si potranno sempre trasformare in modo, che restino soddisfatte le tre seguenti condizioni:

1°. Che in ciascuna di esse il valor comune delle forze sia eguale all' unità $(P = 1, P' = 1)$;

2°. Che in ciascuna di esse la forza positiva sia diretta secondo Oz;

3°. E che però, in entrambe, i bracci di leva Oa, Ob riescano perpendicolari in O alla stessa linea Oz.

Ciò posto, sopra le due rette Oa, Ob prese per lati si compia il parallelogrammo $Oacb$, e la coppia $(P', -P')$ situata nel piano zOb s' immagini trasportata parallelamente a sè stessa, finchè il suo braccio di leva Ob venga a coincidere coll' opposto lato ac del parallelogrammo. Dopo questo trasporto, si distruggeranno nel punto a le due forze uguali ed opposte aP, aP', e resterà nel sistema la sola coppia

$$(OP, cP'),$$

situata nel piano zOc, e di cui tanto il braccio di leva, quanto il momento, è rappresentato dalla diagonale Oc del parallelogrammo. Così, in questo parallelogrammo, i lati rappresentano le coppie componenti, e la diagonale la coppia risultante.

Se ora si faccia girare il parallelogrammo $Oacb$ dalla destra alla sinistra di Oz per un angolo retto, è manifesto che le tre rette Oa, Ob, Oc, divenute perpendicolari ai piani (zOa, zOb, zOc) delle tre coppie, saranno gli assi delle coppie medesime, rappresentandone colle perpendicolarità i piani, colle lunghezze i momenti, e colle direzioni il senso delle rotazioni de' rispettivi bracci di leva.

57. In un sistema di coppie, se si compone successivamente la risultante delle coppie già considerate con una di quelle che restano, si otterrà l'evidenza delle seguenti proposizioni:

1ª. Tre coppie, aventi per assi *a*, *b*, *c* i lati *Oa*, *Ob*, *Oc* di un parallelepipedo, si compongono in una coppia risultante, che ha per asse *d* la diagonale *Od* del parallelepipedo.

2ª. In generale: Date più coppie per mezzo de' loro assi *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, etc., se si trasportano questi assi parallelamente a sè stessi e si conducono ad avere in comune l' origine *O*, talchè divengano *Oa*, *Ob*, *Oc*, *Od*, *Oe*, etc.; la risultante *OG* di queste rette sarà *l'asse della coppia risultante.*

Scolio. È adunque manifesto che le coppie, rappresentate che siano dai loro assi, si *compongono*, *decompongono* ed *equilibrano* a quel modo che si fa delle semplici forze; coll' unico divario che, mentre il punto di applicazion di una forza si può solo trasportare da un punto ad un altro della direzion della forza, l' asse di una coppia si può trasportare *parallelamente a sè stesso* in qual luogo si voglia dello spazio, per ivi rappresentare la coppia ne' suoi tre elementi essenziali: *piano*, *momento*, e *senso della rotazione* del braccio di leva.

CAPO IV.

Leggi per le forze applicate ad un sistema rigido.

§ 1.° *Legge onde le forze applicate ad un sistema rigido si riducono ad una sola forza e ad una sola coppia. Condizioni dell'equilibrio e dell'equivalenza delle forze.*

58. Una forza f essendo applicata in un punto A di un sistema rigido, se in un altro punto qualsivoglia O si applichino due forze opposte Of, Of' (*fig.* 24), parallele ed eguali alla prima Af, è chiaro che queste due forze si distruggono tra loro, o che lo stato del sistema non è cangiato. Ma ora, invece della semplice forza f applicata in A, possiamo considerare la stessa forza applicata in O e la coppia $(f, -f)$, ossia (Af, Of'), il cui momento è $= f.\overline{AB}$, essendo $\overline{AB}$ la distanza che corre perpendicolare tra le direzioni delle forze Af, Of'. Se, per maggior chiarezza, si trasporta questa coppia altrove in un piano qualunque parallelo al suo (ciò che è permesso (54)), non resterà nel punto O che la forza Of, parallela ed eguale alla forza Af, e che può riguardarsi come questa medesima forza che si è recata parallelamente a sè stessa da A in O, percorrendo colla sua *direzione* il cammino AB.

Possiamo dire adunque che: *Una forza f, applicata ad un sistema rigido, può esser trasportata parallelamente a sè stessa da uno ad un altro punto qualsivoglia del sistema, purchè si aggiunga la coppia $(f, -f)$ che nasce da questa traslazione, e che ha per momento il prodotto della forza f pel cammino percorso dalla sua direzione.*

N. B. Quando le forze si diranno *trasportate da un punto ad un altro*, sottintendasi sempre: *parallelamente a sè stesse*, e di più che *il nuovo punto di applicazione* sia *invariabilmente connesso col primo*.

59. Le forze f, f', f'' etc., applicate ad un sistema rigido, se si trasportano tutte in un medesimo punto O (punto che diremo *centro di riduzione.*), è manifesto :

1°. Che quivi si potranno comporre in una sola forza OF, e che tutte le coppie, nate dalla traslazione delle forze, si potranno anch'esse comporre in una sola coppia G, il cui asse OG (53) sarà in generale inclinato ad OF (*fig.* 25);

2°. E che, se si sposta il centro O di riduzione fuori della retta OF, la forza risultante F non fa che muoversi parallelamente a sè stessa, generando nel suo cammino una nuova coppia, che fa cangiare la coppia risultante G.

In queste operazioni si contiene evidentemente la *legge* per la quale: *Le forze applicate ad un sistema rigido si possono ridur sempre ad una sola forza F, che passi per un punto O dato ad arbitrio, e ad una sola coppia G, il cui asse OG varia in generale allo spostarsi del centro di riduzione.*

La forza OF si chiama la *risultante generale del sistema*, essendo sempre la stessa per ogni centro di riduzione, ma la sua azione costante si dee accoppiare coll' azione della *coppia risultante G* che varia da centro a centro.

60. Una coppia non potendo esser tenuta in equilibrio da una semplice forza, è chiaro che non potrà sussister l' equilibrio tra le forze applicate ad un sistema rigido e libero, salvochè la forza risultante F e la coppia risultante G non si annullino ciascuna da sè, ovunque sia preso il centro O di riduzione.

Di qua la condizion generale dell' equilibrio: « *Affinchè più forze si facciano equilibrio sopra un sistema rigido e libero, si richiede che, trasportate in un punto qualsivoglia dello spazio, si equilibrino tra loro, e che inoltre si equilibrino tra loro le coppie nate da simile traslazione.* »

61. Due classi di forze applicate ad un sistema si dicono **equivalenti**, se le forze dell' una classe possono surrogarsi a quelle dell' altra senz' alterare lo stato del sistema.

Coroll. I. Se due classi di forze (P, P', P'' etc.), (Q, Q', Q'' etc.), applicate ai punti di un sistema rigido e libero, sono equivalenti, le forze dell' una classe rivolte in senso opposto faranno equilibrio a quelle dell' altra classe. E viceversa: le due classi saranno equivalenti, se le forze dell' una rivolte in contrario fanno equilibrio a quelle dell' altra.

Infatti se intendiamo applicata una terza classe di forze

$$(-Q, -Q', -Q'', \text{ etc.})$$

eguali ed opposte a quelle della seconda classe, sarà in nostro arbitrio di considerar le nuove forze sia in equilibrio con quelle della seconda classe, sia con quelle della prima.

Coroll. II. Se due classi di forze sono equivalenti sopra un sistema rigido e libero, trasportate le forze in un punto qualsivoglia O, dovranno quivi riuscire identiche tanto le forze risultanti F, F' delle due classi, quanto le loro coppie risultanti G, G'.

Infatti applicando in senso contrario le forze di una delle due classi, per esempio della seconda, dovrà nascer l'equilibrio nel punto O tra le forze risultanti $F, -F'$, e le coppie risultanti $G, -G'$; e quest'equilibrio è impossibile, se non siano eguali e in direzione opposta sì le forze $F, -F'$, e sì gli assi delle coppie $G, -G'$.

Coroll. III. Siccome una forza, che si trasporti in un punto qualsivoglia, produce nella traslazione una coppia il cui piano è sempre parallelo alla direzion della forza, così apparisce manifesta la verità della seguente proposizione:

« *Affinchè le forze applicate ad un sistema rigido e libero equivalgano ad una forza unica, si richiede che, trasportate in un punto qualunque, la loro risultante abbia una direzione* **parallela** *al piano della coppia risultante*, e *però* **perpendicolare** *all' asse di essa coppia.* »

62. Ridotte che siano le forze ad una sola forza F e ad una coppia G, si potrà sempre così disporre la coppia, che una delle sue forze si componga con F: ed allora si avranno due forze, le quali non potranno essere in un medesimo piano, salvo che non siano riducibili ad una forza unica. Dunque:

1°. *Tutte le forze applicate ad un sistema rigido possono sempre ridursi a due sole;*

2°. *Due forze, non situate in un medesimo piano, non possono equivalere ad una forza unica.*

63. *Scolio.* Allorchè più forze sono in equilibrio sopra un sistema rigido e libero, per iscoprirne più facilmente le relazioni giova talvolta separarle in due classi, e rendere *equivalenti* queste classi col volgere in contrario le forze di una di esse.

64. N. B. Quando in appresso una coppia verrà indicata per mezzo di una retta, s' intenda per questa retta *l' asse della coppia*, e quando la lettera che denota la coppia, per esempio G, si pone sotto le linee trigonometriche, come *sen.*(FG), s' intenda per G l' asse della coppia.

§ 2°. *Asse centrale, ossia luogo de' centri di riduzione, in cui il piano della coppia risultante riesce perpendicolare alla direzione della forza risultante. Tutti gli altri centri di riduzione sono disposti in ordine simmetrico intorno all' asse centrale.*

65. **Problema.** *Dato un sistema di più forze, ridurlo così ad una forza e ad una coppia, che il piano della coppia riesca perpendicolare alla direzion della forza.*

Soluz. Preso per centro di riduzion delle forze un punto qualsivoglia O (*fig.* 26), sia OF la forza risultante F, ed OG la coppia risultante G. La retta OG si decomponga in due componenti rettangolari (K, b), la prima delle quali OK sia sulla retta OF, e l' altra Ob, perpendicolare ad OF, si prolunghi in $Ob' = - Ob$. Sarà

$$K = G \cos.(FG) \,, \qquad b = G \operatorname{sen}.(FG) \,.$$

Poichè alla coppia OG possiamo sostituire le coppie componenti OK, Ob, per risolvere il problema basterà trasportare la forza OF in modo, che ne nasca una coppia Ob' eguale e contraria alla coppia Ob. A questo fine si conduca per O una retta

$$OC = \frac{Ob}{F} = \frac{G \operatorname{sen}.(FG)}{F}$$

perpendicolare al piano FOG, ed inalzata da quella parte del piano in cui OC (se fosse una *persona* coi piedi in O e colla fronte rivolta verso l' apertura dell' angolo FOG) vedrebbe il lato OF *a destra*. La coppia, che nasce trasportando la forza F in C, avrà evidentemente per asse $Ob' = - F.OC$, e però distruggerà la coppia Ob. Preso adunque il punto C per *centro di riduzione*, tutte le forze del sistema saranno ridotte alla forza F, o CF, ed alla coppia K il cui piano è perpendicolare alla direzion della forza F.

Si vede così qual sia la legge da osservarsi per arrivare alla soluzione immediata del problema:

Conviene dapprima ridurre il dato sistema di forze ad una sola forza OF e ad una sola coppia OG in un punto O preso ad *arbitrio, poi da O inalzare sul piano dell' angolo (FG) la perpendicolare*

$$OC = \frac{G\,sen.(FG)}{F},$$

e pel punto C così determinato condurre una retta indefinita CF parallela alla direzion della forza F: qualunque sia il punto di questa retta che si prenda per centro di riduzione, il piano della coppia risultante sarà perpendicolare alla direzione della forza risultante.

a) La retta *CF*, che ha la proprietà di passare per tutti i centri di riduzione ne' quali il piano della coppia risultante *K* è perpendicolare alla direzione della forza risultante *F*, si chiama **Asse centrale delle coppie.**

66. *Coroll.* Quando il sistema delle forze *equivale ad una forza unica*, la retta secondo cui agisce questa forza è l'asse centrale. Imperocchè l' asse *OG* della coppia risultante (*fig.* 26), dovendo essere in questo caso perpendicolare alla direzione della forza risultante *OF* (61, III), si confonderà con *Ob*, e però (essendo $K = 0$) se la forza *F* si trasporta da *O* in *C*, non si avrà in *C* che la sola forza *F*, distruggendosi le due coppie *Ob*, *Ob'*.

67. *Problema.* Risolvere il problema inverso del precedente, vale a dire: *Ridotte le forze del sistema ad una forza F e ad una coppia K il cui piano sia perpendicolare alla direzion della forza, passare ad un' altra riduzione in un punto qualsivoglia O, separato dall' asse centrale per l' intervallo* $CO = p$.

Soluz. La forza *F*, trasportata da *C* in *O* (*fig.* 26), fa nascer la coppia $Ob = F.p$, la quale, ove si componga colla coppia data *K*, produrrà la coppia risultante *OG*. E tra le componenti rettangolari *OK*, *Ob* e la loro risultante *OG* si avranno le relazioni cognite:

$$K = G\cos.(FG), \qquad tang.(FG) = p.\frac{F}{K},$$

$$F.p = G\,sen.(FG), \qquad G^2 = K^2 + p^2.F^2.$$

Per queste formole si fa manifesto:

1°. Che *quando il centro O di riduzione si fa uscire dall' asse centrale e se ne allontana indefinitamente, la coppia risultante G esce in corrispondenza dallo* **stato minimo** *K, e cresce indefini-*

tamente ; ma il suo asse OG, proiettato che sia sulla direzione della forza risultante F, torna sempre (nella proiezione) ad esser ciò che era al punto di partenza, cioè $= K$.

2°. Che *ne' centri O di riduzione situati ad egual distanza p dall' asse centrale, l'asse OG della coppia risultante* (sempre perpendicolare alla retta p) *ha dappertutto la stessa lunghezza, ed è ugualmente inclinato alla direzione della forza risultante F.*

Ed ecco introdotto un po' di lume per entro al concetto delle riduzioni *equivalenti* (F, G) delle forze. Noi le vediamo distribuite in ordine simmetrico intorno all'asse centrale; e, nello specchio delle formole che le uniscono, seguiamo per così dire coll'occhio il variare delle loro immagini, di mano in mano che dall' asse centrale si vanno allontanando.

---

§ 3°. *Principio generale per determinare le pressioni e trazioni de' punti fissi in un sistema rigido equilibrato. Applicazioni ai gravi.*

68. L'equilibrio di un sistema *ritenuto da punti fissi*, può sempre ridursi all'equilibrio di un sistema interamente libero, sostituendo alle *pressioni* e *trazioni* che soffrono i punti fissi, altrettante forze uguali e contrarie. E ne segue che (63):

Quando un sistema rigido, ritenuto da uno o più punti fissi, riposa in equilibrio, le **pressioni** *e* **trazioni** *de' punti fissi formano una classe di forze* **equivalente** *alla classe delle forze applicate al sistema.* Così:

1°. Se non avvi che un *solo punto fisso O*, la *pressione o trazione* di questo punto sarà eguale alla forza unica F a cui debbono equivalere tutte le forze applicate, forza che dee passare per O.

2°. Se il *sistema è girevole sopra due cardini M, N*, e le forze applicate siano ridotte in M alla forza F ed alla coppia G, il piano della coppia G dovrà passare per la linea de' cardini, affinchè possa trasformarsi in una coppia di pressioni $(p, -p)$, applicate in M ed in N perpendicolarmente alla linea de' cardini $MN = c$. Per determinare il valor comune p di queste pressioni si avrà $p.c = G$, donde

$$p = \frac{G}{c};$$

ed il senso in cui tende a girare la coppia G, farà conoscere il senso della coppia $(p, -p)$, e però il senso della pressione p sopra ciascuno de' due cardini.

Applicazioni ai gravi.

69. Un grave, sospeso o sostenuto comunque da un punto fisso, rimarrà in equilibrio se la verticale condotta pel centro di gravità passa per quel punto, e viceversa. La trazione o pressione del punto sarà eguale al peso del grave.

70. Data una porta sostenuta in equilibrio da due cardini M, N in *linea verticale*, essa grava di tutto il suo peso P la linea de' cardini, ed oltre a ciò il cardine superiore è tratto infuori, e l' inferiore è sospinto in dentro, entrambi con forza

$$p = P \cdot \frac{d}{c},$$

dove c è la retta che unisce i cardini, e d è la distanza che corre tra questa retta ed il centro di gravità G della porta.

Per ottener l' evidenza di questi risultati, basta trasportar la forza P (che rappresenta il peso della porta) dal centro di gravità G fino alla linea de' cardini, tener conto della coppia $P.d$ che ne nasce, e poi girare e trasformar questa coppia in un' altra $= p.c$, che abbia le sue forze orizzontali $(p, -p)$ applicate ai cardini.

Si noti che i due cardini debbono sostenere insieme il peso P della porta, senza che, in generale, sia determinata la parte di peso che grava ciascuno di essi. Nella realità però, la natura stessa delle cose dee sempre offrire una soluzione particolare, variando la soluzione al variare delle circostanze.

a) Quando i due cardini M, N (*fig.* 27) sono a distanze ineguali d, D dalla verticale che passa pel centro di gravità G, la linea c de' cardini è spinta in giù secondo la sua direzione

$$\textit{con forza} = P\sqrt{\left[1 - \left(\frac{D-d}{c}\right)^2\right]};$$

ed il cardine superiore è tratto infuori

$$\textit{con forza} = P \cdot \frac{D}{c},$$

e l' inferiore è sospinto indentro

$$con\ forza = P.\frac{d}{c},$$

essendo la direzione di queste forze perpendicolare alla linea dei cardini.

Infatti se si trasporta il peso P dal centro di gravità G in uno de' cardini, per esempio nel superiore M, e se la coppia $= P.d$ che nasce dal trasporto si trasforma in un' altra $= p.c$ avente per braccio di leva la linea c de' cardini, e se infine si decompone la forza P nelle due rettangolari $P cos.(cP)$, $P sen.(cP)$ di cui la prima è diretta secondo la linea c; apparirà immantinente che la linea dei cardini è spinta in giù con forza $= P cos.(cP)$, e che il cardine superiore è tratto infuori con forza $= P sen.(cP) + P.\frac{d}{c}$, e che l'inferiore è sospinto indentro con forza $= P.\frac{d}{c}$. D'altra parte, la proiezione *orizzontale* della linea c essendo $= D - d$, si ha

$$sen.(cP) = \frac{D-d}{c},\quad cos.(cP) = \sqrt{\left[1-\left(\frac{D-d}{c}\right)^2\right]}.$$

71. Un grave posato su d' un piano sarà in equilibrio, se il piano è *orizzontale*, e se di più la verticale calata dal centro di gravità G cade entro la *base circoscritta dalle rette* che congiungono i *punti di appoggio*. Mancando la prima condizione, il corpo strisceà radendo il piano; mancando la seconda, roterà intorno a quello fra gli appoggi, verso cui cade la perpendicolare calata dal centro di gravità. (Il primo fatto si spiega decomponendo il peso P del corpo in due forze, l' una perpendicolare e l' altra parallela al piano. Si spiega il secondo fatto, immaginando trasportato il peso P dal centro di gravità G all' appoggio indicato, e tenendo conto della coppia che ne nasce).

72. Il grave preme il piano orizzontale su cui riposa con tutto il suo peso. Se gli appoggi sono due ovvero tre non posti in linea retta, si determina facilmente qual parte del peso gravi ciascuno degli appoggi: negli altri casi il problema è indeterminato (40).

73. Una trave AB del peso P si appoggi coll' estremo A sopra un piano verticale e coll' altro B sopra un piano orizzontale, fer-

mata in B da un ostacolo che le impedisce di strisciar lungo il piano. In questo stato il fulcro B è premuto verticalmente da tutto il peso della trave, esso poi ed il punto A sono spinti orizzontalmente in direzioni opposte, entrambi con forza

$$p = P \frac{a - b}{a} \tan.\varphi ,$$

dove a è la lunghezza della trave, b la distanza tra il punto A ed il centro di gravità G, e φ l' angolo che la trave fa col piano verticale.

Si ottengono questi risultati trasportando il peso P dal centro G nel punto B, tenendo conto della coppia

$$P.(a - b)\,sen.\varphi$$

che ne nasce, e poi girando e trasformando questa coppia in un' altra $= p.a \cos.\varphi$ così, che abbia le sue forze orizzontali $(p, -p)$ applicate ai punti A, B, di cui la *distanza verticale* è $= a \cos.\varphi$.

74. Un grave del peso P, posando sugli appoggi A, B (*fig.* 28), reggesi in equilibrio tra due piani inclinati alla verticale cogli angoli α, β. Le perpendicolari ai piani ne' punti A, B s' incontreranno in un punto D della verticale VG condotta pel centro G di gravità del corpo, e chiamato C l' angolo de' due piani, le pressioni a, b contro gli appoggi A, B si avranno dalla proporzionalità (20):

$$\frac{a}{\cos.\beta} = \frac{b}{\cos.\alpha} = \frac{P}{sen.C} .$$

75. Se la verticale VG non passa per l' intersezione D delle perpendicolari AD, BD, ma più verso l' un degli appoggi, per esempio verso A, il punto B del corpo tenderà ad alzarsi ove non sia trattenuto da opportuno ritegno. Il che si fa chiaro trasportando da G in D il peso P, e poi trasformando la coppia che ne nasce così, che le forze della nuova coppia $(p, -p)$ siano applicate ne' punti A, B con direzioni normali al piano CA.

76. Se il corpo si appoggia sui piani CA, CB, non già in un punto solo, ma in più punti, o in una base estesa, per esempio sulle basi lm, $l'm'$, basta per l'equilibrio che la verticale GV passi per entro al parallelogrammo compreso dalle perpendicolari erette sui due piani ne' termini delle basi lm, $l'm'$.

§ 4°. *Formole per la composizione delle coppie, e per la riduzione delle forze applicate ad un sistema rigido.*

I. *Una medesima legge governa la composizione delle coppie e la composizione delle aree. Momento di rotazione di una forza intorno ad un asse.*

77. Data una coppia (f, $-f$) col braccio di leva h, è chiaro che il suo momento ($= f.h$) si può riguardare come rappresentato da un parallelogrammo S, avente per *base* una delle forze f e per *altezza* il braccio di leva h. Ciò posto, apparisce che la legge della composizion delle coppie per mezzo de' loro assi, è identica a quella della composizione de' parallelogrammi che le rappresentano (Vedi *l'Appendice*, 34 e 36), e che perciò si potranno applicare alle coppie le formole relative alla composizione e decomposizione delle aree.

78. Essendo O l' origine di tre assi rettangolari x, y, z (*fig.* 29), una forza f rappresentata dalla retta eg e composta delle tre P, Q, R nel senso di x, y, z, sia applicata nel punto e di coordinate α, β, γ; sia h la perpendicolare Oh tirata sulla direzione della forza eg, ed $Oe = e$.

Se in O applichiamo due forze opposte Of, Of' eguali tra loro e ad eg, è manifesto che alla *forza data* $= eg$ potremo sostituire il *sistema equivalente*, composto della forza Of e della coppia (Of', eg). Ora il momento S ($= f.h$) e l' asse s di questa coppia è rappresentato dall'*area* e dall'*asse* del parallelogrammo che ha per lati Oe, Of e che è $= ef\,sen.(ef) = f.h$. Decomponendo adunque questa coppia S in tre A, B, C parallele ai piani yz, zx, xy, avremo (*App.*, 39):

$$A = R\beta - Q\gamma\,, \quad B = P\gamma - R\alpha\,, \quad C = Q\alpha - P\beta\,.$$

Supponiamo che il sistema rigido, animato dalla sola forza f applicata in e, sia volubile sopra due cardini situati sull' asse Ox. La forza f trasportata nel cardine O, e le due coppie B, C i cui piani passano per l'asse Ox, sono evidentemente impedite e distrutte dalla reazione de' cardini ; onde è che l' azion della forza f nel punto e per far girare il sistema sarà *equivalente* all' azione della sola coppia A, il cui piano è perpendicolare alla linea de' cardini Ox. Sotto questo punto di vista, la coppia A è detta *il momento di rotazione* della forza f intorno all' asse Ox.

Questo momento della forza f intorno all' asse Ox si esprime ancora per $f sen.(fx).p$, cioè per un prodotto di due fattori, di cui il primo è la proiezione della forza f sul piano yz, proiezione

$$= f.cos.(yz, f) = f sen.(fx) ,$$

ed il secondo è la distanza p di questa proiezione dall' asse Ox. Infatti la coppia A è rappresentata sul piano yz da un parallelogrammo i cui lati sono le proiezioni de' lati del parallelogrammo $Oegf$ (*fig.* 29). Ma la proiezione del lato $eg = f$ sul piano yz è $= f sen.(fx)$, e se questo lato del parallelogrammo A si prende per base, la sua distanza p dal punto O ne sarà l' altezza, e si avrà :

$$A = f sen.(fx).p .$$

I momenti di rotazione della forza f intorno agli assi y, z si troverebbero in egual modo :

$$B = f sen.(fy).q , \quad C = f sen.(fz).r ,$$

dove q ed r segnano le distanze che corrono da ciascuno degli assi y e z alla proiezione della forza f sui piani zx , xy. In generale :

79. Il **momento di rotazione** *di una forza f intorno ad un asse qualsivoglia si esprime col prodotto di due fattori, di cui l' uno è la proiezione della forza sopra un piano perpendicolare all' asse , e l' altro è la distanza di questa proiezione dall' asse medesimo.*

80. *Coroll.* Allorchè un sistema rigido , volubile intorno ad un asse , entra in movimento sotto l'azion di più forze f, f', f'' etc., la causa del moto può ridursi ad una sola forza il cui momento sia eguale all' eccesso onde la somma de' momenti delle forze che tendono a far girare il sistema in un senso , supera la somma de' momenti che tendono a farlo girare in senso contrario. Ed invero tutti questi momenti rappresentano l'azione di coppie situate in piani paralleli , perpendicolari all' asse dato, coppie che equivalgono ad una coppia unica eguale alla loro somma (55).

II. *Formole per la riduzione di tutte le forze, applicate ad un sistema rigido, ad una forza F e ad una coppia G.*

81. Siano f, f', f'' etc. le forze applicate al sistema rigido nei punti

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha', \beta', \gamma'), \quad (\alpha'', \beta'', \gamma'') \text{ etc.},$$

ed abbiano (parallele agli assi rettangolari x, y, z) le componenti rispettive

$$(P, Q, R), \quad (P', Q', R'), \quad (P'', Q'', R'') \text{ etc.}$$

Le forze f, f', f'' etc, si trasportino parallelamente a sè stesse in un punto preso ad arbitrio nello spazio, e quivi si compongano in una sola forza F, e le coppie che nascono da questo trasporto, in una coppia sola.

Denotando per X, Y, Z le componenti di F parallele ai tre assi Ox, Oy, Oz, avremo:

$$X = \Sigma P,$$
$$Y = \Sigma Q,$$
$$Z = \Sigma R; \quad F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

ed è chiaro che queste componenti saranno sempre le medesime, al pari di F, ovunque si prenda il centro di riduzione.

La coppia risultante G cangiando allo spostarsi del centro di riduzione, supponiamo successivamente che questo sia preso prima nella origine O delle coordinate, e poscia in un punto qualsivoglia (x, y, z) dello spazio.

Nel primo caso, se denotiamo per L, M, N le componenti di G parallele ai piani yz, zx, xy, avremo per la legge della composizione delle coppie parallele

$$L = \Sigma(R\beta - Q\gamma),$$
$$M = \Sigma(P\gamma - R\alpha),$$
$$N = \Sigma(Q\alpha - P\beta); \quad G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Nel secondo caso, se si denotano per

$$G_1\ ,\quad L_1\ ,\quad M_1\ ,\quad N_1$$

ciò che diventano le quantità G, L, M, N nel centro di riduzione (x, y, z), avremo

$$\begin{cases} L_1 = \Sigma(R\beta - Q\gamma) - (y\Sigma R - z\Sigma Q)\ , \\ M_1 = \Sigma(P\gamma - R\alpha) - (z\Sigma P - x\Sigma R)\ , \\ N_1 = \Sigma(Q\alpha - P\beta) - (x\Sigma Q - y\Sigma P)\ ; \end{cases}$$

ossia, fatte le sostituzioni,

$$\begin{cases} L_1 = L - (Zy - Yz)\ , \\ M_1 = M - (Xz - Zx)\ , \\ N_1 = N - (Yx - Xy)\ ; \quad G_1^2 = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2\ ; \end{cases}$$

per le quali formole si vede, che ciascuna delle tre coppie L_1, M_1, N_1 è una funzione (di primo grado) di due sole delle tre coodinate variabili x, y, z del centro di riduzione, e che è funzione di quelle due coordinate che sono parallele al piano della coppia.

82. *Coroll.* Se le tre ultime equazioni si moltiplicano rispettivamente per X, Y, Z, e poi si sommano i prodotti, nasce la relazione

$$L_1X + M_1Y + N_1Z = LX + MY + NZ$$

equivalente a (*Append.* 11)

$$F.G_1 \cos.(FG_1) = F.G\cos.(FG)\ ,$$

donde

$$G_1 \cos.(FG_1) = G\cos.(FG)\ .$$

Quest' equazione ci fa manifesto quello che già si è trovato per altra via, cioè che: « Allo spostarsi del centro di riduzione (x, y, z), quantunque l' asse G_1 della coppia risultante vada cangiando direzione e grandezza, nondimeno la sua proiezione sopra la direzione della forza risultante F è dappertutto la medesima (67). » Denoteremo per K questa proiezione costante, talchè sia $G\cos.(FG) = K$.

III. Formole per le quali si determina il luogo di tutti i centri di riduzione, dove il piano della coppia risultante G_1 riesce perpendicolare alla direzione della forza risultante F. Dell' equivalenza delle forze ad una sola.

83. **Problema.** *Determinare il luogo de' centri di riduzione (x, y, z) dove la direzione della forza risultante F riesce perpendicolare al piano della coppia risultante, e però parallela all' asse G_1 di essa coppia.*

Soluz. Le due rette F, G_1 dovendo esser parallele nella fatta supposizione, il rapporto che è tra esse $= \frac{F}{G_1}$, sarà pur quello delle loro proiezioni omologhe (*Append.* 4). Si avrà dunque

$$\frac{X}{L_1} = \frac{Y}{M_1} = \frac{Z}{N_1} .$$

Questa proporzionalità, che equivale a due equazioni di primo grado fra le coordinate (x, y, z), dimostra che il luogo cercato è una linea retta.

Procuriamo di dare all' equazione di questa retta una forma più semplice. Dalla proporzione $\frac{Y}{M_1} = \frac{Z}{N_1}$ si trae $YN_1 = ZM_1$, ossia (81):

$$Y[N - (Yx - Xy)] = Z[M - (Xz - Zx)] ,$$

e quindi

$$YN - ZM = (Y^2 + Z^2)x - X(Yy + Zz) .$$

Ed essendo $X^2 + Y^2 + Z^2 = F^2$, e però $Y^2 + Z^2 = F^2 - X^2$, conchiuderemo la prima delle tre formole seguenti, e dalla prima per ragion di simmetria le altre due

$$\left\{ \begin{array}{l} YN - ZM = F^2x - X(Xx + Yy + Zz) , \\ ZL - XN = F^2y - Y(Xx + Yy + Zz) , \\ XM - YL = F^2z - Z(Xx + Yy + Zz) . \end{array} \right.$$

Denotiamo per a, b, c le coordinate i cui valori sono dati dalle tre equazioni :

$$F^2a = YN - ZM\,,\quad F^2b = ZL - XN,\quad F^2c = XM - YL.$$

Le formole precedenti daranno

$$\frac{Xx + Yy + Zz}{F^2} = \frac{x-a}{X} = \frac{y-b}{Y} = \frac{z-c}{Z}\,.$$

La proporzionalità

$$\frac{x-a}{X} = \frac{y-b}{Y} = \frac{z-c}{Z}$$

rappresenta una retta indefinita, condotta dal punto (a, b, c) parallelamente alla direzione della forza F (*Append.* 19), retta che si è chiamata *asse centrale.*

Per costruire il punto (a, b, c) si osservi che, segnata con p la risultante delle a, b, c, la retta F^2p sarà la risultante delle F^2a, F^2b, F^2c espresse da' binomii

$$YN - ZM,\quad ZL - XN,\quad XM - YL\,.$$

Ma questi binomii esprimono pure (nel senso di x, y, z) le componenti dell'asse del parallelogrammo $= FG\,sen.(FG)$ avente per lati contigui le due rette F, G (*Append.* 39 e 41). Si avrà dunque

$$F^2p = FG\,sen.(FG)\,,\quad \text{e}\quad p = \frac{G\,sen.(FG)}{F}\,.$$

Ciò posto, si fa chiaro che la retta p, dalla cui estremità (a, b, c) si ha da condurre l'asse centrale, deve inalzarsi a perpendicolo sul piano dell'angolo (FG), ed essere $= \dfrac{G\,sen.(FG)}{F}$.

Ed eccoci arrivati con metodo analitico, alla costruzione geometrica dell' asse centrale, ed alle formole

$$F.p = G\,sen.(FG)\ ,\quad K = G\cos.(FG)$$

già trovate più direttamente ed intuitivamente (65 e 67).

84. *Coroll.* Quando le forze f, f', f'' etc. applicate al sistema rigido equivalgono ad una sola forza F, questa agirà secondo l'asse centrale, in cui il *valor minimo* K della coppia risultante G_1 dovrà riuscire $= 0$. In questo caso adunque sarà

$$G\cos.(FG) = K = 0\ ,$$

donde

$$\cos.(FG) = \frac{LX + MY + NZ}{FG} = 0\ .$$

L' equazione

$$LX + MY + NZ = 0$$

significa che: « Per la equivalenza di tutte le forze f, f', f'' etc. ad una sola si richiede che, trasportate queste in un punto qualsivoglia O, ivi la direzione della forza risultante F riesca perpendicolare all' asse della coppia risultante G. »

Ciò verificandosi, la retta secondo cui agisce la forza *equivalente* F si farà nota per la proporzione

$$\frac{x - a}{X} = \frac{y - b}{Y} = \frac{z - c}{Z}\ ,$$

essendo il punto (a, b, c) determinato dalle:

$$\frac{a}{YN - ZM} = \frac{b}{ZL - XN} = \frac{c}{XM - YL} = \frac{1}{F^2}\ ,$$

e la retta p, composta delle tre a, b, c, essendo determinata da

$$p = \frac{G}{F} = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}\ .$$

IV. Formole per l' equilibrio di un sistema rigido e libero, e proprietà generali dell'equilibrio de' sistemi di forma variabile.

85. Affinchè più forze f, f', f'' etc. di qualsivoglia direzione (l, m, n), (l', m', n'), (l'', m'', n'') etc. (28), applicate ai punti (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ etc. di un sistema rigido e libero, si facciano equilibrio, sappiamo esser necessario e sufficiente che rendano soddisfatte le due equazioni (60):

$$F=0, \quad G=0;$$

le quali, essendo $P=lf$, $Q=mf$, $R=nf$, etc., equivalgono alle sei

$$(a) \qquad \left\{ 0=\Sigma lf=\Sigma mf=\Sigma nf; \right.$$

$$(b) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0=\Sigma f(n\beta - m\gamma)=\Sigma pf sen.(fx), \\ 0=\Sigma f(l\gamma - n\alpha)=\Sigma qf sen.(fy), \\ 0=\Sigma f(m\alpha - l\beta)=\Sigma rf sen.(fz). \end{array} \right.$$

Questi due gruppi (a) e (b) di equazioni significano che: *Per l'equilibrio di un sistema rigido e libero si richiede:*

1°. *Che la somma delle forze, stimate secondo tre assi coordinati, risulti eguale a zero rispetto a ciascuno di questi assi;*

2°. *Che la somma de' momenti di rotazione di tutte le forze, intorno a tre assi coordinati, risulti eguale a zero intorno a ciascuno di questi assi.*

Delle quali equazioni le prime tre si dicono **condizioni dell' equilibrio di traslazione**; e le tre rimanenti, **condizioni dell'equilibrio di rotazione**; perchè esprimono eziandio (come vedremo in seguito) che il sistema non può concepire alcun moto nè di traslazione, nè di rotazione.

86. *Coroll.* Quando le forze f, f', f'' etc. sono tutte parallele tra loro, e si riguardano come esprimenti numeri negativi quelle opposte alla direzione (l, m, n), allora delle sei equazioni (a e b) le prime tre si riducono alla sola

$$\Sigma f = 0,$$

essendo

$$\Sigma lf = l\Sigma f, \quad \Sigma mf = m\Sigma f, \quad \Sigma nf = n\Sigma f;$$

e le tre ultime (b) si riducono alla doppia proporzione

$$\frac{\Sigma f\alpha}{l} = \frac{\Sigma f\beta}{m} = \frac{\Sigma f\gamma}{n},$$

conforme a ciò che si era trovato per altra via (50).

87. *Scolio.* Le condizioni dell' equilibrio de' sistemi *rigidi* e *liberi* costituiscono le **proprietà generali dell' equilibrio**, dovendosi ritrovare nell' equilibrio di tutti i sistemi possibili, di *forma comunque variabile*. Infatti, se più forze si fanno attualmente equilibrio sopra un sistema di forma variabile, è evidente che l'equilibrio non cesserà supponendo che il sistema sia reso ad un tratto invariabile, o che venga per così dire a farsi rigido e solido per sè medesimo.

CAPO V.

Dell' equilibrio de' sistemi di forma variabile.

88. Allorchè un sistema animato da forze è di figura variabile, i punti di applicazione non essendo più invariabilmente connessi tra loro, viene a mancare la condizione essenziale per la quale era lecito di trasportar le forze, e di sostituire alla loro azione, per quanto si volesse complessa, l' azione equivalente di una sola forza e di una sola coppia (59). In questo caso adunque, oltre le condizioni che assicurano l' equilibrio di un sistema rigido (87), altre se ne richiedono, le quali si sogliono scoprire facendo uso del seguente:

Principio. « Un sistema di figura variabile sarà in equilibrio » se, decomposto in *sistemi rigidi parziali* (che talvolta potranno » consistere in semplici punti), ciascuno di questi sistemi parziali si » regga in equilibrio da sè sotto l' azione di tutte le forze agenti su » di esso, compresevi quelle che nascono da' suoi legami coll' intero » sistema. »

---

§ 1°. *Dell' equilibrio di un punto M scorrevole sopra una data superficie.*

89. **Teor.** *Un punto materiale M collocato sopra una superficie resistente vi starà in equilibrio, se le forze che lo sollecitano si riducano ad una forza F, che sia normale alla superficie, e che di più spinga il punto contro la medesima. E viceversa.*

Dim. Se la superficie resistente è un *piano*, è manifesto che la forza F, siccome normale e però simmetrica rispetto al piano, non può aver ragione di eccitare intorno a sè piuttosto in una direzione

8

che in un' altra il moto del punto M; dovrà dunque ridursi ad una semplice *pressione*, cioè ad una forza il cui effetto è interamente distrutto dalla resistenza del piano. E lo stesso avverrebbe se la superficie fosse *curva*, potendosi intendere sostituita dal piano che la tocca nel punto M.

Viceversa: Se un punto M sollecitato da forze riposa in equilibrio sopra una superficie resistente, la risultante F delle forze agirà *normalmente* contro la superficie. Imperocchè se fosse *obliqua*, potrebbe risolversi in due l'una normale e l'altra tangenziale: la prima sarebbe distrutta dalla resistenza della superficie, ma la seconda non incontrando ostacolo (si fa astrazione dall'attrito) farebbe muovere il punto M.

90. *Coroll. I.* Siano x, y, z le coordinate rettangolari del punto M sulla superficie dell' equazione

$$N(x, y, z) = 0,$$

e P, Q, R le componenti della forza F parallele alle x, y, z: nel caso di equilibrio si avranno le relazioni

$$(a) \qquad \frac{P}{\frac{dN}{dx}} = \frac{Q}{\frac{dN}{dy}} = \frac{R}{\frac{dN}{dz}} = \frac{F}{n},$$

essendo

$$n = \sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dz}\right)^2\right]}.$$

Infatti sappiamo (*App.* 61) che, conducendo nel punto $x\ y\ z$ una retta n composta delle tre $\frac{dN}{dx}$, $\frac{dN}{dy}$, $\frac{dN}{dz}$ parallele agli assi coordinati, questa retta n è normale alla superficie N, e però parallela alla forza F.

Viceversa: Se sussistono le relazioni (a), la forza F sarà normale alla superficie N, ed, ove spinga contro di essa, vi terrà in equilibrio il punto M.

91. *Coroll. II.* Se il punto M è in equilibrio sulla curva $N(x, y) = 0$, sarà

$$\frac{P}{\frac{dN}{dx}} = \frac{Q}{\frac{dN}{dy}} = \frac{F}{n}, \text{ ed } n = \sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dy}\right)^2\right]}.$$

§ 2°. *Dell' equilibrio del poligono funicolare: 1°. in generale; 2.° quando le forze dividono per metà gli angoli; 3°. e quando sono parallele o pesi. Figura del poligono. Poligono composto di lati rigidi addossati gli uni agli altri.*

92. **Problema.** *Trovare le condizioni dell'equilibrio del poligono funicolare fABC....F (fig. 30), cioè di un sistema di punti che, essendo legati tra loro da fili flessibili e inestendibili, sono tratti rispettivamente da forze date.*

Soluzione. L'equilibrio di ogni vertice, quale B, richiede che vi si equilibrino tre forze, cioè la forza applicata f'' e quelle che vengono dalle tensioni de' lati contigui BA, BC. Queste tre forze dovranno esser dunque in un medesimo piano, e ciascuna esser proporzionale al seno dell'angolo compreso tra le direzioni delle altre due (20). E l'equilibrio di ciascun lato richiede, che sia teso nelle sue estremità da forze uguali e contrarie, l'intensità delle quali *misura la tensione del lato.*

Denotiamo per a, b, c, d,....q i lati successivi del poligono che supporremo aperto, per f, F le forze che tirano i capi estremi a, q; e per f', f'', f''', etc. le forze applicate ai vertici intermedii A, B, C etc., ossia (ab), (bc), (cd) etc.

Per tradurre in formole l'equilibrio del poligono basterà decomporre ognuna di queste forze intermedie in due, dirette secondo i lati dell'angolo cui è applicata (proiettandola sopra ciascuno di essi, essendo l'altro dirigente), e poi esprimere che ogni lato è in equilibrio da sè per le forze da cui è teso. Nasceranno l'equazioni:

$$f + f'\frac{\text{sen.}(bf')}{\text{sen.}(ba)} = 0,\quad f'\frac{\text{sen.}(af')}{\text{sen.}(ab)} + f''\frac{\text{sen.}(cf'')}{\text{sen.}(cb)} = 0,\ \text{etc.}$$

equivalenti alle

$$(1)\qquad -f = f'\frac{\text{sen.}(f'b)}{\text{sen.}(ab)},\quad \left\{\begin{array}{l} f'\dfrac{\text{sen.}(f'a)}{\text{sen.}(ab)} = f''\dfrac{\text{sen.}(f''c)}{\text{sen.}(bc)}, \\ f''\dfrac{\text{sen.}(f''b)}{\text{sen.}(bc)} = f'''\dfrac{\text{sen.}(f'''d)}{\text{sen.}(cd)}, \\ \text{etc.} \quad = \quad \text{etc.} \end{array}\right.$$

nelle quali gli angoli sotto i seni, per es. $(f'b)$, misurano il deviar che fanno l' una dall' altra le direzioni che vi sono segnate; onde i simboli (ab), (bc), etc. denotano gli *angoli esterni* supplementi degli angoli interni A, B etc. del poligono.

93. *Coroll.* Se il poligono riducasi ai due lati a, b fissi ne' loro capi, le loro tensioni saranno

$$f' \frac{sen.(f'b)}{sen.A}, \qquad f' \frac{sen.(f'a)}{sen.A}.$$

Suppongasi ora, che la direzione della forza f' tagli per metà l'angolo A delle due funi a, b: esse funi saranno tese ugualmente, e sarà la tensione

$$= \frac{f'}{2\cos.\frac{1}{2}A} = \frac{f'}{2sen.\frac{1}{2}(ab)},$$

a causa di

$$sen.(f'a) = sen.(f'b) = sen.\tfrac{1}{2}A, \text{ e di } sen.\, A = 2\,sen.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}A.$$

E viceversa: Se le due parti della fune siano tese ugualmente, la direzion della forza f' dovrà divider per metà l'angolo A. Così, per esempio, se il punto A di applicazione fosse scorrevole a modo di anello, le due parti della fune (comunicando liberamente tra loro) sarebbero tese ugualmente, e però la direzion della forza f' dovrebbe divider per metà l' angolo A.

94. I. **Teor.** *Se nel poligono funicolare $fABC....F$ (fig. 31) le forze f', f'', f''' etc. dividono per metà gli angoli interni A, B, C etc. a cui sono applicate, ogni lato sarà teso egualmente, ed il valor comune T di questa tensione, stimata nel senso in cui si percorre il perimetro del poligono, sarà:*

$$T = -f = \frac{f'}{2\cos.\frac{1}{2}A} = \frac{f''}{2\cos.\frac{1}{2}B} = \text{etc.}$$

o ciò che torna lo stesso:

$$(2) \qquad T = -f = \frac{f'}{2sen.\frac{1}{2}(ab)} = \frac{f''}{2\,sen.\frac{1}{2}(bc)} = \text{etc.}$$

vale a dire: *il valore della tension costante del poligono è uguale al quoto che si ottiene, dividendo una forza qualsivoglia applica-*

ta ad un vertice pel doppio coseno della metà dell' angolo interno, ovvero pel doppio seno della metà dell'angolo esterno corrispondente.

Dim. Poichè ognuna delle forze applicate ai vertici divide per metà l' angolo corrispondente, le sue componenti dirette secondo i lati dell' angolo saranno eguali, e per conseguente saranno tutte eguali tra loro le forze onde sono tesi e tenuti in equilibrio i lati consecutivi. Quindi le formole (1) che rappresentano le tensioni de' lati, si muteranno nelle proposte (93).

95. II. **Teor.** *Quando le forze applicate agli angoli sono* **pesi** (o, ciò che torna lo stesso, quando sono *parallele*), *allora:* 1°. *il poligono sarà tutto compreso in un medesimo piano verticale ;* 2°. *E se la tensione di ogni lato si decompone in due forze, l'una* **orizzontale** O *e l'altra* **verticale**, *la tensione orizzontale sarà costante, ed il suo valore* (segnata con z la direzion verticale) *sarà :*

$$(3) \quad O = -f\,sen.(za) = f'\frac{sen.(za)sen.(zb)}{sen.(ab)} = f''\frac{sen.(zb)sen.(zc)}{sen.(bc)} = \text{etc.}$$

$$= \frac{f'}{cot.(za) - cot.(zb)} = \frac{f''}{cot.(zb) - cot.(zc)} = \text{etc.}$$

Dim. 1°. Nel piano in cui sono i due lati a, b e la forza f' dovrà pure trovarsi la seconda forza f'', che per ipotesi è parallela ad f'. Ed in questo piano cadrà eziandio il terzo lato c, e quindi la terza forza f''', e così fino all' ultimo.

2°. Se l' equazioni (1) del n°. 92 si moltiplicano rispettivamente per

$$sen.(za), \quad sen.(zb), \quad sen.(zc), \quad \text{etc.}$$

(con che si ottengono le componenti orizzontali di simili tensioni) si vedrà subito, che il secondo membro di ciascheduna di esse diviene identico al primo di quella che segue, e così compariranno sotto la prima delle forme proposte (3), dalla quale si passerà alla seconda forma osservando essere

$$sen.(ab) = sen.(az + zb) = sen.(zb)cos.(za) - sen.(za)cos.(zb),$$

e per conseguente

$$\frac{sen.(za)sen.(zb)}{sen.(ab)} = \frac{1}{cot.(za) - cot.(zb)}.$$

« *Per ottenere adunque la tensione orizzontale O, costante in tutta l'estension del poligono carico di pesi, basta moltiplicare un peso qualunque applicato ad un vertice pe' seni degli angoli che i lati adiacenti fanno colla verticale, e poscia dividere il prodotto pel seno dell'angolo corrispondente;* ovvero: *basta divider quel peso per la differenza delle cotangenti degli angoli che i lati adiacenti fanno colla verticale.* »

96. *Coroll.* Denotiamo per s un lato qualunque di questo poligono, per T la sua tensione **assoluta**, e per O e V le componenti **orizzontale** e **verticale** della stessa tensione: sarà

$$O = T sen.(zs) \,, \quad V = T cos.(zs) \,,$$

e per conseguente

$$T = \frac{O}{sen.(zs)} \,, \quad V = O.cot.(zs) \,,$$

donde, essendo O costante, si raccoglie che:

Nel *poligono carico di pesi* (al quale si può anche riferire una catena sospesa a due punti fissi):

1°. *La tension assoluta è* **minima** *nel punto infimo*, o *nel lato orizzontale se vi è, ed appresso va crescendo nella proporzione in cui diminuisce il seno dell' angolo (zs) onde i lati ascendenti s' inclinano alla verticale;* 2°. *E la tension verticale va crescendo proporzionalmente alla cotangente dello stesso angolo.*

97. III. **Teor.** *Nel poligono carico di pesi le direzioni de' lati estremi a, q s' incontrano sulla verticale che passa pel centro di gravità de' pesi, ed i valori T_1, T_2 delle forze che li tendono, sono:*

$$T_1 = P\,\frac{sen.(zq)}{sen.(aq)} \,, \quad T_2 = P\,\frac{sen.(az)}{sen.(aq)} \,,$$

denotando P la somma di tutti i pesi applicati ai vertici.

Dim. Supponiamo che il poligono divenga rigido senza che si turbi l' equilibrio. In questo caso il sistema può ridursi a tre sole forze, cioè alle forze che tendono i capi estremi a, q del poligono, ed alla forza P risultante de' pesi, la cui direzione verticale passa pel loro centro di gravità. E siccome queste tre forze non possono essere in equilibrio senza che le loro direzioni concorrano in un medesimo punto, così le prime due dovranno incontrarsi sulla direzion verticale della terza P, la quale, ove sia decomposta secondo coteste direzioni di a, q, darà subito le due formole proposte.

Coroll. I. E da queste s' inferisce che, se l' angolo (aq) onde la direzione dell' ultimo capo q della fune devia dalla direzione del primo capo a, è molto piccolo, le tensioni di questi capi saranno grandissime in paragone del peso totale P della fune. Quindi: *Non v' ha tensione che basti a stendere una corda pesante in linea retta non verticale.*

Coroll. II. Se ciascuna delle due tensioni estreme T_1, T_2 si decomponga in due forze (O_1, V_1), (O_2, V_2) l'una orizzontale e l' altra verticale, essendo queste forze in equilibrio col peso P, si dovrà avere

$$V_1 + V_2 = P\ ,\quad O_1 + O_2 = 0\ ,$$

e però
$$O = O_2 = -O_1\ .$$

98. *Nell' equilibrio del poligono funicolare la* **tensione di un lato** può riguardarsi come *una* **forza di reazione** *che spiega la sua energìa con due sforzi uguali ed opposti, pe' quali tiene in equilibrio separatamente le due parti del poligono situate al di là e al di qua di esso lato.* E siccome l' equilibrio non cessa se si rende rigido il poligono, così è manifesta la seguente:

Proposizione. *La tensione di un lato del poligono funicolare, stimata nel senso in cui se ne percorre il contorno, è uguale ed opposta alla risultante di tutte le forze applicate al poligono dalla sua origine sino al lato che si considera.*

99. **Prob.** I. *Dati i lati a, b, c,... q e le forze f, f', f'',.... F che li devono tendere, costruir la figura sotto cui si disporrà il poligono funicolare nello stato di equilibrio.*

Soluz. Il lato a dovrà avere una direzione opposta a quella della forza f, il lato b una direzione opposta alla risultante delle prime due forze f, f', il lato c una direzione opposta alla risultante delle prime tre forze f, f', f'', e così di seguito fino all' ultimo lato q (98). La forza F che tira questo lato dovrà essere uguale ed opposta alla risultante di tutte le altre forze.

100. *Coroll. I.* Apparisce di qui che le forze, che tengono in equilibrio il poligono funicolare, non debbono soddisfare che ad una sola condizione, ed è che: *trasportate parallelamente a sè stesse in un medesimo punto, ivi si facciano equilibrio.*

101. *Coroll. II.* Riferito il poligono a tre assi rettangolari, sia s il lato che unisce i due vertici consecutivi xyz, $x'y'z'$, e T la sua

tensione : sarà

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{-T}{s} = \dfrac{\Sigma P}{x'-x} = \dfrac{\Sigma Q}{y'-y} = \dfrac{\Sigma R}{z'-z}\,, \\ T^2 = (\Sigma P)^2 + (\Sigma Q)^2 + (\Sigma R)^2\,, \end{cases}$$

dove ΣP, ΣQ, ΣR sono le somme delle forze f, f', f'' etc. applicate al poligono dalla sua origine fino al lato s e stimate parallelamente alle coordinate x, y, z. Infatti coteste formole esprimono che la risultante delle tre forze ΣP, ΣQ, ΣR, siccome uguale ed opposta alla tensione del lato s (98), è $= -T$, ed esprimono inoltre che le rette parallele s, $-T$ sono proporzionali alle loro proiezioni omologhe.

Quindi si avrà pure

$$(b)\quad \begin{cases} \cos.(xs) = \dfrac{x'-x}{s} = \dfrac{\Sigma P}{-T}\,, \\ \cos.(ys) = \dfrac{y'-y}{s} = \dfrac{\Sigma Q}{-T}\,, \\ \cos.(zs) = \dfrac{z'-z}{s} = \dfrac{\Sigma R}{-T}\,. \end{cases}$$

Le formole (a), facendo conoscere i vertici consecutivi del poligono, si possono riguardare come *l'equazioni del suo perimetro.*

102. **Problema** II. *I capi estremi a, q del poligono essendo attaccati a due punti fissi, ed essendo date le forze f', f'', f''' etc. da applicarsi ai vertici degli angoli A, B, C etc., determinare la figura del poligono in equilibrio.*

Soluz. Per risolvere questo problema basta determinare la forza f che equivale alla reazione del primo punto fisso; poichè, trovata questa forza in grandezza e in direzione, la costruzione del poligono si compie precisamente come nel problema che precede. A questo fine osserviamo, che la retta che unisce i due punti fissi dee riuscire contermina alla linea poligona di cui sono date le lunghezze de' lati a, b, c,....q, e che per conseguente le proiezioni α, β, γ di essa retta sopra tre assi rettangolari dovranno riuscire uguali alle proiezioni omologhe della suddetta linea poligona (*App.* 10. *scol. II.*). Si avrà dunque

$$\begin{aligned} \alpha &= a\cos.(xa) + b\cos.(xb) + c\cos.(xc) \ldots + q\cos.(xq)\,, \\ \beta &= a\cos.(ya) + b\cos.(yb) + c\cos.(yc) \ldots + q\cos.(yq)\,, \\ \gamma &= a\cos.(za) + b\cos.(zb) + c\cos.(zc) \ldots + q\cos.(zq)\,, \end{aligned}$$

dove i valori de' coseni si debbono ricavare dalle formole

$$cos.(xs) = \frac{\Sigma P}{-T}, \ cos.(ys) = \frac{\Sigma Q}{-T}, \ cos.(zs) = \frac{\Sigma R}{-T},$$

supponendo che il lato s rappresenti successivamente i lati a, b, c,...q. Ma in quest' espressioni non entrano come incognite che le sole componenti P, Q, R della prima forza f, essendo date per ipotesi tutte le altre forze f', f'', f''' etc. in grandezza e in direzione. Dunque le tre equazioni (c) potranno farci scoprire i valori di queste tre incognite P, Q, R, ed appresso la figura del poligono.

103. *Scolio.* Le formole ottenute sin qui intorno al poligono funicolare servono pure a determinare a quali condizioni e sotto qual figura è tenuto in equilibrio un poligono composto di lati rigidi e semplicemente addossati l'uno all'altro; nè avvi altro divario se non questo, che ciò che si è chiamato *tensione de' lati*, si dovrà chiamare **pressione o spinta.**

Per esempio, se le forze f', f'', etc. consistessero in pesi, il poligono di lati rigidi e addossati l' uno all' altro dovrebbe sorgere in un piano verticale, colla concavità verso il basso, offerendo la stessa figura, ma posta a rovescio, dell' analogo poligono funicolare. Questo poligono rigido, oltre esser carico negli angoli, potrebbe esserlo ancora in uno o più punti de' lati; perchè, risolvendo ciascuno di questi nuovi pesi in due applicati alle estremità del lato corrispondente, si ricade nel caso del poligono aggravato ne' soli vertici.

Se i lati del poligono consistono in verghe rigide congiunte a cerniera negli angoli, in guisa che gli angoli possano aprirsi o serrarsi senza che i termini de' lati mutino distanza, è manifesto che la figura sotto cui questo poligono si mette in equilibrio, potrà essere indifferentemente quella dell' analogo poligono, sia di lati flessibili e inestendibili, sia di lati rigidi e addossati l' uno all' altro.

---

§ 3°. *Della figura di equilibrio della curva funicolare e sue proprietà: caso in cui la fune è incurvata da forze normali.*

104. **Teor.** *La curva funicolare in equilibrio si può riguardare come un poligono infinitilatero, tirato ne' suoi vertici da forze date.*

Dim. Supponiamo che la curva s sia sollecitata dalla forza f la quale, nel passare da un punto ad un altro, varii insensibilmente d' intensità e direzione. Questa forza, nel tratto infinitesimo di ogni elemento ds, si potrà considerare come operante con azioni uguali e parallele che si comporranno in un' azione unica risultante $= fds$, applicata al centro di gravità di ds. Così, tutti gli elementi ds della curva potendosi supporre animati ciascuno da una forza unica applicata ai loro punti di mezzo, si fa manifesto che la curva stessa si potrà riguardare come un poligono infinitilatero sollecitato in tutti i suoi vertici da forze date.

105. *Coroll. I.* E dalla teoria del poligono funicolare in equilibrio si raccoglierà : 1°. Che la forza fds, che anima un elemento qualunque della curva funicolare, è contenuta nel piano determinato da' due latercoli contigui al suo punto di applicazione, ossia in quello che si è chiamato piano *osculatore* di essa curva ; 2°. E che la *tensione* T dell' elemento ds, diretta secondo il medesimo, è uguale ed opposta alla risultante di tutte le forze fds applicate ai diversi elementi ds della curva, dalla sua origine fino all' elemento ds che si considera (98).

106. *Coroll. II.* Riferendo adunque la curva a tre assi rettangolari , si avrà

$$(1) \qquad \frac{-T}{ds} = \frac{\int Pds}{dx} = \frac{\int Qds}{dy} = \frac{\int Rds}{dz},$$

$$(2) \qquad T^2 = (\int Pds)^2 + (\int Qds)^2 + (\int Rds)^2,$$

dove $\int Pds$, $\int Qds$, $\int Rds$ denotano le somme delle forze elementari fds applicate alla curva, dalla sua origine fino all' elemento ds che si considera, e stimate parallelamente alle coordinate x, y, z.

Coteste formole esprimono infatti che la risultante delle tre forze $\int Pds$, $\int Qds$, $\int Rds$, siccome uguale ed opposta alla tensione dell' elemento ds , è $= -T$, e che le rette parallele $-T$, ds sono proporzionali alle loro proiezioni omologhe (101).

107. *Coroll. III.* Dalle (1) si ricava

$$(1)' \qquad \int P ds = -T\frac{dx}{ds},\ \int Q ds = -T\frac{dy}{ds},\ \int R ds = -T\frac{dz}{ds};$$

e queste, differenziate, generano le seguenti

$$(1)'' \qquad \begin{cases} P ds + d\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) = 0, \\ Q ds + d\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) = 0, \\ R ds + d\left(T\dfrac{dz}{ds}\right) = 0, \end{cases}$$

alle quali si può anche arrivare immediatamente esprimendo l' equilibrio dell' elemento ds sotto le azioni delle tre forze che agiscono su di esso, vale a dire della forza $f ds$, e delle tensioni che ne tirano l' estremità in senso opposto. Per esempio, queste tre forze stimate secondo l' asse x sono

$$P ds, \quad -T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dx}{ds} + d\left(T\frac{dx}{ds}\right),$$

la cui somma eguagliata a zero offre appunto la prima delle (1)″. È poi chiaro che dalle (1)″ si risale, integrando, alle (1)′.

Scolio. Dallo sviluppo delle (1)″ si trae

$$P = -\frac{T}{r}\cos.(xr) - \frac{dT}{ds}\cos.(xs),$$

$$Q = -\frac{T}{r}\cos.(yr) - \frac{dT}{ds}\cos.(ys),$$

$$R = -\frac{T}{r}\cos.(zr) - \frac{dT}{ds}\cos.(zs),$$

e quindi

$$f\cos.(sf) = -\frac{dT}{ds},$$

$$f\,\mathrm{sen}.(sf) = -\frac{T}{r},$$

essendo r il raggio osculatore.

Da quest' ultime relazioni apparisce che :

« L'azione, onde la tensione T in ciascun elemento ds della curva controbilancia l' azione della forza sollecitante f, si compone di due azioni dirette nel piano osculatore, l' una *tangenziale* ed $= \frac{dT}{ds}$, e l' altra *normale* alla curva ed $= \frac{T}{r}$. »

108. *Coroll. IV.* Dalla $f\cos.(sf) = -\frac{dT}{ds}$ si raccoglie

$$-dT = fds\cos.(sf) = Pdx + Qdy + Rdz\ ,$$

vale a dire :

« La variazione che subisce la tensione, nel passare dal principio al termine di un elemento ds, è uguale alla forza f che anima l'elemento, stimata secondo la direzione dello stesso. »

109. **Teor.** *Nell' equilibrio di un filo flessibile incurvato da* **forze normali :** 1°. *la tensione è costante in tutta l' estensione del filo ;* 2°. *e l' intensità della forza normale varia da un punto all' altro in ragion inversa del raggio osculatore r corrispondente.*

Dim. Infatti essendo in questo caso $\cos.(sf) = 0$, $sen.(sf) = 1$, sarà

$$dT = 0\ , \quad \text{donde} \quad T = costante\ ;$$

$$\text{ed} \qquad f = -\frac{T}{r}\ ;$$

dove il segno (—) significa che la forza normale f dee avere una direzione opposta a quella del raggio r che va dalla curva al centro di curvatura, o, in altri termini, significa che le forze f, nell' incurvare il filo flessibile, debbono agire dalla parte concava alla convessa.

Altra dimostrazione. Il filo incurvato da forze normali può riguardarsi come un poligono infinitilatero in cui le forze applicate ai vertici dividono per mezzo gli angoli corrispondenti. Ma si è trovato che in simile poligono (94) la tensione è costante, e che è

$$= \frac{fds}{2\,sen.\frac{1}{2}d\theta}\ ,$$

essendo $d\theta$ l'angolo esterno, ossia l' angolo di contingenza. Dunque sarà

$$-T = \text{costante} = \frac{fds}{d\theta} = fr\ , \quad \text{ed} \quad f = -\frac{T}{r}\ .$$

110. *Coroll.* Se un filo flessibile circondotto ad una superficie curva resistente è tirato nelle sue estremità da due forze, nello stato di equilibrio: 1° le due forze dovranno essere uguali; 2° il filo sarà tutto teso egualmente; 3° la pressione ch'esso fa sopra ciascun punto della superficie sarà inversamente proporzionale al raggio r di curvatura; 4° ed infine il piano osculatore della curva sarà normale in ogni punto alla superficie.

Imperocchè la resistenza che la superficie abbracciata oppone alla pressione del filo è da per tutto una forza normale al filo, a quel modo che la pressione è normale alla superficie. Siamo dunque nel caso di un filo incurvato da forze che son normali al filo ed alla superficie, donde segue che il piano osculatore della curva sarà normale in ogni punto alla superficie.

Scolio. La linea più breve che si possa condurre da un punto ad un altro di una superficie curva (linea chiamata **geodesica**), essendo rappresentata da un filo teso per quanto può esserlo tra i due punti, *ha la proprietà che il suo piano osculatore è normale dappertutto alla superficie.*

---

§ 4°. *Della figura di equilibrio di una catena che pende da due punti fissi, cioè della* **Catenaria**, *sia omogenea, sia eterogenea. Volte.*

111. **Quesito.** *Si domanda l' equazione della* **Catenaria**, cioè *della curva di equilibrio di un filo flessibile e pesante che pende da due punti fissi A, B (fig. 31).*

Risposta. La catenaria, potendosi riguardare come un poligono infinitilatero carico di pesi, è tutta compresa nel piano verticale che passa pei due punti di sospensione A, B (95). In questo piano e nel punto infimo O della curva s' intendano coordinati due assi Ox, Oy, il primo *orizzontale* ed il secondo *verticale* e diretto all' insù.

Se il filo è *omogeneo* e *di grossezza uniforme:*

1°. L' equazion differenziale della catenaria sarà

$$(a) \qquad a\,dy = s\,dx,$$

dove a è una costante proporzionale alla tensione orizzontale, ed s è la lunghezza dell'arco che dal punto O va al punto (x, y).

2°. E l' integrazione della (a) conduce ad un'equazione finita la quale, secondochè si voglia tra le variabili x ed y, od x ed s, od y ed s, si potrà mettere sotto la forma

$$(b)\qquad \begin{cases} y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2\right), \\ s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \\ s = \sqrt{(2ay + y^2)}. \end{cases}$$

3°. Per determinare la costante a si ha l' equazion trascendente

$$(c)\qquad a\left(e^{\frac{m}{2a}} - e^{-\frac{m}{2a}}\right) = \sqrt{(l^2 - n^2)}$$

dove l è la lunghezza data della catenaria, ed m ed n sono le proiezioni orizzontale e verticale della retta che unisce i due punti di sospensione A, B.

4.° Il punto infimo O si determina per mezzo delle sue distanze α, β orizzontale e verticale dal punto B, cioè da uno de' punti fissi di sospensione, e queste distanze sono

$$(d)\qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(m + a\log.\frac{l+n}{l-n}\right), \\ \beta = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{a}} + e^{-\frac{\alpha}{a}} - 2\right). \end{cases}$$

Dimostrazione.

Sia f il peso dell' unità di lunghezza del filo s : fds sarà il peso dell' elemento ds, di cui le componenti orizzontale e verticale parallele agli assi Ox, Oy saranno

$$Pds = 0, \quad Qds = -fds\,;$$

e le formole (1)″, ch'esprimono l' equilibrio di un elemento qualsivoglia ds della curva funicolare, cioè le

$$Pds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0\,, \qquad Qds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0\,,$$

si muteranno nelle

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = fds\,.$$

La prima di queste, integrata, diviene

$$T\frac{dx}{ds} = fa$$

(essendo a una costante da determinarsi), e significa che: *la tensione orizzontale è costante per tutta la lunghezza della catenaria.*

La seconda, integrata tra i limiti $s = 0$ ed s qualsivoglia, diviene

$$T\frac{dy}{ds} = fs\,,$$

e significa che: *la tension verticale cresce*, a partire dal punto infimo O, *proporzionalmente alla lunghezza s dell' arco.*

Dividendo l' una per l'altra coteste equazioni, si ottiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{s}\,,$$

donde

$$ady = sdx\,; \tag{1}$$

che è l' equazion differenziale proposta tra le variabili x, y, s, le quali d' altra parte sono pur vincolate dall' equazione

$$ds^2 = dx^2 + dy^2\,.$$

Se da esse eliminiamo dy, risulta

$$ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)},$$

e per conseguente

$$(2) \qquad dx = \frac{ds}{\sqrt{\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)}}.$$

Per integrar quest'equazione, ed arrivare in appresso il più prontamente possibile ai risultati proposti (b), (c), (d), posto

$$i = \sqrt{-1},$$

faremo uso delle seguenti note relazioni (Vedi l' *Appendice*)

$$(A) \left\{ \begin{aligned} \cos.i\theta &= \frac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right), \\ -i\,\mathrm{sen}.i\theta &= \frac{1}{2}\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right), \end{aligned} \right. \text{donde} \left\{ -i\,\mathrm{tang}.i\theta = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}, \right.$$

nelle quali le linee trigonometriche dell'arco immaginario $i\theta$ si debbono riguardare come *simboli* delle funzioni di θ rappresentate dai secondi membri, funzioni che godono di tutte le proprietà delle linee trigonometriche degli archi reali.

Ciò avvertito, se la (2) si scrive sotto la forma

$$d.\frac{ix}{a} = \frac{d.\frac{is}{a}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{is}{a}\right)^2\right]}},$$

e poi s' integra da ($x = 0$, $s = 0$) fino ad x ed s qualunque, si avrà subito $\frac{ix}{a} = \mathrm{arc.sen.}\frac{is}{a}$, ossia $\frac{is}{a} = \mathrm{sen.}\frac{ix}{a}$, e quindi

$$(3) \qquad s = -ia\,\mathrm{sen.}\frac{ix}{a}.$$

Sostituendo nella (1) questo valore di s, si ottiene

$$\frac{dy}{a} = -\,sen.\,\frac{ix}{a}\,.\,d\,\frac{ix}{a}\,,$$

che integrata dal punto ($x = 0$, $y = 0$) fino al punto (x, y) si muta nella

$$y = a\left(cos.\,\frac{ix}{a} - 1\right). \tag{4}$$

Infine dalle (3) e (4) ricavando i valori di $sen.\,\frac{ix}{a}$, $cos.\,\frac{ix}{a}$, ed inalzandoli a quadrato, si deduce

$$\left(1 + \frac{y}{a}\right)^2 - \frac{s^2}{a^2} = 1\,, \quad \text{donde} \quad s = \sqrt{(2ay + y^2)}\,.$$

Quest' equazione tra s ed y, e le due precedenti tra x ed y, e tra x ed s [avuto riguardo alle (A)] non sono altro che l' equazioni (b).

Passiamo ora a determinare la costante incognita a, e la posizione del punto infimo O rispetto ad uno de' due punti fissi A, B.

Denotiamo per ($-\alpha_1$, β_1), (α, β) le coordinate rispettive di cotesti punti fissi (*fig.* 31), e per S_1, S i due archi AO, OB. Essendo l la lunghezza della catenaria $AO + OB$, ed m ed n le proiezioni della retta AB sugli assi Ox, Oy, avremo

$$S_1 + S = l\,, \quad \alpha + \alpha_1 = m\,, \quad \beta - \beta_1 = n$$

Ma le (3) e (4) danno

$$\left\{\begin{aligned} S &= -\,a\,i\,sen.\,\frac{i\alpha}{a}\,, \\ S_1 &= -\,a\,i\,sen.\,\frac{i\alpha_1}{a}\,, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \beta &= a\left(cos.\,\frac{i\alpha}{a} - 1\right), \\ \beta_1 &= a\left(cos.\,\frac{i\alpha_1}{a} - 1\right); \end{aligned}\right.$$

onde le $S + S_1 = l$, $\beta - \beta_1 = n$, si convertono nelle

$$\left\{\begin{aligned} -\,ai\left(sen.\,\frac{i\alpha}{a} + sen.\,\frac{i\alpha_1}{a}\right) &= l\,, \\ a\left(cos.\,\frac{i\alpha}{a} - cos.\,\frac{i\alpha_1}{a}\right) &= n\,, \end{aligned}\right.$$

le quali, avuto riguardo alla $\alpha + \alpha_1 = m$, ed alle seguenti relazioni trigonometriche

$$sen.p + sen.q = \quad 2\,sen.\tfrac{1}{2}(p+q)\ cos.\tfrac{1}{2}(p-q)\,,$$
$$cos.p - cos.q = -\,2\,sen.\tfrac{1}{2}(p+q)\ sen.\tfrac{1}{2}(p-q)\,,$$

diventano

$$\left\{\begin{aligned} &-2\,a\,i\,sen.\frac{im}{2a}\ cos.\frac{i(\alpha-\alpha_1)}{2a} = l\,,\\ &-\ \ 2a\,sen.\frac{im}{2a}\ sen.\frac{i(\alpha-\alpha_1)}{2a} = n\,.\end{aligned}\right.$$

Ora, se di queste si prende la differenza de' quadrati, si trova

$$-\,4a^2\,sen.^2\frac{im}{2a} = l^2 - n^2\,,$$

donde

$$-2ai\,sen.\frac{im}{2a} = \sqrt{(l^2-n^2)}\,,$$

equazione equivalente alla (c). E se si prende il quoziente, si trova

$$-\,i\,tang.\frac{i(\alpha-\alpha_1)}{2a} = \frac{n}{l}\,,$$

che, fatto $\alpha - \alpha_1 = u$, equivale a

$$\frac{e^{\frac{u}{a}}-1}{e^{\frac{u}{a}}+1} = \frac{n}{l}\,,\quad \text{donde}\quad e^{\frac{u}{a}} = \frac{l+n}{l-n}\,,$$

ed

$$u = a\log.\frac{l+n}{l-n}\,.$$

Finalmente le $\alpha + \alpha_1 = m$, $\alpha - \alpha_1 = u$, e la (4), somministrano

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(m + u)\ ,\ \beta = a\left(\cos.\frac{i\alpha}{a} - 1\right),$$

equazioni equivalenti alle (d).

112. *Scolio.* Nella soluzione del problema antecedente si è supposto che la Catenaria omogenea, nel punto in cui cessa di scendere per cominciare a salire, cioè nel suo *punto infimo O* abbia una direzione orizzontale, essendo questo il caso più ordinario. Se fosse altrimenti, se per esempio dal fondo del filo pendesse un peso particolare, oppure se la Catenaria fosse tesa in modo che il punto più basso fosse l' uno A de' punti di sospensione (*fig.* 32), in questo punto infimo A la tensione verticale, espressa dalla

$$T\frac{dy}{ds} = T sen.(xs)\ ,$$

non sarebbe più eguale a zero; e per conseguenza se l' arco s si conta a partire da A, integrando l' equazioni

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0\ ,\quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = f ds\ ,$$

si avrà

$$T\frac{dx}{ds} = fa\ ,\qquad T\frac{dy}{ds} = f(b + s)\ ,$$

dove la quantità fb, *costante dell' integrazione,* esprime ciò che diventa la tensione verticale per $s = 0$. Eliminando T da coteste equazioni, si ha

$$ady = (b + s)\,dx\ ,$$

la quale si riduce alla forma di prima ponendo

$$\sigma = b + s\ :$$

Quindi se immaginiamo prolungata la nostra catenaria BA (*fig.* 32) al di sotto del punto più basso A per l' intervallo $AO = -b$, nel punto O *la direzione di essa* sarà *orizzontale*, poichè in questo punto l' equazione

$$ady = (b + AO).dx\,, \quad \text{equivale a } \frac{dy}{dx} = 0\,,$$

donde
$$tang.(xs) = \frac{dy}{dx} = 0.$$

Se adunque intendiamo che l' origine delle coordinate sia posta nel detto punto O, la soluzione del nuovo problema sarà ricondotta per intero a quella che precede.

113. *Scolio II.* Allorchè nel filo il peso non varia in proporzione della lunghezza s, l'equilibrio di un suo elemento della lunghezza ds sarà espresso come prima dalle due formole

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0\,, \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = fds\,,$$

dove fds rappresenta il peso del nominato elemento, ma qui il coefficiente f non è più costante, ma variabile da punto a punto.

L' integrazione di coteste equazioni darà

$$T\frac{dx}{ds} = a\,, \qquad T\frac{dy}{ds} = \int fds\,,$$

esprimendo a la tensione orizzontale che è costante per tutta la curva. Eliminando T, nasce la

$$ady = dx\int fds\,,$$

equazion generale di qualsivoglia catenaria.

Per esempio, nelle Catene di ferro da cui pendono i ponti sospesi, la componente verticale $\int fds$ della tensione si può ritenere che cresca, a partire dal punto infimo O, nella proporzione in cui va crescendo, non la lunghezza s della catena, ma la sua proiezione x sull' orizzonte. Quindi posto $\int fds = px$, sarà

$$ady = pxdx\,, \quad \text{donde} \quad x^2 = \frac{2a}{p} y\,,$$

vale a dire: la catenaria sarà una parabola simmetrica intorno all' asse verticale y.

114. **Volte.** Le formole precedenti servono pure a rappresentare la figura di equilibrio delle Volte considerate siccome sistemi di latercoli rigidi, appoggiati l' un contro l' altro, e reggentisi per lo scambievol contrasto. Così, se l' azion delle forze applicate è quella della gravità, la figura della Volta sarà una catenaria posta a rovescio.

---

§ 5°. *Della figura di equilibrio delle superficie di rivoluzione; caso delle forze parallele. Testuggini e Cupole.*

N. B. In una superficie di rivoluzione si dicono *meridiani* le linee i cui piani passano per l' asse di rotazione, e *paralleli* le linee circolari i cui piani sono perpendicolari allo stesso asse.

115. *Quesito.* Dalla periferia di un circolo orizzontale pende equilibrato un velo flessibile e inestendibile (*fig.* 33), la cui superficie si può riguardar come generata dal rotare di una curva intorno ad un asse centrale Ox, ed ogni punto della superficie a cui corrispondono le coordinate x, y della curva generatrice è animato da due forze P, Q parallele ad x, y, e funzioni di queste variabili. Si domanda l' equazione della curva generatrice.

Risposta. 1°. Se la superficie di rivoluzione non sia intera, ma un' *unghia isolata* compresa tra due meridiani, la curva generatrice dovrà soddisfare all' equazione

$$dy\int Pyds - dx\int Qyds = 0\,,$$

e la legge, onde varia la tensione lungo un meridiano, sarà

$$-\,d(Ty) = y(Pdx + Qdy).$$

2°. Se la superficie di rivoluzione è intera, la curva generatrice quando non soddisfaccia alla prima dovrà soddisfare alla seconda delle due condizioni

$$dy\int Pyds - dx\int Qyds = 0\,,\quad = < 0\,.$$

In questo caso, oltre la tensione del velo nel senso de' meridiani, esisterà un' altra tensione nel senso de' paralleli, la quale sarà uniforme per ciascheduno di essi, ma potrà variare nel passare dall' uno all' altro.

Dimostrazione.

1.° L' unghia infinitesima U compresa sulla superficie da due meridiani successivi, devianti l' un dall' altro coll' angolo $d\omega$, si consideri in equilibrio da sè sotto l' azion delle forze P, Q; ed in particolare a partire dal punto m (x, y) si consideri sull' unghia U l' equilibrio del trapezio dU compreso tra gli archi mn, $m'n'$ (*fig.* 33) di due paralleli. Sarà $\overline{mn} = yd\omega$, e fatto $\overline{mm'} = ds$, l'area del trapezio sarà

$$\overline{mn}\,.\,\overline{mm'} = d\omega.yds\,.$$

Le forze P, Q che agiscono in tutti i punti di questo trapezio, potendo aversi come costanti, si comporranno nelle forze risultanti

$$d\omega\,Pyds\,,\qquad d\omega\,Qyds\,,$$

applicate al centro di gravità del trapezio.

Similmente, la tensione T che agisce al punto m nella direzione di ds, esercita azioni uguali e parallele in tutti i punti di $\overline{mn}$; queste azioni parallele si comporranno quindi in un' azione unica

$$T.\overline{mn} = d\omega.Ty\,,$$

applicata nel punto di mezzo di $\overline{mn}$.

Si vede adunque, che le forze agenti sull' unghia U si possono tutte supporre applicate al meridiano che divide per mezzo l' unghia U, il qual meridiano si potrà perciò riguardare come una *curva funicolare* di cui la tensione nel punto (x, y), espressa da $d\omega . Ty$, è uguale alla risultante delle forze

$$d\omega \int Pyds \,, \quad d\omega \int Qyds \,,$$

essendo $d\omega$ costante in tutta la lunghezza dell' unghia U.

Le formole generali trovate per la curva funicolare (106) qui diventano

$$(1) \qquad \frac{-Ty}{ds} = \frac{\int Pyds}{dx} = \frac{\int Qyds}{dy} \,,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & Pyds + d\left(Ty\,\frac{dx}{ds}\right) = 0 \,, \\ & Qyds + d\left(Ty\,\frac{dy}{ds}\right) = 0 \,; \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad -d(Ty) = y(Pdx + Qdy) \,.$$

E dalle (1) si ricava

$$(4) \qquad dy \int Pyds - dx \int Qyds = 0 \,.$$

Ora è chiaro che la (4) e la (3) contengono ciò che è detto nella prima parte della nostra tesi intorno all' equilibrio dell'unghia isolata.

2°. Supponiamo in secondo luogo che la superficie di rivoluzione sia *intera*, cosicchè, segando il velo con un piano perpendicolare all' asse (x) di rotazione, la sezione sia sempre un circolo intero. Io dico che potremo aver l'equilibrio, non solo quando si verifica la prima, ma eziandio quando si verifica la seconda delle due seguenti condizioni :

$$dy \int Pyds - dx \int Qyds = 0 \,, \quad = < 0.$$

Infatti denotiamo per F la risultante delle forze $\int Pyds$, $\int Qyds$ applicate all' unghia U dal vertice O della superficie (*fig.* 33) fino all' elemento $dU = (mn')$.

Si avrà in generale (Vedi l' *App.* n.° 16)

$$(a) \qquad dy\int Pyds - dx\int Qyds = Fds.sen.(Fs) ;$$

e questa formola (a) riuscirà negativa, se l'angolo (Fs) sarà negativo, cioè se si aprirà in senso contrario all' angolo (xy), e però se nel punto m la forza F (che nel caso dell' unghia isolata doveva esser ivi tangente) si diriga e spinga dal di dentro al di fuori della superficie. Ove ciò avvenga : tutti gli elementi dU di una medesima zona compresa tra due paralleli consecutivi tenderanno a portarsi all' infuori ed a gonfiare il velo con forze uguali, ed a questi sforzi (simmetrici intorno all' asse Ox) resisterà la zona, siccome incapace di allargarsi, supponendosi in ogni punto incapace di estendersi per nessun verso. Si vede così, che una curva può essere acconcia a generare colla sua rotazione la superficie equilibrata di un velo, non solo quando la sua equazione rende uguale a zero la formola (a), ma ben anche quando la rende negativa. E si vede di più che, decomponendo la forza F in due, l' una tangente al meridiano e l'altra normale all' elemento dU, la prima sarà la misura della tensione del velo nel senso del meridiano, e la seconda produrrà la tensione del velo nel senso del parallelo corrispondente (109).

116. *Teorema.* La condizion generale delle curve che, compiendo un' intera rotazione intorno ad un asse verticale Ox, possono generare la superficie equilibrata di un velo *pesante*, è

$$dy\int yfds - adx = 0 \text{ , oppure } = < 0.$$

Dim. Consideriamo dapprima un'unghia isolata U. Nell'equazioni

$$Pyds + d\left(Ty\frac{dx}{ds}\right) = 0 , \quad Qyds + d\left(Ty\frac{dy}{ds}\right) = 0$$

che esprimono l' equilibrio dell'elemento dU, se si suppone che quest' elemento sia sollecitato dalla sola gravità, sarà

$$Pyds = - yfds , \quad Qyds = 0 ,$$

dove la quantità $yfds$ è proporzionale al peso di dU.

Integrando le due equazioni

$$d\left(Ty\frac{dx}{ds}\right)=yfds\ ,\quad d\left(Ty\frac{dy}{ds}\right)=0\ ,$$

ed eliminando T, si trova

$$dy\int yfds-adx=0$$

essendo la costante a proporzionale alla tensione orizzontale.

Ora, designata per F la risultante delle forze espresse da $\int yfds$, a, si avrà la formola

$$(a)' \qquad dy\int yfds-adx=Fds.sen.(Fs)\ ,$$

dalla quale si deduce col discorso già fatto la verità dell' enunciato teorema.

117. *Scolio.* Quando la curva generatrice della superficie di rivoluzione non rende la formola (a) nè $=0$, nè <0, ma bensì >0, si dee conchiudere che l' azione della forza F, cadendo sull'elemento dU, lo spinge verso l'asse interno Ox. Se la superficie di rivoluzione è intera, si potrà reggere in equilibrio anche in questo caso purchè si concepisca non più flessibile, ma costrutta d' infinite faccette rigide, addossate le une alle altre a modo di testuggine. Infatti, ciò essendo, gli elementi di una medesima zona tendendo tutti con egual forza e simmetricamente a portarsi verso l' asse interiore Ox s' impedirebbero a vicenda, e si sosterrebbero in equilibrio per lo scambievol contrasto.

Da qui le due proposizioni seguenti:

1ª. La condizion generale delle curve che, compiendo un' intera rotazione intorno ad un asse, possono produrre la superficie equilibrata di una Testuggine, è

$$dy\int Pyds-dx\int Qyds=0\ ,\ \text{oppure}>0.$$

2ª. La condizion generale delle curve che rotando intorno ad un asse possono produrre la superficie equilibrata di una cupola pesante, è

$$dy\int yfds-adx=0\ ,\ \text{oppure}>0.$$

§ 6°. *Della figura di equilibrio di una lamina elastica inarcata da forze date, in generale. E quando è incastrata in un de' cap 1°. orizzontalmente ; 2°. verticalmente.*

L' **elasticità** può riguardarsi come *una forza di reazione* per la quale un corpo elastico, che ha cangiato di forma sotto l' azione di una o più forze, tende naturalmente a rimettersi da sè nello stato di prima.

118. *Problema.* Una lamina elastica AL (*fig.* 34), omogenea, rettilinea e di uniforme grossezza, è inarcata secondo AmB da forze date le cui direzioni son tutte contenute nel piano (x, y) della curva. Si domanda l' equazione di questa curva di equilibrio.

Soluzione. A partire da un punto qualunque $m(x, y)$ della curva AmB consideriamo due elementi consecutivi

$$\overline{mm'} = ds\,, \quad \overline{m'm''} = ds' = ds + d^2s.$$

Sia $d\theta$ l' angolo di contingenza onde il secondo elemento ds' devia dalla direzione del primo ds, ed r il raggio di curvatura nel punto (x, y): sarà (V. *App.* n°. 53)

$$d\theta = \frac{ds}{r}\,.$$

L'*elasticità della curva* nel punto m', in forza di cui i due elementi contigui ds, ds' tendono a girare intorno al lor punto comune m' per rimettersi in linea retta, si *suppone* variare in proporzione dell' angolo di contingenza $d\theta$, ossia in proporzione della curvatura $\left(=\frac{1}{r}\right)$, e quindi si rappresenta con

$$\frac{E}{r}\,,$$

essendo E una quantità costante per una medesima lastra, ma che può esser diversa per lastre diverse.

Questa *elasticità* $\left(= \frac{E}{r}\right)$ *può dunque aversi come una* **forza di reazione** *che spiega la sua energia con* **due coppie uguali** *e* **contrarie** *per le quali tiene in equilibrio di rotazione*, separatamente, *le due parti della curva situate al di là e al di qua del punto m che si considera.*

Ciò posto, tutte le forze che agiscono sull'arco della curva AmB, compreso tra il punto m (x, y) ed una dell' estremità della curva, per esempio A, si trasportino parallelamente a sè stesse nel punto m, talchè si riducano quivi ad una sola forza F e ad una sola coppia G. La coppia G essendo tenuta in equilibrio dalla coppia di elasticità $\left(= \frac{E}{r}\right)$, si avrà

$$\pm \frac{E}{r} = G\,, \quad \text{e quindi} \pm d\frac{E}{r} = dG\,;$$

dove al primo membro si è apposto il segno $\pm$, perchè le due quantità $\frac{E}{r}$, G avendo già un segno determinato in virtù delle convenzioni fondamentali, quando si eguagliano l' una all' altra ne'casi particolari, convien fare in modo che il loro segno sia identico.

Siano X, Y le componenti della forza F date dalle formole

$$X = \int P ds\,, \quad Y = \int Q ds\,.$$

Se la forza F applicata nel punto $m(x, y)$ si trasporta parallelamente a sè stessa nel punto

$$m'(x' = x + dx\,, \quad y' = y + dy)$$

preso per nuovo centro di riduzion delle forze, nascerà la coppia elementare (79)

$$dG = Y(x - x') - X(y - y') = Xdy - Ydx\,.$$

Conchiudiamo adunque che per determinare la curva di equilibrio della lamina elastica si può partire dall' una o dall' altra delle due equazioni seguenti

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\pm \frac{E}{r} = G . \\ &\pm d\frac{E}{r} = dy\int Pds - dx\int Qds . \end{aligned} \right.$$

Scolio. La curvatura della lastra nel punto (x, y) si determina per mezzo dell' equazione (*App.* 59)

$$\frac{ds^3}{r} = dxd^2y - dyd^2x ,$$

la quale si può scrivere ancora sotto le forme

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{dx}d\frac{dy}{ds} = -\frac{1}{dy}d\frac{dx}{ds} .$$

Applicazioni.

119. 1ª. Essendo la lamina incastrata nel termine A in una posizione orizzontale AL (*fig.* 34), e poscia incurvata in AmB da una forza F applicata all' altro termine B, si domanda l' equazion della curva AmB.

Soluzione. Coordinati in A i due assi Ax, Ay il primo verticale ed il secondo orizzontale, siano a, b le coordinate del punto B, ed X, $-Y$ le componenti della forza F. Trasportando questa forza dal punto (a, b) nel punto (x, y), nascerà la coppia

$$G = -Y(a - x) - X(b - y)$$

tenuta in equilibrio dalla forza di elasticità, la cui espressione $\frac{E}{r}$ è qui di sua natura negativa, essendo negativo l' angolo di contingenza $d\theta$ quando da A si va verso B. Dunque

$$\frac{-E}{r} = (a - x)Y + (b - y)X .$$

Coroll. I. Se la lastra sia incurvata da un peso F pendente dall' estremità B, sarà $X = F$, $Y = 0$, e per conseguente

$$\frac{-E}{r} = F(b-y)\,;$$

onde l' incurvarsi $\left(=\frac{1}{r}\right)$ della lastra in ciascun punto (x, y) sarà proporzionale alla distanza orizzontale $(b - y)$ di esso punto dal termine B.

Ad $\frac{1}{r}$ sostituendo $-\frac{1}{dy}d\frac{dx}{ds}$, l' equazion precedente si cangia nella

$$E\,d\frac{dx}{ds} = F(b-y)dy\,,$$

che integrata dal punto $(x = 0\,,\ y = 0)$, dove $\frac{dx}{ds} = 0$, fino ad un punto qualsivoglia (x, y) diventa

$$E\,\frac{dx}{ds} = F\left(b-\frac{y}{2}\right)y\,,$$

non più integrabile in termini finiti.

Coroll. II. Allorchè la lastra è pochissimo incurvata dal peso F, cosicchè possa farsi $ds = dy$, l' ultima equazione integrata di nuovo darà

$$6\,Ex = F(3b-y)y^2\,,$$

onde la curva di equilibrio sarà una parabola cubica.

120. 2ª. La lamina elastica AB (*fig.* 35) sia piantata verticalmente ed incurvata pel carico di un peso F postovi in cima. Trovar l' equazione di questa curva.

Soluzione. Essendo gli assi Ax, Ay, verticale ed orizzontale, sarà $X = F$, $Y = 0$; onde, se la forza F si trasporta dal punto $A(x = 0\,,\ y = 0)$ nel punto $m(x, y)$, nascerà la coppia

$$G = Y(0-x) - X(0-y) = Fy\,,$$

equilibrata dalla forza di elasticità $= - \frac{E}{r}$. Sarà dunque

$$- \frac{E}{r} = Fy .$$

Sostituendo qui ad $\frac{1}{r}$ il suo valore $\frac{1}{dx} d \frac{dy}{ds}$, avremo

$$\frac{1}{dx} d \frac{dy}{ds} = - \frac{F}{E} y .$$

Coroll. I. Supponendo la lastra pochissimo incurvata talchè possa farsi $ds = dx$, se moltiplichiamo cotesta equazione per $2dy$, otterremo

$$d.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = - \frac{F}{E} d.y^2 .$$

Sia f il valor massimo di y. È chiaro che nel punto in cui y prende il valor massimo f, ivi la direzion della curva sarà verticale, e però sarà

$$\frac{dy}{dx} = tang.(xs) = 0 .$$

Ciò posto, l' equazione (1) integrata da $y = f$ fino ad y qualunque, si muta nella

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{F}{E} (f^2 - y^2) ,$$

e quindi nella

$$d.x \sqrt{\frac{F}{E}} = \frac{d. \frac{y}{f}}{\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{f^2}\right)}} ,$$

la quale, integrata di nuovo dal punto ($x = 0$, $y = 0$) fino al punto (x , y), diventa

$$(1)' \qquad y = f sen.\left(x \sqrt{\frac{F}{E}} \right),$$

equazione della curva de' seni, o della *sinussoide*, curva che serpeggia sinuosamente con onde simmetriche intorno all'asse Ax (*fig.* 36), attraversandolo ad intervalli uguali tra loro e a $\pi \sqrt{\frac{E}{F}}$. Al termine di ciascuno di quest' intervalli corrisponde il valor massimo $\left(= f \sqrt{\frac{F}{E}}\right)$ di

$$\frac{dy}{dx} = tang.(xs) = f \sqrt{\frac{F}{E}} . cos.\left(x \sqrt{\frac{F}{E}} \right),$$

mentre il valor massimo f di y corrisponde al punto medio di ciascun' onda.

Coroll. II. La lastra AmB (*fig.* 35) sia della lunghezza l. Se si voglia inarcare in modo che la corda AB abbia un dato valore $a = gl$ (dove g è un numero frazionario), si dovrà gravare in cima col peso

$$(2) \qquad F = E \frac{\pi^2}{a^2} = E \frac{\pi^2}{g^2 l^2},$$

purchè tuttavia la quantità $f \sqrt{\frac{F}{E}}$ risulti una frazion piccolissima. Infatti essendo ($y = 0$, $x = a$) le coordinate del punto B, avremo in questo punto

$$f sen.\left(a \sqrt{\frac{F}{E}} \right) = 0 .$$

Ora per soddisfare a quest' equazione ed al proposto quesito convien porre

$$a \sqrt{\frac{F}{E}} = \pi ,$$

essendo π la semicirconferenza di raggio $= 1$, donde la (2).

Dalla formola (2) apparisce che il peso F corrispondente a $g = 1$ non è ancora bastante ad incurvare la lastra, e che in appresso, crescendo per gradi il peso F, la lastra comincia ad incurvarsi, e s' incurva sempre più diminuendo la corda a, finchè, cessando di esser piccolissimo il valor massimo $f\sqrt{\frac{F}{E}}$ di $tang.(xs)$, la curva cessa di essere rappresentata dalla $(1)'$.

N. B. Se la forza di elasticità non variasse nella semplice proporzione della curvatura $\left(=\frac{1}{r}\right)$, per trovare la curva di equilibrio si dovrebbe partire da una delle due equazioni

$$E = G\ ,\ dE = dx\int Qds - dy\int Pds\ ,$$

riguardando la quantità E come una funzione da determinarsi secondo la natura della lastra.

CAPO VI.

De' centri di gravità.

§. 1. *Corpo; massa e volume; corpo omogeneo e sua densità; peso assoluto e peso specifico; centro di gravità de' corpi, e metodo per trovarlo.*

121. *Corpo* è l'aggregato di più elementi materiali non divisi che da piccolissimi intervalli. La somma degli elementi materiali che costituiscono il corpo, è la sua *massa*; gl'intervalli che li dividono si chiaman *pori*; lo spazio occupato dalla massa e da pori è il *volume*.

Un corpo è *omogeneo* se gli elementi materiali di esso sono aggregati tra loro con legge uniforme intorno a ciascun punto. La *densità* D di un corpo omogeneo è una quantità che segue la ragion composta *diretta* della massa M del corpo ed *inversa* del volume V, onde si ha (*V. App.*, *del principio di proporzione*) $D = \frac{M}{V}$.

Il *peso assoluto* di un corpo è rappresentato dalla risultante di tutte le forze di gravità che animano ciascuno de' suoi elementi. Le forze di gravità potendosi, in un dato luogo della terra, riguardare come parallele, e di più come eguali per elementi uguali, il peso P di un corpo segue la ragion composta della massa M e dell' intensità g della gravità, talchè si ha $P = gM$.

La *gravità specifica* o, meglio, il *peso specifico* G di un corpo omogeneo, segue la ragion composta diretta del peso assoluto P ed inversa del volume V, e quindi si esprime per $G = \frac{P}{V}$.

Le tre formole

$$D = \frac{M}{V}, \quad P = gM, \qquad G = \frac{P}{V},$$

tra le cinque quantità M, V, D, P, G che sono da considerare in ogni corpo, si stabiliscono e si dimostrano rigorosamente applicando loro i criterii delle quantità proporzionali.

Centro di gravità di un corpo è il centro delle forze parallele di gravità che animano ciascuno de' suoi elementi. Il peso del corpo può intendersi riunito e raccolto nel centro di gravità.

Centro di gravità di un sistema di più corpi è il centro de'pesi de' corpi componenti il sistema. Ognuno di questi pesi deve intendersi riunito nel centro di gravità del rispettivo corpo.

Il centro di gravità può trovarsi *meccanicamente* sospendendo il grave, o qualche suo modello, per due punti diversi. La intersezione delle verticali che passano pe' punti di sospensione, sarà il centro di gravità. Si trova poi *geometricamente* coi metodi insegnati per trovare il centro delle forze parallele.

Si suole ancora cercare il centro di gravità delle quantità estese (*linee*, *superficie*, *volumi*) supponendone gli elementi gravi ed omogenei.

---

§. 2°. *Centro di gravità nelle figure simmetriche. Centri di gravità del triangolo e di qualsivoglia poligono; del prisma e del cilindro; della piramide, del cono, e di qualsivoglia poliedro.*

122. Due punti sono *in simmetria* o *simmetrici* intorno a un centro, se la retta che li unisce è divisa in parti uguali dal centro. Un' estensione di qualsivoglia specie è *simmetrica intorno ad un centro*, se i punti del suo contorno siano due a due simmetrici intorno al centro. Tale è il circolo e la sfera, e tale è il parallelogrammo ed il parallelepipedo rispetto al punto ove si tagliano le diagonali.

Un' estensione è simmetrica intorno ad un *asse* o ad un *piano*, se i punti del suo contorno siano due a due situati ad egual distanza dall' asse o dal piano e sopra una retta perpendicolare al medesimo.

Il centro di gravità di un' estensione simmetrica intorno ad un punto, un asse, un piano, è in quel punto, in quell' asse, in quel piano; non potendo esservi ragione perchè risieda altrove piuttosto da una parte che dall' altra. Così il centro di gravità di una retta è nel suo punto di mezzo, quello di un parallelogrammo e di un parallelepipedo è nella intersezione delle diagonali.

123. *Il centro di gravità di un triangolo ABC (fig. 37) è ai due terzi di ogni retta che da uno de' vertici va al mezzo dell'opposto lato: esso coincide col centro di tre pesi uguali applicati ai vertici.*

Dim. Unito il vertice A col punto m, mezzo dell' opposto lato BC, inscriviamo nel triangolo ABC una serie indefinita di parallelogrammi, ciascuno de'quali presenti parallele al lato BC le sue basi, e paralleli alla retta Am i suoi lati. Sarà sulla retta Am il centro di gravità di ciascuno di cotesti parallelogrammi, e però il centro della superficie costituita dalla loro somma, e quindi anche il centro del triangolo ABC, limite di siffatta somma. Così il centro dell' area del triangolo ABC dovendosi trovare su ciascuna delle rette che dai vertici vanno al mezzo degli opposti lati, sarà nella loro intersezione, la quale s' incontra ai due terzi di ognuna di esse (43), ed è pure il centro di gravità di tre pesi uguali applicati ai vertici.

Coroll. Di qui può trovarsi il centro di gravità di un poligono qualunque, potendosi ogni poligono risolvere in triangoli.

124. *Il centro di gravità del volume del prisma e del cilindro è nel mezzo della retta che unisce i centri di gravità delle basi parallele.*

Dim. Immaginiamo decomposto il prisma in una serie indefinita di parallelepipedi cogli spigoli laterali paralleli ed eguali a quelli del prisma. Tutti questi parallelepipedi hanno il lor centro di gravità sopra la sezione fatta nel prisma ad egual distanza dalle basi, e di più sono proporzionali alle aree da essi occupate in siffatta sezione. Si vede adunque, passando al limite, che il centro di gravità del prisma si dee confondere col centro di gravità di tale sezione, ossia col mezzo della retta che unisce i centri di gravità delle basi parallele.

E lo stesso è nel cilindro, siccome limite de' prismi inscritti e circoscritti.

125. *Il centro di gravità del volume della piramide triangolare ABCD è ai tre quarti di ogni retta che da uno de' vertici va al centro dell' opposta faccia, e però coincide col centro di quattro pesi uguali applicati ai vertici* (43).

Dim. Unito il vertice A col punto m centro di gravità dell' opposta faccia, inscriviamo nella piramide $ABCD$ una serie indefinita di prismi, ciascuno de'quali presenti parallele alla faccia BCD le sue basi, e paralleli alla retta Am i suoi spigoli laterali. Sarà sulla retta Am il centro di ciascuno di cotesti prismi, e però il centro del volume costituito dalla loro somma, e quindi anche il centro della piramide, limite di siffatta somma. Così il centro della piramide, dovendosi trovare su ciascuna delle rette che dai vertici vanno ai centri delle opposte facce, sarà nella loro intersezione la quale s' incontra ai tre quarti di ognuna di esse (43).

Il centro di gravità del volume della piramide a base poligona è ai tre quarti della retta che dal vertice va al centro della base.

Dim. Riguardiamo la piramide proposta come l' aggregato delle piramidi triangolari aventi seco lo stesso vertice, e per basi i triangoli in che si decompone la base poligona. Queste piramidi componenti hanno tutte il lor centro di gravità sopra la sezione fatta parallelamente alla base, nella piramide totale, ai tre quarti dell'altezza contando dal vertice, e di più sono proporzionali ai triangoli ne' quali dividono siffatta sezione. Dunque il centro di questa sezione (che è ai tre quarti della retta che dal vertice va al centro della base poligona) sarà il centro di gravità dell'aggregato di simili piramidi, ossia della piramide proposta.

Il **cono**, limite delle piramidi inscritte e circoscritte, *ha il centro ai tre quarti della retta che dal vertice va al centro di gravità della base.*

Di qui può trovarsi il centro di gravità di un poliedro qualunque, potendosi ogni poliedro risolvere in piramidi.

---

§. 3°. *Formole generali per determinare il centro di gravità dell' estensioni geometriche.*

126. **Teorema.** *Le formole generali che servono a determinare il centro di gravità* (α, β, γ) *di una linea* s, *di una superficie* S, *e di un volume* V, *sono*

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} s\alpha &= \Sigma x ds\,,\\ s\beta &= \Sigma y ds\,,\\ s\gamma &= \Sigma z ds\,; \end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} S\alpha &= \Sigma x dS\,,\\ S\beta &= \Sigma y dS\,,\\ S\gamma &= \Sigma z dS\,, \end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} V\alpha &= \Sigma x dV\,,\\ V\beta &= \Sigma y dV\,,\\ V\gamma &= \Sigma z dV\,, \end{aligned}\right.$$

nelle quali l'estensione si concepisce divisa negli elementi ds, dS, dV da tre serie di piani rispettivamente paralleli ai piani coordinati yz, zx, xy; x, y, z sono le coordinate del centro di gravità di ciascuno di cotesti elementi; ed il simbolo Σ equivale ad un integrale semplice $\int$, doppio $\iint$, triplo $\iiint$ secondochè l' elemento che lo segue è un infinitesimo di primo, di secondo o di terz' ordine,

Dim. Ove i punti dell' estensione si concepiscano animati dalle forze parallele ed uguali della gravità, vedremo chiaramente che le formole riportate non sono altro che semplici applicazioni del teorema : In un sistema di forze parallele il momento della risultante è uguale alla somma de' momenti omologhi delle componenti (45). »

127. Il qual teorema nel caso presente si può tradurre in questi termini : « *Il momento di un' estensione è uguale alla somma dei momenti omologhi delle sue parti ;* purchè s' intenda per *momento di un' estensione rispetto ad un piano o ad un asse*, il prodotto della stessa estensione per la distanza che corre dal suo centro di gravità al piano od all' asse.

E ne segue che laddove sarà $=0$ questa distanza, ivi sarà uguale a zero la somma de' momenti omologhi delle parti di essa estensione. Così, se il centro di gravità dell' estensione V è preso per origine delle coordinate, sarà

$$\Sigma x dV = 0\,, \quad \Sigma y dV = 0\,, \quad \Sigma z dV = 0\,.$$

128. Quando la curva s è piana, e la superficie S è un'area A, il centro di gravità di s e di A si avrà dalle formole

$$(b) \qquad \begin{cases} s\alpha = \Sigma x ds\,, \\ s\beta = \Sigma y ds\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} A\alpha = \Sigma x dA\,, \\ A\beta = \Sigma y dA\,; \end{cases}$$

nelle quali l' estensione si concepisce divisa negli elementi ds, dA per mezzo di due serie di linee rispettivamente parallele agli assi, Ox, Oy, coordinati nel piano dell' estensione che si considera.

Scolio. Come nella misura delle linee, delle superficie e de'volumi, così nella ricerca de' centri di gravità giova in molti casi sostituire alle coordinate rettilinee x, y, z che si trovano sotto gl' integrali, altre coordinate, ed in particolare le coordinate *polari* o sferiche (r, θ, ω).

129. **Teor.** *Nella ricerca sia della misura, sia de' centri di gravità dell' estensione considerata nel piano, il passaggio dalle coordinate rettilinee* (x, y) *alle coordinate polari* (r, ω) *si opera per mezzo delle formole :*

$$\begin{cases} x = r\cos.\omega\,, \\ y = r\,\mathrm{sen}.\omega\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} d^2A = rdrd\omega\,, \\ ds = \sqrt{(dr^2 + r^2 d\omega^2)} = \dfrac{r^2}{n} d\omega\,; \end{cases}$$

dove n denota la perpendicolare On (*fig.* 38) abbassata dal polo O sulla retta nM che tocca la curva s nel punto $M(x, y)$. (Qui l'estensione si concepisce divisa in elementi da due serie di linee che si tagliano ad angolo retto: le linee della prima serie sono rette divergenti da O e che variano di posizione al variare di ω; quelle della seconda serie sono linee circolari descritte dal centro O e che variano di grandezza col raggio r).

Dim. Essendo r il raggio OM che va al punto (x, y), ω l'angolo (xr), si ha primieramente (*App.* 22)

$$x = r\cos.\omega\,, \quad y = r\,sen.\omega\,.$$

Facciamo adesso variare successivamente ciascuna delle due coordinate polari ω, r, conservando l'altra costante. Per queste variazioni successive $d\omega$, dr, il punto M descriverà in corrispondenza due linee ds_1, dr perpendicolari tra loro, essendo la prima un arco descritto col raggio r ed $= rd\omega$, e la seconda una variazione in lunghezza del raggio r.

Ciò posto: 1°. l'area A si può evidentemente concepir divisa in parallelogrammi d^2A, di cui l'espression generale è

$$d^2A = ds_1dr = rdrd\omega\,, \quad \text{essendo} \quad ds_1 = rd\omega\,.$$

2.° La linea ds che unisce i due punti (ω, r), $(\omega + d\omega, r + dr)$ potendosi riguardare come la risultante delle due linee rettangolari (dr, ds_1), sarà data dall'equazione

$$ds = \sqrt{(dr^2 + r^2d\omega^2)}\,.$$

3°. Inoltre, se ds si riguarda come un elemento MM' della curva s, si avrà

$$ds_1 = ds\cos.(rn)\,;$$

perchè le due rette $r = OM$, $n = On$ sono perpendicolari alle direzioni delle due linee ds_1, ds, ed il loro angolo è uguale a quello di queste linee. Ora il triangolo OnM dà $\cos.(rn) = \frac{n}{r}$: dunque

$$ds = \frac{ds_1}{\cos.(rn)} = \frac{r^2}{n}\,d\omega\,.$$

130. **Teor.** *Nella ricerca, sia della misura, sia de' centri di gravità dell' estensione considerata nello spazio, il passaggio dalle coordinate rettilinee x, y, z alle coordinate polari (r, ω, θ) si opera per mezzo delle formole :*

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos.\omega\,, \\ y = r\,\text{sen}.\omega\cos.\theta\,, \\ z = r\,\text{sen}.\omega\,\text{sen}.\theta\,; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} ds = \sqrt{[dr^2 + r^2(d\omega^2 + d\theta^2\text{sen}.^2\omega)]}\,, \\ d^2S = \dfrac{r^3}{n}\,d\theta d\omega\,\text{sen}.\omega\,, \\ d^3V = r^2 dr d\theta d\omega\,\text{sen}.\omega\,, \end{array}\right.$$

dove n denota la perpendicolare On (*fig.* 38) abbassata dal polo O sul piano che *tocca* la superficie S nel punto $M(x, y, z)$.

(Qui l' estensione si concepisce divisa in elementi da tre serie di superficie che si tagliano ad angolo retto : le superficie della prima serie sono piani meridiani divergenti da Ox e che variano di posizione al variare dell' angolo θ ; le superficie della seconda serie sono superficie di coni retti che hanno Ox per asse comune, e che variano di apertura al variare di ω, finalmente quelle della terza serie sono superficie sferiche descritte dal centro O e che variano col raggio r).

Dim. Essendo r il raggio OM che va al punto (x, y, z), ω l' angolo (xr), θ l' angolo che il meridiano mobile (Ox, r) fa col meridiano fisso (Ox, y), si ha in primo luogo (*App.* 22)

$$x = r\cos.\omega\,,\quad y = r\,\text{sen}.\omega\cos.\theta\,,\quad z = r\,\text{sen}.\omega\,\text{sen}.\theta\,.$$

Facciamo adesso variare successivamente ciascuna delle tre coordinate polari ω, θ, r conservando costanti le altre due. Per queste variazioni successive $d\omega$, $d\theta$, dr, il punto M descriverà in corrispondenza tre linee ds_1, ds_2, dr perpendicolari tra loro, essendo la prima un arco descritto dal raggio r nel meridiano (Ox, r), la seconda un arco descritto da M sul parallelo del raggio $= r\,\text{sen}.\omega$, e la terza una variazione in lunghezza del raggio r ; onde si avrà

$$ds_1 = r d\omega\,,\quad ds_2 = r\,\text{sen}.\omega.d\theta\,.$$

Ciò posto: 1°. la linea ds che unisce i due punti (r, ω, θ), ($r + dr$, $\omega + d\omega$, $\theta + d\theta$), potendosi riguardare come risultante delle tre linee dr, ds_1, ds_2 rettangolari, sarà data dall' equazione

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\omega^2 + d\theta^2\text{sen}.^2\omega)\,;$$

2°. Il volume V si può concepir diviso in parallelepipedi, la cui espression generale è

$$d^3V = drds_1ds_2 = r^2drd\theta d\omega\, sen.\omega\ ;$$

3°. Finalmente per trovar l' elemento della superficie S in funzione di (r, ω, θ), s' immagini la sfera che avendo il centro in O passa pel punto $M(x, y, z)$ di S; poi, a partire da questo punto, si consideri sopra S quell' area elementare d^2S che cade sulla detta sfera colla proiezione ds_1ds_2. Sarà (*App.* 28)

$$ds_1ds_2 = d^2S\, cos.(rn)\,,$$

perchè le due rette $r = OM$, $n = On$ (*fig.* 38) sono perpendicolari ai piani che in M toccano la sfera e la superficie S, ed il loro angolo è uguale a quello di questi piani tangenti (*App.* 24). Ma il triangolo OnM dà $cos.(nr) = \frac{n}{r}$; dunque:

$$d^2S = \frac{ds_1ds_2}{cos.(nr)} = \frac{r^3}{n}\, d\theta d\omega\, sen.\omega\ .$$

---

§. 4°. *Applicazioni. Centro di gravità dell' arco, del segmento, e del settore di un circolo.*

131. Nel circolo dell' equazione

$$x^2 + y^2 = a^2\,,\quad \text{donde}\quad xdx + ydy = 0\,,$$

l' asse Ox (*fig.* 39) divida per metà l' *arco* $LAM = s$, e per conseguenza il corrispondente *segmento* $LAML$ e *settore* $LOMAL$. Il centro di gravità di siffatte estensioni sarà sull' asse Ox (122), e però basterà determinarne l' ascissa α. Ciò posto:

1°. Il centro di gravità dell' *arco* $s = LAM$ si avrà dalle formole

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}, \quad s\alpha = \int x ds,$$

le quali, sostituendo $dx = -\frac{ydy}{x}$, diventano

$$ds = a\frac{dy}{x}, \quad s\alpha = a\int dy.$$

Ora, integrando quest' ultima da $PL = -y$, fino a $PM = y$, si ottiene

$$s\alpha = a\int_{-y}^{y} dy = a.2y, \text{ e però } s : 2y : : a : \alpha,$$

vale a dire : *L' arco circolare ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo, e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco, la corda ed il raggio.*

2°. Il centro di gravità del *segmento* $A = LAML$ (se si osserva che la $d^2A = dxdy$, integrata rispetto ad y tra i limiti $-y$, y, produce $dA = 2ydx$) si avrà dalle formole

$$dA = 2ydx, \quad A\alpha = \int xdA = 2\int_x^a x.ydx.$$

Sostituendo in quest' ultima $dx = -\frac{ydy}{x}$, ed osservando che (in virtù della $x^2 + y^2 = a^2$) al limite $x = a$ corrisponde $y = 0$, si ottiene

$$A\alpha = -2\int_y^0 y^2dy = \frac{2}{3}y^3 = \frac{(2y)^3}{4.3},$$

donde

$$\alpha = \frac{(2y)^3}{12A},$$

vale a dire : *Un segmento di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo, e la sua distanza dal centro del circolo è* $= \frac{1}{12}$ *del cubo della corda* $(2y)$, *diviso per l' area del segmento.*

3°. Il centro di gravità del *settore* $A = LOMAL$ (qui giova l'uso delle coordinate polari) si avrà dalle formole

$$d^2A = rdrd\omega, \quad A\alpha = \iint r\cos.\omega\, d^2A = \iint r^2 drd\omega \cos.\omega \,,$$

le quali integrate successivamente tra i limiti $(r=0,\ r=a)$, $(-\omega,\ \omega)$, (osservando che $s = a.2\omega$, $y = a sen.\omega$) si mutano nelle

$$A = \frac{as}{2}\,, \quad A\alpha = \frac{2}{3}a^3 sen.\omega = \frac{1}{3}a^2.\,2y\,,$$

donde

$$s : 2y :: \frac{2}{3}a : \alpha\,,$$

vale a dire : *Un settore di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo, e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l' arco, la corda ed i* $\frac{2}{3}$ *del raggio.*

Centro di gravità del trapezio rettilineo e del trapezio parabolico.

132. *Quesito.* Un trapezio rettilineo A è terminato dalle basi parallele y_1, y_0; h è la retta che ne unisce i punti di mezzo e che però passa pel centro di gravità del trapezio (123). Si domanda l' ascissa α di questo centro contata sopra h a partire dalla base y_0.

Risposta. Si trova $\quad \alpha = \dfrac{h}{3}\,\dfrac{y_0 + 2y_1}{y_0 + y_1}\,.$

Dim. Osserviamo dapprima che una sezione y, fatta nel trapezio parallelamente alle basi e corrispondente all' ascissa x, è rappresentata dalla formola

$$(1) \qquad y = a + bx\,.$$

imperocchè l' equazioni de' lati del trapezio sono della forma

$$y' = m + nx\ ,\quad y'' = m' + n'x\ ,$$

e se i punti (x, y'), (x, y'') di questi lati, corrispondenti alla stessa ascissa x, si uniscono colla retta y, si avrà (*App.* 19):

$$y = y'' - y' = m' - m + (n' - n)x\ ,$$

equazione della forma (1).

Osserviamo ancora che nella (1) ad $x = 0$, $x = h$, corrisponde

$$y_0 = a\ ,\quad y_1 = a + bh.$$

Ciò posto, il centro di gravità del trapezio si avrà dalla

$$A\alpha = \int_0^h xdA\ ,$$

ponendovi

$$dA = ydx\,sen.(xy)\ ,\quad \text{donde}\quad A = sen.(xy)\int_0^h ydx\ .$$

Se, negli integrali $\int ydx$, $\int xydx$, si sostituisce $y = a + bx$, si ottiene

$$\int_0^h ydx = ah + b\,\frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}\,(y_0 + y_1)\ ,$$

$$\int_0^h xydx = a\,\frac{h^2}{2} + b\,\frac{h^3}{3} = \frac{h^2}{2.3}\,(y_0 + 2y_1)\ .$$

Dunque

$$\alpha = \frac{\int_0^h xdA}{A} = \frac{h}{3}\cdot\frac{y + 2y_1}{y_0 + y_1}\ ,$$

e per conseguente

$$\frac{h}{3(y_0 + y_1)} = \frac{\alpha}{y_0 + 2y_1} = \frac{h - \alpha}{2y_0 + y_1}\ .$$

133. *Quesito.* Un trapezio è circoscritto da due *lati parabolici* rappresentati dall' equazioni

$$y' = m + nx + px^2 , \quad y'' = m' + n'x + p'x^2 ,$$

e dalle basi y_0, y_2 parallele all'asse Oy e corrispondenti alle ascisse $x = 0$, $x = 2h$: inoltre all' ascissa $x = h$, corrisponde la sezione y_1 parallela alle basi.

Si domanda l'area A e l' ascissa α del centro di gravità di questo trapezio in funzione delle quantità h , y_0 , y_1 , y_2 .

Risposta. Si trova

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{2h\, sen.(xy)}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) , \\ \alpha &= h \frac{4y_1 + 2y_2}{y_0 + 4y_1 + y_2} . \end{aligned} \right.$$

Dim. Cominciamo dall' osservare che una sezione y, fatta in cotesto trapezio parallelamente alle basi e corrispondente all'ascissa x, è rappresentata dalla formola

$$(1) \qquad y = a + bx + cx^2 ,$$

il che si dichiara come nel quesito precedente.

Ciò posto, l' area A e l' ascissa α del suo centro di gravità si avranno dalle

$$A = sen.(xy) \int_0^{2h} ydx , \quad A\alpha = \int_0^{2h} xdA ,$$

sostituendovi il valore di y. Ora, compiuta l' integrazione, si ottiene

$$\int_0^x ydx = \frac{1}{3} \left(3ax + 3b \frac{x^2}{2} + cx^3 \right) ,$$

$$\int_0^x xydx = \frac{1}{3} \left(3a \frac{x^2}{2} + bx^3 + 3c \frac{x^4}{4} \right) ,$$

e per conseguente

$$\int_0^{2h} y dx = \frac{h}{3}\,(6a + 6bh + 8ch^2)\,,$$

$$\int_0^{2h} xy dx = \frac{h^2}{3}\,(6a + 8bh + 12ch^2)\,.$$

Si potrebbero eliminare di qui i tre coefficienti a, b, c per mezzo di ciò che diviene la (1) quando vi si fa

$$(x = 0,\ y = y_0),\quad (x = h,\ y = y_1),\quad (x = 2h,\ y = y_2)\,,$$

ossia per le tre relazioni

$$y_0 = a\,,\quad y_1 = a + bh + ch^2\,,\quad y_2 = a + 2bh + 4ch^2\,.$$

Tuttavia, senza cercare i valori di a, bh, ch^2 in funzione di (y_0, y_1, y_2), si vede, che la seconda di queste moltiplicata per 4 se si somma colle altre due produce

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6a + 6bh + 8ch^2\,,$$

e se si somma coll' ultima moltiplicata per 2, dà

$$4y_1 + 2y_2 = 6a + 8bh + 12ch^2\,.$$

Per queste sostituzioni arriviamo subito alle formole proposte.

Scolio. Le formole relative al trapezio parabolico, sussistendo qualunque sia il valore del coefficiente c, valgono anche per $c = 0$, e conseguentemente pel trapezio rettilineo. Ed infatti, avendosi in questo caso $2y_1 = y_0 + y_2$, le formole citate si mutano nelle

$$A = h\,sen.(xy).(y_0 + y_2)\,,\quad \alpha = \frac{2h}{3}\,.\,\frac{y_0 + 2y_2}{y_0 + y_2}\,.$$

§. 5°. *Centri di gravità nelle figure di rivoluzione, o si tratti di superficie, o si tratti di volumi. Teorema di Guldino.*

134. Sia V un solido di rivoluzione intorno all'asse Ox, vale a dire, un solido la cui superficie S sia stata generata dal rotare, intorno all'asse Ox, di una curva $s(x, y) = 0$.

1°. La superficie S si potrà immaginare divisa in una infinità di parallelogrammi dai meridiani e dai paralleli consecutivi, parallelogrammi aventi per espression generale

$$d^2S = ds.yd\theta,$$

dove ds è l' arco della curva s generatrice, corrispondente all' ordinata y; $yd\theta$ è l'arco perpendicolare al precedente, e compreso tra due meridiani devianti l' un dall' altro coll' angolo $d\theta$.

Il centro di gravità di una *calotta* o *zona* di questa superficie, dovendosi trovare sull' asse Ox, si farà noto per opera delle formole

$$S = \iint ds.yd\theta, \quad S\alpha = \iint xd^2S,$$

le quali integrate rispetto a θ tra i limiti ($\theta = 0$, $\theta = 2\pi$) diventano:

$$S = 2\pi\int yds, \quad S\alpha = 2\pi\int xyds.$$

Avremo adunque

$$\alpha = \frac{\iint xd^2S}{S} = \frac{\int xyds}{\int yds}.$$

Esempio. La curva generatrice s sia il cerchio $x^2 + y^2 = a^2$, e si voglia il centro di gravità della zona sferica, la cui altezza contata sull'asse Ox sia h. Sostituendo $ds = a\dfrac{dx}{y}$, risulterà

$$\alpha = \frac{\int_x^{x+h} xdx}{\int_x^{x+h} dx} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{2h} = x + \frac{h}{2}:$$

vale a dire: *Il centro di gravità di una zona, e però anche di una calotta sferica, è nel mezzo della sua altezza h.*

2°. Il volume V si può concepire come un aggregato di parallelepipedi compresi tra i meridiani consecutivi, ed aventi per espression generale

$$d^3V = yd\theta . d^2A\,,$$

dove $d^2A = dxdy$ è un elemento dell' area A della curva generatrice situato alla distanza y dall' asse di rotazione, estendendosi questa distanza y dall'asse, in cui è $= 0$, fino alla curva s.

Il centro di gravità di uno strato di questo solido compreso tra i piani di due paralleli, dovendosi trovare sull' asse Ox, sarà dato dalle formole

$$V = \int\int\int yd\theta d^2A\,,\quad V\alpha = \int\int\int xd^3V\,.$$

che, integrate rispetto ad y e rispetto a θ tra i limiti ($\theta = 0$, $\theta = 2\pi$), si convertono nelle

$$V = \pi\int y^2dx\,,\ V\alpha = \pi\int xy^2dx\,.$$

L' ascissa α del centro di gravità di V sarà dunque

$$\alpha = \frac{\int y^2xdx}{\int y^2dx}\,.$$

Esempio I. L'arco s che, girando intorno ad Ox, genera la superficie laterale dello strato V, appartenga alla curva dell' equazione

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax \mp x^2)\,,$$

cioè appartenga ad un' ellisse o ad un' iperbola.

Sostituendo questo valore di y^2, ed integrando tra i limiti ($x = 0$, x), si trova

$$\alpha = \frac{\int y^2xdx}{\int y^2dx} = \frac{x}{4}\cdot\frac{8a \mp 3x}{3a \mp x}\,.$$

Laonde, se V è un segmento di sfera o di ellissoide, sarà

$$\alpha = \frac{x}{4} \cdot \frac{8a - 3x}{3a - x} ;$$

e se è un segmento d' iperboloide, sarà

$$\alpha = \frac{x}{4} \cdot \frac{8a + 3x}{3a + x} = x\left[\frac{2}{3} + \frac{x}{12(3a+x)}\right] = x\left[\frac{3}{4} - \frac{a}{4(3a+x)}\right],$$

valore sempre compreso tra i $\frac{2}{3}$ ed i $\frac{3}{4}$ dell'ascissa x.

Infine, per $a = \infty$, risulta $\alpha = \frac{2}{3}x$, che è l'ascissa del centro di gravità di un segmento di paraboloide.

Esempio II. Il volume V consista in un settore o cono sferico, simmetrico intorno all'asse Ox, e col vertice in O, centro della sfera di raggio a. Nelle formole

$$V = \int\!\!\int\!\!\int y d\theta d^2A , \quad V\alpha = \int\!\!\int\!\!\int x d^3V ,$$

giova di passare dalle coordinate rettilinee alle coordinate polari, sostituendo

$$x = r cos.\omega , \quad y = r sen.\omega , \quad d^2A = dr.rd\omega ,$$

dove r è la distanza dell'elemento d^2A dal centro O, e che si estende fino ad $r = a$. Sarà

$$V = \int\!\!\int\!\!\int r^2 dr d\theta\, d\omega\, sen.\omega = -\int\!\!\int\!\!\int r^2 dr\, d\theta\, d(cos.\,\omega) ,$$

$$V\alpha = \int\!\!\int\!\!\int r^3 dr\, d\theta\, d\omega\, sen.\,\omega cos.\omega = -\int\!\!\int\!\!\int d\left(\frac{r^4}{4}\right) d\theta\, d\frac{(cos.\omega)^2}{2} .$$

Eseguendo la triplice integrazione tra i limiti rispettivi

$$(r=0\,,\ r=a)\,,\ (\theta=0\,,\ \theta=2\pi)\,,\ (\omega=0,\ \omega)\,,$$

si ottiene

$$V=\frac{2}{3}a^3\pi(1-\cos.\omega)\,,\quad V\alpha=\frac{a^4}{4}\pi(1-\cos.^2\omega)\,,$$

e quindi

$$\alpha=\frac{3}{8}(a+a\cos.\omega)\,.$$

135. **Teorema di Guldino**. « *Una superficie S generata dalla rotazione di una linea piana s intorno ad un asse, è uguale alla linea stessa moltiplicata pel viaggio del suo centro di gravità.* »

« *Un solido V generato dalla rotazione di un' area A intorno ad un asse, è uguale all' area stessa moltiplicata pel viaggio del suo centro di gravità.* »

Dimostrazione. Si è veduto che la superficie S ed il solido V, generati nel modo indicato, si possono riguardare come aggregati di elementi espressi dalle formole:

$$d^2S=ds.yd\theta\,,\quad d^3V=d^2A.yd\theta\,.$$

Or queste integrate rispetto a θ tra i limiti $(\theta=0\,,\ \theta)$, diventano

$$S=\theta\int yds\,,\quad V=\theta\iint yd^2A\,.$$

Ma, pel principio de' momenti (127), si ha

$$s\beta=\int yds\,,\quad A\beta=\iint yd^2A\,,$$

essendo β la distanza che corre tra l' asse Ox di rotazione ed il centro di gravità sia dell' arco s, sia dell' area A. Dunque

$$S=s.\beta\theta\,,\quad V=A.\beta\theta\,.$$

Qui l' arco circolare $\beta\theta$ rappresenta *il viaggio percorso dal centro di gravità* sia della linea s, sia dell' area A.

Coroll. Se il piano della linea *s*, o dell'area *A*, si muova per rotazioni infinitesime applicandosi successivamente alle facce di una superficie sviluppabile, è palese che anche per questa specie di movimento sussisterà il teorema di Guldino, cioè : « *L' estensione generata sarà eguale all'estension generatrice moltiplicata pel viaggio del suo centro di gravità.*

Scolio. Quando l'estensione, girante intorno ad un asse, è divisa in due parti da quest' asse, l' estension generata per siffatta rotazione sarà divisa dall'asse in due parti di segno contrario; essendochè se l' arco $yd\theta$ è positivo per l' una delle due parti dell' estension generatrice, sarà negativo per l' altra.

Laonde, ove l' estensione girante abbia il centro di gravità sull' asse di rotazione, le due parti dell' estension generata comprese tra i due piani meridiani che si tagliano su quest' asse, saranno eguali.

---

§. 6°. *Centro di gravità di una superficie S di cui sia data l' equazione $N(x, y, z) = 0$.*

136. *Teorema.* Il centro di gravità (α, β, γ) della superficie S di cui è data l' equazione $N(x, y, z) = 0$, si ottiene dalle formole (126)

$$(1) \qquad S\alpha = \iint x d^2S, \quad S\beta = \iint y d^2S, \quad S\gamma = \iint z d^2S,$$

quando a d^2S siasi sostituito uno qualunque de' tre valori seguenti

$$(2) \qquad d^2S = \frac{n}{\frac{dN}{dx}} dydz, \quad d^2S = \frac{n}{\frac{dN}{dy}} dzdx, \quad d^2S = \frac{n}{\frac{dN}{dz}} dxdy,$$

essendo

$$n = \sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dz}\right)^2\right]};$$

dove è a notare che il d^2S segna un elemento diverso in ciascuna di coteste espressioni, siccome appartenente ad una delle tre diverse maniere di divider la superficie S, per mezzo di piani paralleli ai piani coordinati xy, yz, zx combinati due a due.

Dimostrazione. A partire dal punto M si consideri sulla superficie S quell' elemento d^2S a cui corrisponde nel piano yz la proiezione $dydz$: si avrà dalla teoria delle proiezioni

$$dydz = d^2S\cos.(xn)\ ,$$

essendo l' angolo de' piani delle aree d^2S , $dydz$ eguale a quello de' loro assi n, x. Ma (*Append.* 61)

$$\cos.(xn) = \frac{1}{n}\left(\frac{dN}{dx}\right).$$

Fatta la sostituzione, risulta la prima delle formole proposte (2). In modo analogo si stabiliscono le altre due.

Esempio. La superficie S appartenga alla sfera dell'equazione

$$N = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0\ , \quad \text{donde} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Sarà

$$\frac{dN}{dx} = x\ , \quad \frac{dN}{dy} = y\ , \quad \frac{dN}{dz} = z\ ; \quad n = a\ ,$$

e le formole (1) e (2) daranno

$$\alpha = a\,\frac{\iint dydz}{S}\ , \quad \beta = a\,\frac{\iint dzdx}{S}\ , \quad \gamma = a\,\frac{\iint dxdy}{S}.$$

Denotiamo per A, B, C gl' integrali $\iint dydz$, $\iint dzdx$, $\iint dxdy$ che rappresentano le proiezioni della superficie S sui *piani diametrali* yz , zx , xy. Sarà

$$\alpha = a\frac{A}{S}\ , \quad \beta = a\,\frac{B}{S}\ , \quad \gamma = a\,\frac{C}{S}\ :$$

vale a dire : *La distanza del centro di gravità di una superficie sferica S ad un piano diametrale, è una quarta proporzionale ad essa superficie, alla sua proiezione sul piano, ed al raggio della sfera.*

§. 7°. *Volume e centro di gravità di alcuni solidi a basi parallele : tronco di piramide e di cono.*

137. **Teor.** *In un solido terminato da basi parallele X_0, X_2, se l' area X di ciascuna sezione parallela alle basi dipende dalla distanza x all' una di esse X_0 per mezzo di una funzione di secondo grado*

$$X = a + bx + cx^2 ,$$

il volume V e l'ascissa α del centro di gravità del solido si avranno dall' equazioni :

$$(1) \qquad V = \frac{p}{6}(X_0 + X_2 + 4X_1) , \quad \alpha = h \frac{4X_1 + 2X_2}{X_0 + X_2 + 4X_1} ,$$

dove X_1 è la sezione equidistante dalle basi X_0, X_2, e corrispondente ad $x = h$; p è la distanza perpendicolare tra le stesse basi, ossia l' *altezza* del solido, ed è $p = 2h\,sen.(xX)$.

Dim. Se il solido V si concepisce diviso in elementi

$$dV = X.dx\,sen.(xX)$$

per mezzo delle sezioni X parallele alle basi (125), la soluzion del quesito si ridurrà all' integrazion delle formole

$$V = \int X dx\,sen.(xX) , \qquad V\alpha = \int x dV ,$$

la quale, sostituendo il valore di X, si eseguisce come nel trapezio parabolico (133), e conduce subito alle (1).

Coroll. Quando i centri di gravità di tutte le sezioni X sono in linea retta, il centro di gravità del solido V sarà su questa retta, che si potrà prendere per asse x. Tale è il caso di un tronco di piramide di ellissoide, d' iperboloide e di paraboloide.

138. **Teor.** *Il volume V ed il centro di gravità di un tronco di piramide a basi parallele X_0, X_2, si hanno dalle formole*

$$(2)\quad V=\frac{p}{3}(X_0+X_2+\sqrt{X_0X_2}),\qquad \alpha=\frac{2h}{4}\cdot\frac{X_0+3X_2+2\sqrt{X_0X_2}}{X_0+X_2+\sqrt{X_0X_2}}.$$

Dim. Cominciamo dal mostrare che il tronco di piramide non è che un caso particolare del solido considerato nel teorema precedente. Siccome in una piramide le aree delle sezioni parallele sono proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice, così una sezione X parallela alle basi X_0, X_2 del tronco V, si potrà esprimere per

$$X=m^2(x_0+x)^2,$$

dove x_0 ed x_0+x sono le distanze tra le sezioni X_0, X ed il vertice della piramide di cui fa parte il tronco V, contate sulla retta $2h$ che unisce i centri di gravità di X_0, X_2. Quest' espressione della sezione X cade quindi sotto la forma $X=a+bx+cx^2$.

Ora ad $x=0, =h, =2h$ dovendo corrispondere X_0, X_1, X_2, si avrà

$$\sqrt{X_0}=mx_0,\quad \sqrt{X_1}=m(x_0+h),\quad \sqrt{X_2}=m(x_0+2h),$$

donde $2\sqrt{X_1}=\sqrt{X_0}+\sqrt{X_2}$, e per conseguente

$$4X_1=X_0+X_2+2\sqrt{X_0X_2},$$

$$X_0+4X_1+X_2=2(X_0+X_2+\sqrt{X_0X_2}),$$

$$4X_1+2X_2=X_0+3X_2+2\sqrt{X_0X_2}.$$

Ove si abbia riguardo a queste relazioni, si vedrà che le (1) si cangiano nelle (2).

Scolio. Il teorema contenuto nella formola

$$V=\frac{p}{6}(X_0+X_2+4X_1),$$

vale anche per $X=a+bx+cx^2+dx^3$, come apparisce dalla sua stessa dimostrazione (133). Se ne ha pure una dimostrazione nel Compendio di calcolo sublime del *Brunacci*, tom. 2.° pag. 67, an. 1811, e però non si può attribuire al Sig. *Sarrus* (Vedi Terquem, Annales de Mathematiques, tom. VII, p. 241).

§. 8.° *Metodo approssimativo di Simpson per la misura delle aree e de' solidi, e per la ricerca de' loro centri di gravità.*

139. *Quesito.* Determinare per approssimazione il centro di gravità ed il valore di un' area A circoscritta da una linea di cui non si conosce l' equazione (*fig.* 40).

Risposta. Si facciano nell'area A molte sezioni y_0, y_1, y_2, $y_3 \ldots y_{2p}$ a brevi ed eguali intervalli h; e le linee che sul contorno di A sono intercette tra sezione e sezione si riguardino come archi parabolici. È chiaro che la somma de' trapezii parabolici (133) che si vengono formando nel modo indicato avrà per *limite* l' area A, a cui si andrà avvicinando con tanto maggiore approssimazione, quanto più numerosi e più sottili saranno i trapezii.

Ciò posto, il valore A dell' area e l' ascissa α del suo centro di gravità, contata a partire dalla sezione y_0, saranno (qui gli assi x, y si suppongono rettangolari):

$$(1)\left\{\begin{aligned} A &= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ldots + 4y_{2p-1} + y_{2p}\right), \\ A\alpha &= \frac{h^2}{3}\left(0.y_0 + 1.4y_1 + 2.2y_2 + 3.4y_3 \ldots + (2p-1)4y_{2p-1} + 2py_{2p}\right). \end{aligned}\right.$$

Dim. Rappresentiamo per

$$A_0\,,\ A_2\,,\ A_4\,,\ldots\ A_{2p-2}$$

le aree de' trapezii compresi tra le sezioni d' indice pari

$$y_0\,,\ y_2\,,\ y_4\,,\ldots y_{2p-2}\,,\ y_{2p}\,,$$

corrispondenti alle ascisse

$$x_0 = 0\,,\quad x_2 = 2h\,,\quad x_4 = 4h\,,\ \text{etc.}\,;$$

e per α_0, α_2, α_4 etc. le ascisse de' centri di gravità di siffatte aree.

Avremo per approssimazione

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned} A &= A_0 + A_2 + A_4 \ldots + A_{2p-2}\,, \\ A\alpha &= (A\alpha)_0 + (A\alpha)_2 + (A\alpha)_4 \ldots + (A\alpha)_{2p-2}\,; \end{aligned}\right.$$

dove per abbreviare si è messo $(A\alpha)_n$ invece di $A_n\,\alpha_n$.

Ora il valore ed il centro di gravità del trapezio parabolico A_{2n} si ricavano dalle (133)

$$A_{2n} = \frac{h}{3}\left(y_{2n} + 4y_{2n+1} + y_{2n+2}\right),$$

$$\alpha_{2n} = 2nh + h\,\frac{4y_{2n+1} + 2y_{2n+2}}{y_{2n} + 4y_{2n+1} + y_{2n+2}},$$

donde

$$(A\alpha)_{2n} = \frac{h^2}{3}\left(2ny_{2n} + 4(2n+1)y_{2n+1} + (2n+2)y_{2n+2}\right).$$

In quest' espressioni di A_{2n}, $(A\alpha)_{2n}$ facciamo successivamente

$$n = 0\,,\ = 1\,,\ = 2\,,\ = 3\,,\ldots = p - 1\,,$$

avremo

$$A_0 = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$A_2 = \frac{h}{3}\,(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$A_4 = \frac{h}{3}\,(y_4 + 4y_5 + y_6), \text{ etc.}$$

$$(A\alpha)_0 = \frac{h^2}{3}(0.y_0 + 1.4y_1 + 2y_2),$$

$$(A\alpha)_2 = \frac{h^2}{3}(2y_2 + 3.4y_3 + 4y_4), \text{ etc.},$$

e per queste sostituzioni le (2) si trasformeranno subito nelle (1).

140. Se invece de' trapezii parabolici si volessero considerare i rettilinei compresi tra le sezioni consecutive dell' area A, si avrebbero le formole

$$A = h\left(y_1 + y_2 + y_3 \ldots + y_{p-1} + \frac{y_0 + y_p}{2}\right),$$

$$A\alpha = h^2\left(y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \ldots + (p-1)y_{p-1} + \frac{y_0 + (3p-1)y_p}{6}\right),$$

alle quali si arriva in modo analogo al precedente dopo di aver trovato le formole generali (132)

$$A_n = \frac{h}{2}\,(y_n + y_{n-1}),\quad (A\alpha)_n = \frac{h^2}{6}\left[(3n+1)y_n + (3n+2)y_{n+1}\right],$$

ed $$(A\alpha)_{n-1} + (A\alpha)_n = \frac{h^2}{6}\left[(3n-2)y_{n-1} + 6ny_n + (3n+2)y_{n+1}\right].$$

Da quest' ultima apparisce che, nella serie che esprime il valore approssimato di $A\alpha$, tutti i termini intermedii tra il primo y_0 e l' ultimo $(3p - 1)y_p$ sono rappresentati dal termine generale $6ny_n$.

Scolio. Allorchè l'area A non è simmetrica intorno ad alcun asse, per determinarne il centro di gravità convien cercare la distanza di esso da un altro asse, distanza che si otterrà per approssimazione dalle stesse formole, applicandole ad un nuovo sistema di sezioni parallele.

Lo stesso metodo di approssimazione vale eziandio per determinare il volume ed il centro di gravità di un solido qualsivoglia, solchè ad A e ad y_n si sostituisca V ed X_n (137).

141. In generale, le formole di Simpson servono a determinare per approssimazione il valor degl' integrali $\int ydx$, $\int yxdx$ tra limiti dati di x. Così, per esempio, tra i limiti $x=0$, $x=2p.h$, si avrebbe

$$\left\{\begin{aligned} \int ydx &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \ldots + 4y_{2p-1} + y_{2p}), \\ \int yxdx &= \frac{h^2}{3}\Big(0.y_0 + 1.4y_1 + 2.2y_2 + 3.4y_3 \ldots + (2p-1).4y_{2p-1} + 2py_{2p}\Big). \end{aligned}\right.$$

LIBRO SECONDO

DINAMICA.

Preliminari : Dinamica , sua definizione. Movimento de' corpi composto di traslazioni e rotazioni. Moti di traslazione , successivi, simultanei, e loro composizione. Traiettoria di un punto.

142. La **dinamica** *è la scienza che ha per oggetto i moti di* **traslazione** e di **rotazione** *considerati nelle loro proprietà e nelle loro cagioni, sia che si tratti del movimento di un corpo solo, sia che si tratti di un sistema di corpi.* I corpi della natura, movendosi nello spazio, sogliono avere l'una e l'altra specie di moto. Così mentre la terra gira con moto di rotazione intorno al suo asse, donde nasce il diurno alternarsi del giorno e della notte, l'asse della terra cammina intorno al sole con moto di traslazione, descrivendo con ciascuno de' suoi punti un'orbita ellittica il cui piano è obliquo all' asse, donde nasce l' annuo avvicendarsi delle stagioni (si fa astrazione dai piccoli moti di *precessione* e di *nutazione* dell' asse).

143. Si dice che una figura F subisce *una traslazione rappresentata da una retta OA (fig. 41)*, allorchè ciascun punto della figura descrive una linea parallela ed eguale alla retta OA, e del medesimo senso. Da questa definizione si raccoglie :

1°. Che quando una figura dee subire più *traslazioni successive* (OA, AB, BC, CD), la figura in tutta la successione di questi moti sarà *parallela a sè stessa*, ed a ciò che era nella *posizione iniziale ;* ed inoltre il *moto totale* della figura sarà rappresentato dalla *linea poligona descritta da uno qualunque de'suoi punti*, per esempio, *dal centro di gravità ;*

2°. Che il passaggio da un luogo ad un altro per mezzo di più traslazioni successive, rappresentate dai lati di una linea poligona, può essere effettuato per mezzo di una *traslazione unica*, rappresentata dalla retta che va dalla *origine* al *termine* della linea poligona, retta che si può chiamare la **traslazione risultante** delle date traslazioni ;

3°. Che *il moto di traslazione di una figura può avvenire*, non solamente secondo una linea poligona, ma eziandio *secondo una linea curva*, potendo riguardarsi la curva come una linea poligona di lati infinitesimi.

Scolio. D' ora innanzi studieremo il moto di traslazione di un corpo nel moto di uno de' suoi punti, ed in particolare nel moto del suo centro di gravità. Inoltre supporremo concentrata in questo punto la massa m del corpo, massa che, per abbreviare, si farà $= 1$. La linea che il punto va descrivendo, si chiama *traiettoria del punto*.

144. Si dice che *una figura subisce due* **traslazioni simultanee** *rappresentate dai lati Oa, Ob di un parallelogrammo* (*fig.* 42), *se nel tempo che la figura subisce una delle due traslazioni*, per esempio *Oa*, *la retta Oa insieme colla figura subisce l'altra traslazione Ob*; donde segue che, *al compiersi delle due traslazioni Oa, Ob, la figura si troverà al termine della diagonale Ou del parallelogrammo.*

In modo analogo si debbono intendere le *traslazioni simultanee* rappresentate da più rette *Oa*, *Ob*, *Oc* etc.; al compiersi di tutte queste *traslazioni relative*, qualunque sia l' ordine onde si concepiscano effettuarsi, la figura si troverà nel luogo dove termina la linea *risultante delle rette nominate.*

145. Da qui apparisce:

1°. Che *un* **punto inerte** (cioè un punto materiale indifferente al moto ed alla quiete) *può subire simultaneamente più traslazioni senza che l' una sia all' altra d' impedimento*, *compiendosi ciascuna traslazione come se le altre non esistessero*;

2°. Che, quando si conoscono le leggi secondo le quali si vanno effettuando le diverse traslazioni simultanee di un punto M, potremo ad ogn' istante determinare il luogo dove trovasi il punto M nella sua traiettoria. Per esempio, immaginiamo che il punto M si trovi in un dato istante nel punto (α, β, γ) e che, scorso il tempo t, sia passato nel punto (x, y, z): è chiaro che noi conosceremmo ad ogn' istante la posizione di M, se le traslazioni simultanee espresse dalle tre rette

$$x - \alpha, \quad y - \beta, \quad z - \gamma,$$

fossero date ciascuna in funzione del tempo t.

SEZIONE I.

DEL MOTO DI UN PUNTO.

CAPO I.

Del moto rettilineo.

§. 1. **Moto uniforme :** *sua velocità. Velocità simultanee di un punto e loro composizione. Velocità prodotta dall'azion continua di una forza d' intensità costante. Forze istantanee e loro misura.*

146. Il *moto* si dice **uniforme** od **equabile** *quando agli uguali e successivi intervalli in cui ad arbitrio si concepisca diviso il tempo, corrispondono sempre uguali gli spazii percorsi.* In caso diverso, il moto è **vario.**

Prop. I. *La* **velocità** *u del moto uniforme è una quantità che nasce dal paragonare lo spazio percorso s col tempo t impiegato a percorrerlo, e si determina per la formola*

$$u = \frac{s}{t};$$

essendo chiaro che la velocità è *doppia*, *tripla*, etc. sia quando in un dato tempo lo spazio percorso è *doppio, triplo* etc.; sia quando un dato spazio è percorso nella *metà*, nel *terzo* etc. del tempo (*App.* 72).

Si ha dunque

$$s = ut:$$

vale a dire : *Nel moto uniforme, lo* **spazio** *è uguale al prodotto della velocità pel tempo ; e* **la velocità** *è una quantità rappresentata dallo spazio percorso nell'unità di tempo.*

147. Un punto M si dice *animato da più velocità simultanee* a, b, c etc., rappresentate da altrettante rette Oa, Ob, Oc etc., se nell' *unità di tempo* subisce con moto uniforme tutte le *traslazioni relative*, rappresentate dalle stesse rette (144).

Prop. II. *Un punto M animato da più velocità simultanee a, b, c etc., rappresentate da altrettante rette Oa, Ob, Oc etc., si muove come se fosse animato da una velocità unica u, rappresentata dalla risultante Ou delle stesse rette (fig. 43).*

Dim. Al termine del tempo t il punto M avrà subito con moto uniforme le *traslazioni relative* $a.t$, $b.t$, $c.t$ etc., rappresentate dalle rette $Oa.t$, $Ob.t$, $Oc.t$ etc., e però si troverà all' estremità della risultante di queste rette (144), la quale è $= Ou.t$. Dovendo ciò accadere qualunque sia il tempo t, si vede chiaramente che il punto M si muove in linea retta nella direzione Ou e colla velocità u.

148. **Prop.** III. *La coesistenza di più moti in un punto inerte non può alterare l'* **effetto relativo** *dell' azion di una forza sullo stesso punto.*

Dim. Ciò si fa chiaro dal considerare che il punto inerte è capace di seguire simultaneamente e in tutte le direzioni possibili i diversi moti che gli s' imprimono, compiendo esattamente ciascun moto come se gli altri non esistessero (145): i moti impressi non fanno che sovrapporsi tra loro senza impedirsi l' un l' altro. Questa verità è ampiamente confermata dall' esperienza.

149. **Prop.** IV. *La velocità u che si genera nel tempo t per l'azion continua di una forza g d' intensità costante* (qual sarebbe la gravità), *è*

$$u = gt,$$

vale a dire, *è uguale al prodotto della forza pel tempo*

Dim. È manifesto che la velocità u che dee acquistare un punto materiale, si farà doppia, tripla, quadrupla etc. se, ritenuto costante il tempo, si applichi al punto una forza doppia, tripla, quadrupla etc., ovvero, se la forza costante applicata al punto facciasi agire per un tempo doppio, triplo, quadruplo etc. Or la velocità u, sotto queste condizioni, è proporzionale al prodotto della forza pel tempo (*App.* 73).

Coroll. Una forza d' intensità costante ha per *misura* la velocità che da essa nasce nell' unità di tempo.

Il moto di un punto animato da una forza d' intensità costante, è *moto equabilmente variato*.

150. Si dicono **istantanee** quelle forze che, spiegando un'azione di brevissima durata e pressochè istantanea, tuttavia sono valevoli a produrre una velocità finita. Le forze istantanee si misurano dalla *quantità* di moto che producono.

La **quantità di moto** *di un corpo è uguale al prodotto della massa del corpo per la velocità comune alle sue particelle:* così se m è la massa, u la velocità, e Q la quantità di moto, sarà $Q = mu$.

---

2. **Moto vario.** *Il moto vario, per ogni tratto infinitesimo, si può ritener come uniforme, ed ogni forza come costante. Distinzione tra forza motrice e forza d' inerzia di un punto; reazione eguale ed opposta all' azione. Relazioni tra i quattro elementi del moto rettilineo* (s, u, t, φ).

151. **Teor.** Il **moto vario**, *nella durata di un tempo infinitesimo, si può riguardare come uniforme, e l'azione di una forza variabile come costante, talchè si ha*

$$\begin{cases} ds = u dt, \\ du = \varphi dt, \end{cases}$$

dove u e φ sono, allo spirar del tempo t, i valori della velocità e dell'azion della forza onde, nell'istante dt, è percorso lo spazio ds ed è generata la velocità du.

Dim. Si noti dapprima che le quantità u e φ, variando continuamente col tempo t, sono funzioni di esso tempo, onde può farsi

$$u = u(t), \quad u + \delta u = u(t + \delta t);$$
$$\varphi = \varphi(t), \quad \varphi + \delta\varphi = \varphi(t + \delta t);$$

denotandosi per δt un accrescimento finito qualsivoglia del tempo t. Ciò posto:

1°. Sia δs lo spazio percorso con moto vario mentre la velocità u passa dallo stato $u(t)$ allo stato $u(t + \delta t)$. Questo spazio δs se si voglia percorrere con moto uniforme nel tempo δt, bisognerà che ciò facciasi evidentemente con una velocità *intermedia tra la minima e la massima* di quelle rappresentate da u nel passare dallo stato $u(t)$ allo stato $u(t + \delta t)$, velocità che però si potrà esprimere per

$$u(t + \theta\delta t),$$

intendendo per θ un numero incognito compreso tra 0 ed 1. Si avrà quindi rigorosamente

$$\frac{\delta s}{\delta t} = u(t + \theta\delta t) .$$

Se ora immaginiamo che il tempo δt diminuisca e converga verso l' evanescenza, si vedrà essere

$$lim. \frac{\delta s}{\delta t} = u(t) ,$$

donde, per la definizion degl' infinitesimi (*App.* 43), si deduce

$$ds = udt.$$

2°. Similmente, se la velocità finita δu si voglia far nascere, nel tempo δt, da un' azion continua d' intensità costante, bisognerà che siffatta intensità sia intermedia tra la minima e la massima di quelle rappresentate dalla forza φ nel passare dallo stato $\varphi(t)$ allo stato $\varphi(t + \delta t)$, intensità che perciò si potrà esprimere per

$$\varphi(t + \theta\delta t),$$

essendo anche qui θ un numero incognito compreso tra 0 ed 1. Sarà dunque:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \varphi(t + \theta\delta t) , \; lim. \frac{\delta u}{\delta t} = \varphi(t) ,$$

e per conseguenza $du = \varphi dt.$

152. *Coroll. I.* Dalla $du = \varphi dt$ si ricava

$$\varphi = \frac{du}{dt} .$$

Benchè nel moto di un punto materiale e libero le quantità φ e $\frac{du}{dt}$ siano sempre *numericamente* uguali tra loro, tuttavia hanno un significato molto differente che importa avvertire e ricordare.

La quantità φ *rappresenta la forza in quanto che è* **causa** o **fonte continua di azione** (qual sarebbe la gravità) , *e la quantità* $\frac{du}{dt}$ *rappresenta l'azione stessa in quanto che è uscita dalla causa*, e si è **incorporata** per così dire **coll' inerzia del punto materiale.** La prima quantità si chiama **forza motrice** , e la seconda si può chiamare **forza d' inerzia.**

La forza d' inerzia è adunque espressa da $\frac{du}{dt}$, cioè dalla *derivata della velocità* u , presa rispetto al tempo t. Da questa distinzione scaturisce il seguente principio fondamentale della Dinamica : « *Nel moto di un punto materiale e libero la forza motrice è sempre uguale, in grandezza e in direzione, alla forza d'inerzia.* »

Allorchè la massa del punto materiale non si fa $= 1$, ma invece si rappresenta per m, la forza motrice e la forza d' inerzia del punto saranno espresse da (*Appen.* 73)

$$\varphi m \, , \qquad m\frac{du}{dt} \, .$$

La forza φ che moltiplica la massa m si suol anche chiamare *forza sollecitante* od *acceleratrice*, ed *accelerazione* la quantità $\frac{du}{dt}$.

153. *Coroll. II.* Il punto materiale, nell' atto che dalla forza φ riceve l' azione $\left(= m\frac{du}{dt}\right)$, si diporta con essa forza come se già fosse animato da due azioni opposte $\left(m\frac{du}{dt} \, , \; -m\frac{du}{dt}\right)$ ed eguali a quella che sta per ricevere ; onde può dirsi che all' azione $\left(= m\frac{du}{dt}\right)$ della forza φ il punto materiale corrisponde colla *reazione* $\left(= -m\frac{du}{dt}\right)$ eguale ed opposta all'azione. Di qui l' evidenza del principio : *Nel moto di un punto materiale, l'azione della forza motrice è ad ogn' istante contrabbilanciata dalla reazione del punto , e questa reazione è uguale ed opposta alla forza d'inerzia.*

154. *Coroll. II.* Se la forza φ ha una direzione opposta a quella del moto (come in un grave scagliato in alto verticalmente) , si dovrà nell' equazione $du = \varphi dt$ scrivere $-\varphi$ in luogo di φ. Così l'accelerarsi o il ritardarsi del moto vario sarà espresso da

$$du = \pm \varphi dt \, .$$

155. *Coroll. IV.* Quando lo spazio s è dato in funzione del tempo t, sarà

$$u = \frac{ds}{dt}, \quad \varphi = \frac{du}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

cioè le *derivate* prima e seconda dello spazio $\left(\frac{ds}{dt}, \frac{d^2s}{dt^2}\right)$ rappresenteranno i valori attuali della velocità u e della forza φ. Da quest' osservazione s' inferisce :

1°. Che il **moto equabile** è in generale rappresentato dall' equazione

$$s = a + bt,$$

perchè ne risulta $u = \frac{ds}{dt} = b = costante$;

2°. Che il **moto equabilmente variato** è rappresentato in generale dall' equazione

$$s = a + bt + ct^2,$$

perchè ne risulta la forza $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2} = 2c = costante.$

Scolio. I quattro elementi del moto rettilineo

$$s, u, t, \varphi$$

essendo vincolati dalle due equazioni

$$ds = udt, \quad du = \varphi dt,$$

gioverà cercare, ne' casi particolari, la soluzione del seguente problema :

« *Determinare ciascuno de' quattro elementi del moto* (s, u, t, φ) *in funzione di due qualunque de' tre rimanenti.* » Per condurre con ordine questa soluzione, si cercherà dapprima un'equazione per ciascuna *combinazione ternaria* de' suddetti quattro elementi, cioè per le combinazioni seguenti :

$$(u, \varphi, t), \quad (s, \varphi, t), \quad (s, u, t), \quad (s, u, \varphi).$$

Si otterranno così quattro equazioni. Ciò fatto, ogni elemento trovandosi in tre di queste equazioni si potrà esprimere per mezzo di ciascuna *combinazione binaria* de' tre elementi che restano, e si avranno dodici formole che rappresenteranno la soluzione completa del problema.

3°. *Moto equabilmente accelerato ed equabilmente ritardato; sue leggi, ed applicazione alla gravità.*

156. *Il moto* si dice **equabilmente accelerato** od **equabilmente ritardato**, *allorchè la velocità cresce o diminuisce per gradi uguali in tempi uguali ;* la qual definizione è compresa nella doppia equazione

$$du = \pm\, gdt\,,$$

in cui l' azione g della forza φ si suppone costante.

Per risolvere, rispetto a queste due specie di moto, il problema accennato qui sopra, cominciamo dall' integrar l' equazioni

$$du = \pm\, gdt\,, \quad ds = udt\,,$$

contando il tempo t e lo spazio s a partire dall' istante in cui la velocità u è $= c$, talchè per

$$u = c\,, \quad \text{si abbia} \quad t = 0\,, \quad s = 0\,;$$

otterremo

$$u = c \pm gt\,, \quad s = (2c \pm gt)\frac{t}{2}\,.$$

Per mezzo di queste due equazioni fondamentali, usando ove occorre l' eliminazione, si trovano subito le quattro equazioni relative alle combinazioni ternarie de' quattro elementi (s, u, t, g) :

$$\left\{\begin{array}{ll} u = c \pm gt\,, & \text{senza } s\,, \\ s = (2c \pm gt)\dfrac{t}{2}\,, & \text{senza } u\,, \\ s = (u + c)\dfrac{t}{2}\,, & \text{senza } g\,, \\ s = \dfrac{u^2 - c^2}{\pm 2g}\,, & \text{senza } t\,; \end{array}\right.$$

dalle quali si deduce immediatamente l' espressione di ciascuna delle quattro quantità u, s, g, t per mezzo delle combinazioni binarie delle tre rimanenti, e si ottengono le dodici formole :

$$\left\{\begin{array}{l} u = c \pm gt = \dfrac{2s}{t} - c = \sqrt{[c^2 \pm 2gs]}\,; \\ s = (2c \pm gt)\dfrac{t}{2} = (u + c)\,\dfrac{t}{2} = \dfrac{u^2 - c^2}{\pm 2g}\,; \\ g = \dfrac{u - c}{\pm t} = 2\,\dfrac{s - ct}{\pm t^2} = \dfrac{u^2 - c^2}{\pm 2s}\,; \\ t = \dfrac{u - c}{\pm g} = \dfrac{2s}{u + c}\,, \quad t^2 \pm \dfrac{2c}{g}\,t = \dfrac{2s}{\pm g}\,. \end{array}\right.$$

Leggi del moto equabilmente accelerato.

157. Supponiamo che il moto equabilmente accelerato cominci senza velocità iniziale, o che si abbia $c = 0$. Le formole relative

a questo moto diventano

$$\left\{\begin{aligned} u &= gt = \frac{2s}{t} = \sqrt{2gs}\,, \\ s &= \frac{g}{2}t^2 = \frac{ut}{2} = \frac{u^2}{2g}\,, \\ g &= \frac{u}{t} = \frac{2s}{t^2} = \frac{u^2}{2s}\,, \\ t &= \frac{u}{g} = \frac{2s}{u} = \sqrt{\frac{2s}{g}}\,. \end{aligned}\right.$$

L'equazioni $s = \frac{g}{2}t^2$, $s = \frac{ut}{2}$ si sogliono tradurre nelle seguenti proposizioni: « Nel moto equabilmente accelerato, lo spazio che si vien percorrendo a partir dalla quiete cresce proporzionalmente al quadrato del tempo; e lo spazio descritto in un tempo dato è la metà di quello che in pari tempo si descriverebbe con moto equabile se si conservasse la velocità acquistata ».

Concepiamo diviso il tempo t in n intervalli successivi ed uguali a t_1, e denotiamo per s_n lo spazio percorso nel tempo nt_1. Sarà

$$s_1 = \frac{g}{2}t_1^2\,, \qquad s_n = \frac{g}{2}(nt_1)^2 = n^2.\frac{g}{2}t_1^2\,,$$

donde

$$s_n = n^2 s_1\,, \qquad s_{n+1} = (n+1)^2 s_1\,,$$

e per conseguenza

$$s_{n+1} - s_n = (2n+1)s_1\,.$$

Ponendo qui successivamente $n = 0$, $= 1$, $= 2$, $= 3$, etc. risulta

$$s_1 = 1.s_1\,,\ s_2 - s_1 = 3.s_1\,,\ s_3 - s_2 = 5.s_1\,,\ s_4 - s_3 = 7.s_1\,,\ \text{etc.}$$

vale a dire: « Nel moto equabilmente accelerato gli spazii percorsi in uguali e successivi intervalli di tempo, a partir dalla quiete, stanno tra loro come i numeri impari $\div 1 : 3 : 5 : 7 :$ etc. »

Scolio I. Dopo Galileo, coll'esperienza si dimostra che a queste leggi ubbidiscono i gravi nel loro cadere in linea verticale, rimossa che sia la resistenza dell' aria; e che, in un minuto secondo, lo spazio percorso a partir dalla quiete da un grave cadente è, a Parigi, di

$$\textit{metri } 4{,}90448 = \text{piedi parig. } 15{,}1 \text{ incirca.}$$

L' azione g della gravità è adunque costante per un dato luogo, e per aver la misura della sua intensità basta sostituire nella formola

$$g = \frac{2s}{t^2} = \frac{u}{t}, \quad t = 1'', \ s = 4,\ 90448 .$$

Si ha dunque sotto la latitudine di Parigi

$$g = 9{,}80896 ,$$

vale a dire: « La gravità, siccome rappresentata dal numero 9,80896, è incirca dieci volte più grande di quella forza che si prende per *unità di misura*, e che in un minuto secondo è capace di produrre la velocità di un metro. »

Scolio II. La velocità ($u = \sqrt{2gs}$) che acquista un grave, cadendo con moto equabilmente accelerato dall' altezza s, si dice *velocità dovuta all' altezza* s; e viceversa, l' altezza $\left(s = \frac{u^2}{2g}\right)$ da cui deve cadere un grave per acquistare una data velocità u, si dice *altezza dovuta a questa velocità.*

Leggi del moto equabilmente ritardato.

158. Supponiamo che il moto equabilmente ritardato cominci colla velocità iniziale $= c$. Le formole relative a questo moto saranno (156):

$$\left\{\begin{aligned} u &= c - gt = \frac{2s}{t} - c = \sqrt{[c^2 - 2gs]} , \\ s &= (2c - gt)\frac{t}{2} = (c + u)\frac{t}{2} = \frac{c^2 - u^2}{2g} , \\ g &= \frac{c - u}{t} = 2\,\frac{ct - s}{t^2} = \frac{c^2 - u^2}{2s} , \\ t &= \frac{c - u}{g} = \frac{2s}{c + u} = \frac{1}{g}\left[c \mp \sqrt{(c^2 - 2gs)}\right] . \end{aligned}\right.$$

Sia S lo spazio percorso e T la durata del moto fino all' estinzione della velocità u. Ponendo $u = 0$, si avrà

$$S = \frac{c^2}{2g}, \quad T = \frac{c}{g}.$$

Ma la durata T del moto, come quella di ogni cosa che comincia e finisce, è divisa da ogni istante in due parti: nella durata passata t e nella durata che rimane t_1; e lo stesso dicasi dello spazio S, che si compone dello spazio s percorso e dello spazio s_1 che rimane a percorrere. Si avrà dunque

$$t_1 = T - t = \frac{u}{g}, \quad s_1 = S - s = \frac{u^2}{2g},$$

donde

$$u = gt_1, \qquad s_1 = \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{ut_1}{2}:$$

vale a dire: « Nel moto equabilmente ritardato la velocità diminuisce in proporzione del tempo che rimane fino all' estinzione del moto; e lo spazio che rimane a descriversi finchè dura il moto, va diminuendo come il quadrato di questa durata, ed è la metà di quello spazio che in pari tempo si descriverebbe con moto equabile se si conservasse la velocità attuale. »

Scolio. L' equazione $s = \frac{g}{2} t^2 = \frac{ut}{2}$, regolando in senso inverso i due moti equabilmente accelerato ed equabilmente ritardato, rende manifesto che un grave lanciato in alto verticalmente (facendo astrazione dalla resistenza dell' aria) dee avere in ogni punto del suo salire quella velocità che, in appresso discendendo, tornerà ad acquistare nel medesimo punto.

4°. *Moto verticale de'gravi ne'fluidi omogenei: moto discendente e moto ascendente.*

159. Un grave moventesi in un mezzo fluido è sotto l'azion continua di due specie di forze: le forze della gravità che traggono in basso tutti i punti materiali, e le forze di pressione del fluido contro la superficie del corpo, pressioni di cui doppio è l'effetto, statico e dinamico.

L'effetto statico delle pressioni sta in questo, che il corpo immerso nel fluido perde una parte del suo peso, eguale al peso del fluido di cui prende il luogo. (Qui il fluido si supporrà omogeneo, e per g s'intenderà non la gravità assoluta ma la *relativa*, cioè la gravità quale si conviene al peso diminuito del corpo.)

L' effetto dinamico delle pressioni del fluido contro il corpo in moto consiste nel produrre una resistenza, che fa ostacolo in direzione opposta a quella del moto, e che cresce colla velocità del moto. Questa resistenza si suol supporre proporzionale, in pari circostanze, al quadrato della velocità u, e però si rappresenta per gk^2u^2. Il coefficiente gk^2 dipende dalla figura del corpo e dal rapporto del suo peso specifico a quello del fluido; onde è lo stesso per uno stesso corpo e per uno stesso fluido, ma cangia ne' diversi corpi e ne' mezzi diversi secondo le leggi che s'insegnano nell'idraulica.

160. *Quesito I.* Scendendo un grave dalla quiete attraverso un fluido omogeneo, cercasi la relazione tra la velocità, il tempo, e lo spazio.

Risposta. Se dapprima cercasi la relazione tra la velocità u ed il tempo t, ed appresso la relazione tra lo spazio s, il tempo e la velocità, si trova

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{k}\cdot\frac{e^{2gkt}-1}{e^{2gkt}+1} = \frac{1}{k}\left(1-\frac{2}{e^{2gkt}+1}\right), \\ s &= \frac{1}{gk^2}\,log.\,\frac{1}{2}\left\{e^{gkt}+e^{-gkt}\right\} = \frac{1}{2gk^2}\,log.\,\frac{1}{1-k^2u^2}\,; \end{aligned}\right.$$

dalla prima delle quali apparisce che la velocità u del grave cadente non può mai oltrepassare, e nè anche aggiungere il limite $u = \frac{1}{k}$, a cui però si viene sempre più avvicinando, cosicchè il moto si rende *sensibilmente uniforme* dopo un tempo tanto più breve quanto è maggiore il coefficiente gk^2 della resistenza.

Dimostrazione. La gravità relativa ($= g$) che accelera il moto, e la resistenza del mezzo ($= gk^2u^2$) che lo ritarda, operando in senso contrario secondo la stessa verticale, si compongono nella forza unica

$$\varphi = g(1 - k^2u^2) .$$

Ciò posto: 1°. dall' equazione $du = \varphi dt$ si trae

$$gkdt = \frac{d.ku}{1 - k^2u^2} ,$$

la quale, fatto $i = \sqrt{-1}$, si può scrivere sotto la forma

$$igkdt = \frac{d(iku)}{1 + (iku)^2} .$$

Se questa si paragona colla relazione nota

$$d\theta = \frac{d.tan.\theta}{1 + tan.^2\theta} ,$$

e s' integra così che a $t = 0$ corrisponda $u = 0$, si converte nella

$$iku = tan.(igkt) ,$$

ossia, moltiplicata per $\frac{-i}{k}$, nella

$$(1) \qquad u = \frac{1}{k} . -i\,tan.(igkt) = \frac{1}{k} . \frac{-i\,sen.(igkt)}{cos.(igkt)} ,$$

donde

$$cos.(igkt) = \sqrt{\frac{1}{1 - k^2u^2}} .$$

2°. Dalla equazione $ds = udt$ si ricava

$$ds = \frac{1}{gk^2} \cdot \frac{-sen.(igkt).d(igkt)}{cos.(igkt)} = \frac{1}{gk^2} d.log.cos.(igkt),$$

la quale integrata così che a $t = 0$ corrisponda $s = 0$, diventa

$$(2) \qquad s = \frac{1}{gk^2} log.cos.(igkt) = \frac{1}{2gk^2} log. \frac{1}{1 - k^2u^2}.$$

Or quest'equazioni (1) e (2), se ai simboli $- i\,tan.(igkt), cos.(igkt)$ si sostituiscono i loro valori corrispondenti (*Append.* 74, *c*), si trasformano subito nelle proposte.

161. *Quesito II.* Salendo un grave verticalmente attraverso un fluido omogeneo, ed essendo c la velocità di proiezione, si cerca la relazione tra la velocità u, il tempo t, e lo spazio s.

Risposta. Si trova

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{k}\,\frac{kc - tan.(gkt)}{1 + kc\,tan.(gkt)} \\ s &= \frac{1}{gk^2} log.[cos.(gkt) + kc\,sen.(gkt)] = \frac{1}{2gk^2} log. \frac{1 + k^2c^2}{1 + k^2u^2}, \end{aligned} \right.$$

dalle quali, se si fa $u = 0$, si viene a conoscere quanta è la intera salita S, e quanto il tempo T che impiega il mobile a toccarne la sommità:

$$S = \frac{1}{2gk^2} log.(1 + k^2c^2), \quad T = \frac{1}{gk} arc.tan.kc.$$

Dimostrazione. Qui la gravità relativa e la resistenza del mezzo, cospirando insieme per ritardare il moto, si compongono nella forza

$$\varphi = - g(1 + k^2u^2).$$

Ciò posto: 1°. dall' equazione $du = \varphi dt$ si trae

$$gkdt = \frac{-d.ku}{1+k^2u^2},$$

che integrata somministra

$$(1) \qquad u = \frac{1}{k}\tan.(a - gkt),$$

e quindi

$$\cos.(a - gt) = \sqrt{\frac{1}{1+k^2u^2}},$$

dove la costante a dell' integrazione dovendosi determinare in modo che a $t=0$ corrisponda $u = c$, sarà

$$\tan.a = kc, \quad \text{e} \quad \cos.a = \sqrt{\frac{1}{1+k^2c^2}}.$$

2°. Dall' equazione $ds = udt$ si ricava

$$ds = \frac{1}{gk^2}\frac{\mathrm{sen}.(a - gkt).d(gkt)}{\cos.(a - gkt)} = \frac{1}{gk^2}d.\log.\cos.(a - gkt)$$

la quale integrata così che a $t = 0$ corrisponda $s = 0$, diventa

$$(2) \qquad s = \frac{1}{gk^2}\log.\frac{\cos.(a - gkt)}{\cos.a} = \frac{1}{2gk^2}\log.\frac{1+k^2c^2}{1+k^2u^2}.$$

Ora, se nelle (1) e (2) alle funzioni $\tan.(a - gkt)$, $\cos.(a - gkt)$ si sostituiscono i loro sviluppi, si vedranno subito comparire le formole proposte.

CAPO II.

Del moto curvilineo nello spazio.

1. *Nel moto curvilineo le sei quantità* (x, y, z, s, u, f) *si debbono considerare come funzioni del tempo* t. *La forza d' inerzia*, *quando il moto è libero nello spazio, è sempre uguale in grandezza e in direzione alla forza* motrice : essa si compone della forza tangenziale $= \frac{du}{dt}$, e della forza centripeta $= \frac{u^2}{r}$. *Proprietà dell' area variabile* A *descritta dal raggio* OM, *vettore del punto* M *che si muove in un piano.*

162. Un punto materiale M, sotto l'azion continua di una forza f operante con certa legge, si muova liberamente nello spazio. È manifesto che, ad ogni istante successivo del tempo t, tutto sarà determinato nel moto di questo punto : e la lunghezza s del cammino percorso sulla traiettoria a partire da un' epoca data ; e le coordinate x, y, z del luogo in che trovasi attualmente il punto ; e la velocità u ; e l' intensità della forza f. Così ciascuna di queste sei quantità

$$x\,,\quad y\,,\quad z\,,\quad s\,,\quad u\,,\quad f$$

si dee riguardare come funzione del tempo t.

Scolio. Giova qui ricordare che, supposti gli assi Ox, Oy, Oz rettangolari :

La direzione della traiettoria s in un punto qualunque M (x, y, z) si fa nota per le formole (*App.* 55)

$$\cos.(xs) = \frac{dx}{ds}\,,\quad \cos.(ys) = \frac{dy}{ds}\,,\quad \cos.(zs) = \frac{dz}{ds}\,.$$

E la direzione del raggio osculatore r che dal punto M va al centro di curvatura, per le (*App.* 56)

$$cos.(xr) = \frac{r}{ds} d\frac{dx}{ds}, \quad cos.(yr) = \frac{r}{ds} d\frac{dy}{ds}, \quad cos.(zr) = \frac{r}{ds} d\frac{dz}{ds},$$

donde

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{ds}{r} cos.(xr), \quad d\frac{dy}{ds} = \frac{ds}{r} cos.(yr), \quad d\frac{dz}{ds} = \frac{ds}{r} cos.(zr).$$

Indicheremo per I la *forza d'inerzia* del punto materiale in moto, per f la forza motrice, e per P, Q, R le sue componenti parallele agli assi Ox, Oy, Oz.

163. **Teorema** I. *Nel moto curvilineo di un punto M libero nello spazio, la forza motrice f è sempre uguale in grandezza e in direzione alla forza d'inerzia I.*

Dim. Il moto ds, onde il mobile va dal punto (x, y, z) al punto $(x + dx, y + dy, z + dz)$ della traiettoria, si può decomporre ne' tre moti simultanei dx, dy, dz paralleli ai tre assi coordinati Ox, Oy, Oz (144). Ora, se a ciascuno di questi tre moti rettilinei si applicano le due equazioni fondamentali del moto rettilineo

$$\left(u = \frac{ds}{dt}, \quad \varphi = \frac{du}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\right),$$

si avrà

$$P = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Q = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad R = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{a}$$

le quali significano che le componenti della forza motrice f sono eguali in ogn' istante alle componenti omologhe della forza d'inerzia I, e che però si ha $f = I$.

Coroll. L' equazioni generali del moto di un punto M libero nello spazio sono dunque le (a), equivalenti alle

$$d\frac{dx}{dt} = Pdt, \quad d\frac{dy}{dt} = Qdt, \quad d\frac{dz}{dt} = Rdt. \tag{a}$$

Allorchè quest' equazioni possono integrarsi, si verranno a scoprire tutte le circostanze del moto corrispondente. Infatti per una prima integrazione si avranno le tre velocità parziali $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ dalla composizione delle quali risulta la velocità assoluta del mobile $\left(u=\frac{ds}{dt}\right)$. Per una seconda integrazione, avremo le coordinate x, y, z espresse per t, e così sapremo il luogo del mobile ad ogn' istante. Finalmente eliminando t, rimarranno due equazioni tra x, y, z che saranno quelle della traiettoria descritta dal mobile.

164. **Teorema** *II. Nel moto curvilineo di un punto M, la forza d' inerzia I si compone ad ogn' istante di due forze, l' una diretta secondo la tangente, e l' altra diretta al centro di curvatura: la componente* **tangenziale** *è* $=\frac{du}{dt}$, *e la componente* **centripeta** *è* $=\frac{u^2}{r}$.

Dim. Se si differenzii e poi si divida per dt la identità

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=u\,\frac{dx}{ds},$$

si ottiene

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{u}{dt}d\frac{dx}{ds}=\frac{du}{dt}\cos.(xs)+\frac{u}{dt}\cdot\frac{ds}{r}\cos.(xr),$$

ossia

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt}\cos.(xs)+\frac{u^2}{r}\cos.(xr).$$

Di qui, per ragion di simmetria,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{du}{dt}\cos.(xs)+\frac{u^2}{r}\cos.(xr),\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{du}{dt}\cos.(ys)+\frac{u^2}{r}\cos.(yr),\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{du}{dt}\cos.(zs)+\frac{u^2}{r}\cos.(zr).\end{aligned}\right.$$

Ora, ove si abbia riguardo alla proprietà fondamentale della risultante, quest' equazioni significano che la forza d' inerzia I, risultante delle tre $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, si può riguardare eziandio come la risultante di due forze *tangenziale* e *centripeta*, espresse da $\frac{du}{dt}$, $\frac{u^2}{r}$.

A questa conclusione si arriva pure col seguente discorso.

Il punto mobile che, al principio dell' arco $ds = MM'$ (*fig.* 44) ha la velocità u e la direzione della tangente in M, dopo il tempo dt arriva al termine di ds colla velocità $(u + du)$ e colla direzione della tangente in M' che devìa dalla precedente coll' angolo di contingenza $= d\theta$. Ciò posto, se in M' la velocità $(u + du)$ si decompone in due parallele alle rette MT, MC, che in M rappresentano la tangente e il raggio osculatore r, le componenti saranno

$$(u + du)\cos.d\theta\,, \quad (u + du)\,\text{sen}.d\theta\,,$$

le quali, trascurando gl' infinitesimi di ordine superiore al primo, si riducono a

$$u + du\,, \quad ud\theta = u\frac{ds}{r}\,.$$

Le velocità acquistate dal mobile nell' istante dt secondo le direzioni tangenziale MT e centripeta MC sono quindi du, $\frac{u}{r}ds$, e queste divise per dt danno le componenti *tangenziale* e *centripeta* della forza d' inerzia I:

$$\frac{du}{dt}\,, \quad \frac{u^2}{r} = u\,\frac{d\theta}{dt}\,,$$

vale a dire: La *forza tangenziale d'inerzia* è uguale alla derivata della velocità, presa rispetto al tempo t;

« E la *forza centripeta d'inerzia* è uguale al quadrato della velocità diviso pel raggio di curvatura; ovvero: *è uguale al prodotto delle due velocità* u, $\frac{d\theta}{dt}$, *onde il punto mobile tende simultaneamente a camminare e a cangiar direzione.* »

a) *Coroll. I.* **La direzione della forza d' inerzia I essendo ad ogn' istante contenuta nel piano osculatore della traiettoria, anche la direzione della forza motrice f, quando il mobile sia libero ed isolato, sarà sempre contenuta in questo piano (163), e si avrà**

$$(b) \qquad \frac{du}{dt} = f\cos.(sf)\,, \quad \frac{u^2}{r} = f\,sen.(sf)\,,$$

equazioni equivalenti alle (a).

b) *Coroll. II. Un punto M, che si muova in connessione con un sistema, si potrà riguardare come affatto libero ed isolato se al sistema s' intenda sostituita una forza motrice f che, ad ogn' istante, sia eguale in grandezza e in direzione alla forza d' inerzia dello stesso punto M.*

165. **Teor.** I. *Quando il raggio $OM = r$, vettore del punto M, si muove in un piano, l' area A che da esso si vien descrivendo (fig. 45) gode delle due proprietà contenute nelle seguenti equazioni*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \tfrac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = u.\frac{r\,sen.(rs)}{2}\,, \\ \frac{d^2A}{dt^2} &= \tfrac{1}{2}\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = I.\frac{r\,sen.(rI)}{2}\,, \end{aligned}\right.$$

vale a dire: *La* **derivata prima** *dell'area A, presa rispetto al tempo, è uguale alla metà del momento, intorno ad O, della velocità u del punto M.*

E la **derivata seconda** *di A è uguale alla metà del momento della forza d' inerzia di M.*

Dim. Sia dA l' area che il raggio vettore $OM = r$ descrive nel tempo dt, mentre passa dal punto (x, y) al punto $(x + dx,\ y + dy)$ per l' angolo $d\theta$. Sarà (*App.* 16)

$$2dA = r^2 d\theta = xdy - ydx = rds.sen.(rs)\,,$$

e dividendo per dt

$$2\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = u.r\,sen.(rs)\,,$$

dove $u = \frac{ds}{dt}$ è la velocità composta delle due $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ed avente la direzione della traiettoria s nel punto $M(x,y)$.

Se di quest'equazione si prende la derivata rispetto a t, si ottiene

$$2\frac{d^2A}{dt^2} = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = I.r sen.(rI) .$$

Coroll. Allorchè il punto M è libero nello spazio, alla forza d' inerzia I si potrà sostituire nelle formole la forza motrice f, e si avrà $\frac{d^2A}{dt^2} = f.\frac{r sen.(rf)}{2}$ (163) .

Scolio. Le due relazioni

$$\frac{dA}{dt} = u.\frac{r sen.(rs)}{2}, \quad \frac{d^2A}{dt^2} = I.\frac{r sen.(rI)}{2}$$

tra l' area A descritta da OM ed i momenti della velocità e della forza d' inerzia del punto M, sono analoghe alle due relazioni

$$\frac{ds}{dt} = u, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = I,$$

che nel moto rettilineo sussistono tra lo spazio s percorso e la velocità e la forza d' inerzia del mobile.

---

2. *Proprietà generali del moto curvilineo che si fa sotto l'azion di una forza centrale; ed in particolare quando la traiettoria è una sezione conica. Applicazione al sistema del mondo.*

Nel moto curvilineo la forza motrice si chiama **centrale** quando la sua direzione passa costantemente per un punto fisso, o centro.

166. **Teorema.** *Se un punto M si muova sotto l' azion di una forza diretta sempre ad un centro O, la traiettoria sarà tutta in un piano, e le aree descritte dal raggio vettore OM saranno proporzionali ai tempi. E viceversa.*

Dim. 1°. Se si considera il piano determinato dal centro O di azione, e dalla direzione dell' impulso iniziale sul punto M, si vede essere affatto impossibile che il punto M esca fuori di questo piano, non essendovi ragione per cui n'esca fuori piuttosto da un lato che dall' altro.

2°. Poichè la forza f s' indirizza sempre al punto O come il raggio $OM = r$, nella $\frac{d^2A}{dt^2} = f.\frac{r\,sen.(rf)}{2}$ sarà $sen.(rf) = 0$, e per conseguenza

$$d\frac{dA}{dt} = 0,$$

la quale, integrata due volte così che a $t = 0$ corrisponda $A = 0$, somministra

$$A = ct,$$

dove la costante c è uguale all' area descritta dal raggio vettore r nell' *unità di tempo*, oltre di essere uguale alla metà del momento, intorno ad O, della velocità u del punto M.

Viceversa : Se questo valore di A si sostituisce nell'equazione

$$\frac{d^2A}{dt^2} = f.\frac{r\,sen.(rf)}{2},$$

risulta $sen.(rf) = 0$, vale a dire : « *Se la traiettoria del punto M è in un piano, e le aree descritte dal raggio vettore OM sono proporzionali ai tempi, la direzion della forza motrice f passa sempre pel punto O.*

167. *Coroll.* Dalla relazione $A = ct$ si deduce $dA = cdt$, ed essendo

$$2dA = r^2d\theta = xdy - ydx = r\,ds.sen.(rs),$$

sarà $$2c = r^2 \frac{d\theta}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = ur\,sen.(rs)\,,$$

e per conseguenza

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{2c}\,,\quad sen.(rs) = \frac{2c}{ru}\,.$$

168. **Quesito.** Movendosi il punto M sotto l'azion di una forza diretta ad un centro O, esprimere per mezzo delle coordinate polari (θ, $OM = r$) la *velocità* u, la sua *direzione* [$cos.(rs)$, $sen.(rs)$] , e la *forza centrale* f.

Risposta.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{u^2}{4c^2} &= \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2, \\ f &= -\frac{d.u^2}{2dr}\,, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} sen.(rs) &= \frac{2c}{ru}\,, \\ cot.(rs) &= -r\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\,. \end{aligned}\right.$$

Dimostrazione. Per ottenere gli esposti risultati basta ricorrere alle formole

$$u = \frac{ds}{dt}\,,\quad dt = \frac{r^2 d\theta}{2c}\,,\quad f\cos.(fs) = \frac{du}{dt}\,,$$

ed al triangolo rettangolo MmM' (*fig.* 45) i cui lati sono ds, dr, $rd\theta$. Questo triangolo dà

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2\,,\qquad \left\{\begin{aligned} sen.(rs) &= \frac{rd\theta}{ds}\,, \\ cos.(rs) &= \frac{dr}{ds}\,, \end{aligned}\right. \qquad cot.(rs) = \frac{dr}{rd\theta}\,.$$

Dunque

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{dr}{r^2 d\theta}\right)^2\right],$$

e quindi, ove si guardi alla identità $dr = -r^2 d\frac{1}{r}$, si raccoglie

$$\frac{u^2}{4c^2} = \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2, \qquad \left\{ \begin{array}{l} sen.(rs) = \dfrac{2c}{ru}, \\ cot.(rs) = -r\dfrac{d\frac{1}{r}}{d\theta}. \end{array} \right.$$

Inoltre, se supponiamo (per fissar le idee) che la forza f attragga il punto M verso il centro O, e che però abbia una direzione opposta a quella del raggio vettore $OM = r$, sarà (*App.* 8)

$$cos.(fs) = -cos.(rs) = -\frac{dr}{ds}.$$

Per queste relazioni, l' equazione $f cos.(fs) = \frac{du}{dt}$ diventa

$$fdr = -ds\frac{du}{dt} = -udu = -\frac{d.u^2}{2},$$

donde

$$f = -\frac{d.u^2}{2dr}.$$

Scolio. Questa formola, essendosi costruita nella supposizione che la forza f sia *positiva* quando esercita sul punto M un'azione attrattiva verso il centro O, dovrà dare per f un *valor negativo* nel caso contrario. Laonde, nelle applicazioni, il punto O si dovrà riguardare come **centro di attrazione** o come **centro di ripulsione** secondochè il valore di f dato da cotesta formola risulterà positivo o negativo.

169. **Teor.** *Se un punto* M *si muove descrivendo una sezione conica sotto l'azion di una forza sempre diretta ad un foco della sezione, l' intensità di questa forza andrà variando in ragion reciproca del quadrato della distanza da esso foco.* E viceversa : *Se un punto* M *è attratto verso un centro* O *in ragion inversa del quadrato della distanza, la traiettoria sarà una sezione conica che avrà per foco il punto* O.

Dim. L' equazion polare delle sezioni coniche è

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos.\theta) \tag{1}$$

dove O è un foco della sezione (*fig.* 45), θ è l' angolo onde il raggio vettore $OM = r$ devia da quella delle sue posizioni in cui ha il valor più piccolo

$$OA = \frac{p}{1 + e};$$

$p = \pm a(1 - e^2)$ è il semiparametro; a è la metà di quel diametro che passa pei fochi; e è il coefficiente dell' eccentricità $= ea$; e secondochè riesca

$$e < 1, \quad e = 1, \quad e > 1,$$

la sezione conica è un' ellisse, una parabola, od una iperbola: per $e = 0$ l' ellisse diviene un circolo del raggio $r = p = a$.

1°. Dalla (1) si ricava

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{e}{p}\,sen.\theta,$$

e quindi la formola $\frac{u^2}{4c^2} = \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2$ si cangia nella

$$\frac{p^2}{4c^2}u^2 = (1 + e\cos.\theta)^2 + e^2 sen^2.\theta$$

$$= 2(1 + e\cos.\theta) - (1 - e^2) = \frac{2p}{r} \mp \frac{p}{a},$$

donde, fatto

$$k = \frac{4c^2}{p},$$

si conchiude

$$\frac{u^2}{k} = \frac{2}{r} \mp \frac{1}{a},$$

e questa fa palese che la velocità u del punto M diminuisce al crescere della distanza r dal centro di azione, e che però è massima là dove la distanza è minima.

Sostituendo questo valore di u^2 nella $f = -\frac{d(u^2)}{2dr}$ si ottiene

$$f = \frac{k}{r^2},$$

per la quale si scopre che « la intensità della forza centrale scema nella proporzione in cui cresce il quadrato della distanza r dal centro di azione. »

2°. **Viceversa:** *Se un corpo, essendo in M (r, θ), riceve ad un tratto la velocità u secondo una direzione determinata MM' [$\cos.(rs)$, $\text{sen}.(rs)$] (fig. 45), e poi si muova sotto l'azion della forza $= \frac{k}{r^2}$ diretta al centro O, la traiettoria sarà una sezione conica che avrà un foco nel punto O.*

Per dimostrarlo si osservi che la via che il mobile dee seguire è nella realità pienamente determinata, e che però ove si faccia vedere l'esistenza di una sezione conica che, avendo un foco in O centro dell'attrazione $= \frac{k}{r^2}$, soddisfaccia alle proposte condizioni del moto iniziale, questa conica sarà la vera traiettoria. Imperocchè nell'entrare che farà il mobile a descriver siffatta curva, avrà in M la velocità u secondo la direzione [$\cos.(rs)$, $\text{sen}.(rs)$], e di più si troverà sotto l'attrazion continua della forza $= \frac{k}{r^2}$ emanante dal centro O, conforme a ciò che si richiede nel problema.

Ora, supponendosi date nel punto M di partenza le quantità

$$k\ ,\ r\ ,\ u\ ,\ sen.(rs)\ ,\quad cot.(rs)\ ,$$

si può subito determinare la sezione conica di cui si tratta, e quanto alla sua natura e grandezza cercando i valori di p, e, e quanto alla direzione della linea de' fochi cercando i valori di $cos.\theta$, $sen.\theta$ relativi al punto M. Infatti dalle formole già stabilite si raccoglie

$$\begin{cases} 2c = r\,u\,sen.(rs)\ , \\ p = \dfrac{4c^2}{k}\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} \pm\dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{r} - \dfrac{u^2}{k}\ , \\ e^2 = 1 \mp \dfrac{p}{a}\ ; \end{cases}$$

e dalle $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p}(1 + e\,cos.\theta)$, $cot.(rs) = -r\,\dfrac{d\dfrac{1}{r}}{d\theta} = \dfrac{re}{p}\,sen.\,\theta$, abbiamo

$$cos.\,\theta = \frac{p}{e}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right), \qquad sen.\theta = \frac{p}{er}\,cot.(rs)\ .$$

Ecco adunque trovati i valori di p, e, θ pe' quali rimane compiutamente determinata la sezione conica che dee soddisfare a tutte le condizioni del problema.

Coroll. Nel punto M $(r,\ \theta)$ sia h l' altezza dovuta alla velocità u di proiezione, cioè l' altezza per la quale un corpo, animato da una gravità $g = \dfrac{k}{r^2}$, dovrebbe discendere per acquistare la velocità u, talchè si abbia

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{r^2}{2k}\,u^2\ .$$

Sarà $u^2 = \dfrac{2k}{r^2}h$, e l'equazione $\dfrac{u^2}{k} = \dfrac{2}{r} \mp \dfrac{1}{a}$ darà

$$h = r \mp \frac{r^2}{2a}\ ;$$

onde per l' ellisse sarà $h < r$, per l' iperbola $h > r$, per la parabola $h = r$ (a cagione di $a = \infty$), e pel circolo (essendo $e = 0$, $r = a$) sarà $h = \frac{r}{2}$, $cot.(rs) = 0$; vale a dire : « Se un corpo, che è attratto verso un centro fisso O in ragion inversa del quadrato della distanza, vien lanciato nello spazio con una data velocità u, la traiettoria sarà una delle tre sezioni coniche avente un foco nel centro di attrazione; ed in particolare sarà un' ellisse, od una parabola, od un' iperbola, secondochè l' altezza h dovuta alla velocità iniziale u (supposta la gravità $g = \frac{k}{r^2}$) riesca inferiore, o eguale, o superiore alla distanza iniziale r dal centro di attrazione. Chè se quest' altezza h risulti uguale alla metà della distanza iniziale r, e se di più la direzione della velocità iniziale sia perpendicolare ad essa distanza, la traiettoria sarà un circolo. »

170. *Scolio I.* La proposizione : « Se un corpo si muove sotto l' attrazione di una forza centrale inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro, la traiettoria è una sezione conica di cui il centro di azione è uno de' fochi : » può dimostrarsi direttamente per mezzo dell' equazioni generali del moto

$$d\frac{dx}{dt} = dt.f cos.(xf) , \quad d\frac{dy}{dt} = dt.f sen.(xf) ,$$

combinate colla doppia espressione del principio delle aree

$$r^2 d\theta = xdy - ydx = 2cdt .$$

Infatti, coordinati in O due assi rettangolari Ox, Oy, si ha

$$cos.(xf) = - cos.(xr) , \quad sen.(xf) = - sen.(xr) ,$$

e se si chiama θ l' angolo (xr), e si sostituisce

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{2c} , \quad f = \frac{k}{r^2} ,$$

l' equazioni del moto diventano

$$d\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{2c}\cos.\theta\, d\theta\,, \quad d\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{2c}\operatorname{sen}.\theta\, d\theta\,,$$

ed integrate si mutano nelle

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{2c}(\operatorname{sen}.\theta + \alpha)\,, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{k}{2c}(\cos.\theta + \beta)\,;$$

e queste sostituite nella formola delle aree

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 2c\,,$$

(essendo $x = r\cos.\theta$, $y = r\operatorname{sen}.\theta$) producono

$$r(1 + \alpha\operatorname{sen}.\theta + \beta\cos.\theta) = \frac{4c^2}{k}\,,$$

equazione che appartiene ad una sezione conica avente il foco nel punto O.

171. *Scolio II.* Quando il centro dell'attrazione $= \frac{k}{r^2}$ è al foco di un'ellisse di semiassi a, b, il coefficiente

$$k = \frac{4c^2}{p}\,,$$

che rappresenta *l' intensità della forza f all' unità di distanza dal centro di azione*, si può esprimere sotto un' altra forma per mezzo delle note formole

$$A = ct\,, \quad p = \frac{b^2}{a}\,.$$

Imperocchè se si suppone che il raggio vettore r impieghi il tempo T a descriver tutta l' area $A = ab\pi$ dell' ellisse, si avrà

$$c = \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T},$$

e quindi

$$\frac{4c^2}{p} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{\frac{b^2}{a}} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Dunque

$$k = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Applicazione al sistema del mondo.

172. Le leggi del moto de' pianeti intorno al sole si dicono *leggi di Keplero* dal nome dell' astronomo illustre che primo le scoprì, ricavandole da una serie lunghissima di osservazioni. Queste leggi sono le tre contenute nelle proposizioni che seguono, e si riferiscono al moto del centro di gravità de' pianeti.

Legge 1ª. « *I pianeti si muovono in curve piane, e i loro raggi vettori OM descrivono, intorno al centro O del sole, aree A proporzionali ai tempi t :* »

$$A = ct.$$

Legge 2ª. « *Le traiettorie de' pianeti, chiamate* **orbite**, *sono ellissi di cui il sole occupa uno de' fochi :* »

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos.\theta), \quad e < 1.$$

Legge 3ª. *I quadrati de' tempi periodici* T, T_1, T_2, etc. *delle rivoluzioni de' pianeti intorno al sole sono tra loro come i cubi de' grandi assi* $2a$, $2a_1$, $2a_2$ etc. *delle loro orbite :* »

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \text{etc.}$$

173. Partendo da queste tre leggi, Newton fu condotto per mano della scienza a riguardare il centro del sole come il foco di una forza attrattiva che si estende all' infinito per ogni verso, tirando a sè i corpi in ragion inversa del quadrato della loro distanza.

Ed è ciò che, alla luce de' premessi teoremi, possiamo di presente comprendere anche noi. Infatti sappiamo: 1°. Che, posta la prima legge di Keplero, la forza f onde i pianeti sono ritenuti nelle orbite loro, dev' essere costantemente diretta verso il centro del sole; 2°. Che questa forza, posta la seconda legge, deve attrarre ciascun pianeta in ragion inversa del quadrato della sua distanza dal sole; 3°. E che infine questa forza $\left(f = \frac{k}{r^2}\right)$, posta la terza legge e per conseguenza

$$k = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2} = \text{etc.},$$

opera colla stessa attrazione sulla materia di tutti i pianeti, non variando il valore di k da un pianeta all' altro: cosicchè se i pianeti fossero condotti ad egual distanza r dal sole e poscia abbandonati a sè medesimi, trovandosi animati dalla stessa forza $f = \frac{k}{r^2}$, cadrebbero tutti in tempi uguali per uguali spazii, ed i loro pesi sarebbero ad ogni istante proporzionali alle loro masse.

Newton estese in appresso le leggi di Keplero ai moti delle comete intorno al sole, ed ai moti dei satelliti intorno ai loro pianeti; e passando di osservazione in osservazione, e d' induzione in induzione pose in chiaro che, come i corpi terrestri si vedono gravitare verso il centro della terra, così gravitano i pianeti verso il sole, così le lune o i satelliti verso i loro pianeti; e così una medesima gravitazione universale collega tra loro i diversi corpi del creato, onde avviene che *tutti si attraggano mutuamente in ragion diretta delle masse ed inversa de' quadrati delle distanze.*

3°. *Via de' gravi proietti nello spazio facendo astrazione dalla resistenza del mezzo. Formole per determinare tutte le circostanze del moto : vertice della traiettoria ; ampiezza del tiro ; angolo di elevazione per colpire un dato scopo ; punti che sono dentro o fuori della portata del tiro ; limite minimo della forza d'impulso per arrivare ad un dato scopo.*

174. *Problema. I.* Essendo un grave lanciato da O nella direzione OT (*fig.* 46) colla velocità c, determinare le leggi e tutte le circostanze del moto, facendo astrazione dalla resistenza del mezzo.

Soluzione. Nel piano verticale che contiene OT prendiamo due assi Ox, Oy, il primo orizzontale, ed il secondo verticale e diretto all' insù, o in senso contrario della gravità. Sia θ l'angolo di elevazione del tiro xOT; $c\cos.\theta$, $c\,sen.\theta$ saranno i valori iniziali delle velocità parziali $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ onde si muove il proietto. Infine sia

$$h = \frac{c^2}{2g},$$

l' altezza dovuta alla velocità c.

Le tre equazioni del moto curvilineo

$$d\frac{dx}{dt} = Pdt\,, \quad d\frac{dy}{dt} = Qdt\,, \quad d\frac{dz}{dt} = Rdt\,,$$

si riducono nel nostro caso alle due

$$d\frac{dx}{dt} = 0\,, \quad d\frac{dy}{dt} = -gdt\,,$$

non agendo sul mobile altra forza che la gravità $g = -Q$, ed al principio del moto essendo evidentemente

$$\frac{dz}{dt} = 0\,, \quad z = 0\,.$$

Ora, per una prima integrazione, coteste due equazioni danno le velocità parziali

$$\frac{dx}{dt} = c\cos.\theta\ ,\quad \frac{dy}{dt} = c\,sen.\theta - gt\ ,$$

e per una seconda integrazione danno le coordinate x, y espresse per t:

$$x = ct\cos.\theta\ ,\quad y = ct\,sen.\theta - \frac{g}{2}\,t^2,$$

e così conosciamo il luogo del mobile ad ogn' istante.

Eliminando $t = \frac{x}{c\cos.\theta}$, e $c^2 = 2gh$, nasce l' *equazione della traiettoria :*

$$y = x\tan.\theta - \frac{x^2}{4h\cos.^2\theta}\,,$$

che è una parabola.

Il tempo che impiega il mobile per salire al *vertice* della traiettoria, cioè al punto dove la velocità verticale $\frac{dy}{dt}$ diviene $= 0$, è $t = \frac{c\,sen.\theta}{g}$, e le coordinate del vertice sono :

$$x = \frac{c^2}{g}\,sen.\theta\cos.\theta = \frac{c^2}{2g}\,sen.2\theta = h\,sen.2\theta\ ,$$

$$y = \frac{c^2}{2g}\,sen^2.\theta = h\,sen^2.\theta = \frac{h}{2}\,(1 - \cos.2\theta)\ .$$

La portata orizzontale, o l'*ampiezza* a del tiro, è l' intervallo orizzontale compreso tra i punti pe' quali $y = 0$. La portata orizzontale si compie dunque nel tempo $t = \frac{2c}{g}\,sen.\theta$, ed è

$$a = 4h\,sen.\theta\cos.\theta = 2h\,sen.2\theta\ .$$

Da quest' espressione apparisce: 1.° Che si ha la massima ampiezza del tiro quando l'angolo θ di elevazione è semiretto, ed allora $a = 2h$; 2°. E che si hanno ampiezze uguali con due tiri l'uno de' quali di tanto ecceda l'angolo semiretto di quanto l'altro ne manca.

Problema II. Data la velocità c di proiezione, si domanda qual dev' essere l' elevazione θ del tiro affinchè il proietto colpisca un dato scopo (x, y).

Soluzione. Qui supponendosi note le coordinate x, y dello scopo, il valore di θ si avrà dall' equazione della traiettoria, ossia (a cagione di $\frac{1}{\cos^2.\theta} = 1 + \tan.^2\theta$) dalla

$$y = x\tan.\theta - \frac{x^2}{4h}(1 + \tan^2.\theta),$$

che si può scriver così:

$$(x\tan.\theta)^2 - 4h(x\tan.\theta) = -4hy - x^2,$$

e che risoluta somministra

$$x\tan.\theta = 2h \pm \sqrt{[4h(h-y) - x^2]}.$$

Questi due valori di $\tan.\theta$ saranno disuguali, uguali, od immaginarii secondochè risulti:

$$4h(h-y) - x^2 > 0, \quad = 0, \quad < 0.$$

Ciò posto, immaginiamo descritta la parabola che corrisponde all' equazione

$$4h(h-y) - x^2 = 0, \quad \text{ossia} \quad x^2 = 4h(h-y),$$

e che per conseguenza ha il parametro $= 4h$, il foco nel punto O del tiro, ed il vertice al di sopra di O per un' altezza $= h$.

Un punto M cadrà al di fuori o al di dentro di questa parabola, secondochè le coordinate x, y di esso punto rendano l'espressione

$$4h(h-y)-x^2<0\ ,\ >0\ .$$

Se adunque si fa girar questa parabola intorno all'asse verticale Oy sicchè generi la superficie chiusa di una Volta, tutti i punti esterni alla Volta saranno *fuori della portata del tiro*, ed ogni punto interno potrà esser colpito dando al tiro due angoli diversi di elevazione, angoli che si ridurranno ad un solo quando lo scopo M si trovi precisamente sulla Volta.

In generale: perchè un dato scopo (x, y) possa venir colpito, l' altezza h dovuta alla velocità c dell' impulso dee soddisfare alla relazione

$$4h^2-4hy-x^2>0\ ,\ =0,$$

donde si trae

$$h \stackrel{>}{=} \left\{ \tfrac{1}{2}\left(y+\sqrt{(x^2+y^2)}\right)\right. ,$$

con che si fa noto il *limite inferiore* della forza c d' impulso per arrivare al segno proposto.

Scolio. Se prendiamo per asse y la retta OT che rappresenta la direzione del tiro (*fig.* 47), e per asse x la verticale condotta per O nel senso della gravità g, l' equazioni del moto saranno

$$d\frac{dx}{dt}=gdt\ ,\quad d\frac{dy}{dt}=0\ ,$$

le quali, per una prima integrazione, danno le velocità parziali

$$\frac{dx}{dt}=gt,\quad \frac{dy}{dt}=c\ ,$$

e per una seconda integrazione danno le coordinate x, y espresse per t :

$$x=\frac{g}{2}t^2\ ,\quad y=ct\ ;$$

ed eliminando $t=\dfrac{y}{c}$, $c^2=2gh$, nasce l' equazione della traiettoria parabolica $y^2=4hx$.

4°. Via de' gravi proietti in un mezzo resistente. Il ramo discendente della traiettoria tende a divenir verticale; luogo del mobile ad ogn' istante; altezza ed ampiezza del tiro; assintoto verticale. Caso in cui l' angolo di elevazione è piccolissimo.

175. *Problema I.* Un grave essendo dal punto O tirato nella direzione OT colla velocità c in un mezzo resistente (*fig.* 48), si domanda la traiettoria, e l' altezza ed ampiezza del tiro.

Soluzione. Nel punto O e nel piano verticale che contiene OT siano coordinati gli assi Ox, Oy, il primo orizzontale, ed il secondo verticale e diretto all' insù. Sia θ l'angolo xOT di elevazione del tiro; $c\cos.\theta$, $c\,sen.\theta$ saranno i valori iniziali delle due velocità $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ond' è animato il proietto nel senso orizzontale e verticale. Sia h l' altezza dovuta alla velocità c, talchè si abbia $h = \frac{c^2}{2g}$. Infine sia gR la resistenza del mezzo la quale, facendo ostacolo in senso opposto alla direzione del moto ds, avrà le componenti espresse per

$$-gR\frac{dx}{ds}, \; -gR\frac{dy}{ds}.$$

Ciò posto, il proietto sarà sollecitato ne' due sensi orizzontale e verticale dalle forze:

$$P = -gR\frac{dx}{ds}, \quad Q = -g - gR\frac{dy}{ds};$$

e le due equazioni generali del moto

$$d\frac{dx}{dt} - Pdt = 0, \quad d\frac{dy}{dt} - Qdt = 0,$$

prenderanno la forma

$$(1) \qquad \begin{cases} d\,\dfrac{dx}{dt} + gR\,\dfrac{dx}{ds}.dt = 0\,, \\[2ex] d\,\dfrac{dy}{dt} + gR\,\dfrac{dy}{ds}.dt + gdt = 0. \end{cases}$$

E poichè l'ordinata y di ogni punto della traiettoria è funzione della corrispondente ascissa x, sarà

$$dy = pdx\,,$$

donde $\frac{dy}{dt} = p\,\frac{dx}{dt}$, e quindi

$$d\,\frac{dy}{dt} = pd\frac{dx}{dt} + dp\,\frac{dx}{dt}\,.$$

Per quest' espressioni di dy e di $d\frac{dy}{dt}$, la seconda delle (1) si cangia in

$$p\left(d\frac{dx}{dt} + gR\frac{dx}{ds}\,dt\right) + dp\,\frac{dx}{dt} + gdt = 0\,,$$

mercè della quale le (1) si riducono alle seguenti

$$(1)' \qquad \begin{cases} d\,\dfrac{dx}{dt} + gR\,\dfrac{dx}{ds}\,dt = 0\,, \\[2ex] dp\dfrac{dx}{dt} + gdt = 0\,. \end{cases}$$

Adottiamo adesso l' ipotesi che la resistenza gR sia proporzionale al quadrato della velocità $u = \frac{ds}{dt}$, cioè poniamo

$$gR = g(ku)^2 = g\left(k\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

e per abbreviare si faccia

$$n = 2gk^2\,;\quad \text{sarà}\quad gR = \frac{n}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 .$$

Le (1)' equivarranno alle

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} d\,\frac{dx}{dt} &= -\,\frac{n}{2}\,ds.\,\frac{dx}{dt}\,,\\ \frac{dp}{dx} &= -\,g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 . \end{aligned}\right.$$

Cerchiamo d' integrare successivamente ciascuna di quest' equazioni.

Dalla prima si ricava

$$-\,\frac{n}{2}\,ds = d\frac{dx}{dt} : \frac{dx}{dt} = d.log.\frac{dx}{dt}\,,$$

ed integrando così che ad $s=0$ corrisponda $\frac{dx}{dt} = c\cos.\theta$, si ottiene

$$-\,\frac{n}{2}\,s = log.\,\frac{dx}{dt} - log.c\cos.\theta = log.\left(\frac{dx}{dt} : c\cos.\theta\right),$$

donde, passando dal logaritmo al numero,

$$\frac{dx}{dt} = c\cos.\theta.e^{-\frac{ns}{2}}\,,\quad \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{e^{ns}}{2gh\cos^2.\theta}\,,$$

essendo $c^2 = 2gh$.

Da questo valore di $\frac{dx}{dt}$ apparisce, che la *velocità orizzontale del proietto* diminuisce continuamente al crescer dello spazio s percorso, e che alla fine dee convergere verso lo zero. E ne conseguita:

1°. Che il moto del proietto sul ramo discendente della traiettoria tenderà di più in più a divenir *verticale*, e per conseguente *uniforme* (160) ; 2°. E che però cotesto ramo discendente avrà un *assintoto verticale*.

Per integrare la $\frac{dp}{dx} = -g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$, sostituiamo in essa il valore di $\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$ trovato qui sopra : avremo

(4) $$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{ns}}{2h\cos^2.\theta},$$

la quale, moltiplicata per l' identità $dx\sqrt{(1+p^2)} = ds$, diventa

(5) $$dp\sqrt{(1+p^2)} = -\frac{e^{ns}.nds}{2nh\cos^2.\theta}.$$

L' integrazione per parti dà

$$\int dp\sqrt{(1+p^2)} = p\sqrt{(1+p^2)} - \int\frac{p^2dp}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$= p\sqrt{(1+p^2)} - \int\frac{(1+p^2)dp}{\sqrt{(1+p^2)}} + \int\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)}},$$

donde

$$2\int dp\sqrt{(1+p^2)} = p\sqrt{(1+p^2)} + \int\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)}};$$

e d'altra parte si ha (*App.* 74)

$$\int\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)}} = \log.[p+\sqrt{(1+p^2)}].$$

Così dalla (5) integrata , mutato il segno , nasce

(6) $$C - p\sqrt{(1+p^2)} - \log.[p+\sqrt{(1+p^2)}] = \frac{e^{ns}}{nh\cos^2.\theta},$$

dove C è la costante dell' integrazione.

Se poniamo per abbreviare

$$P = p\sqrt{(1+p^2)} + \log.[p + \sqrt{(1+p^2)}\,],$$

l' equazione *(6)* assumerà le forme più semplici

$$(6)' \qquad e^{ns} = nh(C - P)\cos^2.\theta, \quad e^{-ns} = \frac{1}{nh(C-P)\cos^2.\theta},$$

e la (4), eliminando s, diverrà

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{n}{2}(C-P) = -gk^2(C-P),$$

donde

$$gk^2dx = \frac{-dp}{C-P} = -dp(C-P)^{-1}.$$

Se a questa relazione tra x e p aggiungiamo le relazioni

$$dy = pdx, \quad \frac{dp}{dx} = -g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2, \quad \text{ossia} \quad gdt^2 = -dxdp,$$

otterremo le quantità t, x, y, espresse tutte in funzione di p nelle formole:

$$(A) \qquad \begin{cases} gkdt = -dp(C-P)^{-\frac{1}{2}}, \\ gk^2dx = -dp(C-P)^{-1}, \\ gk^2dy = -pdp(C-P)^{-1}. \end{cases}$$

Per determinar la costante C, denotiamo per p_0, P_0, ciò che diventano le quantità p, P all' origine O del moto, quando si ha $s = 0$. Il valore di C si dedurrà dalla formola (6)'

$$e^{ns} = nh(C-P)\cos^2.\theta,$$

ponendovi $s = 0$, $P = P_0$; e si avrà

$$C = P_0 + \frac{1}{nh\cos^2.\theta} .$$

La quantità

$$p = \frac{dy}{dx} = tang.(xs) ,$$

rappresentando nel punto (x, y) la tangente dell'angolo (xs) che la direzione della traiettoria fa coll' orizzonte, comincia col valore

$$p_0 = tan.\theta ;$$

poi scema continuamente insieme coll' angolo (xs) nel ramo ascendente della traiettoria (*fig.* 48) ; svanisce alla sommità ; ed appresso, nel ramo discendente, si tramuta in negativa e ha per limite $tan.(-90^\circ) = -\infty$.

L' equazioni (A) contengono la soluzione del problema. Imperocchè per mezzo d' integrazioni approssimate conducono a scoprire, ad ogni istante del tempo t, dapprima il valore di p, e quindi il luogo (x, y) del proietto e la sua velocità $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. Se ne prendiamo gl' integrali definiti tra i limiti di $p = p_0$, $p = 0$, si avranno le coordinate del vertice della traiettoria sotto la forma

$$x = \frac{1}{gk^2} \int_0^{p_0} dp\,(C - P)^{-1} , \quad y = \frac{1}{gk^2} \int_0^{p_0} pdp(C - P)^{-1} .$$

Per avere l' ampiezza a del tiro convien cercare primieramente qual sia il valore di p nel punto dove il ramo discendente taglia l'asse x e dov' è $y = 0$. Chiamato p_1 questo valore, esso si dovrà dedurre dall' equazione trascendente

$$\int_{-p_1}^{p_0} pdp(C - P)^{-1} = 0 .$$

e poscia si avrà

$$a = \frac{1}{gk^2} \int_{-p_1}^{p_0} dp(C - P)^{-1} .$$

Finalmente l' ascissa relativa al punto, ove l' asse x è tagliato dall' assintoto verticale, sarà

$$x = \frac{1}{gk^2} \int_{-\infty}^{p_0} dp(C - P)^{-1} .$$

Scolio. Si dimostra pur facilmente che il ramo ascendente, ove s' intenda prolungato indefinitamente al di là dell'origine O, ha un assintoto rettilineo inclinato all' orizzonte.

Problema II. Determinare la traiettoria de' proietti ne' mezzi resistenti quando l'angolo θ di elevazione è piccolissimo.

Soluzione. In questo caso si può ottenere, con approssimazione sufficiente, l'equazione in x, y di quella parte della traiettoria che è situata al di sopra di Ox. Infatti, per tutta questa parte, la direzione della traiettoria essendo in ogni punto quasi orizzontale, la quantità p è piccolissima, e si ha prossimamente

$$ds = dx , \quad \text{ed} \quad s = x ;$$

con che l' equazione (4) si muta nella seguente :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-e^{nx}}{2h \cos^2 . \theta} .$$

Integrando due volte di seguito, e determinando gl' integrali così che ad $x = 0$, corrisponda $y = 0$, e $\frac{dy}{dx} = tan. \theta$, si trova dapprima

$$p = \frac{dy}{dx} = tan.\theta + \frac{1 - e^{nx}}{2nh\,cos^2.\theta}\;;$$

e poscia

$$y = x\,tan.\theta + \frac{1 + nx - e^{nx}}{2n^2h\,cos^2.\theta}\;.$$

Si avranno le coordinate del vertice della traiettoria ponendo $p = 0$; e l' ampiezza a del tiro ponendo $y = 0$.

Inoltre dall' equazione $gdt^2 = - dxdp$, e dal valor precedente di $\frac{dp}{dx}$, si ricava

$$dt = \frac{e^{\frac{nx}{2}}dx}{\sqrt{2gh}\,cos.\theta}\;,\quad \text{e quindi}\quad t = \frac{2(e^{\frac{nx}{2}} - 1)}{\sqrt{2gh}\,n\,cos.\theta}\;.$$

CAPO III.

Del moto sopra una data superficie e sopra una data curva.

1. *Questo moto si può considerar come libero se alla superficie data s'intende sostituita una forza eguale ed opposta alla pressione. La pressione non altera la forza tangenziale* $\frac{du}{dt}$. *Valore della velocità u nel moto di un grave. Se il moto è uniforme, la traiettoria è una linea geodesica. La velocità u e la curvatura della traiettoria cessano d' influire sulla pressione contro la superficie, quando la superficie è piana. Equazioni relative al moto per una data curva piana.*

176. Nel moto sopra una data superficie, la pressione k del mobile non può esser diretta che secondo la perpendicolare alla stessa superficie : perchè se fosse obliqua potrebbe risolversi in due l' una normale e l' altra tangenziale, e quest' ultima non farebbe pressione, il che è contro l' ipotesi.

Se la superficie, sopra cui si fa il moto, è rappresentata dall' equazione $N(x, y, z) = 0$, la direzione della pressione k nel punto (x, y, z) sarà rappresentata dall' equazioni

$$cos.(xn) = \frac{1}{n}\frac{dN}{dx}, \; cos.(yn) = \frac{1}{n}\frac{dN}{dy}, \; cos.(zn) = \frac{1}{n}\frac{dN}{dz},$$

essendo

$$n = \sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dz}\right)^2\right]}.$$

Infatti sappiamo (*Append.* 61) che, se nel punto (x, y, z) della superficie N si conduce una retta n che cada sugli assi Ox, Oy, Oz

colle proiezioni $\frac{dN}{dx}$, $\frac{dN}{dy}$, $\frac{dN}{dz}$, questa retta dee riuscire perpendicolare alla superficie, ed è poi in nostro arbitrio di fare in modo (cangiando all' uopo il segno dell' equazione $N = 0$) che la retta n sia diretta nel medesimo verso che la pressione k.

177. *Teor.* Un punto M che si muova sopra una data superficie può considerarsi come *libero nello spazio* sotto l'azione di una forza F composta di due altre forze $(f, -k)$, delle quali la prima f è la forza reale che sollecita il mobile, e la seconda $-k$ è uguale ed opposta alla pressione del mobile contro la superficie.

Dim. Per intender ciò, basta osservare che il moto del punto M si rimarrà il medesimo se, rimossa la sottoposta superficie, si applichi al punto in ogni istante dt una forza eguale e contraria alla pressione k (si fa astrazione dall'attrito).

Ciò posto : 1°. Se le forze si decompongano ciascuna in tre parallele agli assi, l'equazioni generali del moto sopra la superficie $N = 0$ saranno

$$P - k\cos.(xn) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Q - k\cos.(yn) = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad R - k\cos.(zn) = \frac{d^2z}{dt^2};$$

2°. E se le forze si decompongano ciascuna in due secondo le direzioni tangenziale e centripeta [ove si rifletta che l'angolo (sn) è retto, e $k\cos.(sn) = 0$] si avranno le due equazioni

$$f\cos.(fs) = \frac{du}{dt}, \qquad f\cos.(fr) - k\cos.(nr) = \frac{u^2}{r},$$

nelle quali r denota il raggio osculatore, e gli angoli (sf), (fr), (nr) sono dati dalle formole

$$fds\cos.(sf) = Pdx + Qdy + Rdz,$$

$$f\frac{ds}{r}\cos.(fr) = Pd\frac{dx}{ds} + Qd\frac{dy}{ds} + Rd\frac{dz}{ds},$$

$$n\frac{ds}{r}\cos.(nr) = \frac{dN}{dx}d\frac{dx}{ds} + \frac{dN}{dy}d\frac{dy}{ds} + \frac{dN}{dz}d\frac{dz}{ds},$$

tutte espressioni di uno stesso teorema noto (*App.* 11).

178. *Coroll. I.* Dall' equazione $f\cos.(sf) = \frac{du}{dt}$ si deduce che:

« Nel moto di un punto per una data superficie, la pressione k non altera la forza tangenziale. » Quest' equazione moltiplicata per ds diviene

$$f\,ds\cos.(sf) = du\frac{ds}{dt} = u\,du = d\frac{u^2}{2},$$

dove $ds\cos.(sf)$ rappresenta il cammino che nell' istante dt ha percorso il mobile secondo la direzione della forza f. Se si denota per dh questo cammino, onde si abbia

$$dh = ds\cos(sf),$$

sarà

$$d\frac{u^2}{2} = f\,dh, \quad \text{ed} \quad \frac{u^2}{2} = \int f\,dh.$$

Così, se la forza f sia quella della gravità $= \pm g$, avremo

$$\frac{u^2}{2} = \pm g\int dh,$$

valendo il segno superiore quando il mobile discende, e l' inferiore quando sale. Di qui la seguente notabile proposizione:

« Quando il mobile è sollecitato dalla sola gravità, per qualunque linea esso discenda o risalga, avrà in ciascun punto quella velocità medesima che avrebbe, se fosse disceso o risalito verticalmente per uguale altezza. »

179. *Coroll. II.* Perchè il moto riesca uniforme, si richiede evidentemente che la forza motrice f agisca sempre in direzion perpendicolare alla superficie, e che però si abbia

$$\frac{du}{dt} = 0, \qquad F = f - k = \frac{u^2}{r};$$

e poichè la direzione della forza F si deve sempre trovare nel piano osculatore della traiettoria, questo piano sarà da per tutto perpendicolare alla stessa superficie, e per conseguenza la traiettoria sarà una *linea geodesica* (110). Dunque:

« Se il moto per una superficie curva è uniforme, la traiettoria sarà una linea geodesica, e l'azion della forza motrice sarà o nulla o sempre normale alla superficie: e viceversa. »

180. La formola generale che dà la pressione k, si ottiene proiettando sulla retta n, normale alla superficie N, i due sistemi equivalenti di forze $(f, -k)$, $\left(\frac{du}{dt}, \frac{u^2}{r}\right)$; con che si ha

$$k = f\cos.(fn) - \frac{u^2}{r}\cos.(rn),$$

equazione in cui già conosciamo l'espressione di $\cos.(rn)$, mentre l'espressione di $\cos.(fn)$ si avrà dalla

$$fn\cos.(fn) = P\frac{dN}{dx} + Q\frac{dN}{dy} + R\frac{dN}{dz}.$$

Dal valore di k apparisce che: « Quando il mobile corre per una superficie curva, la pressione k varia da punto a punto, non solo con que la componente della forza f che è normale alla superficie, ma eziandio colla velocità u, e colla curvatura. »

181. *Coroll.* Se la superficie N è un piano, sarà

$$k = f\cos.(fn), \quad \text{ed} \quad F = f\,sen.(fn),$$

perchè, essendo la traiettoria in questo piano, l'angolo (rn) riesce di $90°$, e la forza F composta delle tre $[f\cos.(fn),\ f\,sen.(fn), -k]$ si riduce evidentemente alla sola $f\,sen.(fn)$. Dunque:

« Allorchè il moto avviene sopra un piano, la pressione è sempre uguale a quella componente della forza motrice, che è normale al piano, ed il mobile cammina come se fosse libero sotto l'azione dell' altra componente parallela al piano. »

182. Supponiamo che la superficie N si riduca alla curva piana $N(x, y) = 0$, e che la pressione k sia *positiva* quando si fa sul *convesso* della curva, ossia quando è diretta come il raggio osculatore r verso il centro di curvatura, onde riesca

$$\cos.(fk) = \cos.(fn) = \cos.(fr), \quad \cos.(nr) = 1.$$

Infine supponiamo che l'angolo retto (sn) sia *positivo* andando dalla direzione s della traiettoria al raggio osculatore r. Ciò posto:

1°. L'equazioni del moto sulla curva piana saranno:

$$P - k\cos.(xn) = \frac{d^2x}{dt^2}\,,\quad Q - k\,sen.(xn) = \frac{d^2y}{dt^2}\,,$$

dove

$$\cos.(xn) = -\,sen.(xs) = \frac{1}{n}\frac{dN}{dx} = \frac{r}{ds}\,d\frac{dx}{ds} = -\frac{dy}{ds}\,,$$

$$sen.(xn) = \cos.(xs) = \frac{1}{n}\frac{dN}{dy} = \frac{r}{ds}\,d\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{ds}\,;$$

2°. La forza tangenziale d'inerzia sarà

$$\frac{du}{dt} = f\cos.\,(sf) = P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} = \frac{1}{n}\left(P\frac{dN}{dy} - Q\frac{dN}{dx}\right);$$

3°. E la pressione k sarà

$$k = f\cos.(fn) - \frac{u^2}{r} = \frac{1}{n}\left(P\frac{dN}{dx} + Q\frac{dN}{dy}\right) - \frac{u^2}{r}\,.$$

---

2. *Discesa de' gravi pe' piani inclinati, e sua relazione colla discesa verticale.*

183. *Teor.* Ove si faccia astrazione dalle resistenze, il moto di un grave sopra un piano inclinato all' orizzonte si compie secondo le stesse leggi che nello spazio: « Se *rettilineo*, il moto è equabilmente variato; se *curvilineo*, il moto è parabolico, composto di due moti rettilinei, l'uno uniforme e l'altro equabilmente variato. »

Dim. Pel punto O donde s'inizia il moto del grave, s' intendano condotti nel piano inclinato (*fig.* 49) due assi: Oy orizzontale, ed Ox perpendicolare ad Oy e diretto in basso. Inoltre la gravità g del mobile si concepisca decomposta in due g', k, l'una parallela e l'altra perpendicolare al piano, onde sia

$$g' = g \cos.(xg), \quad k = g \operatorname{sen.}(xg).$$

La prima g' di queste forze si adopera a spingere il grave lungo il piano, e a farlo discendere per la linea retta Ox perpendicolare alla comun sezione del piano coll'orizzonte; e la seconda forza k esprime la pression costante del mobile contro il piano (181). L'equazioni del moto saranno

$$d\frac{dx}{dt} = \pm g'\,dt, \qquad d\frac{dy}{dt} = 0,$$

per le quali si rende manifesta la verità del teorema.

Coroll. I. Integrando due volte l' equazione $d\dfrac{dx}{dt} = g'dt$, così che a $t = 0$ corrisponda $u = \dfrac{dx}{dt} = c$, ed $x = 0$, raccogliesi

$$u = g't, \qquad x = \frac{g'}{2}t^2 = \frac{u^2}{2g'},$$

vale a dire: « Un grave posato sopra un piano inclinato discende, con moto equabilmente accelerato, per la linea retta perpendicolare alla comun sezione del piano coll'orizzonte. »

Coroll. II. Siano v ed u le velocità acquistate, ed s ed x gli spazii percorsi in egual tempo t da due gravi, cadenti l'uno per la verticale OB è l'altro pel piano inclinato OA (*fig.* 49). OA sia la *lunghezza* del piano, OB *l'altezza*, AB la *base*, e C il piede della perpendicolare condotta da B sul piano OA. Sarà

$$\begin{cases} v = gt, \\ u = g't, \end{cases} \qquad \begin{cases} s = \frac{1}{2}gt^2 \\ x = \frac{1}{2}g't^2; \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{v}{u}=\frac{s}{x}=\frac{g}{g'}=\frac{1}{cos.(xg)}=\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OC};$$

vale a dire: » Le velocità acquistate e gli spazii percorsi in egual tempo da due gravi, cadenti l'uno per la verticale OB e l'altro pel piano inclinato OA, sono tra loro come la lunghezza OA del piano all'altezza OB, cosicchè mentre il primo discende per tutta l'altezza OB, l'altro arriva al punto C ove cade la perpendicolare condotta da B sul piano OB. »

Coroll. III. Tutte le corde OC, OC' (*fig.* 50) di un circolo che partono dall'una dell'estremità di un diametro verticale OB, sono percorse nello stesso tempo; nel tempo in cui il grave, liberamente cadendo, percorrerebbe quel diametro.

---

3. *Discesa de'gravi per la cicloide: questa curva sola è tautocrona, e sola è brachistocrona.*

184. Nella cicloide AOB dell' equazione

$$s^2 = 2ax,$$

l' asse Ox sia verticale, l' origine O delle coordinate x, y e dell' arco s sia il punto infimo della curva, ed $OD = \frac{1}{2}a$ il diametro del circolo generatore. Le direzioni della tangente e del raggio osculatore r nel punto (x, y), scendendo da A in O, si avranno dall' equazioni

$$\begin{cases} cos.(xs) = -\dfrac{dx}{ds} = -\sqrt{\dfrac{2x}{a}}, \\ sen.(xs) = -\dfrac{dy}{ds} = -\sqrt{\left(1-\dfrac{2x}{a}\right)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} cos.(xr) = -sen.(xs) = \sqrt{\left(1-\dfrac{2x}{a}\right)} = \dfrac{r}{ds}d\dfrac{dx}{ds}, \\ sen.(xr) = cos.(xs) = -\sqrt{\dfrac{2x}{a}}; \end{cases}$$

ed

$$r = \sqrt{(a^2-2ax)} = \sqrt{(a^2-s^2)}.$$

185. *Quesito.* Dal punto $(x = h,\ y = \beta)$ della cicloide AOB (*fig.* 51) essendo un grave abbandonato a sè stesso, e scendendo pel concavo di essa curva verso il punto infimo O, si domanda la velocità u del mobile in qualunque punto $M(x, y)$, la sua pressione k contro la curva, ed il tempo t corrispondente.

Risposta.

$$u = \sqrt{2g(h-x)},\quad k = -g\frac{a+2h-4x}{\sqrt{(a^2-2ax)}},\quad x = h\cos^2.t\sqrt{\frac{g}{a}}\ .$$

Soluzione. 1°. Poichè la velocità che acquista il grave nel passare dal punto (h, β) al punto (x, y), è quella medesima che avrebbe acquistato se fosse sceso verticalmente per eguale altezza $h - x$, così avremo

$$u^2 = 2g(h-x)\ ,\quad \text{ed}\quad u = \sqrt{2g(h-x)}\ .$$

2°. Trovata la velocità u, la pressione k si deduce dalla formola generale

$$k = g\cos.(gr) - \frac{u^2}{r}\ ,$$

dove

$$\cos.(gr) = -\cos.(xr) = -\sqrt{\left(1 - \frac{2x}{a}\right)}\ ;\quad r = \sqrt{(a^2 - 2ax)}.$$

Fatte le sostituzioni e riduzioni, risulta

$$k = -g\,\frac{a + 2h - 4x}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}\ .$$

Essendo in ogni caso $a > 2x$, $h > x$, e però $a + 2h > 4x$, la pressione k (siccome sempre negativa) non cessa mai di farsi dal concavo al convesso della curva (182).

3°. Il tempo t della discesa dal punto (h, β) al punto (x, y) si ricava dall' equazione $dt = -\frac{ds}{u}$, sostituendovi

$$ds = dx\sqrt{\frac{a}{2x}}, \qquad \text{ed} \quad u = \sqrt{2g(h-x)}.$$

E si ha

$$dt = \sqrt{\frac{a}{4g}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(hx - x^2)}};$$

ossia

$$2dt\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{-dx}{\sqrt{\left[\frac{h^2}{4} - \left(x - \frac{h}{2}\right)^2\right]}}.$$

Se poniamo

$$x - \frac{h}{2} = \frac{h}{2}z, \quad \text{donde} \quad z = \frac{2x-h}{h}, \quad dx = \frac{h}{2}dz,$$

si avrà

$$2dt\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{-dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = d.arc.cos.z;$$

ed integrando così, che per $t = 0$ risulti $x = h$, otterremo

$$z = \frac{2x-h}{h} = cos.\left(2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

donde

$$x = \frac{h}{2}\left(1 + cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) = h\,cos^2.\,t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Coroll. Facendo $x = 0$, si avrà il tempo totale della discesa dal punto (h, β) fino al punto infimo O $(x = 0, \quad y = 0)$, e sarà $cos.\,t\sqrt{\frac{g}{a}} = 0 = cos.\frac{\pi}{2}$, e quindi

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Questo valore di t, essendo affatto indipendente dal sito (h, β) di partenza, fa palese la singolarissima proprietà della cicloide, che da qualunque punto della sua circonferenza si abbandoni il grave, esso arriva al punto infimo nello stesso tempo. Per questa proprietà la cicloide si dice *tautocrona*.

Ed è da notare che arrivato il grave al punto infimo colla velocità dovuta all'altezza della discesa, salirà in appresso in tempo eguale per un arco eguale, e poi tornerà a discendere e a risalire; ed, in questo moto perpetuo di oscillazione, passerà sempre con eguali velocità ne' punti situati ad egual livello.

186. *Teor*. Non avvi altra curva piana che la cicloide, a cui appartenga la proprietà di esser *tautocrona*.

Dim. Cerchiamo qual sia la curva s per la quale, scendendo un grave dal punto (h, β) al punto O $(x = 0,\ (y = 0)$, il tempo t della discesa sia affatto indipendente dall'altezza h.

Qualunque possa esser questa linea, la sua lunghezza s dee certamente crescere e scemare coll' ascissa verticale x; e però essere una funzione di x. Si faccia dunque

$$s = s(x)\ ,$$

e nell' equazione $dt = \dfrac{-ds}{u} = \dfrac{-ds}{\sqrt{2g(h-x)}}$ si sostituisca

$$ds = s'(x)\, dx\ ,$$

adoperando con Lagrange le notazioni

$$s'(x) = \frac{ds}{dx}\ ,\quad s''(x) = \frac{d^2s}{dx^2}\ .$$

Il tempo t della discesa dal punto (h, β) al punto $(0, 0)$ sarà espresso dalla formola

$$t = -\int_h^0 \frac{s'(x)dx}{\sqrt{2g(h-x)}} = \int_0^h \frac{s'(x)dx}{\sqrt{2g(h-x)}}\ ,$$

oppure, se si fa $x=hz$ (dove ad $x=h$ corrisponde $z=1$), dalla formola

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1\frac{dz\,s'(hz)\sqrt{h}}{\sqrt{(1-z^2)}}\,.$$

E questa somministra

$$\frac{dt}{dh}=\frac{1}{\sqrt{8gh}}\int_0^1\frac{[2hzs''(hz)+s'(hz)]dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8gh}}\int_0^1\frac{\varphi(hz)dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\frac{1}{2h\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{(h-x)}}\,,$$

ove per abbreviare si è fatto

$$\varphi(x)=2xs''(x)+s'(x)\,.$$

Ora, affinchè il tempo t non dipenda affatto dall'altezza h della discesa, si richiede che la sua derivata presa rispetto ad h risulti uguale a zero, cioè si richiede che sia $\frac{dt}{dh}=0$, e però

$$\int_0^h\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{(h-x)}}=0\,.$$

Ma quest' integrale definito non può esser nullo per qualsivoglia valore di h, ove non sia $\varphi(x)=0$, perchè altrimenti potremmo prender h così piccolo che, nel variare che fa x tra i limiti 0 ed h, la funzione $\varphi(x)$ serbasse il medesimo segno; ed allora cotesto integrale, componendosi di elementi tutti del medesimo segno, non potrebbe riuscire $=0$.

L' equazione adunque della curva cercata si dee ricavare da $\varphi(x)=0$, ossia da

$$0=2xs''(x)+s'(x)=2x\frac{d^2s}{dx^2}+\frac{ds}{dx}\,.$$

Or da qui si raccoglie successivamente

$$d\frac{ds}{dx}:\frac{ds}{dx}=-\frac{dx}{2x};$$

$$d.log.\frac{ds}{dx}=d.log.(x)^{-\frac{1}{2}}=d.log.\left(\frac{a}{2x}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$ds=dx\sqrt{\frac{a}{2x}},$$

dove $\frac{a}{2}$ si può riguardare come la costante dell' integrazione. Integrando di nuovo così che ad $x=0$ corrisponda $s=0$, nasce

$$s=\sqrt{2ax},$$

equazion della cicloide di cui il punto infimo è nell'origine O delle coordinate.

La proprietà di esser tautocrona non appartiene adunque ad altra curva piana che alla cicloide; e, quanto alle curve a doppia curvatura, appartiene a quelle che si formerebbero piegando la cicloide sopra un cilindro verticale, sebbene non siano le sole.

187. *Probl.* Trovare la linea OMA (*fig.* 52) per la quale un grave possa scendere nel tempo il più breve possibile da un punto dato O $(0,\ 0)$ ad un altro punto pur dato A $(\alpha,\ \beta)$.

Soluz. Supposto l'asse Ox verticale e diretto all' ingiù, un grave disceso da O al punto $M(x,\ y)$ avrà acquistato la velocità $u=\sqrt{2gx}$, e l' elemento del tempo sarà

$$dt=\frac{ds}{u}=\frac{dx\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}}, \quad \text{dove} \quad p=\frac{dy}{dx}.$$

Quindi il tempo t della discesa da O in A $(\alpha,\ \beta)$, si esprimerà per

$$t=\int_0^\alpha \frac{dx\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}}.$$

Facciamo variare di un tratto infinitesimo la forma della linea OMA, cosicchè all'ascissa $OP=x$ corrisponda, non più l'ordinata $PM=y$, ma l'ordinata $PM'=y+\delta y$, ed il tempo della discesa per la nuova curva $OM'A$ divenga $t+\delta t$. Dalla teoria de' massimi e de' minimi si raccoglie che, se il tempo t è *un minimo* nella discesa per la linea OMA, operando un cambiamento infinitesimo nella forma di questa linea, la variazione di t sarà un infinitesimo di ordine superiore al primo, e che in conseguenza può farsi $\delta t=0$.

Si avrà dunque, differenziando rispetto alla sola y ed indicando la nuova differenziazione col simbolo δ,

$$0=\delta\int_0^\alpha \frac{dx\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}}=\int_0^\alpha \frac{dx\,\delta\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}}=\int_0^\alpha \frac{dx\,p\delta p}{\sqrt{2gx(1+p^2)}}$$

$$=\int_0^\alpha \frac{p\,\delta dy}{\sqrt{2gx(1+p^2)}}=\int_0^\alpha \frac{p\,d\delta y}{\sqrt{2gx(1+p^2)}},$$

essendo $d(\delta y)=\delta(y+dy)-\delta y=\delta dy$, ossia $\delta dy=d\delta y$.

Integriamo per parti rispetto al fattore $d\delta y$; si ottiene

$$0=\left[\frac{p\,\delta y}{\sqrt{2gx(1+p^2)}}\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha d\left(\frac{p}{\sqrt{2gx(1+p^2)}}\right)\delta y.$$

La prima parte di quest' espressione equivale a zero, rappresentando la differenza de' valori che essa prende ne' punti O ed A, ed in questi due punti (siccome fissi) non potendo variare l' ordinata y, si ha $\delta y=0$. Rimane adunque

$$\int_0^\alpha d\left(\frac{p}{\sqrt{2gx(1+p^2)}}\right).\delta y=0.$$

Ma quest' integrale definito non può riuscir nullo, qualunque sia la variazione δy di ogni ordinata y intermedia tra O ed A, salvochè non sia nullo il coefficiente di δy. Si avrà pertanto l' equazione

$$d\left(\frac{p}{\sqrt{2gx(1+p^2)}}\right)=0,$$

di cui l' integrale si può scrivere come segue:

$$\frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2R}},$$

riguardando la quantità R come la costante incognita dell' integrazione.

Quest' equazione, ove si risolva rispetto a p, somministra dapprima $2Rp^2=x(1+p^2)$, e poscia

$$(a) \qquad p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x}{2R-x}},$$

equazione di una cicloide che ha per base la retta orizzontale Oy condotta dal più elevato de' due punti O,A nel loro piano verticale.

È adunque provato che un grave, se si vuol che discenda da un punto ad un altro nel tempo minimo, si dee far cadere per un arco cicloidale.

Se si voglia il raggio incognito R del cerchio generatore della cicloide (a), si descriva sulla base Oy, dalla parte inferiore e con un cerchio di raggio arbitrario R_1, una cicloide ausiliare che taglierà la retta OA in qualche punto B, cosicchè si farà noto il rapporto

$$\frac{OA}{OB}=n.$$

Il raggio cercato sarà $R=nR_1$. Infatti essendo α, β le coordinate del punto A, quelle del punto B saranno $x_1=\frac{\alpha}{n}$, $y_1=\frac{\beta}{n}$, avendosi

$$n=\frac{OA}{OB}=\frac{\alpha}{x_1}=\frac{\beta}{y_1}.$$

Ora, se nell' equazion della cicloide or costruita, cioè se nella

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\sqrt{\frac{x_1}{2R_1-x_1}},$$

si pone $x_1=\frac{x}{n}$, $y_1=\frac{y}{n}$, nascerà $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x}{2nR_1-x}}$; equazione di una seconda cicloide la quale passerà certamente pel punto $\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n}\right)$, ossia B.

Scolio. La cicloide, per la singolar proprietà di offrire ai gravi la linea della più breve discesa, si dice *brachistocrona*. Nel dimostrare questa proprietà si è supposto che la discesa debba farsi nel *piano verticale* determinato dai due punti O, A. Per provare che questa supposizione è conforme alla verità, s' immagini condotto pel punto O un terzo asse Oz perpendicolare al piano verticale (Ox, Oy) già considerato: l' espression più generale dell' elemento ds della linea cercata sarà

$$ds=dx\sqrt{(1+p^2+q^2)},\ \text{dove}\ p=\frac{dy}{dx},\ q=\frac{dz}{dx}.$$

Ora, qualunque sia la natura della linea, affinchè sia percorsa nel tempo minimo, si troverà (rinnovando il ragionamento fatto qui sopra) l' equazione:

$$\int_0^\alpha d\left(\frac{p}{\sqrt{x(1+p^2+q^2)}}\right)\delta y+\int_0^\alpha d\left(\frac{q}{\sqrt{x(1+p^2+q^2)}}\right)\delta z=0,$$

che dovrà sussistere rimanendo indeterminate le due variazioni δy, δz. Quindi eguagliando a zero i coefficienti di δy, δz, ed integrandoli si ottiene

$$\frac{p}{\sqrt{x(1+p^2+q^2)}}=a,\quad \frac{q}{\sqrt{x(1+p^2+q^2)}}=b.$$

Se dalla 1ª. di quest' equazioni moltiplicata per q si sottrae la seconda moltiplicata per p, nasce

$$aq - bp = 0, \quad \text{ossia} \quad adz - bdy = 0\ ;$$

equazione di un piano verticale. La linea di cui si tratta è adunque contenuta in simile piano.

---

4. *Discesa de' gravi per archi circolari: relazione tra l' altezza della caduta e la velocità u, la pressione k, e il tempo t.*

Giova dapprima notare che l' equazione

$$y^2 = 2rx - x^2$$

del circolo, ove si differenzi e si abbia riguardo alla relazione $ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, dà nascita alle seguenti

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{y}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{y}{r}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{r-x}{r},$$

e che inoltre, se l' equazione

$$\frac{ds}{r} = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

s' integra in modo che alle ascisse $x = 0$, $x = 2r$, corrispondano gli archi $s = 0$, $s = r\pi$, risulta

$$\pi = \int_0^{2r} \frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(hx - x^2)}}\,.$$

188. *Probl. I.* Nel circolo dell'equazione $y^2 = 2rx - x^2$, essendo l' asse Ox un diametro verticale ed O il punto infimo (*fig.* 53), un grave è abbandonato a sè stesso dal punto $(x = h, \ y = \beta)$ e scende in basso per la periferia: quanta sarà nel punto $(x, \ y)$ la sua velocità u, e qualè e quanta la sua pressione k?

Risposta

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \sqrt{2g(h-x)}\,, \\ k &= -\frac{g}{r}(r + 2h - 3x) = \frac{g}{r}(3x - r - 2h)\,. \end{aligned} \right.$$

Dim. La prima formola è evidente per sè medesima, esprimendo che la velocità u del grave è sempre uguale a quella che è dovuta all' altezza verticale $(h - x)$ della sua discesa.

Quanto alla seconda formola, se si voglia vedere come ad essa riducasi la formola generale $k = g\cos.(gr) - \frac{u^2}{r}$, basta considerare che nel punto (x, y) la direzione del grave discendente è data dalle relazioni

$$\cos.(xs) = -\frac{dx}{ds}\,, \quad \mathrm{sen}.(xs) = -\frac{dy}{ds} = -\frac{r-x}{r}\,,$$

e che però si ha

$$\cos.(gr) = -\cos.(xr) = \mathrm{sen}.(xs) = -\frac{r-x}{r}\,,$$

e quindi

$$k = g\cos.(gr) - \frac{u^2}{r} = -\frac{g}{r}(r-x) - \frac{2g}{r}(h-x)$$

$$= -\frac{g}{r}(r + 2h - 3x)\,.$$

Da questa formola si rileva:

1°. Che al di sotto del diametro orizzontale AB (*fig.* 53), essendo $r + 2h > 3x$, *la pressione* k è sempre negativa, e però *è sempre diretta dal concavo al convesso dell' arco* (182).

2°. Che al di sopra del diametro AB potendosi fare

$$x = r + x', \quad h = r + h',$$

dove h' denota l' altezza del punto di partenza al di sopra di AB, sarà

$$k = \frac{g}{r} (3x' - 2h').$$

E ne segue che la pressione k, al di sopra del diametro orizzontale AB, comincerà ad agire dal convesso al concavo, ma la sua forza andrà continuamente scemando fino al punto in cui risulti

$$3x' - 2h' = 0, \quad \text{od} \quad x' = \frac{2}{3} h'.$$

Arrivato a questo punto, il grave fugge via per la tangente colla velocità dovuta all' altezza della discesa $\left(= \frac{1}{3} h' \right)$, descrivendo nello spazio una parabola.

Scolio. È da notare che le due formole (a) rappresentano la velocità e la pressione nel moto circolare, anche quando il grave entra in giro con una data velocità, purchè s' intenda accresciuta la quantità h dell' altezza dovuta a questa velocità iniziale. Così, se il grave M fosse connesso col centro C per mezzo di un raggio CM inflessibile ed inestendibile, e se fosse $h > 2r$, il moto circolare sarebbe continuo, e k rappresenterebbe la forza variabile onde il raggio CM sarebbe tratto (e talor premuto) dal grave M.

189. *Probl. II.* Scendendo un grave per un arco circolare dal punto (h, β) fino al punto infimo O, qual sarà il tempo t della discesa ?

Risposta.

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(hx - x^2)}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dim. Se nell'equazione $dt = \frac{ds}{u}$ si sostituisce

$$ds = \frac{-rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = -dx\sqrt{\frac{r}{2x}}\cdot\left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

ed $u = \sqrt{2g(h-x)}$, si ottiene

$$dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{-dx}{\sqrt{(hx - x^2)}}\cdot\left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

la quale, integrata così che a $t = 0$ corrisponda l'ascissa $x = h$, si muta subito nella proposta.

Coroll. I. Se l'altezza h della discesa è piccolissima rispetto al diametro $2r$, onde possa farsi $\left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1$, sarà

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(hx - x^2)}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

vale a dire: « Quando un grave oscilla per un arco circolare di un picciol numero di gradi, il tempo dell'oscillazione può ritenersi come indipendente dall'ampiezza dell'arco. »

Coroll. II. Il tempo t della discesa per un arco di qualsivoglia numero di gradi è dato dalla formola

$$(c)\quad t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \text{etc.}\right\}$$

Per dimostrarla, convien dapprima sviluppare il binomio $\left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$ secondo la serie Newtoniana

$$(1 - q)^{-\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}q\,T_1 + \frac{m+n}{2n}q\,T_2 + \frac{m+2n}{3n}q\,T_3 + \text{etc.},$$

dove T_1, T_2, T_3 etc. denotano i valori del primo termine, del secondo, del terzo etc. ($T_1 = 1$, $T_2 = \frac{m}{n} q T_1$ etc.), e si avrà

$$\left(1 - \frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2r} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2r}\right)^3 + \text{etc.}$$

Ciò posto, si vede che, fatto

$$B_n = \int_0^h \frac{x^n\, dx}{\sqrt{(hx - x^2)}},$$

l' equazione (b) si può scrivere nel modo seguente

$$(b)_1 \quad t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left\{B_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{B_1}{2r} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{B_2}{(2r)^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\, \frac{B_3}{(2r)^3} + \text{etc.}\right\}.$$

Rimane a trovare i valori di B_0, B_1 etc. A questo fine si osservi che la differenziazione dà

$$d.\left[x^n \sqrt{(hx - x^2)}\right] = \left[n x^{n-1} \sqrt{(hx - x^2)} + \frac{x^n (h - 2x)}{2\sqrt{(hx - x^2)}}\right] dx$$

$$= \frac{\left[(2n+1) h x^n - (2n+2) x^{n+1}\right] dx}{2\sqrt{(hx - x^2)}},$$

e che qui, integrando tra i limiti $x = 0$, $x = h$, l' integrale del primo membro riesce nullo, e l' integrale del secondo membro somministra

$$\int_0^h \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{(hx - x^2)}} = \frac{2n+1}{2n+2}\, h \int_0^h \frac{x^n dx}{\sqrt{(hx - x^2)}},$$

ossia

$$B_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\, h B_n.$$

Ora per $n=0$ si è trovato $\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(hx-x^2)}}=\pi$, ossia $B_0=\pi$.

Dunque se nella formola che precede si fa successivamente $n=0$, $=1$, $=2$, $=3$ etc., si avrà

$$B_1=\frac{1}{2}\pi h,\quad B_2=\frac{1.3}{2.4}\pi h^2,\quad B_3=\frac{1.3.5}{2.4.6}\pi h^3, \text{ etc.},$$

con che la $(b)_4$ si trasforma nella (c).

---

5. ***Pendolo semplice. Condizione dell' isocronismo delle oscillazioni; relazione tra la lunghezza del pendolo ed il tempo dell' oscillazione. Il pendolo è atto a manifestare e a misurare le variazioni della gravità.***

190. Si chiama *pendolo semplice* un punto materiale pesante M sospeso a un punto fisso C per mezzo di un filo flessibile, inestendibile ed imponderabile (*fig.* 51).

Il pendolo oscillerà per archi circolari se, rimosso dalla posizione verticale CO e supposto libero il filo CM, si abbandona all' azion della gravità; ed oscillerà per archi di una cicloide AOB se il filo CM si fa oscillare tra due lamine curvate a foggia delle due semicicloidi CA, CB, che costituiscono l'evoluta di essa cicloide.

Le leggi delle oscillazioni, sia per archi cicloidali, sia per archi circolari di un picciol numero di gradi, sono comprese nelle due seguenti proposizioni più sopra dimostrate, nelle quali la lettera a denota la lunghezza CM del pendolo.

Prop. I. Le oscillazioni per archi cicloidali di qualsivoglia ampiezza sono *isocrone*, e la durata di ciascuna oscillazione è $=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ (essendosi trovato che quella di una semi-oscillazione è $=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$).

Prop. II. Le oscillazioni per archi circolari di un picciol numero di gradi sono isocrone, qualunque siasi l'ampiezza dell'arco descritto, e sono *sincrone* a quelle di un pendolo cicloidale di egual lunghezza.

Coroll. Siano a ed a' le lunghezze di due pendoli, e t e t' le durate di una loro oscillazione per archi cicloidali, o per archi circolari di un picciol numero di gradi. Sarà

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\ ,\quad t' = \pi\sqrt{\frac{a'}{g}}\ ,\quad \text{donde}\quad \frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}}\ .$$

Inoltre siano n, n' i numeri delle oscillazioni fatte dai due pendoli nello stesso tempo T. Sarà $T = nt = n't'$, donde

$$n\sqrt{a} = n'\sqrt{a'}\ ,\quad \text{ed}\quad \frac{n}{n'} = \frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{a}}\ .$$

Dunque: « I tempi delle oscillazioni sono tra loro come le radici delle lunghezze de' pendoli; ed i numeri delle oscillazioni fatte nello stesso tempo sono inversamente come le radici delle stesse lunghezze. »

Scolio I. Dalla formola $t = \frac{T}{n} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ si ricava

$$g = a\left(\pi\frac{n}{T}\right)^2,$$

che può servire a determinare in un dato luogo l'intensità g della gravità, facendo ivi oscillare un pendolo di nota lunghezza a, e contando il numero n delle oscillazioni fatte in un dato tempo T.

Scolio II. In ciò che precede si è fatta astrazione dalla resistenza dell'aria. Ma l'esperienza ed il calcolo dimostrano che le oscillazioni nell'aria sebbene vadano successivamente restringendosi e divenendo alquanto men tarde, tuttavia, se l'ampiezza iniziale sia piccola, si mantengono sensibilmente isocrone tra loro, e quasi isocrone (od appena in ritardo) a quelle che farebbe lo stesso pendolo oscillando liberamente nel vuoto.

DINAMICA

SEZIONE II.

DEL MOTO DE' SISTEMI.

CAPO I.

Principio di unione fra la statica e la dinamica.

§. 1°. *Le leggi del moto de' sistemi si riconducono a quelle del loro equilibrio per mezzo del principio di reazione. Distinzione a farsi in questo principio secondochè le forze sono continue od istantanee. Pressioni e percussioni de' punti fissi. Urto de' corpi liberi.*

Le leggi del moto de' sistemi si riconducono a quelle del loro equilibrio per mezzo del seguente:

191. **Principio di reazion continua.** *Nel movimento di un sistema di punti materiali comunque collegati tra loro, le azioni delle forze continue sono ad ogn' istante contrabbilanciate dalle reazioni di essi punti, essendo queste reazioni eguali ed opposte alle corrispondenti forze d' inerzia.*

Dim. I punti materiali dm, dm', dm'', etc. componenti la massa m del sistema siano sotto l' azion continua di forze, quali sarebbero quelle della gravità, e che in generale esprimeremo per

$$fdm, \quad (fdm)', \quad (fdm)'', \quad \text{etc.}$$

Movendosi il sistema, ciascuno de' punti materiali, per esempio dm, riceverà ad ogn' istante dt una forza d' inerzia, composta delle due (164)

$$\frac{du}{dt}dm\,,\quad \frac{u^2}{r}dm\,,$$

tangenziale e centripeta. Se al punto dm s' intendano applicate nel medesimo istante due forze motrici opposte, eguali tra loro ed alla forza d' inerzia in grandezza e in direzione, e che dinoterò per φdm, $-\varphi dm$; e lo stesso facciasi per tutti gli altri punti, applicando loro le forze analoghe

$$(\varphi dm)',\ -(\varphi dm)';\ (\varphi dm)'',\ -(\varphi dm)'';\ \text{etc},$$

è chiaro che lo stato del sistema non sarà menomamente alterato, nè rispetto al moto, nè rispetto all' azion reciproca delle parti tra loro, essendochè le forze introdotte si distruggono due a due sullo stesso punto. Ma, in grazia di questo concetto, noi possiamo riguardare ciascun punto dm come moventesi sotto l' azion della sola forza φdm, e descrivente isolatamente nello spazio la traiettoria medesima che descrive in realtà collegato cogli altri punti (164, *coroll.*2).

Il movimento del sistema ridotto così a non esser altro che il moto libero di ciascuno de' suoi punti animati dalle forze motrici

$$\varphi dm\,,\ (\varphi dm)'\,,\ (\varphi dm)''\,,\ \text{etc.}\,,$$

convien conchiudere necessariamente che le altre forze continue che restano nel sistema, cioè le forze

$$\begin{array}{llll} fdm\,, & (fdm)'\,, & (fdm)''\,, & \text{etc.} \\ -\varphi dm\,, & -(\varphi dm)'\,, & -(\varphi dm)''\,, & \text{etc.} \end{array}$$

si fanno ad ogn' istante equilibrio tra loro per mezzo de' legami o connessioni dello stesso sistema. Or ciò torna a dire che in un sistema in movimento le azioni delle forze motrici

$$fdm\,,\ (fdm)'\,,\ (fdm)''\,,\ \text{etc.}\,,$$

che agiscono realmente nel sistema, sono ad ogn' istante contrabbilanciate dalle reazioni dello stesso sistema

$$-\varphi dm\,, \quad -(\varphi dm)'\,, \quad -(\varphi dm)''\,, \text{ etc.}$$

eguali ed opposte alle corrispondenti forze d' inerzia.

a) Segue da questo principio che: Quando un corpo è in movimento, la sua costituzione molecolare si trova in uno stato di continua reazione, che varia al variare del moto e che può dar nascita a più fenomeni e proprietà fisiche, che spariscono al cessare del moto.

b). Il principio di reazione può esprimersi sotto un' altra forma, spesso utile e comoda quando trattisi di tradurlo in equazione: *In un sistema in movimento le azioni delle forze continue sono equivalenti, rispetto al moto che si va effettuando, alle corrispondenti forze d' inerzia* (61).

N. B. La **forza d'inerzia** si può in generale definire così: « Nel movimento di più punti materiali connessi tra loro, la *forza d' inerzia* di uno qualunque di questi punti equivale in ogn' istante all' azione di una forza sollecitante, per la quale il punto sarebbe capace di descrivere nello spazio, *liberamente* ed *isolatamente*, la linea medesima che in realtà va descrivendo collegato com' è cogli altri punti (152). »

192. Assioma. Un sistema ritenuto da punti fissi ed in moto, si può riguardare come se fosse libero purchè alle *pressioni sostenute dai punti fissi* s' intendano sostituite, ad ogn' istante, *forze uguali e direttamente opposte.* Da ciò segue che:

a) *Le* **pressioni** *che sostengono i* **punti fissi** *di un sistema rigido in movimento, sono ad ogn' istante equivalenti alle azioni delle forze continue ed alle reazioni del sistema* (168).

b) Allorchè un sistema rigido, e mobile intorno ad un punto fisso, si muove sotto l' azion continua di forze motrici, la *pressione sul punto fisso* sarà *equivalente* a quella che vi farebbero le forze motrici e le corrispondenti reazioni *se vi fossero immediatamente applicate, ciascuna secondo la sua direzione.* Affinchè adunque il punto fisso non sostenga alcuna pressione, è necessario e sufficiente che le azioni delle forze motrici siano ad ogn' istante contrabbilanciate dalle corrispondenti reazioni; e ciò verificandosi, il sistema si muoverà come se fosse interamente libero.

Principio di reazione istantanea.

Quelle che si chiamano **forze istantanee** non essendo altro che forze la cui azion continua è di *brevissima durata*, se avvenga che i moti destati nella durata di quest' azione si possano riguardare come rappresentanti i valori integrali delle *forze d' inerzia tangenziali*, riuscendo *nulli* o *infinitesimi i corrispondenti valori integrali delle forze d' inerzia centripete*, allora il principio della reazion continua si trasforma nel seguente:

193. **Principio di reazione istantanea.** *Quando i punti materiali di un sistema sono ad un tratto investiti da forze istantanee* F, F', F'', etc., *le azioni di queste forze sono contrabbilanciate dalle corrispondenti reazioni, essendo queste reazioni eguali ed opposte alle quantità di moto*

$$udm\,,\quad (udm)'\,,\quad (udm)''\,,\ \text{etc.}$$

che si suppongono interamente dovute all' impulso di esse forze.

Dim. Se nell' atto che il sistema (che suppongo in riposo) sta per ricevere l' impulso delle forze istantanee F, F', F'' etc. s' intendano applicate a ciascuno de' suoi punti dm, dm', dm'', etc. due forze opposte

$$(f, -f),\ (f', -f'),\ (f'', -f''),\ \text{etc.}$$

eguali tra sè ed a quella quantità di moto che sta per esser loro comunicata, cioè eguali alle

$$udm,\ (udm)',\ (udm)'',\ \text{etc.},$$

è manifesto che lo stato del sistema non sarà menomamente alterato, nè rispetto al moto, nè rispetto all' azion reciproca delle parti tra loro, essendochè le forze introdotte si distruggono due a due sullo stesso punto. Ma, in grazia di questo concetto, noi possiamo immaginare che le forze f, f', f'' etc. siano unicamente dirette ad eccitare nell' istante dt le quantità di moto udm, $(udm)'$, $(udm)''$, etc.

che sono realmente comunicate, e, ciò essendo, si vede che nel medesimo istante le forze che restano

$$F,\ F',\ F'',\ \text{etc.};\quad -f,\ -f'\ -f'',\ \text{etc},$$

si debbono contrabbilanciare tra loro per mezzo de' legami dello stesso sistema.

a) Coroll. 1°. *Quando un sistema in movimento è ad un tratto investito da forze istantanee, le quantità di moto che restano nei punti materiali al cessar dell'impulso, ove siano rivolte in senso contrario, sono atte a contrabbilanciare e le quantità di moto ch'esistevano dapprima, e le forze istantanee applicate.*

Infatti siano

$$\begin{array}{llll} V, & V', & V'', & \text{etc.} \\ v, & v, & v'', & \text{etc.} \end{array}$$

le velocità de' punti materiali dm, dm', dm'', etc. immediatamente prima ed immediatamente dopo l'applicazion delle forze istantanee F, F', F'' etc.

La nuova velocità v che prende il punto dm, risulta dalla velocità V che esso aveva, e dalla velocità $= u$, dovuta unicamente all'azion delle forze istantanee; e lo stesso può dirsi di ciascuno degli altri punti dm', dm'', etc. Ma, essendo in equilibrio le tre velocità (V, u, $-v$), la velocità $-u$ si può riguardare come la risultante delle due velocità V, $-v$. Alle reazioni adunque che *contrabbilanciano* le azioni delle forze istantanee F, F', F'', etc. e che sono rappresentate dalle quantità di moto

$$-udm,\quad -(udm)',\quad -(udm)'',\ \text{etc.},$$

si possono sostituire i due sistemi di forze

$$\begin{array}{llll} Vdm, & (Vdm)', & (Vdm)'', & \text{etc.} \\ -vdm, & -(vdm)', & -(vdm)'', & \text{etc.}; \end{array}$$

ciò che dimostra la proposizione enunciata.

b) *Coroll.* 2°. Siccome dopo l'applicazion delle forze istantanee ogni punto dm prende una velocità v, che si compone di quella V che esso aveva, e della velocità $= u$ dovuta unicamente all'azione delle stesse forze istantanee, così rendesi manifesto che:

« Quando un sistema di punti materiali è investito da più sistemi di forze istantanee, la velocità che prenderà ciascun punto, sarà la risultante di quelle che corrisponderebbero a ciascun sistema di forze se agisse separatamente; e per conseguenza gli effetti delle forze si compongono tra loro come se si soprapponessero gli uni agli altri. »

c) *Coroll.* 3°. La velocità V, che aveva il punto dm, essendo la risultante delle due velocità (v, $-u$), si può anche dire che, nell'atto dell'applicazion delle forze istantanee, la quantità di moto di ogni punto dm si risolve in due: in quella che sta per acquistare, $= vdm$, ed in quella che perde, $= -udm$. Sotto questo punto di vista il *principio di reazione istantanea* si può enunciare così:

Le azioni delle forze istantanee sopra un sistema di punti materiali sono contrabbilanciate dalle corrispondenti reazioni, essendo queste reazioni *eguali alle quantità di moto perdute dal sistema.*

d) *Coroll.* 4°. Se i corpi di un sistema libero si urtano, le quantità di moto che restano ad ogn' istante della durata dell'urto, ove siano rivolte in senso contrario, sono atte a fare equilibrio alle quantità di moto quali esistevano al cominciare dell' urto. Imperocchè tutte le forze istantanee F, F', F''. etc. che si vanno esplicando ad ogn'istante dell' urto, consistendo in pressioni due a due uguali ed opposte, si equilibrano sempre tra loro, onde apparisce che il presente corollario non è che un caso particolare del primo (*a*). E ne segue che: *Se i corpi di un sistema libero si urtano, le quantità di moto che restano ad ogn' istante dell'urto, sono equivalenti alle quantità di moto prima dell' urto.*

194. Assioma. Un sistema *ritenuto da punti fissi* se ad un tratto riceva l'impulso di forze istantanee, in tale istante si potrà riguardare come *libero*, purchè alle percussioni che risentono i punti fissi, s' intendano sostituite nel medesimo istante forze uguali e direttamente opposte. Da ciò segue che:

a). *Le percussioni che provano i punti fissi di un sistema rigido allorchè viene investito da forze istantanee, sono equivalenti a queste forze ed alle corrispondenti reazioni del sistema.*

b). Allorchè un sistema rigido e mobile intorno ad un punto fisso viene ad un tratto investito da forze istantanee, la *percussione sul punto fisso* sarà *equivalente* a quella che vi farebbero le forze istantanee e le corrispondenti reazioni del sistema *se vi fossero immediatamente applicate, ciascuna secondo la sua direzione*. Affinchè adunque il punto fisso non provi alcuna percussione, è necessario e sufficiente che le forze istantanee siano contrabbilanciate dalle corrispondenti reazioni; e ciò verificandosi, il moto iniziale che avrà luogo al cessar dell'impulso, sarà precisamente quale sarebbe *se il sistema fosse interamente libero*.

Scolio. Per l'esposte definizioni e dimostrazioni è messo in aperto, che il *vero anello di unione* tra la *statica* e la *dinamica* è il PRINCIPIO VOLGARE:

« **Non avvi azione che non sia contrabbilanciata dalla corrispondente reazione.** » Ed in questo principio generale è compreso, e starei per dire si perde, quello che è noto sotto il titolo di *Principio dinamico di d'Alembert*.

---

§. 2.° *Epilogo delle formole generali relative alla composizion delle forze; e loro applicazione alla composizione delle quantità di moto elementari, e delle forze d'inerzia.*

195. Nel risolver le questioni intorno ai moti de' sistemi di qualsivoglia forma, conviene aver presenti e familiari i principii che seguono, già dimostrati nella statica.

I. Date le forze f, f', f'', etc. applicate ai diversi punti di un sistema, se si trasportano parallelamente a sè stesse nell'origine O di tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz, per ridurle ivi ad una sola forza F, e ad una sola coppia G rappresentata in grandezza e in asse dalla retta OG, come appunto si fa quando il sistema è di forma invariabile, la forza F e la coppia OG avranno rispettivamente per componenti.

$$X = F\cos.(xF) = \Sigma f\cos.(xf)\ ,$$
$$Y = F\cos.(yF) = \Sigma f\cos.(yf)\ ,$$
$$Z = F\cos.(zF) = \Sigma f\cos.(zf)\ ;$$

$$L = G\cos.(xG) = \Sigma f[y\cos.(zf) - z\cos.(yf)]\ ,$$
$$M = G\cos.(yG) = \Sigma f[z\cos.(xf) - x\cos.(zf)]\ ,$$
$$N = G\cos.(zG) = \Sigma f[x\cos.(yf) - y\cos.(xf)]\ ;$$

dove le x, y, z dinotano le coordinate de' punti di applicazione delle forze f.

II. Ed affinchè la forza F (supposta diversa da zero) e la coppia G si possano ridurre ad una forza unica, la rette OF, OG che le rappresentano debbono risultare perpendicolari tra loro: condizione espressa da

$$LX + MY + NZ = 0;$$

ed allora questa forza unica, che è uguale ad F in grandezza e in direzione, dovrà passare per quel punto p che è determinato dalle coordinate:

$$\alpha = \frac{YN - ZM}{F^2}, \quad \beta = \frac{ZL - XN}{F^2}, \quad \gamma = \frac{XM - YL}{F^2};$$

e la lunghezza della linea Op è $= \frac{G}{F}$, e di più è diretta secondo l'asse dell'angolo (FG) (Vedi l'*Appendice* N. 26).

196. Applichiamo ora questi principii alla composizione delle quantità di moto elementari, e delle forze d'inerzia.

1°. Segnate per x_1, y_1, z_1, le coordinate del centro di gravità del sistema, si avranno le formole (127)

$$\int x dm = m x_1, \quad \int y dm = m y_1, \quad \int z dm = m z_1,$$

dalle quali, prendendo le derivate prime e seconde rispetto al tempo t, nascono le seguenti

$$\left\{\begin{array}{l} \int \frac{dx}{dt} dm = m \frac{dx_1}{dt}, \\ \int \frac{dy}{dt} dm = m \frac{dy_1}{dt}, \\ \int \frac{dz}{dt} dm = m \frac{dz_1}{dt}; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \int \frac{d^2x}{dt^2} dm = m \frac{d^2x_1}{dt^2}, \\ \int \frac{d^2y}{dt^2} dm = m \frac{d^2y_1}{dt^2}, \\ \int \frac{d^2z}{dt^2} dm = m \frac{d^2z_1}{dt^2}. \end{array}\right.$$

Sia F la risultante delle quantità di moto elementari

$$udm\ ,\ (udm)'\ ,\ (udm)''\ ,\ \text{etc.}$$

trasportate in O, ed F_1 la risultante di tutte le forze d' inerzia pur trasportate nello stesso punto.

Ciò posto, è chiaro che i primi membri delle precedenti equazioni rappresentano rispettivamente le componenti (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1) delle due forze F, F_1, e che però si ha

$$\left\{\begin{aligned} X &= F\cos.(xF) = m\frac{dx_1}{dt}\ , \\ Y &= F\cos.(yF) = m\frac{dy_1}{dt}\ , \\ Z &= F\cos.(zF) = m\frac{dz_1}{dt}\ ; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= F_1\cos.(xF_1) = m\frac{d^2x_1}{dt^2}\ , \\ Y_1 &= F_1\cos.(yF_1) = m\frac{d^2y_1}{dt^2}\ , \\ Z_1 &= F_1\cos.(zF_1) = m\frac{d^2z_1}{dt^2}\ ; \end{aligned}\right.$$

vale a dire: *Le forze risultanti F, F_1 delle quantità di moto e delle forze d'inerzia di tutti i punti materiali dm del sistema, sono rappresentate in grandezza e in direzione dalla quantità di moto, e dalla forza d' inerzia da cui sarebbe animato il centro di gravità, se tutta la massa $= m$ del sistema vi fosse riunita.* Sia U la velocità del centro di gravità, ed R il raggio osculatore della traiettoria s che si va descrivendo da esso centro: avremo

$$F = mU\ ,\quad \text{ed}\quad U = \frac{F}{m}\ ,$$

$$F_1\cos.(sF_1) = \frac{dU}{dt}m\ ,\quad F_1\cos.(F_1R) = \frac{U^2}{R}m\ .$$

Quando il sistema non ha che un puro moto di traslazione, è palese che queste formole bastano a rappresentarlo, purchè per F_1 s' intenda una forza sollecitante, applicata al centro di gravità ed equivalente a tutte le forze sollecitanti che agiscono sopra il sistema (163 e 164).

2°. Sia G la **coppia di moto**, cioè *la coppia che nasce dal trasportare in O le quantità di moto udm, $(udm)'$*, etc. *di tutti i punti materiali dm del sistema*, e siano L, M, N (nel senso degli assi Ox, Oy, Oz) le componenti di questa coppia G rappresentata in grandezza e in asse dalla retta OG; L, M, N saranno ancora le coordinate del punto dove termina OG, e che per abbreviare si dirà il **polo della coppia di moto** G. Si avranno le formole

$$\Sigma\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) dm = L\,,$$

$$\Sigma\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) dm = M\,,$$

$$\Sigma\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) dm = N\,;$$

dalle quali, prendendo le derivate rispetto al tempo t, nascono le

$$\Sigma\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) dm = \frac{dL}{dt}\,,$$

$$\Sigma\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) dm = \frac{dM}{dt}\,,$$

$$\Sigma\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) dm = \frac{dN}{dt}\,.$$

Ora è chiaro, che i primi membri di quest' equazioni rappresentano le *componenti* della **coppia d' inerzia**, cioè *della coppia che nasce dal trasportare in O le forze d' inerzia di tutti i punti materiali dm*. Quindi, se si chiama G_1 il valor di questa coppia, e si rappresenta in grandezza e in asse colla retta OG_1, le componenti L_1, M_1, N_1 di questa retta saranno

$$L_1 = \frac{dL}{dt}\,,\quad M_1 = \frac{dM}{dt}\,,\quad N_1 = \frac{dN}{dt}\,,$$

e manifestano che: *La coppia G_1 nascente dal trasportare in O le forze d' inerzia di tutti i punti materiali dm, è rappresentata in* *grandezza e in asse dalla velocità con cui si muove nello spazio il* **polo** *(L, M, N)* **della coppia attuale di moto** *dello stesso sistema.*

197. *Scolio I.* L' equazioni per cui si esprimono le componenti della *coppia G di moto*, e *della coppia d' inerzia* G_1, si possono scrivere eziandio sotto la forma

$$\begin{aligned} L &= 2\Sigma \frac{dA}{dt}\, dm, \\ M &= 2\Sigma \frac{dB}{dt}\, dm, \\ N &= 2\Sigma \frac{dC}{dt}\, dm; \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} L_1 &= 2\Sigma \frac{d^2A}{dt^2}\, dm, \\ M_1 &= 2\Sigma \frac{d^2B}{dt^2}\, dm, \\ N_1 &= 2\Sigma \frac{d^2C}{dt^2}\, dm; \end{aligned} \right.$$

dove dA, dB, dC sono, sui piani coordinati yz, zx, xy, le proiezioni dell' area dS descritta nell' istante dt dal raggio vettore che dall' origine O va ad un punto qualunque dm (x, y, z) del sistema (165).

Scolio II. L' origine delle coordinate xyz sia nel centro G di gravità (*), e si voglia trasportare nel punto O di coordinate x_1, y_1, z_1. Consideriamo il punto M del sistema dove trovasi l'elemento dm, e le componenti della retta GM siano x, y, z, e quelle della retta OM siano x', y', z'. Se dinotiamo per

$$dA, \; dA_1, \; dA'$$

le proiezioni onde cadono sul piano yz le aree descritte nell' istante dt dai raggi vettori GM, GO, OM, e se annotazioni simili si adottano rispetto ai piani zx, xy, si avrà

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{dA'}{dt}\, dm &= m \frac{dA_1}{dt} + \Sigma \frac{dA}{dt}\, dm, \\ \Sigma \frac{dB'}{dt}\, dm &= m \frac{dB_1}{dt} + \Sigma \frac{dB}{dt}\, dm, \\ \Sigma \frac{dC'}{dt}\, dm &= m \frac{dC'}{dt} + \Sigma \frac{dC}{dt}\, dm. \end{aligned}$$

(*) La lettera G, già adoperata per rappresentare la coppia attuale di moto, verrà impiegata eziandio a dinotare il centro di gravità del sistema. Dal contesto del discorso apparirà sempre in qual significato debbasi prendere.

Dim. Infatti essendo la retta OM contermina alla linea spezzata $(OG + GM) = (GM - GO)$, sarà

$$x' = x - x_1, \quad y' = y - y_1, \quad z' = z - z_1,$$

e per conseguenza

$$2\Sigma \frac{dA'}{dt} dm = \Sigma \left[(y - y_1) \frac{d(z - z_1)}{dt} - (z - z_1) \frac{d(y - y_1)}{dt} \right] dm$$

$$= m \left(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt} \right) + \Sigma \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) dm ,$$

riuscendo nulli gli altri termini a cagione della nota proprietà del centro di gravità , onde abbiamo

$$\Sigma y dm = 0 , \ \Sigma \frac{dy}{dt} dm = 0 ; \quad \Sigma z dm = 0 , \ \Sigma \frac{dz}{dt} dm = 0 .$$

Così è provata la prima delle formole proposte, e con essa le altre due.

---

§. 3.° *Moto de'sistemi liberi. — Principio della conservazion del moto del centro di gravità, e principio della conservazion delle aree, o de' momenti delle quantità di moto.*

198. Le azioni delle forze sollecitanti f, f', f'' etc. essendo contrabbilanciate ad ogn' istante dalle corrispondenti reazioni (191), se queste due specie di forze siano trasportate all' origine O di tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz, ivi dovranno riuscire uguali ed opposte

sì le rispettive forze risultanti, e sì le rispettive coppie risultanti; onde si avrà

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma f\cos.(xf).dm = \Sigma \dfrac{d^2x}{dt^2}dm = m\dfrac{d^2x_1}{dt^2}\ , \\[2ex] \Sigma f\cos.(yf).dm = \Sigma \dfrac{d^2y}{dt^2}dm = m\dfrac{d^2y_1}{dt^2}\ , \\[2ex] \Sigma f\cos.(zf).dm = \Sigma \dfrac{d^2z}{dt^2}dm = m\dfrac{d^2z_1}{dt^2}\ ; \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma f[y\cos.(zf) - z\cos.(yf)]dm = 2\Sigma \dfrac{d^2A}{dt^2}dm\ , \\[2ex] \Sigma f[z\cos.(xf) - x\cos.(zf)]dm = 2\Sigma \dfrac{d^2B}{dt^2}dm\ , \\[2ex] \Sigma f[x\cos.(yf) - y\cos.(xf)]dm = 2\Sigma \dfrac{d^2C}{dt^2}dm\ . \end{array}\right.$$

Le prime formole (1) significano che:

« *Nel movimento di un sistema libero, il centro di gravità* (x_1, y_1, z_1) *così cammina come se tutta la massa m del sistema vi fosse riunita, e come se tutte le forze sollecitanti* f, f', f'' etc. *vi fossero immediatamente applicate, ciascuna secondo la sua direzione.* » E ne segue che:

a). *Quando un sistema libero si muove solo per velocità preconcepite* (non essendovi forze sollecitanti, o consistendo queste nelle uguali ed opposte azioni de' punti materiali considerati due a due), *il centro di gravità camminerà equabilmente in linea retta.* Ed in ciò consiste il *principio della Conservazion del moto del centro di gravità.*

b). *Quando le forze sollecitanti applicate ad un corpo libero equivalgono ad* **una forza unica** *la cui direzione passi pel centro di gravità, il corpo avrà* **un puro moto di traslazione**; *e quando le forze sollecitanti equivalgono ad* **una sola coppia**, *il centro di gravità si rimarrà* **immobile**, *ed il corpo non potrà che rivolgersi intorno a questo punto.*

199. Allorchè le forze sollecitanti f, f', f'' etc. trasportate nel punto O, origine delle coordinate, danno ivi una coppia nulla, le formole (2) diventano

$$0 = 2\Sigma d\frac{dA}{dt}dm\,,$$

$$0 = 2\Sigma d\frac{dB}{dt}dm\,,$$

$$0 = 2\Sigma d\frac{dC}{dt}dm\,,$$

ed integrate due volte così che a $t = 0$ corrisponda $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, si mutano nelle

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\Sigma A dm &= Lt,\\ 2\Sigma B dm &= Mt,\\ 2\Sigma C dm &= Nt, \end{aligned}\right.$$

ove le costanti dell' integrazione L, M, N, rappresentano le componenti della *coppia attuale di moto OG*, la quale perciò dee mantenersi invariabile in tutta la durata del moto. Da coteste formole s' inferisce che:

a). « *Nel movimento di più corpi che reagiscano secondo una legge qualunque gli uni sugli altri, ma il cui sistema sia interamente libero da ogni azione di forza esterna, se s' intendano proiettate sopra un piano le aree che vanno descrivendo, intorno ad un punto fisso o* **foco**, *i raggi vettori condotti da questo foco a tutte le molecole* **uguali** *del sistema, la somma di queste aree proiettate crescerà in proporzione del tempo*, e però *si conserverà costante per ogni uguale intervallo di tempo.* » In questo teorema consiste il *principio della Conservazion delle aree*, o de' momenti delle quantità di moto.

È palese che questo principio vale anche nel caso che i corpi siano soggetti all' azion di forze esterne, purchè la coppia che nasce dal trasportare nel punto O siffatte forze, o riesca costantemente nulla, oppure si trovi situata costantemente in un piano perpendicolare a quello che riceve le proiezioni delle aree.

CAPO II.

Del moto di rotazione intorno ad un asse.

§. 1.° *Proprietà della rotazione intorno ad un asse; velocità ed accelerazione angolare; forze centrifughe; momenti delle quantità di moto e delle forze d' inerzia intorno all' asse di rotazione.*

200. Allorchè un sistema rigido si rivolge intorno ad un asse immobile Ox (*fig.* 54), ogni punto M del sistema si muove sulla periferia di un circolo che ha il centro sull' asse, e *due punti qualunque A, B del sistema situati su questa periferia descriveranno contemporaneamente archi uguali AA', BB'*. Imperocchè se l' arco AB, dopo una rotazione qualsivoglia del sistema, prende la posizione $A'B'$, sarà certamente $AB = A'B'$. Ma

$$AB = AA' + A'B,$$
$$A'B' = A'B + BB';$$

dunque, paragonando, $AA' = BB'$.

Coroll. Sia ω *l' ampiezza angolare della rotazione*, cioè l' angolo onde un piano meridiano qualunque ha deviato dalla sua posizione iniziale: l' arco s, descritto contemporaneamente da un punto M situato alla distanza r dall' asse, sarà $s = r\omega$.

201. Il moto di rotazione si dice *uniforme* od *equabile* quando agli uguali e successivi intervalli, in cui ad arbitrio si concepisca diviso il tempo, corrispondano sempre uguali le ampiezze angolari.

La velocità θ della rotazione uniforme è una quantità che nasce dal paragonare lo *spazio angolare* ω col tempo t impiegato a percorrerlo, e si determina per la formola

$$\theta = \frac{\omega}{t};$$

essendo chiaro che la velocità è *doppia*, *tripla* etc., sia quando in un dato tempo lo spazio percorso ω è *doppio*, *triplo*, etc., sia quando un dato spazio è percorso nella *metà*, nel *terzo* etc. del tempo (*App.* 72).

Mentre la rotazione equabile ω si compie nel tempo t, un punto qualsivoglia M situato alla distanza r dall'asse descriverà lo spazio $s = r\omega$ colla velocità

$$u = \frac{s}{t} = r\frac{\omega}{t} = r\theta.$$

Di qui segue che la *velocità θ della rotazione uniforme* è rappresentata, sia dallo spazio angolare ω percorso nell' *unità di tempo*, sia dalla velocità u di un punto preso all' *unità di distanza* dall' asse.

202. Il moto *vario* di rotazione potendosi riguardar come *uniforme nella durata di un istante dt* (151), la velocità angolare θ è in generale espressa dalla formola

$$\theta = \frac{d\omega}{dt},$$

essendo $d\omega$ la rotazione fatta nell' istante dt.

La derivata della velocità angolare θ, presa rispetto al tempo t, vale a dire

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2},$$

si dice *accelerazione angolare*.

Possiamo dunque stabilire in generale che : Mentre un sistema, girante sopra un asse fisso, fa la rotazione $d\omega$ nel tempo infinitesimo dt, un elemento qualsivoglia dm situato alla distanza r dall'asse descrive lo spazio $ds = rd\omega$ colla velocità

$$u = \frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt} = r\theta\,,$$

e viene animato da una forza d' inerzia di cui le componenti tangenziale e centripeta sono

$$\frac{du}{dt}\,dm = \frac{d\theta}{dt}\,rdm = \frac{d^2\omega}{dt^2}\,rdm\,,$$

$$\frac{u^2}{r}\,dm = \theta^2 rdm = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 rdm\,.$$

203. Le forze di reazione opposte alle forze centripete si dicono *forze centrifughe.* Quindi se, nella rotazione intorno ad un asse fisso, la *forza centripeta* dell' elemento dm si esprima con

$$-\ \theta^2 rdm\,,$$

per indicare che ha direzione opposta al raggio r, la *forza centrifuga* si dovrà rappresentare con

$$\theta^2 rdm\,.$$

204. Il momento della quantità di moto del punto materiale dm intorno all' asse di rotazione essendo

$$udm.r = \theta.r^2\,dm = \frac{d\omega}{dt}\,r^2\,dm\,,$$

la *somma de' momenti delle quantità di moto del sistema intorno all' asse* medesimo sarà

$$\theta\,\Sigma\, r^2dm = \frac{d\omega}{dt}\,\Sigma r^2dm\,.$$

Il momento della forza d' inerzia dell' elemento dm intorno al detto asse (essendo $= 0$ il momento della componente centripeta $\frac{u^2}{r}dm$) si riduce al momento della componente tangenziale $\frac{du}{dt}dm$, momento che è

$$\frac{du}{dt}dm.r = \frac{d\theta}{dt}r^2dm = \frac{d^2\omega}{dt^2}r^2dm \,.$$

La somma de' momenti delle forze d' inerzia del sistema intorno all' asse di rotazione sarà

$$\frac{d\theta}{dt}\Sigma r^2dm = \frac{d^2\omega}{dt^2}\Sigma r^2 dm \,.$$

---

§. 2°. *Momento d' inerzia e sue proprietà rispetto agli assi paralleli.*

205. **Momento d' inerzia** *di un sistema, intorno ad un asse Ox*, è la *somma de' prodotti che nascono moltiplicando ciascun elemento dm della massa del sistema pel quadrato della sua distanza r dall'asse Ox*. Così se si denota per

$$mS_x$$

il momento d' inerzia della massa m intorno all' asse Ox, sarà

$$mS_x = \Sigma r^2dm = r^2dm + (r^2dm)' + (r^2dm)'' + \text{etc.}$$

206. *Scolio*. Nella rotazione di un sistema intorno ad un dato asse, se il momento d' inerzia relativo a tale asse si moltiplica per la velocità angolare θ, o per l' accelerazione angolare $\frac{d\theta}{dt}$, i prodotti, quali

$$\theta.mS_x\,, \quad \frac{d\theta}{dt}.mS_x\,,$$

rappresenteranno rispettivamente intorno all' asse di rotazione la somma de' momenti delle quantità di moto del sistema, e la somma de' momenti delle sue forze d' inerzia. Così i *momenti d' inerzia* ne' *moti di rotazione* hanno ufficio analogo a quello che ha la *massa* ne' *moti di traslazione*. Da ciò si può argomentare quanto sia grande l' importanza di studiare a fondo le proprietà di tali momenti.

207. Prop. *In un sistema qualsivoglia, il momento d' inerzia* (mS_x) *intorno ad un asse qualunque* x *è uguale al momento d' inerzia* (mS_g) *intorno ad un asse parallelo* g *condotto pel centro di gravità, più il prodotto della massa* m *del sistema pel quadrato della distanza* D *de' due assi* x, g, vale a dire:

$$mS_x = mS_g + mD^2,$$

donde

$$S_x = S_g + D^2.$$

Dim. Dal punto M dove si trova l' elemento dm del sistema (*fig.* 55) scenda un piano perpendicolare sopra i due assi paralleli x, g, che li tagli ne' punti X, G, e sia P la proiezione del punto M sulla retta XG. Si ponga

$$\begin{cases} XM = r; \\ XG = D; \end{cases} \qquad \begin{cases} GM = \rho, \\ GP = x. \end{cases}$$

Il triangolo XGM somministra

$$r^2 = D^2 + \rho^2 + 2Dx.$$

Se ora moltiplichiamo questa formola per l' elemento dm, ed il prodotto si sommi con tutti i prodotti analoghi degli altri elementi materiali del sistema, si avrà

$$\Sigma r^2\, dm = D^2 \Sigma dm + \Sigma \rho^2\, dm + 2D\, \Sigma x dm,$$

ossia

$$mS_x = mD^2 + mS_g + 2D\, \Sigma x dm.$$

Ma $\Sigma x dm$ rappresenta la somma de' momenti di tutte le particelle della massa m, presi rispetto ad un piano condotto pel centro di gravità perpendicolarmente alla retta XG, e noi sappiamo che questa somma è $= 0$. Dunque $S_x = S_g + D^2$.

N. B. D'ora innanzi, quando si avranno a considerare i momenti d' inerzia intorno ad assi paralleli, il momento che si riferisce all' asse condotto pel centro di gravità sarà indicato semplicemente per mS, e si scriverà per esempio:

$$S_x = D^2 + S = D\left(D + \frac{S}{D}\right).$$

---

§. 3°. *Pendolo composto: sua riduzione al pendolo semplice mediante il centro di oscillazione. Reciprocanza tra l' asse di sospensione e l'asse de' centri di oscillazione.*

208. **Pendolo composto** è *un sistema di forma invariabile che, abbandonato alla sola gravità, oscilla intorno ad un asse orizzontale Ox* (*fig.* 56). Differisce dal pendolo semplice nel quale tutta la massa supponesi concentrata in un sol punto.

Quesito. Trovar la legge che regola l' oscillar del pendolo intorno all' asse orizzontale Ox.

Risposta. Dal centro G di gravità del pendolo sia condotta la perpendicolare GP sull' *asse Ox di sospensione*, e si consideri il pendolo nell' istante che la retta $PG = D$ devia dalla verticale Pz coll' angolo ω.

La legge che regola l' oscillar del pendolo sarà espressa dalla formola

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{g\,sen.\omega}{D + \frac{S}{D}},$$

dove g è la gravità, ed mS è il momento d' inerzia intorno all' asse condotto pel centro G di gravità parallelamente all' asse Ox di sospensione (si fa astrazione dalla resistenza dell'aria e degli attriti).

Dim. Dal principio di reazione si ha, che la somma de' momenti delle forze di gravità intorno all' asse Ox di rotazione dev'essere uguale alla somma de' momenti omologhi delle forze d'inerzia, cioè $= \frac{d^2\omega}{dt^2} mS_x$.

Ora, alle forze elementari gdm, $(gdm)'$ etc. della gravità si può sostituire la loro risultante $= gm$, applicata al centro G di gravità (*fig.* 56), ed il momento di questa forza è $= gm.D\,sen.\omega$. Dunque

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} . mS_x = gm.D\,sen.\omega\ ;$$

ed essendo (207)

$$S_x = S + D^2 = D\left(D + \frac{S}{D}\right),$$

sarà

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{g\,sen.\omega}{D + \frac{S}{D}} .$$

209. *Coroll.* I. Quando il pendolo è semplice e della lunghezza $= a$, la massa m supponendosi concentrata all'estremità del filo a, il suo momento d'inerzia rispetto all' asse Ox sarà $mS_x = m.a^2$. Eguagliando tra loro il momento della forza d' inerzia ed il momento della forza di gravità del pendolo semplice, si ottiene:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} .ma^2 = gm.a\,sen.\omega ,$$

donde

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{g\,sen.\omega}{a} .$$

Paragonando quest'equazione con la precedente, si scopre che la lunghezza a del pendolo semplice, *isocrono* al pendolo composto, è data dalla formola

$$a = D + \frac{S}{D} .$$

Nel pendolo composto si chiama **centro di oscillazione** quel punto Q *la cui distanza* PQ *dall' asse di sospensione* (*fig.*56), *presa in linea retta col centro* G *di gravità , misura la lunghezza del pendolo semplice isocrono al pendolo composto.* Sia D_1 la distanza del centro G di gravità al centro Q di oscillazione : sarà

$$GQ = D_1 = \frac{S}{D}\,, \quad \text{donde} \quad DD_1 = S\,,$$

vale a dire: Il centro G di gravità divide la distanza PQ, interposta tra l'asse di sospensione ed il centro di oscillazione, in due parti *additive* D , D_1 *reciprocamente proporzionali tra loro ;* talchè se l' asse di sospensione si sposti nel sistema, conservandolo per altro parallelo a sè stesso, e si allontani dal centro di gravità , il centro di oscillazione si avvicinerà in proporzione ad esso centro di gravità : imperocchè il prodotto delle due distanze D, D_1 si dee mantenere costante ed $= S$.

210. *Coroll.* II. Se pel centro Q di oscillazione si conduce una retta Qx' parallela all' asse orizzontale Ox di sospensione, questa retta si dice *asse de' centri di oscillazione*, perchè ciascuno de'suoi punti oscilla precisamente come fa il punto Q.

Ed è a notare che i due assi di sospensione e de'centri di oscillazione sono *reciproci l'uno dell'altro*, vale a dire, secondochè uno qualunque di essi si prende per asse de'centri di oscillazione o per asse di sospensione, l' altro diviene asse di sospensione od asse de' centri di oscillazione; ed il pendolo composto è, nell' uno e nell' altro caso, isocrono al pendolo semplice della lunghezza

$$a = D + \frac{S}{D} = D_1 + \frac{S}{D_1}\,.$$

---

§. 4°. *Formole per la rotazione uniforme. Quando le quantità di moto elementari equivalgono ad una forza unica, anche le forze centrifughe equivarranno ad una forza unica; e viceversa. Urto che viene all' asse nell' attuarsi della rotazione, e pression continua che ne segue.*

211. In un punto arbitrario O dell'asse Ox di rotazione coordiniame due altri assi Oy , Oz, rettangolari tra loro e col primo, e nel

sistema rotante consideriamo uno degli elementi dm situato nel punto (x, y, z) alla distanza r dall' asse Ox. Sarà $y = r\cos.(yr)$, $z = r\,sen.(yr)$, ossia

$$y = r\cos.\omega, \quad z = r\,sen.\omega,$$

dinotando per ω l' angolo (yr).

Supponendosi costante la velocità angolare

$$\theta = \frac{d\omega}{dt},$$

il punto $dm\ (x, y, z)$ sarà animato dalla velocità $= r\theta$, e dalla forza centripeta $= -r\theta^2$, delle quali le componenti rispettive saranno

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= -z\theta, \\ \frac{dz}{dt} &= y\theta; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -y\theta^2, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -z\theta^2. \end{aligned}\right.$$

Così il centro di gravità del sistema, situato nel punto (x_1, y_1, z_1) alla distanza D dall' asse di rotazione, sarà animato dalla velocità $= D\theta$, e dalla forza centripeta $= -D\theta^2$, di cui le componenti si ottengono scrivendo, nelle formole precedenti, x_1, y_1, z_1 in luogo di x, y, z. E si ha

$$D = \sqrt{(y_1^2 + z_1^2)}.$$

212. Proponiamoci ora di trasportare in O tanto le quantità di moto elementari, quanto le forze d' inerzia, per ridurle ivi ad una sola forza e ad una sola coppia: il che si ottiene facendo le debite sostituzioni nelle formole generali già date (196. 1°. 2°.).

Trasportate in O :

1°. Le quantità di moto del sistema equivarranno alla forza $OF = m.D\theta$, ed alla coppia OG, determinate rispettivamente dalle componenti :

$$\begin{cases} X = 0\,, \\ Y = -\,m.z_1\theta\,, \\ Z = m.y_1\theta\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} L = \theta\int r^2dm\,, \\ M = -\,\theta\int xydm\,, \\ N = -\,\theta\int xzdm\,. \end{cases}$$

La coppia OG si può anche riguardare come composta delle due coppie rettangolari

$$G\,cos.(xG) = \theta\int r^2dm = \theta.mS_x = \theta.m(D^2 + S)\,,$$
$$G\,sen.(xG) = \theta\sqrt{[(\int xydm)^2 + (\int xzdm)^2]}\,;$$

il piano della prima di queste coppie componenti è perpendicolare all' asse Ox, ed il piano della seconda passa per quest' asse.

2°. Le forze d' inerzia (che nel nostro caso consistono nelle sole forze centripete) equivarranno alla forza $OF_1 = -\,m.D\theta^2$, ed alla coppia OG_1, determinate dalle componenti

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = -\,m.y_1\theta^2\,, \\ Z_1 = -\,m.z_1\theta^2\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 = \dfrac{dL}{dt} = 0\,, \\ M_1 = \dfrac{dM}{dt} = -\,\theta N\,, \\ N_1 = \dfrac{dN}{dt} = \theta M\,. \end{cases}$$

La retta OG_1 che rappresenta la coppia d' inerzia G_1, è perpendicolare alle due rette Ox, OG (196, 2°.), ed ha per valore

$$G_1 = \theta\sqrt{(M^2 + N^2)} = \theta G\,sen.(xG)\,.$$

213. Prop. *Nella rotazione intorno ad un asse fisso, quando le quantità di moto elementari equivalgono ad una forza unica, anche le forze centrifughe equivarranno ad una forza unica; e viceversa.*

Dim. La condizione che esprime siffatta equivalenza, per le quantità di moto è

$$LX + MY + NZ = 0,$$

e per le forze centrifughe è

$$L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1 = 0;$$

e ciascuna di queste due condizioni, fatte le sostituzioni, si risolve nella seguente

$$y_1 N - z_1 M = 0.$$

214. *Quesito.* Un sistema rigido e mobile intorno ad un asse fisso Ox essendo posto in movimento per l'impulso di forze istantanee, qual sarà la natura del moto? E quanto l'urto contro l'asse nel primo istante? E quanta la pressione che viene sull'asse dalle forze centrifughe?

Soluzione. I. Le forze istantanee si concepiscano ridotte ad una forza P applicata in O, e ad una coppia Q rappresentata da una retta OQ. Dato l'impulso al sistema, il moto di rotazione si farà colla velocità uniforme

$$\theta = \frac{Q\cos.(xQ)}{mS_x} = \frac{Q\cos.(xQ)}{m(D^2+S)}.$$

Infatti intorno all'asse Ox la somma de' momenti delle forze istantanee è $= Q\cos.(xQ)$, e la somma de'momenti delle quantità di moto è $G\cos.(xG) = \theta.mS_x$, e queste due somme debbono essere uguali (193).

Inoltre se il sistema non è soggetto all'azion di forze continue, o se la somma de' loro momenti intorno ad Ox è nulla, sarà pur nulla la somma de' momenti delle forze d'inerzia, cioè sarà

$$\frac{d\theta}{dt}\, mS_x = 0.$$

Così, essendo nulla l'accelerazione angolare $\frac{d\theta}{dt}$, la rotazione si manterrà uniforme.

II. Le percussioni che sostiene l'asse nell'attuarsi della rotazione siano rappresentate dalla forza Op applicata nel punto O, e dalla coppia Oq. Queste percussioni p, q dovendo essere equivalenti (194, a) alle azioni delle forze istantanee (P, Q) ed alle corrispondenti reazioni ($-F$, $-G$), la forza p sarà uguale alla *risultante* delle due forze P, $-F$, e la coppia q sarà eguale alla *risultante* delle due coppie Q, $-G$, ossia delle due $Q\,sen.(xQ)$, $-G\,sen.(xG)$, a causa di $Q\,cos.(xQ) - G\,cos.(xG) = 0$. Le percussioni p, q sull'asse Ox si possono adunque indicare simbolicamente così

$$p = ris.(P, -mD\theta), \quad q = ris.[\,Q\,sen.(xQ), -G\,sen.(xG)\,].$$

III. Similmente, le pressioni che sostiene l'asse Ox ad ogn'istante della rotazione, siano rappresentate dalla forza Op_1 applicata nel punto O, e dalla coppia Oq_1. Queste pressioni p_1, q_1 dovendo essere ad ogn' istante equivalenti (192, a) alle azioni delle forze esterne sollecitanti (che nel nostro caso son nulle) ed alle reazioni del sistema ($-F_1$, $-G_1$), la forza p_1 dovrà essere $= -F_1$, e la coppia q_1 dovrà essere $= -G_1$. Si avrà dunque:

$$p_1 = m\,D\theta^2, \quad q_1 = -\theta.\,G\,sen.(xG).$$

215. *Coroll.* Se si vuole comunicare al sistema una data velocità angolare θ senza che l'asse Ox provi alcun urto, basta che le forze impresse siano equivalenti alle

$$P = mD\theta, \quad Q = G;$$

e la rotazione iniziale sarà *spontanea*, vale a dire, *quale sarebbe se il sistema solido non fosse vincolato da alcun ritegno.*

216. *Coroll.* Chè se invece vuolsi produrre la rotazione θ col *minor dispendio possibile di forza*, senz' aver riguardo all' urto dell' asse, basta applicare in un piano perpendicolare all' asse la sola coppia

$$Q = G\,cos.(xG) = \theta\int r^2 dm,$$

e le percussioni sull' asse si avranno dalle

$$p = -m.D\theta, \quad q = -G\,sen.(xG).$$

§. 5°. *Momenti d' inerzia e momenti complessi rispetto a due sistemi di assi paralleli, uno de' quali sia coordinato nel centro di gravità.*

217. I momenti d' inerzia di un corpo intorno a tre assi rettangolari (x), (y), (z), sono espressi (in virtù della loro definizione) dalle formole:

$$\begin{aligned} mS_x &= \Sigma(y^2 + z^2)dm, \\ mS_y &= \Sigma(z^2 + x^2)dm, \\ mS_z &= \Sigma(x^2 + y^2)dm. \end{aligned}$$

218. Le somme $\Sigma yzdm$, $\Sigma zxdm$, $\Sigma xydm$, che pure s' incontrano nella rotazione di un corpo, s' indicheranno per

$$\begin{aligned} mS_{yz} &= \Sigma yzdm, \\ mS_{zx} &= \Sigma zxdm, \\ mS_{xy} &= \Sigma xydm, \end{aligned}$$

e si chiameranno *momenti complessi di due assi*. Così mS_{zy} è il momento complesso de' due assi y, z.

219. Due sistemi paralleli di assi rettangolari $x\,y\,z$, $x'\,y'\,z'$ essendo coordinati, l'uno nel centro G di gravità di un corpo, e l' altro nel punto arbitrario O di coordinate x_1, y_1, z_1, da quali relazioni saranno vincolati i momenti del corpo (sia d' inerzia, sia complessi) rispetto ai due sistemi di assi?

Risposta. Dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} S_x &= S_{x'} - (y_1^2 + z_1^2), \\ S_y &= S_{y'} - (z_1^2 + x_1^2), \\ S_z &= S_{z'} - (x_1^2 + y_1^2); \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} S_{yz} &= S_{y'z'} - y_1 z_1, \\ S_{zx} &= S_{z'x'} - z_1 x_1, \\ S_{xy} &= S_{x'y'} - x_1 y_1; \end{aligned}\right.$$

le quali moltiplicate per m significano che:

1°. *Il momento d' inerzia di un corpo intorno ad un asse uscente dal centro di gravità, è uguale al momento d' inerzia intorno ad un altro asse parallelo qualsivoglia, meno il prodotto della massa m del corpo pel quadrato della distanza de' due assi* (207);

2°. *Il momento complesso di due assi uscenti dal centro G di gravità, è uguale al momento complesso di due nuovi assi paralleli ai primi ed uscenti da un altro punto arbitrario O, meno il prodotto della massa m per le due coordinate omologhe dello stesso punto O.*

Dim. Consideriamo nel corpo un punto M di cui le coordinate di data direzione, ove si contino dal centro G di gravità, siano x, y, z, ed ove si contino dal punto $(x_1, y_1\ z_1)$ cioè da O, siano x', y', z'.

La retta OM e la linea spezzata $(OG + GM) = (GM - GO)$, siccome linee contermine, debbono avere uguali le projezioni omologhe, e però danno

$$x' = x - x_1, \quad y' = y - y_1, \quad z' = z - z_1 .$$

Ciò posto, avendosi per la proprietà del centro di gravità $\Sigma x dm = 0$, $\Sigma y dm = 0$, $\Sigma z dm = 0$, otterremo subito

$$\Sigma(y'^2 + z'^2)dm = \Sigma(y^2 + z^2)dm + m(y_1^2 + z_1^2),$$
$$\Sigma y'z'dm = \Sigma yzdm + my_1z_1,$$

donde la certezza delle due proposizioni enunciate, o delle formole proposte.

---

§°. 6°. *Asse permanente di rotazione e sue proprietà. Gli assi permanenti, paralleli ad una data direzione, sono contenuti in un piano che passa pel centro di gravità, e a due a due reciproci. Proprietà de' centri reciproci di percossa.*

220. *Probl.* Determinare la condizione a cui dee soddisfare un asse di rotazione (x) affinchè le quantità di moto elementari, e però anche le forze centripete, si riducano rispettivamente ad una sola forza F, F_1, ed assegnare le rette secondo cui agiscono queste due risultanti.

Soluz. Le due risultanti F, F_1 [dovendo essere uguali in direzione e in grandezza alla quantità di moto ed alla forza centripeta che avrebbe il centro di gravità se la massa m del sistema vi fosse riunita (196)] saranno

$$F = m.D\theta\,, \quad F_1 = -\, m.D\theta^2\,.$$

E ne segue che, delle due rette rappresentanti coteste forze la prima dovrà esser perpendicolare al piano determinato dall' asse (x) e dal centro di gravità G, e indirizzata nel senso della rotazione, e la seconda dovrà essere perpendicolare ad F ed all' asse (x).

Ciò posto, sia P il punto del piano (Ox, G) per ove passa la direzione della forza F, risultante delle quantità di moto, e da P si tiri la perpendicolare PO sull' asse (x) (*fig.* 57). La retta PO sarà la linea secondo cui si esercita la forza F_1 risultante delle forze centripete (*).

Infatti, dinotate per α, β, γ le coordinate del punto P, la *coppia di moto* G avrà nell' origine delle x, y, z le componenti (212):

$$L = F[\beta \cos.(zF) - \gamma \cos.(yF)] = \theta \int r^2 dm\,,$$
$$M = F[\gamma \cos.(xF) - \alpha \cos.(zF)] = -\, \theta \int xydm\,,$$
$$N = F[\alpha \cos.(yF) - \beta \cos.(xF)] = -\, \theta \int xzdm\,.$$

Ma, essendo la forza F perpendicolare all' asse (x), si ha

$$\cos.(xF) = 0\,,$$

e se l' origine delle x, y, z si prenda nel punto O della retta OP, si ha di più $\alpha = 0$, onde risulta

$$L = F[\beta \cos.(zF) - \gamma \cos.(yF)]\,, \quad M = 0\,, \quad N = 0\,,$$

(*) L'evidenza di questa proposizione diviene quasi immediata ragionando così. Se si prende il punto O per centro di riduzion delle forze, il polo della coppia di moto ($= F.OP$) cadrà sull' asse Ox, ed avrà per conseguente una velocità nulla. La coppia d' inerzia G_1, che dev' essere uguale in grandezza a tale velocità (196, 2°.), sarà dunque nulla nel punto O, e per conseguenza la forza F_1, *equivalente* alle forze d' inerzia, sarà diretta secondo PO.

e quindi la coppia G_1 delle forze centripete, di cui le componenti sono in generale

$$L_1 = 0, \quad M_1 = -\theta N, \quad N_1 = \theta M,$$

risulterà $= 0$. Così è provato che la risultante delle forze centripete passa pel punto O, e che rispetto a questo punto l'asse Ox di rotazione dee soddisfare alle due relazioni $M = 0$, $N = 0$, ossia alle due

$$\int xydm = 0, \quad \int xzdm = 0,$$

dove la direzione di ciascuno de' due assi Oy, Oz, non è soggetta ad altra condizione che di esser perpendicolare all'asse Ox.

221. Definizione. *Un asse di rotazione dicesi* **permanente** *allorchè le forze centrifughe equivalgono ad una forza unica. Il punto O dell'asse per ove passa la direzione di tale risultante, verrà chiamato* **centro di permanenza**: imperocchè basta che sia sostenuto questo punto solo per mantener perpetua ed uniforme la rotazione impressa.

a). Un punto O dell'asse Ox di rotazione, affinchè sia un centro di permanenza, dee soddisfare alla condizione espressa dalle due equazioni

$$\int xydm = 0, \quad \int xzdm = 0,$$

vale a dire: *Nel centro di permanenza, il momento complesso dell' asse Ox di rotazione e di un altro asse qualsivoglia perpendicolare al primo, dee risultare uguale a zero; e viceversa.*

222. *Quando un asse di rotazione Ox* è permanente, si chiama **centro di percossa** *quel punto P dove il piano, determinato dall'asse Ox e dal centro di gravità G, è incontrato dalla risultante F delle quantità di moto elementari.* Se si fa coincidere l'asse Oy colla retta OP che unisce il centro di permanenza col centro di percossa, nella formola

$$F[\beta \cos.(zF) - \gamma \cos.(yF)] = \theta \int r^2 dm$$

risulterà $\cos.(yF) = 0$, $\cos.(zF) = 1$, onde

$$F\beta = \theta \int r^2 dm = \theta.m(D^2 + S).$$

Ma (*fig.* 57)

$$\beta = OP, \quad F = m.\, D\theta,$$

Dunque: *la distanza tra i centri di permanenza e di percossa sarà*

$$OP = D + \frac{S}{D} = D + D_1,$$

essendo $D_1 = \frac{S}{D}$.

a). Il *centro di percossa* prende il suo nome da ciò che, se si applica al sistema una forza istantanea P la cui direzione passi pel centro di percossa, e sia perpendicolare al piano determinato da questo centro e dall' asse di rotazione Ox, l' attuarsi del moto rotatorio

$$\theta = \frac{P}{mD}$$

sarà *spontaneo*, vale a dire, *quale sarebbe se il sistema fosse affatto libero, e però senza che ne risulti alcuna percossa sull' asse* Ox.

223. Prop. I. *Tutti gli assi permanenti* (x'), *paralleli ad una data direzione* Gx, *sono contenuti in un piano che passa pel centro di gravità* G, *ed il luogo de' centri di permanenza è un' iperbola equilatera che ha per assintoti gli assi* Gx, Gy (*fig.* 58).

Dim. Posta l' origine degli assi x, y, z nel centro di gravità G, le coordinate del centro O di permanenza dell' asse Ox' siano x_1, y_1, z_1. I due momenti complessi $\int x'y'dm$, $\int x'z'dm$ dell'asse Ox' nel punto O saranno espressi da (219)

$$\int x'y'dm = mx_1y_1 + \int xydm,$$
$$\int x'z'dm = mx_1z_1 + \int xzdm.$$

Ora se l' asse Gy si prenda parallelo alla retta OP che dal centro O di permanenza va al centro di percossa P, il punto O essendo nel piano xy avrà la $z_1 = 0$, e le due relazioni $\int x'y'dm = 0$, $\int x'z'dm = 0$ dell' asse permanente Ox', diverranno

$$mx_1y_1 + \int xydm = 0, \quad \int xzdm = 0.$$

Un asse (x') situato fuori del piano xy, offrendo l'integrale $\int x'z'dm = mx_1 z_1$ diverso da zero, non può essere un asse permanente.

Supponendo adunque che sia verificata la condizione

$$\int xzdm = 0,$$

tutte le rette (x') parallele all'asse Gx, e contenute nel piano xGy, saranno assi permanenti. E viceversa: Tutti gli assi permanenti paralleli all' asse Gx saranno contenuti nel piano xGy.

Il luogo de' centri di permanenza (x_1, y_1) di tali assi (x') è dato dalla

$$x_1 y_1 = -\frac{1}{m}\int xydm,$$

equazione di un' iperbola equilatera che ha per assintoti i due assi Gx, Gy.

224. Prop. II. *Gli assi permanenti, paralleli ad una data retta Gx, sono a due a due* **reciproci**, *così, che ciascuno di tali assi contiene il centro di percossa dell'asse reciproco; ed il luogo di tutti i centri di percossa è una retta che passa pel centro di gravità G (fig. 58).*

Dim. Pel punto P conduciamo un altro asse Px' parallelo a Gx. Io dico che l'asse permanente Px' avrà il suo centro di percossa nel punto P_1 dove la retta PG prolungata incontra l'asse Ox', e che avrà in conseguenza il suo centro di permanenza nel punto O_1, piede della perpendicolare calata da P_1 sopra Px'.

Dinotiamo con α, β le coordinate del centro di permanenza relativo all'asse Px'; sarà

$$\alpha\beta = x_1 y_1 = -\frac{1}{m}\int xydm. \tag{1}$$

Siano n, n_1 i punti d'intersezione dell'asse Gx colle rette OP, O_1P_1 sarà

$$y_1 = nO = -D,$$
$$\beta = nP = D_1,$$

e per consegnente

(2) $$y_1\beta = - DD_1 = - S\,.$$

Se per quest' equazione si divida la precedente (1), otterremo

(3) $$\frac{\alpha}{y_1} = \frac{x_1}{\beta} = \frac{1}{mS}\int xydm\,.$$

Ora, il centro di permanenza ed il centro corrispondente di percossa avendo in generale la stessa ascissa sopra Gx, come il centro di percossa relativo all' asse Ox' è nel punto (x_1, β), così il centro di percossa relativo all' asse Px' sarà nel punto (α, y_1). Dalla (3) apparisce che, se per abbreviare si fa

$$a = \frac{1}{mS}\int xydm\,,$$

la linea, che contiene tutti i centri di percossa, sarà rappresentata dall' equazione $\mathrm{x} = a\mathrm{y}$, e però sarà una retta che passa pel centro G di gravità. Ne segue che il centro di percossa dell' asse Px', dovendo trovarsi sulla retta PG ed avere per ordinata y_1, sarà il punto P_1 dell' asse Ox.

225. Se avvenga che, oltre $\int xzdm = 0$, risulti $\int xydm = 0$, la retta Gx sarà un asse permanente del centro G di gravità, ed allora (essendo arbitraria la direzione dell' asse Gy) tutte le rette dello spazio parallele a Gx saranno assi permanenti, ed avranno il lor centro di permanenza $(x = 0\,,\ y_1)$ nel piano condotto per G perpendicolarmente a Gx. Di più, nell' atto della rotazione (essendo $D = 0$) si faranno equilibrio intorno a Gx e le quantità di moto elementari e le forze centrifughe.

226. *I centri di percossa corrispondenti a due assi reciproci di rotazione*, si diranno **reciproci.** I centri reciproci di percossa, quali P, P_1, sono vincolati dall' equazione

$$GP.GP_1 = -\frac{S}{\lambda^2}\,,$$

dove λ è il seno dell'angolo che l'asse Gx fa colla retta GP de' centri di percossa. Infatti dai triangoli rettangoli GnP, Gn_1P_1 (*fig.* 58) si trae

$$GP = \frac{D_1}{\lambda}, \quad GP_1 = -\frac{D}{\lambda}.$$

Dunque: *Le distanze tra il centro di gravità G e due centri reciproci di percossa variano tra loro in ragione inversa, così, che il loro prodotto è costante, ed* $= -\frac{S}{\lambda^2}$.

227. Quesito. *Un corpo libero girando nell'istante dt sopra un asse permanente Oz (*fig. 59*) colla velocità angolare* θ, *qual sarà la velocità v di uno qualunque de' punti B situati sulla retta GA de' centri di percossa? E di qual percossa P sarà capace un tal punto imbattendosi contro un altro punto fisso? E che diverrà il moto del corpo immediatamente dopo l'urto?*

Soluz. Sia A il centro di percossa corrispondente all'asse permanente Oz, ed A_1 il punto reciproco di A; B e B_1 siano due altri centri reciproci di percossa. Sarà

$$GA.GA_1 = GB.GB_1 = -\frac{S}{\lambda^2}.$$

Laonde se si fa

$$GA = \alpha, \quad GB = x, \quad GB_1 = x_1,$$

avremo

$$GA_1 = -\frac{S}{\lambda^2\alpha}, \quad xx_1 = -\frac{S}{\lambda^2}.$$

La velocità u del centro di gravità G è

$$u = \theta.\lambda\overline{A_1G} = \theta\frac{S}{\lambda\alpha},$$

e la risultante F delle quantità di moto elementari, risultante che passa pel punto A, sarà

$$F = mu = m\theta\frac{S}{\lambda\alpha}.$$

La velocità v del punto B è

$$v=\theta.\lambda\overline{A_1B}=\theta\lambda\,(\overline{A_1G}+\overline{GB})=\theta\lambda\left(\frac{S+\lambda^2\alpha x}{\lambda^2\alpha}\right).$$

Si ha dunque, ravvicinando,

$$(1)\qquad F=mu\,,\quad u=\theta\,\frac{S}{\lambda\alpha}\,,$$

$$(2)\qquad v=\frac{F}{mS}\,(S+\lambda^2\,\alpha x)\,.$$

Ciò stabilito, osserviamo che il corpo girante sulla retta Oz, mentre col punto B sta per colpire contro un ostacolo fisso, si può riguardare come se fosse in riposo, ed animato ad un tratto da una forza unica F applicata al punto A. Se questa forza F s'immagina decomposta in due forze parallele P, P_1 applicate ne'punti B e B_1, la componente P sarà la forza di percossa di cui è capace il punto B: imperocchè l'effetto dell'altra componente P_1 è di far concepire al corpo un moto spontaneo di rotazione intorno al punto B, senza produrvi alcuna percossa (222).

Ora per le note proprietà delle forze parallele si ha

$$F=P+P_1\,,$$

$$F\alpha=Px+P_1x_1\,.$$

Se dalla $xx_1=-\dfrac{S}{\lambda^2}$ moltiplicata per P_1 si elimina P_1x_1, P_1, si ottiene

$$x\,(F\alpha-Px)=-\frac{S}{\lambda^2}\,(F-P)\,,$$

e quindi

$$(3)\qquad P=F\,\frac{S+\lambda^2\,\alpha x}{S+\lambda^2x^2}\,,$$

ed anche, in grazia della (2),

$$P = v.m \frac{S}{S+\lambda^2 x^2} = v.m \frac{-x_1}{x-x_1}$$

essendo $S = -\lambda^2 x x_1$. Ma

$$x = GB, \quad x_1 = GB_1, \quad x - x_1 = B_1G + GB = B_1B;$$

dunque

$$P = v.m \frac{B_1G}{B_1B}.$$

Similmente, chiamando v_1 la velocità del punto B_1, si avrà

$$P_1 = v_1.m \frac{x}{x-x_1} = v_1.m \frac{GB}{B_1B}.$$

Dalle due espressioni

$$P = v.m \frac{B_1G}{B_1B}, \quad P_1 = v_1.m \frac{GB}{B_1B}$$

apparisce che: « *Se nell'atto che un corpo gira sopra un asse permanente, si cercano le percosse di cui son capaci due centri reciproci l'un dell'altro, quali B, B_1, si può dire che questi due punti percuotono esattamente come se si fossero spartita tra loro la massa m del corpo in ragion inversa delle loro distanze al centro di gravità.*

Ed è da notare che il sistema formato dai due centri reciproci B, B_1, in cui siano concentrate le masse $m \frac{-x_1}{x-x_1}$, $m \frac{x}{x-x_1}$, ha evidentemente il centro di gravità nel punto G; ed il suo momento d'inerzia intorno all'asse Gz, espresso da

$$m\lambda^2 \frac{-x_1 x^2 + x x_1^2}{x-x_1} = -m.\lambda^2 x x_1 = mS,$$

è uguale all'omologo momento d'inerzia del corpo.

Il corpo che si considera, dopo che avrà colpito col punto B il punto fisso ed ivi estinta la forza P, resterà animato dalla sola forza P_1 applicata al punto B_1 reciproco di B, e per questa forza concepirà nel primo istante un moto spontaneo di rotazione intorno al punto B. Sia θ_1 la velocità angolare di questa nuova rotazione, ed u_1 la velocità del centro di gravità. Le due formole

$$F = mu\ , \qquad u = \theta\,\frac{S}{\lambda\alpha}$$

relative al centro di percossa A, diverranno pel nuovo centro di percossa B_1

$$P_1 = mu_1\ , \qquad u_1 = \theta_1\,\frac{S}{\lambda x_1} = -\,\theta_1\lambda x\ ,$$

le quali somministrano

$$u_1 = \frac{F - P}{m} = \frac{F}{m}.\lambda^2\,\frac{x(x-\alpha)}{S+\lambda^2x^2}\ ,$$

$$\theta_1 = -\frac{u_1}{\lambda x} = -\,\frac{F}{m}.\lambda\,\frac{x-\alpha}{S+\lambda^2x^2}\ .$$

Da queste formole e dalla

$$P = F\,\frac{S+\lambda^2\alpha x}{S+\lambda^2x^2}\ ,$$

si possono facilmente ricavare le risposte ai seguenti :

228. Quesiti. Girando un corpo libero in un dato istante sopra un asse permanente colla velocità angolare θ, *a quale de' centri di percossa si dovrà opporre un punto fisso , perchè nell' incontro risulti massima o di un dato valore : 1°. la percossa P ? 2°. la nuova velocità u_1 del centro di gravità ? 3°. la nuova velocità angolare θ_1 del corpo intorno al punto fisso ?*

N. B. In questi quesiti, ed in quelli che s' incontreranno al capo VI (n. 300) si è procurato di generalizzare le belle teorie del Sig. Poinsot sulla percussion de' corpi.

§. 7°. *Ricerca analitica de' momenti d' inerzia delle figure più semplici. Parallelepipedo, ellissoide. Solidi di rivoluzione: Cono; segmento sferico e sue varietà; cilindro retto e sue varietà.*

229. È uso di cercare il momento d' inerzia delle figure geometriche attribuendo ai loro elementi una massa proporzionale alla loro estensione, e supponendo la loro densità $= 1$.

230. Quesito. In un punto arbitrario O di un dato corpo essendo coordinati tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz, per quali formole generali si possono determinare i momenti d' inerzia mS_x, mS_y, mS_z del corpo intorno agli stessi assi?

Risposta. Per le formole

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} mS_x &= \int y^2Ydy + \int z^2Zdz\,, \\ mS_y &= \int z^2Zdz + \int x^2Xdx\,, \\ mS_z &= \int x^2Xdx + \int y^2Ydy\,, \end{aligned}\right.$$

nelle quali X, Y, Z rappresentano le aree delle sezioni fatte nel corpo perpendicolarmente agli assi Ox, Oy, Oz ne' punti dove terminano le ascisse x, y, z.

Dim. Nella formola

$$mS_x = \Sigma\, r^2 dm$$

che rappresenta la definizione del momento d' inerzia intorno ad Ox, l' elemento dm si suppone situato nel punto (x, y, z) ed alla distanza r dall' asse Ox, talchè si ha

$$r^2 = y^2 + z^2,$$

e per conseguenza

$$mS_x = \Sigma\, y^2dm + \Sigma\, z^2dm,$$

dove la somma Σ si deve estendere a tutti gli elementi dm del corpo.

Il mezzo che si offre quasi spontaneamente per determinar la somma $\Sigma y^2 dm$, si è di considerar qui l'elemento dm, non più come un punto materiale, ma come uno *strato sottilissimo del corpo, contenuto tra due piani perpendicolari all'asse Oy e corrispondenti alle ascisse* y, $y + dy$. Chiamando Y l'area della sezione fatta nel corpo dal primo di questi due piani, sarà

$$dm = Ydy,$$

e quindi
$$\Sigma y^2 dm = \int y^2 Y dy.$$

In modo analogo si dimostra che alla somma $\Sigma z^2 dm$ si può sostituir l'integrale $\int z^2 Z dz$; e si ottiene così la prima delle formole proposte, dalla quale per ragion di simmetria si deducono subito le altre due.

231. Passiamo ad applicar queste formole al parallelepipedo ed all'ellissoide.

1°. Nel PARALLELEPIPEDO di lati rettangolari a, b, c, se gli assi Ox, Oy, Oz traggano l'origine dal centro di gravità e siano paralleli a que' lati, avremo

$$mS_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2),$$

$$mS_y = \frac{m}{12}(c^2 + a^2), \qquad \text{dove } m = abc.$$

$$mS_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2),$$

Infatti in questo parallelepipedo le aree X, Y, Z delle sezioni perpendicolari agli assi Ox, Oy, Oz, sono evidentemente

$$X = bc, \; Y = ca, \; Z = ab;$$

onde

$$\int x^2 X dx = bc \int x^2 dx,$$

e qui, per estender l'integrazione a tutto il solido, è chiaro che conviene integrare tra i limiti $x = -\frac{1}{2}a$, $x = \frac{1}{2}a$. Si avrà dunque

$$\int x^2 X dx = \frac{bc}{3}\left(\frac{a^3 - (-a)^3}{8}\right) = \frac{m}{12}a^2,$$

ed analogamente $\int y^2 Y dy = \frac{m}{12}b^2$, $\int z^2 Z dz = \frac{m}{12}c^2$; donde le formole proposte.

2°. Nell' ELLISSOIDE rappresentata dall' equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

i momenti d'inerzia intorno agli assi rettangolari Ox, Oy, Oz sono:

$$mS_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2),$$

$$mS_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2), \quad \text{dove} \quad m = \frac{4}{3}abc\pi.$$

$$mS_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2),$$

Per vedere come la prima di queste formole nasca dalla

$$mS_x = \int y^2 Y dy + \int z^2 Z dz,$$

osserviamo che la sezione Z fatta nell' ellissoide da un piano perpendicolare ad Oz e corrispondente all' ascissa z, è l' ellisse rappresentata dall' equazione

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1,$$

e di cui i semi-assi sono le due lunghezze misurate dai prodotti

$$a\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad b\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Per ottenere l' area Z di quest' ellisse dovendosi moltiplicare i due semi-assi pel numero π, si avrà

$$Z=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Ciò posto, integrando tra i limiti $z=-c$, $z=c$, si otterrà

$$\int z^2Zdz=\pi ab\int\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz=\pi abc^3\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{15}\pi abc^3,$$

ossia

$$\int z^2Zdz=\frac{m}{5}c^2.$$

Si ha del pari

$$\int y^2Ydy=\frac{m}{5}b^2,$$

e quindi la prima delle formole proposte, e per ragion di simmetria le altre due.

232. **Solidi di rivoluzione**. *Quesito.* Un solido essendo generato dalla rivoluzione di una curva piana $y=y(x)$ intorno all'asse Ox, per quali formole si possono determinare i momenti d'inerzia mS_x, mS_y del solido relativi l' uno all'asse Ox di rotazione, e l'altro all' asse Oy, perpendicolare al primo nel punto arbitrario O?

Risposta. Per le formole

$$(a)\qquad mS_x=\frac{\pi}{2}\int y^4dx,$$

$$(b)\qquad mS_y=\frac{1}{2}mS_x+\pi\int y^2x^2dx.$$

Dim. Il solido di rivoluzione si concepisca come un aggregato di parallelepipedi dm compresi tra i meridiani consecutivi, ed aventi per espression generale (134. 2°.)

$$dm = rd\omega\, d^2A\,,$$

dove $d^2A = drdx$ è un elemento dell'area A della curva generatrice situato alla distanza r dall'asse Ox, estendendosi questa distanza dall'asse fino alla stessa curva. Ciò posto, per la definizione de'momenti d'inerzia si avrà

$$mS_x = \Sigma(y^2 + z^2)dm = \Sigma r^2\, dm\,,$$
$$mS_y = \Sigma(z^2 + x^2)dm = \Sigma(r^2 sen^2.\omega + x^2)dm\,,$$

essendo ω l'angolo onde il *meridiano mobile* (Ox, r) devia dal meridiano fisso (Ox, y), e per conseguente $y = r cos.\omega$, $z = r\ sen.\omega$. Ora sostituiamo

$$dm = d\omega . rdrdx\,,$$

ed eseguiamo una prima integrazione rispetto ad ω, da $\omega = 0$ fino ad $\omega = 2\pi$. Essendo tra questi limiti

$$\int d\omega = 2\pi\,,\quad \int sen^2.\omega\, d\omega = \int \frac{1 - cos.2\omega}{2}\, d\omega = \pi\,,$$

si otterrà primieramente

$$mS_x = 2\pi\int\int r^3 drdx\,,\ mS_y = \tfrac{1}{2}\, mS_x + 2\pi\int\int rdr.x^2dx\,.$$

Integriamo di nuovo rispetto ad r, da $r = 0$ fino ad $r = y$, intendendo qui per y l'*ordinata* della curva generatrice del solido, $y = y(x)$. Si avranno le formole proposte (a), (b).

233. *Coroll.* Il momento d'inerzia mS del solido intorno ad una retta (y), perpendicolare all'asse Ox di rotazione nel centro G di gravità, sarà

$$(c)\qquad mS = mS_y - mD^2\,,$$

essendo D la distanza OG (207).

Passiamo ad applicare le formole (a), (b), (c) al *cono*, al *segmento sferico* e sue varietà, ed al *cilindro retto* e sue varietà.

234. Nel **cono retto** del vertice O, di altezza $= a$, e di base del raggio $= r$, sarà

$$mS_x = \frac{3}{10} mr^2 , \quad \text{essendo} \quad m = \frac{1}{3} \pi r^2 a ,$$

$$mS_y = \frac{3}{20} mr^2 + \frac{3}{5} ma^2 ,$$

$$mS = \frac{3}{20} mr^2 + \frac{3}{80} ma^2 .$$

Questi risultati si ottengono dall' integrare la (a) e la (b), ed osservando che l' equazion della linea generatrice del cono è

$$y = \frac{r}{a} x , \quad \text{e} \quad D = \frac{3}{4} a .$$

235. Nel **segmento sferico** avente per altezza x, e per raggio della base, $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$, si troverà

$$mS_x = \pi x^3 \left(\frac{2r^2}{3} + \frac{x^2}{10} - \frac{rx}{2} \right) ,$$

$$mS_y = \pi x^3 \left(\frac{r^2}{3} - \frac{3}{20} x^2 + \frac{rx}{4} \right) .$$

Poichè, essendo $y^2 = 2rx - x^2$, si ha, tra i limiti $x = 0$ ed x qualsivoglia :

$$\int y^4 dx = \int (4r^2x^2 + x^4 - 4rx^3) dx = x^3 \left(\frac{4r^2}{3} + \frac{x^2}{5} - rx \right) ,$$

$$\int x^2 y^2 dx = \int (2rx^3 - x^4) dx = x^4 \left(\frac{r}{2} - \frac{x}{5} \right) .$$

Così, se il segmento si compie nell' *intera sfera*, fatto $x = 2r$, si trova

$$mS_x = \frac{2}{5} mr^2 ,$$

$$mS_y = \frac{7}{5} mr^2 , \quad \text{essendo} \quad m = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

E se il segmento consiste in un *emisfero*, fatto $x = r$, si trova

$$mS_x = \frac{2}{5} mr^2 ,$$

$$mS_y = \frac{26}{40} mr^2 , \quad \text{essendo} \quad m = \frac{2}{3} \pi r^3 .$$

Inoltre la formola $mS = mS_y - mD^2$, essendo $D = \frac{5}{8} r$, somministra

$$mS = mr^2 \left(\frac{26}{40} - \frac{25}{64} \right) = \frac{83}{320} mr^2 .$$

236. Nel **cilindro retto** di raggio $= r$ e di altezza $= a$, se si prende il centro di gravità per l' origine O dell' asse Ox di rotazione e dell'asse Oy perpendicolare ad Ox, sarà

$$mS_x = \frac{1}{2} mr^2 ,$$

$$mS_y = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} ma^2 , \quad \text{ed} \quad m = \pi r^2 a :$$

risultati che si ottengono ponendo $y = r$ nelle (a) e (b), e poscia integrando tra i limiti $x = -\frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$.

237. *Coroll.* 1°. Se il cilindro si ristringe in un filo di raggio infinitesimo $= r$, e però anche se si riduce ad *una retta* $= a$, si ha

$$mS_y = \frac{1}{12} ma^2, \text{ ed } m = a,$$

vale a dire: Il momento d' inerzia di *una retta* $= a$, rispetto ad un asse Oy perpendicolare alla retta nel suo punto di mezzo, è

$$= \frac{1}{12} ma^2 = \frac{1}{12} a^3 .$$

238. *Coroll.* 2°. Se il cilindro diviene una sottilissima rotella di altezza a infinitesima, e però se si riduce ad un *circolo* ($m = \pi r^2$), si ha

$$mS_x = \frac{1}{2} mr^2 , \quad mS_y = \frac{1}{4} mr^2 ,$$

cioè: Il momento d' inerzia di *un circolo di raggio* $= r$, se si prende rispetto al suo centro, è $= \frac{1}{2} mr^2$, e se si prende rispetto ad un diametro, è $= \frac{1}{4} mr^2$, dove $m = \pi r^2$.

Coroll. 3°. Se un *tubo cilindrico* (di cui a sia l' altezza, ed r, $r + d$ i raggi delle due superficie laterali *interna ed esterna*) si riguardi come la differenza di due cilindri, si vedrà che per siffatto tubo le tre quantità m, mS_x, mS_y diventano (232)

$$m = \pi a [(r + d)^2 - r^2] ,$$

$$mS_x = \frac{1}{2} \pi a [(r + d)^4 - r^4] = \frac{1}{2} m [(r + d)^2 + r^2] ,$$

$$mS_y = \frac{1}{2} mS_x + \frac{1}{12} ma^2 ,$$

vale a dire: Il momento d' inerzia di un *tubo cilindrico* se si prende intorno all' asse Ox di simmetria, è $= \frac{m}{2} [r^2 + (r + d)^2]$, e se si prende intorno ad una retta Oy perpendicolare al detto asse nel centro di gravità, è $= \frac{1}{2} mS_x + \frac{1}{12} ma^2$.

Coroll. 4°. Se il tubo si riduce ad un anello di cui sia infinitesima l' altezza a, e però anche se si riduce alla periferìa di un circolo di raggio $= r$, sarà

$$mS_x = mr^2 \,, \quad mS_y = \frac{1}{2} mr^2 \,, \text{ ed } m = 2r\pi \,,$$

vale a dire: Il momento d' inerzia della *periferia di un circolo* se si prende rispetto al centro, è $= mr^2$; e se si prende rispetto ad un diametro, è $= \frac{1}{2} mr^2$, essendo $m = 2r\pi$.

CAPO III.

Teoria generale de' momenti d'inerzia.

§. 1°. *Assi d'inerzia divergenti da un punto. Le loro lunghezze dipendono dai raggi corrispondenti di un' ellissoide; loro espressione nel cangiamento delle coordinate.*

239. Definizione. *Se il momento d' inerzia intorno ad un asse si rappresenta sull' asse con un proporzionale segmento così, che la sua lunghezza sia eguale ad esso momento diviso per la massa del corpo, questo segmento* verrà chiamato **asse d'inerzia.** Per esempio: Dato il momento d' inerzia mS_x intorno all' asse Ox, se sopra Ox si prenda un segmento $OA = S_x$, OA sarà l'asse d' inerzia del momento $= mS_x$.

N. B. I momenti d' inerzia mS_x, mS_y, mS_z, ed i momenti complessi mS_{yz}, mS_{zx}, mS_{xy} verranno denotati in appresso per

$$mA\,,\; mB\,,\; mC\,;\quad mA'\,,\; mB'\,,\; mC'\,.$$

240. Quesito. *Dati i momenti d' inerzia ed i momenti complessi rispetto a tre assi xyz, coordinati ad angolo retto in un punto O, per qual formola si determina il momento d' inerzia mS intorno ad un asse OS di cui sia data la direzione (l, m, n)?*

Risposta. Per la formola (*)

$$(1)\qquad S = \begin{array}{l} Al^2 \\ Bm^2 \\ Cn^2 \end{array} - 2\left|\begin{array}{l} A'mn \\ B'nl \\ C'lm\,. \end{array}\right.$$

(*) I termini omologhi relativi agli assi Ox, Oy, Oz, ove siano da sommarsi, si scriveranno spesso gli uni sotto gli altri, come si fa nell' addizione de' numeri.

Dimostrazione. Sull' asse d' inerzia OS si prenda la lunghezza $O1 = 1$, risultante di l, m, n, e da O condotta ad un punto qualsivoglia (x, y, z) del corpo la retta $OM = \rho$ (*fig.* 60), si guidi ad OS la perpendicolare $PM = r$. Ciò fatto, se l' area del parallelogrammo costruito sulle due rette $O1$, OM, e che è $= O1.\rho\,sen.(S\rho) = r$, si proietta sopra i tre piani yz, zx, xy, le proiezioni saranno (V. *App.*)

$$mz - ny\,,\quad nx - lz\,,\quad ly - mx\,;$$

e come il quadrato dell'area risultante è uguale alla somma de'quadrati dell' aree componenti, così avremo

$$r^2 = \left\{\begin{array}{l}(mz-ny)^2\\(nx-lz)^2\\(ly-mx)^2\end{array}\right. = \begin{array}{r}l^2(y^2+z^2)\\m^2(z^2+x^2)-2\\n^2(x^2+y^2)\end{array}\left|\begin{array}{l}mnyz\\nl\,zx\\lm\,xy\,.\end{array}\right.$$

Se quest' equazione si moltiplichi per l'elemento materiale dm situato nel punto (x, y, z), e poi si sommi con tutte l' equazioni analoghe relative agli altri punti materiali del corpo, otterremo

$$\Sigma r^2dm = \begin{array}{r}l^2\,\Sigma(y^2+z^2)dm\\m^2\,\Sigma(z^2+x^2)dm-2\\n^2\,\Sigma(x^2+y^2)dm\end{array}\left|\begin{array}{l}mn\,\Sigma yzdm\\nl\,\Sigma zxdm\\lm\,\Sigma xydm\,,\end{array}\right.$$

e quindi l' equazione proposta (1).

Coroll. 1°. Nella direzione (l, m, n) dell' asse d' inerzia OS si prenda un segmento $Ov = v$ la cui lunghezza sia determinata dall' equazione

$$(2)\qquad Sv^2 = 1\,,$$

e per x, y, z, si convenga d' intendere le coordinate del punto dove termina Ov, onde si abbia

$$\mathrm{x} = lv\,,\quad \mathrm{y} = mv\,,\quad \mathrm{z} = nv\,.$$

Ciò convenuto, la formola (1), moltiplicata per v^2, diventa

$$(3) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2(A'yz + B'zx + C'xy) = 1\,,$$

e fa manifesta la proposizione seguente:

Se in un dato sistema di punti materiali s' intendano determinati intorno ad un punto arbitrario O tutti i possibili assi d'inerzia OS, e se sopra ciascuno di essi s' intenda misurato un raggio Ov uguale all' unità divisa per la radice quadrata dell' asse d' inerzia corrispondente $\left(v = \frac{1}{\sqrt{S}}\right)$, *tutti questi raggi v termineranno alla superficie di un' ellissoide di cui il punto O sarà il centro.* Questa superficie si dirà **l' ellissoide d' inerzia del punto** *O;* e quando il punto *O* si confonde col centro *G* di gravità, si dirà col Sig. Poinsot l' **ellissoide centrale.**

Coroll. 2°. Nella (3) si trasformino le coordinate x, y, z in altre x', y', z' per mezzo delle note formole

$$x = lx' + l'y' + l''z'\,,$$

$$y = mx' + m'y' + m''z'\,,$$

$$z = nx' + n'y' + n''z'\,;$$

l' equazione (3) prenderà la forma

$$(3)' \qquad \begin{matrix} A_1 x'^2 \\ B_1 y'^2 \\ C_1 z'^2 \end{matrix} - 2 \left| \begin{matrix} A'_1 y'z' \\ B'_1 z'x' \\ C'_1 x'y' \end{matrix} \right. = 1\,,$$

dove de' sei coefficienti basta determinare i due A_1, C'_1, per iscoprire la legge che presiede alla formazione di tutti. Ora, se nell'atto della sostituzione cerchiamo solamente il coefficiente totale di x'^2, e poi quello di $x'y'$, si trova a colpo d' occhio :

$$A_1 = \begin{matrix} Al^2 \\ Bm^2 \\ Cn^2 \end{matrix} - 2 \left| \begin{matrix} A'mn \\ B'nl \\ C'lm \end{matrix} \right. ,$$

$$-C'_1 = \begin{matrix} All' \\ Bmm' \\ Cnn' \end{matrix} - \left| \begin{matrix} A'(mn' + m'n) \\ B'(nl' + n'l) \\ C'(lm' + l'm) \end{matrix} \right. ,$$

e si vede che nell' espression di A_1, coefficiente di x'^2, non entra che la direzione (l, m, n) di x'; che nell' espressione di C'_1, coefficiente di $x'y'$, non entrano che le direzioni (l, m, n) (l', m', n') di x', y'; onde è manifesta la legge con cui si esprimono i sei coefficienti dell' equazione (3)'.

a). Se per abbreviare si fa

$$L = \frac{1}{2}\frac{dS}{dl} = Al - C'm - B'n ,$$

$$M = \frac{1}{2}\frac{dS}{dm} = Bm - A'n - C'l ,$$

$$N = \frac{1}{2}\frac{dS}{dn} = Cn - B'l - A'm ;$$

ed

$$L' = Al' - C'm' - B'n' ,$$
$$M' = Bm' - A'n' - C'l' ,$$
$$N' = Cn' - B'l' - A'm' ;$$

i coefficienti A_1 e C'_1 si possono scrivere sotto la forma

$$A_1 = Ll + Mm + Nn ,$$
$$-C'_1 = Ll' + Mm' + Nn' = L'l + M'm + N'n .$$

b). Supponiamo che le direzioni (l', m', n'), (l'', m'', n'') de' due assi y', z' siano entrambe contenute nel piano dell' equazione

$$Lx + My + Nz = 0,$$

e che però soddisfacciano alla nota condizione

$$Ll' + Mm' + Nn' = 0, \quad Ll'' + Mm'' + Nn'' = 0.$$

In questa supposizione risultando

$$B'_1 = 0, \quad C'_1 = 0,$$

l' equazione $(3)'$ somministra

$$A_1 x'^2 = 1 - B_1 y'^2 - C_1 z'^2 + 2A'_1 y'z',$$

e fa palese che tutte le corde $2x'$ dell' ellissoide parallele alla direzione (l, m, n), sono divise per metà dal piano $y'z'$, ossia dal piano che rispetto alle primitive coordinate ha per equazione

$$Lx + My + Nz = 0.$$

c). *Il piano rappresentato da quest' equazione* si dice **coniugato** *alla direzione* (l, m, n), ed *ha la proprietà di dividere a metà tutte le corde dell' ellissoide che son parallele ad essa direzione.*

d). Allorchè risulta $A'_1 = 0$, $B'_1 = 0$, $C'_1 = 0$, i tre nuovi assi Ox', Oy', Oz' si dicono *coniugati tra loro*, essendochè il piano determinato da due qualunque di essi ha la proprietà di dividere a metà tutte le corde parallele al terzo.

In generale : *Le direzioni* (l, m, n), (l', m', n') si dicono **coniugate tra loro** *se soddisfanno alla relazione*

$$Ll' + Mm' + Nn' = 0;$$

ed i raggi dell' ellissoide che vanno secondo queste due direzioni coniugate, sono tali che, nel piano in cui son contenuti, ciascuno dimezza le corde parallele all' altro.

e). L' ellissoide d' inerzia del punto O essendo rappresentata tanto dalla (3) che dalla (3)', se i tre nuovi assi Ox', $O'y$, Oz' sono rettangolari, i momenti d' inerzia ed i momenti complessi intorno ai medesimi, quali $mS_{x'}$, $mS_{x'y'}$, si avranno dalle formole $S_{x'} = A_1$, $S_{x'y'} = C'_1$, equivalenti alle

$$\frac{1}{m}\int(y'^2 + z'^2)dm = \frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dl}l + \frac{dS}{dm}m + \frac{dS}{dn}n\right),$$

$$-\frac{1}{m}\int x'y'dm = \frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dl}l' + \frac{dS}{dm}m' + \frac{dS}{dn'}n'\right).$$

---

§. 2°. *Gli assi principali d'inerzia di un punto O sono dati in lunghezza dalle radici di un'equazione cubica, ed hanno la proprietà di esser tre assi permanenti di rotazione e rettangolari tra loro.*

241. Definizione. Un asse d' inerzia uscente da un punto O si dice **principale**, se gode la proprietà del *massimo* e del *minimo*: vale a dire *se*, *per uno spostamento infinitesimo nella* **direzione**, *il suo* **valore** *non cangia che di un infinitesimo di ordine superiore.*

242. Proposizione. *Gli assi principali d' inerzia di un punto O sono dati in lunghezza dalle tre radici dell'equazione cubica*

$$(\sigma) \qquad (\sigma - A)(\sigma - B)(\sigma - C) - \left|\begin{array}{l}(\sigma - A)A'^2 \\ (\sigma - B)B'^2 \\ (\sigma - C)C'^2\end{array}\right. + 2A'B'C' = 0,$$

ed hanno la proprietà di esser tre assi permanenti di rotazione nel centro comune O, e rettangolari tra loro.

Dimostrazione.

1°. Tutti gli assi d' inerzia del punto O sono rappresentati dai diversi valori che prende l' asse OS nella formola (240)

$$S = Ll + Mm + Nn ,$$

allorchè si cangia in tutti i modi possibili la direzione (l, m, n), ed è palese che tutti questi valori debbono riuscir positivi, tale essendo ogni momento d' inerzia. Ora ciascuno de' tre elementi l, m, n essendo compreso tra 0 e ± 1, e tutti e tre non potendo essere uguali a zero, è chiaro che il polinomio $(Ll + Mm + Nn)$ nel suo variare avrà sempre un valore finito e reale, e che per conseguente, in mezzo a tutti questi valori possibili, dovrà esisterne certamente uno che sia il *massimo* od almeno non minore di ciascuno degli altri, ed un altro che sia il *minimo* od almeno non maggiore di alcuno degli altri.

Quando l'asse d' inerzia S è nello stato *massimo* o *minimo*, dee godere della nota proprietà, che il suo differenziale dS risulti $= 0$; la qual proprietà significa che, per uno spostamento infinitesimo nella direzione (l, m, n), il valore di OS non cangia che per un infinitesimo di ordine superiore.

E poichè oltre $dS = 0$, si ha pure

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 ,$$

e per conseguenza $ldl + mdm + ndn = 0$, è palese che la *direzione* (l, m, n) ed il *valore* di un *asse principale* si dee ricavare dalle due equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} Ldl + Mdm + Ndn = 0 , \\ ldl + mdm + ndn = 0 . \end{cases}$$

A quest' uopo conviene: 1°. eliminare da esse una qualunque delle variazioni dl, dm, dn, per esempio dl; 2°. e nell' equazion risultante uguagliare a zero i coefficienti delle altre due variazioni dm, dn, le quali rimangono affatto arbitrarie.

Per eliminare dl, usiamo il metodo de' moltiplicatori. Dalla seconda delle (1) moltiplicata per σ sottragghiamo la prima: si avrà

$$(\sigma l - L)dl + (\sigma m - M)dm + (\sigma n - N)dn = 0 .$$

In quest' equazione tutti e tre i coefficienti di dl, dm, dn si debbono porre $= 0$: il primo, per determinare il moltiplicatore σ in modo che resti eliminato dl ; e gli altri due, perchè l' equazione resti verificata, qualunque sieno le variazioni dm, dn, conforme al metodo de' massimi e de' minimi. Avremo quindi

$$(2) \qquad \sigma l - L = 0 , \quad \sigma m - M = 0 , \quad \sigma n - N = 0 ,$$

le quali, moltiplicate rispettivamente per l, m, n e sommate, somministrano

$$\sigma = Ll + Mm + Nn .$$

Questo risultato significa, che la incognita σ rappresenta l'asse d'inerzia corrispondente a quella direzione (l, m, n) che è propria a renderlo *asse principale*.

L' equazioni (2), ove ad L, M, N si sostituiscano i loro valori, diventano

$$(2)' \qquad \begin{aligned} (\sigma - A)l + C'm + B'n &= 0 , \\ (\sigma - B)m + A'n + C'l &= 0 , \\ (\sigma - C)n + B'l + A'm &= 0 . \end{aligned}$$

Per eliminare da esse l, m, n, osserviamo che date le due equazioni

$$ax + by + cz = 0 , \quad a'x + b'y + c'z = 0$$

se si elimina la z e poi se si usa il principio di simmetrìa, nasce subito la proporzione

$$\frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a} = \frac{z}{ab' - a'b} .$$

Applicando la regola contenuta in questa proporzione alle due ultime delle (2)', si raccoglie

$$\frac{l}{(\sigma-B)(\sigma-C)-A'^2}=\frac{m}{A'B'-(\sigma-C)C'}=\frac{n}{C'A'-(\sigma-B)B'}.$$

I denominatori di queste frazioni si sostituiscano ai numeratori l, m, n nella prima delle (2)': otterremo l' equazione cubica

$$(\sigma)\qquad (\sigma-A)(\sigma-B)(\sigma-C)-\left|\begin{matrix}(\sigma-A)A'^2\\(\sigma-B)B'^2\\(\sigma-C)C'^2\end{matrix}\right.+2A'B'C'=0,$$

ossia

$$\sigma^3-P\sigma^2+Q\sigma-R=0,$$

ponendo

$$P=\left|\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right., \quad Q=\left|\begin{matrix}BC-A'^2\\CA-B'^2,\\AB-C'^2\end{matrix}\right. \quad R=ABC-2A'B'C'-\left|\begin{matrix}AA'^2\\BB'^2\\CC'^2.\end{matrix}\right.$$

Quest' equazione, le cui radici rappresentano i valori degli assi principali del punto O, avrà certo due radici reali, essendosi dimostrata reale nel punto O l' esistenza di due assi d' inerzia, l'uno *massimo* e l' altro *minimo*. Ma se due radici sono reali, non potrà non esserlo anche la terza.

2°. Dico in secondo luogo che ognuno di essi è un asse permanente di rotazione, avente in O il centro di permanenza. Infatti se si prende per asse delle x uno degli assi principali, gli elementi l, m, n della sua direzione diventano $l=1$, $m=0$, $n=0$, e l' equazioni (2)' si riducono a

$$\sigma=A, \quad C'=0, \quad B'=0,$$

equivalenti alle

$$m\sigma=\int(y^2+z^2)dm, \quad \int xydm=0, \quad \int xzdm=0;$$

e già si è dimostrato che un asse Ox, perpendicolare a due altri Oy, Oz, quando rende nulli i momenti complessi che lo includono, è un asse permanente, e che O è il centro di permanenza. E viceversa, ove si abbia $\sigma - A = 0$, $C' = 0$, $B' = 0$, le $(2)'$ sono verificate dalla direzione ($l = 1$, $m = 0$, $n = 0$) dell'asse Ox.

E ne segue che, se i punti materiali sono *disposti in simmetrìa* intorno all' asse Ox in modo che ad un elemento dm situato nel punto (x, y, z) corrisponda sempre un altro elemento eguale, situato nel punto simmetrico (x, $-y$, $-z$), ciascuna delle due somme $\Sigma xydm$, $\Sigma xzdm$ sarà $= 0$, componendosi di termini uguali a due a due e di segno contrario. La retta Ox sarà quindi un asse principale d' inerzia del punto O.

3°. Dico in terzo luogo che, se le tre radici σ sono disuguali, ciascuno degli assi principali del punto O ha una direzione determinata, e che le tre direzioni saranno perpendicolari tra loro.

Denotiamo per s, s', s'' i valori disuguali delle radici dell' equazione cubica (σ), e sieno (l, m, n), (l', m', n'); (l'', m'', n'') le corrispondenti direzioni.

L' equazioni (2) diverranno

$$\begin{cases} sl = L, \\ sm = M, \\ sn = N, \end{cases} \qquad \begin{cases} s'l' = L', \\ s'm' = M', \\ s'n' = N'. \end{cases}$$

Sommiamo l' equazioni di ciascuno di questi due gruppi, rispettivamente moltiplicate, le prime per l', m', n', e le seconde per l, m, n: le somme saranno

$$s(ll' + mm' + nn') = Ll' + Mm' + Nn',$$
$$s'(ll' + mm' + nn') = L'l + M'm + N'n,$$

che sottratte l' una dall' altra (essendo identici i secondi membri) somministrano

$$(s' - s)(ll' + mm' + nn') = 0,$$

ossia $\qquad (s' - s)\cos.(ss') = 0, \quad$ donde $\quad \cos.(ss') = 0.$

Similmente si troverebbe $\cos.(ss'') = 0$, $\cos.(s's'') = 0$.

È adunque certo, che le direzioni de' tre assi principali d' inerzia s, s', s'' sono rettangolari tra loro.

Riferendo a questi assi le coordinate x', y', z', l' ellissoide d' inerzia del punto O (240, 2°.) sarà rappresentata dall'equazione

$$(3)'' \qquad sx'^2 + s'y'^2 + s''z'^2 = 1 .$$

Supponiamo ora che due delle tre radici s, s', s'' diventino uguali e che sia $s = s'$. Cotesta ellissoide sarà di rivoluzione intorno all' asse Oz':

$$s(x'^2 + y'^2) + s''z'^2 = 1 ,$$

e per conseguente, oltre l' asse principale s'' diretto secondo Oz', tutti gli assi d' inerzia contenuti nel piano $x'y'$ dell' equatore saranno principali, ed uguali ciascuno ad s.

Supponiamo ancora che risultino uguali le tre radici s, s', s'': l' ellissoide (3)'' si cangerà in una sfera

$$s(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 1 ,$$

e per conseguente tutti gli assi d' inerzia del punto O saranno principali, ed uguali ciascuno ad s.

---

§. 3°. *Dimostrazione diretta della realità delle radici dell'equazione cubica (σ). Condizione dell' uguaglianza di due o di tutte e tre le radici.*

242. Affine di dare all'equazioni che seguono la forma più facile a ricordare, conveniamo di riguardare il polinomio che è nel primo membro della equazione

$$(\sigma) \qquad (\sigma - A)(\sigma - B)(\sigma - C) - \left|\begin{array}{l}(\sigma - A)A'^2 \\ (\sigma - B)B'^2 \\ (\sigma - C)C'^2\end{array}\right. + 2A'B'C' = 0 ,$$

e che denoteremo per (σ), come una *quantità funzione* delle

$$\sigma,\ A,\ B,\ C,\ A',\ B',\ C',$$

prese per *variabili indipendenti*. In tale supposizione si hanno i seguenti gruppi di formole, o a dir meglio di notazioni utilissime

$$-\frac{d(\sigma)}{dA}=(\sigma-B)(\sigma-C)-A'^2, \qquad -\tfrac{1}{2}\frac{d(\sigma)}{dA'}=(\sigma-A)A'-B'C',$$

$$-\frac{d(\sigma)}{dB}=(\sigma-C)(\sigma-A)-B'^2, \qquad -\tfrac{1}{2}\frac{d(\sigma)}{dB'}=(\sigma-B)B'-C'A',$$

$$-\frac{d(\sigma)}{dC}=(\sigma-A)(\sigma-B)-C'^2, \qquad -\tfrac{1}{2}\frac{d(\sigma)}{dC'}=(\sigma-C)C'-A'B',$$

donde le seguenti identità notabili, che si possono verificare a colpo d' occhio:

$$(\sigma-A)(\sigma)=\frac{d(\sigma)}{dB}\cdot\frac{d(\sigma)}{dC}-\frac{1}{4}\left[\frac{d(\sigma)}{dA'}\right]^2,$$

$$(\sigma-B)(\sigma)=\frac{d(\sigma)}{dC}\cdot\frac{d(\sigma)}{dA}-\frac{1}{4}\left[\frac{d(\sigma)}{dB'}\right]^2,$$

$$(\sigma-C)(\sigma)=\frac{d(\sigma)}{dA}\cdot\frac{d(\sigma)}{dB}-\frac{1}{4}\left[\frac{d(\sigma)}{dC'}\right]^2;$$

$$-\frac{d(\sigma)}{d\sigma}=\frac{d(\sigma)}{dA}+\frac{d(\sigma)}{dB}+\frac{d(\sigma)}{dC},$$

essendo d' altra parte [a causa di $(\sigma)=(\sigma-s)(\sigma-s')(\sigma-s'')$]

$$\frac{d(\sigma)}{d\sigma}=(\sigma-s)(\sigma-s')+(\sigma-s')(\sigma-s'')+(\sigma-s'')(\sigma-s).$$

243. *La realità delle radici dell' equazione cubica (σ) si può inferire direttamente dalle identità di cui è tipo la*

$$(\sigma-A)(\sigma)=\frac{d(\sigma)}{dB}\cdot\frac{d(\sigma)}{dC}-\frac{1}{4}\left[\frac{d(\sigma)}{dA'}\right]^2.$$

Dim. A questo fine supponiamo le quantità A, B, C disposte per ordine di grandezza:

$$A < B < C;$$

e segnate per s_1, s_2 le radici dell' equazione $\frac{d(\sigma)}{dC} = 0$, ossia della

$$(\sigma - A)(\sigma - B) - C'^2 = 0,$$

osserviamo che esse sono sempre reali e comprese, l'una s_1 tra $-\infty$ e la minore delle due quantità A, B, e l'altra s_2 tra la maggiore di queste e $+\infty$. Infatti se nell' equazione si fa

$$\sigma = A, \quad \sigma = B,$$

il risultato sarà $= - C'^2$, quantità negativa; ma se si fa

$$\sigma = -\infty, \quad \sigma = +\infty,$$

il risultato sarà positivo.

N. B. Si avverta che le due radici reali s_1, s_2, dovendo soddisfare alla gradazione

$$s_1 < A < B < s_2,$$

non potranno risultare uguali se non quando sia $s_1 = A = B = s_2$, e però $C' = 0$.

Le due radici s_1, s_2 della $\frac{d(\sigma)}{dC} = 0$ si suppongano disuguali e diverse dalle s, s', s'', e si sostituiscano successivamente nella identità

$$(\sigma - A)(\sigma) = \frac{d(\sigma)}{dB} \cdot \frac{d(\sigma)}{dC} - \frac{1}{4}\left[\frac{d(\sigma)}{dA'}\right]^2;$$

si avrà

$$(s_1 - A)(s_1) = -\frac{1}{4}\left[\frac{d(s_1)}{dA'}\right]^2, \quad (s_2 - A)(s_2) = -\frac{1}{4}\left[\frac{d(s_2)}{dA'}\right]^2.$$

In ciascuna di quest' equazioni il secondo membro essendo essenzialmente negativo, i due fattori del primo membro debbono aver segno contrario. Dunque, poichè il fattore $s_1 - A$ è negativo, il fattore (s_1) dovrà esser *positivo*; e poichè il fattore $s_2 - A$ è positivo, il fattore (s_2) dovrà esser *negativo*. D'altronde, secondochè nel polinomio (σ) si fa $\sigma = -\infty$, ovvero $\sigma = \infty$, si ottiene un risultato *negativo* o *positivo*.

È adunque certo che, se nel polinomio (σ) si fa successivamente

$$\sigma = -\infty, \ = s_1, \ = s_2, \ = +\infty,$$

i risultati della sostituzione offrono i segni:

$$-, \quad +, \quad -, \quad +,$$

e che per conseguenza le tre radici s, s', s'' di $(\sigma) = 0$, sussistenti tra siffatti limiti, sono reali.

244. Quesito. *Quali relazioni debbono sussistere tra le sei quantità A, B, C, A', B', C', perchè due delle tre radici s, s', s'' dell' equazione cubica $(\sigma) = 0$ risultino eguali?*

Risposta. Le relazioni

$$(1) \qquad \frac{d(\sigma)}{dA} = 0, \quad \frac{d(\sigma)}{dB} = 0, \quad \frac{d(\sigma)}{dC} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d(\sigma)}{dA'} = 0, \quad \frac{d(\sigma)}{dB'} = 0, \quad \frac{d(\sigma)}{dC'} = 0,$$

delle quali le prime tre sono comprese nelle tre ultime, e viceversa.

Dim. Se in ciascuna dell'equazioni (1) denotiamo in generale per s_1 la più piccola, e per s_2 la più grande delle due radici, si raccoglie dalle cose precedenti che delle tre radici s, s', s'' dell'equazione cubica $(\sigma) = 0$, disposte in ordine di grandezza, la prima s è inferiore al più piccolo de' tre valori di s_1; che la seconda s' è intermedia tra il maggiore de' valori di s_1 ed il minore de' tre valori di s_2; e che la terza s'' è superiore al più grande de' valori di s_2.

Pongasi ora che due delle tre radici s, s', s'' diventino eguali. Se sono le due più piccole s, s', dovranno esse necessariamente coincidere coi tre valori di s_1; e se sono le due più grandi s', s'', coi tre valori di s_2. Ne segue, in entrambi i casi, che quando l'equazione cubica ha una radice doppia $= \sigma$, questa radice dovrà verificare tutte e tre l'equazioni (1).

Ma, a causa della identità di cui è tipo la

$$(\sigma - A)(\sigma) = \frac{d(\sigma)}{dB} \cdot \frac{d(\sigma)}{dC} - \frac{1}{4}\left[\frac{d(\sigma)}{dA'}\right]^2,$$

l'evanescenza simultanea di (σ) e delle (1) trae seco necessariamente l'evanescenza delle (2).

a). Coroll. I. Se ciascuna delle tre quantità A', B', C' è diversa da zero, le (2) si risolvono nelle seguenti che danno il valor comune della radice doppia σ:

$$\sigma = A + \frac{B'C'}{A'} = B + \frac{C'A'}{B'} = C + \frac{A'B'}{C'},$$

onde la terza radice s (a causa di $2\sigma + s = A + B + C$) sarà

$$s = A + B + C - 2\sigma.$$

b). Non vi sarebbe radice doppia se delle A', B', C' una sola fosse $= 0$; perchè, supponendo per esempio la sola $A' = 0$, l'equazione $\frac{d(\sigma)}{dA'} = 0$ darebbe l'assurdo $B'C' = 0$.

Ma se delle A', B', C' due sono eguali a zero, per esempio $0 = B' = C'$, allora le (1) e (2) saranno tutte verificate da

$$\sigma = A$$

purchè lo sia $\frac{d(\sigma)}{dA} = 0$, vale a dire purchè tra le quantità A, B, C, A' sussista la relazione

$$(A - B)(A - C) - A'^2 = 0.$$

c). Coroll. II. Non possono riuscire uguali tra loro le tre radici della $(\sigma) = 0$, senza che sia

$$A = B = C, \quad 0 = A' = B' = C'.$$

Imperocchè le tre radici s, s', s'' non possono acquistare uno stesso valore senza che si confondano insieme i limiti intermedii che le separano, vale a dire senza che si confondano con esse le radici s_1, s_2 di ciascuna delle (1), e ciò non può accadere (come già si è avvertito *pag.* 239) se non quando si ha

$$A = B = C, \quad 0 = A' = B' = C'.$$

---

§. 4.° *Formole che danno le direzioni de' tre assi principali d' inerzia. Caso in cui i punti si riferiscono ai tre assi principali del centro di gravità.*

245. Nel §. 2° (*pag.* 234) si è trovata la relazione

$$\frac{l}{(\sigma - B)(\sigma - C) - A'^2} = \frac{m}{A'B' - (\sigma - C)C'} = \frac{n}{C'A' - (\sigma - B)B'},$$

la quale, per la permutazion circolare

$$(l, m, n), \quad (m, n, l), \quad (n, l, m)$$

eseguita in corrispondenza con quella de' due gruppi di lettere (A, B, C), (A', B', C'), ne genera altre due; onde, sostituendo i simboli (*pag.* 238), si ha

$$-2\frac{d(\sigma)}{dA}l^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dC'}m^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dB'}n^{-1},$$

$$-2\frac{d(\sigma)}{dB}m^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dA'}n^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dC'}l^{-1},$$

$$-2\frac{d(\sigma)}{dC}n^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dB'}l^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dA'}m^{-1}.$$

Queste, moltiplicate rispettivamente per l^{-1}, m^{-1}, n^{-1} e combinate con la $l^2+m^2+n^2=1$, traggon seco le seguenti:

$$\frac{l^2}{\frac{d(\sigma)}{dA}}=\frac{m^2}{\frac{d(\sigma)}{dB}}=\frac{n^2}{\frac{d(\sigma)}{dC}}=\frac{-2mn}{\frac{d(\sigma)}{dA'}}=\frac{-2nl}{\frac{d(\sigma)}{dB'}}=\frac{-2lm}{\frac{d(\sigma)}{dC'}}=-\frac{1}{\frac{d(\sigma)}{d\sigma}};$$

donde

$$\frac{d(\sigma)}{dA}l^{-2}=\frac{d(\sigma)}{dB}m^{-2}=\frac{d(\sigma)}{dC}n^{-2}=-\frac{d(\sigma)}{d\sigma},$$

$$\frac{d(\sigma)}{dA'}l=\frac{d(\sigma)}{dB'}m=\frac{d(\sigma)}{dC'}n=2lmn\frac{d(\sigma)}{d\sigma}.$$

Se si chiama 2u il valor comune dell'ultime espressioni, cioè se si fa

$$\mathrm{u}=lmn\,\frac{d(\sigma)}{d\sigma},$$

si può dimostrare che si ha pure

$$\mathrm{u}=B'C'\,l+C'A'\,m+A'B'\,n.$$

Infatti si è trovato (*pag.* 234)

$$(\sigma-A)\,l+C'm+B'n=0.$$

Or questa, moltiplicata per A', è identica alla

$$[\,(\sigma-A)A'-B'C'\,]\,l+B'C'\,l+C'A'\,m+A'B'\,n=0,$$

ossia alla

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d(\sigma)}{dA'}l+\mathrm{u}=0.$$

Di qui

$$l = 2\mathrm{u} : \frac{d\,(\sigma)}{dA'}\,, \quad m = 2\mathrm{u} : \frac{d\,(\sigma)}{dB'}\,, \quad n = 2\mathrm{u} : \frac{d\,(\sigma)}{dC'}\,.$$

a). Sostituendo questi valori di l, m, n nell' espressione di u e di $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, si otterranno per determinare u e σ l'equazioni

$$\left[\frac{d(\sigma)}{dA'}\right]^{-2} + \left[\frac{d(\sigma)}{dB'}\right]^{-2} + \left[\frac{d(\sigma)}{dC'}\right]^{-2} = \frac{1}{4\mathrm{u}^2}\,,$$

$$B'C'\left[\frac{d(\sigma)}{dA'}\right]^{-1} + C'A'\left[\frac{d(\sigma)}{dB'}\right]^{-1} + A'B'\left[\frac{d(\sigma)}{dC'}\right]^{-1} = \frac{1}{2}\,,$$

l' ultima delle quali non è che una nuova forma dell' equazione cubica (σ).

b). Se, nell'equazione $(\sigma) = 0$, la quantità σ si considera come una funzione implicita delle A, B, C, A', B', C', prese per variabili indipendenti, la teoria delle derivate somministra

$$\frac{d(\sigma)}{dA} + \frac{d(\sigma)}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dA} = 0\,,$$

colle altre simili relative a B, C, A', B', C'. Ciò posto, le formole che danno i valori di l, m, n si trasformano nelle seguenti semplicissime

$$l^2 = \frac{d\sigma}{dA}\,, \quad m^2 = \frac{d\sigma}{dB}\,, \quad n^2 = \frac{d\sigma}{dC}\,,$$

$$l\,\frac{d\sigma}{dA'} = m\,\frac{d\sigma}{dB'} = n\,\frac{d\sigma}{dC'} = -\,2\,lmn\,,$$

ed $$\mathrm{u} = lmn\,\frac{d(\sigma)}{d\sigma} = \frac{d(\sigma)}{d\sigma}\left[\frac{d\sigma}{dA}\cdot\frac{d\sigma}{dB}\cdot\frac{d\sigma}{dC}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

246. *Scolio*. Se de' tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz uno solo, per esempio Ox, è diretto secondo un asse principale d' inerzia, sarà $B' = 0$, $C' = 0$, e l' equazione cubica divisa pel fattore $\sigma - A$ si ridurrà alla seguente di secondo grado

$$(\sigma) \qquad (\sigma - B)(\sigma - C) - A'^2 = 0 ,$$

donde

$$\frac{d(\sigma)}{dB} = -(\sigma - C), \quad \frac{d(\sigma)}{dC} = -(\sigma - B), \quad \frac{d(\sigma)}{dA'} = -2A' .$$

Quindi, se si vogliano determinare le direzioni (m, n) degli altri due assi principali, si potrà ricorrere ad una delle due formole (245)

$$-2\frac{d(\sigma)}{dB}m^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dA'}n^{-1}, \quad -2\frac{d(\sigma)}{dC}n^{-1} = \frac{d(\sigma)}{dA'}m^{-1} ,$$

dalle quali si trae

$$\frac{n}{m} = \frac{-A'}{\sigma - C} = \frac{\sigma - B}{-A'} = \sqrt{\frac{\sigma - B}{\sigma - C}} ,$$

essendo $A' = \sqrt{(\sigma - B)(\sigma - C)}$.

247. Problema. *Dati gli assi principali d' inerzia A, B, C del centro G di gravità, determinare gli assi principali d' inerzia di un punto qualsivoglia (α, β, γ).*

Soluzione. Pel punto O si conducano i tre assi Ox, Oy, Oz rispettivamente paralleli agli assi principali d' inerzia A, B, C del centro di gravità, cioè a Gx, Gy, Gz, e si denotino per mA_1, mB_1, mC_1 i momenti d' inerzia intorno a tali assi, e per mA', mB', mC' i momenti complessi rispetto ad (Oy, Oz), (Oz, Ox), (Ox, Oy).

Essendo nulli i momenti complessi del centro di gravità rispetto agli assi principali, fatto

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 ,$$

avremo (219)

$$\begin{cases} A_1 = A + R^2 - \alpha^2, \\ B_1 = B + R^2 - \beta^2, \\ C_1 = C + R^2 - \gamma^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} A' = \beta\gamma \\ B' = \gamma\alpha \\ C' = \alpha\beta . \end{cases}$$

Sia S un asse d' inerzia OS diretto secondo la direzione arbitraria (l, m, n). Sarà

$$S = A_1 l^2 + B_1 m^2 + C_1 n^2 - 2 \ (A'mn + B'nl + C'lm) \ ,$$

ossia, sostituendo i valori precedenti,

$$(1) \qquad S = \begin{matrix} (A + R^2) \, l^2 \\ (B + R^2) \, m^2 \\ (C + R^2) \, n^2 \end{matrix} - (\alpha l + \beta m + \gamma n)^2 .$$

Ciò posto, se si fa

$$u = \alpha l + \beta m + \gamma n,$$

ed

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2}\dfrac{dS}{dl} = (A + R^2) \, l - \alpha u \, , \\[2ex] M = \dfrac{1}{2}\dfrac{dS}{dm} = (B + R^2) \, m - \beta u \, , \\[2ex] N = \dfrac{1}{2}\dfrac{dS}{dn} = (C + R^2) \, n - \gamma u, \end{cases}$$

le direzioni principali saranno date dall' equazioni (*pag.* 234)

$$\sigma l - L = 0 \, , \quad \sigma m - M = 0 \, , \quad \sigma n - N = 0 \, ,$$

che si trasformano nelle seguenti

$$(2) \qquad l = \alpha \frac{u}{A + R^2 - \sigma}, \quad m = \beta \frac{u}{B + R^2 - \sigma}, \quad n = \gamma \frac{u}{C + R^2 - \sigma}.$$

I valori di σ, ossia degli assi principali d' inerzia del punto (α, β, γ), fatte le sostituzioni di l, m, n nella $u = \alpha l + \beta m + \gamma n$, si avranno dall' equazione cubica

$$(3) \qquad \frac{\alpha^2}{A + R^2 - \sigma} + \frac{\beta^2}{B + R^2 - \sigma} + \frac{\gamma^2}{C + R^2 - \sigma} = 1,$$

ed i valori corrispondenti di u (a causa di $l^2 + m^2 + n^2 = 1$) si avranno dall' equazione

$$(4) \qquad \left(\frac{\alpha}{A + R^2 - \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{B + R^2 - \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{C + R^2 - \sigma}\right)^2 = \frac{1}{u^2}.$$

a). Coroll. I. Ove abbiasi $\beta = 0$, $\gamma = 0$, risulta $0 = A' = B' = C'$, e la (1) diviene

$$S = Al^2 + (B + \alpha^2)m^2 + (C + \alpha^2)n^2;$$

onde si fa palese che: *Se un asse (x) è principale rispetto al centro G di gravità, sarà eziandio principale rispetto ad uno qualunque degli altri suoi punti (α, 0, 0), e di più gli altri due assi principali di questo punto saranno paralleli ai corrispondenti del centro di gravità.*

b). Coroll. II. Ove abbiasi $\alpha = 0$, risulta $A' = \beta\gamma$, $0 = B' = C'$, e la (1) diviene

$$S = (A + \beta^2 + \gamma^2)\, l^2 + (B + \gamma^2)\, m^2 + (C^2 + \beta^2)n^2 - 2\beta\gamma mn;$$

onde si fa palese che: *Tutte le rette parallele ad un asse principale Gx del centro di gravità, sono assi principali, ed hanno il centro di permanenza (β, γ) nel piano determinato dagli altri due assi principali Gy, Gz del centro di gravità.*

§. 5°. ***Momento d' inerzia di un corpo rispetto ad un piano, e sua correlazione col momento d' inerzia intorno ad un asse perpendicolare al piano.***

248. Si chiama *Momento d' inerzia di un corpo rispetto ad un piano*, la somma de' prodotti che nascono moltiplicando ciascun elemento dm del corpo pel quadrato della sua distanza dal piano. Se i momenti d' inerzia rispetto ai tre piani coordinati yz, zx, xy si denotano per ma, mb, mc, sarà

$$ma = \Sigma x^2 dm\,,\quad mb = \Sigma y^2 dm\,,\quad mc = \Sigma z^2 dm\,,$$

e per conseguente

$$A = b + c\,,\; B = c + a\,,\; C = a + b\,,$$

ed
$$A + B + C = 2\,(a + b + c).$$

249. *Prop. I.* Essendo Gx, Gy, Gz gli assi principali d' inerzia del centro G di gravità, se dal punto O (α, β, γ) si tira una retta OS secondo la direzione arbitraria (l, m, n), e poi un piano OP perpendicolare a tale retta, i momenti d' inerzia mS, mP relativi alla retta OS ed al piano OP daranno una somma costante, o indipendente dalla direzione (l, m, n), ed avremo

$$S + P = a + b + c + R^2 = \tfrac{1}{2}(A + B + C) + R^2$$

e
$$P = al^2 + bm^2 + cn^2 + (\alpha l + \beta m + \gamma n)^2.$$

Dim. Dal punto M (fig. 61), luogo (x, y, z) dell' elemento dm, abbassiamo due perpendicolari r, r_1: l' una sull' asse d' inerzia OS, e l' altra sul piano OP. La retta OM, ove si consideri come risultante tanto di (r, r_1) che di $(x - \alpha, y - \beta, z - \gamma)$, offre

$$r^2 + r_1^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2\,;$$

ed ove si projetti sopra OS, diviene

$$r_1 = l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma).$$

Ma per definizione

$$mS = \Sigma r^2 dm, \quad mP = \Sigma r_1{}^2 dm,$$

e per conseguente

$$m(S+P) = \Sigma[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]dm,$$

$$mP = \Sigma[lx + my + nz - (l\alpha + m\beta + n\gamma)]^2 dm.$$

Sviluppando i secondi membri, (a causa di $\Sigma x dm = 0$, etc, e di $\Sigma yz dm = 0$, etc.) si vedranno subito comparire l'equazioni proposte.

250. *Coroll.* Suppongasi ora che l'asse d'inerzia S vada cangiando direzione (l, m, n) intorno al punto (α, β, γ): varieranno in corrispondenza i due momenti mS, mP; e siccome la loro somma è costante, così quando l'uno divien *massimo*, l'altro sarà *minimo;* e viceversa. Di qui si raccoglie che:

In ogni punto (α, β, γ) dello spazio, ai *tre momenti principali d'inerzia intorno a tre assi* corrispondono *tre momenti principali rispetto ai tre piani perpendicolari a quegli assi*, e *viceversa;* cosicchè dai momenti d'inerzia di una specie si può subito dedurre la conoscenza de'momenti dell'altra specie.

Si esprimano per $m\sigma$, mp i momenti principali corrispondenti delle due specie, onde sia

$$\sigma + p = a + b + c + R^2;$$

sarà

$$\left\{\begin{aligned} p - a &= A + R^2 - \sigma, \\ p - b &= B + R^2 - \sigma, \\ p - c &= C + R^2 - \sigma. \end{aligned}\right.$$

Ciò posto, l'equazioni (2), (3) e (4) del n°. 247 per le quali si determinano nel punto (α, β, γ) i momenti d' inerzia principali, e le direzioni (l, m, n) de' loro assi, assumono la forma

$$(2)' \qquad l = \alpha \frac{u}{p-a}, \quad m = \beta \frac{u}{p-b}, \quad n = \gamma \frac{u}{p-c};$$

$$(3)' \qquad \frac{\alpha^2}{p-a} + \frac{\beta^2}{p-b} + \frac{\gamma^2}{p-c} = 1;$$

$$(4)' \qquad \left(\frac{\alpha}{p-a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{p-b}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{p-c}\right)^2 = \frac{1}{u^2}.$$

251. *Prop. II.* Supponendo le tre quantità a, b, c disposte nell' ordine di grandezza

$$a < b < c,$$

l' equazione

$$(p) \qquad \frac{\alpha^2}{p-a} + \frac{\beta^2}{p-b} + \frac{\gamma^2}{p-c} - 1 = 0,$$

di terzo grado rispetto all' incognita p, ha le tre radici p_1, p_2, p_3 comprese tra i limiti

$$(p)' \qquad a < p_1 < b < p_2 < c < p_3.$$

Dim. Infatti sostituendo nella (p) successivamente

$$(p = a + i, = b - i), \ (p = b + i, = c - i), \ (p = c + i, = \infty),$$

se dopo ciascuna sostituzione facciamo convergere la quantità i verso lo zero, si avranno i tre sistemi di risultati di segno contrario:

$$(+, -), \quad (+, -1), \quad (+, -).$$

Scolio. Si avverta che, a causa delle relazioni che passano tra i due gruppi di quantità (a, b, c), (A, B, C), quando le prime sono disposte secondo la gradazione

$$a < b < c ,$$

le seconde si troveranno disposte secondo la gradazione

$$A > B > C . \quad .$$

Si avverta ancora che, se si dinotano per ms_1, ms_2, ms_3, i momenti d' inerzia corrispondenti ai momenti mp_1, mp_2, mp_3, si avrà

$$s_1 + p_1 = s_2 + p_2 = s_3 + p_3 = a + b + c + R^2 = p_1 + p_2 + p_3$$

come rilevasi dalla (p).

Corollarii. Dalle relazioni $(p)'$ s' inferisce :

1°. Che delle tre radici p_1, p_2, p_3 dell'equazione (p) le due minori non possono risultare uguali tra loro senza divenire uguali a b, e senza che sia $\beta = 0$. In questo caso il luogo de' punti (α, β, γ) pe' quali si ha

$$p_1 = p_2 = b , \quad \text{e però} \left\{ \begin{array}{l} p_3 = a + c - b + R^2 , \\ s_1 = s_2 = B + R^2 , \\ s_3 = C + A - B , \end{array} \right.$$

è l' *iperbola* dell' equazione

$$\frac{\alpha^2}{b - a} + \frac{\gamma^2}{b - c} = 1 ;$$

2°. Che delle tre radici p_1, p_2, p_3 le due maggiori p_2, p_3 non possono risultare uguali tra loro senza divenire uguali a c, e senza che sia $\gamma = 0$. In questo caso il luogo de' punti (α, β, γ) pe' quali riesce

$$p_2 = p_3 = c , \quad \text{e però} \left\{ \begin{array}{l} p_1 = a + b - c + R^2 , \\ s_2 = s_3 = C + R^2 , \\ s_1 = A + B - C , \end{array} \right.$$

è l' *ellisse* dell' equazione

$$\frac{\alpha^2}{c-a}+\frac{\beta^2}{c-b}=1\ ;$$

3°. Che le radici p_1, p_2, p_3 non possono risultare tutte e tre uguali tra loro se non quando si ha

$$b=c\,,\quad \beta=0\,,\quad \gamma=0\,.$$

In questo caso, i punti (α, β, γ) in cui i momenti principali d'inerzia sono tutti uguali tra loro, si riducono a due soli, determinati dall' equazione

$$\frac{\alpha^2}{b-a}=1\ ,$$

donde

$$\alpha=\pm\sqrt{(b-a)}=\pm\sqrt{(A-B)}\ .$$

Quindi alla domanda: *Se in un corpo qualunque esistano uno o più punti intorno a cui tutti i momenti d' inerzia siano uguali tra loro*, convien rispondere: « A ciò richiedersi che de' tre momenti principali mA, mB, mC intorno al centro di gravità i due più piccoli mB, mC riescano uguali tra loro; e che, verificandosi questa condizione, esistono due soli de' punti domandati, situati sul terzo asse A, alla distanza dal centro di gravità $=\sqrt{(A-B)}$, e che, intorno a ciascuno di questi due punti, tutti gli assi d' inerzia sono eguali ad A.

---

§. 6°. *Assi principali paralleli ad una data direzione (l, m, n). Coordinate de' loro centri di parmanenza, e de' centri reciproci di percossa.*

252. *Probl. I.* Essendo dati gli assi d'inerzia A, B, C del centro G di gravità, determinare i centri di permanenza (α, β, γ) degli assi principali paralleli ad una data direzione (l, m, n).

Soluz. Si è trovato (247, 2) che le direzioni (l, m, n) degli assi principali di un punto qualsivoglia (α, β, γ) si hanno dalle formole

$$l = \alpha \frac{u}{A + R^2 - \sigma}, \quad m = \beta \frac{u}{B + R^2 - \sigma}, \quad n = \gamma \frac{u}{C + R^2 - \sigma},$$

allorchè a σ si sostituiscono successivamente le radici dell'equazione cubica (247, 3). E si è trovata pur la relazione

$$\sigma = (A + R^2)\, l^2 + (B + R^2)\, m^2 + (C + R^2)\, n^2 - u^2,$$

essendo
$$u = \alpha l + \beta m + \gamma n .$$

Ciò posto, se per abbreviare si fa

$$S_0 = Al^2 + Bm^2 + Cn^2,$$

donde
$$\sigma = S_0 + R^2 - u^2,$$

dalle formole riportate si ricavano le seguenti

$$\begin{cases} \alpha = l \dfrac{A + u^2 - S_0}{u}, \\[2ex] \beta = m \dfrac{B + u^2 - S_0}{u}, \\[2ex] \gamma = n \dfrac{C + u^2 - S_0}{u}, \end{cases}$$

che danno i centri di permanenza (α, β, γ) degli assi principali paralleli alla data direzione (l, m, n), purchè la quantità u si riguardi come una *variabile indipendente* che cangia di grandezza passando da un centro all'altro.

a). Questi valori di α, β, γ, verificando manifestamente l'equazione

$$mn(B - C)x + nl(C - A)y + lm(A - B)z = 0,$$

fanno aperto che, nel piano da essa rappresentato, sono tutti compresi i suddetti centri di permanenza.

253. *Probl.* II. Dal centro G di gravità condotta la linea Gx' secondo la direzione (l, m, n) (fig. 62), sia C un centro qualsivoglia di permanenza (α, β, γ) a cui corrisponda il centro di percossa P, *reciproco* del punto O: la retta CP, incontrando in E l'asse Gx', rimane divisa nelle due parti

$$CE = D, \quad EP = D_1$$

delle quali è costante il prodotto $DD_1 = S_0$. Essendo inoltre $GC = R$, sarà

$$GE = R\cos.(x'R) = l\alpha + m\beta + n\gamma = u.$$

Siano infine

$$OG = \Delta, \quad GP = \Delta_1$$

le distanze onde il centro G di gravità è separato dai punti reciproci di percossa O, P.

Ciò stabilito, *si domanda di esprimere in funzione della variabile indipendente* u *le quantità*

$$R, D, D_1, \quad \Delta, \Delta_1, \sigma.$$

Soluz. Essendo $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, fatte le sostituzioni de' valori di α, β, γ, si ottiene

$$u^2 R^2 = A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 + (u^2 - S_0)(u^2 + S_0),$$

ed i due triangoli GEC, GEP danno

$$D^2 = R^2 - u^2, \quad \Delta^2_1 = u^2 + D^2_1 = \frac{u^2 D^2 + S^2_0}{D^2},$$

donde $u^2 D^2 = u^2 R^2 - u^4$, ossia

$$u^2 D^2 = A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 - S^2_0 ,$$

e quindi

$$\Delta_1^2 D^2 = A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 .$$

Inoltre essendo $\quad \sigma = S_0 + R^2 - u^2 = S_0 + D^2$,

sarà

$$u^2(\sigma - S_0) = A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 - S^2_0 .$$

Finalmente, essendo le distanze Δ, Δ_1 proporzionali alle distanze D, D_1, cioè essendo

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{D}{D_1} = \frac{D^2}{S_0} , \qquad \text{donde } \Delta\Delta_1 = \frac{D^2 \Delta^2_1}{S_0} ,$$

si ha

$$\Delta\Delta_1 = \frac{A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2}{S_0} .$$

Viceversa: per mezzo delle trovate relazioni, la quantità u si può esprimere in funzione di ciascuna delle sei quantità σ, R, D, D_1, Δ, Δ_1.

254. *Probl. III.* Nel centro G di gravità sono coordinati ad angolo retto i tre assi Gx', Gy', Gz' (*fig.* 62), il primo de'quali ha la direzione (l, m, n), ed il secondo è parallelo alla retta CP: determinare le direzioni (l', m', n'), (l'', m'', n'') degli ultimi assi Gy' Gz'.

Soluz. 1°. La retta $CE = D$, essendo parallela a Gy', avrà la direzione (l', m', n'), e poichè è contermina alla linea spezzata $CG + GE$, le sue proiezioni sopra i tre assi principali d'inerzia saranno

$$l'D = -\alpha + lu , \quad m'D = -\beta + mu , \quad n'D = -\gamma + nu ,$$

donde, sostituendo,

$$l' = \frac{l}{uD}(S_0 - A) , \quad m' = \frac{m}{uD}(S_0 - B) , \quad n' = \frac{n}{uD}(S_0 - C) .$$

2°. Sopra due lati, uguali all' unità e diretti secondo Gx', Gy', s' immagini costruito un parallelogrammo di cui l' area sarà $=1$: l'asse di quest'area avrà la direzione (l'', m'', n''), e però le sue proiezioni sugli assi principali d' inerzia saranno

$$l'' = mn' - m'n\ ,\quad m'' = nl' - n'l\ ,\quad n'' = lm' - l'm\ ,$$

ossia, fatte le sostituzioni de' valori di l', m', n',

$$l'' = \frac{mn}{uD}(B-C)\ ,\quad m'' = \frac{nl}{uD}(C-A)\ ,\quad n'' = \frac{lm}{uD}(A-B)\ .$$

255. *Probl. IV.* Determinare in funzione di u le coordinate $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ de' centri reciproci di percossa P ed O (*fig.* 62).

Soluz. 1°. Le coordinate α_1, β_1, γ_1 del punto P essendo le proiezioni di GP sugli assi d' inerzia A, B, C, ed essendo la linea GP contermina alla linea spezzata $GE + EP$, avremo

$$\alpha_1 = lu + l'D_1\ ,\quad \beta_1 = mu + m'D_1\ ,\quad \gamma_1 = nu + n'D_1\ ,$$

donde, sostituendo i valori di l', m', n', e $D_1 = \frac{S_0}{D}$,

$$\alpha_1 = l\frac{S_0}{uD^2}(\Delta\Delta_1 - A)\ ,\quad \beta_1 = m\frac{S_0}{uD^2}(\Delta\Delta_1 - B)\ ,\quad \gamma_1 = n\frac{S_0}{uD^2}(\Delta\Delta_1 - C)\ .$$

2°. Le coordinate α_2, β_2, γ_2 del punto O essendo le proiezioni di $GO = -\Delta$ sugli assi A, B, C, saranno determinate dalla proporzionalità

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{\Delta}{\Delta_1} = -\frac{D}{D_1} = -\frac{D^2}{S_0}\ ,$$

donde

$$\alpha_2 = -\frac{l}{u}(\Delta\Delta_1 - A)\ ,\quad \beta_2 = -\frac{m}{u}(\Delta\Delta_1 - B),\quad \gamma_2 = -\frac{n}{u}(\Delta\Delta_1 - C)\ .$$

a). Coroll. Si denoti per l_1, m_1, n_1 la *direzione della linea OP de' centri reciproci di percossa* : sarà

$$l_1 = \frac{l}{u\Delta}(\Delta\Delta_1 - A), \quad m_1 = \frac{m}{u\Delta}(\Delta\Delta_1 - B), \quad n_1 = \frac{u}{u\Delta}(\Delta\Delta_1 - C).$$

E siccome risulta

$$All_1 + Bmm_1 + Cnn_1 = 0, \quad All'' + Bmm'' + Cnn'' = 0,$$

così possiamo stabilire che (240, c): *Nell' ellissoide centrale la direzione* (l, m, n) *di un sistema di assi permanenti è conjugata alla direzione* (l_1, m_1, n_1) *in cui sono i correlativi centri di percossa, ed alla direzione* (l'', m'', n'') *della forza di percossa.*

256. *Probl.* V. Determinare i diversi assi permanenti che possono passare per un punto dato qualsivoglia (x, y, z).

Soluz. Consideriamone uno di questi assi permanenti, e supponiamo che la sua direzione sia (l, m, n). Quest' asse sarà contenuto (come già si è dimostrato) nel piano dell' equazione

$$mn(B - C)x + nl(C - A)y + lm(A - B)z = 0.$$

Ora, se supponiamo *fisso il punto* (x, y, z), le direzioni (l, m, n) di tutti gli assi permanenti che passano per esso punto dovranno certamente soddisfare alla medesima equazione

$$(1) \qquad x(B - C).mn + y(C - A).nl + z(A - B).lm = 0.$$

Ma, se riguardiamo gli elementi l, m, n della direzione degli assi permanenti come *coordinate variabili* coll' origine nel punto dato, cotesta equazione rappresenterà *un cono di secondo grado il cui vertice è nel punto dato.* Dunque:

Gli assi permanenti che passano per un punto dato sono infiniti di numero, e tutti compresi sulla superficie di un cono di secondo grado.

Così la medesima equazione (1), quando è data la direzione (l, m, n) ed è variabile il punto (x, y, z), rappresenta un piano che contiene tutti gli assi permanenti paralleli alla data direzione; e quando è dato il punto (x, y, z) ed è variabile la direzione (l, m, n), rappresenta il cono sopra cui si trovano gli assi permanenti che passano pel punto (x, y, z).

a). Coroll. Supponiamo data la direzione (l, m, n) di uno degli assi permanenti che passano pel punto (x, y, z): la sua distanza D dal centro di gravità si avrà dalla formola

$$D^2 = (mz - ny)^2 + (nx - lz)^2 + (ly - mx)^2.$$

Trovata così la distanza D, se si volesse il centro di permanenza di quest'asse, i centri reciproci di percossa, etc., non si avrebbe che a sostituire, nelle formole superiori, il valore di u ricavato dall'equazione

$$u^2D^2 = A^2l^2 + B^2m^2 + C^2n^2 - S^2.$$

CAPO IV.

Leggi per la decomposizione, composizione e riduzione de' moti simultanei di rotazione intorno ad assi diversi.

§. 1°. *Proprietà geometriche del moto di un solido intorno ad un punto fisso O.*

257. *Definizioni.* Due figure F, F' sono *coincidibili tra loro* se si possono considerare come una medesima figura posta successivamente in due situazioni diverse. Nelle figure coincidibili si dicono *omologhe* quelle parti che nella sovrapposizione si confondono in una sola. Poichè un solido è fissato nello spazio da tre de' suoi punti non posti in linea retta, è manifesto che: *Date due figure coincidibili F, F', se tre punti A, B, C dell'una vengano a coincidere coi punti omologhi A', B', C' dell'altra, le due figure si confonderanno insieme in una sola.*

a). N. B. Per ben comprendere le dimostrazioni che verranno, le *positure* o *situazioni diverse* F, F', F'' etc. di una stessa figura si debbono immaginare come altrettante figure *distinte* e *coincidibili.*

b). Due figure si dicono *simmetriche tra loro* quando si possono così disporre intorno ad un piano che i loro punti (chiamati *simmetrici* od *omologhi*) si trovino due a due situati ad egual distanza dal piano, sopra una retta perpendicolare allo stesso piano. Quindi: *Date due figure simmetriche tra loro, se siano così disposte intorno ad un piano che tre punti A, B, C dell'una facciano simmetrìa co' tre punti omologhi A', B', C' dell'altra, le due figure saranno per intero disposte simmetricamente intorno al piano.*

258. I. Teorema di Eulero. *Quando un solido è mobile intorno ad un punto fisso O, il suo passaggio da una positura F ad un'altra qualsivoglia F' si può sempre effettuare per una semplice rotazione intorno ad un certo asse OR condotto pel punto fisso (fig. 63).*

Dim. Sia OAB un triangolo qualunque del solido considerato nella sua prima situazione F, e questo triangolo si trovi in $OA'B'$, cioè A in A', B in B' quando il solido è passato nella seconda situazione F'.

Dai punti di mezzo delle due rette AA', BB' si concepiscano condotti due piani perpendicolari rispettivamente alle rette medesime; e sia OR la retta in cui essi vengono a tagliarsi, intersezione che avverrà sempre, tranne il caso in cui i due piani si confondono in un solo. Ora io dico che l'asse di rotazione è la retta OR, e che, nel caso di eccezione, è la retta dove si segano i piani de' due triangoli OAB, $OA'B'$.

A questo fine osserviamo che i due triangoli OAB, $OA'B'$, ed un punto qualunque R preso sulla retta OR, determinano due piramidi in cui, oltre di essere coincidibili le basi triangolari OAB, $OA'B'$, sono eguali gli spigoli laterali, cioè RO comune, $RA = RA'$, $RB = RB'$. Queste due piramidi saranno adunque o *coincidibili* o *simmetriche*.

Nel primo caso, facendo girare la figura F intorno ad RO finchè il triangolo ROA coincida col triangolo ROA', è chiaro che questa coincidenza trarrà seco la coincidenza delle due piramidi, e però quella de' tre punti O, A, B della figura F coi tre punti omologhi O, A', B' della figura F', e quindi la coincidenza completa di F, F'.

Nel secondo caso, in cui si suppongono simmetriche le due piramidi, osserviamo che i vertici omologhi de' due triangoli ROA, ROA' essendo disposti in simmetria intorno al piano condotto perpendicolarmente sul mezzo della retta AA', tutti gli altri punti omologhi delle due piramidi, quali B e B', dovranno esser disposti in simmetria intorno allo stesso piano. In questo caso adunque i due piani condotti perpendicolarmente sui punti di mezzo delle rette AA', BB' si confondono in un sol piano, nel piano che dimezza l'angolo diedro formato dai due piani OAB, $OA'B'$. Preso un punto R sulla retta ove si segano questi piani, se si fa girare la figura F intorno ad OR, è chiaro che quando il punto A cade in A', il punto B cadrà in B', e le due figure F ed F' si confonderanno in una sola.

È adunque provato che, quando un solido è mobile intorno ad un punto fisso O, il suo passaggio da una positura ad un'altra qualsivoglia si può sempre effettuare per mezzo di una semplice rotazione intorno ad un asse che passa pel punto fisso.

259. *Corollario.* Quindi, allorchè il solido mobile intorno al punto O dee successivamente passare per *due*, *tre*, *quattro* etc. *positure diverse* F, F_1, F_2, F_3 etc., il passaggio si potrà sempre effettuare per mezzo di una, due, tre etc. rotazioni successive intorno ad altrettanti assi OR, OR_1, OR_2 etc.

a). Inoltre è manifesto che, date le situazioni F, F_1, F_2, F_3 etc. che dee prendere il solido l'una dopo l'altra, anche gli assi di rotazione si possono riguardar come dati, sì nello spazio assoluto dove formeranno i lati di una *piramide fissa*, e sì nel solido medesimo F (posto com'è al principio) dove formeranno i lati di un'altra piramide che avrà in comune colla piramide fissa il primo lato OR. Per le rotazioni successive quest'ultima piramide, *mobile* col solido, applicherà una dopo l'altra le sue facce sulle facce rispettivamente uguali della *piramide fissa*.

260. II. Teor. *Quando un solido F si muove continuamente intorno ad un punto fisso O, ogni suo moto infinitesimo, considerato in un dato istante dt, si può sempre riguardare come una semplice rotazione intorno ad un certo asse OR, il quale si dice* **asse istantaneo**, perchè, rimasto fisso nel dato istante, cangia di posizione nell'istante successivo.

Dim. Infatti, per ogni moto infinitesimo intorno ad O, due punti A, B del solido F descriveranno due linee AA', BB' che, essendo infinitesime, si potranno riguardare come archi circolari aventi il loro centro sull'asse OR, determinato a quel modo che qui sopra si è detto, e che perciò sarà l'asse istantaneo.

261. Coroll. *Il luogo degli assi istantanei successivi, se si considera nello spazio assoluto, è la* **superficie di un cono fisso;** *e se si considera nel solido, è la* **superficie di un cono mobile** *che va applicando successivamente le sue facce infinitesime sulle facce rispettivamente uguali del cono fisso.*

a). Quindi: *Il moto continuo di un solido intorno ad un punto fisso O, non è altro che quello di un certo cono mobile di cui il vertice è in questo punto, e che ruzzola attualmente* (senza sdrucciolare) *sulla superficie di un altro cono fisso dello stesso vertice.*

b). *N.B.* L'asse istantaneo cangia *simultaneamente di posizione nel* **solido** *e nello* **spazio assoluto;** e se avvenga che rimanga immobile nel corpo, dee rimanere ugualmente immobile nello spazio assoluto. Ond'è, che quando vediamo un corpo muoversi intorno ad un punto fisso e girare sopra un asse invariabile di posizione nel corpo ma variabile di posizione nello spazio, dobbiam conchiudere che quest'asse non è quello che si è chiamato istantaneo.

262. III. Teor. *Qualunque sia la legge onde un solido si muove nello spazio, ogni suo moto infinitesimo si può riguardare come composto di due moti elementari che sono:* **una traslazione** *di uno qualunque O de' suoi punti*, ed **una rotazione** *intorno ad un certo asse OR condotto per questo punto.*

Dim. Infatti supponiamo che, nella durata dell'istante dt, il punto O del solido passi in O', e che la sua posizione F divenga F': è manifesto che la nuova posizione F' del solido intorno ad O' si può riguardare come prodotta dalla traslazione OO' accompagnata da quella rotazione, che è propria a far coincidere la situazione F colla situazione F'.

---

§. 2°. *Formole relative al moto onde il cono mobile ruzzola sul cono fisso dello stesso vertice.*

263. *Definizione.* In un cono, considerato come una *piramide a facce infinitesime*, si dice *angolo di contingenza* l'angolo onde ciascuna faccia devìa dal prolungamento della faccia che precede.

Supposto che il cono abbia il vertice in O, se si cerca la sua curvatura in un punto qualsivoglia M, basta fare nel cono una sezione perpendicolare in M alla retta OM: l'angolo di contingenza $d\omega$, ed il raggio osculatore r di questa sezione, rappresenteranno evidentemente l'angolo di contingenza ed il raggio di curvatura del cono nel punto M; onde si avrà

$$d\omega = \frac{ds}{r},$$

essendo ds l'elemento lineare della sezione contato a partire dal punto M (Vedi l'Appendice).

Consideriamo adesso un altro *cono mobile*, col vertice in O, che tocchi il primo cono supposto *fisso* secondo il lato OM (*fig.* 64). Gli angoli di contingenza onde le due superficie coniche devìano dal comun piano tangente, angoli che denoteremo per

$$d\omega = \frac{ds}{r}, \quad d\omega_1 = \frac{ds}{r_1},$$

si dovranno riguardare come aventi naturalmente lo stesso segno, o segno contrario, secondochè, nel contatto, le *convessità* de'due coni sono volte nello stesso senso od in senso opposto. Posta questa convenzione ed immaginando la figura, si vedrà che, nell'uno e nell'altro caso, l'espressione

$$d\omega_1 - d\omega = ds\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)$$

dà la misura dell'angolo, che il cono mobile vien descrivendo intorno ad OM per applicare la sua faccia consecutiva sulla faccia rispettivamente uguale del cono fisso.

Supponendo adunque che la rotazione intorno ad OM si faccia colla velocità angolare θ nell'istante dt, sarà $\theta dt = d\omega_1 - d\omega$, ossia

$$\theta = \frac{ds}{dt}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

Così l'asse istantaneo che al principio dell'istante dt è OM, al termine di tale istante sarà divenuto un altro OM', essendo $MM' = ds$. Onde se prendasi $OM = 1 = OM'$, si potrà dire, che *l'asse istantaneo è passato dalla prima posizione alla seconda* colla velocità $= \frac{ds}{dt}$; e, chiamata u questa velocità, avremo in generale

$$(a) \qquad \theta = u\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)$$

purchè si convenga che i raggi osculatori r, r_1 siano riguardati come aventi lo stesso segno o segno contrario, secondochè, a partire dal punto M di contatto, si dirigono al rispettivo centro di curvatura nel medesimo senso od in senso contrario.

264. Scolio. È poi manifesto che, se delle quattro quantità θ, u, r, r_1 che entrano nella formola (a), tre sono *costanti*, lo sarà pure la quarta; ed il moto del corpo sarà quello di un cono retto a base circolare, che ruzzola equabilmente sopra un cono fisso anch'esso retto e circolare.

---

§. 3°. *Equivalenza di una rotazione unica a più altre rotazioni simultanee intorno ad assi divergenti da un medesimo punto O; e viceversa.*

265. Un moto di rotazione è dato quando se ne conosce *l'asse*, la *velocità angolare*, ed il *verso* o *senso* in cui si effettua. Quando si dirà che *una rotazione è rappresentata da una retta Op*, devesi intendere che la retta Op colla posizione ne rappresenta l'*asse*, colla *lunghezza* la *velocità angolare* p, e colla *direzione* Op *il senso.*

Questo senso del girare si determina per mezzo della convenzione, che la rotazione avvenga *dalla destra alla sinistra* della retta Op riguardata come *una persona coi piedi in* O *e la testa nel punto* p.

266. Proposizione. *La rotazione* θ *di un solido, rappresentata dalla diagonale* $O\theta$ *di un parallelogrammo connesso col solido e mobile con esso, equivale a due rotazioni simultanee* p, q *rappresentate dai lati* Op, Oq *del parallelogrammo* (fig. 65).

Dimostrazione. Il moto del solido essendo pienamente determinato dal moto del piano del parallelogrammo connesso col solido, basterà dimostrare la proposizione rispetto al moto di questo piano.

Sia M un punto qualsivoglia preso in detto piano, ed $OM = \rho$: le perpendicolari calate da M sulle direzioni delle tre rette $O\theta$, Op, Oq avranno per espressioni

$$\rho\, sen.(\rho\theta)\,,\quad \rho\, sen.(\rho p)\,,\quad \rho\, sen.(\rho q)\,.$$

Siano ds, ds_1, ds_2 gli archi che il punto M descriverebbe nell'istante dt, ove si attuasse separatamente ciascuna delle tre rotazioni θdt, pdt, qdt intorno agli assi $O\theta$, Op, Oq. Sarà

$$ds = \theta dt.\rho\, sen.(\rho\theta)\,,$$

$$ds_1 = pdt.\rho\, sen.(\rho p)\,,$$

$$ds_2 = qdt.\rho\, sen.(\rho q)\,;$$

ed inoltre

$$ds = ds_1 + ds_2\,,$$

essendochè quest' uguaglianza riducesi alla seguente

$$\theta sen.(\rho\theta) = p\, sen.(\rho p) + q\, sen.(\rho q)\,,$$

la quale esprime il teorema noto, che la proiezione della retta $O\theta$ sopra un asse perpendicolare ad OM è uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle sue componenti Op, Oq.

Ora si concepiscano effettuate una dopo l'altra le due rotazioni pdt, qdt intorno ai lati Op, Oq, supponendoli a vicenda l'uno *fisso* e l' altro *mobile*. Per la rotazione pdt intorno al lato Op supposto fisso, il punto M descriverà l'arco

$$ds_1 = pdt.\rho\, sen.(\rho p) \ ,$$

ed il lato Oq prenderà una nuova posizione. Per la rotazione qdt intorno a questa nuova posizione di Oq, il punto M descriverà un altro arco

$$ds_2 = qdt.\rho\, sen.(\rho q) ,$$

e si sarà allontanato dal sito dov' era in principio per l' intervallo

$$ds_1 + ds_2 \text{ , che coincide con } ds \ ,$$

essendo gli archi uguali ds, $(ds_1 + ds_2)$ perpendicolari al piano del parallelogrammo pOq nel medesimo punto.

Si vede adunque che per le due rotazioni pdt, qdt, eseguite nel modo indicato, ogni punto M del piano del parallelogrammo si troverà nel luogo preciso ove sarebbe andato, se il piano avesse girato intorno alla diagonale $O\theta$ colla rotazione θdt.

Possiamo adunque conchiudere, che la *rotazione unica* θdt intorno alla diagonale $O\theta$ equivale a *due rotazioni simultanee* pdt, qdt intorno ai lati Op, Oq; e viceversa. Lo stesso discorso potendo ripetersi per tutti gl' istanti successivi del tempo, si fa interamente manifesta la verità della nostra proposizione.

Si osservi che il segno degli archi ds, ds_1, ds_2, determinato da quello de' seni

$$sen.(\rho\theta) \ , \quad sen.(\rho p) \ , \quad sen.(\rho q) \ ,$$

corrisponde perfettamente al senso in cui sono stati descritti. Così, se il punto M si prende in uno degli angoli supplementarii dell' angolo pOq, i tre archi ds, ds_1, ds_2, che avranno lo stesso segno, sono descritti nello stesso senso; ma se il punto M sia preso invece nell'angolo θOq (*fig.* 65), l'arco ds_2, che avrà segno contrario a quello degli archi ds, ds_1, sarà pure descritto in direzione opposta.

267. *Scolio* I. Quando si dice che la rotazione θ di un solido è decomposta in tre p, q, r, intorno a *tre assi fissi* Ox, Oy, Oz, ciò non può intendersi che in questo senso, che *la decomposizione si fa e si ripete*, per ogn' istante del tempo, *intorno a quelle rette del solido che vanno passando per le posizioni degli assi fissi.*

268. *Scolio II.* Ponendo mente alle cose dichiarate, possiamo ritenere in generale che: *Le rotazioni simultanee intorno ad assi divergenti da un punto si compongono e si decompongono a quel modo medesimo che si fa delle semplici forze, secondo la* **legge del parallelogrammo.**

E come siffatta *legge primaria* si trasforma necessariamente per le forze in altre *leggi secondarie* risguardanti il *parallelismo*, le *coppie*, *la riduzione* e *l' equilibrio;* così queste leggi secondarie, in grazia del loro nesso immutabile colla primaria, appartengono pure alle rotazioni, e si possono suppor già dimostrate.

---

§. 4°. *Legge per la composizione delle rotazioni simultanee intorno ad assi paralleli, e per la composizione delle coppie simultanee di rotazione.*

269. N. B. Affine di semplificare il discorso chiameremo: 1°. *rotazioni parallele* quelle che si fanno intorno ad assi paralleli; 2°. *Coppia di rotazioni*, due rotazioni parallele, uguali e di senso contrario: il *piano della coppia* sarà il piano de' due assi paralleli. Si avverta finalmente che quando diciamo *rotazioni* senz' altro aggiunto, intenderemo che siano *simultanee*, cioè tali che *si facciano o tendano a farsi nel medesimo tempo.*

Le rotazioni *successive* e *finite* hanno altre leggi di composizione che qui non importa cercare.

270. Proposizione I. *Due rotazioni parallele si compongono in una rotazione unica, ad esse parallela, eguale alla loro somma, e le tre rotazioni, risultante e componenti, sono così disposte nel medesimo piano, che ciascuna è proporzionale alla distanza che corre tra le direzioni delle altre due.*

La dimostrazione può farsi come per le forze parallele.

271. Proposizione II. *Una coppia di rotazioni* $(\theta, -\theta)$, *del momento* $= \theta.D$, *equivale ad un moto di traslazione perpendicolare al piano della coppia, diretto nel senso in cui ciascun asse tende a girare intorno all' altro, e la velocità* u *della traslazione è uguale al momento della coppia,* cioè $u = \theta.D$.

Dim. Sia $AB = D$ (fig. 66) la distanza che corre tra gli assi paralleli AM, BN della coppia $(\theta, -\theta)$.

Essendo il solido animato dalle due rotazioni simultanee θ, $-\theta$, interno agli assi AM, BN, i due punti B, A di questi assi saranno animati dalla velocità $u = \theta.D$ con cui, secondando le rispettive rotazioni, tendono a descrivere nell'istante dt gli archi

$$BB' = AA' = udt,$$

perpendicolari al piano della coppia e diretti nel senso in cui ciascun asse tende a girare intorno all'altro. Si avrà dunque nell'istante dt un moto di traslazione $= udt$, comune a tutti i punti de' due assi AM, BN, e per conseguente al solido medesimo.

272. *Corollario.* Quindi, se sul piano della coppia s'inalza una perpendicolare $= u = \theta.D$ così che *rappresenti* la direzione e la velocità del moto di traslazione, questa perpendicolare si confonderà con quella che (trattando delle semplici forze) abbiam chiamato *asse della coppia.* Da ciò apparisce immediatamente che: La composizione delle *coppie di rotazione* si riduce a quella de' loro assi che *rappresentano l' equivalenti velocità di traslazione*; e che a queste nuove coppie si possono applicare tutti i teoremi che si sono trovati per le coppie ordinarie delle semplici forze.

---

§. 5°. *Legge per la riduzione de' varii moti che possono agitare un solido in un dato istante. Asse centrale di questi moti.*

273. Prop. I. *Qualunque sia il numero de' moti parziali che animano un solido in un dato istante dt, tutti questi moti sono sempre riducibili ad un moto di rotazione θdt intorno ad un asse condotto per un punto O preso ad arbitrio, e ad un moto di traslazione vdt* (262)*; e di questi due moti, quello di rotazione si conserva sempre il medesimo dovunque sia preso il punto O, mentre il moto di traslazione vdt cangia grandezza e direzione al mutarsi del punto O.*

Dim. I diversi moti che animano il solido, nell' istante che si considera, si possono riguardare come moti di rotazione, perchè ai moti di traslazione, se ve ne fossero, si potrebbero intender sostituite l' equivalenti coppie di rotazione. Ora se tutte le rotazioni che animano il solido nell' istante dt s' intendano trasportate parallelamente a sè stesse nel punto O, tenendo conto delle coppie che nascono da questo trasporto, si fa manifesto che la rotazione risultante θdt dee sempre avere la stessa grandezza e direzione dovunque sia preso il punto O, mentre la coppia risultante $v dt$ dee variare con questo punto.

N. B. Il centro O di riduzione si può sempre sceglier così, che il moto di traslazione sia parallelo all' asse della rotazion risultante (66), asse centrale che dal Sig. Poinsot è chiamato *asse spontaneo di rotazione*. Di qui la seguente :

274. Prop. II. *Il movimento di un solido, considerato in un dato istante dt, si può sempre riguardare siccome composto di un moto di rotazione θdt intorno ad un certo* **asse centrale**, *e di un moto di traslazione udt* **parallelo a quest' asse**; in altri termini: « *Un movimento qualunque di un solido, considerato in un dato istante, può sempre aversi come equivalente al moto di una certa Vite che gira nella sua chiocciola.* »

« Tutti i punti del corpo descrivono dunque, sopra cilindri concentrici, de' piccoli archi d' *elice* che hanno tutti lo stesso *passo* $= udt$. Nell' istante seguente è un' altra *vite*, di un altro asse e di un passo differente; e così di seguito da un istante all' altro: d' onde si vede come si formano le curve simultanee che si vanno descrivendo da tutti i punti del sistema solido, i quali si muovono lunghesso queste curve come per entro ad altrettanti canaletti (Poinsot). » E si vede ancora che in un corpo in movimento avvi ad ogn' istante ciò che si potrebbe chiamare un *asse spontaneo scorrente*, vale a dire una linea retta di cui tutti i punti non hanno altro moto che una semplice traslazione lungo questa retta, traslazione che in alcuni casi particolari può essere $= 0$. »

a). *L'asse centrale* delle rotazioni, od asse spontaneo scorrente, si determina (come per le coppie ordinarie delle forze) mediante la costruzione seguente (65):

Il movimento del solido s' intenda ridotto alla rotazione θdt intorno ad un asse che passi per uno qualsivoglia O de' suoi punti (fig. 67), ed alla corrispondente traslazione vdt; e le due velocità θ, v siano rappresentate dalle due rette $O\theta$, Ov. Ciò fatto, si prenda sull' asse dell' angolo (θv) il segmento $OO_1 = p$ così, che risulti

$$p = \frac{v\,sen.(\theta v)}{\theta};$$

la retta $O_1\theta$ condotta per O_1 parallelamente ad $O\theta$ sarà l'asse centrale delle rotazioni; e la corrispondente velocità u di traslazione si avrà dalla formòla

$$u = v\cos.(\theta v).$$

Da questa e dalla precedente si ricava

$$v^2 = u^2 + p^2\,\theta^2$$

per la quale, data la traslazione u relativa all'asse centrale, si determina la traslazione v relativa ad un altro asse parallelo, situato alla distanza p dal primo.

b). Affinchè adunque il moto di un corpo riducasi ad una semplice rotazione θdt, è necessario e basta che risulti

$$u = v\cos.(\theta v) = 0,$$

vale a dire*: è necessario e basta, che il moto di traslazione vdt di un punto qualsivoglia O del corpo riesca perpendicolare all' asse della rotazione θdt.*

---

§. 6°. *Formole per le quali, essendo un sistema rigido in movimento intorno a un punto fisso O, si misura lo spostamento istantaneo di un punto qualsivoglia M del sistema, non che l'area descritta dal raggio vettore OM. Moto apparente, sia di un punto fisso, sia di un piano fisso, veduto da chi partecipa al moto del sistema.*

275. Prop. I. *Il moto di un solido intorno ad un punto fisso O riducendosi, nell' istante dt, alla semplice rotazione θdt intorno all' asse $O\theta$* (fig. 68), *e questa essendo composta delle tre pdt, qdt, rdt, intorno agli assi rettangolari Ox, Oy, Oz, un punto M (x, y, z) del solido descriverà in tale istante l' arco*

$$ds = \rho\,sen.(\theta\rho).\ \theta dt,$$

dove $\varrho = OM$, *e le projezioni di quest' arco ds sugli assi Ox, Oy, Oz, saranno*

$$(a)\qquad \begin{cases} dx = (qz - ry)dt\,, \\ dy = (rx - pz)dt\,, \\ dz = (py - qx)dt\,. \end{cases}$$

Dim. La perpendicolare calata dal punto M sulla direzione di $O\theta$ sarà $= \varrho\,sen.(\theta\varrho)$, e l' arco ds descritto intorno ad $O\theta$ per la rotazione θdt avrà per espressione

$$ds = \theta dt\,\varrho\,sen.(\theta\varrho) = [\theta\,\varrho\,sen.(\theta\varrho)]dt\,,$$

e sarà diretto evidentemente nel senso dell'asse che rappresenta l' area del parallelogrammo di lati θ, ϱ. Quest'area, che è $= \theta\varrho\,sen.(\theta\varrho)$, si moltiplichi per dt e poi si projetti sopra i tre piani coordinati yz, zx, xy; le projezioni saranno

$$(qz - ry)dt,\ (rx - pz)dt,\ (py - qx)dt.$$

Ora, se alle aree si sostituiscono gli assi che le rappresentano, l' asse dell' area risultante essendo $= ds$, gli assi delle aree componenti saranno dx, dy, dz, e si avranno le formole (a).

276. N. B. Le formole (a) valgono eziandio nel caso che gli assi Ox, Oy, Oz siano connessi col sistema e *mobili* con esso, purchè le *variazioni dx, dy, dz s' intendano riferite alla posizione in cui si trovavano cotesti assi al principio dell' istante dt.*

277. *Coroll.* L'equazioni (a), se si sommano dopo averle moltiplicate rispettivamente, prima per x, y, z, e poscia per p, q, r, daranno

$$(b)\qquad \begin{cases} xdx + ydy + zdz = 0\,, \\ pdx + qdy + rdz = 0\,, \end{cases}$$

le quali significano che l' arco ds è perpendicolare alle due rette OM, $O\theta$.

278. Prop. II. *Determinar l' area che descrive il raggio OM nell' atto che il punto M passa dalla posizione (x, y, z) alla posizione $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$, e trovarne la proiezione sopra un piano qualsivoglia.*

Soluz. Siano ρ, ρ' le posizioni del raggio vettore OM, corrispondenti alle posizioni successive (x, y, z), $(x + dx, y + dy, z + dz)$ del punto M.

L' area del settore compreso tra ρ e ρ', e che è

$$= \frac{\rho\rho'}{2}\, sen.(\rho\rho') = \frac{\rho^2}{2}\, ang.(\rho\rho'),$$

se si proietta sopra i piani yz, zx, xy, diviene rispettivamente

$$\tfrac{1}{2}(ydz - zdy), \quad \tfrac{1}{2}(zdx - xdz), \quad \tfrac{1}{2}(xdy - ydx);$$

e se si proietta sopra un piano il cui asse Oh abbia la direzione h, diviene in questo piano

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{l}(ydz - zdy)\cos.(xh)\\(zdx - xdz)\cos.(yh)\\(xdy - ydx)\cos.(zh).\end{array}\right.$$

Quindi, chiamate ρ_1, ρ'_1 le proiezioni di ρ e di ρ' sul piano medesimo, talchè sia $\rho_1 = \rho\, sen.(h\rho)$, avremo

$$(c) \qquad \rho^2 sen^2.(h\rho).ang.(\rho_1\rho_1') = \left|\begin{array}{l}(ydz - zdy)\cos.(xh)\\(zdx - xdz)\cos.(yh)\\(xdy - ydx)\cos.(zh).\end{array}\right.$$

Per questa formola si potrà determinare l'angolo $(\rho_1\rho'_1)$ onde nell' istante dt il piano mobile (Oh, OM) devia da un piano fisso arbitrario (Oh, OK) condotto per Oh.

279. *Coroll. I.* Supponiamo che al cominciar dell' istante dt le coordinate del punto M siano

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \text{e però} \quad \rho = x = 1.$$

Sarà

$$dx = (qz - ry)dt = 0\ ,$$

$$dy = (rx - pz)dt = rdt\ ,$$

$$dz = (py - qx)dt = -\ qdt\ ;$$

e la formola (c) si muterà nella seguente

$$(c)' \qquad sen^2.(xh).ang.(\rho_1\,\rho'_1) = dt[q\,cos.(yh) + r\,cos.(zh)]\ .$$

280. *Coroll.* II. Immaginiamo che un punto M (x, y, z), *immobile nello spazio assoluto*, venga attualmente attraversato da un altro punto m del sistema, il quale nel tempo infinitesimo dt descrivà l'archetto Mm (fig. 69). Un Osservatore che partecipi al moto del sistema senza che se ne accorga, crederà fisso il punto m che si suppone connesso col sistema, ed invece crederà *mobile* il punto M e percorrente nell' istante dt l' arco mM, cioè vedrà muoversi il punto M per un tratto eguale (ma in verso contrario) a quello onde si è mosso realmente il punto m.

Quindi se supponiamo connessi col sistema i tre assi Ox, Oy, Oz, ed alla fine dell' istante dt si facciano subire al sistema le tre rotazioni simultanee $-\ pdt$, $-\ qdt$, $-\ rdt$, cioè le rotazioni che ha già eseguito nell' istante dt ma in verso contrario, si avranno i cangiamenti dx, dy, dz delle coordinate del punto M rispetto alla indicata posizione de' tre assi Ox, Oy, Oz, e saranno:

$$(a)' \qquad \left\{ \begin{aligned} dx &= (ry - qz)\,dt\ , \\ dy &= (pz - rx)\,dt\ , \\ dz &= (qx - py)\,dt\ ; \end{aligned} \right.$$

cioè quelli offerti dall' equazioni (a) ma di segno cangiato.

Sia *Oh un asse fisso nello spazio assoluto*, e si prenda il punto M su quest' asse alla distanza $OM = 1$. Se le coordinate di questo punto, contate sugli assi mobili Ox, Oy, Oz, si rappresentano per l, m, n, sarà

$$l = cos.(xh)\ , \quad m = cos.(yh)\ , \quad n = cos.(zh)\ ,$$

e le $(a)'$ diventano

$$(a)_1 \quad \begin{cases} dl = (mr - nq)dt, \\ dm = (np - lr)dt, \\ dn = (lq - mp)dt; \end{cases}$$

e quest' equazioni faranno conoscere ad ogn' istante la *deviazione apparente* dell' asse fisso Oh, veduto da un Osservatore che partecipi al moto del sistema.

Similmente, se si rappresentano per λ, μ, ν gli angoli che i piani (Oh, Ox), (Oh, Oy), (Oh, Oz) mobili intorno all'asse fisso Oh fanno con un piano (Oh, OK) immobile nello spazio assoluto, le *deviazioni apparenti di questo piano* nell' istante dt saranno, in virtù della $(c)'$, le seguenti:

$$d\lambda \, sen.^2(xh) = -(mq + nr)dt,$$
$$d\mu \, sen.^2(yh) = -(nr + lp)dt,$$
$$d\nu \, sen.^2(zh) = -(lp + mq)dt;$$

dalle quali, essendo

$$sen.^2(xh) = 1 - l^2 = m^2 + n^2, \text{ etc.}$$

si ricava

$$(c)_1 \quad \begin{cases} d\lambda = -dt\dfrac{mq + nr}{m^2 + n^2}, \\[2ex] d\mu = -dt\dfrac{nr + lp}{n^2 + l^2}, \\[2ex] d\nu = -dt\dfrac{lp + mq}{l^2 + m^2}. \end{cases}$$

§. 7°. *In un sistema rigido che si muove intorno ad un punto fisso O, qual' è ad ogn' istante la direzione, sia della velocità, sia della forza d' inerzia ond' è animato ciascuno de' suoi punti materiali? Significato speciale delle forze d' inerzia, centripeta e tangenziale, rispetto al cono mobile ruzzolante sopra il cono fisso. Forza viva del sistema in siffatto movimento.*

281. 1°. Il moto del sistema intorno al centro O riducendosi nell' istante dt ad una semplice rotazione θdt intorno all'asse istantaneo $O\vartheta$, è palese che il punto materiale dm situato nel luogo (x, y, z), alla distanza ρ dal centro O, descriverà lo spazio $ds = \theta dt. \rho\, sen.(\vartheta\rho)$ colla velocità

$$\frac{ds}{dt} = \theta . \rho\, sen.(\theta\rho) ,$$

la cui direzione è perpendicolare al piano determinato dall' asse $O\theta$ e dal punto dm. E ciò apparisce pure dalle tre velocità parziali

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry , \quad \frac{dy}{dt} = rx - pz , \quad \frac{dz}{dt} = py - qx ,$$

ond' è composta la velocità $\frac{ds}{dt}$.

282. 2°. In questo moto del sistema rappresentato da quello di un cono mobile che va ruzzolando sopra un cono fisso, la forza d' inerzia di ciascun elemento materiale dm, siccome offerta dal prodotto di dm per le formole

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + \left(z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt}\right) ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) + \left(x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt}\right) ,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) + \left(y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt}\right) ,$$

si vede composta di due altre forze distinte, che si possono chiamare *forza centripeta* e *forza tangenziale*.

Può chiamarsi **forza centripeta** quella parte della forza d' inerzia che proviene dalle tre

$$q\frac{dz}{dt}-r\frac{dy}{dt}\,,\ r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\,,\ p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\,,$$

perchè la *direzione* di questa componente essendo normale simultaneamente alla traiettoria dell' elemento dm ed all' asse istantaneo $O\theta$, è chiaro che *per questa forza parziale l' elemento dm tende a cadere per la via più corta sul detto asse istantaneo di rotazione.*

Può chiamarsi **forza tangenziale** l' altra parte della forza d' inerzia che proviene dalle tre

$$z\frac{dq}{dt}-y\frac{dr}{dt}\,,\quad x\frac{dr}{dt}-z\frac{dp}{dt}\,,\quad y\frac{dp}{dt}-x\frac{dq}{dt}\,,$$

perchè la sua *direzione* è precisamente quella che avrebbe l'elemento dm se il sistema fosse animato dalle tre velocità angolari dp, dq, dr intorno agli assi Ox, Oy, Oz, le quali, componendosi colle tre p, q, r di già esistenti, determinano dopo l' istante dt la nuova posizione dell' asse istantaneo $(p+dp,\ q+dq,\ r+dr)$.

Immaginando le superficie de' due coni da cui dipende il moto del sistema, si può anche dire, che alle *forze centripete* è dovuto *il contatto continuo dell' un cono coll'altro*, e che alle *forze tangenziali* è dovuto *il succedersi degli assi istantanei di rotazione.*

Da queste definizioni si dee conchiudere che i due termini di *forza tangenziale* e di *forza centripeta* non hanno, nel *moto di rotazione* intorno ad un asse variabile, lo stesso significato che nel *moto di traslazione*, eccetto il caso in cui l' asse di rotazione si conservi assolutamente immobile, od in cui la traiettoria di ogni punto consista nella circonferenza di un circolo. Questa diversità di significato, una volta che siasi avvertita, non può dar luogo ad alcun equivoco, e val meglio adottarla che introdur vocaboli nuovi.

283. Per **forza viva di un punto** *materiale dm* s' intende *il prodotto della massa di questo punto pel quadrato della sua velocità*, cioè il prodotto

$$dm\,\frac{ds^2}{dt^2}\,.$$

Per **forza viva di un sistema** *in movimento* s' intende *la somma delle forze vive di tutti i suoi elementi materiali;* onde, segnata per $2T$ tal forza viva, sarà

$$2T = \Sigma\, dm \frac{ds^2}{dt^2}.$$

a). Quindi, se si considera il sistema mobile intorno al punto O nell' atto che fa la rotazione θdt sull' asse istantaneo $O\theta$, la sua forza viva sarà

$$2T = \theta^2 \Sigma [\rho\, sen.(\theta\rho)]^2 dm,$$

essendo $\frac{ds}{dt} = \theta\rho\, sen.(\theta\rho)$.

E poichè la quantità $\theta\rho\, sen.(\theta\rho)$ esprime l' area del parallelogrammo le cui aree componenti sono: $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$, avremo

$$[\theta\rho\, sen.(\theta\rho)]^2 = \left|\begin{matrix}(qz - ry)^2 \\ (rx - pz)^2 \\ (py - qx)^2\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}(y^2 + z^2)p^2 \\ (z^2 + x^2)q^2 \\ (x^2 + y^2)r^2\end{matrix}\right. - 2\left|\begin{matrix}yz.qr \\ zx.rp \\ xy.pq\end{matrix}\right..$$

Ciò posto, se d' ora innanzi conveniamo di rappresentare semplicemente per S, A, B, C i momenti d' inerzia del sistema intorno agli assi $O\theta$, Ox, Oy, Oz, e per A', B', C' i momenti complessi $\Sigma yzdm$, $\Sigma zxdm$, $\Sigma xydm$, è palese che la forza viva del sistema moventesi intorno al punto fisso O è in generale rappresentata dalla formola

$$2T = S\theta^2 = \left|\begin{matrix}Ap^2 \\ Bq^2 \\ Cr^2\end{matrix}\right. - 2\left|\begin{matrix}A'qr \\ B'rp \\ C'pq\end{matrix}\right.,$$

della quale le derivate, prese rispetto a p, q, r, sono

$$\frac{dT}{dp} = Ap - C'q - B'r,$$

$$\frac{dT}{dq} = Bq - A'r - C'p,$$

$$\frac{dT}{dr} = Cr - B'p - A'q.$$

CAPO V.

Formole per le quali, date le forze esterne che agiscono sopra un sistema mobile intorno ad un punto fisso O, si determina il moto del sistema, e viceversa.

§. 1°. *Formole risguardanti la coppia di moto e la coppia d' inerzia intorno ad un punto.*

284. Ricordiamo che, se le quantità di moto e le forze d' inerzia di tutti i punti materiali dm del sistema s' intendano trasportate parallelamente a sè stesse nel punto fisso O, la coppia G che nasce dal trasporto delle prime forze sarà la *coppia di moto*, e la coppia G_1, che nasce dal trasporto delle forze d' inerzia, sarà la *coppia d' inerzia del sistema.*

285. Prop. I. *Se la coppia di moto G si decompone in tre L, M, N intorno agli assi rettangolari Ox, Oy, Oz, queste componenti saranno eguali alle derivate della metà della forza viva del sistema $(=2T)$, prese rispetto alle componenti p, q, r della velocità angolare θ,* e però si avrà

$$(A)\qquad\left\{\begin{aligned} L&=\frac{dT}{dp}=Ap-C'q-B'r\,,\\ M&=\frac{dT}{dq}=Bq-A'r-C'p\,,\\ N&=\frac{dT}{dr}=Cr-B'p-A'q\,.\end{aligned}\right.$$

Dim. Dalla teoria delle coppie sappiamo che la coppia di moto G risulta dalle tre (196, 2°.)

$$L = \Sigma\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)dm\,,$$

$$M = \Sigma\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)dm\,,$$

$$N = \Sigma\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dm\,.$$

La prima di queste, fatte le sostituzioni

$$\frac{dy}{dt} = rx - pz\,,\quad \frac{dz}{dt} = py - qx\,,$$

e ponendo in evidenza i coefficienti totali di p, q, r, diviene

$$\Sigma\left(\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)dm = p\Sigma(y^2 + z^2)dm - q\Sigma xydm - r\Sigma zxdm\,,$$

ossia

$$L = Ap - C'q - B'r\,.$$

Così è dimostrata la prima delle formole (A), e, per ragion di simmetria, eziandio le due rimanenti.

286. *Coroll. I.* Essendo

$$\theta.G\cos.(\theta G) = Lp + Mq + Nr = S.\theta^2\,,$$

sarà

$$S\theta = G\cos.(\theta G)\,,$$

vale a dire: *La somma de' momenti delle quantità di moto intorno all' asse $O\theta$* (somma espressa da $S\theta$) *è uguale alla componente della coppia di moto intorno allo stesso asse.*

Coroll. II. Se dinotiamo per (l, m, n) la direzione dell' asse istantaneo $O\theta$, talchè si abbia $p = l\theta$, $q = m\theta$, $r = n\theta$, si farà manifesto che:

Nell' ellissoide d' inerzia del punto O

$$\begin{array}{l|l} Ax^2 & A'yz \\ By^2 \; - 2 & B'zx = 1 , \\ Cz^2 & C'xy \end{array}$$

il piano della coppia G di moto

$$Lx + My + Nz = 0 ,$$

è ad ogn' istante coniugato alla direzione (l, m, n) dell' asse istantaneo $O\theta$ (240, b).

287. Prop. II. *Se la coppia d' inerzia G_1 si decompone in tre L_1, M_1, N_1 intorno agli assi rettangolari Ox, Oy, Oz, i valori di queste componenti saranno*

$$(B) \qquad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = \dfrac{dL}{dt} = \left(\dfrac{dL}{dt}\right) + qN - rM , \\[2ex] M_1 = \dfrac{dM}{dt} = \left(\dfrac{dM}{dt}\right) + rL - pN , \\[2ex] N_1 = \dfrac{dN}{dt} = \left(\dfrac{dN}{dt}\right) + pM - qL ; \end{array} \right.$$

dove

$$\left(\frac{dL}{dt}\right) = A\frac{dp}{dt} - C'\frac{dq}{dt} - B'\frac{dr}{dt} ,$$

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = B\frac{dq}{dt} - A'\frac{dr}{dt} - C'\frac{dp}{dt} ,$$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right) = C\frac{dr}{dt} - B'\frac{dp}{dt} - A'\frac{dq}{dt} .$$

Dim. Si è dimostrato più sopra (196, 2°.) che l'asse OG_1 della coppia d' inerzia è rappresentato in grandezza e in direzione dalla *velocità assoluta* con cui si muove il *polo* (L, M, N) della *coppia di moto*, e che però si ha

$$L_1 = \frac{dL}{dt}, \quad M_1 = \frac{dM}{dt}, \quad N_1 = \frac{dN}{dt},$$

essendo

$$L = Ap - C'q - B'r, \quad M = Bq - A'r - C'p, \quad N = Cr - B'p - A'q.$$

Ciò posto, consideriamo in particolare la derivata di L, presa rispetto al tempo t, e che è

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{dL}{dt}\right) + p\frac{dA}{dt} - q\frac{dC'}{dt} - r\frac{dB'}{dt};$$

ed in questa cerchiamo di ridurre all' espression più semplice il trinomio

$$(a) \qquad p\frac{dA}{dt} - q\frac{dC'}{dt} - r\frac{dB'}{dt}.$$

Questo trinomio, se vi sostituiamo

$$A = \Sigma(y^2 + z^2)dm, \quad B' = \Sigma zxdm, \quad C' = \Sigma xydm,$$

diviene primieramente

$$2\Sigma p\left(y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)dm - \left|\begin{array}{l} \Sigma q\left(x\dfrac{dy}{dt} + y\dfrac{dx}{dt}\right)dm \\ \Sigma r\left(z\dfrac{dx}{dt} + x\dfrac{dz}{dt}\right)dm, \end{array}\right.$$

ed appresso, se da qui eliminiamo $p(ydy + zdz)$ mediante la relazione

$$p(ydy + zdz) = x(qdy + rdz)$$

che nasce dall' eliminare dx dalle due note equazioni (277, b)

$$xdx + ydy + zdz = 0\,, \quad pdx + qdy + rdz = 0\,,$$

lo stesso trinomio (a) si cangia in

$$q\Sigma\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dm - r\Sigma\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)dm\,,$$

ossia in (285) $qN - rM$.

Dunque

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{dL}{dt}\right) + qN - rM\,.$$

Così rimane dimostrata la prima delle (B), e con essa le altre due.

a). *Coroll.* L'equazioni (B) significano, che la *velocità assoluta* del polo (L, M, N) proviene ad ogn' istante da due velocità parziali, l' una delle quali, composta delle tre

$$qN - rM\,, \quad rL - pN\,, \quad pM - qL\,,$$

essendo quella che avrebbe esso polo se fosse invariabilmente connesso col sistema (281), ossia la *velocità comune col sistema;* l'altra, composta delle tre

$$\left(\frac{dL}{dt}\right), \quad \left(\frac{dM}{dt}\right), \quad \left(\frac{dN}{dt}\right),$$

rappresenterà necessariamente la *velocità relativa al sistema*, ossia *l' apparente*, cioè la velocità del polo quale apparirebbe ad un Osservatore che partecipasse al moto del sistema senza punto avvedersene.

b). Ed è da notare che di queste due velocità parziali, *comune* ed *apparente*, la prima rappresenta in grandezza e in asse quella componente della coppia d'inerzia G_1 che si riferisce alle *forze centripete*, e la seconda, quella componente che si riferisce alle *forze tangenziali* (282, 2°).

288. Benchè le formole *(A)* e *(B)* si siano stabilite nella supposizione che gli assi Ox, Oy, Oz siano fissi nello spazio assoluto, nondimeno sussistono eziandio nel caso che i detti assi siano invariabilmente connessi col sistema e mobili con esso. Imperocchè tali formole riferendosi successivamente al moto del sistema che si compie in un dato istante dt, ciascuno di questi moti infinitesimi si può sempre riferire alla posizione (riguardata come fissa) in che si trovano gli assi mobili al principio dell'istante che si considera.

a). Coroll. Il moto del sistema intorno ad O riducendosi a quello di un cono mobile che ruzzola sopra un cono fisso, le formole *(A)* e *(B)*, secondochè gli assi Ox, Oy, Oz sono fissi nello spazio assoluto o mobili col sistema, rappresenteranno le posizioni successive (p, q, r) dell'asse istantaneo $O\theta$ in quantochè va descrivendo o la *superficie del cono fisso*, o la *superficie del cono mobile*. E si vede inoltre, che nel primo caso le sei quantità

$$A, B, C, A', B', C'$$

variano di valore colla posizion del sistema, e che nel secondo caso si mantengono costanti.

---

§. 2°. *Nel moto intorno al punto O, il principio di reazione si risolve in due uguaglianze che sono: l' eguaglianza* **iniziale** *tra la coppia d' impulso e la corrispondente coppia di moto; e l'eguaglianza* **continua** *tra la coppia sollecitante e la corrispondente coppia d' inerzia.*

289. Proposizione. *Un sistema mobile intorno ad un punto fisso O essendo posto in movimento per l' impulso di forze istantanee, ed essendo nel medesimo tempo sollecitato dall' azion continua di altre forze* (qual sarebbe la gravità), *si domanda*: 1°. *Intorno a qual asse istantaneo $O\theta$ e con qual velocità θ comincerà la rotazione?* 2°. *Qual' è la legge secondo cui varia siffatta rotazione?*

Soluzione. Alla prima dimanda risponde il principio della *reazione istantanea*, dal quale sappiamo che intorno ad O la *coppia d' impulso*, nata dal trasportare in O le forze istantanee, deve essere uguale alla corrispondente coppia di moto. Alla seconda dimanda risponde il principio della *reazion continua*, dal quale sappiamo che la coppia delle forze sollecitanti deve riuscire continuamente uguale alla corrispondente coppia d'inerzia. Ne segue, che le due risposte possono dirsi rappresentate dalle formole (A) e (B), cioè dalle

$$(A)\qquad \begin{cases} L = Ap - C'q - B'r\,, \\ M = Bq - A'r - C'p\,, \\ N = Cr - B'p - A'q\,; \end{cases}$$

$$(B)\qquad \begin{cases} L_1 = \left(\dfrac{dL}{dt}\right) + qN - rM\,, \\[2ex] M_1 = \left(\dfrac{dM}{dt}\right) + rL - pN\,, \\[2ex] N_1 = \left(\dfrac{dN}{dt}\right) + pM - qL\,; \end{cases}$$

purchè si convenga che le lettere (L, M, N), (L_1, M_1, N_1) de' primi membri dinotino, non più come prima le quantità espresse da' secondi membri, ma sibbene le componenti della coppia d'impulso e della coppia sollecitante, coppie che si possono pur dinotare per G e G_1. Inoltre per abbreviare le notazioni, quando non siavi pericolo di equivoco, lasceremo che apparisca dal solo contesto del discorso se le lettere G, L, M, N debbano riferirsi alla *coppia iniziale d'impulso* come nelle (A), od alla *coppia attuale di moto* come nelle (B); e se le lettere G_1, L_1, M_1, N_1 debbano riferirsi alla coppia sollecitante od all'egual coppia d'inerzia.

Esaminiamo adesso come l'equazioni (A) e (B) rispondano alle due dimande del problema.

E primieramente, supponendosi date le forze istantanee, si debbono considerar come dati (al cominciar del moto) i loro momenti L, M, N intorno ai tre assi Ox, Oy, Oz. Coll'equazioni (A) si potranno dunque determinare le tre velocità angolari p, q, r, e per conseguenza l'asse istantaneo $O\theta$ intorno a cui il sistema *comincia* a girare colla velocità θ, composta delle tre p, q, r.

In secondo luogo è palese, che l'equazioni (B) rispondono alla seconda dimanda, facendoci conoscere a quali cangiamenti nell'istante dt vadano soggette le velocità angolari p, q, r, e per conseguenza l'asse istantaneo $O\theta$.

290. *Coroll.* Quando gli assi Ox, Oy, Oz sono invariabilmente connessi col sistema, se si suppongano diretti secondo i principali d' inerzia del punto O, sarà $0 = A' = B' = C'$, e quindi

$$L = Ap, \qquad \left\{ \begin{array}{l} qN - rM = (C - B)\,qr, \\ rL - pN = (A - C)\,rp, \\ pM - qL = (B - A)\,pq. \end{array} \right.$$
$$M = Bq,$$
$$N = Cr,$$

Ciò posto. 1°. L' equazioni (A) si riducono alle

$$p = \frac{L}{A}, \quad q = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{N}{C},$$

le quali insegnano che : *Per determinare le componenti p, q, r della retta $O\theta$, che rappresenta in grandezza e in direzione la rotazione iniziale θ, basta dividere la somma de' momenti delle forze d' impulso intorno a ciascuno de' tre assi principali pel corrispondente momento d' inerzia.*

2°. L' equazioni (B) diventano le seguenti di Eulero

$$(B) \qquad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr, \\[2ex] M_1 = B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp, \\[2ex] N_1 = C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq. \end{array} \right.$$

E queste sono l' equazioni più semplici che rappresentano la superficie del cono mobile, descritta dall' asse istantaneo $O\theta$ nell' interno del sistema.

291. *Scolio* Allorchè un corpo si muove nello spazio e si vogliono scoprire le leggi del suo moto, conviene immaginar trasportate tutte le forze, a cui è sottomesso, nel suo centro di gravità, ed ivi determinarne la forza risultante e la coppia risultante. Per l' azion della forza risultante si scoprirà la traiettoria descritta dal centro di gravità, considerato come un semplice punto in cui sia concentrata

tutta la massa del corpo; e per l'azion della coppia risultante si scoprirà [mediante le (A) e (B)] il moto di rotazione del corpo intorno al detto centro. Da ciò apparisce che: *Il movimento più generale di un corpo nello spazio si compone di due moti simultanei che sono:* **un moto di traslazione** *del suo centro di gravità*, ed **un moto di rotazione** *intorno a questo centro.* E tali appunto si mostrano all'occhio dell'astronomo i movimenti de' corpi celesti.

---

§. 3°. *Dato che il moto di un corpo riducasi a quello di un cono circolare che ruzzola equabilmente sopra un altro cono circolare dello stesso vertice, con quali rotazioni parziali gireranno i due coni sui loro assi? E per qual coppia sollecitante si manterrà un tal movimento?*

292. Siano Oh, Ox gli assi del cono *fisso* e del cono *mobile* (fig. 70), e sia $O\theta$ l'asse istantaneo secondo cui si toccano i due coni nel ruzzolare che fa il secondo sul primo. Degli angoli $(x\theta)$, (θh) rappresentanti la *semi-apertura* de' coni nominati $(xO\theta)$, $(hO\theta)$, niuno potrà esser evidentemente maggiore di un retto, e per conseguenza la loro somma (xh), ossia l'angolo compreso tra gli assi degli stessi coni, non potrà esser maggiore di due retti.

La rotazione uniforme $= \theta$, rappresentata dall'asse istantaneo $O\theta$, si decomponga in due a, b intorno ai due assi Oh, Ox. Poichè le due componenti a, b si ottengono proiettando $O\theta$ sopra ciascuno de' due assi Oh, Ox, essendo *l'altro dirigente*, avremo (*App.* 9)

$$a = \theta\,\frac{sen.(x\theta)}{sen.(xh)}, \quad b = \theta\,\frac{sen.(\theta h)}{sen.(xh)}.$$

Il *verso* di queste due rotazioni parziali si scopre subito dall'osservare quale de' tre assi $O\theta$, Ox, Oh trovisi fra mezzo agli altri due. Se l'intermedio sia l'asse $O\theta$, il moto delle due rotazioni a, b si farà nello stesso verso intorno agli assi Oh, Ox, nel verso che si chiama *diretto.* Ma se l'asse intermedio sia quello dell'uno o dell'altro cono, il moto della rotazione sarà *diretto* intorno all'asse *intermedio*, e sarà *retrogrado* intorno all'altro asse (fig. 71).

293. Due nuovi assi Oy, Oz formino con Ox un sistema di tre assi rettangolari invariabilmente connessi col corpo e però *mobili* col cono $(xO\theta)$, ed il piano xOy coincida col piano xOh al cominciar del moto, vale a dire quando si ha $t = 0$.

Girando il piano (hOx) colla velocità $= a$ intorno all'asse fisso Oh, dopo il tempo t avrà deviato dalla sua posizione iniziale coll' angolo $= - at$ [contando la deviazione a partire dalla *posizione finale* del piano hOx], e nel medesimo tempo il piano xOy (girando intorno ad Ox) avrà deviato dal piano mobile precedente con l' angolo $= - bt$, contando questa deviazione a partire dalla *posizione finale* del piano xOy.

Ciò posto, se la rotazione θ intorno all' asse istantaneo si voglia decomporre in tre p, q, r intorno agli assi mobili Ox, Oy, Oz, si avrà

$$\left\{\begin{aligned} p &= \theta \cos.(x\theta), \\ q &= \theta \operatorname{sen}.(x\theta) \cos.bt, \\ r &= - \theta \operatorname{sen}.(x\theta) \operatorname{sen}.bt, \end{aligned}\right.$$

donde, essendo costanti θ e l' ang.$(x\theta)$, si trae

$$dp = 0, \quad \frac{dq}{dt} = br, \quad \frac{dr}{dt} = - bq.$$

Per mezzo di questi valori di p, q, r, ove siano dati i momenti A, B, C, A', B', C', conosceremo ad ogn' istante:

1°. La forza viva del corpo

$$2T = \begin{array}{c} Ap^2 \\ Bq^2 \\ Cr^2 \end{array} - 2 \left| \begin{array}{l} A'qr \\ B'rp \\ C'pq \end{array} \right. ;$$

2°. E quindi le componenti L, M, N della coppia attuale di moto G

$$L = \frac{dT}{dp}, \quad M = \frac{dT}{dq}, \quad N = \frac{dT}{dr};$$

3°. E quindi ancora le componenti

$$L_1 = \frac{dL}{dt}, \quad M_1 = \frac{dM}{dt}, \quad N_1 = \frac{dN}{dt}$$

della coppia sollecitante G_1, idonea a mantenere nel corpo il moto equabile che si considera.

Così, se i tre assi Ox, Oy, Oz siano i principali d'inerzia del punto O, sarà

$$L_1 = A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = (C - B)qr,$$

$$M_1 = B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = r[bB + (A - C)p],$$

$$N_1 = C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = -q[bC + (A - B)p].$$

294. Prop. *Allorchè due de' tre momenti principali A, B, C del punto O riescono eguali, per esempio*

$$B = C,$$

la retta OG, che rappresenta la coppia attuale di moto G, si troverà sempre nel piano de' tre assi Ox, $O\theta$, Oh, deviando da Ox verso $O\theta$; e farà cogli stessi assi gli angoli offerti dalle formole:

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \tan.(xG) = \frac{B}{A}\tan.(x\theta), \\ & \tan.(G\theta) = \frac{(A - B)\tan.(x\theta)}{A + B\tan^2(x\theta)}, \\ & \tan.(Gh) = \frac{A\tan.(xh) - B\tan.(x\theta)}{A + B\tan.(x\theta)\tan.(xh)}. \end{aligned} \right.$$

Dim. Le componenti della retta OG, quando $C = B$, sono

$$L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Br,$$

donde

$$B = \frac{M}{q} = \frac{N}{r} = \frac{G\, sen.(xG)}{\theta\, sen.(x\theta)},$$

essendochè M, N si compongono nella retta $G\, sen.(xG)$, proiezione di OG sul piano yz; e q, r si compongono nella retta $\theta\, sen.(x\theta)$, proiezione di $O\theta$ sullo stesso piano. Queste due proiezioni $G\, sen.(xG)$, $\theta\, sen.(x\theta)$ il cui rapporto (uguale a quello delle loro componenti omologhe) è positivo, $= B$, coincidono certamente nella direzione. L' asse Ox tiene adunque dalla stessa parte le due rette OG, $O\theta$, e sta con esse in un medesimo piano. Ma dalle due relazioni

$$G\, sen.(xG) = B.\theta\, sen.(x\theta), \qquad G\, cos.(xG) = Ap = A.\theta\, cos.(x\theta),$$

si ricava, dividendo l' una per l' altra, la prima delle (a); e da questa, a causa delle relazioni

$$tan.(G\theta) = tan.(x\theta - xG) = \frac{tan.(x\theta) - tan.(xG)}{1 + tan.(x\theta) tan.(xG)},$$

$$tan.(Gh) = tan.(xh - xG) = \frac{tan.(xh) - tan.(xG)}{1 + tan.(xh) tan.(xG)},$$

si ricavano le altre due.

a). Dalla $tan.(xG) = \frac{B}{A} tan.(x\theta)$ apparisce che l'angolo (xG) è sempre acuto, non meno dell'angolo $(x\theta)$, e che inoltre l' asse OG cade dentro l'angolo $(x\theta)$, ovvero fuori e dal lato di $O\theta$, secondochè sia

$$B < A, \quad B > A.$$

Per esempio, nello sferoide terrestre si ha prossimamente

$$\frac{B}{A} = \frac{307}{308};$$

onde l'asse OG, intermedio tra Ox ed $O\theta$, è molto più vicino ad $O\theta$ che non ad Ox, essendo

$$tan.(G\theta) = \frac{tan.(x\theta)}{308 + 307\, tan^2.(x\theta)} .$$

295. Il valore della coppia sollecitante G_1, nel caso di $B = C$, si può trovare direttamente cercando la *velocità assoluta* del polo della coppia di moto G, cioè la velocità onde si muove intorno all' *asse fisso Oh* l' estremità dell' asse OG.

A questo fine basta osservare che, se il piano hOG va girando intorno all' asse fisso Oh colla velocità angolare

$$a = \theta \frac{sen.(x\theta)}{sen.(xh)} ,$$

l' estremità di OG si muove colla velocità assoluta $= a.G\, sen.(hG)$. Si avrà dunque

$$G_1 = a\, G sen.(hG) = \theta\, sen.(x\theta) . \frac{G\, sen.(hG)}{sen.(xh)} ,$$

ossia

$$G_1 = \theta^2 sen^2.(x\theta).B[\, cot.(xh) - cot.(xG)\,] ,$$

perchè

$$sen.(hG) = sen.(xG - xh) = sen.(xG)\, sen.(xh)\, [cot.(xh) - cot.(xG)] ,$$

e

$$G\, sen.(xG) = B.\theta sen.(x\theta) .$$

a). Giova notare che delle due velocità

$$\theta.G sen.(\theta G) , \; - b\, G\, sen.(xG) ,$$

relative al polo della coppia di moto OG, la prima è la *comune al cono mobile*, cioè quella che il detto cono ha nel piano θOx là dove termina OG, e la seconda è (rispetto allo stesso cono) la *velocità* *apparente* (considerandosi qui come fisso il piano xOG, ossia xOh, e come mobile il *piano* xOy *del corpo*, e girante sopra Ox colla velocità $b = \theta \dfrac{sen.(\theta h)}{sen.(xh)}$).

b). La velocità assoluta G_1, siccome risultante di coteste due velocità le cui direzioni sono entrambe perpendicolari al piano xOh, dovrà essere uguale alla loro somma, cioè

$$G_1 = G\theta\left[sen.(\theta G) - \frac{sen.(\theta h)}{sen.(xh)}\, sen.(xG) \right].$$

Ed infatti quest'espressione, se pongasi

$$ang.(\theta G) = ang.(\theta h + hG),$$

$$ang.(xG) = ang.(xh + hG),$$

si riduce a

$$G\theta \frac{sen.(hG)}{sen.(xh)}\left[sen.(xh)\, cos.(h\theta) + sen.(h\theta)\, cos.(xh) \right]$$

$$= \theta \frac{sen.(x\theta)}{sen.(xh)}.G\, sen.(hG) = aG\, sen.(hG).$$

---

§. 4°. *Per quale immagine ci è dato di vedere come si vada operando la precession degli equinozii e la nutazion dell' asse terrestre? E donde viene la causa di questi due moti?*

296. Prop. *Il moto* **medio** *della terra intorno al suo centro di gravità può ridursi al moto di un sottilissimo cono circolare* (connesso colla terra e mobile con essa) *che va ruzzolando equabilmente sulla superficie interna di un altro cono circolare dello stesso vertice.*

Dim. Nella terra, riguardata come un globo schiacciato ai poli o rigonfio all'equatore, sia O il centro di gravità, Ox il semi-asse di rivoluzione diretto al *polo boreale*, ed Oh una retta perpendicolare al piano dell' eclittica, inalzata dal lato dov' è il polo boreale (fig. 72). L'angolo onde il piano dell' equatore devia dal piano dell'ecclittica, essendo uguale a quello degli assi omologhi Ox, Oh degli stessi piani, sarà

$$ang.(xh) = 23^{\circ}, 27', 32''.$$

Le osservazioni astronomiche hanno manifestato che, mentre la terra gira equabilmente sopra il suo asse Ox, quest' asse medesimo insieme col piano hOx va girando lentamente *in senso contrario* intorno ad Oh, asse del piano dell' ecclittica. Questa rotazione retrograda (che è di $50''$ circa per anno, e che per compiere un giro intero non richiede meno di 25868 anni) costituisce il *moto della precession degli equinozii*, il cui valor *medio* in un giorno siderale è di $0'', 136795$.

La terra dunque può riguardarsi come animata da due rotazioni simultanee ed uniformi, le cui velocità angolari a, b intorno agli assi Oh, Ox (preso il giorno siderale per unità di tempo) sono

$$a = -0'', 136795, \quad b = 360^{\circ}.$$

Queste due rotazioni si compongono ad ogn' istante in una rotazione unica θ rappresentata dall'asse istantaneo $O\theta$, che sarà dato in direzione e in grandezza dalle formole

$$a = \theta \frac{sen.(x\theta)}{sen.(xh)}, \qquad b = \theta \frac{sen.(\theta h)}{sen.(xh)}.$$

Da esse ricavasi

$$\frac{b}{a} = \frac{sen.(\theta x + xh)}{sen.(x\theta)} = sen.(xh)\, cot.(x\theta) - cos.(xh),$$

e quindi

$$tan.(x\theta) = \frac{a\, sen.(xh)}{b + a\, cos.(xh)},$$

la quale, fatte le sostituzioni de' valori di a, b, $ang.(xh)$, dà prossimamente

$$ang.(x\theta) = 0'', 0087 .$$

A cagione della estrema piccolezza di quest'angolo, i tre assi Ox, OG, $O\theta$ sono così vicini tra loro che possono aversi come un solo e medesimo asse, senza che possa risultarne alcun error percettibile all'osservazione. Inoltre dalla relazione

$$b = \theta \frac{sen.(\theta h)}{sen.(xh)} = \theta \frac{sen.(\theta h)}{sen.(\theta h + x\theta)} ,$$

si fa chiaro che la velocità della rotazione istantanea θ è pressochè uguale alla velocità della rotazion della terra sopra il suo asse Ox.

Ed immaginando due coni circolari descritti intorno agli assi Oh, Ox sotto gli angoli $(hO\theta)$, $(xO\theta)$, il primo fisso e l'altro connesso colla terra e mobile con essa, potremo dire che:

Il moto medio della terra intorno al suo centro di gravità si effettua esattamente come se il cono sottilissimo $(xO\theta)$, *descritto intorno all'asse terrestre* Ox *e connesso colla terra, ruzzolasse equabilmente sulla superficie interna del cono fisso* $(hO\theta)$ *descritto intorno all'asse* Oh *del piano dell'ecclittica.*

297. Cerchiamo anche di vedere ciò che dee avvenire nel moto apparente del sole.

Sia FE la linea d'intersezione del piano dell'equator terrestre col piano dell'ecclittica (*fig.* 72). La retta FE, siccome perpendicolare ai due assi Oh, Ox, andrà movendosi col loro piano hOx intorno ad Oh, e però in un anno descriverà sul piano dell'ecclittica un angolo di 50'' incirca.

Ma il moto che è proprio della terra (per un'illusione insuperabile) è da noi attribuito alla Volta stellata ed al sole; ond'è che vediamo il sole descrivere in un anno *l'ecclittica*, cioè un'ellisse pressochè circolare di cui uno de' fochi è nel centro O della terra (*fig.* 73). I punti o *nodi* E, F, dove quest'orbita incontra il piano dell'equatore, si dicono *punti degli equinozii*, perchè, quando il sole arriva ad uno di questi punti, il giorno è uguale alla notte. La retta EF, chiamata *linea degli equinozii* ed anche *de' nodi*, essendo la linea d intersezione del piano dell'equatore col piano dell'ecclittica, descrive in un anno (con *moto retrogrado*) l'angolo $EOE' = 50''$ incirca, ed è quest' angolo che *propriamente* si chiama *la precession degli equinozii.*

298. Oltre al moto di precessione, l'asse terrestre Ox partecipa ad un altro moto di oscillazione pel quale, in un periodo di $18\frac{1}{3}$ anni incirca, va alternatamente allontanandosi ed avvicinandosi all'asse Oh del piano dell'ecclittica. Questa lentissima e strettissima oscillazione, che è a un di presso di 9 secondi intorno alla posizion media, si chiama **nutazione** *dell'asse terrestre.*

299. Per iscoprire la causa di questi due moti di precessione e di nutazione, cerchiamo qual coppia sollecitante dee venir sulla terra dall'attrazione de' corpi esterni, fissi o mobili, quali il sole e la luna.

« Se consideriamo un solo di questi corpi, od un punto qualunque attraente S, le forze di attrazione che vanno da questo punto a tutte le molecole uguali del globo terrestre, hanno una risultante unica la cui direzione (attesa la simmetria della figura) dee cadere evidentemente nel piano SOx che è uno de' meridiani terrestri. Questa forza, essendo trasportata parallelamente a sè stessa nel centro O di gravità, darà una coppia il cui asse è situato nel piano dell'equatore. E come si può dire lo stesso delle coppie simili, dovute a tutti gli altri punti attraenti, è manifesto che tali coppie si comporranno in una coppia il cui asse OG_1 cadrà nel piano dell' equatore (Poinsot). »

Ciò posto, s'intendano coordinati nel centro O della terra intorno all'asse Ox di rotazione due nuovi assi rettangolari Oy, Oz, e mobili così, che Oy coincida sempre colla linea degli equinozii OE e si conti *positivo* verso il punto d' Ariete E. Se la coppia sollecitante OG_1 che vien sulla terra da' corpi esterni si risolve in tre L_1, M_1, N_1 ad ogn' istante del tempo, sarà

$$L_1 = 0, \quad M_1 = G_1 \cos.(yG_1), \quad N_1 = G_1 \operatorname{sen.}(yG_1) \; ;$$

ed è palese che, delle due componenti M_1, N_1 della G_1, alla M_1 sarà dovuto il *moto di precessione*, ed alla N_1 il *moto di nutazione.* Pel valor *medio* di M_1 si dovrà quindi avere prossimamente (295)

$$M_1 = a\, G \operatorname{sen.} (hG).$$

a). Si noti che le tre equazioni del moto intorno ad O, cioè le

$$\left\{\begin{aligned} L_1 &= A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr, \\ M_1 &= B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp, \\ N_1 &= C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq, \end{aligned}\right.$$

fatto $0=q=r$ (essendochè la retta OE od Oy si muove mantenendosi perpendicolare ai due assi Ox, $O\theta$, quasi coincidenti in uno), e $C=B$, diventano

$$\frac{dp}{dt}=0,\quad \frac{dq}{dt}=\frac{M_1}{B},\quad \frac{dr}{dt}=\frac{N_1}{B},$$

dalla prima delle quali, integrando, si ricava

$$p = \theta \cos.(x\theta) = costante,$$

vale a dire: *La rotazion della terra, stimata intorno al suo asse, si conserva uniforme, nè può esser turbata dall'attrazione de' corpi esterni.*

CAPO VI.

Della percossa de' corpi e del moto che ne segue.

§. 1°. *Della percossa contro un ostacolo o punto fisso.*

300. Cominciamo dal richiamare le proposizioni che seguono:

1°. Nel centro O di gravità del corpo s'intendano trasportate le quantità di moto de' suoi punti materiali, ed ivi ridotte ad una forza F e ad una coppia G. Se questa coppia si decompone in tre L, M, N intorno ai tre assi naturali d'inerzia Ox, Oy, Oz, e se si dinota per (l, m, n) la direzione dell'asse istantaneo $O\theta$, e per θ la velocità angolare della rotazione, si avrà (290)

$$L = A.l\theta\,, \quad M = B.m\theta\,, \quad N = C.n\theta\,,$$

donde

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^2 = \dfrac{L^2}{A^2} + \dfrac{M^2}{B^2} + \dfrac{N^2}{C^2}\,, \\[2ex] l = \dfrac{1}{\theta}.\dfrac{L}{A}\,, \quad m = \dfrac{1}{\theta}.\dfrac{M}{B}\,, \quad n = \dfrac{1}{\theta}.\dfrac{N}{C}\,, \end{array} \right.$$

equazioni per le quali date le quantità L, M, N si determinano le θ, l, m, n.

2°. Allorchè le quantità di moto equivalgono ad una sola forza F, diretta od applicata al punto (α, β, γ), si ha (78):

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} L = F[\beta \cos.(zF) - \gamma \cos.(yF)]\,, \\ M = F[\gamma \cos.(xF) - \alpha \cos.(zF)]\,, \\ N = F[\alpha \cos.(yF) - \beta \cos.(xF)]\,. \end{array} \right.$$

3°. Per conoscere se il moto del corpo riducasi o no ad una semplice rotazione, basta osservare se rimane o no soddisfatta la relazione.

$$(3)\qquad \frac{L}{A}\cos.(xF)+\frac{M}{B}\cos.(yF)+\frac{N}{C}\cos.(xF)=0\,,$$

esprimente che il moto di traslazione del centro O di gravità è perpendicolare all'asse istantaneo $O\theta$ (274, b).

Laonde: Data una forza F di nota direzione (l', m', n'), se vogliasi applicarla al corpo in guisa che il moto *iniziale* riducasi ad una semplice rotazione, basta aver cura che la forza F sia diretta in contatto col piano rappresentato dall'equazione:

$$m'n'A(B-C)x+n'l'B(C-A)y+l'm'C(A-B)z=0;$$

essendochè, nella fatta supposizione, si ha

$$L=F(n'y-m'z)\,,\qquad M=F(l'z-n'x)\,,\qquad N=F(m'x-l'y).$$

4°. E per conoscere se le quantità di moto equivalgono o no ad una forza unica, basta osservare se rimane o no verificata la relazione

$$(4)\qquad L\cos.(xF)+M\cos.(yF)+N\cos.(zF)=0\,,$$

esprimente che la direzione della forza F è perpendicolare alla retta OG che rappresenta la coppia G.

5°. La velocità U di un punto qualunque (x, y, z) del corpo, risultando ad ogn' istante dalla velocità u del centro di gravità, e dalla velocità v dovuta alla rotazion del corpo intorno all'asse istantaneo $O\theta$, avrà per componenti secondo gli assi Ox, Oy, Oz:

$$(5)\qquad \begin{cases} U_x=u_x+v_x\,, \\ U_y=u_y+v_y\,, \\ U_z=u_z+v_z\,; \end{cases}$$

dove, chiamando μ la massa del corpo, la velocità u del centro di gravità si ha dalla

$$u = \frac{F}{\mu};$$

e la velocità v del punto (x, y, z), dovuta alla rotazione θ, si ha dalle (281)

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} v_x &= \theta(mz - ny), \\ v_y &= \theta(nx - lz), \\ v_z &= \theta(ly - mx). \end{aligned} \right.$$

La velocità U del punto (x, y, z), *risultante* di u, v, si può in generale indicare colla formola

$$U = ris.(u, v).$$

301. Prop. I. *Essendo un corpo in movimento, un suo punto* (x, y, z) *è fermato ad un tratto per l'incontro di un ostacolo o punto fisso, e così, che il corpo non ha più altra libertà se non quella di girare intorno ad esso punto. Qual sarà il nuovo moto del corpo? E quanta la percossa fatta contro l'ostacolo?*

Soluz. Se le quantità di moto che, trasportate nel centro O di gravità, si erano ridotte alla forza F ed alla coppia G, s'intendano invece trasportate nel punto O' (x, y, z) del corpo, si avrà in questo punto oltre la forza F una coppia G', di cui le componenti saranno (81)

$$L' = L - F[y\cos.(zF) - z\cos.(yF)],$$

$$M' = M - F[z\cos.(xF) - x\cos.(zF)],$$

$$N' = N - F[x\cos.(yF) - y\cos.(xF)].$$

E se inoltre nel punto (x, y, z) s' intendano coordinati tre assi $O'x$, $O'y$, $O'z$ paralleli ai primi, e si esprimano intorno ad essi i momenti d'inerzia del corpo ed i momenti complessi, avremo (219)

$$A_1 = A + \mu(y^2 + z^2), \qquad A' = \mu yz,$$

$$B_1 = B + \mu(z^2 + x^2), \qquad B' = \mu zx,$$

$$C_1 = C + \mu(x^2 + y^2), \qquad C' = \mu xy.$$

Finalmente se la rotazione istantanea $\theta_1 dt$, che dopo la percossa nasce intorno al punto O', si decompone in tre $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$, queste rotazioni componenti si avranno dall' equazioni (289)

$$A_1 p - C'q - B'r = L',$$

$$B_1 q - A'r - C'p = M',$$

$$C_1 r - B'p - A'q = N';$$

ed il centro O di gravità, che rispetto ai nuovi assi ha per coordinate $-x$, $-y$, $-z$, si moverà con una velocità v' composta delle tre

$$v'_x = \frac{dx}{dt} = -(qz - ry),$$

$$v'_y = \frac{dy}{dt} = -(rx - pz),$$

$$v'_z = \frac{dz}{dt} = -(py - qx).$$

Da ciò segue che *le quantità di moto attuali*, sussistenti dopo la percossa, saranno rappresentate in O' dalla forza $F' = \mu v'$, e dalla coppia G'.

Dunque se la forza F, che da O si era trasportata in O', si concepisce decomposta in due, una delle quali sia $= F'$, l' altra componente che chiamo P sarà quella che è rimasta distrutta nella percossa, e questa forza P (essendo in equilibrio le tre forze $F, -F', -P$) sarà la risultante di F, $-F'$, cioè sarà

$$P = ris.(F, -F') = ris.(F, -\mu v').$$

n). *Coroll.* Essendosi trovato che la velocità del punto (x, y, z) del corpo è $U = ris.(u, v)$, se si volesse conoscere quanta massa (μ) sia da concentrare in esso punto, per renderlo capace di quella percossa che il medesimo fa realmente in una data direzione δ, questa massa (μ) si avrebbe evidentemente dall'equazione

$$(\mu).U\cos.(U\delta) = P\cos.(P\delta).$$

302. Prop. II. *Girando un corpo intorno ad una retta appoggiata sopra due assi naturali* (*) *d'inerzia* Ox, Oy *dello stesso corpo colla velocità angolare* θ, *qual sarà la velocità* U *di uno qualunque de' punti del corpo situati nel piano* xy? *Di qual percossa* P *sarà capace un tal punto nell' incontro di un punto fisso? E che diverrà il moto del corpo immediatamente dopo l' urto?*

Soluz. Osserviamo dapprima che ogni retta contenuta nel piano xy (qualunque sia la sua direzione l, m, $n = 0$) si può sempre riguardare come un asse permanente di rotazione, sapendosi che una retta della direzione (l, m, n) è un asse permanente se sia contenuta nel piano dell' equazione (252, *a*)

$$mn(B-C)x + nl(C-A)y + lm(A-B)z = 0\ ;$$

e quest' equazione è sempre soddisfatta nel caso nostro da $n = 0$ e da $z = 0$.

Le quantità di moto del corpo equivarranno adunque ad una forza unica F perpendicolare al piano xy in qualche punto (α, β); e, trasportate al centro O di gravità, daranno ivi una coppia G composta delle (300, 2°)

$$L = F\beta,\quad M = -F\alpha,\quad N = 0,$$

essendo $\cos.(xF) = 0$, $\cos.(yF) = 0$, $\cos.(zF) = 1$. E si avrà

$$F\beta = A.\, l\theta,\quad F\alpha = -B.\, m\theta,$$

e per conseguenza

$$l = \frac{F}{\theta}\cdot\frac{\beta}{A},\quad m = -\frac{F}{\theta}\cdot\frac{\alpha}{B},\quad \frac{F}{\theta} = \frac{AB}{\sqrt{(A^2\alpha^2 + B^2\beta^2)}}$$

(*) Per assi naturali d'inerzia s'intendono i principali del centro di gravità.

1°. Ciò premesso, se il moto del corpo riguardasi nell' istante dt come composto del moto del centro di gravità $(= udt)$, e del moto di rotazione $(= \theta dt)$ intorno ad esso centro; la velocità U del punto (x, y) si comporrà evidentemente delle due velocita u, v dovute ai moti accennati di traslazione e di rotazione, e le cui direzioni sono entrambe perpendicolari al piano xy. Si avrà dunque

$$U = u + v.$$

Ma $$u = \frac{F}{\mu},$$

e $$v = \frac{dz}{dt} = \theta(ly - mx) = \frac{F}{AB}(A\alpha x + B\beta y);$$

dunque

$$U = \frac{F}{\mu AB}[AB + \mu(A\alpha x + B\beta y)].$$

Se si chiama Π la distanza del punto (x, y) alla retta sopra cui supponiamo girare il corpo colla velocità angolare θ, la velocità del punto (x, y) è pure espressa da

$$U = \Pi . \theta .$$

I punti del corpo che non hanno alcuna velocità debbono adunque soddisfare all' equazione

$$(a) \qquad AB + \mu(A\alpha . \text{X} + B\beta . \text{Y}) = 0,$$

la quale perciò rappresenterà la retta sopra cui gira il corpo, ossia *l' asse permanente* che ha il *centro di percossa nel punto* (α, β).

N. B. Da quest' equazione si ricava che: *In ciascuno de' piani principali del centro di gravità* sussiste questa proprietà notabile, cioè, *se di due rette* (*a*), (*b*), *l'una* (*a*) *contenga il centro di percossa* (x, y) [che chiamo *B*] *relativo all'altra* (*b*), *anche la retta* (*b*) *conterrà il centro di percossa* (α, β) [che chiamo *A*] *relativo alla retta* (*a*);

essendochè siffatta condizione viene espressa rispettivamente dalle due equazioni

$$(a)\qquad AB + \mu(A\alpha.\mathrm{x} + B\beta.\mathrm{y}) = 0$$

$$(b)\qquad AB + \mu(A\mathrm{x}.\alpha + B\mathrm{y}.\beta) = 0,$$

che riescono identiche. E si vede inoltre che *i diversi punti* (x, y) *dell'una* (*a*) *delle due rette si possono riguardare come centri di percossa relativi ad altrettante rette* (*b*) *le quali passano tutte per lo stesso punto* $A(\alpha, \beta)$; e che, per conseguenza: **Una percossa,** fatta normalmente al piano principale che si considera in *un punto qualsivoglia* di una retta (*a*), *non produrrà veruna percussione sul punto A*, **centro di percossa relativo alla stessa retta** (*a*).

2°. Supponiamo ora che il corpo sia affatto libero, e che, girando nell'istante dt sulla retta *(a)* colla velocità θ, s'imbatta col punto $(x, y, z = 0)$ contro un ostacolo, così, che dopo l'urto non abbia altra libertà se non quella di girare intorno ad esso punto (x, y). Il nuovo moto di rotazione $\theta_1 dt$ che prenderà il corpo, e la percossa P fatta contro l'ostacolo, si avranno dalle formole generali riportate più sopra, le quali, avuto riguardo alle

$$\left\{\begin{aligned} A_1 &= A + \mu\, y^2, \\ B_1 &= B + \mu\, x^2, \\ C_1 &= C + \mu\,(x^2 + y^2); \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} A' &= 0, \\ B' &= 0, \\ C' &= \mu\, xy; \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} L' &= F(\beta - y), \\ M' &= -F(\alpha - x), \\ N' &= 0; \end{aligned}\right.$$

diventano

$$\begin{aligned} A_1 p - C'q &= L', \\ B_1 q - C'p &= M', \\ C_1 r &= 0; \end{aligned} \quad \left\{\begin{aligned} v'_x &= 0, \\ v'_y &= 0, \\ v' &= \frac{dz}{dt} = -(py - qx). \end{aligned}\right.$$

e danno

$$p = \frac{L'B_1 + M'C'}{A_1B_1 - C'^2} = F\frac{B(\beta - y) + \mu x(\beta x - \alpha y)}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)} ,$$

$$q = \frac{M'A_1 + L'C'}{A_1B_1 - C'^2} = - F\frac{A(\alpha - x) - \mu y(\beta x - \alpha y)}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)} ,$$

$$v' = -(py - qx) = - F\frac{Ax(\alpha - x) + By(\beta - y)}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)} .$$

Ove questi valori si sostituiscano nella formola

$$P = ris.(F, - F') ,$$

che nel nostro caso equivale a

$$P = F - \mu v' ,$$

si avrà il valor cercato della percossa P di cui è capace il corpo nel punto (x, y):

$$P = F\frac{AB + \mu(A\alpha x + B\beta y)}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)} ,$$

ovvero

$$P = \theta\Pi.\mu\frac{AB}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)} ,$$

essendosi trovato

$$\theta\Pi = \frac{F}{\mu AB}[AB + \mu(A\alpha x + B\beta y)].$$

Pertanto il punto (x, y), animato dalla velocità $U = \theta\Pi$, percuote precisamente come se in esso fosse concentrata quella parte della massa μ del corpo, che è espressa dalla frazione

$$\frac{AB}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)} .$$

Questa frazione è uguale al rapporto

$$\frac{\delta_1}{\delta + \delta_1},$$

dove δ dinota la retta che dal punto (x, y) va al centro O di gravità del corpo, e δ_1 dinota il prolungamento di questa linea sino ad incontrare la retta dell' equazione

$$(b) \qquad AB + \mu(Ax.x_1 + By.y_1) = 0,$$

cioè l'asse permanente che ha il centro di percossa nel punto (x, y). Infatti, esprimendo per (x_1, y_1) questo incontro, si ha

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = -\frac{\delta_1}{\delta},$$

con che l' equazione (b) somministra

$$\mu(Ax^2 + By^2) = \frac{\delta}{\delta_1}AB, \qquad \frac{AB}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)} = \frac{\delta_1}{\delta + \delta_1}.$$

Si ha dunque

$$P = \theta\Pi.\mu \frac{\delta_1}{\delta + \delta_1}.$$

È da notare che i punti (x, y), (x_1, y_1) sono due centri reciproci di percossa (224), e che però il secondo è capace di percuoter colla forza

$$P_1 = \theta\Pi_1.\mu \frac{\delta}{\delta + \delta_1},$$

essendo Π_1 la distanza tra il punto (x_1, y_1) e l'asse di rotazione (a). Ond' è che :

Quando un corpo gira sopra una retta situata nel piano di due assi naturali d' inerzia Ox, Oy, se si considerano in questo piano due centri di percossa (x, y), (x_1, y_1) reciproci l'un dell'altro, e le percussioni rispettive di cui son capaci; possiamo dire, *che questi due punti percuotono a quel modo che farebbero se si fossero spartita tra loro la massa del corpo nella ragione inversa delle loro distanze δ, δ_1 al centro di gravità.*

Altra soluzione. Il problema particolare che ora si è risoluto come un' applicazione delle formole generali, si può risolvere ancora facendo uso del principio dichiarato alla *pag.* 301.

L'asse permanente che ha il centro di percossa nel punto B, od (x, y), è rappresentato dall' equazione

$$(b) \qquad AB + \mu(Ax.x' + By.y') = 0 \, .$$

Ciò avvertito, la retta determinata dai due punti $A(\alpha, \beta)$ e $B(x, y)$ s' immagini prolungata sino ad incontrare l' asse (b), e sia $B'(x', y')$ il punto d' incontro. In virtù del principio citato, una percussione sul punto B' non produrrà nessuna percussione sul punto B, centro di percossa dell' asse (b). Avvertiamo ora che il corpo, girante sulla retta (a), mentre sta per colpire col punto $B(x, y)$ contro un ostacolo fisso, si può riguardare come se fosse in riposo ed animato ad un tratto dalla forza unica F applicata al punto $A(\alpha, \beta)$. Se questa forza F si concepisce decomposta in due forze parallele P, P', la prima delle quali sia applicata nel punto $B(x, y)$ e la seconda nel punto $B'(x', y')$, *la componente P sarà la forza di percossa di cui è capace il punto* (x, y). Ma, per la nota proprietà delle forze parallele, si ha

$$F\alpha = Px + P'x' \, ,$$

$$F\beta = Py + P'y' \, , \quad F = P + P' \, .$$

Se dall' equazione (b) moltiplicata per P', cioè se dalla

$$A.BP' + \mu(Ax.P'x' + By.P'y') = 0 \, ,$$

si elimina P', $P'x'$, $P'y'$, si ottiene

$$AB(F - P) + \mu[Ax(F\alpha - Px) + By(F\beta - Py)]$$

e quindi

$$P = F \frac{AB + \mu(A\alpha x + B\beta y)}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)} \, .$$

Se dopo l'urto il corpo rimane libero di muoversi intorno al punto (x, y), la velocità θ_1 di rotazione si comporrà delle due p, q date dalle formole (300)

$$Ap = L = P'y' = F\beta - Py, \quad Bq = M = -P'x' = -(F\alpha - Px),$$

donde

$$p = F\frac{B(\beta - y) + \mu x(\beta x - \alpha y)}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)},$$

$$q = -F\frac{A(\alpha - x) - \mu y(\beta x - \alpha y)}{AB + \mu(Ax^2 + By^2)}.$$

303. Quesiti. *Girando un corpo sopra una retta situata nel piano di due assi naturali d' inerzia Ox, Oy, in quali punti del piano xy dovrà presentarsi l' ostacolo, perchè nell' incontro risulti* **massima**, o di un **dato valore** : 1°. La **percossa** *P? 2°. E quindi la* **velocità** *v' del centro di gravità? 3°. E la* **velocità** *θ_1 di rotazione intorno all' ostacolo?*

La risposta a queste dimande può ciascuno, che voglia, ricavarla dalle formole trovate.

---

§. 2°. *De' movimenti che sussistono dopo l' urto de' corpi liberi nello spazio. Percossa diretta, centrale ed eccentrica, e percossa obliqua.*

304. Non conoscendosi che imperfettamente la costituzione molecolare de' corpi, la piena determinazione de' moti reali che sussistono dopo l' urto è generalmente assai difficile per non dire impossibile. Ci ristringeremo quindi a mostrare il metodo che si suol tenere ne' casi più semplici.

305. Definizioni. Siano due corpi che camminando con moto di traslazione s' incontrano. La percossa che ne seguirà dicesi *diretta* e *centrale*, se i centri di gravità de' due corpi camminano per una medesima retta, e se di più questa retta riesce normale alle loro superficie nel punto comune di contatto. La percossa dicesi *diretta* ed *eccentrica* se la linea descritta dal centro di gravità del

corpo urtante riesce normale alle due superficie nel punto di contatto, ma non passa pel centro di gravità del *corpo urtato*. Finalmente la percossa è *obliqua* se la linea descritta dal centro di gravità del corpo urtante passa pel punto di contatto, ma ivi è obliqua al piano tangente.

a). V' ha de' corpi detti *elastici* che nell'urto si comprimono, ed appena cessata la *forza di compressione* spiegano una *forza di restituzione* per ripigliare la forma primiera. L'elasticità di un corpo si dice *perfetta* se la forza di restituzione, nel ricondurre il corpo alla forma di prima, opera esattamente (ma in verso contrario) come ha operato la forza di compressione. Un corpo si dice dotato di *un grado k di elasticità*, se è $= k$ il rapporto tra le velocità dovute alla forza di restituzione ed alla forza di compressione.

Se v' ha de' corpi che nell'urto non si comprimono, questi si dicono *duri*; e se compressi non ispiegano forza veruna per ripigliar la forma primiera, si dicono *molli*.

306. Prop. I. *Due corpi omogenei dotati di egual grado k di elasticità ed aventi le masse M, M', e le velocità V, V', s' incontrano con urto diretto e centrale. Quali saranno le velocità v, v' che prenderanno dopo l'urto?* Le seguenti:

$$v = V - (1 + k).\frac{(V - V')M'}{M + M'},$$

$$v' = V' + (1 + k).\frac{(V - V')M}{M + M'},$$

dove, supposto $V > V'$, se il corpo *urtato* M' è in quiete si farà $V' = 0$, e se viene incontro al corpo M si farà V' negativa.

Soluzione. Le quantità di moto, considerate a qualunque istante della durata dell'urto, dovendo essere equivalenti alle quantità di moto prima dell'urto, la loro somma sarà sempre

$$= MV + M'V' = costante.$$

Ma le velocità de' due corpi variando di continuo mentre l' urto va effettuandosi, sì nel tempo in cui opera la forza di compressione e sì nel tempo in cui si spiega la forza di restituzione, si vede che nell' istante in cui cessa l' azione della prima forza per dar luogo alla seconda, le due velocità debbono esser divenute uguali tra loro. In quest' istante, chiamando x questa velocità comune, l'equazion precedente diviene

$$MV + M'V' = Mx + M'x \;,$$

donde

$$x = \frac{MV + M'V'}{M + M'}$$

$$= V - \frac{(V - V')M'}{M + M'} = V' + \frac{(V - V')M}{M + M'} \;.$$

(Qui è da notare che la velocità x rappresenta pure la velocità uniforme del centro di gravità del sistema de' due corpi (196)).

Si vede inoltre che quando sarà finito l'urto, cioè quando avrà cessato di spiegarsi per intero la forza di restituzione, il corpo M resterà con una velocità v che sarà eguale a

$$V - (V - x) - k(V - x) \;,$$

cioè a quella V che aveva, meno quella perduta nel tempo della compressione, $= V - x$, e meno eziandio quella perduta nel tempo della restituzione, $= k(V - x)$. Dunque

$$v = V - (1 + k)(V - x) = V - (1 + k)\frac{(V - V')M'}{M + M} \;.$$

Similmente, il corpo M' resterà colla velocità v' eguale a

$$V' - (V' - x) - k(V' - x) \;,$$

e però sarà

$$v' = V' - (1 + k)(V' - x) = V' + (1 + k)\frac{(V - V')M}{M + M'} .$$

Corollarii.

a). La differenza delle velocità, ossia la **velocità rispettiva**, la quale prima dell'urto era $V - V'$, dopo l'urto diviene $= -k(V - V')$, e però *si mantiene la medesima se i due corpi sono perfettamente elastici.*

b). *Se le due masse M, M' sono eguali e perfettamente elastiche, si scambiano nell'urto le loro velocità*, risultando $v = V'$, $v' = V$.

c). *Un corpo M, urtando direttamente colla velocità V contro un ostacolo immobile, retrocede per la stessa linea con velocità* $= -k.V$. Imperocchè, potendosi considerare la massa M' infinita, si ha

$$v = V - (1+k)\frac{V}{1+\frac{M}{M'}} = -kV.$$

307. Calcolando la perdita di forza viva che si fa nell'urto, si trova

$$MV^2 + M'V'^2 - (Mv^2 + M'v'^2) = (1-k^2)\,MM'\frac{(V-V')^2}{M+M'}$$

$$= \frac{1-k}{1+k}\Big[M(V-v)^2 + M'(V'-v')^2\Big].$$

Questa perdita ha due limiti, corrispondenti a $k=1$ e a $k=0$, vale a dire: *Nell'urto de'corpi perfettamente elastici non si fa alcuna perdita di forza viva;* ma *nell'urto de'corpi duri o molli la perdita di forza viva è massima, ed uguale alla somma delle forze vive relative alle velocità perdute* $V - v$, $V' - v'$. In generale: *Non avviene urto tra i corpi naturali senza perdita di forza viva.*

308. Quesito. *Sia una serie di masse sferiche dotate di egual grado k di velocità, e decrescenti nella ragion geometrica di $q:1$. La prima massa M con velocità V urti direttamente la seconda che trovasi in quiete, e questa* (*colla velocità che prenderà nell'urto*) *vada similmente ad urtare la terza; e così successivamente. Qual sarà la velocità v comunicata alla massa* nesima? Sarà

$$v = V\left(q\,\frac{1+k}{1+q}\right)^{n-1}.$$

Infatti la seconda palla avrà la massa $= \frac{M}{q}$, e si toglierà dalla quiete colla velocità

$$= (1+k)M \frac{V}{M+\frac{M}{q}} = V\left(q\,\frac{1+k}{1+q}\right).$$

Similmente, la terza palla si toglierà dalla quiete colla velocità

$$V.\left(q\,\frac{1+k}{1+q}\right)^2,$$

ed in generale la *n*esima colla velocità proposta.

309. Prop. II. *Incontrandosi le due masse M, M', animate dalle velocità parallele V, V', la prima percuota la seconda con urto diretto eccentrico, ed il piano determinato dai centri di gravità G, G' de' due corpi M, M' e dal loro punto A di contatto (fig. 74) sia perpendicolare ad un asse naturale d' inerzia $G'x$ del secondo corpo M'. Qual moto prenderebbero i due corpi se fossero inelastici? E quale se fossero entrambi dotati del grado k di elasticità?*

Soluzione. *Supponendo dapprima i corpi inelastici*, sia v la velocità che resterà alla massa M dopo l'urto; e poichè l'altra massa M' prenderà dopo l'urto due moti, l'uno progressivo e l'altro rotatorio intorno a $G'x$, sia v' la velocità del primo, e θ' la velocità angolare del secondo.

Le quantità di moto dopo l'urto rivolte in contrario dovendo contrabbilanciare le quantità di moto prima dell' urto, si avrà primieramente (193, *a*, *d*):

$$M(V-v) + M'(V'-v') = 0.$$

In secondo luogo, il corpo M' essendo spinto a rotare intorno a $G'x$ dalla forza che il corpo M ha perduto nell'urto e che è $= M(V-x)$, si avrà

$$M(V-v)a - \theta' M'S' = 0,$$

dove $M'S'$ dinota il momento d'inerzia del corpo M' rispetto all' asse $G'x$, ed $a = G'P$ (*fig.* 74) la perpendicolare tirata da G' sulla retta GA che rappresenta la direzione della velocità V.

In terzo luogo è palese che tanta velocità dee rimanere alla massa M quanta, al cessar della forza di compressione, ne concepiscono que' punti della massa M' che si trovano sulla linea GA per la quale il corpo M prosegue il suo cammino. Così la velocità residua v della massa urtante M dev'esser tanta quanta è la velocità che prende il punto P della massa urtata M', e che è $= v' + a\theta'$. Dunque

$$v = v' + a\,\theta' .$$

Ed ecco tre equazioni onde scoprire le tre incognite v, v', θ'. Da esse ricavasi

$$\theta' = \frac{M(V - V')a}{(M + M')S' + Ma^2},$$

$$v = \frac{(MV + M'V')S' + Ma^2 V}{(M + M')S' + Ma^2},$$

$$v' = \frac{(MV + M'V')S' + Ma^2 V'}{(M + M')S' + Ma^2} .$$

E la quantità di moto passata dal corpo urtante M nell'urtato M' sarà

$$M(V - v) = M'S'\frac{\theta'}{a} = \frac{MM'(V - V')S'}{(M + M')S' + Ma^2} = -M'(V' - v') .$$

Se i corpi sono dotati del *grado k di elasticità*, basterà trovar prima le tre velocità v, v', θ', quali riuscirebbero senza l'elasticità, e denotate per (v), (v'), (θ') ciò che esse diventano alla fine dell'urto, avremo (306)

$$(v) = V - (1 + k)(V - v),$$

$$(v') = V' - (1 + k)(V' - v'),$$

$$(\theta') = (1 + k)\theta' .$$

a). Se il corpo urtato M' è legato ad un asse immobile, esso non può concepire per l'urto alcun moto progressivo. Rimangono dunque due sole incognite v, θ', i cui valori saranno

$$v = a\theta', \quad \theta' = \frac{M(V-v).a}{M'S'},$$

essendo $M'S'$ il momento d' inerzia di M' rispetto all' asse di rotazione.

310. Prop. III. *Un globo animato dalla velocità V va* **obliquamente** *a percuotere un piano immobile sotto l' angolo d'incidenza $= \alpha$. Qual sarà dopo l' urto la velocità v del moto riflesso? E quale l'angolo di riflessione β?* Sarà

$$\cot.\beta = k \cot.\alpha, \quad v = V \operatorname{sen}.\alpha \sqrt{(1 + k^2 \cot^2.\alpha)},$$

dove k è il grado di elasticità.

Soluz. L'angolo α d'incidenza essendo quello che la direzione del moto incidente fa colla normale al piano, se la velocità V di questo moto si decompone in due, l'una normale al piano e l'altra parallela, le due componenti saranno

$$V \cos.\alpha, \quad V \operatorname{sen}.\alpha.$$

La seconda rimane invariata, mentre la prima fa la percossa in virtù della quale il globo rimbalzerebbe normalmente con velocità $= k.V \cos.\alpha$ (306, *c*). La velocità v del moto riflesso sarà quindi composta delle due

$$v \cos.\beta = k.\, V \cos.\alpha, \quad v \operatorname{sen}.\beta = V \operatorname{sen}.\alpha,$$

dalle quali si ricavano subito le formole proposte.

CAPO VII.

De' moti relativi, ossia delle varie apparenze che debbono offrire i moti assoluti secondo il moto del sistema da cui si osservano.

§. 1°. *Principii generali per determinare la velocità relativa, e la forza relativa d'inerzia. — Formole generali del moto relativo.*

311. Problema. *Dato nello spazio assoluto il moto di un punto M ed il moto di un Sistema solido T*, per esempio della Terra, *trovare il* **moto apparente** *del punto M veduto dal solido*, cioè *il moto di M quale apparirebbe ad un Osservatore che partecipasse al moto del Sistema T senz' avvedersene.*

Soluzione. Consideriamo due sistemi di assi rettangolari

$$(O'x', O'y', O'z'), \quad (Ox, Oy, Oz),$$

de' quali il primo sia *fisso nello spazio assoluto*, ed il secondo sia *fisso nel solido T*, e però *mobile* insieme col solido. Il punto M riferito ai primi ed ai secondi assi abbia rispettivamente per coordinate

$$(x', y', z'), \quad (x, y, z).$$

Se denotiamo per α', β', γ' le coordinate del punto O riferito agli assi $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, e per ρ la retta che da O va al punto M, questa retta

$$OM = \rho$$

avrà, secondo i due sistemi di assi, le componenti rispettive

$$(x' - \alpha', \ y' - \beta', \ z' - \gamma'), \quad (x, y, z).$$

Quindi, ove pongasi

$$a = cos.(xx')\ ,\quad b = cos.(yx')\ ,\quad c = cos.(zx')\ ,$$

e si proietti OM e le sue componenti $(x,\ y,\ z)$ sull' asse $O'x'$, si otterrà

$$(1)\qquad x' = \alpha' + ax + by + cz\ .$$

Si hanno due altre equazioni simili per y', z'.

Supponiamo adesso che tanto il punto M quanto il solido T si muovano secondo una legge qualunque dipendente dal tempo t, cosicchè, a causa di questi due moti, vadano variando in funzione del tempo t tutte le otto quantità della (1), cioè le $(x',\ x,\ y,\ z,\ \alpha',\ a,\ b,\ c)$. Se in questa supposizione differenziamo due volte la (1), avremo

$$(2)\qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{d\alpha'}{dt} + \left\{ \begin{array}{l} x\dfrac{da}{dt} + y\dfrac{db}{dt} + z\dfrac{dc}{dt} \\[2ex] a\dfrac{dx}{dt} + b\dfrac{dy}{dt} + c\dfrac{dz}{dt} \end{array} \right\}\ ;$$

$$(3)\qquad \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2\alpha'}{dt^2} + \left\{ \begin{array}{l} x\dfrac{d^2a}{dt^2} + y\dfrac{d^2b}{dt^2} + z\dfrac{d^2c}{dt^2} \\[2ex] a\dfrac{d^2a}{dt^2} + b\dfrac{d^2y}{dt^2} + c\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{array} \right\}$$

$$+ 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{db}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dc}{dt}\right)\ .$$

Qui è da notare che le variazioni delle quattro quantità

$$\alpha'\ ,\quad a\ ,\quad b\ ,\quad c$$

dipendono unicamente dal moto degli assi Ox, Oy, Oz, ossia dal moto del sistema T, mentre le variazioni delle coordinate

$$(x\ ,\quad y\ ,\quad z)$$

rappresentano il *moto apparente* del punto M veduto da T, essendo manifesto che, ove il punto M fosse connesso col sistema T, manterrebbe *invariabili* le x, y, z, e si mostrerebbe *stazionario* a chiunque l' osservasse da T.

Ciò posto, le formole (2) e (3) ci conducono a scoprire in quali velocità ed in quali forze parziali d' inerzia vadasi decomponendo ad ogn' istante sì la *velocità assoluta* e sì la *forza assoluta d'inerzia* del punto M.

Velocità apparente del punto M per chi l' osservi dal sistema T.

312. La formola (2) ci fa vedere (in proiezione sull' asse $O'x'$) che la *velocità assoluta* V del punto M si va decomponendo ad ogn' istante dt in due velocità: nella *comune* al solido T, espressa in proiezione per

$$\frac{dx'}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt};$$

e nell' *apparente* v, espressa in proiezione per

$$a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt}.$$

La *velocità comune*, cioè la velocità che avrebbe il punto M se, nell' istante dt che si considera, *fosse connesso col sistema* T, si compone essa pure di due altre velocità: l'una di *traslazione* $= v_0$, e l' altra *di rotazione* $= \dot{v}$. Infatti qualunque sia il movimento del solido T nell' istante dt, noi sappiamo che si può sempre riguardare come composto di un moto di traslazione del punto $O(= v_0 dt)$ e di un moto simultaneo di rotazione $(= \theta dt)$ intorno ad un asse istantaneo $O\theta$ condotto per questo punto (262). Sappiamo inoltre che la velocità $\dot{v}$ con cui, a cagion di questa rotazione si muove il punto $M(xyz)$ intorno ad $O\theta$, è data in grandezza e in direzione dalla formola (275)

$$\dot{v} = \theta \rho\, sen.(\theta\rho),$$

e che, se s' indicano per $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ le sue componenti secondo i tre assi mobili Ox, Oy, Oz, si ha

$$\dot{x} = qz - ry, \quad \dot{y} = rx - pz, \quad \dot{z} = py - qx,$$

dove p, q, r sono, intorno agli stessi assi, le rotazioni componenti di θ.

Conchiudiamo adunque che la *velocità assoluta* V del punto M si può riguardare come composta ad ogn' istante dt di tre velocità:

$$v_0\,,\quad \dot{v}\,,\quad v\,,$$

delle quali le prime due, di traslazione e di rotazione, sono nel punto M *comuni* col solido T, e la terza è la *velocità apparente* quale si offrirebbe a chi osservasse M da T. Laonde essendo in equilibrio le quattro velocità

$$V\,,\quad -v_0\,,\quad -\dot{v}\,,\quad -v\,,$$

cioè la velocità V e le sue componenti rivolte in senso contrario, possiamo stabilire che: *La velocità apparente v è uguale alla risultante delle tre velocità V, $-v_0$, $-\dot{v}$*, cioè

$$v = ris.(V\,,\ -v_0\,,\ -\dot{v})\,.$$

313. Le componenti della velocità apparente v secondo gli assi mobili Ox, Oy, Oz saranno adunque

$$\frac{dx}{dt} = (V - v_0)_x - \dot{x}\,,\qquad \dot{x} = qz - ry\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = (V - v_0)_y - \dot{y}\,,\qquad \dot{y} = rx - pz\,,$$

$$\frac{dz}{dt} = (V - v_0)_z - \dot{z}\,;\qquad \dot{z} = py - qx\,.$$

Corollarii.

a). Se il punto M fosse *connesso col sistema mobile* T, la sua velocità apparente v sarebbe nulla, e la sua velocità assoluta V (data che fosse la velocità v_0 del punto O) si avrebbe dalle formole

$$(V - v_0)_x = \dot{x} = qz - ry\,,$$

$$(V - v_0)_y = \dot{y} = rx - pz\,,$$

$$(V - v_0)_z = \dot{z} = py - qx\,.$$

b). Se il punto M fosse *connesso col primo sistema* $(O'x', O'y', O'z')$ ed il punto O' coincidesse con O, sarebbe

$$0 = \frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = V,$$

$$0 = \frac{d\alpha'}{dt} = \frac{d\beta'}{dt} = \frac{d\gamma'}{dt} = v_0,$$

onde la velocità apparente v del punto M avrebbe per componenti

$$\frac{dx}{dt} = -\dot{x} = ry - qz,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\dot{y} = pz - rx,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\dot{z} = qx - py.$$

c). Quindi, se il sistema (Ox, Oy, Oz) fosse animato rispetto al sistema (Ox', Oy', Oz') dalla sola rotazione apparente $= -r$, la velocità apparente del punto M connesso col sistema (Ox', Oy', Oz') sarebbe determinata dalle formole

$$\frac{dx}{dt} = -ry, \quad \frac{dy}{dt} = rx, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

314. *Scolio I.* Si noti che la velocità parziale

$$\dot{v} = \theta\varrho \; sen.(\theta_\varrho),$$

che viene ad M dalla rotazione θdt del sistema T intorno ad $O\theta$, e che in projezione sull' asse fisso $O'x'$ si è trovata espressa per

$$(a) \qquad x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt},$$

è pure espressa in projezione sopra $O'x'$ da

$$(a)' \qquad a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z};$$

onde queste due espressioni debbono essere identiche. Ed infatti basta ricordare che le a, b, c sono, rispetto agli assi Ox, Oy, Oz, le componenti di una retta $=1$ condotta da O parallelamente all'asse fisso $O'x'$, e che la velocità del *punto fisso* (a, b, c), riguardato da T, si compone delle tre

$$\frac{da}{dt} = rb - qc, \quad \frac{db}{dt} = pc - ra, \quad \frac{dc}{dt} = qa - pb.$$

Sostituendo nella (a) queste relazioni, si ottiene subito la $(a)'$.

a). Scolio II. Se nella (a) in luogo di x, y, z, componenti di ρ sostituiamo le $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ componenti della velocità apparente v, si conchiuderà, che *l'espressione*

$$(b) \qquad \frac{dx}{dt} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{db}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dc}{dt}$$

rappresenta sull' asse $O'x'$ la projezione di una linea

$$= \theta v \; sen.(\theta v),$$

diretta secondo l' asse dell' angolo (θv), e di cui le componenti secondo gli assi Ox, Oy, Oz sono

$$q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}, \quad r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}, \quad p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}.$$

Della forza motrice del punto M, **relativa** *al sistema T.*

315. Se il mobile M si riferisce agli assi $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ fissi nello spazio assoluto, la sua forza d'inerzia, risultante delle tre

$$\frac{d^2x'}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt^2},$$

si può chiamare *assoluta*; e se invece lo stesso mobile M si riferisce agli assi Ox, Oy, Oz, connessi col sistema mobile T, la sua forza d'inerzia, risultante delle tre

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

si può chiamare *relativa* a T. Inoltre, siccome l'*equazione del moto di un punto* esprime in generale che: *la forza d'inerzia del punto è sempre uguale in grandezza e in direzione all'azion corrispondente della forza sollecitante*; così se il moto del punto M è relativo a T, possiamo dire che: *Alla forza* **relativa** *d'inerzia corrisponde sempre l'azione uguale di una forza sollecitante* f, che può chiamarsi **forza relativa** *al sistema* T.

Cerchiamo ora d'interpetrare la formola (3), ossia la

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2a'}{dt^2} + \left\{ \begin{array}{l} x\dfrac{d^2a}{dt^2} + y\dfrac{d^2b}{dt^2} + z\dfrac{d^2c}{dt^2} \\ a\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{d^2y}{dt^2} + c\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{array} \right\}$$
$$+ 2\left[\frac{dx}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dc}{dt}\right].$$

Considerata nelle sue diverse parti, questa formola ci fa vedere (in projezione sull'asse $O'x'$) che la forza assoluta F del punto $M(xyz)$ si va decomponendo ad ogn' istante dt in tre forze: nella *comune col solido* T, espressa *in projezione* per

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + x\frac{d^2a}{dt^2} + y\frac{d^2b}{dt^2} + z\frac{d^2c}{dt^2};$$

nella *relativa* f, espressa in projezione per

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2};$$

ed in una terza forza

$$\varphi = 2\theta v \ sen.(\theta v) \ ,$$

chiamata *forza centripeta complessa*, espressa in projezione per

$$2\left[\frac{dx}{dt}\frac{d\dot{a}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dc}{dt}\right],$$

e di cui le componenti secondo gli assi mobili Ox, Oy, Oz sono (314, a).

$$\varphi_x = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\varphi_y = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\varphi_z = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

La *forza comune*, cioè la forza da cui il punto M si troverebbe animato se nell' istante dt fosse connesso col solido T, si compone di due altre forze

$$f_0 \ , \quad \dot{f} \ ,$$

la prima delle quali si riferisce al moto di traslazione del punto O del solido T, e la seconda, alla rotazione simultanea di T ($= \theta dt$) intorno all' asse istantaneo $O\theta$. E poichè le

$$\dot{x} = qz - ry \ , \quad \dot{y} = rx - pz \ , \quad \dot{z} = py - qx$$

esprimono le componenti della velocità $\dot{v}$ che viene al punto M dalla rotazione θdt, le componenti della forza d' inerzia $\dot{f}$, che viene ad M dalla stessa rotazione, saranno

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} + q\dot{z} - r\dot{y} \ ,$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} + r\dot{x} - p\dot{z} \ ,$$

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} + p\dot{y} - q\dot{x} \ ,$$

dove

$$q\dot z - r\dot y = p(px + qy + rz) - x\theta^2,$$

$$r\dot x - p\dot z = q(px + qy + rz) - y\theta^2,$$

$$p\dot y - q\dot x = r(px + qy + rz) - z\theta^2.$$

Ed è da notare l'identità de' due trinomii

$$a\frac{d\dot x}{dt} + b\frac{d\dot y}{dt} + c\frac{d\dot z}{dt}, \qquad x\frac{d^2a}{dt^2} + y\frac{d^2b}{dt^2} + z\frac{d^2c}{dt^2},$$

la quale si scopre osservando che il primo trinomio si trasforma successivamente in

$$\left|\begin{array}{l} x\left(b\dfrac{dr}{dt} - c\dfrac{dq}{dt}\right) \\ y\left(c\dfrac{dp}{dt} - a\dfrac{dr}{dt}\right) \\ z\left(a\dfrac{dq}{dt} - b\dfrac{dp}{dt}\right) \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l} \dot x\dfrac{da}{dt} \\ \dot y\dfrac{db}{dt} \\ \dot z\dfrac{dc}{dt} \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x\left(b\dfrac{dr}{dt} - c\dfrac{dq}{dt} + r\dfrac{db}{dt} - q\dfrac{dc}{dt}\right) \\ y\left(c\dfrac{dp}{dt} - a\dfrac{dr}{dt} + p\dfrac{dc}{dt} - r\dfrac{da}{dt}\right) \\ z\left(a\dfrac{dq}{dt} - b\dfrac{dp}{dt} + q\dfrac{da}{dt} - p\dfrac{db}{dt}\right). \end{array}\right.$$

Possiamo adunque conchiudere, che: *La forza* **assoluta** *F del punto M si va decomponendo ad ogn' istante dt nelle quattro forze*

$$f,\ f_0,\ \dot f,\ \varphi,$$

che sono la **relativa** f, le **comuni** *al sistema* $T(f_0, \dot f)$, *e la* **centripeta complessa** φ.

316. Laonde, essendo in equilibrio le cinque forze

$$(F,\ -f,\ -f_0,\ -\dot f,\ -\varphi),$$

la forza sollecitante f del punto M, **relativa al sistema** T, sarà eguale alla risultante delle quattro forze $(F,\ -f_0\ \ -\dot f, -\varphi)$;

$$f = ris.(F,\ f_0,\ -\varphi,\ -\dot f);$$

ed avrà per componenti secondo gli assi Ox, Oy, Oz:

$$
(A) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= (F - f_0 - \varphi)_x - \frac{d\dot{x}}{dt}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= (F - f_0 - \varphi)_y - \frac{d\dot{y}}{dt}, \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= (F - f_0 - \varphi)_z - \frac{d\dot{z}}{dt};
\end{aligned}
\right.
$$

nelle quali si dee sostituire

$$
\left\{
\begin{aligned}
\varphi_x &= 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \\
\varphi_y &= 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \\
\varphi_z &= 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\dot{x}}{dt} &= z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} + p(px + qy + rz) - x\theta^2, \\
\frac{d\dot{y}}{dt} &= x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} + q(px + qy + rz) - y\theta^2, \\
\frac{d\dot{z}}{dt} &= y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} + r(px + qy + rz) - z\theta^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Così conosciamo *l' equazioni generali* (A) *del moto apparente del punto* M *per chi lo riguardi dal solido* T.

317. Scolio. Per rendere più facile e chiaro il concetto del *moto relativo*, abbiamo immaginato che de' due sistemi

$$
(O'x',\ O'y',\ O'z'),\quad (Ox,\ Oy,\ Oz),
$$

da cui un Osservatore guarda successivamente il mobile M, il primo sia *fisso nello spazio assoluto*. Ora importa avvertire, che le formole trovate sussistono anche nel caso che i due sistemi abbiano di più *un moto in comune*; onde il problema a cui esse rispondono, ove gli si voglia dare la debita estensione, si può enunciare così:

Dato il moto del punto M ed il moto del sistema T quali apparirebbero ad un Osservatore che si credesse immobile nello spazio insieme col sistema ($O'x'$, $O'y'$, $O'z'$) di cui fa parte, determinare il moto di M quale apparirebbe ad un altro Osservatore che si credesse immobile sul sistema T; potendo i due sistemi avere in comune un moto qualsivoglia, cognito od incognito.

È manifesto che il moto comune ai due sistemi non può esser cagione di alcun cangiamento nelle formole con cui si sono vincolate tra loro le otto quantità

$$(x', d, a, b, c, x, y, z);$$

e però è certo eziandio che le leggi del moto relativo si conservano le medesime, sia che il moto in comune abbia luogo, sia che non abbia luogo; nel qual caso il sistema ($O'x'$, $O'y'$ $O'z'$) è assolutamente immobile nello spazio.

---

§. 2°. *Applicazione delle formole del moto relativo alla caduta de' gravi ed alle oscillazioni del pendolo, per iscoprire in questi moti un segno visibile della rotazione della terra.*

318. La rotazione equabile del nostro globo, a cui noi partecipiamo di continuo senz'avvedercene, oltre di manifestarsi nell'apparenza del giro diurno della sfera stellata, ci offre eziandio segni non dubbii di sè in alcuni moti speciali che si producono sulla terra, quali per esempio la *caduta de' gravi e l' oscillare del pendolo.* E questo è ciò che ora ci proponiamo di mettere in chiaro per mezzo delle formole precedenti, dopo che avremo richiamate alcune cifre relative alla rotazion della terra.

a). La terra impiegando un giorno sidereo ($= 86164''$) a fare un giro intero intorno al suo asse ($= 2\pi$), la sua velocità angolare sarà

$$\theta = \frac{2\pi}{86164} = 0^m,\ 000073$$

donde

$$\theta^2 = 0^m,\ 000000005329.$$

b). La forza centrifuga per un punto M situato alla distanza D dall' asse sarà $= D\theta^2$, e andrà per conseguenza diminuendo dall' equatore ai poli. All' equatore è

$$D\theta^2 = 0{,}033852,$$

risultato che si ottiene sostituendo a D il valor medio del raggio terrestre, $= 6366198$ metri.

c). Un corpo situato sulla terra alla distanza D dall' asse di rotazione, movendosi colla velocità $D\theta$, è animato da due specie di forze: dalla forza sollecitante F che gli viene dall' attrazione della massa terrestre, e dalla forza centrifuga $-f_0 = D\theta^2$ che gli viene dal moto rotatorio della terra. La *forza relativa* f, che si chiama forza di gravità e che si suole dinotare per g, è la *risultante delle due forze* F, $-f_0$:

$$g = ris.(F, -f_0)\ .$$

d). La forza centrifuga $D\theta^2$, considerata nel suo valor massimo, essendo prossimamente 289 $(= 17^2)$ volte più piccola dell' attrazion terrestre F, basterebbe che la terra girasse 17 volte più rapidamente di quello che fa, perchè all' equatore la forza F che attrae i corpi verso il centro della terra fosse contrabbilanciata dalla forza centrifuga $-f_0$, ossia perchè ivi si riducesse a zero il peso de' corpi.

e). In un luogo qualunque della terra posto fuori dell' equatore e de' poli, la *verticale* (vale a dire *la linea secondo cui agisce la gravità* g) sebbene non abbia la stessa direzion precisa che avrebbe se la terra fosse immobile, pure pochissimo se ne scosta. Infatti la forza centrifuga $-f_0$, considerata a partire dall' equatore (in cui è massima ed ha la direzione di F) fino ad uno de' poli in cui è $= 0$, varia così che laddove la sua direzione comincia a deviare sensibilmente da quella di F, ivi il suo valore (sempre assai piccolo rispetto ad F) diminuisce sensibilmente, onde apparisce che la direzione di

$$g = ris.(F, -f_0)$$

non può mai scostarsi gran fatto da quella di F.

Assi OE, ON, OZ *diretti ai punti cardinali* Est, Nord, *ed allo* Zenit; *ed altro sistema di assi* Ox, Oy, OZ *girante intorno ad* OZ. *Moto apparente di ciascuno de' due sistemi veduto dall' altro sistema.*

319. In un punto O preso ad arbitrio sulla terra s' intendano coordinati tre assi rettangolari OE, ON, OZ diretti rispettivamente all' *Est*, al *Nord*, ed allo *Zenit*. La retta $O\theta$ condotta parallelamente all' asse terrestre rappresenti la *velocità angolare* della rotazion diurna. Trovandosi questa retta in un medesimo piano colla *verticale* OZ e colla *meridiana* ON, la rotazione θ equivarrà in ogn' istante alle due rotazioni simultanee

$$r = \theta \cos.(z\theta)\ ,\qquad \theta_1 = \theta\, sen.(z\theta)$$

intorno alle due rette accennate OZ ed ON.

Il moto della terra, o, ciò che torna lo stesso, il moto del sistema (OE, ON, OZ) si può riguardare in ogn' istante dt come risultante da due moti elementari che sono: la *traslazione del punto* O ($= v_0\,dt$), e *la rotazione intorno* ad $O\theta$ ($=\theta dt$) equivalente alle due rotazioni simultanee rdt, $\theta_1 dt$ intorno ad OZ e ad ON.

Mentre il sistema (OE, ON, OZ) è animato, come la terra, dalle due rotazioni simultanee (r, θ_1), supponiamo che un altro sistema di assi (Ox, Oy, OZ) sia animato dalle tre rotazioni simultanee

$$(r,\ \theta_1,\ -r)$$

equivalenti alla sola rotazione θ_1 intorno alla meridiana ON. Ciò posto: *Quali apparenze ne seguiranno per chi (partecipando, senz' avvedersene, al moto dell' uno de' due sistemi) sia tutto inteso ad osservare l' altro sistema?*

L'Osservatore che partecipa al moto del primo sistema (OE, ON, OZ), ossia della terra, avendo in comune coll' altro sistema (Ox, Oy, OZ) le prime due delle tre rotazioni

$$(r,\ \theta_1,\ -r)\ ,$$

vedrà questo secondo sistema, animato dalla terza rotazione

$$= -r = -\theta \cos.(z\theta),$$

girare dalla sinistra alla destra della verticale OZ con una velocità angolare uguale a quella del globo terrestre, stimata nel senso della verticale.

L' Osservatore che partecipa al moto del secondo sistema (Ox, Oy, OZ), avendo in comune col primo sistema (OE, ON, OZ) la prima delle due rotazioni

$$(\theta_1, \; r),$$

vedrà questo sistema, animato dalla seconda rotazione r, *girare dalla destra alla sinistra della verticale OZ colla velocità angolare* $= r$. Quindi, se l' angolo che la meridiana ON fa con Ox è $= a$ per $t = 0$, scorso il tempo t, sarà $= a + rt$; e per conseguenza la rotazione θ_1 intorno ad ON avrà per componenti intorno agli assi Ox, Oy

$$p = \theta_1 \cos.(a + rt), \qquad q = \theta_1 \operatorname{sen.}(a + rt),$$

donde

$$\frac{dp}{dt} = -qr, \qquad \frac{dq}{dt} = pr.$$

Inoltre un punto qualunque $M(xyz)$ connesso colla terra, ove sia veduto dal sistema (Ox, Oy, OZ), si muoverà colla velocità composta delle (313, c):

$$\frac{dx}{dt} = -ry, \quad \frac{dy}{dt} = rx, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Della rotazione della terra in quanto che si manifesta nella caduta de' gravi.

320. Quesito. *Per qual segno visibile la rotazion della terra si manifesta nella caduta de' gravi?*

Risposta. Un grave in riposo, ove si lasci cadere dalla cima al fondo di un' altezza verticale $= h$, non dee battere precisamente sul piede di questa verticale, ma (a causa della rotazion diurna) dovrà deviarne alquanto verso l' *Est* per un intervallo x il cui valore approssimato è

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{g}} . h\sqrt{h} . \theta \, sen.(z\theta) ,$$

facendo astrazione dalla resistenza dell' aria.

Soluz. Prendiamo per O il punto d' onde si lascia cadere il grave, e per assi delle x, y, z le tre rette OE, ON, OZ. Le componenti della rotazione θ saranno

$$p = 0 , \quad q = \theta \, sen.(z\theta) , \quad r = \theta \cos.(z\theta) ;$$

ed essendo la gravità $g = ris.(F, -f_0)$ e diretta in senso contrario di OZ, le formole (A) del moto relativo (316) applicate alla caduta del grave diventano $\left(\text{ponendovi } 0 = p = \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt}\right)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + x\theta^2 ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2r\frac{dx}{dt} - q(qy + rz) + y\theta^2 ,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2q\frac{dx}{dt} - r(qy + rz) + z\theta^2 .$$

Ora, se si considera che il grave nel suo cadere non può deviare se non pochissimo dalla verticale $z = -h$, si vedrà che, oltre le quantità (θ^2, q^2, r^2, qr), debbono riguardarsi come piccolissime anche le quantità x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, e che però l'equazioni del moto relativo al grave si possono ridurre senza error sensibile (almeno in una prima approssimazione) alle seguenti

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2q\frac{dz}{dt} , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 , \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g .$$

Da quest' equazioni per mezzo dell' integrazione si ricava successivamente

$$\frac{dz}{dt} = -gt\,, \quad \frac{dx}{dt} = gt^2.\theta\, sen.(z\theta)\,, \quad \frac{dy}{dt} = 0\,;$$

$$z = -\frac{g}{2}t^2\,, \quad x = \frac{gt^3}{3}.\theta\, sen.(z\theta)\,, \quad y = 0\,;$$

donde, posto $z = -h$, si ottiene $h = \frac{g}{2}t^2$, e quindi

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{g}}.h\sqrt{h}.\theta\, sen.(z\theta)\,.$$

Questa formola è stata verificata a Freyberg dal Sig. Reich facendo cadere un grave in un pozzo di miniera alla profondità

$$h = 158^m,\, 5\,,$$

essendo la latitudine del luogo di 51°. Per questi dati la formola dà

$$x = 0^m,\, 0276\,,$$

e l' esperienza ripetuta un gran numero di volte diede per valor medio

$$x_1 = 0^m,\, 0283.$$

Tra il risultato teorico, e lo sperimentale non avvi adunque che il piccolo divario

$$x_1 - x = 0^m,\, 0007,$$

divario che si dee in gran parte attribuire al lievissimo ritardo cagionato nella caduta dalla resistenza dell' aria.

Scolio. In una seconda approssimazione le formole del moto relativo alla caduta del grave darebbero:

$$x = \frac{g\theta sen.(z\theta)}{3}\left[1 + \frac{\theta^2 t^2}{20}\right] t^3,$$

$$y = -\frac{g}{16}\left[\theta^2 sen.2(z\theta)\right] t^4,$$

$$z = -\frac{g}{2}\left[1 - \frac{\theta^2 sen^2(z\theta)}{4} t^2\right] t^2.$$

Della rotazion della terra in quanto che si manifesta nell' oscillare del pendolo.

321. Quesito. *Per qual segno visibile la rotazion della terra si può render manifesta nell' oscillare del pendolo?*

Risposta. *I.* Ove sia molto grande la lunghezza del pendolo e di un piccolissimo numero di gradi l' ampiezza delle oscillazioni, il pendolo rimosso dalla verticale e abbandonato a sè si dee vedere oscillare in un piano apparente, non già fisso, ma mobile intorno alla verticale condotta pel centro di sospensione, ed il moto rotatorio di questo piano dev' essere uguale ed opposto al moto rotatorio della terra, *stimato* secondo la detta verticale.

II. Inoltre la superficie che va descrivendo il filo del pendolo in ogni andata e ritorno, non dev'esser quella di un vero piano, ma sibbene quella di un cono ellittico schiacciatissimo, ed il moto del pendolo nel descriver questa superficie conica dee farsi dalla destra alla sinistra della verticale *OZ*.

Soluz. I. La retta $OM = l$ rappresenti la lunghezza assai grande del pendolo, ossia la distanza tra il punto O di sospensione ed il *centro* $M(xyz)$ *di oscillazione.* Sia k la *tensione del filo* che sostiene il pendolo, considerata come una forza che agisce nella direzione MO, cioè come una forza eguale e contraria alla pressione che il punto M eserciterebbe sul concavo della superficie sferica del raggio OM. La forza k avrà per componenti

$$-k\frac{x}{l}, \quad -k\frac{y}{l}, \quad -k\frac{z}{l}.$$

Il punto M si potrà considerar come *libero* se la forza assoluta F che gli viene dall' attrazion terrestre si componga colla forza k. La *forza relativa* f del pendolo M sarà quindi la risultante delle forze $(k, F, -f_0, -\dot{f}, -\varphi)$, ossia

$$f = ris.(k, g, -\varphi, -\dot{f}).$$

Ciò posto, riferiamo per ogn' istante dt il moto del pendolo al sistema (Ox, Oy, OZ) che osservato dalla terra si vede girare dalla sinistra alla destra della verticale OZ colla velocità angolare $r = \theta \cos.(z\theta)$, e che in sostanza non è animato che dalla sola rotazione

$$\theta_1 = r\, sen.(z\theta)$$

intorno alla meridiana ON (319). Le formole (A) del moto relativo al sistema (Ox, Oy, OZ) applicate al pendolo M diventano

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{x}{l} - \varphi_x - \frac{d\dot{x}}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{y}{l} - \varphi_y - \frac{d\dot{y}}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -k\frac{z}{l} - g - \varphi_z - \frac{d\dot{z}}{dt},$$

nelle quali, non dovendo entrare che le due rotazioni (319) $p = \theta_1 \cos.(a + rt)$, $q = \theta_1 sen.(a + rt)$, si ha

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_x &= 2q\frac{dz}{dt}, \\ \varphi_y &= -2p\frac{dz}{dt}, \\ \varphi_z &= 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right); \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{dt} &= z\frac{dq}{dt} + p(px + qy) - x\theta_1^2, \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= -z\frac{dp}{dt} + q(px + qy) - y\theta_1^2, \\ \frac{d\dot{z}}{dt} &= y\frac{dp}{dt} - x\frac{dq}{dt} - z\theta_1^2; \end{aligned}\right.$$

essendo

$$\frac{dp}{dt}=-qr,\quad \frac{dq}{dt}=pr\,.$$

Ora osserviamo che, ove la lunghezza l del pendolo sia grandissima e di un piccolissimo numero di gradi l'ampiezza delle oscillazioni, il centro M di oscillazione si muoverà sopra una superficie sferica *pressochè piana* e *perpendicolare alla verticale* ZO, e che però sarà lecito di fare (181)

$$k=g,\quad \frac{dz}{dt}=0\,.$$

Trascurando inoltre i termini moltiplicati per θ_1^2, p^2, q^2, qr, pr, pq, le formole del moto relativo si mutano nelle seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-g\frac{x}{l}\,,\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-g\frac{y}{l}\,,\end{aligned}\right\}\quad \frac{d^2z}{dt^2}=-g\left(1+\frac{z}{l}\right)-\varphi_z\,.$$

Cominciamo dall'integrare la prima. Moltiplicata per dx diviene

$$\frac{dx}{dt}d\frac{dx}{dt}=-\frac{g}{l}\,x\,dx\;;$$

e da questa (indicando per b, c le costanti dell'integrazione) si deduce successivamente

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\frac{g}{l}\left(b^2-x^2\right),\quad dt\sqrt{\frac{g}{l}}=\frac{d\cdot\frac{x}{b}}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)}}\,,$$

$$x=b\,sen.\left(c+t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Quest'ultima, sviluppata che sia, può scriversi:

$$x=A\cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)+B\,sen.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Operando in modo simile rispetto ad y, si avrà

$$y = A' cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + B' sen.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Da esse si trae

$$\frac{dx}{dt} = \left[B\,cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) - A\,sen.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right]\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \left[B' cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) - A' sen.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right]\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Per determinare le quattro costanti A, B, A', B' dell'integrazione basta tener conto delle circostanze iniziali in cui il pendolo M si abbandona a sè stesso.

Il pendolo M si rimuova dalla verticale OZ per l'angolo ω, ed il piano verticale che lo contiene si riguardi come la posizione iniziale del piano ZOx, talchè per $t = 0$ le coordinate del punto M siano

$$x = l\,sen.\omega, \quad y = 0, \quad z = -l\,cos.\omega.$$

La velocità iniziale di M, cioè la velocità che ha il centro M di oscillazione quando il pendolo si tiene ancora unito alla terra ma nell' atto di abbandonarlo a sè stesso, si raccoglie dalle (319).

$$\frac{dx}{dt} = -ry = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = rx = r.l\,sen.\omega.$$

Affinchè le formole or trovate diano questi valori di

$$x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt} \text{ per } t = 0,$$

è necessario che si abbia

$$A = l\,sen.\omega, \qquad B = 0,$$

$$A' = 0, \qquad B' = r\,sen\,\omega.\,l\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Così l' equazioni approssimate del pendolo oscillante saranno

$$(1) \qquad \begin{cases} x = l\,sen\,\omega . cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \\ y = r\,sen\,\omega . l\sqrt{\frac{l}{g}} . \; sen.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right). \end{cases}$$

Il valore di y, che serve a misurare di quanto il centro M di oscillazione va deviando dal piano mobile ZOx in cui ha cominciato a muoversi, si conserva sempre piccolissimo a causa della piccolezza estrema del *coefficiente* $r\,sen\,\omega$; onde può ben dirsi che: Il pendolo (nelle condizioni in cui si è supposto) dee oscillare in un piano *apparente*, non fisso, ma in giro intorno alla verticale OZ colla velocità angolare $= - r = - \theta\,cos.(z\theta)$.

II. La durata di un' intera oscillazione si compie quando la y torna $= 0$, ed è $= \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Il valore di y è *positivo* nella prima andata del pendolo in cui l' arco $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ varia da zero a π, ed è *negativo* nel ritorno in cui l' arco $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ varia da π a 2π: e così in ogni oscillazione successiva.

Le (1) somministrano

$$cos.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) = \frac{x}{l\,sen\,\omega}, \qquad sen.\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) = \frac{y\sqrt{g}}{r\,sen\,\omega . l\sqrt{l}},$$

e queste inalzate a quadrato e sommate danno

$$lx^2 + \frac{g}{r^2}\,y^2 = l^3\,sen^2\,\omega:$$

equazione dell' orbita ellittica descritta dal centro M di oscillazione in ogni andata e ritorno. E poichè il valore di y è positivo nell' andata e negativo nel ritorno, così può dirsi che: Il filo del pendolo descrive la superficie di un cono ellittico schiacciatissimo, girando sempre dalla destra alla sinistra della verticale OZ.

Il Sig. Leon Foucault è stato il primo a far notare, nell' esperimento descritto del pendolo oscillante, la manifestazione certissima del moto rotatorio della terra.

ARTICOLO

DI MECCANICA GENERALE

Del principio che riassume in sè la Meccanica, ossia del principio delle velocità virtuali e sue principali applicazioni.

1. *Velocità virtuali. Variazione infinitesima della distanza tra due punti, espressa per la differenza delle velocità virtuali di questi punti. Lavoro di una forza.*

322. Un sistema di punti materiali essendo in equilibrio, immaginiamo che riceva un movimento infinitesimo conciliabile colle condizioni di connessione alle quali è sottoposto: si chiamano **velocità virtuali** *gli spazii infinitesimi percorsi da essi punti.* Questi spazii si dicono *virtuali* perchè si concepiscono soltanto col pensiero senza che si effettuino realmente, e si dicono *velocità* perchè, essendo percorsi nel medesimo tempo, sono proporzionali alle corrispondenti velocità.

La velocità virtuale di un punto, *stimata secondo una direzion determinata*, è la projezione ortogonale di essa velocità sulla data direzione.

323. Teorema. *Se la distanza tra due punti M, N del sistema subisce un cangiamento infinitesimo qualsivoglia, questo cangiamento è uguale all' eccesso della velocità virtuale del secondo punto su quella del primo, stimate queste velocità nella direzion della retta che unisce i due punti.*

Dim. Sia $MN = a$ la retta che unisce i due punti M, N, e che, dopo uno spostamento infinitesimo del sistema, diviene $M'N' = a'$ deviando dalla direzione che aveva per l'angolo $= \omega$. Siano α, β le velocità virtuali de' punti M, N, *stimate* secondo la direzione della retta MN, ossia rappresentate sopra MN dalle projezioni delle due linee MM', NN'. Poichè nel quadrilatero $MM'N'N$, il lato MN è uguale alla somma delle projezioni che riceve sulla sua direzione dagli altri tre lati MM', $M'N'$, $N'N$, projezioni espresse da α, $a' cos. \omega$, $-\beta$, avremo

$$a = \alpha + a' \cos. \omega - \beta,$$

e per conseguenza

$$a' \cos. \omega - a = \beta - \alpha.$$

Ma, essendo infinitesimo l' angolo ω, si può fare $\cos. \omega = 1$; onde, se esprimasi per δa il cangiamento in grandezza della retta a, ossia la differenza $a' - a$, si avrà

$$\delta a = \beta - \alpha, \tag{1}$$

formola, di cui è traduzione il teorema enunciato.

a). Coroll. I. Nel caso che la linea a consista nell' elemento ds di un filo curvilineo, cotesta equazione prende la forma notabile

$$\delta ds = \beta - \alpha. \tag{2}$$

b). Coroll. II. Quando la distanza a si mantiene invariabile, sarà $\delta a = 0$, e quindi

$$\alpha = \beta. \tag{3}$$

Dunque: *Se una retta subisce uno spostamento infinitesimo qualsivoglia, il moto di ciascuno de' suoi punti stimato secondo la direzion della retta è uguale per tutti i punti;* e per conseguente, *se la trajettoria di uno di questi punti è* **normale** od **obliqua** *alla retta, anche la trajettoria di ciascuno degli altri punti sarà* **normale** *od* **obliqua** *alla stessa retta.*

324. N. B. Se le forze applicate ai punti di un sistema si dinotano con lettere grandi, per esempio

$$F, \quad F_1, \quad F_2, \text{ etc.}$$

le velocità virtuali de' punti corrispondenti, stimate secondo la direzion delle forze, si sogliono dinotare per

$$\delta f, \quad \delta f_1, \quad \delta f_2 \quad \text{etc.},$$

cioè colle stesse lettere, ma piccole, precedute da δ.

325. Si chiama **lavoro di una forza** *il prodotto della forza pel cammino percorso dal suo punto di applicazione nel senso della forza;* e questo prodotto *è positivo* o *negativo* secondochè le direzioni de' due fattori vanno per lo stesso verso od in verso opposto.

Se la forza non è costante in grandezza e in direzione, il moto si concepisce diviso in intervalli infinitesimi, in ciascuno de' quali la forza può riguardarsi come costante; ed il lavoro della forza in ciascuno di tali intervalli si dice **lavoro elementare.**

Il **lavoro virtuale** di una forza, quale $F\delta f$, rappresenta ciò che prima veniva significato generalmente colla frase di *Momento virtuale*, frase che ora va cadendo in dissuetudine siccome meno propria ed espressiva dell' altra; oltrechè il vocabolo *Momento* è adoperato in varii altri significati.

2. Principio delle velocità virtuali.

326. *Se un sistema (T) è in equilibrio sotto l'azion di più forze F, F_1, F_2, etc, la somma de' lavori di queste forze è uguale a zero per ogni moto virtuale, conciliabile colle condizioni del sistema*, vale a dire:

$$(A) \qquad F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 + \text{etc.} = 0.$$

E viceversa: *Se questa somma è nulla per ogni moto virtuale possibile, il sistema è in equilibrio.*

Dimostrazione. Sono a distinguere tre casi secondochè il sistema *(T)*: 1° o consiste in un solo punto *M*; 2° o è *completamente connesso*; 3° od *incompletamente connesso*.

I.

Il sistema *(T)* consista nel solo punto *M* sollecitato dalle forze F, F_1, F_2 etc, delle quali la risultante sia *R*. Per ogni moto possibile $MM' = \delta s$ impresso ad *M*, si avrà

$$R\delta r = F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 + \text{etc.},$$

in virtù del noto teorema: « La Risultante moltiplicata per la projezione che riceve da una linea sulla propria direzione, è uguale alla somma delle sue componenti moltiplicate rispettivamente per la projezione che ricevono sulle loro direzioni dalla stessa linea: » teorema che ora si può tradurre così:

Se un punto M è sotto l' azion di più forze, il lavoro della risultante è uguale alla somma de' lavori delle componenti per ogni moto impresso al punto M.

Ciò posto, osserviamo che il punto M può essere o perfettamente *libero* nello spazio, ovvero *obbligato* a muoversi sopra una data linea o superficie. Per l' equilibrio delle forze F, F_1, F_2 etc. si richiede evidentemente che la loro risultante R sia $= 0$ nel primo caso, e che nel secondo caso sia normale allo spostamento δs, e che però risulti $\delta r = 0$. In entrambi i casi adunque si ha

$$R\delta r = 0,$$

cioè si verifica l'equazione *(A)*. *Viceversa:* Ove si verifichi $R\delta r = 0$, la risultante R dovrà essere: od $= 0$ se il punto M è libero; ovvero normale allo spostamento virtuale δs se il punto M è obbligato a muoversi sopra una data linea o superficie.

a). Scolio. Giova notare che nell' equilibrio di un punto *posato* sopra una superficie, la somma de' lavori delle forze, che è nulla quando il punto si sposta sopra la superficie, divien *negativa* per tutti gli altri spostamenti possibili *fuori della superficie.* Essendochè, nel caso attuale, la risultante R rappresenta una *pressione*, e la velocità virtuale δr fuori della superficie non è possibile che in senso contrario a questa pressione.

II.

Chiamo **completamente connesso** *un sistema (T) di punti materiali A, B, C, etc., se ciascuno de' punti non possa muoversi che per una sola linea determinata Aa, Bb, Cc*, etc., *e se inoltre il moto o la quiete di uno qualunque di essi tragga seco necessariamente il moto o la quiete di ciascuno de' rimanenti.* Tale è il caso della più parte delle nostre Macchine. Quando in uno qualunque de'punti di applicazione A, B, C, etc. agiscono più forze, le supporremo sempre ridotte ad una sola. Ciò premesso:

Siano due soli A, B i punti del sistema (T) sollecitati dalle forze F, F_1 le quali, per maggior generalità, si supporranno *oblique* alle traiettorie infinitesime Aa, Bb. Io dico che il sistema (T) sarà in equilibrio se, pel dato spostamento virtuale, sussista l'equazione

$$(A) \qquad F\delta f + F_1 \delta f_1 = 0\,;$$

e viceversa.

Per veder ciò chiaramente, immaginiamo che ai due punti A, B si venga a connettere un nuovo punto M (*fig.* 76) per mezzo di due rette AM, BM riguardate come due fili inflessibili o rigidi, e sia questa la legge di connessione:

« Le rette AM, BM s' intendano: 1°. unite in M a cerniera come le gambe di un compasso, cosicchè, girando esse intorno ad M, possano liberamente avvicinarsi tra loro ed allontanarsi; 2°. le loro direzioni, diverse da quelle delle forze F, F_1, siano oblique rispettivamente agli archi infinitesimi Aa, Bb (pe' quali solamente si suppone possibile il moto iniziale de' punti A, B); 3°. e finalmente il loro piano AMB sia obbligato a star sempre in contatto con una superficie determinata ».

Secondo questa legge di connessione, mentre i punti A, B descrivono gli archetti Aa, Bb, obliqui alle rette AM, BM, il punto M descriverà pure un certo archetto Mm, *obliquo simultaneamente* alle stesse rette (323, *b*). (Il congegno delle due rette AM, BM, introdotto per facilitar la dimostrazione, si dee riguardare come un congegno meramente *ideale* che non reca alcun impaccio al moto del sistema).

Ciò stabilito, applichiamo ai punti A, B, e nelle direzioni delle due rette AM, BM, due forze P, Q tali che, movendosi essi punti per gli archi Aa, Bb, risulti

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F\delta f + P\delta p = 0\,, \\ F_1\delta f_1 + Q\delta q = 0\,. \end{array} \right.$$

Essendo note le forze F, F_1, e note le velocità virtuali δf e δp, δf_1 e δq (siccome proiezioni dell'arco Aa sulle direzioni di F e di AM, e dell' arco Bb sulle direzioni di F_1 e di BM), coteste due equazioni faranno conoscere le intensità delle forze P, Q, e rappresenteranno in equilibrio parziale la forza F colla forza P nel punto A, e la forza F_1 colla forza Q nel punto B (1).

S' intendano ancora applicate nel punto M e nelle direzioni delle rette MA, MB due altre forze P', Q' eguali ed opposte alle forze P, Q, di già applicate in A ed in B. Affinchè il punto M si trovi in equilibrio da sè sotto l' azione di queste due forze, è necessario e sufficiente che, nel moto virtuale dato a *(T)*, risulti

$$P'\delta p' + Q'\delta q' = 0.$$

Ora essendo per supposizione

$$P' = -P, \quad Q' = -Q,$$

ed inoltre (323, *b*)

$$\delta p' = \delta p, \quad \delta q' = \delta q,$$

si avrà, mirando alle (1),

$$P'\delta p' = -P\delta p = F\delta f, *$$

$$Q'\delta q' = -Q\delta q = F_1\delta f_1;$$

e per conseguenza

$$P'\delta p' + Q'\delta q' = F\delta f + F_1\delta f_1.$$

Acciocchè adunque il punto M stia in equilibrio da sè sotto l' azione delle due forze P', Q', è necessario e sufficiente che si abbia

$$(A) \qquad F\delta f + F_1\delta f_1 = 0,$$

e viceversa. Così sotto l'azione delle sei forze F e P, F_1 e Q, P' e Q', che tengono separatamente in equilibrio i tre punti A, B, M, il sistema (T) è certamente in equilibrio, e viceversa. Ma le forze introdotte P e P', Q e Q', uguali ed opposte, potendosi riguardare come agenti sull' estremità delle due rette AM, BM si distruggono tra loro; onde il sistema (T) non è soggetto in realtà che all' azione delle sole due forze F, F_1.

Il principio delle velocità virtuali è adunque dimostrato quando de' punti A, B, C, D etc. i sollecitati dalle forze sono i due soli A,B.

Siano tre A, B, C i punti del sistema (T) sollecitati dalle forze F, F_1, F_2. Dico che vi sarà equilibrio se, pel dato spostamento virtuale, sussista l' equazione

$$(A) \qquad F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 = 0 ;$$

e viceversa. Infatti si risolva la forza F in due parti

$$F = F' + F'' ,$$

così che l' una parte F' sia determinata dalla formola

$$(1) \qquad F'\delta f + F_1\delta f_1 = 0 ,$$

e però in equilibrio *parziale* con F_1. Per l' equilibrio *completo* bisognerà che l'altra parte F'' faccia equilibrio colla forza F_2, e che, per conseguente, risulti

$$F''\delta f + F_2\delta f_2 = 0 .$$

E ciò avrà luogo, ove abbiasi

$$F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 = 0 ,$$

siccome è evidente sottraendovi la (1).

Il principio delle velocità virtuali è adunque provato anche in questo caso.

Siano quattro A, B, C, D i punti del sistema (T) sollecitati dalle forze F, F_1, F_2, F_3. Separiamo la forza F in due parti

$$F = F' + F'',$$

così che la parte F' sia determinata dall' equazione

$$(2) \qquad F'\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 = 0,$$

e però in equilibrio parziale colle due forze F_1, F_2. Per l' equilibrio completo bisognerà che l' altra parte F'' tenga da sè in equilibrio la forza F_3, e che, per conseguente, risulti

$$F''\delta f + F_3\delta f_3 = 0 .$$

E ciò avrà luogo, ove abbiasi

$$F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 + F_3\delta f_3 = 0 ,$$

siccome è evidente sottraendovi la (2).

Ormai si vede potersi conchiudere col discorso medesimo che, se la proposizione è vera quando de' punti A, B, C, D etc. del sistema *(T)* i sollecitati dalle forze son quattro, dev' esser vera quando son cinque, e poi quando sei, sette, e così via, via.

Il principio delle velocità virtuali è adunque dimostrato nel caso che il sistema *(T)* sia completamente connesso.

III.

Il sistema *(T)* sia **incompletamente connesso**, vale a dire i punti A, B, C, D etc., a cui si debbono applicare le forze F, F_1, F_2, F_3 etc., abbiano la libertà di muoversi in più di una direzione. Io dico, che per l'equilibrio di questo sistema è necessario e sufficiente che l'equazione

$$(A) \qquad F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 + \text{etc.} = 0$$

sussista per ognuno de' moti virtuali conciliabili colle condizioni di connessione a cui il sistema è sottoposto.

Ed, in prova, si ammetta che, per l'azion delle forze F, F_1, F_2 etc.; il sistema *(T)* riceva nel primo istante uno di questi moti virtuali, che indicherò col segno *(V)*. Noi possiamo concepire aggiunte al sistema *(T)* nuove connessioni tali che impediscano tutti i moti di cui il sistema è capace, tranne quest' uno *(V)*. Dopo siffatte connessioni è chiaro che le forze F, F_1, F_2 etc. produrranno nel sistema il moto *(V)*, se prima potevano produrlo. Ma, essendo ora il sistema *(T)* completamente connesso, il moto *(V)* [ove rispetto al medesimo sussista l'equazione *(A)*] è un moto affatto impossibile; dunque anche prima, sussistendo l'equazione *(A)*, era impossibile.

Così, affinchè sotto l'azione delle forze applicate F, F_1, F_2 etc. non possa avvenire alcuno de' moti di cui è capace il sistema, è necessario e sufficiente che per ciascuno di essi, considerato virtualmente nel suo incominciare, sussista l'equazione *(A)*.

327. Coroll. I. Se, mentre il sistema *(T)* è in equilibrio, tende a muoversi in senso inverso a qualcuno *(V)* de' moti virtuali Aa, Bb, Cc etc. (fig. 76) di cui è capace, essendo questo moto inverso impedito da uno o più ostacoli posti ne' punti A, B, C, etc.; è palese che siffatti ostacoli fanno l'ufficio di forze P, P_1, P_2 etc. che, agendo nel senso delle velocità virtuali Aa, Bb, Cc etc., produrrebbero lavori positivi

$$P\delta p,\quad P_1\delta p_1,\quad P_2\delta p_2,\quad \text{etc.}$$

ove si effettuasse il moto virtuale *(V)* di cui si tratta; e per conseguenza, introdotte tali forze nel sistema, avremmo

$$P\delta p + P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + \text{etc.} + F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 = 0,$$

e quindi

$$F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 + \text{etc.} > 0,$$

vale a dire: *Se un sistema in equilibrio faccia forza in uno o più punti per avviarsi in senso inverso a qualcuno (V) de' moti virtuali di cui è capace, per tal moto virtuale la somma de' lavori delle forze sollecitanti F, F_1 F_2 etc. sarà negativa.*

N. B. In ciò che segue, o si farà astrazione da questo caso, oppure le resistenze degli ostacoli nominati (P, P_1, P_2 etc.) s'intenderanno comprese tra le forze F, F_1, F_2 etc.

328. Coroll. II. *Allorchè le forze* F, F_1, F_2 etc. *applicate ad un sistema rigido equivalgono ad una forza unica R, il lavoro della risultante sarà eguale alla somma de' lavori delle componenti per qualsivoglia moto virtuale.* Infatti rivolta in contrario la risultante R, le forze $-R$, F, F_1 F_2 etc. si faranno equilibrio, e per ogni moto virtuale si avrà

$$-R\delta r + F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 + \text{etc.} = 0,$$

donde

$$R\delta r = F\delta f + F_1\delta f_1 + F_2\delta f_2 + \text{etc.}$$

329. Due classi di forze $(P, P_1, P_2$ etc.$)$, $(Q, Q_1, Q_2$ etc.$)$ saranno **equivalenti** *sopra un sistema in equilibrio*, se ciascuna delle due classi sia contrabbilanciata da una terza classe di forze, $(R, R_1, R_2$ etc.$)$, talchè per ogni moto virtuale possibile sussista

$$P\delta p + P_1\delta p_1 + \text{etc.} + R\delta r + R_1\delta r_1 + \text{etc.} = 0,$$

$$Q\delta q + Q_1\delta q_1 + \text{etc.} + R\delta r + R_1\delta r_1 + \text{etc.} = 0;$$

e per conseguente

$$P\delta p + P_1\delta p_1 + \text{etc.} = Q\delta q + Q_1\delta q_1 + \text{etc.}$$

vale a dire: *Se due classi di forze sono equivalenti sopra un sistema in equilibrio, il lavoro dell' una classe, per ciascuno de' moti virtuali possibili, sarà eguale al lavoro dell' altra classe.* E viceversa: *Ove sussista sempre quest' uguaglianza di lavoro, le due classi di forze saranno equivalenti.*

N. B. L' equazione delle velocità virtuali si può scrivere simbolicamente così:

$$(A) \qquad \Sigma F\delta f = 0;$$

ovvero

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

dove le (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1) etc. rappresentano, nel senso di tre assi ortogonali, le componenti delle forze F, F_1 etc. applicate ai punti xyz, $x_1\ y_1\ z_1$, etc.

Le applicazioni del principio delle velocità virtuali si dividono naturalmente in due parti, di cui la prima è relativa all' equilibrio de' sistemi, e la seconda al loro movimento.

PRIMA PARTE

Come dal principio delle velocità virtuali si deducano l' equazioni dell' equilibrio.

§. 1°. *Esempii di equilibrio. Leva, vite, sistema rigido, e filo flessibile.*

330. Cominciamo dal rischiarare il metodo con alcuni esempii.

I. Ad una *leva* orizzontale di braccia a, a_1, e tenuta in equilibrio dai pesi F, F_1 s' imprima una rotazione virtuale $d\omega$ intorno al fulcro, cosicchè il peso F s' abbassi pel tratto $\delta f = a\delta\omega$, ed il peso F_1 s' inalzi pel tratto $\delta f_1 = - a_1\delta\omega$.

L' equazione $F\delta f + F_1\delta f_1 = 0$, si muta nella

$$(Fa - F_1 a_1)\delta\omega = 0\,, \quad \text{donde}\ \frac{F}{a_1} = \frac{F_1}{a} = \frac{F + F_1}{a + a_1}\,,$$

legge nota della leva in equilibrio (si fa astrazione dal peso della macchina).

II. Nella *vite* verticale in equilibrio sia h *il passo dell' elice*, F la potenza orizzontale con un braccio di leva $= a$, ed F_1 il peso che grava la vite. Se al punto di applicazione della potenza F si dà un moto virtuale $\delta f = \frac{2a\pi}{n}$ (essendo n un numero grandissimo) il peso F_1 s' inalzerà pel tratto $\delta f_1 = -\frac{h}{n}$; essendochè se la potenza F facesse il giro della intera periferia $= 2a\pi$, il peso F_1 s' inalzerebbe del passo $= -h$.

L' equazione $F\delta f + F_1\delta f_1 = 0$ diviene

$$\frac{1}{n}(F.2a\pi - F_1 h) = 0\,, \quad \text{donde}\quad F = \frac{h}{2a\pi}F_1\,.$$

III. Nell' equilibrio di un sistema rigido e libero l' equazione

$$(1) \qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

dee sussistere per ogni spostamento virtuale possibile, vale a dire, per ogni moto di traslazione δs, e per ogni moto di rotazione θdt: moti infinitesimi affatto arbitrarii.

Nel primo caso, la traslazione δs essendo la stessa per tutti i punti del sistema, l' equazion precedente diviene

$$\delta x\Sigma X + \delta y\Sigma Y + \delta z\Sigma Z = 0;$$

e questa, dovendo verificarsi tuttochè rimangano arbitrarie le velocità virtuali δx, δy, δz, si risolve nelle tre

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

Nel secondo caso, la rotazione θdt essendo comune a tutti i punti del sistema, se per ogni punto si sostituiscono le velocità virtuali corrispondenti

$$\delta x = (qz - ry)dt, \quad \delta y = (rx - pz)dt, \quad \delta z = (py - qx)dt,$$

le quantità p, q, r saranno le stesse per tutti i punti del sistema: onde l' equazione (1) si potrà scrivere sotto la forma

$$p\Sigma(Zy - Yz) + q\Sigma(Xz - Zx) + r\Sigma(Yx - Xy) = 0;$$

e questa, dovendo verificarsi tuttochè rimangano arbitrarie le rotazioni parziali p, q, r, si risolve nelle tre

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

IV. Nell' equilibrio di un filo perfettamente flessibile, ogni elemento ds, oltre di esser sollecitato dalle forze (Xds, Yds, Zds), è animato dalla tensione T, forza di reazione che opera con azioni uguali ed opposte, e di cui il lavoro virtuale è dato dal prodotto $-T\delta ds$ (323, a).

Ora è manifesto che, se al lavoro virtuale di tutte le forze sollecitanti rappresentato da

$$\int ds(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\ ,$$

si unisce il lavoro virtuale di tutte le forze di reazione, rappresentato da

$$-\int T\delta ds\ ,$$

e si forma l'equazione

$$(a)\qquad \int ds(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - \int T\delta ds = 0\ ,$$

in questa equazione ogni punto xyz del filo essendo in equilibrio sotto le due specie di forze, le variazioni δx, δy, δz, relative ad esso punto, si dovranno considerare come affatto arbitrarie, e però i loro coefficienti totali saranno eguali a zero separatamente. Conviene adunque cercare di trasformar l'integrale $\int T\delta ds$ in un altro della forma $\int (A\delta x + B\delta y + C\delta z)$.

Dalla $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ si ricava

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\, d\delta x + \frac{dy}{ds}\, d\delta y + \frac{dz}{ds}\, d\delta z\ .$$

Ciò posto, integrando per parti e supponendo fissi i due capi del filo, otterremo (187)

$$\int T\frac{dx}{ds}d\delta x = -\int d\left(T\frac{dx}{ds}\right).\delta x\ ,$$

colle altre due relative ad y e a z. Dunque

$$-\int T\delta ds = \int\left[d\left(T\frac{dx}{ds}\right).\delta x + d\left(T\frac{dy}{ds}\right).\delta y + d\left(T\frac{dz}{ds}\right).\delta z\right];$$

e la (a), eguagliando a zero i coefficienti totali di δx, δy, δz, si risolverà nelle tre:

$$Xds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0\ ,\quad Yds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0\ ,\quad Zds + d\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0\ .$$

§. 2°. *Regole generali per trovare l' equazioni dell' equilibrio de' sistemi.*

I.

331. Quando le velocità virtuali

$$\delta f,\quad \delta f_1,\quad \delta f_2,\quad \ldots \delta f_k$$

dipendono (a causa delle connessioni del sistema) da un numero minore di *variazioni*.

$$\delta p,\quad \delta p_1,\quad \delta p_2,\quad \ldots \delta p_n,$$

interamente arbitrarie, legate alle prime per mezzo dell' equazioni

$$\begin{aligned}
\delta f &= a\,\delta p + b\,\delta p_1 + c\,\delta p_2 + \ldots, \\
\delta f_1 &= a_1\,\delta p + b_1\,\delta p_1 + c_1\,\delta p_2 + \ldots, \\
\delta f_2 &= a_2\,\delta p + b_2\,\delta p_1 + c_2\,\delta p_2 + \ldots, \\
&\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\;;
\end{aligned}$$

allora l' equazione

$$F\delta f + F_1\,\delta f_1 + F_2\,\delta f_2 + \text{etc.} = 0,$$

dopo le sostituzioni precedenti dovendo verificarsi tuttochè restino *arbitrarie* le variazioni *indipendenti* δp, δp_1, δp_2, etc., si risolverà nelle

$$\begin{aligned}
aF + a_1 F_1 + a_2 F_2 + \text{etc.} &= 0, \\
bF + b_1 F_1 + b_2 F_2 + \text{etc.} &= 0, \\
cF + c_1 F_1 + c_2 F_2 + \text{etc.} &= 0,
\end{aligned}$$

che saranno l' equazioni di equilibrio del sistema.

II.

332. Quando le coordinate de' k punti

$$xyz\,,\quad x_1y_1z_1\,,\quad x_2y_2z_2\,,\quad \text{etc.}$$

sopra cui agiscono le forze (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1) etc. sono tutte funzioni note di n altre variabili indipendenti

$$q\,,\quad q_1\,,\quad q_2\,,\quad \text{etc.}$$

(essendo $3k > n$) talchè per ciascuna coordinata si abbia la relazione del tipo

$$\delta x = \frac{dx}{dq}\,\delta q + \frac{dx}{dq_1}\,\delta q_1 + \frac{dx}{dq_2}\,\delta q_2 + \text{etc}\,;$$

allora l'equazione delle velocità virtuali

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

si risolverà nelle seguenti:

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{dq} + Y\frac{dy}{dq} + Z\frac{dz}{dq}\right) = 0\,,$$

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{dq_1} + Y\frac{dy}{dq_1} + Z\frac{dz}{dq_1}\right) = 0\,,$$

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{dq_2} + Y\frac{dy}{dq_2} + Z\frac{dz}{dq_2}\right) = 0\,,$$

. . . .

III.

333. Quando le sopraddette $3k$ coordinate sono vincolate da n equazioni

$$L = 0\,,\quad L' = 0\,,\quad L'' = 0\,,\quad \text{etc.}$$

le velocità virtuali $(\delta x, \delta y, \delta z)$, $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$ etc. soddisfaranno alle n equazioni

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx_1}\delta x_1 + \text{etc.} = 0\,,\\ &\frac{dL'}{dx}\delta x + \frac{dL'}{dy}\delta y + \frac{dL'}{dz}\delta z + \frac{dL'}{dx_1}\delta x_1 + \text{etc.} = 0\,,\\ &\frac{dL''}{dx}\delta x + \frac{dL''}{dy}\delta y + \frac{dL''}{dz}\delta z + \frac{dL''}{dx_1}\delta x_1 + \text{etc.} = 0\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,; \end{aligned}\right.$$

onde n di esse velocità si potranno esprimere in funzione delle altre che resteranno, e con ciò l'equazione

$$(A)\qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

si risolverà in $(3k - n)$ equazioni.

Per ottener siffatte equazioni si adopera con vantaggio il *metodo de' moltiplicatori*; vale a dire, si moltiplicano le (1) rispettivamente per λ, λ', λ'' etc., e si sommano coll'equazione (A), che diviene

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \Sigma\left(X + \lambda\frac{dL}{dx} + \lambda'\frac{dL'}{dx} + \text{etc.}\right)\delta x\\ & + \Sigma\left(Y + \lambda\frac{dL}{dy} + \lambda'\frac{dL'}{dy} + \text{etc.}\right)\delta y\\ & + \Sigma\left(Z + \lambda\frac{dL}{dz} + \lambda'\frac{dL'}{dz} + \text{etc.}\right)\delta z\,. \end{aligned}\right.$$

In questa equazione si comincia dall' eguagliare a zero i coefficienti delle n velocità virtuali che si vogliono eliminare e che si riguardano *come funzioni delle altre*; ciò che serve a determinare i moltiplicatori λ, λ', λ'' etc.; ed in appresso si eguagliano a zero i coefficienti delle altre $(3k - n)$ velocità virtuali siccome *indipendenti*. Così i coefficienti di tutte le $3k$ velocità virtuali si debbono mandare a zero, talchè per ciascuno de' k punti si avrà un gruppo di tre equazioni, di cui il primo è

$$
(b)\qquad \left\{\begin{aligned}
&X + \lambda\frac{dL}{dx} + \lambda'\frac{dL'}{dx} + \lambda''\frac{dL''}{dx} + \text{etc.} = 0\,,\\
&Y + \lambda\frac{dL}{dy} + \lambda'\frac{dL'}{dy} + \lambda''\frac{dL''}{dy} + \text{etc.} = 0\,,\\
&Z + \lambda\frac{dL}{dz} + \lambda'\frac{dL'}{dz} + \lambda''\frac{dL''}{dz} + \text{etc.} = 0\,:
\end{aligned}\right.
$$

n di queste $3k$ equazioni determineranno i λ, λ', λ'' etc., i cui valori, sostituiti nelle $3k - n$ equazioni rimanenti, offriranno le condizioni dell' equilibrio del sistema.

L' equazioni (b), determinati che siano i moltiplicatori λ, λ', λ'' etc., significano che ogni punto di applicazione (xyz) è tenuto separatamente in equilibrio dalle *forze applicate* (X, Y, Z) e dagli *sforzi che provengono dai legami del sistema*, sforzi rappresentati da

$$
\left(\lambda\frac{dL}{dx}\,,\quad \lambda\frac{dL}{dy}\,,\quad \lambda\frac{dL}{dz}\right),\quad \left(\lambda'\frac{dL'}{dx}\,,\quad \lambda'\frac{dL'}{dy}\quad \lambda'\frac{dL'}{dz}\right),\ \text{etc.}
$$

di cui il primo è perpendicolare alla superficie $L = 0$, il secondo alla superficie $L'' = 0$, etc., supponendo che nell' equazioni $L = 0$, $L' = 0$, etc., variino le sole coordinate $x\,y\,z$ del punto di applicazione che si considera.

PARTE SECONDA

Come dal principio delle velocità virtuali si deducano le proprietà generali de' sistemi in moto.

CAPO I.

Diversi sistemi di formole a cui dà luogo la traduzione del principio generale della dinamica.

§. 1°. *Formole che rappresentano il principio generale della dinamica.*

334. Poichè, nel movimento di un sistema di punti materiali comunque collegati tra loro, le azioni delle forze sollecitanti sono sempre *equivalenti* (rispetto al moto che si va effettuando) alle corrispondenti forze d'inerzia (191, b), così l'equazione delle velocità virtuali applicata alla dinamica significa che:

In un sistema in movimento, il lavoro virtuale delle forze sollecitanti è uguale, in ogn' istante, al lavoro corrispondente delle forze d' inerzia.

La qual proposizione è rappresentata analiticamente da ciascuna delle due formole:

$$(A) \qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}\delta x + \frac{dy'}{dt}\delta y + \frac{dz'}{dt}\delta z\right),$$

$$(A_1) \qquad \Sigma F\delta f = \Sigma m\left(\frac{du}{dt}\delta s + \frac{u^2}{r}\delta r\right),$$

dove:

m dinota la massa di uno qualunque de' punti materiali, che percorrendo la sua traiettoria s si trova dopo il tempo t nel sito (xyz) *di curvatura* $=\frac{1}{r}$, animato dalla velocità u *composta delle tre* x', y', z', e sollecitato dalla forza F composta delle tre X, Y, Z;

$d\sigma$ è la velocità virtuale del punto m, che proiettata sulla direzione delle forze F, X, Y, Z, e sulla direzione della traiettoria s e del raggio osculatore r, diviene

$$\delta f, \quad \delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \delta s, \quad \delta r.$$

335. La legge di connessione delle varie parti del sistema dipenda dal tempo t e dalle n variabili

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \ldots q_n,$$

cosicchè per ciascuna delle coordinate x, y, z si abbia

$$x = x(t, \quad q_1, \quad q_2, \ldots q_n).$$

Per ogn' istante del tempo t, tutti gli spostamenti *virtuali* del sistema dipenderanno unicamente dalle sole variazioni arbitrarie

$$\delta q_1, \quad \delta q_2, \ldots \delta q_n,$$

vale a dire sarà

$$\delta x = \frac{dx}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dx}{dq_2}\delta q_2 \ldots \frac{dx}{dq_n}\delta q_n,$$

$$\delta y = \frac{dy}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dy}{dq_2}\delta q_2 \ldots \frac{dy}{dq_n}\delta q_n,$$

$$\delta z = \frac{dz}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dz}{dq_2}\delta q_2 \ldots \frac{dz}{dq_n}\delta q_n,$$

sebbene le variabili $q_1, q_2, \ldots q_n$ possano essere *funzioni implicite di* t.

Sostituendo nella (A) i valori di δx, δy, δz, ed eguagliando tra loro i coefficienti delle variazioni arbitrarie δq_1, δq_2, ... δq_n, si avranno le n equazioni dinamiche

$$\Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}.\frac{dx}{dq_1}+\frac{dy'}{dt}.\frac{dy}{dq_1}+\frac{dz'}{dt}.\frac{dz}{dq_1}\right)=\Sigma\left(X\frac{dx}{dq_1}+Y\frac{dy}{dq_1}+Z\frac{dz}{dq_1}\right),$$

$$\Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}.\frac{dx}{dq_2}+\frac{dy'}{dt}.\frac{dy}{dq_2}+\frac{dz'}{dt}.\frac{dz}{dq_2}\right)=\Sigma\left(X\frac{dx}{dq_2}+Y\frac{dy}{dq_2}+Z\frac{dz}{dq_2}\right),$$

. . . .

$$\Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}.\frac{dx}{dq_n}+\frac{dy'}{dt}.\frac{dy}{dq_n}+\frac{dz'}{dt}.\frac{dz}{dq_n}\right)=\Sigma\left(X\frac{dx}{dq_n}+Y\frac{dy}{dq_n}+Z\frac{dz}{dq_n}\right);$$

le quali si possono comprendere nell' equazione unica

$$(A)_i \qquad \Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}.\frac{dx}{dq_i}+\frac{dy'}{dt}.\frac{dy}{dq_i}+\frac{dz'}{dt}.\frac{dz}{dq_i}\right)=Q_i,$$

purchè per Q_i s' intenda

$$Q_i=\Sigma\left(X\frac{dx}{dq_i}+Y\frac{dy}{dq_i}+Z\frac{dz}{dq_i}\right),$$

e si diano all' indice i successivamente i valori $1, 2, 3, \ldots n-1, n$.

---

§. 2°. *Equazioni differenziali dinamiche date da Lagrange.*

336. Prop. *Allorchè tutti gli spostamenti virtuali di un sistema in moto dipendono dalle sole variazioni arbitrarie delle n quantità q_1, q_2, ... q_n, se si dinota per T la metà della forza viva del sistema*, vale a dire se si fa

$$2T=\Sigma mu^2=\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2),$$

l'equazioni della dinamica saranno le 2n che seguono, già trovate da Lagrange :

$$(A)' \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dq_1}{dt} = q'_1 , & \dfrac{d}{dt} \cdot \dfrac{dT}{dq'_1} - \dfrac{dT}{dq_1} = Q_1 , \\ \dfrac{dq_2}{dt} = q'_2 , & \dfrac{d}{dt} \cdot \dfrac{dT}{dq'_2} - \dfrac{dT}{dq_2} = Q_2 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dq_n}{dt} = q'_n , & \dfrac{d}{dt} \cdot \dfrac{dT}{dq'_n} - \dfrac{dT}{dq_n} = Q_n . \end{array} \right.$$

Dim. Per le regole del calcolo differenziale si ha :

$$(1) \quad \Sigma m \left(\frac{dx'}{dt} \frac{dx}{dq_i} + \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dy}{dq_i} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{dz}{dq_i} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x' \frac{dx}{dq_i} + y' \frac{dy}{dq_i} + z' \frac{dz}{dq_i} \right)$$

$$- \Sigma m \left(x' \frac{d}{dt} \frac{dx}{dq_i} + y' \frac{d}{dt} \cdot \frac{dy}{dq_i} + z' \frac{d}{dt} \frac{dz}{dq_i} \right) ;$$

2°. E dall' essere $x = x(t, q_1, q_2, \ldots q_n)$ si trae

$$x' = \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dq_1} q'_1 + \frac{dx}{dq_2} q'_2 \ldots + \frac{dx}{dq_n} q'_n ,$$

e per conseguente $\dfrac{dx'}{dq'_i} = \dfrac{dx}{dq_i}$.

3°. Si ha pure la formola

$$\frac{d}{dt} \frac{dx}{dq_i} = \frac{d^2x}{dq_i \, dt} + \frac{d^2x}{dq_i \, dq_1} q'_1 + \frac{d^2x}{dq_i \, dq_2} q'_2 \ldots + \frac{d^2x}{dq_i \, dq_n} q'_n ,$$

di cui il secondo membro (ove si riguardi al valore di x') è $= \dfrac{dx'}{dq_i}$.

Così abbiamo in generale

$$\frac{dx}{dq_i}=\frac{dx'}{dq'_i},\quad \frac{d}{dt}\cdot\frac{dx}{dq_i}=\frac{dx'}{dq_i},$$

ove alla lettera x si può sostituire la y e la z. Mediante queste relazioni, il secondo membro della (1) diviene $=\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_i}-\frac{dT}{dq_i}$, onde la $(A)_i$ si muta nella seguente

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_i}-\frac{dT}{dq_i}=Q_i=\Sigma\left(X\frac{dx}{dq_i}+Y\frac{dy}{dq_i}+Z\frac{dz}{dq_i}\right);$$

e d' altra parte si ha per definizione $\frac{dq_i}{dt}=q'_i$.

337. Si osservi che sono funzioni lineari delle

$$q'_1,\ q'_2,\ \ldots\ q'_n$$

come le x', y', z', così l' espressione

$$\frac{dT}{dq'_i}=\Sigma m\left(x'\frac{dx}{dq_i}+y'\frac{dy}{dq_i}+z'\frac{dz}{dq_i}\right).$$

Inoltre, se le x, y, z non contengono esplicitamente il tempo t, sarà

$$x'=\frac{dx}{dq_1}q'_1+\frac{dx}{dq_2}q'_2\ldots+\frac{dx}{dq_n}q'_n,$$

e la

$$T=\tfrac{1}{2}\Sigma(x'^2+y'^2+z'^2)m$$

diverrà una funzione *omogenea* del secondo grado rispetto alle variabili q'_1, q'_2, ... q_n'; onde, per la nota proprietà delle funzioni omogenee, si avrà identicamente:

$$2T=\frac{dT}{dq'_1}q'_1+\frac{dT}{dq'_2}q'_2\ldots+\frac{dT}{dq'_n}q'_n.$$

§. 3°. *Equazioni dinamiche di Hamilton.*

338 Prop. *Quando i legami del sistema non dipendono esplicitamente dal tempo t, se s' introducano altre n variabili $p_1, p_2, \ldots p_n$ vincolate alle prime per mezzo dell' equazioni*

$$\frac{dT}{dq_1'} = p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_n} = p_n,$$

lineari rispetto a $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, e se mediante la risoluzione di quest' equazioni si ottengano i valori di $q_1', q_2', \ldots, q'_n$, espressi per le nuove variabili $p_1, p_2, \ldots, p_n$, e si sostituiscano in T; riuscirà

$$T = funz.(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

e l' equazioni dinamiche $(A)'$ si muteranno nelle $2n$ seguenti trovate da Hamilton:

$$(A)'' \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dT}{dp_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dT}{dq_1} + Q_1, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{dT}{dp_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{dT}{dq_2} + Q_2, \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dq_n}{dt} = \dfrac{dT}{dp_n}, & \dfrac{dp_n}{dt} = -\dfrac{dT}{dp_n} + Q_n. \end{array} \right.$$

Dim. Essendo T funzione omogenea di 2°. grado delle $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, abbiamo (337)

$$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 \ldots + p_n q'_n,$$

e per conseguente

$$T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 \ldots + p_n q'_n - T.$$

Differenziamo questa formola considerando la T del secondo membro come funzione di $q_1, q_2, \ldots, q_n, q'_1 q'_2, \ldots q'_n$, ed in questa supposizione indichiamo i *differenziali parziali* di T colla lettera ∂. Omessi i termini che mutuamente si distruggono, quali

$$p_i\, dq'_i \quad , \; -\frac{\partial T}{dq'_i}\, dq'_i \; \left(\text{essendo } p_i = \frac{\partial T}{dq'_i} \right)$$

si ottiene

$$dT = q'_1\, dp_1 + q'_2\, dp_2 \,..\, q'_n\, dp_n - \frac{\partial T}{\partial q_1}\, dq_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}\, dq_2 \,..\, - \frac{\partial T}{\partial q_n} dq_n \,.$$

Ma, se consideriamo

$$T = funz.(p_1,\, p_2,\, ...\, p_n,\, q_1,\, q_2 \,...\, q_n)\,,$$

abbiamo

$$dT = \frac{dT}{dp_1} dp_1 + \frac{dT}{dp_2} dp_2 \,..\, \frac{dT}{dp_n}\, dp_n + \frac{dT}{dq_1} dq_1 + \frac{dT}{dq_2} dq_2 \,...\, + \frac{dT}{dq_n} dq_n \,.$$

Dunque, paragonando i due valori di dT, si ha

$$\frac{dT}{dp_i} = q'_i\,, \quad \frac{dT}{dq_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i}\,;$$

e l' equazioni dinamiche Lagrangiane, cioè le

$$\frac{dq_i}{dt} = q'_i\,, \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

diventano

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dT}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dT}{dt} + Q_i,$$

che sono quelle di Hamilton.

a). Coroll. Se le componenti X_i, Y_i, Z_i delle forze F_i sollecitanti il sistema sono *differenziali parziali di una stessa funzione* U, *presi rispetto ad* x_i, y_i, z_i, sarà

$$Q_i = \frac{dU}{dq_i} \,.$$

E se inoltre le forze non dipendono dalle velocità, nè però la U dalle p^i, vale a dire se sia

$$U = U(q_1, q_2, \ldots q_n),$$

fatto

$$H = T - U,$$

l' equazione dinamiche $(A)''$ si potranno scrivere sotto la forma semplicissima

$$(A)''' \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dH}{dp_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{dH}{dp_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_2}, \\ \ldots & \ldots \\ \dfrac{dq_n}{dt} = \dfrac{dH}{dp_n}, & \dfrac{dp_n}{dt} = -\dfrac{dH}{dq_n}. \end{array} \right.$$

b). Se dell' equazioni dinamiche precedenti si cercano gl' integrali, questi conterranno $2n$ *costanti arbitrarie*, per determinar le quali convien ricorrere ai *valori iniziali* delle $2n$ quantità

$$q_1, \quad q_2, \ldots q_n, \quad q'_1, \quad q'_2, \ldots q'_n,$$

che rispondono ai *dati* dello stato iniziale del sistema, consistenti nelle *note posizioni* e *velocità* de' suoi punti. Si veda un esempio al n°. 321.

---

§. 4°. *Altra forma dell' equazioni differenziali del moto.*

339. Prop. *Allorchè i legami del sistema sono espressi dalle n equazioni*

$$L = 0, \quad L' = 0, \quad L'' = 0, \quad \text{etc.}$$

che debbano verificarsi, in ogn' istante, tra il tempo t e le coordinate de' k punti del sistema, l' equazioni differenziali del moto *si raccoglieranno dalle 3k equazioni*

$$(A)_2 \quad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x_i}{dt^2} &= X_i + \lambda\frac{dL}{dx_i} + \lambda_1\frac{dL'}{dx_i} + \text{etc.}\,, \\ m\frac{d^2y_i}{dt^2} &= Y_i + \lambda\frac{dL}{dy_i} + \lambda_1\frac{dL'}{dy_i} + \text{etc.}\,, \\ m\frac{d^2z_i}{dt^2} &= Z_i + \lambda\frac{dL}{dz_i} + \lambda_1\frac{dL'}{dz_i} + \text{etc.}\,, \end{aligned} \right.$$

$$i = 0\,,\ = 1\,,\ = 2\,,\ \ldots\,,\ = k - 1\,,$$

eliminandone le n indeterminate

$$\lambda\,,\quad \lambda_1\,,\quad \lambda_2\,,\quad \text{etc.}$$

e per conseguenza riducendole a $3k - n$.

Dim. L' equazione delle velocità virtuali applicata al movimento del sistema, cioè la (A) del n°. 334, si può scrivere sotto la forma

$$(1)\quad \Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Le $3k$ velocità virtuali $(\delta x, \delta y, \delta z)$, $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$, etc. debbono soddisfare alle n equazioni

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx_1}\delta x_1 + \text{etc.} = 0\,,$$

$$\frac{dL'}{dx}\delta x + \frac{dL'}{dy}\delta y + \frac{dL'}{dz}\delta z + \frac{dL'}{dx_1}\delta x_1 + \text{etc.} = 0\,,$$

. . . .

onde n di esse si potranno esprimere in funzione delle altre $3k - n$. Se l'equazioni precedenti, moltiplicate rispettivamente per λ, λ_1, λ_2, etc., si sommano colla (1), e poi si fanno eguali a zero i coefficienti di tutti le velocità virtuali δx, δy, δz, etc., si avranno le $(A)_2$ (333).

CAPO II.

Principio delle forze vive e sue applicazioni.

§. 1°. *Formola che contiene questo principio, e condizione della sua esistenza. Forza viva rispetto al centro di gravità. Proprietà della forza viva di un sistema quando la funzione delle forze è un differenziale esatto.*

340. Prop. I. Quando i legami del sistema sono esplicitamente indipendenti dal tempo, si ha la seguente equazione

$$\tfrac{1}{2}\, d.\, \Sigma m u^2 = \Sigma F df = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

detta **principio delle forze vive**, e significa che:

Nel moto di un sistema i cui legami siano esplicitamente indipendenti dal tempo, il lavoro delle forze sollecitanti, per ogni intervallo infinitesimo del tempo, è uguale alla metà del cangiamento che avviene nella forza viva del sistema.

E ne conseguita che: *Il lavoro delle forze sollecitanti in un tempo qualsivoglia è uguale alla metà del cangiamento onde ha variato in corrispondenza la forza viva del sistema:* vale a dire

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2 - u^2_0) = \int_0^t \Sigma F df = \int_0^t \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)\,,$$

dove $\Sigma m u^2_0$ dinota la forza viva iniziale del sistema.

Dim. Quando i legami del sistema sono esplicitamente indipendenti dal tempo, è manifesto che tra gli spostamenti virtuali, a cui si può far soggiacere il sistema in ogn' istante del moto, si dee contar quello che il sistema sta per subire realmente nell' istante consecutivo dt; ed allora l' equazione delle velocità virtuali (334):

$$\Sigma m\left(\frac{du}{dt}\delta s + \frac{u^2}{r}\delta r\right) = \Sigma F\delta f = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,,$$

si muterà nella seguente

$$\Sigma m\frac{du}{dt}ds = \Sigma Fdf = \Sigma(Xdx + Ydx + Zdz)\ ;$$

perchè, gli spazii ds percorsi dai punti materiali m essendo rispettivamente normali ai loro raggi osculatori r, si ha

$$\delta r = 0\ .$$

(Si è sostituita alla lettera δ la lettera d per significare che agli spostamenti *virtuali* si sono sostituiti gli spostamenti *effettivi* ds, df, dx, dy, dz).

Ora essendo

$$ds = udt\ ,$$

l' equazione precedente diviene $\Sigma mudu = \Sigma Fdf$, ossia

$$\tfrac{1}{2}d.\Sigma mu^2 = \Sigma Fdf\ ,$$

che, integrata tra i limiti $t = 0$, e t qualunque, si muta nella

$$\int_0^t \Sigma Fdf = \tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2 - u^2_0)\ .$$

a). *Coroll. Quando*, nel sistema in moto, *le forze sollecitanti sono affatto nulle*, ovvero *si equilibrano ad ogn' istante*, *la forza viva del sistema si conserverà inalterata.* Nel che consiste il **principio della Conservazion delle forze vive.**

341. Prop. II. *L' equazion delle forze vive cessa di esistere quando i legami del sistema dipendono dal tempo t esplicitamente.*

Dim. Sia $L = 0$ una qualunque dell' equazioni relative ai legami del sistema: gli spostamenti virtuali debbono soddisfare all' equazione

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx_1}\delta x_1 + \text{etc.} = 0$$

anche quando la L contiene la variabile t *esplicitamente*. Ma, in questo caso, se agli spostamenti virtuali si sostituiscono gli spostamenti effettivi che si compiono da sè nell' istante dt, invece dell' equazion precedente si ha

$$\frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \frac{dL}{dx_1}dx_1 + \text{etc.} = 0\ ;$$

e queste due equazioni non possono accordarsi tra loro ponendo

$$\delta x = dx\,, \quad \delta y = dy\,, \quad \delta z = dz\,, \quad \delta x_1 = dx_1\,, \quad \text{etc.}\,,$$

salvochè non riesca $\frac{dL}{dt} = 0$ qualunque sia t, vale a dire salvochè i legami del sistema non siano esplicitamente indipendenti da t.

Scolio. Nondimeno, anche quando i legami de' punti materiali variano esplicitamente col tempo t, il principio delle forze vive si può applicare a ciascuno di essi punti considerato come *libero*, vale a dire tenendo conto di tutte le forze che gli vengono dai legami; essendo manifesto che tale principio sussiste certamente per ogni punto libero nello spazio.

342. Prop. III. Sia $M = \Sigma m$ la massa totale del sistema, V la velocità del suo centro di gravità, Σmu^2 il *valore assoluto* della forza viva del sistema, ed Σmv^2 il suo *valore relativo al centro di gravità*, vale a dire quale sarebbe rispetto ad un Osservatore che si credesse immobile in tale centro. Sarà

$$\Sigma mu^2 = MV^2 + \Sigma mv^2\,,$$

cioè: *La forza viva del sistema, nel suo moto assoluto, si compone di due parti di cui l' una è la forza viva onde il sistema sarebbe animato se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di gravità, e l'altra è la forza viva del sistema nel suo moto relativo ad esso centro considerato come immobile.*

Dim. Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate del centro G di gravità riferite a tre assi fissi rettangolari Ox, Oy, Oz; x, y, z le coordinate di un punto qualsivoglia m, aventi l' origine in O, ed ξ, η, ζ le coordinate dello stesso punto traenti l' origine dal centro G. Sarà

$$x = x_1 + \xi\,, \quad y = y_1 + \eta\,, \quad z = z_1 + \zeta\,.$$

Da qui, essendo

$$\Sigma m \frac{d\xi}{dt} = 0\,, \quad \Sigma m \frac{d\eta}{dt} = 0\,, \quad \Sigma m \frac{d\zeta}{dt} = 0\,,$$

si raccoglie

$$\Sigma mu^2 = MV^2 + \Sigma mv^2\,.$$

a). Coroll. Il principio delle forze vive applicato al centro di gravità, considerato come un punto libero di massa $= M$ ed animato dalle forze ΣX, ΣY, ΣZ, somministra

$$\tfrac{1}{2} d.MV^2 = dx_1 \,\Sigma X + dy_1 \,\Sigma Y + dz_1 \,\Sigma Z\,;$$

e rispetto ad esso centro, riguardato come immobile, la forza viva del sistema si ha dall' equazione

$$\tfrac{1}{2}\, d.\Sigma mv^2 = \Sigma(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta)\,,$$

essendochè

$$d.\Sigma mu^2 = d.(MV^2 + \Sigma mv^2) = 2\,\Sigma(X\,dx + Ydy + Z\,dz)\,,$$

e $$dx = dx_1 + d\xi\,,\ dy = dy_1 + d\eta\,,\ dz = dz_1 + d\zeta\,.$$

343. Prop. IV. *Se nell' equazione* (340)

$$\Sigma m\,(u^2 - u^2_0) = 2\int_0^t \Sigma(X\,dx + Ydy + Z\,dz)\,,$$

la funzione delle forze

$$\Sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \Sigma F df$$

è un differenziale esatto, di cui l' integrale U sia una funzione delle coordinate $x\ y\ z$ de' punti m del sistema, *si avrà evidentemente*

$$\Sigma\, m\,(u^2 - u^2_0) = 2\,(U - U_0)\,,$$

denotando u_0, U_0 i valori di u, U corrispondenti a $t = 0$.
In questo caso l' equazione delle forze vive si può scrivere sotto la forma

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 = U + H\,,$$

intendendo per H una *costante :*

$$H = \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2_0 - U_0\,.$$

a). Coroll. I. Allorchè il sistema ripassa per una medesima posizione, ivi la sua forza viva riprenderà lo stesso valore insieme colla quantità

$$U = U(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'\ ,\ \text{etc.})\,.$$

E qualunque sia la via percorsa dal sistema nel transitare da una posizione data ad un' altra pur data, il cangiamento corrispondente della forza viva avrà sempre lo stesso valore.

b). Coroll. II. Nel caso di un sistema sollecitato dalla sola gravità g, supposto verticale l'asse Oz e diretto all' ingiù, sarà

$$U = \int \Sigma F df = g \Sigma mz = gMZ ,$$

segnando con Z l' ascissa del centro di gravità.

Allorchè adunque *un sistema è sottomesso all' azione della sola gravità, la sua forza viva è rappresentata dall' equazione*

$$\Sigma m(u^2 - u^2_0) = 2gM(Z - Z_0) ,$$

e torna la medesima tutte le volte che il centro di gravità del sistema ripassa per lo stesso piano orizzontale, qualunque sia la via percorsa in questo passaggio.

---

§. 2°. *A quale condizione l' equilibrio di un sistema è stabile?*

344. Dall' equazione

$$\Sigma m(u^2 - u^2_0) = 2(U - U_0)$$

apparisce, che la forza viva del sistema toccherà il suo valor *massimo* ed il suo valor *minimo* nel medesimo tempo che la funzione U; e come la condizione del massimo e del minimo è $dU = 0$, vale a dire

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0 ,$$

ne conseguita che :

Nel moto di un sistema la forza viva è la più grande o la più piccola possibile allorchè il sistema si trova in quelle posizioni in cui le forze che gli sono applicate si farebbero equilibrio. Così la ricerca delle posizioni nelle quali avvi equilibrio tra le forze date, risponde alla ricerca delle posizioni ove la forza viva del sistema tocca il suo valor massimo od il suo valor minimo.

345. **L' equilibrio di un sistema si dice *stabile* se, per ogni piccolo spostamento, il sistema si mette ad oscillare nelle prossimità dello stato in cui era, come per riposarvisi di nuovo. Al contrario, l' equilibrio è *instabile* se, per ogni lieve spostamento, il sistema tende ad allontanarsi dallo stato in cui era.**

N. B. Quando il sistema riposa in equilibrio, è lecito di supporre che, rimosso alquanto dalla sua posizione di quiete, sia abbandonato a sè medesimo senza velocità iniziale, talchè riesca $\Sigma m u^2_0 = 0$. Nel moto che nascerà, l' equazion delle forze vive sarà

$$\Sigma m u^2 = 2(U - U_0) .$$

346. Prop. I. *In un sistema sottomesso all'azione della sola gravità* (quale una bilancia), *l' equilibrio è stabile se, per ogni piccolo spostamento, il centro di gravità del sistema non può che inalzarsi; e, se non può che abbassarsi, l' equilibrio è instabile.*

Dim. Nell' equazion delle forze vive (343, *b*)

$$\Sigma m u^2 = 2gM(Z - Z_0) ,$$

supponiamo che l' origine della Z sia nel punto ove riposa il centro di gravità quando il sistema è nella posizion di equilibrio. Ciò posto :

1.° La funzione

$$U = gMZ$$

corrispondente a $Z = 0$, cioè alla posizion di equilibrio, sia un *massimo*. Nelle prossimità di questo massimo, di valore $= 0$, la funzione U, e però la Z sarà necessariamente minore di zero, ossia *negativa*. Laonde, per poco che il sistema si rimuova dalla quiete per abbandonarlo a sè medesimo senza velocità iniziale, nascerà la forza viva

$$\Sigma m u^2 = 2gM \left[(-Z_0) - (-Z)\right] ,$$

dove $(-Z_0)$ esprime *l' alzamento iniziale* a cui si porta il centro di gravità. Essendo la $\Sigma m u^2$ essenzialmente positiva, dovrà essere

$$(-Z_0) - (-Z) > 0 , \quad \text{ossia} \quad (-Z) < (-Z_0) ,$$

vale a dire: **il centro di gravità, nel suo oscillare, non può inalzarsi** al di sopra dell'altezza ($-Z_0$) relativa al punto di partenza. Dunque: *L' equilibrio di un sistema grave è stabile se, per ogni piccolo spostamento, il centro di gravità non può che inalzarsi.*

2.° La funzione $U = gMZ$ corrispondente a $Z = 0$, cioè alla posizion di equilibrio, sia un *minimo*. Nelle prossimità di questo minimo, di valore $= 0$, la funzione U, e però la Z, sarà necessariamente maggiore di zero, ossia *positiva*. Laonde, per poco che il sistema si rimuova dalla quiete per abbandonarlo a sè medesimo senza velocità iniziale, nascerà la forza viva

$$\Sigma mu^2 = 2gM(Z - Z_0) ,$$

dove Z_0 esprime l' *abbassamento iniziale* a cui si porta il centro di gravità. Da questa formola si rileva che, dovendo mantenersi

$$Z > Z_0 ,$$

il centro di gravità dee continuare ad abbassarsi, e però ad allontanarsi dalla posizion di equilibrio. È adunque manifesto che *l' equilibrio di un sistema grave è instabile se, per ogni piccolo spostamento, il centro di gravità non può che abbassarsi.*

347. Prop. II. *In un sistema qualsivoglia pel cui moto valga l' equazion delle forze vive.*

$$\Sigma mu^2 = 2(U - U_0) ,$$

l' equilibrio **stabile** *corrisponde al valor* **massimo** *della funzione U delle forze.*

Dim. A partire dallo stato di equilibrio, tutte le posizioni possibili del sistema dipendano da un certo numero di variabili indipendenti, da tre per esempio p, q, r. La quantità U, funzione di p, q, r, sia tale che, quando corrisponde allo stato di equilibrio, riesca uguale a zero insieme con ciascuna delle p, q, r (il che è sempre lecito di ammettere introducendo all' uopo, nella funzione U, una o più costanti arbitrarie). Inoltre suppongasi che questo valore $= 0$ di U sia un *massimo*.

Nelle prossimità di questo massimo, i valori assoluti di p, q, r si potranno far variare tra zero e certi *limiti positivi* l, m, n così che la U, nel suo mutarsi, risulti sempre minore di zero, ossia *negativa*. Ora immaginiamo successivamente che mentre una delle quantità p, q, r coincide, quanto al valore assoluto, col suo limite, le altre ne' loro valori assoluti variino tra zero e i loro limiti corrispondenti. È manifesto che, in ciascuna di queste supposizioni successive, tra i diversi valori per cui passerà la funzione *positiva* $(-U)$, ne sarà sempre uno più piccolo degli altri. Chiamato Q il minimo di tutti questi valori, si concepisca il sistema rimosso dalla sua posizion di equilibrio in modo che i valori iniziali p_0, q_0, r_0, numericamente più piccoli di l, m, n, soddisfacciano alla condizione

$$- U(p_0, q_0, r_0) < Q.$$

Ciò essendo, dico che, in tutta la durata del moto, il valore assoluto di ciascuna delle variabili p, q, r si manterrà al di sotto de' limiti l, m, n.
Infatti se il contrario avesse luogo, bisognerebbe dapprima (a causa della continuità delle variabili) che ad un certo istante del tempo vi avesse uguaglianza tra uno o più de' valori numerici di p, q, r e i loro limiti rispettivi l, m, n, senza che alcuno degli altri valori avesse sorpassato il suo limite. In questo istante nell'equazione

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 = (-U_0) - (-U),$$

il valore di $(-U)$ sarà superiore o almeno eguale a Q, e per conseguente il secondo membro di cotesta equazione, a causa di $(-U_0) < Q$, sarebbe negativo: assurdo, essendo Σmu^2 sempre positivo. » Inoltre dovendo mantenersi

$$\Sigma mu^2 \leqq -2U_0,$$

le velocità u saranno sempre contenute tra limiti determinati. Ed è pure evidente che i limiti per ciascuna velocità, non che quelli di ciascuna variabile p, q, r, possono esser piccoli quanto si vorrà, poichè le quantità l, m, n possono assegnarsi piccole quanto si voglia.
» (Questa dimostrazione, quanto al fondo, si deve al sig. Dirichlet, V. Iournal de Mathématiques, an. 1847)

§. 3°. *Nell' urto de' corpi e nell' esplosioni qual cangiamento avviene nella forza viva?*

348. Prop. *I corpi di un sistema dotati di egual grado k di elasticità se, venendo ad urtarsi tra loro, arrivano tutti nel medesimo istante all'ultimo grado di compressione, al terminar dell' urto si avrà*

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m \dot{v}^2 = \frac{1-k}{1+k} \Sigma m u^2,$$

dove v è la velocità di uno qualunque de' punti materiali m del sistema prima dell' urto, velocità che si può considerare come composta della velocità $= \dot{v}$ che il punto m ritiene dopo l' urto, e di un' altra velocità $= u$ *perduta* nell' urto, talchè $v = ris.(\dot{v}, u)$.

Dim. Siano x', y', z' le componenti di v parallele ai tre assi rettangolari, e, nell'atto che cessa di agire la *forza di compressione*, divengano

$$x' - \Delta x', \quad y' - \Delta y', \quad z' - \Delta z'.$$

Quando cessa di agire la forza di restituzione, saranno

$$\dot{x} = x' - \Delta x' - k.\Delta x',$$

$$\dot{y} = y' - \Delta y' - k.\Delta y',$$

$$\dot{z} = z' - \Delta z' - k.\Delta z';$$

donde

$$\left\{\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{x' - \dot{x}}{1+k}, \\ \Delta y' &= \frac{y' - \dot{y}}{1+k}, \\ \Delta z' &= \frac{z' - \dot{z}}{1+k}; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x' - \Delta x' &= \frac{kx' + \dot{x}}{1+k}, \\ y' - \Delta y' &= \frac{ky' + \dot{y}}{1+k}, \\ z' - \Delta z' &= \frac{kz' + \dot{z}}{1+k}. \end{aligned}\right.$$

Considerando le quantità di moto prima dell' urto come equivalenti a quelle che sussistono al cessar della compressione, il principio delle velocità virtuali darà

$$\Sigma m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)=\Sigma m[(x'-\Delta x')\delta x+(y'-\Delta y')\delta y+(z'-\Delta z')\delta z],$$

da cui si trae

$$\Sigma m\,(\,\Delta x'.\delta x+\Delta y'.\delta y+\Delta z'.\delta z\,)=0\,,$$

ossia

$$\Sigma m[\,(x'-\dot{x})\,\delta x+(y'-\dot{y})\,\delta y+(z'-\dot{z})\,\delta z\,]=0.$$

E poichè il movimento infinitesimo che si opera nel sistema tra il cessar della compressione ed il cominciar della restituzione non ne altera i legami, sarà lecito di assumere questo moto come uno degli spostamenti virtuali possibili del sistema. Nella formola precedente possiamo adunque porre

$$\delta x=(\,x'-\Delta\,x'\,)\,dt\,,\qquad \delta y=(\,y'-\Delta\,y'\,)\,dt\,,\qquad \delta z=(\,z'-\Delta z'\,)\,dt\,,$$

ed allora essa diviene

$$\Sigma m[(x'-\dot{x})\,(\,kx'+\dot{x}\,)+(y'-\dot{y})(\,ky'+\dot{y})+(z'-\dot{z})\,(\,kz'+\dot{z})]=0,$$

ossia, sviluppando

$$(a)\qquad \Sigma m[k(x'^2+y'^2+z'^2)-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2+(1-k)(x'\dot{x}+y'\dot{y}+z'\dot{z}\,)]=0.$$

Ma

$$v^2=x'^2+{}'y^2+z'^2,\qquad v\dot{v}\;cos.\;(v\dot{v})=x'\dot{x}+y'\dot{y}+z'\dot{z}.$$
$$\dot{v}=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2,$$

Inoltre, la velocità perduta dal punto m essendo

$$u=ris.(\,v\,,\,-\dot{v}\,)\,,$$

si ha pure

$$v\dot{v}\;cos.(\,v\dot{v}\,)=\frac{v+\dot{v}-u^2}{2}\,.$$

Sostituendo nella (*a*) queste relazioni, viene

$$0 = \Sigma m \left[kv^2 - \dot{v}^2 + (1-k)\frac{v^2 + \dot{v}^2 - u^2}{2} \right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Sigma m[(1+k)(v^2 - \dot{v}^2) - (1-k)u^2],$$

ed infine

$$\Sigma mv^2 - \Sigma m\dot{v}^2 = \frac{1-k}{1+k}\Sigma mu^2 .$$

Coroll. 1°. Pel caso limite di $k = 1$, si ha

$$\Sigma mv^2 - \Sigma m\dot{v}^2 = 0 ,$$

vale a dire: *Nell' urto de' corpi perfettamente elastici non avvi perdita di forza viva;*

2°. Pel caso di $k = 0$, si ha

$$\Sigma mv^2 - \Sigma m\dot{v}^2 = \Sigma mu^2 ,$$

vale a dire: *Nell' urto de' corpi perfettamente inelastici la perdita di forza viva è* **massima**, *ed è uguale alla forza viva corrispondente alle velocità perdute;*

3°. In generale: *Ogni urto tra i corpi naturali è accompagnato da una perdita più o meno grande di forza viva.*

349. Prop. II. La forza viva di un sistema, *nel caso di esplosione*, si accresce, e l'aumento è uguale alla forza viva corrispondente alle velocità acquistate da ciascuno de' punti del sistema, vale a dire:

$$\Sigma m\dot{v}^2 - \Sigma mv^2 = \Sigma mu^2$$

dove v, $\dot{v}$ sono le velocità del punto materiale m, immediatamente prima e immediatamente dopo l'esplosione, ed u è la velocità acquistata nell' atto dell' esplosione; talchè

$$\dot{v} = ris.(v,\ u), \quad \text{ed} \quad u = ris.(\dot{v},\ -v) .$$

Dim. Lo spostamento virtuale ne' punti del sistema può farsi uguale al movimento che vi si opera sull' iniziarsi dell' esplosione, vale a dire nell'istante in cui i legami sono ancora indipendenti dal tempo. Ne segue che nell' equazione

$$\Sigma m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) = \Sigma m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z),$$

che esprime il lavoro virtuale delle quantità di moto che hanno luogo nell' iniziarsi e nell' atto dell' esplosione, può farsi

$$\delta x = x'dt, \quad \delta y = y'dt, \quad \delta z = z'dt;$$

e con ciò essa equazione si muta nella seguente

$$\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \Sigma m(x'\dot{x} + y'\dot{y} + z'\dot{z}),$$

e questa, sostituendo

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2,$$

$$x'\dot{x} + y'\dot{y} + z\dot{z} = \frac{\dot{v}^2 + v^2 - u^2}{2},$$

diviene

$$\Sigma mv^2 = \Sigma m\,\frac{\dot{v}^2 + v^2 - u^2}{2},$$

donde

$$\Sigma m\dot{v}^2 - \Sigma mv^2 = \Sigma mu^2.$$

---

§. 4°. *In che consiste il principio della minore azione nel movimento di un sistema?*

350. Nel muoversi de' corpi l'*azion viva* che ciascun punto materiale m offre in ogn'istante dt, è manifestamente proporzionale al prodotto della sua quantità di moto ($= mu$) per lo spazio ds descritto nel medesimo istante, vale a dire è rappresentata dalla quantità (*App.* 73)

$$mu ds.$$

Quindi l' azion viva totale spesa da questo punto m nel passare da un sito ad un altro della sua traiettoria sarà espressa dall' integrale

$$\int muds\ .$$

La somma V delle azioni vive, consumata dal sistema di tutti i punti materiali m allorchè da una posizione passa ad un'altra dello spazio *spontaneamente* (cioè sotto la sola influenza delle forze che lo animano), sarà

$$V = \Sigma\int muds\ .$$

Il *principio della minore azione* consiste nella seguente :

351. Proposizione. *Sussistendo il principio delle forze vive, e la funzione delle forze* $\Sigma m(Xdx + Ydy + Zdz)$ *essendo un differenziale esatto* $= dU$ *(* come suole accadere ne' moti della natura), *il passaggio spontaneo di un sistema di punti materiali m da una posizione ad un'altra si suol fare col minor dispendio possibile di azion viva*, vale a dire le traiettorie che seguono spontaneamente i punti materiali del sistema, tra le varie vie non impedite dai loro legami, sogliono esser precisamente quelle per le quali si ottiene la minore spesa possibile di azion viva.

Dim. Per mettere in chiaro la verità di questa proposizione, convien dapprima dimostrare che per un cangiamento infinitesimo nelle traiettorie de' punti m, comprese tra i loro estremi *fissi* di *partenza* e di *arrivo*, la variazione dell'azion viva V è $= 0$, cioè convien dapprima dimostrare la formola

$$\delta V = \delta\Sigma\int muds = 0\ ;$$

la qual condizione corrisponde tanto al valor minimo, quanto al valor massimo di V.

I. Eseguendo la differenziazione δ sotto il punto di vista del cangiamento infinitesimo delle traiettorie de' punti m, si ha

$$\delta V = \Sigma\int m\delta(uds) = \Sigma\int m(\delta uds + u\delta ds)\ .$$

Cerchiamo di trasformare ciascuna delle due parti

$$\Sigma m\delta uds\ ,\quad \Sigma mu\delta ds\ .$$

1. Quanto alla prima, sostituendo $ds = udt$, viene

$$\Sigma m\delta u ds = \tfrac{1}{2}\, dt \Sigma m\delta . u^2 .$$

Qui si avverta che, nell' equazione delle forze vive (343)

$$T = \tfrac{1}{2}\,\Sigma m u^2 = H + U(x,\ y,\ z,\ x',\ldots)\ ,$$

la forma della funzione U si dee conservare la medesima per ogni cangiamento infinitesimo ne'punti delle traiettorie nominate; essendochè le forze

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}$$

si conservano, per supposizione, le medesime. Ne conseguita che cotesta equazione, differenziata per δ, diviene

$$\delta T = \tfrac{1}{2}\Sigma m\delta . u^2 = \delta U = \Sigma m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\ ,$$

di cui l' ultimo membro, rappresentando il lavoro virtuale delle forze sollecitanti, è uguale a

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right),$$

ossia, è = al lavoro corrispondente delle forze d' inerzia. Dunque

$$\Sigma m\delta u ds = dt\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right).$$

2. Quanto alla seconda parte $\Sigma mu\delta ds$, se differenziamo per δ la

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\ ,$$

e dividiamo per $2dt$, si ottiene

$$u\delta ds = \frac{dx}{dt}\delta dx + \frac{dy}{dt}\delta dy + \frac{dz}{dt}\delta dz\ ;$$

dunque

$$\Sigma mu\delta ds = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}d\delta x + \frac{dy}{dt}d\delta y + \frac{dz}{dt}d\delta z\right).$$

Riunendo i valori trasformati delle due parti $\Sigma m\delta uds$, $\Sigma mu\delta ds$, onde si compone la $\delta\Sigma muds$,

avremo

$$\delta\Sigma muds = d.\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right);$$

e per conseguenza, integrando,

$$\delta V = \delta\Sigma\int muds = \left(\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)\right)_0^1,$$

dove per gl' indici 0, 1 apposti alla parentesi si vuol significare, che all' espressione inclusa deve darsi successivamente il valore che, nel sistema, corrisponde alla posizione di partenza ed alla posizione di arrivo, e poi sottrarre il valore iniziale dal valore finale. Ma in queste posizioni estreme, supposte *fisse*, son nulli gli spostamenti virtuali (δx, δy, δx). Dunque

$$\delta V = \delta\Sigma\int muds = 0.$$

Così è provato che, per ogni cangiamento infinitesimo delle traiettorie conciliabile coi legami del sistema, la variazione dell'azion viva V è nulla, e che però il valore di V è in generale un massimo od un minimo.

II. Dico, in secondo luogo, che a $\delta V = 0$ suol corrispondere il *valor minimo* della funzione V. A questo fine osserviamo che nell' equazion delle forze vive

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 = H + U,$$

la velocità u de' punti in moto è compiutamente determinata dalla loro *posizione* (x, y, z), senza dipendere affatto dalla *direzione* del loro cammino. Supponiamo, per esempio, che si tratti di un sol punto materiale m, talchè si abbia

$$mu^2 = 2[U(x, y, z) + H],$$

e consideriamo le diverse superficie successive rappresentate dall' equazioni

$$U(x, y, z) = C_1, \quad = C_2, \quad = C_3, \quad \text{etc.},$$

essendo C_1, C_2, C_3, etc. diverse costanti arbitrarie. È manifesto che il punto m (qualunque sia la traiettoria che gli è dato di percorrere) nell' attraversare le dette superficie avrà sempre le velocità espresse dalle formole

$$u = \sqrt{\frac{2(H + C_1)}{m}}, \quad u = \sqrt{\frac{2(H + C_2)}{m}}, \text{ etc.};$$

e d' altra parte coteste superficie C_1, C_2, etc., nel moto del punto m, si succedono ad intervalli infinitesimi, o a dir meglio per continuità.

Ciò posto, in tutti quei casi in cui alle traiettorie seguite spontaneamente dai punti del sistema si possono sostituire traiettorie contermine e più lunghe, il valor dell' integrale $\Sigma\int muds$ potrà crescere evidentemente, e quindi non ammetterà un valor massimo; ed è ciò che suole accadere.

352. *Scolio.* Quando del sistema mobile non si suppone fisso il luogo di partenza e di arrivo, allora nel prendere la variazione δ dell' equazione

$$T = H + U,$$

convien far variare anche H; onde si avrà

$$\delta T = \delta H + \delta U,$$

e per conseguente (in virtù della dimostrazion che precede) si troverà

$$\delta\Sigma muds = dt\delta H + d\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right).$$

Da qui, integrando rispetto al tempo t a cominciare da $t = 0$, si ricava

$$(1) \qquad \delta V = t\delta H + \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)_0^t.$$

Ora notiamo che, quando gli spostamenti virtuali del sistema dipendono dalla variazione delle sole quantità

$$q_1, q_2, \ldots . q_n,$$

essendosi trovato (338):

$$p_i = \frac{dT}{dq'_i} = \Sigma m\left(x' \frac{dx}{dq_i} + y' \frac{dy}{dq_i} + z' \frac{dz}{dq_i}\right),$$

se nell' espressione

$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) = \Sigma m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)$$

si sostituisce

$$\delta x = \frac{dx}{dq_1}\delta q_1 + \frac{dx}{dq_2}\delta q_2 \ldots + \frac{dx}{dq_n}\delta q_n,$$

e lo stesso si fa per δy, δz, si raccoglierà

$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) = p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 \ldots + p_n\delta q_n,$$

e la (1) si muterà nella seguente

$$\delta V = t\delta H + (p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 \ldots + p_n\delta q_n)_0^t,$$

la quale si può anche riguardare come la variazione della quantità V, corrispondente ad un cangiamento infinitesimo nella posizione iniziale e finale del sistema. Si avranno così le relazioni

$$\frac{dV}{dH} = t, \qquad \left\{\begin{array}{ll} \frac{dV}{dq_1} = p_1, & \frac{dV}{dq_2} = p_2, \text{ etc.} \\ \frac{dV}{dq^0_1} = -p^0_1, & \frac{dV}{dq^0_2} = -p^0_2, \text{ etc.}, \end{array}\right.$$

scoperte dal Sig. Hamilton, considerando V come funzione delle quantità (H, q_1, q_2, ... q_n, q^0_1, q^0_2, ... q^0_n) relative alla posizione iniziale e finale del sistema.

CAPO III.

Calcolo dell' effetto delle Macchine.

Legge a cui è sottomesso il moto delle Macchine. Lavoro della Potenza e della Resistenza. Condizion della uniformità e dell' accelerazion del moto. Lavoro resistente, distinto in utile ed in passivo. Rendita di una Macchina. Impossibilità del moto perpetuo. Volanti e Regolatori. Utilità delle Macchine.

353. In ogni Macchina avvi questo di proprio, che i legami delle parti si possono riguardare come esplicitamente indipendenti dal tempo, e che il moto dell' una parte trae seco il moto di ciascuna delle altre. Una sola equazione basta quindi per determinar la legge di questo moto, e la più acconcia si è trovata esser quella delle forze vive

$$\tfrac{1}{2}(\Sigma mu^2 - \Sigma mu^2_0) = \int_0^t \Sigma Fdf,$$

dove la somma Σ si estende nel primo membro a tutti i punti del sistema, e nel secondo si riferisce al lavoro di tutte le forze che vi agiscono.

N. B. In appresso supporremo che a $t = 0$ corrisponda $\Sigma mu^2_0 = 0$, cioè terremo dietro al moto della macchina a partir dalla quiete, e però applicheremo il principio delle forze vive sotto la forma

$$\int_0^t \Sigma Fdf = \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2.$$

Nella macchina in moto, il lavoro di tutte le forze accumulatosi nel tempo $= t$, e che è rappresentato dall' espressione

$$\int_0^t \Sigma Fdf,$$

si compone di due parti diverse, l' una *positiva* e l' altra *negativa*.

La parte positiva si dice **lavoro motore**, ed è il lavoro delle *forze moventi*, cagioni del moto della macchina, che tendono ad accelerare le velocità de' loro punti di applicazione. Queste forze si comprendono tutte sotto il nome di **Potenza**: onde il lavoro motore è il *lavoro della Potenza*.

La parte negativa si dice **lavoro resistente**, ed è il lavoro delle *forze resistenti*, cioè delle forze che si debbono vincere, e che tendono a ritardare le velocità de' loro punti di applicazione. Queste forze si comprendono tutte sotto il nome di **Resistenza**: onde il lavoro resistente è il *lavoro della Resistenza*.

Il lavoro motore ed il lavoro resistente, accumulatisi nel tempo $= t$, si dinoteranno per

$$L_m\,, \quad L_r\,;$$

onde il principio delle forze vive, applicato alle macchine in moto, sarà espresso dall' equazione

$$(A) \qquad L_m - L_r = \tfrac{1}{2}\Sigma m u^2\,,$$

la quale significa che:

A partir dalla quiete, l' eccesso del lavoro motore sul lavoro resistente è uguale alla metà della forza viva acquistata dalla macchina. Questo eccesso di lavoro motore si accumula quindi o, come suol dirsi, s' *immagazzina* nel corpo della macchina *sotto forma di forza viva*, pronto a ricomparire o a manifestare i suoi effetti, ove l'azion della Potenza s' indebolisca a fronte della Resistenza, e massime se venga improvvisamente a mancare.

a). Coroll. I. Il moto della macchina diventa e si conserva *uniforme* quando il lavoro *attuale della potenza*, espresso da dL_m, diventa e si conserva eguale al lavoro *attuale della resistenza*; vale a dire quando arriva a stabilirsi e a conservarsi l' eguaglianza

$$dL_m = dL_r\,.$$

In questo caso è manifesto che nell' equazione (A) il primo membro si mantiene inalterabile, perchè, ad ogn' istante, di quanto cresce il lavoro della potenza, di tanto cresce il lavoro della resistenza. Laonde, ridotta la macchina a *stato permanente*, il lavoro motore che si va accumulando è uguale al lavoro che si effettua in pari tempo dalla resistenza, cioè $L_m = L_r$, contando il lavoro a partire dallo stato uniforme.

Il moto della macchina diventa e si conserva *accelerato* o *ritardato*, quando il lavoro *attuale* della potenza diventa e si mantiene superiore od inferiore al lavoro *attuale* della resistenza.

b). *Coroll. II.* Il secondo membro dell' equazione (*A*) essendo sempre positivo finchè dura il moto, il lavoro motore della macchina, a partire dal suo attuarsi, è sempre maggiore del lavoro resistente. Ma, se si considera il moto in tutta la sua durata, cioè dal suo primo avviarsi fino al suo cessare, in cui torna $\Sigma mu^2 = 0$, è palese che si avrà

$$L_m = L_r ,$$

vale a dire : *Nella intera durata del moto della macchina, il lavoro della potenza é uguale al lavoro della resistenza.*

354. La resistenza si compone di due parti, l'una *utile*, e l'altra *passiva*.

La **resistenza utile** è costituita da quelle forze che nascono dall' opera medesima che si vuol produrre, come sollevar pesi, modificar la forma di certi corpi, etc.

La **resistenza passiva** è costituita da quelle forze che si sviluppano nelle varie parti della macchina a causa del suo moto, e che si dee cercare di attenuare e di evitare per quanto è possibile. Tali sono l'*attrito*, la *rigidezza delle corde*, la *resistenza de' mezzi*, la *comunicazion del moto*, le *scosse*, le *oscillazioni*.

Il lavoro della resistenza si compone quindi di un *lavoro utile*, e di un *lavoro passivo*, lavori che denoteremo rispettivamente per L_u , L_p. Così abbiamo

$$L_r = L_u + L_p .$$

Nella intera durata del moto della macchina il lavoro motore L_m essendo uguale al lavoro resistente L_r, sarà pure

$$L_m = L_u + L_p ,$$

e per conseguente

$$\frac{L_u}{L_m} = 1 - \frac{L_p}{L_m} .$$

Il rapporto del lavoro utile al lavoro motore si dice **rendita della macchina**, e la macchina è tanto più vantaggiosa, quanto più questo rapporto, *sempre inferiore all' unità*, si avvicina a questo limite.

355. È adunque impossibile per mezzo di una macchina di moltiplicare il lavoro della potenza, ed a più forte ragione di produrre il *moto perpetuo*, non potendo sostenersi la continuazion del moto se non intervenga, a ripararne le perdite, l'azione sia continua, sia periodica, della potenza.

356. Il moto delle macchine è ordinariamente soggetto a variazioni periodiche. Ma se calcoliamo quanto lavoro utile si produce in uno di questi periodi di tempo, si potrà intender sostituito al moto periodico un moto *medio* uniforme che offra un medesimo lavoro utile. In generale, per la buona esecuzion delle opere suol essere indispensabile che il lavoro utile si avvicini, il più possibile, all'uniformità. A ciò si provvede cogli apparecchi chiamati *Volanti e Regolatori*.

Al **Volante** si dà la forma di una ruota di cui la massa è quasi tutta alla circonferenza, acciocchè, sotto il *minimo peso*, offra il *massimo momento d'inerzia*. Se si dinota per S il momento d'inerzia del volante intorno all'asse di rotazione, e per θ la sua velocità angolare, la sua forza viva sarà $= S\theta^2$. L'equazion delle forze vive diverrà

$$L_m - L_r = \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 + \tfrac{1}{2}S\theta^2 .$$

Da qui apparisce che, quanto più sarà grande il momento d'inerzia S, tanto meno occorrerà che avvenga mutamento in θ allorchè il divario de' due lavori L_m, L_r divien massimo. E si vede inoltre potersi determinare il Volante in guisa che le variazioni della velocità θ siano comprese dentro limiti convenevoli.

I **Regolatori** delle macchine sono apparecchi di forma variabile, destinati a moderare la troppo rapida accelerazione, o la troppo rapida diminuzione di velocità, offrendo maggior resistenza quando il moto si accelera, e minore quando il moto si rallenta. Tipo de'Regolatori è quello a forza centrifuga. In alcuni casi adoprasi pure il Volante munito alla circonferenza di ali che, battendo l'aria, incontrano una resistenza maggiore o minore secondochè il moto è più o meno rapido.

N. B. Quando si è provveduto alle condizioni di solidità, importa, per l'economia delle spese di costruzione, e per la diminuzion degli attriti e di altre resistenze passive, che la massa totale della macchina sia la più piccola possibile.

357. In una macchina si debbono distinguere tre parti: 1°. la parte destinata a ricevere il lavoro motore, sulla quale agiscono direttamente le forze moventi; 2°. la parte destinata a produrre il lavoro utile, sopra cui agiscono direttamente le resistenze utili; 3°. la parte intermedia, destinata a legare l'una coll'altra le due prime.

La **Macchina** si definisce *un apparecchio destinato a trasmettere e a trasformare il lavoro della Potenza.*

Nel trasformare il lavoro colla potenza, *ciò che si guadagna in forza si perde in tempo;* e viceversa. Per intender questa massima, osserviamo che il lavoro attuale di una potenza è giustamente rappresentato dal *prodotto di due fattori*, il primo de' quali è la forza della potenza, ed il secondo la velocità del punto di applicazion della potenza, stimata nel senso della sua direzione; essendo evidente che il lavoro divien *doppio, triplo*, etc. con ciascuno di questi fattori, rimanendo l' altro costante. Ciò posto, è manifesto che il lavoro di una potenza non si può trasformare, conservandolo costante, che diminuendo l' uno di que' fattori, ed in proporzion inversa accrescendo l'altro.

358. L' *utilità delle macchine* consiste ne' mezzi che presentano, non solo per aiutare e meglio applicare le forze dell'uomo, ma principalmente per sostituire a queste forze quelle degli animali, e sopratutto quelle degli agenti naturali, come la caduta de' gravi, l'urto de' venti, i cangiamenti di stato prodotti dal calore, etc.

LIBRO IV.

Principii fondamentali della Meccanica de' fluidi.

Nozioni preliminari. Fluidi : liquidi ed aeriformi ; vapori e fluidi permanenti.

359. I corpi, considerati rispetto alla coesione più o meno grande delle loro particelle o *molecole*, si distinguono in *solidi* ed in *fluidi*. I **fluidi** si differenziano dai solidi per la proprietà che hanno le loro molecole *di cedere e scorrere sotto l'azione del più leggero impulso*. A questa proprietà si dà il nome di *fluidità*, la quale è più o meno perfetta secondo le diverse specie di fluidi, come acqua, mercurio, aria etc. Segue da questa definizione che i fluidi non hanno figura o forma propria, ma la ricevono dai vasi che li contengono. I fluidi si distinguono in *liquidi* ed in *aeriformi*.

360. I liquidi si dicono ancora *fluidi incompressibili*, non perchè siano tali assolutamente, ma perchè non si comprimono in un modo sensibile che sotto pressioni straordinariamente grandi.

361. I fluidi aeriformi sono compressibili e si riguardano come dotati di una elasticità perfetta, onde sono chiamati fluidi *elastici*.

I fluidi elastici si distinguono in *permanenti*, come l'aria atmosferica e i differenti gas, e in *non permanenti*, come i vapori.

362. I *vapori* sono fluidi elastici che godono di questa proprietà singolare, che uno spazio dato non può contenere, per una *data temperatura*, se non una quantità determinata di vapore, e cosiffattamente che quando il vapore ha raggiunto questo limite, per poco che venga a diminuire vuoi lo spazio, vuoi la temperatura, una porzion di vapore si liquefà. L'esperienza inoltre ha provato che questo *maximum* di vapore è lo stesso, ad egual temperatura, o lo spazio dato sia vuoto affatto, o pieno d'aria più o meno dilatata, più o meno compressa.

La densità del vapore è, in generale, poco considerabile relativamente a quella del liquido da cui si svolge, ma può divenir notabilissima in alcuni casi speciali. Per esempio, si concepisca un liquido che occupi, per un terzo od un quarto, la capacità di un vaso chiuso da ogn' intorno: se s' inalza la temperatura ad un altissimo grado, il liquido tutto intero si trasmuterà in un vapor trasparente. Or qui è chiaro che questo vapore ha una densità che è un terzo od un quarto di quella che aveva allo stato liquido.

363. L' aria e i gas sono chiamati fluidi permanenti, sebbene sia molto verosimile che possano esser liquefatti per una fortissima compressione, o per un grandissimo raffreddamento, ciò essendosi verificato rispetto ad alcuni di essi.

La Meccanica è **Idrostatica** nell'equilibrio de'fluidi, e **Idrodinamica** ne' loro movimenti.

PARTE PRIMA

IDROSTATICA

SEZIONE I.

DELL' EQUILIBRIO DE' FLUIDI, QUALUNQUE SIA LA NATURA DELLE FORZE CHE SOLLECITANO LE LORO PARTICELLE.

CAPO I. *Pressione idrostatica; sua eguaglianza per ogni verso in un dato punto, e sua egual trasmissione in tutta l' estensione del fluido. La pressione idrostatica può adoperarsi a modo di macchina.*

364. PROPOSIZIONE I. *La pressione di un fluido contro una superficie infinitesima dk, può aversi come operante con eguale intensità p in ogni punto di essa superficie, ed è $= p\,dk$, cioè uguale al prodotto di tale intensità per l' estensione della superficie premuta.*

DIMOSTRAZIONE. Primieramente osserviamo che, intendendosi per quantità infinitesima quella che è destinata a svanire affatto negli ultimi risultati (*App. pag.* 41), se la superficie premuta dk si suppone infinitesima, si può ammettere evidentemente che la pressione opera con eguale intensità e direzione in ogni punto di simile superficie. In secondo luogo, le azioni p della pressione, siccome uguali e parallele, si comporranno in una forza unica, applicata al centro di gravità di dk, e di più $= p\,dk$, essendo chiaro che questa forza unica si raddoppia, triplica *etc.* sia che si renda doppia, tripla etc. la intensità p delle azioni uguali, sia che si renda doppia, tripla etc. la superficie premuta dk (*App.* 73).

L' intensità p della forza con cui un fluido preme una superficie in un dato punto, si chiama la *pressione idrostatica* del fluido in questo punto.

N. B. Allorchè un fluido riposa in equilibrio sotto l' azione di forze date, è manifesto potersi concepire che in una parte qualsivoglia di esso tutti i punti materiali ond'è formato (rimanendo ciascuno al suo posto) vengano a collegarsi invariabilmente fra loro, e ciò senza che in nulla scompongasi l'equilibrio del fluido; vale a dire, niente c' impedisce di concepire, in equilibrio dentro il fluido, un corpo solido costituito come il fluido.

365. Prop. II. *La pressione idrostatica di un fluido in equilibrio, considerata in uno qualunque M de' suoi punti interni, è uguale per ogni verso*, vale a dire: *comunque si rivolga intorno al punto M la direzione della superficie infinitesima dk, la pressione contro una faccia di questa superficie si conserva sempre la medesima* (fig. 77).

Dim. Denotiamo per dm la *massa* di una molecola fluida infinitesima, per dv il *volume*, e per q la *densità*: queste tre quantità sono vincolate dall' equazione (*App.* 73)

$$dm = q dv.$$

Ogni molecola fluida dm sia sollecitata da una *forza acceleratrice* F di cui le componenti secondo tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz si esprimano in generale per P, Q, R. La *forza motrice* Fdm sarà composta delle tre

$$Pdm = q\,Pdv\,,\quad Qdm = q\,Q\,dv\,,\quad R\,dm = qR\,dv\,,$$

le quali sogliono cangiar di valore passando dall' una all' altra molecola, e però le quantità q, P, Q, R si debbono riguardare come funzioni delle coordinate x, y, z del punto dove si trova la molecola dm.

Ciò stabilito, separiamo col pensiero nell' interno del fluido un filo cilindrico MM'(*fig.* 78), infinitamente sottile, parallelo all'asse Ox, e troncato a distanza finita ne' punti $M(x, y, z)$ ed $M'(x', y, z)$ dalle due basi s, s' inclinate comunque tra loro. La lunghezza finita di questo tronco sarà espressa da $x' - x$. Denotiamo per a l'area della sezione fatta nel medesimo perpendicolarmente all' asse Ox: l' area a rappresenterà, nel piano dov' è contenuta, la projezione di ciascuna delle due basi s, s' sopra lo stesso piano, e si avrà dalla geometria analitica (*App.* 29)

$$a = s\cos.(sa) = - s'\cos.(s'a).$$

Il cilindro MM' si concepisca diviso in particelle dv per mezzo di piani paralleli al piano yz, ossia in cilindretti di base a e di altezza dx, cosicchè si abbia

$$dv = adx\,,\quad dm = q\,dv = aqdx.$$

Supponiamo adesso che, senza turbar l'equilibrio, il filo o cilindro fluido MM' divenga solido. Se tutte le forze che lo tengono in equilibrio si proiettano sopra una retta qualunque, noi sappiamo dalla Meccanica che la somma delle proiezioni debb'essere uguale a zero. Cerchiamo adunque di esprimere analiticamente (per eguagliarne a zero la somma) le proiezioni sull' asse Ox di tutte le forze che agiscono sul nostro cilindro, cioè tanto delle *pressioni* applicate alla sua superficie, quanto delle *forze motrici* Fdm che sollecitano le masse dm delle sue molecole.

La proiezione sull'asse Ox di ciascuna di queste forze Fdm essendo espressa per $P.qadx$, la somma delle proiezioni di tutte sarà data dall' integrale

$$a\int_x^{x'} qPdx\ ,$$

esteso da un capo all'altro del cilindro.

La superficie laterale del cilindro MM' essendo (per supposizione) parallela all' asse Ox, le pressioni del fluido contro la medesima avranno tutte una direzione perpendicolare all' asse Ox, e per conseguente le loro proiezioni su quest' asse saranno eguali a zero.

Le pressioni del fluido contro le due basi s, s' del cilindro, siano indicate da ps, $p's'$; le loro proiezioni sull'asse Ox saranno

$$ps\cos.(px)\ , \qquad p's'\cos.(p'x)\ .$$

Ma, essendo le direzioni delle pressioni p, p' e dell'asse Ox rispettivamente perpendicolari ai piani delle aree s, s', a, si ha per un noto teorema

$$\cos.(px) = \cos.(sa) = \frac{a}{s}\ ,$$

$$\cos.(p'x) = \cos.(s'a) = -\frac{a}{s'}\ .$$

Le pressioni adunque sulle due basi s, s', proiettate sull' asse Ox diventano

$$ps\cos.(px) = pa\ , \quad p's'\cos.(p'x) = -p'a\ .$$

E si conchiude che, se le pressioni esercitate dal fluido sopra tutta la superficie del cilindro si proiettano sull'asse Ox, la somma delle loro proiezioni si riduce semplicemente a

$$pa - p'a \,.$$

Ormai conosciamo le proiezioni sull'asse Ox di tutte le forze che tengono in equilibrio il cilindro MM'. Eguagliandone a zero la somma, otteniamo

$$pa - p'a + a\int_x^{x'} qPdx = 0 \,,$$

donde, dividendo per a ed isolando p', si trae

$$(1) \qquad p' = p + \int_x^{x'} qPdx \,.$$

Quest' equazione fa palese che, ritenuta fissa la prima base s del cilindro MM', se facciamo girare intorno al punto $M'(x', y, z)$ il piano dell'altra base s', il valore della *pressione idrostatica* su questa base mobile si conserverà sempre il medesimo, perchè questo valore è sempre rappresentato dal secondo membro della (1), il quale non varia colla direzione della base s'.

È adunque provato che la pressione idrostatica di un fluido in equilibrio, considerata in uno qualunque de' suoi punti interni, è uguale per ogni verso.

366. *Coroll.* I. Supponiamo che le molecole del fluido non siano sollecitate nè dalla gravità, nè da altra forza acceleratrice, e che però si abbia $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. L' equazione (1) darà

$$p' = p \,,$$

la quale significa che:

Quando un fluido imponderabile è circoscritto tutto all' intorno da una superficie solida, se in una parte qualunque di esso si produce una pressione idrostatica p, questa pressione sarà trasmessa con eguale intensità in tutta la estensione del fluido.

Per esempio, sulla superficie solida che circoscrive siffatto fluido si facciano due aperture, chiuse da due diafragmi mobili, di cui le aree siano A, B (*fig.* 79). Una pressione

$$P = pA \,,$$

applicata esteriormente al primo de' due diafragmi, trasmetterà al secondo coll' intermezzo del fluido una pressione $= pB$, e per l'equilibrio si richiederà che il secondo diafragma sia sostenuto da una resistenza R eguale ed opposta a pB, talchè sarà

$$R = pB ,$$

e quindi

$$p = \frac{P}{A} = \frac{R}{B} ,$$

vale a dire:

Nell' equilibrio di un fluido circoscritto da una superficie solida, la *potenza* P *e la resistenza* R applicate a due diafragmi mobili (ove si faccia astrazione dalle forze sollecitanti) *stanno tra loro come le ampiezze* A, B *di essi diafragmi.*

367. *Coroll. II.* Quando un fluido in equilibrio è sollecitato dalla gravità o da altre forze date, la pressione idrostatica, nel passare da un punto ad un altro del fluido, si comporrà di due parti, delle quali la prima (dappertutto la stessa) proviene dalle forze applicate alla superficie del fluido, e la seconda (variabile da punto a punto) è dovuta alla gravità o ad altre forze sollecitanti.

368. *Scolio.* Un fluido qualsivoglia, per la proprietà che possiede di trasmettere in tutti i versi le pressioni esercitate alla sua superficie, è adoperato talvolta come una *vera macchina*, valevole a trasmettere e a moltiplicare mirabilmente l' effetto di una data potenza. E tale, nel *torchio idraulico*, è l' ufficio dell' acqua, che trasmette e moltiplica in una parte lo sforzo della potenza applicato ad un'altra parte.

CAPO II. *Legge generale dell' equilibrio de' fluidi, esprimente come varia da punto a punto la pressione idrostatica* p *insieme colla densità* q *e colla forza sollecitante* F. *Qual condizione dee verificarsi perchè la pressione, la densità e la temperatura siano costanti insieme e cangino insieme nell' interno del fluido?*

369. Prop. I. *Quando un fluido è in equilibrio, la pressione idrostatica* p, *nel passare da un punto* (x, y, z) *ad un altro infinitamente vicino* $(x + dx, y + dy, z + dz)$, *dee variare secondo la legge espressa dall'equazione*

$$(A) \qquad dp = q(Pdx + Qdy + Rdz) = qFdf ,$$

equivalente alle tre

$$(A)_1 \qquad \frac{dp}{dx} = qP\,, \quad \frac{dp}{dy} = qQ\,, \quad \frac{dp}{dz} = qR\,,$$

dove P, Q, R sono le componenti della forza sollecitante F. E viceversa : *Se questa legge si verifica per ogni punto del fluido, il fluido sarà in equilibrio.*

Dim. A partire da un punto qualunque $M(x, y, z)$ del fluido in equilibrio, separiamo col pensiero un parallelepipedo infinitesimo MM'(*fig.* 80), i cui spigoli contigui al vertice M siano dx, dy, dz, paralleli agli assi rettangolari Ox, Oy, Oz. Questi spigoli determinano intorno ad M le tre facce

$$A = dydz\,, \qquad B = dzdx\,, \qquad C = dxdy\,,$$

alle quali si oppongono altrettante facce A', B', C' rispettivamente parallele ed uguali alle prime, e separate dalle prime per gl' intervalli infinitesimi dx, dy, dz. Il volume dv del parallelepipedo avrà per espressioni

$$dv = dxdydz = Adx = Bdy = Cdz\,.$$

Fingiamo adesso che, senza turbar l' equilibrio, il parallelepipedo fluido dv divenga solido, e cerchiamo l'equazioni che ne rappresentano l' equilibrio sotto l'azione di tutte le forze a cui è sottomesso. Queste forze sono le *pressioni* del fluido contro le sei facce (A, A'), (B, B'), (C, C'), e la *forza motrice* Fdm composta delle tre Pdm, Qdm, Rdm, essendo $dm = qdv$.

Qui giova notare che il parallelepipedo dv essendo infinitesimo per ogni verso, l' azione di ciascuna delle forze nominate si può riguardare come costante nella *intensità* e nella *direzione* per tutti i punti dell' estensione in cui opera. Segue da questa considerazione che la pressione del fluido sopra una qualunque delle sei facce (A, A'), (B, B'), (C, C') si può riguardare come una forza applicata perpendicolarmente al centro di gravità di questa faccia, e che le tre forze Pdm, Qdm, Rdm, sollecitanti la massa dm, si possono riguardare come applicate al centro di gravità del parallelepipedo dv.

Ciò posto, se pA esprime la pressione del fluido contro la faccia A, la pressione del fluido contro la faccia opposta A' sarà espressa da

$$-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)A=-pA-\frac{dp}{dx}dv.$$

Queste due pressioni, equivalendo a due forze applicate perpendicolarmente e in verso contrario al centro di gravità delle due facce A, A', si compongono evidentemente in una forza unica

$$=-\frac{dp}{dx}dv,$$

parallela all'asse Ox, e che si può riguardare come applicata al centro di gravità del parallelepipedo dv.

Nel modo stesso si prova che le pressioni del fluido contro le facce (B, B'), (C, C') si riducono alle due forze

$$-\frac{dp}{dy}dv, \quad -\frac{dp}{dz}dv,$$

parallele rispettivamente agli assi Oy, Oz, ed applicate al centro di gravità del parallelepipedo dv.

Possiamo adunque conchiudere che tutte le forze onde sta in equilibrio il parallelepipedo dv, equivalgono a quelle de' tre gruppi

$$\left(qPdv, \ -\frac{dp}{dx}dv\right), \left(qQdv, \ -\frac{dp}{dy}dv\right), \left(qRdv, \ -\frac{dp}{dz}dv\right)$$

applicate tutte al centro di gravità del parallelepipedo. Ma è noto dalla meccanica che: « *Per l'equilibrio di più forze applicate ad un punto è necessario e sufficiente che la somma di queste forze, stimate secondo tre assi coordinati, riesca eguale a zero rispetto a ciascuno di questi assi.* » Nel caso nostro si avrà dunque

$$dv\left(qP-\frac{dp}{dx}\right)=0, \quad dv\left(qQ-\frac{dp}{dy}\right)=0, \quad dv\left(qR-\frac{dp}{dz}\right)=0,$$

e per conseguenza

$$(A)_1 \qquad \frac{dp}{dx} = qP\,, \quad \frac{dp}{dy} = qQ\,, \quad \frac{dp}{dz} = qR.$$

Quest' equazioni, esprimendo l'equilibrio di ogni molecola dm del fluido, assicurano l'equilibrio di tutto il fluido.

Se si moltiplicano rispettivamente per dx, dy, dz, e poi si sommano, si ottiene

$$\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz = q(Pdx + Qdy + Rdz)\,,$$

ossia

$$(A) \qquad dp = q\,(Pdx + Qdy + Rdz),$$

formola esprimente il cangiamento dp onde varia la pressione idrostatica p quando, dentro il fluido, si passa da un punto (x, y, z) ad un altro punto infinitamente vicino $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Essa contiene implicitamente le tre precedenti $(A)_1$, perchè dee verificarsi qualunque sia il rapporto de' tre differenziali dx, dy, dz, e però anche supponendone due uguali a zero.

Siffatta formola equivale alla seguente

$$dp = q\,Fdf$$

dove F è la forza composta delle tre P, Q, R, e $df = ds\, cos.(sF)$ è, sulla direzione di F, la proiezione della linea ds che unisce i due punti (x, y, z), $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Infatti essendo df, dx, dy, dz, le proiezioni della linea ds sulle direzioni della forza F e delle sue componenti P, Q, R, l'equazione

$$Fdf = Pdx + Qdy + Rdz$$

non è altro che la traduzione del noto teorema: *La risultante moltiplicata per la proiezione che riceve da una retta, è uguale alla somma delle componenti moltiplicate rispettivamente per la projezione che ricevono dalla medesima retta.*

N. B. Per significare che una quantità, per esempio u è funzione di altre quantità, per es. di x, y, z, usiamo la notazione

$$u = u\,(x, y, z).$$

Così la pressione p essendo una funzione delle coordinate x, y, z, l' integrale della (A) sarà

$$p(x, y, z) = \int q(Pdx + Qdy + Rdz) = \int qFdf ,$$

ed in virtù delle $(A)_1$ si dovranno verificare le relazioni

$$\frac{d(qP)}{dy} = \frac{d(qQ)}{dx} , \quad \frac{d(qQ)}{dz} = \frac{d(qR)}{dy} , \quad \frac{d(qR)}{dx} = \frac{d(qP)}{dz} .$$

370. Prop. II. *Quando il trinomio* $Pdx + Qdy + Rdz$ *è il differenziale completo di una quantità* u *funzione di* x, y, z, cioè quando si ha

$$du = Pdx + Qdy + Rdz ,$$

saranno funzioni *della sola quantità* u la **pressione** *idrostatica* p, la **densità** q, e la **temperatura**, cosicchè *queste tre quantità* saranno *costanti insieme* e *varieranno insieme* nell' interno del fluido in equilibrio.

Dim. Nella fatta supposizione abbiamo

$$dp = qdu .$$

Ora l' equazione

$$u(x, y, z) = c ,$$

se diamo alla quantità arbitraria c diversi valori determinati c_0, c_1, c_2 etc., rappresenterà una serie di superficie (*fig.* 81) per ciascuna delle quali, essendo $du = 0$, e però $dp = qdu = 0$, la pressione p si manterrà invariabile in ogni punto. Questa pressione adunque non varierà che passando dall' una all' altra di siffatte superficie, e però non varierà che al solo variare della quantità u. Sarà dunque

$$p = funz.(u).$$

Ma essendo $q = \frac{dp}{du}$, anche la densità q sarà una funzione di u e per conseguenza di p; e poichè la densità è di più funzione della temperatura, convien conchiudere che la *temperatura* eziandio è *funzione della stessa quantità u*. Così vediamo chiaramente che le tre quantità « *pressione, densità* e *temperatura* » saranno costanti insieme e varieranno insieme nell' interno del fluido.

CAPO III. **Superficie di livello.** *Oltre la proprietà di passare pei punti di egual pressione, una superficie di livello possiede quella di esser dappertutto normale alla direzione delle forze sollecitanti, e quella di non aver nessun punto in comune colle altre superficie di livello, e d'ordinario anche quella di offrire in tutti i punti egual densità e temperatura. Se le forze sollecitanti sono dirette ad un punto fisso, le superficie di livello sono sferiche.*

371. In un fluido equilibrato, una *superficie* si chiama **di livello** se la pressione idrostatica risulti *costante* in ciascuno de' suoi punti. Così la superficie libera di un fluido stagnante nel vuoto o nell' aria quieta, è una superficie di livello.

Nelle superficie di livello essendo costante la pressione p in ogni punto, sarà $dp = 0$. Quindi l' equazione

$$(B) \qquad Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

ovvero l' equivalente

$$Fdf = 0,$$

sarà l' *equazion differenziale di tutte le superficie di livello*, e il valore della densità q sarà un fattore proprio a renderla integrabile ogni qual volta non lo sia per sè medesima.

N. B. Si avverta in generale che se due punti (x, y, z), $(x + dx, y + dy, z + dz)$ di una superficie sono infinitamente vicini, la linea retta ds che li unisce si può riguardare come giacente sulla superficie.

372. Prop. I. *Ogni superficie di livello, oltre la proprietà di passar pei punti di egual pressione idrostatica, possiede quella di esser dappertutto normale alla direzione delle forze sollecitanti, e quella di non aver nessun punto in comune colle altre superficie di livello, e d'ordinario anche quella di offrire in tutti i punti egual densità e temperatura.*

Dim. 1. Ogni superficie di livello essendo rappresentata dall'equazione $Fdf = 0$, e non supponendosi $= 0$ la forza sollecitante F, dovrà essere $= 0$ il fattore $df = ds \cos.(sF)$. Or ciò non può accadere senza che la direzione della forza F in un punto qualsivoglia (x, y, z) della superficie di livello sia ivi normale ad ogni linea ds che unisce il detto punto con un altro punto qualsivoglia

$$(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$$

infinitamente vicino di essa superficie, e però senza che la direzione della forza F sia ivi normale alla superficie di livello.

2. Ogni superficie di livello essendo anche rappresentata (per definizione) dall'equazion differenziale $dp = 0$, questa integrata che sia darà, per determinare individualmente tutte le superficie di livello, l'equazione

$$p(x, y, z) = c,$$

ove la costante c dell'integrazione varia solo da una superficie all'altra. Così l'equazioni

$$p(x, y, z) = c_1, \quad p(x, y, z) = c_2$$

rappresentano due superficie diverse di livello. Ora è manifesto che i medesimi valori finiti e determinati di x, y, z non possono soddisfare a coteste equazioni salvochè non sia $c_1 = c_2$. Dunque coteste due superficie non possono avere in comune alcun punto (x, y, z). (In questa dimostrazione si ammette che l'equazione $p(x, y, z) = c$ non rappresenti, per ogni valore di c, che una sola superficie reale, o che, quando ne rappresenti più, si tenga conto soltanto delle superficie della stessa specie nel passare dall'uno all'altro valore di c.

3. Si è più sopra dimostrato (370) che se il trinomio

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

è un differenziale completo ($= du$), siccome accade nel caso delle forze naturali, le tre quantità « *pressione, densità e temperatura* » debbono esser costanti insieme e variare insieme nell'interno del fluido in equilibrio. Dunque, ogni volta che si verifichi l'anzidetta condizione, in ciascuna superficie di livello dovrà esser costante insieme colla pressione la densità e la temperatura.

373. Prop. II. *In un fluido equilibrato se le forze sollecitanti F sono tutte dirette verso un punto fisso, le superficie di livello saranno superficie di sfere che avranno in comune il centro nel punto fisso.*

Dim. Si prenda il punto fisso a cui sono dirette le forze sollecitanti F, per origine di tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz, e sia f la retta che dal punto O va al punto (x, y, z) delle superficie di livello, e che quivi rappresenterà la direzione della forza F. Sarà

$$x^2 + y^2 + z^2 = f^2,$$

da cui differenziando si trae

$$xdx + ydy + zdz = fdf.$$

Ma essendo $df = 0$ a cagione dell'equazione delle superficie di livello $(Fdf = 0)$, cotesta equazione si riduce alla

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

ed integrata si converte nella

$$x^2 + y^2 + z^2 = costante,$$

che rappresenta una superficie qualunque di livello, e mostra che tutte sono superficie di sfere concentriche intorno al punto fisso O a cui sono dirette le forze sollecitanti F.

Scolio I. Tale è il caso de' fluidi le cui malecole *gravitano* verso il centro del nostro globo. Nondimeno, a cagione della gran lunghezza del raggio terrestre, le direzioni della gravità per un dato luogo della terra si riguardano come parallele, e per conseguente le superficie di livello come *piani orizzontali.*

Scolio II. Si noti ancora che la nostra atmosfera, considerata nella sua totalità, non può trovarsi mai in una calma perfetta. Imperocchè, messe da parte tutte le altre cause, la sola presenza del sole fa sì che la temperatura non possa risultare uguale (come pur dovrebbe accadere (372) nel caso di equilibrio) in tutti i punti situati ad egual distanza dal centro della terra, ossia in una medesima superficie di livello.

CAPO IV. *Condizione dell' equilibrio de' fluidi quando si trovano allo stato di moto uniforme di rotazione, e loro superficie di livello. Rotazione uniforme di un cilindro pieno in parte di un fluido grave.*

374. Quando un fluido, ridotto a figura permanente ed invariabile, trovasi in istato di moto uniforme sia di traslazione in linea retta, sia di rotazione intorno ad un asse fisso, le diverse forze continue che agiscono sul fluido debbono equilibrarsi tra loro; perchè queste forze soddisfanno alla condizione per cui si definisce l' equilibrio, di non punto alterare lo stato del corpo sia di quiete, sia di moto.

Nella rotazione di un fluido intorno ad un asse fisso le forze sollecitanti le particelle fluide sono di due specie: 1°. quelle chiamate *centrifughe*, che nascono, crescono, diminuiscono e cessano colla rotazione medesima; 2°. e quelle chiamate *acceleratrici*, che non cessano mai di agire sul fluido in qualunque stato si trovi, come le forze della gravità.

375. Problema. *Determinare le condizioni dell' equilibrio di un fluido dopo che, girando con moto uniforme intorno ad un asse fisso, ha preso una figura permanente ed invariabile, ossia tale che i suoi punti materiali non si spostino più gli uni rispetto agli altri.*

Soluzione. Immaginiamo coordinati in O tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz così che Oz sia l' asse fisso di rotazione, e cerchiamo le condizioni dell' equilibrio di una molecola dm situata nel punto (x, y, z), e descrivente intorno ad Oz un circolo del raggio r. Le proiezioni di questo raggio r sugli assi Ox, Oy, Oz, essendo x, y, z, sarà

$$cos.(xr) = \frac{x}{r}, \quad cos.(yr) = \frac{y}{r}, \quad cos.(zr) = 0;$$

e quando dal circolo

$$r^2 = x^2 + y^2$$

si voglia passare ad un altro circolo infinitamente vicino di raggio $r + dr$, avremo differenziando

$$rdr = xdx + ydy.$$

Sia θ la velocità uniforme di rotazione. La malecola dm, oltre di essere sottomessa alle forze accelematrici P, Q, R, sarà animata dalla forza centrifuga $\frac{r^2\theta^2}{r} = r\theta^2$, e questa essendo diretta secondo il raggio r si decompone nelle due

$$r\theta^2 . cos. (xr) = x\theta^2 , \quad r\theta^2 . cos. (yr) = y\theta^2 .$$

La molecola dm è adunque in equilibrio sotto l'azione della pressione idrostatica p, e delle tre forze sollecitanti

$$P + x\theta^2 , \quad Q + y\theta^2 , \quad R.$$

Applicando ad essa l'equazione (A) dell'equilibrio de' fluidi, si ottiene

$$\begin{aligned} dp &= q[(P + x\theta^2)dx + (Q + y\theta^2)dy + Rdz] \\ &= q[(Pdx + Qdy + Rdz) + \theta^2(xdx + ydy)] \\ &= q(Fdf + \theta^2 rdr) . \end{aligned}$$

Per aver l'equazione delle superficie di livello, basta integrare l'una o l'altra delle due seguenti

$$Pdx + Qdy + Rdz + \theta^2(xdx + ydy) = 0 ,$$

$$Fdf + \theta^2 rdr = 0.$$

376. *Applicazione ai fluidi gravi.* Se il fluido sia grave ed omogeneo, e l'asse Oz di rotazione sia *verticale*, diretto di basso in alto ossia in senso contrario della gravità g, converrà fare

$$F = -g , \quad df = dz ,$$

e le due equazioni

$$Fdf + \theta^2 rdr = 0, \quad dp = q(Fdf + \theta^2 rdr),$$

si ridurranno alle

$$rdr = \frac{g}{\theta^2}\, dz, \quad dp = q\,(\theta^2 rdr - gdz);$$

che integrate daranno

$$r^2 = \frac{2g}{\theta^2}\,(z - c), \; p = q\left(\frac{\theta^2}{2} r^2 - gz\right) + c',$$

dove c e c' sono le constanti dell' integrazione. Esse possono mettersi sotto la forma

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = \frac{2g}{\theta^2}(z - c),$$

$$(2) \qquad p = c' - gqc.$$

La prima di quest' equazioni, ove si diano diversi valori c_1, c_2 etc. alla costante arbitraria c, rappresenta una serie di superficie paraboliche, eguali tra loro, generate dalla rotazione intorno ad Oz delle parabole $r^2 = \frac{2g}{\theta^2}(z - c_1)$, $r^2 = \frac{2g}{\theta^2}(z - c_2)$, etc, le quali si possono considerare come una medesima parabola che si muove parallelamente a sè, portando il vertice alle altezze $z = c_1$, $z = c_2$ etc.

Possiamo adunque stabilire che: *Quando un fluido grave gira con moto uniforme θ intorno ad un asse verticale Oz, le superficie di livello sono quelle di paraboloidi di rivoluzione, eguali tra loro e simmetriche intorno al detto asse.*

La seconda dell' equazioni (1) e (2) darà il valore della pressione p in ogni superficie di livello, allorchè sia stata determinata la costante c'. Così se si tratti di un liquido, e sia P il valore della pressione p nella superficie esterna corrispondente (fig. 83) al valore Oc di c, sarà

$$P = c' - gq.Oc, \quad \text{donde} \quad c' = P + gq.Oc,$$

e per conseguenza la (2) diverrà

$$(2)_1 \qquad p = P + gq\,(Oc - c).$$

Quanto all' altezza Oc, si potrà facilmente determinare allorchè sia dato il volume del liquido e la figura del vaso che lo contiene.

Esempio. Fingiamo che il vaso sia un cilindro di cui il raggio della base sia $OA = a$ (fig. 82), e che il liquido nello stato di riposo segni l' altezza $Ah = h$, e nello stato di rotazione segni sulla parete l' altezza Aa (fig. 83.) e nel mezzo l' altezza Oc. Il volume V del liquido, nel passare dallo stato di riposo (fig. 82.) allo stato di moto (fig. 83), non fa che cangiare di forma conservando la stessa grandezza. Nel primo stato è uguale ad un cilindro di base $= a^2\pi$, e di altezza $= h$, e però

$$V = a^2\pi.h\ .$$

Nel secondo stato il volume V si ottiene evidentemente sottraendo dal cilindro $a^2\pi.Aa$ la parte acb (*fig.* 83) che è rappresentata dall' integrale

$$\int r^2\pi.dz\ ,$$

ovvero, a causa di $dz = \frac{\theta^2}{g}.rdr$, dall' integrale

$$\frac{\theta^2\pi}{g}\int r^3 dr\ ,$$

estendendo l' integrazione da $r = 0$ sino ad $r = a$. Nel secondo stato di V si avrà quindi

$$V = a^2\pi.Aa - \frac{\theta^2\pi}{g}\int_0^a r^3\,dr = a^2\pi.Aa - \frac{\theta^2\pi}{4g}.a^4,$$

ed in conclusione

$$V = a^2\pi\left(Aa - \frac{\theta^2}{4g}.a^2\right).$$

Eguagliando le due espressioni di V, si ricava

$$Aa = h + \frac{\theta^2}{4g}.a^2.$$

Il valore di Oc si avrà dall' equazione $r = \frac{2g}{\theta^2}(z - c)$ ponendovi $r = a$, $z = Aa$, $c = Oc$, e si troverà

$$Oc = h - \frac{\theta^2}{4g} . a^2 .$$

Questi valori di Aa e di Oc fanno palese che quando il liquido, partitosi dalla quiete e postosi a girare, è pervenuto alla sua nuova posizion di equilibrio, il punto della superficie libera che era sull' asse Oz di rotazione si sarà abbassato di tanto, di quanto i punti in contatto col cilindro si saranno elevati.

CAPO. V. *A qual sistema di forze equivale il sistema delle pressioni di un fluido contro la superficie di un corpo immerso? Formole di relazione tra queste pressioni e le forze sollecitanti il fluido rimosso dal corpo.*

377. Prop. *Essendo un corpo immerso dentro un fluido in equilibrio, il sistema delle pressioni del fluido contro la superficie del corpo è uguale ed opposto al sistema delle forze sollecitanti le molecole della massa fluida rimossa dal corpo;* ond' è che, *se l'uno de' due sistemi si riduce ad una forza unica, anche l' altro dovrà ridursi ad una forza unica, eguale ed opposta alla prima.*

Dim. Le pressioni del fluido contro la superficie del corpo immerso rimangono evidentemente le medesime comunque varii la costituzione interna del corpo, e per conseguente rimangono le medesime anche nel caso che il corpo immerso venga costituito da una porzione del fluido stesso divenuta solida senza turbar l' equilibrio. Ma in questa supposizione, il solido (nato così dal fluido) conservandosi nel riposo in cui era dapprima, è manifesto che le diverse forze che agiscono su di esso debbono equilibrarsi tra loro, ed è manifesto ancora che queste forze consistono nel sistema delle pressioni contro la superficie di tal solido, e nel sistema delle forze che sollecitano le sue molecole. Or quando due sistemi di forze si equilibrano, l' uno si dice uguale ed opposto all'altro.

378. *Coroll.* Sia dS un elemento della superficie S del corpo immerso; x, y, z le coordinate del centro di gravità di dS, e p la pressione idrostatica corrispondente. Per l'equivalenza de' sopraddetti due sistemi di forze sussisteranno le sei equazioni (*Mecc.* 85)

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma p \cos.(xp) dS = - \Sigma P dm \,,\\ \Sigma p \cos.(yp) dS = - \Sigma Q\, dm \,,\\ \Sigma p \cos.(zp) dS = - \Sigma R dm \,;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma[y \cos.(zp) - z \cos.(yp)] p dS = - \Sigma(Ry - Qz) dm \,,\\ \Sigma[z \cos.(xp) - x \cos.(zp)] p dS = - \Sigma(Pz - Rx) dm \,,\\ \Sigma[x \cos.(yp) - y \cos.(xp)] p dS = - \Sigma(Qx - Py) dm \,;\end{array}\right.$$

dov' è da notare che il simbolo Σ si estende ne' primi membri a tutti gli elementi dS della superficie del corpo immerso, e ne' secondi membri si estende a tutte le molecole dm della massa fluida rimossa dal corpo, essendovi x, y, z le coordinate del centro di gravità della molecola dm

SEZIONE II.

DELL' EQUILIBRIO DE' FLUIDI GRAVI, SIA LIQUIDI, SIA AERIFORMI.

CAPO I. *L'azion della gravità, dentro i limiti delle distanze ordinarie, si può riguardare come costante nella direzione e nella intensità.*

379. La forza della gravità sopra un punto materiale, preso fuori del globo terrestre, varia in ragion inversa del quadrato della distanza tra lo stesso punto ed il centro della terra. Quindi se g ed F rappresentano le azioni della gravità su quel punto situato successivamente alle distanze r ed $r + z$ dal centro della terra, si avrà

$$F.(r + z)^2 = g.r^2$$

essendochè, *se due quantità variano in ragione inversa l'una dell' altra* (quali appunto sono F ed $(s+z)^2$) *il loro prodotto si conserva costante (App. 72. coroll.).*

Dall' equazion che precede si ricava:

$$F = g\,\frac{r^2}{(r+z)^2} = g\,\frac{1}{\left(1+\frac{z}{r}\right)^2}.$$

Supponiamo che r sia il raggio terrestre, e z un'altezza ordinaria e però piccolissima a fronte di r; la frazione $\frac{z}{r}$ sarà trascurabile, ed in questa supposizione avremo:

$$F = g,$$

vale a dire: *L' azion della gravità, dentro i limiti delle distanze ordinarie, si può riguardar come costante non solo nella direzione ma eziandìo nella intensità.*

CAPO II. *Le pressioni di un fluido grave contro la superficie di un corpo immerso equivalgono ad una forza unica, che consiste in una spinta continua all' insù: valore e punto di applicazione di questa forza. Principio idrostatico di Archimede. Condizioni relative all' equilibrio di un corpo immerso, e all' equilibrio di liquidi riposanti l' uno sull' altro.*

380. Prop. I. *Essendo un corpo immerso in un fluido grave ed in equilibrio, il sistema delle pressioni del fluido contro la superficie del corpo equivale ad una spinta continua all' insù, eguale in valore al peso della massa fluida rimossa dal corpo, ed il punto di applicazione di tale spinta può supporsi quello che fa il centro di gravità di esso fluido rimosso.*

Dim. Per ciò che si è dimostrato superiormente, il sistema delle pressioni è uguale ed opposto al sistema delle forze di gravità della massa fluida rimossa dal corpo. Or questo sistema di forze parallele equivale ad una forza unica applicata al centro di gravità di tal massa, e che ne rappresenta il peso.

Da questo teorema discende come corollario immediato il *principio idrostatico di Archimede*, così chiamato dal nome del gran geometra che primo lo scoprì. Esso consiste nella seguente:

381. Prop. II. *Un corpo immerso in un fluido in equilibrio perde una parte del suo peso, eguale al peso del fluido spostato.*

382. Coroll. I. Quindi per conoscere *esattamente* il peso di un corpo, conviene o pesarlo nel vuoto, o se si pesa nell'aria od in altro fluido, conviene aggiungere al peso così ottenuto quello di un egual volume di fluido. Nondimeno quest'ultimo peso si suol trascurare, essendo d'ordinario assai piccolo a fronte del primo.

383. Coroll. II. Per l'equilibrio di un corpo immerso in un fluido si ricercano due condizioni:

1°. *Che il corpo ed il fluido spostato abbiano eguali i loro pesi* P, p.

2°. *E che tengano i loro centri di gravità sopra una stessa linea verticale.*

384. *Coroll.* III. Quando i due centri di gravità cadono sulla stessa linea verticale, ma sono differenti i pesi P, p, il corpo animato da una forza acceleratrice $\left(F = \dfrac{P - p}{M}\right)$ eguale alla differenza de' pesi divisa per la massa M del corpo, prenderà un moto di traslazione verticale, e andrà in basso od in alto secondochè pesa più, o pesa meno del fluido spostato. Se pesa meno, sale a galla del liquido (ove tale sia il fluido) e quivi si solleva e sporge di tanto, di quanto è necessario perchè il suo peso divenga precisamente uguale a quello del liquido spostato.

Quando i pesi sono eguali, ma non in linea verticale i due centri di gravità, il corpo immerso si mette a girare intorno al suo centro di gravità, nè può aver posa fino a che questo centro ed il centro di gravità del fluido non cadono sulla stessa verticale.

Finalmente, quando avvenga che nè i due centri di gravità cadano in linea verticale, nè i due pesi P, p siano eguali, il corpo prenderà un moto composto di traslazione e di rotazione.

385. *Coroll.* IV. In generale: un corpo immerso in un fluido, secondochè ha densità minore o maggiore del fluido, andrà in alto od in basso. Così vediamo salire nell'aria il fumo e i vapori, e cadere la pioggia, la neve etc.; venire a galla sull'acqua i corpi *leggeri* (o men densi dell'acqua), ed affondarsi i pesanti.

386. Prop. III. *Quando due liquidi di diversa densità* (come acqua ed olio) *riposano l'uno sull'altro, la superficie che li separa sarà una sezione orizzontale, ed il loro equilibrio sarà stabile od instabile secondochè il liquido che sovrasta è il più leggero, od il più denso.*

Dim. 1°. Se in ogni superficie di livello (e tale è ogni sezione orizzontale) dev'esser costante la densità insieme colla pressione, la superficie di separazione de' due fluidi non può non essere una sezione orizzontale, senza di che si potrebbe segnare una superficie di livello in cui fosse ineguale la densità.

2°. Supponiamo che l'equilibrio per lieve scossa si turbi, cosicchè alcune particelle del liquido superiore s'intromettano e scendano nell'inferiore. Se il liquido disceso è il men denso, sarà subito respinto indietro (384), ed in breve si ricomporrà l'equilibrio. Ma se il liquido disceso sia il più denso, continuerà a discendere mentre salirà il più leggero, nè cesseranno i moti contrarii tra le particelle de' due liquidi, finchè il liquido più leggero non sia tutto salito a galleggiar sul più denso.

CAPO III. *Delle diverse stazioni di equilibrio di un galleggiante. Esempio di un prisma a base triangolare.*

387. Problema. *Determinare in un galleggiante a quali condizioni dee soddisfare la* **sezione a fior d'acqua.**

Soluzione. Un corpo di volume V e di gravità specifica G galleggi equilibrato sopra un liquido di gravità specifica G_1, tenendo immersa la parte V_1 del suo volume. Il peso del corpo ($= VG$) dovendo essere uguale al peso del fluido spostato ($= V_1G_1$), la *sezione a fior d'acqua* dividerà il volume del corpo così che ne risulti (383).

$$VG = V_1 G_1 .$$

Inoltre la retta che unisce i centri di gravità del corpo e del fluido spostato, dovendo essere verticale, sarà *perpendicolare alla sezione a fior d'acqua.*

Dunque per determinare le *stazioni di equilibrio di un galleggiante* sulla superficie di un dato liquido, conviene ricercare nel corpo tutte le sezioni piane che soddisfacciano alle due seguenti condizioni:

1°. Che il prodotto del volume di tutto il corpo per la sua gravità specifica sia eguale al volume della parte immersa moltiplicato per la gravità specifica del liquido ($G V = G_1 V_1$);

2°. E che la retta che unisce i centri di gravità della parte immersa e del volume intero, risulti perpendicolare alla sezione a fior d'acqua.

Per ben intendere l'uso di questa regola, applichiamola al seguente:

388. Esempio. *Un prisma retto, di base triangolare ABC, galleggia sull'acqua tenendo gli spigoli stesi orizzontalmente. Determinare la sezione a fior d'acqua.*

Soluzione. Osserviamo dapprima che la lunghezza del prisma non può avere alcuna influenza sulla stazione di equilibrio, e che ogni piano parallelo agli spigoli divide il volume nella medesima ragione in che divide la base. Possiamo dunque limitarci a considerare la base ABC (fig. 84) in ciascuno de' due casi in cui essa si può trovare, o di un solo vertice sott'acqua, o di due vertici.

1°. Sia C il vertice immerso, xy la linea a fior d'acqua, f ed m i punti di mezzo di AB e di xy; a, b, c, i tre lati opposti agli angoli A, B, C; e poniamo

$$Cf = f, \quad Cx = x, \quad Cy = y.$$

Indicando per V e V_1 le aree de' due triangoli ABC, xCy, sarà

$$V = \frac{ab}{2} sen.(ab), \quad V_1 = \frac{xy}{2} sen.(ab),$$

e la prima condizione dell'equilibrio del prisma ($VG = V_1G_1$), ove si faccia $r = \frac{G}{G_1}$, produce

$$(1) \qquad x.y = ab.r.$$

Per la seconda condizione, la retta fm (la quale è parallela a quella che passa per i centri di gravità de' due triangli ABC, xCy, e però anche del quadrilatero $ABxy$) dee risultare perpendicolare alla sezione a fior d'acqua xy; e ciò richiede che il punto f sia equidistante dai due punti x ed y ($fx = fy$). Ma

$$\overline{fx}^2 = f^2 + x^2 - 2fx\cos.(af),$$
$$\overline{fy}^2 = f^2 + y^2 - 2fy\cos.(fb).$$

Dal paragone di queste quantità eguali si deduce

$$(2) \qquad x^2 - y^2 - 2f[x\cos.(af) - y\cos.(fb)] = 0,$$

la quale, se si sostituisce $y = \frac{rab}{x}$, si converte nella

$$(3) \qquad x^4 - 2fx^3\cos.(af) + 2\,x.abrf\cos.(fb) - a^2b^2r^2 = 0.$$

Quest' equazione, essendo di grado pari e coll' ultimo termine negativo, avrà certamente due radici reali, l' una positiva, e l' altra negativa che non si riferisce alla nostra questione. Se le altre due radici fossero reali, la regola cartesiana de' segni mostra che debbono esser positive.

Le stazioni adunque di equilibrio, allorchè rimane sott' acqua un solo vertice C del triangolo ABC, sono tre, tutto al più; e ciò avrà luogo realmente se il maggiore de' tre valori reali di x risulti minore di a, ed il maggiore de' valori di y minore di b.

2°. Allorchè stanno sott' acqua i due vertici A e B, la parte immersa V_1 sarà il quadrilatero $ABxy[= V - \frac{yx}{2} sen.(ab)]$, vale a dire sarà

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\,(ab - xy)\; sen.(ab),$$

e dalla prima condizion dell' equilibrio ($VG = V_1G_1$) si raccoglierà

$$(1)' \qquad xy = (1 - r)ab\ .$$

La seconda condizion dell' equilibrio si riduce evidentemente alla (2). Se adunque nella (3) si muta r in $(1 - r)$, avremo l' equazione in x relativa al nuovo caso:

$$(3)' \quad x^4 - 2x^3 f cos.(af) + 2x(1 - r)\,abf cos.(fb) - a^2b^2(1 - r)^2 = 0.$$

Corollario. Sia $a = b$, vale a dire il triangolo ABC sia isoscele. Sarà

$$cos.(af) = cos.(fb) = \frac{f}{a}, \quad f^2 = a^2 - \frac{c^2}{4},$$

e l' equazioni (1) e (2) diventano

$$xy = a^2 r,$$

$$x^2 - y^2 - \frac{2f^2}{a}(x - y) = (x - y)\left[x + y - \frac{2f^2}{a}\right] = 0\,.$$

Si ha dapprima la soluzione

$$x = y = a\sqrt{r},$$

e sopprimendo il fattore $(x - y)$ nella seconda equazione, restano a trovare le soluzioni delle due seguenti

$$xy = a^2 r\,, \quad x + y = \frac{2f^2}{a}$$

Di qui si vede che i valori di x ed y sono le due radici dell' equazione

$$x^2 - \frac{2f^2}{a}\,x + a^2 r = 0,$$

cioè sono $= \dfrac{f^2}{a} + \sqrt{\left(\dfrac{f^4}{a^2} - ra^2\right)}$.

Per la realità delle due corrispondenti stazioni di equilibrio dovendo queste due radici risultare non solo reali ma la maggiore di esse minore di a, sarà necessario che il valore di r sia tale che soddisfaccia alle due condizioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{f^4}{a^2} - ra^2 > 0\,, \quad \text{donde } r < \frac{f^4}{a^4}\,, \\ &\frac{f^2}{a} + \sqrt{\left(\frac{f^4}{a^2} - ra^2\right)} < a\,, \quad \text{donde } r > \frac{2f^2}{a^2} - 1\,, \end{aligned}\right.$$

vale a dire: il valore di r (rapporto della gravità specifica G del corpo a quella G_1 del liquido) dovrà esser compreso tra i limiti

$$\frac{f^4}{a^4} > r > \frac{2f^2}{a^2} - 1\,,$$

Il caso in cui sono immersi i due vertici A, B, si riduce al precedente sol che si cangi r in $(1 - r)$, e si trova che, oltre la stazione di equilibrio determinata dalla relazione

$$x \pm y = a\sqrt{(1 - r)}\,,$$

ve ne sono due altre determinate dall' equazioni

$$x = \frac{f^2}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{f^4}{a^2} - (1 - r)\,a^2\right)},$$

per la cui realità si richiede che il valore di r sia contenuto tra i limiti

$$1-\frac{f^4}{a^4}<r<2\left(1-\frac{f^2}{a^2}\right).$$

Per esempio, se il triangolo ACB sia equilatero, e però $f^2=\frac{3}{4}a^2$, nel primo caso dovrà verificarsi la relazione:

$$\frac{9}{16}>r>\frac{1}{2};$$

e nel secondo caso la relazione

$$\frac{7}{16}<r<\frac{1}{2}.$$

È chiaro che quando è soddisfatta la prima relazione, nol sarà la seconda, e viceversa.

CAPO IV. *Formola generale dell' equilibrio de' fluidi gravi tanto liquidi che aeriformi.*

389. Quando la forza F onde sono animate le molecole di un fluido è l' azion costante g della gravità, allora, se le *profondità* e le *altezze* s' intendano misurate sopra un asse verticale z, l'equazion generale dell' equilibrio de' fluidi

$$dp = qFdf$$

assume la forma semplicissima

$$dp = \pm gqdz \tag{B}$$

essendo $df = dz$, ed $F = \pm g$ secondochè l' asse z si conta *positivo* nel verso della gravità od in verso contrario.

Le applicazioni principali di questa formola saranno divise in due articoli, l' uno relativo ai liquidi e l'altro ai fluidi aeriformi.

ARTICOLO I.

Leggi della pressione idrostatica nell' equilibrio de' liquidi.

CAPO I. *Legge onde varia in un medesimo liquido la pressione idrostatica da punto a punto. Pressione a diverse profondità quando più liquidi riposano gli uni sugli altri. Altezze di livello ne' rami di un sifone pieno in parte sia di un solo liquido, sia di due liquidi diversi.*

N. B. Si chiama *profondità* di un punto M, nell' interno di un liquido, la distanza z di esso punto dalla superficie esterna del liquido, la quale si dice per antonomasia *superficie di livello*, o *piano di livello*, ed anche più semplicemente *livello*. Il liquido supponendosi incompressibile sotto le pressioni ordinarie, la sua densità q si ritiene come costante a diverse profondità.

390. Prop. I. *Per entro a un liquido omogeneo, l'aumento della pressione idrostatica, a partire dal piano di livello, segue la ragion diretta della profondità, cosicchè*, nel passare da un punto all' altro, *la variazione della pressione è proporzionale alla variazione della profondità.*

Dim. Il piano di livello sia gravato da una data pressione $= p_0$ (come sarebbe quella dell' atmosfera). La pressione idrostatica p corrispondente alla profondità z, si ricava dall' integrar l'equazione $dp = gq\,dz$ in modo che a $z = o$ corrisponda $p = p_0$, e si ottiene subito la seguente:

$$(1) \qquad p - p_0 = gqz,$$

la quale esprime appunto che l' aumento della pressione idrostatica, quando dal piano di livello si passa alla profondità z, è proporzionale a z.

391. *Scolio.* Qualunque sia la causa che produce la pressione idrostatica p_0 sul piano di livello, questa pressione si può sempre concepir sostituita da un'altra pressione uguale

$$p_0 = gqh$$

prodotta dalla sovrapposizione di una colonna dello stesso liquido dell'altezza h.

In appresso noi faremo i calcoli nella supposizione che sia nulla la pressione esterna p_0, ed invece della (1) scriveremo semplicemente

$$(C) \qquad p = gqz \;;$$

e ciò tanto più che, se negli ultimi risultati si vuol tener conto della stessa pressione, non si dee far altro che scrivere $(z + h)$ invece di z, essendo h l'altezza della colonna liquida da sovrapporsi al piano di livello per produrre la pressione esterna $= p_0$.

392. Prop. II. *Riposino gli uni sugli altri più liquidi: siano h, h', h'' etc. le altezze de' successivi strati fluidi cominciando dal supremo livello; q, q', q'' etc. le loro densità. La pressione p in un punto posto nello strato $q^{(m)}$ alla profondità y sotto il livello di esso strato, sarà espressa così:*

$$p = g(qh + q'h' + q''h'' \ldots + q^{(m)}y).$$

Dim. Per la proprietà che hanno i fluidi di trasmetter la pressione per ogni verso, è chiaro che la pressione di ogni strato si trasmette a tutti gli strati inferiori, e che per conseguente la pressione sul piano di livello di ogni strato è uguale alla somma delle pressioni di tutti gli strati sovrapposti. Per entro poi ad ogni strato l'aumento di pressione è proporzionale alla profondità sotto il livello di esso strato (390).

393. Prop. III. *Un liquido omogeneo, stagnante in un sifone, si libra allo stesso livello ne' due rami del sifone.*

Dim. Per l'equilibrio del liquido nella parte infima del sifone, si richiede che le pressioni idrostatiche, provenienti dalle colonne liquide de' due rami, si combattano ivi con egual forza; e ciò non può avvenire se quelle due colonne non sorgano ad eguale altezza.

394. Prop. IV. *Equilibrandosi in un sifone due liquidi diversi, le altezze h, h' de' loro livelli sopra la sezion comune sono in ragion reciproca delle loro densità q, q';* vale a dire *si ha $qh = q'h'$.*

Dim. Le pressioni idrostatiche de' due liquidi nella sezion comune sono espresse rigorosamente da (390) $p_0 + gqh$, $p_0 + gq'h'$ (p_0 denota la pressione dell'aria). Or queste pressioni facendosi equilibrio debbono essere uguali, e perciò dee risultare $qh = q'h'$.

CAPO II. *Pressione idrostatica ne' diversi punti di un piano, espressa in funzione delle loro coordinate x, y. Risultante di tutte le pressioni elementari sul piano, e suo punto di applicazione chiamato* centro di pressione. *Esempii.*

395. Prop. I. *In un piano S premuto da un liquido, esprimere la pressione idrostatica relativa ad un punto qualunque M del piano, per le coordinate x, y di questo punto.*

Risposta. Siano coordinati nel piano S sotto un angolo arbitrario i due assi Ox, Oy (fig. 85); l sia la profondità del punto O sotto il livello AB del liquido, e z la profondità del punto $M(x, y)$.

Le pressioni idrostatiche ne' punti O ed M saranno gql, gqz; ed il valore di z si avrà dalla formola

$$(1) \qquad z = l + mx + ny ,$$

dove $$m = cos.(zx), \qquad n = cos.(zy) .$$

Dim. Pel punto O conduciamo l'asse verticale Oz che incontri in C il piano di livello AB, ed m rappresenti sopra Oz la proiezione del punto M: sarà $CO = l$. La proiezione della retta OM sull'asse Oz dovendo essere uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle sue componenti, cioè delle coordinate x, y, avremo

$$Om = x\,cos.(zx) + y\,cos.(zy) = mx + ny .$$

Ma è chiaro che la profondità z del punto M sotto il livello AB è

$$Cm = CO + Om = l + Om ;$$

Dunque, sostituendo,

$$z = l + mx + ny .$$

396. *Coroll.* Pel punto O s'immagini condotto un piano parallelo all'orizzonte: questo piano inciderà nel piano S una retta orizzontale. Se questa retta si prende per Oy, sarà

$$n = \cos(zy) = 0, \text{ e quindi } z = l + mx.$$

N. B. Allorchè in appresso si dirà *piano S premuto da un liquido*, per S s'intenda l'area piana su cui si applica la pressione del liquido.

397. Prop. II. *Se un piano S è premuto da un liquido, la risultante P delle pressioni elementari è uguale, nella intensità, al peso di una colonna dello stesso liquido che avesse la base e l'altezza eguali rispettivamente al piano premuto S ed alla profondità Z del centro di gravità di S sotto il livello del liquido;* vale a dire: $P = gqSZ$.

Dim. Si concepisca decomposta la superficie S in elementi dS infinitesimi per ogni verso, onde sia

$$S = \Sigma\, dS.$$

La pressione del liquido contro un elemento qualunque dS situato alla profondità z, sarà espressa da

$$p\,dS = gqz\,dS.$$

Ora tutte queste pressioni elementari pdS, essendo perpendicolari al piano premuto S, formano un sistema di forze parallele che si compongono in una forza unica P eguale alla somma delle componenti. Avremo dunque

$$P = \Sigma\, pdS = gq\, \Sigma\, zdS.$$

Qui il termine ΣzdS contiene in sè tutte le parti della superficie S moltiplicate rispettivamente per la loro distanza z dal piano di livello AB, e questi prodotti $z\,dS$ si dicono i *momenti di esse parti rispetto al piano AB.* Ma la Meccanica insegna che la somma de' momenti delle parti di un tutto è sempre uguale al momento del tutto, eguaglianza che nel nostro caso è espressa da $SZ = \Sigma zdS$. Dunque è certo che la risultante delle pressioni elementari pdS è $= gq\,SZ$.

398. *Coroll.* Per questa proposizione, s'intende come una sottile colonna fluida dilatandosi in ampia falda sopra una base molto estesa possa esercitare un'enorme pressione, di gran lunga superiore al suo peso; e si spiegano i maravigliosi effetti del mantice idrostatico.

399. Prop. III. *In un piano S premuto da un liquido in equilibrio, determinare il* **centro di pressione**, vale a dire *il punto di applicazione della risultante P di tutte le pressioni elementari pdS*.

Risposta. Sono a distinguere due casi, secondochè il piano S è *parallelo* od *obliquo* all' orizzonte.

I. Se il piano premuto è *orizzontale*, il centro di pressione si confonde col centro di gravità del piano. Imperocchè il centro di gravità di un' area è precisamente, in virtù della sua definizione, il punto di applicazione della risultante di un sistema di forze parallele che agiscano in ogni punto dell' area con eguale intensità. Tali sono le forze della gravitazion terrestre, e tali nel caso nostro sono le pressioni idrostatiche.

II. Se il piano premuto dal liquido è *obliquo all'orizzonte*, il centro (α, β) di pressione è determinato dalle coordinate

$$(a) \qquad \alpha = \frac{\Sigma xzdS}{\Sigma zdS}, \quad \beta = \frac{\Sigma yzdS}{\Sigma zdS},$$

e cade al di sotto del centro di gravità del piano S.

Qui x, y sono le coordinate, nel piano S, dell'elemento dS infinitesimo per ogni verso, e $z = l + mx + ny$ è la sua profondità.

Dimostrazione. 1°. Le pressioni elementari pdS, e la loro risultante P, essendo forze parallele che hanno i punti di applicazione sul piano S, possiamo prenderne i momenti rispetto agli assi Ox, Oy, coordinati nello stesso piano. I momenti di queste forze rispetto all' asse Oy sono $xpdS$, αP, e rispetto all' asse Ox sono $ypdS$, βP. E poichè il momento della risultante dev' esser uguale alla somma de' momenti omologhi delle componenti, si avranno l' equazioni

$$P\alpha = \Sigma xpdS, \quad P\beta = \Sigma ypdS,$$

dalle quali, sostituendo $P = \Sigma pdS$, e $p = gqz$, si ricavano le proposte (a).

2°. La profondità del centro di pressione sarà

$$z = l + m\alpha + n\beta.$$

Per provare che questa profondità è maggiore di quella del centro di gravità, cerchiamo di ridur tutto allo stato più semplice. Si prenda l'origine O nel centro stesso di gravità, onde l rappresenti la profondità di questo punto, e supponiamo l'asse Oy orizzontale (396). L'angolo (yz) divenendo retto, avremo

$$n = \cos.(yz) = 0, \quad \text{e quindi} \quad z = l + m\alpha .$$

Inoltre, per la proprietà del momento di un tutto relativamente a' momenti omologhi delle parti, sarà

$$\Sigma x dS = 0, \qquad \Sigma z dS = Sl ;$$

con che il valore dell'ascissa α, dato dalla prima delle (a), rimane espresso da

$$\alpha = \frac{\Sigma x(l + mx)dS}{Sl} = \frac{m}{Sl}\Sigma x^2 dS .$$

La profondità del centro di pressione sarà dunque

$$z = l + m\alpha = l + \frac{m^2}{Sl}\Sigma x^2 dS ,$$

evidentemente più grande della profondità l del centro di gravità, essendochè il termine $\frac{m^2}{Sl}\Sigma x^2 dS$ è di sua natura positivo.

400. *Coroll.* I. Se l'area S si concepisce divisa in parallelogrammi infinitesimi dS, di lati dx, dy paralleli agli assi Ox, Oy, talchè sia

$$dS = dxdy \, sen.(xy) ,$$

e se nella (a) si sostituisce al simbolo Σ l'integrale doppio $\iint$, e se di più si noti essere

$$z = l + mx + ny ,$$

si otterranno le seguenti formole generali per *determinare il centro di pressione*:

$$(P) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\iint x(l + mx + ny)dxdy}{\iint (l + mx + ny)dxdy} , \\ \beta &= \frac{\iint y(l + mx + ny)dxdy}{\iint (l + mx + ny)dxdy} , \end{aligned} \right.$$

dove l è la profondità dell'origine O, $m = cos.(xl)$, $n = cos.(yl)$, e l'integrazione si deve estendere a tutti i punti (x, y) dell'area S sopra cui si esercita la pressione del liquido.

401. *Coroll.* II. Supponiamo che nell'area S si possano coordinare due assi Ox, Oy in modo che l'asse Ox divida per metà tutte le corde tirate in S parallelamente ad Oy (ciò che avviene nel trapezio e nelle sezioni coniche), ed eseguiamo nelle formole (P) l'integrazione rispetto ad y tra i limiti eguali ed opposti y e $-y$, rappresentanti le ordinate del contorno di S. Le (P) si muteranno nelle

$$(P)_1 \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\int x(l + mx)\, y\, dx}{\int (l + mx)\, y dx}, \\ \beta &= \frac{n \int y^3 dx}{3 \int (l + mx)\, y dx}; \end{aligned} \right.$$

e queste, se si denota per h il segmento AO dell'asse Ox (fig. 85) compreso tra O e il piano di livello, onde sia

$$l = h\, cos.(xl) = mh,$$

diventano

$$(P)' \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\int x(h + x)\, y dx}{\int (h + x) y dx}, \quad \text{donde} \quad h + \alpha = \frac{\int (h + x)^2\, y dx}{\int (h + x) y dx}, \\ \beta &= \frac{n}{3m} \cdot \frac{\int y^3 dx}{\int (h + x) y dx}. \end{aligned} \right.$$

Se di più le corde $2y$ fossero *orizzontali*, sarebbe $n = 0$, $\beta = 0$, vale a dire il centro di pressione cadrebbe sull'asse Ox, e per determinarlo basterebbe la sola ascissa α.

402. Esempio I. Il piano S sia un **triangolo**, e l'asse Ox parta da uno O de' suoi vertici e vada al mezzo dell' opposto lato $2b$. Sia $2y$ una sezione qualunque del triangolo parallela a $2b$ e corrispondente all'ascissa x, ed il lato $2b$ corrisponda all'ascissa $= a$. Sarà (denotando per c un' indeterminata)

$$y = cx, \qquad dy = cdx,$$

ed inoltre

$$b = ca \quad \text{donde} \quad c = \frac{b}{a}.$$

Se ora sostituiamo nella prima delle $(P)'$ $y = cx$, e nella seconda $x = \frac{y}{c}$, ed eseguiamo l'integrazione, otterremo

$$\alpha = \frac{\int_0^a (h + x)\, x^2\, dx}{\int_0^a (h + x) x dx} = \frac{\frac{a^3}{12}(4h + 3a)}{\frac{a^2}{6}(3h + 2a)},$$

$$\beta = \frac{nc\int_0^b y^3 dy}{3m\int_0^b (hc + y) y dy} = \frac{\frac{nc}{4} \cdot b^4}{\frac{3m}{6} b^2 (3hc + 2b)},$$

ossia, riducendo,

$$\alpha = \frac{a}{2} \cdot \frac{4h + 3a}{3h + 2a}, \quad \beta = \frac{n}{2m} \cdot \frac{b^2}{3h + 2a}.$$

Se il *vertice* del triangolo è *a fior d'acqua*, sarà $h = 0$, e quindi

$$\alpha = \frac{3}{4} a, \quad \beta = \frac{n}{4m} \cdot \frac{b^2}{a};$$

Se trovisi *a fior d' acqua il lato* $2b$, sarà $h = -a$, ed inoltre $n = cos.(bl) = 0$ supponendosi orizzontale il lato $2b$. Quindi

$$\alpha = \frac{a}{2}, \quad \beta = 0.$$

Esempio II. Il piano S sia un **parallelogrammo** di lati contigui $2a$, $2b$, e l'asse Ox divida in mezzo i due lati opposti $2b$ partendo dall' uno di essi. Sarà $= y = b$, e l'equazioni $(P)'$ (sostituendo $y = b$ ed integrando) somministrano

$$\alpha = \frac{\int_0^a (h + x) x dx}{\int_0^a (h+x) dx} = \frac{\frac{a^2}{6}(3h + 2a)}{\frac{a}{2}(2h + a)},$$

$$\beta = \frac{nb^2}{3m} \cdot \frac{\int_0^a dx}{\int_0^a (h + x) dx} = \frac{nb^2 . a}{\frac{3m}{2} a(2h + a)};$$

ossia
$$\alpha = \frac{1}{3} a \frac{3h + 2a}{2h + a} \ , \qquad \beta = \frac{2n}{3m} \cdot \frac{b^2}{2h + a} .$$

Se trovisi a *fior d' acqua uno de' lati* $2b$, fatto $h = 0$, $n = 0$, sarà

$$\alpha = \frac{2}{3} a \ , \qquad \beta = 0 .$$

403. Scolio. Quando la superficie premuta non è piana ma curva, le pressioni elementari pdS non sono più parallele, ed il loro sistema non equivarrà in generale ad una forza unica. Affinchè si realizzi una tale equivalenza, richiedesi che rimanga soddisfatta la seguente condizione (Vedi *Mecc.*)

$$LX + MY + NZ = 0 \ ,$$

dove

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \Sigma p \cos.(xp) dS \ , \\ Y &= \Sigma p \cos.(yp) dS \ , \\ Z &= \Sigma p \cos.(zp) dS \ ; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} L &= \Sigma [y \cos.(zp) - z \cos.(yp)] pdS \ , \\ M &= \Sigma [z \cos.(xp) - x \cos.(zp)] pdS \ , \\ N &= \Sigma [x \cos.(yp) - y \cos.(xp)] pdS \ . \end{aligned} \right.$$

La forza P a cui nel supposto caso equivale il sistema delle pressioni elementari pdS, agirà secondo la retta rappresentata dall' equazioni:

$$\frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z} \ ,$$

nelle quali

$$x_1 = \frac{NY - MZ}{P^2} \ , \ y_1 = \frac{LZ - NX}{P^2} \ , \ z_1 = \frac{MX - LY}{P^2} \ .$$

Il punto dove la direzione di questa retta incontra la superficie S, potrà riguardarsi come il centro di pressione di S.

ARTICOLO II.

Dell' equilibrio de' fluidi aeriformi.

CAPO I. Leggi statiche de' fluidi aeriformi. *La* densità *e la* pressione *in qual rapporto variano tra loro quando la* temperatura *è costante? e quando è variabile? E quando, essendo uniforme la temperatura, le altezze crescono in progressione aritmetica? E quando si considerano nel miscuglio di più gas? La proporzione in che sono mescolati più gas varia o no colle altezze?*

404. Prop. I. *La densità di un volume di fluido aeriforme, a temperatura costante, varia in proporzione della prvssione esercitata su di esso, vale a dire tra la pressione p e la densità q* del fluido sussiste la relazione

$$p = kq,$$

dove il *coefficiente k è costante* per un dato grado di temperatura, ma *varia* da grado a grado e da fluido a fluido. Questa *legge* si dice *di Mariotte*, dal nome del celebre Fisico che primo la scoprì per mezzo dell' esperienza.

Scolio. È da notare che quando il fluido è stato compresso, conviene dargli il tempo di perder l'aumento di temperatura acquistato nella compressione e di tornare allo stato di prima. Sotto questa condizione, e fatt' astrazione dalle compressioni di estrema intensità, la legge di Mariotte si suole ammettere per tutti i gas e loro miscugli, ed anche pe' vapori purchè la pressione sia minore di quella che li riduce in liquidi; e ciò non ostante le nuove esperienze di Despretz e di Regnault per le quali sembrerebbe che la legge di Mariotte, si approssimi assai poco alla verità in quanto al gas acido carbonico ed a qualche altro fluido.

405. Prop. II. *In un fluido elastico il rapporto tra la pressione p e la densità q, mentre si conserva costante per un medesimo grado di temperatura, varia così, passando da un grado ad un*

altro, che, se s' indica rispettivamente per k_0, k ciò che esso diventa per le temperature di gradi zero e di gradi θ, sarà

$$k = k_0 (1 + \alpha\theta),$$

dove $\alpha = 0{,}00336$ è il *coefficiente della dilatazione* del fluido per ogni grado del termometro centigrado.

Dim. Dalla relazione $p = k_0 q$, che sussiste alla temperatura zero, si trae

$$q = \frac{p}{k_0}.$$

Ora la densità di un corpo omogeneo essendo uguale alla massa del corpo divisa pel volume, niente impedisce che il quoziente $\frac{p}{k_0}$ che dà la densità q, sia riguardato come rappresentante col numeratore *una massa p di fluido compresa sotto un volume espresso dal denominatore k_0*. Ciò posto, se per ogni grado di temperatura il volume k_0 cresce di αk_0, per θ gradi crescerà di $\theta . \alpha k_0$, e la massa fluida p sarà compresa, non più sotto il volume k_0, ma sotto il volume

$$k_0 + \theta\alpha k_0 = k_0 (1 + \alpha\theta);$$

talchè la nuova densità q del fluido alla temperatura θ, rimanendo costante la pressione p, sarà espressa da

$$q = \frac{p}{k_0(1 + \alpha\theta)},$$

donde

$$p = k_0(1 + \alpha\theta).q.$$

Dunque, nell' equazione $p = kq$ relativa alla temperatura θ, si ha $k = k_0(1 + \alpha\theta)$.

406. Scolio. Il coefficiente

$$\alpha = 0{,}00336$$

è a un dipresso il medesimo per tutti i gas, non che pe' vapori. Nondimeno, siccome il vapore diffuso nell' aria divien più abbondante crescendo la temperatura, ed è (sotto un' egual pressione) men denso dell'aria, così quando la temperatura s' inalza, la densità dell' aria dee diminuire un po' più rapidamente di quello che venga indicato dal valore attribuito al coefficiente α. Nell' altimetria barometrica si ha riguardo a questa circostanza, accrescendo alquanto siffatto valore, e d' ordinario si fa

$$\alpha = 0{,}004 = \frac{4}{1000} .$$

407. Corollario. L' equazion di equilibrio di un *fluido grave* si è trovata in generale

$$dp = -\, gqdz$$

allorchè le *altezze* z si contano *positive* di basso in alto. Trattandosi di fluidi aeriformi, a quest' equazione conviene aggiungere le due seguenti

$$p = kq , \qquad k = k_0 \,(1 + \alpha\theta) ,$$

in cui le quantità variabili p, q, k, θ corrispondono all' altezza z.

Così le **leggi statiche** di un fluido aeriforme sono rappresentate dalle tre equazioni

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dp = -\, gqdz \,; \\ p = kq \,, \\ k = k_0 \,(1 + \alpha\theta) . \end{array} \right.$$

408. Prop. III. *In una colonna di fluido aeriforme a temperatura costante, crescendo le altezze in progressione aritmetica, le densità e la pressioni scemano in progressione geometrica.*

Dimostrazione. Se dalle due equazioni relative all' equilibrio del fluido aeriforme

$$dp = -\, gqdz \,, \qquad p = kq \,,$$

eliminiamo q, si ottiene

$$\frac{dp}{p} = -\, \frac{g}{k} dz$$

dove, per la condizion dell' enunciato, il coefficiente k si dee riguardar come costante. Per eseguirne l' integrazione completa, supponiamo che all' altezza $z = 0$ corrisponda la pressione

$$p_0 = kq_0\,, \quad \text{donde} \quad \frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0}\,.$$

Avremo

$$log.\, p - log.\, p_0 = -\frac{g}{k}z\,, \quad \text{ossia} \quad log.\, \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{k}z\,.$$

E passando dal logaritmo al numero

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{k}z}\,, \quad \text{e però} \quad q = q_0 e^{-\frac{g}{k}z}\,,$$

indicando al solito per e la base de' logaritmi neperiani. Pertanto, ove per abbreviare si faccia

$$b = e^{\frac{g}{k}}\,,$$

sarà

$$p = p_0 b^{-z}\,, \quad q = q_0 b^{-z}\,.$$

Da queste uguaglianze rendesi manifesto che, se le altezze z sono espresse dalla progressione aritmetica crescente

$$\div\, 1 : 2 : 3 : 4 : \text{etc.}\,,$$

le corrispondenti pressioni p e densità q saranno proporzionali ai termini della progression geometrica descrescente

$$\div\div\, \frac{1}{b} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{b^4} : \text{ etc.}$$

N. B. Per l' esattezza di questa proposizione richiedesi che le altezze a cui c' inalziamo nel fluido, non eccedano i limiti dentro i quali l' azione della gravità $\left(F = \dfrac{g}{(1+\frac{z}{r})^2}\right)$ si può riguardar come costante.

409. Prop. IV. *Quando più gas, senz'azion chimica degli uni sugli altri, si trovano rinchiusi in uno stesso spazio, l'esperienza ha provato che essi non si sovrappongono già per ordine di densità a quel modo che fanno i liquidi, ma ciascuno si dispone come se fosse assolutamente solo nello spazio dato; e la pressione* p *e la densità* q, *in ogni punto del loro miscuglio, sono le somme delle pressioni* (p', p'', p''' etc.) *e delle densità* (q', q'', q''', etc.) *che si osserverebbero nell'equilibrio di ciascuno di questi gas, considerato isolatamente e ad egual temperatura*: vale a dire

$$\left\{\begin{array}{l} p = p' + p'' + p''' + \text{etc.}, \\ q = q' + q'' + q''' + \text{etc.} \end{array}\right.$$

410. *Corollario.* Nella legge di Mariotte ($p = kq$) applicata ad un miscuglio di gas, il valor del coefficiente k è intermedio tra i valori de' coefficienti k', k'', k''' etc. relativi ai gas mescolati. Infatti, essendo per ipotesi

$$p' = k'q', \quad p'' = k''q'', \quad p''' = k'''q''', \quad \text{etc.},$$

si avrà in virtù della proposizion che precede

$$(1) \qquad k = \frac{p}{q} = \frac{k'q' + k''q'' + k'''q''' + \text{etc.}}{q' + q'' + q''' + \text{etc.}}.$$

Da questa relazione è messa in aperto la verità del corollario; perchè, se immaginiamo che i coefficienti k', k'', k''' etc. crescano o diminuiscano per divenire ciascuno eguale al *massimo* M di essi, od al *minimo* m, è manifesto che il secondo membro del rapporto (1) crescerà o diminuirà, divenendo in corrispondenza $= M$, od $= m$. Dunque

$$k < M, \quad k > m.$$

411. Prop. V. *Allorchè più gas dimorano insieme ad uniforme temperatura, la proporzione in che sono mescolati non è uguale dappertutto, ma varia* (sebbene assai lentamente) *da altezza ad altezza*: vale a dire, *la proporzione che è tra le loro densità* (q'_0, q''_0, q'''_0, etc.) *corrispondenti all'altezza* $z = 0$, *non è più*

la medesima tra le densità (q', q'', q''', etc.) *corrispondenti ad un'altra altezza* z, ossia non può sussister la proporzione

$$\frac{q'}{q'_0} = \frac{q''}{q''_0} = \text{etc.}$$

Infatti nella Proposizione III (408) si è trovato

$$\frac{q'}{q'_0} = e^{-\frac{g}{k'}z}, \quad \frac{q''}{q''_0} = e^{-\frac{g}{k''}z},$$

e questi rapporti non possono essere uguali salvochè non si abbia $k' = k'' =$ etc.

Scolio. Tuttavia questi coefficienti essendo generalmente grandissimi numeri, il cangiamento nella proporzione de' gas non può divenir sensibile che ad altezze straordinarie. Ed è ciò che si ammette rispetto all'aria atmosferica, sapendosi per esperienza che la proporzione de' gas che la compongono è sensibilmente la medesima, dalla superficie della terra fino alle più grandi altezze a cui l'uomo siasi inalzato

---

CAPO II. *Dalle osservazioni del barometro è o no possibile di ricavare le altezze de' luoghi sopra il livello del mare? E qual' è la formola a ciò più opportuna nelle latitudini medie?*

412. L'altezza h della colonna di mercurio nel barometro, essendo un effetto della pressione p dell'aria, diminuisce con questa pressione a misura che c'inalziamo verticalmente nell'atmosfera, dimodochè, data l'altezza z di un luogo sul livello del mare colle condizioni in cui si trova l'atmosfera, è ivi necessariamente determinata l'altezza h del barometro; e per conseguente l'una di queste due quantità z, h è *funzione* dell'altra: $z = funz.(h)$. Di qui la verità della seguente:

Prop. I. *Dall'osservare le altezze del barometro è possibile di scoprire a qual altezza ci troviamo sopra il livello del mare.*

413. Prop. II. *Per conoscere l'altezza* z onde una stazione s'inalza sopra un'altra, sotto le latitudini medie, conviene osservare nelle due stazioni, *inferiore* e *superiore*, e contemporaneamente per quanto è possibile:

1°. *Le altezze H_0, H del barometro;*

2°. *Le temperature T_0, T del mercurio* per mezzo di un termometro particolare annesso al barometro;

3°. *Le temperature t_0, t dell'aria.*

Raccolti questi dati, l'elevazione cercata z si avrà prossimamente dalla formola:

$$(a) \qquad z = 18393\left(1 + 2\,\frac{t_0 + t}{1000}\right) log.\frac{h_0}{h},$$

dove
$$log.\frac{h_0}{h} = log.\frac{H_0}{H} - log.\left(1 + \frac{T_0 - T}{5550}\right).$$

Dimostrazione. Abbiamo trovato che le tre equazioni dell'equilibrio de' fluidi elastici, se si elimini la densità q, si riducono alle due seguenti

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{k}dz, \qquad k = k_0(1 + \alpha\theta),$$

nelle quali il cofficiente k siccome espresso per la temperatura θ dell'aria, che varia insensibilmente coll'altezza z, è una *funzione incognita* di z. Per determinarla nel modo il più semplice, si è sperimentato che non si devìa gran fatto dall'esattezza se si prende per θ un *valor medio* tra i gradi estremi t_0, t di temperatura relativi alle due stazioni, ponendo

$$\theta = \frac{t_0 + t}{2};$$

e che inoltre, per avere un compenso nelle variazioni dell'umidità dell'aria, è utile di fare

$$\alpha = \frac{4}{1000}.$$

Ritenendo adunque il coefficiente k come costante, integriamo l'equazione $\frac{dp}{p} = -\frac{g}{k}dz$ così che a $z=0$ corrisponda p_0. Avremo

$$log.p - log.p_0 = -\frac{g}{k}z,$$

e quindi

$$(1)\qquad z = \frac{k}{g}\, log.\frac{p_0}{p} = \frac{k_0}{g}\left(1 + 2\,\frac{t_0 + t}{1000}\right) log.\frac{p_0}{p}\,.$$

Rimane ora a vedere come dalle osservazioni barometriche, rettificate per quelle del termometro, si possono ricavare i valori di $log.\frac{p_0}{p}$, e di $\frac{k_0}{g}$.

A ciò sono dirette le tre proposizioni che seguono.

1. Le pressioni p_0, p dell'atmosfera in due stazioni diverse sono proporzionali alle altezze h_0, h del barometro ridotte alla medesima temperatura di zero gradi, cioè $\frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h}$. Infatti, poichè le pressioni p_0, p dell'atmosfera sul ramo aperto del barometro equivalgono a quelle esercitate dal mercurio alla profondità h_0, h, ove si chiami q la densità del mercurio, si avrà (390)

$$p_0 = gqh_0, \quad p = gqh, \quad \text{donde}\, \frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h}\,.$$

2. Essendo H_0, H le altezze barometriche osservate in due stazioni alle temperature T_0, T, ed h_0, h ciò a che si riducono siffatte altezze alla temperatura $= 0$, si avrà

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H} : [\,1 + \beta\,(T_0 - T)\,]\,,$$

dove $\beta = \frac{1}{5550}$ è il coefficiente della dilatazion del mercurio per ogni grado del termometro centigrado a partire da zero.

Infatti se per ogni grado di temperatura le altezze h_0, h crescono di βh_0, βh, ed alle temperature T_0, T diventano rispettivamente H_0, H, è manifesto che sarà

$$H_0 = h_0\,(1 + \beta T_0), \qquad H = h\,(1 + \beta T),$$

donde

$$\frac{H_0}{H} = \frac{h_0}{h}\,\frac{1 + \beta T_0}{1 + \beta T} = \frac{h_0}{h}\left[1 + \beta(T_0 - T) - \beta^2\,\frac{(T_0 - T)T}{1 + \beta T}\right].$$

Se qui trascurasi il termine moltiplicato per β^2, siccome piccolissimo, si ottiene la relazione proposta. Dunque

$$log.\frac{p_0}{p}=log.\frac{h_0}{h}=log.\frac{H_0}{H}-log.\left[1+\frac{T_0-T}{5550}\right].$$

3. A livello del mare e alla temperatura $=0$ essendo l'altezza del barometro di metri $h_0=0,\ 760$, se c' inalziamo da terra per metri $z=10,485$, l'altezza h_0 del barometro discenderà di un millimetro (come or vedremo) e diverrà $h=0{,}759$. Onde se nella formola barometrica (1) si sostituiscano questi valori, e di più si faccia $0=t_0=t$, la formola (1) si riduce a

$$10{,}485=\frac{k_0}{g}log.\frac{760}{759},$$

da cui si ricava

$$\frac{k_0}{g}=\frac{10{,}485}{log.760-log.759}=18336.$$

Per intender poi come per una salita di metri $z=10{,}485$ l'altezza barometrica debba scender di un millimetro, conviene avvertire che, alla temperatura $=0$, il rapporto della densità q del mercurio a quella q' dell'aria è

$$\frac{q}{q'}=10485,$$

prendendo un medio tra la densità dell'aria perfettamente asciutta e la densità dell' aria umidissima. Ciò posto, immaginiamo due colonne verticali ed omogenee l'una d'aria e l'altra di mercurio, le cui altezze rispettive z ed h siano tali che ne risulti una medesima pressione p alle loro basi. Sarà

$$p=gq'z,\quad p=gqh,\quad \text{donde}\ z=10485.h.$$

E da qui apparisce che ad $h=\frac{1}{1000}$ corrisponde $z=10{,}485$.

Per l'esposte considerazioni la formola (1) diviene finalmente

$$z=18336\left(1+2\frac{t_0+t}{1000}\right)log.\frac{h_0}{h}.$$

Scolio I. Nella costruzion di questa formola non si è tenuto conto del cangiamento insensibile che si opera nella gravità, sia a causa della estensione dell' altezza z, sia a causa della rotazion della terra, sia a causa della diversità di latitudine. Moltissime osservazioni però hanno mostrato al Sig. Ramond che, nelle *latitudini medie*, la formola barometrica or trovata diviene assai prossima al vero, solchè al numero 18336 si sostituisca il numero 18393.

Scolio II. L'uso del barometro per la determinazion delle altezze è di tale facilità e speditezza che si adopera con vantaggio tutte le volte che non si richiede una grandissima precisione; chè altrimenti convien ricorrere alle misure trigonometriche ed alla livellazione ordinaria.

PARTE II.

IDRODINAMICA

SEZIONE I.

Del moto de' fluidi in genere.

CAPO I. *Nel moto di un fluido le quattro quantità* « pressione p, densità q, forza sollecitante F, velocità U » *sono funzioni delle quattro variabili indipendenti* x, y, z, t; *e nel moto di una molecola dm le coordinate* x, y, z *sono funzioni del tempo t. Doppia espressione delle* derivate totali *di* p, q, F, U.

414. Le quantità da considerarsi nel movimento di un fluido sono: la *pressione* p, la *densità* q, la *forza sollecitante* F come nell' Idrostatica, e di più la *velocità* U. Queste quattro quantità p, q, F, U sogliono variare col tempo t in un medesimo luogo, e col luogo (x, y, z) nel medesimo tempo; onde ciascuna di esse dee riguardarsi come funzione delle *quattro variabili* « *tempo* t, e *coordinate* x, y, z »: il che s' indica simbolicamente così:

$$\begin{cases} p = p(t, x, y, z), \\ q = q(t, x, y, z), \end{cases} \qquad \begin{cases} F = F(t, x, y, z), \\ U = U(t, x, y, z). \end{cases}$$

415. Quando un fluido è in movimento, ciascuna delle sue particelle dm segue la sua via, percorrendo una linea o *traiettoria* particolare. Siano x_0, y_0, z_0 le coordinate del luogo ove trovasi la molecola dm all' epoca donde si comincia a contare il tempo: per ogn' istante successivo dt sarà pur determinato il punto a cui essa perviene, cosicchè le coordinate x, y, z, *correnti* insieme colla molecola, saranno *funzioni del tempo* t e delle *coordinate* x_0, y_0, z_0 del *punto di partenza*, coordinate che diversificano da molecola a molecola.

Supponiamo che la molecola dm, arrivata dopo il tempo t al punto (x, y, z) colla velocità U, descriva nell' istante dt l' archetto ds che unisce i due punti (x, y, z), $(x+dx, y+dy, z+dz)$ infinitamente vicini della sua traiettoria. Sapendosi che ogni moto infinitesimo può considerarsi come uniforme, avremo

$$dt = \frac{ds}{U} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w},$$

dove per u, v, w s' intendono le componenti della velocità U parallele ai tre assi Ox, Oy, Oz.

416. Essendo le coordinate x, y, z della molecola dm funzioni del tempo t, se delle quattro quantità (U, F, p, q) riguardanti la stessa molecola, si prendano le *derivate totali* U', F', p', q' rispetto a t, ciascuna di tali derivate si comporrà di quattro termini, e si avrà per esempio:

$$U' = \frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dx} u + \frac{dU}{dy} v + \frac{dU}{dz} w,$$

a cagione di $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$. Cotesta derivata si può mettere sotto la forma più semplice

$$U' = \frac{dU}{dt} + \frac{1}{dt} d.\, U,$$

purchè la differenziazione indicata dal simbolo ($d.$) si riferisca alle sole coordinate x, y, z, e ad operazione eseguita si faccia

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt.$$

Per la stessa ragione si ha:

$$F' = \frac{dF}{dt} + \frac{1}{dt}d.F, \quad p' = \frac{dp}{dt} + \frac{1}{dt}d.p \text{ ; etc.}$$

CAPO II. *Proprietà della forza d' inerzia di una molecola dm, considerata come la risultante di ciascuno de' due sistemi di componenti* (u', v', w'), $\left(U', \frac{U^2}{r}\right)$. *Relazione tra i due trinomii* $udx + vdy + wdz$, $u'dx + v'dy + w'dz$ *quando il primo si suppone un differenziale esatto.*

417. Nel movimento di più punti materiali dm connessi tra loro, la *forza d'inerzia di uno qualunque di questi punti* equivale in ogn' istante dt all' azione di una forza acceleratrice per la quale il punto dm sarebbe capace di descrivere nello spazio, *liberamente* ed *isolatamente*, la linea medesima che realmente va descrivendo collegato com' è cogli altri punti (191). Questa forza d' inerzia verrà denotata per I.

Essendo una molecola dm animata dalla velocità U composta delle tre u, v, w, la meccanica insegna che: Se la forza d' inerzia I si decompone in tre parallele ai tre assi Ox, Oy, Oz, le componenti sono espresse da

$$v', \quad u', \quad w',$$

derivate totali (rispetto a t) delle velocità u, v, w, talchè si ha

$$u' = \frac{du}{dt} + \frac{1}{dt}d.u, \quad v' = \frac{dv}{dt} + \frac{1}{dt}d.v, \quad w' = \frac{dw}{dt} + \frac{1}{dt}d.w$$

E se la forza I si decompone ad ogn' istante in due rettangolari, l'una delle quali sia *tangenziale*, o diretta secondo la tangente della traiettoria, l' altra sarà *centripeta*, o *diretta al centro di curvatura*, e queste due componenti sono espresse rispettivamente da

$$U', \quad \frac{U^2}{r},$$

essendo U' la derivata totale (rispetto a t) della velocità U, ed r il raggio osculatore della traiettoria nel punto (x, y, z).

418. Prop. I. *Tra i due sistemi di componenti* (u', v', w'), $\left(U', \frac{U^2}{r}\right)$ *della forza d' inerzia* I, *sussiste la relazione :*

$$(1) \qquad u'dx + v'dy + w'dz = U'ds + \frac{U^2}{r} dr,$$

dove dx, dy, dz, ds, dr rappresentano sulle direzioni di esse componenti le proiezioni della linea $d\sigma$ che unisce il punto (x, y, z) della traiettoria con un altro punto $(x + dx, y + dy, z + dz)$ preso ad arbitrio nelle vicinanze del primo.

Dim. Si chiami di la proiezione della linea $d\sigma$ sulla direzione di I. Ciascuno de' due membri della (1) sarà $= Idi$, esprimendo la nota proprietà della risultante rispetto alle sue componenti.

419. *Coroll.* Se il secondo punto $(x + dx, y + dy, z + dz)$ si prenda anch' esso sulla traiettoria della molecola dm, si avrà

$$(2) \qquad udx + vdy + wdz = \frac{dU}{dt} ds + d.\frac{U^2}{2}.$$

Infatti la linea $d\sigma$, ove sia coincidente con ds e però normale alla direzione del raggio osculatore r, cadrà sopra r colla proiezione $dr = 0$, ed il secondo membro della (1) si ridurrà ad (61)

$$U'ds = \frac{dU}{dt} ds + \frac{ds}{dt} d.U = \frac{dU}{dt} ds + d.\frac{U^2}{2},$$

essendo
$$\frac{ds}{dt} = U.$$

420. Prop. II. Quando de' due trinomii

$$udx + vdy + wdz, \qquad u'dx + v'dy + w'dz,$$

il primo è un differenziale esatto rispetto ad x, y, z, tale eziandio sarà il secondo ; essendochè se si pone

$$(a) \qquad udx + vdy + wdz = d.\varphi(t, x, y, z),$$

risulta

$$(b) \quad u'dx + v'dy + w'dz = d.\frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}\, d.\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]$$

Dim. Il primo membro della (a) dovendo essere identico al secondo, cioè a

$$d.\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz\ ,$$

si avranno le relazioni

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}\ , \quad w = \frac{d\varphi}{dz}\ .$$

Prendiamo di queste le derivate totali rispetto a t, considerando le x, y, z come funzioni di t. Otterremo

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{d^2\varphi}{dxdt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}u + \frac{d^2\varphi}{dxdy}v + \frac{d^2\varphi}{dxdz}w\ , \\ v' &= \frac{d^2\varphi}{dydt} + \frac{d^2\varphi}{dydx}u + \frac{d^2\varphi}{dy^2}v + \frac{d^2\varphi}{dydz}w\ , \\ w' &= \frac{d^2\varphi}{dzdt} + \frac{d^2\varphi}{dzdx}u + \frac{d^2\varphi}{dzdy}v + \frac{d^2\varphi}{dz^2}w\ . \end{aligned}\right.$$

Moltiplichiamo rispettivamente queste tre equazioni per dx, dy, dz e sommiamole. Se nel sommarle si ponga mente dapprima alla identità

$$\frac{d^2\varphi}{dxdt}dx + \frac{d^2\varphi}{dydt}dy + \frac{d^2\varphi}{dzdt}dz = d.\frac{d\varphi}{dt}\ ,$$

e poi a quest' altra identità

$$u\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx + \frac{d^2\varphi}{dxdy}dy + \frac{d^2\varphi}{dxdz}dz\right) = \frac{d\varphi}{dx}\, d.\frac{d\varphi}{dx} = \tfrac{1}{2}\, d.\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\ ,$$

ed alle sue analoghe, si troverà subito la (b).

Due leggi fondamentali nel moto de' fluidi.

Se le molecole di un fluido in moto non si separano le une dalle altre, ma scorrono insieme formando una massa *continua*, siffatto *fluire* è in generale soggetto a due leggi che, tradotte analiticamente, si dicono *equazione della continuità*, ed *equazione delle forze sollecitanti*.

CAPO III. *Equazione della continuità per la quale si esprime come varia in ogni punto la velocità e la densità allorchè il fluido si conserva continuo.*

431. Proposizione I. *Nel movimento di un fluido continuo, le variazioni della velocità e della densità debbono soddisfare all'equazione*

$$(1) \qquad \frac{dq}{dt} + \frac{d(qu)}{dx} + \frac{d(qv)}{dy} + \frac{d(qw)}{dz} = 0,$$

identica alla seguente

$$(2) \qquad \frac{q'}{q} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

dove q' è la derivata totale di q rispetto al tempo t.

Dim. Per entro al fluido concepiamo uno spazio infinitesimo S, sotto l'immagine di *vuota cameretta* di forma parallelepipeda, i cui spigoli contigui al punto M siano dx, dy, dz (fig. 80). Questi spigoli determinano le tre facce

$$A = dydz, \qquad B = dzdx, \qquad C = dxdy,$$

alle quali si oppongono parallele ed equali le facce A', B', C'. La *capacità* dello spazio S sarà

$$S = dxdydz = Adx = Bdy = Cdz .$$

Le sei facce $(A,\ A')$, $(B,\ B')$, $(C,\ C')$ che lo circoscrivono si riguardino come altrettante *porte* fisse ed invariabili, per le quali il fluido entra ed esce liberamente senz' alcuna rottura di continuità. Il fluido nell' attraversar così il vano dello spazio S, subisce ivi o almeno può subire ad ogn' istante dt un cangiamento di massa, il quale si esprime in due modi diversi.

Se la massa fluida che riempie S è espressa allo spirar del tempo t da qS, allo spirar del tempo $(t + dt)$ sarà espressa da $\left(q + \frac{dq}{dt}\, dt\right) S$, cosicchè nell' istante dt il fluido compreso nello spazio S avrà subito il cangiamento di massa:

$$S.\ \frac{dq}{dt}\, dt.$$

Ma è chiaro che questo cangiamento è pure uguale all' eccesso della quantità di fluido che nell' istante dt entra per le porte A, B, C sopra quella che, nel medesimo istante, esce dalle porte opposte A', B', C', separate dalle prime per gl' intervalli dx, dy, dz. Or la prima di queste due quantità di fluido è espressa da

$$Aqudt + Bqvdt + Cqwdt,$$

e la seconda da (*)

$$\left[A' \left(qu + \frac{d(qu)}{dx} dx\right) + B'\left(qv + \frac{d(qv)}{dy} dy\right) + C'\left(qw + \frac{d(qw)}{dz} dz\right)\right] dt.$$

L' eccesso della prima sulla seconda sarà dunque

$$-\, Sdt \left[\frac{d(qu)}{dx} + \frac{d(qu)}{dy} + \frac{d(qw)}{dz}\right];$$

nuova espressione del cangiamento di massa. Eguagliandola alla precedente, e dividendole ambedue pel fattor comune Sdt, si ottiene

$$\frac{dq}{dt} = -\left[\frac{d(qu)}{dx} + \frac{d(qv)}{dy} + \frac{d(qw)}{dz}\right]$$

e quindi la (1).

(*) Si avverta che posto $y = f(x)$, dalla identità generale $y + \delta y = f(x + \delta x)$, si deriva

$$qu + \frac{d(qu)}{dx} dx = \left(q + \frac{dq}{dx} dx\right)\left(u + \frac{du}{dx} dx\right).$$

Se si sviluppa quest' equazione (1), risulta

$$\frac{dq}{dt}+\frac{dq}{dx}u+\frac{dq}{dy}v+\frac{dq}{dz}w+q\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)=0,$$

che divisa per q diviene identica alla (2).

422. Prop. II. *Nel moto di un liquido, sia omogeneo, sia eterogeneo, l' equazione della continuità riducesi a*

$$(3)\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

Dim. La densità q supponendosi *costante* per un liquido omogeneo, basterà provare che la sua *derivata* q' dee risultare $=0$ anche per un liquido eterogeneo. A questo fine osserviamo che la densità q, se si considera nell' *insieme del liquido* eterogeneo, è certamente funzione delle quattro variabili t, x, y, z, potendo le molecole di densità differente passare per un medesimo luogo (x, y, z) in tempi successivi, ed in luoghi diversi nel medesimo tempo; ma se la densità q *si considera in una stessa molecola*, dee riguardarsi come costante, e si dee fare

$$q(t, x, y, z)=c,$$

denotando c una costante che cangia di valore nel passare da una molecola di una specie ad una molecola di un' altra specie. Si avrà dunque nel moto di ciascuna molecola particolare

$$q'=\frac{dq}{dt}+\frac{dq}{dx}u+\frac{dq}{dy}v+\frac{dq}{dz}w=0.$$

E si può conchiudere che nel moto di un liquido, sia omogeneo, sia eterogeneo, la (3) sussiste ugualmente.

423. Coroll. Quando il trinomio $udx+vdy+wdz$ è il differenziale esatto di una funzione $\varphi(t, x, y, z)$ rispetto ad x, y, z, sarà

$$u=\frac{d\varphi}{dx},\quad v=\frac{d\varphi}{dy},\quad w=\frac{d\varphi}{dz},$$

e per conseguenza l'equazion della continuità sarà espressa dalla formola

$$\frac{q'}{q} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0;$$

e nel caso de' liquidi dalla formola

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

CAPO IV. *Equazione delle forze sollecitanti per la quale si esprime come varia da punto a punto la* pressione p *in funzione delle tre quantità:* densità q, forza sollecitante F, e forza d'inerzia $\left(U', \frac{U^2}{r}\right)$.

424. Proposizione. *In un fluido in moto, la pressione idrostatica p, quando si passa da un punto (x, y, z) ad un altro punto infinitamente vicino $(x + dx, y + dy, z + dz)$, varia secondo la legge espressa dall'equazione:*

$$(1) \qquad d.p = q[Pdx + Qdy + Rdz - u'dx - v'dy - w'dz]$$

che è identica (418) alla

$$(2) \qquad d.p = q(Fdf - U'ds - \frac{U^2}{r}dr),$$

e che equivale alle tre seguenti

$$(3) \qquad \frac{dp}{dx} = q(P - u'), \ \frac{dp}{dy} = q(Q - v'), \ \frac{dp}{dz} = q(R - w').$$

Dimostrazione. In un punto qualunque (x, y, z) del fluido siano, allo spirar del tempo t, q la densità, p la pressione idrostatica, P, Q, R le forze sollecitanti parallele agli assi Ox, Oy, Oz, e si concepisca un parallelepipedo S di spigoli dx, dy, dz, e però di volume

$$S = dxdydz = Adx = Bdy = Cdz,$$

e pieno della massa fluida

$$dm = qS.$$

La molecola dm sarà sollecitata nel senso dell'asse Ox dalla forza motrice $= PqS$, e dalle due pressioni opposte

$$pA, \ -\left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)A \ ;$$

e queste tre forze equivalgono insieme alla forza unica motrice

$$= \left(Pq - \frac{dp}{dx}\right)S.$$

Nel modo stesso si prova che la molecola dm è sollecitata nel senso degli assi Oy, Oz dalle forze motrici

$$\left(Qq - \frac{dp}{dy}\right)S, \qquad \left(Rq - \frac{dp}{dz}\right)S.$$

Ma si ha dalla dinamica (163) che, nel moto di un punto materiale, l'azion totale della forza motrice è uguale in ogn'istante alla forza d'inerzia del punto. Eguagliando adunque le componenti della forza motrice della nostra molecola alle componenti omologhe della forza d'inerzia, cioè alle $u'qS$, $v'qS$, $w'qS$, e dividendo tutto per S, otterremo

$$Pq - \frac{dp}{dx} = u'q, \quad Qq - \frac{dp}{dy} = v'q, \quad Rq - \frac{dp}{dz} = w'q,$$

donde le

$$(3) \quad \frac{dp}{dx} = q(P - u'), \quad \frac{dp}{dy} = q(Q - v'), \quad \frac{dp}{dz} = q(R - w').$$

Se quest' equazioni si moltiplicano rispettivamente per dx, dy, dz, e poi si sommano, nasce la seguente

$$\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz = q[(P - u')dx + (Q - v')dy + (R - w')dz],$$

che equivale a quelle tre, dovendosi verificare qualunque siano i differenziali dx, dy, dz, e però anche supponendone due uguali a zero. Il primo membro si può indicare, secondo la fatta convenzione (416), per $d.p$, e quindi si avrà la (1), la quale si è più sopra dimostrato (418) essere identica alla (2).

425. Coroll. I. Se nella corrente di un fluido si vogliono seguire le varie pressioni per cui passa una stessa molecola dm, il cangiamento di pressione $d.p$ da un punto all' altro della trajettoria si avrà dalla formola

$$d.p = q\left(Fdf - \frac{dU}{dt}ds - d.\frac{U^2}{2}\right)$$

alla quale sappiamo (419) che nella fatta supposizione si riduce la (2).

426. Coroll. II. E quando il trinomio $udx + vdy + wdz$ risulta un differenziale esatto $= d.\varphi$, l' equazione (1) assume la forma (420):

$$\frac{d.p}{q} = Fdf - d.\frac{d\varphi}{dt} - \tfrac{1}{2}\,d.\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

CAPO V. *Come determinare la velocità e la pressione idrostatica in ogni punto di una corrente fluida? Difficoltà. Criterio di Lagrange per iscoprire quando il trinomio $udx + vdy + wdz$ è un differenziale esatto $= d.\varphi$. L' integrazione può talvolta eseguirsi senza che abbia luogo questa condizione.*

427. Nella corrente di un fluido la determinazione della velocità U e della pressione p in ogni punto, dipende dall' integrazione completa delle due equazioni della continuità e delle forze sollecitanti, la quale d' ordinario presenta difficoltà insuperabili. Ne' casi particolari in cui riesce la detta integrazione, s' incontrano più funzioni arbitrarie di t, x, y, z, per determinar le quali fa mestieri aver riguardo non solamente allo stato iniziale, ma eziandio alle condizioni relative alle superficie in contatto col fluido.

428. *Esempio.* Sia

$$S\,(t\,,\,x\,,\,y\,,\,z) = 0$$

l' equazion di una superficie variabile col tempo t, sulla quale debbano rimanere continuamente i punti fluidi che già vi sono. Se prendiamo la derivata totale S' di cotesta equazione rispetto a t, considerando le x, y, z come coordinate correnti di uno de'punti nominati, avremo:

$$\frac{dS}{dt}+\frac{dS}{dx}u+\frac{dS}{dy}v+\frac{dS}{dz}w=0.$$

Se la superficie S è quella di una parete fissa, talchè sia $\frac{dS}{dt}=0$, si avrà semplicemente

$$\frac{dS}{dx}u+\frac{dS}{dy}v+\frac{dS}{dz}w=0.$$

La superficie libera di un liquido è d' ordinario sottoposta ad una pression nota P, eguale in tutti i suoi punti, ma che può variare col tempo. L' equazion di tale superficie sarà

$$p\,(t,x,y,z)=P\,(t),$$

donde nasce la condizion seguente pe'punti liquidi che vi si trovano

$$\frac{dp}{dt}+\frac{dp}{dx}u+\frac{dp}{dy}v+\frac{dp}{dz}w=\frac{dP}{dt}.$$

429. Per facilitare in alcuni casi l' integrazion dell'equazioni fondamentali dell' idrodinamica, Lagrange propose il criterio contenuto nella seguente:

Proposizione. *Posta la condizione che l' espressione*

$$\frac{d.p}{q}-F.df$$

sia un differenziale esatto rispetto ad x, y, z, se a qualche istante del tempo si trovi esser tale anche il trinomio

$$(1)\qquad udx+vdy+wdz,$$

si conchiuda che esso sarà stato tale per lo innanzi, e che tale si manterrà per tutto il tempo del moto.

Dim. Osserviamo dapprima che avendosi in ogni caso (424):

$$\frac{d.p}{q} - Fdf = -(u'dx + v'dy + w'dz),$$

quando il primo membro di quest'equazione risulti un differenziale esatto, tale dovrà ritenersi anche il secondo. Ora supponiamo che allo spirar di un certo tempo t, il trinomio (1) sia un differenziale esatto: un istante prima od un istante dopo (se a t si sostituisca $t \mp dt$) esso è

$$(u \mp u'dt)\, dx + (v \mp v'dt)\, dy + (w \mp w'dt)\, dz$$
$$= udx + vdy + wdz \mp (u'dx + v'dy + w'dz)\, dt,$$

espressione evidentemente integrabile, essendo integrabile ciascuno de' due trinomi per le fatte supposizioni. Così trascorrendo continuamente da un istante all'altro, sia del tempo passato, sia del tempo avvenire, si acquisterà la certezza dell'enunciata proposizione.

Coroll. 1°. Il trinomio (1) si dovrà quindi considerare come differenziale esatto di una *certa funzione incognita da determinarsi* $\varphi(t, x, y, z)$, allorchè i *valori iniziali* delle velocità u, v, w siano stati *costanti* in tutti i punti del fluido, ovvero *nulli*, o presso che nulli.

Coroll. 2°. E se ad un'epoca qualunque del moto si veda apertamente che il trinomio (1) non è un differenziale esatto, si potrà affermare che tale non fu mai, nè mai sarà.

430. Talvolta avviene che, quantunque non si verifichi l'esposto criterio di Lagrange, l'integrazione di cui si tratta si possa effettuare completamente.

Esempio. Giri equabilmente un liquido grave intorno all'asse Oz colla velocità angolare $= \theta$. Mentre il sistema fa la rotazione $d\omega$ nell'istante dt, la molecola dm situata nel punto (x, y, z) e alla distanza r dall'asse Oz descriverà lo spazio

$$ds = r\,d\omega, \text{ colla velocità } U = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\,\theta,$$

di cui le componenti u, v, w (ove si denoti per ω l'angolo xr, e si avverta che nel circolo descritto dal punto dm, si ha $x = r\cos.\omega$, $y = r\,sen.\omega$) saranno

$$u = \frac{dx}{dt} = -y\theta, \quad v = \frac{dy}{dt} = x\theta, \quad w = \frac{dz}{dt} = 0.$$

donde

$$u' = \frac{d^2x}{dt^2} = -x\theta^2, \quad v' = \frac{d^2y}{dt^2} = -y\theta^2, \quad w' = 0.$$

E ravvicinando si conchiude che: La molecola dm va in giro con una velocità composta delle due

$$u = -y\theta, \quad v = x\theta,$$

ed è animata da una forza d'inerzia composta delle due

$$u' = -x\theta^2, \quad v' = -y\theta^2.$$

Ciò posto, il trinomio (1) si riduce a

$$udx + vdy = \theta(xdy - ydx),$$

dove non si verifica la condizion dell' integrabilità, cioè la

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$$

essendo

$$\frac{du}{dy} = -\theta, \quad \frac{dv}{dx} = \theta.$$

E nondimeno delle due equazioni fondamentali dell' idrodinamica, che qui si riducono alle

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0,$$

$$\frac{dp}{q} = gdz + (xdx + ydy)\theta^2,$$

la prima è un' identità, e la seconda è integrabile immediatamente.

SEZIONE II.

Del moto lineare de' fluidi.

CAPO. I. *Definizione del moto lineare. Velocità media di una sezione* ω *del fluido. Nel moto lineare non si considera che il moto medio del fluido. Riduzione di questo moto al moto* s *di una molecola ideale sulla linea direttrice, essendo* $s = s(t)$, $\omega = \omega(s)$. *Le quantità* F, p, q, u *sono funzioni di* s, t.

Mirando ad una corrente d'acqua o d'altro liquido, ciascun può notare che, sebbene le varie particelle fluide si avanzino con velocità e direzioni assai diverse tra loro, tuttavia il corpo del liquido cammina con una certa *velocità d'insieme* secondo una linea che è, a un di presso, indicata dall'andamento stesso della corrente.

431. Il moto di un fluido si dice *lineare* quando il corpo del fluido cammina con una certa velocità d'insieme, seguendo l'andamento di una linea (or più, or meno determinata) che si può chiamar *direttrice* del moto.

432. Prop. I. *Intendiamo diviso il fluido per sezioni normali agli elementi successivi* ds *della direttrice: la quantità di fluido* dm *che ad ogn'istante* dt *passa per ciascuna sezione* ω, *può sempre farsi uguale a quella che passerebbe se tutti i punti fluidi della sezione camminassero con una certa* **velocità media** u, *perpendicolare al piano di essa sezione.*

Dim. Infatti chamata q la *densità media* del fluido nella sezione ω, basta determinare la velocità u per mezzo della formola

$$\frac{dm}{q} = \omega . u \, dt,$$

dove il secondo membro rappresenta il volume fluido $\frac{dm}{q}$, passato per la sezione ω nel tempo dt, sotto la forma di un cilindro che ha per *base* ω e per *altezza* lo spazio udt percorso colla velocità media u. Così la *velocità media* u è definita dall' equazione

$$u = \frac{dm:q}{\omega \, dt}.$$

N. B. Quando il corso del fluido è *permanente*, cioè quando si fa sempre ad un modo per ogni sezione ω, è per sè manifesto che alla formola che precede si può sostituir la seguente

$$u = \frac{m:q}{\omega t},$$

vale a dire: Per ottenere la *velocità media* basta tener conto del volume fluido $\frac{m}{q}$ passato per ω in un tempo finito t dato ad arbitrio, e poi divider tale volume pel tempo t e per l'area ω della sezione.

433. Prop. II. Nel moto lineare non si considera che il *moto medio* del fluido, lunghesso la linea direttrice. Per rappresentar questo moto s' immagina una molecola dm che, camminando sulla direttrice, abbia in ogni punto del suo corso i *valori medii* delle quattro quantità (F, p, q, u), corrispondenti alla sezione ω che è normale in tal punto ad essa direttrice.

Se si considera s come dinotante il cammino fatto dalla nostra molecola *ideale* nel tempo t, sarà s funzione di t, il che è indicato dal simbolo

$$s = s(t)\ ;\ \text{e quindi}\ \ \frac{ds}{dt} = u.$$

E ad ogni spazio s percorso dalla stessa molecola corrispondendo nel corpo del fluido una sezione ω normale alla direttrice, l'area di questa sezione sarà una funzione di s ; $\omega = \omega(s)$.

434. Prop. III. Le quattro quantità: *forza sollecitante* F, *pressione* p, *densità* q, *velocità* u, si debbono considerare come funzioni delle due *variabili indipendenti* t, s, tempo e spazio.

Dim. Imperocchè ciascuna di esse può variare col tempo t in un medesimo punto della direttrice, e da punto a punto della direttrice nel medesimo tempo.

435. *Coroll.* Donde segue che, se di coteste quantità si prendono le *derivate totali* rispetto al tempo t e si designano per u', q', p', F', ciascuna derivata sarà composta di due termini. Così

$$u' = \frac{du}{dt} + \frac{du}{ds}u = \frac{du}{dt} + \frac{1}{ds}d.\frac{u^2}{2},$$

e quindi

$$u'ds = \frac{du}{dt}\,ds + d.\,\frac{u^2}{2}\,,$$

purchè la differenziazione indicata dal simbolo $(d.)$ s' intenda riferita alla sola variabile s.

CAPO II. *Equazione della continuità, per la quale si esprime come varia da sezione a sezione e da un istante all' altro la velocità u e la densità q. Che diviene questa legge quando la densità q è indipendente dal tempo t? e quando è costante in tutta la lunghezza della corrente?*

436. Proposizione. *Nel moto lineare di un fluido le variazioni della velocità u e della densità q debbono soddisfare all' equazione*

$$(a) \qquad \omega\,\frac{dq}{dt} + \frac{d.(q\omega u)}{ds} = 0.$$

Dim. Siano ω, ω_1 due sezioni successive nel corpo del fluido (fig. 86), normali alla direttrice s, e distanti l' una dall' altra dell' intervallo ds. Sarà

$$\omega_1 = \omega + \frac{d\omega}{ds}\,ds.$$

Lo spazio S compreso tra queste due sezioni infinitamente vicine, potendosi considerar come cilindrico, avrà per misura ωds, cioè sarà $S = \omega ds$.

Le due sezioni ω, ω_1 si riguardino come due *porte* per le quali il fluido entra ed esce liberamente senz' alcuna rottura di continuità. Il fluido nell'attraversar così lo spazio S, subisce od almeno può subire ad ogn' istante dt un *cangiamento di massa*, il quale si esprime in due modi diversi.

Se la massa fluida che riempie S è espressa allo spirar del tempo t da $q.S$, allo spirar del tempo $(t + dt)$ sarà espressa da

$$\left(q + \frac{ds}{dt}dt\right) S\;;$$

cosicchè nell' istante dt il fluido compreso nello spazio S avrà subìto il cangiamento di massa

$$\frac{dq}{dt} dt.S = \omega \frac{dq}{dt} dtds.$$

Ma è chiaro che questo cangiamento è pure uguale all' eccesso della quantità di fluido che nell' istante dt entra per la *porta* ω, su quella che nel medesimo istante esce dalla *porta opposta* ω_1, separata da ω per l' intervallo ds. Ora la prima di queste due quantità è espressa da $(q\omega udt)$, e la seconda da

$$\left[q \omega u + \frac{d.(q\omega u)}{ds} ds \right] dt,$$

e l' eccesso della prima sulla seconda è

$$-\frac{d.(q\omega u)}{ds} dsdt,$$

nuova espressione del cangiamento di massa. Eguagliandola alla precedente, e dividendole ambedue pel fattore comune $dsdt$, si ottiene

$$\omega \frac{dq}{dt} = -\frac{d.(q\omega u)}{ds},$$

donde la (a) che si doveva dimostrare.

437. *Corollario*. Se nel moto lineare la densità del fluido è indipendente dal tempo t, talchè sia $\frac{dq}{dt} = 0$, la velocità media u varierà secondo la legge espressa dall' equazione

$$\frac{d.(q\omega u)}{ds} = 0, \quad \text{ossia da} \quad d.(q\omega u) = 0;$$

la quale integrata somministra

$(a)_1$ $$u.\omega q = costante,$$

$(a)_2$ $$q.\omega udt = dt.costante,$$

dove la costante dell' integrazione dee ritenersi come una funzione del tempo, ed il primo membro della $(a)_2$ rappresenta evidentemente la massa fluida che nell' istante dt passa per la sezione ω. La legge della continuità, rappresentata da ciascuna di coteste equazioni, può esser espressa sotto due forme notabili nel modo che segue:

Quando nel moto lineare la densità del fluido è in ogni luogo indipendente dal tempo:

1°. *La velocità media, considerata nel medesimo istante in diverse sezioni trasversali, varia da una sezione all' altra in ragione inversa della densità e dell' area della sezione;*

2°. *La quantità di fluido che passa contemporaneamente per le diverse sezioni, si mantiene invariabile da una sezione all' altra.*

N.B. La legge della continuità sotto quest' ultima forma è quasi evidente per sè medesima: perchè se la quantità di fluido che passa per una sezione fosse maggiore di quella che passa nel medesimo tempo per un' altra sezione che vien dopo, il fluido nello spazio interposto tra le due sezioni dovrebbe comprimersi od addensarsi; e se avvenisse il contrario, dovrebbe dilatarsi o dividersi: il che ripugna alla supposizione, sia della continuità, sia della densità sempre uguale nel medesimo luogo.

438. *Scolio I.* Se la densità q del fluido è indipendente non solo dal *tempo* ma pur anche dal *luogo*, cosicchè si conservi costante in tutta la lunghezza del moto lineare, è palese che non dovrà più farsene menzione nel primo degli enunciati precedenti della legge della continuità.

Ciò essendo (come appunto suole accadere nel moto lineare de' liquidi e talvolta de' fluidi aeriformi), sia c la celerità media di una data *sezione fissa* f, qual sarebbe quella da cui esce il fluido, e che secondo le circostanze prende il nome or di *luce*, or di *sbocco*, or *d' emissario*, or di *foce* etc. Sarà

$$u.\omega = c.f, \quad \text{donde} \quad u = \frac{f}{\omega}.c\,.$$

Per questa formola, data la celerità c della sezione fissa f, si farà subito nota la velocità u di un' altra sezione qualsivoglia di cui l' area ω sia pur data.

439. *Scolio II.* E qui è da notare che la velocità c, appartenendo ad una sezione fissa f, si dee riguardare come funzione del solo tempo t. Laonde, essendo la sezione ω funzione del solo s, ove nella relazione (435)

$$u'ds = \frac{du}{dt}\,ds + d.\frac{u^2}{2}$$

si sostituisca il precedente valore di u, si avrà la formola

$$u'ds = f\frac{dc}{dt}.\frac{ds}{\omega} + \frac{c^2}{2}d.\frac{f^2}{\omega^2}.$$

CAPO III. *Equazione delle forze sollecitanti nel moto lineare, per la quale si esprime il cangiamento di pressione da sezione a sezione, in funzione della densità q, forza sollecitante F, e forza d' inerzia u'.*

440. Proposizione. *Il cangiamento $d.p$, che subisce la pressione nel senso della direttrice quando si passa da una sezione all' altra, è dato dalla formola*

$$(b) \qquad \frac{d.p}{q} = Fdf - \frac{du}{dt}ds - d.\frac{u^2}{2},$$

dove è da notare che i differenziali ds, $df = ds\cos.(sF)$ sono indipendenti dal tempo t.

Dimostrazione. Siano come più sopra (fig. 86)

$$\omega, \quad \text{ed} \quad \omega_1 = \omega + \frac{d\omega}{ds}ds,$$

due sezioni successive del corpo fluido, normali alla direttrice s e separate dall' intervallo ds. Lo spazio $S = \omega ds$, compreso tra queste due sezioni, sia occupato allo spirar del tempo t dalla massa fluida

$$dm = q.S = q.\omega\, ds,$$

e nel medesimo istante sia p la pressione idrostatica relativa alla sezione ω, ed Fdm la forza motrice composta di tutte le forze, sia *acceleratrici*, sia *ritardatrici*, che agiscono sui diversi punti dello strato $dm = q\,\omega\, ds$.

Questo strato $q\,\omega\, ds$ sarà sollecitato nel senso della direttrice dalla forza

$$Fq\omega\, ds.\cos(sF) = \omega qFdf,$$

e dalle due pressioni opposte contro le facce ω, ω_1,

$$p\omega,\quad -\left(p+\frac{dp}{ds}\,ds\right)\omega_1,$$

e queste tre forze [equilibrandosi (366) le due pressioni $p\omega, -p\omega_1$] si compongono nella forza unica motrice

$$\omega\left(q\,F\,df-\frac{dp}{ds}\,ds\right)=\omega\left(qF\,df-d.p\right)$$

diretta nel senso della direttrice. Ma l'azion di questa forza dee ad ogn'istante riuscire uguale alla componente tangenziale della forza d'inerzia (163), cioè a (435)

$$u'.q\omega\,ds=\omega q\left(\frac{du}{dt}\,ds+d.\,\frac{u^2}{2}\right)$$

Eguagliando quindi tra loro queste due quantità, e dividendo per ωq, avremo

$$Fdf-\frac{d.p}{q}=\frac{du}{dt}\,ds+d.\,\frac{u^2}{2},$$

donde la (*b*).

N.B. Quest'equazione (*b*) è identica all'equazion generale già trovata relativamente al moto di una sola molecola fluida dm infinitesima per ogni verso (424). Ed infatti invece dello strato fluido $q.\omega\,ds$, compreso tra le due sezioni ω, ω_1, avremmo potuto considerare la molecola ideale (433) che si muove sulla direttrice sotto l'influenza de'valori medii delle quantità F, p, q, u, relativi a ciascuna delle sezioni ω per le quali va passando la detta molecola.

CAPO IV. *Equazione delle forze sollecitanti nel moto lineare de' fluidi gravi; sua unione con quella della continuità quando la densità q è costante; e sua forma quando si fa astrazione dalle resistenze.*

441. Ne' fluidi gravi la forza F si può riguardare come composta di due altre forze g, gR, delle quali la prima, diretta in basso, è *l'azione acceleratrice* della gravità, e la seconda, diretta in senso opposto al moto lineare, è *l' azione ritardatrice* che nasce dalle resistenze. Ciò posto, si avrà per la nota proprietà della risultante

$$Fdf = g\,dz - gR\,ds = g\,(dz - R\,ds)\,,$$

dove df, dz, ds denotano al solito le proiezioni dell' elemento ds della traiettoria sulle direzioni delle tre forze F, g, gR, risultante e componenti, e l' asse verticale z si suppone diretto in giù come la gravità.

D' ora innanzi la forza F, composta di g e di gR, verrà denotata per gF, e quindi la (b) si scriverà sotto la forma

$$(b)' \qquad \frac{d.p}{gq} = Fdf - \frac{du}{gdt}\,ds - d.\,\frac{u^2}{2g}\,,$$

dove

$$Fdf = dz - Rds\,,$$

ed $\dfrac{u^2}{2g}$ rappresenta *l'altezza dovuta* alla velocità u (157. II.)

442. Quando la densità q è costante in tutta la lunghezza del moto lineare, invece di rappresentare la pressione idrostatica per p, si suole rappresentare per gqp, intendendo per p *l' altezza a cui dovrebbe inalzarsi una colonna dello stesso fluido, per produrre alla sua base la medesima pressione idrostatica che si considera nella corrente.* In questa supposizione, sostituendo nell' equazione $(b)'$ il prodotto gqp alla lettera p, si ottiene

$$(b)'' \qquad d.p = Fdf - \frac{du}{gdt}\,ds - d.\,\frac{u^2}{2g}.$$

443. In questa formola si sostituisca il valor medio della velocità u, dato dall' equazion della continuità (438), cioè

$$u = \frac{fc}{\omega};$$

risulterà

$$(A) \qquad d.p = Fdf - \frac{fdc}{gdt}.\frac{ds}{\omega} - \frac{c^2}{2g}d.\frac{f^2}{\omega^2}.$$

444. Ne' varii casi in cui è permesso di fare astrazione dalla resistenza R, basta porre $R = 0$, ed $Fdf = dz$ (441), ed avremo

$$(B) \qquad d.p = dz - \frac{fdc}{gdt}.\frac{ds}{\omega} - \frac{c^2}{2g}d.\frac{f^2}{\omega^2},$$

donde

$$(C) \qquad dz = d.p + \frac{fdc}{gdt}.\frac{ds}{\omega} + \frac{c^2}{2g}d.\frac{f^2}{\omega^2}.$$

445. E qui è da notare che lo spazio s che va percorrendo la molecola ideale sulla direttrice (433), variando insieme colla profondità z, si dee riguardare come funzione di z, e d'altra parte si ha

$$dz = ds\cos.(zs).$$

Ciò posto, se si voglia indicare l'integrazione dell'equazione (C) rispetto a z o ad s, senza fissarne i limiti, basterà scrivere

$$(C)_1 \qquad \int dz = \int d.p + \frac{fdc}{gdt}\int\frac{ds}{\omega} + \frac{c^2}{2g}\int d.\frac{f^2}{\omega^2},$$

perchè la velocità c, sebbene possa variare col tempo t, è affatto indipendente da z e da s.

APPLICAZIONI.

Dell' effusso dalla luce de' vasi.

CAPO I. *Legge della velocità dell' efflusso da un vaso inesausto. Che diviene questa legge quando le luci son piccolissime? e quando inoltre il vaso si vuota?*

*446. N. B. Nelle applicazioni che seguono quando diremo **centro medio** *di una sezione* o di *una luce*, s' intenda il *punto* per cui si concepisce dover passare la *direttrice* del moto lineare. Inoltre supporremo, per fissar le idee, che il fluido corrente sia l'acqua; onde all' acqua dee riferirsi tutto ciò che indica moto di fluido, come *affluire*, *efflusso*, *sbocco*, etc.

447. Problema I. *Determinare la legge della velocità dell' efflusso da un vaso* **inesausto**, o che mantiensi pieno per afflusso perenne.

Soluzione. Sia m l' area della sezion suprema del vaso, che segna il livello dell' acqua; a la profondità del centro medio della luce f sotto esso livello; e P, P_1 le pressioni esterne sulla luce f, e sulla sezione m; ed $m > f$. Integrando l' equazione (445)

$$\int dz = \int d.p + \frac{fdc}{gdt}\int\frac{ds}{\omega} + \frac{c^2}{2g}\int d.\frac{f^2}{\omega^2}$$

tra i limiti $z = 0$, $z = a$, a cui rispondono $p = P_1$, $p = P$, ed $\omega = m$, $\omega = f$, otterremo

$$a = P - P_1 + \frac{fdc}{gdt}\int_0^a\frac{ds}{\omega} + \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right).$$

Poniamo per abbreviare $\quad S = \int_0^a\frac{ds}{\omega},\quad n = 1 - \frac{f^2}{m^2},$

onde l' equazion precedente si muti nella

$$(a)\qquad a + P_1 - P = \frac{fS}{g}.\frac{dc}{dt} + n\frac{c^2}{2g}.$$

La quantità S, componendosi di parti positive $\frac{ds}{\omega}$, è positiva, come positiva è pure la n. Inoltre se le pressioni esterne P, P_1 sono quelle dell' atmosfera, si può fare $P = P_1$.

Ciò posto, l'equazione che dee risolvere il problema, si riduce a

$$(1) \qquad a = \frac{fS}{g} \cdot \frac{dc}{dt} + n\frac{c^2}{2g} ,$$

dove i termini del secondo membro sono essenzialmente positivi; perchè mantenendosi il vaso continuamente pieno, se si può concedere che la velocità c dell' efflusso cessi alfine di crescere per divenire costante, non si può affatto concedere che tal velocità c sia per diminuire, o che il rapporto $\frac{dc}{dt}$ sia per diventar negativo. Per questa semplice considerazione, dalla forma stessa della (1) si veggono venire in luce due leggi importanti dell' efflusso.

La prima di queste leggi sta in ciò, che l' efflusso s' inizia con moto equabilmente accelerato. Infatti la c nel suo venire dal nulla all' esistenza essendo estremamente piccola, nella (1) si può trascurare il termine $\frac{c^2}{2g}$, e ridurla ad $a = \frac{fS}{g} \cdot \frac{dc}{dt}$, da cui si trae

$$dc = \frac{ga}{fS}\,dt, \quad \text{e quindi} \quad c = \frac{ga}{fS} \cdot t ,$$

vale a dire: La velocità c, nel suo primo avviarsi, cresce in proporzione del tempo t.

La seconda legge sta in ciò, che l'efflusso tende a divenire uniforme. Ed invero dei due termini positivi $n\frac{c^2}{2g}$, $\frac{fS}{g} \cdot \frac{dc}{dt}$, la cui somma è costante ed $= a$, mentre il primo va crescendo insieme colla velocità c ed approssimandosi ad essere $= a$, il secondo dee diminuire ed avvicinarsi ad essere $= 0$. Scopriamo così che la velocità c cresce continua, ma per gradi dc sempre più lenti, e si avvicina (senza per altro poterlo oltrepassare) al limite segnato dall' equazione

$$n\frac{c^2}{2g} = a , \quad \text{donde} \quad \frac{c^2}{2g} = a\left[1 - \frac{f^2}{m^2}\right]^{-1} .$$

Rimane ora a trovare, per mezzo della integrazione della (1), la legge precisa onde varia la velocità c in funzione del tempo t. Cominciamo dal separar le variabili c, t. Dalla (1) moltiplicata per $2gdt$ si raccoglie

$$(2ag - nc^2)\,dt = 2fSdc ,$$

ossia

$$2ag\left(1 - \frac{n}{2ag}c^2\right)dt = 2fSdc ,$$

donde
$$\frac{ag}{fS}\, dt = dc \left[1 - \frac{n}{2ag}\, c^2\right]^{-1}.$$

Or quest' equazione si può integrare immediatamente riducendola alla forma

$$d\theta = \frac{d.tang\,\theta}{1 + tang^2\,\theta},$$

il che si ottiene ponendo

$$i^2 = -1, \quad b^2 = \frac{n}{2ag}, \quad h = \frac{2agb}{fS} = \frac{\sqrt{2agn}}{fS},$$

e poi moltiplicandola per ib. Si ha

$$d.\left(i\,\frac{h}{2}\,t\right) = \frac{d.(ibc)}{1 + (ibc)^2};$$

la quale integrata così che a $t = 0$ corrisponda $c = 0$, somministra

$$ibc = tang.\left(i\,\frac{ht}{2}\right), \qquad \text{e però} \qquad c = \frac{1}{b}. - i\,tang.\left(i\,\frac{ht}{2}\right).$$

E questa, richiamando le note formole (*App.* 74.)

$$-i\,sen.i\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}, \quad cos.i\,\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \quad -i\,tang.i\theta = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1},$$

equivale alla seguente

$$c = \sqrt{\frac{2ag}{n}} \cdot \frac{e^{ht} - 1}{e^{ht} + 1} = \sqrt{\frac{2ag}{n}}\left(1 - \frac{2}{e^{ht} + 1}\right).$$

Ecco la formola completa che, oltre di contenere le due leggi qui sopra dichiarate, ci fa intendere come avvenga che la velocità c, sebbene teoreticamente non possa mai toccare il limite $\sqrt{\frac{2ag}{n}}$, tuttavia nel fatto vi converge così rapidamente, che dopo pochi istanti la differenza diviene impercettibile: ond' è che nella pratica si ritiene sin da principio come costante la velocità dell' efflusso, e dovuta all' altezza $\frac{a}{n} = a\left[1 - \frac{f^2}{m^2}\right]^{-1}$.

Raccogliendo in una le varie parti della soluzion del problema, si può dire adunque che:

Nell' efflusso dell' acqua da un vaso inesausto, il *moto incipiente* è moto uniformemente accelerato, ma passati pochi istanti può aversi come *fisicamente uniforme*, e dovuto all' altezza $= \frac{a}{n}$.

448. Coroll. I. *La quantità dell' acqua* dQ che esce dalla luce f nel tempo dt, è $dQ = fcdt$, e per conseguente *la portata* Q *della luce nel tempo* t sarà $Q = fct = ft\sqrt{\frac{2ga}{n}}$.

Quando si dice *portata della luce* senza far menzione del tempo, si deve intendere la quantità del fluido uscito dalla luce nell' *unità di tempo.*

449. Coroll. II. Se la luce f è piccolissima rispetto alla sezione m di livello, il coefficiente n diverrà prossimamente $= 1$, e l'efflusso uniforme, espresso da $\frac{c^2}{2g} = a$, sarà dovuto all'altezza a dell' acqua soprastante alla luce.

Da qui e dalle prime nozioni della dinamica s'inferiscono le seguenti proposizioni:

1°. La velocità dell' efflusso per un piccol foro è dovuta all' altezza dell' acqua sovrastante.

2°. I getti *verticali* salgono all' altezza del livello del recipiente; i getti *obliqui* descrivono una parabola il cui parametro è quadruplo dell' altezza: salvo l' effetto delle resistenze che l' aria ed altre cagioni oppongono alla vena zampillante.

450. Problema II. *Determinare la legge dell' efflusso da un vaso verticale che si va vuotando per una luce* f *piccolissima rispetto alle sezioni* ω *del fluido.*

Soluzione. Avviato che sia l' efflusso, è palese che l'altezza x dell' acqua sovrincombente alla luce, sebbene sia variabile, nondimeno per un istante dt può aversi come costante, e per conseguenza si avrà $\frac{c^2}{2g} = x$, vale a dire: La velocità c dello sbocco sarà ad ogn' istante dovuta all' altezza dell acqua che sovrasta alla luce.

Cerchiamo ora di esprimere x, e quindi c, in funzione del tempo t. Il livello dell' acqua nello stato iniziale coincida colla sezione m situata all' altezza a sopra la luce, e dopo il tempo t sia coincidente colla sezione ω all' altezza x. Nell' istante dt l' acqua che cala giù dalla sezione ω sarà $= -\omega\, dx$, e quella che passa per la luce f sarà $fcdt = f dt\sqrt{2gx}$. Eguagliando queste due espressioni, avremo

$$dt.f\sqrt{2gx} = -\omega\, dx,$$

donde

$$(1) \qquad dt = -\frac{\omega x^{-\frac{1}{2}}\, dx}{f\sqrt{2g}};$$

la quale come s' integri allorchè si conosca la forma del vaso, ossia la sezione ω in funzione di x, si farà chiaro dagli esempii.

451. Esempio 1°. Supponiamo che il vaso sia prismatico e però $\omega = m$. Integrando così che a $t = 0$ corrisponda $x = a$, avremo

$$t = \frac{2m}{f\sqrt{2g}}(\sqrt{a} - \sqrt{x}),$$

e lo spazio $a - x$ percorso in questo tempo sarà

$$a - x = \frac{f\sqrt{2ga}}{m}t - \frac{gf^2}{2m^2}t^2.$$

Questa formola mostra che (155.2°.): In un vaso prismatico verticale che si vuota per un picciol foro, il livello dell'acqua si abbassa con moto equabilmente ritardato, essendo la forza ritardatrice $\varphi = \frac{gf^2}{m^2}$.

452. Esempio 2°. Se il vaso è generato dalla rotazion della parabola di quarto grado $y^4 = k^2x$, l'area della sezione ω sarà

$$\omega = \pi y^2 = \pi k\sqrt{x},$$

e la (1) diviene $$dt = -\frac{\pi k}{f\sqrt{2g}}dx,$$

che integrata si trasforma nella

$$t = \frac{\pi k}{f\sqrt{2g}}(a - x),$$

da cui si rileva che il livello dell'acqua si abbassa con moto equabile, e però tal forma di vaso sarebbe accomodatissima a farne una clepsidra.

CAPO II. *Legge della velocità dell'efflusso da' vasi inesausti, sia semplici, sia composti, avendo riguardo all'affusione perenne che li riempie. Pressione in una sezione qualsivoglia.*

453. Propos. I. *Affluendo equabilmente l'acqua sopra un vaso colla velocità v, e scendendo ad ogni istante la sezione m di livello con la velocità u, l'efflusso dalla luce f si farà colla velocità c determinata dall'equazione:*

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{a}{f^2}\left[\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2}(2k - 1)\right]^{-1},$$

dove a è l'altezza dell'acqua nel vaso, e $k = \frac{v}{u}$.

Dim. Nel tempo dt, mentre la superficie m si abbassa con la velocità u pel tratto $ds = udt$, l'acqua affluente si sovrappone ad essa con la massa $= m\,ds$, e con la velocità $\quad v = u + (v - u)$,

e però preme ad ogni istante dt con la quantità di moto

$$(v - u)m\,ds = (k - 1)\,u\,m\,ds\,.$$

Questa pressione potrà farsi uguale alla pressione che eserciterebbe nell' istante dt il peso di una colonna d'acqua, $= g\,m\,h$, avente per base m, ed un'altezza h da determinarsi per mezzo dell'equazione

$$gmh.dt = (k - 1)\,u\,mds\,;$$

sarà quindi $\qquad h = 2\,(k - 1)\,\frac{u^2}{2g} = \frac{f^2}{m^2}\,(2k - 2)\,\frac{c^2}{2g}\,.$

Ciò posto, nella formola $\qquad a = P - P_1 + \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right)$

che dà la velocità permanente dell'efflusso da un vaso dell'altezza $=a$, converrà accrescere di h la pressione P_1 della sezione suprema m, e la formola diverrà

$$a = P - P_1 - h + \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{f^2}{m^2}\right),$$

ossia, trasponendo e riducendo

$$(1) \qquad a + P_1 - P = \frac{c^2}{2g}\,f^2\left[\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2}(2k - 1)\right],$$

e da questa, supponendo che P e P_1 rappresentino la pressione esterna dell'aria, risulta la proposta.

454. Prop. II. Supponiamo che l'acqua affluisca continua sopra un vaso composto di tre vasi imboccanti l'uno nell'altro. Le sezioni supreme di questi vasi, contando dal più basso, siano m, m_1, m_2, e le sezioni infime siano f, f_1, f_2; onde l'acqua che affluisce sulla sezione m_2 del vaso più alto passi nel vaso medio per f_2, nell' inferiore per f_1, e poi sgorghi liberamente per f. Chiamata a l'altezza totale del vaso composto, l'efflusso dalla luce f si farà colla velocità determinata dall'equazione:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{a}{f^2}\left[\frac{1}{f^2} + \frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{m^2}(2k-1) - \frac{1}{m_1^2}(2k_1-1) - \frac{1}{m_2^2}(2k-1)\right]^{-1},$$

dove

$$k = \frac{m}{f_1}, \quad k_1 = \frac{m_1}{f_2}, \quad k_2 = \frac{v}{u}.$$

Dim. Siano a_0, a_1, a_2 le altezze de' tre vasi a cominciare dal più basso, e c_1, c_2 le velocità delle luci f_1, f_2. La legge della continuità somministra

$$fc = f_1 c_1 = f_2 c_2,$$

ed in virtù di questa legge i rapporti delle velocità della acqua affluente per le luci f_1, f_2, a quelle onde scendono le sottoposte superficie m, m_1 sono espresse da $\frac{m}{f_1} = k$, $\frac{m_1}{f_2} = k_1$. Denotando per P la pressione esterna dell' aria sì sopra f che sopra m_2, e per P_1, P_2 le pressioni sulle luci f_1, f_2, se applichiamo a ciascuno de' tre vasi la formola (1) del n°. 453, si avranno le

$$a_0 + P_1 - P = \frac{c^2}{2g} f^2 \left[\frac{1}{f^2} - \frac{1}{m^2}(2k - 1)\right],$$

$$a_1 + P_2 - P_1 = \frac{c^2}{2g} f^2 \left[\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{m_1^2}(2k_1 - 1)\right],$$

$$a_2 + P - P_2 = \frac{c^2}{2g} f^2 \left[\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{m_2^2}(2k_2 - 1)\right],$$

la cui somma è (a causa di $a_0 + a_1 + a_2 = a$)

$$a = \frac{c^2}{2g} f^2 \left[\frac{1}{f^2} + \frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{m^2}(2k-1) - \frac{1}{m_1^2}(2k_1-1) - \frac{1}{m_2^2}(2k_2-1)\right];$$

da qui la formola proposta.

455. Prop. III. *Nella corrente per un vaso inesausto, determinare la pressione p relativa ad una qualunque ω delle sue sezioni.*

Risposta

$$p = P + z - \frac{c^2 f^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

dove z è la profondità del centro medio di ω sotto il livello.

APPENDICE

SUI PRINCIPII FONDAMENTALI

DELLE MATEMATICHE

APPENDICE

SUI PRINCIPII FONDAMENTALI DELLE MATEMATICHE

Della dualità nel modo di essere delle quantità.

Le proposizioni che servono di fondamento come alle formole della Geometria analitica così a quelle della Meccanica, si derivano tutte da tre principii: 1.° Dal *principio della dualità* fondato sulla distinzione delle quantità in positive e in negative; 2.° Dal *principio di proporzione;* 3.° E dal *principio de' limiti.* Cominciamo dall'esporre ordinatamente e colla maggiore accuratezza possibile il primo de' nominati principii, il quale, in unione cogli altri due, si applica di continuo e domina in tutte le scienze il cui obbietto si possa rappresentare per mezzo dell' estensione.

1. Nella quantità, od in ciò che può crescere o diminuire, è necessario distinguere i *gradi* (ossia le parti) onde si fa l' accrescimento, da' gradi onde si fa la diminuzione. I primi, aggiungendosi successivamente alla quantità, si dicono *positivi;* ed i secondi, sottraendosi successivamente dalla quantità, si dicono *negativi.* Una quantità si deve riguardare come *positiva* o come *negativa* secondochè sia composta di gradi positivi o di gradi negativi.

Ogni quantità si può rappresentare *numericamente* per mezzo di una linea. Immaginiamo una linea che varii per gradi: se co' gradi positivi si va in un senso, co' negativi si anderà in senso contrario. Dunque *una linea* se generata da un punto moventesi in un senso si riguarda come *positiva*, generata da un punto moventesi in senso contrario si dovrà riguardare come *negativa.*

Nell' indicare una linea per mezzo di due lettere, per esempio AB, noi converremo che la prima delle due lettere indichi l'*origine* della linea, e la seconda il *termine;* cosicchè l' ordine di successione delle due lettere mostri il senso del moto secondo cui si suppone generata la linea. Da ciò segue *necessariamente* che se, nella misura della linea, la lunghezza AB si rappresenta con un numero positivo, la lunghezza BA si dovrà rappresentare con lo stesso numero, ma negativo; onde si avrà

$$BA = -AB;$$

cioè: *Per mutare il segno di una linea basta invertere l' ordine di successione delle due lettere che la rappresentano.*

Da queste nozioni si raccoglie il seguente:

2. **Principio.** « Se le parti di una linea retta (AB, BC, CD, DE) sono così disposte che ciascuna *cominci* dove *termina* quella che precede, la *somma di queste parti* sarà eguale alla linea che dalla *origine* della prima parte va al *termine* dell' ultima » :

$$AB + BC + CD + DE = AE.$$

Dimostrazione. Supponiamo che le parti da sommarsi siano due AB, BC: io dico che la retta AC rappresenterà la loro somma:

$$AC = AB + BC.$$

Convien distinguere tre casi: poichè il punto B o è dentro l' intervallo compreso fra i due punti A, C (*fig.* 1); o, essendo fuori di quest' intervallo, rimane più vicino al punto A, ovvero al punto C.

Nel primo caso, l' equazione ($AC = AB + BC$) è evidente per sè medesima, esprimendo che il tutto è ugnale alla somma delle sue parti.

Nel secondo caso, se la retta AC si riguarda come positiva, sarà positiva la BC, e negativa la AB, e si avrà evidentemente:

$$AB = -BA, \quad BC = BA + AC;$$

donde, sommando, $\quad AB + BC = AC.$

Nel terzo caso, se la AC si riguarda come positiva, sarà positiva la AB e negativa la BC; e si avrà evidentemente:

$$AB = AC + CB, \quad BC = -CB;$$

donde, sommando, $\quad AB + BC = AC.$

È adunque provato in ogni caso che, se le due parti di una retta sono così disposte che la seconda cominci dove termina la prima, la somma delle due parti sarà eguale alla retta che va dalla origine della prima al termine della seconda.

Supponiamo adesso che le parti che si considerano sopra una retta siano in qualsivoglia numero: quattro per esempio

$$(AB, BC, CD, DE).$$

Se sommiamo le prime due parti AB, BC, la somma sarà la retta AC che va dalla origine della prima parte al termine della seconda; e se sommiamo questa retta AC colla terza parte CD, la somma sarà la retta AD che va dalla origine della prima parte al termine della terza. Continuando così a sommare *con ciascuna delle parti successive la retta che rappresenta la somma delle parti che precedono*, si arriverà necessariamente alla retta ($= AE$) che va dalla origine della prima parte al termine dell'ultima, e che rappresenta la somma di tutte le parti (AB, BC, CD, DE).

Scolio La regola del sommare contenuta nella proposizione or dimostrata si applica evidentemente non solo alle parti di una retta, ma di una linea qualsivoglia, ed anche alle parti di un angolo, ed in genere alle parti di ogni estensione le quali siano cosiffatte che si possano collocare l'una dopo l'altra per apposizione continua, sia nel medesimo senso, sia in senso contrario.

Questa proposizione costituisce un principio quanto semplice altrettanto fecondo il quale, fondandosi sulla *dualità* degli stati opposti in cui può trovarsi la quantità estesa, or *positiva* ed or *negativa*, verrà da noi richiamato col titolo di **principio della dualità**; e ciò tanto più che, quando si passa dalla geometria alla meccanica, la dualità dell'estensione rappresenta la *dualità delle forze* che regnano nella natura, *attrattive* e *ripulsive*.

Per esempio: Date più forze applicate ad un punto A ed agenti secondo una medesima retta, per comporle in una sola (giusta la nota legge, Mec. 23), basta rappresentarle in grandezza e in direzione con parti successive (AB, BC, CD, DE) della stessa retta, così disposte che ciascuna cominci dove termina quella che precede: la forza risultante sarà rappresentata dalla retta che va dalla origine della prima parte al termine dell'ultima.

Il principio della dualità spiega principalmente la sua fecondità nella teoria della composizione delle linee e delle superficie.

Teoria della composizione delle linee.

Definizioni. *Proiezione di un punto, di una linea, di una superficie; simboli; proporzionalità tra le rette parallele e le loro proiezioni omologhe.*

3. La **proiezione di un punto** M (*fig.* 2), fatta parallelamente a un **piano dirigente** D, sopra *una linea* Ox, è la intersezione m che quivi produce un altro piano condotto dal punto M parallelamente al piano dirigente D.

La proiezione di un punto M (*fig.* 3), fatta parallelamente ad un **asse dirigente** d, sopra *una superficie* X, è quivi il *piede* della retta condotta dal punto M parallelamente all' asse dirigente d.

La **proiezione di una linea o di una superficie** è il luogo dove cadono le proiezioni di tutti i punti della linea o della superficie.

Il simbolo

$$^{D}a_{x}$$

significa: la linea a proiettata sull' asse x, parallelamente al piano dirigente D.

Il simbolo

$$^{D}(a+b+c+d)_{x}$$

significa la somma delle proiezioni delle rette a, b, c, d sull' asse x, essendo dirigente il piano D; talchè si ha

$$^{D}(a+b+c+d)_{x} = {}^{D}a_{x} + {}^{D}b_{x} + {}^{D}c_{x} + {}^{D}d_{x}.$$

Il simbolo

$$^{d}p_{X}$$

significa: l' estensione p (sia di linea, sia di superficie) proiettata sul piano X parallelamente all' asse dirigente d.

La proiezione sopra un *asse* x o sopra *un piano* X si dice **ortogonale** od **obliqua**, secondochè la retta che unisce ciascun punto colla sua proiezione è perpendicolare od obliqua all' asse od al piano. Nel caso delle proiezioni ortogonali si tralascia di segnare sia il piano dirigente, sia l' asse dirigente e si scrive:

$$a_x \quad , \quad p_X \quad .$$

Quando dicesi *proiezione*, senz' altro aggiunto, intendasi *l' ortogonale*.

La proiezione di una retta MN (*fig.* 4) sopra un asse Ox, è in questo il segmento mn compreso tra i piani che proiettano, parallelamente al piano dirigente D, i punti *iniziale* e *finale* della retta MN; essendochè in tale segmento cadono le proiezioni di tutti i punti di essa retta.

Le proiezioni di due rette sopra un medesimo asse e parallelamente allo stesso piano dirigente, si diranno *proiezioni omologhe* delle due rette.

4. *Teorema*. Due rette parallele MN, $M'N'$ sono proporzionali alle loro proiezioni omologhe mn, $m'n'$ (*fig.* 4).

Dim. Dal punto M si conduca parallelamente all' asse Ox la linea MC così che resti compresa tra i due piani Mm, Nn, paralleli al piano dirigente D: questa linea MC rappresenterà in grandezza e in direzione la proiezione mn della retta MN sull' asse Ox, essendochè MC ed mn sono due rette parallele, comprese tra due piani paralleli.

Ciò posto, consideriamo l' altra retta $M'N'$ parallela ad MN, ed, a quel modo che si è formato il triangolo MNC, formiamo il triangolo $M'N'C'$, dove il lato $M'C'$ rappresenta in grandezza e in direzione la proiezione $m'n'$ della retta $M'N'$ sull' asse Ox. I due triangoli MNC, $M'N'C'$, avendo i lati paralleli due a due e però essendo simili, danno

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{MC}{M'C'} = \frac{mn}{m'n'},$$

cioè: Le due rette parallele MN, $M'N'$ sono proporzionali alle loro proiezioni omologhe.

Coroll. Se le due rette parallele MN, $M'N'$ sono eguali e dirette nel medesimo senso, anche le loro proiezioni omologhe mn, $m'n'$

sono eguali e dirette nel medesimo senso. Dunque: *Una retta si può trasportare parallelamente a sè stessa dove si vuole, senza che la sua proiezione sopra un asse cangi di grandezza e di senso.*

Rapporto tra le rette e le loro proiezioni ortogonali.

5. **Teorema.** *La proiezione ortogonale di una retta sopra un' altra è uguale al prodotto della retta pel coseno dell' angolo compreso tra le due rette.*

Dim. Nel caso della proiezione ortogonale il triangolo MNC (*fig.* 4) essendo rettangolo in C, la retta data MN e la sua proiezione mn sopra un' altra linea qualunque Ox, si possono riguardare come *l'ipotenusa* ed il *cateto* di un triangolo rettangolo CMN, ed è noto che nel triangolo rettangolo si ha

$$MC = MN \,.\, \cos.(CMN), \text{ dove } MC = mn.$$

6. *Teorema.* Date due rette a, b nello spazio, se ciascuna si moltiplica per la proiezione che essa riceve dall' altra sulla propria direzione, i due prodotti saranno uguali, vale a dire sarà

$$a \,.\, b_a = b \,.\, a_b \quad .$$

Dim. Le due rette a, b si trasportino parallelamente a sè stesse così che divergano da una stessa origine O (*fig.* 5), rappresentate da OA, OB.

Se dai punti estremi A, B di ciascuna si tirano le perpendicolari Aa, Bb, sulla direzione dell' altra, le corrispondenti proiezioni saranno $Oa = a_b$, $Ob = b_a$. E i due triangoli simili OAa, ObB daranno

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob}, \text{ donde } OA.Ob = OB.Oa \quad .$$

Il qual risultato si rende pur manifesto da ciò che ciascuno de' due prodotti è $= OA.OB \cos.(AOB)$.

N. B. Il prodotto di una retta per la proiezione ch' essa riceve da un' altra dee riguardarsi come *positivo* o come *negativo*, secondochè le direzioni della retta e della proiezione ricevuta corrono nel medesimo senso od in senso contrario.

7. *Scolio.* Date due linee a, b di nota direzione, quando il loro angolo sarà indicato da uno de' simboli

$$(ab), \quad (a,b),$$

per un tal simbolo si deve intender l'angolo che si forma conducendo per un punto arbitrario O (*fig.* 6) due linee Oa, Ob parallele alle rette date a, b, e dirette nel medesimo senso: così

$$ang.(ab) = ang.aOb.$$

Inoltre i due simboli (ab), (ba) indicheranno due angoli uguali ma di segno contrario, vale a dire, se l'angolo (ab) si concepisce come descritto da un raggio che dalla posizione Oa (*fig.* 6) passa alla posizione Ob *girando in un senso convenuto*, l'angolo (ba) si dovrà concepire come descritto dallo stesso raggio che, *girando in senso contrario*, torna dalla posizione Ob alla posizione Oa.

Similmente, se X rappresenta un piano, il simbolo (Xa) rappresenterà l'angolo compreso tra il piano X e la retta a, o più precisamente (*fig.* 7.) l'angolo pOa, compreso tra la retta Oa e la linea Op che, sul piano X, rappresenta la proiezione ortogonale di Oa.

8. Secondo questi simboli, *la proiezione ortogonale* di una retta a, sia sopra un asse x, sia sopra un piano X, sarà espressa non solo nella grandezza ma eziandio nella direzione dalle formole

$$a_x = a\cos.(xa), \quad a_X = a\cos.(Xa).$$

Si noti ancora che se a' designa la retta Oa' (*fig.* 6) opposta nella direzione ad Oa, i due angoli $(a'b)$, (ab) saranno supplementarii e di segno contrario, talchè si avrà

$$\begin{cases} sen.(a'b) = -\,sen.(ab), \\ cos.(a'b) = -\,cos.(ab); \end{cases}$$

vale a dire: Quando nell'angolo indicato dal simbolo (ab) uno dei due lati a, b prende una direzione opposta a quella che aveva, il seno ed il coseno del nuovo angolo avranno lo stesso valore di prima, ma di segno contrario.

Rapporto tra le rette e le loro proiezioni oblique.

9. Teorema. *La proiezione obliqua di una retta* $= a$ *sopra un asse* x *(fig. 8) è uguale al prodotto della retta pel rapporto de' seni degli angoli che il* **piano dirigente** D *fa colla* **retta** *e coll'* **asse** ; cioè

$$^{D}a_x = a\,\frac{sen.(Da)}{sen.(Dx)}.$$

Dim. OD rappresenti in profilo il piano dirigente D, e per O conduciamo un asse Od perpendicolare a questo piano. Consideriamo i due piani che proiettano i punti iniziale e finale della retta a parallelamente al piano dirigente D, ed i segmenti a_1 e b intercetti da questi piani sopra i due assi Ox, Od. Sarà

$$a_1 = {}^{D}a_x.$$

Ma sull'asse Od il segmento b si può riguardare come la proiezione ortogonale, sia della retta a, sia della retta a_1, e però si ha

$$b = a_1 \cos.(xd), \quad b = a \cos.(ad).$$

Da qui

$$a_1 = a\,\frac{\cos.(ad)}{\cos.(xd)};$$

ed essendo complementarii gli angoli (Da) e (ad), (Dx) ed (xd), si conchiude

$$^{D}a_x = a\,\frac{sen.(Da)}{sen.(Dx)}.$$

Del principio della retta risultante.

Definizione della risultante di più rette date: unica; sue proprietà rispetto alle componenti.

10. *Date più rette a, b, c, d etc.* (*fig.* 9), io chiamo **risultante** *delle medesime quella retta la cui proiezione sopra un asse mutabile x* (essendo qualunque il piano dirigente D) *è sempre uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle rette date*, le quali si diranno **componenti** rispetto alla retta risultante.

Teorema I. *Per trovare la risultante di più rette date Oa, Ob, Oc* etc. (*fig.* 9), *basta formare una linea poligona i lati della quale siano successivamente paralleli ed eguali a ciascuna delle rette date e diretti nel medesimo senso: la* **risultante** *sarà la retta Or che va dal punto iniziale al punto finale di siffatta linea poligona.*

Dim. Si concepiscano proiettati sopra un asse Ox (essendo qualunque il piano dirigente D) i lati successivi della linea poligona: le proiezioni saranno rispettivamente uguali, in grandezza e in direzione, alle proiezioni omologhe delle rette date. Ciò posto, i punti O, A, B, C, D *etc.* rappresentino sull' asse Ox le proiezioni de' vertici consecutivi di essa linea poligona, i quali, per fissar le idee, supporremo cinque. In questa supposizione, le parti OA, AB, BC, CD dell' asse Ox, e la retta OD che va dalla origine della prima parte al termine dell' ultima, equivarranno rispettivamente alle proiezioni omologhe delle rette date Oa, Ob, Oc, Od (4), e della loro risultante Or. Ora dal principio della dualità abbiamo

$$OD = OA + AB + BC + CD,$$

vale a dire

$$^{D}r_x = {}^{D}(a + b + c + d)_x,$$

formola che esprime la proprietà per cui si è definita la retta risultante.

Teorema II. *La risultante di più rette date è unica, e però si può tenere qual ordine si vuole nel determinarla:* vale a dire, comunque si varii la costruzione del poligono i cui lati, succedentisi con ordine arbitrario, rappresentano le rette date Oa, Ob, Oc, Od, etc., il lato Or che rappresenta la risultante sarà sempre il medesimo.

Dim. Supponiamo possibili due risultanti Or, Or' (*fig.* 10) con direzione diversa. Nel piano determinato dalle medesime conduciamo un asse Ox perpendicolare ad Or e però obliquo ad Or'. Se queste due rette si proiettano ortogonalmente sull' asse Ox, la proiezione di Or sarà nulla, e non quella di Or'. Ma sì la prima che la seconda proiezione, dovendo essere uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle componenti (a, b, c, etc.), dovrebbe avere uno stesso valore. Per questa ragione si vede in generale essere assurda la supposizione di due risultanti delle medesime rette.

Scolio I. Costruendo il poligono che determina la risultante, si fa manifesto che, quando le rette componenti sono due, la risultante è la diagonale del parallelogrammo costruito sulle due rette prese per lati; e che, quando le rette componenti sono tre e non situate in un medesimo piano, la risultante è la diagonale del parallelepipedo costruito sulle tre rette prese per lati.

Scolio II. Le linee che, partendo insieme da un punto O e segnando vie comunque diverse, vanno a terminare insieme ad un altro punto D, proiettate sopra un asse qualsivoglia, hanno eguali evidentemente le proiezioni omologhe.

Dalla proprietà della retta risultante, espressa dalla sua definizione, si deducono immediatamente due altre proprietà fondamentali che sono di uso continuo.

11. 1.ª *Una retta r, moltiplicata per la proiezione che essa riceve sulla sua direzione da un' altra retta q, è uguale alla somma delle componenti a, b, c etc. dell' una r, moltiplicate rispettivamente per la proiezione che ricevono sulle loro direzioni dall' altra q;* vale a dire

$$rq_r = qr_q = aq_a + bq_b + cq_c + \text{etc.}$$

12. 2.ª *Il quadrato della risultante r è eguale alla somma de' quadrati delle sue componenti a, b, c etc., più due volte la somma de' prodotti che possono farsi moltiplicandole due a due, l' una per l' altra e pel coseno dell' angolo compreso;* vale a dire

$$r^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab \cos.(ab),$$

dove il simbolo Σ indica la somma di tutti i termini analoghi a quello che ha sotto di sè, talchè

$$\Sigma a^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \text{etc.};$$

$$\begin{aligned}\Sigma ab \cos.(ab) = ab\cos.(ab) &+ ac\cos.(ac) + ad\cos.(ad) + \text{etc.}\\ &+ bc\cos.(bc) + bd\cos.(bd) + \text{etc.}\\ &+ cd\cos.(cd) + \text{etc.}\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Dim. I. Se proiettiamo ortogonalmente la risultante r e le sue componenti a, b, c etc. sulla direzione della retta q, la proiezione della r dev'essere uguale alla somma delle proiezioni delle a, b, c etc.; e ciò per la definizione medesima della retta risultante. Avremo dunque

$$r_q = (a + b + c + d + \text{etc.})_q,$$

e quindi, moltiplicando per q,

$$qr_q = q(a + b + c + \text{etc.})_q;$$

la quale (ove si richiami il teorema contenuto nell'equazione $ab_a = ba_b$) si riduce subito alla seguente

$$rq_r = aq_a + bq_b + cq_c + \text{etc.}$$

che è la prima formola che si doveva dimostrare.

II. Supponiamo adesso che la retta q coincida colla retta r. Essendo $r_r = r$ (giacchè la proiezione di una retta sopra sè medesima è evidentemente uguale alla stessa retta), la formola precedente diviene

$$(a) \qquad r^2 = ar_a + br_b + cr_c + \text{etc.}$$

Ma, per la definizione della risultante,

$$\begin{aligned} r_a &= a + b_a + c_a + d_a + \text{etc.}\\ r_b &= b + a_b + c_b + d_b + \text{etc.}\\ r_c &= c + a_c + b_c + d_c + \text{etc.}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Sostituendo questi valori di r_a, r_b, r_c etc. nella (a), si ottiene

$$r^2 = \Sigma a^2 + 2\,\Sigma ab_a = \Sigma a^2 + 2\,\Sigma ab \cos.(ab),$$

la quale è la seconda formola che si trattava di provare.

La risultante colle sue proprietà costituisce un *nuovo principio assai fecondo di dimostrazione e di ricerca.*

Uso del principio della risultante nell' espressione delle componenti parallele ad assi coordinati.

Assi coordinati. Tre assi Ox, Oy, Oz (*fig.* 11) indefiniti e non situati in un medesimo piano traggano *l' origine* da un medesimo punto O, *coordinati* tra loro sotto angoli arbitrarii (xy), (yz), (zx). A partir da quest' origine ciascun asse correrà in due versi o sensi contrarii, *l' uno positivo* (Ox, Oy, Oz), e *l' altro negativo* (Ox', Oy', Oz').

Cotesti assi determinano tre piani yz, zx, xy che, coordinati in O, spartiscono tutto quanto lo spazio in otto angoli triedri

$$\left\{\begin{matrix} xyz \text{ e } x'y'z', \\ xyz' \text{ e } x'y'z, \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} xy'z \text{ e } x'yz', \\ x'yz \text{ e } xy'z', \end{matrix}\right.$$

i quali due a due sono opposti in *simmetria* intorno all' origine O: per esempio, al triedro cogli spigoli positivi Ox, Oy, Oz si oppone simmetrico il triedro cogli spigoli negativi Ox', Oy', Oz'.

La posizione correlativa degli assi positivi Ox, Oy, Oz si può determinare per la convenzione seguente. Se l' asse Oz si riguarda come una persona ritta coi piedi in O e colla faccia volta verso l' apertura dell' angolo positivo (xy) minore di due retti, questa persona dee avere a *destra* l' asse Ox, ed a *sinistra* l' asse Oy. Nel modo stesso l' asse Ox è situato rispetto agli assi Oy, Oz; e l' asse Oy rispetto agli assi Oz, Ox.

Alcuni soglion fare l' ipotesi opposta, supponendo a sinistra ciò che noi abbiamo supposto a destra, e viceversa. Qualunque però sia l' ipotesi che si adotti, purchè si ritenga fedelmente, le formole saranno affatto le medesime.

13. *Teorema.* Per decomporre una retta f in tre P, Q, R parallele a tre assi coordinati x, y, z, basta proiettarla sopra ciascuno de' tre assi, parallelamente al piano determinato dagli altri due: le proiezioni rappresenteranno le componenti cercate; e posto

$$l = \frac{sen.(yz, f)}{sen.(yz, x)}, \quad m = \frac{sen.(zx, f)}{sen.(zx, y)}, \quad n = \frac{sen.(xy, f)}{sen.(xy, z)},$$

si avrà

$$P = lf, \quad Q = mf, \quad R = nf,$$

dove le lettere x, y, z sotto le linee trigonometriche esprimono le direzioni positive degli assi coordinati.

Dim. La retta f sia rappresentata in O da Of (*fig.* 12). Dal punto f si tirino tre piani rispettivamente paralleli ai piani coordinati yz, zx, xy. Questi sei piani chiuderanno un parallelepipedo, i cui lati OP, OQ, OR sono (come già sappiamo) le componenti della retta Of, e sono ancora le proiezioni della stessa retta sopra ciascuno degli assi x, y, z, essendo dirigente il piano determinato dagli altri due; ciò che è espresso dalle formole proposte.

Coroll. I. Nelle formole

$$P = lf, \quad Q = mf, \quad R = nf,$$

le tre quantità l, m, n sono ciò che diventano le componenti P, Q, R di f quando $f = 1$, vale a dire, sono (parallele ai tre assi x, y, z) le componenti di una retta $= 1$ ed avente la direzione secondo cui è indirizzata nello spazio la retta f. Quindi

$$1 = l^2 + m^2 + n^2 + 2\left[mn\cos.(yz) + nl\cos.(zx) + lm\cos.(xy)\right].$$

N. B. Una retta f, che sia diretta nello spazio come la risultante $= 1$ delle tre componenti (l, m, n), si dirà che ha la *direzione* (l, m, n); e le quantità l, m, n si diranno gli *elementi* della stessa direzione.

Coroll. II. Se la retta f è situata nel piano (x, y), sarà

$$l = \frac{sen.(y, f)}{sen.(y, x)} = \frac{sen.(fy)}{sen.(xy)}, \quad m = \frac{sen.(xf)}{sen.(xy)},$$

e

$$P = f\frac{sen.(fy)}{sen.(xy)}, \quad Q = f\frac{sen.(xf)}{sen.(xy)}.$$

Coroll. III. Allorchè gli assi x, y, z sono coordinati tra loro ad angolo retto, gli elementi della direzione (l, m, n) della retta f diventano i coseni degli angoli che la retta f fa co' tre assi x, y, z, cioè

$$l = \cos.(xf), \quad m = \cos.(yf), \quad n = \cos.(zf);$$

e se la retta f è nel piano xy, essendo gli angoli xf, fy complementarii, sarà

$$\begin{cases} l = \cos.(xf), \\ m = \text{sen}.(xf), \end{cases} \qquad \begin{cases} P = f\cos.(xf), \\ Q = f\,\text{sen}.(xf). \end{cases}$$

Coroll. IV. Per ottenere gli elementi l, m, n della direzione di una retta f, di cui siano date le componenti P, Q, R parallele a tre assi x, y, z, basta dividere ciascuna di queste componenti per la stessa retta.

14. *Teorema.* Una retta f composta delle tre P, Q, R parallele agli assi x, y, z, se si proietta colle sue componenti sopra un'altra retta qualunque f', la proiezione della risultante (siccome eguale alla somma delle proiezioni delle componenti) sarà espressa dall' equazione

$$(a) \qquad f\cos.(ff') = P\cos.(xf') + Q\cos.(yf') + R\cos.(zf'),$$

dove le lettere x, y, z indicano le direzioni positive degli assi coordinati.

Dim. Osserviamo dapprima che le componenti P, Q, R, quando non si riferiscono ad assi coordinati, si riguardano sempre come quantità positive, ed allora, invece della formola precedente, si dee scrivere :

$$(b) \qquad f\cos.(ff') = P\cos.(Pf') + Q\cos.(Qf') + R\cos.(Rf')$$

dipendendo il segno de' termini unicamente da' coseni degli angoli. Ma quando le componenti P, Q, R si riferiscono nella direzione agli assi x, y, z a cui son parallele, esse si riguardano come *positive* o come *negative*, secondochè sono dirette nel senso degli assi positivi x, y, z, o de' negativi. Per questa convenzione, la formola (b) non sarà identica alla formola (a) che quando le P, Q, R sono positive. Perchè se una di esse, per esempio la P, inverte la direzione e divien negativa, nell'equazione (b) il prodotto

$$P\cos.(Pf')$$

non cangerà più di segno come dovrebbe; diventando negativi insieme i due fattori P, $cos.(Pf')$ (8). Dunque al prodotto $P\,cos.(Pf')$ convien sostituire il prodotto $P\,cos.(xf')$, ed in generale all'equazione (b) convien sostituire l'equazione (a).

Coroll. Per la stessa ragione alla formola:

$$f^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2\,[QR\,cos.(QR) + RP\,cos.(RP) + PQ\,cos.(PQ)]$$

si dee sostituire la formola

$$f^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2\,[QR\,cos.(yz) + RP\,cos.(zx) + PQ\,cos.(xy)].$$

15. *Teorema.* Se la retta f si compone delle due P, Q parallele agli assi x, y, oltre la formola

$$(1) \qquad f\,cos.(ff') = P\,cos.(xf') + Q\,cos.(yf'),$$

si avrà la formola

$$(2) \qquad f\,sen.(ff') = P\,sen.(xf') + Q\,sen.(yf').$$

Dim. Proiettiamo la retta f e le sue componenti P, Q sopra un asse p, situato nel piano (xy) e perpendicolare ad f'. Avremo

$$(a) \qquad f\,cos.(pf) = P\,cos.(px) + Q\,cos.(py).$$

Ora l'angolo (pf') essendo retto per ipotesi, saranno complementarii gli angoli:

$$(pf) \text{ e } (ff');\ (px) \text{ e } (xf');\ (py) \text{ e } (yf'),$$

e però il coseno dell'uno sarà eguale al seno dell'altro; e se al primo si sostituisce il secondo, la formola (a) si muta nella (2).

N. B. Le formole (1) e (2) si possono riguardare come il fondamento della trigonometria piana.

16. *Teorema.* Date (parallele agli assi x, y) le componenti (PQ), $(P'Q')$ di due rette f, f', il seno del loro angolo (ff') si determina per l'equazione

$$ff'\,sen.(ff') = (PQ' - P'Q)\,sen.(xy),$$

dove l'angolo (ff') (minore di due retti) si dee considerare come *positivo* o come *negativo*, secondochè il moto della sua generazione è o no nello stesso senso che il moto della generazione dell'angolo (xy) compreso tra gli assi positivi Ox, Oy.

Dim. Il teorema da dimostrarsi non è che una semplice trasformazione della formola or trovata:

$$(2) \qquad f\,sen.(ff') = P\,sen.(xf') + Q\,sen.(yf').$$

Infatti le componenti P', Q', essendo le proiezioni della retta f' fatte sopra ciascuno degli assi x, y parallelamente all'altro, saranno espresse da (13, *coroll. II.*)

$$P' = f'\frac{sen.(yf')}{sen.(yx)} = -f'\frac{sen.(yf')}{sen.(xy)}\,,\quad Q' = f'\frac{sen.(xf')}{sen.(xy)}\,,$$

donde

$$f'sen.(xf') = Q'sen.(xy),\quad f'sen.(yf') = -P'sen.(xy).$$

Poste queste relazioni, si vede che la (2) moltiplicata per f' si trasforma subito nella

$$ff'sen.(ff') = (PQ' - P'Q)sen.(xy),$$

la quale si può tradurre così: « Il prodotto di due rette f, f' pel seno dell'angolo onde la seconda devia dalla prima f, è uguale alla differenza de' prodotti che si ottengono moltiplicando ordinatamente le componenti (P, Q) della prima f per le componenti (Q', P') di nome diverso della seconda f': il tutto moltiplicato pel seno dell'angolo de' due assi x, y. »

Scolio. Si avverta che la formola precedente rappresenta l'area del parallelogrammo di cui i lati contigui sono f, f', ovvero il doppio del triangolo determinato da questi lati.

17. Date più rette f, f', f'' etc. colle loro direzioni $(l, m, n,)$, (l', m', n'), (l'', m'', n'') etc. riferite a tre assi x, y, z, la loro risultante sarà fatta nota nella lunghezza F e nella direzione (a, b, c) per le quattro formole seguenti, delle quali tutte conosciamo la dimostrazione:

$$F^2 = \Sigma f^2 + 2\,\Sigma ff'\,cos.(ff')\,,$$

$$\begin{cases} aF = \Sigma lf = lf + l'f' + l''f'' + \text{etc.}\,, \\ bF = \Sigma mf = mf + m'f' + m''f'' + \text{etc.}\,, \\ cF = \Sigma nf = nf + n'f' + n''f'' + \text{etc.}\,; \end{cases}$$

essendo chiaro che le ultime tre esprimono la proprietà per cui si è definita la retta risultante, cioè *la retta la cui proiezione sopra un asse mutabile è sempre uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle rette componenti.*

Coroll. Dati i numeri che rappresentano più rette f, f', f'' etc. e le loro direzioni, la condizione analitica cui debbono soddisfare coteste rette, affinchè possano formare il contorno di un poligono chiuso, viene espressa, sia dall' equazione unica

$$\Sigma f^2 + 2\Sigma ff' \cos.(ff') = 0,$$

sia dal sistema delle tre equazioni:

$$\Sigma lf = 0, \quad \Sigma mf = 0, \quad \Sigma nf = 0.$$

Uso del principio della risultante nell' espressione delle coordinate di un punto; e nella trasformazione delle coordinate, ossia nella trasformazione delle componenti di una retta in altre componenti di nota direzione.

18. **Le coordinate** x, y, z di un punto M riferito a tre assi Ox, Oy, Oz sono (sopra questi assi) le *componenti della retta OM che va dalla origine O al punto M*. Quindi denotando per r questa retta, e per l, m, n gli elementi della sua direzione, avremo (13)

$$x = lr, \quad y = mr, \quad z = nr.$$

N. B. Un punto M determinato dalle coordinate x, y, z sarà indicato così: *punto* (x, y, z).

19. **Teorema.** Dati i due punti A (α, β, γ) ed M (x, y, z), le componenti della retta AM (*fig.* 13) che va dal primo punto al secondo saranno $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$; talchè se si denota per v la retta AM, e per (l, m, n) la sua direzione, avremo

$$x - \alpha = lv, \quad y - \beta = mv, \quad z - \gamma = nv.$$

Dim. Le coordinate α ed x de' punti A ed M sono rappresentate sull' asse Ox (*fig.* 13) da

$$Oa = \alpha, \quad Om = x,$$

le quali, rispetto all'asse Ox, si dicono anche *ascisse* de' punti A, M. Il segmento am rappresenterà sull' Ox la proiezione della AM, essendo dirigente il piano determinato dagli altri due assi y, z, e però sarà $= lv$, espressione della componente di AM parallela all'asse Ox. Ora dal principio della dualità si ha in generale

$$am = aO + Om = Om - Oa = x - \alpha ;$$

dunque

$$x - \alpha = lv.$$

In modo simile si dimostrano le altre due relazioni

$$y - \beta = mv \,, \quad z - \gamma = nv.$$

Dunque:

La proiezione di una retta sopra un asse è uguale alla differenza delle ascisse, relative ai punti finale ed iniziale della stessa retta.

20. *Teor.* La trasformazione delle coordinate x, y, z di un punto M in un altro sistema di coordinate x', y', z' di cui siano date le direzioni (l, m, n), (l', m', n') (l'', m'', n'') rispetto alle prime, si fa per le formole

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= lx' + l'y' + l''z' \,, \\ y &= mx' + m'y' + m''z' \,, \\ z &= nx' + n'y' + n''z' \,. \end{aligned} \right.$$

Dim. I due gruppi di coordinate (x, y, z), (x', y', z') del punto M non sono altro che le componenti (riferite ai due sistemi di assi Ox, Oy, Oz, Ox', Oy', Oz') della retta OM che dalla origine O va al punto M. Ciò posto, le tre equazioni (1) significano che le proiezioni x, y, z della retta OM sopra ciascuno de' tre assi Ox, Oy, Oz, essendo dirigente il piano determinato dagli altri due, sono eguali alla somma delle proiezioni omologhe delle componenti x', y', z' (10).

Coroll. Se ciascuno de' due sistemi di assi (Ox, Oy, Oz) (Ox', Oy', Oz') sia ortogonale, avremo:

$$\left\{ \begin{aligned} l &= \cos.(xx') \,, \\ m &= \cos.(yx') \,, \\ n &= \cos.(zx') \,, \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} l' &= \cos.(xy') \,, \\ m' &= \cos.(yy') \,, \\ n' &= \cos.(zy') \,; \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} l'' &= \cos.(xz') \,, \\ m'' &= \cos.(yz') \,, \\ n'' &= \cos.(zz') \,; \end{aligned} \right.$$

e dall' ispezione di questo quadro apparisce che le direzioni degli assi Ox, Oy, Oz del primo sistema, rispetto agli assi Ox', Oy', Oz' del secondo sistema, sono rappresentate da

$$(l, l', l''), \quad (m, m', m''), \quad (n, n', n'').$$

In questo caso adunque, senza bisogno di risolver le (1), il principio della risultante darà immediatamente le x', y', z' in funzione di x, y, z, cioè:

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = lx + my + nz, \\ y' = l'x + m'y + n'z, \\ z' = l''x + m''y + n''z. \end{cases}$$

21. Quando i punti da considerarsi sono tutti in un medesimo piano, allora si riferiscono a sistemi di assi (Ox, Oy), (Ox', Oy') situati in questo piano; e la trasformazione delle coordinate x, y di un punto M in un altro sistema di coordinate x', y' di cui siano date le direzioni (l, m), (l', m'), si fa per le formole

$$x = lx' + l'y', \qquad y = mx' + m'y',$$

ove, essendo

$$l = \frac{sen.(x'y)}{sen.(xy)} = \frac{sen.(x'x + xy)}{sen.(xy)}, \quad m = \frac{sen.(xx')}{sen.(xy)},$$

$$l' = \frac{sen.(y'y)}{sen.(xy)} = \frac{sen.(y'x + xy)}{sen.(xy)}, \quad m' = \frac{sen.(xy')}{sen.(xy)},$$

se gli angoli (xy), $(x'y')$ si riguardano come positivi ambidue, ossia se il moto della loro generazione si suppone fatto nel medesimo verso, sarà

$$l = cos.(xx') - sen.(xx')\,cot.(xy), \quad m = \frac{sen.(xx')}{sen.(xy)},$$

$$l' = cos.(xy') - sen.(xy')\,cot.(xy), \quad m' = \frac{sen.(xy')}{sen.(xy)},$$

le quali, allorchè ciascuno de'due sistemi di assi (Ox, Oy) (Ox', Oy') è ortogonale, diventano

$$l = cos.(xx') \;;\; m = sen.(xx') \;;\; l' = -\,sen.(xx'),\; m' = cos.(xx')$$

essendo complementarii gli angoli $(x'x)$ ed (xy').

A questo risultato si può arrivare più direttamente, osservando che, come è

$l = cos.(xx')$, $m = sen.(xx')$, così è $l' = cos.(xy')$, $m' = sen.(xy')$;

e quindi

$$l' = -\,sen.(xx')\,,\quad m' = cos.(xx')\,,$$

a causa degli angoli complementarii $(x'x)$ ed (xy').

Pertanto le formole, che servono a trasformare le coordinate rettangolari x, y in altre coordinate rettangolari x', y' e viceversa, sono:

$$\begin{cases} x = x'\,cos.(xx') - y'\,sen.(xx')\,, \\ y = x'\,sen.(xx') + y'\,cos.(xx')\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\,cos.(xx') + y\,sen.(xx')\,, \\ y' = -\,x\,sen.(xx') + y\,cos.(xx')\,. \end{cases}$$

N. B. Se la retta OM rappresentasse una forza f, è chiaro che le formole precedenti offrirebbero la soluzione del seguente problema: « Trovare le componenti P, Q, R di una forza f, essendo date le componenti P', Q', R' di f colle loro direzioni (l, m, n), (l', m', n'), (l'', m'', n''), rispetto alle prime; e viceversa. »

Uso del principio della risultante nella trasformazione delle coordinate rettilinee in coordinate polari o sferiche.

Tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz (*fig.* 14) siano coordinati nel centro O di una sfera, e, per fissar le idee, riguardiamo il piano yz come quello dell'equatore. L'asse Ox sarà la *linea de' poli*, e saranno *piani di meridiani* tutti i piani che passano per Ox.

Le coordinate *sferiche* o *polari* di un punto M (x, y, z) sono: 1.° il raggio $OM = r$ che dall' origine O va al punto M; 2.° l' angolo θ che il raggio r fa con Ox; 3.° l' angolo diedro ω che il piano meridiano (Ox, r), girevole con r intorno ad Ox, fa col primo meridiano fisso (Ox, Oy). È palese, che la determinazione del punto M nello spazio trae seco la determinazione delle tre coordinate sferiche r, θ, ω; e viceversa.

22. *Teor.* La trasformazione delle coordinate rettilinee x, y, z del punto M nelle sferiche r, θ, ω si fa per le formole

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos.\theta, \\ y = r\,\mathrm{sen}.\theta\,\cos.\omega, \\ z = r\,\mathrm{sen}.\theta\,\mathrm{sen}.\omega; \end{array}\right. \qquad \text{donde} \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos.\theta = \dfrac{x}{r}, \\ \mathrm{tang}.\omega = \dfrac{z}{y}. \end{array}\right.$$

Dim. Se avvertiamo che le due espressioni $r\cos.\theta$, $r\,\mathrm{sen}.\theta$ rappresentano le componenti ortogonali del raggio r, la prima sull' asse Ox e la seconda sul piano yz, si vedrà che il principio della risultante dà subito

$$\begin{aligned} x &= r_x = r\cos.\theta \\ y &= r_y = (r\cos.\theta + r\,\mathrm{sen}.\theta)_y = r\,\mathrm{sen}.\theta\,\cos.\omega, \\ z &= r_z = (r\cos.\theta + r\,\mathrm{sen}.\theta)_z = r\,\mathrm{sen}.\theta\,\mathrm{sen}.\omega. \end{aligned}$$

Scolio I. Allorchè i punti M sono tutti nel piano yz, la trasformazione delle coordinate rettilinee y, z nelle *circolari* r, ω, si eseguisce per le formole

$$y = r\cos.\omega, \qquad z = r\,\mathrm{sen}.\omega.$$

Scolio. II. Alcune volte si prende per θ non l' angolo (xr), ma il suo complemento (r, yz), ed allora le (1) si mutano nelle

$$x = r\,\mathrm{sen}.\theta, \quad y = r\cos.\theta\cos.\omega, \quad z = r\cos.\theta\,\mathrm{sen}.\omega.$$

Questi angoli ω e θ si chiamano, nella geografia, *longitudine* e *latitudine del luogo M.*

TEORIA DELLA COMPOSIZIONE DELLE AREE

CAPO I.

Della proiezione ortogonale ed obliqua delle aree.

1. *Preliminari. Asse di un piano*, e distinzione delle due facce del piano in *positiva* e in *negativa*: teoremi intorno agli angoli de' piani e de' loro assi: *asse di un angolo.*

23. **Asse di un piano** (X) è la retta (x) perpendicolare al piano in un punto O preso ad arbitrio, e prolungata indefinitamente dall'una e dall'altra faccia del piano (*fig.* 15). L'asse di un piano, a partire da quel punto del piano donde si suppone che tragga la sua *origine*, si divide in due parti Ox, Ox', le quali si dirigono in verso contrario: quindi se una di queste parti, quale Ox, si sceglie per *asse positivo*, l'altra parte Ox' sarà *l' asse negativo* del piano.

Delle due facce del piano quella che guarda l' asse positivo si dirà *faccia positiva*, e *faccia negativa* quella che guarda l' asse negativo.

Se una delle due facce di un piano si denota con lettera grande, per esempio con X, l' asse corrispondente a questa faccia sarà denotato colla stessa lettera ma piccola, per x. Donde segue che l'angolo indicato dal simbolo (Xx), siccome compreso tra un piano X ed il suo asse x, sarà un angolo retto.

Per *facce omologhe* di due piani s' intendano le facce dello stesso nome, cioè le positive da una parte e le negative dall' altra. Lo stesso dicasi degli *assi omologhi*. Per esempio, due piani (X) ed (A) siano rappresentati in profilo dalle due rette OX, OA (*fig.* 16); saranno omologhe le facce superiori, supposte positive, ed omologhe le inferiori o negative.

La **declinazione** *delle facce omologhe di due piani (X), (A) è l' angolo diedro (XOA) compreso tra la faccia positiva dell' uno e la negativa dell' altro.* Così, l'angolo onde la faccia positiva del piano A *declina* dalla faccia positiva del piano X è l' angolo diedro XOA compreso tra la faccia positiva di X e la negativa di A.

24. *Teor. La declinazione delle facce omologhe* X, A, *di due piani è uguale a quella de' loro assi corrispondenti* x, a (*fig.* 16) : cioè $ang.(XA) = ang.(xa)$.

Dim. Il principio della dualità somministra

$$ang\,(Xa) = ang.(XA) + ang.(Aa)\ ,$$
$$ang.(Xa) = ang.(Xx) + ang.(xa)\ .$$

Ora, eguagliando i secondi membri e sopprimendo gli angoli retti $(Aa) = (Xx)$, si ottiene $ang.(XA) = ang.(xa)$.

25. *Teor. Sono complementarii gli angoli pe' quali si passa : 1°. da un piano* X *ad una retta* a *e dalla retta* a *all' asse* x *del piano ; 2°. da un piano* X *ad un altro piano* A *e da questo piano all' asse* x *del primo.*

Dim. Dicendosi complementarii due angoli quando la loro somma è uguale ad un retto, la somma degli angoli proposti è appunto eguale ad un angolo retto, all' angolo retto (Xx) , avendosi :

$$ang.(Xa) + ang.(ax) = ang.(Xx)\ ,$$
$$ang.(XA) + ang.(Ax) = ang.(Xx)\ .$$

26. **Asse di un angolo** (*fig.* 17). *Per asse di un angolo* (fg) , cioè dell'angolo formato da due rette Of, Og divergenti da un medesimo punto O, e minore di 180°, s' intenda *una retta indefinita* OM, *sorgente a perpendicolo su quella faccia del piano dell'angolo* fOg, *in cui, se fosse considerata come una persona coi piedi al vertice* O *e colla fronte rivolta verso il mezzo dell'angolo, vedrebbe a* **destra** *il lato* Of *ed a* **sinistra** *il lato* Og. E ne segue che l' asse dell' angolo indicato dal simbolo (gf) è la perpendicolare OM' direttamente opposta ad OM.

2. Della proiezione *ortogonale* delle aree.

27. Si dà il nome di **area** ad *ogni superficie piana circoscritta da una linea poligona o curva.* Ciascun' area si dee considerare come situata sopra una delle due facce del suo piano; ed **asse dell' area** sarà *quello della faccia, sopra cui l'area s' immagina collocata.*

Quando in un piano si trovano più aree, altre *positive* ed altre *negative*, le prime si riguarderanno come situate sulla *faccia positiva* del piano, e le seconde sulla faccia opposta.

28. **Teorema.** *La proiezione ortogonale di un'area A sopra un piano X, è uguale al prodotto dell' area pel coseno dell' angolo con cui l'area declina da quella faccia del piano, che è destinata a riceverne la proiezione :* cioè $A_X = A\cos.(XA)$.

Dimostrazione. Primieramente l' area A sia un parallelogrammo rettangolo ($=pq$) di cui p e q siano due lati contigui, e di più la direzione del lato q sia perpendicolare alla linea d' intersezione i de' due piani (A), (X) : il lato p, perpendicolare a q, sarà parallelo a questa retta i (*fig.* 18).

Il lato p, essendo parallelo ad i e però al piano (X), nella sua proiezione sul piano (X) si conserva parallelo ed eguale a sè stesso, ed il lato q diventa nella proiezione $= q\cos.(XA)$. Dunque il parallelogrammo A diventa nella proiezione un nuovo parallelogrammo rettangolo di cui p e $q\cos.(XA)$ sono due lati contigui. Si avrà dunque :

$$A_X = p.q\cos.(XA) = A\cos.(XA).$$

Supponiamo in secondo luogo che l' area (A) sia qualsivoglia (*fig.* 19). Si potrà sempre *inscrivere* in essa una serie indefinita di parallelogrammi rettangoli

$$u,\quad u',\quad u'',\quad \text{etc.},$$

tali che ciascuno offra le direzioni de' due lati contigui, l' una perpendicolare e l' altra parallela alla intersezione i de' due piani

(X), (A), e che perciò si trovi nella condizione del parallelogrammo dianzi contemplato (pq). Si avrà dunque :

$$u_X = u\,cos.(XA)\,, \quad u'_X = u'\,cos.(XA)\,, \quad u''_X = u''cos.(XA), \text{ etc.}$$

donde, sommando ,

$$(u + u' + u'' + \text{etc.})_X = (u + u' + u'' + \text{etc.})\,cos.(XA)\,.$$

Quindi chiamata U la superficie che si compone di tutti questi parallelogrammi u, u', u'' etc., superficie che si può riguardare siccome *inscritta* nell' area (A) , avremo

$$U_X = U\,cos.(XA)\,.$$

Ora immaginiamo che il numero de' parallelogrammi elementari u, u', u'' etc. si accresca continuamente, impiccolendosi ognor più le loro aree; è chiaro che la superficie U inscritta in A varierà in corrispondenza , e che nel suo variare avrà per *limite* la coincidenza coll' area (A), essendo un principio evidente per sè medesimo, che la *frequenza del succedersi de' vertici* della superficie variabile U, inscritta in A, *non ha altro limite che la continuità.* E poichè le due quantità U_X ed $U\,cos.(XA)$ si conservano, nel loro variare, costantemente uguali l' una all' altra; anche i limiti a cui tendono simultaneamente, cioè le quantità A_X ed $A\,cos.(XA)$, debbono essere uguali tra loro (*) .

È adunque provato che si ha in ogni caso $A_X = A\,cos.(XA)$.

(*) Limite di una quantità è un' altra quantità a cui la prima si può avvicinare continuamente al di là di ogni assegnata comunque piccolissima differenza. Così un decimale periodico ha per limite la frazion generatrice.

Chiamo *simultanei* i limiti rispettivi di più quantità, se, una qualunque di queste tendendo a confondersi col suo limite, ciascuna delle altre tenda a confondersi col limite proprio.

Limiti simultanei di una medesima quantità X sono eguali tra loro. Infatti se fra due di essi A, B esistesse una differenza, la quantità X potendosi

3. *Criterio geometrico per distinguere lo stato positivo dallo stato negativo della proiezione di un' area. Altro criterio desunto dal moto di rotazione.*

29. I piani X ed A siano rappresentati in profilo dalle rette OX ed OA (*fig.* 20 e 21), e supponiamo che OA giri intorno ad O così che l' angolo (XA), onde la faccia positiva di A declina dalla faccia positiva di X, cresca successivamente da zero fino a quattro angoli retti. La proiezione dell' area A sul piano X, espressa da $A\cos.(XA)$, sarà evidentemente positiva o negativa insieme col valore di $\cos.(XA)$, e però sarà *positiva* (*fig.* 20) quando l' angolo (XA) cresce da zero fino ad un angolo retto, ovvero da tre a quattro angoli retti, e sarà *negativa* quando l' angolo (XA) cresce da un retto fino a tre angoli retti (*fig.* 21).

Ciò posto, il criterio geometrico per distinguere lo stato positivo dallo stato negativo della proiezione dell' area A sul piano X, si può ridurre al seguente:

« Si consideri la retta che unisce un punto qualunque M dell'area A colla proiezione m di tal punto sul piano X (*fig.* 20 e 21), e si osservi tra quali specie di facce, rispetto ai due piani X ed A, è compresa questa retta Mm. *Secondochè queste due facce sono di nome diverso o dello stesso nome, la proiezione dell'area A sul piano X sarà positiva o negativa.* » Ciò si fa subito manifesto, sol che si guardi alle figure.

30. *Altro criterio.* Consideriamo i due piani in profilo OX, OA, ed i loro assi Ox, Oa come due persone ritte in O; e supponiamo che l' area A abbia un moto continuo di rotazione dalla destra alla sinistra dell' asse Oa: la proiezione di A sul piano X avrà pure un moto continuo di rotazione intorno all' asse Ox, e dall' esame delle figure 20 e 21 apparisce chiaramente che questa rotazione sul piano

---

avvicinare a ciascuno di essi al di là di questa differenza, potrebbe tendere a confondersi coll' uno senza tendere a confondersi coll' altro. Quindi: *Limiti simultanei di quantità eguali sono eguali tra loro*, potendosi considerare come limiti simultanei di una sola e medesima quantità.

L' antico *Metodo dell' esaustioni* consiste nello stabilire l'eguaglianza de' limiti, col supporre fra essi una differenza che poi si dimostra *esausta*, ossia inesistente ed assurda.

X si farà dalla destra alla sinistra dell'asse Ox positivo o dell'asse Ox' negativo, secondochè l'asse Oa dell' area A inclina con angolo acuto sull'asse Ox positivo (*fig.* 20) ovvero sull'asse Ox' negativo del piano X (*fig.* 21), e però secondochè risulta positivo o negativo il valore della proiezione espressa dalla formola $A \cos.(XA)$. Si può adunque stabilire che : « *Quando un'area A, girando con moto di rotazione dalla destra alla sinistra del suo asse* $= a$, *è cagione che la sua proiezione sopra un piano X giri con moto di rotazione intorno all' asse x di questo piano , il segno* ($\pm$) *dell' espressione $A \cos.(XA)$ farà subito conoscere in qual senso si fa questa rotazione sul piano X, se dalla destra alla sinistra dell'asse Ox positivo, oppure dell' asse Ox' negativo.* » E viceversa.

4. *Proiezione delle facce di un poliedro sopra un piano qualsivoglia.*

31. **Teorema.** *Se tutte le facce* **esterne** A, B, C, etc. (ovvero **interne**) *di un poliedro P si proiettano sopra un piano qualunque X, la somma delle proiezioni $A \cos.(XA)$, $B \cos.(XB)$, $C \cos.(XC)$* etc., *è sempre uguale a zero;* cioè

$$(A + B + C + \text{etc.})_X = 0 .$$

Dim. Supponiamo, per fissar le idee, che il piano X sia orizzontale e situato al di sotto del poliedro P. Le rette Mm, che proiettano i diversi punti della superficie del poliedro , determineranno una specie di tronco prismatico la cui superficie laterale L (*fig.* 22) prolungata indefinitamente sarà circoscritta al poliedro , ed il luogo del contatto separerà nella superficie del poliedro due parti : l' una *superiore* S e l'altra *inferiore* S_1. Se queste due parti di superficie si proiettano sul piano X, la somma delle loro proiezioni sarà eguale evidentemente alla somma delle proiezioni di tutte le facce del poliedro, e però si avrà

$$(S + S_1)_X = (A + B + C + \text{etc.})_X .$$

Ma sul piano X le proiezioni delle parti S, S_1 sono visibilmente uguali tra loro, avendo in comune il perimetro; ed inoltre sono di segno contrario, come apparisce dall' applicazione del criterio geometrico per distinguere tra le proiezioni delle aree le positive dalle negative (29). Dunque si avrà $(S + S_1)_X = 0$, e per conseguente

$$(A + B + C + \text{etc.})_X = 0.$$

5. Della proiezione *obliqua* delle aree.

32. **Teorema.** *Se un' area A si proietta sopra un piano X per mezzo di rette parallele ad un asse d, la proiezione sarà eguale al prodotto dell' area pel rapporto de' seni degli angoli che* **l'asse dirigente** *d fa coll'* **area** *e col* **piano** **:** cioè sarà

$$^{d}A_X = A\,\frac{sen.(dA)}{sen.(dX)}.$$

Dim. Sia Od l' asse dirigente che, per maggior chiarezza, supporremo che sorga da un punto O della comune intersezione de' due piani X, A. Per O conduciamo un piano D perpendicolare a quest' asse Od (*fig.* 23).

Portiamo ora l' attenzione, da un lato sulla superficie cilindrica che serve a proiettare il contorno dell' area A parallelamente all' asse dirigente Od, e dall' altro sulle aree A_1 e B che questa superficie cilindrica abbraccia sui piani X e D. Sarà

$$A_1 = {}^{d}A_X.$$

Ma sul piano D l' area B si può riguardare come la proiezione ortogonale sia dell'area A, sia dell' area A_1, e però si ha

$$B = A_1 cos.(XD), \qquad B = A cos.(AD).$$

Da qui

$$A_1 = A\,\frac{cos.(AD)}{cos.(XD)};$$

ed essendo complementarii gli angoli (dA) e (AD), (dX) e (XD), si conchiude:

$$ {}^{d}A_{X} = A \frac{sen.(dA)}{sen.(dX)} . $$

Coroll. Risulta da questo teorema che: « *Le aree parallele sono proporzionali alle loro proiezioni omologhe* » (cioè alle proiezioni fatte sopra un medesimo piano, parallelamente allo stesso asse dirigente). Così, se A ed A' siano due aree parallele, sarà

$$ A : A' : : {}^{d}A_{X} : {}^{d}A'_{X} . $$

6. *Riduzione della proiezione delle aree a quella delle rette, e viceversa.*

33. **Asse di un' area.** Per *asse di un' area, situata sopra una faccia data di un piano*, s' intenda *una retta che sorge a perpendicolo su questa faccia del piano, ed uguale* **numericamente** *all' area stessa.*

Denotando le aree con lettere grandi, per esempio A, B, C etc., i loro assi saranno indicati colle stesse lettere ma piccole, a, b, c etc., talchè si avrà:

$$ A = a , \quad B = b , \quad C = c , \quad \text{etc.} $$

È palese che l' asse di un' area *rappresenta* l'area ne' suoi *elementi essenziali*: colla *lunghezza* ne rappresenta il *valore*; colla *perpendicolarità* e col *verso della direzione* rappresenta il *piano* e la *faccia* del piano che contiene l' area.

34. **Teorema.** *Rappresentate che siano le aree dai loro assi, per ridurre la proiezione delle aree a quella delle rette basta sostituire* (nelle formole esprimenti le proiezioni delle aree) *ai piani i loro assi e viceversa.*

Dim. Questa proposizione si farà evidente, sol che venga dimostrata la verità della formola

$$ {}^{d}A_{X} = {}^{D}a_{x} , $$

che si ottiene effettuando il cangiamento, indicato nel teorema, delle lettere grandi nelle piccole e viceversa. Le due quantità che qui si suppongono eguali equivalgono alle seguenti (33, 9) :

$$A \frac{sen.(dA)}{sen.(dX)}, \quad a \frac{sen.(Da)}{sen.(Dx)} .$$

Ora è chiaro che queste due espressioni rappresentano due quantità eguali, essendo $A = a$, e di più essendo eguali sì i due angoli (dA) e (Da) siccome complementi dell'angolo (AD), e sì i due angoli (dX) e (Dx) siccome complementi dell'angolo (XD). Dunque etc.

Coroll. Così, per un semplice cangiamento delle lettere grandi nelle piccole dello stesso nome e viceversa, noi possiamo passare a nostro piacimento dalla proiezione delle aree alla proiezione delle rette, ovvero da questa a quella.

CAPO II.

Del principio dell' area risultante.

1. *Leggi per la composizione e decomposizione delle aree.*

35. *Date più aree A, B, C* etc. *sulle facce determinate de' loro piani*, io chiamo **area risultante** *quell' area R la cui proiezione sopra un piano qualsivoglia è sempre uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle aree date*, le quali si diranno **aree componenti** rispetto all' area risultante.

Scolio. Le proiezioni omologhe delle aree non mutando valore se le aree si trasportano parallelamente a sè stesse, è lecito di supporre che i loro piani siano condotti a passare per uno stesso punto O, e che quivi i loro assi a, b, c etc. siano resi visibili nelle rette Oa, Ob, Oc, etc.

36. **Teorema.** *Date più aree A, B, C* etc. *per mezzo de' loro assi Oa, Ob, Oc* etc., **la risultante** *Or di queste rette sarà l'asse dell'area risultante R.*

Dim. Infatti si ha per la definizione della retta risultante:

$$ {}^{D}r_x = {}^{D}(a + b + c + \text{etc.})_x , $$

la quale relazione, passando dalla proiezione delle rette a quella delle aree, si cangia nella (34)

$$ {}^{d}R_X = {}^{d}(A + B + C + \text{etc.})_X \; ; $$

e questa formola significa, che la proiezione dell' area R sul piano mutabile X è sempre uguale alla somma delle proiezioni omologhe delle aree date. L' area R ha dunque la proprietà per cui si è definita l' area risultante.

37. *Coroll. I.* Se le aree A, B, C etc. sono quelle delle facce esterne (ovvero interne) di un poliedro, per un teorema dimostrato più sopra avremo

$$^{d}(A + B + C + \text{etc.})_{X} = 0 \ ,$$

donde, passando dalla proiezione delle aree a quella delle rette (34):

$$^{D}(a + b + c + \text{etc.})_{x} = 0 \ ,$$

vale a dire:

« *Se le aree delle facce esterne* (od interne) *di un poliedro siano rappresentate dai loro assi* a, b, c etc., *la risultante di queste rette sarà eguale a zero, e però una qualunque di esse stimata in senso contrario sarà la risultante delle altre.*

38. *Coroll. II.* Le aree date siano tre A, B, C, ed R l' area risultante: prendiamo per piano di proiezione quello della componente A, talchè si abbia

$$^{d}R_{A} = {}^{d}(A + B + C)_{A} \ ,$$

e supponiamo che l' asse dirigente d sia la linea d' intersezione de' piani delle aree componenti B, C. In questa ipotesi si ha evidentemente

$$^{d}(B + C)_{A} = 0 \ ;$$

e poichè un' area è sempre uguale alla proiezione che riceve da sè medesima, si ha pure

$$^{d}R_{A} = A \ , \quad \text{e però} \quad ^{d}(A + B + C)_{A} = A \ .$$

Dunque

$$^{d}R_{A} = A \ .$$

E da qui si raccoglie:

1°. *Date tre aree A, B, C e l'area risultante R, ciascuna delle aree componenti A, B, C sarà eguale alla proiezione che riceve sopra il suo piano dall'area risultante R, essendo* **asse dirigente** *la linea d' intersezione de' piani delle altre due aree componenti ;*

2°. *Data un' area R, per ottenere i valori delle sue aree componenti A, B, C, rispettivamente parallele ai tre piani coordinati yz, zx, xy, basta proiettare l'area R sopra ciascuno de' tre piani, essendo asse dirigente la intersezione degli altri due.* Così :

$$A = {}^{x}R_{yz}, \qquad B = {}^{y}R_{zx}, \qquad C = {}^{z}R_{xy}.$$

---

2. *Formole per le quali, dati i lati di un parallelogrammo stimati parallelamente a tre assi x, y, z, l'area del parallelogrammo si decompone in tre aree parallele ai piani coordinati.*

39. **Teorema.** *Sia S l'area di un parallelogrammo $= ef\,sen.(ef)$, di cui e ed f sono due lati contigui Oe, Of (fig. 24), aventi secondo i tre assi Ox, Oy, Oz le componenti rispettive*

$$(\alpha, \beta, \gamma), \qquad (P, Q, R).$$

Se l' area S si decompone in tre A, B, C parallele ai piani coordinati yz, zx, xy, i valori di quest' aree componenti si avranno dalle formole :

$$\begin{cases} A = (R\beta - Q\gamma)\,sen.(yz), \\ B = (P\gamma - R\alpha)\,sen.(zx), \\ C = (Q\alpha - P\beta)\,sen.(xy). \end{cases}$$

Dim. Proiettiamo il parallelogrammo eOf sul piano yz, essendo dirigente l' asse x : la proiezione sarà un altro parallelogrammo e_1Of_1, di cui i due lati contigui e_1, f_1 sono le proiezioni de' due lati Oe, Of, e l' area A di questo parallelogrammo sarà :

$$A = e_1 f_1\,sen.(e_1 f_1).$$

I due lati e_1, f_1, essendo le proiezioni de' lati Oe, Of sul piano yz, avranno secondo gli assi y, z le componenti rispettive (β, γ), (Q, R). Ora da un teorema già dimostrato (16) si raccoglie :

$$e_1 f_1 sen.(e_1 f_1) = (\beta R - \gamma Q)\, sen.(yz) ;$$

dunque

$$A = (R\beta - Q\gamma)\, sen.(yz) .$$

In modo simile si trova

$$B = (P\gamma - R\alpha)\, sen.(zx) , \quad C = (Q\alpha - P\beta)\, sen.(xy) .$$

40. *Coroll.* Il punto O, invece di esser l' origine degli assi coordinati, abbia per coordinate x, y, z, ed il punto e abbia per coordinate α, β, γ. In questo caso la retta Oe (*fig.* 24), cominciando dal punto (x, y, z) e terminando al punto α, β, γ, avrà per componenti non più le α, β, γ ma (19) le

$$\alpha - x , \quad \beta - y , \quad \gamma - z ,$$

e però (denotando sempre per P, Q, R le componenti di Of) , se l' area S si decomponga in tre A, B, C, parallele ai piani yz, zx, xy, quest' aree componenti saranno

$$A = [R(\beta - y) - Q(\gamma - z)]\, sen.(yz) = [(R\beta - Q\gamma) - (Ry - Qz)]\, sen.(yz),$$
$$B = [P(\gamma - z) - R(\alpha - x)]\, sen.(zx) = [(P\gamma - R\alpha) - (Pz - Rx)]\, sen.(zx),$$
$$C = [Q(\alpha - x) - P(\beta - y)]\, sen.(xy) = [(Q\alpha - P\beta) - (Qx - Py)]\, sen.(xy).$$

41. *Scolio.* Quando nella composizione e decomposizione delle aree si vuol sostituire al parallelogrammo $S = ef sen.(ef)$ il suo asse s, questo asse si dee prender sempre nella direzione dell'asse dell'angolo (ef) supposto minore di due retti , talchè l' asse s, ove si riguardi come una persona ritta sul vertice e colla fronte rivolta al mezzo dell' angolo (ef) , abbia a destra il lato e ed a sinistra il lato f. In questa supposizione possiamo dire che, come l'area S si compone delle tre aree A, B, C parallele ai piani yz, zx, xy, così (sostituendo alle aree i loro assi) la retta s, perpendicolare al piano (ef), è composta delle tre rette a, b, c perpendicolari a que' piani.

Nel caso degli assi x, y, z coordinati in O ad angolo retto, oltre di essere

$$\begin{cases} a = R\beta - Q\gamma\,, \\ b = P\gamma - R\alpha\,, \\ c = Q\alpha - P\beta\,; \end{cases} \quad \text{ed} \quad \begin{cases} s = ef\,sen.(ef)\,, \\ s^2 = a^2 + b^2 + c^2\,, \end{cases}$$

sarà

$$a = s\cos.(xs)\,, \quad b = s\cos.(ys)\,, \quad c = s\cos.(zs)\,;$$

e questi assi a, b, c delle aree A, B, C saranno diretti nel verso positivo o negativo degli assi x, y, z, secondochè il risultato delle operazioni espresse dai binomi $(R\beta - Q\gamma)$, etc., sarà positivo o negativo.

NOZIONI FONDAMENTALI
sulla curvatura delle linee.

1. *Definizioni della linea poligona e della linea curva. Curva considerata come un poligono infinitilatero. Concetto degl'infinitesimi.*

42. La **direzione** *fissata da due punti A, B,* è la *retta per cui si va dall'uno A all'altro B.*

La **Linea poligona** può definirsi « *Linea generata dal moto di un punto che va cangiando direzione ad intervalli.* »

La **Linea curva** può definirsi « *Linea generata dal moto di un punto che va cangiando direzione continuamente.* » E poichè non si può cangiar direzione senz'avere una direzione, la curva ha necessariamente *in ogni punto* una direzione determinata. *La retta che rappresenta la direzione della curva in un dato punto,* si chiama **tangente** *alla curva in questo punto.*

Immaginiamo una linea poligona *inscritta* alla curva: la curva sarà divisa in *archi* che avranno per *corde* i lati della linea poligona. Se ciascuno di questi archi si divide in due parti, e si tirano le corde ai nuovi archi, ne nascerà una seconda linea poligona inscritta, il cui numero de' lati sarà due volte più grande che nella prima. Nel modo stesso, alla seconda si faccia succedere una terza poligona inscritta, e poi una quarta, una quinta e così via via. Se tutte queste linee poligone inscritte (ove il numero de' lati si raddoppia nel passare dall' una all'altra) si riguardino come *diversi stati di una linea poligona variabile,* la cui **frequenza** *nel cambiar direzione*, crescendo indefinitamente, *tende a trasformarsi* in **continuità,** si vedrà chiaramente che siffatta linea poligona ha per *limite* la *coincidenza* colla curva, e che però, *a misura che i lati di questa linea poligona e gli archi corrispondenti della curva tendono all' evanescenza , il loro rapporto tende ad essere uguale all' unità.*

43. Laonde se denotiamo per δs *un arco della curva, convergente verso lo zero*, e per δc *la corda corrispondente*, sarà

$$lim. \frac{\delta s}{\delta c} = 1 .$$

Ora : *Quando due quantità*, quali δs, δc, *si fanno convergere verso lo zero, affine di scoprire il* **limite** *del loro rapporto, che solo si voglia ritenere negli* **ultimi risultati**, *queste quantità si dicono* **infinitesime**, *e invece dell'equazione*: $lim. \frac{\delta s}{\delta c} = 1$, per semplificare si scrive

$$\frac{ds}{dc} = 1 ,$$

e si dice che :

« *Il rapporto dell' arco infinitesimo alla sua corda è uguale all' unità.* »

E questo è ciò che unicamente si vuol significare quando si afferma che :

» *La* **curva** *può riguardarsi come una linea poligona infinitesimale*, ossia *come composta di un numero infinito di lati infinitesimi* (**poligono infinitilatero**) ; ed **ogni tangente**, *come il prolungamento di uno di questi lati.*

44. Similmente, se si parte dalla definizione che : » *La direzione fissata da tre punti A, B, C non posti in linea retta* è il **piano** *che passa per questi tre punti* : » arriveremo a stabilire, con un ragionamento analogo al precedente, che :

» La **superficie curva** *può riguardarsi come una* **superficie poliedra infinitesimale**, cioè *come una superficie composta di un numero infinito di facce infinitesime ;* ed *ogni* **piano tangente**, *come il prolungamento di una di queste facce.*

45. A vie meglio rischiarare il concetto degl' infinitesimi si osservi che, data per esempio l' equazione

$y = x^2$, sarà $y + \delta y = (x + \delta x)^2$, $\delta y = (x + \delta x)^2 - x^2$,

ossia

$$\delta y = 2x\delta x + \delta x^2 ,$$

donde il rapporto $\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x$.

Se qui supponiamo che δx e per conseguente δy *convergano verso l'evanescenza*, il loro rapporto ($= 2x + \delta x$) ha evidentemente per limite $2x$, vale a dire

$$lim.\ \frac{\delta y}{\delta x} = 2x\ .$$

Ora quando si *convenga una volta per sempre* che, negli ultimi risultati de' nostri calcoli, non si voglia ritenere altro che il limite $= 2x$ del rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$, potremo subito da bel principio scrivere

$$\frac{dy}{dx} = 2x\ ,$$

riguardando il primo membro come il **simbolo** della quantità che è nel secondo membro; e chiamate *infinitesime* le due quantità dx, dy, sarà lecito di sopprimere nell' equazione

$$dy = 2xdx + dx^2$$

il termine dx^2, siccome quello che prevediamo con certezza dovere sparire dall' ultimo risultato ($lim.\ \frac{\delta y}{\delta x} = 2x$).

46. Ciò posto, si possono fermare e ritenere i due principii seguenti:

1°. *Un'equazione infinitesimale* (quale $dy = 2xdx + dx^2$) *si può sin da principio rendere* **omogenea** *rispetto agli infinitesimi, ritenendo solo i termini infinitesimi dell' ordine più piccolo* (quali dy, $2xdx$), *e trascurando gli altri* (*);

(*) Gl'infinitesimi si dividono in diversi ordini per mezzo del seguente criterio:

« Sia i un infinitesimo del *prim'ordine*, ed $j = f(i)$ un altro infinitesimo *evanescente* con i. Secondochè il *rapporto*

$$\frac{j}{i^m}$$

quando i due infinitesimi i, j svaniscono, riesce *finito*, o *infinito*, o *zero*, l'infinitesimo j si dice dell' ordine $= m$, o di un ordine *minore* o *maggiore* di m.

2°. *Nell' equazioni infinitesimali* (quale $ds = dc$), *due infinitesimi si potranno sostituire l'uno all'altro, se il loro rapporto è* $= 1$. Così ad un arco infinitesimo possiamo sostituire la sua corda, e riguardare la *curva* come un *poligono infinitilatero*.

47. Si osservi in generale che, ove sia data l'espressione del rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ in funzione di x, δx [come nell'esempio precedente è $(2x + \delta x)$], per averne il limite basta porre, in tale espressione, $\delta x = 0$. Così, dall'equazione

$$\frac{\delta y}{\delta x} = F'(x + \theta \delta x),$$

si trae l'equazione infinitesimale $\frac{dy}{dx} = F'(x)$, ed anche

$$dy = dx.F'(x).$$

« Gl' **infinitesimi** *si debbono adunque riguardare come quantità variabili in uno stato prossimo all'evanescenza, e come destinate a svanire affatto negli ultimi risultati.* » Per **ultimi risultati** si debbono intender quelli ne'quali, per esempio, dall'equazione $\frac{\delta y}{\delta x} = F'(x + \theta \delta x)$ si passa all'equazione *lim.* $\frac{\delta y}{\delta x} = F'(x)$, cioè *quelli ne' quali a* $\frac{dy}{dx}$ *si sostituisce* $F'(x)$, *limite a cui si riduce la quantità* $F'(x + \theta \delta x)$ per $\delta x = 0$.

Pertanto gl' infinitesimi si distinguono dalle altre quantità variabili per *due caratteri essenziali*. Il primo carattere riguarda il **tempo presente**, *ed è di esser considerati in uno stato prossimo all' evanescenza*; il secondo carattere riguarda il **futuro**, *ed è di esser destinati a svanire negli ultimi risultati*. Questo carattere ci richiama i **limiti** *di rapporti di quantità convergenti verso lo zero.*

Coroll. Un *infinitesimo*, siccome quantità variabile destinata in ultimo a svanire, *si può suppor minore di ogni assegnata comunque piccolissima quantità.*

In generale: « *Due infinitesimi* si dicono OMOGENEI *o dello stess' ordine se il loro rapporto, allorchè svaniscono, riducesi ad una quantità finita.* »

48. L' **infinito**, negli usi matematici, *si può riguardare come una quantità variabile il cui valore inverso* (cioè il quoto che si ottiene dividendo l' unità per siffatta quantità) *è un infinitesimo;* e per conseguente : *come una quantità che si può suppor maggiore di ogni assegnata comunque grandissima quantità.*

---

2. *Definizione della curvatura di una linea : angolo chè serve a misurarla. Curvatura del circolo, tipo di paragone a cui si riporta ne' diversi punti il vario incurvarsi di ogni altra linea. Due specie di curvatura nelle linee correnti nello spazio.*

49. Per **corso di una linea** s' intende *il moto del punto che la va generando.* Così la linea $ABCDEe$ (*fig.* 25) segna la via del punto che l' ha generata , partendo da A e fermandosi in e.

50. Quando il corso di una linea cangia direzione in un dato punto, per esempio in C , l' angolo compreso tra le due direzioni consecutive Bb, Cc, cioè l' angolo bCc , si chiama **deviazione** *della linea in tal punto ;* e questa deviazione si dice **angolo di contingenza** *se la linea consiste in un poligono infinitilatero* , vale a dire *in una linea curva.*

51. La **curvatura di una linea** è *la somma* di *tutte le deviazioni successive del suo corso.* Così la curvatura della linea poligona $ABCDEe$ (*fig.* 25) è uguale alla somma degli angoli :

$$aBb + bCc + cDd + dEe.$$

Teor. La curvatura di una linea AB (*fig.* 26) , *situata in un piano , ha per misura l'angolo aDb con cui deviano l' una dall'altra le direzioni* **finale** ed **iniziale** *della linea* (Bb, Aa).

Dim. Da un punto O si conducano due raggi Oa, Ob rispettivamente paralleli alle direzioni iniziale Aa e finale Bb della linea AB, e del medesimo senso : l' angolo aOb sarà eguale all'angolo aDb. Se ora si considera un raggio Om che, girando intorno ad O, prenda successivamente le direzioni parallele a quelle del corso della linea AB, dall'origine A al termine B , è palese che la somma di tutte le deviazioni consecutive di questo raggio , ossia l' angolo aOb , sarà eguale alla somma di tutte le deviazioni della linea AB, e però darà la *misura* della curvatura di essa linea.

Coroll. La curvatura di una linea piana è pur misurata dall'angolo con cui deviano l' una dall' altra le normali alle direzioni finale ed iniziale della curva. Infatti se per O conduciamo i raggi Oa', Ob' paralleli alle dette normali, e per conseguente perpendicolari ad Oa, Ob, si avranno le relazioni

$$ang.(ab') = ang.(ab) + ang.(bb'),$$
$$ang.(ab') = ang.(aa') + ang.(a'b'),$$

dalle quali, essendo retti gli angoli (aa'), (bb'), si trae $ang.(a'b') = ang.(ab) =$ curvatura della linea AB.

52. *Teor.* La curvatura θ di un arco circolare è uguale alla lunghezza s dell'arco divisa pel raggio r, cioè $\theta = \frac{s}{r}$.

Dim. L' arco circolare essendo in ogni punto normale al raggio condotto a tal punto, l' angolo centrale opposto all' arco s darà la misura della curvatura θ dell' arco (*coroll. prec.*). D' altronde sappiamo dalla geometrìa che l' arco circolare è uguale al prodotto del raggio per l' opposto angolo centrale: dunque $s = r\theta$, e quindi $\theta = \frac{s}{r}$.

Coroll. Se si fa $s = 1$, si avrà $\theta = \frac{1}{r}$. Vale a dire: « Se un arco circolare è uguale in lunghezza all'unità lineare, la sua curvatura è uguale al valor reciproco del raggio $\left(= \frac{1}{r}\right)$, e può riguardarsi come l' *unità di curvatura* rispetto ai diversi archi dello stesso circolo. »

Scolio. Nel circolo la curvatura è *uniforme*, vale a dire ad archi eguali corrisponde sempre un' egual curvatura, mentre nelle altre linee la curvatura suol variare passando da un arco ad un altro di egual lunghezza. Di qui è avvenuto che la curvatura del circolo si adopera come *tipo di paragone* per conoscere e misurare il vario incurvarsi di una linea ne' suoi diversi punti. Ed infatti, essendo il circolo pienamente determinato nella sua grandezza e posizione da tre punti non posti in linea retta, se una curva si riguarda come un poligono infinitilatero, è palese che ad ogni paio di latercoli consecutivi corrisponderà un circolo particolare, chiamato *circolo osculatore*, il quale mostrerà come varia la curvatura della linea di cui si tratta nel passare da punto a punto.

53. *Circolo osculatore o di curvatura.* Sopra una curva data consideriamo tre punti consecutivi A, M, B, ed il circolo per essi determinato. Se immaginiamo che i punti estremi A, B si vadano avvicinando continuamente al punto *medio* M siccome ad un limite fisso, si farà evidente che anche il circolo AMB, variando in corrispondenza, tenderà a costituirsi in un certo stato fisso di grandezza e di posizione. Il *circolo limite* a cui tende il circolo AMB mentre i punti A, B tendono a coincidere col punto M, si chiama *circolo osculatore della curva data nel punto M.*

Questa definizione, ove si abbia presente ciò che devesi intendere per poligono infinilatero (43), può esprimersi sotto una forma assai più concisa dicendo:

« Il *circolo osculatore* di una curva in un punto M è quello che intorno al punto M ha *due elementi* in comune colla curva: » intendendo per elementi di una curva i *latercoli* della medesima considerata come un poligono infinitilatero. » Si chiama *raggio osculatore* quello che dal punto M di contatto va al centro del circolo osculatore, o di curvatura.

Sia ds l' arco infinitesimo che la curva ha in comune nel punto M col circolo osculatore, $d\theta$ la curvatura di ds, ed r il raggio di esso circolo. Sarà $ds = rd\theta$, donde l' espressione dell' unità di curvatura del circolo osculatore nel punto M:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$

Si dice *curvatura di una linea in un dato punto M,* l'unità di curvatura del suo circolo osculatore in tal punto, cioè la quantità $= \frac{1}{r}$.

54. *In una curva corrente nello spazio*, due de' suoi elementi ds, ds' consecutivi ad un dato punto M determinano il **piano** detto **osculatore della linea nel punto** M. Quando la linea non corre in superficie piana, il piano osculatore varia da punto a punto.

« *La somma di tutte le deviazioni successive de' piani osculatori* si dice **seconda curvatura della linea,** chiamandosi **prima curvatura della linea** *la somma di tutte le deviazioni successive delle sue tangenti.* »

« *La deviazione di due piani osculatori consecutivi ad un punto M*, suol denominarsi **angolo di torsione** della curva nel punto M.

3. *Formole che danno le direzioni della tangente, del raggio osculatore, dell'asse del piano osculatore, e l'angolo di torsione.*

N. B. Nelle proposizioni che seguono, le coordinate x, y, z si suppongono rettangolari.

55. *Teor. I.* **La direzione** *che una curva s ha in un punto qualunque M (x, y, z) si fa nota per le formole*

$$cos.(xs) = \frac{dx}{ds}, \quad cos.(ys) = \frac{dy}{ds}, \quad cos.(zs) = \frac{dz}{ds},$$

dove la lettera s sotto i coseni indica la direzione della curva s nel *punto* M, e ds è sulla curva l'elemento MM' che unisce i due punti consecutivi (x, y, z), $(x+dx, \ y+dy, \ z+dz)$.

Dim. Poichè la proiezione di una retta sopra un asse è uguale alla differenza delle ascisse relative ai punti iniziale e finale della stessa retta (18), le proiezioni dell' elemento ds sugli assi x, y, z saranno

$$dx = ds.cos.(xs), \quad dy = ds.cos.(ys), \quad dz = ds.cos.(zs),$$

donde le formole proposte.

56. *Teor. II. Nel punto $M(x, y, z)$ di una curva s, la* **direzione del raggio osculatore** r che dal punto M va al centro di curvatura, *si ha dalle :*

$$cos.(xr) = \frac{r}{ds}\, d\frac{dx}{ds}, \quad cos.(yr) = \frac{r}{ds}\, d\frac{dy}{ds}, \quad cos.(zr) = \frac{r}{ds}\, d\frac{dz}{ds},$$

dove $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ sono sugli assi x, y, z le proiezioni dell' arco $d\theta = \frac{ds}{r}$ che misura l'angolo di contingenza, e che è parallelo al raggio osculatore r.

Dim. Si prolunghi l' elemento $ds = MM'$ in $M'm = 1$; questa retta $M'm$ (*fig.* 27), siccome $= 1$, avrà per componenti i coseni degli angoli che la sua direzione ds fa coi tre assi coordinati, e però avremo

$$(M'm)_x = \frac{dx}{ds}, \quad (M'm)_y = \frac{dy}{ds}, \quad (M'm)_z = \frac{dz}{ds}.$$

I coseni degli angoli analoghi, relativi alla nuova direzione $M'n$ che prende la curva s nel punto M', saranno espressi dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} (M'n)_x &= \frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}, \\ (M'n)_y &= \frac{dy}{ds} + d\frac{dy}{ds}, \\ (M'n)_z &= \frac{dz}{ds} + d\frac{dz}{ds}. \end{aligned}\right.$$

La linea mn (*fig.* 27) considerata come un arco circolare che ha il centro in M', misurando l' angolo di contingenza, viene espressa da $mn = d\theta = \frac{ds}{r}$, e può riguardarsi come parallela al raggio osculatore r.

D' altra parte, la linea mn e la linea spezzata $mM' + M'n$, essendo linee contermine, cadranno colla stessa proiezione sopra un asse qualsivoglia, ed avendosi

$$mM' + M'n = M'n - M'm,$$

conchiuderemo

$$(mn)_x = (M'n - M'm)_x = d\frac{dx}{ds} = \frac{ds}{r}\cos.(xr),$$

$$(mn)_y = (M'n - M'm)_y = d\frac{dy}{ds} = \frac{ds}{r}\cos.(yr),$$

$$(mn)_z = (M'n - M'm)_z = d\frac{dz}{ds} = \frac{ds}{r}\cos.(zr),$$

ciò che prova il teorema.

57. *Coroll.* Se la curva s corre nel piano (xy), le direzioni della tangente e del raggio osculatore r si avranno dalle

$$\begin{cases} cos.(xs) = \dfrac{dx}{ds}, \\ sen.(xs) = \dfrac{dy}{ds}, \end{cases} \qquad \begin{cases} cos.(xr) = \dfrac{r}{ds}\, d\, \dfrac{dx}{ds}, \\ sen.(xr) = \dfrac{r}{ds}\, d\, \dfrac{dy}{ds}. \end{cases}$$

Inoltre, essendo retto l'angolo (sr), saranno complementarii gli angoli (sx) ed (xr), e per conseguenza sarà

$$\begin{aligned} cos.(xr) &= - sen.(xs), \\ sen.(xr) &= \ \ cos.(xs), \end{aligned} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} cos.(xr) = - \dfrac{dy}{ds}, \\ sen.(xr) = \dfrac{dx}{ds}; \end{cases}$$

Si avverta che l'angolo (sr) si suppone positivo quando si apre nello stesso senso dell' angolo (xy).

Dalla doppia espressione de' valori di $sen.(xr)$, e di $cos.(xr)$ si ricava

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{dx}\, d\, \frac{dy}{ds} = - \frac{1}{dy}\, d\, \frac{dx}{ds}.$$

In quest'equazione il segno $(\pm)$, che è per offrire il secondo membro a operazioni eseguite, serve a indicare in qual senso s' inflette la direzion della curva nel punto (x, y) [inflessione rappresentata da $d\theta = \dfrac{ds}{r}$], vale a dire, se nel senso in cui si suppone essersi aperto l'angolo (xy), ovvero in senso contrario.

Scolio. Quando una curva è data nello spazio, se si determina una delle tre coordinate (x, y, z) di uno de' suoi punti, per esempio la x, si vede (immaginando la figura) che resteranno con essa determinate le altre due. Quindi le coordinate (x, y, z) di un punto generatore di una curva debbono esser vincolate da due equazioni $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, cosicchè data l' una sono da riguardarsi come note le altre due; ovvero debbono dipendere da una quarta variabile per mezzo di tre equazioni. Per più generalità e simmetrìa giova adottare quest' ultima supposizione che comprende anche la prima, e riguardare tacitamente ciascuna delle tre x, y, z come funzione di una quarta variabile indipendente.

58. *Teor. III. La direzione dell'* **asse** *v del piano osculatore (ds, ds') della curva s nel punto (x, y, z), si ha dalle formole*

$$v = ds^2 d\theta = \frac{ds^3}{r}, \qquad \left\{ \begin{aligned} v\cos.(xv) &= dyd^2z - dzd^2y, \\ v\cos.(yv) &= dzd^2x - dxd^2z, \\ v\cos.(zv) &= dxd^2y - dyd^2x. \end{aligned} \right.$$

Dim. A partire dal punto (x, y, z) siano ds, ds' due elementi consecutivi della curva s, de'quali il secondo devii dal primo coll' angolo di contingenza $d\theta$, e siano (dx, dy, dz), (dx', dy', dz') le loro proiezioni rispettive sugli assi coordinati.

Se cogli elementi ds, ds' si costruisce il parallelogrammo $= dsds'd\theta$, l' asse v di questo parallelogrammo cadrà sugli assi x, y, z colle proiezioni (39 e 41)

$$\begin{aligned} v\cos.(xv) &= dydz' - dzdy', \\ v\cos.(yv) &= dzdx' - dxdz', \\ v\cos.(zv) &= dxdy' - dydx'. \end{aligned}$$

Ora essendo

$$ds' = ds + d^2s, \quad d\theta = \frac{ds}{r},$$

ove si trascurino gl' infinitesimi di ordine superiore al terzo, l' espressione $v = dsds'd\theta$ si riduce alla seguente

$$v = ds^2 d\theta = \frac{ds^3}{r}.$$

Inoltre si ha

$$dx' = dx + d^2x, \quad dy' = dy + d^2y, \quad dz' = dz + d^2z.$$

Sostituendo questi valori di dx', dy', dz' nell' espressioni precedenti, esse si mutano nelle proposte.

59. *Coroll.* Quando la curva è tutta situata nel piano xy, allora l'espressione dell'area del parallelogrammo $dsds'd\theta$ somministra (16):

$$ds^2 d\theta = \frac{ds^3}{r} = dxd^2y - dyd^2x .$$

Si ha dunque in generale

$$\frac{1}{r} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3} = \frac{1}{dx}\, d\,\frac{dy}{ds} = -\frac{1}{dy}\, d\,\frac{dx}{ds} .$$

60. *Teor. IV.* L' **angolo di torsione** *di una curva nel punto* (x, y, z), *denotato per* $d\omega$, *si ottiene dalla formola*

$$\frac{ds^2}{r} . d\omega = d^3x.cos.(xv) + d^3y.cos.(yv) + d^3z.cos.(zv) .$$

Dim. I tre elementi ds, ds', ds'' che si succedono sulla curva s a partire dal punto (x, y, z), determinano due piani osculatori (ds, ds'), (ds', ds'') che si segano nella direzione di ds', e che comprendono tra loro l' angolo di torsione $d\omega$.

Essendo $v = \frac{ds^3}{r}$ l'*asse* del primo piano osculatore (ds, ds'), indichiamo per a, b, c le sue proiezioni sugli assi x, y, z, talchè si abbia

$$a = dyd^2z - dzd^2y, \quad b = dzd^2x - dxd^2z , \quad c = dxd^2y - dyd^2x,$$

e per conseguenza

$$adx + bdy + cdz = 0 .$$

Siano v', a', b', c' ciò che diventano le quantità v, a, b, c quando dal primo piano osculatore si passa al secondo (ds', ds''). Sarà

$$v' = v + dv ; \quad \left\{ a' = a + da , \quad b' = b + db, \quad c' = c + dc \right\}.$$

La deviazione degli assi omologhi v, v' de' due piani osculatori essendo eguale a quella di questi piani sarà $= d\omega$ (24).

Ora sulle due rette v, v' prese per lati si costruisca il parallelogrammo $= vv'd\omega$: l' asse di esso si comporrà delle rette espresse dai binomii (39 e 41)

$$bc' - cb' , \quad ca' - ac' , \quad ab' - ba' ,$$

ossia :

$$bdc - cdb , \quad cda - adc , \quad adb - bda .$$

Inoltre, avendo quest' asse la direzione della linea d' intersezione de' due piani osculatori (ds, ds') , (ds', ds'') , cioè di ds', sarà (4)

$$\frac{vv'd\omega}{ds'} = \frac{bdc - cdb}{dx'} ,$$

ossia

$$\frac{v^2 d\omega}{ds} = \frac{bdc - cdb}{dx} .$$

Se qui si sostituisce

$$\begin{cases} db = dzd^3x - dxd^3z , \\ dc = dxd^3y - dyd^3x , \end{cases} \text{ ed } adx = - bdy - cdz ,$$

risulterà

$$bdc - cdb = dx \ (ad^3x + bd^3y + cd^3z) ;$$

dunque

$$\frac{v^2}{ds} d\omega = ad^3x + bd^3y + cd^3z ,$$

dalla quale , ove si sostituisca

$$v = \frac{ds^3}{r} , \quad a = v\cos.(xv) , \quad b = v\cos.(yv) , \quad c = v\cos.(zv) ,$$

nasce subito la formola proposta.

4. *Formole relative : 1°. alla direzion della normale in un dato punto di una superficie curva ; 2°. al piano tangente ; 3°. ed al raggio osculatore delle linee correnti sulla stessa superficie. Applicazione alle curve piane.*

N. B. Quando una quantità N è *funzione di altre quantità* x, y, z etc., cioè *tale che a determinarla sia necessario e sufficiente che vengano determinate le seconde,* si scriverà

$$N = N(x,\ y,\ z,\ \text{etc.})$$

apponendo dopo la quantità N le altre quantità x, y, z, etc. da cui dipende , e che si chiamano *variabili indipendenti.* Così, poichè quando una superficie è data nello spazio, ove siano determinate due delle coordinate (x, y, z) di uno de' suoi punti, per esempio x, y, è necessariamente determinata la terza z (ciò che si rende evidente immaginando la figura), sarà $z = z(x,\ y)$. In generale le coordinate x, y, z, che rappresentano uno qualunque de'punti di una superficie, si debbono riguardar come vincolate da un'equazione per la quale, datene due, si faccia nota la terza.

61. *Teor. I. Essendo data una superficie N per mezzo dell'equazione $N(x,\ y,\ z) = 0$, la* **normale** *n a tal superficie nel punto $(x,\ y,\ z)$ avrà la direzione determinata dalle formole :*

$$cos.(xn) = \frac{1}{n}\,\frac{dN}{dx}\,,\quad cos.(yn) = \frac{1}{n}\,\frac{dN}{dy}\,,\quad cos.(zn) = \frac{1}{n}\,\frac{dN}{dz}\,,$$

$$n = \sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dz}\right)^2\right]},$$

vale a dire: Se, a partire dal punto $(x,\ y,\ z)$ della superficie, si conduce una retta n le cui proiezioni sugli assi coordinati siano espresse da $\frac{dN}{dx}$, $\frac{dN}{dy}$, $\frac{dN}{dz}$, la retta n sarà normale alla superficie nello stesso punto (x, y, z).

Dim. L' equazione $N = 0$ differenziata si muta nella

$$\frac{dN}{dx}\,dx + \frac{dN}{dy}\,dy + \frac{dN}{dz}\,dz = 0\,,$$

per la quale dal punto (x, y, z) si passa ad un altro punto $(x + dx, \ y + dy, \ z + dz)$ infinitamente vicino della superficie N. Sia ds la linea che unisce que' due punti, e che sappiamo esser la risultante delle tre dx, dy, dz; per la proprietà cognita della risultante (11) avremo

$$ds.n\cos.(n, ds) = \frac{dN}{dx}\,dx + \frac{dN}{dy}\,dy + \frac{dN}{dz}\,dz\,.$$

Ora dall' essere il secondo membro $= 0$ si trae $\cos.(n, ds) = 0$, e si fa palese che la retta n è normale alla superficie N nel punto (x, y, z), essendo ivi normale ad ogni linea ds che unisce il detto punto con qualsivoglia altro punto infinitamente vicino della stessa superficie.

62. *Coroll.* Il **piano tangente** *della superficie* $N = 0$ *ha per equazione* :

$$\frac{dN}{dx}\,x' + \frac{dN}{dy}\,y' + \frac{dN}{dz}\,z' = \frac{dN}{dx}\,x + \frac{dN}{dy}\,y + \frac{dN}{dz}\,z\,,$$

nella quale le x', y', z' sono le coordinate del *punto* M' *corrente* pel suddetto piano, e le x, y, z sono quelle del punto M di contatto. Inoltre la perpendicolare p calata dall'origine O delle coordinate sul piano tangente, si avrà dall' equazione

$$n.p = \frac{dN}{dx}\,x + \frac{dN}{dy}\,y + \frac{dN}{dz}\,z\,.$$

Infatti, essendo $OM\cos.(n, OM') = p$, la nota proprietà della risultante (11) esprime che ciascuno de' due membri dell'equazion del piano tangente è $= n.p$.

Così se fosse $N = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1\right) = 0$, sarebbe

$$\frac{xx'}{a} + \frac{yy'}{b} + \frac{zz'}{c} = 1, \quad n.p = 1, \quad n = \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}.$$

63. *Teor. II. Per ciascuna delle linee s che, camminando sulla superficie N, passano pei due punti*

$$(x, y, z) \quad (x + dx, \; y + dy, \; z + dz),$$

si ha

$$\frac{ds^2}{r} n \cos.(nr) = -\left[d\frac{dN}{dx}.dx + d\frac{dN}{dy}.dy + d\frac{dN}{dz}dz\right]$$

dove r è, nel punto (x, y, z), il raggio osculatore della linea s che si considera.

Dim. Differenziando la $dN = 0$, cioè la

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz = 0,$$

nasce la seguente

$$\frac{dN}{dx}d^2x + \frac{dN}{dy}d^2y + \frac{dN}{dz}d^2z = -\left[d\frac{dN}{dx}.dx + d\frac{dN}{dy}.dy + d\frac{dN}{dz}.dz\right],$$

di cui il primo membro si può scrivere sotto la forma

$$ds\left[\frac{dN}{dx}d\frac{dx}{ds} + \frac{dN}{dy}d\frac{dy}{ds} + \frac{dN}{dz}d\frac{dz}{ds}\right].$$

Ma si è trovato più sopra che le tre linee espresse dalle

$$d\frac{dx}{ds}, \; d\frac{dy}{ds}, \; d\frac{dz}{ds},$$

e parallele agli assi x y z, si compongono nella linea $\frac{ds}{r}=d\theta$ parallela al raggio osculatore r. Si avrà dunque per la nota proprietà della risultante

$$\frac{ds}{r}\,n\cos.(nr)=\frac{dN}{dx}d\frac{dx}{ds}+\frac{dN}{dy}d\frac{dy}{ds}+\frac{dN}{dz}d\frac{dz}{ds},$$

e da qui la formola proposta.

64. *Scolio.* Se la direzione del raggio osculatore r si stima positiva in senso contrario a quello che si è supposto, vale a dire, se si stima *positiva* nel senso in cui dal *centro di curvatura* si va al *punto di contatto* (x, y, z), la formola precedente si dovrà scrivere come segue (7):

$$\text{(A)}\qquad \frac{ds^2}{r}.n\cos.(nr)=d\frac{dN}{dx}.dx+d\frac{dN}{dy}.dy+d\frac{dN}{dz}.dz\,;$$

e questa sarà la ipotesi che noi adotteremo nelle applicazioni di questa formola.

Si osservi ancora che, eseguendo la differenziazione indicata, risulta

$$\left\{\begin{aligned} d\frac{dN}{dx}&=\frac{d^2N}{dx^2}dx+\frac{d^2N}{dxdy}dy+\frac{d^2N}{dzdx}dz\,,\\ d\frac{dN}{dy}&=\frac{d^2N}{dy^2}dy+\frac{d^2N}{dydz}dz+\frac{d^2N}{dxdy}dx\,,\\ d\frac{dN}{dz}&=\frac{d^2N}{dz^2}dz+\frac{d^2N}{dzdx}dx+\frac{d^2N}{dydz}dy\,,\end{aligned}\right.$$

e per conseguenza:

$$(A)_1\qquad \frac{ds^2}{r}.n\cos.(nr)=\left\{\begin{matrix}\frac{d^2N}{dx^2}dx^2\\ \frac{d^2N}{dy^2}dy^2+2\\ \frac{d^2N}{dz^2}dz^2\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}\frac{d^2N}{dydz}dydz\\ \frac{d^2N}{dzdx}dzdx\\ \frac{d^2N}{dxdy}dxdy\,.\end{matrix}\right.$$

65 *Teor. III. I circoli osculatori di tutte le curve s che passano pei due punti* (x, y, z), $(x + dx, y + dy, z + dz)$ *della superficie* $N = 0$, *e che però hanno in comune l'elemento* ds, *o la* **tangente**, *appartengono tutti ad una medesima sfera; ed il raggio* R *di questa sfera è dato dalla formola :*

$$(B) \qquad n\frac{ds^2}{R} = d\frac{dN}{dx}.dx + d\frac{dN}{dy}.dy + d\frac{dN}{dz}.dz\,,$$

dove il segno ($\pm$), di cui (in ultimo risultato) sarà affetto il secondo membro, manifesterà se la normale n è diretta o no nel senso del raggio R che dal centro di curvatura va al punto di contatto.

Dim. Fra le curve s che passano pei due punti

$$(x, y, z), \quad (x + dx, y + dy, z + dz)$$

della superficie N, consideriamo quella il cui piano osculatore è normale ad essa superficie nel punto (x, y, z), e sia R il suo raggio osculatore. Per questa curva il primo membro della formola (A) del numero precedente diviene:

$$\frac{ds^2}{R}\,n\,cos.(nR) = \frac{ds^2}{R}\,n\,,$$

purchè si faccia la supposizione, che la normale n sia diretta nel senso del raggio osculatore R che dal centro di curvatura va al punto di contatto, essendo in questo caso $cos.(nR) = 1$. Essendo inoltre $cos.(nr) = cos.(Rr)$, se si paragonano i primi membri delle due formole (A) e (B) che hanno identico il secondo membro, si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{cos.(Rr)}{r}\,,$$

e quindi la relazione

$$r = R\,cos.(Rr)\,,$$

la quale significa che il raggio osculatore r, *obliquo alla superficie* N, è uguale alla proiezione che esso riceve sulla propria direzione dal raggio osculatore R, *normale alla stessa superficie;* e ciò vuol dire eziandio (per una proprietà cognita della sfera) che : *I circoli osculatori delle curve s, le quali sulla superficie N hanno in comune l' elemento ds, si debbono tutti riguardare come sezioni della stessa sfera del raggio R.*

N. B. A quest'ultima proposizione si riduce il *Teorema di Meusnier*, vale a dire : « *Se in un punto di una data superficie, più linee hanno in comune la tangente, ivi i loro circoli osculatori apparterranno tutti ad una medesima sfera.* »

66. *Teor. IV. Allorchè è data una curva piana s per mezzo dell' equazione* $N(x, y) = 0$, *e se ne voglia conoscere nel punto* (x, y) la **normale** n, la **tangente**, ed il **raggio osculatore** r, *basterà ricorrere :*

1°. Per la direzion della normale n alle formole :

$$\left\{\begin{aligned} \cos.(xn) &= \frac{1}{n}\cdot\frac{dN}{dx}, \\ \operatorname{sen}.(xn) &= \frac{1}{n}\cdot\frac{dN}{dy}; \end{aligned}\right. \qquad n = \sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dy}\right)^2\right]};$$

2°. Per la *tangente* all' equazione

$$\frac{dN}{dx}x' + \frac{dN}{dy}y' = \frac{dN}{dx}x + \frac{dN}{dy}y = n.p ;$$

3.° E pel *raggio osculatore* r alla

$$n\frac{ds^2}{r} = d\frac{dN}{dx}.dx + d\frac{dN}{dy}.dy$$

donde

$$\frac{n}{r} = \frac{d^2N}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{d^2N}{dy^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + 2\frac{d^2N}{dxdy}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}.$$

Dim. Tutto ciò si dimostra come nelle proposizioni che precedono, facendo $z = 0$, $dz = 0$.

67. *Coroll.* Quando una curva è data per mezzo dell' equazione $N(x, y) = 0$, le formole più dirette e spedite per iscoprire la *direzion della tangente*, ed il *valore del raggio osculatore* r, saranno:

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{dN}{dy}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{1}{n}\cdot\frac{dN}{dx};$$

$$(2) \qquad \frac{n^3}{r} = \frac{d^2N}{dx^2}\cdot\left(\frac{dN}{dy}\right)^2 + \frac{d^2N}{dy^2}\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 - 2\frac{d^2N}{dxdy}\frac{dN}{dx}\cdot\frac{dN}{dy},$$

nelle quali, per l' esatta interpretazione del segno ($\pm$) degli ultimi risultati, basta aver presente la doppia ipotesi fatta per istabilirle, ed è, che la normale n abbia la direzione del raggio r per cui dal centro di curvatura si va al punto di contatto (x, y), e che l' angolo retto (ns), onde la curva s devìa dalla normale n, si apra nel senso dell' angolo (xy).

Per ottenere le formole (1) e (2) non si ha che da richiamare le (55)

$$cos.(xs) = \frac{dx}{ds}, \quad sen.(xs) = \frac{dy}{ds},$$

e poi osservare che, essendo complementarii gli angoli (nx) ed (xs), si ha

$$cos.(xs) = -sen.(xn) = -\frac{1}{n}\cdot\frac{dN}{dy},$$

$$sen.(xs) = \quad cos.(xn) = \frac{1}{n}\cdot\frac{dN}{dx};$$

ed infine far la sostituzione nella formola ultima del n.° prec.

Esempio. Siano date l' ellisse e l' iperbola per mezzo della doppia equazione

$$N = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0, \quad \text{donde } \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Avremo

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dN}{dx} = \dfrac{x}{a^2}, & \dfrac{d^2N}{dx^2} = \dfrac{1}{a^2}, \\ \dfrac{dN}{dy} = \pm\dfrac{y}{b^2}, & \dfrac{d^2N}{dy^2} = \pm\dfrac{1}{b^2}, \end{array}\right. \quad \frac{d^2N}{dxdy} = 0,$$

$$n = \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)};$$

e l' equazion della tangente sarà

$$\frac{x}{a^2}x' \pm \frac{y}{b^2}y' = 1 = n.p\ ;$$

e dall' equazione (2), cioè dalla

$$\frac{n^3}{r} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^4} \pm \frac{1}{b^2}\cdot\frac{x^2}{a^4} = \pm\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}\right),$$

si avrà il raggio osculatore

$$r = \pm\frac{a^2b^2}{p^3}.$$

Il segno inferiore significa che: nell' iperbola la normale p, che dall' origine O va sulla tangente, è diretta in senso contrario del raggio r che dal centro di curvatura va al punto di contatto.

DEL PRINCIPIO DI PROPORZIONE TRA LE QUANTITÀ VARIABILI.

I. Che devesi intendere per quoto di due quantità della stessa specie? Il quoto di due quantità varia o no al variare dell' unità che le misura? In qual senso possono dirsi uguali le quantità di specie diversa?

68. Per **rapporto, ragione** o **quoto** *di due quantità omogenee A, B,* per esempio di due lunghezze, si deve intendere: *una terza quantità destinata a indicare quale summultiplo dell' una B debbasi prendere, e quante volte ripetere per avere l' equivalente dell' altra A.* Così se fosse

$$\frac{A}{B}=8\,,\quad =\frac{2}{5}\,,\quad =\sqrt{30}\,,$$

nel primo caso il quoto $=8$ indicherebbe che: per avere l' *antecedente A*, si deve prendere il summultiplo massimo del *conseguente B*, cioè lo stesso B, e poi ripeterlo 8 volte; nel secondo caso il quoto $=\frac{2}{5}$ indicherebbe che: per avere A, si deve prendere il subquintuplo di B, ossia la quinta parte di B, e poi ripeterla due volte; nel terzo caso il quoto irrazionale

$$=\sqrt{30}=5{,}4772\ldots.$$

sarebbe destinato a indicare, con approssimazione vicina al vero quanto si vuole, quale summultiplo di B si deve prendere e quante volte ripetere per avere A.

Due quantità si dicono *commensurabili tra loro* quando esiste un' unità di misura summultipla dell' una e dell' altra, e si dicono *incommensurabili* quando è impossibile che esista una tale unità.

Il quoto di due quantità A, B, tra loro incommensurabili, può riguardarsi come **limite** *di un numero razionale.* Infatti prendiamo per unità di misura un piccolissimo summultiplo del conseguente B: il residuo che lascerà l'antecedente A, diviso per tale unità, sarà più piccolo di tale unità; e però, al pari di tale unità, si potrà attenuare al di là di ogni grado assegnato. Così le due quantità A, B cessano di essere incommensurabili, scemandone una di tal parte che si può suppor minore di qualsivoglia comunque piccolissima grandezza; e per conseguenza il loro quoto può riguardarsi come *limite* al quoto di quantità commensurabili, ossia ad un *numero razionale.*

Pertanto: *Il quoto di due quantità* è sempre un *numero, ora intero*, ora *fratto*, ora *irrazionale:* è il numero preso nella sua generalità, e quale fu definito da Newton.

Misurare una quantità è dividerla per l' unità di misura. Tra le quantità dello stesso genere si suole scegliere per unità di misura la più semplice, cioè quella che per esser fissata richiede il minimo numero di *dati*. Così l' unità di lunghezza è una retta, l' unità di superficie è un quadrato, l' unità di volume è un cubo.

Il quoziente di due quantità A, B non varia, variando la grandezza u dell' unità che le misura. Infatti sia

$$\frac{A}{u} : \frac{B}{u} = Q.$$

Si avrà successivamente, per la definizion del quoto,

$$\frac{A}{u} = \frac{B}{u}.Q; \quad A = u.\frac{B}{u}.Q = B.Q, \text{ e però } \frac{A}{B} = Q.$$

Dunque $\frac{A}{u} : \frac{B}{u} = \frac{A}{B}$, qualunque sia la grandezza dell'unità u.

Da qui si raccoglie che, ne' quozienti delle quantità omogenee, il nome ed il simbolo di una quantità può sempre riguardarsi come il *nome* ed il *simbolo* del numero che si ottiene, misurandola colla *medesima unità* onde si suppongono misurate tutte le altre. Così, se $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{M}{B}$ rappresentano quozienti di linee, B si potrà riguardare come simbolo di uno stesso numero in tutti i quozienti.

Se convengasi di non comprendere sotto i nomi ed i simboli delle diverse quantità che i loro rapporti alla rispettiva unità di misura, si potrà dire, senza contraddizione, che una linea è uguale ad una superficie, ad un volume, ad una forza: essendochè ciò si riduce a dire, che *numeri distinti con nomi diversi sono eguali tra loro.*

È palese che al rapporto di due quantità di una specie si può sempre sostituire un eguale rapporto di due quantità di un'altra specie: così al rapporto di due forze, o di due aree si può sostituire un eguale rapporto di due rette. Tutte le quantità di specie comunque diverse si possono adunque, e si sogliono rappresentare con parti dell' *estension lineare*, siccome quella che tra le quantità è *metrica eminentemente*, essendo la sola che ammetta divisioni *facili, distinte* e *permanenti*.

II. Quando due quantità variabili si dicono proporzionali? e quali sono le loro proprietà? Quando una quantità dicesi variare 1°. in ragion inversa di un' altra quantità? 2°. in ragion composta di molte altre? Qual' è la legge che unisce più proporzioni date con tutte quelle che si possono dedurre da esse?

69. *Due quantità variabili* si dicono **proporzionali**, o che **variano in proporzione**, *quando il rapporto di due stati qualunque dell' una è sempre uguale al rapporto degli stati corrispondenti dell' altra.* Così, in un circolo, l' angolo centrale si dice proporzionale all' opposto arco perchè il rapporto di due stati qualunque dell'angolo, ossia di due angoli, si dimostra uguale al rapporto degli opposti archi.

Teor. Se due quantità sono proporzionali, 1°. il rapporto dei loro corrispondenti valori è costante; 2°. e l' una di esse è uguale al prodotto dell'altra per una costante. E viceversa.

Dim. 1°. Denotiamo per X_1, X_2, X_3 etc. diversi stati della prima quantità, e per Y_1, Y_2, Y_3 etc. gli stati corrispondenti della seconda. Dire che le due quantità sono proporzionali è dire che si hanno le relazioni

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2},\quad \frac{X_1}{X_3}=\frac{Y_1}{Y_3},\quad \frac{X_1}{X_4}=\frac{Y_1}{Y_4},\ \text{etc.}$$

Ora in queste proporzioni, se supponiamo (giusta la convenzion fondamentale delle matematiche) che X_1, X_2, X_3 etc. Y_1, Y_2, Y_3 etc. siano numeri esprimenti i rapporti de' diversi stati delle due quantità alla rispettiva unità di misura, si potranno alternare i termini medii, ed otterremo

$$\frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} = \frac{X_3}{Y_3} = \text{etc.} = \frac{1}{a}$$

indicando per a una costante. È adunque provato che se due quantità sono proporzionali, il rapporto de' loro corrispondenti valori è sempre lo stesso.

2°. Da qui s' inferisce che, rappresentando per x, y i valori corrispondenti e variabili delle due quantità, si avrà in generale:

$$y = ax,$$

ove la costante a rappresenta la misura dello stato di y corrispondente ad $x = 1$.

Viceversa: da $y = ax$ si ricava

$$Y_1 = aX_1, \quad Y_2 = aX_2,$$

e quindi

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}.$$

Coroll. Due quantità proporzionali x, y non variano che per gradi proporzionali δx, δy, e viceversa. Imperocchè siffatti gradi non sono altra cosa che stati corrispondenti delle due quantità.

70. *Due quantità z, s, si dicono* **inversamente o reciprocamente proporzionali**, *se l' una z è proporzionale* al **reciproco** *dell' altra*, cioè ad $\frac{1}{s}$; mentre, per opposizione, la proporzionalità si dice **diretta** quando x è proporzionale ad y.

Una quantità U dicesi *variare nella* **ragion composta** *di molte altre s, t, u, v, x, y, z, quando varia in proporzione col prodotto di queste*, e però quando si ha

$$U = a.stuvxyz.$$

71. Date più proporzioni, combinando in diverse guise i loro termini, altre moltissime possono dedursene, le quali perciò si diranno **dedotte** rispetto alle prime che sono le **fondamentali**.

A qual segno si può scoprire la legittimità delle proporzioni dedotte? Per trovarlo, osserviamo che, se in una proporzione

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=q$$

agli *antecedenti* x, y, si sostituiscono i prodotti de' rispettivi *conseguenti* a, b per la *ragione*, o quoto q della proporzione, cioè aq, bq, la proporzione si muta in una identità ($q=q$). Ciò posto:

» *Per riconoscere la legittimità delle proporzioni dedotte, basta prendere dalle singole proporzioni fondamentali il prodotto di ciascun conseguente per la ragione che gli corrisponde, e sostituirlo nelle proporzioni dedotte ovunque si trova il correlativo antecedente* : dopo ciò, *le proporzioni dedotte*, *se sono legittime*, *dovranno trasformarsi in identità.* »

Infatti se, per simile sostituzione, le proporzioni fondamentali divengono identità, identità dovranno divenire ugualmente tutte le nuove proporzioni che da quelle derivano per via di conseguenze necessarie, cioè per via di modificazioni identiche d' identiche ragioni.

Per esempio, date le proporzioni

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

si riconosce subito che da esse derivano legittimamente le seguenti

$$\frac{x}{a}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{\sqrt{(Ax^2+By^2+2Cxy)}}{\sqrt{(Aa^2+Bb^2+2Cab)}},$$

perchè, fatte le sostituzioni indicate ($x=aq$, $y=bq$, $z=cq$), si riducono alla identità ($q=q$).

In modo analogo si dimostra la proposizione seguente :

Un' equazione, omogenea rispetto a certe quantità, non cessa di sussistere se a tali quantità se ne sostituiscono altre rispettivamente proporzionali.

Per esempio , data l' equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = A'yz + B'zx + C'xy,$$

ed inoltre la proporzionalità

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

sarà

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = A'bc + B'ca + C'ab.$$

III. Avvi nessun criterio per conoscere se due quantità variano in proporzione tra loro?

72. *Due quantità, dipendenti l' una dall' altra, si manifestano* **proporzionali** *tra loro a questo segno: « In qualunque stato si considerino, al raddoppiarsi, triplicarsi, quadruplicarsi* etc. *dell' una si dee raddoppiare, triplicare, quadruplicare* etc. *necessariamente anche l' altra. »*

Dim. Alla espressa condizione soddisfacciano le due quantità x, y, le quali (per fissar le idee) supporremo che consistano in un angolo AOB col vertice al centro di un circolo, e nell' opposto arco AB (*fig.* 28). Si tratta di provare, che il rapporto di due stati qualunque X, X_1 della prima quantità x è uguale al rapporto degli stati corrispondenti Y, Y_1 della seconda quantità y; cioè si tratta di provare che, se l' una delle due qnantità non si può raddoppiare, triplicare etc. senza che l' altra si raddoppi, triplichi etc., dee sussistere necessariamente la proporzione

$$\frac{X}{X_1} = \frac{Y}{Y_1}.$$

Sono a distinguere due casi, secondochè gli stati X ed X_1 di x sono commensurabili tra loro od incommensurabili.

1°. Supponiamo che siano ambidue commensurabili dall' unità u, e che u entri m volte in X ed n volte in X_1, onde si abbia $X = mu$, $X_1 = nu$, essendo m ed n numeri interi. Sarà

$$\frac{X}{X_1} = \frac{m}{n}.$$

Sia v lo stato della seconda quantità che corrisponde allo stato u della prima. Quando u diviene mu, nu, v diverrà (per la condizion dell' enunciato) mv, nv. Così i due stati Y, Y_1 della seconda quantità che corrispondono ai due stati $mu = X$, $nu = X_1$ della prima, sono rappresentati eziandio da mv, nv. Dunque $Y = mv$, $Y_1 = nv$, e per conseguente $\frac{Y}{Y_1} = \frac{m}{n} = \frac{X}{X_1}$.

2°. Supponiamo in secondo luogo che X, X_1 siano incommensurabili tra loro. Si rappresentino per δX, δY i residui che lasciano gli antecedenti X, Y, misurati che siano dalle unità u, v, che supporremo *equisummultiple* de' conseguenti X_1, Y_1.

$X - \delta X$, X_1 saranno due stati commensurabili della prima quantità, ai quali corrisponderanno nell' altra gli stati $Y - \delta Y$, Y_1, e si avrà per la conclusion precedente

$$(a) \qquad \frac{X - \delta X}{X_1} = \frac{Y - \delta Y}{Y_1}.$$

Ora le due unità u, v, potendosi ad arbitrio sceglier minori di ogni assegnata comunque piccolissima grandezza, supponiamo che si prendano successivamente più piccole. In questa diminuzion progressiva delle unità u, v, e per conseguenza de' residui δX, δY, i due rapporti (a) (conservandosi sempre uguali) si accosteranno sempre più ai loro *limiti* rispettivi $\frac{X}{X_1}$, $\frac{Y}{Y_1}$. È adunque chiaro che questi limiti, a cui convergono insieme (quasi per toccarli) quantità sempre uguali, sono necessariamente uguali: $\frac{X}{X_1} = \frac{Y}{Y_1}$.

Così è provato in generale che, se due quantità sono in tale dipendenza che l' una non si possa raddoppiare, triplicare etc. senza che si raddoppi, triplichi etc. l' altra, le due quantità saranno proporzionali tra loro.

Coroll. Due quantità x, z saranno *inversamente proporzionali*, se al raddoppiarsi, triplicarsi etc. dell' una x, l'altra z si subduplica, subtriplica etc.; essendo evidente che, in questo caso, sono le due quantità x, $\frac{1}{z}$, che insieme si raddoppiano, triplicano etc., ossia che sono *direttamente* proporzionali. Quindi, se agli stati X, X_1 della prima corrispondono gli stati Z, Z_1 della seconda, sarà

$$\frac{X}{X_1} = \frac{1}{Z} : \frac{1}{Z_1} = \frac{Z_1}{Z},$$

donde $XZ = X_1 Z_1$, vale a dire: *Allorchè due quantità sono inversamente proporzionali, il loro prodotto è costante.*

IV. Avvi nessun criterio per conoscere se una quantità, dipendente da più altre, varia o no in proporzione col prodotto di esse?

73. *Una quantità U, dipendente da più altre (s, t, v, x, y, z etc.), si manifesta in* **proporzione col prodotto di esse** *a questo segno: « La quantità U si dee necessariamente raddoppiare, triplicare etc. con ciascuna delle quantità da cui dipende (s, t, v, x, y, z etc.), allorchè si conservano costanti tutte le altre. »*

Dim. La quantità U, dipendendo dalle quantità s, t, v, x, y, z etc., od essendone *funzione*, si può designare così

$$U = f(s, t, v, x, y, z \text{ etc.}).$$

Per indicare il cangiamento di stato di una qualunque di esse si apporrà un apice alla lettera che la rappresenta.

Sia R il rapporto di due stati qualunque della quantità U, talchè si abbia in generale:

$$\frac{U}{U_n} = R, \quad \text{donde} \quad U = U_n \cdot R,$$

denotando n il numero delle quantità $s, t, v, x, y, z...$ che, a cominciar dalla prima, si concepiscono variate in U. Divisa l'eguaglianza ultima per U_{n-1} diventa

$$(1) \qquad \frac{U}{U_{n-1}} = \frac{U_n}{U_{n-1}} . R .$$

Esaminiamo le conseguenze di questa formola.

1°. Sia $n = 2$. La (1) ossia la

$$\frac{U}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} R$$

equivarrà alla seguente

$$\frac{f(s, t, v, x, y, z....)}{f(s', t, v, x, y, z....)} = \frac{f(s', t', v, x, y, z....)}{f(s', t, v, x, y, z....)} R .$$

In questa formola il primo membro rappresenta il rapporto de' due stati ne' quali si trova U per la variazione della sola quantità s, e però sarà $\frac{U}{U_1} = \frac{s}{s'}$; ed il coefficiente di R rappresenta il rapporto de' due stati ne' quali si trova U per la variazione della sola t, e però sarà $\frac{U_2}{U_1} = \frac{t'}{t}$. La detta formola si riduce dunque alla

$$\frac{s}{s'} = \frac{t'}{t} R , \quad \text{donde } R = \frac{U}{U_2} = \frac{s}{s'} . \frac{t}{t'} ;$$

vale a dire : *se delle quantità $s, t, v, x, y, z....$ le varianti son due, U segue la ragion composta di queste due.*

2°. Sia $n = 3$. Nella formola (1) divenuta

$$\frac{U}{U_2} = \frac{U_3}{U_2} R ,$$

il primo membro rappresenta il rapporto de' due stati ne' quali si trova U per la variazione delle due quantità s, t, e però sarà

$= \frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'}$; ed il coefficiente di R rappresenta il rapporto de' due stati ne' quali si trova U per la variazione della sola quantità v, e però sarà $= \frac{v'}{v}$. Quindi cotesta formola si riduce a

$$\frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'} = \frac{v'}{v} . R, \quad \text{donde } R = \frac{U}{U_3} = \frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'} \cdot \frac{v}{v'} ;$$

vale a dire : *se delle quantità s, t, v, x, y, z etc. le varianti son tre, U segue la ragion composta di queste tre.*

3°. Sia $n = 4$. La formola $\frac{U}{U_3} = \frac{U_4}{U_3} R$ per la conclusion precedente diventa

$$\frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'} \cdot \frac{v}{v'} = \frac{x'}{x} R, \quad \text{donde } R = \frac{U}{U_4} = \frac{s}{s'} \cdot \frac{t}{t'} \cdot \frac{v}{v'} \cdot \frac{x}{x'} .$$

Si vede ormai che l' andamento del raziocinio è sempre lo stesso, e che il proposto criterio è pienamente dimostrato.

Coroll. Essendo U proporzionale al prodotto $stvxyz....$, si avrà in generale :

$$U = a.stvxyz....$$

ove la costante a rappresenta il valore dello stato di U corrispondente ad

$$s = 1 , \quad t = 1 , \quad v = 1 , \quad x = 1 , \quad y = 1 , \quad \text{etc.}$$

Quindi, se convengasi di prendere per unità di misura di U quello stato di U che corrisponde ai valori eguali all' unità rispettiva delle altre quantità s, t, v, x, y, z etc., sarà $a = 1$, ed

$$U = stvxyz.... ,$$

e si potrà dire che : *Una quantità è uguale al prodotto di più altre quando è proporzionale a questo prodotto.*

Scolio. Allorchè tra le quantità s, t, v, x, y, z.... ve ne fosse alcuna, x per esempio, che, ritenendo costanti le altre, seguisse la ragion inversa di U, è palese che nell' ultimo risultato si dovrebbe scrivere invece di essa il suo reciproco $\frac{1}{x} = x^{-1}$, siccome quello che è direttamente proporzionale con U.

Formole per le quali, mediante gl' immaginarii, si passa dalle linee trigonometriche agli esponenziali, funzioni di una stessa variabile, e viceversa. Loro rappresentazione nell' iperbola equilatera ($x^2 - y^2 = 1$).

74. **Teor.** *I. Posto* $i = \sqrt{-1}$, *se si denota per* e *la base de' logaritmi Neperiani, e per* ω *una variabile capace di qualsivoglia valore, si avrà in generale :*

$$(a) \qquad e^{i\omega} = \cos.\omega + i\,\mathrm{sen}.\omega$$

nella quale il primo membro si dee riguardare come **simbolo della funzione** *di* ω **rappresentata dal secondo membro**, *funzione che gode di tutte le proprietà degli esponenziali contenute nelle relazioni*

$$e^a.\, e^b = e^{a+b}, \quad (e^a)^m = e^{am}.$$

Dim. La verità della formola (a) sarà dimostrata in tutta la sua generalità, ove si faccia vedere che essa non esprime altro che una *pura identità*, essendo l' uno e l'altro de' suoi membri il simbolo di una stessa serie convergente. A questo fine osserviamo che, se per u ed ω s' intendano due quantità reali e variabili, l' applicazione del teorema di Taylor somministra le tre serie seguenti, di nota convergenza:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} \dots + \frac{u^n}{1.2.3 \dots n} + \text{etc.}$$

$$\cos.\omega = 1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$\operatorname{sen}.\omega = \omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2 \dots 7} + \text{etc.}$$

Ora si ponga $u = i\omega$ nella prima serie, e nel secondo membro si metta in evidenza i. Si avrà

$$e^{i\omega} = 1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$+ i\left(\omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2 \dots 7} + \text{etc.}\right).$$

Qui l' espressione $e^{i\omega}$ non può aver altro significato che quello di essere *il simbolo della serie* che è nel secondo membro, e che manifestamente è $= \cos.\omega + i \operatorname{sen}.\omega$. E ne segue che questo binomio gode di tutte le proprietà degli esponenziali. Così

$$(\cos.\omega + i \operatorname{sen}.\omega)(\cos.\omega_1 + i \operatorname{sen}.\omega_1) = \cos.(\omega + \omega_1) + i \operatorname{sen}.(\omega + \omega_1),$$

come si può verificare direttamente.

Scolio. Si arriva naturalmente alla identità (a) per mezzo della formola integrale

$$(1) \qquad \int \frac{du}{\sqrt{(1 + u^2)}} = \log.[\sqrt{(1 + u^2)} + u] + C,$$

considerata essa medesima come una identità: C è la costante dell' integrazione.

(Questa formola si trova ponendo

$$\sqrt{(1+u^2)} = z - u\,, \quad \text{donde} \quad 1 = z^2 - 2uz\,,$$

e per conseguente $(z-u)dz = zdu$, $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{du}{z-u}$, ed infine

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)}} = \int \frac{dz}{z} = log.z + C\,, \text{ che è la } (1) \Big).$$

Se nella (1) si fa $u = i\,sen.\omega$, sarà

$$\sqrt{(1+u^2)} = cos.\omega\,, \quad du = i\,cos.\omega.d\omega\,, \quad \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)}} = i\,d\omega\,;$$

e la (1) darà $\int_0^\omega i\,d\omega = log.(cos.\omega + i\,sen.\omega)$, ossia

$$i\omega = log.(cos.\omega + i\,sen.\omega)\,,$$

donde la identità (a).

Coroll. I. Dalla formola (a), cangiando il segno di ω, si raccoglie

$$\begin{cases} e^{i\omega} = cos.\omega + i\,sen.\omega\,, \\ e^{-i\omega} = cos.\omega - i\,sen.\omega\,; \end{cases}$$

e quindi , sommando e sottraendo ,

$$(b)\begin{cases} cos.\omega = \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega})\,, \\ i\,sen.\omega = \frac{1}{2}(e^{i\omega} - e^{-i\omega})\,; \end{cases} \quad \text{e} \quad \Big\{\; i\,tang.\omega = \frac{e^{2i\omega}-1}{e^{2i\omega}+1}\,,$$

formole, per le quali le linee trigonometriche di archi reali si esprimono in funzione di esponenziali immaginarii.

Coroll. II. E queste formole (b) (o piuttosto identità mediante le serie convergenti) se ad ω si sostituisca $i\omega$, diventano

$$(c)\qquad \begin{cases} \cos.(i\omega) = \frac{1}{2}(e^{\omega} + e^{-\omega})\ , \\ -i\,sen.(i\omega) = \frac{1}{2}(e^{\omega} - e^{-\omega})\ ; \end{cases}$$

$$-i\,tang.(i\omega) = \frac{e^{2\omega}-1}{e^{2\omega}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2\omega}+1}\ ,$$

nelle quali le linee trigonometriche dell' arco immaginario $i\omega$ si debbono riguardare come simboli delle funzioni reali di ω rappresentate dai secondi membri , funzioni che godono di tutte le proprietà delle linee trigonometriche degli archi reali.

Inoltre dalle (c) si fa manifesto che le funzioni

$$\cos.(i\omega)\ ,\quad -\ i\,sen.(i\omega)$$

sono quantità *reali, positive* e *crescenti indefinitamente colla variabile* ω , e che ad $\omega = 0$ corrisponde il *valor minimo* dell'una e dell' altra , il quale per la prima è $= 1$, e per la seconda è $= 0$.

75. **Teor.** *II.* Le due quantità $\cos.(i\omega)$, $-\,i\,sen.(i\omega)$ si possono riguardare (*fig.* 29) come l'ascissa $x = OP$ e l'ordinata $y = PM$ di un' iperbola equilatera , e la quantità ω come uguale a due volte l' area del settore iperbolico AOM.

Dim. Posto $x = \cos.(i\omega)$, $y = -\ i\ sen.(i\omega)$, risulta

$$x^2 - y^2 = 1\ ,$$

equazione dell' iperbola equilatera.

Sia dA l' area del settore elementare compreso tra i raggi vettori ρ , $\rho + d\rho$, che dal centro O dell' iperbola vanno ai punti $(x,\ y)$, $(x + dx,\ y + dy)$, inclinando tra loro coll' angolo $d\theta$. Sarà (16)

$$2dA = \rho^2 d\theta = x(y + dy) - y(x + dx) = xdy - ydx\ ,$$

la quale, ove si sostituisca

$$\begin{cases} x = \quad \cos.(i\omega)\ , \\ y = -\ i\,sen.(i\omega)\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = -\ i\,sen.(i\omega).d\omega\ , \\ dy = \quad \cos.(i\omega).d\omega\ , \end{cases}$$

diviene $2dA = d\omega$, ed integrata dal punto A fino al punto M dell' iperbola , produce

$$2A = \omega.$$

76. *Quesito*. Nell'iperbola equilatera $x^2 - y^2 = 1$ (*fig.* 29), trovar l'equazioni che legano due a due le tre seguenti quantità: *raggio vettore* $\rho = OM$, *settore* $AOM = \frac{\omega}{2}$, ed *angolo corrispondente* $\theta = AOM$; delle quali quantità una qualunque trae seco evidentemente la determinazione delle altre due.

Risposta. Si trova

$$(1) \qquad \rho^2 = cos.(2i\omega) ,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} cos.(2i\omega) &= \frac{1}{cos.(2\theta)} , \\ -i\,sen.(2i\omega) &= tang.(2\theta) ; \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} cos.(2\theta) &= \frac{1}{cos.(2i\omega)} , \\ sen.(2\theta) &= -i\,tang.(2i\omega) ; \end{aligned} \right.$$

$$(4) \qquad \left\{ 2\omega = \tfrac{1}{2}\,log.\frac{1+sen.(2\theta)}{1-sen.(2\theta)} = log.tang.(\tfrac{1}{4}\pi + \theta) ; \right.$$

e queste formole si possono riguardare come integrali dell'equazioni differenziali

$$(5) \qquad d\omega = \frac{d\theta}{cos.(2\theta)} , \quad d\theta = \frac{d\omega}{cos.(2i\omega)} .$$

Dim. 1°. Essendo

$$x = cos.(i\omega) , \quad y = -i\,sen.(i\omega) , \quad \rho^2 = x^2 + y^2 ,$$

sarà

$$\rho^2 = cos.^2(i\omega) - sen.^2(i\omega) = cos.(2i\omega).$$

2°. Similmente, essendo $x = \rho\,cos.(\theta)$, sarà

$$cos.^2(i\omega) = cos.(2i\omega)\,cos.^2(\theta) ,$$

la quale, avendo riguardo alla formola trigonometrica

$$2\cos.^2 u = 1 + \cos.2u\,,$$

si riduce a

$$1 + \cos.(2i\omega) = \cos.(2i\omega)\left[1 + \cos.(2\theta)\right]$$

e quindi alla

$$\cos.(2i\omega) = \frac{1}{\cos.(2\theta)}\,.$$

Da questa nascono le (2) e (3) per mezzo delle

$$\cos.^2 u + \mathrm{sen}.^2 u = 1\,, \quad \mathrm{tang}.u = \frac{\mathrm{sen}.u}{\cos.u}\,.$$

3°. La (a), ossia la

$$e^{\pm iu} = \cos.u \pm i\,\mathrm{sen}.u\,,$$

fatto $u = -2i\omega$ si cangia nella

$$(a)' \qquad e^{\pm 2\omega} = \cos.(2i\omega) \mp i\,\mathrm{sen}.(2i\omega)$$

che, guardando alle (2), somministra

$$e^{2\omega} = \frac{1 + \mathrm{sen}.(2\theta)}{\cos.(2\theta)}\,, \quad e^{-2\omega} = \frac{1 - \mathrm{sen}.(2\theta)}{\cos.(2\theta)}$$

donde

$$e^{4\omega} = \frac{1 + \mathrm{sen}.(2\theta)}{1 - \mathrm{sen}.(2\theta)} = \mathrm{tang}.^2(\tfrac{1}{4}\pi + \theta)\,,$$

e quindi la (4).

4.° Differenziando la $\cos.(2\theta)\cos.(2i\omega) = 1$, si ottiene

$$-\,i\,\mathrm{tang}.(2i\omega).d\omega = \mathrm{tang}.(2\theta).d\theta\,,$$

e questa, a cagion delle (2), produce le (5).

Scolio. Si osservi ancora, che dalle

$$e^{\pm\omega} = cos.(i\omega) \mp isen.(i\omega) ,$$

$$x = cos.(i\omega) , \ y = -isen.(i\omega) , \ x^2 - y^2 = 1 ,$$

si ricava

$$e^{\pm\omega} = x \pm y = x \pm \sqrt{(x^2 - 1)} = \sqrt{(1 + y^2)} \pm y ,$$

donde

$$\pm \omega = log.[x \pm \sqrt{(x^2 - 1)}] = log.[\sqrt{(1 + y^2)} \pm y] .$$

PRIME NOZIONI E PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLE SEZIONI CONICHE.

1. *Definizioni, ed equazioni tra i raggi vettori.*

77. Si dicono *sezioni coniche* le diverse curve piane che si possono incidere sopra la superficie di un cono a base circolare. Esse sono di tre specie: l' *ellisse*, l' *iperbola* e la *parabola*.

L'*ellisse* è una curva piana così conformata, che la *somma* delle distanze di ciascuno de'suoi punti M a due punti fissi F, F' (*fig.* 30), chiamati *fochi*, risulta sempre uguale ad una quantità costante $2a$.

L'*iperbola* è una curva piana così conformata, che la *differenza* delle distanze di ciascuno de'suoi punti M a due fochi F, F' (*fig.* 31) risulta sempre uguale ad una quantità costante $2a$.

Ciascuna di queste due curve è adunque generata dal moto di un punto M che scorre in piano siffattamente, che rimanga sempre verificata l' equazione:

$$F'M \pm FM = 2a,$$

valendo il segno superiore per l' ellisse e l' inferiore per l' iperbola. Le due distanze FM, $F'M$ si dicono *raggi vettori* del punto M.

---

2. *Centro, vertici, eccentricità, assi di simmetrìa, dell' ellisse e dell' iperbola.*

78. *Centro* è il punto di mezzo C della linea de' fuochi FF'. Quindi, richiamando il principio della dualità, si ha

$$CF + CF' = 0 = FC + F'C.$$

Vertici sono i punti A ed A' dove la curva taglia la linea de' fochi: la loro distanza è $= 2a$, e sono situati ad egual intervallo dal centro C e però da' fochi F, F'.

Infatti, nell' ellisse abbiamo (*fig.* 30)

$$2a = F'A + FA = (F'C + CA) + (FC + CA) = 2CA,$$
$$2a = A'F' + A'F = (A'C + CF') + (A'C + CF) = 2A'C,$$

donde

$$a = A'C = CA = \frac{A'A}{2};$$

e nell' iperbola (*fig.* 31) abbiamo

$$2a = AF' - FA = (AC + CF') + (AC + CF) = 2AC,$$
$$2a = FA' - A'F' = (FC + CA') + (F'C + CA') = 2CA',$$

donde

$$a = AC = CA' = \frac{AA'}{2}.$$

Eccentricità è la distanza tra il centro C e ciascuno de' due fochi F, F', e si suole rappresentare per ea, talchè si ha

$$ea = \frac{FF'}{2}.$$

Il *coefficiente* $= e$ *dell'eccentricità* sarà un numero minore o maggiore dell' unità secondochè la sezione conica è un' ellisse od un' iperbola. Infatti, come in ogni triangolo, così nel triangolo FMF' il lato FF' è minore della somma degli altri due lati FM, MF', ed è maggiore della lor differenza.

Dunque, nell' ellisse, $F'F < FM + MF = 2a$, cioè

$$2ea < 2a, \text{ e però } e < 1;$$

e nell' iperbola $FF' > F'M - FM = 2a$, cioè

$$2ea > 2a, \text{ e però } e > 1.$$

Sono *assi di simmetrìa della curva* (come apparisce dalla definizione sia dell' ellisse , sia dell' iperbola) 1°. la *linea de' fochi* F, F' ; 2°. *la retta condotta pel centro C perpendicolarmente alla linea de' fochi.*

La linea de' fochi , che si dice primo asse della curva , si suol prendere per asse x, e per asse y l' altro asse di simmetrìa.

---

3. *Equazion polare delle sezioni coniche ; parametro, e parabola.*

79. *Teorema.* Le sezioni coniche sono tutte rappresentate dall' equazione unica

$$(a) \qquad r(1 + e\cos.\omega) = p\,, \quad p = \pm\, a(1 - e^2)\,,$$

chiamata *equazion polare,* dove le coordinate sono : il *raggio vettore* r che da un foco F va al punto corrente M della curva , e l'*angolo* ω onde il raggio vettore FM devia dalla direzione FA dell'asse de' fochi (*fig.* 30 e 31).

Dimostrazione. Per ottenere cotesta equazione , basta cercare ed eguagliare tra loro i valori del raggio vettore $F'M$, dati : l' uno dal triangolo FMF', e l' altro dalla definizione dell' ellisse e dell' iperbola. A questo fine si osservi che, rispetto al triangolo FMF', l'angolo $AFM = \omega$ rimane esterno od interno secondochè si tratti dell' ellisse o dell' iperbola. Da esso triangolo si avrà in corrispondenza , per un teorema noto, la doppia equazione

$$\overline{F'M}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{FF'}^2 \pm 2\overline{FM}.\overline{F'F}\cos.\omega\,,$$

ossia

$$\overline{F'M}^2 = r^2 + 4e^2a^2 \pm 4ear\cos.\omega\,.$$

La definizione delle due curve dà $F'M \pm FM = 2a$, e quindi

$$F'M = 2a \mp r\,.$$

Eguagliando tra loro i due valori di $F'M$, si ottiene

$$r^2 + 4e^2a^2 \pm 4ear\cos.\omega = (2a \mp r)^2 ,$$

donde

$$\pm 4ar(1 + e\cos.\omega) = 4a^2(1 - e^2) ;$$

e dividendo per $\pm 4a$, e ponendo

$$p = \pm a(1 - e^2) ,$$

si conchiude l' equazion proposta

$$r(1 + e\cos.\omega) = p .$$

Scolio I. Si osservi che a $\omega = 90°$ corrisponde $r = p$.

La quantità $2p$, che si chiama *parametro*, equivale dunque ad una corda della curva, condotta per un foco perpendicolarmente al primo asse di simmetria

Scolio II. Si dice *parabola* la curva rappresentata dall'equazione

$$r(1 + \cos.\omega) = p ,$$

ossia da ciò a cui si riduce l' equazion polare (a) per $e = 1$. La parabola è quindi una terza sezione conica, che può aversi come il limite in cui tendono a confondersi l' ellisse e l' iperbola allorchè il numero e, considerato come variabile, si fa convergere verso l' unità.

Così una medesima equazione, l' equazione (a), ossia

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos.\omega) ,$$

rappresenta tutte le sezioni coniche, l' ellisse, la parabola, l' iperbola, secondochè riesca

$$e < 1 , \quad = 1 , \quad > 1 .$$

Inoltre l'ellisse si trasforma in circolo di raggio $r = p$ quando svanisce l' eccentricità, $e = 0$, o quando i fochi si riuniscono nel centro.

4. *Distanze tra i vertici ed un foco F.*

80. Le distanze FA, FA' tra il foco F e i due vertici A, A' dell' ellisse o dell' iperbola (*fig.* 30 e 31) rappresentano i valori del raggio vettore FM per $\omega = 0$, e $\omega = 180°$. Avremo dunque

$$FA = \frac{p}{1+e}, \quad FA' = \frac{p}{1-e}.$$

Nella parabola, essendo $e = 1$, sarà

$$FA = \tfrac{1}{2}p, \quad F'A = \infty, \text{ e di più } a = \frac{\pm p}{1-e^2} = \pm\infty,$$

vale a dire: *nella parabola il centro ed un foco sono situati ad una distanza infinita dal vertice A.*

---

5. *Altra definizione delle sezioni coniche.*

81. *Teorema.* Ciascuna delle tre sezioni coniche è una curva piana generata dal moto di un punto M le cui distanze MF, MQ (*fig.* 32) da un punto fisso o *foco F*, e da una retta fissa o *direttrice DL*, si mantengono sempre in un medesimo rapporto tra loro:

$$\frac{FM}{MQ} = e;$$

e secondochè questo rapporto è inferiore, superiore, od uguale all' unità, la sezione conica sarà un' ellisse, un' iperbola, od una parabola.

Dim. Per mettere in aperto che le curve definite dall' equazione $FM = e.MQ$, sono veramente le tre sezioni coniche, basta far vedere che quest' equazione non è altro che una nuova forma dell' equazione (a).

Dalla considerazione delle diverse posizioni del punto *M*, acconce a verificar l' equazione

$$FM = e.MQ\,,$$

apparisce :

1°. Che la curva da essa rappresentata è simmetrica rispetto alla linea *FD* condotta da *F* perpendicolarmente sulla direttrice : la retta *FD* è adunque un *asse di simmetria ;*

2°. Che la distanza *MQ* diviene uguale ad *FD* quando il raggio vettore *FM* è perpendicolare ad *FD* ; cosicchè, se in questo caso si fa $FM = p$, sarà

$$p = e.FD\,,\ \text{donde}\ FD = \frac{p}{e}\,;$$

3°. Che la distanza *FD* è sempre uguale alla proiezione che riceve sopra di sè dalla linea spezzata $(FM + MQ)$; cosicchè, posto $FM = r$ e l' angolo $DFM = \omega$, sarà

$$FD = r\cos.\omega + MQ\,.$$

Questa formola, ove ad *FD* e ad *MQ* si sostituiscano i loro valori $\frac{p}{e}$, $\frac{r}{e}$ dati dalla relazione $FM = e.MQ$, e poi si moltiplichi per e, si cangia in

$$p = e\left(r\cos.\omega + \frac{r}{e}\right) = r(1 + e\cos.\omega)\,,$$

che è l' equazion polare (a).

Scolio. Ad ogni foco corrispondendo una *direttrice*, l' ellisse e l' iperbola avranno ciascuna *due direttrici*, ed una sola la parabola.

La *parabola* si può definire : Una curva piana di cui ogni punto *M* è situato ad egual distanza da un *foco F* e da una *retta direttrice DL.*

82. *Teor.* Le sezioni coniche sono anche rappresentate dall'equazione

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a} x^2,$$

la quale per la parabola (a causa di $a = \infty$) si riduce a

$$y^2 = 2px;$$

essendo l' origine delle coordinate x, y al vertice A della curva, e l' asse x sulla linea de' fochi.

Dim. Sia FP la proiezione di FM sulla direzione di FA (*fig.*32); sarà

$$FP = FM \cos.\omega,$$

fatto l' angolo $AFM = \omega$. Per ottenere l' equazion proposta, basta cercare ed eguagliare tra loro i valori di FM dati l' uno dall' equazion polare (a), e l' altro dal triangolo FMP.

L' equazion polare

$$p = FM(1 + e \cos.\omega) = FM + e.FP,$$

quando il punto M passa per A, diventa

$$p = FA(1 + e),$$

con che la relazione $FM = p - e.FP$ si cangia nella

$$FM = FA + e(FA - FP) = FA - e(AF + FP),$$

e finalmente nella

$$FM = FA - e.AP.$$

Il triangolo rettangolo FMP, dove $PM = y$, dà

$$\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + y^2 = (FA + AP)^2 + y^2.$$

Eguagliando fra loro i due valori di FM, si ottiene

$$(FA - e.AP)^2 = (FA + AP)^2 + y^2,$$

donde, cangiato l' ordine delle lettere in FA,

$$y^2 = 2(1 + e)AF.AP - (1 - e^2)\overline{AP}^2.$$

Se la direzione dell' asse x si conta positiva nel verso AF, sarà

$$2(1 + e)AF = 2p,$$

e come già si è fatto $p = \pm a(1 - e^2)$, donde $1 - e^2 = \pm \frac{p}{a}$, sostituendo otteniamo

$$y^2 = 2p.\overline{AP} \mp \frac{p}{a}\overline{AP}^2,$$

ovvero, essendo $AP = x$,

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a} x^2.$$

83. *Teor.* L' ellisse e l' iperbola, riferite ai loro assi di simmetria x, y, sono rappresentate dall' equazione

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dove $b^2 = ap$.

Dim. Se la direzione dell' asse x si conta positiva nel verso in cui si va dal centro C al vertice A, si vedrà che le due direzioni CA, AP sono opposte nell' ellisse ed identiche nell' iperbola (*fig.* 30 e 31), e che, in questa supposizione, l' equazione or trovata si dee scriver così:

$$y^2 = \mp 2p.\overline{AP} \mp \frac{p}{a}\overline{AP}^2.$$

Ma ora, essendo $CP = x$, $CA = a$, si ha

$$AP = AC + CP = CP - CA = x - a,$$

dunque

$$y^2 = \mp 2p(x - a) \mp \frac{p}{a}(x - a)^2$$
$$= \pm pa \mp \frac{p}{a} x^2 = \pm b^2 \mp \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

donde, dividendo per $\pm b^2$ e trasportando l' ultimo termine,

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

equazione che si doveva dimostrare.

84. *Teor.* L'area A dell'ellisse si ha dalla formola

$$A = ab\pi .$$

Dim. Siano x_1, y_1 due coordinate, vincolate alle coordinate x, y per mezzo dell'equazioni

$$x_1 = \frac{x}{a}, \quad y_1 = \frac{y}{b}, \quad \text{donde} \quad dxdy = ab.dx_1dy_1 .$$

Per queste relazioni è chiaro che ad ogni punto M determinato dalle coordinate x, y corrisponderà un punto M_1 determinato dalle coordinate x_1, y_1; e che all'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ corrisponderà il circolo $x_1^2 + y_1^2 = 1$ di raggio $= 1$, e però di superficie $= \pi$.

Ora dall'equazione $dxdy = ab.dx_1dy_1$ si ricava, che ogni particella elementare $(dxdy)$ dell'area A dell'ellisse è uguale al prodotto di ab per la particella corrispondente $(dx_1\, dy_1)$ dell'area π del circolo, e che però tutta l'area A è uguale a tutta l'area π moltiplicata per ab, vale a dire: $A = ab\pi$.

---

6. *Forma di ciascuna delle tre sezioni coniche.*

85. *Ellisse.* L'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, somministrando

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} ,$$

fa palese che ad ogni valore di x corrisponde una corda $= 2y$, la quale, se x si allunga al di là de' limiti $+a$, $-a$, è *immaginaria;* per $x = \pm a$, *svanisce*, e però prolungata diviene *tangente;* in appresso, diminuendo x e convergendo verso lo zero, $2y$ *cresce* e nel centro sale alla *massima grandezza* $= 2b$. Si può ripetere lo stesso discorso alternando x, a con y, b. *L'ellisse* adunque è una curva rientrante circoscritta dal parallelogrammo DE costruito sopra i due diametri $2a$, $2b$, ed ha la forma ovale che si vede nella figura 33.

Iperbola. L' equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, somministrando

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)} = \pm \frac{bx}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)},$$

e quindi

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)},$$

fa palese, che ad ogni valore x corrisponde una corda $2y$ la quale, se x si accorcia al di sotto delle lunghezze $+a$, $-a$, è *immaginaria*; per $x = \pm a$, *svanisce*, e però prolungata diviene *tangente;* in appresso, allungandosi l' ascissa x al di là di $\pm a$, la corda $2y$ *cresce* e progredendo verso l' infinito, si avvicina, come a limite, ad essere $= 2 \frac{b}{a} x$, di cui per altro è sempre più corta.

Quindi le due rette $y = \pm \frac{b}{a} x$, che s' incrociano nel centro dell' iperbola, tendendo ambedue a toccarla ad una distanza infinita, ne sono gli *assintoti*. *L' iperbola* dunque si compone di due branche infinite, simmetriche intorno al centro, e contenute dentro gli angoli opposti di due assintoti (*fig.* 34).

Parabola. Dall' equazione $y^2 = 2px$ si rileva subito che la parabola è una curva che stende due rami infiniti e simmetrici intorno all' asse x.

CICLOIDE: sue equazioni, raggio osculatore ed evoluta.

86. *Allorchè un cerchio ruzzola sopra una retta AB (fig. 35), come la ruota di un cocchio sopra una via diritta, la curva che si vien descrivendo da un punto qualunque della periferìa del cerchio si chiama* **cicloide.**

Il *ruzzolare* del cerchio si compone di due moti simultanei, l'uno de' quali è un *moto di rotazione* intorno al centro, e l'altro è *un moto di traslazione* del centro stesso; e se si denota per β la traslazione, per θ la rotazione, e per R il raggio del cerchio, sarà

$$\beta = R\theta ;$$

imperocchè la traslazione β è uguale in lunghezza a quell' arco del cerchio le cui parti si sono applicate successivamente sulla via percorsa, e quest' arco è $= R\theta$.

Ruzzolando il cerchio DnO sopra una retta orizzontale AB, il punto generator della cicloide si consideri nell' istante che si trova alla sommità O del diametro verticale DO, ed in O siano coordinati due assi Ox, Oy, il primo nella direzione OD, ed il secondo parallelo ad AB. A partire da questa posizione, il cerchio DnO compia il moto $\beta = R\theta$, cosicchè il centro C passi nel punto di coordinate $\alpha = R$, $\beta = R\theta$. Quel raggio R che prima era nella direzione CO ora, partendo dal centro (α, β), devierà dalla verticale Ox per l'angolo $= 180^\circ - \theta$, e colla sua estremità segnerà un punto (x, y) della cicloide. Se questo raggio R si proietta sopra i due assi Ox, Oy, le proiezioni saranno

$$x - R = - R\cos.\theta , \quad y - R\theta = R\,\mathrm{sen.}\,\theta ,$$

donde

$$x = R(1 - \cos.\theta), \quad y = R(\theta + \mathrm{sen.}\,\theta) ,$$

che si possono riguardare come le due equazioni della cicloide fra le tre variabili x, y, θ.

Per eliminarne θ, dalla prima di esse si ricavi

$$R\cos.\theta = R - x, \quad R\,\mathrm{sen.}\,\theta = \sqrt{x(2R - x)},$$

e da entrambe differenziate,

$$dx = d\theta \,.\, R\,sen.\theta = d\theta\sqrt{x(2R-x)},$$
$$dy = d\theta.(R + R\cos.\theta) = d\theta(2R-x).$$

Sarà

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R-x}{x}}.$$

Se questo valore si sostituisce nell' equazione

$$ds = dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

si ottiene

$$ds = dx\sqrt{\frac{2R}{x}} = x^{-\frac{1}{2}}\,dx\sqrt{2R},$$

la quale, integrata così che ad $x = 0$ corrisponda $s = 0$, produce $s = 2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2R}$, e quindi

$$s^2 = 8Rx.$$

Ponendo $a = 4R$, avremo

$$s^2 = 2ax, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a-2x}{2x}}.$$

Coroll. Siano A, B due punti consecutivi d'incontro della cicloide colla *base* AB. L'equazione $s^2 = 2ax$, ove si faccia $x = \frac{1}{2}\,a = OD$, darà $s = a = 4R$, ossia $arc.\,OB = arc.\,AO = a$, e però $arc.AOB = 2a = 8R$; vale a dire: « L' intera cicloide AOB è uguale a quattro volte la sua *altezza* DO, diametro del circolo generatore. »

L' origine delle coordinate x, y si voglia non più al vertice O, ma al piede D dell' altezza DO, cosicchè DP (*fig.* 35) rappresenti l' ascissa x, ed in questa supposizione si cerchi ciò che diventano le due equazioni $s^2 = 2ax$, $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a-2x}{2x}}$, cioè le

$$\overline{Om}^2 = 4OD.OP, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2OD-2OP}{2OP}}.$$

Essendo ora $DO = \frac{1}{2}\,a$, e però $OD = -\frac{1}{2}\,a$, non si dee far altro che sostituire in coteste equazioni

$$OP = OD + DP = -DO + DP = -\tfrac{1}{2}\,a + x;$$

e si avrà subito

$$\overline{Om}^2 = -2a\left(-\tfrac{1}{2}a + x\right), \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{-a + a - 2x}{-a + 2x}},$$

ossia

$$\left\{\begin{array}{l} s^2 = a^2 - 2ax = a(a - 2x), \\ \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{2x}{a - 2x}} = \dfrac{1}{s}\sqrt{2ax} = \dfrac{1}{s}\sqrt{(a^2 - s^2)}. \end{array}\right.$$

Quest' equazioni, non contenendo che il differenziale di y, valgono evidentemente anche nel caso che l' origine delle coordinate x, y si ponga nel punto A.

Ritenuta in D od in A l' origine delle coordinate, si cerchi il raggio osculatore r che dal punto (x, y) della cicloide va al centro di curvatura (x_1, y_1); ed appresso l' equazion dell' evoluta.

Da' noti principii abbiamo

$$x - x_1 = r\cos.(xr),$$

e
$$\cos.(xr) = -\operatorname{sen}.(xs) = \frac{r}{ds} d\frac{dx}{ds} = -\frac{dy}{ds};$$

ma
$$sds = -adx, \quad d\frac{dx}{ds} = -\frac{ds}{a}, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{1}{a}\sqrt{2ax};$$

dunque sarà

$$r = -\sqrt{2ax}, \quad \cos.(xr) = -\frac{1}{a}\sqrt{2ax}, \quad x - x_1 = 2x,$$

donde $x_1 = -x$, vale a dire: « Un punto qualunque m della cicloide, ed il centro corrispondente m_1 di curvatura, sono situati ad egual distanza dalla base AB, l'uno al di sopra e l'altro al di sotto. »

Essendo l' arco Am_1 dell' evoluta della cicloide eguale al raggio osculatore mm_1, se si prolunga OD in $DE = -\frac{1}{2}a$, ed in

$$DP_1 = x_1 = -x,$$

l' equazione dell' evoluta sarà

$$\overline{Am_1}^2 = 2ax = 4DE.DP_1.$$

L' evoluta della cicloide è adunque un' altra cicloide il cui cerchio generatore è uguale a quello della proposta.

INDICE DELL' APPENDICE

DEL PRINCIPIO DI PROPORZIONE TRA LE QUANTITÀ VARIABILI.

USO DEGL' IMMAGINARII.

PRIME NOZIONI E PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLE SEZIONI CONICHE.

CICLOIDE.

FINE DELL' APPENDICE.

ERRORI	CORREZIONI
Pag. 34. *lin.* 3. *sal.* ${}^{d}R_{A} = A$	${}^{d}A_{A} = A$
» 52. » 3. *sal.* OM	OM'
» 53. » 8. dove r e	dove r è

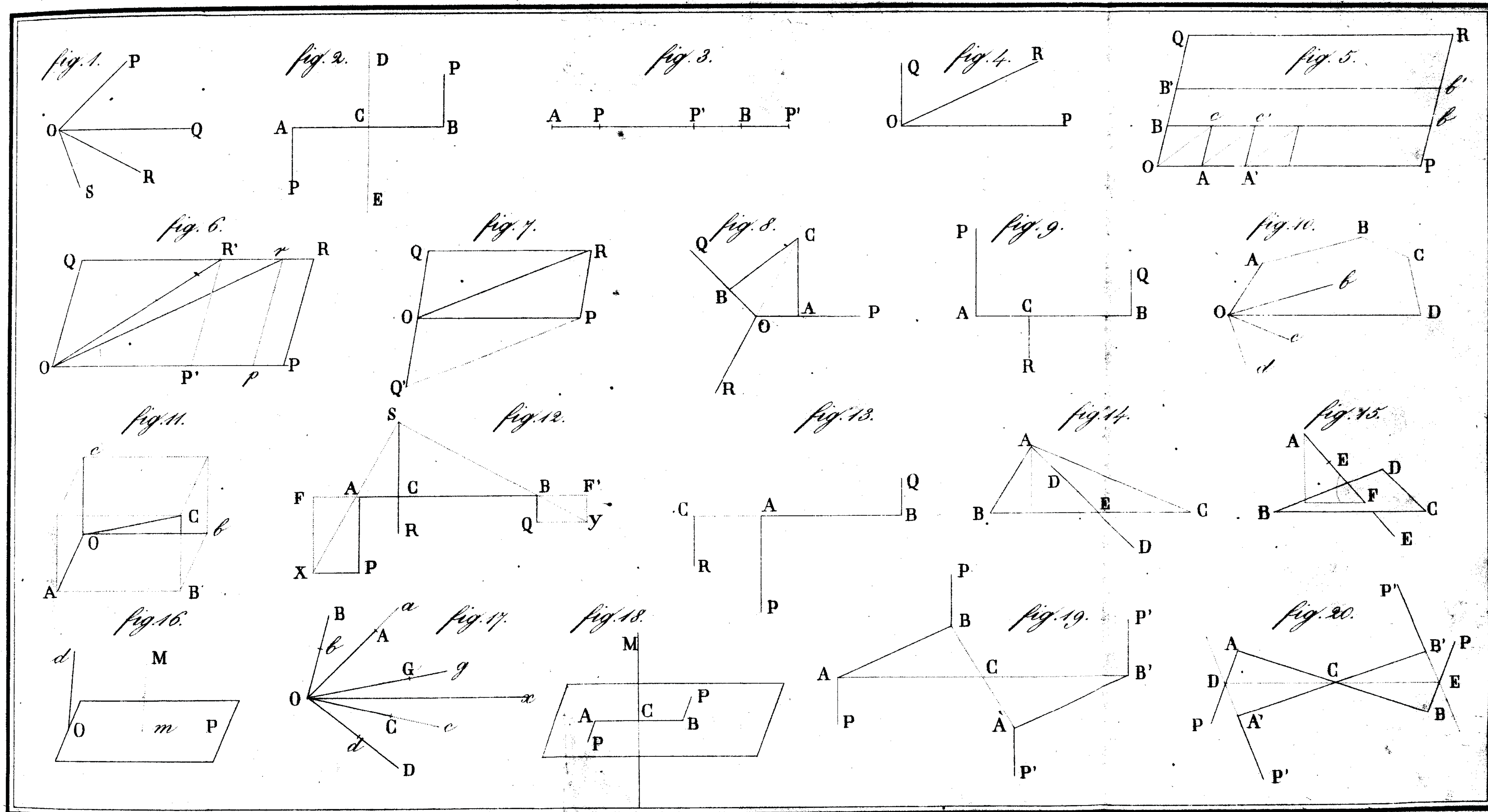

fig. 1. P O Q R S
fig. 2. D P A C B P E
fig. 3. A P P' B P'
fig. 4. Q R O P
fig. 5. Q R B' b' B c c' b O A A' P
fig. 6. Q R' r R O P' p P
fig. 7. Q R O P Q'
fig. 8. Q C B A P O R
fig. 9. P Q A C B R
fig. 10. B A C b O D c d
fig. 11. c C O b A B'
fig. 12. S F A C B F' Q y R X P
fig. 13. Q C A B R P
fig. 14. A D B E C D
fig. 15. A E D F B C E
fig. 16. d M O m P
fig. 17. B a b A G g O x C c d D
fig. 18. M P A C B P
fig. 19. P B P' A C B' A P P'
fig. 20. P' A B' P D C E P A' B P'

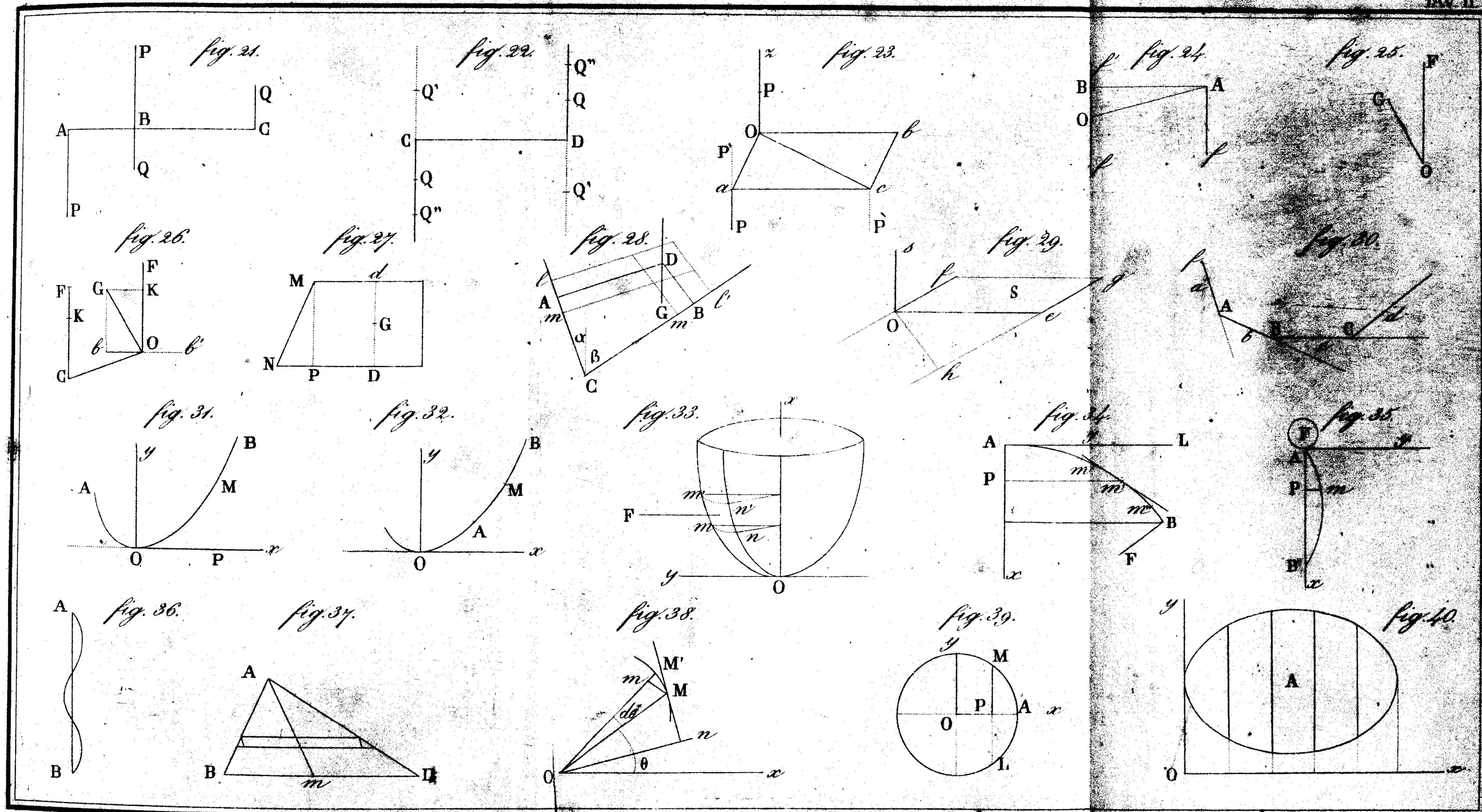
fig. 21.
fig. 22.
fig. 23.
fig. 24.
fig. 25.
fig. 26.
fig. 27.
fig. 28.
fig. 29.
fig. 30.
fig. 31.
fig. 32.
fig. 33.
fig. 34.
fig. 35.
fig. 36.
fig. 37.
fig. 38.
fig. 39.
fig. 40.

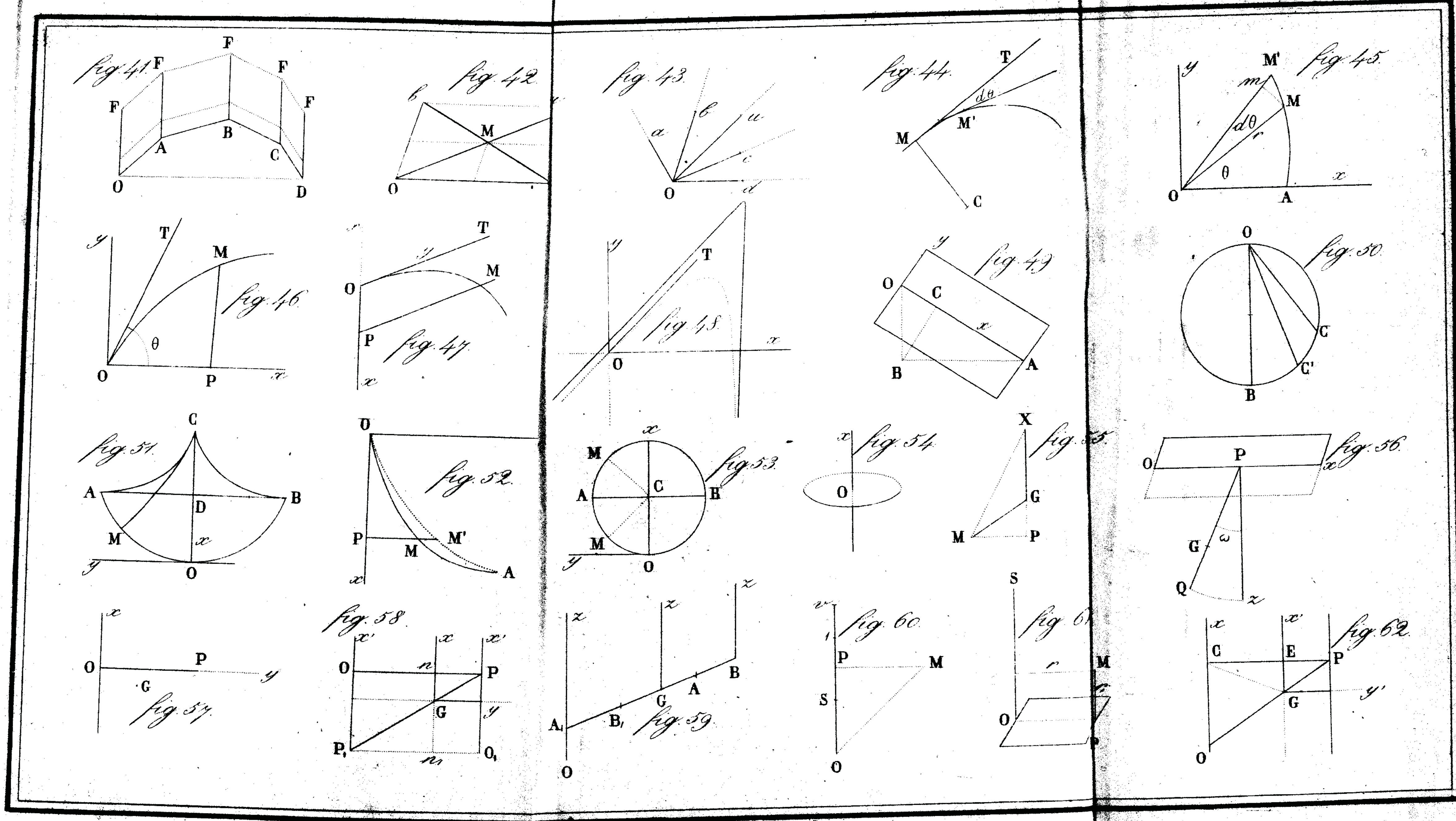
fig. 41
fig. 42
fig. 43
fig. 44
fig. 45
fig. 46
fig. 47
fig. 48
fig. 49
fig. 50
fig. 51
fig. 52
fig. 53
fig. 54
fig. 55
fig. 56
fig. 57
fig. 58
fig. 59
fig. 60
fig. 61
fig. 62

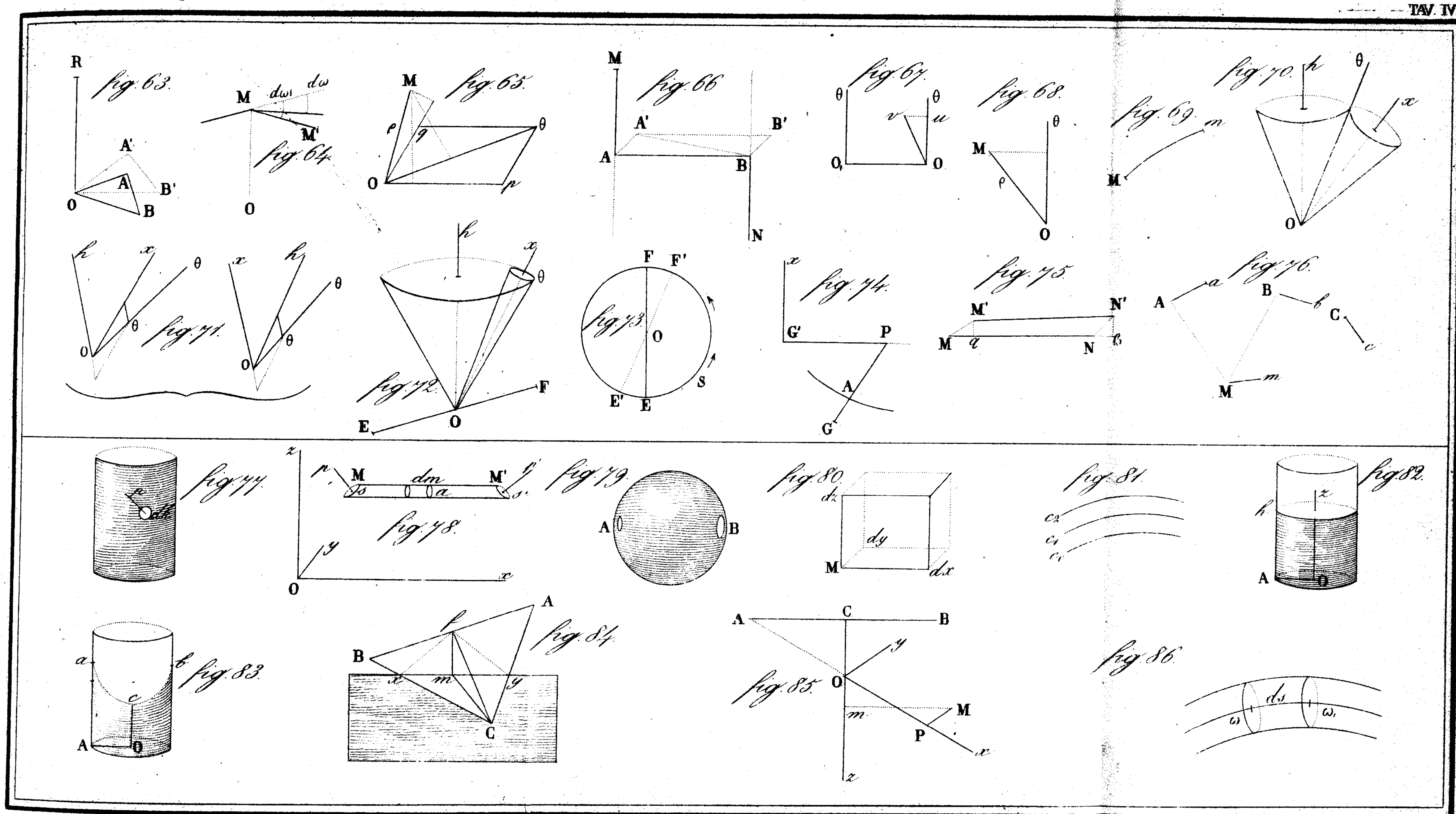
fig. 63.
fig. 64.
fig. 65.
fig. 66
fig. 67.
fig. 68.
fig. 69.
fig. 70.
fig. 71.
fig. 72.
fig. 73.
fig. 74.
fig. 75.
fig. 76.
fig. 77.
fig. 78.
fig. 79.
fig. 80.
fig. 81.
fig. 82.
fig. 83.
fig. 84.
fig. 85.
fig. 86.

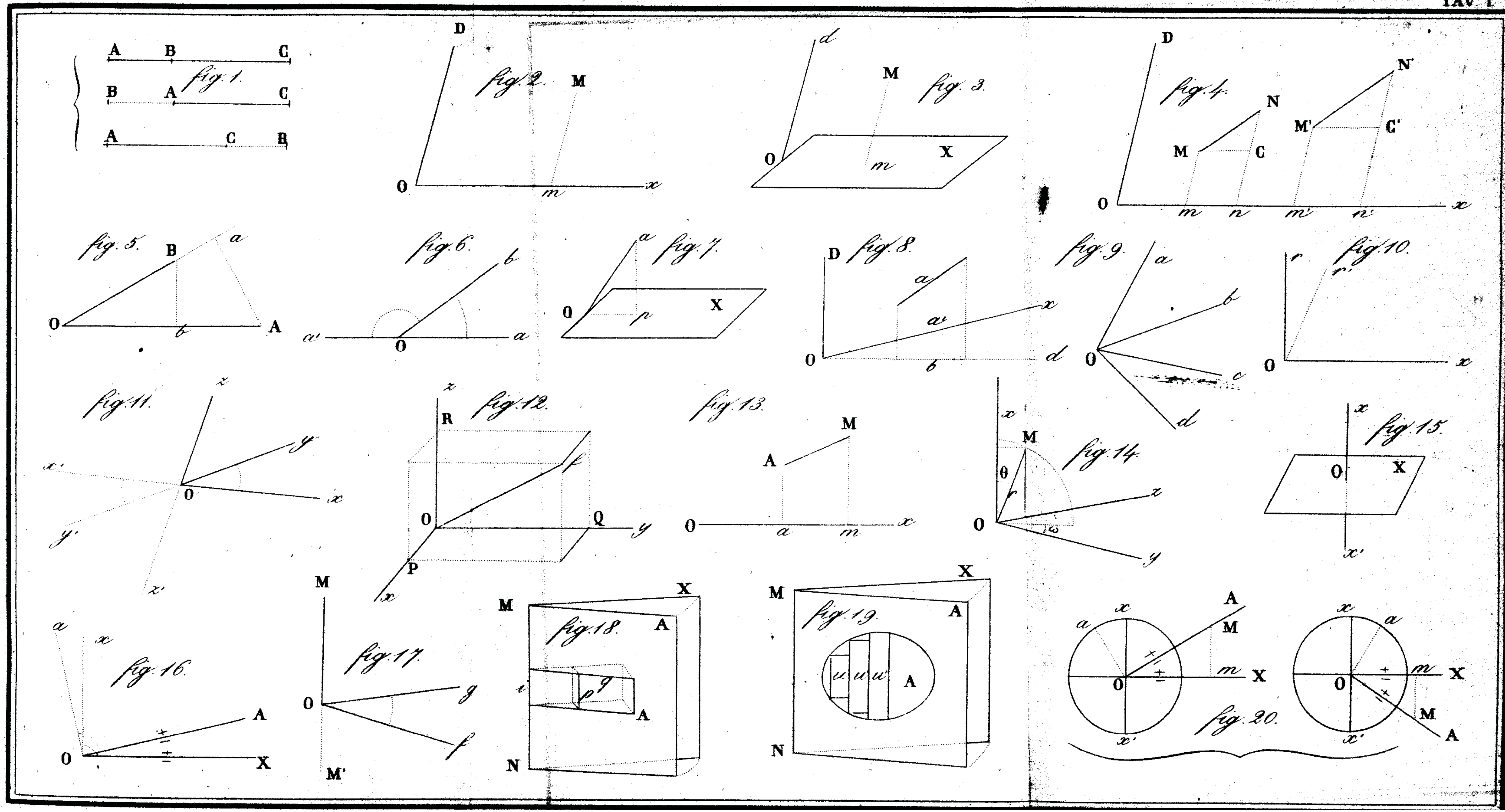
fig. 1.
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5.
fig. 6.
fig. 7.
fig. 8.
fig. 9.
fig. 10.
fig. 11.
fig. 12.
fig. 13.
fig. 14.
fig. 15.
fig. 16.
fig. 17.
fig. 18.
fig. 19.
fig. 20.

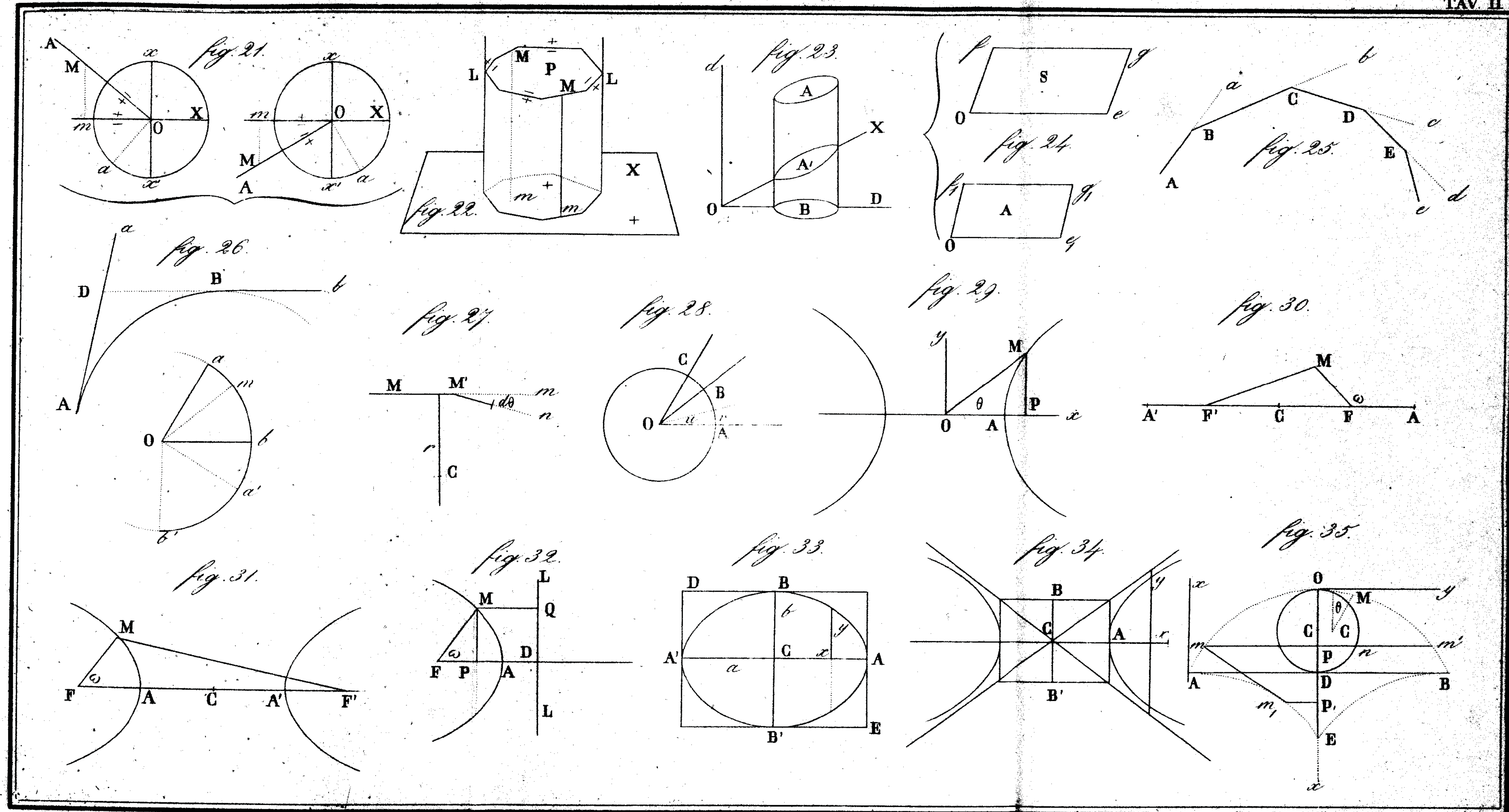
fig. 21
fig. 22
fig. 23
fig. 24
fig. 25
fig. 26
fig. 27
fig. 28
fig. 29
fig. 30
fig. 31
fig. 32
fig. 33
fig. 34
fig. 35